Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France

Nathalie Anwandter-Cuellar

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES DE LANGUEDOC

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Montpellier 2

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Didactique des mathématiques

École doctorale : Information, structures et systèmes

Présentée et soutenue publiquement par

Nathalie ANWANDTER-CUELLAR

le 25 mai 2012

Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France

sous la direction de

Alain BRONNER

JURY

Marianna BOSCH	Rapporteur
Alain BRONNER	Directeur de thèse
Corinne CASTELA	Examinatrice
Gisèle CIRADE	Examinatrice
Brigitte GRUGEON-ALLYS	Examinatrice
Alain MERCIER	Rapporteur

"Gracias a la vida, que me ha dado tanto,
me dio dos luceros que cuando los abro
perfecto distingo lo negro del blanco,
y en el alto cielo su fondo estrellado,
y en las multitudes al hombre que yo amo.

Gracias a la vida, que me ha dado tanto;
me ha dado el oído que en todo su ancho
graba, noche y día, grillos y canarios,
martillos, turbinas, ladridos, chubascos.
y la voz tan tierna de mi bienamado.

Gracias a la vida, que me ha dado tanto;
me ha dado el sonido y el abecedario.
Con él, las palabras que pienso y declaro:
"madre", "amigo", "hermano", y "luz", alumbrando
la ruta del alma del que estoy amando.

Gracias a la vida, que me ha dado tanto;
me ha dado la marcha de mis pies cansados.
Con ellos anduve ciudades y charcos,
playas y desiertos, montañas y llanos,
y la casa tuya, tu calle y tu patio.

Gracias a la vida, que me ha dado tanto;
me dio el corazón, que agita su marco
cuando miro el fruto del cerebro humano,
cuando miro al bueno tan lejos del malo,
cuando miro el fondo te tus ojos claros.

Gracias a la vida, que me ha dado tanto;
me ha dado la risa y me ha dado el llanto.
Así yo distingo dicha de quebranto,
los dos materiales que forman mi canto;
y el canto de ustedes, que es el mismo canto;
y el canto de todos, que es mi propio canto.

Gracias a la vida,
que me ha dado tanto"

(Gracias a la vida, Violeta Parra)

Sommaire

Introduction générale

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier la place et le rôle des grandeurs dans la construction de différents domaines mathématiques, le fonctionnel, le numérique et la géométrie, au niveau de leurs interrelations au collège, ainsi que la constitution d'un domaine des grandeurs.

La place et la fonction des grandeurs ont fortement évolué dans les mathématiques savantes et aussi dans les mathématiques à enseigner. Les grandeurs ont joué un rôle fondamental dans le développement des nombres, du calcul et de la géométrie. Cependant, les bouleversements épistémologiques provoqués par l'évolution des mathématiques, et des sciences en général, ont progressivement éliminé les grandeurs de la construction des ensembles de nombres. Par ailleurs, dans les programmes de 1970, grandeurs et nombres semblent s'être séparés. Les grandeurs ont de quelques façons disparu dans cette période. À partir de 1995, le retour des grandeurs au collège donne une place plus importante à ces notions dans l'enseignement. Aujourd'hui, on retrouve dans les programmes de collège de 2005 la création d'un domaine « Grandeurs et mesures », au même niveau que la géométrie, le numérique, et les fonctions. La nouvelle structuration de ces documents institutionnels engendre un nouveau paquet de conditions et des contraintes auquel les enseignants doivent faire face et qui détermine ainsi de nouveaux traitements pour les grandeurs.

Notre recherche se situe dans la perspective de la théorie anthropologique du didactique. Une analyse épistémologique des savoirs mathématiques relatifs aux grandeurs nous aide à examiner les choix institutionnels et leurs effets sur l'enseignement. Nous complétons ce travail par une étude écologique et praxéologique des programmes, manuels scolaires et des documents institutionnels actuels pour caractériser les rapports institutionnels aux grandeurs. Une méthodologie du type clinique a permis d'analyser le savoir enseigné concernant les grandeurs dans des classes de 6^{e} et 5^{e} en France. L'idée est d'observer la place et le rôle que donnent les enseignants aux grandeurs dans les différents domaines mathématiques en prenant en compte les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement des grandeurs et d'étudier les connaissances actuelles des élèves à propos de ces objets. Nous avons ainsi étudié de manière générale les habitats et les niches de l'objet grandeur dans les progressions mises en place par deux enseignants dans 3 classes de 6^{e} et une classe de 5^{e}. Ces observations nous ont aidés à repérer des dynamiques inter-domaines et internes au domaine de grandeurs en nous conduisant vers deux dynamiques particulières. La première est une dynamique inter-domaines relative aux grandeurs, au fonctionnel et au numérique, laquelle prend comme exemple la proportionnalité. Et la deuxième est une dynamique intra-domaine relative à l'espèce de grandeur aire, laquelle nous sert à étudier le fonctionnement interne des grandeurs au collège.

Chapitre I

Cadre théorique et problématique

Dans ce chapitre, la première partie est dédiée à une revue de travaux en lien avec notre thématique. Certains font état de la mesure ou des grandeurs à l'école primaire et d'autres exposent le statut des grandeurs dans l'enseignement. Ensuite, nous présentons les premiers éléments de notre cadre théorique. Avec ces éléments, nous essayons de construire notre premier outil d'analyse « le filtre des grandeurs ». Ce chapitre nous amène à préciser nos questions sur la place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques aux différents niveaux de savoir (savoir savant, savoir à enseigner, savoir enseigné et savoir appris) et de leurs interrelations au collège.

1. Origine et délimitation du sujet de thèse

Depuis cinq ans je m'intéresse à l'étude des grandeurs, notamment à la grandeur volume. Pour mon mémoire de licence au Chili (Anwandter-Cuellar, 2006), j'ai étudié les conceptions de cette grandeur volume chez les élèves de *cuarto medio* (classe de terminale en France). Ensuite, j'ai continué à travailler sur ce sujet dans mon mémoire de master (Anwandter-Cuellar, 2008), dans le cadre des conceptions des élèves français au collège. C'est dans cette recherche que j'ai découvert le mot même de grandeur, lequel m'était inconnu au niveau des mathématiques pendant toute ma vie au Chili.

Après cette étape initiale de travail sur une espèce de grandeur, j'ai pris conscience de l'importance des grandeurs pour la construction des mathématiques. J'ai ainsi appris que le concept de grandeur est un concept qui a été travaillé depuis les temps anciens. Il a fait l'objet d'évolutions profondes dans les institutions scientifiques liées à nombreuses connaissances mathématiques et il se construit chez les individus dans des processus naturels et scolaires précoces et très longs (Brousseau, 2002). Les grandeurs sont présentes tout au long de l'enseignement en France, et elles interviennent dans la construction de différentes notions mathématiques comme la mesure, les nombres, la proportionnalité, les fonctions, les figures géométriques et également dans le développement du raisonnement géométrique. Cependant, les différents changements suivis par les mathématiques relativement aux grandeurs, notamment la réforme de mathématiques modernes, ont rejeté le concept en dehors des mathématiques. Ces bouleversements ont eu une forte conséquence dans l'enseignement en France. Avant la réforme de l'éducation de 1970, les nombres s'appuyaient aussi sur les grandeurs, mais après cette dernière, l'enseignement des grandeurs et celui des nombres semblent être séparés.

Aujourd'hui, dans les programmes de 2005 du collège, on retrouve une nouvelle structuration des domaines d'enseignement. La création d'un domaine « Grandeurs et mesures », au même niveau que les numérique, la géométrie et les fonctions fait que le travail sur les grandeurs dans l'enseignement devienne une tâche difficile à accomplir. D'une part, le concept de grandeur reste confus, et d'autre part le choix d'une théorie adaptée aux besoins de l'enseignement n'est pas évident, comme nous allons le montrer dans les chapitres suivants.

Nous nous sommes ainsi intéressé au concept de grandeur et sa fonction dans la construction des domaines mathématiques et de leurs interrelations au collège. De nombreux auteurs sont d'accord pour avancer que suite aux évolutions historiques dans les mathématiques et dans l'enseignement, la question du statut actuel des grandeurs dans l'enseignement devient essentielle. On retrouve se questionnement dans la littérature didactique, comme dans les travaux de Chevallard et Bosch (2001) et de Chambris (2008).

Comme nous l'avons dit, la recherche commencée en master (Anwandter-Cuellar, 2008) traitait les conceptions de volume chez les élèves du collège. Plus particulièrement, nous avons regardé les liens que les élèves sont capables de faire entre les cadres numérique et géométrique. Nous avons montré, au moins partiellement, que les élèves présentent des difficultés au niveau de l'articulation des cadres géométrique, numérique et grandeurs dans des situations spécifiques du volume et que la plupart de conceptions des élèves relèvent plutôt d'un cadre numérique. Pour notre thèse, nous avons voulu regarder d'autres niveaux de savoirs, nous souhaitons chercher l'origine d'un tel phénomène, en considérant le savoir savant, le savoir à enseigner, le savoir enseigné et le savoir appris.

Ainsi la question du rôle des grandeurs sera abordée d'une manière plus ample. C'est bien une étude vaste qui est nécessaire au concept de grandeur, comme le signale Brousseau (2002) « les conditions théoriques et pratiques de l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures est typiquement une question de *macro-didactique* dans tous les sens du terme ». Par conséquent, nous avons élargi notre projet de master en examinant les conditions et les contraintes actuelles de l'enseignement des grandeurs et ainsi que l'articulation relativement aux grandeurs entre les différents domaines mathématiques.

2. Etat de lieu des recherches antérieures

La notion de grandeur et les espèces de grandeurs ont fait l'objet de plusieurs études en didactique des mathématiques. Ceci s'explique par le fait de la place significative des grandeurs dans les programmes français depuis plusieurs années. Elles apparaissent à l'école primaire et sont approfondies tout au long du collège. Dans les travaux effectués, les grandeurs sont très souvent abordées en tant qu'objet d'étude en didactique des mathématiques en lien avec la mesure et les nombres. La plupart des recherches sont menées à l'école élémentaire, comme celles de G. Brousseau ou de C. Chambris. Nous rapportons dans cette partie du chapitre quelques synthèses des travaux sur les grandeurs et la mesure qui nous aideront à nous positionner dans notre recherche.

2.1 Les travaux de Chevallard & Bosch sur les grandeurs au collège

Chevallard et Bosch étudient les grandeurs au collège, ils présentent leurs résultats dans deux articles (Chevallard et Bosch, 2000-2001 ; 2002). Dans l'un d'eux, ils caractérisent l'état ancien et actuel des grandeurs au collège ce qui est au centre de notre problématique.

2.1.1 Les grandeurs dans les documents officiels

D'abord, rappelons que les études faites par Chevallard et Bosch sont antérieures aux textes officiels de 2005, année de l'apparition d'un domaine de grandeurs dans les programmes du collège. À cette époque, ils indiquent que les grandeurs sont largement présentes au collège, mais le mot « grandeur » n'apparaît pratiquement pas dans les programmes. Ils signalent aussi la nécessité de réfléchir à certaines questions, comme la définition d'une grandeur ainsi que leur statut dans les mathématiques :

> « Les grandeurs en général, et certaines grandeurs en particulier, ont ainsi une présence insistante dans les programmes du collège. Ce constat ne peut manquer de susciter plusieurs questions. Qu'est-ce, au juste, qu'une grandeur ? La notion de grandeur est-elle une notion mathématique ? Sinon, de quelle discipline relève-t-elle ? Pourquoi devrait-on se préoccuper, en mathématiques, de grandeurs qui, à l'évidence, sont du ressort de disciplines autres que les mathématiques ? » (Chevallard & Bosch, 2000-2001, p. 7)

Les questions posées par les deux auteurs seront d'une certaine manière prises en charge par l'institution scolaire. D'où on verra apparaître en 2007, par exemple, un document d'accompagnement entièrement dédié aux grandeurs. Ce document reprend les mathématiques de grandeurs traitées par Chevallard et Bosch dans le deuxième article (Chevallard & Bosch, 2002) de leur étude. L'un de nos objectifs sera de regarder, d'une manière ou d'une autre, si ces mathématiques sont présentes dans les salles de classe. La création d'un domaine de grandeurs et mesures oblige à une restructuration des connaissances dans ce domaine, mais aussi dans les autres, ce qui nous amène à nous poser les questions suivantes :

Quelles mathématiques pour l'enseignement d'un domaine des grandeurs ? Quels savoirs de référence ? Les professeurs, qui ont été formés dans une période antérieure à ce domaine, comment vont-ils prendre en compte ces changements ?

Chevallard et Bosch, en citant d'Alembert[1], font la distinction entre mathématiques « pures » qui étudient les propriétés de la grandeur, d'une manière abstraite, comme l'arithmétique ou la géométrie, et les mathématiques « mixtes » qui étudient les grandeurs concrètes, comme la mécanique ou l'astronomie. Auparavant, ces deux modèles vivaient ensemble dans les classes du secondaire :

> « L'usage de cultiver de concert mathématiques pures et mathématiques mixtes s'est en effet longtemps maintenu dans le cours d'études secondaires. Longtemps le professeur de *mathématiques* fur en charge de matières qu'on ne songerait plus spontanément, aujourd'hui, à regarder comme sa compétence » (*ibid.*, p. 13)

Mais peu à peu, ils vont se séparer, les mathématiques et l'extra-mathématique vont se démonter. Les auteurs signalent que les programmes de 1995 considèrent les grandeurs comme les objets capables de faire le lien entre le monde réel et les mathématiques :

> « De l'intérieur de la classe de mathématiques, on se préoccupe donc de problèmes qui peuvent être extérieurs aux mathématiques, que ces problèmes relèvent d'une juridiction disciplinaire reconnue (physique, biologie, etc. ou du domaine plus flou, supposé ouvert à tous, de la "la vie quotidienne". Dans tous les cas, alors, l'extra-mathématique fait irruption dans la classe de mathématiques à travers ces points d'appui minimaux de la modélisation que sont les grandeurs » (*ibid.*, p. 8)

Ainsi pour Chevallard et Bosch, la tradition de « mathématiques mixtes », aujourd'hui appelées « mathématiques appliquées », va gouverner au collège à partir de 1995 en prenant comme objets premiers les grandeurs. Néanmoins, Chevallard et Bosch indiquent que même si l'extra-mathématique est présent dans l'enseignement, cela ne représenterait pas la véritable activité dans les classes (*ibid.*, p. 11). Dans cette perspective, il faudra bien regarder la présence des mathématiques appliquées dans l'enseignement notamment de l'extra-mathématique et la place des grandeurs dans ce cadre.

Chevallard et Bosch analysent la position des textes officiels sur les grandeurs dans la construction des mathématiques. D'après eux, on trouve une contradiction sur ce point. Si à partir du XIX[e] siècle les mathématiques se développent sans faire référence aux grandeurs, en ne prenant appui que sur les nombres, dans l'enseignement cette vision des mathématiques n'est pas le chemin à suivre. Actuellement, les mathématiques du collège se construisent à partir des grandeurs, comme cela a été fait dans une ancienne époque. Pour Chevallard et Bosch, c'est une difficulté épistémologique qui explique cette voie :

[1] Article « Mathématique ou Mathématiques » de l'Encyclopédie (1751-1772).

> « Le souci d'authenticité épistémologique semble ainsi conduire à refuser de couper le "produit" mathématique (les mathématiques faites, dans leur forme provisoirement achevée) du *processus historique de mathématisation* qui l'a constitué pour l'essentiel à partir de *non-mathématique* » (*ibid.,* p. 9)

Mais aussi, une difficulté didactique, car « la genèse artificielle des mathématiques que le professeur doit conduire dans la classe peut-elle se dispenser de points d'appui qui furent indispensables à leur genèse historique dans les communautés savantes ? » (*Ibid.*) Pourtant cela n'a pas toujours été le cas, dans une époque ancienne, Chevallard et Bosch observent que dans les manuels scolaires les nombres sont construits à partir de grandeurs, tout l'enseignement est organisé autour des grandeurs :

> « Les manuels destinés autrefois au collège, ou plutôt aux écoles primaires supérieures (EPS), poursuivant le travail de mathématisation engagé à l'école primaire élémentaire. Ce qu'on nomme alors *arithmétique* est tout entier organisé *autour de la notion de grandeur* » (*ibid.,* p. 16)

Mais comme nous le savons, avec la réforme de 1970, grandeurs et nombres vont se séparer, et cette organisation de l'arithmétique changera. Des répercussions se feront sentir dans l'enseignement, par exemple les programmes scolaires antérieurs de 1995 signalent que le travail en mathématiques doit se centrer sur les nombres et non sur les grandeurs : « En mathématiques, on travaille non dans le domaine des grandeurs, mais dans celui des nombres » (C.N.P.D., 1999)

A partir de 2005, les programmes donnent une place plus large aux problèmes de la vie réelle, et ils déclarent l'importance de faire des liens entre les mathématiques et autres sciences. Les textes officiels d'aujourd'hui nous parlent d'organiser et de construire certaines notions mathématiques à partir des grandeurs. Il est donc important d'éclairer la position de la noosphère face aux grandeurs, pour déterminer les fondements qui régissent l'enseignement au collège. Pourrait-on dire que la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » représente un retour dans le temps ? Les nouvelles lignes d'enseignement sont-elles respectées par les manuels et par les enseignants ? Jusqu'à quel point l'extra-mathématique fait-elle irruption dans les classes du collège ?

Nous étudierons ces questions en regardant la place et le rôle des grandeurs dans les nouveaux programmes, dans certains manuels scolaires et dans les pratiques des enseignants.

2.1.2 Obstacles de l'enseignement de grandeurs

L'un des obstacles le plus difficiles à franchir dans l'enseignement est celui des unités selon Chevallard et Bosch. Ils consacrent ainsi une partie de leur article à analyser ce problème.

Ces auteurs dénoncent l'absence des objets support des grandeurs et des unités dans les calculs :

> « Si les "objets" supports des grandeurs sont absents de la classe, les grandeurs pourraient y être présentes aisément sous la forme de "nombres concrets" : 12 km est une longueur, 3 m/h est une vitesse, etc. Or l'enseignement des mathématiques a depuis longtemps fonctionné à cet égard comme un "triangle des Bermudes" : *les unités – et donc – les grandeurs – y disparaissent* » (*ibid.*, p. 21)

Actuellement, on trouve plusieurs techniques pour changer d'unités de mesure, mais la plupart élimine les unités des calculs. D'après les auteurs, l'origine de ce problème est à chercher dans les organisations mathématiques construites en classes. La cause viendrait du manque de technologies disponibles pour résoudre des situations concernant les unités chez les professeurs et en conséquence, chez les élèves :

> « De fait, la difficulté du rapport scolaires aux grandeurs – marqué notamment par une véritable détresse technique en matière de changement d'unités – est surdéterminée par un fait patent : les professeurs français de mathématiques (et de physique) ne disposent pas aujourd'hui d'une *technologie* adéquate relative aux "nombres concrets" qui, notamment, justifie une technique simple, fiable, intelligible de changement d'unités » (*ibid.*, p. 24)

Toujours pour eux, Il s'agit d'un manque au niveau des mathématiques pour l'enseignant, car « c'est en effet une théorie mathématique des unités (et des grandeurs) qui fait actuellement défaut dans la culture de l'enseignement des mathématiques (et des sciences physiques aussi bien) » *(ibid.).*

Dans le deuxième article, Chevallard et Bosch (2002) proposent une théorie de grandeurs adaptée à l'enseignement secondaire selon eux. Cette théorie est reprise par le document d'accompagnement «Grandeurs et mesures » (2007), avec l'objectif de donner des outils technologiques et théoriques aux enseignants. La question se pose de voir dans quelle mesure les professeurs se sont approprié ces outils, et si on peut trouver des traces dans leurs enseignements.

2.2 Brousseau et l'état actuel des grandeurs dans l'enseignement

Plusieurs sont les travaux de Brousseau sur les grandeurs et la mesure. Nous avons choisi trois articles (1991-1992, 2001, 2002) desquels nous extrayons quelques idées essentielles à notre recherche.

2.2.1 L'affaiblissement de l'enseignement de grandeurs

Nous avons choisi deux articles (2001, 2002) de G. Brousseau pour présenter le problème d'affaiblissement de l'enseignement des grandeurs au collège. Le texte de 2001 aborde l'enseignement de façon globale, et celui de 2002 offre une vue générale de l'enseignement des grandeurs au XX^{e} siècle. D'après Brousseau, la crise de l'enseignement de grandeurs est causée essentiellement par deux mouvements, un changement de rattachement épistémologique et l'évolution des technologies :

> « Au cours de la scolarité obligatoire et surtout primaire, l'apprentissage de grandeurs était au siècle dernier à la charge presque exclusive du programme de mathématiques. Or plusieurs processus, principalement deux, menacent de rendre plus difficile l'enseignement de ces connaissances. Ce sont : le changement de rattachement épistémologique consécutif à l'évolution des sciences d'une part et l'évolution des technologies métrologiques et de calcul d'autre part » (Brousseau, 2002, p. 37)

Brousseau dévoile les différentes conséquences que ces deux processus auront sur l'enseignement de grandeurs. Premièrement, les grandeurs sont sorties du domaine des mathématiques, elles ont été envoyées vers d'autres disciplines, notamment, la physique. En effet, l'évolution des sciences cherchait à mathématiser tous les connaissances, les mathématiques vont s'intéresser aux différentes structures algébriques, ainsi les propriétés des grandeurs seront éliminées de l'étude de cette science. Comme conséquence les unités de mesure disparaissent des calculs, l'enseignement va se diriger vers les calculs numériques. La pratique courante des professeurs sera de travailler avec les nombres « abstraits », l'écriture des unités est exclue (Brousseau, 2002).

À partir de 2005, on voit l'intention de faire apparaître les unités dans les techniques de résolution de problèmes comme le montrent les documents ressources :

> « On peut définir l'aire du rectangle comme produit de sa longueur par sa largeur, noté $L \times l$. Le produit de au par bu est alors noté $a\text{u} \times b\text{u}$. Le produit de 1u par 1u est noté $\text{u} \times \text{u}$ ou encore u^{2}. Avec ces notations, le résultat concernant l'aire du rectangle de longueur au et de largeur b u s'écrit : $a\text{u} \times b\text{u} = ab\text{u}^{2}$. Si on prend u = cm, on obtient : $5\text{cm} \times 3\text{cm} = 15\text{cm}^{2}$ […]. Ces calculs fournissent un agréable et efficace substitut aux "tableaux de conversion" pour les unités d'aire » (D.G.E.S.C.O., 2007, p. 22)

Même si les documents officiels introduisent cette nouvelle technique, sont-elles intégrées dans les pratiques des enseignants ?

Deuxièmement, Brousseau explique que la mesure de la plupart des grandeurs passe aujourd'hui par des machines, ainsi les grandeurs mènent immédiatement au numérique. Les manipulations d'objets et grandeurs ne sont pas prises en compte par l'enseignement, c'est pourquoi les élèves sont familiarisés avec les calculs et les nombres, sans toujours comprendre les opérations relatives aux grandeurs. Par exemple, dans notre mémoire de master (Anwandter, 2008), nous avons observé que certains élèves ne font pas le lien entre les mesures des côtés d'un parallélépipède rectangle et la formule pour calculer son volume. Des élèves ne sont pas capables de fabriquer un parallélépipède rectangle d'un volume donné.

2.2.2 *Difficultés de l'enseignement de grandeurs et de la mesure*

Guy et Nadine Brousseau (1991-1992) ont travaillé sur les problèmes de mesurage en cours de l'école primaire, bien que nous nous intéressons au collège, nous pensons que les aspects exposés par G. et N. Brousseau peuvent être exploités dans notre recherche. Nous exposons certains résultats liés à cette notion de mesure, étroitement liée aux grandeurs.

Dans une partie de leur article, ils présentent les problèmes didactiques de la mesure. Ils montrent quelques difficultés de l'enseignement de la mesure. Comme première difficulté, ils signalent la complexité du concept de mesure. Son caractère courant et universel expliquerait la multiplicité de termes relatifs à la mesure :

> « Ce caractère familier et primitif de la notion [mesure] constitue donc un obstacle culturel presque infranchissable pour une clarification du concept selon les usages de la scolarité obligatoire. De nombreuses conceptions de la mesure se sont constituées en obstacles épistémologiques ou contre des obstacles épistémologiques » (Brousseau & Brousseau, 1991-1992, p. 80)

Pour bien analyser l'enseignement de la mesure, il faudrait, d'après les auteurs, distinguer huit « objets » distincts dans les problèmes relatifs à la mesure : les objets, la grandeur, la valeur particulière, une mesure, la valeur de cette mesure, la mesure concrète, le mesurage, l'évaluation des mesures (nous reprendrons ces définitions pour construire un outil méthodologie dans la suite de notre chapitre). Nous pensons que ces confusions de termes indiqués par G. et N. Brousseau à propos de la mesure concernent aussi des confusions liées aux grandeurs. Ainsi, dans l'enseignement les différences entre grandeurs, mesures, objets et nombre (abstrait et concret) ne sont pas évidentes chez les élèves, ni chez les enseignants. Mais quelles sont vraiment ces différences ? Brousseau et Brousseau affirment :

> « Chacun de ses objets appartient à des environnements (milieux) différents, ils suivent des règles différentes et seraient définissables par des situations différentes. Ils sont connus dans des institutions différentes qui les ont dénommés de manières diverses. Ils interviennent tous dans la conception et dans la pratique des mesures » (*ibid.*, p. 83)

Dans notre travail nous cherchons à caractériser dans les institutions où habitent les grandeurs les situations et les règles relatives aux grandeurs pour ainsi déterminer les environnements de ces objets.

Une autre difficulté mentionnée par G. et N. Brousseau est la complexité de la réalisation effective des mesurages :

> « Les difficultés matérielles et conceptuelles attachées à ces pratiques de toutes sortes ont conduit rapidement les enseignants à renoncer à la plupart des activités effectives de mesurage pour se cantonner dans des situations simplifiées ou métaphoriques et dans des activités de calcul » (*ibid.*, p. 80-81*)*.

Comme nous l'avons dit plus haut, les grandeurs ne sont plus mesurées, leur enseignement se centre rapidement sur les formules et les nombres. À l'école élémentaire, on y retrouve encore des pratiques de mesurage pour la longueur, mais au collège, elles ont quasiment disparu. Si les grandeurs font le lien entre les mathématiques et la vie quotidienne, ce rapport est plutôt fictif dans la salle de classe, comme l'expliquent les auteurs :

> « Elles [les pratiques didactiques courantes] ne sont pas effectivement réalisées dans des situations d'action ; si elles sont parfois enseignées, c'est avec un statut faussé. En fait, la pratique de l'élève est inversée par rapport au discours du maître : le mesurage réputé "concret" n'est jamais, en fait réalisé sous contrôle, ni pratiqué » (*ibid.*, p. 85*)*.

Se présente alors pour nous la question : existe-t-il des pratiques liées au mesurage au collège ? Quels sont les éléments qui caractérisent ces pratiques ?

2.3 Chambris et les relations entre les grandeurs et les nombres à l'école primaire

Dans sa thèse, Chambris (2008) étudie les relations entre les grandeurs et les nombres dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire au XX^{e} siècle. Pour commencer, nous éclaircirons les différences et similitudes entre la thèse de Chambris et notre projet de recherche. Premièrement, Chambris étudie l'enseignement à l'école primaire et nous étudions le collège. En plus, nous étudions les grandeurs comme domaine indépendant et leurs relations avec d'autres domaines, elle étudie les relations entre deux domaines les grandeurs et les nombres. Nous nous situons comme Chambris dans un cadre écologique. Dans une partie de sa thèse, elle se centre sur la distance entre le savoir savant et le savoir enseigné relatifs aux grandeurs, nombres et opérations au XX^{e} siècle et les connaissances d'élèves actuels, tandis que nous voulons regarder la vie des grandeurs dans l'enseignement actuel. Ces deux études se présentent complémentaires pour comprendre le domaine des grandeurs dans l'enseignement, hier et aujourd'hui.

2.3.1 L'évolution des grandeurs dans l'enseignement

Les mathématiques modernes ont éliminé les grandeurs de la construction de nombres. Ces changements amènent Chambris à examiner les évolutions des grandeurs dans les programmes entre 1882 et 2002 à l'école élémentaire. Dans son étude, elle repère la création d'un domaine mesure et ses conséquences dans les programmes de 1970, en particulier, la disparition des grandeurs :

> « Il semble assez clair que la création du domaine mesure répond à la volonté de changer la théorie qui sert de référence pour l'étude des nombres et des opérations. Exclure l'étude des grandeurs continues de l'étude de l'arithmétique constitue sans doute la condition pour construire, sans les grandeurs, les nombres non entiers et les opérations » (Chambris, 2008, p.73).

Les opérations sur les grandeurs disparaissent et même le mot grandeur. Les conséquences sur l'enseignement, selon Chambris, seront de deux types. D'un côté en primaire, on ne peut pas travailler sans les grandeurs, ainsi elles continueront à exister de manière implicite en lien avec des problèmes de la vie courante. D'un autre côté, elles seront éliminées de certaines praxéologies, comme celles concernant la proportionnalité et les fractions, lesquelles vont se fonder sur le calcul et sur les nombres.

Chambris signale qu'à partir de 1980, on assistera à l'introduction des grandeurs et du continu dans les instructions officielles de l'école élémentaire. D'une part, il semblerait que ces réintroductions se font au titre de la physique dans le domaine mesure en faisant apparaître la distinction entre grandeurs mesurable et grandeur repérable. D'autre part, ces introductions se font pour des raisons didactiques. Par exemple, Chambris signale qu'à partir de 2002 l'introduction de la langue naturelle et des opérations simples entre grandeurs dans le cadre de l'étude de la proportionnalité est justifiée par l'institution en raison de la prise en compte des « raisonnements personnels des élèves ». Ainsi, on y retrouve des traitements sur les grandeurs comme :

> « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ?, les raisonnements peuvent être du type : pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) (…). Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre […] » (ibid., p. 83)

Cependant, la proportionnalité continue à appartenir à la rubrique « exploitation de données numériques » dans les programmes de 2002 de l'école élémentaire, et ainsi la théorie relative à la proportionnalité relève du numérique. Cela pose alors des problèmes au niveau des organisations mathématiques, car « ceci semble avoir notamment pour conséquence une rupture entre les mathématiques et le didactique : des discours explicatifs et de tâches prescrites ne semblent pas s'inscrire naturellement dans la théorie du numérique » (*ibidem*).

Pour notre étude qui se situe au collège, nous étudions les effets de la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » dans les programmes de 2005, en regardant les conséquences de l'introduction des grandeurs à partir de 1980 à l'école élémentaire, nous nous demandons :

- À quels besoins répond la création de ce domaine ?
- Quelles sont les conséquences écologiques dans le système d'enseignement ?
- Quelles sont les nouvelles praxéologiques ?

- Quelle est la théorie savante des grandeurs que sera transposée dans ces programmes ?
- Quelles associations et ruptures, trouve-t-on, entre les organisations mathématiques et didactiques ?

2.3.2 Quelle théorie de grandeurs pour l'école élémentaire ?

Chambris (2008) distingue entre deux types de savoir : le savoir savant utile à la production de savoirs et le savoir savant « mathématiquement correct » mais qui est adapté à l'enseignement des élèves. Dans sa recherche, elle esquisse des conditions de ce qui pourrait être un savoir savant « mathématiquement correct » pour les grandeurs et les nombres à l'école primaire. Les deux premiers éléments à considérer sont la complexité de la théorie et leur fonctionnalité. Elle doit être appropriée aux élèves de l'école primaire et elle doit satisfaire les besoins technologiques. Chambris a repéré non une théorie, mais plusieurs éléments théoriques nécessaires au travail à l'école élémentaire. Pour questionner le savoir mathématiquement correct, elle repère plusieurs conditions à analyser dans une théorie (Chambris, 2008) :

- La manipulation entre objets et grandeurs : Il s'agit de repérer les éléments de base de la théorie, les grandeurs et les objets, et les rapports entre eux.
- L'existence de petits objets et de petites grandeurs : L'idée d'avoir de petits objets est de construire les nombres non entiers et étudier le continu.
- La construction des nombres : L'objectif est d'observer si la théorie construit les nombres et lesquels.
- La multiplication de grandeurs : On veut savoir quel type de multiplication est défini dans la théorie, si on multiplie une grandeur par un nombre ou des grandeurs entre elles.
- La comparaison d'objets : Grâce aux travaux en didactique, on connaît l'importance de comparer des objets pour apprendre les grandeurs, il est donc essentiel de regarder cet aspect dans les théories.
- Le statut de l'unité : On sait bien que la question de l'unité est problématique dans l'enseignement, et qu'elle est aussi très importante pour l'apprentissage des grandeurs.
- Le traitement de la proportionnalité : Ils existent deux façons de concevoir la proportionnalité, comme des rapports entre nombres ou entre grandeurs, l'objectif est de voir le traitement donné par la théorie à la proportionnalité.

- L'articulation entre l'addition et l'ordre : L'objectif est de connaître les tâches pouvant être traitées par la théorie à ce sujet.

Dans le chapitre suivant, nous mènerons une étude épistémologique des grandeurs. Nous retiendrons quelques conditions signalées par Chambris dans sa thèse qui nous semblent être appropriées pour le collège. Comme nous étudions les liens entre les grandeurs et le numérique, mais aussi entre les grandeurs et la géométrie, et les grandeurs et le fonctionnel, nous avons aussi repéré d'autres aspects à analyser dans la théorie qui fait intervenir les grandeurs. En conclusion, nous nous demandons :

Est-ce que les théories étudiées par Chambris sont aussi adaptées au collège ? Peut-on envisager les mêmes besoins technologiques au collège ? Et les besoins didactiques, seront-ils analogues à l'école élémentaire et au collège ? Sinon, quelles sont les différences ?

3. Cadre théorique

3.1 Théorie Anthropologique du Didactique

Le cadre théorique global dans lequel nous nous plaçons est constitué des éléments de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard (1992, 1999). Puisque cette théorie est largement connue dans la communauté de la didactique des mathématiques, nous faisons le choix de ne présenter que les aspects que nous mettrons en œuvre dans la suite de notre travail et que nous préciserons au cours de chaque étude.

3.1.1 Les notions de rapport personnel et de rapport institutionnel

Dans le cadre de la TAD, nous trouvons des termes primitifs objet, individu et institution qui fondent le modèle construit par Chevallard. Le *rapport personnel* d'un individu x à un objet de savoir o désigne le système, noté $R(x, o)$, de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o. Lorsqu'une personne entre dans une institution I, x devient sujet de I en position p. On appelle *rapport institutionnel* au rapport d'un individu x à l'objet o en position p, et on note $R_I(p, o)$.

3.1.2 La notion de praxéologie

Dans la théorie anthropologique, que x connaisse un objet O, signifie que x a un rapport avec lui. Pour observer ce rapport, il faut regarder ce que x fait avec l'objet o, d'où il apparaît les notions de *type de tâches*, de *technique*, de *technologie*, de *théorie*.

> « Pour espérer observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet *o*, il faut, si je puis dire, observer l'individu *x* ou l'institution *I* « dans son rapport à *o* », dans les activités de *x* ou de sujets de *I* qui « activent » *o*. […]. Un objet *o* est mobilisé dans l'exécution d'une certaine tâche *t* lorsqu'on effectue cette tâche selon une certaine technique τ relative au *type T* sous lequel l'institution où la tâche *t* s'accomplit la pense » (Chevallard, 2003)

Une praxéologie est un quadruplet T, τ, θ, Θ : T qui désigne un type de tâches (formé d'un ensemble de tâches spécifiques) ; τ désignant une technique que l'on peut appliquer pour la réalisation des tâches appartenant à T, θ une technologie, un discours qui justifie l'adéquation de la technique à la réalisation des tâches de T. Enfin Θ désigne une théorie qui elle peut servir à justifier le discours technologique. Ce type de structure, appelée *praxéologie ponctuelle*, est rencontré rarement de manière isolée. Généralement, en une institution *I* donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θj, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τij correspondant à *autant de types de tâches* Tij. Les organisations ponctuelles vont ainsi se grouper, d'abord en *organisation locales*, [Ti/τi/θ/Θ], constituées autour d'une technologie *θ* déterminée. Ensuite en *organisations régionales*, [Tij/τij/θj/Θ], centrées sur une même théorie Θ. Finalement, les organisations régionales peuvent s'articuler au sein d'une organisation *globale* amalgamant plusieurs ensembles théoriques [Tijk/τijk/θjk/Θk].

3.1.3 Ecologie des savoirs

Un objet « O » ne peut pas vivre de façon isolée, il est nécessaire qu'il prenne place dans des praxéologies mathématiques :

> « Pour qu'un objet O émerge dans un écosystème didactique, il est nécessaire qu'existe un milieu pour cet objet, c'est-à-dire un ensemble d'objets connus avec lesquels O viendra se mettre en interrelation. Cette condition est à mettre en rapport avec une condition citée plus haut, la loi du tout structuré, dont je rappelle l'énonce : un objet mathématique ne peux pas exister seul ; il doit venir prendre place dans une organisation mathématique qu'il faut faire exister » (Artaud, 1997, p.124)

Les différents lieux où t'on trouve cet objet constituent les *habitats* et les fonctions qu'il remplit au sein des habitats constituent les *niches*.

Une organisation mathématique ne se réalise pas dans un vide d'œuvres (Chevallard, 2002). Pour modéliser le questionnement de l'existence de praxéologies, Chevallard élargit le cadre en intégrant ce qu'il appelle les *niveaux de codétermination didactique* (Chevallard, 2002).

À l'intérieur de la discipline des mathématiques, à chaque praxéologie mathématique ponctuelle lui correspond un *sujet d'étude* relatif au type de tâches dans l'enseignement. Ce type de tâches fait partie des tâches prescrites dans un *thème d'étude*, auquel lui correspond une praxéologie mathématique locale. Cette organisation mathématique est à la fois partie d'une organisation mathématique régionale, un *secteur d'étude*. On trouve comme dernier niveau une organisation mathématique globale relative à un *domaine d'étude*. Les domaines se regroupent autour d'une discipline, dans ce cas, les mathématiques. Aux niveaux supérieurs, on rencontrera les échelons de la *Pédagogie*, de l'*Ecole*, de la *Société* et de la *Civilisation*. Pour analyser les contraintes qui déterminent l'existence d'une organisation mathématique dans une institution I, nous utilisons cette échelle :

> « La raison de ce quasi-interdit se trouve dans les *contraintes* qui structurent les différents niveaux de détermination. Plus complètement, chaque niveau impose, à un moment donné de la vie du système éducatif, un ensemble de contraintes et de *points d'appui* : l'écologie qui en résulte est déterminée à la fois par ce que les contraintes interdisent ou poussent en avant, et par l'exploitation que feront les acteurs des points d'appui que les différents niveaux leur offrent » (Chevallard, 2002)

Une étude écologique demande donc de repérer les habitats et les niches des grandeurs en termes des niveaux de codétermination.

3.1.4 Ostensifs et non-ostensifs

On peut distinguer entre deux classes d'objets les ostensifs et les non-ostensifs au niveau des praxéologies. La première classe est constituée d'objets matériels, ces sont les objets qui peuvent être manipulés (un mot, un symbole, etc.). Par contre les non-ostensifs sont des objets abstraits comme les concepts ou les idées. Bosch et Chevallard (1999) indiquent l'importance des ostensifs dans l'activité mathématique, car le remplacement d'un ostensif par un autre peut modifier complètement le développement de l'activité. Nous nous intéresserons particulièrement à la légitimité théorique dans la manipulation de certains ostensifs, comme les symboles pour les unités ou les dessins d'objets géométriques. Mais, nous caractériserons aussi les pratiques des enseignants relativement aux grandeurs à travers des non-ostensifs qui semblent être utilisés.

3.2 Le filtre des grandeurs

Nous nous inspirons des travaux de Bronner (1997, 2007) sur les domaines du numérique et de l'algébrique. Dans son travail d'HDR (Habilitation à Diriger de Recherches), Bronner cerne le numérique, en identifiant des différents composants, comme : les organisations mathématiques et didactiques, les contrats institutionnels de calcul, les objets, les raisons d'être du numérique et dynamiques intra et inter-domaines mettant en jeu le numérique. Avec ces éléments, il élabore un outil, *le filtre du numérique.* D'un point de vue méthodologique, nous empruntons les éléments de cette grille pour construire un *filtre des grandeurs*. À travers de cet instrument, nous voulons délimiter et caractériser *le domaine des grandeurs* au collège.

3.2.1 *Le concept de cadre et les dimensions outil et objet des grandeurs*

D'après Régine Douady un cadre « est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations » (Douady, 1986). Les cadres sont les domaines mathématiques mobilisés pour exprimer et travailler les traductions d'un problème. Ces transpositions donnent souvent naissance à de nouveaux résultats, à des nouvelles techniques, à la production de nouveaux objets mathématiques, lesquels enrichissent les cadres où se produisent ces mêmes transpositions, selon la théorie de Douady (1986). Néanmoins, selon cette idée, l'on se retrouve dans l'obligation de définir les objets et les relations qui font des grandeurs un cadre. Nous nous sommes donc interrogés sur l'existence d'un cadre des grandeurs. Peut-on considérer un cadre « grandeurs » ou bien est-ce que les grandeurs sont seulement des outils qui habitent dans d'autres domaines ?

À partir de la distinction générale introduite par Régine Douady (1984) entre la dialectique *outil/objet* pour les concepts mathématiques, nous proposons une organisation du savoir de grandeurs autour de deux dimensions principales :

Premièrement les grandeurs ont une dimension outil, car elles servent de moyens pour résoudre des problèmes émergeant de plusieurs contextes : la vie quotidienne, les mathématiques et des disciplines autres que les mathématiques.

Deuxièmement, les grandeurs sont un objet d'étude pour les mathématiques, car elles forment un ensemble structuré autour d'objets, d'opérations et de comparateurs dotés de propriétés, de modes de traitement (règles algébriques, découpage-recollement, …) de modes de représentations permettant ces traitements (figures, nombres concrets, graphiques, …).

De ce point de vue, dans notre recherche nous considérons que les grandeurs peuvent former un cadre mathématique, mais qui reste toujours à expliciter et limiter en fonction de l'institution et de ces besoins.

3.2.2 *Une typologie des problèmes relative aux grandeurs*

Dans mon mémoire du master (2008), nous avons élaboré une typologie de problèmes relative au concept du volume. À cette époque, nous avons pu identifier plusieurs grandes classes de tâches pouvant être proposées aux élèves. Nous nous sommes basés sur la classification des situations-problèmes relatives au concept d'aire des surfaces planes proposée par Moreira-Baltar (1994-1995). Certaines de ces catégories sont transférables aux grandeurs géométriques en général, nous avons ainsi créé un premier volet de genre de tâches pour le collège. Une étude plus approfondie des organisations mathématiques sera développée tout au long de ce travail. Dans cette partie, nous présentons quelques exemples de praxéologies :

- Genre de tâches T_1 : Comparer des grandeurs.

Pour comparer des grandeurs géométriques, les élèves peuvent utiliser deux types de procédures, numériques et géométriques.

Les procédures numériques

- Comparaison de mesures

Pour comparer la grandeur de deux objets, on peut comparer leurs mesures. L'invariant sur lequel repose ce type de procédure est que l'ordre établi pour les mesures est le même que pour la grandeur. Les mesures des grandeurs peuvent être réalisées au moyen de l'application des formules de calcul. On peut aussi obtenir les mesures au moyen du comptage du nombre d'unités nécessaires pour recouvrir la grandeur (si cela est possible).

Les procédures géométriques

- Inclusion ou superposition (si cela est possible)

La procédure de comparaison par inclusion est un processus empirique (concret, matériel) possible seulement dans certaines circonstances. Par exemple, pour le volume, on peut comparer le volume de deux boîtes si on peut mettre l'une dans l'autre. La propriété en jeu est la monotonie, si un solide est contenu dans un autre, son volume est plus petit que celui de l'autre.

- Découpage – recollement

Si un objet O est obtenu à partir d'un autre O' par découpage- recollement, alors O et O' ont même grandeur (la réciproque n'est pas toujours vraie). Le processus de découpage-recollement considère la grandeur comme une notion indépendante de l'objet et la mesure.

- Comparaison des éléments constitutifs de la figure

Les comparaisons se font à l'intérieur d'une même famille d'objets. Il s'agit de problèmes où, pour comparer les grandeurs, on est amené à comparer des autres éléments ou d'autres grandeurs. Par exemple, les connaissances en jeu sont du type « deux prismes droits qui ont la même base et la même hauteur ont le même volume ».

Dans ce type de problème, la formule de calcul joue un rôle fondamental, mais la fonction des formules n'est pas un moyen de calcul, mais plutôt une traduction littérale des propriétés géométriques.

- Genre de tâches T_2 : Calculer une grandeur.

Nous présentons des exemples de procédures pouvant être mises en place par les élèves :

- Procédure du calcul d'une grandeur par l'usage de formule de calcul

On calcule la mesure de la grandeur d'un objet usuel à l'aide d'une formule de calcul.

- Procédure par recouvrements

Dans le cas de l'aire, on dit qu'une surface S est pavable avec une surface s si on peut remplir S avec un nombre entier n de copies de s sans laisser des trous et sans chevauchement. Dans les opérations de pavage, le pôle géométrique est très important, puisque la possibilité de pavage effectif dépend de la forme de l'objet choisi.

- Procédure par mesurage

D'après N. et G. Brousseau (1991-1992) « Effectuer un mesurage est la réalisation concrète d'une suite de sortes de divisions où les diviseurs successifs sont les unités décroissantes utilisables et où les dividendes sont les restes successifs ». Le mesurage permettra de déterminer pour un objet un nombre et un intervalle d'incertitude. Pour effectuer un mesurage, on utilise des outils comme une équerre, une balance, etc.

- Genre de tâches T_3 : Étudier les effets des déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'une des grandeurs d'un objet
- Pour ce genre de tâches, on peut distinguer plusieurs types de problèmes :
  - Variation d'une grandeur au cours de transformations géométriques

Les grandeurs géométriques sont invariantes par isométrie, autrement dit si on applique une isométrie à un objet, sa grandeur se conserve.

- Optimisation d'une grandeur sous contraintes

Ce sont des problèmes du type, « trouver le plus grand volume pour une aire fixée ». Dans ces types de problèmes, il est nécessaire de distinguer les grandeurs qui interviennent. Les connaissances qui peuvent être mises en œuvre sont celles qui interviennent dans les formules de calcul des grandeurs.

- Multiplication par un facteur k des grandeurs linéaires d'un objet

Il s'agit de déterminer l'effet de la multiplication des grandeurs linéaires d'un objet par un facteur k, Ainsi :

- pour la longueur cet invariant est k,
- pour la surface l'invariant est k^2,
- alors pour le volume l'invariant est k^3.

▪ Genre de tâches T_4 : Produire un objet d'une grandeur donnée.

On peut demander aux élèves de construire ou dessiner un objet de même grandeur qu'un autre objet ou d'une grandeur déterminée. Pour ce faire, ils pouvaient utiliser les procédures suivantes :

- Le comptage du nombre d'unités

Cette procédure est liée aux procédures du type pavage dans les problèmes de mesure d'une grandeur. Elle est justifiée du point de vue mathématique par la propriété selon laquelle une fois choisie l'unité de mesure, des objets de même mesure ont la même grandeur. Ainsi l'élève peut faire le passage de la mesure (cadre numérique) à la production d'un objet (cadre géométrique).

- Découpage – recollement

Elle repose sur l'additivité des mesures des grandeurs et l'invariance de la grandeur par isométrie.

- Formule et opérations

Si la grandeur est donnée à l'aide d'un nombre avec une unité, on peut essayer de déterminer numériquement les éléments qui interviennent dans la formule associée à la grandeur et à l'objet et construire un objet caractérisé par ces valeurs numériques.

▪ Genre de tâches T_5 : Produire un objet de grandeur plus grande ou plus petite que la grandeur d'un objet donné.

Les procédures associées à ce genre de tâches peuvent être les suivants :

- Construire un objet à l'intérieur (ou à l'extérieur) de l'objet de départ.

Cette procédure est justifiée par la propriété de monotonie, si un objet O est contenu dans un autre objet O', la mesure de la grandeur de l'objet O est inférieure ou égale à la mesure de la grandeur de l'objet O'.

- Découper (ou ajouter) un morceau à l'objet de départ.

Cette procédure se justifie également par la propriété de monotonie.

- Calculer les mesures

Elle consiste à calculer la mesure de la grandeur de l'objet de départ et à produire un objet de grandeur plus grande ou plus petite.

- Genre de tâches T_6 : Donner la mesure d'une grandeur dans une autre unité.

Dans ce type de problème, le cadre numérique est davantage plus sollicité que le cadre géométrique. Il est possible que la géométrie soit même absente. Les changements d'unités prennent en compte les formules associées à chaque relation entre les unités. Il existe différentes techniques pour résoudre ces types de problèmes, par exemple l'utilisation d'un tableau de proportionnalité ou le calcul direct sur les unités.

Nous développerons ces praxéologies pour chaque espèce de grandeur tout au long de notre travail.

- Genre de tâches T_7 : Mesurer une grandeur

A l'aide des instruments de mesure, on peut donner la mesure concrète approchée de la grandeur d'un objet. Dans ce genre de tâches interviennent les objets, les grandeurs, la mesure approchée et les instruments de mesure. Au collège, l'instrument de mesure le plus utilisé est la règle, ainsi on peut mesurer, généralement en centimètres, des longueurs. Mais on peut aussi utiliser des unités de mesure non-conventionnelles. Par exemple, on peut choisir comme unité de mesure l'aire d'un carré pour mesurer l'aire d'une surface.

3.2.3 *Les pratiques d'évaluation de grandeurs*

Pour identifier les pratiques à propos des grandeurs, nous nous basons dans les travaux de N. et G. Brousseau (1991-1992) et le groupe BAHUJAMA[2] (2000). Ces auteurs se sont intéressés aux problèmes de mesurage que nous essayons de transposer à l'univers des grandeurs. En nous inspirant des travaux de Bronner (2007) sur le numérique, nous avons choisi une tâche générique T : *Évaluer une grandeur*. Elle nous servira à étudier les conditions et contraintes qui pèsent dans une institution I donnée, à un instant institutionnel n donné. L'idée est de regrouper des procédures et traitements pour les genres de tâches décrites auparavant. Nous voulons donc expliciter les types de pratiques d'évaluation d'une

[2] Le groupe BAHUJAMA (Barcelona, Huesca, Jaén, Madrid) est composé par P. Bolea, M. Bosch, J. Garcia, J. Gascon, L. Ruiz et T. Sierra.

grandeur associées à ces genres de tâches, en étudiant leur fonctionnement interne et externe, les objets qui interviennent et leur fonction dans l'enseignement.

Le mot « évaluer » est utilisé au sens large, comme une estimation ou un jugement de la valeur d'une grandeur, elle peut être, par exemple, numérique ou comparative, et exacte ou approchée.

Nous faisons une catégorisation des pratiques d'évaluation d'une grandeur, à partir des deux univers de la mesure et du mesurage identifiés par Brousseau et Brousseau :

> « L'univers de la mesure et du mesurage met en présence au moins deux domaines assez clairement séparés par les élèves, même si ce qui les distingue reste flou :
> Le domaine des objets concrets et des grandeurs avec leur environnement de propriétés et manipulations
> Le domaine des nombres et son environnement de calcul » (Brousseau & Brousseau, 1991-1992, p. 84)

Pour décrire les pratiques en termes de praxéologies, nous distinguons entre les pratiques d'évaluation *numérique* d'une grandeur, les pratiques d'évaluation *géométrique* d'une grandeur et les pratiques d'évaluation *par mesurage* d'une grandeur. La première sera attachée aux pratiques relatives aux nombres et au calcul, à travers les mesures, la deuxième aux pratiques relatives aux objets géométriques (ou concrets) et les grandeurs et la troisième au mesurage. Même si elles se présentent souvent mélangées, cette différenciation va nous permettre de faire une modélisation, et ainsi nous fournir des outils d'analyse plus spécifiques.

- La pratique d'évaluation géométrique d'une grandeur

Dans ces types des pratiques, on va rencontrer deux éléments principaux, les objets, géométriques et concrets, et les grandeurs avec leurs propriétés.

Évaluer revient à considérer les grandeurs comme classes d'équivalence, et de les comparer dans cette perspective, on ne recourt pas à la mesure pour faire ces comparaisons. Les procédures associées seront très variées et situées plutôt dans un cadre géométrique. Ainsi, on trouvera les procédures de découpage-recollement, l'encadrement géométrique, la superposition, la comparaison d'éléments constitutifs entre les objets sans faire appel aux mesures. Les consignes liées à la tâche seront de démontrer quelle grandeur est plus grande (ou plus petite) et de démontrer que deux grandeurs sont égales. D'autres types de tâches seront liés aux opérations entre grandeurs, comme par exemple, additionner deux longueurs ou diviser une aire en trois.

- La pratique d'évaluation numérique d'une grandeur

Les pratiques d'évaluation numériques reposent d'une part des non-ostensifs et ostensifs des pratiques géométriques, mais de manière complémentaire. Et d'autre part, nous trouvons comme non-ostensifs principaux ceux liés aux nombres et à la mesure, mais aussi, les opérateurs et les comparateurs. Il s'agit d'évaluer une grandeur en utilisant sa mesure. Les procédures associées aux différents types de tâches de calcul d'une grandeur, peuvent s'appuyer sur l'utilisation d'une formule. On peut aussi trouver le type de tâches de comparaison de grandeurs, mais contrairement à la pratique géométrique, les procédures seront numériques, en comparant directement des nombres.

Les types de tâches de changements d'unités peuvent être considérés comme l'évaluation d'une grandeur en deux systèmes de mesure différents.

L'évaluation étant considérée aussi comme un calcul, aboutissant à l'obtention d'un nombre, on peut utiliser les catégories des pratiques du numérique introduites par Bronner (2007). Nous répartissons les pratiques d'évaluation numérique d'une grandeur en :

- Pratiques d'évaluation numérique exacte d'une grandeur

Dans ce type de pratiques, les principaux non-ostensifs sont les nombres et les opérateurs. Il se développe dans des procédures relatives aux formules de calcul, souvent en lien avec la proportionnalité entre deux grandeurs. Le traitement de calcul s'effectue conformément à ce que Bronner appelle une pratique de calcul exact.

- Pratiques d'évaluation numérique approchée d'une grandeur

Dans ce type de pratiques, on trouve des procédures liées, par exemple à l'encadrement numérique où on trouve l'intégrale de Riemann ou l'approximation par polygones entre autres.

▪ Pratique d'évaluation par mesurage

Ces sont les pratiques associées à l'évaluation matérielle d'une grandeur d'un objet, en déterminant la mesure concrète approximée. Par exemple, la capacité d'une bouteille est de 50 cl ± 1 cl. Les procédures s'appuient en l'utilisation d'instruments de mesure, mais aussi sur des procédures comme le pavage. Par exemple, on peut demander à un élève de calculer la masse d'un objet avec une balance. Dans ce type de pratique interviennent les objets, les grandeurs, la mesure approchée et les instruments de mesure.

3.2.4 Les éléments du domaine grandeurs

Nous présentons ici les objets de l'univers de la mesure identifiés par G. et N. Brousseau (1991-1992) :

a. Le système d'**objets** S(Oi) est constitué par des objets Oi mesurable de deux types : Les objets (ostensifs) concrets (un ballon, une bouteille) et les objets (non-ostensifs) géométriques (un triangle, un cylindre) ;

b. **La grandeur** est un ensemble de propriétés communes à plusieurs espèces de grandeurs particulières. Chaque espèce de grandeur est déterminée par l'ensemble d'objets mesurables pour laquelle il existe une propriété d'addition et une relation d'équivalence entre les objets par rapport au type de grandeur ;
c. La **valeur particulière** assignée à chaque objet sans tenir compte du système utilisé pour la quantifier. La valeur particulière d'un objet Oi est la classe d'équivalence que définit un type de grandeur sur le système d'objets ;
d. Les **fonctions-mesure** sont des applications additives de l'ensemble d'objets dans l'ensemble des nombres réels positifs. À chaque unité correspond une fonction-mesure différente relative au même (type de) grandeur ;
e. La valeur d'une fonction-mesure ou l'**image** d'une fonction mesure est le nombre réel positif qui corresponde à la mesure à chaque objet Oi ;
f. La **mesure** ou nombre concret est le couple formé par l'image et l'unité de mesure.

Dans notre recherche, nous nommerons « mesure » ce qui est défini par les auteurs comme image et nous utiliserons le terme « grandeur mesurée » pour nous référer au couple image avec l'unité. Il est clair que pour décrire une pratique d'évaluation géométrique, on doit au moins analyser les objets a,b,c et que pour une pratique d'évaluation numérique les analyses seront centrées sur d,e,f. Mais ce que nous intéresse, c'est plutôt les interrelations qui vont se produire entre ces deux types de pratiques :

> « Les rapports entre ces deux domaines [les pratiques] jouent un rôle important dans les représentations épistémologiques scolaires mathématiques. Ils servent de support à une conception culturelle sur les rapports entre la théorie et la pratique enseignée implicitement à l'école. Les élèves se déterminent psychologiquement par rapport à ces rapports officiels et aux rapports personnels qu'ils établissement à l'occasion des activités de ce genre » (Brousseau & Brousseau, 1991-1992, p.84)

Pour comprendre ces rapports, nous caractérisons les praxéologies des grandeurs par des systèmes de divers éléments que nous allons préciser :

- L'ensemble des objets

Comme nous l'avons dit, nous distinguerons entre deux types d'objets, les géométriques et les concrets. Les problèmes de grandeurs font appel à ces deux types d'objets. D'un côté, les grandeurs sont liées au monde réel, ils servent à résoudre différents problèmes de la vie quotidienne. Leur modélisation se fera au travers des objets géométriques connus.

Au collège, les objets concrets sont très peu fréquents dans l'enseignement, les activités de mesurage sont de moins en moins présentes. On travaille plutôt avec des représentations de ces objets à travers des schémas géométriques.

- Les grandeurs

Les mathématiques des grandeurs seront présentes de façon plus détaillée dans le prochain chapitre. Nous définirons les grandeurs à partir des théories construites par Rouche (1992,1994) et Chevallard & Bosch (2002). On part du principe qu'on ne peut pas opérer directement sur les objets, les grandeurs sont nécessaires pour pouvoir définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets. Les axiomes sont choisis de manière à correspondre au mieux aux objets physiques et aux opérations qui le concernent. Par rapport à l'univers d'objets présenté par G. et N. Brousseau, nous distinguerons entre l'espèce de grandeur, la grandeur (ou valeur particulière selon ces auteurs), et la grandeur mesurée (ou mesure selon G. et N. Brousseau).

- La mesure et les nombres

La liaison entre les grandeurs et les nombres est faite par la mesure à l'aide d'un système de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) au collège. Ces associations sont faites grâce à une relation d'équivalence ~ définie par une application μ de l'ensemble d'objets X à valeurs dans les nombres réels positifs, $x \sim y \Leftrightarrow \mu(x)=\mu(y)$. La grandeur de x sera la classe d'équivalence $\tilde{x}$ et on appelle mesure de la grandeur $\tilde{x}$ le nombre réel $\mu(x)$.

- Les opérateurs et les comparateurs

On peut définir sur les grandeurs une addition, une soustraction, une division, mais on peut définir aussi d'autres types d'opérateurs. On considère « pour un opérateur à un opérande, comme l'élévation au carré $x \rightarrow x^2$, nous retenons ici essentiellement le procédé opératoire, la relation entre l'opérande et l'image » (Bronner, 2007, p.24). Par exemple, dans les systèmes de nombres qui sont étudiés au collège, on peut trouver les quatre opérations de l'arithmétique : addition, soustraction, multiplication et division qui sont introduites à l'aide des calculs sur les grandeurs.

3.2.5 Les dynamiques interne et inter-domaines

Nous avons déjà présenté les interrelations des grandeurs avec d'autres domaines, comme une partie de notre sujet d'étude. L'idée est d'essayer de préciser ou délimiter ce que nous entendons par « grandeurs» comme domaine. Cependant il existe une certaine complexité pour délimiter les grandeurs, car certaines pratiques mathématiques et didactiques peuvent les inclure dans d'autres organisations de savoir. D'après Bronner (2007), Douady (1986) théorise les dynamiques entre les divers domaines mathématiques au travers de la notion de *jeu de cadres* et la théorie développée par Chevallard (2002) regarde d'autres niveaux d'organisation des savoirs. Dans notre filtre nous définissons trois dynamiques particulières :

- Une dynamique interne au domaine des grandeurs

Nous pouvons étudier les relations entre les objets en restant dans le domaine des grandeurs. Cette dynamique interne peut se situer au niveau de secteur ou thème d'étude dans le cadre des grandeurs. Par exemple, les activités relatives aux grandeurs géométriques peuvent être liées, en regardant l'aire et le volume comme des grandeurs produits. Le produit entre les longueurs conduit à élargir l'étude de grandeurs et à expliquer les formules d'aire et de volume au niveau technologique – théorique. Le principe est que l'aire d'un rectangle est proportionnelle à chacune de ses dimensions. Par exemple, si on prend u comme unité de longueur, l'aire d'un rectangle de longueur 2u et de largeur 3u est égale à 6 fois l'aire du carré dont le côté a pour longueur l'unité u. Ainsi, on peut définir l'aire du rectangle comme produit de sa longueur par sa largeur, noté $L \times l$.

- Les dynamiques inter-domaines

On trouve trois domaines clairement en relation avec celui des grandeurs au collège : les fonctions à travers la proportionnalité, la géométrie avec l'étude de figures et le numérique à travers le calcul sur les nombres. Voici quelques exemples :

- Dans le cadre géométrique, il existe beaucoup de propositions géométriques qui peuvent être caractérisées comme de relations entre grandeurs. Par exemple, la géométrie peut être vue comme une étude de grandeurs à travers le théorème de Thalès ;
- Dans le domaine des fonctions, on étudie les situations de proportionnalité mettant en relation deux grandeurs, à la fois une situation de proportionnalité peut-être modélisée par une fonction linéaire ;
- Dans le numérique, on peut construire le sens de la notion de fraction à travers les mesures des longueurs ou des aires à travers le partage.

Nous souhaitons étudier les pratiques des enseignants à travers ce type de dynamique, en regardant le rôle des grandeurs dans les interrelations entre les grandeurs et ces domaines.

- Une dynamique extra-mathématique

Aujourd'hui, le citoyen doit faire face à de grandeurs plus complexes en réponse à une évolution socio–économique, comme le signale le document ressource « Grandeurs et mesures » :

> « Les programmes actuels de l'école et du collège leur redonnent [aux grandeurs] une place plus importante, alors que leur visibilité dans la vie sociale a beaucoup évolué : d'une part, la disparition de l'usage de certains instruments (chaîne d'arpenteur, balance de Roberval,...) prive l'enseignement de référence à des pratiques sociales convoquant des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs et les masses ; d'autre part, deux faits aussi différents que l'obligation légale d'affichage des prix par kilogramme (ou par litre) et l'emploi dans chaque secteur d'activité de grandeurs bien spécifiques (par exemple, le rendement moyen par mètre carré et par an d'un établissement commercial) mettent en évidence le besoin socio-économique de grandeurs composées plus complexes » (D.G.E.S.C.O., 2007, p. 1)

Les grandeurs font le lien entre les mathématiques et le monde réel. Les interrelations entre ces deux « domaines de savoir » méritent d'être analysées. Ainsi, les mathématiques de la vie quotidienne s'intéressent à l'étude des grandeurs fondamentales, mais aussi à des grandeurs plus complexes. Cette dynamique sera un axe d'étude dans les pratiques des enseignants.

Nous complétons notre filtre des grandeurs en prenant en compte la notion d'organisation didactique au sens de Chevallard. Dans la suite de notre travail, nous préciserons les outils utilisés pour chaque étude. Nous synthétisons le filtre avec le schéma suivant :

Figure 1-1. Schématisation du « filtre des grandeurs »

4. Problématique et hypothèses

4.1 La problématique

Le problème de la construction des grandeurs et de leurs mesures est l'une des sources les plus anciennes du développement des mathématiques. La construction des grandeurs et de leurs mesures est à la charnière entre le numérique et le géométrique, ou encore l'analyse, mais aussi entre mathématiques et physique. Les grandeurs ont joué un rôle fondamental dans le développement des nombres, du calcul et de la géométrie. L'importance de ce rôle est soulignée par Henri Lebesgue dans son livre *La mesure des grandeurs :*

> « Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse » (Lebesgue, 1975, p.2)

Cependant, les bouleversements épistémologiques provoqués par l'évolution des mathématiques, et des sciences en général, ont progressivement éliminé les grandeurs de la construction des ensembles de nombres. Si les grandeurs ont été le fondement du numérique (Bronner, 1997) pendant plusieurs siècles, à partir de la fin de XIXe siècle, époque de la réforme des mathématiques modernes, les nombres entiers deviennent le support essentiel des théories de construction des nombres. Des répercussions se font sentir un siècle après dans l'enseignement. En France, avant la réforme de l'enseignement de 1970, les nombres s'appuyaient aussi sur les grandeurs : « en fait, elle [l'organisation mathématique de la période classique 1854-1947] va se fonder sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurables » (Bronner, 2007). Dans les documents officiels de 1970, grandeurs et nombres semblent s'être séparés. Les grandeurs ont de quelques façons disparu dans cette période.

Si les conséquences de ces variations sur les grandeurs et les nombres sont abordées par Chambris dans sa thèse, et surtout au niveau de l'école élémentaire, les effets sur les autres cadres mathématiques sont peu étudiés dans les travaux de didactique. Ainsi Chambris fait remarquer :

> « Après avoir fondé les nombres, les opérations et la proportionnalité dans les mathématiques savantes, les grandeurs sont éliminées de cette étude et les nombres entiers deviennent les objets premiers. La réforme des mathématiques modernes constitue un écho de ce bouleversement, un siècle après, dans l'enseignement. La situation se complique ensuite puisque les grandeurs pénètrent, un peu plus le numérique à chaque changement de programme, le plus souvent pour des raisons didactiques. Une étude des grandeurs dans les programmes actuels montre que leur statut mathématique doit être précisé » (Chambris, 2008, p.91)

Ce changement de rattachement épistémologique peut avoir affecté la place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques dans l'enseignement au collège. Ce qui nous pousse à nous interroger sur les savoirs de référence relatifs aux grandeurs actuellement dans les différents cadres mathématiques dans l'enseignement au collège. Ce questionnement est important pour la recherche en didactique puisque les grandeurs devraient occuper une place fondamentale tout au long de la scolarité obligatoire dans les différents domaines mathématiques, comme l'indique le document d'accompagnement de troisième publié en 1999 :

> « Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines » (C.N.D.P., 1999)

Ainsi, on devrait étudier les mathématiques à partir des grandeurs, mais l'évolution des mathématiques savantes a renvoyé la définition et l'étude des grandeurs dans d'autres disciplines, ce qui présente un vide didactique (Bronner, 1997) autour du concept de grandeur. C'est ainsi que se demandent Chevallard et Bosch (2001) : « Qu'est-ce qu'au juste une grandeur ? ».

La rupture entre les grandeurs et le numérique du programme de 1970 semble avoir réduit l'enseignement des grandeurs au collège et affaibli les liens entre les grandeurs et divers objets qui habitent dans les différents domaines mathématiques. À cette époque, les grandeurs sont passées au second plan au bénéfice de la mesure, c'est-à-dire les nombres. Cependant, dans l'enseignement des mathématiques, il semble difficile de construire certains concepts sans faire appel aux grandeurs. L'histoire nous montre que l'étude des grandeurs ne se limite pas au problème de la mesure. Dans la géométrie on trouve des calculs sur certaines grandeurs : longueur, aire, volume, angle. Les grandeurs interviennent dans la vie courante, elles servent à étudier des objets concrets en se ramenant à des opérations sur les nombres, et elles vont permettre d'élaborer des liens entre le réel et les mathématiques. Aujourd'hui, le retour des grandeurs au collège dans les programmes de 1995, propose de donner une place plus importante aux grandeurs au collège. On retrouve ainsi dans les programmes de collège de 2005 la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » et la définition d'une théorie pour l'enseignement, mais il existe une certaine ambiguïté sur le statut qu'il faut leur accorder (Chevallard et Bosch, 2001). Cette nouvelle structuration a des conséquences dans l'écologie du système d'enseignement à propos des grandeurs comme le signale Artaud (2006) :

> « […] l'introduction d'un objet dans le système d'enseignement ne va pas de soi : elle modifie notamment l'équilibre écologique du système en détruisant certaines interrelations entre objets et en en créant de nouvelles ; en outre, l'objet introduit doit se créer un emploi didactique, et donc entre en conflit, dans la plupart des cas, avec d'autres objets, plus anciennement installés, qui occupent au moins partiellement cet emploi »

L'évolution des sciences et les changements dans l'enseignement nous amènent à nous questionner sur la vie actuelle des grandeurs au collège.

4.2 Les questions de recherche

La nouvelle structuration des programmes de 2005 semble engendrer un nouveau paquet de conditions et des contraintes auquel les enseignants doivent faire face. Notre travail se propose ainsi d'aborder principalement la question suivante :

Quelle est la place et quel est le rôle des grandeurs dans la construction de domaines mathématiques et dans leurs interrelations au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage au collège en France ?

Pour éclaircir cette question, nous prendrons en compte la notion de grandeur et sa fonction dans la construction des mathématiques savantes en nous posant les questions suivantes :

- Quelles sont les théories sur les grandeurs et la mesure que les mathématiciens ont élaborées ?
- Existe-t-il une définition pour les grandeurs ?
- Quel est le statut des grandeurs dans chaque domaine mathématique?
- Quels sont les liens entre ces différents domaines mathématiques relativement aux théories sur les grandeurs ?

Du côté du savoir à enseigner nous étudions les questions suivantes :

- La constitution d'un domaine des grandeurs, détermine-t-elle des nouveaux traitements pour les grandeurs ?
- Quelles sont les conditions et les contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs au collège ?
- Quels sont les niveaux de codétermination didactique associés aux grandeurs ?
- Quelles sont les praxéologies mathématiques relatives aux grandeurs ?

Du côté du savoir enseigné, nous nous intéressons à la réelle présence des grandeurs au collège :

- Quel est le statut et quelle est la fonction que donnent les professeurs aux grandeurs dans leurs enseignements ?
- Quelles sont les organisations mathématiques et didactiques qu'ils mettent en place dans l'institution d'enseignement ?

Enfin nous souhaitons aussi nous intéresser aux connaissances des élèves à propos des grandeurs et aux éventuelles conséquences sur l'apprentissage provoquées par le changement de rattachement épistémologique. Comme cela est souligné par Chambris (2008) dans sa thèse « […] la place accordée aux grandeurs dans la scolarité obligatoire a fortement varié sans qu'on ait toujours bien mesuré les effets que ces variations pouvaient avoir sur les connaissances des élèves ». Nous souhaitons élargir notre questionnement au savoir appris des élèves à propos des grandeurs :

- Quelles sont les connaissances des élèves du collège relativement aux grandeurs ?

4.3 Les hypothèses

À travers la problématique et les questions dégagées précédemment, notre travail nous amène à expliciter les hypothèses de recherche suivantes :

- Hypothèse 1 : Ecart entre l'institution et les pratiques comme conséquence de la création d'un domaine des grandeurs

À partir de 1995 les programmes donnent une place beaucoup plus importante aux grandeurs dans l'enseignement du collège. Ainsi en 2005, on assiste à la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » dans ces textes, lequel est situé au même niveau que les domaines mathématiques du numérique, des fonctions et de la géométrie. Nous pouvons énoncer notre première hypothèse ainsi :

La remontée des grandeurs relativement aux niveaux de codétermination didactique dans l'institution d'enseignement ne garantit pas que ces changements puissent être transplantés dans le système d'enseignement. Il existe un véritable écart entre la noosphère et le système d'enseignement relativement aux grandeurs du point de vue de leur place dans l'échelle de niveaux de codétermination.

- Hypothèse 2 : Rôle et place des grandeurs dans les pratiques

La réorganisation dans un nouveau domaine des grandeurs au collège engendre des besoins technologiques et théoriques relatifs aux nouvelles organisations mathématiques prescrites par les programmes, les enseignants doivent ainsi construire des nouvelles connaissances pour enseigner les grandeurs. Voici notre deuxième hypothèse concernant les pratiques d'enseignement :

> L'introduction des grandeurs dans le système d'enseignement en tant que domaine d'étude a modifié l'équilibre écologique du système. Les enseignants rencontrent des difficultés dans l'intégration des nouvelles conditions et contraintes pour l'enseignement des grandeurs dans leurs pratiques, ce qui se traduit par une réduction de la place des grandeurs dans les enseignements proposés.

- Hypothèse 3 : À propos de la place et le rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques au collège

Nous avons signalé que les différents changements dans les mathématiques relativement aux grandeurs, notamment à la période de la réforme des mathématiques modernes, ont rejeté en partie le concept de grandeur dehors des mathématiques. Ces bouleversements ont une forte conséquence dans l'enseignement en France. Avant la réforme de l'éducation de 1970, la construction des nombres s'appuyait sur les grandeurs, mais après cette dernière, les grandeurs relèveront plutôt du domaine de la physique ou de l'extra-mathématique. A partir de 1995, les grandeurs réapparaissent dans les programmes du collège et elles deviennent des objets d'enseignement importants dans les programmes de 2005. Ainsi, notre troisième hypothèse s'énonce comme suit :

> Si la plupart des concepts mathématiques ont été construits à partir des grandeurs, les changements de rattachement épistémologiques relatifs à l'évolution des sciences ont eu pour conséquence la cohabitation des différentes connaissances pour l'étude d'une même notion dans l'enseignement. Cela peut provoquer une désarticulation des organisations mathématiques au niveau de la construction de ces différents domaines mathématiques à l'aide des grandeurs.

5. Méthodologie générale et plan d'étude

Nous voulons étudier la place et le rôle des grandeurs au collège. Le but est de déterminer le réseau de conditions et de contraintes des grandeurs dans les différents domaines mathématiques. Nous regardons si les grandeurs constituent un domaine structuré, mais aussi comment elles sont travaillées ailleurs dans les autres domaines mathématiques. Nous avons mis en place de moyens pour examiner « la vie » des grandeurs dans l'enseignement. Pour comprendre cette vie, il faut étudier les grandeurs dans les différents régimes du savoir (savoir savant, savoir à enseigné, savoir enseigné et savoir appris) en les regardant comme des systèmes interdépendants. Nous avons ainsi divisé notre thèse dans les parties suivantes :

- Étude épistémologique et mathématique

Dans un premier temps, une analyse épistémologique des savoirs mathématiques relativement aux grandeurs nous permet d'éclaircir des choix institutionnels et leurs effets sur l'enseignement. Cette étude nous sert à dégager les grandes lignes d'évolution. En regardant les théories et les interrelations entre les différents cadres mathématiques nous cherchons à interpréter certains choix au niveau du savoir à enseigner et du savoir enseigné.

- Étude institutionnelle

Une analyse des programmes, manuels scolaires et de documents institutionnels actuels dans le cadre de la transposition didactique (Chevallard, 1985) permettra de dégager des aspects importants du rapport institutionnel aux objets en jeu. Cette étude a pour principal objectif de mettre en évidence les choix de transposition faits par la noosphère lors de la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » au collège en 2005 afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel aux grandeurs. Le questionnement écologique développé ici permet d'analyser dans les programmes les habitats et les niches potentiels des grandeurs dans l'enseignement. Dans ce sens, une étude de programmes de la période entre 1995 et 2005 permet d'envisager d'autres choix possibles pour un enseignement de grandeurs s'inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel. Nous complétons l'étude par une analyse de manuels scolaires, en termes de praxéologies mathématiques, qui nous aide à déterminer les rapports institutionnels aux objets grandeurs.

- Étude des pratiques

Dans un troisième temps, nous prolongeons notre étude par l'analyse du savoir enseigné dans les classes, en regardant les rapports des professeurs et des élèves aux grandeurs.

L'idée est d'observer la place et le rôle qui donnent les enseignants aux grandeurs dans les différents domaines mathématiques en prenant en compte les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement des grandeurs. Nous avons effectué des observations des pratiques des professeurs et des entretiens. Le professeur est un individu appartenant à diverses institutions, il est la personne dans une société avec des conceptions et des rôles, il a une relation au savoir et il appartient à l'institution enseignement des mathématiques au secondaire. Ainsi, l'enseignant est assujetti à différents systèmes de contraintes et conditions.

Cinq chapitres concernent l'étude des pratiques. Dans le chapitre V, nous présentons la méthodologie développée pour l'analyse des pratiques d'enseignement. Elle prend appui sur les outils théoriques choisis, notamment sur le filtre des grandeurs. Dans le chapitre VI, nous présentons des résultats généraux concernant les connaissances des élèves. Dans le chapitre VII, nous avons étudié de manière générale les habitats et niches des grandeurs dans les progressions mises en place par les enseignants. Cela nous a aidés à repérer des dynamiques inter-domaines et internes au domaine de grandeurs dans les pratiques de deux enseignants M1 et M2 dans 3 classes de 6^{e} et une classe de 5^{e}. À partir de ces premiers résultats, nous avons fait le choix de présenter, dans le chapitre VIII, une dynamique particulière : grandeurs-fonctionnel-numérique en prenant comme exemple la proportionnalité. Finalement, dans le chapitre IX, nous avons pris la grandeur aire pour expliquer le fonctionnement interne des grandeurs. Ces deux derniers chapitres sont complétés par l'analyse de rapports personnels des élèves aux grandeurs, le but est de mettre en rapport les connaissances actuelles des élèves à propos de ces objets et les pratiques des professeurs observés.

L'organigramme suivant de la thèse montre le lien des différents chapitres avec nos trois hypothèses :

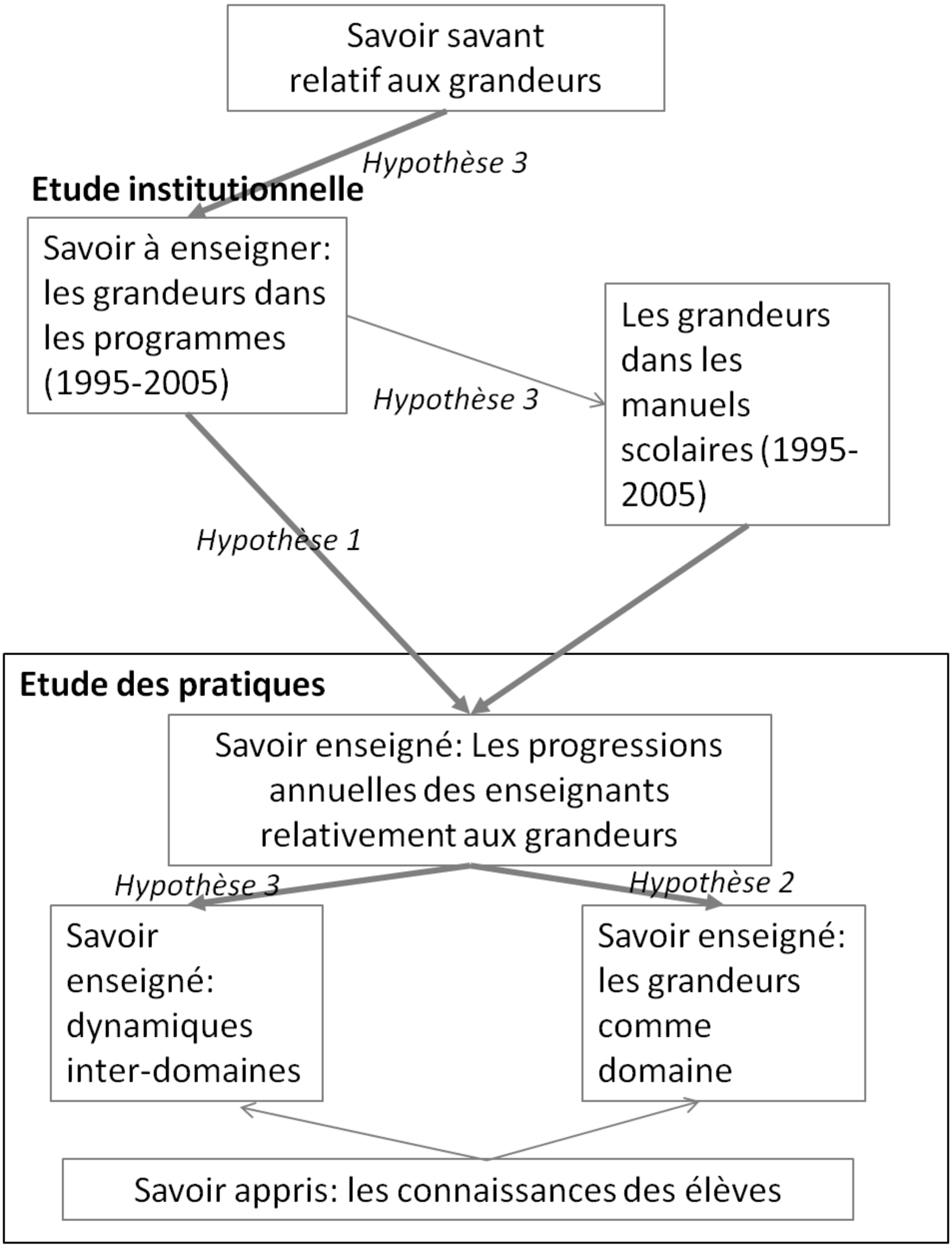


Figure 1-2. Organigramme de la thèse : lien entre les chapitres et les hypothèses

Chapitre II

Les grandeurs dans la construction des mathématiques savantes

Le chapitre étudie les différents habitats et niches pour les grandeurs dans les mathématiques et corollairement ses évolutions. Nous essayons de caractériser les savoirs savants relatifs aux grandeurs. Nous utiliserons ces savoirs savants pour observer les différentes fonctions des grandeurs dans les domaines mathématiques et pour interpréter les interrelations entre ces domaines dans l'enseignement. L'étude montre les caractéristiques de la construction de mathématiques tout en révélant les difficultés d'ordre épistémologique et didactique qui accompagnent l'enseignement des grandeurs. L'analyse du concept de grandeur vise à nous permettre de dégager les différentes fonctions des grandeurs d'un point de vue épistémologique dans la construction des domaines mathématiques et leurs possibles problématiques, pour ainsi analyser la situation ancienne et actuelle de l'enseignement des grandeurs dans des domaines mathématiques et de l'existence ou non de liens effectifs.

Ainsi nous avons décidé d'étudier les grandeurs en tant que domaine mathématique et les interrelations entre les grandeurs et les fonctions, le numérique et la géométrie. Pour ce faire, nous avons regardé dans l'histoire les constructions de certains concepts à partir des grandeurs. Les utilisations possibles de ces théories vont nous servir à interpréter les choix de l'enseignement actuel.

En conséquence, nous avons divisé le chapitre en deux parties. La partie A présente une étude de la notion de grandeur et des théories sous-jacentes des grandeurs dans l'histoire des mathématiques. Dans la partie B, nous abordons les interrelations entre les grandeurs et d'autres domaines mathématiques d'un point de vue épistémologique.

Partie A : Le cadre des grandeurs

Dans la partie A, nous essayons de caractériser les savoirs savants relatifs aux grandeurs à différentes époques. Nous utiliserons ces savoirs savants pour analyser les différentes fonctions des grandeurs dans les différents cadres mathématiques et pour interpréter les interrelations entre ces domaines. Cette étude vise à mettre en évidence les caractéristiques de la construction de mathématiques autour des grandeurs.

1. Statut problématique du concept de grandeur

La « définition » de la grandeur dans l'enseignement est une tâche difficile à accomplir. Le concept de grandeur reste flou dans l'enseignement, mais un regard épistémologique montre qu'il est vague aussi dans les mathématiques.

Les grandeurs font l'objet du V livre d'Euclide (Euclide, 1994) et des nombreux travaux de mathématiciens ultérieurs, tels que Descartes ou Stevin. À la fin du XIXe siècle, les grandeurs disparaissent des mathématiques, elles ont été envoyées au domaine de la physique. À une certaine époque, les constructions des nombres étaient basées sur les grandeurs, mais avec le courant formaliste de la fin du siècle, les constructions mathématiques des nombres réels vont s'appuyer sur l'ensemble des entiers naturels ou sur le corps de nombres rationnels.

D'une part, la grandeur est un concept qui relève autant des mathématiques que de la physique, comme le montre le Groupe de Contact du FNRS[1] :

> « Pendant plus de deux mille ans, les grandeurs ont été le cadre dans lequel ont travaillé les mathématiciens. Aujourd'hui ce terme a quasiment disparu de leur vocabulaire. Pas de celui des physiciens » (Dhombres et al., 1997)

Un groupe de recherche du CREM[2] a étudié la place des grandeurs dans l'enseignement secondaire en Belgique à la fin des années 1995 et début 1996. Ce groupe a abordé le statut des grandeurs en mathématiques (Dhombres et al., 1997). D'après cette étude, le concept de grandeur semble, aujourd'hui, rejeté en dehors de mathématiques, alors qu'elles utilisent les grandeurs dites géométriques (angle, longueur, aire et volume). En fait, la mesure des grandeurs est passée dans le domaine de la physique.

D'autre part, d'autres travaux ont déjà montré qu'il n'existe pas une définition stabilisée des grandeurs en mathématiques, on peut ainsi repérer plusieurs approches théoriques de cette notion de grandeur. À ce sujet, Chambris signale dans sa thèse :

---

[1] Fonds National de la Recherche Scientifique.

[2] Centre National de l'Enseignement Mathématiques.

> « […] comme les grandeurs n'ont pas été formalisées au moment de la formalisation des mathématiques, les définitions relatives aux grandeurs ne sont pas fixées. Il n'existe pas de définition mathématique standard (ou commune) pour « grandeur » comme il en existe une pour « espace vectoriel », les axiomes retenus pour définir une « grandeur », voire certaines des propriétés qui en découlent, peuvent donc varier d'une définition à l'autre. Peut-être ces idées sont-elles aussi symptomatiques de différentes épistémologies des mathématiques » (Chambris, 2008, p. 126)

Cela pose le problème des choix d'une approche adéquate à l'enseignement. La disparition des grandeurs des mathématiques et l'absence d'une théorie officielle des grandeurs vont contribuer à ce que la notion de grandeur et sa fonction dans les mathématiques restent confuses. Dans cette partie nous nous intéressons ainsi aux questions suivantes :

- Quel fut exactement le statut des grandeurs qui semblaient faire partie des fondements des mathématiques jusqu'à la fin du siècle dernier ?
- Quelles sont les théories des grandeurs que les mathématiciens ont développées ?
- Dans quels domaines les grandeurs sont-elles présentes ? À quoi servent-elles ?

À travers une analyse épistémologique, nous souhaitons étudier la construction de la notion de grandeur et ses éventuelles difficultés didactiques. Tout d'abord, nous montrerons quelques éléments pour définir la place des grandeurs dans l'histoire et ensuite nous présenterons quelques éléments théoriques d'un cadre des grandeurs.

2. Premiers repères de la notion de grandeur dans l'histoire

2.1 Les grandeurs chez les Pythagoriciens

L'école pythagoricienne ne faisait pas la différence entre le domaine géométrique et le domaine physique. L'idée de grandeur chez le Pythagoriciens et au Moyen âge avait une connotation conceptuelle associée à des valeurs numériques : « les nombres devaient expliquer le monde ». Ainsi les mathématiques et la physique dans la doctrine pythagoricienne sont complètement fondées sur les nombres, spécifiquement les nombres naturels.

Les Pythagoriciens considèrent que deux grandeurs sont toujours commensurables, c'est-à-dire, que l'on peut trouver une unité commune pour les mesurer, mais cette loi ne s'applique pas à la diagonale d'un carré et d'un de ses côtés. La division est l'opération qui permet de classifier les quantités : si la quantité est discrète – et donc dénombrable – il s'agit d'un nombre ; par contre, si la quantité est continue – et donc mesurable – il s'agit d'une grandeur. Les nombres et les grandeurs constituent des classes disjointes et indépendantes et, par conséquent, leurs études respectives sont différentes et irréductibles. D'après la tradition platonique, la géométrie étudie les grandeurs, l'arithmétique les nombres. Ces deux sciences n'ont en principe aucune liaison, sauf s'il s'agit de grandeurs commensurables. Dans la recherche de la solution à ce problème, un changement de la pensée va se produire, les rapports des grandeurs ne sont pas toujours donnés par des naturels, on assiste à la séparation de l'arithmétique et de la géométrie (Bronner, 1997).

2.2 Les grandeurs dans les livres d'Euclide

Après quelques décennies, dans les Éléments d'Euclide (vers 300 avant J.-C), on trouve une géométrie fondée sur les grandeurs. Cet ouvrage donne un traitement aux grandeurs continues, en donnant une solution au problème de l'incommensurabilité, il s'appuie sur les nombres entiers. Mais Euclide ne définit pas la notion de grandeur, il décrit une théorie des grandeurs qui ne dépend pas du genre particulier des grandeurs considérées, cette théorie, attribuée à Eudoxe, traite aussi des rapports des grandeurs, il s'agit de fonder un calcul sur les rapports de grandeurs, mais calcul dans un sens différent de nos jours (Rouche, 1992). Dans les éléments d'Euclide, la théorie des rapports permet dépasser le problème de l'incommensurabilité, mais sans aboutir à la construction de nombres irrationnels (Bronner, 1997)

Dans les mathématiques grecques anciennes, le problème de la mesure des grandeurs n'est pas vraiment résolu, on ne trouve pas de vrais liens entre les cadres numérique et géométrie, puisque les nombres ne mesurent pas les grandeurs. De plus, on ne trouve pas encore la construction des nombres réels à partir des nombres entiers, laquelle établit la séparation absolue entre grandeurs et nombres.

2.3 Les grandeurs dans les travaux de Stevin

Il y aura un important changement au XVI^{e} siècle au niveau du concept de nombre. On assistera à un processus ininterrompu de rupture entre les quantités continues et discrètes, qui culmine à la fin du XIX^{e} siècle avec la construction des nombres réels de Dedekind.

Les travaux de Simon Stevin (1548-1620) ont contribué à la réalisation d'une telle transformation. Il se place dans un cadre purement numérique, il réussit à donner au concept de nombre un fondement théorique. Il essaie de détacher le concept de nombre du concept de grandeur : « Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chacune chose » (Stevin cité par Bronner, 1997, p. 42). Mais, si avec Stevin le concept de nombre irrationnel n'aura désormais plus besoin des grandeurs (lequel est considéré comme un véritable nombre), sa théorie d'arithmétisation des grandeurs ne pourra pas échapper à la mesure des grandeurs.

2.4 Les grandeurs dans l'*Algèbre nouvelle* de Viète

En 1591, Viète (contemporaine à Stevin) publie un véritable manifeste : L'Algèbre nouvelle. Viète propose d'utiliser des consonnes B, C, D,... pour désigner les grandeurs connues et des voyelles A, E, I,... pour désigner les grandeurs inconnues, ce qui permet de montrer la généralité d'un problème, sa ressemblance formelle à d'autres problèmes (Pressiat, 2006a). Il crée ce qu'il appelle la "logistique spécieuse" (calcul sur les espèces, c'est-à-dire les grandeurs), un calcul portant sur des lettres et doté d'un ensemble de règles, de conventions et de termes nouveaux. Dans ce calcul, Viète introduit la loi d'homogénéité, laquelle sera dépassée par Descartes 50 ans plus tard. Celle-ci contraint à n'avoir dans une égalité que des grandeurs du même type (de la même dimension). Pour Viète une lettre représente une longueur, donc le produit de deux lettres une aire, etc. Lorsqu'une lettre désigne une constante, il précise sa nature, aire ou volume, en la faisant suivre des mots plan ou solide.

2.5 Les grandeurs chez Descartes

René Descartes est généralement connu pour son œuvre philosophique, mais il fut aussi un grand mathématicien. Son apport principal dans ce domaine est la numérisation de la géométrie. En collaboration avec Pierre Fermat (1601-1665), il a mis au point la méthode des coordonnées qui permet d'effectuer facilement des démonstrations de géométrie. Par le choix d'une unité de longueur, il identifie la demi-droite avec l'ensemble des nombres réels positifs, ce qui n'avait pas été fait par les Grecs. Descartes met en relation les grandeurs et les nombres.

> « Tous les problèmes de géométrie peuvent être facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire » (Descartes cité par Bronner, 1997, p. 41)

On appelle d'ordinaire géométrie analytique cette mathématique nouvelle et on la considère comme l'application de l'algèbre à la géométrie.

2.6 La séparation des grandeurs et des nombres

L'arithmétisation des nombres réels, et par voie de conséquence la séparation complète des grandeurs et des nombres, se produiront avec les constructions mathématiques faites par Weierstrass (1872) avec la méthode des agrégats, Cantor (1872) avec les suites fondamentales et Dedekind (1872 et 1888) avec les coupures de nombres réels. Cette dernière construction s'appuie sur l'ensemble des nombres entiers. À partir de ce moment, les grandeurs se séparent du domaine des mathématiques dans la sphère savante.

3. Des théories sur les grandeurs

3.1 Les grandeurs en tant que cadre mathématique

Comme nous l'avons déjà signalé, le concept de cadre est pris dans la théorie développée par Régine Douady : « Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations » (Douady, 1986, page 11). Les cadres sont les domaines mathématiques mobilisés pour exprimer et travailler les traductions des problèmes. Nous nous intéresserons à l'importance des grandeurs pour interpréter des problèmes et principalement à leur fonction dans le jeu de cadres. Ces conversions donnent souvent naissance à de nouveaux résultats, à de nouvelles techniques, à la production de nouveaux objets mathématiques, lesquels enrichissent les cadres où se produisent ces mêmes changements, selon la théorie de Douady (1986).

Néanmoins, selon cette idée se pose la question de définir les objets et les relations qui font des grandeurs un cadre, pris au sens où l'entend Douady. Nous nous sommes donc interrogés sur l'existence d'un cadre « grandeur ». Existe-t-il un cadre « grandeur » ou bien est-ce que les grandeurs sont seulement des objets existant dans les cadres mathématiques comme le numérique et le géométrique ?

3.2 Le cadre des grandeurs chez Euclide

Dans le livre V on trouve trois notions essentielles, celle de grandeur, du rapport entre grandeurs homogènes et de la proportionnalité entre grandeurs.

- La grandeur

La grandeur n'est pas définie dans le livre V d'Euclide (Euclide, 1994), celle est l'un de termes primitifs de l'axiomatique euclidienne. Quand on parle de grandeurs, il s'agit de longueurs, d'aires, de volumes, d'angles, d'arcs de cercle, mais on les conçoit comme des objets géométriques, non numériques.

- Une grandeur g est une partie d'une grandeur G, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.
- Et multiple, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.

La première définition fait référence au mot partie, au sens que g est une partie de G s'il existe $G^{'}$, partie propre de G qui la mesure et est égal à g. Les deux définitions n'excluent a priori qu'une grandeur soit une partie ou un multiple d'elle-même.

- La notion de rapport des grandeurs dans le livre V

« Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, (qu'il y a) entre deux grandeurs du même genre » (Euclide, 1994)
Cette définition contient deux informations :

- l'existence d'un rapport de deux grandeurs suppose leur homogénéité
- le rapport est un certain type de relation

Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à un deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, (et) pris de manière correspondante. Les grandeurs qui ont le même rapport sont dites en proportion.

Le livre expose aussi les définitions en relation aux grandeurs proportionnelles, plus particulièrement, les propriétés fondamentales de la proportionnalité.

3.3 La théorie élaborée par Rouche (1992, 1994)

Nicolas Rouche (1992, 1994) aborde le problème de l'enseignement de la mesure des grandeurs à l'école élémentaire, autour de l'articulation entre la vie quotidienne et les mathématiques. Il élabore une théorie des grandeurs proche de l'expérience amenant Chambris (2008) à la qualifier de « théorie naïve ».

Rouche élabore un système d'axiomes proche du réel pour construire les grandeurs. D'une part, il définit une axiomatique sur un ensemble d'objets avec des propriétés pour ensuite déterminer un ensemble de grandeurs. D'autre part, il construit les nombres rationnels à partir de cet ensemble de grandeurs. Ce système d'objets est pris dans le monde réel et, dans le même temps, il nous offre des éléments mathématiquement solides pour définir le concept de grandeur. Nous présentons ici quelques notions relatives à la grandeur, aux opérations entre les grandeurs et à la mesure.

3.3.1 Axiomatisation de la notion d'espèce de grandeur

- Des rapports entre objets

La construction des grandeurs commence à partir de la comparaison des objets de la vie quotidienne :

> « Comme annoncé, ce système d'axiomes ci-après a été choisi tel qu'il apparaisse le plus proche de l'expérience commune. L'ensemble X pourra être interprété en imagination comme constitué de baguettes qu'on compare en les disposant côté à-côté, que l'on additionne en les mettant bout à bout, etc. On pourra aussi penser à des boules de plasticine que l'on compare en les posant sur les plateaux d'une balance à fléau, que l'on additionne en les collant l'une à l'autre, etc. » (Rouche, 1992, p. 27)

Rouche (1992) expose les difficultés de comparer des objets. D'après lui, on retrouve des obstacles lorsqu'on veut comparer des objets trop petits ou trop grands. Ces comparaisons entre objets renvoient aux grandeurs, car ce n'est pas des bouteilles qu'on compare mais les hauteurs de ces bouteilles ou leurs capacités. Ces relations entre objets définissent la notion de rapport. Mais comment définir ces rapports ? Rouche signale qu'un rapport est bien défini au regard de la pensée commune, une chose qui existe en soi, quelque chose que l'on perçoit et que l'on pense à propos de deux objets de même nature.

À partir de ces rapports, il définit une relation d'équivalence et une relation d'ordre entre les objets. On considère d'abord un ensemble d'objets de même nature, puis les sous-ensembles formés de tous les objets équivalents à l'un d'eux.

- Vers la définition de grandeur

Pour mathématiser les idées d'égalité et d'inégalité des rapports, Rouche exprime une théorie basée sur les classes d'équivalence et l'ordre d'objets :

Soit X un ensemble d'objets et ~ une relation d'équivalence sur X. Nous lirons $a \sim b$ en disant a a la même grandeur que b. En tant que relation d'équivalence, la relation ~ a les propriétés suivantes :

- $a \sim b$ si et seulement si $b \sim a$ (symétrie)
- $a \sim b$ et $b \sim c$, alors $a \sim c$ (transitivité)

Cette relation n'est pas réflexive, car on ne peut pas comparer un objet à lui-même. On trouve à sa place une autre propriété :

- $\forall a \in X, \exists b \neq a$ et $a \sim b$

La relation d'ordre est définie par deux axiomes. Soit sur X une relation que nous écrirons $\prec$ et lirons « est plus petit que », définie par les deux propriétés :

- quels que soient a et b dans X, on a une et une seule de ces trois situations :

$$a \prec b,\ a \sim b \text{ ou } b \prec a$$

- quels que soient a,b et c dans X,

$$\text{Si } a \prec b \text{ et } b \prec c, \text{ alors } a \prec c$$

Nous pouvons partitionner X en classes d'équivalence pour la relation ~, chacune de ces classes est constituée de tous les objets de X qui ont même grandeur qu'un objet donné. Soit $\tilde{X}$ l'ensemble de ces classes et $A, B, C....$ ses éléments. Ainsi $\tilde{X}$ est un domaine de grandeurs et les grandeurs sont les classes d'équivalence éléments de $\tilde{X}$. L'objectif de la construction de $\tilde{X}$ est clair : « les structures introduites sur X induisent les structures que l'on attend pour répondre aux manipulations familières sur les grandeurs concrètes » (Rouche, 1994).

3.3.2 *L'ensemble des grandeurs*

En partant de la structure de $\tilde{X}$, Rouche définit l'ordre et les opérations sur cet ensemble. Ces opérations vont permettre d'obtenir le système des nombres rationnels.

- Ordre des grandeurs

Pour $A, B \in \tilde{X}$, on dit que A est plus petit que B, s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \prec b$. Et on écrit $A < B$.

Quels que soient $A, B \in \tilde{X}$, on a exactement une de trois situations $A \prec B, A = B$ ou $B \prec A$.

- L'addition des grandeurs

Rouche définit une loi binaire de composition interne sur l'ensemble d'objets X. Si a et b sont deux éléments distincts de X, nous leur associons un autre élément appelé leur somme et noté $a \oplus b$. Cette loi n'est pas définie sur tout l'ensemble X x X, car on ne peut pas additionner un objet à lui-même.

Ainsi, il caractérise la somme de deux grandeurs : Si A et B sont deux éléments de $\tilde{X}$ (pas nécessairement distincts) nous leur associons un autre élément de $\tilde{X}$ par le procédé suivant : on choisi un représentant a dans A, et un b dans B, nous faisons leur somme $a \oplus b$, et décidons que la classe d'équivalence de $a \oplus b$ dans $\tilde{X}$ sera la somme de A et de B, que par ailleurs nous notons $A \tilde{+} B$, cette somme est univoquement déterminée.

On obtient avec cette opération les propriétés suivantes :

- L'associativité $(A \tilde{+} B) \tilde{+} C = A \tilde{+} (B \tilde{+} C)$
- La commutativité $A \tilde{+} B = B \tilde{+} A$
- La compatibilité de la somme avec l'ordre $A < B$, alors $A \tilde{+} C < B \tilde{+} C$

- Multiplication par un naturel

Si on additionne une grandeur à elle-même une première fois, puis à la grandeur somme on ajoute encore une fois la grandeur initiale et ainsi de suite jusqu'á une $(n-1)^{è}$ fois, on dit qu'on a multiplié la grandeur par le nombre naturel n (si A désigne la grandeur, nous noterons le résultat nA). Le produit de A par un naturel n est la somme de A n fois :

$A \tilde{+} A \tilde{+} \ldots \tilde{+} A = nA$. Cette loi a les propriétés suivantes :

- $(m+n)A = mA \tilde{+} nA$
- $(mn)A = m(nA)$
- $n(A \tilde{+} B) = nA \tilde{+} nB$
- $mA < nA$ si et seulement si $m < n$
- Si $mA = nA$, alors $m = n$
- $nA \prec nB \Leftrightarrow A \prec B$
- Si $nA = nB$, alors $A = B$

- Fractionner des grandeurs

Les grandeurs sont susceptibles d'être divisées en parties équivalentes. On peut de cette manière obtenir la moitié, le tiers, le cinquième d'une grandeur. Rouche définit ainsi la division par un entier, qu'on notera $\frac{1}{n}A$[3], avec A une grandeur quelconque.

On aura :

$$m(\frac{1}{n}A) = \frac{1}{n}(mA)$$, cette grandeur sera notée $\frac{m}{n}A$, avec m, n des entiers.

Rouche élabore ensuite les propriétés qui définiront les opérations des fractions. Ainsi, il construit l'ensemble de nombres rationnels Q. Cette construction sera précisée à la section 6.3.2 concernant les relations entre le domaine numérique et celui des grandeurs.

[3] Pour faciliter l'écriture, nous adoptons la notation $\frac{1}{n}$ même si cette expression n'est pas encore un nombre.

3.3.3 Mesurer des grandeurs

On considère un domaine de grandeurs et une grandeur particulière U que nous appellerons l'unité de mesure. Quand A est un multiple de l'unité U, on peut écrire $A = nU$, n est appelé la mesure de A. Si ce n'est pas le cas, il y a un reste. Ainsi la grandeur que l'on compare à l'unité est exprimée comme un nombre entier de fois l'unité plus une fraction de l'unité.

Si on s'occupe des objets grandeurs physiques, il est pratiquement possible de trouver toujours une sous – unité convenable, mais en mathématiques on s'occupe des grandeurs idéalisées, dans ce cas toute sous – unité contenue un nombre entier de fois dans le reste est alors une commune mesure entre A et U.

- La notion de commune mesure

Rouche (1992) considère deux grandeurs inégales qu'il veut comparer :

- Si la petite multipliée par un naturel n bien choisi est équivalente à la grande, on dira que la petite va n fois dans la grande, ou qu'elles sont entre elles comme 1 est à n.
- Si la petite ne va pas un nombre entier de fois dans la grande, on cherche une troisième grandeur qui irait un nombre entier m de fois dans la petite et un nombre entier n de fois dans la grande. Si on trouve une telle troisième grandeur, on dira que la petite de départ est à la grande comme m est à n.

La troisième est appelée commune mesure des deux autres. Cependant, il est possible qu'il n'y a pas de commune mesure entre deux grandeurs, on est dans le cas de l'incommensurabilité.

- Mesurer certaines grandeurs

Si pour une grandeur A, il existe un nombre r tel que $A = rU$, on dira que A est mesurable avec l'unité U et que r est la mesure de A dans l'unité U.

Soient A et B deux grandeurs d'un domaine de grandeurs $\tilde{X}$. On dit qu'une grandeur C de $\tilde{X}$ est une commune mesure de A et B s'il existe deux nombres naturels m et n tels que $mC = A$ et $nC = B$

Enfin, la théorie de grandeurs de Rouche (1992, 1994) que nous venons de présenter permet d'élaborer des éléments théoriques et technologiques pour définir un domaine des grandeurs. À travers les objets concrets, on obtient une axiomatisation des grandeurs et ainsi un statut mathématique pour ces concepts. Cette théorie permettra aussi de construire les nombres, les opérations et la proportionnalité, sur lesquels nous reviendrons dans la suite du chapitre.

3.4 La théorie proposée par Chevallard & Bosch et les changements d'unités

Chevallard et Bosch (2000-2001, 2002) construisent une théorie pour les changements d'unités. Ils partent de la notion d'espèce de grandeur pour la considérer comme une demi-droite vectorielle sur les nombres réels. La notion d'espèce de grandeur est définie par ces auteurs de la manière suivante :

Pour tout $g \in G$, ils posent en outre $1g = g$. On a alors le résultat suivant : pour tous g, g_1, g_2, $g_3 \in G$,

- Gr1. Un et un seul des énoncés $g_1 < g_2$, $g_1 = g_2$, $g_1 > g_2$ est vrai
- Gr2. Si $g_1 < g_2$ et $g_2 < g_3$ alors $g_1 < g_3$
- Gr3. $g_1+g_2 = g_2+g_1$
- Gr4. $(g_1+g_2)+g_3 = g_1+(g_2+g_3)$
- Gr5. $g_1 < g_1+g_2$
- Gr6. Si $g_1 < g_2$ alors il existe un élément h de G et un seul tel que : $g_1+ h = g_2$
- Gr7. Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un élément h de G et un seul tel que : $g = nh$.
- Gr8. Si $g \neq 0$, alors $0<g$ et $0+g=g+0=g$
- Gr9. Toute partie de G non vide est majorée à une borne supérieure.

Ils obtiennent ainsi une axiomatique de la notion d'espèce de grandeurs (G, <, +, 0). Cet ensemble a une structure de demi-droite vectorielle ordonnée. Toute mesure u est un isomorphisme entre la demi-droite et l'ensemble de nombres réels positifs. Pour tout choix d'une unité u, on obtient un isomorphisme φ_u. Si $r = \varphi_u(g)$, on a $\varphi_u(g) = r = r\varphi_u(u) = \varphi_u(ru)$, et donc $g = ru$, r est ainsi la coordonnée de g dans l'unité u. Voyons un exemple :

Une voiture quitte Lille à 7h05 et arrive à Arras à 8h35. Si la longueur du trajet est de 54km, quelle est la vitesse moyenne en m/s ?

On sait que $v = \frac{d}{t}$, où v est la vitesse, d la distance et t la durée. Alors, on obtient $v = \frac{54km}{1{,}5h} = \frac{5{,}4 \times 10000\,m}{1{,}5 \times 3600\,s} = 10m/s$. Dans le cadre de cet exemple, les distances et les durées constituent chacune un demi-espace vectoriel de dimension 1 sur les nombres réels. La distance qui a pour coordonnée 54 dans la base [km] a pour coordonnée 54000 dans la base [m]. Et la durée qui a pour coordonnée 1,5 en la base [h] a pour coordonnée 5400 dans la base [s]. Cette technique, où les données sont des grandeurs, est appelée concrète par Chevallard et Bosch (2000-2001).

Ils identifient aussi une autre technique dénommée d'abstraite par les auteurs. On peut résoudre l'exercice précédent de la manière suivante :

On sait que $1km = 1000m$ et $1h = 3600s$, en utilisant la proportionnalité on obtient que $54km = 54000m$ et $1{,}5h = 5400s$. Ainsi on calcule la vitesse moyenne de la façon suivante $v = \frac{54000}{5400} = 10m/s$.

4. Conclusion partie A

Dans ce chapitre, nous nous sommes interrogés sur la possible existence et définition d'un domaine des grandeurs dans les mathématiques savantes. Nous avons vu que les grandeurs sont présentes dans les mathématiques depuis une époque très ancienne. Elles ont été l'objet de travail de plusieurs mathématiciens, ainsi leur place a fortement évolué dans les mathématiques savantes tout au long de l'histoire. On ne trouve pas alors une stabilisation de la notion de grandeur dans cette science. De plus, à partir de la réforme des mathématiques modernes, elles ne feront plus partie de la construction des nombres. Elles sont rejetées en dehors des mathématiques. Cependant, des mathématiciens et didacticiens se sont posé la question de la définition de la notion de grandeur. Ainsi, on trouve par exemple les théories élaborées par Rouche (1992,1994) et Chevallard et Bosch (2002) qui cherchent à donner un statut mathématique à l'objet d'enseignement grandeur. On a vu que ces théories définissent une axiomatisation de la notion de grandeur, d'une relation d'ordre et des opérations sur les grandeurs. De ce point de vue, on peut considérer les grandeurs et les espèces de grandeur comme des objets constituants d'un cadre au sens de Douady (1989). Néanmoins, il reste à étudier si ces théories peuvent constituer le savoir savant de référence de l'enseignement des grandeurs au collège et si elles sont adaptées à un tel enseignement.

Partie B : Les grandeurs dans les différents domaines mathématiques

Les grandeurs participent à la construction de divers domaines mathématiques. Dans cette partie, nous souhaitons montrer la place et le rôle des grandeurs dans la construction de certaines notions mathématiques appartenant aux domaines fonctionnel, numérique et géométrique.

5. Les grandeurs et les fonctions

Nous avons choisi d'aborder les liens entre les grandeurs et les fonctions au travers du concept de proportionnalité, du fait que cet objet mathématique est très présent au collège. Les rapports entre les grandeurs et la proportionnalité n'ont pas toujours été les mêmes dans l'enseignement. En effet, comme le signale Chambris :

> « Un aspect important du programme de 1970 réside dans l'apparition des opérateurs et des relations numériques qui deviendront des fonctions numériques en 1980. […] Toutefois, nous retenons de cette nouvelle approche du thème que la proportionnalité n'est plus une relation entre grandeurs, mais entre nombres » (Chambris, 2008, p.79)

Dans les programmes de l'école de 2002, la proportionnalité continue à appartenir au domaine du numérique, par contre les raisonnements relèvent des grandeurs (*ibid.*). Par exemple, on réfléchira de la façon suivante « Si pour 4 cahiers je paie 3 euros, pour 2 cahiers je paie la moitié, c'est-à-dire 1,5 euros, car 4 :2=2. Pour 6 cahiers, je paie ce que j'ai payé pour 4 cahiers plus ce que j'ai payé pour 2 cahiers, je paie donc 4,5 euros, car 4+2=6 ».

D'un côté, la proportionnalité, elle-même, sollicite la notion de rapport, une proportion est définie comme une égalité de rapports. D'un autre côté, la proportionnalité peut être représentée par une fonction linéaire. Ainsi, en mathématiques et dans l'enseignement, il existe deux façons de comprendre la proportionnalité. La première à travers des proportions entre grandeurs ou entre nombres et la deuxième à travers les propriétés de la fonction linéaire. Nous présenterons dans cette partie quelques éléments relatifs à la deuxième de ces théories, une analyse plus approfondie de la place et du rôle des grandeurs dans la construction de la notion de proportionnalité sera présentée dans le chapitre VIII.

5.1 La proportionnalité dans le domaine du fonctionnel

Dans l'enseignement, on peut utiliser les grandeurs proportionnelles pour définir la fonction linéaire. Quand on décide de passer des grandeurs aux mesures, on arrive aux fonctions numériques. Une fonction linéaire est définie de la manière suivante :

$$f : IR \to IR \atop x \to y \quad \text{avec } y = ax$$

Une théorie qui définit la proportionnalité entre grandeurs est celle écrite par Rouche (1992). Il utilise pour ce faire une application linéaire entre deux ensembles de grandeurs.

Soient X et Y deux ensembles d'objets munis chacun d'une relation d'équivalence, que nous notons $\Re$ et $\tilde{\Re}$. Ces deux relations vont déterminer deux espèces de grandeurs $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$. On note $+$ et $\tilde{+}$ les additions respectives sur ces deux ensembles.

Ensuite, supposons qu'il existe une bijection f de X dans Y laquelle conserve les classes d'équivalence. On peut donc définir une bijection $\tilde{f}$ de $\tilde{X}$ dans $\tilde{Y}$ par $f(u) = \tilde{f}(U)$ si $u \in U$.

Cette application f est linéaire :

- $\forall A, B \in \tilde{X}, \tilde{f}(A+B) = \tilde{f}(A) \tilde{+} \tilde{f}(B)$ (propriété additive)
- $\forall A \in \tilde{X}, \forall p \in Q_+, \tilde{f}(pA) = p\tilde{f}(A)$ (propriété multiplicative)

Cette correspondance sera dite proportionnelle. Elle peut être numérique, mais elle définit une fonction d'un ensemble de grandeurs vers un autre. On appellera coefficient de proportionnalité le rapport constant entre ces deux grandeurs, lequel est aussi une grandeur.

5.2 La proportionnalité dans l'enseignement

Au collège on peut poser le problème suivant : « La voiture de Xavier consomme 10 litres de gasoil pour parcourir 200 km. Quelle est sa consommation pour 300 km ? ». Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode basée sur les définitions données par Rouche (1992). Une première technique prend appui sur la linéarité. Ainsi si Xavier consomme 10 litres de gasoil pour parcourir 200 km, on peut définir la fonction linéaire f de l'ensemble des capacités vers l'ensemble des longueurs vérifiant $f(10L) = 200km$. On a $300km = 200km + \frac{200km}{2}$ et donc $300km = f(10L) + \frac{f(10L)}{2} = f(10L + 5L) = f(15L)$.

Une deuxième technique fait intervenir le coefficient de proportionnalité (lequel est une grandeur) entre les capacités et les longueurs. Le rapport entre ces deux grandeurs est $\frac{10L}{200km} = \frac{1L}{20km}$. Pour parcourir 300 km, Xavier à besoin de $300km \times \frac{1L}{20km} = 15l$. Notons que le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre, mais une grandeur, laquelle est la consommation moyenne[4] de la voiture de Xavier. Il suffit d'une valeur x non nulle et de son image y pour déterminer la valeur du coefficient de proportionnalité.

5.3 Bilan sur les grandeurs et les fonctions

Au collège, on étudie la fonction linéaire en classe de 3e. Ce travail commence en classe de 6e à travers l'étude de la notion de proportionnalité. Les principales interrelations entre le cadre des fonctions et celui des grandeurs sont construites à travers la notion de proportionnalité au collège. En effet, en classe de 6e, on étudie des relations entre des grandeurs proportionnelles et on modélise cette situation par une fonction linéaire en classe de 3e. Dans cette partie, nous avons décidé de caractériser le savoir mathématique relatif à la notion de fonction linéaire et un exemple d'une situation de proportionnalité. Les deux principales propriétés qui interviennent dans l'enseignement sont la propriété multiplicative et la propriété additive de la fonction linéaire. Elles constitueront l'un des savoirs savants de référence pour l'enseignement de la proportionnalité au collège dans le cadre des fonctions.

6. Les grandeurs et le numérique

Le problème est celui des liens entre le numérique et les grandeurs. On mesure les grandeurs avec les nombres, et inversement en mesurant les grandeurs de nouveaux types de nombres pourront rentrer dans les systèmes des nombres. Nous allons étudier quelques constructions de nombres faites à partir des grandeurs.

6.1 Les grandeurs et les nombres dans la civilisation grecque ancienne

Les nombres proviennent de deux activités, le dénombrement et la mesure. Ce qui a posé aux Grecs le problème du discret et du continu pour eux. Si la quantité est *discrète* – et donc dénombrable –, il s'agit d'un *nombre entier* ; par contre, si la quantité est *continue* – et donc mesurable –, il s'agit d'une grandeur.

Chez les Pythagoriciens la notion de nombre recouvre essentiellement des quantités discrètes. Un nombre est une quantité qui ne peut être divisée qu'une finitude de fois, l'unité se trouvant à la limite d'une telle division. Par contre, une grandeur est une quantité qui peut être divisée indéfiniment sans perdre son essence. Les Grecs construisent de cette manière une théorie de proportions qui utilise les rapports entre grandeurs.

Les nombres et les grandeurs constituent des catégories dissociées et indépendantes et, par conséquent la Géométrie étudie les grandeurs, l'Arithmétique les nombres. Ces deux

[4] En France, on parle plutôt de la consommation d'une voiture aux 100 km.

sciences n'ont en principe aucune liaison, sauf s'il s'agit de grandeurs commensurables, c'est-à-dire, on peut trouver une mesure commune pour les mesurer.

Les Grecs furent confrontés à l'incommensurabilité sous la forme de ce qu'on appellera plus tard les nombres irrationnels : la diagonale du carré ne peut pas être rapportée à la longueur du côté, ni la circonférence du cercle à son diamètre. La découverte de l'incommensurabilité les amène à considérer que les rapports des grandeurs ne sont pas toujours donnés par des nombres entiers. C'est dans le livre V d'Euclide que les rapports entre grandeurs non commensurables seront intégrés aux mathématiques, mais cette théorie ne débouche pas sur la construction de nombres irrationnels (Bronner, 1997).

6.2 Les grandeurs et les nombres chez Stevin

Un changement a eu lieu au XVI^e siècle pour le concept de nombre, survenu à partir de l'unification du traitement des quantités discrètes et continues. Les travaux théoriques de Simon Stevin (1548-1620) ont contribué, de façon primordiale, à la réalisation d'une telle transformation, produisant une rupture avec la mathématique ancienne. Il montre une solution différente au problème de l'incommensurabilité, ainsi il répond aux difficultés de la théorie euclidienne qui sépare les quantités discrètes et les grandeurs continues.

À partir de la pratique de la mesure, Stevin identifie les propriétés communes aux nombres et aux grandeurs et propose un concept unifié de nombre dans l'ouvrage *L'Arithmétique* (Waldegg, 2004). Dans ce texte Stevin présente une extension du concept de nombre en rupture explicite avec la conception euclidienne : « la communauté et la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identiques » (Stevin cité par Bronner, 1997). Il propose pour le concept de nombre un fondement théorique, à partir de l'activité généralisée de *mesurer*, c'est-à-dire d'une activité réalisée avec des grandeurs géométriques.

Les grandeurs incommensurables seront mesurées à l'aide des nombres irrationnels, les irrationnels sont alors considérés comme de véritables nombres. Selon Stevin l'unité est un nombre ; les nombres quelconques peuvent être carrés, cubiques ; une racine est un nombre (Waldegg, 1994).

De cette manière, grâce au traitement des grandeurs géométriques, Stevin réussit à donner au concept de nombre un fondement théorique consolidé qui permet une unification plus grande. Mais cette numérisation des grandeurs est toujours issue de la géométrie, ce qui amènera les mathématiciens à la recherche d'un processus de rupture entre les quantités continues et discrètes avec des bases plus rigoureuses et surtout indépendantes des grandeurs. Ce processus culmine à la fin du XIX^e siècle avec la construction des nombre réels de Dedekind.

6.3 La construction des nombres chez Lebesgue à partir des segments

Le livre de Lebesgue (1975) a été conçu dans le cadre de préparation des professeurs de secondaire, il construit directement les nombres réels sans passer par les rationnels. Selon Lebesgue chez les jeunes il faut réveiller le sens de la réalité, et après faire le passage à l'abstrait. Ainsi, les grandeurs représenteraient le sens concret et le nombre le passage à l'abstrait.

- La notion de nombre chez Lebesgue

La notion de nombre (entier) selon Lebesgue commence avec l'action de compter : « ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet »

- Les longueurs et la construction de nombres

Ayant construits les nombres entiers, Lebesgue propose de comparer un segment AB et un segment U, c'est-à-dire, il mesure AB avec l'unité U. On porte U sur la demi-droite AB à partir de A, ainsi de suite, etc. On appellera A_1 la dernière extrémité avant de dépasser B et B_1 l'extrémité du segment U qui dépasse B. Il obtient un encadrement de la mesure par deux entiers consécutifs et deux segments AA_1 et BB_1. Il réitère son procédé après avoir choisi une nouvelle unité U_1, dix fois plus petite que U. Par récurrence, il construit deux suites de nombres entiers, chaque terme ayant un chiffre de plus à chaque itération, et deux suites de segments AA_i et AB_i. Il interdit à B de coïncider avec B_i (si le segment AB « contient » exactement un nombre entier de fois U_k, on décide que B coïncide avec A_{k+1}).

Il faudrait maintenant imaginer un symbole, qu'il appelle nombre et qui rend compte de cette suite indéfinie d'opérations, et qui pourra en être dit le résultat. Le nombre sera la suite inférieure des entiers obtenus lors du mesurage (l'écriture à virgule illimitée n'est qu'une autre écriture de cette suite).

Ainsi Lebesgue passe de la notion de nombre entier à la notion de nombre en général. Il vérifie ensuite effectivement que sa définition est cohérente, c'est-à-dire qu'à toute écriture décimale d, à toute unité U, à toute demi-droite d'origine A, on peut associer un segment dont la mesure avec l'unité U est cette écriture. Le problème de l'incommensurabilité est contourné, mais pris en charge par l'axiome des segments emboîtés.

Lebesgue construit aussi les quatre opérations sur ces nombres :

- l'addition comme mesure de la somme de deux segments,

- la multiplication comme mesure dans un changement d'unité (si a mesure de AB dans l'unité U, b mesure de U dans l'unité V, alors, par définition de la multiplication, la mesure du segment AB dans l'unité V est $a \times b$),
- la soustraction ($a-b$ si $a>b$) et la division (a/b si $b \neq 0$) géométriquement ou comme opérations inverses respectivement à l'addition et de la multiplication.

6.4 La construction des nombres rationnels chez Rouche à partir des grandeurs

Nicolas Rouche (1992) admet les nombres naturels comme déjà construits. Dans sa théorie il s'intéresse directement à la construction des nombres rationnels. Comme on l'a vu dans la section 3.3.2, on peut définir le fractionnement des grandeurs de la manière suivante :

$m(\frac{1}{n}A) = \frac{1}{n}(mA)$, avec m, n entiers

À partir de cette définition Rouche (1992) élabore les propriétés suivantes sur les grandeurs :

Soient m, n, p, q des entiers et A une grandeur

- $p\left(\frac{1}{q}A\right) + m\left(\frac{1}{n}A\right) = (pn + mq)\left(\frac{1}{qn}A\right)$

Soient $p\left(\frac{1}{q}A\right)$ et $m\left(\frac{1}{n}A\right)$, en divisant $\frac{1}{q}A$ par n et $\frac{1}{n}A$ par q, on obtient une commune mesure entre $p\left(\frac{1}{q}A\right)$ et $m\left(\frac{1}{n}A\right)$: $\frac{1}{qn}A$, et ainsi on aura l'égalité des grandeurs $p\left(\frac{1}{q}A\right)$ et $m\left(\frac{1}{n}A\right)$ lorsque $pn = qm$.

Chaque classe d'équivalence est appelée « opérateur de fractionnement ».

Soit maintenant Q l'ensemble des opérateurs de fractionnement et QU l'ensemble des grandeurs de $\tilde{X}$ mesurables avec l'unité U. On considère l'application qui envoie toute mesure sur sa grandeur, à savoir $f : Q \to QU, r \to f(r) = rU$

L'application $f : Q \to QU$ qui envoie les mesures sur les grandeurs mesurables (dans une unité U) est un isomorphisme pour l'addition et l'ordre.

Quels que soient les opérateurs rationnels r, s, t, on a :

- L'une de situations suivantes $r < s, r = s, s < r$

- La propriété d'associativité $(r+s)+t=r+(s+t)$
- La commutativité $r+s=s+t$
- La propriété qui lie l'ordre et l'addition $r<s \Leftrightarrow r+t<s+t$

Rouche construit uniquement les nombres rationnels, il ne s'intéresse pas aux nombres réels.

6.5 Bilan sur les grandeurs et les nombres

Une grande partie des mathématiques s'est construite sur la relation entre les grandeurs et les nombres, particulièrement à l'aide de la mesure des grandeurs. Dans cette partie, nous avons montré certains de ces constructions. On a vu comme le problème de l'incommensurabilité de certaines grandeurs s'est posé dans les mathématiques grecques et comme Stevin mesure ces grandeurs incommensurables à l'aide des nombres irrationnels. De plus, nous avons montré deux constructions des nombres à partir des grandeurs. L'une prend appui sur la mesure des longueurs et l'autre sur la notion de grandeur. La construction des ensembles des nombres est née à partir de la nécessité de mesurer certaines grandeurs, mais, à partir de la réforme des mathématiques modernes, les nombres sont construits sans faire appel aux grandeurs. Ainsi, l'histoire nous conduit à penser que :

> « […] seul un enseignement des mathématiques liant nombres et grandeurs durant toute la scolarité primaire et une partie du secondaire, permet de préserver une compréhension en profondeur de la richesse et de la complexité du numérique, en même temps qu'il favoriserait l'application des mathématiques aux autres sciences du réel » (Friedelmeyer, 2001, p. 31)

Selon cette hypothèse la compréhension des nombres entiers, décimaux, rationnels et irrationnels chez les élèves devrait se réaliser par une construction des nombres à partir des mesures des grandeurs.

7. Les grandeurs et le géométrique

Dans cette partie, nous allons montrer certains liens potentiels entre les grandeurs géométriques et le domaine géométrique.

7.1 Les longueurs

Plusieurs mathématiciens, comme Descartes ou Stevin, ont construit les opérations numériques à partir des objets géométriques. Ce passage entre le numérique et le géométrique est réalisé à l'aide des longueurs. Dans cette partie, notre but est de construire les opérations sur les longueurs en utilisant des notions géométriques. Connaissant deux segments de longueur x et y et un nombre naturel n, nous allons rappeler comment on peut définir certaines opérations sur les longueurs comme $x+y, y-x, nx, \frac{x}{n}, \sqrt{x}$.

7.1.1 Constructions géométriques des opérations sur les longueurs

- L'addition de longueurs : $x+y$

On trace une demi-droite d'origine O et on reporte à l'aide du compas la longueur x et tout à côté on reporte la longueur y. Le segment obtenu a pour longueur x + y.

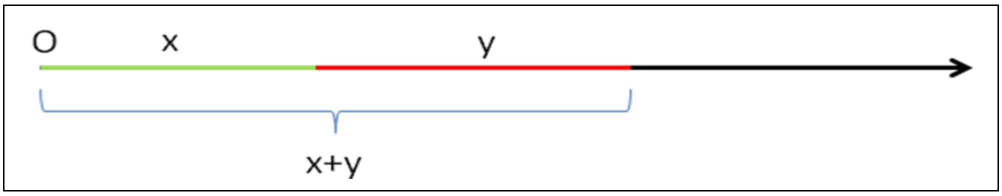


Figure 2-1. Addition géométrique de deux longueurs

- La soustraction de longueurs : $y-x$

Dans notre exemple, y est supérieur à x. On va donc reporter la longueur y et ensuite on reporte la longueur x comme dans l'addition, mais "dans l'autre sens"

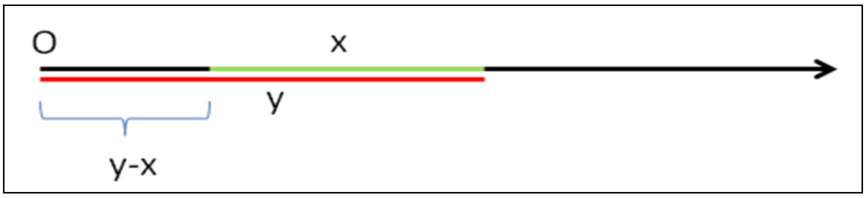


Figure 2-2. Soustraction de longueurs

- La multiplication par un naturel : nx

On additionne n fois la longueur x.

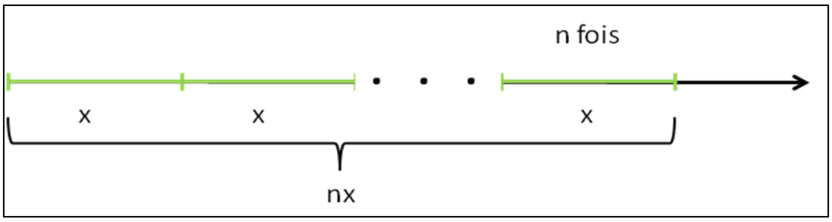


Figure 2-3. Multiplication d'une longueur par un naturel

- La division par un nombre naturel : $\frac{x}{n}$

On trace deux demi-droites d_1 et d_2 d'origine O. Sur une, on reporte un segment u unité n fois et on obtient les points $B_1, B_2, \ldots, B_n$, puis sur

l'autre et toujours à partir du point O, on reporte le segment de longueur x et on obtient le point A.
On trace la droite AB_n et les droites parallèles à AB_n passant par $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Elles coupent le segment de longueur x en n parties égales.
Par exemple pour $n = 3$, on obtient la construction suivante :

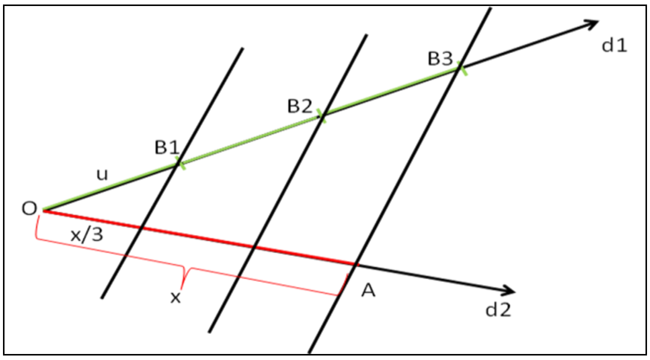


Figure 2-4. Division d'une longueur par un naturel

Cette procédure est une conséquence du théorème de Thalès.

- Bilan sur les constructions géométriques des opérations sur les longueurs

Depuis Euclide et jusqu'au XVII^e siècle, les mathématiques comportent deux grands domaines : l'arithmétique et la géométrie. On peut établir un pont entre géométrie et arithmétique, en appliquant aux longueurs les opérations sur les nombres. Comme nous l'avons montré, on utilise des objets géométriques, les segments pour déterminer les opérations élémentaires sur les longueurs.

7.1.2 *Constructions géométriques des longueurs connaissant une unité de longueur*

Les opérations géométriques suivantes sur les longueurs ont été réalisées par Descartes dans son livre « La géométrie » (Santos-Farias, 2010). Dans ce but, il choisit une unité de longueur et utilise diverses propriétés géométriques. Il détermine géométriquement la multiplication et la division entre deux longueurs, ainsi que la racine carrée d'une longueur.

- La multiplication entre deux longueurs

Soit la figure suivante :

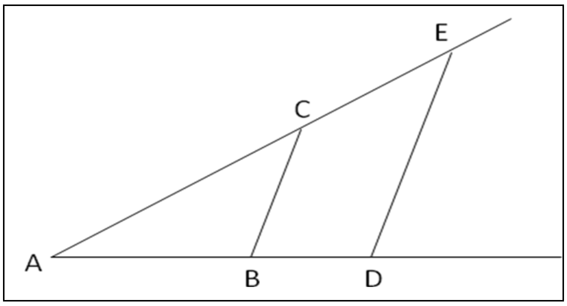


Figure 2-5. La multiplication de deux longueurs

Pour calculer la multiplication entre deux longueurs AD et AC, on prend le segment AB comme l'unité. On sait que les triangles ABC et ADE sont semblables et donc les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles, c'est-à-dire $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Ce qui peut-être écrit $AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$, comme la longueur AB est unitaire, la longueur AE représente le produit des longueurs AD et AC.

- La division entre longueurs

On souhaite construire la division de deux longueurs AE par AD. En prenant la configuration de la figure 2-5 et de façon analogue à la multiplication, on a $AC = \frac{AE}{AD} \cdot AB$. AB étant la longueur unité, la longueur AC représente la division de AE par AD.

- La racine carrée d'une longueur

On veut construire le segment ayant comme longueur la racine carrée d'une longueur. Soit la figure suivante :

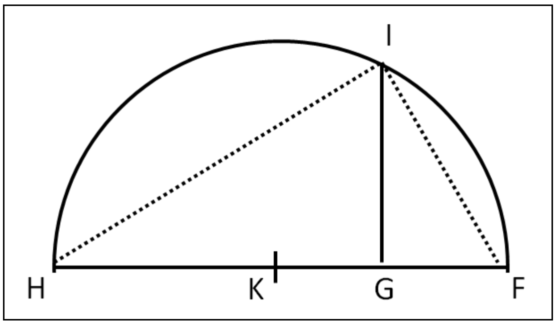


Figure 2-6. Construction de la racine carrée d'une longueur

Soit la longueur FG l'unité. Comme l'angle HIF est droit, on obtient que $IG^2 = HG \cdot GF$. La longueur FG étant unitaire, on conclut que $IG = \sqrt{HG}$.

- Bilan sur les constructions géométriques des longueurs

L'idée de Descartes était de définir les opérations multiplication, division et racine carrée en passant par le cadre géométrique. Il choisit « une unité » de longueur pour construire géométriquement ces opérations. Le passage entre le numérique et le géométrique est réalisé à l'aide des longueurs de segments.

7.1.3 Bilan sur les longueurs et la géométrie

En mathématiques les constructions géométriques des opérations élémentaires à l'aide des longueurs nous révèlent une dynamique entre le cadre géométrique, celui de l'arithmétique et celui des grandeurs. Ces constructions sur les segments apparaissent au collège sous la forme des constructions géométriques à la règle et au compas.

7.2 Les aires

Nous avons choisi de présenter deux approches théoriques concernant les aires. La première travaille sur le concept d'aire sans faire appel aux mesures, c'est la théorie d'Hilbert (Pressiat, 2002, 2009). La deuxième définit les aires à partir de la notion de mesure, c'est la théorie de Lebesgue (1975). Ces théories sont aussi exposées dans le document d'accompagnement « Grandeurs et mesures » (2007).

7.2.1 La théorie d'Hilbert

Euclide a développé dans le livre I toute une théorie des propriétés et des comparaisons des aires sans recours à leur mesure (Pressiat, 2009). Les démonstrations faites par Euclide dans ce livre consistent à ajouter et retrancher des figures congruentes (ou isométriques) à des figures congruentes, pour obtenir d'autres figures congruentes. Le résultat de ces travaux est synthétisé au « Grundlagen der Geometrie » (Fondements de la géométrie) de Hilbert. Dans le chapitre IV de ses Fondements, après avoir défini un polygone comme réunion finie de triangles, il convient qu'un polygone A est décomposé en deux polygones B et C si l'on a $A = B \cup C$ et si $B \cap C$ est réduit à une réunion de segments. La décomposition en un nombre fini de polygones se définit de façon analogue. Suivent alors les deux définitions :

- Deux polygones A et A' sont équivalents par décomposition (ou équidécomposables) si l'on peut décomposer A en triangles $T_1, \dots, T_n$, et A' en triangles $T_1', \dots, T_n'$ de sorte que chaque triangle T_i soit congruent au triangle T_i'.

- Deux polygones A et A' sont équivalents par complémentation (ou équicomplémentables) s'il existe deux polygones équivalents par décomposition C et C' tels que C soit décomposé en A et B, et C' en A' et B', avec B et B' équivalent par décomposition.

Il est clair que si deux figures sont équidécomposables alors elles ont même contenance (sont équicomplémentaires). Bolyai (1832) et Gerwin (1833) démontrent le théorème : "Deux polygones ont la même aire si et seulement si ils sont équivalents par décomposition". Ce théorème assure donc qu'on peut toujours trouver un puzzle pour passer d'un polygone à un polygone de même aire.

Au collège, on se réfère plus habituellement à la méthode d'équidécomposabilité comme la méthode de découpage-recollement. À partir de cette théorie, on justifie aussi la méthode de complémentation. Ces deux procédures seront approfondies dans le chapitre IX de notre thèse.

À partir de ce théorème, on peut démontrer plusieurs propriétés (Perrin, 2006), par exemple :

- Soit ABCD un parallélogramme. La diagonale partage ABCD en deux triangles de même aire.
- Soit ABCD un parallélogramme et soit M un point de [DC]. Alors, l'aire du triangle AMD est la moitié de celle du parallélogramme.
- Soit ABC un triangle et soit M le milieu de [BC]. On a A(ABM) = A(AMC) (la médiane AM partage le triangle en deux triangles de même aire).
- Soient ABC et DBC deux triangles de même base [BC] dont les sommets A et D sont sur une parallèle à (BC). Alors les deux triangles ont même aire.

La théorie élaborée par Hilbert définit l'aire à l'aide des objets géométriques, les polygones. Ainsi, plusieurs théorèmes géométriques peuvent être démontrés à l'aide des aires, par exemple le théorème de Thalès et de Pythagore.

7.2.2 Lebesgue et la mesure de l'aire (1975)

Lebesgue (1975) souhaite expliquer la notion d'aire et propose un exemple. On suppose qu'on veut paver des différentes pièces avec des carreaux ayant la forme de carrés tous égaux. Pour une première pièce, il suffira de 100 carreaux utilisés convenablement et entièrement et pour un seconde pièce on utilisera 150 carreaux. On dit alors que la première pièce a une aire plus petite que la seconde et on précise en disant que la première a une aire de 100 carreaux et la seconde une aire de 150 carreaux. Après avoir expliqué cette notion d'aire. Lebesgue construit une définition d'aire avec une procédure analogue à celle de la notion de longueur. Dans le plan, on considère d'abord le quadrillage donné par les droites parallèles aux axes à partir d'un carré C. L'aire de ce carré C fermé du quadrillage est égale à 1 unité. On recouvre le plan avec un réseau R de carrés égaux à C, appelés les carrés U.

Ensuite, on subdivise les côtés de ces carrés en dix parties égales, on obtient un réseau R_1 de carrés qui sont dits les carrés U_1, il procède de même façon en construisant les réseaux R_2 , R_3, etc. Comme chaque quadrillage i est la réunion de 100 carrés du réseau i-1, on va attribuer aux petits carrés U_i l'aire $\frac{1}{100^i}$. La réunion de n carrés aura pour aire $\frac{n}{100^i}$.

Maintenant on prend un domaine D, on compte combien il y a des carrés U_i formés entièrement de points de D ; soit n_i. Comme un carré U_i contient 100 carrés U_{i+1}, on a donc :

$$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \leq \ldots$$

En dénombrant les carrés U_i dont certains points appartiennent à D, soit N_i, on a :

$$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \geq \ldots$$

On obtient :

$$\frac{n_i}{100^i} \leq AireD \leq \frac{N_i}{100^i}$$

Autrement dit, Lebesgue encadre l'aire à partir des suites de quadrillages intérieurs et extérieurs.

Lorsque $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers zéro quand i augmente indéfiniment, on dit que le nombre défini par ces deux suites est l'aire de D par rapport à l'unité U. Ainsi, on peut définir une fonction mesure μ (l'aire) sur l'ensemble de domaines quarrables, telle que $\mu(C) = 1$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

- Si D_1 et D_2 sont quasi-disjointes, alors $\mu(D_1 U D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$;
- $\mu(D) \geq 0$, pour tout D ;
- μ est invariante par isométrie : pour toute isométrie g et tout domaine D, $\mu(g(D)) = \mu(D)$
- Pour tout polygone convexe P, il existe une seule application μ définie sur l'ensemble des polygones et vérifiant les propriétés ci-dessus que telle que $\mu(P) = 1$.

A partir de ces propriétés, on peut démontrer les théorèmes suivants :

- Tout polygone a une aire
- Si l'on subdivise un polygone P en polygones $P_1, P_2, \ldots P_m$ on a $AireP = AireP_1 + AireP_2 + \ldots + AireP_m$
- Deux polygones égaux ont même aire

À différence de Hilbert, Lebesgue définit la notion d'aire à partir d'une unité de mesure. Pour construire cette notion d'aire, ce mathématicien emploie des carrés. Ainsi, l'espèce de grandeur aire fait le lien entre des objets géométriques et les nombres considérés comme mesures.

7.2.3 *Bilan sur les aires et la géométrie*

À travers ces deux théories, on peut observer que la notion d'aire peut être définie à l'aide des objets géométriques comme les polygones, dans la théorie élaborée par Hilbert, ou les carrés, dans la théorie élaborée par Lebesgue. Cependant, ces deux approches théoriques renvoient à deux manières de concevoir la notion d'aire. La première définit les aires sans faire appel aux mesures et la deuxième s'appuie sur une « unité d'aire ». Dans tous les cas, la notion d'aire est toujours attachée aux objets géométriques et cette espèce de grandeur sert à démontrer plusieurs propriétés et théorèmes dans le cadre géométrique.

7.3 Les volumes

La théorie des volumes, au départ, est très proche de celle des aires. En dimension 3, un résultat crucial affirme que les trois pyramides $ABCA'$, $BCA'B'$ et $A'B'C'C$ en lesquelles se décompose un prisme à base triangulaire $ABCA'B'C'$ ont même volume.

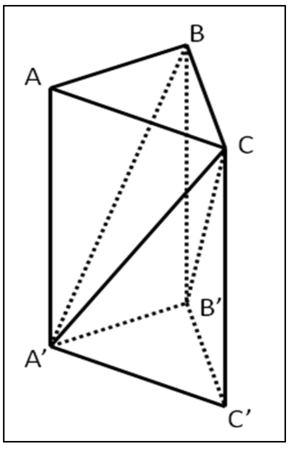


Figure 2-7. Tétraèdres

II suffit pour cela de prouver que deux tétraèdres $ABCD$ et $ABCD'$ ont même volume si la droite DD' est parallèle au plan ABC. Mais ce dernier résultat nécessite chez Euclide de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire un découpage continué indéfiniment et une application de l'axiome d'Archimède (ou, de façon moderne un calcul d'intégrale). On comprend alors le troisième problème d'Hilbert : « Étant donnés deux polyèdres d'égal volume, est-il possible de découper le premier polyèdre en des polyèdres et de les rassembler pour former le second polyèdre ? » L'équidécomposabilité des polyèdres dans l'espace a ainsi fait l'objet du troisième des 23 problèmes que Hilbert a posés lors du second Congrès International des Mathématiciens à Paris, en 1900 sous le titre : De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales. Ce problème a été résolu par Max Dehn la même année que Hilbert l'avait posé. Dehn a trouvé une condition nécessaire pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables. Cette condition fait intervenir un invariant, l'invariant de Dehn d'un polyèdre. Si deux polyèdres sont équidécomposables, leurs invariants de Dehn sont égaux. En montrant que les invariants de Dehn du tétraèdre régulier ayant pour côté l'unité et celui du cube de même volume sont différents, on prouve qu'ils ne sont pas équidécomposables. Ainsi on ne peut pas calculer tous les volumes, en utilisant uniquement le découpage-recollement, l'analogue de Bolyai est faux dans l'espace. À travers cet exemple, on voit que les propriétés de la notion d'aire ne sont pas toutes applicables à la notion de volume. Ainsi, il est nécessaire de définir des théories spécifiques à chaque espèce de grandeur.

8. Conclusion Partie B

Dans les paragraphes précédents, nous avons examiné les interrelations entre les grandeurs et d'autres cadres. Plus spécifiquement, nous avons regardé les liens entre le cadre des grandeurs et les cadres fonctions, numérique et géométrique. Nous avons trouvé des nombreuses relations entre les grandeurs et les autres domaines. Cependant, nous avons choisi de présenter celles qui peuvent être étudiées au collège ou servir d'appui au professeur. Dans le cadre des fonctions, on a vu que la notion de proportionnalité peut être travaillée en tant que fonction linéaire. Dans le cadre du numérique, nous avons montré que les différents ensembles des nombres et leurs opérations peuvent être construits à l'aide des mesures des grandeurs. Et, dans le cadre de la géométrie, des constructions et des théorèmes prennent appui sur les espèces de grandeurs géométriques longueur, aire et volume. Ce travail relatif au savoir savant nous servira à étudier la place et le rôle des grandeurs dans la construction de ces domaines au niveau de l'enseignement au collège.

Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons choisi de présenter le cadre des grandeurs et les interrelations entre ce cadre et les cadres fonctions, numérique et géométrique.

Premièrement, nous pensons avoir montré qu'à une certaine époque, les grandeurs ont joué un rôle important dans la construction des mathématiques, notamment dans la construction des domaines comme la géométrie, les fonctions et le numérique. Aujourd'hui les mathématiques se construisent en dehors du concept de grandeur. Ainsi, il existe diverses théories mathématiques, quelques-unes prennent appui sur les grandeurs et d'autres peuvent se construire sans faire appel à ces notions. Dans les prochains chapitres, nous identifierons des besoins théoriques spécifiques au collège en utilisant des éléments technologiques et théoriques appartenant à ces différentes théories.

Deuxièmement, dans le chapitre I, nous avons expliqué que la création du domaine des grandeurs au collège nécessite des besoins mathématiques pour leur enseignement. Dans ce chapitre, concernant le savoir savant, nous avons présenté des théories pour les grandeurs en tant que cadre mathématique et pour chaque espèce de grandeur. À l'aide de ces outils, nous étudierons le fonctionnement d'un éventuel domaine des grandeurs dans les chapitres ultérieurs au niveau de l'enseignement.

Chapitre III

Étude des rapports institutionnels à l'objet grandeur

Notre étude porte sur l'enseignement et l'apprentissage des grandeurs au collège. Nous nous intéressons ainsi à la place et le rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques. Nous étudions comment s'insèrent les différentes espèces de grandeurs dans les différents domaines. Relativement à notre cadre théorique, nous dégageons dans cette partie les aspects essentiels du rapport institutionnel actuel dans chaque domaine aux objets en jeu, principalement nous examinerons les niveaux de codétermination didactique présents dans les programmes du collège en France, ainsi que les praxéologies relatives aux grandeurs qui existent depuis 1995.

1. Méthodologie

1.1 Les programmes et les périodes considérées

Nous nous intéressons aux conditions et aux contraintes actuelles à propos des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques (numérique, fonctions et géométrie) ainsi que leurs interrelations dans l'enseignement mathématique au collège. Les questions suivantes guideront notre étude :

- Peut-on repérer la présence d'un cadre ou domaine des grandeurs ? Sinon, dans quels domaines trouve-t-on les grandeurs ?
- Quels sont les types de tâches, les techniques et les savoirs de référence dans chaque domaine mathématique relativement aux grandeurs dans l'enseignement au collège ?
- Quels sont les liens entre les différents domaines mathématiques relativement aux grandeurs dans l'enseignement ?

Pour y répondre, nous centrons notre analyse sur les programmes et documents d'accompagnement ou ressources du collège apparus entre 1995 et 2010. Une première exploration nous a amené à diviser cette période en quatre parties ou sous-périodes, en relation avec l'apparition de nouveaux programmes au collège :

Institution	**Période**	**B.O**	**Année d'application**	**Programme**
CA1	A1	B.O hors série n°48 du 28 décembre 1995	1996-1997	6^{e}
		B.O hors série n°5 30 janvier 1997	1997-1998	5^{e}
		B.O hors série n°5 30 janvier 1997	1998-1999	4^{e}
		B.O hors série n°10 15 octobre 1998	1999-2000	3^{e}
CA4	A2	B.O hors série n°4 et n°5 du 9 septembre 2004	2005-2006	6^{e}
		B.O hors série n°5 du 25 août 2005	2006-2007	5^{e}
		B.O hors série n°5 du 25 août 2005	2007-2008	4^{e}
	A3	B.O hors série n°6 du 19 avril 2007	2007-2008	6^{e}, 5^{e}, 4^{e}
		B.O hors série n°6 du 19 avril 2007	2008-2009	3^{e}
	A4	B.O hors série n°6 du 28 août 2008	2009-2010	6^{e}, 5^{e}, 4^{e} , 3^{e}

Tableau 3-1. Périodes des programmes scolaires selon les bulletins officiels

Nous avons considéré seulement deux institutions CA1 et CA4, car les programmes de la période A4 sont une réécriture des programmes de A3 et de A2. Tout d'abord, CA1 correspond à l'institution collège de la période comprise entre 1995 et 2005. Ensuite, à partir de 2005, pour l'institution CA4, nous considérons les programmes des périodes A2, A3 et A4 comme un seul bloc d'étude, puisqu'on trouve peu des changements entre les textes officiels de ce bloc. Par exemple, les programmes en A3 sont une réécriture des programmes de A2 avec la nouveauté du socle commun. Une autre raison qui nous a amené à considérer les périodes comme un seul bloc est la nouvelle organisation des programmes en 2005 en 4 domaines d'étude :

- organisation et gestion de données, fonctions ;
- nombres et calculs ;
- géométrie ;
- grandeurs et mesures.

Ainsi, nous souhaitons repérer et comparer les rapports dans les deux institutions : enseignement des mathématiques au collège dans la période A1 (CA1) et enseignement des mathématiques au collège dans la période A2, A3 et A4 (CA4).

1.2 Les documents d'accompagnement ou les documents ressource

Nous avons identifié dans ces deux périodes deux autres institutions. On peut considérer aussi dans les institutions CA1 et CA4 les documents d'accompagnement ou documents ressources proposés par le ministère de l'Éducation nationale. Pour la période A1, l'institution ministérielle présente ces textes complémentaires sur le nom de « Accompagnement pour le collège », il précise le statut du document comme « la présentation de quelques réflexions pour préciser certaines orientations du programme de mathématiques » (C. N. D. P., 1996a). Pour la période A4, ces textes prennent le nom de « ressources pour le collège » et il est indiqué qu'ils peuvent être utilisés « librement dans le cadre des enseignements et de la formation des enseignants. » (D.G.E.S.C.O., 2007). Ainsi, le statut de ces documents n'est pas le même dans les deux époques. Dans la période A1, les documents d'accompagnement complètent les directives des programmes scolaires, et donc ils appartiennent à l'institution CA1. Par contre, l'utilisation des documents ressources dans la période A4 n'est pas obligatoire, et en conséquence ils ne font pas partie de l'institution CA4. Cependant, pour comprendre les conditions et contraintes prescrites par la noosphère, nous avons décidé d'étudier une autre institution CDA4, laquelle prend en compte les programmes et les documents ressources apparus dans les périodes A2, A3, A4.

Dans la période A1 on retrouve trois documents d'accompagnement :

- accompagnement des programmes de 6^{e} en application pour la rentrée 1996-1997 ;
- accompagnement des programmes du cycle central 5^{e}/4^{e} en application pour la rentrée 1997-1998 ;
- accompagnement des programmes de 3^{e} en application pour la rentrée 1999-2000.

Parmi ces documents, on trouve les grandeurs dans les deux derniers. Dans le cycle central, les grandeurs apparaissent comme objet d'étude de la proportionnalité et comme des outils pour comprendre la réalité. Dans le document d'accompagnement de 3^{e}, la référence aux grandeurs devient plus directe. Ce document est composé de 4 parties, la troisième partie est consacrée entièrement à la « Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques au collège ».

Dans la période A4 la présence des grandeurs est plus insistante. Les grandeurs apparaissent dans six des neuf documents ressources pour le collège. Et il existe même un document consacré aux grandeurs et mesures au collège. Ces textes[1] sont :

[1] Ces documents sont téléchargeables sur le site http://eduscol.education.fr/pid23211-cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

- proportionnalité au collège ;
- calcul numérique ;
- du numérique au littéral ;
- géométrie ;
- nombres ;
- grandeurs et mesures.

1.3 Nos questions et méthodologie d'analyse des programmes

Nous adoptons l'approche écologique et l'approche praxéologique développée par Yves Chevallard (1992).

Du point de vue de cette approche écologique, nous étudions la vie des grandeurs dans les institutions : Collège en A1 (CA1) et Collège en A4 (CA4). Le questionnement écologique s'intéresse principalement à examiner les habitats et les niches des grandeurs dans ces deux institutions :

- Quelles grandeurs apparaissent dans les institutions CA1 et CA4 ?
- Quel est le lieu où les grandeurs apparaissent dans les deux institutions ?
- Sous quelle (s) forme (s) vivent-elles ?
- À quelle (s) fin (s) sont-elles introduites ? À quoi doivent-elles servir ?
- Avec quels objets sont-elles en relation ? Comment sont mises en œuvre ces relations ?

Nous complétons l'étude avec une analyse praxéologique des grandeurs dans CA1 et dans CA4, afin de mieux caractériser les OM :

- Quels sont les différents types de tâches relatifs aux grandeurs ?
- Quelles sont les techniques associées à chaque type de tâches ?
- Des technologies et des théories correspondantes sont-elles explicitées ? Si oui, lesquelles?
- En particulier, existe-t-il une définition pour les grandeurs au collège ? Si oui, laquelle ?
- Quels ostensifs et non-ostensifs sont mobilisés pour les traitements des grandeurs au niveau des institutions ?

Ces deux approches vont permettre d'identifier la vie des grandeurs et de caractériser les rapports institutionnels pour les sujets enseignants et élèves à ces objets. Nous avons ajouté à cela une étude écologique de l'institution CDA4.

Notre avons divisé notre étude en deux étapes. Ces deux étapes s'appuient sur le filtre de grandeurs. Dans un premier moment, nous avons regardé les grandeurs dans les programmes scolaires en identifiant les niveaux de codétermination didactique. Nous avons étudié la structure des programmes et les connaissances présentes de manière à identifier les domaines, les secteurs, les thèmes et les sujets d'étude. Ensuite, nous avons déterminé les types de tâches et les praxéologies associées dans les programmes et les interrelations intra et inter-domaines relatives aux grandeurs. Dans un deuxième moment, nous avons analysé les documents d'accompagnement et les documents ressources des deux institutions. Ils nous ont aidés à obtenir des éléments sur les organisations mathématiques, en particulier au niveau des éléments technologiques et théoriques. L'étude nous a aussi servi à comprendre les raisons d'être des grandeurs au collège, nous avons étudié notamment la dialectique outil-objet des grandeurs dans les différents domaines mathématiques.

Nous avons pris en compte les habitats où les programmes font référence explicite aux grandeurs. C'est important de signaler que les programmes sont divisés en contenus, compétences exigibles et commentaires dans la période A1 et, en connaissances, capacités et commentaires dans la période A4. Pour nos analyses, nous avons choisi de prendre en compte toutes les praxéologies mathématiques qui font référence de façon explicite aux grandeurs, soit dans les contenus des programmes, soit dans les programmes en général. On verra donc que certaines fois, on aura des intitulés pour des sujets d'étude qui ne mentionnent pas les grandeurs, mais qui peuvent y faire référence à travers les commentaires du programme. Par exemple, dans le programme de 6^{e} de la période A1, on trouve la présentation suivante :

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Exemples issus d'activités - à base numérique Application d'un pourcentage à une valeur : relevés statistiques ; opérateurs et, notamment, usage des opérateurs constants d'une calculatrice	Effectuer éventuellement avec une calculatrice, des calculs faisant intervenir diverses grandeurs : longueurs, angles, aires, volumes, durées	On se servira de ces exemples pour : – lire et établir des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de représentations graphiques, éventuellement en utilisant un ordinateur ; – étudier des situations (échelles, tarifs…) relevant ou non du modèle proportionnel.

Tableau 3-2. Exemples de sujets d'étude en relation avec les grandeurs

Comme on le voit ci-dessus dans la colonne « contenus », le programme demande de calculer le pourcentage d'une grandeur. Dans notre analyse en termes de niveaux de codétermination, les grandeurs n'apparaissent pas explicitement dans le sujet d'étude « application d'un pourcentage » faisant partie du domaine « Organisation de données, fonctions ». Mais elles sont en lien avec ce sujet d'étude d'après les commentaires du programme, car il s'agit de calcul sur diverses grandeurs.

Nous présentons ce travail en deux parties. La première correspond à un repérage de la présence des grandeurs en tant qu'objet et outil dans les périodes A1 et A4 et de leurs habitats et niches au collège. La deuxième montre le rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques.

2. Un regard général sur les grandeurs dans l'enseignement

Tout d'abord, nous considérons essentiel de présenter un premier panorama de ce que fut et est devenu l'enseignement des grandeurs. Le but est d'exposer les directives générales données par la noosphère sur la place et le rôle des grandeurs dans les mathématiques au collège. Nous avons ainsi repéré deux questions générales pour comprendre les enjeux des grandeurs dans le système éducatif :

- Pourquoi faut-il enseigner les grandeurs dans les institutions CA1, CA4 et CDA4 ?
- Comment faut-il les enseigner d'après les instructions dans ces trois institutions ?

Nous avons analysé le discours de la noosphère présent dans les programmes et documents d'accompagnement et dans les documents ressources par rapport à ces deux questions depuis 1995. Des analyses plus approfondies seront exposées dans les parties suivantes du chapitre.

2.1 Disparition et retour des grandeurs dans les programmes

Comme on a vu dans le chapitre II, les grandeurs ont fondé les nombres avant d'être remplacées par les entiers dans les constructions modernes des ensembles de nombres. Avec ces bouleversements, les grandeurs semblent s'être séparées des mathématiques. Les mathématiques construisent actuellement leurs définitions et leurs théories sans utiliser les grandeurs. Cette rupture est signalée dans les documents d'accompagnement de 3^{e} de la période A1 :

> « Aujourd'hui, la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit, formellement, sans référence aucune aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se transmettre et se développer sans référence à la notion de grandeur. » (CNDP, 1999)

Comme conséquence, ils déclarent que la place de grandeurs dans l'enseignement s'est beaucoup réduite, les grandeurs sont des objets qui n'appartiennent pas aux mathématiques, mais qui font le lien entre cette science et les autres disciplines :

> « En effet, en mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple), mais avec les grandeurs ou à partir d'elles ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines » (*ibidem*, 1999)

Les effets sur l'enseignement ont été étudiés par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques. Chambris, par exemple, distingue deux périodes. En 1970, la séparation du continu et du discret élimine les grandeurs de l'étude des nombres, opérations et proportionnalité, et en 1980 on y retrouve la réintroduction des grandeurs et du continu dans le numérique à l'école élémentaire.

À partir de 1995, le mot grandeur apparaît dans les textes institutionnels du collège. Dans le domaine « Organisation de gestion de données, fonctions », le programme de 6e expose comme objectif d'étude « maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ; se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) » (C.N.D.P., 1996). L'importance des grandeurs s'intensifie au point que le document d'accompagnement de 3e (1999) leur consacre un chapitre tout entier.

Cet accroissement se poursuit, et c'est ainsi qu'en 2005, les programmes donnent aux grandeurs une place beaucoup plus visible. D'une part, on repère la création d'un domaine « Grandeurs et mesure » et, d'autre part, on assiste à l'introduction de grandeurs plus complexes. Mais quelles sont les raisons d'être d'un domaine des grandeurs dans l'enseignement ? Et quelle légitimité peut-on donner, du point de vue des savoirs savants et didactiques à cette nouvelle organisation ? À quels besoins répond l'étude des grandeurs quotients et produits plus complexes dans l'enseignement ?

2.2 Pourquoi enseigner les grandeurs ?

2.2.1 Dans l'institution CA1

Dans l'enseignement des mathématiques de la période A1, l'apprentissage s'appuie sur les grandeurs et les mesures. « Il y a d'ailleurs plusieurs raisons qui rendent indispensable, spécialement dans l'enseignement obligatoire, un appui résolu, mais distancié, sur les notions de grandeurs et de mesure » (CNDP, 1999). Mais, nous nous demandons pourquoi la participation des grandeurs à l'enseignement des mathématiques doit être « résolue et distanciée » ? À cette époque les grandeurs contribuent à l'étude de plusieurs concepts, mais elles ne sont pas travaillées en tant qu'objet au sens de Douady (1986). Est-ce que cette distance est liée au fait que les grandeurs n'ont pas une définition dans l'enseignement ? Ou encore, cette distance est-elle due au fait qu'elles servent à étudier d'autres domaines, d'autres disciplines, et aussi l'extramathématique ?

L'esprit des programmes de la période A1 est de faire des mathématiques un outil pour comprendre le monde. Cette science doit favoriser chez les élèves l'entendement et la modélisation de l'univers :

> « Il est également important de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques…) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banque de données, audiovisuel…). » (C.N.D.P., 1996a, p. 29)

La plupart des liens entre les mathématiques et les autres disciplines, et les mathématiques et l'extra mathématique, ne sont possibles qu'à travers l'étude des objets concrets, laquelle doit prendre appui sur les grandeurs. Elles vont permettre aux élèves de s'approprier des connaissances relatives à la réalité. Comme le signalent les documents d'accompagnement du cycle central en 1997 :

> « Les objets mathématiques correspondent plus ou moins directement à des objets de notre environnement, naturels ou produits par l'homme. La plupart des phénomènes permettent d'observer des grandeurs ; l'étude de ces grandeurs conduit à s'intéresser aux rapports qui existent entre elles. » (C.N.D.P., 1997b, p. 12)

L'autre source de légitimation de l'enseignement des grandeurs est le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, notamment la physique :

> « Les problèmes proposés et les situations étudiées sont souvent empruntés à la vie courante. Il y est question de terrains et de clôture, de volumes de gaz ou de liquide, de vitesse, de débits, de mélanges… Il y est aussi question de prix et de coûts, de pourcentages et de l'application de pourcentages à des grandeurs. » (*ibidem*, p.20)

De cette façon, il semble que l'intérêt d'étudier les grandeurs dans la période A1 provienne de la volonté de la noosphère de présenter les mathématiques comme un moyen pour raisonner sur la nature.

Un autre aspect qui a conduit à la noosphère à étudier les grandeurs dans cette période est la nécessité de construire d'autres notions mathématiques d'une manière accessible aux élèves du point de vue cognitif. Les mathématiques au collège ne doivent pas être formelles, les connaissances sont tenues d'être proches de la réalité. Ainsi, la présence des grandeurs au collège se justifie par des raisons didactiques :

> « Aujourd'hui, la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit, formellement, sans référence aucune aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se transmettre et se développer sans référence à la notion de grandeur. Sans cette référence, la présentation des mathématiques serait toutefois beaucoup trop abstraite pour être à la portée des élèves du collège, et même bien au-delà. » (C.N.D.P., 1999, p.20)

La fonction des grandeurs dans cette époque est de rendre plus facile la compréhension et l'étude des mathématiques pour les élèves. Les raisons didactiques et épistémologiques d'un travail sur les grandeurs au collège sont explicitées dans le même document :

> « Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que, comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines
>
> S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie.
>
> C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs. » (*ibidem*)

En conclusion, l'apparition des grandeurs dans les textes officiels de 1995 semble retrouver sa légitimation dans des besoins didactiques et dans l'étude de l'extramathématique. Les grandeurs facilitent la compréhension des autres notions mathématiques, elles font le lien entre les mathématiques et la vie réelle tout en favorisant la construction des connaissances mathématiques et elles nous permettent de modéliser le monde.

2.2.2 *Dans les institutions CA4 et CDA4*

- Les grandeurs en tant qu'objet

Dans la période A4, la nécessité de donner une place plus importante aux grandeurs dans l'enseignement est plus claire. La création d'un domaine « Grandeurs et mesures » serait le désir de la noosphère de redonner le statut d'objet aux grandeurs. Ainsi, le document ressource « Grandeurs et mesures » déclare :

> « L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire se trouve ainsi confronté à deux nouvelles obligations. La première consiste à redonner du sens à des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs, les aires, les masses dans un contexte social où elles ont une moindre visibilité et y sont fortement remplacées par des nombres (leurs mesures, moyennant le choix d'unités).» (D.G.E.S.C.O., 2007)

Les textes officiels veulent donc faire travailler les grandeurs de façon autonome, en calculant directement sur les grandeurs. Ici se trouve la principale différence de la période A4 par rapport à la période A1. Même si l'étude des grandeurs dans A1 est un des objectifs de l'enseignement, les textes officiels ne font pas référence à un traitement des grandeurs indépendant de leurs mesures. Il apparaît que l'importance d'un travail sur les grandeurs est basée sur le fait qu'elles représentent un outil fort pour l'apprentissage et la construction d'autres notions. Dans l'institution CDA4, ce statut est également donné aux grandeurs, mais le statut d'objet est aussi pris en compte par les textes officiels.

Pour comprendre de plus près cette évolution, regardons les praxéologies mathématiques proposées par les programmes dans les deux périodes : en 6e, on retrouve un travail géométrique sur les aires dans les deux époques. Il s'agit, par exemple, de comparer les aires au travers des pavages ou découpages et recollements. Cependant, dans la période A1, il est écrit « Comparer des aires » et dans la période A4 « Comparer géométriquement des aires ». Les programmes de la période A4 ajoutent : « la comparaison d'aire sans avoir recours à des formules est particulièrement importante pour affermir le sens de cette notion ». Même si les textes officiels de 1995 cherchent à donner une place beaucoup plus importante aux grandeurs dans l'enseignement par rapport aux périodes précédentes, il semble que l'intention n'est pas intégralement attente. En relation avec la place des grandeurs dans la période A1, Chevallard et Bosch indiquent :

> « Tout cela [en relation aux programmes et documents d'accompagnement de A1], semble pourtant suggérer le texte examiné [document d'accompagnement de 3e], n'est au vrai qu'un théâtre d'ombres, le mobile de l'action plutôt que la matière de l'activité. Partant de grandeurs quand la chose se présente (ce qui n'est pas toujours le cas), on se hâte de passer aux nombres. Dès lors, on travaille sur des nombres, pour ne revenir qu'en fin de parcours aux grandeurs » (Chevallard & Bosch, 2000-2001, p. 11)

On peut dire que la période 1995-2005 présente encore quelques flous qui semblent s'atténuer en 2005. Nous pensons que la période A1 constitue une période transitoire entre l'absence des grandeurs dans les programmes de 1970, conséquence d'une conception numérique de leur enseignement, et la constitution d'un domaine « grandeurs et mesures » en 2005. C'est bien dans la période entre 1995 et 2005 que commencent à se consolider les bases du statut des grandeurs comme objet mathématique.

- Les grandeurs et la modélisation du monde

Une autre légitimation de l'étude des grandeurs dans la période A4 est l'obligation de la noosphère de présenter des grandeurs plus complexes au collège. Cette introduction répond à des besoins socio-économiques :

> « Les programmes actuels de l'école et du collège leur redonnent une place plus importante, alors que leur visibilité dans la vie sociale a beaucoup évolué : d'une part, la disparition de l'usage de certains instruments prive l'enseignement de référence à des pratiques sociales convoquant des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs et les masses ; d'une autre part, deux faits aussi différents que l'obligation légale d'affichage des prix par kilogramme et l'emploi dans chaque secteur d'activité de grandeurs bien spécifiques mettent en évidence le besoin socio-économique de grandeurs composées plus complexes. » (D.G.E.S.C.O., 2007)

Suite à l'avancement des sciences et au désir de l'homme d'interroger le monde, aujourd'hui les modélisations des phénomènes de la réalité font appel à des grandeurs beaucoup plus complexes comme les vitesses, des grandeurs économiques, des grandeurs physiques, etc. La noosphère se contraint à donner aux élèves les outils pour comprendre ces représentations du monde. Ainsi, à partir de 1995 commence le chemin vers l'étude des grandeurs produits et quotients de plus en plus complexes.

2.2.3 Les grandeurs comme aide à l'étude d'autres notions

La principale fonction des grandeurs est de participer à la construction de diverses notions mathématiques. En effet, on peut remarquer que la plupart des références justifient l'enseignement des grandeurs au collège par leur rapport à l'enseignement d'autres connaissances dans les deux périodes. Par exemple, on y retrouve le texte suivant dans le domaine « Organisation et gestion des données, fonctions » pour la période A1 : « La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen » (C.N.D.P., 1997b , p. 10). Et dans la période A4 et aussi à propos de la proportionnalité, on peut relever :

> « Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre grandeurs ou données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et de représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes […], les fonctions numériques associées […] n'ont pas été explicitées de manière formelle et décontextualisée. Le passage des grandeurs aux mesures permet justement une telle formalisation, et c'est alors que le modèle unique de la fonction linéaire trouve sa légitimité. » (D.G.E.S.C.O., 2005)

D'une manière générale, nous avons trouvé des précisions ou indications qui explicitent les liens entre les grandeurs et les autres notions dans les contenus suivants :

Période	A1	A4
Éléments	Nombres entiers et décimaux Figures géométriques Proportionnalité et fonction linéaire	Numération et opérations Nombres rationnels et réels Algèbre Statistique descriptive Configurations géométriques Proportionnalité et fonction linéaire

Tableau 3-3. Éléments en lien avec les grandeurs dans les périodes A1 et A4

L'observation des programmes et documents d'accompagnement des périodes A1 et A4 montre que les notions mathématiques qui sont constamment en relation avec les grandeurs sont les nombres, les configurations géométriques et la proportionnalité. En A4, les documents ressources font aussi référence aux grandeurs comme outils pour étudier l'algèbre et la statistique. Le rôle des grandeurs dans la construction de ces notions sera explicité ultérieurement dans le chapitre.

2.2.4 Conclusion

On peut comprendre la volonté d'enseigner les grandeurs au collège à partir de 1995, en regardant les trois aspects suivants que l'on peut relier à divers niveaux de codétermination didactique :

- Le niveau société à travers l'étude de l'extramathématique : les grandeurs font le lien entre les mathématiques et la vie réelle, le désir d'enseigner les grandeurs répond à une première condition écologique de la transposition didactique, la compatibilité entre les mathématiques et l'environnement social ;
- Le niveau pédagogie et discipline à travers l'étude des aspects didactiques : les grandeurs facilitent la construction cognitive de divers concepts ;
- Le niveau discipline à travers l'étude des mathématiques : les grandeurs sont à l'origine de cette science.

2.3 Comment enseigner les grandeurs ?

Les programmes actuels de l'école primaire insistent sur la nécessité de travailler la compréhension des grandeurs avant leur mesure. Les élèves doivent être confrontés à des activités de comparaison, de classement et de rangement préalablement à leur mesure et à l'utilisation des formules. Il faut construire la grandeur indépendamment de la mesure :

> « Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure à la suite du nombre n'est pas suffisant pour que les élèves se représentent correctement une grandeur […] : il est nécessaire qu'ils aient préalablement travaillé sur les propriétés de chacune de ces grandeurs […] » (DGESCO, 2002)

Dans la période A1, les documents d'accompagnement de 3^{e} signalent que les grandeurs doivent être travaillées dans le contexte de la vie courante, le véritable travail mathématique ne relève pas des grandeurs, mais des nombres (DGESCO, 1999). On fait appel aux grandeurs pour définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets dans la vie courante. Ils serviront à faire le passage entre les objets et les mesures, c'est-à-dire les nombres. « Depuis l'école élémentaire, on est passé progressivement de situations de comparaison de grandeurs […], puis de mesurage, au travail sur les mesures, c'est-à-dire les nombres » (*Ibidem*, 1999).

Ainsi, dans cette période, les grandeurs ne seront pas présentées en tant que notion ou concept pour elles-mêmes, l'étude des grandeurs au collège est fortement liée à l'apprentissage d'autres concepts mathématiques, notamment les nombres. Par exemple les grandeurs longueur et aire sont indispensables pour présenter aux élèves les nombres non entiers et les opérations :

> « Ainsi, pour l'acquisition des techniques opératoires sur les nombres décimaux, il ne suffit pas de décrire des placements de virgule et d'adjoindre éventuellement des zéros adéquats. Il est nécessaire d'étudier des situations qui amènent à opérer sur des nombres décimaux. Par exemple, les mesures de longueur, intégrées à des activités telles que la construction de courbes point par point, peuvent conduire à de telles opérations » (C.N.D.P., 1996b, p. 28)

Il semble qu'à l'école élémentaire on enseigne les grandeurs et leurs propriétés, et que par contre au collège leur enseignement vise l'apprentissage des nombres. Cet aspect numérique des grandeurs est souvent mentionné dans la période A1. Par exemple, en relation avec l'enseignement de la géométrie, les programmes de mathématiques du cycle central signalent : « Ils [les travaux géométriques] constituent, en particulier, le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) » (C.N.D.P., 1997a). Il apparaît que les grandeurs et leurs mesures font partie du domaine du numérique, et ainsi leur traitement est lié aux nombres. Les mêmes programmes déclarent plus loin « le calcul de grandeurs attachées à des objets demeurent des objectifs majeurs ». De cette manière, dans la période A1, on devrait enseigner les grandeurs en les mettant en relation avec d'autres notions, notamment les nombres.

Mais aujourd'hui, si les grandeurs ont été rassemblées dans un seul domaine, peut-on garantir un enseignement des grandeurs comme éléments pour l'apprentissage des autres objets mathématiques ? Avec la nouvelle organisation des programmes, ne risque-t-on pas de couper des liens, et ainsi de se priver de certains besoins nécessaires pour l'enseignement des grandeurs et d'autres notions ? Le fait de définir un domaine de grandeurs ne centre-t-il pas l'enseignement des grandeurs sur leur aspect objet en négligeant leur aspect outil ?

La première indication significative des programmes et des documents ressources de la période A4 est de redonner du sens aux grandeurs géométriques, car elles étaient remplacées pendant une longue période par leurs mesures. Il semble que ces documents essaient de donner cette nouvelle signification à partir de la création d'un domaine de « Grandeurs et mesures », où ils définissent une théorie des grandeurs indépendante de la mesure et revendiquent l'utilisation des unités dans les calculs. En relation à ce deuxième point, ils indiquent : « L'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008)

De manière analogue aux textes officiels de la période A1, ceux de la période A4 mettent en avant la continuité essentielle avec l'école élémentaire, ainsi que le lien fort avec la vie quotidienne. Mais un changement se produit dans la conception des grandeurs comme éléments constructeurs des mathématiques. Elles doivent être enseignées en lien avec d'autres notions mathématiques. Elles doivent servir à construire d'autres objets comme les nombres ou la proportionnalité, mais contrairement à la période A1 qui considère les grandeurs comme objets du numérique, les grandeurs se détachent des nombres et sont considérées comme un domaine à part. Par exemple, dans le document ressource « Proportionnalité au collège », on trouve la considération de trois cadres différents pour l'étude de la proportionnalité :

> « La proportionnalité peut être envisagée dans trois cadres différents, qui souvent peuvent être mis en interaction :
> - le cadre des grandeurs : c'est celui dans lequel se rencontrent le plus souvent les situations de proportionnalité, mettant en relation deux grandeurs ;
> - le cadre numérique dans lequel on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres ;
> - le cadre graphique : représentation de la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués. » (D.G.E.S.C.O., 2005)

À partir de 2005, les instructions officielles semblent nous envoyer à un double statut des grandeurs au collège. Les grandeurs en tant que constituants d'un domaine mathématique sont présentées comme des objets mathématiques à étudier au collège. Mais en même temps, ces documents exposent les grandeurs en tant qu'outil pour l'apprentissage d'autres notions. Si nous reprenons l'hypothèse de Douady (1986) qui avance « qu'on peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions », on peut se poser les questions suivantes à propos des grandeurs :

- Quelles sont les conditions qui vont favoriser ce jeu à propos des grandeurs ?
- Où trouve-t-on la ligne de séparation entre ces statuts ?

- Dans quelles situations faut-il étudier les grandeurs comme objet et comme outil ?
- Quelles seront alors les organisations didactiques et mathématiques relatives à ces deux manières de concevoir les grandeurs ?

2.4 Les grandeurs constituent-elles un cadre ?

En raison de la nouvelle organisation des programmes en 2005, les grandeurs seront considérées comme un domaine mathématique au collège, au sens de Chevallard (2002). C'est dans les documents d'accompagnement de 3e de la période A1 que les grandeurs seront traitées pour une première fois comme un cadre :

> « Quant à la modélisation d'une situation de la vie courante, par exemple par un système d'équations (dans R dès la classe de 4e, ou R^2 en classe de 3e), elle correspond au passage du cadre des grandeurs au cadre numérique. » (CNDP, 1999)

D'après Douady un cadre doit être composé des éléments suivants :

- des objets d'une branche des mathématiques ;
- des relations entre objets ;
- des formulations ;
- des conceptions associées à ces objets et ces relations.

Le document ressource « Grandeurs et mesures » (2007) explicite plus au moins chacune de ces composantes. Il considère comme concepts mathématiques les objets géométriques, les grandeurs (longueur, aire, volume, angle) et les fonctions mesure. Mais il étudie aussi des objets physiques et des objets de la vie quotidienne. La relation entre ces objets est faite à partir de la théorie mathématique de grandeurs proposée dans ce document ressource :

> « On suppose connu un ensemble X d'objets et une relation d'équivalence ~ sur X qui définit une certaine espèce de grandeurs (volume, longueur, etc.) : deux objets x_1, x_2 appartenant à X qui sont équivalents seront dits avoir même grandeur (Il existe en général plusieurs relations d'équivalence intéressantes définissant autant d'espèces de grandeurs différentes). (D.G.E.S.C.O., 2007, p. 3)

Il définit des éléments théoriques et des formulations pour chaque espèce de grandeurs. En reprenant la théorie de Régine Douady, les grandeurs constituent un cadre de la manière suivante :

- les objets principaux appartenant au cadre des grandeurs sont les grandeurs, les objets géométriques et les nombres ;
- les relations entre les objets s'obtiennent à travers de deux relations principales, une relation d'équivalence et une fonction mesure ;

- des formulations spécifiques du cadre des grandeurs sont, par exemple : un même objet peut être le support de plusieurs grandeurs d'espèces différentes, des secteurs congruents sont dits de même angle, des segments congruents ont même longueur, etc ;
- dans ce texte sont évoquées aussi quelques conceptions sur les grandeurs, comme la confusion entre aire et longueur ou le problème du passage précipité des objets aux nombres qui provoque nombreuses difficultés à l'apprentissage des grandeurs.

On peut dire que pour l'institution du « collège programmes et documents ressource » (CDA4), les grandeurs constituent clairement un cadre. Nous répondons ainsi à notre questionnement par l'affirmative, les grandeurs obtiennent une place en tant qu'objets constitutifs d'un domaine dans l'institution CDA4.

3. Les niveaux de codétermination et les praxéologies dans les deux périodes étudiées

Nous avons consacré cette partie du chapitre à l'étude de niveaux de codétermination didactique relativement aux grandeurs. Nous avons analysé des praxéologies mathématiques qui englobent les genres de tâches relatives aux grandeurs que nous avons identifiés avec notre filtre des grandeurs :

- comparer des grandeurs ;
- calculer une grandeur ;
- étudier l'effet des transformations ou déformations géométrique d'un objet sur une grandeur ;
- construire un objet d'une grandeur donnée ;
- construire un objet d'une grandeur plus grande ou plus petite qu'une autre ;
- changer d'unité de mesure ;
- mesurer une grandeur.

Nous avons aussi considéré des praxéologies mathématiques qui prennent en compte les grandeurs ou chaque espèce de grandeur en tant qu'objet, par exemple au niveau des thèmes d'étude concernant les aires ou les angles. Notre objectif est aussi d'étudier les niveaux de codétermination relativement à un cadre des grandeurs. Enfin, nous aborderons dans cette section l'étude des grandeurs en relation avec d'autres notions.

3.1 Les grandeurs dans l'institution CA1 : Les grandeurs « outil »

Dans les programmes de la période A1, on ne trouve pas de références à une définition de grandeurs, on peut même dire que le mot grandeur n'apparaît que timidement dans ces programmes. Dans cette période, on ne trouve pas une théorie des grandeurs pour l'enseignement. On peut trouver quelques éléments faisant référence aux grandeurs dans les documents d'accompagnement de 5e et 4e :

> « Les objets mathématiques correspondent plus ou moins directement à des objets de notre environnement, naturels ou produits par l'homme. La plupart des phénomènes permettent d'observer des grandeurs ; l'étude de ces grandeurs conduit à s'intéresser aux rapports qui existent entre elles. » (CNDP, 1997)

Cependant, en 1999 dans les documents d'accompagnement de 3e, l'énonciation des grandeurs devient explicite. Dans la période 1995-2005, il existe dans l'enseignement des mathématiques au collège trois domaines d'étude, clairement exposés par les programmes:

- travaux géométriques ;
- travaux numériques ;
- organisations de données, fonctions.

Les grandeurs sont présentes explicitement dans deux de ces domaines : « Travaux géométriques » et « Organisation de données, fonctions ».

3.1.1 Deux habitats pour les grandeurs

- Les grandeurs dans le domaine « Travaux géométriques »

À cette époque, le domaine des « Travaux géométriques » est un habitat explicite des grandeurs : « En classe de 4e, la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à des objets, demeurent des objectifs majeurs; s'y ajoute la caractérisation de certains d'entre eux » (C.N.D.P., 1997a, p.11). Et simultanément, il sert d'appui pour l'étude des mesures des grandeurs :

> « Les travaux géométriques prennent appui sur l'usage des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Ils constituent en particulier le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) ou de notions en cours d'acquisition (repérage, proportionnalité). » (C.N.D.P., 1996b)

On y retrouve donc un premier habitat du fait que les grandeurs appartiennent au domaine géométrique dans la période A1. Regardons pour chaque classe du collège les habitats spécifiques des grandeurs en termes de niveaux de codétermination dans la période A1 :

- En classe de 6^e

Le tableau suivant présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 6^e dans la période A1 :

Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
Surfaces planes	Aires	Comparer des aires
		Calculer l'aire d'un triangle rectangle.
		Déterminer l'aire d'une surface
		Calculer l'aire d'un rectangle
	Périmètres	Calculer le périmètre d'un rectangle
		Comparer des périmètres
		Calculer la longueur d'un cercle.
	Reproduction des figures	Reporter une longueur
		Reproduire un angle
Parallélépipède rectangle	Volumes	Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle

Tableau 3-4. Structuration en termes de niveaux de codétermination du domaine « Travaux géométriques » en 6^e dans la période A1

On peut observer que les différentes espèces de grandeurs géométriques constituent des thèmes d'étude en 6^e dans la période A1. Elles servent à étudier les surfaces planes et les solides. Par exemple, le volume n'est pas étudié pour lui-même en tant que concept, mais on travaille plutôt le volume d'un solide particulier, le parallélépipède rectangle. Ainsi, le type de tâches « déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle » appartient à une organisation mathématique locale. Cette organisation mathématique locale fait partie d'une organisation mathématique régionale organisée autour du « parallélépipède rectangle ». De ce point de vue, le concept de volume est étudié seulement dans le cadre d'un solide particulier, le parallélépipède rectangle. Dans ce secteur, il s'agit d'étudier la représentation et la construction des parallélépipèdes rectangles, et aussi de calculer leur volume. Ainsi, on pourra enseigner aux élèves ces solides en tant que prismes droits et leur apprendre la formule de calcul du volume comme étant le produit de l'aire de la base par la hauteur. Cependant, d'après les indications de ces programmes, il s'agit de faire des démarches de pavage ou de dénombrement d'unités pour déterminer le volume. Dans ce cas, il faudra faire appel au concept de volume en tant que grandeur et à la mesure, mais ces deux concepts n'appartiennent pas à une théorie des prismes droits ou des solides. Par conséquent, on peut ici avancer la présence d'un vide didactique (Bronner, 1997) relativement à ces éléments technologiques manquant pour justifier ces techniques.

La situation change pour l'étude du rectangle. Le travail est limité à l'étude de l'aire et du périmètre de cette figure et on ne trouve pas d'autres types de tâches relatives au rectangle. Il s'agit d'étudier les surfaces du seul point de vue de leur aire et de leur périmètre. On trouve des genres de tâches de comparaison et de calcul de grandeurs, et des techniques comme le découpage-recollement ou les décompositions, lesquelles mettent en avant un travail sur le concept de grandeur. La théorie nécessaire pour justifier ces organisations locales est une théorie des grandeurs et on se demande donc pourquoi ce secteur ne s'appelle pas « Aires et périmètres ». En particulier, on n'a pas trouvé d'éléments technologiques et théoriques dans les programmes, ni dans les documents d'accompagnement, qui nous aident à comprendre ce choix de structuration dans les programmes. Il semble que les programmes de 6e souhaitent continuer le travail déjà fait à l'école élémentaire. Ils favorisent le travail sur les grandeurs en soi plutôt que sur leurs mesures dans les organisations mathématiques ponctuelles, mais la structuration de ces textes paraît légitimer l'étude des grandeurs comme des caractéristiques des objets géométriques en diminuant l'importance des grandeurs en tant qu'objet d'étude.

- En classe de 5e

Le tableau présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 5e dans la période A1 :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Prismes, cylindres de révolution	Volumes	Calculer le volume d'un prisme droit.
		Calculer le volume d'un cylindre de révolution
	Aires	Calculer l'aire latérale d'un prisme droit.
		Calculer l'aire latérale d'un cylindre de révolution
Parallélogramme	Aires	Calculer l'aire d'un parallélogramme
Triangle	Aires	Calculer l'aire d'un triangle
Disque	Aires	Calculer l'aire d'un disque de rayon donné

Tableau 3-5. Niveaux de codétermination dans « Travaux géométriques » en 5e dans la période A1

Dans cette période, on voit disparaître l'étude des angles et des longueurs. L'observation que nous avons réalisée pour le volume en classe de 6e dans la période A1 devient fortement évidente en 5e. Les grandeurs sont travaillées comme thèmes et leurs études s'inscrivent dans l'enseignement des connaissances relatives aux différents objets géométriques. Il ne s'agit pas d'enseigner l'aire de différentes surfaces, on veut plutôt étudier le triangle et leurs caractéristiques, les parallélogrammes et leurs propriétés, les prismes et les cylindres de révolution et les grandeurs que leurs sont attachées. Par exemple, les types de tâches et les technologies qui appartiennent à l'organisation locale où s'installe la tâche « Calculer l'aire d'un triangle » sont « Utiliser la propriété de la somme d'angles d'un triangle ; Construire un triangle ; Connaître l'inégalité triangulaire ». Ainsi, en classe de 5e, l'organisation mathématique est construite autour de la notion de triangle où l'aire d'un triangle est un aspect lié à cette notion.

On doit aussi remarquer que les sujets relatifs à l'étude des grandeurs sont réduits au genre de tâches « calculer ». En effet, les types de tâches rencontrés en classe de 5e sont « calculer l'aire » ou « calculer le volume », on ne trouve plus des genres de tâches comme « comparer des grandeurs ». Si en classe de 6e, il semble que les programmes essaient de conserver un travail sur les grandeurs indépendant de leurs mesures, tel qu'à l'école élémentaire, en 5e par contre, l'enseignement semble réduit aux les formules de calcul des grandeurs des objets géométriques. Ces formules sont justifiées par des procédures de décomposition ou de découpage-recollement relevant du cadre géométrique et des grandeurs. Dans cette perspective, on doit utiliser les éléments technologiques de décomposition de figures planes, lesquels prennent appui sur un traitement géométrique-grandeur de l'aire. Ce traitement montre la nécessité d'une technologie ou d'une théorie relative à la grandeur aire, tout comme en 6e, aucune n'est explicitée dans les documents institutionnels de 5e de la période A1. Il apparaît que ces textes se détachent peu à peu du traitement des grandeurs en tant que concept en les amenant vers l'étude de formules de calcul.

- En classe de 4e

Nous présentons la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 4e dans la période A1 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Triangle rectangle	Théorème de Pythagore	Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle
Pyramide et cône de révolution	Volume d'une pyramide	Calculer le volume d'une pyramide
	Volume d'un cône de révolution	Calculer le volume d'un cône de révolution

Tableau 3-6. Niveaux de codétermination dans « Travaux géométriques » en 4e dans la période A1

L'une des premières choses qu'on peut observer est l'absence des notions d'aire et de périmètre. Cependant, la grandeur longueur apparaît dans l'étude du théorème de Pythagore au niveau de sujet d'étude. L'enseignement se centre sur le travail du calcul des volumes, mais pour nouveaux objets de l'espace. Comme en 6e et 5e, il s'agit d'étudier les solides, notamment la pyramide et le cône, où les grandeurs sont l'objet de thèmes d'étude appartenant au secteur « pyramide et cône de révolution ».

Le détachement des grandeurs dans le cadre strict des grandeurs est manifeste, il s'agit d'étudier les formules du calcul de volume pour différents solides. Elles constituent l'élément technologique principal de la seule technique du calcul du volume. De plus, le programme ne donne pas de référence concernant la justification géométrique de ces formules.

- En classe de 3^{e}

Nous présentons la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 3^{e} dans la période A1 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Triangle rectangle	Distance entre deux points	Calculer la distance entre deux points dont on donne les coordonnées dans un plan muni d'un repère orthonormé
Rotation, angles, polygones réguliers	Angle inscrit	Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même angle

Tableau 3-7. Niveaux de codétermination dans « Travaux géométriques » en 3^{e} dans la période A1

En 3^{e}, on n'étudie plus les aires, ni les périmètres, ni les volumes. On revient à un travail sur les longueurs et les angles, mais dans des configurations beaucoup plus complexes que dans les classes précédentes. Il s'agit d'étudier ces grandeurs dans un cadre géométrique à l'aide des figures et des propriétés déjà traitées en 4^{e}.

- Les grandeurs dans le domaine « Organisation de données, fonctions »

Les grandeurs sont présentes dans ce domaine principalement sous la forme du genre de tâches « changements d'unités ». Ainsi, les travaux sur la proportionnalité et les fonctions « seront l'occasion de consolider et d'approfondir les acquis des élèves sur l'utilisation d'unités de mesure et la pratique de certains changements d'unités » (C.N.D.P., 1996a). Dans ce domaine, on étudie aussi des relations entre grandeurs à travers la proportionnalité.

Il existe une évolution du travail sur les grandeurs qui se manifeste par l'étude des grandeurs de plus en plus complexes. Voyons la présence des grandeurs dans le domaine « Organisation de données, fonctions » pour chaque classe :

- En classe de 6^{e}

Nous présentons la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 6^{e} dans la période A1 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Activités géométriques	Calcul des aires et des périmètres	Effectuer pour les longueurs des changements d'unités de mesure.
		Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure.
Activités numériques	Relevés statistiques ; opérateurs et, notamment, usage des opérateurs constants d'une calculatrice.	Effectuer des calculs faisant intervenir diverses grandeurs
		Appliquer un pourcentage

Tableau 3-8. Niveaux de codétermination dans « Organisation de données, fonctions» en 6^{e} dans la période A1

En classe de 6e, le calcul des grandeurs représentent des thèmes et des sujets d'étude. On s'intéresse notamment aux grandeurs géométriques périmètre et aire. Le seul genre de tâches faisant objet d'une explicitation est celui des changements d'unités pour ces deux espèces de grandeurs. On effectue aussi de différentes opérations sur les grandeurs avec une calculatrice, comme calculer un pourcentage d'une grandeur.

Comme ce domaine étudie les unités des grandeurs, il est important de regarder le type de traitement des grandeurs et le statut donné aux unités dans les calculs. Mais en 6e, on ne retrouve pas des traces sur ces aspects dans les programmes, ni dans les documents d'accompagnement.

- En classe de 5e

Le tableau présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 5e dans la période A1 :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Exemples de fonctions	Proportionnalité	Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure.
		Étude de variations de grandeurs
		Utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal (mesure du temps)
		Calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin
		Reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre temps et distance parcourue
Activités graphiques	Repérage sur une droite graduée	Déterminer la distance de deux points d'abscisses données

Tableau 3-9. Niveaux de codétermination dans « Organisation de données, fonctions» en 5e dans la période A1

On continue à effecteur des changements d'unités de mesure, mais cette fois pour la grandeur volume. Le volume est présent au niveau de sujet d'étude en 5e , l'objectif principal est d'étudier la proportionnalité, où les changements d'unités représentent une application de ce concept. Par exemple, en classe de 5e on détermine le coefficient de proportionnalité dans un changement d'unités. (C.N.D.P., 1997a). On voit aussi qu'on étudie des variations des grandeurs, à ce sujet le programme spécifie :

> « On pourra envisager des variations :
> – de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque,
> – de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur circulaire,
> – du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit,
> en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée » (C.N.D.P., 1997a, p.10)

Les grandeurs et les variations des grandeurs constituent un champ de problèmes pour l'étude de la notion de proportionnalité.

Dans ce domaine, on trouve aussi le type de tâches « Calculer une grandeur » à travers le sujet d'étude « Déterminer la distance de deux points ».

- En classe de 4e

Le tableau présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 4e dans la période A1 :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Applications de la proportionnalité	Grandeurs quotients courantes	Calculer une distance parcourue
		Calculer une vitesse
		Calculer un temps
		Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).
	Pourcentages	Calculer un pourcentage
		Appliquer un taux de pourcentage

Tableau 3-10. Niveaux de codétermination dans « Organisation de données, fonctions» en 4e dans la période A1

Dans la mesure où on avance dans les niveaux scolaires, on rencontre des grandeurs de plus en plus complexes. En 4e, l'objectif est d'introduire et d'étudier une grandeur quotient, la vitesse. Elle est étudié dans le thème « grandeurs quotients courantes ». De cette manière, elle appartient à une organisation mathématique régionale qui prend appui sur une théorie de la proportionnalité. La vitesse moyenne est travaillée comme un exemple de proportionnalité. Dans ce cas, la distance parcourue est proportionnelle à la durée mise à la parcourir. Le coefficient de proportionnalité entre la suite des distances et la suite des durées est la vitesse moyenne.

- En classe de 3e

Le tableau présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 3e dans la période A1 :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Traitements usuels sur les grandeurs	Aires	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné
	Volumes	Calculer le volume d'une boule de rayon donné
	Grandeurs composées	Changements d'unités pour des grandeurs composées
	Effets d'une réduction ou d'un agrandissement	Connaître et utiliser le fait que dans une réduction ou un agrandissement de rapport k l'aire d'une surface est multipliée par k^2
		Connaître et utiliser le fait que dans une réduction ou un agrandissement de rapport k le volume d'un solide est multiplié par k^3
Proportionnalité	Applications de la proportionnalité	Représenter une situation de relation entre deux grandeurs d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative
		Lire et interpréter une telle représentation

Tableau 3-11. Niveaux de codétermination dans « Organisation de données, fonctions» en 3e dans la période A1

L'étude des grandeurs composées aire, volume ou vitesse s'élargit aux grandeurs plus complexes. Elles sont, par exemple, exprimées comme passagers x kilomètres, kWh, euros/kWh.

Les aires, les volumes et les grandeurs composées représentent un thème d'étude, on s'intéresse aussi aux effets de transformations géométriques sur les grandeurs aire et volume. On peut s'interroger sur la place du calcul d'aires et de volumes dans le domaine des fonctions. Si l'on regarde l'organisation mathématique relative à la notion d'aire, on observe que le domaine d'étude est celui de « Fonctions », le secteur d'étude « Les grandeurs », le thème d'étude « L'aire » et le sujet « Calcul de l'aire d'une sphère ». On veut donc construire l'organisation mathématique régionale relative à ce contenu. On pourrait penser à la formule d'aire d'une sphère comme la fonction quadratique $f(r)= 4\pi r^2$, mais ces types de fonctions ne font pas partie des connaissances du collège :

> « La classe de 3e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines » (C.N.D.P, 1999)

Alors, on devra peut être aborder l'aire d'une sphère du point de vue de la proportionnalité, c'est-à-dire considérer que l'aire d'une sphère est proportionnelle à son rayon au carré, et obtenir que $\frac{Aire}{r^2} = 4\pi$. Ce même contenu aurait pu appartenir au domaine « Travaux géométriques », comme pour l'aire d'un cylindre ou d'un prisme droit, mais les choix faits par les programmes proposent d'utiliser les grandeurs attachées aux solides comme des exemples pour traiter la proportionnalité et les fonctions.

3.1.2 Les grandeurs comme outil pour l'étude d'autres notions

En général, dans les programmes de la période A1, les grandeurs sont présentes au niveau du thème d'étude dans les domaines géométrique et dans celui des fonctions. Du point de vue des organisations mathématiques, elles vont constituer des organisations locales. D'après Chevallard (2002) « les professeurs tendent à ne se repérer que sur les niveaux de plus grande spécificité, sujets et thèmes ». On pourrait penser alors qu'un enseignant qui applique les programmes, tels qu'ils sont écrits dans la période A1, présentera dans sa progression les thèmes : Aires, Périmètres, Volumes. Mais, ils seront proposés de manière fragmentée dans différents chapitres de deux domaines « Travaux géométriques » et « Organisation de données, fonctions ». Dans cette segmentation le statut des grandeurs pourrait ne pas être très clair. Si on regarde la présentation générale du programme de sixième pour le collège, on est amené à considérer que les grandeurs constituent un objet d'étude dans les deux domaines précités. Dans le domaine *Organisation de données, fonctions* l'un des objectifs est d'étudier les grandeurs courantes et dans le domaine *travaux géométriques* on met en avant le calcul des grandeurs.

Par ailleurs, dans ces deux domaines les grandeurs ont le statut d'outil, car elles participent à l'apprentissage des autres objets mathématiques comme la proportionnalité ou le théorème de Thalès. Ainsi, avec les indications des programmes de la période A1, on peut penser que les grandeurs ont un double statut, celui d'objet et celui d'outil. Étudions de manière plus précise ces statuts à l'aide des niveaux de codétermination didactique.

En 5^{e}, les aires forment un thème d'étude appartenant aux secteurs : parallélogramme, triangle, disque. De ce point de vue, le secteur *Triangle* devrait être constitué d'une théorie qui va justifier la technologie associée au thème d'étude *aire d'un triangle*. Ainsi, pour la mise en place d'une telle organisation mathématique, un enseignant doit compter avec des outils technologiques et théoriques relatifs aux triangles pour légitimer les techniques utilisées dans les calculs d'aires de triangles. Il pourrait dire *un triangle rectangle est un polygone de trois côtés avec un angle droit.* Ensuite, il fera apparaître qu'*un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle*, et en utilisant *la formule d'aire d'un rectangle comme produit de la longueur par la largeur (Lxl), l'aire du triangle rectangle est la moitié du produit de la longueur par largeur (Lxl/2).* Dans un discours technologique de ce type, on s'intéresse à une surface en particulier, le triangle rectangle, et non pas au concept d'aire en tant que tel. Ainsi, l'aire est plutôt un outil pour l'étude des caractéristiques du triangle rectangle.

En 4e, le paysage ne change guère, les volumes sont travaillés comme une spécification de l'étude des pyramides et des cônes, cette espèce de grandeur partage son habitat avec les représentations en perspective et les patrons. Ainsi, les volumes sont un outil pour l'enseignement des caractéristiques de ces solides.

Par rapport aux changements des unités, la technologie relative à ce genre de tâches est rassemblée autour de la théorie de proportionnalité. Par exemple, à cette époque, l'utilisation d'un tableau pour réaliser la conversion d'unités de longueur dans la classe est parfaitement légitime. Elle se nourrit de la proportionnalité, ce qui permet la vie de cette technique dans le collège. Ainsi, le genre de tâches « changer d'unités » est un outil pour exemplifier des situations de proportionnalité.

De telle manière, les grandeurs servent à mettre en place des organisations mathématiques relatives à d'autres notions appartenant à différents domaines. Leur hiérarchie dans les niveaux de codétermination est toujours celle de thème d'étude. Ainsi, dans la structuration des programmes de la période A1, on ne voit jamais apparaître des technologies relatives aux grandeurs, et encore moins un domaine des grandeurs.

Les grandeurs sont peu prises en compte comme un objet indépendant, elles apparaissent constamment pour étudier d'autres objets mathématiques. Même si en 6e, il existe quelques types de tâches liés à la comparaison entre grandeurs et d'autres associés aux changements d'unités, dans lesquels on peut voir un traitement autonome de grandeurs, peu à peu elles sont rabattues sur leurs mesures et elles sont traitées comme des moyens pour comprendre d'autres notions. Ainsi, leur présence dans les programmes de cette période semble fragmentée, en plusieurs habitats, où elles vont accomplir différentes fonctions et leur statut évolue, depuis la classe de 6e, vers une conception de plus en plus numérique.

3.2 Les grandeurs dans l'institution CA4 : La naissance d'un domaine de grandeurs

Cette partie est marquée par la prise en compte des grandeurs comme constituants d'un cadre. Dans la période A4, le travail sur les grandeurs comme un domaine mathématique est bien défini comme domaine mathématique. Ainsi, les programmes divisent l'étude en 4 domaines :

- organisation et gestion de données, fonctions ;
- nombres et calculs ;
- géométrie ;
- grandeurs et mesures.

De plus, un document ressource « Grandeurs et mesures » définit une théorie et des éléments technologiques d'un possible domaine des grandeurs. Ainsi, ces objets gagnent leur place comme domaine d'étude avec leur propre théorie pour leur enseignement dans l'institution CDA4. On peut dire que l'habitat des grandeurs dans ces périodes est plus délimité que dans la période A1. On trouve un habitat principal pour les grandeurs, lesquelles remontent dans les niveaux de codétermination à un domaine d'étude, mais leur présence ne se réduit pas à ce domaine, puisque on peut trouver des traces des grandeurs dans le programme tout entier.

3.2.1 Création du domaine « Grandeurs et mesures »

En comparaison aux programmes de la période A1, à partir de 2005, on trouve deux nouvelles caractéristiques dans l'enseignement des grandeurs. D'une part, on voit dans l'enseignement au collège l'apparition du domaine d'étude *grandeurs et mesures*. D'une autre part, on voit que les grandeurs géométriques enseignées sont les mêmes que dans la période A1, néanmoins on ajoute à cela un travail sur les grandeurs quotients et produits. De nouveaux objets viendront s'établir dans l'habitat des grandeurs, mais surtout un nouvel habitat est né pour les grandeurs. On se demande quelles seront alors les organisations didactiques et mathématiques proposées par les programmes pour étudier ce nouvel habitat ? Et comment les nouveaux objets du type grandeurs composées, produits et quotients, vont s'intégrer dans ces nouvelles praxéologies ? Plus largement, la problématique écologique va nous conduire à questionner les raisons d'être et le fonctionnement de cette dernière structure dans le même sens que Chevallard (1994) :

> « D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets y nouent-ils ? Et aussi surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusqu'à là ? » (Chevallard, 1994, p.42)

Maintenant nous allons examiner classe par classe les secteurs, thèmes et sujets d'étude dans le domaine *grandeurs et mesures*.

- En classe de 6^{e}

Le tableau présente la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 6^{e} dans la période A4 :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Longueurs, masses, durées	Changements d'unités : le cas des longueurs et masses	Effectuer pour les longueurs des changements d'unités de mesure
		Effectuer pour les masses des changements d'unités de mesure
	Comparer des périmètres	Comparer géométriquement des périmètres
	Calcul de grandeurs : le cas des longueurs, durées et horaires	Calculer le périmètre d'un polygone
		Connaître et utiliser la formule donnant la longueur d'un cercle
		Calculer des durées
		Calculer des horaires
Angles	Comparer des angles	*Comparer des angles sans avoir recours à leur mesure*
	Le rapporteur	*Mesurer un angle*
		Construire un angle de mesure donnée
Aires : mesure, comparaison et calcul d'aires	Comparer des aires	Comparer géométriquement des aires
	Déterminer une aire	Déterminer l'aire d'une surface
	Différencier périmètre et aire	Différencier périmètre et aire
	Calcul d'aires	Calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont données
		Calculer l'aire d'un triangle rectangle
		Calculer l'aire **d'un triangle quelconque dont une hauteur est tracée*
		Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un disque
	Changements d'unités d'aire	Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure
Volumes	Déterminer un volume	Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle en se rapportant à un dénombrement d'unités
		Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle **en utilisant une formule*
	Changements d'unités de volume	Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance
		Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure

Tableau 3-12. Niveaux de codétermination dans « Grandeurs et mesures » en 6e dans la période A4

Premièrement, on peut observer que les espèces de grandeurs deviennent des secteurs d'étude du domaine « Grandeurs et mesures ». Chaque grandeur géométrique est ainsi un secteur d'étude où devrait se constituer une organisation mathématique régionale autour de cette grandeur. Par exemple le secteur « Angles » est constitué de plusieurs technologies qui permettent de traiter les thèmes suivants : comparaison des angles et utilisation du rapporteur, lesquelles permettent à la fois de résoudre plusieurs types de tâches comme comparer des angles ou construire un angle. En général, il s'agit d'étudier les grandeurs géométriques comme des secteurs qui sont structurés selon les mêmes genres de tâches que nous avons identifiés dans notre filtre : comparer des grandeurs, calculer des grandeurs et changer d'unités.

Les contenus en 6e relatifs aux grandeurs sont globalement les mêmes que pour la période A1, mais il s'ajoute à l'étude plusieurs types de tâches relatifs aux angles, aux durées et aux masses.

Un deuxième aspect très important est la réunion des genres de tâches relatifs aux grandeurs dans un seul domaine. Si dans la période A1 les genres de tâches étaient repartis dans les domaines « Travaux géométriques » et « Organisation de données, fonctions », ils se rassemblent dans la période A4. La conséquence principale de la montée des grandeurs dans les niveaux de codétermination est la justification des techniques et genres de tâches par des éléments technologiques et théoriques relevant d'un cadre des grandeurs. En particulier, de nouveaux traitements pour les grandeurs vont apparaître, ainsi que des nouvelles techniques. Même si on rencontre presque les mêmes genres de tâches de la période A1, ils n'apparaissent plus de manière fragmentée dans la période A4 et l'institution propose une réorganisation pour former un nouveau domaine, celui des grandeurs. On peut alors se poser la question si la théorie et les technologies relatives aux genres de tâches précédents sont différentes de celles de la période A1.

- En classe de 5e

Nous présentons la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 5e dans la période A4 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Longueurs, masses et durées	Calcul des grandeurs : le cas des longueurs, durées et horaires	Calculer le périmètre d'une figure
		Calculer des durées
		Calculer des horaires
Aires	Calcul d'aires	*Calculer l'aire d'un parallélogramme*
		Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée
		Calculer l'aire d'une surface plane ou celle d'un solide, par décomposition en surfaces dont les aires sont facilement calculables.
Volumes : Prisme et cylindre de révolution	Calcul de volumes	Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle
		Calculer le volume d'un prisme droit
		Calculer le volume d'un cylindre de révolution
	Changements d'unités de volume	Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure

Tableau 3-13. Niveaux de codétermination dans « Grandeurs et mesures » en 5e dans la période A4

Comme en 6e, les grandeurs géométriques représentent des secteurs d'étude et ce sont les genres de tâches relatifs à ces grandeurs qui constituent les thèmes d'étude. Les genres de tâches « comparer », « mesurer » et « construire » des grandeurs disparaissent, on s'intéresse plutôt aux calculs sur les grandeurs et aux changements d'unités.

On peut observer aussi un changement au niveau de vocabulaire par rapport à celui de 6e, on disait « déterminer une grandeur » et en 5e, il s'agit maintenant de « calculer une grandeur ». Apparemment, le travail est centré sur les grandeurs dans un cadre numérique au fur et à mesure de l'avancement dans les classes au collège.

Les genres de tâches relatifs aux grandeurs, qui était présents en deux domaines d'étude dans la période A1 sont regroupés pour former le domaine *grandeurs et mesures*. Par exemple, dans la période A1, on repérait les sujets « calculer le volume d'un prisme droit » dans le domaine *Travaux géométriques* et « changer d'unités de volume » dans le domaine *Organisation de données, fonctions*. Or, dans la période A4, ces deux sujets appartiennent au secteur « volume » du domaine *Grandeurs et mesures*.

- En classe de 4e

Nous présentons la structuration de l'enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 4e dans la période A4 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d'étude**
Aires et volumes	Volumes	Calculer le volume d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{1}{3}Bh$
Grandeurs quotients courantes	Vitesse moyenne	* *Calculer des distances parcourues en utilisant l'égalité* $d = vt$
		* *Calculer des vitesses moyennes en utilisant l'égalité* $d = vt$
		* *Calculer des durées de parcours en utilisant l'égalité* $d = vt$
		* *Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure)*

Tableau 3-14. Niveaux de codétermination dans « Grandeurs et mesures » en 4e dans la période A4

En 4e, on trouve l'irruption d'un nouveau secteur d'étude « Grandeurs quotients », lequel prend comme exemple la vitesse moyenne. On ne travaille plus sur les aires ou les longueurs, l'étude se centre sur les volumes et ce nouveau type de grandeurs. Le changement d'unités reste encore un objectif du programme. Le passage vers le numérique devient de plus en plus fort, le travail avec les formules est explicite dans le programme de 4e, il s'agit de calculer des grandeurs en utilisant des formules.

- En classe de 3e

Nous présentons la structuration de l’enseignement des grandeurs selon les différents niveaux de codétermination en classe de 3e dans la période A4 dans le tableau suivant :

Secteurs	**Thèmes**	**Sujets d’étude**
Aires et volumes	Calcul d’aire et de volumes	*Calculer l’aire d’une sphère de rayon donné*
		Calculer le volume d’une boule de rayon donné
	Agrandissement et réduction	Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, l’aire d’une surface est multipliée par k^2
		Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k,le volume d’un solide est multiplié par k^3
Grandeurs composées	Changements d’unités	Effectuer des changements d’unités sur des grandeurs produits ou des grandeurs quotients

Tableau 3-15. Niveaux de codétermination dans « Grandeurs et mesures » en 3e dans la période A4

Si on retrouve la notion d’aire au 3e, c’est essentiellement dans le cadre des solides, et en particulier de la boule et de la sphère. Aires et volumes sont ainsi regroupés pour former un secteur d’étude. Le travail sur des grandeurs composées se retrouve au même niveau de codétermination que le secteur précédent. Un nouveau thème apparaît en 3e, celui de l’étude des effets sur une grandeur d’une déformation géométrique.

3.2.2 *Les grandeurs en tant qu’objet mathématique*

La création d’un domaine *Grandeurs et mesures* crée des contraintes au niveau de la noosphère. Le fait de positionner les grandeurs comme cadre, au même titre que la géométrie, le numérique ou le fonctionnel, oblige la noosphère à définir les savoirs savants de référence pour construire un cadre des grandeurs. On a vu dans le chapitre précédent que cette tâche n’est pas facile à réaliser, du fait du statut flou des grandeurs dans les mathématiques. Les instructions officielles doivent donc délimiter et préciser les savoirs mathématiques d’un tel domaine. Elles font le choix de prendre la théorie de Rouche (1992, 1994) comme savoir de référence pour les grandeurs, comme on peut le repérer dans le document Grandeurs et mesures (2007) : « Le paragraphe 3 fournit au professeur de collège les éléments indispensables d’une théorie des principales grandeurs, indépendamment de la question de la mesure ». Ainsi, ils décident de présenter ces outils à travers un document ressource pour le collège. Cependant, ce document n’a pas un caractère obligatoire pour les professeurs. Nous nous demandons ainsi quels sont les éléments technologiques et théoriques mobilisés par les enseignants dans leurs pratiques ?

L'objectif des programmes de la période A4 est de traiter les grandeurs comme des objets indépendants des nombres, au moins dans un premier moment. Progressivement, on commence à s'intéresser à l'étude de la mesure de grandeurs à travers le travail sur les formules de calcul de grandeurs et les changements d'unités.

On a déjà vu que les programmes de la période A4 cherchent à redonner du sens aux grandeurs géométriques. Cette volonté ne se manifeste pas au niveau des types de tâches proposés dans les textes, mais plutôt au niveau de la nouvelle structuration des programmes, où les grandeurs apparaissent comme un domaine et chaque espèce de grandeur comme un secteur. Ainsi, ces programmes situent les types de tâches et les techniques dans des nouvelles organisations mathématiques composées par des éléments technologiques et théoriques différents de ceux de la période A1.

Prenons l'exemple du type de tâches T en 3e : Changer d'unités de mesure. Cette tâche se retrouve dans le secteur « grandeurs composées ». La tâche T ne trouve plus sa légitimité dans l'étude de la proportionnalité comme dans la période A1, où elle appartenait au secteur proportionnalité, mais elle sert maintenant d'appui au travail des grandeurs complexes en 3e. Ainsi, les techniques que le professeur du collège enseigne à ses élèves doivent être cohérentes avec les praxéologies mises en place. Le document ressource « Grandeurs et mesures » propose ainsi une technique de changement d'unités basée sur l'utilisation d'équivalences entre les unités. C'est en fait la technique que Chevallard et Bosch (2000-2001) dénomment de concrète et que nous avons déjà exposée dans le chapitre précédent. La technique d'utilisation d'un tableau de proportionnalité ne sera pas conforme à cette technologie, du fait qu'elle est justifiée par une théorie de la proportionnalité, laquelle néglige les unités de mesure.

Finalement, dans cette nouvelle structuration, on retrouve l'introduction de nouvelles grandeurs quotients et produits. En dehors des grandeurs géométrique, dans la période A1, on travaillait avec les vitesses ou les durées, tandis que dans la période A4 on voit apparaître des grandeurs plus complexes grandeurs produits et grandeurs dérivées comme par exemple passagers x kilomètres, kWh, euros/kWh, m^3/s ou $m^3 \cdot s^{-1}$.

3.3 Une nouvelle organisation de savoirs

L'une de premières conclusions est que ce qui se présente de façon fragmentée dans la période A1 est réuni en formant tout un domaine. Pendant la période 1995-2005, les grandeurs se trouvaient reparties en deux domaines : Travaux géométriques et Organisation de données. Durant la période A4, les genres de tâches relatifs aux grandeurs sont regroupés autour de chaque grandeur, par exemple dans la période A1 les changements d'unités permettaient d'exemplifier la proportionnalité, aujourd'hui ils supportent l'enseignement de chacune des grandeurs. Ainsi les grandeurs deviennent une matière centrale du travail dans l'enseignement au collège. Leur statut change, elles seront considérées plutôt comme un objet qu'un outil, même si on verra qu'elles continuent à servir de support à l'enseignement d'autres notions.

Deuxièmement, dans cette restructuration, on y retrouve une nouvelle hiérarchie des grandeurs que nous avons analysée avec l'échelle de niveaux de codétermination didactique. Les grandeurs forment un domaine d'étude et à chacune des grandeurs correspond un secteur d'étude. Ainsi les organisations ponctuelles mises en œuvre visent l'étude de chaque espèce de grandeur. On n'étudie plus l'aire à partir de chaque surface, mais on étudie l'aire appliquée à chaque surface. De ce point de vue, ce n'est plus la surface qui est mise en avant mais plutôt l'étude de l'aire comme notion autonome. On voit de cette manière comment le statut donné aux grandeurs va déterminer leur fonctionnement dans le système d'enseignement :

> « La reconnaissance de la hiérarchie de niveaux ainsi ébauchée, qui va des sujets d'étude à la discipline en passant par les thèmes, secteurs et domaines, a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui, de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte » (Chevallard, 2002)

La montée des grandeurs dans les niveaux de codétermination et l'apparition de nouveaux types de grandeurs engendrent un nouveau paquet de conditions et des contraintes, au niveau des technologies et théories, auquel les enseignants doivent faire face, et qui aura des répercussions au niveau de l'apprentissage des élèves. La mise en place d'une organisation didactique sera confrontée à cette nouvelle structure et pourtant elle sera reconstituée autour de ces nouvelles praxéologies mathématiques. Un professeur âgé aura le choix entre adapter son enseignement à cette nouvelle organisation ou continuer à faire ce qu'il a appris pendant de nombreuses années d'expérience :

> « Plus complètement, chaque niveau impose, à un moment donné de la vie du système éducatif, un ensemble de contraintes et de points d'appui : l'écologie qui en résulte est déterminée à la fois par ce que les contraintes interdisent ou poussent en avant, et par l'exploitation que feront les acteurs des points d'appui que les différents niveaux leur offrent » (*Ibidem*, 2002)

Dans les sections suivantes de ce chapitre, nous poursuivons l'étude des conditions et des contraintes en étudiant les documents ressources de la période actuelle.

4. Place et rôle des grandeurs dans l'institution CDA4

Comme nous l'avons dit, nous considérons une autre institution pendant la période A4. Elle est définie par les programmes de cette période et par les documents ressources. À travers l'étude des programmes de la période A4, nous avons montré que la montée des grandeurs dans les niveaux de codétermination détermine de nouvelles praxéologies, notamment au niveau des technologies et des théories. Le document ressource « grandeurs et mesures » propose les outils technologiques et théoriques d'un domaine des grandeurs. Cependant, ce document ne fait pas partie des textes de la noosphère de la période A4, et donc les professeurs ne sont pas contraints de les utiliser. Nous nous limiterons à analyser les documents ressource apparus après 2005 pour comprendre certains choix faits par la noosphère, lesquels n'assujettissent pas les enseignants, ni les auteurs des manuels scolaires. Même si les professeurs ne sont pas contraints aux documents ressources nous étudierons les nouvelles contraintes qui peuvent apparaître pour un professeur se plaçant dans cette nouvelle institution CDA4.

- Le document « La proportionnalité au collège »

Au collège, la proportionnalité est travaillée dans le cadre des grandeurs, dans le cadre du numérique et dans le cadre des fonctions. Pour le cadre des grandeurs, le document ressource « La proportionnalité au collège » (D.G.E.S.C.O., 2005) signale la niche des grandeurs pour l'étude de cette notion :

> « le cadre des grandeurs : c'est celui dans lequel se rencontrent le plus souvent les situations de proportionnalité, mettant en relation deux grandeurs (masse et prix, masse et longueur dans le cas d'allongement d'un ressort, longueurs dans le cas du périmètre du cercle en fonction de son rayon, longueurs et aires dans le cas de triangles de même base et de hauteur variable, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme…). » (D.G.E.S.C.O., 2005, p. 1)

Ainsi, les situations de proportionnalité qui sont proposées seront issues du cadre des grandeurs. Au collège, certaines technologies prennent appui sur le cadre des grandeurs.

- Le document « Le calcul numérique au collège »

Dans ce document les espèces de grandeurs longueur et aire sont utilisées pour enseigner les nombres, notamment les fractions. Par exemple, les fractions représentent des mesures de longueur :

> « […] pour obtenir la mesure du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments de longueurs respectives 7/6 et 3/4, on partage régulièrement l'unité en un nombre de segments de même longueur qui est multiple de 6 et de 4, par exemple 12, on exprime alors chaque mesure en douzièmes de l'unité : 14/12 et 9/12. » (D.G.E.S.C.O., 2007b)

Ce document propose aussi d'utiliser les grandeurs pour étudier la fraction d'une quantité et la proportionnalité. Les aires servent à justifier la procédure pour obtenir le produit de deux quotients et de deux décimaux. Ainsi, la place des grandeurs dans la construction du numérique est fait l'objet des précisions importantes dans ce document, contrairement aux programmes où les grandeurs sont peu évoquées pour la construction du numérique.

- Le document « Du numérique au littéral au collège »

Ce document signale qu'à l'école élémentaire et en classe de 6^{e} la lettre est utilisée pour représenter une grandeur ou la mesure d'une grandeur, comme dans les formules d'aire ou de volume.

- Le document « Géométrie au collège »

Dans le domaine de la géométrie, les grandeurs auraient deux fonctions d'après le document ressource. D'un côté, elles constituent les éléments constitutifs des définitions et des propriétés qui permettent la réalisation des activités de démonstration et de preuve :

> « Au niveau de la sixième, les propriétés utilisables restent assez élémentaires, accessibles sur le plan conceptuel : égalités de longueurs, d'angles, orthogonalité, parallélisme…et ne donnent pas lieu à des formalisations trop difficiles pour les élèves. Les angles et les aires constituent des outils de démonstration parfois sous-exploités. Ainsi, dès la classe de cinquième, les angles permettent d'engager des démonstrations simples sans être simplistes, comme dans la situation suivante où est mise en œuvre la conjonction de deux propriétés concernant les angles : la définition de la bissectrice d'une part et le théorème relatif à l'intersection d'une droite avec deux parallèles » (D.G.E.S.C.O., 2007a)

D'un autre côté, elles permettent l'établissement des interrelations entre le cadre géométrique et numérique :

> « Dans le domaine des grandeurs, certaines : longueurs, angles, aires, volumes, sont étroitement associées à la géométrie. Dans le glissement de l'étude des objets à celle des grandeurs associées puis de leurs mesures, la géométrie croise le domaine des nombres et du calcul » (D.G.E.S.C.O., 2007a)

Ainsi, les grandeurs participent à la construction du domaine géométrique et l'établissement des interrelations entre ce domaine et d'autres domaines mathématiques.

- Le document « Les nombres au collège »

D'après l'institution CDA4, les nombres étudiés au collège, notamment les nombres décimaux, servent à exprimer les mesures des grandeurs et à résoudre des problèmes relatifs aux grandeurs. Les nombres servent aussi à l'étude de la droite graduée dans le cadre des grandeurs, comme l'indique le document « Les nombres au collège » : « Dans cette perspective, le recours à des représentations des nombres décimaux par des longueurs ou par des aires reste nécessaire et l'appui sur le repérage de points sur la demi-droite graduée est essentiel […] » (D.G.E.S.C.O., 2006)

- La structuration du document « Grandeurs et mesures au collège »

Le document « Grandeurs et mesures au collège » est divisé en plusieurs parties :

- Évolution de la place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques

  Comme nous l'avons vu, ce document justifie la place importante donnée aux grandeurs dans l'enseignement. Ainsi, l'objectif des programmes de 2005 est de redonner du sens aux grandeurs fondamentales et d'étudier des grandeurs plus complexes.

- Objets, grandeurs, mesures

  Cette partie explique l'importance de faire la différenciation entre l'objet, la grandeur et la mesure. Ensuite, elle propose une théorie pour les grandeurs que nous avons déjà étudiée dans le chapitre II.

- Les grandeurs fondamentales

  Pour les espèces de grandeurs longueur, aire, angle et volume, le document ressource propose une théorie mathématique. Ainsi, dans ce document on trouve les éléments technologiques et théoriques nécessaires pour l'étude de ces notions en tant que grandeur.

- Grandeurs produits, grandeurs composées

  Les mathématiques des grandeurs produits et composées sont présentées dans cette partie du document.

- Calculs sur les grandeurs – Calculs sur les mesures

  Le document ressource insiste l'importance d'utiliser les unités dans les calculs. L'idée est de proposer au collège un travail de calcul direct sur les grandeurs et non sur les mesures, c'est-à-dire, les nombres.

- Calculs sur les grandeurs et fonctions.

  Finalement, le texte explicite le passage entre l'étude de la proportionnalité dans le cadre des grandeurs et l'étude de la fonction linéaire dans le cadre du numérique. Pour cela, il donne un exemple de situation de proportionnalité et ensuite il généralise les propriétés d'additivité et multiplicative de la fonction linéaire.

- Bilan sur les grandeurs dans les documents ressource

Dans l'institution CDA4, les grandeurs occupent une grande place dans la construction des différents domaines mathématiques et elles sont aussi considérées comme un objet d'étude en soi à travers le domaine « Grandeurs et mesures ». Le document ressource « Grandeurs et mesures au collège » a une importance dans l'institution CDA4. Il donne les éléments technologiques et théoriques nécessaires pour l'étude des grandeurs en tant que cadre mathématique, mais aussi pour l'étude d'autres notions mathématiques à l'aide des grandeurs.

5. Etude des rapports institutionnels à l'aide du filtre des grandeurs

De la problématique écologique, on retient la loi du tout structuré : « un objet ne peut pas vivre de façon isolée ; il est nécessaire qu'il vienne prendre place au sein d'une organisation mathématique » (Artaud, 1998). Pour étudier les nouveaux habitats et niches apparus, suite à la proposition du nouveau domaine grandeurs et mesures dans la période A4, nous avons examiné, en termes d'organisations, les genres de tâches du filtre des grandeurs. Le seul genre de tâches qui ne sera pas analysé est le genre de tâches T_5, construire un objet d'une grandeur plus grande ou plus petite qu'une autre, car il n'apparaît pas dans les programmes du collège.

5.1 L'évolution des genres de tâches dans les classes du collège

Nous rappelons la liste des genres de tâches de notre filtre :

- T_1 : comparer des grandeurs ;
- T_2 : calculer une grandeur ;
- T_3 : étudier l'effet des transformations ou déformations géométrique d'un objet sur une grandeur ;
- T_4 : construire un objet d'une grandeur donnée ;
- T_5 : construire un objet d'une grandeur plus grande ou plus petite qu'une autre ;
- T_6 : changer d'unité de mesure ;
- T_7 : mesurer une grandeur.

Au collège, on observe une évolution des genres de tâches selon les niveaux des classes dans les deux institutions étudiées, comme le montre le tableau suivant :

Classe	**Genres de tâches présents dans les programmes de 1995 (CA1)**	**Genres de tâches présents dans les programmes de 2005 (CA4)**
6e	T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_5 ; T_6 ; T_7	T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_5 ; T_6 ; T_7
5e	T_2 ; T_6	T_2 ; T_6
4e	T_2 ; T_6	T_2 ; T_6
3e	T_2 ; T_3 ; T_6	T_2 ; T_3 ; T_6

Tableau 3-16. Genres de tâches présents dans les programmes de collège

La première des choses qu'on observe est la diversité de genre de tâches en classe 6e. Dans les classes suivantes, les principaux types de tâches étudiés sont T_2 et T_6 dans les deux époques. On voit ainsi qu'en classe de 6e, qu'on s'intéresse aux espèces de grandeur en tant que grandeur, en les étudiant dans le cadre géométrique et dans celui des grandeurs. À partir de la classe de 5e, l'étude de ces objets devient plus numérique. En effet, les genres de tâches comme « comparer des grandeurs » disparaissent en classe de 5e. À partir de ce niveau, le travail est centré sur les calculs de grandeurs et les changements d'unités. Ces calculs se font à l'aide des formules et des nombres. Nous pouvons interpréter cette évolution au collège comme une numérisation de l'étude des grandeurs. Ce changement au niveau des classes peut s'expliquer par l'évolution des objets géométriques étudiés. Par exemple, en classe de 6e, on étudie les aires du rectangle et du triangle rectangle. Des procédures géométriques telles que le découpage-recollement sont faciles à mettre en place. Par contre, en classe de 4e, on travaille sur les volumes de la pyramide et le cône de révolution, dans ce cas, la procédure de découpage-recollement ne peut pas être utilisée. Le type de tâches T_3 apparaît en classe de 3e, il s'agit d'étudier l'effet d'une réduction ou d'un agrandissement sur les grandeurs relatives à un objet.

Ainsi, les types de tâches ne changent pas véritablement d'une période à l'autre, c'est la création d'un domaine des grandeurs au collège qui conduit à de nouveaux besoins technologiques et théoriques.

5.2 Le genre de tâches comparer des grandeurs, T_1

- T_1 dans l'institution CA1 et CA4

Examinons d'abord l'habitat de ce genre de problème. Premièrement, il n'apparaît qu'en classe de 6e. Dans la période A1, il est présent dans le domaine « travaux géométriques » et, dans la période A4, on le trouve dans le domaine « Grandeurs et mesures ». Deuxièmement, dans les deux périodes, on trouve les types de tâches relatifs au genre de tâches T_1.

Au niveau de deux périodes :

- T_1^1 : comparer des aires ;
- T_1^2 : comparer des périmètres.

Et dans la période A4, il est introduit le type de tâches :

- T_1^3 : comparer des angles.

Les techniques associées aux deux premiers types de tâches sont semblables dans les deux périodes. Dans la période A1, les techniques pour T_1^1 et T_1^2 s'appuient sur les découpages-recollements, la décomposition en figures plus simples, l'utilisation d'un quadrillage, les encadrements et le pavage. Dans la période A4, il s'agit aussi d'utiliser des « procédures géométriques », mais les programmes ne les spécifient pas, ils indiquent seulement qu'on doit comparer des périmètres et des aires sans avoir recours aux formules. Cette étude géométrique des grandeurs a pour intention de renforcer les connaissances déjà acquises à l'école élémentaire :

> « Il s'agit d'entretenir les connaissances acquises à l'école élémentaire, de compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure, en s'appuyant sur les équivalences entre les différentes unités. La comparaison de périmètres sans avoir recours aux formules est particulièrement importante pour affermir le sens de cette notion » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008)

L'organisation proposée par les programmes scolaires du collège dans les deux époques conseille un traitement géométrique des grandeurs au début de ce cycle. Mais en classe de 5e, ils mettent en avant le passage des grandeurs vers un traitement plus numérique. Ainsi, le genre de tâches T_1 disparaît et aussi les techniques associées.

- T_1 dans l'échelle des niveaux de codétermination

Les organisations ponctuelles relatives au genre de tâches T_1 ne semblent pas avoir changé d'une période à l'autre. Il faut regarder dans les hautes échelles des niveaux de codétermination pour pouvoir noter des différences. On sait bien qu'à chaque type de tâches on peut associer un sujet d'étude. Comme nous avons vu dans les niveaux de codétermination didactique, les sujets relatifs à T_1^1 et T_1^2 dans la période A1 font partie du secteur d'étude « Surfaces planes » et dans la période A4 des secteurs « Aire » et « Longueur ». Ainsi, les techniques associées sont les mêmes, mais les éléments technologiques et théoriques qui justifient T_1^1 et T_1^2 dans les deux périodes font partie respectivement d'organisations globales différentes : pour la première période, il s'agit du secteur « Surfaces planes » appartenant au domaine « Géométrie » et, dans la deuxième période aux secteurs « Aire » et « Longueur » appartenant au domaine « Grandeurs et mesures ». Comme nous l'avons dit, le document ressource « Grandeurs et mesures » de la période A4 expose deux théories sur les aires. L'une présente l'aire comme une espèce de grandeur et l'autre explicite la notion de « figures ayant même aire » sans expliciter la définition d'aire. Nous utiliserons ces deux conceptions de l'aire pour expliquer les possibles organisations globales autour de T_1^1 dans les périodes A1 et A4.

- Analyse des possibles organisations mathématiques relatives à T_1^1

a) Dans la période A1

Comme le type de tâches T_1^1 appartient au secteur d'étude *Surfaces Planes* la technologie devrait prendre appui sur les figures et non pas sur les grandeurs pour être conforme à l'organisation des programmes de la période A1. L'une des théories proposées par ce document ressource est définie à partir des figures particulières, les polygones. Ces figures sont considérées comme une réunion finie de triangles quasi disjoints. On peut ainsi dire que cette théorie a comme objets premiers les polygones. Elle définit les figures équidécomposables : « deux figures sont dites équidécomposables si l'une peut être décomposée en un nombre fini de triangles qui, une fois assemblés, peuvent former l'autre figure ». Il ne s'agit pas de donner une définition de la notion d'aire, cette théorie définit des figures ayant même contenance ou même aire[2]. Cette théorie ne définit pas l'aire à partir de la notion de grandeur, mais elle s'inscrit plutôt dans une théorie des surfaces planes.

b) Dans la période A4

Dans la période A4 le type de tâches T_1^1 appartient au domaine « grandeurs et mesures » des programmes de cette période. Ce domaine pourrait être constitué autour d'une théorie des grandeurs. Le document ressource « grandeurs et mesures » présente une théorie pour les grandeurs qui pourrait être épistémologiquement convenable à la construction de ce domaine. Cette théorie est une axiomatique des grandeurs, elle est construite à partir des objets et d'une application, où on définit des classes d'équivalences qui sont les grandeurs, dans ce cas les aires. L'ensemble d'objets est constitué par les surfaces planes, la relation d'équivalence de cet ensemble est définie à partir de la procédure de découpages-recollements : deux surfaces ont même aire si l'on peut obtenir l'une à partir de l'autre par découpage-recollement.

[2] Voir la section des grandeurs géométriques du chapitre II de la thèse.

5.3 Le genre de tâches calculer une grandeur, T_2

Le genre de tâches T_2 est le plus présent dans le système d'enseignement. Il apparaît dans toutes les classes et dans les deux périodes. Ce genre de tâches apparaît dans deux domaines d'étude dans la période A1. Il s'agit de calculer des angles, des distances, des longueurs, des périmètres, des vitesses, des aires et des volumes. La technique qui est prescrite par les programmes dans le domaine « Travaux géométriques » et dans le domaine « Gestion de données, Fonctions » est en général l'utilisation d'une formule. Dans la période A4, T_2 apparaît majoritairement dans le domaine « Grandeurs et mesures », il s'agit de calculer des longueurs, durées, périmètres, aires, volumes, distances et vitesses, et la technique d'utilisation d'une formule est aussi la plus conseillée par les programmes.

Étudions les organisations mathématiques des types de tâches T_2^1 « calculer le périmètre d'une figure », T_2^2 « calculer la longueur d'un segment » et T_2^3 « calculer la distance ». Les trois types de tâches sont présents dans les périodes A1 et A4. Dans la période A1, ces types de tâches apparaissent dans le domaine « Travaux géométriques » de la manière suivante :

- en 6^e, calculer le périmètre d'un rectangle et calculer le périmètre d'un cercle ;
- en 4^e, calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle ;
- en 3^e, calculer la distance de deux points dont on donne les coordonnées.

Dans la période A4, ces types de tâches figurent plutôt dans le domaine « Grandeurs et mesures » :

- en 6^e, calculer le périmètre d'un polygone et connaître et utiliser la formule donnant le périmètre d'un cercle ;
- en 5^e, calculer le périmètre d'une figure ;
- en 4^e, calculer des distances parcourues.

Dans le domaine « Géométrie » :

- en 4^e, calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.

Et dans le domaine « Organisation et gestion de données, fonctions » :

- En 5^e, déterminer la distance de deux points d'abscisses données.

L'habitat pour ce genre de tâches change de la période A1 à la période A4. Dans l'institution CA1, il apparaît dans le domaine de la géométrie et dans l'institution CA4 dans celui des grandeurs.

En classe de 6e, on voit que pour T_2^1 les types de tâches associées changent. Dans la période A1, on calcule le périmètre d'un rectangle, et en A4, le périmètre d'un polygone. De plus T_2^1 apparaît aussi en cinquième. Finalement, on peut remarquer aussi que T_2^1 apparaît dans le domaine « Travaux géométriques » dans la période A1 et dans le domaine « Grandeurs et mesures » dans la période A4, donnant ainsi des organisations mathématiques globales différentes. Pendant la période A1 on pourrait, par exemple, définir le périmètre d'un rectangle comme la somme de ses côtés (L et l), et on trouverait ainsi des formules du type P=2L+2l ou P=2(L+l). On définirait le périmètre de chaque polygone selon les côtés de la figure, en conséquence les objets premiers seraient les surfaces planes, qui constituent les secteurs d'étude où apparaît ce type de tâches. Pour insérer le type de tâches T_2^1 dans une théorie des grandeurs dans la période A4, on devrait définir les périmètres en tant que grandeur, on dirait, par exemple, comme longueur du bord d'une figure. Comme nous l'avons vu, une grandeur est définie à partir d'un ensemble d'objets et d'une relation d'équivalence (Rouche, 1994), ainsi pour les périmètres, on pourrait choisir comme ensemble d'objets les figures planes, et comme relation d'équivalence « le déroulement ». Autrement dit « deux figures planes sont équivalentes par déroulement si les longueurs obtenues après leurs déroulements sont égales ». Cette perspective du déroulement d'un polygone est illustrée ainsi dans le document ressource « Grandeurs et mesures » :

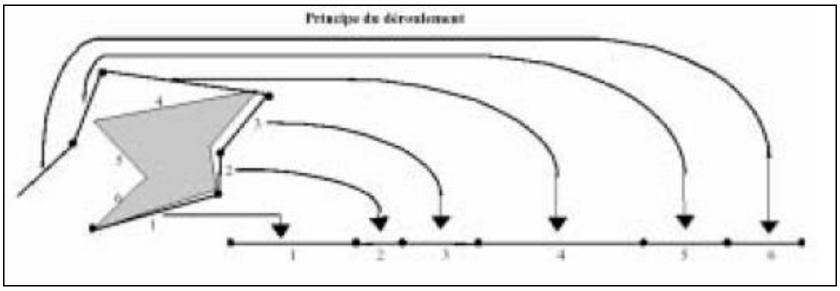


Figure 3-1. Principe de déroulement

Les classes d'équivalences sont les périmètres. Ainsi pour calculer le périmètre d'une figure, comme celui du cercle, dans la période A4, on pourrait calculer la mesure de la longueur de la figure après son déroulement. Ce type d'activité a comme objectif de renforcer la notion de périmètre, notion déjà étudiée à l'école élémentaire et d'introduire le travail sur les périmètres d'autres figures.

Le type de tâches T_2^2 (calculer la longueur d'un segment) est présenté explicitement en classe de 4e dans les deux périodes, même si ce type de tâches apparaît implicitement au collège depuis de la classe de 6e. Les organisations mathématiques explicites pour T_2^2 en classe de 4e sont les mêmes dans les deux périodes A1 et A4, car ce type de tâches appartient au même domaine, celui de la géométrie, au secteur du triangle rectangle et au thème du théorème de

Pythagore. Dans ce cadre, en classe de 4e, apparaissent de nouvelles praxéologies pour le type de tâches T_2^2. Ainsi la technique proposée par les programmes pour résoudre T_2^2 repose sur l'utilisation de ce théorème.

Dans la période A1, le type de tâches T_2^3 apparaît dans le cadre de la géométrie cartésienne où il s'agit en A1 de calculer la distance en utilisant le théorème de Pythagore, c'est-à-dire, T_2^3 appartient au secteur du triangle rectangle dans le domaine de la géométrie. Le type de tâches « calculer la distance entre deux points dont on donne les coordonnées » disparaît dans la période A4. Pendant cette période, l'habitat et la niche de T_2^3 évoluent par rapport à la période A1 précédente, il s'agit plutôt de calculer une distance parcourue avec la formule de vitesse (la vitesse est égale au quotient entre la distance et la durée). Ce type de tâches fait donc partie du secteur « grandeurs quotients et produits » du domaine des grandeurs. Le type de tâches T_2^3 a aussi un habitat dans le domaine « Organisation et gestion de données, fonctions », où l'on demande d'utiliser la distance pour interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée. Ainsi, ce type de tâches trouve divers habitats et niches dans la période A4.

En définitive le genre de tâches T_2, « Calculer une grandeur », est présent sous divers types de tâches dans les deux périodes. Il est associé à toutes les grandeurs étudiées dans les périodes A1 et A4. Comme il s'agit d'un calcul, l'utilisation des formules est la technique par excellence. Il cohabite avec d'autres genres de tâches en 6e et en 5e, mais peu à peu elle devient le seul genre de tâches à travailler au collège. Nous pensons aussi que la numérisation des grandeurs qui s'intensifie de la classe 6e jusqu'à la classe de 3e a comme objectif premier d'amener les élèves à résoudre ce type de tâches à l'aide d'une formule.

5.4 Le genre de tâches étudier les effets des déformations et des transformations sur l'une des grandeurs d'un objet, T_3

Nous avons pris en compte ce genre de tâches de façon assez générale. Nous avons trouvé différents types de tâches qui impliquent les grandeurs pour l'étude des propriétés liées aux déformations et transformations géométriques. Ce genre de tâches n'apparaît pas comme un type de tâches lui-même. Ainsi, ces tâches que nous avons regroupées autour du genre de tâches T_3 ont en commun d'être en relation avec des thèmes qui étudient les déformations et les transformations sur un objet. Nous avons utilisé le mot « étudier » puisque ces propriétés proviennent de l'observation des modifications sur les objets. Dans les deux périodes, les propriétés étudiées sont les suivantes :

- en 6e, la symétrie orthogonale par rapport à une droite conserve les distances, les angles, les périmètres et les aires des figures planes ;
- en 3e, si on multiplie les dimensions d'une surface par un coefficient k, son aire est multipliée par k^2 ;
- en 3e, si on multiplie les dimensions d'un solide par un coefficient k, son volume est multiplié par k^3.

La première des propriétés fait partie du thème « Symétrie orthogonale par rapport à une droite » dans le domaine de la géométrie. Ainsi, les organisations mathématiques relatives à cette propriété sont les mêmes en A1 et A4.

La deuxième et troisième de ces propriétés appartient au thème « agrandissement et réduction » dans les périodes A1 et A4. Par contre, elles font partie du secteur « Traitements sur les grandeurs » dans le domaine « Organisation et gestion de données, fonctions » de la période A1 et du « Aires et volumes » dans le domaine « Grandeurs et mesures » de la période A4.

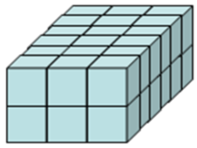
Comme nous l'avons dit, les grandeurs sont présentes dans ces propriétés sans qu'on puisse trouver dans les programmes un type de tâches justifié par ces technologies. On peut donc penser que dans la période A1 l'objectif est d'utiliser ces propriétés pour donner un exemple de rapport entre grandeurs et que dans la période A4 il s'agit plutôt de compléter l'étude des aires et des volumes.

5.5 Le genre de tâches construire un objet d'une grandeur donnée, T_4

Ce genre de tâches n'apparaît que dans la période A4. Il est représenté par le type de tâches T_4^1 : Construire un angle de mesure donnée. Il fait partie du thème « Utilisation du rapporteur » dans le secteur « Angles » en classe de 6e. Ce genre de problèmes est presque absent des instructions officielles du collège. Nous pensons que T_4 est un type de problème très riche pour faire le lien entre les cadres géométrique, grandeurs et numérique.

Dans une recherche précédente (Anwandter-Cuellar, 2008), nous avons étudié les conceptions des élèves relatives au volume au collège. À cette époque nous avons proposé dans un test le type de tâches T_4. Le problème est le suivant :

Luc possède 36 petits cubes de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des parallélépipèdes rectangles comme indiqué ci-dessous :



a) Indique toutes les possibilités de rangement qui donnent de parallélépipèdes rectangles différents.
b) Luc pense que les parallélépipèdes rectangles obtenus ont le même volume. Qu'en penses-tu ?
c) Luc pense que les parallélépipèdes rectangles ont la même aire puisqu'ils sont composés du même nombre de petits cubes. Es-tu d'accord avec Luc?

Figure 3-2. Problème proposé dans un test dans le cadre de mon master 2

Avec la tâche a) nous avons constaté des difficultés pour associer les dessins avec la formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle. Les élèves ont essayé d'arranger les cubes sans prendre en compte la décomposition multiplicative du nombre 36. Par exemple, quelques élèves ont positionné d'un côté du parallélépipède rectangle 5 cubes et, après avoir observé que le comptage ne donne pas 36 cubes, ils ont barré le dessin. Les élèves montrent une forte tendance à la procédure d'essai-erreur sur les dessins, ils ne prennent pas en compte les dimensions, ni les possibilités de décomposition des mesures. Ainsi ils montrent des difficultés pour faire des liens entre l'objet et les mesures des côtés. Nous pouvons dire que les élèves n'établissent pas de façon efficace des liens entre le cadre numérique et géométrique. Les questions qu'on peut se poser sont celles de savoir pourquoi ce type de tâches est presque inexistant dans les programmes et celles des conditions sous lesquelles T_4 pourrait vivre au collège. En prenant en compte la loi du tout structuré (Rajoson, 1988 ; Artaud, 1998), on doit trouver une organisation mathématique adaptée à T_4. Il s'agit de trouver, au minimum, une technique d'étude de ce problème et une technologie relative à cette technique. Par exemple, si on considère les procédures définies auparavant, on peut observer qu'elles sont justifiées par la même technologie associées aux secteurs « aires » ou « volumes ». C'est-à-dire T_4 peut prendre place dans les organisations régionales du domaine *Grandeurs et mesures.* Décrivons de façon plus détaillée une praxéologie possible.

Prenons comme exemple le sous-type de tâches T_4^2 : Construire un solide de mesure de volume donnée. L'une des techniques d'étude pour ce type de tâches peut être :

- τ_4^2 : mettre en relation les variables d'une formule et les éléments du solide

On peut utiliser la formule pour calculer le volume du solide et identifier les éléments de l'objet qui interviennent dans cette formule. Ainsi, on donne des valeurs qui respectent la mesure du volume du solide et à partir de ces valeurs on construit le solide. Dans l'exemple précédent (figure 3-2), comme le volume est égal à 36 cm² et la formule du calcul du volume d'un parallélépipède est « L x l x h », on peut, par exemple, décomposer 36 comme 2 x 9 x 2, et construire un parallélépipède rectangle des longueurs de côtés 2 cm, 9 cm et 2 cm.

Ces techniques peuvent être considérées comme assez complexes, et elles ne sont pas utilisées pour résoudre d'autres types de tâches. Peut être est-ce la raison pour laquelle T_4 est négligé dans les programmes ? Par contre, ces techniques exploitent les mêmes éléments technologiques des types de tâches comme T_1 ou T_2, par exemple la formule, les éléments constitutifs de l'objet et les nombres.

D'autres questions concernent le cognitif. Pourquoi les élèves peuvent, en général, utiliser les éléments constitutifs d'un objet pour calculer une grandeur avec la formule, mais ils ne peuvent pas faire le processus inverse de manière efficace ? On pourrait, peut-être, simplement dire que cette technique ne fait pas partie de l'enseignement des grandeurs au collège, et par conséquent elle n'appartient pas au bagage de connaissances des élèves.

Nous pensons que le genre de tâches T_4 fait travailler les éléments technologiques du domaine « Grandeurs et mesures » de manière beaucoup plus approfondie en mettant en relation les cadres géométrique, grandeurs et numérique.

L'observatoire EVAPM a mis en évidence en 1987 des erreurs de calcul de l'aire d'un rectangle. Les élèves tendent à inventer des formules qui font intervenir deux dimensions. Par exemple, ils écrivent :

- Aire = 2 x périmètre
- Aire = L + l
- Aire = 2(L+l)

Moreira-Baltar (1996-1997) signale qu'une source possible de ces erreurs se trouve dans l'absence d'un traitement géométrique des aires, mais elle dit aussi que, au niveau du traitement numérique, les relations entre l'objet et la grandeur sont nécessaires pour une compréhension des formules :

> « L'aire et le périmètre désignent respectivement les nombres associés à la surface et au contour d'un rectangle, mais la connaissance des formules d'aire et de périmètre d'un rectangle n'est pas suffisante pour caractériser ce type de conception. Il faut de plus établir, à partir des formules d'aire et du périmètre, les relations fonctionnelles entre les quatre nombres qui désignent les côtés, l'aire et le périmètre ». (Moreira-Baltar, 1996-1997, p. 59)

De ce point de vue, pour que les élèves s'approprient des formules de calcul d'aire, il ne suffit pas de les connaître par simple mémorisation, il est essentiel de faire effectuer un travail géométrique sur le concept d'aire qui met en relation l'objet et la formule. Par exemple, si nous souhaitons un apprentissage efficace de la formule de l'aire d'un triangle, il est nécessaire de proposer une activité mettant en relation le triangle et la formule A= L x h /2. Les élèves devront ainsi identifier et maîtriser les éléments qui composent cette expression. Nous pensons que le type de tâches « Construire un triangle d'une aire donnée » fait intervenir les éléments constitutifs de l'objet triangle, c'est-à-dire, les côtés, la base, la hauteur et les met en relation avec la formule de l'aire. Pour résoudre convenablement ce type de tâches l'élève ne peut pas faire appel à des formules inventées, il doit représenter dans la situation et mettre en lien le triangle et la formule en utilisant l'aire, ce qui constitue un passage du cadre géométrique au numérique en s'appuyant sur des objets du cadre des grandeurs.

Nos propositions montrent qu'il existe un habitat potentiel bien clair pour le genre de tâches T_4, et une organisation mathématique cohérente avec les programme du collège. Nous pensons donc que ce genre de tâches peut prendre place dans le domaine de « Grandeurs et mesures », où il peut enrichir la conception de l'aire en tant que grandeur et l'apprentissage de formules tout en mettant en interrelation les cadres géométrique, grandeurs et numérique.

5.6 Le genre de tâches effecteur des changements d'unités, T_6

Ce genre de tâches est présent dans les deux périodes. Dans la période A1, il est sujet d'étude du domaine « Gestion de données, fonctions » et dans la période A4, c'est un thème d'étude du domaine « Grandeurs et mesures ». Dans les deux périodes, il s'agit de changer d'unités de longueur, aires et volumes, ainsi que de distances, vitesses et durées. Mais dans l'institution CA4 apparaissent des grandeurs plus complexes (grandeurs produits et quotients) pour lesquelles il faudra étudier les changements d'unités. Dans la période A1, la technique proposée par les programmes est basée sur le tableau de proportionnalité. Cette technique est conforme à la place du genre de tâches T_6 dans les niveaux de codétermination, car elle appartient au domaine des fonctions :

- en 6e, T_6 fait partie du thème « Aires et périmètres » du secteur « activités à base géométrique » ;
- en 5e, T_6 appartient au thème « Proportionnalité » du secteur des fonctions ;
- en 4e, on trouve T_6 dans le thème relatif à la vitesse moyenne dans le secteur « Proportionnalité » ;
- en 3e, T_6 est un sujet d'étude du thème « Grandeurs composées » dans le secteur dédié à l'étude des grandeurs.

Il s'agit de mettre en œuvre la proportionnalité pour réaliser des conversions d'unités de mesure. En 5e, on détermine le coefficient de proportionnalité dans des changements d'unités (C.N.D.P., 1997b). Par exemple, en 5e à cette époque, on pourra demander aux élèves de compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Volume (en litres)	300		5000	
Volume (en m^3)		0,04		10

Figure 3-3. Exemple 1 de tableau de changements d'unités

L'élève devra donc connaître l'égalité 1l = $0{,}001m^3$ et il pourra compléter le tableau en multipliant ou en divisant par 0,001. À la même époque, on pourra demander à un élève de 3e de compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Masse volumique (en g/cm^3)	300		5000	
Masse volumique (en kg/m^3)		0,04		10

Figure 3-4. Exemple 2 de tableau de changements d'unités

L'élève devra donc savoir que $1g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$, et dans ce cas l'égalité est moins évidente et il est très probable que l'élève ne puisse donner la réponse correcte qu'avec des éléments technologiques relatifs à la proportionnalité. Chevallard et Bosch signalent qu'il existe un manque technologique relativement aux changements d'unités :

> « De fait, la difficulté du rapport scolaire aux grandeurs – marqué notamment par une véritable détresse technique en matière de changement d'unités – est surdéterminée par un fait patent : les professeurs français de mathématiques (et de physique) ne disposent pas aujourd'hui d'une *technologie* adéquate relative aux « nombres concrets » qui, notamment, justifie une technique simple, fiable et intelligible de changement d'unités. » (Chevallard & Bosch, 2000-2001)

Au cours du collège dans la période A1, les changements d'unités deviennent de plus en plus difficiles en raison de l'apparition des grandeurs composées. On commence en 6e par faire des changements d'unités de longueur pour arriver en 3e à un travail sur des grandeurs composées de plus en plus complexes exprimées par exemple, en passagers x kilomètres ou KWh. Ainsi une technique dérivée de la proportionnalité se montre inefficace pour les traitements des changements d'unités des grandeurs quotients et produits. Il semble que c'est ce que précisent les programmes du collège de la période A4. À partir de 2005, les changements d'unités appartiennent aux secteurs représentés par chaque grandeur (longueurs, aires, volumes, etc.) dans le domaine « Grandeurs et mesures ». Les programmes signalent que c'est un traitement direct sur les grandeurs qui est nécessaire pour les conversions d'unités, et encore, le document ressource propose une théorie et une technologie pour appuyer ce genre de tâches T_6. Il s'agit de la technique nommée comme « concrète » par Chevallard et Bosch (2000-2001)[3], comme sur l'exemple suivant donné par le document ressource (2007) :

$$\boxed{60\ \text{km/h} = \frac{60\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{60\ 000\ \text{m}}{3\ 600\ \text{s}} = \frac{60000}{3600}\text{m/s} = \frac{100}{6}\text{m/s} \approx 16{,}67\ \text{m/s}}$$

Figure 3-5. Traitements sur les unités proposés par le document ressource « Grandeurs et mesures »

En conclusion, les techniques pour résoudre le genre de tâches T_6 dans la période A1 ne sont pas adaptées pour la suite de l'apprentissage, car elles sont inefficaces pour traiter T_6 sur des grandeurs plus complexes. Ainsi, l'institution CDA4 prend en charge le problème en 2005 et propose un nouvel habitat pour T_6 dans le domaine « Grandeurs et mesures », où apparaissent des éléments technologiques efficients pour le traitement des unités.

5.7 Le genre de tâches mesurer une grandeur, T_7

Comme nous l'avons dit dans le premier chapitre, nous comprenons le verbe « mesurer » comme « évaluer une grandeur à l'aide d'une unité de mesure ». Dans la période A1, le programme de 6e signale que « les travaux géométriques prennent appui sur les usages des instruments de dessin et de mesure » et nous avons identifié comme types de tâches relatifs à T_7 :

- Déterminer l'aire d'une surface à l'aide d'un pavage ;
- Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle à l'aide d'un dénombrement d'unités.

[3] Voir chapitre II de la thèse.

Nous considérons que ces types de tâches sont du genre T_7, « mesurer une grandeur ». Il ne s’agit pas de calculer la grandeur d’un objet, mais plutôt de comparer son aire ou son volume à une unité de mesure.

On retrouve les mêmes types de tâches en A4, mais cette fois-ci dans le domaine « Grandeurs et mesures ». De plus, il apparaît un nouveau type de tâches « mesurer un angle » avec un instrument de mesure, « le rapporteur » ; autrement dit, une procédure de type mesurage. Les programmes font la différence entre « calculer » et « déterminer » une grandeur. Quand ils parlent de « calculer », ils font référence à une procédure numérique qui prend appui sur les formules. Par contre, quand ils utilisent le mot « déterminer », ils font mention à des procédures de mesurage.

Le genre de tâches T_7 n’est présent qu’en classe de 6e. Les textes officiels présentent l’action de mesurer comme un outil pour une étude statistique :

> « De nombreuses activités dans les disciplines expérimentales (physique-chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie), basées sur des mesures, doivent intégrer la notion d'*incertitude* dans l'acte de mesurer et développer l'analyse des séries de mesures. Lors de manipulations, les élèves constatent que certaines grandeurs sont définies avec une certaine imprécision, que d'autres peuvent légèrement varier en fonction de paramètres physiques non maîtrisés. Plusieurs mesures indépendantes d'une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la *dispersion naturelle des mesures*. » (Ministère de l’Éducation Nationale, 2008)

En lien avec le domaine statistique, nous n’avons trouvé qu’un genre de tâches en 3e dans la période A4 qui fait référence à l’acte de mesurer « Exprimer et exploiter les résultats de mesures d’une grandeur ». Ainsi, il apparaît que même si les programmes donnent une grande importance au mesurage dans leurs discours, cette action est presque absente dans les types de tâches proposés. Il s’agit ainsi d’utiliser, par exemple, les résultats numériques d’un mesurage sans avoir obtenu ces données à partir d’une activité. De ce point de vue, le mesurage est virtuel, les données arrivent dans les présentations en tableaux sans explication. Etant donné que le genre de tâches T_7 , « mesurer une grandeur » n’est présent qu’en 6e, les élèves ne sont presque jamais confrontés à ce genre de tâches.

Ce phénomène vient rejoindre le processus de numérisation des grandeurs. Le travail sur les mesures et les nombres prend une place très importante au collège. Par voie de conséquence, il semble que le genre de tâches T_7 ne s’inscrit pas dans la perspective numérique développée par les programmes, puisque il exploite des connaissances géométriques et physiques. Parfois, les programmes indiquent d’utiliser T_7 pour introduire les formules et pour exploiter des données numériques, mais ce genre de tâches ne fait pas l’objet d’un vrai travail au collège.

6. Les grandeurs et leurs interrelations avec d'autres domaines

Nous avons analysé dans la partie précédente les genres de tâches relatifs aux grandeurs dans les périodes A1 et A4. Nous avons vu qu'en A1 les grandeurs étaient présentes dans deux domaines le géométrique et le fonctionnel et qu'en A4 elles formaient un domaine tout entier. Nous voulons maintenant analyser les interrelations entre les grandeurs et d'autres cadres mathématiques. Dans cette partie, les grandeurs ne sont pas les objets premiers dans les organisations mathématiques, mais elles font partie de leur structuration en termes de tâches, techniques, technologies et théories.

6.1 Les grandeurs et les configurations géométriques

Comme nous l'avons vu précédemment, les grandeurs sont en relation avec la géométrie dans le domaine « Travaux géométriques » dans la période A1 et dans le domaine « Géométrie » dans la période A4. Les objectifs du domaine « Travaux géométriques » dans la période A1 sont :

- passer de la perception des figures à leurs propriétés et connaître et utiliser des théorèmes ;
- se familiariser avec les représentations dans l'espace ;
- manipuler les transformations géométriques.

Dans la période A4, il s'agit :

- caractériser les figures par des propriétés ;
- isoler dans une configuration les éléments nécessaires pour répondre à une question ;
- se familiariser avec des représentations dans l'espace ;
- étudier des transformations géométriques simples ;
- connaître et utiliser quelques théorèmes.

En général les grandeurs sont situées dans ces habitats comme des outils pour la construction de configurations et comme éléments de propriétés des configurations. Nous identifions ainsi deux grands groupes d'organisations mathématiques de natures différentes, celles qui relèvent de la construction des objets géométriques et celles qui se présentent comme des propriétés géométriques, nous les noterons T_c et T_p respectivement.

6.1.1 Des organisations mathématiques semblables

Nous avons vu que les genres de tâches relatifs aux grandeurs présents dans la période A1 dans les deux domaines, géométrie et fonctions, se rassemblent pour former un seul domaine « Grandeurs et mesures » dans la période A4. Pour les types de tâches relevant de la géométrie, on trouve pratiquement les mêmes organisations mathématiques globales dans les deux périodes. La structuration en domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude dans la période A1 et A4 sont semblables. Ainsi dans le domaine de la géométrie, on trouve trois grands secteurs d'étude : les figures planes, les configurations dans l'espace et les transformations. Pour comprendre mieux comprendre l'organisation des contenus dans la géométrie, nous présentons le tableau suivant[4] construit en fonction des thèmes d'étude et des classes respectives :

Secteur	**6e**	**5e**	**4e**	**3e**
Figures planes	Quadrilatères Triangles Cercle Médiatrice et bissectrice Reproduction et construction des figures	Parallélogramme Caractérisation angulaire du parallélisme Construction des triangles et inégalité triangulaire Somme des angles d'un triangle Cercle circonscrit à un triangle	Triangles : milieux et parallèles Triangle rectangle et cercle circonscrit Tangent à un cercle Distance d'un point à une droite	Théorème de Thalès Polygones réguliers Triangle rectangle : relations trigonométriques Angle inscrit et angle au centre
Configurations dans l'espace	Parallélépipède rectangle	Prismes droits, cylindres de révolution	Pyramide et cône de révolution	Sphère et sections planes de solides
Transformations	Symétrie orthogonale par rapport à une droite	Symétrie centrale	Translations (A1) Agrandissement et réduction (A4)	Rotation et composition de transformations(A1) Vecteurs (A1) Agrandissement et réduction (A4)

Tableau 3-17. Thèmes d'étude du domaine géométrique dans les périodes A1 et A4

[4] Nous avons signalé entre parenthèses la période A1 ou A4 quand les contenus apparaissent dans une seule de ces périodes.

On sait que les figures et les configurations géométriques peuvent se caractériser à partir de leurs grandeurs. Ainsi, on étudie les objets comme les segments, les surfaces planes ou les solides à partir de leurs angles ou leurs longueurs, mais aussi respectivement à partir de leur aire ou volume respectivement. De plus, l'étude des propriétés et des théorèmes relatifs aux figures et aux configurations revient à travailler sur des relations entre grandeurs et leurs caractérisations à partir de ces grandeurs, par exemple, le théorème de Thalès est une relation proportionnelle entre longueurs. Dans les périodes A1 et A4, on travaille quasiment sur les mêmes objets et on apprend à utiliser les mêmes propriétés à travers les mêmes types de tâches, techniques et technologies.

6.1.2 Des technologies relatives à la géométrie et aux grandeurs pour des types de tâches non-explicités

Quelques fois les programmes n'explicitent pas les types de tâches possibles à résoudre avec certains éléments technologiques et parlent seulement de « Connaître et utiliser » un objet ou une propriété. Ainsi, ils n'explicitent pas dans quels types de problèmes les élèves doivent les utiliser. L'un des objectifs de l'enseignement au collège est d'étudier des configurations et les théorèmes associés. Dans cette situation, on parle d'organisations mathématiques incomplètes (Bosch et al, 2004), car on ne peut pas compter sur un bloc pratico-technique formulé par les programmes, plus particulièrement, on ne trouve aucun type de tâches explicite.

Comme nous souhaitons étudier les interrelations entre les grandeurs et les connaissances géométriques, nous nous intéressons aux technologies mettant les notions sous-jacentes. Ces relations peuvent être de deux types, soit la technologie utilise les grandeurs comme objets pour définir des propriétés ou théorèmes, soit on peut en déduire un type de tâches pour une technologie relativement aux grandeurs. Par exemple, en 5e, l'une des capacités attendues est de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles du parallélogramme et du triangle ». Dans le document ressource de géométrie (2007a), on trouve le problème suivant :

En 5e : BCDE *est un carré.* ABEF *est un losange.*

$\widehat{BAC} = 20°$.

Déterminer l'angle $\widehat{AFE}$.

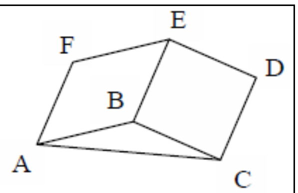


Figure 3-6. Problème extrait du document ressource « Géométrie au collège »

Le type de tâches associé à ce problème est « Calculer un angle », l'une des techniques possibles pour résoudre le problème est de déterminer, d'abord les angles du triangle isocèle ABC et ensuite connaissant les angles du carré on calcule l'angle $A\hat{B}E$, pour finalement en déduire l'angle $A\hat{F}E$. Mais, les programmes n'explicitement pas les types de tâches à résoudre, on trouve seulement les éléments technologiques relatifs à cette technique :

- la somme des angles d'un triangle est de 180° ;
- les angles d'un carré sont égaux à 90° ;
- dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux.

Comme on le voit dans l'exemple précédent, la technologie est associée au genre de tâches « calculer une grandeur » qui prend appui sur des éléments géométriques comme la propriété de somme des angles d'un triangle ou les définitions du carré et du parallélogramme. Mais les grandeurs participent aussi à la construction de ces technologies. Les liens entre le cadre des grandeurs et le géométrique s'établissent de deux manières : on calcule des grandeurs à l'aide des propriétés géométriques et les grandeurs participent à la construction de ces propriétés.

En conséquence, dans les deux périodes, on trouve dans le domaine géométrique divers éléments technologiques relatifs à certains types de tâches en lien avec les grandeurs. Néanmoins, si les éléments technologiques sont bien indiqués dans les programmes, par contre les types de tâches ne sont pas toujours explicités.

6.1.3 Constructions géométriques

Les grandeurs participent aux types de tâches « construire une figure » et « tracer une figure ». Nous faisons la différence entre ces deux types de tâches. Dans le premier, il s'agit d'utiliser des procédures de construction, par contre dans le deuxième, il s'agit de faire un dessin à main levée. D'une part, on peut demander à un élève de « construire un triangle connaissant les trois longueurs de ses côtés », et d'une autre part, on peut lui demander de « tracer un triangle rectangle d'hypoténuse 7 cm ». Dans les deux exemples précédents, on a utilisé la grandeur longueur pour décrire la tâche à réaliser par l'élève. Comme on peut associer aux figures planes et aux solides des angles, des longueurs, des aires et des volumes, la définition de ces objets géométriques est faite à partir de leurs grandeurs, et en conséquence les tâches de construction peuvent faire intervenir ces dernières.

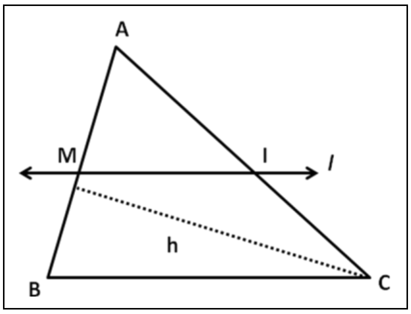
En 6e, on étudie les types de triangles et les quadrilatères et en 5e les parallélogrammes. En classe de 6e, le programme demande de « compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure ou de dessin » (C.N.D.P., 1997a), l'objectif est d'apprendre aux élèves à « reporter une longueur » et à « reproduire un angle ». Avec ces premiers outils les élèves peuvent, par exemple, construire des figures planes comme un triangle ou un rectangle. En 5e, l'un des objectifs est de construire un triangle en connaissant : la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, les longueurs des trois côtés. Les activités de construction sont moins fréquentes au collège au fur à mesure qu'on avance dans les niveaux. En particulier, les programmes de la classe de 3e ne parlent plus des tâches de construction et ainsi cette niche pour les grandeurs disparaît peu à peu dans les classes du collège.

6.1.4 L'étude des relations entre grandeurs

L'un des objectifs du programme est d'amener les élèves à des activités de démonstration et de preuve. En classe de 4e, par exemple, on peut démontrer le théorème dit des milieux proposé par le document ressource « Géométrie au collège » :

« Soit ABC triangle, M le milieu du côté [AB] et *l* la droite parallèle au segment [BC] qui passe par M. Soit I le point d'intersection de *l* avec le segment [AC], démontrer que AI=AC »

La démonstration de cette propriété permet de mobiliser les connaissances sur les aires de triangles. Voyons la démonstration proposée par le document ressource :

> « - D'abord, on représente la situation par un dessin
>
> 
>
>
> Figure 3-7. Réciproque du théorème de la droite des milieux
>
> - Les triangles MBC et IBC ont même aire, d'après la propriété qui dit « deux triangles ayant un côté commun et les sommets opposés à ce côté situés sur une parallèle au côté ont la même aire ».
>
> - Cette aire est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC. En effet, comme MA=MB, l'aire du triangle MBC est égale à l'aire du triangle MAC.
>
> - Donc, l'aire du triangle ABI est aussi égale à la moitié de celle de ABC et donc égale à l'aire du triangle IBC. Comme les deux triangles ABI et IBC ont la hauteur issue de B commune, les longueurs AI et IC sont égales ».

Si on reprend l'exemple de démonstration donné ci-dessus, on peut associer à cette tâche le genre de tâches « Démontrer la relation entre deux grandeurs », dans ce cas il s'agit de démontrer l'égalité de deux longueurs.

Dans la classe de 4e, les grandeurs apparaissent aussi dans plusieurs propriétés définies par le programme comme des « compétences exigibles » :

- Dans un triangle, la longueur d'un segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté ;
- Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC], et si [MN] est parallèle à [BC], alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$;
- Théorème de Pythagore ;
- Relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés adjacents.

Ces propriétés ne sont pas associées explicitement à des types de tâches. Elles peuvent faire parties des éléments technologiques d'une organisation mathématique régionale des problèmes relevant du genre de tâches « Calculer une grandeur », mais aussi « montrer l'égalité entre deux grandeurs », etc. Il semble que dans le domaine de la géométrie, on trouve le genre de tâches « calculer une grandeur », mais aussi un nouveau genre de tâches que nous n'avions pas considéré jusqu'à maintenant : « établir ou démontrer une relation entre grandeurs », la relation peut être donnée ou non au départ. Le théorème de Pythagore est une technologie pour ce genre de tâches :

« Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit ».

Dans le cas précédent, il s'agit d'une relation entre les longueurs du triangle rectangle, mais on peut aussi le regarder comme une relation entre aires :

« L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme d'aires des carrés construits sur les autres deux côtés ».

En conclusion, à l'aide des éléments technologiques des cadres géométrique et grandeurs, on peut résoudre les types de tâches « calculer une grandeur » et « établir ou démontrer une relation entre grandeurs ». Ces deux types de tâches n'apparaissent pas toujours explicitement dans les programmes.

6.1.5 Des propriétés de conservation des grandeurs par transformations

À tous les niveaux de classes du collège, on trouve des propriétés liées à l'idée de conservations des grandeurs dans les secteurs « transformations ». En 6^{e}, ces éléments technologiques servent pour « construire d'axes de symétrie » et « construire des figures planes qui possèdent des axes de symétrie ». En 5^{e}, elle est utilisée pour construire les images des figures simples par symétrie centrale. En 4^{e}, on étudie la conservation des longueurs, des angles et des aires dans une translation, mais seulement en A1 et dans la même période, on trouve encore la propriété des conservations des grandeurs, mais cette fois pour la rotation en 3e. On voit ainsi l'importance de la conservation des grandeurs pour les transformations.

Ces propriétés de conservation des grandeurs appartiennent à des organisations mathématiques liées aux types de tâches « construire l'image d'une figure ou d'un point par transformation », « compléter l'image d'une transformation », « calculer des grandeurs », etc. Ainsi, les grandeurs interviennent dans la technologie des organisations mathématiques du secteur transformations.

6.2 Les grandeurs et les nombres

Dans les programmes du collège, le domaine du numérique est représenté sous le nom de « Travaux numériques » dans la période A1 et de « Nombres et calculs » dans la période A4. Les grandeurs ne présentent que peu des liens explicites avec les nombres dans les programmes. La seule relation identifiée est associée au sujet d'étude « Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal ». Les programmes en A2 et A3 en donnent un exemple bien spécifique :

> « L'expression de mesures, une unité étant choisie : 23,042 m, c'est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) et 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètre (42 mm), ce qui permet d'écrire : 23,042 m = 23 m + 4 cm + 2 mm = 23 m + 42 mm »

Par contre, dans les documents ressource *Les nombres au collège* et *Le calcul numérique au collège* de la période A4, on trouve des références insistantes sur la place et le rôle des grandeurs dans la construction du numérique. Le premier de ces textes signale que l'un des pôles de travail est d'étudier les situations où les nombres peuvent être utilisés pour exprimer des mesures ou pour résoudre des problèmes portant sur les grandeurs (D.G.E.S.C.O., 2006). Nous allons montrer les usages des grandeurs pour l'étude des différents ensembles de nombres, proposés par les documents ressources de la période A4.

6.2.1 Les grandeurs et les nombres entiers et les rationnels

Les nombres entiers positifs sont étudiés dans les classes de 6e et 5e dans la période A4. Le document ressource précise la raison d'être de ces nombres relativement aux gr andeurs :

« Leur usage réside dans le traitement de situations faisant intervenir des quantités discrètes, puis celles qui concernent des grandeurs au fur et à mesure de leur introduction : longueurs, masses, prix, durées, contenances et aires » (D.G.E.S.C.O., 2006).

Les nombres servent ainsi à traiter de situations faisant intervenir les grandeurs. Inversement ces grandeurs aident à la compréhension de ces nombres. En effet, l'une des fonctions des grandeurs dans l'étude des rationnels est de représenter les fractions et leurs opérations à travers un modèle géométrique. Ces représentations utilisent en général les concepts de longueur et d'aire.

- Représentation des fractions

Les fractions au collège sont définies en référence au partage de l'unité, soit dans des situations de mesure, soit dans des situations de repérage sur une droite graduée (D.G.E.S.C.O., 2006). Dans les usages, les grandeurs interviennent souvent pour introduire les fractions dans des situations de partage de l'unité comme dans l'exemple suivant :

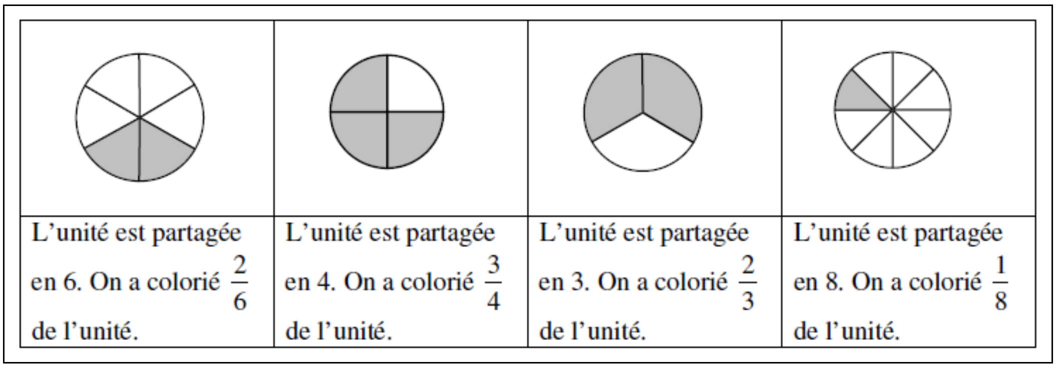


Figure 3-8. Représentation des fractions par partage à l'unité d'aire

Dans cet exemple, l'aire totale de la figure représente l'unité et l'aire de la partie colorée la fraction de l'unité. Il est un modèle classique de l'étude des fractions qui utilise la notion d'aire sans donner de référence explicite à cette espèce de grandeur. Il s'agit souvent d'un appui implicite pour la construction d'objets numériques.

Un autre usage de représentions des fractions s'appuie sur l'espèce de grandeur longueur. Comme dans l'exemple suivant :

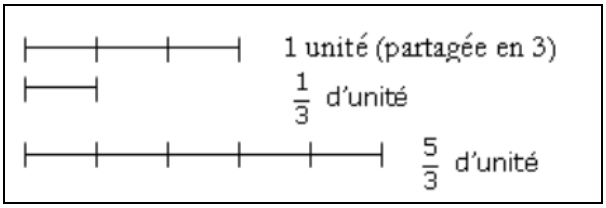


Figure 3-9. Représentation des fractions par partage à l'unité de longueur

Ces deux manières de représenter les fractions prennent appui sur le partage d'une unité d'aire ou d'une unité de longueur, mais ces deux espèces de grandeur ne sont presque jamais explicitées dans les discours pour expliquer les fractions comme une partie de l'unité. On trouve ainsi des expressions comme « un tiers d'un rectangle », « le quart d'un disque », mais comme le signale le document ressource *Grandeurs et mesures* (2007), il est difficile de donner un sens à la fraction d'un objet : « il n'est donc pas possible d'opérer directement sur les objets, et le recours aux grandeurs est nécessaire pour pouvoir définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets ».

c) Addition des fractions

Dans le document ressource *Le calcul numérique au collège* (2007b), la noosphère propose une construction du sens de l'addition des fractions qui prend appui sur les longueurs. Dans un premier moment, ils définissent l'addition des fractions d'égal dénominateur :

> « En mettant bout à bout deux segments qui mesurent respectivement a/c et b/c, on obtient un segment de longueur (a+b)/c. La verbalisation joue ici un rôle important. Par exemple, oraliser l'écriture 3/7 + 8/7, " trois septièmes plus huit huitièmes" conduit naturellement à conclure que "c'est onze septièmes" »(D.G.E.S.C.O., 2007b)

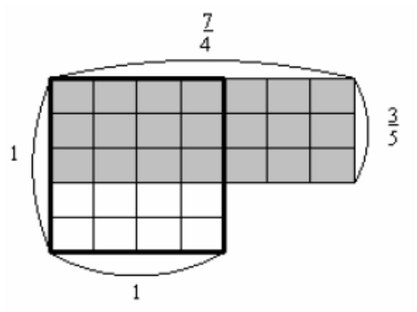
Il s'agit de représenter à l'aide des longueurs des segments l'addition. Dans le cas où les fractions ont des dénominateurs différents, la procédure paraît plus difficile :

> « Dans le cas où les segments mesurent a/b et c/d avec b≠d, on introduit une sous graduation de l'unité. Par exemple, pour obtenir la mesure du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments de longueurs respectives 7/6 et 3/4, on partage régulièrement l'unité en un nombre de segments de même longueur qui est multiple de 6 et de 4, par exemple 12, on exprime alors chaque mesure en douzièmes de l'unité : 14/12 et 9/12, ce qui permet de se ramener au cas précédent. » (*Ibidem*)

Dans les deux représentations de l'addition de fractions, on définit la somme des fractions à partir des mesures de longueurs.

d) Multiplication des fractions

Pour le produit entre fractions, la procédure est analogue. On met en relation cette opération avec l'aire d'un rectangle. Pour cela, le document ressource propose d'évaluer de deux manières l'aire d'un rectangle des côtés 7/4 et 3/5 en prenant la longueur d'un carré comme unité de longueur et l'aire de ce carré comme unité d'aire :



Le carré est découpé en 4 × 5 rectangles identiques. Le rectangle dont on cherche à évaluer l'aire contient 7 × 3 de ces rectangles, son aire représente donc $\frac{7\times3}{4\times5}$ de l'aire du carré. Et donc l'aire du rectangle peut être exprimée de deux façons, ce qui conduit à l'égalité : $\frac{7}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{7\times3}{4\times5}$

Figure 3-10. Représentation du produit de fraction à travers l'aire d'un rectangle

Dans ce modèle, comme dans l'exemple précédent, on définit une opération entre deux nombres à l'aide d'une grandeur particulière, dans ce dernier cas, l'aire.

6.2.2 Les grandeurs et les décimaux

Les nombres décimaux sont souvent introduits pour exprimer de nouvelles mesures de grandeurs. Les grandeurs permettent ainsi de donner un sens à l'écriture des nombres décimaux, comme l'indique le document ressource *Les nombres au collège* sur exemple précis :

> « Deux expressions comme 2,4 dm² et 2,04 dm² sont intéressantes à analyser (par exemple, en demandant aux élèves de construire deux surfaces d'aires correspondantes). L'expression 2,4 dm² peut être interprétée comme 2 dm² et 4 dixièmes de dm² : la surface peut être construite en juxtaposant une surface de 2 dm² et une autre obtenue en partageant un dm² en 10 et en prenant 4 parts. La forme 2,4 dm² ne peut pas être traduite directement à l'aide de deux unités légales (2 dm² 40 cm²) car pour arriver à cette forme il faut d'abord utiliser le fait que 4 dixièmes c'est aussi 40 centièmes. L'expression 2,04 dm² peut être interprétée comme 2 dm² et 4 centièmes de dm² (qui correspondent à 4 cm²) et donc être écrite directement sous la forme 2 dm² 4 cm². Dans les deux cas, sont en jeu des connaissances sur les relations entre unités d'aire et sur l'interprétation de l'écriture décimale » (D.G.E.S.C.O., 2006)

Les unités de mesure et la conversion d'unités de mesure des grandeurs servent d'appui pour l'étude des nombres décimaux.

6.3 Les grandeurs et les fonctions

6.3.1 Comparaison des types de tâches dans les deux périodes

Comme nous l'avons dit, même si les organisations mathématiques des grandeurs sont regroupées pour former un domaine d'étude, elles continuent d'être en lien avec d'autres notions mathématiques. Cette présence est plutôt implicite, les grandeurs n'apparaissent pas en tant qu'objet, mais plutôt un outil pour l'étude d'autres concepts mathématiques dans différents domaines.

Dans le domaine des fonctions les grandeurs interviennent dans les problèmes de proportionnalité issus de la vie quotidienne et l'étude de la fonction linéaire en classe de 3e. Le rôle des grandeurs dans le domaine des fonctions apparaît explicitement dans les commentaires (ou Exemples d'activités et commentaires) pour la classe de sixième en A1 et en A4 : « Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non-proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures) ». De cette façon, les grandeurs représentent une ressource de problèmes pour traiter le concept de proportionnalité dans les deux périodes.

Par contre, on remarque des différences entre les organisations mathématiques des périodes A1 et A4, notamment certains types de tâches présents en A1 dans le domaine « Gestion de données, fonctions », disparaissent de ce domaine pendant la période A4. Cela est la conséquence de la réorganisation des programmes en A4 qui définit un domaine de grandeurs. Ainsi, les thèmes suivants sont déplacés vers le domaine « Grandeurs et mesures » :

- le mouvement uniforme et la vitesse ;
- les changements d'unités ;
- l'agrandissement et la réduction.

Les problèmes relatifs à ces thèmes d'étude forment dans la période A4 des organisations mathématiques locales liées à l'étude des grandeurs et de la mesure.

6.3.2 Les grandeurs et la proportionnalité

Pendant la période A1, l'étude de la proportionnalité débute véritablement en 5^{e}, et dans la période A4, elle commence en 6^{e}. En effet, dans les programmes de 1996, la proportionnalité apparaît dans les commentaires tandis qu'en 2005, elle est un contenu à enseigner. L'objectif en A1 est de comprendre à travers la proportionnalité les relations entre grandeurs physiques, distance, temps et vitesse, pour lesquels on étudie les changements d'unités et le mouvement uniforme (C.N.D.P., 1996b). Pendant la période A4, on étudie aussi les relations entre grandeurs, toujours à travers de la proportionnalité, pour l'étude des situations de proportionnalité dans la vie quotidienne.

Le document ressource *Proportionnalité au collège* (2005) signale que la proportionnalité peut s'envisager dans trois cadres : les grandeurs, le numérique et le géométrique représenté par des axes. La proportionnalité évolue au collège selon son traitement dans ces trois cadres. D'après ce texte, la proportionnalité est travaillée plutôt dans le cadre des grandeurs à l'école et en 6^{e}, et ensuite elle est étudiée en faisant interagir les domaines des grandeurs, du celui du numérique et de la géométrie graphique, au sens précédent.

À propos de l'étude de la proportionnalité s'appuyant dans le cadre grandeurs, le document ressource évoque une procédure appelée « Raisonnement proportionnel ». Il s'agit de raisonner dans le contexte du problème, sans donner des techniques spécifiques. Ces techniques peuvent s'appuyer sur différentes propriétés non-formalisées, la propriété additive, la propriété d'homogénéité, la technique de passage par l'unité et le coefficient de proportionnalité. On peut voir à l'œuvre ce « raisonnement proportionnel » à propos du problème suivant :

« Si 6 kg de pommes coûtent 12 euros, quel est le prix de 9 kg de la même variété de pommes ? ».

En 6^{e}, un raisonnement du type proportionnel est de considérer que 9 kg est égal à 6 kg plus 3 kg, le prix de 3 kg de pommes est la moitié du prix de 6 kg, c'est-à-dire, 3 kg coûtent 6 euros, et donc 9 kg de pommes coûtent 12 euros plus 6 euros, soit 18 euros. Dans ce cas, on utilise les propriétés d'additivité et d'homogénéité de la proportionnalité sans les formaliser au niveau de la technologie de l'organisation mathématique utilisée. Il s'agit d'une procédure spontanée construite à partir de grandeurs présentes dans la vie quotidienne.

En 5e, on institutionnalise ces propriétés en travaillant les grandeurs proportionnelles : « la proportionnalité commence à être étudiée dans un cadre purement numérique […], mais la plupart des activités restent contextualisées » (D.G.E.S.C.O., 2005) du fait qu'on travaille toujours sur des grandeurs proportionnelles. Par exemple, le problème précédent est résolu dans cette classe en utilisant un tableau de proportionnalité :

2 euros/kg	Masse (kg)	6 kg	9 kg
	Prix (euros)	12 euros	18 euros

Figure 3-11. Résolution d'un problème proportionnalité en 5e

Ce tableau fait directement référence aux grandeurs en faisant apparaître les unités. IL est conforme aux prescriptions des textes officiels sur la place des unités dans les calculs : « le calcul sur les grandeurs constitue alors un moyen de contrôle d'un calcul » (D.G.E.S.C.O., 2007).

En classe de 4e, on emploie les mêmes propriétés qu'en 6e et 5e. A cela, le programme ajoute l'étude d'égalités entre quotients, les produits en croix et la caractérisation graphique de la proportionnalité. C'est dans cette classe que le registre graphique fait irruption. Une constante reste toujours la contextualisation des problèmes de proportionnalité dans le cadre des grandeurs. Dans cette classe, on peut traiter le problème précédent en utilisant, par exemple, le produit en croix :

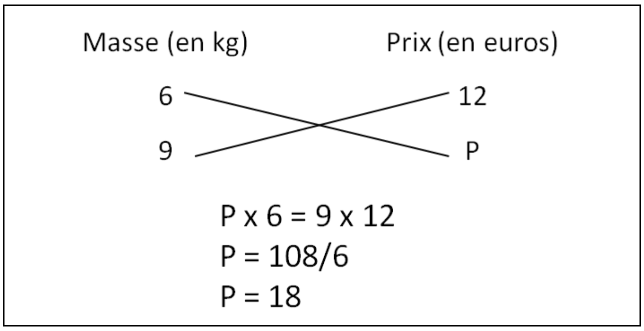


Figure 3-12. Résolution problème proportionnalité en 4e

On remarque qu'il s'agit d'une technique numérique qui n'utilise pas les unités. Ce type de traitement met en avant les mesures et non les grandeurs. À partir de 2005, les textes officiels conseillent de mettre les unités quand la grandeur a une signification dans la réalité. On peut ainsi regarder la même situation de la manière suivante :

« $P = \dfrac{9kg \cdot 12euros}{6kg} = 18euros$ ».

6.3.3 Les grandeurs et la fonction linéaire

En 3e, l'objectif est de modéliser les situations de proportionnalité à l'aide de la fonction linéaire. Pour notre problème, les élèves devront donc faire des formulations numériques comme :

« On a que f(6) = 12, donc f(9) = f(1,5 x 6) = 1,5 x f(6) = 1,5 x 12 = 18 »

Où l'on a considéré ici la fonction linéaire définie par f(x) = 2x sur IR.

La fonction linéaire est un contenu de la classe de 3e dans les deux périodes. Les organisations mathématiques présentes en A1 et A4 ne varient presque pas. Il s'agit de faire émerger la notion de fonction linéaire à travers des exemples qui prennent appui sur la proportionnalité :

> « La définition d'une fonction linéaire, de coefficient a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est ''je multiplie par a''» (C.N.D.P., 1998)

Dans cette classe, les élèves travaillent sur les mêmes propriétés rencontrées ultérieurement comme l'additivité ou l'homogénéité, mais avec un langage fonctionnel. L'objectif est de passer des grandeurs proportionnelles à la fonction linéaire. Les relations entre grandeurs sont modélisées en termes fonctionnels. Nonobstant, le but ultime du collège est de numériser les rapports entre les grandeurs pour faire le passage au lycée avec les fonctions numériques.

En conclusion, les documents officiels de l'institution CDA4 recommandent une étude de la proportionnalité qui se caractérise par des jeux de cadres (Douady, 1986) du cadre grandeurs vers les cadres fonctionnel et numérique tout au long du collège. Les grandeurs constituent la base des problèmes de la proportionnalité, mais l'objectif est de ramener les procédures du type « raisonnement proportionnel » qui se situe dans le domaine des grandeurs aux procédures du type fonctionnel où les unités vont disparaître.

Conclusion du chapitre

Nous avons débuté l'étude des rapports institutionnels aux grandeurs par une analyse générale des programmes de 1995 (CA1) et 2005 (CA4) en prenant deux axes, d'une part, l'aspect outil et l'aspect objet des grandeurs dans l'enseignement, d'autre part, la création d'un domaine des grandeurs dans la période A4. Le changement du programme de collège en 2005 qui place les grandeurs au même niveau que la géométrie, le numérique et les fonctions montre de nouvelles organisations mathématiques locales, régionales et globales relativement aux grandeurs. Il nous semble que les légitimations de l'étude des grandeurs peuvent s'expliquer à trois niveaux de codétermination : la société, la pédagogie et la discipline. Effectivement, les grandeurs font le lien entre les mathématiques et la vie réelle, elles facilitent la construction cognitive de divers concepts et elles sont à l'origine de la construction des mathématiques. La création d'un domaine des grandeurs semble provoquer une évolution des technologies et théories entre la période A1 et A4 : les organisations régionales et globales dans l'institution CA4 font appel à de nouveaux éléments technologiques et théoriques qui n'existaient pas dans les anciennes organisations mathématiques dans l'institution CA1.

Nous avons montré que la période A1 est une période de transition entre un enseignement numérisé des grandeurs, conséquence de la réforme des mathématiques modernes, et un enseignement centré sur les grandeurs en tant qu'objets d'étude dans la période A4. En effet, l'étude des grandeurs commencée en 1995 reste confuse. C'est en 2005 que les programmes donnent une place très importante aux grandeurs au collège. De plus, dans la période A1, l'étude des grandeurs est fragmentée en deux habitats, géométrique et fonctions, où elles semblent avoir un rôle d'outil pour l'étude d'autres notions. Dans la période A4, les grandeurs sont regroupées pour former un domaine tout entier. Malgré les différences entre les institutions CA1 et CA4, certains éléments restent semblables dans les deux périodes. D'une part, au collège, les organisations mathématiques évoluent des cadres géométrique et grandeurs vers un cadre numérique. D'autre part, les fonctions des grandeurs dans la construction d'autres domaines et dans leurs interrelations restent à peu près similaires. Dans le domaine géométrique, les grandeurs sont des éléments constitutifs de propriétés et théorèmes relatifs aux objets géométriques et dans le domaine des fonctions, elles sont source des problèmes relatifs à la proportionnalité. Cependant, pour le domaine du numérique nous avons trouvé peu des traces des grandeurs dans ces deux périodes, bien que les documents ressources proposent un appui important sur les grandeurs pour la construction du numérique, notamment pour la construction des fractions et des opérations.

Enfin l'analyse menée dans ce chapitre a montré les conséquences structurelles et fonctionnelles de la création d'un domaine grandeurs et mesures. On sait que l'existence d'un objet mathématique dans la noosphère ne garantit pas sa vie dans le système d'enseignement. On peut donc penser que la restructuration des grandeurs dans un nouvel habitat ne sera pas nécessairement transplantée à la classe. Ceci est dû au fait qu'il ne suffit pas d'avoir des organisations mathématiques compatibles au corpus organisationnel de l'enseignement, il faut des organisations mathématiques qui répondent à des conditions didactiques déterminées pour qu'on puisse faire vivre les programmes dans les salles de classe. De plus, les éléments technologiques et théoriques nécessaires pour la construction des organisations mathématiques conformes aux directives institutionnelles dans l'enseignement se trouvent dans les documents ressources, cependant ils n'ont pas un caractère obligatoire pour dans l'institution CA4. Dans les prochains chapitres, nous poursuivons l'étude de la place et du rôle des grandeurs dans les pratiques d'enseignement.

Chapitre IV

Étude de manuels scolaires

Dans cette partie, nous dégageons les aspects essentiels du rapport institutionnel ancien et actuel des manuels scolaires français relatif aux grandeurs. Nous avons centré l'étude sur les choix faits par les manuels vis-à-vis des programmes et leurs conséquences sur le savoir à enseigner. Pour ce faire, nous avons opté pour une analyse praxéologique et écologique de manuels des classes de 6^{e} et 5^{e} entre 1995 et 2010. Nous avons comparé les périodes A1 (1995-2005) et A4 (2005-2012) pour ainsi comprendre les assujettissements des manuels scolaires à l'institution programmes de collège dans ces deux périodes.

1. Méthodologie

Pour comprendre l'enseignement des grandeurs au collège, il est nécessaire d'analyser le rapport institutionnel des manuels du fait qu'ils participent du processus de transposition didactique. Le passage du contenu des programmes aux manuels se fait sous un système des contraintes et conditions qui déterminent la vie d'un objet d'enseignement. Mais à la fois ce rapport institutionnel décrit pour les programmes est modifié par le passage de l'objet à une autre institution.

L'analyse écologique des programmes de collège depuis 1995 menée dans le chapitre précédent nous a permis d'établir des grandes lignes directrices pour l'enseignement des grandeurs. Nous avons identifié des divers changements depuis l'année 2005 par rapport aux programmes de 1995 relativement à la place et rôle des grandeurs au collège. Nous souhaitons analyser la transposition de ces nouvelles dispositions de la noosphère les manuels scolaires. Nous avons donc décidé d'étudier des manuels scolaires du collège des deux époques. Nous les avons regardés selon deux perspectives. D'un côté, nous avons analysé ces textes relativement aux variations des programmes et, d'un autre côté, nous avons regardé les similitudes et les différences entre les manuels relativement à l'enseignement des grandeurs. Pour ce faire nous adoptons l'approche écologique et anthropologique développée par Yves Chevallard (1992).

Même si nous avons examiné 15 manuels scolaires, 6 de la période A1 et 9 de la période A4, correspondant à tous les niveaux du collège, de la 6^{e} à la 3^{e}, nous avons opté de présenter les résultats concernant les deux premiers niveaux. Cette option résulte de notre choix de restreindre notre étude aux pratiques d'enseignement dans les classes de 6^{e} et 5^{e}.

Notre méthodologie est organisée de la manière suivante :

- Structuration des niveaux de codétermination didactique :

Nous considérons les sommaires présents dans les manuels du collège des classes de 6e et 5e. Cette indication nous aide à repérer la structure en l'analysant avec les niveaux de codétermination didactique : domaines, secteurs et thèmes. Nous essayons de saisir notamment les niveaux présents dans la structure proposée par chaque manuel. L'objectif est de situer de façon globale la présence des grandeurs dans ces livres et d'observer leur statut comme domaine indépendant ou comme partie d'autres domaines mathématiques. Pour compléter l'étude, dans le cas où les grandeurs apparaissent comme secteur, nous regardons aussi la progression proposée. Ce travail a aussi pour but de repérer l'habitat et la niche des grandeurs dans les manuels des périodes A1 et A4 et leurs interrelations avec d'autres objets mathématiques.

- Analyse avec le filtre *Grandeurs*

Dans une deuxième étape, nous avons choisi d'étudier plus profondément les manuels des classes de 6e en termes d'organisations mathématiques et didactiques. Nous souhaitons maintenant étudier les niches relativement aux grandeurs dans les manuels scolaires entre 1995 et 2010. Pour ce faire, nous utilisons les éléments suivants de notre *filtre des grandeurs*[1] :

a. Nous étudions les organisations mathématiques sur la base de la typologie des problèmes que nous avons construite et les organisations didactiques en regardant les moments didactiques qui se dégagent des manuels, si cela est possible ;
b. Nous déterminons les ostensifs et non-ostensifs d'un traitement des grandeurs, en regardant l'ensemble des objets, les espèces des grandeurs, la mesure et les nombres et les opérateurs et comparateurs ;
c. Nous analysons les dynamiques internes, inter-domaines et extra-mathématique de l'enseignement des grandeurs, et aussi les raisons d'être d'un tel enseignement.

Ces deux études, nous aident à dégager les possibles pratiques d'évaluation relatives aux grandeurs de notre filtre dans les classes de 6e et 5e et des possibles traitements pour les grandeurs dans ces classes. L'objectif est de comprendre certains choix faits par les enseignants relativement aux manuels scolaires.

Parmi les manuels de la période A4, 3 manuels correspondent à ceux utilisés par les enseignants observés pour cette recherche. Nous avons choisi les mêmes deux collections *Triangle* et *Dimathème* dans les périodes A1 et A4. Voici les manuels étudiés :

---

[1] Voir Chapitre 1

<table>
<tr><th>Type de manuel</th><th>Caractéristique</th><th>Manuel</th><th>Codage</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Période A1</td><td rowspan="2">Collection Triangle</td><td>Collection Triangle 5e
2001, Hatier Livre, Paris</td><td>5TR01</td></tr>
<tr><td>Collection Triangle 6e
1996, Hatier, Paris</td><td>6TR96</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Période A4</td><td rowspan="3">Collection Triangle</td><td>Collection Triangle 6e
2005, Hatier, Paris</td><td>6TR05</td></tr>
<tr><td>Collection Triangle 5e
2010, Hatier, Paris</td><td>5TR10</td></tr>
<tr><td>Collection Triangle 6e
2009, Hatier, Paris</td><td>6TR09</td></tr>
<tr><td>Collection Dimathème</td><td>Collection Dimathème 5e
2006, Editions Didier, Paris</td><td>5DI06</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Utilisés par les professeurs</td><td>M2
(année 2009-2010)</td><td>Collection Diabolo 5e
2006, Hachette Livre, Paris</td><td>5DB06</td></tr>
<tr><td>M1
(année 2009-2011)</td><td>Collection Diabolo 6e
2005, Hachette Livre, Paris</td><td>6DB05</td></tr>
<tr><td>M2
(année 2010-2011)</td><td>Collection Multi-Math 6e
2006, Hatier</td><td>6MU05</td></tr>
</table>

Tableau 4-1. Liste de manuels des classes de 6e et 5e analysés

L'analyse écologique des programmes depuis 1995 menée dans le chapitre précédent nous a permis d'identifier les habitats et les niches occupés par les grandeurs dans des différents programmes du collège. Ainsi, au niveau du savoir à enseigner, les grandeurs participent à la construction des domaines numérique, géométrique et fonctionnel jusqu'au 2005, et elles constituent le domaine des grandeurs et mesures à partir de cette année. Nous présentons une analyse par classe en tenant en compte des habitats et des niches pour les grandeurs dans les programmes des institutions CA1 et CA4.

2. Les organisations didactiques « globales » dans les manuels scolaires de 6e et 5e

Nous avons analysé 5 manuels scolaires pour la classe de 6e : 3 de la collection *Triangle* (6TR96, 6TR05 et 6TR09) et 2 utilisés par les professeurs (6DB05 et 6MU05). Et pour la classe de 5e, nous avons analysé 4 manuels scolaires : 2 de la collection *Triangle* (5TR01, 5TR10), 1 de la collection *Dimathème* (5DI06) et 1 utilisé par un professeur (5DB06).

En général, chacun des manuels divise ses chapitres en parties correspondant à un moment de l'enseignement. Il existe notamment une partie « exercices » dans tous les manuels scolaires. Ces parties répondent à des choix relatifs aux organisations didactiques. En effet, chaque manuel scolaire divise ces parties de la même manière indépendamment des organisations mathématiques. Ainsi la division faite par les manuels scolaires répond à une conception de l'enseignement des mathématiques commune à tout contenu d'enseignement.

De ce point de vue, on parlera des organisations didactiques globales, pour décrire de grands types des organisations didactiques associées à des organisations mathématiques globales.

D'après Bosch et Gascón (2002) trois moments de l'étude permettent d'étudier les organisations didactiques mises en place dans une institution didactique. Dans notre cas, pour chacun des manuels scolaires des classes de 6e et 5e, nous retenons le moment de l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique (que nous nommerons en abrégé « exploration de la tâche » dans la suite), le moment de la construction du bloc technologique-théorique et le moment du travail de la technique. Selon ces auteurs, ces trois moments sont pertinents pour la description des organisations didactiques globales :

> « Pourquoi avoir pris uniquement ces trois moments ? Parce que – c'est là un aspect important du modèle proposé – chacun de ces types généraux d'OD entre en cohérence avec un *modèle épistémologique général* des mathématiques, c'est-à-dire avec une manière particulière et relativement précise d'interpréter et de décrire ce qu'est l'activité mathématique – et donc ce en quoi consiste le fait de "construire des mathématiques". Pour le dire autrement, chaque conception ou modèle épistémologique général des mathématiques va pouvoir être mis en correspondance avec une forme particulière de "mise en place des organisations mathématiques"» (Bosch & Gascón, 2002)

Les organisations didactiques ne sont pas entièrement explicitées dans les manuels scolaires, car il est difficile d'identifier clairement des caractéristiques relatives à des éléments comme le topos, le temps didactique, le contrat didactique et le milieu, mais plutôt des organisations didactiques « potentielles », dans le sens qu'elles permettent les mises en place par les professeurs de leurs enseignements. Nous avons ainsi réuni des parties de l'enseignement relatives à chaque manuel et nous les avons associées à un ou plusieurs moments d'étude des trois proposés par Bosch et Gascón. Dans les manuels de 6e, nous avons trouvé les parties suivantes :

Moments d'étude	**Parties 6TR96**	**Parties 6TR05**	**Parties 6TR09**	**Parties 6DB05**	**Parties 6MU05**
Rencontre et exploration de la tâche	Repérer et franchir les obstacles	Repérer et franchir les obstacles	Je fais le point et activités	Activités	Activités
Construction du bloc technologique-théorique et institutionnalisation	Connaissances et méthodes	Connaissances et méthodes	Connaissances et méthodes	Savoir et appliquer	Cours
Travail de la technique	Exercices	Exercices	Exercices	Exercices	Exercices

Tableau 4-2. Analyse des organisations didactiques globales présentes dans les manuels scolaires de la classe de 6e

Dans la classe de 5e, les parties trouvées dans les manuels scolaires analysés sont les suivantes :

Moments d'étude	**Parties 5TR01**	**Parties 5TR10**	**Parties 5DI06**	**Parties 5DB06**
Rencontre et exploration de la tâche	Repérer et franchir les obstacles	Activités	Activités	Activités
Construction du bloc technologique-théorique et institutionnalisation	Connaissances et méthodes	Connaissances	Cours et méthodes	Savoir et appliquer
Travail de la technique	Exercices	Exercices	Exercices	Exercices

Tableau 4-3. Analyse des organisations didactiques globales présentes dans les manuels scolaires de la classe de 5e

Même si cette structuration générale des manuels scolaires en termes de moments ne suffit pas à une analyse approfondie des organisations didactiques (Bosch & Gascón, 2002), elle nous apporte des éléments pour faire une première description des organisations mathématiques, et ainsi analyser les conditions et les contraintes de l'enseignement des grandeurs en 6e et 5e. Des organisations didactiques plus spécifiques seront étudiées à partir des organisations mathématiques régionales ou locales présentes dans les manuels, car comme le signalent Bosch et Gascón (2002) : « Les particularités (de structure, par exemple) des différentes organisations mathématiques vont imposer des contraintes "spécifiques" qui viendront s'ajouter – ou modifier – les contraintes didactiques plus générales ».

Nous présenterons par la suite les organisations mathématiques et didactiques relatives à chaque domaine d'étude, et dans chacun des domaines nous étudions les organisations mathématiques et didactiques relatives à chaque secteur d'étude. Elles seront analysées avec le *filtre des grandeurs*.

3. Analyse écologique du domaine des grandeurs en 6e et 5e

Pour étudier le domaine des grandeurs, nous avons regardé les contenus concernant directement les espèces de grandeurs dans les manuels scolaires des classes de 6e et 5e analysés.

3.1 Les domaines et les secteurs

3.1.1 Les domaines

Dans le tableau suivant, nous présentons les domaines d'étude que nous avons repérés dans les manuels scolaires de 6e et 5e :

Période d'apparition du manuel	**Editions**	**Codage**	**Domaines**
Période A1	Collection Triangle	5TR01	Travaux numériques Travaux transversaux Travaux géométriques et de mesure
		6TR96	Travaux numériques Travaux géométriques Travaux de mesure
Période A4	Collection Triangle	6TR05	Travaux numériques Travaux géométriques et de mesure
		5TR10	Nombres et calculs Organisation et gestion de données Travaux géométriques Grandeurs et mesures
		6TR09	Nombres et calculs Organisation et gestion de données Travaux géométriques Grandeurs et mesures
	Collection Dimathème	5DI06	-
	Collection Diabolo *(Manuel utilisé par M2 pendant l'année 2009-2010)*	5DB06	Travaux numériques Travaux géométriques
	Collection Diabolo *(Manuel utilisé par M1 pendant les années 2009-2010 et 2010-2011)*	6DB05	Travaux numériques Travaux géométriques
	Collection Multimath *(Manuel utilisé par M2 pendant l'année 2010-2011)*	6MU05	-

Tableau 4-4. Domaines d'étude présents dans les manuels scolaires des classes de 6e et 5e

- Le géométrique et le numérique comme des domaines communs

Les collections des manuels scolaires de 6e et de 5e considèrent des domaines différents. La collection *Triangle* explicite l'existence des domaines mesure, géométrie et nombres dans les deux périodes et, la collection *Diabolo* divise l'enseignement en numérique et géométrique, sans faire allusion aux grandeurs ou aux mesures. Les collections *Dimathème* et *Multimath* ne regroupent pas les chapitres en domaines. Ainsi, le numérique et le géométrique sont présents dans les manuels des collections *Triangle* et *Diabolo.* De cette manière, comme les manuels de la collection *Diabolo,* ils divisent seulement l'enseignement en numérique et géométrique et ils devraient placer l'étude des grandeurs dans l'un de ces domaines. Comme cela n'est pas conforme aux directives institutionnelles de la période A4, nous devons regarder les niveaux de codétermination plus spécifiques pour étudier le réel fonctionnement des grandeurs dans ces deux domaines.

De plus, un enseignant qui construit sa progression avec ces manuels scolaires doit aussi faire le choix d'enseigner les grandeurs soit dans le numérique, soit dans le géométrique ou encore dans les deux domaines. Comme on a vu dans l'analyse des programmes des périodes A1 et A4, le fait de situer les grandeurs dans le domaine de la géométrie peut amener à centrer l'enseignement sur les objets géométriques en accordant moins d'importance aux grandeurs. De même, le fait d'étudier les grandeurs dans le cadre du numérique peut avoir comme conséquence un enseignement axé sur les mesures et non sur les grandeurs en elles-mêmes.

- Une évolution au niveau des domaines seulement dans la collection *Triangle*

Nous avons considéré trois manuels de 6e de la même collection « Triangle », mais édités dans des années différentes (6TR96 , 6TR05 et 6TR09), ainsi ils représentent les périodes A1 et A4. Dans ces manuels, on peut observer l'évolution des domaines présents dans la collection *Triangle*. On remarque la réunion des domaines « Travaux géométriques » et « Travaux de mesure » présents dans le manuel de 1996 en un seul domaine « Travaux géométriques et de mesure » dans le manuel de 2005, et ensuite une structuration du manuel de 2009 en quatre domaines d'études, les mêmes proposés par les programmes : « nombres et calculs », « organisation et gestion de données », « travaux géométriques » et « grandeurs et mesures ». Pour la classe de 5e, nous avons regardé 2 manuels scolaires de cette collection : 5TR01, et 5TR10. Dans le sommaire, le manuel de la collection *Triangle* 5TR10 divise aussi l'enseignement en 4 domaines : Nombres et calculs, Organisation et gestion de données, Travaux géométriques et Grandeurs et mesures. Ces sont encore les mêmes domaines indiqués par les programmes de la période A4.

Ces premières observations relativement aux manuels de 6e et de 5e de la collection *Triangle* nous amènent à faire deux remarques. D'un côté, cette collection reconnaît un domaine « Mesure » dans les deux époques, même si ce changement n'a pas encore été proposé dans les programmes de 1996. D'un autre côté, la collection regroupe ce domaine à côté de la géométrie en 2005, ainsi elle ne prend pas en compte les indications des programmes de l'institution CA4, c'est-à-dire considérer les grandeurs et les mesures dans un domaine tout entier. Quatre ans après l'apparition des nouveaux programmes de 2005, la collection *Triangle* fait le choix de présenter les contenus en divisant l'enseignement de la même manière que le suggèrent les programmes de la période A4, c'est-à-dire dans les manuels de 6e et de 5e on trouve bien les 4 domaines : « nombres et calculs », « organisation et gestion de données », « travaux géométriques » et « grandeurs et mesures ».

Ainsi, la nouvelle structuration concernant les domaines d'étude apparaît dans une seule collection, la collection *Triangle*. Cependant, la considération d'un domaine « grandeurs et mesures » se montre déjà dans la période A1 dans ce manuel. Les autres collections *Dimathème* et *Diabolo* ne font pas apparaître explicitement dans leur structuration un domaine des grandeurs. Nous nous demandons alors si le fait d'établir un domaine pour les grandeurs a des répercussions aux niveaux plus spécifiques comme les thèmes et les sujets d'étude dans la collection *Triangle*. De plus, nous cherchons à savoir si les manuels, qui ne définissent pas un domaine des grandeurs de manière explicite, font fonctionner les grandeurs en tant que domaine du point de vue des organisations mathématiques.

3.1.2 Les secteurs

- Les chapitres relatifs aux espèces de grandeurs

Avant de présenter les secteurs d'étude présents dans les manuels scolaires analysés, nous repérons les chapitres consacrés aux espèces de grandeurs dans la classe de 6^{e} à l'aide des tableaux ci-dessous :

<table>
<tr><th>6TR96</th><th>6TR05</th><th>6TR09</th><th>6DB05</th><th>6MU05</th></tr>
<tr><td>Longueurs</td><td>Longueurs et périmètres</td><td>Périmètres et durées</td><td rowspan="2">Périmètre et aire</td><td rowspan="2">Périmètres et aires</td></tr>
<tr><td>Aires</td><td>Aires</td><td>Aires</td></tr>
<tr><td>Angles</td><td>Angles</td><td>Angles</td><td>-</td><td>Angles</td></tr>
<tr><td>Volume d'un pavé</td><td>Volume</td><td>Volumes et masses</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Tableau 4-5. Chapitres relatifs aux espèces de grandeurs dans les manuels de 6e

Dans la classe de 5^{e}, nous avons aussi repéré les chapitres suivants :

Parties 5TR01	**Parties 5TR10**	**Parties 5DI06**	**Parties 5DB06**
Angles et parallélisme	-	Angles	Angles
Aires de figures planes	Aires	Aires	Aires
Volume d'un prisme droit, d'un cylindre	Volumes	-	Volumes

Tableau 4-6. Chapitres relatifs aux espèces de grandeurs dans les manuels de 5e

- Les grandeurs géométriques aire et périmètre comme des secteurs d'étude

Si on fait référence aux programmes de la période A1, les grandeurs doivent être travaillées comme des outils. Elles sont, par exemple, des caractéristiques des objets géométriques. Les espèces de grandeurs sont travaillées en tant que thèmes d'étude dans les secteurs « surfaces planes » ou « solides ». Cependant, en général en classe de 6^{e}, les grandeurs géométriques aire et longueur sont travaillées comme des chapitres dans les manuels scolaires. On peut penser que ces manuels cherchent à donner plus d'importance à ces grandeurs qu'à l'étude de surfaces planes ou de solides. Par exemple, le manuel de la collection *Triangle* de 1996 présente comme chapitres : Longueurs, Aires, Angles et Volume. Ces chapitres s'organisent autour du domaine « Travaux de mesure », par voie de conséquence les espèces de grandeurs sont travaillées de façon indépendante comme un secteur d'étude. Cette organisation est plus représentative de la structuration des programmes de la période A4. En classe de 5e, l'espèce de grandeur aire est étudiée comme un chapitre, mais aussi comme un secteur d'étude dans la collection *Triangle* et dans les autres manuels.

- Les grandeurs angle, longueur et volume comme des secteurs et des thèmes d'étude

En comparant les manuels de la collection *Triangle* et les manuels utilisés par les professeurs, on voit que le volume et la longueur n'ont pas le même statut en classe de 6e. Dans les manuels de la collection *Triangle* 6TR09, 6TR05 et 6TR96 ces grandeurs constituent des secteurs d'étude, par contre dans les manuels utilisés par les professeurs 6DB05 et 6MU05, elles se placent au niveau du thème d'étude.

En classe de 5e, les manuels 5DI06 et 5DB06 proposent d'étudier les aires et les angles comme des secteurs. Cependant on observe une différence dans le statut donné au volume dans le manuel de la collection *Dimathème*, car ce manuel ne présente pas le volume en tant que secteur.

Ainsi, dans les deux époques, les grandeurs géométriques sont des secteurs d'étude dans les manuels de 6e de la collection *Triangle* dans les deux époques A1 et A4, structuration semblable à celle proposée par les programmes de la période A4. Mais les grandeurs géométriques sont des secteurs et des thèmes d'étude dans les manuels utilisés par les enseignants et dans la collection *Dimathème*. Cette structuration situe les grandeurs, aire et périmètre au niveau du secteur d'étude dans tous les manuels scolaires, et les longueurs, les angles et les volumes au niveau du secteur et du thème dans les manuels utilisés par les enseignants et de la collection *Dimathème.*

- L'étude de durées et de masses

L'institution CA4 présente les longueurs, masses et durées au niveau du secteur d'étude. Cependant, aucun manuel scolaire analysé n'a un chapitre dédié à l'étude des masses et durées. En fait, ces grandeurs apparaissaient principalement au niveau des types de tâches dans les chapitres du domaine du numérique ou de celui de la proportionnalité. Les durées et les masses sont étudiées en tant que grandeurs dans un seul manuel : 6TR09. En effet, ce manuel ajoute à l'étude des grandeurs géométriques un travail sur les durées et les masses, elles vont rejoindre respectivement les secteurs des périmètres et des volumes. Le changement de l'étude des durées et des masses du cadre numérique vers le cadre des grandeurs dans le manuel 6TR09 s'explique par une nouvelle contrainte spécifiée dans les programmes de l'institution CA4. En effet, ces grandeurs apparaissent comme un nouveau contenu à traiter en classe de 6e. Ainsi, les espèces des grandeurs masses et durées ont le caractère d'outil dans la plupart des manuels scolaires des deux époques.

3.1.3 Conclusion

Par rapport à l'évolution des manuels scolaires, nous n'avons pas observé de grands changements. En effet, la seule modification se situe au niveau des domaines d'études dans la collection *Triangle*. En 2009, les manuels de cette collection explicitent les mêmes domaines distingués par les programmes du collège de la période A4. Par contre, dans les collections *Dimathème* et *Multimath*, on ne trouve pas de domaines, et les autres manuels identifient en général deux domaines d'étude, le numérique et le géométrique. Ainsi ces deux derniers domaines sont communs à presque tous les manuels. Cela pourrait avoir comme conséquence que l'étude des grandeurs soit attachée à l'enseignement d'autres notions.

Les manuels présentent la même organisation au niveau de secteur d'étude dans les deux périodes. Les manuels appartenant à la collection *Triangle* situent les grandeurs géométriques au niveau du secteur d'étude dans les deux périodes. Par contre, les manuels utilisés par les enseignants ne positionnent que certaines grandeurs au niveau du secteur. Cela n'est pas représentatif de la période A4, où les grandeurs devraient être traitées en tant que secteurs d'étude selon les directives institutionnelles. Les deux seules espèces de grandeurs étudiées au niveau du secteur d'étude dans tous les manuels scolaires sont les aires et les périmètres. Par contre, les angles, les longueurs et les volumes apparaissent plutôt au niveau de thème d'étude.

En conclusion, on peut dire qu'au niveau de codétermination de moindre spécificité, domaines et secteurs, les manuels n'ont pas vraiment changé avec l'apparition des nouveaux programmes scolaires en 2005. Les secteurs d'étude sont les mêmes pour les manuels d'une même collection, *la collection Triangle*, dans les différentes époques. De plus, les autres manuels scolaires présentent une structuration en secteurs différente des programmes de la période A1 et de la période A4. Nous nous sommes demandé alors s'il existe des changements au niveau des organisations locales et ponctuelles, et si ces organisations mathématiques sont conformes aux programmes des institutions CA1 et CA4. Pour y répondre, nous avons fait le choix d'étudier les manuels scolaires de 6e et 5e de façon plus approfondie aux niveaux de thèmes et de sujets d'étude en nous appuyant sur le *filtre des grandeurs.*

3.2 Les grandeurs géométriques en classe de 6e

Nous étudions dans cette partie la place et le rôle de chaque espèce de grandeurs dans les manuels scolaires aux niveaux de codétermination thèmes et sujets d'étude.

3.2.1 Longueurs et périmètres en 6e

Les longueurs sont travaillées en tant que secteur dans les manuels de la collection *Triangle,* 6TR96 et 6TR05, tandis que dans les autres manuels, l'étude est centrée sur les périmètres. Nous analysons l'enseignement relatif aux longueurs dans les manuels scolaires :

- Les longueurs comme secteur ou thème d'étude dans les manuels scolaires de 6e

L'espèce de grandeurs longueur est étudiée dans les chapitres « Longueurs », « Périmètres », « Périmètres et durées », « Longueurs et périmètres » et « Périmètres et aires » relatifs à chaque manuel scolaire. Nous avons pris en compte tous ces chapitres pour analyser les thèmes d'étude relatifs à la notion de longueur et de périmètre. Dans chaque collection, ces notions sont travaillées de la manière suivante :

a) La collection *Triangle* traite les notions de longueur et de périmètre dans un même secteur d'étude comme le proposent les programmes de la période A4. Les thèmes d'étude de ce secteur sont : longueur d'un segment, périmètre d'une figure et conversions d'unités de longueur ;

b) Le manuel utilisé par le professeur M1 de la collection *Diabolo* présente le périmètre en tant que thème d'étude au même niveau que le système métrique, l'aire d'une surface et la longueur d'un cercle. Ce même manuel travaille la longueur au niveau de sujet d'étude dans le secteur « Règle et compas » dans le domaine « Travaux géométriques » ;

c) Le manuel *Multi-math* utilisé par le professeur M2, fait un choix semblable à celui de la collection *Diabolo*, le périmètre apparaît au niveau de thème dans le secteur « Périmètres et aires » et la longueur au niveau du sujet d'étude dans le secteur « Règle et compas ».

On peut voir qu'il existe deux manières de grouper les thèmes relatifs aux longueurs et périmètres : soit on les travaille ensemble dans un même secteur, soit on les travaille séparément. Dans le deuxième cas, la longueur apparaît, en général, dans les chapitres concernant les constructions géométriques et le périmètre est étudié dans le même chapitre que la grandeur aire.

Du point de vue des directives des programmes, il apparaît que tous les manuels ne basent pas leur choix sur les suggestions faites par la noosphère. Par exemple, la collection *Triangle* présente la même structuration depuis 1995, elle a toujours considéré les longueurs et les périmètres en tant que secteurs d'étude comme le propose l'institution CA4. De plus, les manuels utilisés par les enseignants ne prennent pas en compte les directives, et ils travaillent, en général, sur ces grandeurs au niveau de thème d'étude. Cela peut être dû au fait qu'en 2005 les programmes sont assez récents et les auteurs des manuels attachés aux habitudes des anciennes époques.

À travers l'analyse des programmes du chapitre III, nous avons montré que le positionnement des grandeurs au niveau de thèmes d'étude dans l'institution CA1 centre l'enseignement des grandeurs sur leur aspect outil et que la nouvelle structuration des programmes de 2005 de la période A4 met l'accent sur l'aspect objet des grandeurs. Ainsi, à partir des structurations présentes dans les manuels scolaires en termes de niveaux de codétermination, nous pouvons penser que l'enseignement de la longueur dans les manuels de la collection *Triangle* travaillera plus l'aspect objet de l'espèce de grandeur longueur que les manuels utilisés pas les enseignants M1 et M2.

- Les manuels de la collection *Triangle* : 6TR96, 6TR05 et 6TR09

Comme nous l'avons dit plus haut, longueurs et périmètres partagent le même habitat dans les manuels de la collection *Triangle*. Ces deux notions sont étudiées en tant qu'objet dans les chapitres « Longueurs », « Longueurs et périmètres » et « Périmètres et durées » relatifs aux manuels 6TR96, 6TR05 et 6TR09 respectivement et aussi en tant qu'outil dans des autres chapitres. Cette organisation est semblable à celle des programmes de l'institution CA4, même si le manuel 6TR96 relève de la période A1.

Nous avons trouvé des organisations mathématiques et didactiques différentes dans chaque manuel scolaire de la collection *Triangle*. Ces textes proposent des enseignements différents pour la grandeur longueur et pour le périmètre. Pour mieux comprendre l'évolution de cette collection, nous présentons ci-dessous les types de tâches rencontrés dans les manuels. Nous les avons catégorisés selon notre typologie du filtre des grandeurs :

- Comparer des grandeurs T_1 : comparer des longueurs $(T_1^1(lon))$, comparer des périmètres $(T_1^2(lon))$.
- Calculer une grandeur T_2 : calculer le périmètre d'un cercle $(T_2^1(lon))$, calculer le périmètre d'un polygone $(T_2^2(lon))$; calculer des longueurs $(T_2^3(lon))$, calculer des durées et des horaires $(T_2^4(lon))$, calculer le périmètre d'un polygone $(T'^2_2(lon))$.

- Construire un objet d'une grandeur donnée T_4 : tracer un segment de longueur donnée $(T_4^1(lon))$.
- Construire un objet d'une grandeur plus grande ou plus petite qu'une grandeur donnée T_5 : construire une figure plane de périmètre plus grande qu'un périmètre donné $(T_5^1(lon))$.
- Changer d'unités T_6 : convertir des unités de longueur $(T_6^1(lon))$, convertir des unités de durée $(T_6^2(lon))$.
- Mesurer une grandeur T_7 : mesurer une longueur $(T_7^1(lon))$, mesurer un périmètre $(T_7^2(lon))$.

Nous avons exposé les parties qui constituent l'organisation didactique globale dans les manuels scolaires dans la section 2 de ce chapitre. Dans le tableau suivant nous montrons les parties des manuels de la collection *Triangle* où apparaissent les types de tâches déjà mentionnés :

Parties des chapitres	**6TR96 (Chapitre : Longueurs)**	**6TR05 (Chapitre : Longueurs-Périmètres)**	**6TR09 (Chapitre : Périmètres et durées)**
Objectifs	$\boxed{T_7^1(lon)}$; $\boxed{T_4^1(lon)}$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	$\boxed{T_1^1(lon)}$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	-
Repérer les obstacles	$\boxed{T_7^1(lon)}$; $\boxed{T_4^1(lon)}$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T_1^2(lon)$; $T_2^2(lon)$	$\boxed{T_1^1(lon)}$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T_1^2(lon)$; $T_2^2(lon)$	$\boxed{T_1^1(lon)}$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T_6^2(lon)$
Franchir les obstacles	$\boxed{T_7^1(lon)}$; $T_7^2(lon)$	$\boxed{T_1^1(lon)}$; $T_2^3(lon)$; $\boxed{T_6^1(lon)}$; $T_7^2(lon)$; $T_2^1(lon)$; $T_2^2(lon)$	$T_2^4(lon)$; $T_1^2(lon)$; $T_2^2(lon)$; $T_7^2(lon)$; $T_5^1(lon)$; $T_2^1(lon)$; $T_2^3(lon)$
Connaissances	$\boxed{T_7^1(lon)}$; $T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	$T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	$T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$
Méthodes	$\boxed{T_6^1(lon)}$; $T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	$\boxed{T_6^1(lon)}$; $T'^2_2(lon)$; $T_2^1(lon)$	$T_2^2(lon)$; $T_6^2(lon)$

Tableau 4-7. Types de tâches trouvées dans les manuels de la collection *Triangle*

A partir de ce premier tri de types de tâches rencontrés dans les manuels scolaires de la collection *Triangle*, nous observons les particularités suivantes :

- Les types de tâches $\boxed{T_7^1(lon)}$: mesurer une longueur et $\boxed{T_4^1(lon)}$: construire un segment d'une longueur donnée n'apparaissent que dans le manuel de 1996. De plus, $\boxed{T_7^1(lon)}$ apparaît comme un objectif principal du chapitre et dans l'institutionnalisation de connaissances dans ce texte ;

- Le type de tâches $\boxed{T_1^1(lon)}$: Comparer des longueurs occupe une place importante dans le manuel de 2005, il est presque absent dans les autres deux manuels ;

- Le type de tâches $\boxed{T_6^1(lon)}$: Changer d'unités de longueur est une connaissance pré-requise dans le manuel de 2009 et une connaissance à enseigner dans les manuels précédents.

Il semble que pour la période entre 1995 et 2005 la longueur est un objet principal d'étude dans l'enseignement proposée par 6TR96, puis elle perd cette considération dans le manuel suivant 6TR05, et à partir de 2009, l'étude de longueur en tant qu'objet disparaît pour donner place au travail sur les périmètres et les durées. Ce phénomène a deux conséquences, d'une part, les objets considérés sont principalement les figures planes dans le manuel du 2009, les segments n'apparaissent que très peu dans ce manuel par rapport aux manuels précédents. D'autre part, on ne travaille plus sur les changements d'unités de longueur en 2009, le manuel préfère construire des organisations mathématiques autour du changement d'unités de durée.

Si on regarde maintenant les techniques proposées par ces manuels scolaires, on voit qu'on assiste à une numérisation de l'étude de longueur et du périmètre. En effet, les procédures de mesurage ont une place très importante dans le manuel 6TR96, ces procédures apparaissent comme les techniques principales relatives aux types de tâches $T_7^1(lon)$ et $T'^2_2(lon)$. Ensuite, dans le manuel de 2005, ces procédures font partie des exercices proposés. Finalement dans le manuel de 2009, l'enseignement est centré sur l'utilisation des formules pour déterminer les périmètres, en particulier celles du périmètre du carré, du rectangle et du cercle. Par rapport au type de tâches $T_6(lon)$, dans les trois manuels on fait les changements d'unités à « l'aide d'un tableau de conversion ». Dans les manuels 6TR96 et 6TR05, on trouve aussi une autre technique, celle de la « multiplication ou division par 10, 100 et 1000 ».

En relation aux ostensifs et non-ostensifs, même si les manuels scolaires évoluent d'un enseignement centré sur les longueurs vers une étude des périmètres, quelques non-ostensifs associés à cet enseignement se maintiennent. Par exemple, les types de nombres travaillés dans les trois manuels scolaires sont les entiers, les décimaux (lesquels on trouve en écriture décimale) et le nombre irrationnel π. Les opérations sur ces ensembles sont l'addition et la multiplication. La grande différence entre les trois manuels scolaires réside en la diminution de l'importance accordée à la longueur et à la mesure dans les textes plus récents.

Une autre similitude entre les trois manuels scolaires est l'écriture de la mesure des longueurs et de périmètres par des nombres sans unités. On additionne, par exemple, des mesures des longueurs en centimètres, mais l'ostensif « cm » n'apparaît pas dans l'opération :

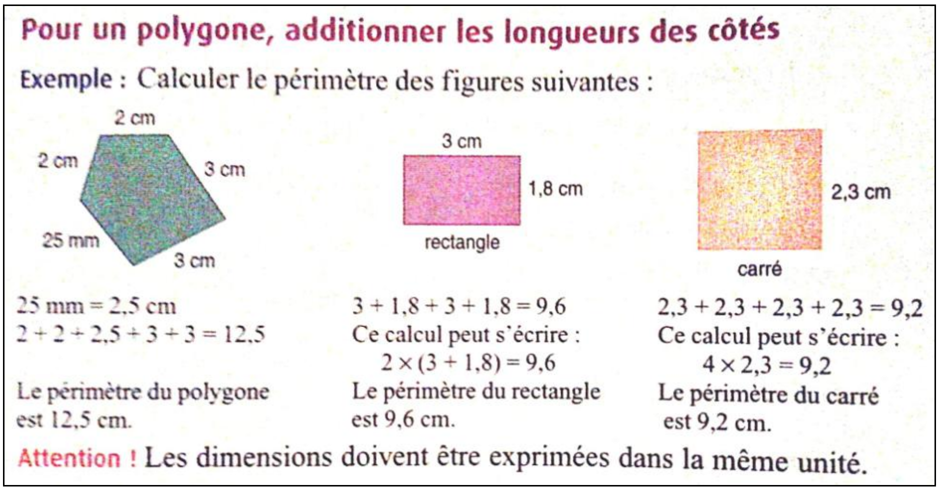


Figure 4-1. Extrait manuel 6TR05, page 130

Ainsi, les manuels utilisent les nombres abstraits (nombres sans les unités) plutôt que les nombres concrets (nombres avec les unités) pour représenter des opérations sur les grandeurs.

Si on compare cet enseignement avec les directives du programme, on peut dire que les manuels de la collection *Triangle* vont en direction opposée relativement à l'étude de la longueur. L'un des objectifs de la noosphère semble être de redonner du sens aux espèces de grandeurs en faisant apparaître leur étude au niveau du secteur. Cependant, les manuels de cette collection numérisent l'étude de la notion de longueur en centrant le travail sur les nombres et non sur la grandeur elle-même.

- Le manuel utilisé par le professeur M1 : 6DB05

Ce manuel de la collection *Diabolo* propose d'étudier les longueurs au niveau du thème d'étude ou sujet d'étude dans différents secteurs. En effet, dans ce manuel, on trouve des types de tâches en lien avec la longueur et le périmètre dans trois chapitres :

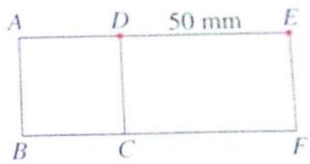
- Dans un chapitre appelé « Périmètres et aires », le périmètre partage son habitat avec l'aire ;
- Dans un autre chapitre appelé « Avec une règle et un compas », l'étude des longueurs sert d'appui au travail sur les constructions géométriques ;
- Et dans le chapitre « Nombres », les longueurs servent et à étudier la multiplication en 6e.

Dans le chapitre « périmètres et aires », le bloc technologique-théorique est composée principalement des formules de calcul du périmètre de polygones et du cercle. Effectivement, dans la plupart des tâches rencontrées, il s'agit de « calculer des périmètres » et les techniques les plus fréquentées sont l'utilisation des formules, comme le montre l'extrait suivant :

une MÉTHODE pour calculer une longueur et un périmètre

Le schéma ci-contre montre un carré *ABCD* dont le périmètre mesure 12 cm et un rectangle *CDEF*.

1. Calculer la longueur du segment [*CD*].
2. Calculer le périmètre du rectangle *CDEF*.



1. ❶ Repérer les informations utiles. ⟶ On sait que *ABCD* est un carré de périmètre 12 cm.
❷ Citer et écrire la formule utilisée. ⟶ On utilise la formule du périmètre d'un carré : $P = 4 \times c$
Remplacer les mesures connues. Donc on a : $4 \times CD = 12$
Effectuer le calcul. $CD = 12 \div 4$; d'où $CD = 3$.
❸ Conclure avec l'unité de longueur. ⟶ Le segment [*CD*] mesure 3 cm.

2. ❶ Repérer les informations utiles. ⟶ On sait que dans le rectangle *CDEF* :
$DE = 50$ mm $= 5$ cm et $DC = 3$ cm .
❷ Citer et écrire la formule utilisée. ⟶ On utilise la formule du périmètre d'un rectangle :
$P = (L + \ell) \times 2$
Effectuer les calculs étape par étape. Donc on a : $L + \ell = 5 + 3 = 8$
$(L + \ell) \times 2 = 8 \times 2 = 16$.
❸ Conclure avec l'unité de longueur. ⟶ Le périmètre du rectangle *CDEF* mesure 16 cm.

Figure 4-2. Extrait du manuel 6DB05, page 184

Dans l'extrait, on observe l'utilisation de deux formules, celle du périmètre d'un carré et celle du périmètre d'un rectangle. De plus, les calculs sont faits à l'aide des mesures, c'est-à-dire les unités sont absentes dans les calculs. Dans cet exemple, le travail des périmètres est d'ordre numérique.

Les types de tâches : mesurer une longueur $(T_7^1(lon))$, convertir des unités de longueur $(T_6^1(lon))$ et calculer des longueurs $(T_2^3(lon))$ sont évoqués dans les chapitres « Nombres » et « Avec une règle et un compas ». Dans le premier chapitre la technique proposée est celle d'utilisation du tableau de conversion et celle de décalage de la virgule pour les changements d'unités. Dans le deuxième chapitre les longueurs font partie de l'univers du mesurage et de la géométrie. Dans ces chapitres, les longueurs sont étudiées comme un outil pour la construction d'autres domaines. Nous reviendrons sur ces deux habitats dans les sections suivants.

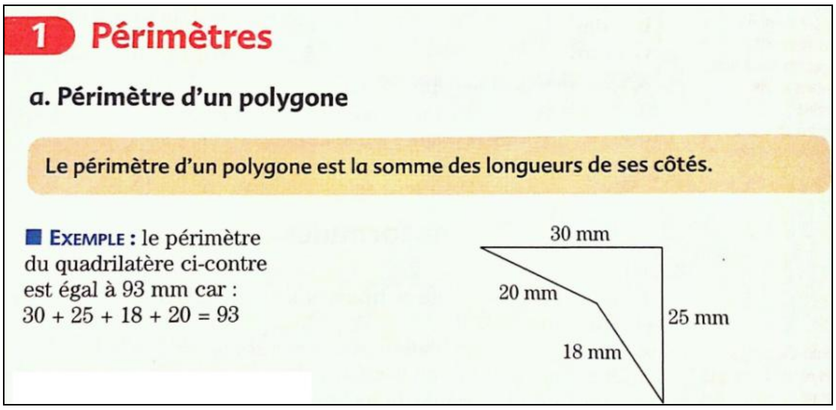
L'enseignement des longueurs et des périmètres apparaît ainsi divisé en plusieurs secteurs d'étude dans le manuels 6DB05, où elles vont accomplir des fonctions différentes :

- Les périmètres sont étudiés en tant qu'objet dans un cadre numérique ;
- Les changements d'unités de longueur servent d'exemple à l'étude de la multiplication des nombres ;
- Les longueurs constituent un outil pour l'étude des constructions des figures planes.

▪ Le manuel utilisé par le professeur M2 : 6MU05

Le manuel *Multi-math* propose, comme le manuel de la collection *Diabolo,* de travailler les périmètres et les aires dans un seul chapitre et les longueurs dans le chapitre « Règle et compas ». La longueur est ainsi située au niveau du thème d'étude.

Dans le chapitre « Périmètres et aires », on ne trouve aucun type de tâches relatif aux longueurs. L'enseignement est consacré entièrement à l'étude du périmètre. La différence avec le manuel 6DB05 se situe avec l'utilisation des formules qui n'est pas la technique mise en avant, le texte présente le périmètre plutôt comme « la somme des longueurs des côtés » :


1 Périmètres

a. Périmètre d'un polygone

Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs de ses côtés.

■ **EXEMPLE :** le périmètre du quadrilatère ci-contre est égal à 93 mm car :
30 + 25 + 18 + 20 = 93

Figure 4-3. Extrait du manuel 6MU06, page 160.

De plus, on voit sur l'exemple que les calculs sont réalisées à l'aide des mesures, les unités, comme dans tous les autres manuels scolaires, sont absentes .

Le travail sur la mesure des longueurs est présenté dans le chapitre « Règle et compas », où l'objectif est de donner les premiers outils pour la construction de configurations planes.

Un autre aspect très intéressant à remarquer est le fait que les changements d'unités de longueurs ne sont étudiés dans aucun chapitre du manuel, ils sont présentés à la fin du livre et la technique proposée est, comme dans tous les autres manuels, l'utilisation du tableau de conversion et le décalage de la virgule.

- Bilan sur l'étude des longueurs dans les manuels de 6e

En résumé, on peut trouver différents habitats et niches pour les longueurs et les périmètres dans les manuels scolaires. Ces niches sont déterminées par leur position dans les niveaux de codétermination au niveau mathématique et didactique.

D'une part, dans les manuels de la collection *Triangle*, on trouve une évolution de la place occupée par les longueurs dans les moments d'étude. En 1996, elles sont présentes dans tous les moments d'étude, en 2005, elles apparaissent plutôt dans les moments de premier rencontre et de l'exploration de la tâche, et finalement, en 2009, elles seront travaillées prioritairement dans le moment de travail de la technique. L'analyse détaillée de la progression montre une réduction de l'étude des longueurs en profit des périmètres, et une numérisation du travail sur les longueurs et les périmètres.

D'autre part, les manuels des collections *Diabolo* et *Multimath*, 6DB05 et 6MU05 utilisés par les enseignants, proposent de fragmenter les organisations mathématiques relatives aux longueurs et périmètres en plusieurs chapitres. Ceci définit de nouvelles niches par rapport à celles proposées par la collection *Triangle.* Les longueurs servent d'appui à l'étude des constructions de configurations planes et l'étude des nombres.

En conclusion, on peut envisager l'enseignement des longueurs et de périmètres de manières très différentes. On peut étudier les longueurs et périmètres dans une même leçon, on peut les présenter séparément dans différents moments de l'année et/ou les assembler avec d'autres notions comme les aires, les nombres ou les constructions géométriques. Chacune de ces structurations définit des organisations mathématiques et didactiques différentes que le professeur doit mettre en place dans son enseignement.

3.2.2 Aires en 6e

Comme dans le cas des longueurs et des périmètres, les aires sont étudiées dans un seul chapitre dans la collection *Triangle* et elles partagent leur habitat avec les périmètres dans les manuels utilisés par les enseignants. Maintenant, nous présentons quelques éléments relatifs à l'enseignement des aires proposés par chaque collection :

- Les aires comme secteur ou thème d'étude dans les manuels scolaires de 6e

L'espèce de grandeurs aires est travaillée dans un seul chapitre dans les manuels de la collection *Triangle*, par contre dans les manuels utilisés par M1 et M2, les aires sont regroupées avec les périmètres dans le chapitre « Aires et Périmètres ». Ainsi, dans les manuels 6TR96, 6TR05 et 6TR09 les aires forment un secteur d'étude, dans lequel on trouve les thèmes aire d'une figure, unités d'aire et formules d'aire tandis que dans les manuels 6DB05 et 6MU05 les aires forment un thème d'étude à côté des périmètres, les conversions d'unités et les découpages.

- Les manuels de la collection *Triangle* : 6TR96, 6TR05 et 6TR09

En regardant les objectifs du chapitre « Aires » dans les trois manuels, on trouve aussitôt des différences. Dans les manuels de 1996 et 2005, les buts d'enseignement sont les mêmes, par contre dans le manuel de 2009, il semble que l'enseignement soit plus centré dans le numérique, comme le montre le tableau 4-8 :

Manuel	**6TR96 et 6TR05**	**6TR09**
Objectifs	Savoir ce qu'est l'aire d'une figure Savoir déterminer l'aire d'une figure en utilisant les formules, un quadrillage, le découpage-recollement ou la décomposition Convertir des unités d'aire Savoir résoudre de problèmes	Calculer l'aire de figures usuelles Convertir des unités d'aire Résoudre des problèmes

Tableau 4-8. Objectifs du chapitre « Aire » dans les manuels de la collection *Triangle*

La compréhension du concept d'aire n'est pas une connaissance visée par le manuel de 2009. De plus, on passe du mot « déterminer » au mot « calculer » dans ce manuel. Il apparaît que le manuel 6TR09 s'intéresse plutôt à l'aspect numérique du concept d'aire.

Effectivement, si on s'intéresse maintenant aux types de tâches présents dans les trois manuels scolaires, on peut observer que dans les moments de rencontre et d'exploration de la tâche, les types de tâches proposés ne sont pas les mêmes. Dans les manuels 6TR96 et 6TR05, on trouve le type de tâches « T_7 : mesurer une grandeur » et le type de tâches « encadrer une aire », lesquels n'apparaissent pas dans le manuel 6TR09. En outre, dans le manuel de 1996 est présent le type de tâches « T_4 : construire un objet d'une grandeur donnée ». Mais, le manuel 6TR09 centre l'enseignement sur des types de tâches relevant du numérique. En effet, les types de tâches que les élèves doivent étudier dans la partie « Activités » sont « T_2 : calculer une grandeur » et « T_6 : Changer d'unités ». Par exemple, le manuel 6TR96 énonce le problème suivant :

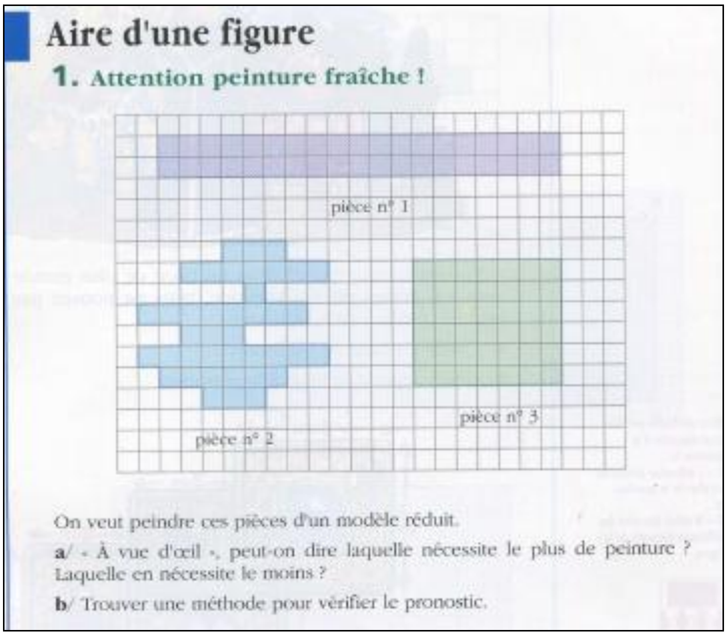


Figure 4-4. Problème extrait du manuel 6TR96

Les manuels 6TR96 et 6TR05 suggèrent des nombreux problèmes de calcul ou de comparaison des aires qui utilisent le quadrillage. De cette façon, les élèves peuvent utiliser le comptage de carreaux pour les résoudre. Cette procédure n'utilise pas les formules, elle utilise une conception de la mesure de l'aire comme la quantité d'unités nécessaires pour recouvrir une surface, et ainsi ce problème se trouve entre les cadres numérique, géométrique et des grandeurs.

Le manuel 6TR09 propose aussi d'utiliser les quadrillages, mais il indique les mesures des côtés des surfaces, comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

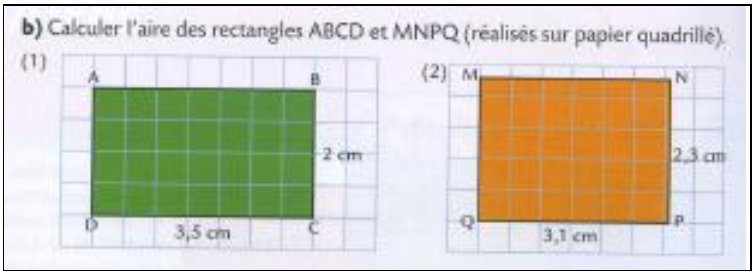


Figure 4-5. Problème extrait du manuel 6TR09

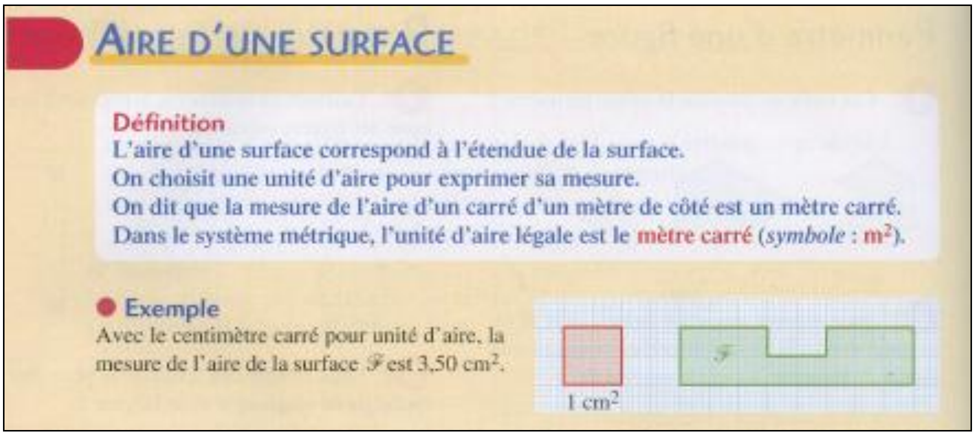
Le fait de mettre les mesures de côtés et d'utiliser le mot « calculer » montre bien la volonté du manuel de centrer l'enseignement des aires sur le domaine du numérique. Ce désir se manifeste aussi dans les moments de la construction du bloc technologique-théorique et de l'institutionnalisation. Si on compare la partie « Connaissances » des trois manuels scolaires, il existe des connaissances communes aux trois textes : les unités d'aire et les formules d'aire d'une figure, mais dans les manuels 6TR96 et 6TR05, nous relevons l'institutionnalisation de la « comparaison des aires », laquelle est inexistante dans le manuel 6TR09. Une autre grande différence entre les manuels se trouve dans la partie « Méthodes ». Cette partie est la même dans les manuels de 1996 et 2005, par contre en 2009 elle presque complètement réécrite par les auteurs de ces manuels. Dans les manuels 6TR96 et 6TR05, il s'agit d'une part de « déterminer l'aire d'une figure » à travers d'un pavage, une formule, un découpage-recollement ou une décomposition, et d'autre part de « convertir des unités d'aire » à l'aide d'un tableau ou directement en multipliant ou en divisant par 100, 1000… . En revanche, dans le manuel 6TR09, on ne trouve que la « conversion des unités d'aire » avec les mêmes techniques associées que dans les autres deux manuels. Ainsi les procédures géométriques décrites par les manuels de 1996 et 2005 disparaissent en 2009.

Les organisations mathématiques visées par les manuels scolaires sont très différentes. De plus, même si les organisations didactiques globales sont presque identiques dans les trois manuels scolaires, les organisations didactiques régionales et locales donnent une construction différente de la notion d'aire dans les trois manuels scolaires. Dans les manuels scolaires de 1996 et 2005, la technologie des organisations mathématiques locales relève plutôt du domaine de grandeurs et du géométrique, par contre dans le manuel de 2009 elle prend appui sur le numérique.

Une fois de plus, la grandeur est réduite à l'étude de sa mesure dans cette collection. Les unités n'apparaissent pas dans les calculs. Ainsi, même si l'aire a le statut d'objet, elle est travaillée numériquement et donc la notion de grandeur que lui est attachée est relativement absente.

- Le manuel utilisé par le professeur M1 : 6DB05

Ce manuel consacre un seul chapitre aux aires et aux périmètres. L'aspect le plus important à remarquer est la considérable utilisation du papier millimétré dans les activités proposées. Ce manuel commence par activer des connaissances travaillées à l'école élémentaire, notamment, la comparaison des aires et le comptage d'unités pour déterminer l'aire d'une surface. Les recouvrements et comptages d'unités prennent comme unité centrale le millimètre et le centimètre. Voyons un extrait du manuel 6DB05 :



AIRE D'UNE SURFACE

Définition
L'aire d'une surface correspond à l'étendue de la surface.
On choisit une unité d'aire pour exprimer sa mesure.
On dit que la mesure de l'aire d'un carré d'un mètre de côté est un mètre carré.
Dans le système métrique, l'unité d'aire légale est le **mètre carré** (*symbole* : m²).

Exemple
Avec le centimètre carré pour unité d'aire, la mesure de l'aire de la surface $\mathcal{F}$ est 3,50 cm².

Figure 4-6. Extrait manuel 6DB05

On remarque que l'aire de la surface a été calculée à partir d'un comptage d'unités en cm². Ensuite, plusieurs activités sont présentées de cette manière dans le manuel, il utilise énormément le papier millimétré par rapport aux autre manuels analysés.

La définition d'aire donnée par le manuel 6DB05 est « l'étendue de la surface », puis le manuel indique qu'il faut choisir une unité et rappelle que l'unité d'aire légale dans le système métrique est le m². Ainsi, la conception de l'aire est attachée au mesurage qui est défini à l'aide d'un comptage d'unités du système métrique.

- Le manuel utilisé par le professeur M2 : 6MU05

Comme nous l'avons montré plus haut, ce manuel divise ses chapitres en trois grandes parties : activités, cours et exercices. De plus, l'aire et le périmètre sont travaillés dans un même chapitre.

Dans ce manuel, l'aire est associée à la mesure et par voie de conséquence aux nombres. Mais cette approche par les nombres est différente de celle exposée dans le manuel 6TR09, lequel centre l'enseignement sur les formules. Le manuel 6MU05 donne une grande importance aux recouvrements de surfaces et comptage d'unités sans faire appel aux formules. L'aire est ainsi définie comme la quantité d'unités nécessaires pour recouvrir une surface, comme le montre l'extrait suivant :

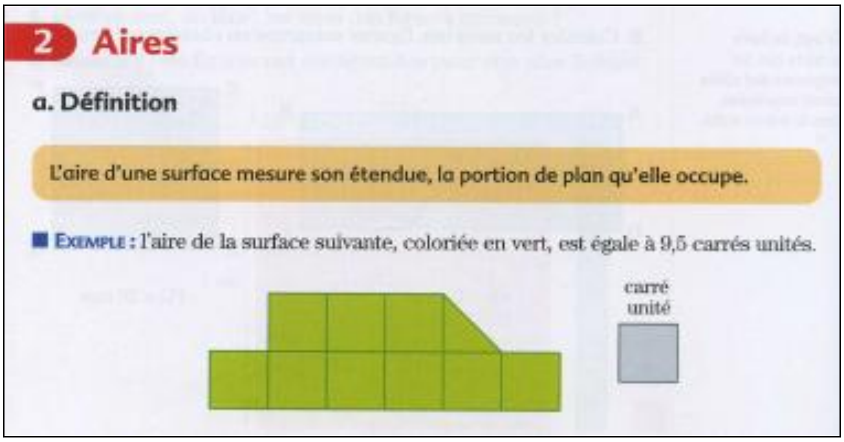


Figure 4-7. Extrait du manuel 6MU05

Dans ce manuel, on trouve le type de tâches T_7 : mesurer une grandeur, dans tous les parties du chapitre, c'est-à-dire, dans les moments d'exploration de la tâche, de construction du bloc technologique-théorique et de travail de la technique. Il existe une organisation mathématique locale autour de la mesure de l'aire d'une surface. Cette approximation de l'aire à travers la mesure se manifeste aussi dans le traitement des changements d'unités. Les autres manuels scolaires analysés font comparer les unités aux élèves, par exemple, on trouve des questions comme « combien y a-t-il de mm² dans 1 cm² ? », cependant le manuel 6MU05 propose une activité similaire qui prend appui sur le comptage de carreaux et des dessins :

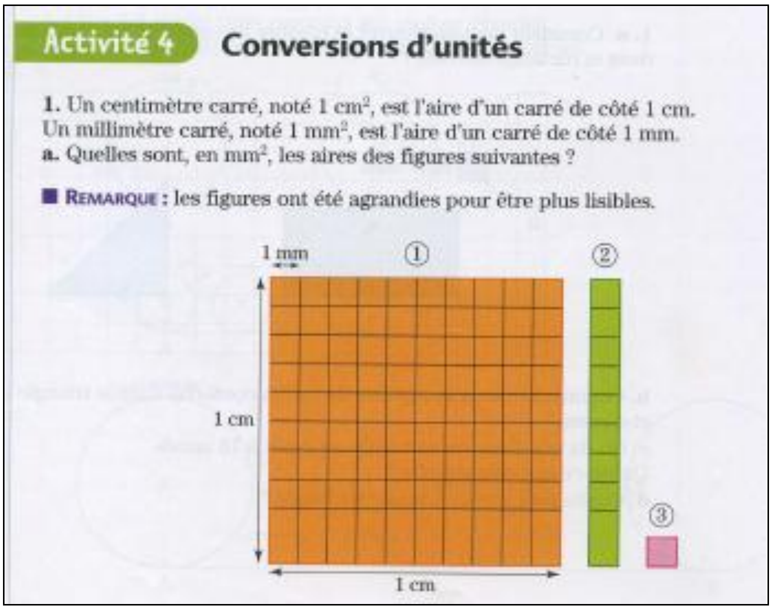


Figure 4-8. Extrait du manuel 6MU05

En conclusion, la technologie relative aux organisations mathématiques présentes dans le manuel 6MU05 est centrée sur une conception d'aire en tant que mesure, et ainsi elle met en avant des techniques comme le comptage d'unités et les recouvrements des surfaces.

- Bilan sur l'étude des aires dans les manuels de 6e

On a vu que dans chaque manuel scolaire on trouve des conceptions et des traitements différents pour les aires. La collection *Triangle* évolue d'un traitement géométrique-grandeur de l'aire vers un traitement numérique, tandis que les manuels utilisés par les enseignants se centrent plutôt sur une approximation de l'aire par la mesure. Même si les manuels exposent des organisations mathématiques différentes, ils existent des éléments communs dans tous les manuels scolaires, en particulier, ceux relatifs aux conversions et traitements des unités. Dans toutes les collections et de manière analogue à ce qu'on a vu pour les longueurs, les unités n'apparaissent pas dans les calculs et les conversions se font à l'aide d'un tableau de conversion ou de la multiplication (ou division) par 100, 1000, ….

3.2.3 *Angles*

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les angles sont travaillés très peu en tant que grandeurs dans la période A1. A partir de 2005, ils sont un secteur d'étude du domaine des grandeurs où il s'agit de comparer, mesurer et construire des angles. Ces types de tâches apparaissent en 6e, mais ils ne sont pas une connaissance exigible à ce niveau dans la période A4, ils le deviennent en 5e. Dans la suite, nous présentons l'enseignement proposé par les manuels scolaires pour les angles :

- Les angles comme secteur d'étude dans les manuels scolaires de 6e

On trouve un secteur « Angles » dans 4 des 5 manuels scolaires analysés. Dans le manuel 6TR96 ce secteur est composé des thèmes : Notation des angles, comparaison et mesure des angles, bissectrice d'un angle et diagramme circulaire. Dans la même collection, dans le manuel 6TR05 le thème « diagramme circulaire » fait partie du secteur « Gestion de données » et il est remplacé par le thème « angles et figures » dans le secteur « Angles ». Le manuel utilisé par le professeur M2 a aussi un secteur « Angles », où il s'agit d'étudier les définitions, notations et applications relatives aux angles. La principale différence avec les programmes se repère sur le thème « bissectrice d'un angle » situé dans le domaine géométrique. Dans le manuel scolaire 6DB05 utilisé par le professeur M1, on ne trouve pas de secteur consacré aux angles. Les thèmes relatifs à cette espèce de grandeur sont travaillés dans le secteur « Règle et compas ».

- Les manuels de la collection *Triangle* : 6TR96, 6TR05 et 6TR09

Du fait que les angles ne sont pas travaillés en tant que grandeurs dans les programmes de 1995, il est notable que les angles forment un chapitre tout entier dans le manuel 6TR96. Ce manuel propose d'étudier les types de tâches suivants :

- $T_1(An)$: Comparer des angles
- $T_4(An)$: Construire un angle de mesure donnée
- $T_7(An)$: Mesurer un angle
- $T_T(Bi)$: Tracer la bissectrice d'un angle

Dans un premier moment, la comparaison des angles est faite à travers la méthode de superposition et la construction et mesurage des angles à l'aide d'une unité non conventionnelle comme le montre la figure 4-9 :

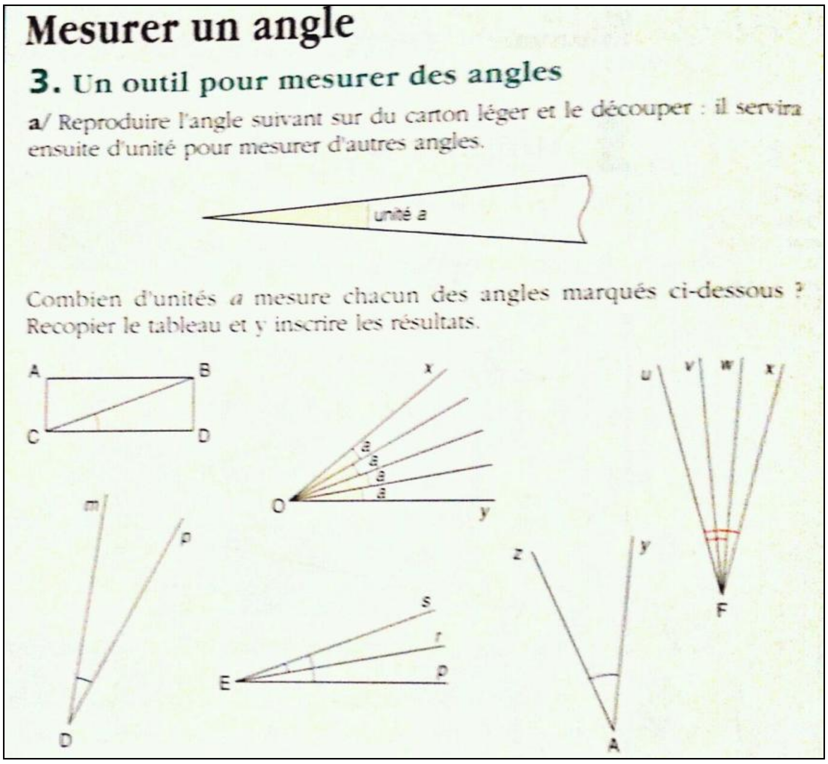


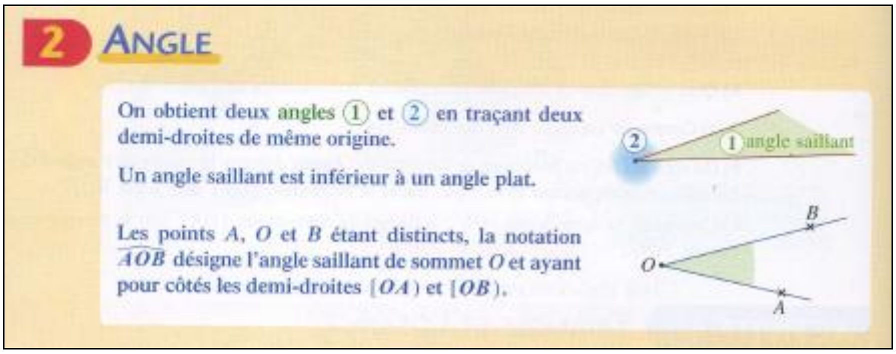
Figure 4-9. Extrait du manuel 6TR96, page 216

Dans ce texte les angles sont aussi utilisés comme outil pour étudier les diagrammes circulaires dans le chapitre « angles ». Il s'agit d'étudier la proportionnalité existante entre les mesures des angles et les quantités représentées par le diagramme. Dans les manuels de 2005 et 2009, cette connaissance disparaît du chapitre « Angles », mais les angles continuent à être travaillés en tant qu'outil, puisque ils serviront à reproduire et construire des figures planes. Ainsi, des nouveaux éléments technologiques apparaissent à partir de 2005, ces sont les propriétés relatives aux angles des triangles et quadrilatères, comme par exemple « la somme des angles d'un triangle est égale à 180° ». Avec cette nouvelle technologie apparaît aussi un nouveau type de tâches $T_2(An)$: Calculer un angle. Il s'agit, par exemple, de calculer l'un des angles d'un triangle si on connaît les autres deux.

En général, les organisations mathématiques et didactiques ponctuelles relatives aux types de tâches $T_1(An)$, $T_4(An)$, $T_7(An)$ et $T_T(Bi)$ sont les mêmes dans les trois manuels scolaires de la collection *Triangle*. Ainsi, le statut objet est, en général, similaire dans les manuels des périodes A1 et A4. La différence se trouve dans le statut d'outil attribué aux angles. En 1996, ils serviront à l'étude de la représentation de données à travers de diagrammes circulaires, et à partir de 2005, ils sont utilisés pour reproduire et construire des figures planes.

- Le manuel utilisé par le professeur M1 : 6DB05

Ce manuel scolaire propose les mêmes types de tâches que les manuels de la collections *Triangle*, c'est-à-dire, les types de tâches $T_1(An)$, $T_4(An)$, $T_7(An)$ et $T_T(Bi)$, et aussi les mêmes techniques. Cependant, il existe deux différences considérables avec ces manuels. Premièrement, les angles ne sont pas étudiés en tant qu'outil dans le chapitre « Avec un rapporteur et une règle ». Même si le titre suppose que les angles servent comme d'outils pour la construction de figures, on ne trouve aucun type de tâches relatif aux reproductions ou constructions de figures planes. Deuxièmement, on trouve dans le manuel 6DB05 des éléments relatifs à la définition d'angle :


2 ANGLE

On obtient deux angles ① et ② en traçant deux demi-droites de même origine.

Un angle saillant est inférieur à un angle plat.

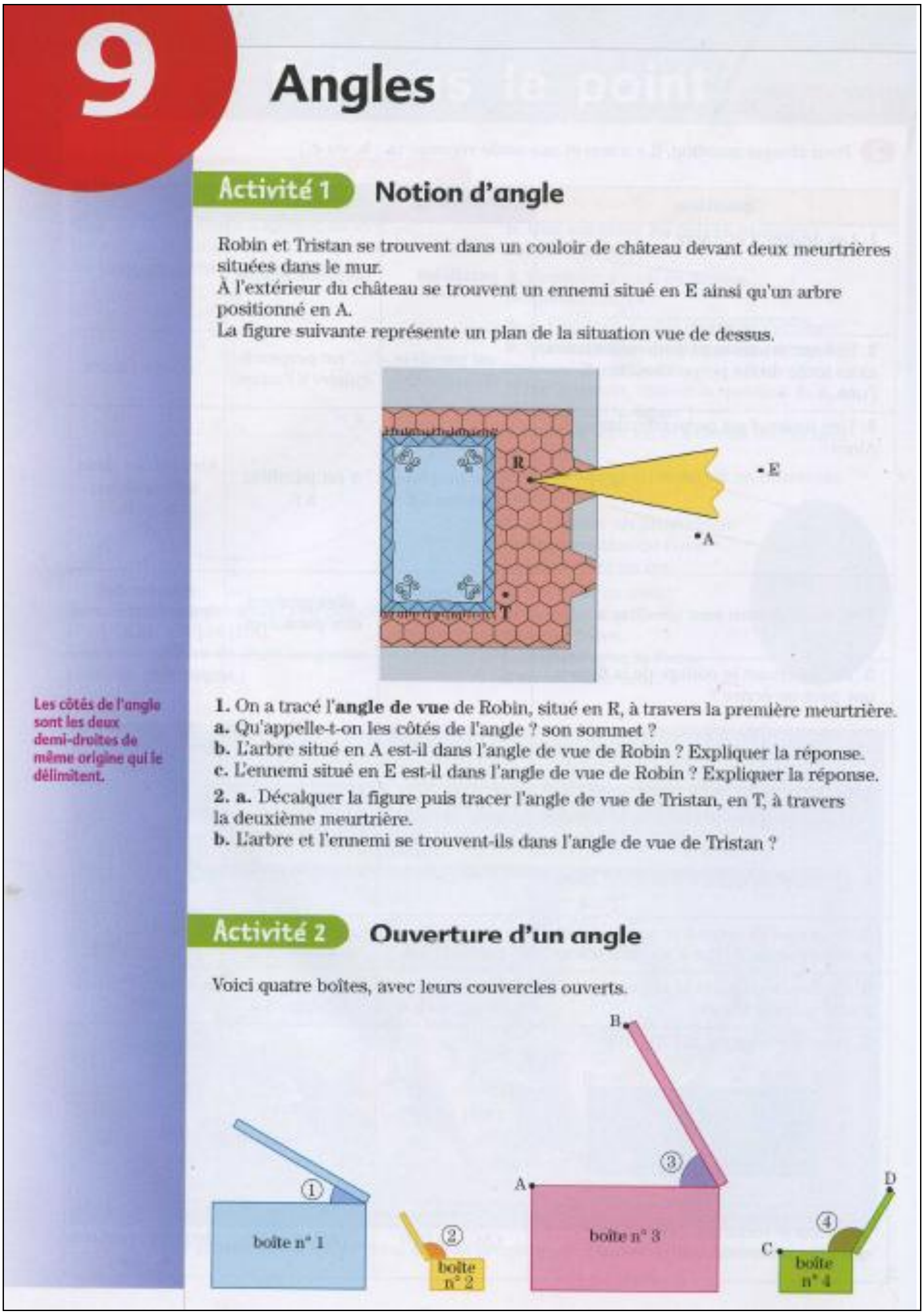
Les points A, O et B étant distincts, la notation $\widehat{AOB}$ désigne l'angle saillant de sommet O et ayant pour côtés les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.

Figure 4-10. Extrait du manuel 6DB05, p. 166

Le fait de mettre en avant les demi-droites peut créer une confusion sur la notion d'angle. L'angle peut se comprendre comme l'union de deux demi-droites. Par contre, à différence des manuels de la collection *Triangle*, le manuel représente l'angle avec un dessin où tout l'intérieur (le secteur saillant) est colorié. Dans les manuels de la collection *Triangle*, il n'existe aucune représentation d'un angle de ce type.

- Le manuel utilisé par le professeur M2 : 6MU05

Les organisations mathématiques ponctuelles sont les mêmes que celles rencontrées dans 6DB05. Cependant, ce manuel propose deux activités pour travailler la notion d'angle, ce qu'on ne trouve pas dans les manuels analysés précédemment :



9 Angles

Activité 1 Notion d'angle

Robin et Tristan se trouvent dans un couloir de château devant deux meurtrières situées dans le mur.
À l'extérieur du château se trouvent un ennemi situé en E ainsi qu'un arbre positionné en A.
La figure suivante représente un plan de la situation vue de dessus.

Les côtés de l'angle sont les deux demi-droites de même origine qui le délimitent.

1. On a tracé l'**angle de vue** de Robin, situé en R, à travers la première meurtrière.
a. Qu'appelle-t-on les côtés de l'angle ? son sommet ?
b. L'arbre situé en A est-il dans l'angle de vue de Robin ? Expliquer la réponse.
c. L'ennemi situé en E est-il dans l'angle de vue de Robin ? Expliquer la réponse.
2. a. Décalquer la figure puis tracer l'angle de vue de Tristan, en T, à travers la deuxième meurtrière.
b. L'arbre et l'ennemi se trouvent-ils dans l'angle de vue de Tristan ?

Activité 2 Ouverture d'un angle

Voici quatre boîtes, avec leurs couvercles ouverts.

Figure 4-11. Extrait manuel 6MU05, page 126

Ce manuel cherche ainsi à définir l'angle comme « la surface délimité par deux demi-droites de même origine, éventuellement confondues » (Picchiottino et al, 2005). On peut dire que ce manuel présente beaucoup plus la notion d'angle en tant que grandeur que les autres manuels analysés. En effet, dans les manuels de la collection *Triangle,* on ne trouve aucune définition de la notion d'angle et dans la collection *Diabolo*, il existe une définition, mais on ne trouve pas d'activités qui visent la compréhension de cette espèce de grandeur. Les deux activités de la collection *Multimath* ci-dessus et la définition de la notion d'angle montrent que le manuel présente un vrai intérêt pour l'étude de la notion d'angle dans le cadre de grandeurs.

- Bilan sur l'étude des angles dans les manuels de 6^{e}

On trouve dans tous les manuels des organisations mathématiques ponctuelles semblables relativement aux angles, elles s'organisent autour des types de tâches prescrites par les programmes de la période A4. Mais le statut des angles n'est pas le même dans tous les manuels. Dans la collection Triangle les angles ont le statut d'outil et d'objet, tandis que dans les manuels utilisés par les enseignants, ils ne sont travaillés que comme objet.

3.2.4 Volumes

L'enseignement proposé par chacun de ces textes est la suivante :

- Les volumes comme secteur ou thème d'étude dans les manuels scolaires de 6^{e}

Dans la collection *Triangle* le volume est pris en compte comme un secteur d'étude, il constitué un chapitre tout entier. Dans ces manuels, il s'agit d'étudier les thèmes : formules de volume et unités de volume. Ainsi, ils donnent aux volumes un traitement plutôt numérique.

Dans les autre deux manuels de la collection *Diabolo* et *Multimath*, 6DB05 et 6MU05, on ne trouve pas de chapitre consacré aux volumes. Cette espèce de grandeur est un thème d'étude dans le secteur « L'espace » et dans le secteur « Parallélépipède rectangle ». Ainsi, les volumes ne constituent pas un secteur d'étude comme le propose le programme de 6^{e} de la période A4.

- Les manuels de la collection *Triangle* : 6TR96, 6TR05 et 6TR09

Les objectifs principaux de cette collection relativement à l'étude de l'espèce de grandeur volume sont de calculer le volume d'un parallélépipède rectangle et de convertir des unités de volume. Les enseignements proposés par les manuels scolaires 6TR96 et 6TR05 sont semblables. En effet, les activités proposées, les connaissances et méthodes institutionnalisés sont presque les mêmes. C'est dans le manuel de 2009, qu'on trouve une certaine évolution de l'enseignement du volume. Dans ce manuel, le chapitre ne s'appelle plus « Volume », mais « Volumes et masses ». Ainsi, un nouvel objet pénètre dans l'habitat du volume. Il s'agit de faire de changement d'unités de masse, comme l'indiquent les programmes de 2005. De plus, dans ce texte, on trouve une définition de volume d'un parallélépipède rectangle comme « le nombre d'unités nécessaires pour le remplir exactement » et la technique principale pour déterminer le volume est l'utilisation de formules.

En observant les types de tâches proposés par les manuels 6TR96, 6TR05 et 6TR09 et la définition trouvée dans ce dernier manuel, on peut dire que le traitement donné au volume relève d'un cadre plutôt numérique. Par exemple, le type de tâches « comparer des volumes » est résolu en calculant les volumes des solides respectifs à travers la formule, et en comparant ensuite les mesures obtenues. Mais on trouve aussi une approximation du volume par la mesure, car l'une des procédures très utilisées est le comptage de cubes dans les moments d'exploration de la tâche et de construction de la technologie, mais cette procédure disparaît dans la partie « exercices » des manuels.

- Le manuel utilisé par le professeur M1 : 6DB05

Comme nous l'avons dit, dans ce manuel, le volume est étudié dans le chapitre « dans l'espace ». Il s'agit de représenter un pavé droit, de tracer un patron et de calculer de volumes.

Ce texte propose les mêmes activités que la collection *Triangle,* c'est-à-dire, de mesurer un volume par comptage de cubes, de calculer un volume avec une formule et de convertir d'unités de volume à l'aide d'un tableau ou en multipliant ou divisant par 10, 100, 1000… La nouveauté se trouve dans la définition donnée au volume. D'après le manuel 6DB05, le volume est « l'espace occupé par un solide », cette définition ne se situe pas dans un cadre numérique, mais dans un cadre géométrique. Ce manuel énonce des exercices comme le calcul du volume de solides constitués de cubes. Ainsi, même si les formules, et ainsi les nombres, sont les objets les plus présents dans ce manuel, on y trouve des traces du géométrique.

- Le manuel utilisé par M2 : 6MU05

Comme dans le manuel 6DB05, le volume est étudié dans le même habitat que parallélépipède rectangle. Les types de tâches communs avec les autres manuels sont « mesurer un volume » et « changer d'unités de volume ». Cependant, on repère une dissemblance entre ce manuel et les autres manuels analysés, il n'existe pas une institutionnalisation de la formule du parallélépipède rectangle. On ne parle plus de « calculer », mais plutôt « déterminer » le volume de ce solide. Ci-dessous nous présentons un exemple d'exercice proposé par ce manuel :

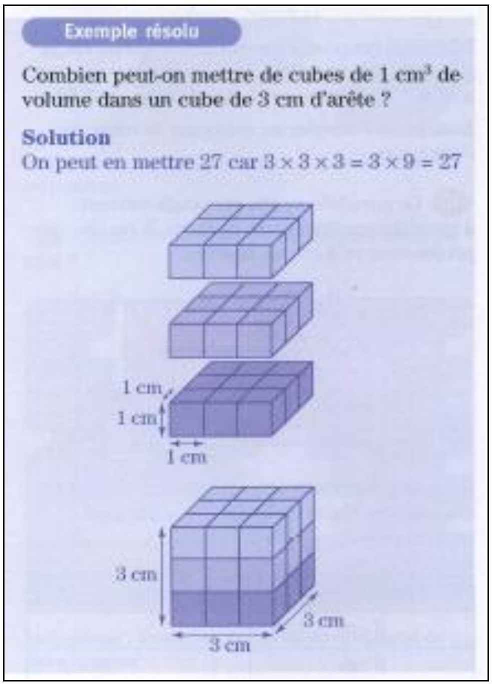


Figure 4-12. Extrait du manuel 6MU05, page 211

Le manuel scolaire propose à la place de l'utilisation de la formule de calcul de volume, le comptage tridimensionnel de cubes. Cette technique induit la multiplication de trois côtés, mais elle garde le lien avec l'unité de mesure.

- Bilan sur l'étude des volumes dans les manuels de 6e

L'enseignement de la notion de volume est beaucoup plus centré sur le numérique que l'enseignement d'autres grandeurs. Cela semble dû à la difficulté de la manipulation et de la perception dans l'espace. En général, tous les manuels présentent les mêmes organisations mathématiques et didactiques ponctuelles, la plus grande différence se trouve dans l'institutionnalisation faite par le manuel de la collection *Multimath* 6MU05. En effet, la technologie exposée par ce manuel met en avant une conception du volume s'appuyant sur les cadre numérique, géométrique ou de la mesure, car il n'expose pas directement les formules, au contraire, la construction du bloc technologique-théorique commence par le comptage de cubes, et ensuite elle évolue vers la formule du volume d'un parallélépipède.

3.3 Le domaine des grandeurs en 6e

L'analyse menée a montré que les directives du programme incitant à donner une plus importance à la notion de grandeur ne sont pas prises en compte par les auteurs de manuels actuels. En effet, l'étude de l'évolution des manuels d'une même collection, la collection *Triangle*, montre que les auteurs mettent en avant l'aspect numérique relatif aux grandeurs. Les espèces des grandeurs longueur et aire sont numérisées dans les manuels récents. De plus, on ne trouve pas un véritable travail sur la notion de grandeur dans ces textes, car l'enseignement est différent pour chaque espèce de grandeur. On ne peut pas reconnaître dans les manuels un véritable domaine de grandeurs, parce que le statut d'outil ou d'objet donnés aux grandeurs dépend du type de grandeur et du niveau où elle est étudiée.

Même si les espèces de grandeurs sont considérées comme des secteurs d'étude dans les manuels scolaires, on peut avancer que les éléments technologiques d'un cadre de grandeurs sont peu présents dans ces textes. Par exemple, les calculs se font sans les unités et ils existent peu de tâches liées à la comparaison de grandeurs. Les types de tâches sont plutôt centrés sur les calculs, sur les changements d'unités et sur la mesure de chaque grandeur, contrairement aux indications données par les programmes qui proposent un traitement géométrique pour les grandeurs en 6e en continuité avec celui de l'école élémentaire.

4. Analyse écologique du domaine numérique en classe de 6e

Nous avons vu dans les analyses précédentes des niveaux de codétermination que le domaine du numérique est présent dans la plupart des manuels scolaires. Le tableau suivant présente les chapitres relatifs au numérique où on peut trouver des traces faisant référence aux grandeurs de façon explicite[2] :

6TR96	**6TR05**	**6TR09**	**6DB05**	**6MU05**
Addition, soustraction, multiplication et problèmes Division et problèmes Fractions	Fractions et nombres décimaux Addition, soustraction et multiplication Division et problèmes Fractions et problèmes	Nombres décimaux, ordre, addition et soustraction Multiplication et problèmes Division et problèmes Fractions et problèmes	Les nombres Addition, soustraction et multiplication Divisions Nombres en écriture fractionnaire	Fractions décimales et ordre Additions, soustractions et multiplications de décimaux Divisions

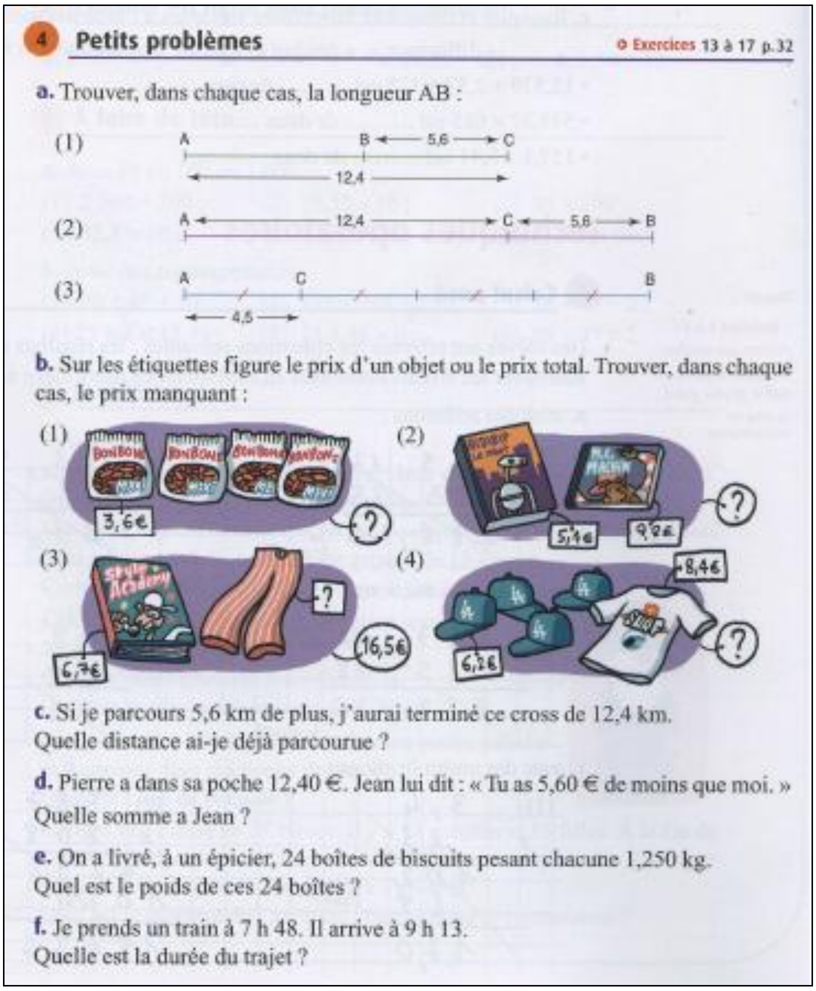
Tableau 4-9. Chapitres relatifs au domaine du numériques dans les manuels

Dans la suite, nous présentons les contenus en lien avec les grandeurs dans les manuels de 6e.

2 Dans tous les domaines mathématiques, nous avons omis les chapitres qui travaillent peu les grandeurs, par exemple dans certains chapitres les grandeurs apparaissent une seule fois dans les exercices.

4.1 Opérations sur les nombres entiers et les décimaux

Le domaine du numérique apparaît comme un habitat pour les grandeurs. En effet, des problèmes relatifs aux grandeurs servent à introduire des exemples pour faire des opérations sur les nombres entiers et les nombres décimaux. Dans tous les manuels scolaires analysés, les exercices proposés se placent dans le domaine de l'extra-mathématique en prenant comme objets principaux les grandeurs: Cependant les techniques pour résoudre ces exercices relèvent du numérique et les technologies relatives associées sont les opérations sur les nombres. L'exemple ci-dessous est pris de la collection *Triangle* :



4 **Petits problèmes** — Exercices 13 à 17 p.32

a. Trouver, dans chaque cas, la longueur AB :

b. Sur les étiquettes figure le prix d'un objet ou le prix total. Trouver, dans chaque cas, le prix manquant :

c. Si je parcours 5,6 km de plus, j'aurai terminé ce cross de 12,4 km. Quelle distance ai-je déjà parcourue ?

d. Pierre a dans sa poche 12,40 €. Jean lui dit : « Tu as 5,60 € de moins que moi. » Quelle somme a Jean ?

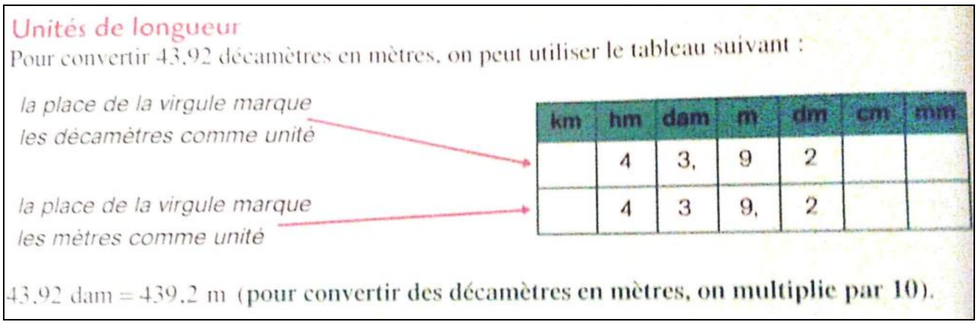
e. On a livré, à un épicier, 24 boîtes de biscuits pesant chacune 1,250 kg. Quel est le poids de ces 24 boîtes ?

f. Je prends un train à 7 h 48. Il arrive à 9 h 13. Quelle est la durée du trajet ?

Figure 4-13. Extrait du manuel 6TR05, page 24

Dans l'exercice a. de la figure ci-dessus, le type de tâches est de calculer une mesure de longueur, bien que ces mesures soient données sans unités. De manière générale, les exercices proposés demandent de calculer la mesure d'une grandeur en faisant des opérations sur les nombres abstraits (sans unités). Même si les problèmes relèvent des grandeurs, les unités disparaissent des calculs, et donc les grandeurs aussi. Les grandeurs présentes de manière récurrente sont les prix, les masses, les durées, les distances et les longueurs. Les grandeurs interviennent dans les problèmes de la vie réelle proposés par les manuels de 6e. On notera encore que les tâches conduisent à soustraire, additionner ou multiplier des nombres décimaux.

Le manuel 6DB05 expose un autre rôle accompli par les grandeurs. Les changements d'unités de masse, contenance et longueur servent à étudier la multiplication par 10,100 et 1000 dans le chapitre « Nombres » :


Unités de longueur

Pour convertir 43,92 décamètres en mètres, on peut utiliser le tableau suivant :

la place de la virgule marque les décamètres comme unité

la place de la virgule marque les mètres comme unité

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	4	3,	9	2		
	4	3	9,	2		

43,92 dam = 439,2 m (pour convertir des décamètres en mètres, on multiplie par 10).

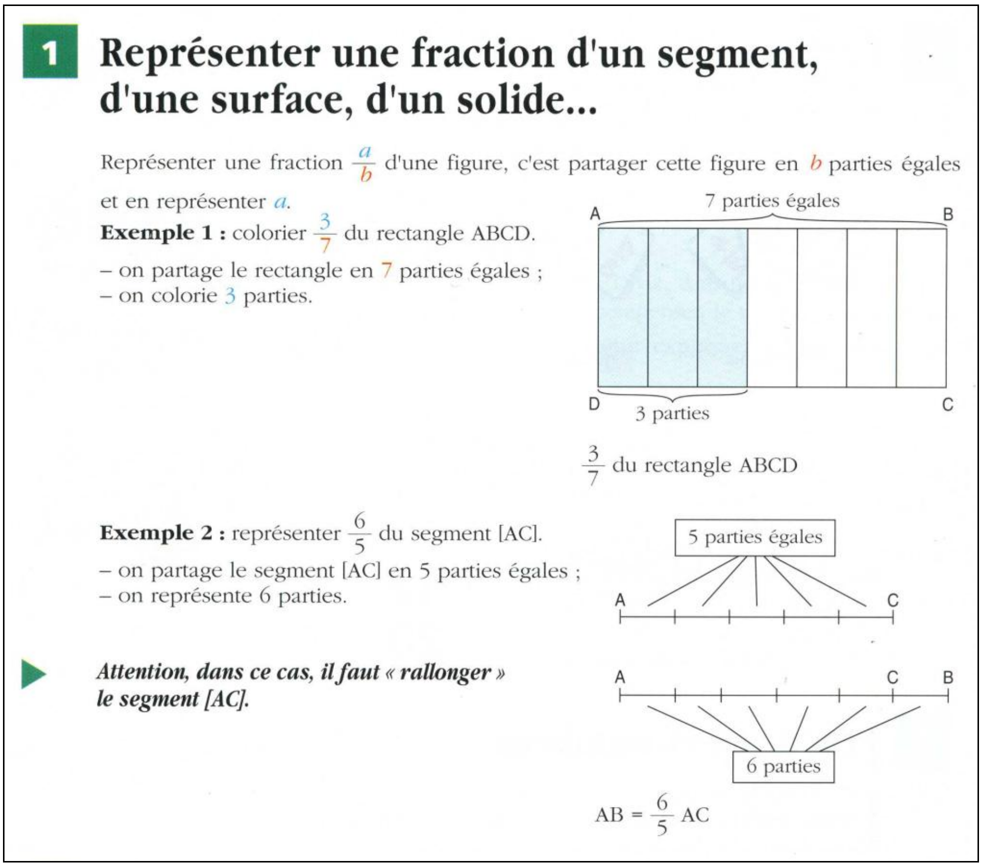
Figure 4-14. Extrait du manuel 6DB05, page 18

En conclusion, les grandeurs ont comme fonction de faire le lien entre l'extra-mathématique et le numérique à travers des problèmes de la vie quotidienne dans tous les manuels scolaires de deux périodes.

4.2 Fractions

- Les manuels de la collection *Triangle* : 6TR96, 6TR05 et 6TR09

Dans la collection *Triangle* l'étude des fractions se concentre dans un seul chapitre, et on étudie la droite graduée dans le chapitre dédié aux nombres décimaux. On trouve les mêmes types de tâches en lien avec les grandeurs dans tous les manuels scolaires de cette collection : représenter la fraction d'un objet et écrire la fraction relative au partage d'un objet. Une technique associée au premier type de tâches est institutionnalisée dans le manuel de 1996, comme on peut le voir dans l'extrait de ce manuel 6TR96 :



1 Représenter une fraction d'un segment, d'une surface, d'un solide...

Représenter une fraction $\frac{a}{b}$ d'une figure, c'est partager cette figure en b parties égales et en représenter a.

Exemple 1 : colorier $\frac{3}{7}$ du rectangle ABCD.

– on partage le rectangle en 7 parties égales ;
– on colorie 3 parties.

$\frac{3}{7}$ du rectangle ABCD

Exemple 2 : représenter $\frac{6}{5}$ du segment [AC].

– on partage le segment [AC] en 5 parties égales ;
– on représente 6 parties.

Attention, dans ce cas, il faut « rallonger » le segment [AC].

$AB = \frac{6}{5} AC$

Figure 4-15. Extrait manuel 6TR96 p. 62

Même si les types de tâches décrites précédemment devraient prendre appui sur la longueur ou l'aire, ces grandeurs ne sont pas traitées dans cet exercice. En effet, pour les manuels il s'agit du partage d'un objet et non de la grandeur. Par exemple, on doit « colorier 3/7 du rectangle ABCD ». L'un des rôles que peuvent jouer les grandeurs dans le numérique est de construire le sens de la fraction, en particulier de la fraction partage, mais dans ce manuel les grandeurs ne participent pas à la construction de la notion de fraction. Cependant, dans le document ressources *Grandeurs et mesures*, on peut observer que la différenciation entre l'objet et sa grandeur est bien explicitée dans ce texte :

> « On ne peut pas parler de *la* moitié d'un objet x, tout simplement parce que, en dehors d'une convention sociale, l' ''objet moitié '' d'un objet x n'existe pas. […] Il n'est donc pas possible d'opérer directement sur les objets, et le recours aux grandeurs est nécessaire pour pouvoir définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets. Il convient donc d'assumer le détour par les grandeurs dans le trajet qui conduit des objets aux mesures. Si des expressions telles que ''fraction de tarte'', ''fraction d'un champ'', n'ont guère de signification, les choses s'éclairent si au lieu de parler de fraction d'objets, on parle de fraction de grandeurs attachées à ces objets : fraction de la masse (ou du volume) d'une tarte, fraction de l'aire d'un champ. Ce passage des objets aux grandeurs ne peut être laissé à la charge des élèves. »

Dans l'extrait, on remarque que pour l'institution CDA4 les « fractions partages » doivent être étudiées en rapport avec les grandeurs, car le partage des objets n'a pas un véritable sens. Cependant, dans les manuels de la collection *Triangle* le partage est fait sur les objets, comme on a vu, on parle de « 3/7 du rectangle » et non de « 3/7 de l'aire du rectangle ». Ainsi ces manuels explicitent la méthode comme le partage d'un « segment », et par conséquence, ils travaillent des partages sur les objets à l'aide des nombres abstraits.

- Les manuels utilisés par les enseignants : 6DB05 et 6MU05

Les manuels 6DB05 et 6MU05 n'exposent pas de méthodes, ni de connaissances relatives aux types de tâches décrites ci-dessus. Ces dernières sont présentes plutôt dans les activités d'introduction, c'est-à-dire, dans les moments de premier rencontre et d'exploration de la tâche. Ces textes travaillent aussi sur le partage des objets et sur les nombres.

4.3 Conclusion sur les grandeurs dans le domaine du numérique

Par rapport à la présence des grandeurs dans le numérique, on peut observer une uniformisation du rôle des grandeurs pour la construction de ce domaine et dans le traitement donné aux différentes espèces de grandeurs. En effet, les grandeurs apparaissent dans des situations de la vie quotidienne pour étudier les opérations sur les nombres.

D'après l'étude réalisée sur les programmes de la période entre 1995 et 2005, il existe aussi une régularité dans la fonction accomplie par les grandeurs dans la construction du numérique. Dans cette étude, on a identifié les mêmes rôles pour les grandeurs que ceux apparus dans les manuels scolaires. Les auteurs des manuels sont donc en conformité avec les programmes du collège relativement au rôle des grandeurs dans le numérique. Par contre, si on se place dans l'institution CDA4, c'est-à-dire, en considérant les programmes et les documents ressources, les manuels scolaires ne respectent pas toujours les directives de cette institution. En effet, d'après le document ressources *Grandeurs et mesures*, la représentation des fractions est travaillée à l'aide des grandeurs et non des objets comme cela apparaît dans les manuels scolaires. De ce point de vue, un habitat et une niche disparaissent pour les grandeurs dans les manuels scolaires analysés.

5. Analyse écologique du domaine géométrique en classe de 6e

Comme pour le domaine du numérique, le domaine géométrique est très présent dans tous les manuels scolaires du collège. Pour y situer nos analyses, nous présentons les chapitres des manuels du domaine de la géométrie où l'on peut trouver des traces relatives aux grandeurs :

6TR96	6TR05	6TR09	6DB05	6MU05
Cercles, triangles et quadrilatères Symétrie axiale	Cercles, triangles, médiatrices Quadrilatères Symétrie axiale	Cercles et triangles Quadrilatères Symétrie axiales	Avec une règle et en compas Avec une règle et une équerre Avec un rapporteur et une règle Symétrie axiale	Règle et compas Constructions et reproductions Symétrie axiale

Tableau 4-10. Chapitres relatifs au géométrique dans les manuels

Les grandeurs sont, en général, étudiées en lien avec les contenus que nous présentons dans les sections suivantes.

5.1 Objets et constructions géométriques

Les grandeurs géométriques longueurs et angles participent à la définition des figures planes comme le cercle, les triangles et les quadrilatères en 6e et à leur étude. Ainsi, elles se trouvent au niveau technologique. Par exemple, on classe les triangles en utilisant les notions d'angle et de longueur. Ceci permet d'obtenir les trois catégories suivantes : triangle rectangle, triangle isocèle et triangle équilatéral. Ces définitions et propriétés collaborent dans la construction des figures planes dans les manuels scolaires. Par exemple, dans la figure 4-16, le manuel de la collection *Triangle* définit un losange :

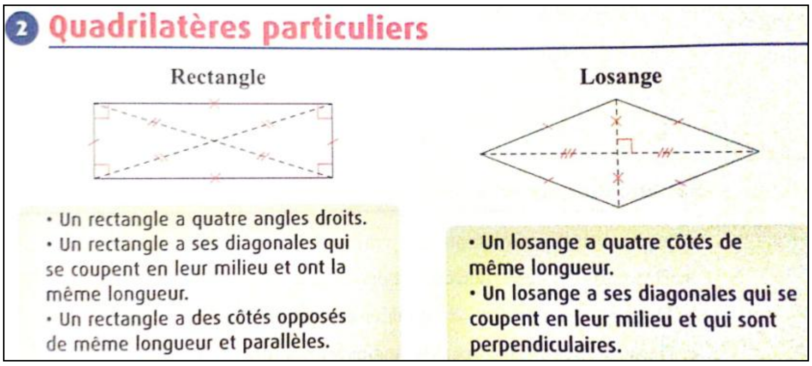
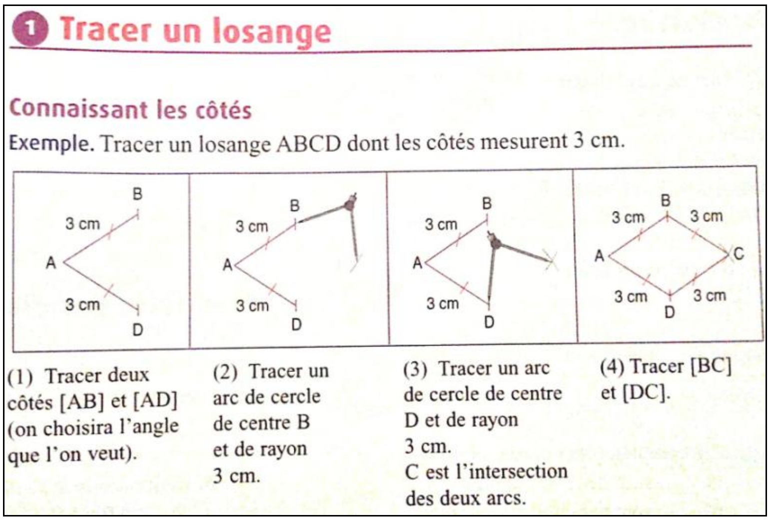


Figure 4-16. Extrait du manuel 6TR05, page 158

La définition de losange utilise comme éléments technologiques les longueurs. Cette espèce de grandeur participe ensuite à l'étude des constructions géométriques. Le manuel institutionnalise la méthode de construction d'un losange en utilisant les longueurs :



1 Tracer un losange

Connaissant les côtés

Exemple. Tracer un losange ABCD dont les côtés mesurent 3 cm.

(1) Tracer deux côtés [AB] et [AD] (on choisira l'angle que l'on veut).

(2) Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon 3 cm.

(3) Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon 3 cm. C est l'intersection des deux arcs.

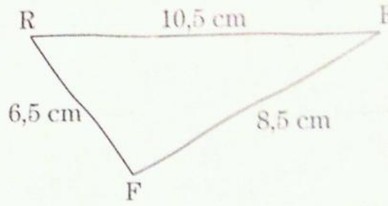
(4) Tracer [BC] et [DC].

Figure 4-17. Extrait du manuel 6TR05, page 159

Les manuels scolaires étudient les types de tâches « reporter une longueur » et « construire un angle de mesure donnée ». Ces deux éléments font partie des éléments techniques et technologiques des constructions géométriques plus complexes. Dans les manuels scolaires de 6e analysés, il s'agit de construire des triangles, des cercles et des quadrilatères en connaissant les mesures des longueurs et/ou des angles relatifs à ces figures planes. Par exemple, on peut demander aux élèves de résoudre les tâches suivantes :

Construire un triangle à la règle et au compas

1 Construire en vraie grandeur le triangle FER représenté ci-dessous à main levée.



2 Construire un triangle LAM à l'aide des dimensions indiquées ci-dessous.
LA = 10 cm, MA = 8 cm, LM = 9 cm.
(Laisser les traits de constructions apparents.)

3 Construire un triangle ABC à l'aide des dimensions indiquées ci-dessous.
BC = 7 cm, AC = 5 cm, AB = 6,5 cm.
(Laisser les traits de constructions apparents.)

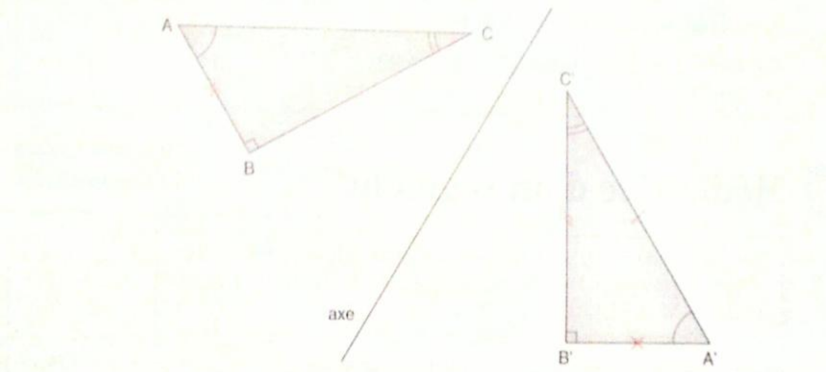
Figure 4-18. Extrait du manuel 6MU05, page 146

Dans les constructions géométriques les mesures des grandeurs sont explicites. Les objets appartiennent au cadre du géométrique et leurs constructions prennent appui sur les grandeurs.

5.2 Symétrie axiale

En relation avec la symétrie axiale, les grandeurs interviennent dans les propriétés de conservation : « La symétrie axiale conserve l'alignement, les longueurs, les angles et les aires ».

Les manuels décrivent les propriétés de conservation de longueurs, d'angles et d'aires de façons différentes. Les textes de la collection Triangle explicitent en 1996 les propriétés comme la conservation des « mesures de grandeurs » :



Lorsque deux figures sont symétriques,

- les mesures de **longueur** sont égales :
- les mesures d'**angle** sont égales :
- les mesures d'**aire** sont égales :

Dans la figure ci-dessus :

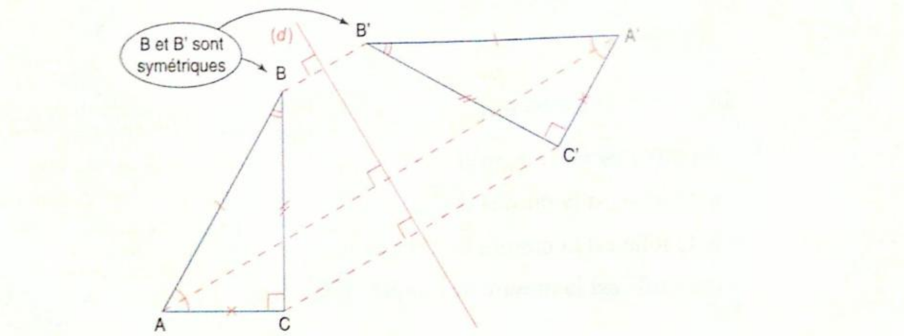
AB = A'B'
BC = B'C'
AC = A'C'

$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

ABC et A'B'C' ont la même aire.

Figure 4-19. Extrait du manuel 6TR96, page 153

Mais en 2005 et 2009, ils définissent les propriétés comme la conservation « des longueurs et des aires » et la conservation des « mesures d'angles » :



Lorsque deux figures sont symétriques :
– les longueurs des segments symétriques sont égales,
– les mesures des angles symétriques sont égales,
– les aires des figures symétriques sont égales.

Dans la figure ci-dessus :
AB = A'B' par exemple
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, par exemple
les triangles ABC et A'B'C' ont la même aire.

Figure 4-20. Extrait du manuel 6TR05, page 206

Les manuels 6MU05 et 6DB05 font de même. On peut interpréter ce changement de deux façons. Soit, pour les manuels les notions d'aire et de longueur sont considérées comme des mesures, et donc on n'ajoute pas le mot mesure comme pour les angles. Soit, ces notions sont prises en compte comme des grandeurs et la notion d'angle est confondue avec l'objet et pour différencier l'angle de l'objet les auteurs précisent qu'il s'agit de la « mesure d'angles ».

Dans les deux cas, on voit que la différentiation entre l'objet, la grandeur et la mesure n'est pas claire dans les manuels scolaires.

5.3 Conclusion sur les grandeurs dans le domaine du géométrique

Dans l'analyse des programmes, on a pu voir que les grandeurs apparaissent en lien avec la caractérisation d'objets et les propriétés relatives à ces objets, avec leur construction et avec l'étude des transformations. L'étude des manuels de 6e, nous montre les mêmes niches suggérées par les programmes pour les grandeurs dans la géométrie. De plus, les éléments techniques et technologiques sont presque les mêmes dans tous les manuels scolaires. Ainsi, il n'existe pas vraiment d'évolution de la place et du rôle des grandeurs dans le domaine géométrique.

6. Analyse écologique du domaine fonctionnel en classe de 6e

Le domaine des fonctions est représenté en 6e par l'étude de la proportionnalité. Nous présentons ci-dessous un tableau avec les chapitres des manuels scolaires en relation avec cette notion :

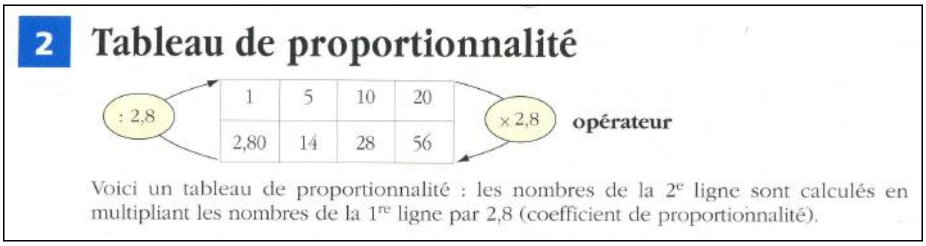
6TR96	6TR05	6TR09	6DB05	6MU05
Proportionnalité et pourcentage	Proportionnalité et pourcentages	Proportionnalité et pourcentages	Proportionnalité	Quotients et proportionnalité

Tableau 4-11. Chapitres relatifs au fonctionnel dans les manuels

6.1 Proportionnalité

Nous identifions deux types d'enseignement pour la proportionnalité dans les manuels scolaires. L'un prend appui sur le tableau de nombres et l'autre sur les grandeurs.

En effet, le manuel de la collection *Triangle* 6TR96 propose deux types de tâches à résoudre : « Compléter un tableau de proportionnalité » et « Résoudre un problème de proportionnalité ». Dans le premier type de tâches, le tableau prend comme valeurs les nombres abstraits. Le tableau de proportionnalité est institutionnalisé de la manière suivante dans le manuel *Triangle* 6TR96:


2 Tableau de proportionnalité

1	5	10	20
2,80	14	28	56

: 2,8 — × 2,8 opérateur

Voici un tableau de proportionnalité : les nombres de la 2e ligne sont calculés en multipliant les nombres de la 1re ligne par 2,8 (coefficient de proportionnalité).

Figure 4-21. Extrait du manuel 6TR96 p. 94

Parmi les exercices que propose ce manuel, on peut trouver les types de tâches « reconnaître une situation de proportionnalité » et « compléter un tableau de proportionnalité », pour lesquels le manuel présente des tableaux de nombres hors de tout contexte de la vie quotidienne et ainsi des grandeurs. La notion de tableau de situation de proportionnalité est utilisée dans un contexte purement numérique. Cependant, la notion de situation de proportionnalité est travaillée, dans ce manuel comme dans les autres manuels de la collection *Triangle*, en prenant appui sur les grandeurs. Les manuels *Triangle* définissent la proportionnalité de la manière suivante : « deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer l'une en multipliant l'autre par un nombre, toujours le même ». De plus, les grandeurs sont très présentes dans l'institutionnalisation des techniques :

Méthode 1 **À l'aide d'un tableau**

Exemple : une voiture roule toujours à la même vitesse. Elle parcourt 195 km en 3 h. Quelle distance parcourt-elle en 2 h ? en 6 h ? en 5 h ?

Ici, les deux grandeurs qui interviennent sont :
- la distance parcourue,
- le temps mis pour parcourir cette distance.

Il y a proportionnalité car la voiture roule **toujours à la même vitesse.**

Ne pas oublier de noter quelles sont les deux grandeurs qui interviennent

Temps (en heure)	3	2	6	5
Distance (en km)	195			

Pour remplir le tableau on cherche l'opérateur : 195 : 3 = 65

Temps (en heure)	3	2	6	5
Distance (en km)	195	130	390	325

× 65 : 65

Figure 4-22. Extrait du manuel 6TR96 p. 96

Dans cet exemple, on peut observer que les situations de proportionnalité sont présentées comme des problèmes relatifs aux grandeurs. Dans la technique, on identifie les grandeurs relatives à la situation, et ensuite on utilise le tableau de proportionnalité. On voit que les grandeurs apparaissent dans l'énoncé et à la gauche du tableau ainsi que les unités. Mais elles n'interviendront pas dans les calculs, car on cherche « l'opérateur numérique », c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité sans les unités. Cela peut s'expliquer par le fait que la grandeur vitesse n'est pas une connaissance de la classe de 6e et ainsi l'unité « heure/km » pourrait ne pas avoir de sens à ce niveau.

Dans les manuels plus récents 6TR05, 6TR09, 6DB05 et 6MU05, on trouve une technique qui s'appuie principalement sur des raisonnements dans le cadre de grandeurs, même si les calculs continueront à se faire dans un cadre numérique. Voici la technique proposée :

Méthode 1 **En utilisant les propriétés de la proportionnalité**

>> **Exercice :** Une voiture roule toujours à la même vitesse.
Elle parcourt 175 km en 2,5 h.
Quelle distance parcourt-elle en 5 h ? en 7,5 h ?

ÉTAPES	SOLUTION
(1) Je repère les grandeurs qui interviennent (et leur unité).	Les deux grandeurs sont : – la distance parcourue (en km) ; – la durée du parcours (en h).
(2) Je reconnais si les deux grandeurs sont proportionnelles.	Il y a proportionnalité car la vitesse est toujours la même.
(3) Je cherche des liens entre les nombres et j'effectue les calculs nécessaires.	• La durée est multipliée par 2 en passant de 2,5 h à 5 h, donc la distance est multipliée par 2 : 175 × 2 = 350. • 7,5 = 5 + 2,5 Il faut donc additionner les distances parcourues pendant ces durées : 350 + 175 = 525.
(4) Je conclus.	La voiture parcourt 350 km en 5 h et 525 km en 7,5 h.

Figure 4-23. Extrait du manuel 6TR09 p. 89

La technique proposée dans l'extrait ci-dessus propose un raisonnement sur les grandeurs : « la durée est multipliée par 2 en passant de 2,5 h à 5 h, donc la distance est multipliée par 2 : 175 x 2 = 350 ». Par contre, les derniers calculs se réalisent sur les nombres, et non sur les grandeurs. Le manuel explicite « je cherche des liens entre les nombres ». Dans cette technique exposée par les manuels de la période 2005-2012, il s'agit de poser des problèmes de proportionnalité entre grandeurs, de trouver les relations fonctionnelles entre ces grandeurs et de faire les calculs correspondants sur les nombres.

Même si dans les manuels plus récents, la proportionnalité a un traitement plus proche des grandeurs, l'aspect numérique est toujours présent et prégnant. D'autres techniques numériques continuent d'être conseillées par les manuels scolaires, comme l'utilisation du coefficient de proportionnalité dans un tableau de proportionnalité.

6.2 Pourcentage

La notion de pourcentage est traitée de la même manière dans tous les manuels scolaires. Il s'agit de travailler sur le type de tâches « Appliquer un taux de pourcentage à une grandeur », comme dans l'extrait ci-dessous :

Calculer « 5 % d'un nombre », c'est multiplier ce nombre par $\frac{5}{100}$ ou par 0,05.

Exemple :

Calculer 5 % de 400 €.

$$400 \times \frac{5}{100} = \frac{2\,000}{100} = 20$$

Donc 5 % de 400 € représentent 20 €.

Figure 4-24. Extrait du manuel 6TR05 p.83

On peut voir qu'il s'agit de calculer le pourcentage d'une grandeur. Par contre, les calculs sont faits dans un cadre purement numérique, les unités n'apparaissent pas dans les calculs. Ce type de traitement utilisé pour les pourcentages est commun à tous les manuels scolaires analysés, ainsi cette notion permet de faire des liens entre le cadre des grandeurs (et donc l'extra-mathématique) et le cadre du numérique.

6.3 Conclusion sur les grandeurs dans le domaine fonctionnel

Les programmes de la période A4 demandent de travailler sur des raisonnements relatifs à une situation de proportionnalité dans le cadre des grandeurs avant de formaliser les notions de coefficient de proportionnalité ou les propriétés de linéarité. Ainsi, à partir de 2005, on trouve dans les manuels scolaires des raisonnements s'appuyant sur le langage naturel. D'autres techniques sont communes aux deux périodes comme l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité.

Dans les manuels scolaires les grandeurs accomplissent un double rôle. D'une part, les relations entre des grandeurs proportionnelles constituent une source pour les situations de proportionnalité au collège, et d'autre part, les raisonnements sur les grandeurs donnent du sens aux calculs faits pour résoudre ces situations.

Conclusion du chapitre

Relativement aux niveaux de codétermination, les manuels scolaires font des choix didactiques très différents pour enseigner les espèces de grandeurs. Les nouveaux programmes de 2005 proposent d'étudier chaque grandeur au niveau de secteur d'étude. Cependant, un même manuel place les grandeurs au niveau des secteurs ou des thèmes selon le type de grandeur travaillé. Un même type de grandeur peut avoir le statut d'objet et d'outil dans deux manuels scolaires de collections différentes de la même classe. Au niveau des organisations mathématiques et didactiques en classe de 6^{e}, les différences entre manuels du domaine des grandeurs sont beaucoup plus visibles. On y trouve des organisations mathématiques ponctuelles assez différentes pour l'étude de chaque espèce de grandeur. Ainsi, les habitats et les niches pour chaque espèce de grandeur varient fortement selon le manuel. Les auteurs ont choisi de travailler certaines espèces de grandeur en tant qu'objet, en les situant dans un cadre de grandeurs, et d'autres espèces de grandeurs sont étudiées en tant qu'outil, en les plaçant, par exemple, dans un cadre géométrique.

En ce qui concerne les similitudes entre les manuels scolaires de 6e, le traitement des grandeurs est majoritairement numérique, les unités étant absentes et les techniques de calcul sont mises en avant dans la plupart de manuels de 6e.

En outre, le rôle et la place des grandeurs dans la construction d'autres notions mathématiques sont semblables dans tous les manuels scolaires. Comme le signalent les programmes de CA1 et CA4, les principales fonctions sont de faire le lien entre la vie réelle et les mathématiques et aider à la compréhension d'autres objets mathématiques. Ainsi, on observe une stabilisation de l'enseignement des domaines numérique, géométrique et fonctionnel relativement aux rôles des grandeurs. Les contraintes déclarées par les programmes des deux périodes sont intégrées par les auteurs des manuels scolaires. La vie des grandeurs dans d'autres domaines mathématiques semble donc assurée dans les textes scolaires de 6e. En revanche, le domaine des grandeurs n'a pas encore trouvé son équilibre dans les manuels scolaires du collège. En effet, les dissemblances entre ces textes nous montrent que la notion de grandeur est peu travaillée en soi et l'enseignement est fragmenté selon les types de grandeurs. L'ensemble des nouvelles contraintes institutionnelles présentes dans les programmes de 2005 ne sont pas complètement prises en charge par les auteurs relativement au domaine des grandeurs.

Ces constats nous amènent à renforcer l'hypothèse qu'il existe un grand écart entre les directives institutionnelles et les pratiques d'enseignement relativement aux grandeurs. Cela peut être dû aux différents assujettissements comme nous l'avons déjà dit. Si la plupart des professeurs s'appuient sur les manuels scolaires pour concevoir leurs enseignements et s'ils se réfèrent également aux programmes dans leurs pratiques, ils se trouveront assujettis à trois institutions :

- L'institution scolaire plus ancienne conduit à un renforcement de l'étude de grandeurs de façon fragmentée ;
- Les programmes actuels mettent en avant l'enseignement des grandeurs en tant que domaine d'étude et les espèces de grandeur en tant que secteur d'étude, et ils accentuent la dimension objet des grandeurs ;
- Les manuels présentent l'enseignement des grandeurs de façon divisée, laquelle dépend du type de grandeur, en laissant de côté un travail sur la notion de grandeur elle-même.

En tenant compte des différents systèmes de conditions et des contraintes relativement au domaine des grandeurs et de la stabilité du rôle des grandeurs dans la construction d'autres domaines mathématiques, nous étudierons les pratiques effectives des enseignants de 6e dans les chapitres suivants.

Chapitre V

Étude des pratiques : méthodologie

À la suite de l'analyse du savoir à enseigner issu de la noosphère, commence un autre travail, plus difficile à saisir, l'étude du système d'enseignement à propos des grandeurs dans le cœur même de la classe. Nous rappelons que nous nous intéressons à la place et au rôle effectifs des grandeurs, ce qui nous a conduit à étudier les pratiques d'enseignement au collège. Dans ce chapitre nous présentons la méthodologie de l'étude des pratiques des enseignants et les grilles employées pour les analyser. Afin de mieux cerner les rapports des enseignants aux grandeurs dans notre travail et aux liens entre les grandeurs et les autres domaines, nous avons mené une étude de l'enseignement proposé par trois professeurs dans leurs classes de collège. Nous nous sommes appuyé sur l'observation des séances, nous avons récupéré des textes liés à ces séances et nous avons effectué des interviews auprès de ces professeurs. Pour compléter cette étude, nous avons fait passer des tests aux élèves en 6^{e}. À travers ces données nous visons à recueillir des informations de la part d'enseignants de mathématiques concernant :

1. les conditions et les contraintes qui pèsent sur leurs pratiques ;
2. la place et le rôle donnés aux grandeurs dans leurs enseignements ;
3. leurs rapports personnels aux grandeurs ;
4. les rapports personnels de leurs élèves aux grandeurs.

Dans ce chapitre nous présentons :

- les choix théoriques et la méthodologie adoptée pour les analyses des observations des classes ;
- la conception des entretiens ;
- la conception et passation des deux tests en classe de 6^{e}, un à la rentrée scolaire 2010-2011 et un deuxième à la fin de la même année scolaire.

1. Le recueil des données

La méthodologie utilisée pour l'étude des pratiques vise à repérer, décrire et analyser la présence de grandeurs au niveau de l'enseignement annuel des mathématiques dans les différentes classes durant toute une année scolaire. Dans cette partie, nous exposons les différents éléments de notre méthodologie.

1.1 Quelles données ?

Nous avons recueilli de nombreuses données :

- Observation de séances, parfois enregistrées, et prise des notes à différents moments de l'année scolaire ;
- Entretiens avec les professeurs ;
- Recueil de toutes les productions écrites de quelques élèves (cahier de cours, cahier d'exercices, les devoirs) ;
- Recueil des progressions des enseignants, et aussi des évaluations proposées ;
- Passation d'un pré-test et d'un post-test aux élèves pendant l'année 2010-2011.

Les classes ont été choisies en relation avec les premiers résultats d'une analyse de programmes scolaires. Dans un premier moment d'exploration, pendant la fin de l'année 2009-2010, nous avons suivi trois classes : une classe de 6^{e}, une classe de 5^{e} et une classe de 4^{e} dirigées par trois professeurs différents, nous les avons appelés M1, M2 et M3 respectivement. Nous avons observé 8 séances de la classe de 6^{e}, 4 séances de la classe de 5^{e} et 3 séances de la classe de 4^{e}. Ce premier moment préliminaire nous a aidé à mieux cerner nos objectifs et, tout au long de l'année 2010-2011, nous avons fait le choix d'observer deux classes de 6^{e} pour pouvoir comparer les pratiques des deux enseignants M1 et M2. Ce choix centré sur la classe de 6^{e} s'appuie aussi sur le fait que les grandeurs doivent être travaillées en tant qu'objet dans les programmes de 6^{e} à partir de 2005. Nous avons été présents dans 12 séances de la classe de 6^{e} du professeur M1 et dans 13 séances de la classe du professeur M2. Voici un tableau qui résume les données recueillies pendant notre recherche :

	2009-2010			**2010-2011**	
	M1	**M2**	**M3**	**M1**	**M2**
Classe	6^{e}	5^{e}	4^{e}	6^{e}	6^{e}
nombre de séances observées	8	4	3	12	13
Entretiens	Non	non	non	oui	oui
productions écrites des élèves	Oui	oui	oui	oui	oui
progressions des enseignants	Oui	oui	oui	oui	oui
application de pré-test et post-test	Non	non	non	oui	oui

Tableau 5-1. Résumé des données recueillies

Dans la suite, nous centrerons nos analyses dans les classes des enseignants M1 et M2, car nous n'avons observé que trois séances de la classe du professeur M3, dans lesquelles nous avons trouvé peu d'éléments en lien avec les grandeurs.

1.2 Le temps d'observation et sa décomposition

L'étude a été faite pendant la fin de l'année scolaire 2009-2010 et toute l'année 2010-2011. Le recueil de données est dynamique. Nous avons observé la programmation annuelle du professeur, les chapitres et son déroulement pendant l'année. Nous avons fait le choix d'étudier toutes les séances correspondant au chapitre « Grandeurs et mesures » lorsqu'il existe, et nous utilisons une méthode dite « méthode de carottage » pour repérer la possible présence des grandeurs dans d'autres chapitres.

1.3 La méthode de carottage

À la suite de la recherche de M. Larguier (2009), nous reprenons le nom de « méthode de carottage », issue de la Géologie, pour expliquer une méthode de recueil de données. Elle consiste à prendre des données dans différents moments de l'enseignement dans des classes ordinaires. L'échantillon ainsi prélevé est peu altéré et il offre une première vision des pratiques. Elle sera employée pour l'observation d'autres domaines que celui des grandeurs, pour y repérer ainsi leur présence éventuelle.

Les échantillons ne sont pas pris totalement au hasard. À partir des résultats obtenus dans nos études épistémologique et institutionnelle, nous avons repéré des habitats « potentiels » pour les grandeurs dans les enseignements. Par exemple, la proportionnalité, les constructions géométriques, etc.

2. Une observation clinique des pratiques de professeurs

Nous avons opté pour une étude clinique des pratiques de professeurs dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992,1994). Dans un premier moment, nous décrivons les raisons qui nous ont amenés à ce choix clinique, ensuite nous expliquons comment ont été recueillies les données, pour finalement présenter les grilles d'analyse.

2.1 Les choix d'une étude clinique de pratiques

Étant donné que nous étudions la place et le rôle que donnent les enseignants aux grandeurs dans leurs classes, nous devons identifier les différents rapports des professeurs aux grandeurs dans la réalisation même de leurs enseignements. Un premier choix a été de faire nos études par l'observation directe de classes ordinaires, puisque nous voulons caractériser les pratiques relatives aux grandeurs dans les classes du collège en France et nous voulons savoir comment les professeurs les utilisent pour enseigner des contenus du programme.

De plus, nous considérons l'enseignant comme un sujet appartenant à diverses institutions (EMS[1], la classe, etc.). Le travail de l'enseignant sera à la fois déterminé par ses conceptions et son histoire personnelle, et par les contraintes et conditions que les institutions lui prescrivent. En inscrivant notre recherche dans le courant de démarches cliniques, nous partageons l'hypothèse qu'une étude de cas nous permet d'étudier de façon plus approfondie la singularité des pratiques et de révéler des éléments plus généraux sur les pratiques. Nous voulons ainsi accéder aux choix d'enseignement des professeurs, aux raisons de ces choix lorsque ce sera possible, et leurs conséquences sur les apprentissages des élèves.

2.2 La posture adoptée dans les observations

En nous inscrivant dans les recherches de notre laboratoire (Larguier, 2008), nous mènerons des observations directes pour lesquelles il s'agira de réduire au maximum l'influence du chercheur sur les pratiques des enseignements observées. D'une part, le chercheur ne dévoile pas l'objectif de la recherche au professeur, l'objet mathématique grandeur n'est pas indiqué aux enseignants comme l'objet d'étude. Dans un premier moment, nous expliquons aux enseignants que nous travaillons sur les nouveaux programmes de 2005 et leur influence sur les pratiques, et nous leur indiquons que l'objet mathématique de notre étude ne sera révélé qu'à la fin de l'année scolaire. D'autre part, le chercheur évitera autant que possible toute intervention. Il est vrai que la présence même du chercheur peut avoir une influence sur les pratiques en tant qu'élément non familier dans la classe. Mais dans notre méthodologie, le chercheur se doit de ne pas participer à la classe, ne pas poser de questions ou de faire des commentaires sur son déroulement. Nous voulons ainsi réduire au maximum l'impact intrusif que peut avoir un observateur sur les observables.

2.3 Le contrat entre le chercheur et l'enseignant

Les professeurs ont été contactés par courrier électronique de manière à obtenir un premier rendez-vous pour leur expliquer et définir avec eux le contrat sur les observations. On définit donc dès le départ le rôle du chercheur dans les classes. Le chercheur choisira les séances qu'il va observer en fonction de la disponibilité du professeur et l'intérêt a priori du contenu pour la recherche. Ce choix est basé sur les analyses, notamment du savoir savant et du savoir à enseigner et de la connaissance au fur à mesure de la progression de l'enseignant.Le chercheur demande aux professeurs l'autorisation pour avoir accès aux écrits de l'enseignement comme la progression annuelle (recueillie à la fin de l'année), les écrits du professeur, les cahiers des élèves, etc. Du côté de l'enseignant, celui-ci doit autoriser le

[1] Enseignement des mathématiques au secondaire

recueil d'information auprès des d'élèves, par exemple il doit donner son accord pour la passation de deux tests.

Le chercheur précise les modalités de recueil de données, comme l'enregistrement des séances, et il s'engage auprès du professeur à respecter l'anonymat des données recueillies.

3. Les choix théoriques et les outils pour l'observation

L'étude est réalisée dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999). De ce cadre théorique, on considère l'enseignant comme un individu appartenant à une institution, sa pratique est donc assujettie à des contraintes que lui impose cette institution. Mais ces assujettissements ne sont pas catégoriques, car le professeur possède dans cet espace une certaine liberté en faisant jouer un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres (Chevallard, 1992). Pour étudier les pratiques des enseignants vis-à-vis de ces contraintes, nous les décrirons en termes de praxéologies. Dans la théorie anthropologique du didactique, on considère que toute activité humaine peut être décrite en termes de types de tâches, de techniques, de technologies et de théories. Un professeur doit accomplir divers types de tâches professorales, l'une est de construire une praxéologie mathématique relative à un contenu donné, mais cette praxéologie n'est pas absolue, elle est transformée dans les processus de transposition didactique et d'enseignement visant l'apprentissage des élèves. Pour analyser l'activité du professeur, nous sommes amené à étudier les praxéologies didactiques construites par l'enseignant pour étudier les praxéologies mathématiques.

Notre méthodologie d'analyse des séances de classes se fonde sur celle développée par Bronner et al. (2003) pour les pratiques, elle comporte trois étapes : l'élaboration de la trame de la séance, l'analyse des organisations mathématiques avec le filtre grandeur et des organisations didactiques avec la méthodologie dite des quatre composantes.

3.1 La trame de la séance

Dans une première étape de l'analyse d'une séance, nous analyserons une trace première de la classe : « Pour décrire les pratiques observées nous proposons de construire tout d'abord ce que nous appelons la trame de la leçon, qui fait apparaître des découpages de la séance selon de grandes unités rendant intelligibles chaque élément retenu relativement à un projet d'enseignement. Ce premier découpage en périodes est défini par les fonctions habituellement utilisées en classe (recherche ou mise au travail sur des exercices, mises en commun, bilans, cours, …). » (Bronner et al, 2003). Elle nous permettra de repérer de grandes phases de la séance, d'identifier les acteurs et leurs tâches principales.

3.2 L'analyse des organisations mathématiques avec le filtre grandeur

Dans une première définition du modèle de description, dès lors que la pratique en question est reconnue comme mathématique, on peut décrire les mathématiques par ce que l'on appelle en toute généralité "une organisation praxéologique », ou plus spécifiquement « une organisation mathématique » (Chevallard, 1999).

Ce modèle est complété par un niveau d'organisations mathématiques à l'aide du filtre des grandeurs, pour repérer, décrire et analyser la présence des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques. Nous rappelons qu'il est organisé autour des éléments suivants :

- les types de pratiques relatives aux grandeurs identifiés dans le premier chapitre;
- les objets : domaine, type de grandeur, registres de représentation, symbolisme, ostensifs et non-ostensifs ;
- les types de tâches mettant en jeu les grandeurs ;
- les techniques associées à ces tâches (Anwandter-Cuellar, 2008) : Découpage-recollement, utilisation de la formule, comptage d'unités, etc. ;
- les technologies et les théories, en particulier celles fondant les tâches et les techniques précédentes ;
- les articulations et les dynamiques intra et inter-domaines des grandeurs : intra-grandeur, grandeur-géométrie, grandeur-fonctions, grandeur-numérique, grandeur-extra-mathématique ;
- Les raisons d'être des grandeurs au collège.

3.3 L'analyse des organisations didactiques avec la méthode des quatre composantes

D'abord, nous identifions les moments présents dans l'organisation didactique de la séance, au sens de Chevallard (1999), et nous évaluons cette organisation avec la méthodologie de quatre composantes. Cette méthodologie s'appuie dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1999) en articulation avec la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1986). Elle est un type d'analyse des organisations didactiques structurée autour de quatre composantes (Bronner et al, 2003) : l'organisation du milieu, le contrat didactique, le temps didactique et le topos de l'élève et du professeur. Elle nous permet de faire des analyses plus fines des phases de la trame en relation avec notre problématique.

4. Les entretiens

En complément des observations des classes, nous avons fait des entretiens semi-directifs, individuels, enregistrés sur un support audio à la fin de l'année scolaire 2010-2011. Nous avons interviewé deux enseignants, M1 et M2.

4.1 Méthode

Les études précédentes et notre problématique de recherche nous ont amené à construire un guide d'entretien qui sert de trame. Nous avons déterminé avant l'entretien un certain nombre de thèmes à explorer. Puis, au cours de l'entretien, nous avons fait en sorte que l'ensemble des points soit abordé par l'enseignant en réponse à nos questions.

Les objectifs sont :

- obtenir des renseignements sur l'expérience professionnelle des enseignants ;
- faire expliciter aux enseignants leurs choix didactiques et mathématiques relativement aux grandeurs ;
- compléter les observations des classes, et caractériser les rapports personnels des professeurs observés à l'objet grandeur.

Tout d'abord, à partir de la transcription intégrale des données audio (annexe A), nous avons élaboré des guides d'entretien. Nous entendons par « guide » un outil pour décrire et mener l'entretien, faire apparaître des découpages relatifs aux thèmes qui sont abordés. Cette méthode s'appuie sur ce guide, l'analyse et la comparaison des données. Ensuite, nous avons commencé à analyser l'information recueillie en fonction d'un ensemble de paramètres de notre cadre théorique, liés aux thèmes choisis dans le guide d'entretien. De plus, pour répondre aux questions de recherche, cette analyse repose sur le filtre des grandeurs.

4.2 Guide d'entretien

Le guide d'entretien nous facilitera l'organisation de l'entretien pour diriger nos questions relativement aux thèmes déterminés à l'avance. Nous apportons à l'entretien les programmes du collège de 2009-2010 (période A4), ainsi que le document ressource « Grandeurs et mesures au collège ». Dans la suite, nous présentons les questions relatives à chaque thème et une analyse a priori de ces questions :

- Première partie : Une introduction

Nous remercions l'enseignant d'avoir accepté l'entretien. Nous présentons notre sujet de thèse et les objectifs de l'entretien.

Quand nous avons commencé nos observations, nous n'avons pas révélé notre thème de recherche aux enseignants, particulièrement l'objet mathématique d'étude. Nous avons expliqué aux professeurs que nous nous intéressons aux nouveaux programmes du collège de 2005, mais nous n'avons pas explicité que nous travaillons sur les grandeurs géométriques. Cette première présentation est donc très importante, nous situons nos objectifs de notre recherche en dévoilant pour la première fois notre objet d'étude.

Ainsi, dans cette partie, nous signalons aux professeurs que nous nous intéressons aux nouveaux programmes du collège de 2005, en particulier aux grandeurs géométriques. Ensuite, nous indiquons que notre intérêt est basé sur le fait que dans les textes institutionnels de 2005 on trouve une nouvelle structuration, notamment la création d'un domaine « Grandeurs et mesures ». Nous précisons aux enseignants que nous avons déjà fait un travail épistémologique sur les grandeurs, et que nous avons aussi analysé les programmes et les manuels scolaires. Finalement, nous expliquons aux professeurs que nous voulons également observer la mise en place de ces nouveaux textes dans les classes, et qu'à travers cet entretien nous essayons de connaître leurs positions relativement à l'enseignement des grandeurs.

- Deuxième partie : Aspects généraux et pédagogiques

Nous avons interrogé les professeurs sur leur carrière professionnelle et leurs sources de travail. Cette partie concerne l'identification des outils utilisés par l'enseignant pour préparer ses cours. Ces questions permettent de repérer l'assujettissement du professeur aux programmes et aux manuels scolaires.

Les questions :

- Depuis combien d'années enseignez-vous ?
- Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir les exercices ? De quelle manière ?
- Consultez-vous systématiquement les programmes du collège ? Est-ce que vous les suivez à la lettre ?
- Consultez-vous les documents ressources ?
- Comment préparez-vous vos progressions ? Quels éléments prenez-vous en compte ?

Analyse a priori :

Pendant les séances d'observation, nous avons pu constater une considérable utilisation des manuels scolaires dans l'enseignement des deux professeurs. Ainsi, nous pensons que les professeurs préparent leurs cours principalement avec les manuels scolaires. Par contre, nous faisons l'hypothèse que les documents ressource sont peu employés par les enseignants. Ainsi, il est probable que les professeurs M1 et M2 ne s'appuient pas du tout sur ces documents.

- Troisième partie : Les grandeurs dans les programmes scolaires

Nous voulons connaître la perception et la compréhension de la part des enseignants des contenus et des finalités exposés dans les programmes relativement aux grandeurs, la représentation et la mise en œuvre de ces textes et l'interprétation des commentaires et ainsi que l'adhésion aux méthodes suggérées pour l'enseignement des grandeurs.

Les questions :

- Que pensez-vous de la nouvelle structuration des programmes de 2005 ? Ces programmes présentent les grandeurs comme un domaine. Qu'en pensez-vous ?
- Est-ce que vos pratiques ont changé vis-à-vis de ces nouveaux programmes ?
- En lien avec quelles notions, pensez-vous que les programmes proposent de travailler les grandeurs ?
- Que pensez-vous du document « grandeurs et mesures » ?

Analyse a priori :

À partir de nos observations, nous faisons l'hypothèse que les professeurs de la période actuelle mènent leurs enseignements sous les conditions et les contraintes de l'institution « Programmes et documents de collège en A1 » (CA1). Dans cette perspective, les enseignants ne doivent pas vraiment avoir pris en compte la création d'un domaine « Grandeurs et mesures », et donc leurs enseignements n'ont pas changé à propos des grandeurs. Nous pensons aussi que les professeurs connaissent les notions mathématiques en lien avec les grandeurs comme la proportionnalité et les configurations géométriques, mais en tant qu'enseignants du collège, la construction des nombres à partir des grandeurs est moins présente dans leurs enseignements.

Les documents ressource sont en général méconnus par les enseignants. Il est donc probable qu'ils connaissent l'existence d'un document « Grandeurs et mesures », mais non pas son contenu en profondeur. Ainsi, nous faisons aussi l'hypothèse que les professeurs les utilisent très peu dans leurs enseignements.

- Quatrième partie : Les grandeurs dans les manuels scolaires

Nous voulons connaître la place des manuels dans les enseignements des professeurs et leur interprétation de ces textes.

Les questions :

- Le (s) manuel (s) que vous utilisez fait-il (font-ils) référence aux grandeurs ? Dans quelles parties? Et sous quelles formes ?
- D'après vous, les manuels font-ils une présentation adaptée des contenus relatifs aux grandeurs ? Pourquoi ?

Analyse a priori :

Cette question nous aidera à déterminer l'importance que les enseignants donnent aux manuels scolaires dans leurs enseignements. Au travers de nos analyses institutionnelles, nous avons pu constater que les manuels scolaires ne prennent pas véritablement en compte les indications relatives aux grandeurs données par les programmes scolaires de la période A4. Nous voudrions savoir si l'un de facteurs qui peuvent expliquer l'écart entre la noosphère et les pratiques des professeurs se trouve dans la transposition faite par les manuels scolaires des programmes du collège.

▪ Cinquième partie : Les rapports personnels des enseignants

Cette partie de l'entretien vise à nous permettre d'obtenir des renseignements sur les rapports personnels des enseignants à l'objet grandeur.

Les questions :

- Qu'est-ce qu'une grandeur pour vous ? Et une mesure ?
- Si vous deviez expliquer la notion de longueur (angle, aire, volume) aux élèves que diriez-vous ?

Analyse a priori :

Rappelons que les programmes et les manuels scolaires ne définissent pas l'objet grandeur. Généralement, dans le parcours universitaire de professeur des mathématiques, le concept de grandeur n'est pas travaillé. La seule définition et théorie de la grandeur se trouve dans le document ressources « Grandeurs et mesures ». Nous anticipons ainsi des définitions des grandeurs et de la mesure plutôt spontanées, proches de la connaissance commune, et non pas mathématiques.

▪ Sixième partie : Les grandeurs dans les pratiques

L'objectif est d'interroger l'enseignant sur sa pratique et observer la place et la fonction que déclarent les professeurs aux grandeurs dans leurs classes.

Les questions :

- On sait qu'il existe une numérisation des grandeurs, travaillez-vous la notion de grandeur dans vos enseignements, ou plutôt enseignez-vous des formules ?

Quelles activités mettez-vous en place pour enseigner cette notion ? Et pour la notion de longueur, d'aire, de volume ?

- Utilisez-vous les grandeurs pour enseigner d'autres notions mathématiques ? Si oui, lesquelles et comment?

Analyse a priori :

D'après les programmes scolaires du 1995, les grandeurs doivent être travaillées au collège du point de vue de leurs mesures, c'est-à-dire, de façon numérique. Les professeurs d'aujourd'hui semblent toujours attachés à cette conception de l'enseignement des grandeurs. Dans leurs réponses, il est possible qu'ils expliquent que la notion de grandeur en tant qu'objet a été travaillée à l'école élémentaire, et que le travail au collège doit être centré sur les formules.

Nous voudrions aussi savoir si l'aspect des grandeurs en tant qu'outil est pris en compte par les enseignants.

- Septième partie : Les grandeurs dans les connaissances des élèves

Les questions ici abordées visent à permettre d'obtenir des éléments sur l'apprentissage des grandeurs au collège.

Les questions :

- D'après votre expérience, parmi les grandeurs géométriques, quelles sont les plus difficiles à comprendre pour les élèves ? Pourquoi ?
- Quelles sont les principales difficultés que vous avez rencontrées du point de vue des apprentissages de vos élèves pour enseigner les grandeurs ?

Analyse a priori :

Nous nous attendons à ce que les professeurs évoquent les difficultés que les élèves ont pour différencier les grandeurs ou pour déterminer les formules de calcul adéquates pour résoudre les problèmes. Nous faisons l'hypothèse que les deux enseignants pensent que ces difficultés ne proviennent pas du travail didactique et mathématique fait en cours à propos des grandeurs, mais plutôt qu'elles dérivent de facteurs pédagogiques comme le temps, l'investissement des élèves à apprendre ces contenus, etc.

5. Élaboration de deux tests pour étudier les rapports des élèves

Nous avons mis au point un test diagnostique au début de l'année scolaire 2010-2011 et un post-test à la fin de l'année scolaire dans les deux classes de sixième des professeurs M1 et M2. Nous cherchons principalement à savoir si les élèves actuels sont capables d'utiliser leurs connaissances sur les grandeurs pour traiter les situations qui impliquent des grandeurs dans les différents cadres. Nous essayons de proposer des exercices relatifs aux différents genres de tâches qui ont déjà été identifiés dans les programmes et les manuels scolaires. Ces exercices s'appuient dans l'observatoire EVAPM. Celui-ci recueille et analyse depuis 1987 des informations sur les conditions d'enseignement et l'état des acquis des élèves. Nous voulons ainsi repérer l'état des connaissances des élèves actuels tout en les mettant en lien avec les pratiques d'enseignement des professeurs observés.

5.1 Les analyses

Les exercices ont été soumis à différentes analyses :

- L'analyse a priori

Une première étude relative aux types de tâches nous a aidés à sélectionner un groupe de problèmes proposés par l'observatoire EVAPM, partie que nous avons appelée « analyse préalable ». Ensuite, nous avons choisi des problèmes qui ont été regardés d'un point de vue plus approfondi à travers une « analyse a priori ».

- L'analyse a posteriori

La méthode d'analyse a posteriori est divisée en trois parties. Premièrement, nous calculons le taux de réussite pour chaque problème dans les deux tests. Deuxièmement, nous analysons les techniques mises en place par les élèves. Troisièmement, nous mettons en lien les rapports personnels des élèves avec les pratiques des enseignants M1 et M2.

5.2 La présentation des résultats

La méthodologie et les résultats de ces deux tests seront présentés dans les chapitres qui suivent. Dans le chapitre VI, nous exposerons notre méthodologie d'une manière plus approfondie, ainsi que les premiers résultats en termes de taux de réussite. Dans le chapitre VIII et le chapitre IX, nous mettrons en lien les résultats des tests avec les pratiques d'enseignement des professeurs M1 et M2.

6. Axes d'étude des pratiques

Précédemment, nous avons présenté les différents éléments de la méthodologie qui nous a servi à étudier les pratiques d'enseignement relatives aux grandeurs dans les classes observées. Nous avons fait le choix de présenter les résultats en quatre chapitres. Le chapitre VI, montre la méthodologie d'analyse et les premiers résultats concernant les deux tests passés dans les classes de 6^e des professeurs M1 et M2. Le chapitre VII présente l'étude des habitats et niches pour les grandeurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2. Le chapitre VIII est consacré à l'étude d'une dynamique inter-domaines et le chapitre IX à l'analyse de la place et rôle d'une espèce de grandeur, la grandeur aire. Dans la suite, nous souhaitons préciser les raisons d'un tel choix et le plan d'étude pour ces chapitres.

6.1 Analyses selon deux axes

Notre étude est centrée sur la place et le rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques au niveau de l'enseignement au collège. Cet objet de recherche nous a amené à étudier les grandeurs sur plusieurs points de vue. D'une part, on a vu qu'elles apparaissent dans les nouveaux programmes de 2005 au même niveau que les domaines mathématiques classiques comme la géométrie ou le numérique. D'autre part, les grandeurs participent à la construction de diverses notions comme la proportionnalité ou les nombres, de telle manière qu'elles sont présentes dans plusieurs domaines mathématiques. Pour ces raisons, nous avons décidé de croiser, selon ces deux axes, différentes analyses en nous appuyant sur les entretiens, les observations de séances et les résultats des deux tests.

Comme nous l'avons dit, il ne s'agissait pas de faire une étude cognitive des connaissances des élèves, sinon plutôt d'utiliser les résultats des tests pour mieux comprendre les pratiques d'enseignement relatives aux grandeurs. De cette façon, on trouvera dans les deux derniers chapitres les analyses des séances, des entretiens et des tests. Nous aurions pu présenter les résultats d'une façon « classique » en faisant un chapitre pour les observations des séances, un autre pour les entretiens et un dernier pour les connaissances des élèves, mais nous pensons que les axes choisis pour l'étude des pratiques et les croisements d'analyses montrent de manière plus claire nos résultats vis-à-vis de notre problématique et de nos hypothèses.

6.2 Etude des habitats et des niches

Pour repérer, dans les progressions des enseignants, des habitats et des niches possibles pour les grandeurs dans les domaines numérique, géométrique, fonctions et grandeurs, nous avons mené une analyse globale des séances observées en nous plaçant aux différents niveaux de détermination mathématique domaines, secteurs et thèmes d'étude dans les classes de 6e et de 5e des enseignants M1 et M2. Cette étude nous permet d'identifier les dynamiques inter-domaines et intra-domaines relativement aux grandeurs dans les enseignements des professeurs observés.

6.3 Etude d'une dynamique inter-domaines

L'une des particularités importantes des grandeurs est qu'elles participent à la construction de divers domaines mathématiques dans l'enseignement. Or, nous avons vu que les changements épistémologiques dans les mathématiques et les diverses réformes éducatives ont diminué la présence des grandeurs dans l'enseignement, leur étude a été réduite à un travail sur leurs mesures. Aujourd'hui, la noosphère cherche à donner une place beaucoup plus importante aux grandeurs en tant qu'objet mathématique, mais elle demande encore que l'étude des différents domaines, géométrique et fonctionnel, s'appuie sur les grandeurs au collège.

À travers l'étude institutionnelle, nous avons pu observer une certaine stabilité de la place et du rôle des grandeurs en tant qu'outil d'enseignement à partir de 1995 dans les programmes et les manuels scolaires. Nous voulons donc savoir si cette stabilisation est présente dans les pratiques d'enseignement au collège. C'est pour ces raisons que nous menons une analyse de pratiques de deux professeurs en regardant la place et la fonction de grandeurs dans la construction d'autres domaines. L'étude des progressions nous a aidés à définir les dynamiques mises en place par les enseignants en nous conduisant vers l'étude d'une dynamique grandeurs-numérique-fonctions relativement à la proportionnalité.

6.4 Etude de la vie d'une espèce de grandeur

L'étude institutionnelle a révélé que l'apparition d'un nouveau domaine dans l'enseignement, celui des grandeurs, engendre des nouvelles conditions et contraintes à propos de leur étude. Ces nouvelles directives des programmes n'ont pas trouvé un équilibre dans les manuels scolaires, et nous faisons l'hypothèse qu'il en est sûrement de même dans les pratiques d'enseignement. Actuellement, le domaine de « Grandeurs et mesures » comporte des secteurs d'étude relatifs à chaque espèce de grandeur dans les programmes. Nous avons décidé d'examiner la vie d'une espèce de grandeur au collège. Nous avons ainsi choisi l'espèce de grandeur « aire » que nous étudions comme constituant principal du domaine des grandeurs.

Chapitre VI

Étude des pratiques : rapports personnels des élèves des classes observées

Dans cette partie, nous poursuivons notre travail en étudiant les rapports personnels des élèves aux grandeurs en lien avec nos analyses des pratiques. Il ne s'agit pas de faire une étude cognitive des connaissances des élèves, mais plutôt de chercher à savoir quelles sont les connaissances mobilisées par les élèves pour traiter différentes situations relatives aux grandeurs. Pour ce faire, nous rappelons que nous avons mis au point un test diagnostique au début de l'année scolaire 2010-2011 et un post-test à la fin de la même année scolaire dans les deux classes de sixième des professeurs M1 et M2. Nous essayons de proposer des exercices qui impliquent différents genres de tâches spécifiques de notre questionnement. Nos problèmes s'appuient sur les évaluations proposées par l'observatoire EVAPM. Nous souhaitons ainsi étudier les connaissances des élèves actuels tout en les mettant en lien avec les pratiques d'enseignement des professeurs observés.

1. Objet d'étude

1.1 Les objectifs

Nos objectifs spécifiques sont de caractériser les connaissances des élèves actuels et les comparer aux résultats de l'observatoire EVAMP. Pour atteindre nos objectifs, nous avons mené une étude statistique et qualitative pour essayer de repérer des régularités dans les connaissances et les difficultés des élèves. Nous étudions les résultats au niveau de chaque classe, nous comparons ces résultats au niveau des deux classes et avec les résultats obtenus par l'évaluation EVAPM. Ensuite, nous avons réalisé une analyse plus approfondie sur les rapports des élèves aux grandeurs en lien avec nos axes d'étude présentés à la fin du chapitre « méthodologie ».

Dans cette partie, nous préciserons, premièrement, notre choix d'exercices en nous appuyant sur des travaux antérieurs, notamment l'étude des programmes et les résultats de l'observatoire EVAPM. Nous présentons ensuite l'élaboration de deux tests : un test à la rentrée de l'année scolaire puis un test à la fin de l'année scolaire. Finalement, nous présenterons la méthodologie d'analyse et les premiers résultats en termes de taux de réussite et des techniques apparues lors des réponses des élèves. D'autres analyses seront exposées dans les chapitres VIII et IX pour mettre en lien les productions des élèves avec les pratiques des enseignants M1 et M2.

1.2 Nos premières questions

Comme nous l'avons vu dans l'étude institutionnelle, depuis 1995, on réintroduit le mot grandeur en se référant aux problèmes de la vie courante. Les grandeurs se retrouvent ainsi dans différents domaines dans les programmes de la période 1995-2005. Les programmes prescrivent d'étudier les grandeurs dans le cadre de la géométrie, mais aussi dans l'étude des fonctions. Nous avons vu que les grandeurs apparaissent ainsi de manière fragmentée dans divers secteurs. L'étude des programmes a montré la naissance d'un domaine « Grandeurs et mesure » en 2005. On a ainsi une restructuration des contenus au niveau du savoir à enseigner où les grandeurs forment un domaine pour elles-mêmes. Cependant, on peut penser que la création de ce domaine modifiera les rapports des élèves à l'objet grandeur, mais aussi à d'autres objets. Le travail que l'on peut observer dans les chapitres consacrés au domaine des grandeurs dans de nombreux de manuels scolaires actuels amène à nous questionner sur l'état des connaissances des élèves actuels au collège.

1.3 Les résultats de l'observatoire EVAPM

Suite aux changements des programmes de mathématiques du collège depuis la rentrée 1986-87, l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) organise une importante opération d'évaluation. L'observatoire d'ÉValuation des Programmes de Mathématiques, EVAPM, a comme objectif de suivre l'évolution des compétences des élèves selon le temps scolaire et les modifications successives des programmes.

La première étude EVAPM a été réalisée en 1987. Depuis cette année-là, on retrouve pour la classe de 6^{e} une évaluation en 1989, 1997, 2005 et 2008. Les exercices couvrent les programmes en vigueur en termes de contenus, mais aussi ils ont aussi été conçus pour permettre la comparaison avec les études antérieures. Pour comprendre le contexte de l'évaluation et son évolution, nous présentons le tableau ci-dessous qui expose le suivi de quelques indicateurs généraux d'EVAPM 1987 à 2008 :

	EVAPM 2008	EVAPM 2005	EVAPM 1997	EVAPM 1989	EVAPM 1987
Nombre d'élèves de 6e évalués		3500	3000		
Nombre de classes de 6e qui ont participé	105	160	1600		
Nombre moyen d'élèves par classe	25	24,68	24,8	24,6	24,3
Moyenne scolaire en mathématiques	13,10	12,86	11,81	11,58	

Tableau 6-1. Indicateurs EVAPM

Le plan d'évaluation de l'observatoire a été conçu pour permettre d'analyser divers types de résultats comme la réussite dans chaque domaine, en fonction de la complexité, en fonction des compétences, etc. L'un des premiers résultats intéressants pour nous est d'observer les analyses faites par l'observatoire EVAPM en relation avec les différents domaines. Dans le tableau suivant, nous avons indiqué le taux de réussite des élèves de 6e dans les passations de 2005 et 2008 :

	Sixième 2005		Sixième 2008	
	Nombres d'items	Pourcentage de réussite	Nombres d'items	Pourcentage de réussite
Tous items	132	38%	174	42%
Géométrie sauf espace	35	50%	28	49%
Géométrie	17	41%	30	41%
Nombres	10	40%	46	51%
Grandeurs	70	31%	70	35%

Tableau 6-2. Taux de réussite d'élèves de 6e par domaine

En général, on observe un équilibre entre les domaines. Cependant, le domaine « Grandeurs » a le taux de réussite le plus bas, cela peut être dû au fait que ce domaine comporte plus d'exercices. Ce tableau ne dit rien de précis sur les connaissances des élèves. Si nous supposons que l'évaluation correspond aux attentes des programmes, on pourrait dire que les élèves ont une meilleure performance pour traiter les exercices dans la plupart des domaines que dans le domaine des « *Grandeurs* ».

Des analyses plus profondes faites pour EVAPM révèlent les importantes difficultés qui subsistent dans le domaine de Grandeurs, notamment dans les conversions d'unités de mesure (APMEP, 2008). En 1989, l'évaluation EVAPM fait remarquer que dans les programmes les compétences concernant les aires et les volumes étaient uniquement d'ordre calculatoire. On retrouve les activités de dénombrement et de découpage dans les programmes de 1997, mais non sans difficultés. Les évaluations de 1989 et 1997 portant sur les mêmes compétences présentent une baisse dans le taux de réussite, par contre ce taux reste très varié pour de nouvelles compétences. En général, les exercices favorisant une procédure de comptage sont bien réussis par les élèves lorsqu'il y a peu d'unités à compter et si elles ne sont pas fractionnées.

Avec l'apparition d'un domaine Grandeurs dans les programmes de 2005, on pouvait espérer une meilleure réalisation des tâches concernant les grandeurs, mais les premiers résultats ne vont pas dans ce sens :

> « On pouvait donc s'attendre à un renforcement de la formation des élèves dans le curriculum et donc à des améliorations des résultats aux questions relevant de ce domaine. Il ne me semble guère que ce soit le cas au travers de quelques questions de notre enquête, notamment en ce qui concerne les changements d'unité ou conversions » (APMEP, 2008, p.220)

Apparemment, l'apparition des nouvelles compétences liées au traitement géométrique des grandeurs, et la réorganisation des programmes, donnant une place plus importante aux grandeurs, n'ont pas modifié l'efficacité des élèves dans la résolution des problèmes. Même si on peut avoir une idée générale de l'enseignement des grandeurs au collège, l'observatoire EVAPM ne révèle pas l'évolution des éléments techniques et technologiques présents dans les productions des élèves. En tant qu'étude essentiellement statistique, les rapports personnels des élèves aux objets mathématiques ne sont pas analysés de façon approfondie. En nous appuyant sur les exercices d'EVAPM, nous nous interrogeons sur ces éléments techniques et technologiques présents dans les réponses des élèves.

2. Conception et passation du pré-test et du post-test

Ces deux tests ont été réalisées au début et à la fin de l'année scolaire 2010-2011 dans les deux classes de 6^{e} des enseignants M1 et M2. Ils nous ont servi à repérer les connaissances chez les élèves à la rentrée du collège et leur évolution en classe de 6$^{e.}$

2.1 Conception du pré-test et du post-test

Les exercices ont été soumis à différentes analyses. Une première étude relative aux types de tâches nous a aidé à sélectionner un groupe de problèmes. Ils ont ensuite été caractérisés d'une manière générale, partie que nous avons appelée « analyse préalable ».

2.1.1 *Analyse préalable*

Nous avons choisi des problèmes liés aux grandeurs angle, longueur, aire, volume et aux notions de proportionnalité et d'agrandissement. Dans chacun de ces thèmes, nous avons retenu les exercices qui ont été posés en 6^{e} dans l'observatoire EVAPM. Finalement, nous avons classifié les exercices en termes de types de tâches. Cette sélection nous a conduit à garder 53 exercices. Dans un deuxième moment, nous avons analysé ces exercices selon 5 critères :

- genres de tâches de notre filtre des grandeurs (voir chapitre I) ;
- variables didactiques utilisées : types de nombres (entiers, décimaux ou fractions), espèce de grandeur (aire, longueur, etc.), nature des objets géométriques (rectangle, cube, etc.), les unités choisies (conventionnelle ou non conventionnelle, type d'unité conventionnelle)
- possibles difficultés ;
- caractéristiques informationnelles de l'énoncé : Nous repérons si l'énoncé donne la technique de résolution, les éléments mathématiques présents, les éléments visuels, etc ;
- connaissances nécessaires : Nous regardons si les connaissances supposées des élèves de 6^{e} leur permettent de résoudre la tâche.

Nous avons analysé exercice par exercice, selon les critères précédents, nous présentons une synthèse à l'aide d'un tableau dans l'annexe B. Parmi les exercices présents de l'observatoire EVAPM, nous avons retenu seulement les exercices qui relèvent des genres de tâches T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_4 ; T_6 parce qu'ils sont conformes aux programmes. Après cette analyse, nous avons choisi de garder, parmi les problèmes d'EVAPM, 8 problèmes pour le pré-test et 6 autres problèmes pour le post-test, dont certains d'entre eux ont été modifiés. Nous avons aussi ajouté un exercice repris de notre mémoire de master (Anwandter-Cuellar, 2008). Ils seront présentés dans les sections suivantes.

2.1.2 *Les problèmes du pré-test*

- Les genres de tâches retenus pour le pré-test

Ainsi nous avons décidé d'élaborer un test en prenant en compte les genres de tâches déjà cités. Le tableau suivant résume les types de tâches choisis et les questions EVAPM :

N° question dans le pré-test	Type de tâches	Genre de tâches de la typologie	N° de question EVAPM	Code d'épreuve EVAPM
1	Calculer l'aire d'une surface	T_2	311	EVAPM6-89-C
2	Calculer une masse	T_2	195	EVAPM6-89-Q
3	Calculer l'une des dimensions d'une surface en connaissant son aire et l'autre dimension	T_2	746	EVAPM6-89-P
4	Calculer une grandeur d'une surface après son agrandissement.	T_3	753	EVAPM6-89-P
5	Reporter des longueurs	T_4	357	EVAPM6-89-A ; EVAMP6-87-CEx ; EVAPM6-97-A
6	Changer d'unités de mesure	T_6	183	EVAPM6-89-A ; EVAMP6-89-D ; EVAPM6-97-A; EVAMP6-87-Dex
7	Dessiner une surface d'une aire donnée, dessiner une figure d'un périmètre donné	T_4	225 *(exercice modifié)*	EVAPM6-97-H
8	Comparer des aires et des périmètres	T_1	331	EVAPM6-97-U
9	Calculer le volume d'un solide	T_2	224 *(exercice modifié)*	EVAPM6-97-H

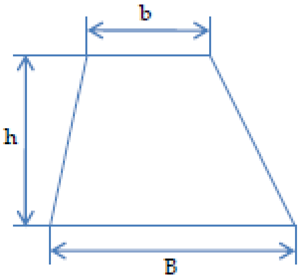
Tableau 6-3. Tâches retenues pour le pré-test

- Les énoncés du pré-test

Nous présentons ci-dessous les énoncés de ce test, dans l'annexe D on peut trouver le test donné aux élèves :

Problème 1

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule:



$$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze qui vérifie:
B=2,5 cm ; b=1,5 cm ; h=5 cm.

Figure 6-1. Problème 1 du pré-test

Problème 2

Jean a acheté pour 54 euros de terrine de foie gras. Le kilogramme de terrine de foie gras coûte 12 euros. Quelle masse de foie gras Jean a-t-il acheté?

Figure 6-2. Problème 2 du pré-test

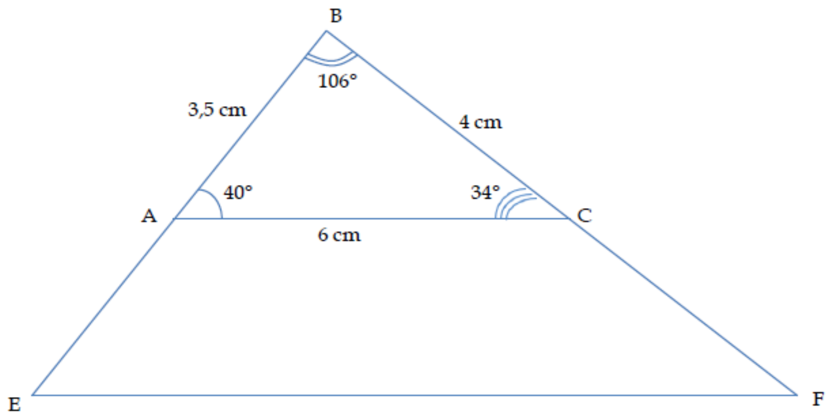
Problème 3

Un champ rectangulaire a une aire de 460 m^2. L'une de ses dimensions est de 23 m. Calcule l'autre dimension

Figure 6-3. Problème 3 du pré-test

Problème 4

On obtient le triangle EBF en doublant les longueurs des côtés du triangle ABC.



Indique dans le tableau ci-dessous les mesures (côtés et angles) du triangle EBF.

EB	BF	EF	E	B	F

Figure 6-4. Problème 4 du pré-test

Problème 5

Place le point N sur la droite (d) de telle manière que la distance MN soit égale à AB + BC + CA

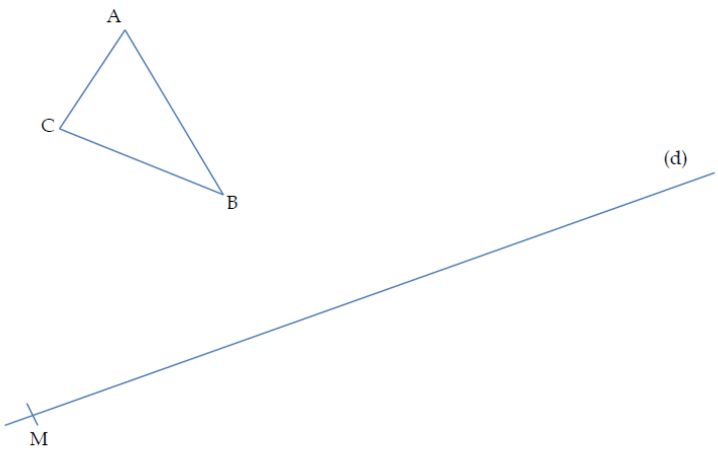


Figure 6-5. Problème 5 du pré-test

Problème 6

Compléter:

35,7 cm = _____________ m
8,56 m² = _____________ cm²

Figure 6-6. Problème 6 du pré-test

Problème 7

Sur le quadrillage ci-dessous, dessine une figure dont l'aire est de 5 unités-carrées et une autre dont le périmètre est de 10 unités-côtés

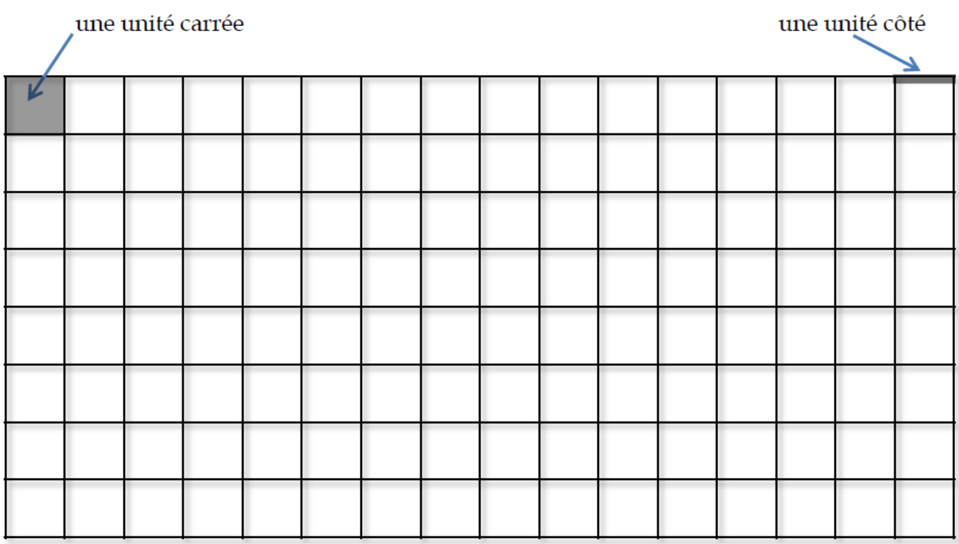
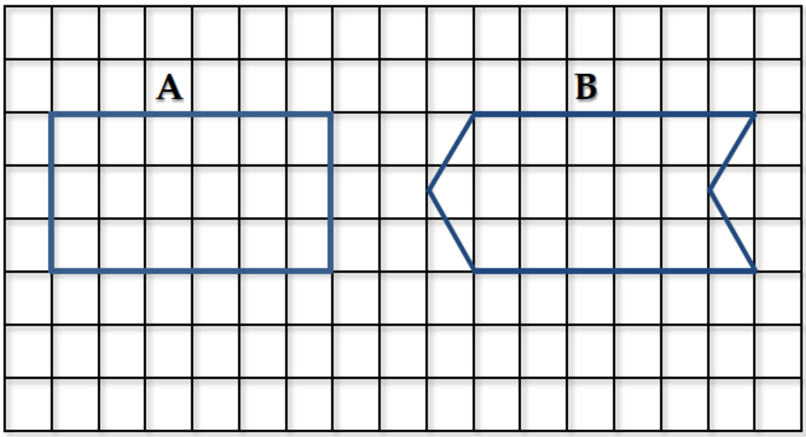


Figure 6-7. Problème 7 du pré-test

Problème 8

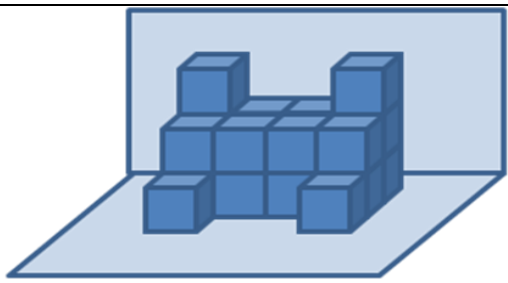
Observe les deux figures ci-dessous et réponde aux questions.



1. Comparer les aires des figures A et B. (Ont-elles la même aire? Laquelle a l'aire la plus grande? Laquelle a l'aire la plus petite?)
2. Comparer les périmètres des figures A et B. (Ont-elles le même périmètre? laquelle a le périmètre le plus grand? Laquelle a le périmètre le plus petit?)

Figure 6-8. Problème 8 du pré-test

Problème 9



Pierre a empilé des cubes en polystyrène contre un mur. Sachant qu'il n'y pas de trous dans la construction :

a) Combien de cubes a-t-il utilisé?

b) Si chaque cube a un volume de 8 dm^3. Quel est le volume de la construction?

Figure 6-9. Problème 9 du pré-test

2.1.3 *Les problèmes du post-test*

Pour ce deuxième test, nous avons pris en compte, comme pour le premier test, la typologie de genres de tâches relativement aux grandeurs et les programmes scolaires en vigueur. Mais nous avons ajouté de nouveaux éléments. Nous présentons maintenant les éléments pris en compte pour l'élaboration du deuxième test :

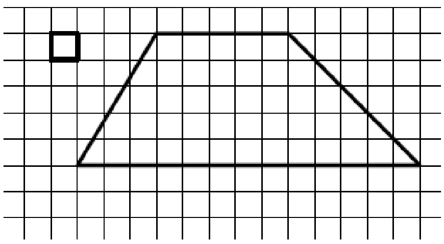
- Prise en compte des résultats du premier test

Premièrement, en regardant les résultats du premier test, nous avons pu constater que certains exercices ne révèlent pas entièrement les procédures et justifications des élèves. Par exemple, nous avons supprimé des types d'exercice comme le problème 5 du pré-test (figure 6-5). En effet, compte tenu que les élèves mesuraient avec une règle et/ou un rapporteur et ne marquaient que le point N, nous n'avons pas pu différencier les techniques qui utilisaient le premier ou le deuxième outil. Ainsi, pour le post-test nous avons choisi des problèmes avec des procédures de justification que les élèves doivent exprimer sur papier.

Deuxièmement, nous avons fait le choix de centrer les problèmes sur les grandeurs aires et périmètres qui correspondent davantage à nos objectifs. Par exemple, l'exercice noté « question 167 » (figure 6-10), nous aide à observer les procédures de découpage-recollement, de dénombrement d'unités et l'utilisation de la formule, que nous rattachons à différentes conceptions de l'aire :

APMEP–**Observatoire EVAPM**	**Thème**	**Âge : 11**	**Question 167**

Calcule l'aire de ce trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré.



Réponse

Figure 6-10. Exemple d'une question posée dans le post-test

- Les types de tâches retenus pour le post-test

Nous avons choisi une tâche relative à chaque genre de tâche de notre typologie. Ainsi, les six genres de tâches $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7$ sont représentés par un ou deux problèmes dans notre test. Le genre de tâches T_5 n'a pas été proposé, car nous n'avons pas trouvé ce genre dans l'observatoire EVAPM. Nous avons voulu que ces tâches soient en continuité avec les problèmes du pré-test. À la suite de l'analyse préalable, nous avons décidé de conserver 7 problèmes d'EVAMP :

N° question dans le post-test	Type de tâches	Genre de tâche de la typologie	N° de question EVAPM	Code d'épreuve EVAPM
1	Calculer l'aire d'une surface	T_2	167	EVAPM6-89-M, EVAPM6-97-M, EVAPM6-87-Bap
2	Changer d'unités de mesure de longueur	T_6	184	EVAPM6-89-D ; EVAPM6-87-DEx
3	Calculer un périmètre après une transformation géométrique	T_3	1109	EVAPM6-97-S
4	Calculer un prix	T_2	310	EVAPM6-89-C,
5	Comparer des périmètres, comparer des aires	T_1	1125	EVAPM6-97-T
6	Calculer une aire	T_2	186	EVAPM6-89-D, EVAPM6-97-U
7 *(Reprise d'un exercice du mémoire de master)*	Construire une figure d'une aire donnée	T_4	-	-

Tableau 6-4. Tâches retenues pour le post-test

- Les énoncés du post-test

Nous donnons maintenant les énoncés des exercices retenus pour le post-test. Dans l'annexe D, on peut voir le test complet :

Problème 1

Calcule l'aire de ce trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré. :

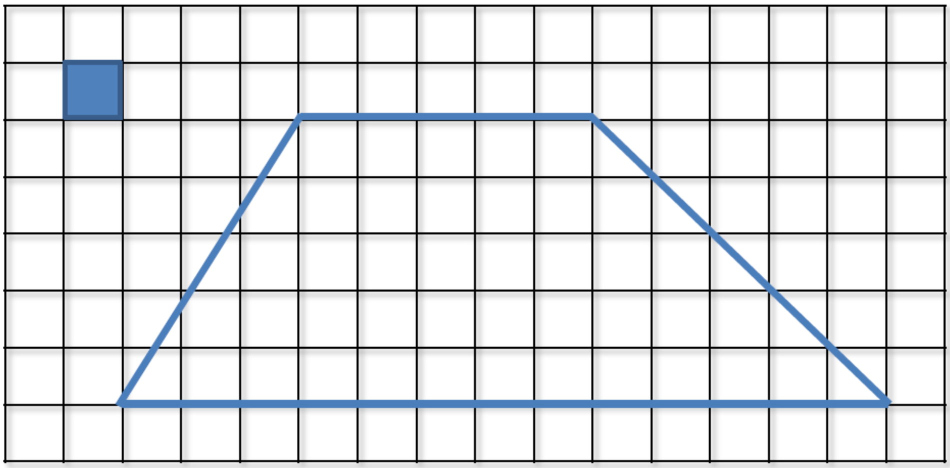


Figure 6-11. Problème 1 du post-test

Problème 2

Les dimensions d'une table rectangulaire sont 2,50 m et 0,96 m.

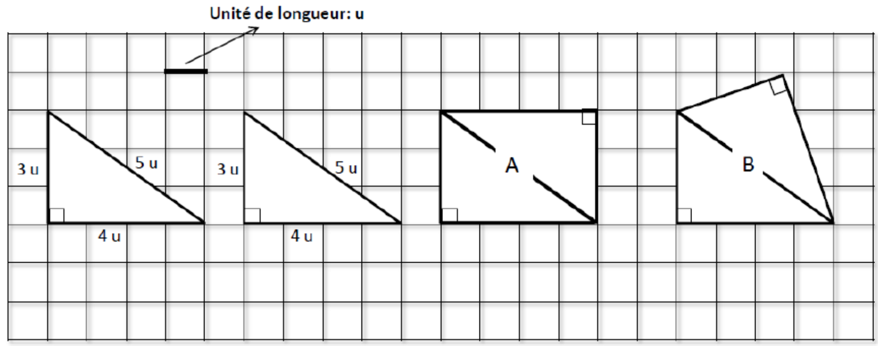
a) Quelles sont ses dimensions en cm ?

b) Quelle est son aire en dm^2?

Figure 6-12. Problème 2 du post-test

Problème 3

Pierre a réalisé deux assemblages différents A et B des deux pièces triangulaires, comme l'indique la figure ci-dessous.



Quel est le périmètre de chacun des assemblages A et B?

Figure 6-13. Problème 3 du post-test

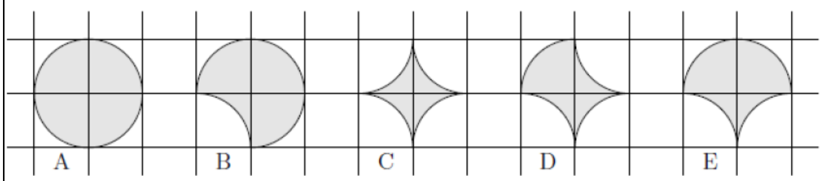
Problème 4

Un magasin de jouets fait une réduction de 15 % sur le prix des robots. Quel sera le prix d'un robot vendu initialement à 90 euros?

Figure 6-14. Problème 4 du post-test

Problème 5

Les figures ci-dessous ont été construites à l'aide d'un quadrillage à mailles carrées. Les contours de ces figures sont formés d'arcs de cercles de même rayon.



1) Compare les périmètres des figures A,B,C,D,E.
2) Range toutes ces figures de la plus petite aire à la plus grande.

Figure 6-15. Problème 5 du post-test

<u>Problème 6</u>

ABCD est un rectangle. Calculer l'aire de la partie hachurée.

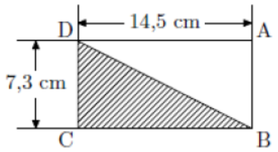


Figure 6-16. Problème 6 du post-test

<u>Problème 7</u>

Luc possède des petits carrés de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des rectangles d'aire 36 cm².

Dessine deux possibilités de rangement qui donnent des rectangles différents.

Figure 6-17. Problème 7 du post-test

2.2 Protocole de passation du pré-test

Dans cette partie, nous donnons quelques éléments relatifs à de la passation du pré-test dans les deux classes de 6e :

- La passation du test

Le pré-test a été réalisé au début de l'année scolaire 2010-2011. Dans la classe de 6e du professeur M1, il a été réalisé le 21 octobre 2010 et dans la classe de 6e du professeur M2 le 10 novembre 2010. Ceci signifie que les élèves devaient avoir comme connaissances préalables celles de la classe de CM2. Dans la classe du professeur M1, 26 élèves sur 30 ont passé le test et dans la classe du professeur M2 24 sur 27.

Le chercheur fait passer le pré-test et il observe les comportements des élèves et les questions posées par les élèves.

- Les conditions matérielles

Nous avons permis aux élèves d'utiliser la règle graduée pour produire les réponses. Ce choix est dû au fait que les élèves ont l'habitude de valider leurs procédures à l'aide des instruments conformément à l'esprit de l'école élémentaire. Mais aussi parce que nous souhaitons observer l'utilisation des instruments de mesure dans l'enseignement des grandeurs, ainsi nous avons autorisé le matériel suivant : un stylo, la règle graduée et l'équerre.

Nous laissons un espace dans la feuille du pré-test pour écrire les procédures et une petite place pour écrire les résultats selon le cas. Nous indiquons aux élèves de donner le maximum d'information sur cette feuille. Comme nous avons réduit dans la mesure du possible les erreurs de calcul sur les nombres, les élèves n'ont pas droit à la calculatrice.

- La durée

Nous avons fixé la durée de chaque exercice en prenant celui donné celui proposé par l'observatoire EVAPM. Nous pensons que ces durées sont adaptées aux élèves de 6e. Ainsi, le chercheur signale le moment du début et de la fin de chaque exercice. Les élèves n'ont pas le droit de revenir sur un exercice déjà traité. Éventuellement, pendant la passation, si le temps n'a pas été suffisant, le chercheur peut augmenter le temps prévu et il le note pour définir le temps du prochain test.

2.3 Protocole de passation du post-test

Ce deuxième test a été passé à la fin de l'année 2010-2011 dans chaque classe de 6e des professeurs M1 et M2.

- La passation du test

Dans la classe de 6e du professeur M1, le post-test a été réalisé le 1 juin 2011 et, dans la classe de 6e de du professeur M2, le 7 juin 2011. Les élèves avaient déjà travaillé les notions des périmètres et des aires, mais pas celle du volume. Dans la classe du professeur M1, 29 élèves sur 30 ont passé le test, et dans la classe du professeur M2, 27 sur 27.

- Les conditions matérielles et la durée

Nous avons repris les mêmes modalités de passation appliquées dans le pré-test relativement aux instruments, à la présentation des problèmes et au temps.

2.4 Plan de présentation des résultats

La méthode d'analyse a posteriori est constituée de trois parties. Premièrement, nous calculons les taux de réussite pour chaque problème dans les deux tests. Deuxièmement, nous analysons les techniques mises en place par les élèves. Troisièmement, nous mettons en lien les rapports personnels des élèves avec les pratiques des enseignants M1 et M2. Dans cette section, nous présentons seulement les résultats en comparant les taux de réussite des élèves pour un même test dans deux classes différentes et avec les résultats de l'observatoire

EVAPM. Nous présenterons les techniques et les pourcentages d'apparition de ces techniques dans la section suivante.

3. Le taux de réussite du pré-test

Nous présentons les types de réponses que nous considérons comme correctes pour le pré-test :

Problème	Types de réponses acceptées comme correctes
1	10 ou 10 cm²
2	4,5 ou 4,5 kg ou 4 kg et la moitié d'un kg, 4500 g
3	20 ou 20 m
4	Côtés : 7 cm, 8 cm, 12 cm Côtés : 7, 8, 12
	Angles : 40°, 106°, 34° Angles : 40, 106, 34
5	Longueur ±2mm
6	0,357
	85600
7	Figure bien dessinée et correcte
	Figure bien dessinée et correcte
8	Elles ont même aire
	B a plus grand périmètre que A
9	20 ou 20 cubes
	160 ou 160 cm³

Tableau 6-5. Réponses considérées comme correctes dans le pré-test pour calculer le taux de réussite

À partir de ces types de réponses, nous avons élaboré le tableau suivant contenant les taux de réussite de la classe du professeur M1, de la classe du professeur M2 et de l'observatoire EVAPM :

Problème	Type de tâches	Taux de réussite M1	Taux de réussite M2	Taux de réussite EVAPM[1]
1	Calculer l'aire d'une surface (trapèze)	61,54	62,5	57 (1989)
2	Calculer une masse	53,85	41,7	60 (1989)
3	Calculer l'une des dimensions d'une surface en connaissant son aire et l'autre dimension	46,15	8,3	47 (1989)
4a)	Calculer les longueurs des segments d'une surface après son agrandissement.	23,08	66,7	59 (1989)
4b)	Calculer les angles d'une surface après son agrandissement.	23,08	33,3	39 (1989)
5	Reporter des longueurs	76,92	75,0	68 (1989)
6a)	Changer d'unités de mesure de longueur	61,54	37,5	55 (1989)
6b)	Changer d'unités de mesure d'aire	65,38	16,7	48 (1989)
7a)	Dessiner une surface d'une aire donnée	88,46	95,8	-
7b)	Dessiner une figure d'un périmètre donné	46,15	66,7	-
8a)	Comparer des aires	42,31	83,3	66 (1997)
8b)	Comparer des périmètres	19,23	29,2	23 (1997)
9a)	Dénombrer des cubes	73,08	66,7	-
9b)	Calculer le volume d'un solide	76,92	54,2	-

Tableau 6-6. Taux de réussite du pré-test dans les classes des professeurs M1 et M2 et dans EVAPM

Comme nous l'avons dit, nous nous limitons dans cette partie à présenter les taux de réussite dans les deux classes et dans EVAPM, les techniques mises en place par les élèves seront présentées dans la section suivante.

3.1 Les différences entre les classes des professeurs M1 et M2

Pour les questions 1, 2, 4b), 5, 7a), 8b) et 9a) la différence de taux de réussite entre les classes des professeurs M1 et M2 est de moins de 15%. On peut considérer donc que les classes ont eu des performances semblables pour ces problèmes. Ici, nous nous intéressons plutôt aux différences importantes qu'on peut observer entre les classes de 6e des professeurs M1 et M2.

- Problème 3 : Calculer l'une des dimensions d'une surface en connaissant son aire et l'autre dimension

Dans le problème 3 du pré-test, nous avons donné l'aire d'un rectangle et la longueur d'un des côtés. Nous avons demandé aux élèves de calculer la longueur de l'autre côté. Le taux de réussite obtenu par la classe du professeur M1 est de 46% et celui obtenu par la classe du

[1] L'année de passation de l'épreuve est indiquée entre parenthèses

professeur M2 est de 8%. Si on compare ces résultats avec ceux de l'observatoire EVAMP, on s'aperçoit que les élèves de la classe du professeur M1 ont obtenu un taux de réussite très proche de celui d'EVAPM. Ainsi, il apparaît que la classe du professeur M2 a plus des difficultés à résoudre la tâche proposée que la classe du professeur M1. Cela peut s'interpréter de trois façons :

- soit les élèves ne maîtrisent pas la formule de calcul de l'aire du rectangle, même s'ils l'ont rencontrée à l'école élémentaire ;
- soit les élèves la connaissent, mais ils ne mettent pas en relation les longueurs des côtés avec la formule ;
- soit, les élèves ne savent pas comment calculer, le deuxième côté à l'aide de procédures arithmétiques ou algébriques.

▪ Problème 4a) : Calculer les longueurs des côtés d'une surface après son agrandissement

Dans l'exercice 4 a) concernant les longueurs des côtés du triangle, la classe de l'enseignant M2 a obtenu de meilleurs résultats que la classe de l'enseignant M1. En effet, le taux de réussite de la classe du professeur M2 est de 67% et celui de la classe du professeur M1 est de 23%. Les résultats des élèves du professeur M2 sont très proches des résultats de l'observatoire EVAPM. Ainsi, les élèves de la classe du professeur M1 montrent des difficultés à calculer des longueurs de côtés d'une surface après agrandissement.

▪ Problème 6 : Changer d'unités de mesure

Pour ce problème, on voit une grande différence entre les taux de réussite des classes des professeurs M1 et M2. On voit que le taux de réussite obtenu par la classe de l'enseignant M2 relativement aux changements d'unités de longueur et d'aire est bas, 36% et 17%. Dans l'observatoire EVAPM, on observe aussi de mauvais résultats. Le taux de réussite de 62% et de 65% de la classe de l'enseignant M1 s'explique par le fait que ces élèves viennent juste de travailler sur les changements d'unités. Il est donc nécessaire de regarder si ces bons résultats perdurent dans le temps.

▪ Problème 7b) : Dessiner une figure d'un périmètre donné

Les élèves ont obtenu de très bons résultats pour dessiner une surface d'aire donnée, mais pour dessiner une figure de périmètre donné les résultats ne sont pas également satisfaisants. La classe de l'enseignant M2 a obtenu de bons résultats avec un taux de réussite de 67%, mais dans la classe de l'enseignant M1 moins de moitié des élèves a réussi la tâche. Il apparaît que dans la classe du professeur M1 les élèves présentent quelques difficultés relativement à l'espèce de grandeur périmètre. De plus, dans les deux classes, les élèves montrent plus de difficultés pour traiter l'exercice concernant les périmètres que l'exercice relatif aux aires.

- Problème 8a) : Comparer des aires

Dans le problème 8a), on trouve la plus grande différence entre les deux classes. Le taux de réussite de la classe du professeur M2 est de 83% et celui de la classe du professeur M1 de 42%. Si on compare ces résultats avec ceux de l'observatoire EVAPM, on observe que les élèves de la classe du professeur M2 ont aussi obtenu de meilleurs résultats que l'observatoire et que la classe du professeur M1 présente des difficultés pour comparer des aires.

- Problème 9b) : Calculer le volume d'un solide

Dans ce problème de calcul d'une grandeur, la classe du professeur M1 a obtenu de meilleurs résultats que la classe du professeur M2. Le taux de réussite de la classe du professeur M1 est de 77% et celui de la classe du professeur M2 est de 54%.

3.2 Les difficultés trouvées dans les deux classes

En regardant les taux de réussite des classes des professeurs M1 et M2, on voit qu'il existe certaines différences entre les performances des élèves, mais il existe aussi des taux de réussite similaires. Dans cette partie, nous nous intéressons aux taux de réussite qui pourraient montrer des difficultés dans les deux classes.

- Problème 2 : Calculer une masse

Les taux de réussite des deux classes, celle du professeur M1 et celle du professeur M2, se trouvent autour de 50%. Cela montre que la moitié des élèves présentent des difficultés à calculer une masse en utilisant une division.

- Problème 4b) : Calculer les angles d'une surface après son agrandissement

Comme le montre l'observatoire EVAPM, les élèves ont tendance à penser qu'après un agrandissement les angles de la figure varient. On observe donc de très mauvais résultats dans les classes des professeurs M1 et M2 relativement au problème 4b). En effet, la classe du professeur M1 a obtenu un taux de réussite de 23% et la classe du professeur M2 un taux de réussite de 33%.

- Problème 8b) : Comparer des périmètres

Les taux de réussite montrent que la notion de périmètre pose des difficultés aux élèves de 6^{e}. Dans la classe de l'enseignant M2, les élèves n'ont pas présenté des problèmes pour comparer des aires, par contre le taux de réussite pour comparer des périmètres est très bas, il est de 29%. Les élèves de la classe de l'enseignant M1 ont aussi des difficultés à comparer des périmètres, ils ont obtenu un taux de réussite de 19%.

3.3 Les problèmes réussis par les élèves

Même si les élèves présentent certaines difficultés pour traiter des problèmes sur les grandeurs, il existe certains exercices qui ont été relativement bien abordés par les élèves.

- Problème 1 : Calculer l'aire d'une surface

Les élèves des deux classes ont obtenu des taux de réussite autour de 61%. Il apparaît alors que les élèves peuvent appliquer directement les formules pour calculer l'aire d'une surface.

- Problème 5 : Reporter de longueurs

On observe dans les deux classes de 6e, et aussi dans l'observatoire EVAPM que trois élèves sur 4 sont capables de reporter de longueurs. Cela peut s'expliquer par le fait que ce type de tâches est très travaillé à l'école élémentaire.

- Problème 9a) : Dénombrer des cubes

Pour le problème 9a), les élèves ont obtenu des taux de réussite autour de 70%. Ce résultat montre qu'en général les élèvent peuvent compter des cubes dans une configuration spatiale.

4. Les procédures et réponses du pré-test

Dans cette partie, nous présenterons les pourcentages relatifs aux techniques utilisées et/ou aux types de réponses données par les élèves pour chaque problème du pré-test. Nous rappelons que dans la classe du professeur M1 26 sur 30 ont passé le pré-test et dans la classe du professeur M2, 24 sur 27.

4.1 Le problème 1

Pour le problème 1(figure 6-1), nous avions deux objectifs :

- observer l'utilisation d'une formule par les élèves, non-étudiée auparavant, pour calculer l'aire d'une surface. Pour ces raisons, nous avons choisi comme surface le trapèze ;
- regarder l'utilisation des unités dans les procédures et réponses des élèves.

Pour le premier de ces objectifs, nous avons vu que plus de la moitié des élèves des deux classes peuvent appliquer une formule sans l'avoir étudiée auparavant et donnent une réponse correcte à cet exercice. Pour le deuxième de ces objectifs concernant la bonne gestion de l'unité, nous avons élaboré un tableau qui montre l'utilisation des unités dans les calculs et dans les réponses des élèves :

Types de calculs	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Calculs sans les unités et résultat en cm²	4	15	4	17
Calculs sans les unités et résultat en cm	7	27	7	29
Calculs sans les unités et résultat sans les unités	1	4	5	21
Calculs avec les unités et résultat en cm²	4	15	1	4
Calculs avec les unités et résultat en cm	5	19	4	17
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	5	19	3	13

Tableau 6-7. Type des calculs utilisés dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 1 du pré-test

Les traitements sur les unités sont très variés chez les élèves. La plupart des élèves des deux classes calculent sans les unités. Dans la classe du professeur M2, les élèves utilisent en général la technique dénommée « abstraite » par Chevallard et Bosch (2000-2001). Dans cette classe, 67% des élèves font les calculs sans les unités. Dans la classe du professeur M1, la moitié des élèves font les calculs sans les unités. Le calcul lui-même ne pose pas de problème en général pour les élèves, les difficultés apparaissent au niveau du traitement des unités quand elles sont utilisées ou dans les réponses des élèves. On voit ainsi que seulement 30% des élèves répondent avec la bonne unité de mesure dans la classe de l'enseignant M1 et 21% dans classe de l'enseignant M2, c'est-à-dire, en donnant une réponse en cm². Parmi les élèves qui ne donnent pas le cm² dans la réponse, presque la moitié des élèves des deux classes donnent comme unité le cm. Ainsi, presque la moitié des élèves ont des difficultés à donner la bonne unité de mesure dans leurs réponses, cela est peut-être dû au fait qu'ils ne les utilisent pas dans leurs calculs et rajoutent l'unité de mesure qui apparaît dans l'énoncé. La gestion de la bonne unité dans certains exercices sur les grandeurs est un problème pour les élèves en rentrant en classe de 6e, ce qui nous interpelle sur la compréhension des grandeurs en début du collège, notamment à propos de l'aire.

4.2 Le problème 2

Pour le problème 2 (figure 6-2), nous avons identifié plusieurs procédures utilisées par les élèves :

- Division numérique

Cas 1 : Les élèves posent la division euclidienne de 54 divisé par 12, et trouvent 4 comme quotient et 6 comme reste. Ils répondent en général 4,5 kg ou 4 kg.

Cas 2 : Les élèves posent la division décimale 54 divisé par 12, et obtiennent 4,5, ils répondent alors 4,5 kg.

- Calcul multiplicatif sur les nombres

Les élèves s'aperçoivent que 4 x 12 + 6 = 54, et que 6 est la moitié de 12. Ils concluent donc que Jean achète 4,5 kg.

- Calcul additif sur les nombres

Les élèves écrivent 12 + 12 + 12 + 12 + 6 = 54, Jean achète donc 4,5 kg.

- Calcul additif sur les grandeurs

Les élèves utilisent des raisonnements du type : 1 kg coûte 12 euros, dont 2 kg coûtent 24 euros, 3 kg 36 euros, 4 kg 48 euros et 0,5 kg coûtent 6 euros. De plus, 54 euros = 12 euros + 12 euros + 12 euros + 12 euros + 6 euros. Alors, Jean achète 4,5 kg.

- Calcul multiplicatif sur les grandeurs

Les élèves s'aperçoivent que 4 fois 12 euros est égal à 48 euros et que 6 euros est la moitié de 12 euros. Jean achète donc 4 kg plus 0,5 kg de fois gras, soit 4,5 kg. Les calculs sont du type 4 x 12 euros = 48 euros, 12 euros : 2 = 6 euros, alors la masse s'obtient par 4 kg + 0,5 kg = 4,5 kg.

- Calcul à l'aide d'un schéma

Les élèves posent le schéma $\begin{array}{cc} 1kg \rightarrow & 12euros \\ ? \rightarrow & 54euros \end{array}$, ensuite ils posent la division 54 : 12 = 4,5.

Le tableau 6-8 donne la répartition des procédures apparus selon le nombre d'élèves :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Division numérique	6	23	7	29
Multiplication numérique	7	27	7	29
Addition numérique	6	23	5	21
Addition sur les grandeurs	3	12	2	8
Multiplication sur les grandeurs	2	8	1	4
Calcul à l'aide d'un schéma	0	0	1	4
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	2	8	1	4

Tableau 6-8. Procédures utilisées dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 2 du pré-test

Par rapport au taux de réussite, nous avons vu que dans la classe du professeur M1 plus de la moitié des élèves (53%) ont bien résolu le problème de division. Les élèves qui ont eu des problèmes pour trouver le résultat n'ont pas bien interprété le reste 6 dans la division euclidienne. Dans la classe du professeur M2, 41% des élèves ont réussi à résoudre le problème. La plupart ont utilisé une technique correcte, mais un problème s'est posé dans le fait que 54 n'est pas un multiple de 12. Les interprétations du reste de la division entre 54 et 12 ont été très variées. Quelques élèves l'ont pris en compte et d'autres non.

Dans la classe du professeur M1 la plupart des procédures des élèves se placent dans une cadre numérique, plus de 70% d'entre eux ont abordé le problème sans utiliser les unités. Dans la classe du professeur M2, les unités ne sont pas toujours présentes dans les procédures des élèves. Dans cette classe, la plupart des élèves se placent dans un cadre numérique (79%). Parmi les élèves de deux classes, on ne trouve que deux élèves qui n'ont pas donné l'unité de masse dans la réponse. Ils travaillent ainsi sur les nombres pour ensuite ramener leur réponse au cadre des grandeurs et utilisent des calculs sur les nombres comme la division ou la multiplication sans spécifier les grandeurs.

4.3 Le problème 3

Dans le problème 3 (figure 6-3), les élèves doivent calculer la longueur d'un côté d'un rectangle en connaissant l'aire et la longueur de l'autre côté. Notre objectif est d'étudier la bonne association des différentes grandeurs présentes dans la formule de l'aire A=Lxl. Cependant, une grande quantité d'élèves semble utiliser d'autres formules pour leurs calculs. Dans le tableau 6-9, nous résumons les formules que nous avons déduites à l'aide des procédures des élèves, nous indiquons aussi la gestion des unités :

Formules et utilisation des unités	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Aire = Lxl sans les unités	7	29	2	8
Aire=L+l sans les unités	7	29	2	8
Aire/L=l sans les unités	5	21	0	0
Aire=2L+2l sans les unités	2	8	5	21
Aire=2Lx2l sans les unités	1	4	0	0
Aire/L=l avec les unités	1	4	1	4
Aire= L+4l	0	0	1	4
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	1	4	13	54

Tableau 6-9. Formules et unités utilisées dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 3 du pré-test

Nous rappelons que le taux de réussite de la classe du professeur M1 a été de 46% et celui de la classe du professeur M2 de 8%. Dans la classe du professeur M1, la formule d'aire d'un rectangle comme produit des mesures des longueurs de ses côtés est connue par la moitié des élèves. Mais, il existe une importante partie des élèves (41%) qui ont utilisé des formules non appropriées comme celles relatives au périmètre du rectangle. Dans la classe du professeur M2, les techniques et aussi les formules utilisées dans le problème sont très variées. De plus, 12% des élèves ont utilisé une formule correcte. Pour notre exercice, nous avons choisi le rectangle, car elle est une figure connue par les élèves, malgré cela la plupart des élèves ont utilisé une formule relative aux longueurs. Il apparaît ainsi que la confusion entre les grandeurs aire et périmètre est présente au début du collège.

4.4 Le problème 4

Dans ce problème (figure 6-4), les élèves ont résolu deux exercices. Ils devaient compléter un tableau avec les mesures des longueurs et des angles après l'agrandissement d'une figure. Parmi les réponses des élèves relatives aux longueurs, nous avons trouvé des élèves qui donnent les longueurs multipliées par le coefficient d'agrandissement, d'autres qui répondent en donnant les mesures multipliées par ce coefficient et d'autres qui ont mesuré la figure après agrandissement, ce qui les a amené à une réponse incorrecte. Les pourcentages concernant ces réponses sont présentés dans le tableau 6-10 :

Types de réponse	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Multiplication des longueurs	10	38	16	67
Multiplication des mesures	0	0	3	13
Mesurer avec la règle	13	50	2	8
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	3	12	3	13

Tableau 6-10. Types de réponse dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 4a) du pré-test

Pour les angles, certains élèves ont multiplié par le coefficient d'agrandissement et d'autres ont conservé les angles ou leurs mesures, comme on le voit dans le tableau ci-dessous :

Types de réponses	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Conservation des angles	7	27	8	33
Conservation des mesures	0	0	0	0
Multiplication des angles	7	27	9	38
Multiplication des mesures	0	0	1	4
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	12	46	6	25

Tableau 6-11. Types de réponse dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 4b) du pré-test

Dans la classe du professeur M2, les élèves n'ont pas eu beaucoup de difficulté pour les longueurs, 80% ont multiplié par le coefficient d'agrandissement. Par contre, dans la classe du professeur M1, 50% des élèves ont mesuré avec la règle pour trouver les mesures des longueurs après agrandissement. Pour les angles, on peut observer plus de difficultés que pour les longueurs, on ne trouve qu'un tiers des élèves qui ont conservé les angles ou leurs mesures dans les deux classes de 6$^{e.}$ Les résultats relatifs aux angles ne sont pas surprenants compte tenu de la nouveauté de cette notion.

4.5 Le problème 5

Nous avons envisagé deux techniques pour la résolution du problème 5 :

- le report de la longueur à l'aide d'un compas
- la mesure et l'ajout des longueurs

Nous avons rencontré des difficultés pour repérer les techniques utilisées par les élèves dans la classe du professeur M2 pour le problème 5 (figure 6-5). Dans la classe du professeur M1, l'addition des mesures des longueurs a permis de voir si les élèves utilisaient une procédure de mesurage. Nous avons élaboré le tableau 6-12, mais beaucoup de procédures n'ont pas pu être repérées :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Reporter des longueurs	0	0	2	8
Mesurer des longueurs	21	81	7	29
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	5	19	15	63

Tableau 6-12. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 5 du pré-test

À partir de taux de réussite, autour de 75% pour les deux classes, nous pouvons dire que les élèves utilisent sans difficulté la propriété additive de la mesure au niveau des longueurs.

4.6 Le problème 6

Le problème 6 (figure 6-6) est composé de deux parties. Dans la partie a) les élèves doivent changer d'unité de mesure de longueur. Pour ce faire ils ont utilisé trois techniques :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Tableau d'unités longueur	20	77	14	58
Déplacement de la virgule	3	12	6	25
Quatrième proportionnelle	0	0	1	4
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	3	12	3	13

Tableau 6-13. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 6a) du pré-test

On voit que la technique la plus utilisée a été le tableau de conversion d'unités de longueur dans les deux classes de 6^{e}, mais la classe du professeur M1 a eu une meilleure performance que la classe du professeur M2 comme l'a montré le taux de réussite de 62% dans la classe du professeur M1 et de 38% dans la classe du professeur M2. Ainsi, on voit que les élèves emploient plutôt le tableau pour faire des conversions au début de la classe de 6^{e}.

Nous avons demandé aux élèves dans la partie b) de convertir des unités d'aire. Ils ont utilisé les techniques suivantes :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Tableau d'unités longueur	6	23	8	33
Tableau d'unités aires	12	46	4	17
Déplacement de la virgule	3	12	7	29
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	5	19	5	21

Tableau 6-14. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 6b) du pré-test

Pour les conversions d'unités d'aire le taux de réussite (17%) a été inférieur à celui de longueurs dans la classe de 6e du professeur M2, par contre dans la classe du professeur M1, il a été similaire (65%) à celui des aires. Cependant, la classe de l'enseignant M1 vient juste de travailler sur les changements d'unités. En général, les élèves de deux classes se servent d'un tableau de conversion, mais cette utilisation n'est pas toujours adéquate. En effet, un tiers des élèves ont utilisé un tableau de conversion de longueurs à la place de celui des aires.

4.7 Le problème 7

Le problème 7 (figure 6-7) comporte deux parties. Dans la première partie, les élèves doivent dessiner une surface d'une aire donnée, et dans la deuxième, ils doivent dessiner une figure d'un périmètre donné. Comme le problème était présenté sur un quadrillage, les élèves ont été amenés à faire des comptages des carreaux ou des côtés d'un carré.

Notre objectif a été de repérer une conception de l'aire d'une surface comme la quantité d'unités nécessaires pour la recouvrir. De même pour le périmètre d'une figure, une conception comme étant la longueur de son contour. Même si les élèves de la classe du professeur M1 n'ont pas rencontré de grandes difficultés (89% de taux de réussite) pour dessiner une figure d'une aire donnée, il existe un grand écart au niveau des performances des élèves pour dessiner une figure d'un périmètre donné, le taux de réussite pour le périmètre est de l'ordre de 50%.

Dans la classe du professeur M2, presque tous les élèves savent construire une aire par comptage de carreaux (96% de taux de réussite). Pour le périmètre, les élèves savent dessiner une figure d'un périmètre donnée (68% de taux de réussite), mais il existe encore quelques difficultés pour sa construction, notamment au niveau du concept de figure plane, les élèves dessinent par exemple des lignes non-fermées.

Par rapport à la différenciation entre aire et périmètre, nous n'avons pas repéré de grandes difficultés, seul un élève de la classe du professeur M2 a construit une surface d'aire 10 unités-carrés à la place d'une figure de périmètre 10 unités-côtés. Cela peut s'expliquer par la présence du quadrillage. On obtient ainsi des résultats bien différents par rapport au problème 3, où un problème de différentiation est apparu au niveau des formules de calcul.

4.8 Le problème 8

Dans le problème 8 (figure 6-8), les élèves ont comparé des aires et des périmètres de deux figures A et B. Comme nous l'avons vu, le taux de réussite pour l'exercice relatif aux aires à été de 42% dans la classe du professeur M1 et de 83% dans la classe du professeur M2. Pour comparer des aires, les élèves des classes des professeurs M1 et M2 ont utilisé les techniques suivantes :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Découpage-recollement et ensuite comptage d'unités	3	12	2	8
Comptage petits carrés	10	38	8	33
Mesure des côtés	4	15	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	9	35	14	58

Tableau 6-15. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 8a) du pré-test

On note qu'en général les élèves des classes des professeurs M1 et M2 ont utilisé les mêmes techniques pour comparer des aires. Une différence se trouve dans le fait que certains élèves (15%) de la classe du professeur M1 restent attachés à des procédures de mesurage, procédures représentatives de l'école élémentaire. Le problème 8a) ne nous a pas permis de repérer toutes les techniques mises en place par les élèves du fait, qu'en classe de 6^{e}, certains élèves réalisent les découpages et recollements mentalement. Ainsi, nous avons obtenu un taux important de pourcentage pour l'item « pas de technique repérée ». C'est le cas aussi pour le problème 8b). Pour ce problème, les élèves ont obtenu un taux de réussite de 19% dans la classe du professeur M1 et de 29 % dans la classe du professeur M2 :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Comptage petits côtés	2	8	2	8
Mesurer les côtés	8	31	5	21
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	16	62	17	71

Tableau 6-16. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 8b) du pré-test

Ce tableau nous montre une augmentation des taux de pourcentage pour des techniques relatives au mesurage. La difficulté rencontrée par les élèves pour la comparaison des périmètres les a amené à mesurer les côtés de la figure.

À travers ces deux exercices, nous n'avons pas pu repérer toutes les procédures utilisées par les élèves, cependant les taux de réussite nous montrent que les élèves de la classe du professeur M1 n'ont pas une bonne performance pour comparer des aires ni des périmètres. Et que ceux de la classe du professeur M2 peuvent comparer aisément des aires, mais ils ont des difficultés pour comparer des périmètres. Cela est peut être dû au fait que pour les aires la procédure la plus performante était de faire un recollement et ensuite un dénombrement d'unités. En effet, la figure B était composée des unités entières et aussi des sous-unités fractionnaires, ce qui rend le comptage plus difficile. Dans le cas de périmètres, il s'agissait de compter les côtés de carrés, mais aussi des triangles, ce qui complique la comparaison de ces périmètres.

4.9 Le problème 9

On observe que dans la première partie de l'exercice 9 (figure 6-9) les élèves utilisent la même technique, elle est en fait la seule technique possible amenant à une réponse correcte. Pour résoudre le problème, les élèves comptent la quantité de cubes de l'empilement. Environ 70% des élèves de deux classes comptent de manière exacte les cubes. Parmi les réponses erronées, nous notons qu'ils rencontrent quelques difficultés dans la perception de l'espace, certains ne comptent pas les cubes qui ne se voient pas directement sur l'empilement.

Ensuite, pour calculer le volume, les élèves multiplient le volume d'un cube pour la quantité des cubes, ils obtiennent ainsi le volume de l'empilement. La propriété d'additivité de la mesure du volume est bien intégrée dans les connaissances des élèves. Nous avons différencié dans notre tableau les élèves qui utilisent les unités et ceux qui ne les utilisent pas :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	**%**	**Nombre d'élèves**	**%**
Multiplication de la quantité de cubes par volume d'un cube avec les unités	1	4	1	4
Multiplication de la quantité de cubes par volume d'un cube sans les unités	19	73	10	42
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	6	23	13	54

Tableau 6-17. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 9b) du pré-test

Tout d'abord, nous rappelons que le taux de réussite dans la classe du professeur M1 a été de 77 % et dans la classe du professeur M2 de 54 %. Dans les deux classes, la plupart des élèves n'utilisent pas les unités pour faire les calculs, mais dans leurs réponses ils donnent la bonne unité de volume. Cela représente une différence avec l'espèce de la grandeur aire, en effet pour cette grandeur les élèves ont répondu en donnant souvent des unités erronées. Cependant, l'unité de volume était bien indiquée dans le problème.

4.10 Bilan du pré-test

À travers cette deuxième analyse, nous voulions observer les techniques et les types de réponses relatives aux problèmes du pré-test. Nous pouvons résumer ces résultats de la manière suivante :

a) En ce qui concerne la place des unités dans les calculs, nous avons observé que les unités sont absentes des calculs proposés par les élèves. Cela n'a rien de nouveau, car l'introduction des unités dans les calculs est l'une des nouvelles directives institutionnelles des programmes de 2005. Néanmoins, certaines différences apparaissent selon l'objet mathématique étudié. En effet, nous avons remarqué que pour le problème de division et le problème de volume, la plupart des élèves ont donné la bonne unité dans leurs réponses, par contre, pour les problèmes sur les aires les élèves donnent des unités erronées. Cependant, cette différence peut être nuancée compte tenu que les unités étaient explicitées dans les énoncés concernant la division et le volume.

b) En ce qui concerne les constructions géométriques, les élèves n'ont pas présenté de difficultés pour reporter une longueur. En général, ils ont bien multiplié les longueurs par le coefficient de proportionnalité dans une situation d'agrandissement. Par contre, environ un tiers des élèves ont aussi multiplié les angles par ce coefficient, ce qui nous montre une mauvaise compréhension intuitive de la notion d'angle.

c) Par rapport à la comparaison des grandeurs, les élèves des deux classes n'ont pas eu les mêmes résultats relativement aux aires. Même si les élèves mettent en place les mêmes techniques, la classe de l'enseignant M1 a obtenu un taux de réussite inférieur à celui de la classe de l'enseignant M2. A ce moment des observations, il est difficile pour nous d'avancer des explications par rapport à cette différence. Pour les périmètres, les deux classes n'ont pas eu une très bonne performance.

d) Pour les conversions d'unités de mesure, le tableau de conversion est le support de la technique la plus utilisée. Cependant, la conversion d'unités de longueur donne des meilleurs résultats que celle sur les unités d'aire.

e) Les résultats montrent que les élèves n'ont pas de difficultés pour dessiner une surface d'aire donnée. En revanche, certains élèves dessinent des lignes et non pas des figures planes quand on leur demande de dessiner une figure d'un périmètre donné. Ainsi, la notion de périmètre d'une figure ne semble pas acquise pour quelques élèves.

f) En ce qui concerne les formules, des confusions existent entre les formules d'aire et de périmètre. Pour calculer l'aire d'un rectangle ou pour raisonner sur une telle aire, les élèves ont utilisé des formules comme 2L+2l ou L+l.

5. Le taux de réussite du post-test

Avant de présenter les taux de réussite du post-test, nous précisons les réponses que nous avons considérées comme correctes pour calculer ces taux :

Problème	Type de réponse acceptée comme correcte
1	45 ou 45 □
2	250 ou 250 cm ; 96 ou 96 cm
	240 ou 240 dm²
3	14 ou 14 u
	14 ou 14 u
4	76,5 ou 76,5 euros
5	Même périmètre
	C, D, E, B, A
6	59,925 ou 59,925 cm ou 59,925 cm²
7	Dessin à main levée en indiquant les mesures des côtés ou avec les bonnes mesures
	3 ou 3 cm

Tableau 6-18. Réponses considérées comme correctes dans le post-test pour calculer le taux de réussite

En tenant en compte de ces réponses, nous avons obtenu les résultats suivants en termes de taux de réussite :

Problème	Type de tâche	Taux de réussite M1	Taux de réussite M2	Taux de réussite EVAPM[1]
1	Calculer l'aire d'une surface (trapèze)	13,8	50	21 (1987) 14 (1989) 19 (1997)
2a)	Changer d'unité de longueur	58,6	66,7	62 (1987) 65 (1989)
2b)	Donner une aire dans une autre unité de mesure	17,2	16,7	-
3a)	Calculer le périmètre d'une surface	41,4	75	41 (1997)
3b)	Calculer le périmètre d'une surface	41,4	58,3	
4	Calculer un prix	44,8	33,3	21 (1989)
5a)	Comparer des périmètres	20,7	45,8	25 (1997)
5b)	Comparer des aires	72,4	79,2	18 (1997)
6	Calculer l'aire d'une surface usuelle	31	87,5	43 (1989) 40 (1997)
7	Dessiner un rectangle d'une aire donnée	24,1	54,2	-

Tableau 6-19. Taux de réussite du post-test dans les classes des professeurs M1 et M2 et dans EVAPM

5.1 Les différences entre les classes des professeurs M1 et M2

- Problème 1) : Calculer l'aire d'une surface

La surface du problème 1 est présentée sur un quadrillage. En regardant le tableau 6-19, on s'aperçoit que celui de la classe du professeur M2 a une meilleure performance que la classe du professeur M1 et que les élèves de l'observatoire EVAPM. Cependant, les taux de réussite sont très bas dans les deux classes.

- Problème 3) : Calculer le périmètre d'une surface

La classe du professeur M2 a obtenu un taux de réussite plus élevé que ceux de la classe de l'enseignant M1 et de l'observatoire EVAPM. En effet, le taux de réussite de la classe du professeur M2 est de 75%, celui de la classe du professeur M1 et de l'observatoire EVAPM de 41%. Cela peut s'expliquer par le fait que la classe de l'enseignant M2 a travaillé les aires et les périmètres juste avant de passer le test.

- Problème 5a) : Comparer des périmètres

La classe du professeur M2 a obtenu un taux de réussite plus élevé que celui de la classe du professeur M1 et celui de l'observatoire EVAPM. Cependant, les résultats concernant la comparaison des périmètres sont très bas. Ils peuvent s'expliquer par le fait qu'il s'agit de comparer les périmètres des arcs des cercles. La notion de périmètre apparaît comme l'une des notions qui présente le plus de difficultés pour les élèves.

- Problème 6 : Calculer l'aire d'une surface usuelle

Dans ce problème, nous avons demandé aux élèves de calculer l'aire d'un triangle. Presque tous les élèves de la classe de l'enseignant M2 ont réussi l'exercice, par contre, dans la classe de l'enseignant M1 seulement 31% des élèves ont donné une réponse correcte.

- Problème 7 : Dessiner un rectangle d'une aire donnée

En regardant le tableau 6-19, on peut remarquer, avec un taux de réussite de 54%, que les élèves de la classe du professeur M2 ont mieux réussi le problème 7 que les élèves de la classe du professeur M1. Cependant, nous rappelons que la classe du professeur M1 n'a pas encore travaillé les aires au moment de la passation du post-test.

5.2 Les difficultés trouvées dans les deux classes

- Problème 2b) : Donner une aire dans une autre unité de mesure

Au moment de la passation du post-test les deux classes ont travaillé sur les changements d'unités d'aire. La classe de l'enseignant M1 a étudié ce type de tâches au début de l'année scolaire et la classe de l'enseignant M2 l'a étudié juste avant la passation. Néanmoins, les deux classes ont eu de très mauvais résultats dans le problème 2b).

- Problème 4 : Calculer un prix

Dans le problème 4, les élèves doivent appliquer un taux de pourcentage dans une situation de réduction de prix. Le problème ne demande pas d'appliquer directement un taux de pourcentage, c'est aux élèves à trouver la technique correcte dans cette situation, ce qui peut expliquer les mauvais résultats obtenus par les deux classes.

5.3 Les problèmes réussis par les élèves

- Problème 2a) : Changer d'unité de longueur

La plupart des élèves présentent des difficultés pour faire des changements d'unités d'aire, par contre les changements d'unités de longueur sont beaucoup mieux réussis avec un taux de réussite pour les deux classes qui est de 60%. Ce résultat est très proche de celui obtenu par l'observatoire EVAPM.

- Problème 5b) : Comparer des aires

Pour le type de tâches « comparer des aires », la classe du professeur M1 a obtenu un taux de réussite de 72% et la classe du professeur M2 un taux de 79%. Ainsi, les élèves de ces classes de 6^{e} ne montrent pas de véritables difficultés dans ce type de problèmes.

6. Les procédures et réponses du post-test

Dans cette partie, nous présenterons les pourcentages relatifs aux techniques utilisées ou aux types de réponses données par les élèves pour chaque problème du post-test. Comme nous l'avons dit, 24 élèves sur 27 ont passé le post-test dans la classe du professeur M1 et 27 sur 27 dans la classe du professeur M2.

6.1 Le problème 1

Dans le problème 1 (figure 6-11), il s'agissait de calculer l'aire d'une surface dessinée sur du papier quadrillé. La difficulté se trouvait dans le fait que la surface était un trapèze, surface non-étudiée par les élèves en classe de 6^{e}, et que les unités à compter étaient non-entières. Nous avons ainsi relevé les techniques suivantes pour ce problème :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Dénombrement	19	66	11	46
Utilisation des formules d'aire après décomposition de la figure en deux triangles et un carré	1	3	7	29
Dénombrement et utilisation des formules d'aire après décomposition de la figure en deux triangles et un carré	0	0	3	13
Calcul du périmètre du trapèze et non pas de l'aire	2	7	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	6	21	3	13

Tableau 6-20. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 1 du post-test

On observe qu'environ deux tiers de la classe du professeur M1 ont fait un dénombrement de carreaux du quadrillage. Dans la classe du professeur M2, on trouve 46% des élèves qui ont utilisé cette technique. La difficulté était que les unités étaient non-entières, ainsi les élèves devaient compter des demi-unités et des sous-unités fractionnaires, ce qui a amené souvent à un comptage erroné.

On voit aussi que dans la classe du professeur M2, 42% des élèves se sont servis des formules de calcul d'aire après décomposition de la figure, par contre dans la classe du professeur M1, un seul élève a employé une formule. Cela peut s'expliquer par le fait que la classe du professeur M1 n'avait pas encore travaillé les aires au moment de la passation du post-test. Ainsi, le meilleur taux de réussite de la classe de l'enseignant M2 peut sûrement s'expliquer, les élèves de cette classe ont utilisé une technique plus efficace que les élèves de la classe de l'enseignant M1.

6.2 Le problème 2

Dans le problème 2 (figure 6-12), il s'agit de faire des changements d'unités de longueurs et d'aires. Pour les changements d'unités de longueur, les élèves n'ont pas trouvé des grandes difficultés (autour de 60% de taux de réussite), ils ont utilisé les techniques suivantes :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Déplacement de la virgule	4	13,8	3	12,5
Utilisation du tableau de conversion des unités de longueur	8	27,6	10	41,7
Utilisation du tableau de conversion des unités d'aire	0	0	2	8,3
Calcul du périmètre de la table, c'est-à-dire, calcul 2L+2l	0	0	1	4,2
Utilisation du tableau de conversion des unités de longueur après avoir calculé le périmètre de la table	0	0	1	4,2
Multiplication par 10	1	3,4	0	0
Multiplication par 100	7	24,1	0	0
Utilisation du tableau de conversion des unités de longueur après avoir calculé l'aire de la table (Lxl)	1	3,4	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	8	27,6	7	29,2

Tableau 6-21. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 2a) du post-test

On voit que les procédures sont très variées, mais il existe deux techniques principales : le déplacement de la virgule et l'utilisation d'un tableau de conversion. Cependant, comme les élèves devaient convertir les longueurs d'une table, certains d'entre eux ont compris qu'ils devaient calculer le périmètre de la table. De même manière que dans le pré-test, la technique la plus utilisée a été le tableau de conversion d'unités de longueur dans les deux classes de 6e.

Le problème 2b) est composé de deux tâches, calculer l'aire de la table et convertir l'unité d'unités (longueur ou aire). Nous avons regroupé les techniques selon certaines caractéristiques :

- des techniques qui utilisent la formule de l'aire de la table, c'est-à-dire, les élèves multiplient les longueurs des côtés ;
- des techniques de calcul d'aire, mais qui utilisent des formules correspondantes à un calcul des périmètres ;
- des techniques, où les élèves assimilent les unités de longueur à des unités d'aire.

Les deux derniers types de techniques conduisent à des réponses erronées.

De plus, les élèves pouvaient répondre au problème avec deux stratégies de démarche. Ils pouvaient d'abord calculer l'aire de la table et après convertir l'unité d'aire, ou bien, ils pouvaient aussi commencer par convertir les longueurs de la table et ensuite calculer l'aire de la table. Nous avons réuni les techniques dans le tableau suivant où nous avons marqué en italique celles qui conduisent à des réponses erronées et en gras le nombre d'élèves qui ont obtenu des réponses correctes :

Type de technique	**Sous-type de technique**	**Technique en relation avec la sous-technique**	**Nombre d'élèves classe M2**	**Nombre d'élèves classe M1**
Utilisation de la formule d'aire Lxl	Conversion de l'unité de longueur ($m \rightarrow dm$) et ensuite utilisation de la formule Lxl	*Conversion des unités de longueur avec le tableau d'aire*	1	0
		Conversion des unités de longueur avec le tableau de longueur	1	1
		Conversion des unités de longueur en multipliant par 10	0	**3**
		Conversion des unités en déplaçant la virgule	0	**1**
		Conversion des unités de longueur avec une procédure non-identifiée	**3**	**1**+1
	Utilisation de la formule Lxl et ensuite conversion de l'unité d'aire ($m^2 \rightarrow dm^2$)	*Conversion des unités d'aire ($m^2 \rightarrow dm^2$) en divisant par 100*	1	0
		Conversion les unités d'aire en multipliant par 10	0	1
		Conversion des unités d'aire avec une procédure non-identifiée	**1**	2
	Multiplication Lxl sans conversion	Pas de conversion	3	0
Utilisation des formules relatives au périmètre	*Conversion de l'unité de longueur ($m \rightarrow dm$) et ensuite utilisation des formules relatives au périmètre*	*Conversion des unités de longueur avec le tableau d'aire*	1	0
		Conversion des unités de longueur avec le tableau de	1	0

		longueur		
		Conversion des unités de longueur en multipliant par 10	0	1
		Conversion des unités de longueur avec une procédure non-identifiée	1	0
	Utilisation des formules relatives au périmètre et ensuite conversion de l'unité d'aire	Conversion des unités de longueur avec le tableau d'aire *($m=m^2 \rightarrow dm^2$)*	1	1
Conversion des unités de longueur à des unités d'aire ($m=m^2 \rightarrow dm^2$)		*Conversion en utilisant le tableau d'aire*	3	1
		Conversion en utilisant le tableau de longueur	0	1
		Conversion en multipliant par 100	0	1
Pas de technique repérée ou exercice pas traité			7	14

Tableau 6-22. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 2b) du post-test

On voit que la plupart des élèves qui ont donné une réponse correcte ont d'abord converti les unités des longueurs de la table et ensuite ils ont calculé son aire. Au moment de la passation du post-test, les deux classes de 6e ont travaillé les conversions d'unités d'aire et de longueur, malgré cela de fortes difficultés persistent pour les conversions d'unités d'aire.

6.3 Le problème 3

Dans le problème 3 (figure 6-13), les élèves devaient calculer les périmètres de deux quadrilatères composés chacun de deux triangles égaux. Ces figures ont été présentées sur du papier quadrillé. Pour les deux figures, chaque élève a utilisé la même technique. Le tableau 6-23 présente la répartition des types de techniques :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Somme de longueurs du rectangle	13	44,83	16	66,67
Calcul (4x2+2x2)	1	3,45	0	0
2 fois aire du triangle	1	3,45	0	0
Aire du rectangle	2	6,90	0	0
2 fois le périmètre du triangle	4	13,79	2	8,33
Somme (3+4+5)	1	3,45	2	8,33
Somme des longueurs des quadrilatères A et B après mesurage	3	10,34	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	4	13,79	4	16,67

Tableau 6-23. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 3 du post-test

Au moment de la passation du post-test, les deux classes de 6e ont travaillé sur les périmètres. Cependant la classe de l'enseignant M2 montre des meilleurs résultats dans l'exercice 3 que la classe de l'enseignant M1. Deux tiers des élèves de la classe du professeur M2 ont donné une réponse correcte en additionnant les longueurs des côtés de chaque quadrilatère. Dans la classe de l'enseignant M1, on trouve une plus grande diversité de techniques. De plus, moins de la moitié des élèves de la classe du professeur M2 ont bien traité la tâche. Certains élèves ont calculé les aires à la place de périmètres et d'autres ont mesuré les côtés avec la règle graduée pour trouver les périmètres. Nous considérons que l'exercice 3 est relativement facile. Cependant, 50% des élèves de cette classe montrent de difficultés relatives à la notion de périmètre. En outre, dans les deux classes, des élèves ont compté les mesures des diagonales des rectangles pour calculer les périmètres.

Dans les deux classes, la notion de périmètre a été traitée dans le mois précédent, mais certaines difficultés persistent par rapport à cette notion.

6.4 Le problème 4

On a vu que dans le problème 4 (figure 6-14) les deux classes ont obtenu un taux de réussite d'environ 40%. Dans ce problème, les élèves devaient calculer le prix d'un objet après réduction. Pour ce faire, ils ont utilisé les techniques suivantes :

Techniques selon le type de calcul	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
- Calcul de la réduction : Addition du 10% de 90 plus le 5% de 90, c'est-à-dire 9+4,5=13,5 - Soustraction de la réduction au prix initial : 90 moins 13,5, soit 76,5	11	37,93	5	20,83
- Calcul de la réduction : Calcul du 15% de 90, c'est-à-dire, 90x15/100=13,5 - Soustraction de la réduction au prix initial : 90 moins 13,5, soit 76,5	2	6,90	2	8,33
Calcul du 85% de 90	0	0	1	4,17
Calcul : 90x15/100	4	13,79	8	33,33
Calcul : 90-15	4	13,79	1	4,17
Calcul : 90 – 15/100	1	3,45	1	4,17
Calcul : 100-15	1	3,45	0	0,00
Calcul : 90/4	0	0	2	8,33
Pas de technique repérée	6	20,69	4	16,67

Tableau 6-24. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 4 du post-test

Parmi ces techniques, les trois premières amènent les élèves à des réponses correctes, elles représentent trois manières de calculer la réduction. Certains élèves connaissent le fait que 15% peut être représenté comme 15/100. La difficulté était d'interpréter 15% comme un taux de réduction. Ainsi, 14% des élèves de la classe du professeur M1 et 33% des élèves de la classe du professeur M2 n'ont calculé que le 15% de 90 sans faire la soustraction. D'autres élèves confondent le taux de réduction et la réduction et soustraient directement 15. 20% des élèves dans la classe du professeur M1 et 8% des élèves dans la classe du professeur M2 font des erreurs de ce type.

Par rapport à la place de grandeurs dans les calculs, la plupart des élèves n'utilisent pas les unités dans leurs calculs, mais les réponses sont données avec la bonne unité.

6.5 Le problème 5

Le problème 5 demandait de comparer des périmètres et des aires. La comparaison des périmètres apparaît comme un exercice difficile pour les élèves (moins de 50% de taux de réussite dans les deux classes). Les figures étaient composées par des arcs de cercle et la mesure n'était pas indiqué, ainsi les élèves ne pouvaient pas exprimer la mesure. Pour le problème 5a) (figure 6-15), les réponses et les techniques utilisées sont très variées pour comparer les périmètres. Nous n'avons pas pu repérer les techniques utilisées par élèves qui ont donné la réponse correcte, car ils ont seulement écrit « les périmètres sont égaux ». Parmi les réponses erronées, certains élèves rangent les figures en se basant sur leurs aires, 33% dans la classe du professeur M2. Dans la classe du professeur M1, nous avons pu aussi relever d'autres techniques comme :

- Un élève mesure avec la règle les longueurs des certaines diagonales du carré du quadrillage quand l'arc du cercle est extérieur, ensuite il additionne ces longueurs ;
- Pour chaque figure, les élèves mesurent avec la règle le rayon R des arcs des cercle et utilisent ensuite la formule du périmètre d'un cercle $2\pi R$ pour donner les périmètres ;
- Les élèves mesurent le rayon R des arcs des cercles ou une fraction des arcs de cercles. Quand l'arc du cercle est extérieur, ils mesurent le rayon de l'arc et trouvent 1,1 cm et quand l'arc du cercle est intérieur, ils mesurent une fraction du rayon de l'arc et trouvent 0,5 cm. Les élèves additionnent 4 longueurs pour chaque quart des cercles.

Nous présenterons les types de réponses données par les élèves et aussi les techniques utilisées avec leurs pourcentages correspondants dans le tableau 6-25 :

Type de réponse ou technique	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	%	**Nombre d'élèves**	%
Les périmètres sont égaux	4	14	11	46
Ordre des figures selon les aires	3	10	8	33
Mesure de la diagonale du carré du quadrillage	1	3,4	0	0
Utilisation de la formule $2\pi R$, avec R rayon des arcs des cercles	3	10	0	0
Mesure du rayon R et/ou d'une fraction des arcs des cercles	3	10	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	15	52	5	21

Tableau 6-25. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 5a) du post-test

À travers le problème 5a), nous montre encore que les élèves présentent des difficultés dans la compréhension de la notion du périmètre. Certains élèves associent un plus grand périmètre à une plus grande aire. D'autres élèves comparent les périmètres en utilisant certains éléments de la figure, comme les rayons ou les fractions des rayons.

Pour le problème 5b) (figure 6-15), les élèves qui ont abordé l'exercice ont donné un rangement correcte des surfaces selon la grandeur aire (plus de 70% de taux de réussite). Nous supposons qu'ils ont répondu d'une manière perceptive.

6.6 Le problème 6

Dans le problème 6 (figure 6-16), les élèves devaient calculer l'aire d'un triangle rectangle où les mesures des côtés étaient données. Comme nous l'avons vu dans la présentation des taux de réussite, il existe une grande différence entre la classe de l'enseignant M1 et celle de l'enseignant M2. En effet, la classe du professeur M1 a obtenu un taux de réussite de 31% et la classe du professeur M2, 88%. Cela peut s'expliquer par le fait que la classe du professeur M1 n'a pas encore travaillé sur les aires au moment de la passation du post-test.

Pour cet exercice, les élèves ont utilisé plusieurs techniques que nous résumons dans le tableau 6-26 :

Techniques	**M1**		**M2**	
	Nombre d'élèves	**%**	**Nombre d'élèves**	**%**
Calcul de l'aire du rectangle (Lxl) et ensuite division par 2	7	24,14	12	50,0
Calcul de l'aire avec un seul calcul : Lxl : 2	2	6,90	9	37,5
Calcul : Lxl	3	10,34	0	0
Calcul : (2L+2l)/2	3	10,34	1	4,2
Calcul : 2L+2l	0	0,00	1	4,2
Calcul : (L+l)/2	1	3,45	0	0
Calcul : (L^2+l^2)	1	3,45	0	0
Calcul : L+l	3	10,34	0	0
Mesure de longueurs avec une règle et calcul du périmètre du rectangle	4	13,79	0	0
Pas de technique repérée ou pas de réponse donnée	5	17,24	1	4,2

Tableau 6-26. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 6 du post-test

La moitié de la classe du professeur M2 calcule l'aire du rectangle et ensuite divise par 2. Certains élèves proposent un calcul direct. On peut interpréter le premier calcul comme la compréhension de l'aire d'un triangle rectangle comme la moitié de l'aire d'un rectangle, cette technique a été favorisée par la configuration de l'exercice. Dans les deux cas, les élèves pouvaient obtenir une réponse correcte. En revanche les élèves de la classe du professeur M1 ont utilisé divers calculs, plusieurs d'entre eux relèvent plutôt d'un calcul des périmètres. La plupart des élèves qui ont donné une réponse erronée font la confusion entre périmètre et aire. De plus, il apparaît encore une fois que certains élèves de la classe du professeur M1 utilisent des procédures relatives au mesurage avec une règle. Les élèves connaissent la formule d'aire d'un rectangle, ils auraient pu calculer l'aire avec cette formule. Cependant, on voit qu'il y a peu d'élèves dans la classe du professeur M1 qui peuvent réinvestir leurs connaissances sur les aires dans cet exercice.

6.7 Le problème 7

Pour donner une réponse correcte au problème 7 (figure 6-17), les élèves devaient mettre en relation les longueurs d'un rectangle avec la formule d'aire. Pour ce problème, nous avons repéré les techniques suivantes :

Techniques	M1		M2	
	Nombre d'élèves	%	Nombre d'élèves	%
Dessin successif et dénombrement de carreaux	3	10,34	4	17%
Décomposition multiplicative du nombre 36 en deux facteurs	8	27,5	10	42%
Dessin d'un rectangle tel que L+l=36	1	3,45	3	13%
Dessin d'un rectangle tel que 2L+2l=36	0	0	4	17%
Pas de technique repérée	8	27,5	3	13%
Pas de réponse donnée	9	31	-	-

Tableau 6-27. Techniques dans les classes des professeurs M1 et M2 pour le problème 6 du post-test

Dans la classe du professeur M1, nous n'avons pas pu repérer toutes les techniques utilisées par les élèves. Dans la classe du professeur M2, la plupart des élèves qui ont réussi la tâche ont décomposé la mesure de l'aire du rectangle (36) comme produit de deux facteurs, et ils ont associé ces facteurs aux mesures des côtés du rectangle. Nous pouvons remarquer est l'augmentation de l'utilisation de formules erronées, particulièrement l'utilisation de formules relatives aux périmètres pour ce problème. De plus, les élèves de la classe du professeur M2 ont bien réussi la tâche pour le type de tâches « calcul l'aire » (problème 6), par contre, ils ont trouvé des difficultés pour produire un objet d'une aire donnée dans le problème 7. Cela montre qu'il ne suffit pas de connaître les formules de calcul pour comprendre leur fonctionnement.

6.8 Bilan du post-test

Dans le post-test, les élèves de la classe de l'enseignant M2 ont des meilleurs résultats que ceux de la classe de l'enseignant M1. Cela peut s'explique par le fait que la classe de 6^{e} de l'enseignant M1 n'a pas encore travaillé les aires au moment de la passation du test. En tenant compte de ce fait, nous résumons les résultats obtenus de la manière suivante :

a) Le traitement des unités : Les unités sont toujours absentes des calculs portant sur les grandeurs. De plus, les élèves maîtrisent les techniques basées sur le dénombrement d'unités et ils les emploient de manière correcte, mais seulement lorsque les unités sont entières ;

b) Les changements d'unités : Les difficultés persistent dans les exercices des changements d'unités. Même si dans la classe du professeur M1, on trouve l'apparition d'une nouvelle technique « multiplication par des puissances de 10 », le taux de réussite en fin d'année est le même que celui de la rentrée scolaire. Dans la classe du professeur M2, le taux de réussite augmente pour le changement d'unités de longueur basé et la technique basée sur le tableau d'unités de conversion reste toujours la plus utilisée. De plus, pour les deux classes le changement d'unités d'aire pose toujours des difficultés aux élèves ;

c) Les formules de calcul des grandeurs : Dans la classe du professeur M1, les formules pour le calcul des grandeurs sont mal employées, les élèves utilisent parfois des formules de périmètres pour calculer des aires et vice-versa. Cela a entraîné plusieurs réponses erronées chez les élèves du professeur M1, car certains exercices demandaient la connaissance des formules pour la mise en œuvre d'une procédure plus efficace. Cependant, même si les élèves de la classe M1 avaient travaillé les formules de périmètres les élèves de la classe du professeur M2 ont obtenu de meilleurs résultats dans les problèmes concernant cette espèce de grandeur. En général, les résultats sont très bas pour le périmètre (sauf pour les changements d'unités), il semble que les élèves n'ont pas encore conceptualisé la notion de périmètre à la rentrée ni à la fin de la classe de 6^{e}.

d) Le mesurage : Certains élèves de la classe du professeur M1 ont utilisé souvent des procédures de mesurage. Ce type de techniques est plus présent dans la classe du professeur M1 que dans celle du professeur M2.

Conclusion du chapitre

Tout d'abord nous rappelons que notre étude n'est pas une étude cognitive des connaissances des élèves. Notre objectif est de mettre en relation les connaissances des élèves de 6e avec les pratiques des enseignants M1 et M2. Nous avons alors fait le choix de présenter dans cette partie les taux de réussite et les techniques mises en œuvre par les élèves en termes de pourcentages et dans les chapitres suivants nous essayons de mettre en lien ces procédures avec les pratiques des enseignants. Nous avons ainsi donné une vision globale sur les rapports des élèves au traitement des unités, aux procédures de mesurage, à la différentiation aire-périmètre, à l'utilisation des formules, etc. Ces premiers résultats nous amènent à formuler les conclusions suivantes.

Autant dans le pré-test que dans le post-test, nous avons relevé l'absence des unités dans les calculs faits par les élèves. Les élèves travaillent en général avec les mesures, pour ensuite donner les réponses en introduisant les unités. Par contre, ces unités ne sont pas toujours correctes, il semble que, pour l'espèce de grandeur aire, les élèves ont plus de difficulté à reconnaître la bonne unité de mesure. On peut noter que l'usage des unités dans les calculs est une nouvelle directive des programmes de 2005 par rapport aux programmes antérieurs. En outre, le problème des unités d'aire se montre aussi dans les exercices de changements d'unités d'aire. En effet, si pour les exercices de changements d'unités de longueur les élèves ont bien réussi en utilisant le tableau de conversion, ils emploient de manière incorrecte le tableau de conversion d'unités d'aire. Lorsque les élèves mobilisent une technique basée sur le dénombrement d'unités, ils réussissent assez bien dans le cas d'unités entières, par contre pour les unités fractionnaires les résultats ne sont pas aussi performants.

L'échec est assez massif quand il s'agit des problèmes relatifs aux périmètres. Les élèves font intervenir d'autres éléments pour calculer les périmètres, comme les diagonales d'un rectangle dans le problème 3 du post-test, ils dessinent des lignes non-fermées quand il s'agit de dessiner des figures ou bien ils calculent des périmètres avec des formules erronées. Cela est plus manifeste dans la classe de l'enseignant M1 que dans celle de l'enseignant M2. Cela montre une difficulté dans la conceptualisation de la notion de périmètre.

Pour les aires, les résultats sont satisfaisants dans les deux classes quand il s'agit de comparer des aires. Cependant, dans la classe du professeur M1, les élèves utilisent parfois des formules inexactes dans les calculs d'aire. De plus, dans les deux classes, les changements d'unités d'aire représente une grande difficulté.

Nous avons aussi observé que les élèves de la classe du professeur M1 se servent plus des outils de mesurage pour répondre aux problèmes. Dans plusieurs exercices, ils ont utilisé la règle pour répondre aux questions. Cette procédure montre que certains élèves n'ont pas perçu le changement du contrat didactique entre l'école élémentaire et le collège à propos des calculs sur les grandeurs.

Nous poursuivrons l'analyse des connaissances des élèves à propos des grandeurs dans les chapitres VIII et IX en essayant de mettre en relation les techniques et les difficultés rencontrées par les élèves de 6e avec les pratiques des enseignants M1 et M2.

Chapitre VII

Étude des pratiques : les habitats et les niches des grandeurs en 6e et 5e

Pour étudier la place et le rôle des grandeurs dans les classes du collège, nous avons observé l'enseignement de deux professeurs. Dans ce chapitre, nous présentons une analyse globale de l'organisation de l'enseignement relativement aux grandeurs dans les différents domaines mathématiques.

Notre objectif principal est de repérer à travers les progressions des enseignants des habitats et des niches possibles pour les grandeurs dans les domaines numérique, géométrique, fonctions et grandeurs en nous plaçant aux différents niveaux de codétermination mathématique au-delà du niveau du sujet d'étude : les domaines, les secteurs et les thèmes d'étude dans les classes de 6e et de 5e des enseignants M1 et M2. L'échelle de niveaux de codétermination mathématique (Chevallard, 2002) nous permet de mettre en relation les organisations mathématiques relatives aux grandeurs sur toute une année scolaire et les OM relatives aux grandeurs sur un même domaine. En nous appuyant sur le découpage en secteurs et thèmes d'étude des programmes de 1995 et de 2005, et sur celui des manuels scolaires, nous analysons les progressions des enseignants M1 et M2. On sait que les professeurs organisent généralement leurs cours en chapitres, parties et sous-parties. Nous allons donc essayer d'associer ce découpage aux différents niveaux de codétermination mathématique. Nous rappelons que les manuels scolaires utilisés par les professeurs M1 et M2 sont :

- Dans les classes de 6e du professeur M1, 2009-2010 et 2010-2011, *maths 6e,* collection *Diabolo*, *Hachette 2005*, que nous avons nommé 6DB05 ;
- En classe de 6e du professeur M2, 2010-2011, multi-math 6e, collection multi-math, Hatier 2005, que nous avons nommé 6MU05 ;
- En classe de 5e du professeur M2, 2009-2010, maths 5e, collection *Diabolo*, *Hachette 2005*, que nous avons nommé 5DB05.

Dans les chapitres suivants, nous élargirons notre étude au niveau du sujet d'étude, en analysant les dynamiques inter-domaines et intra-domaine relativement aux grandeurs.

1. Analyse globale des progressions des professeurs M1 et M2

Dans cette partie, nous présentons les progressions annuelles des enseignants M1 et M2, lesquelles seront comparées aux chapitres des manuels scolaires utilisés par chacun de ces professeurs.

1.1 Les progressions annuelles

Pour situer les grandeurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2, nous présentons à l'aide de différents tableaux les chapitres étudiés dans les classes de 6e et 5e de ces deux enseignants tout au long des années 2009-2010 et 2010-2011[1] :

M1, classe de 6e, 2009-2010	M1, classe de 6e, 2010-2011	M2, classe de 6e, 2010-2011	M2, classe de 5e, 2009-2010
Nombres décimaux	Règle et compas	Numération	Prisme droit et cylindre
Positions relatives à deux droites	Opérations sur les nombres décimaux	Règle et compas	Nombres : procédures de calcul
La division	Règle et équerre	Fractions	Symétrie de figures simples
Périmètres et aires	Division	Droites parallèles et perpendiculaires	Fractions
Nombres en écriture fractionnaires	Quadrilatères et triangle rectangle	Addition, soustraction, multiplication	Triangles
Angles	Nombres en écriture fractionnaire	Angles	Nombres relatifs
Proportionnalité	Proportionnalité et pourcentage	Division	Angles
Symétrie axiale	Mesurer un angle, rapporteur	Symétrie axiale	Opérations en écriture fractionnaire
Règle et compas	Échelles	Quotients et applications	Quadrilatères
Opérations sur les nombres décimaux	Symétrie axiale	Aire et périmètre	Nombres relatifs ; opérations
Règle et équerre	Aire et périmètre	Gestion de données	Aires

Tableau 7-1. Progressions des chapitres des professeurs M1 et M2

Comme nous l'avons montré, les auteurs des manuels scolaires[2] utilisés par ces enseignants ne divisent pas explicitement les contenus en domaines d'étude. Ainsi, nous avons regroupé ces chapitres selon les domaines précisés par les programmes scolaires de la période A4 : nombres et calculs (N), géométrie (G), organisation et gestion de données, fonctions (F), et grandeurs et mesures (GM). Parallèlement, nous ajoutons entre parenthèses un nombre qui indique l'ordre chronologique d'enseignement des chapitres. Voici notre tableau :

[1] Les progressions complètes sont présentées dans l'annexe C
[2] Pour les manuels scolaires, voir le chapitre IV

<table>
<tr><th rowspan="2">Domaines du programme</th><th colspan="4">Chapitres</th></tr>
<tr><th>M1, classe de 6^{e}, 2009-2010</th><th>M1, classe de 6^{e}, 2010-2011</th><th>M2, classe de 6^{e}, 2010-2011</th><th>M2, classe de 5^{e}, 2009-2010</th></tr>
<tr><td rowspan="5">N</td><td>Nombres décimaux (1)</td><td>Opérations sur les nombres décimaux(2)</td><td>Numération(1)</td><td>Nombres : procédures de calcul(2)</td></tr>
<tr><td>La division (3)</td><td>Division(4)</td><td>Division(7)</td><td>Fractions(4)</td></tr>
<tr><td>Nombres en écriture fractionnaires (5)</td><td rowspan="3">Nombres en écriture fractionnaire(6)</td><td>Fractions(3)</td><td>Opérations en écriture fractionnaire(8)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opérations sur les nombres décimaux (10)</td><td>Addition, soustraction, multiplication(5)</td><td>Nombres relatifs(6)</td></tr>
<tr><td>Quotients et applications(9)</td><td>Nombres relatifs ; opérations(10)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">G</td><td>Positions relatives à deux droites (2)</td><td>Quadrilatères et triangle rectangle(5)</td><td>Droites parallèles et perpendiculaires(4)</td><td>Prisme droit et cylindre(1)</td></tr>
<tr><td>Règle et équerre (11)</td><td>Règle et équerre(3)</td><td>Règle et compas(2)</td><td>Quadrilatères(9)</td></tr>
<tr><td>Règle et compas (9)</td><td>Règle et compas(1)</td><td rowspan="2">Symétrie axiale(8)</td><td>Triangles(5)</td></tr>
<tr><td>Symétrie axiale (8)</td><td>Symétrie axiale(10)</td><td>Symétrie de figures simples(3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">Proportionnalité (7)</td><td>Proportionnalité et pourcentage(7)</td><td rowspan="2">Gestion de données(11)</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Échelles(9)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">GM</td><td>Périmètres et aires (4)</td><td>Aire et périmètre(11)</td><td>Aire et périmètre(10)</td><td>Aires(11)</td></tr>
<tr><td>Angles (6)</td><td>Mesurer un angle, rapporteur(8)</td><td>Angles(6)</td><td>Angles(7)</td></tr>
</table>

Tableau 7-2. Chapitres relatifs aux progressions annuelles des enseignants M1 et M2

- Les chapitres relatifs aux domaines numérique, fonctionnel et géométrique

Si on compare les classes de 6^{e}, on observe qu'il existe des chapitres communs dans les trois classes relativement au numérique. On peut retrouver un chapitre consacré aux opérations, un autre portant sur les fractions et un autre qui traite la division. Dans le domaine géométrique, la symétrie axiale constitue un chapitre dans les trois classes de 6^{e}, et il existe aussi un chapitre « règle et compas » dans ces trois classes. Par contre, dans ce même domaine, on peut remarquer certaines différences entre les progressions. Le chapitre « règle et équerre » n'existe que dans les classes de 6^{e} de l'enseignant M1. Il existe un chapitre consacré aux droites perpendiculaires et parallèles dans la classe de 6^{e} du professeur M1 de l'année 2009-2010 et dans la classe de 6^{e} du professeur M2 de l'année 2010-2011. Ce chapitre n'apparaît pas dans la classe de 6^{e} du professeur M1 de l'année 2010-2011, par contre il existe un chapitre appelé « quadrilatères et triangle rectangle » inexistant dans les autres deux

classes de 6e. Enfin, relativement au domaine fonctionnel, l'enseignant M1 définit un chapitre concernant la proportionnalité, lequel n'existe pas dans l'enseignement du professeur M2.
Dans la classe de 5e du professeur M2, on trouve des chapitres consacrés aux nombres relatifs et fractions dans le numérique, et aux objets géométriques triangle, quadrilatères et prisme droit et cylindre dans le domaine géométrique, ainsi qu'à la symétrie.
En général, les progressions sont semblables relativement aux chapitres dans les enseignements de deux professeurs pour les domaines du numérique, de la géométrie et du fonctionnel. Par contre, ils ne correspondent pas toujours aux secteurs d'étude présents dans les programmes, comme on le verra dans la suite des nos analyses.

- Les chapitres relatifs à un domaine des grandeurs

Par rapport aux grandeurs, il s'agit d'étudier dans un chapitre les angles et dans un autre les aires et les périmètres dans toutes les classes. De plus, on ne trouve pas un chapitre consacré au volume ou à la longueur. Dans les classes de 6e, les professeurs n'étudient pas le volume et les longueurs sont étudiées plutôt dans le domaine géométrique. En classe de 5e, le professeur M2 travaille le volume dans le chapitre « prisme droit et cylindre ».
Dans la suite, nous allons comparer ces progressions aux chapitres proposés par les manuels scolaires utilisés par ces deux enseignants et aussi aux contenus prescrits par les programmes pour essayer de comprendre les choix faits par les professeurs M1 et M2 relativement aux grandeurs. Ensuite, nous examinerons les enseignements proposés par ces professeurs en les analysant à l'aide des niveaux de codétermination didactique.

1.2 Deux manières différentes d'élaborer les progressions

Maintenant nous présentons les chapitres indiqués dans les manuels scolaires utilisés par les enseignants :

<table>
<tr><th rowspan="2">Domaines du programme</th><th colspan="3">Chapitres</th></tr>
<tr><th>6^{e} Diabolo année 2005 (6BD05)</th><th>6^{e} Multi-math, année 2005 (6MU05)</th><th>5^{e} Diabolo, année 2005 (5DB05)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">N</td><td>Les nombres</td><td>Numération</td><td>Calculs sur les nombres entiers et décimaux positifs</td></tr>
<tr><td>Addition, soustraction et multiplication</td><td>Fractions décimales et ordre</td><td>Nombres en écriture fractionnaire</td></tr>
<tr><td>Divisions</td><td>Additions, soustractions et multiplications de décimaux</td><td>Nombres relatifs et repérage</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nombres en écriture fractionnaire</td><td>Divisions</td><td>Opérations en écriture fractionnaire</td></tr>
<tr><td>Quotients et proportionnalité</td><td>Opérations sur les nombres relatifs</td></tr>
<tr><td rowspan="6">G</td><td>Avec une règle et un compas</td><td>Règle et compas</td><td rowspan="2">Triangles</td></tr>
<tr><td>Avec une règle et une équerre</td><td>Parallèles et perpendiculaire</td></tr>
<tr><td>Avec un rapporteur et une règle</td><td>Constructions et reproductions</td><td>Quadrilatères</td></tr>
<tr><td>Symétrie axiale</td><td>Symétrie axiale</td><td rowspan="2">Symétrie centrale</td></tr>
<tr><td>Symétrie axiale et figures particulières</td><td>Figures symétriques</td></tr>
<tr><td>Dans l’espace</td><td>Parallélépipèdes rectangles</td><td>Solides</td></tr>
<tr><td>F</td><td>Proportionnalité</td><td>-</td><td>Proportionnalité</td></tr>
<tr><td rowspan="3">GM</td><td rowspan="3">Périmètre et aire</td><td>Angles</td><td>Angles</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Périmètres et aires</td><td>Aire</td></tr>
<tr><td>Volumes</td></tr>
</table>

Tableau 7-3. Chapitres dans les manuels scolaires utilisés par M1 et M2

- Le professeur M1 et les manuels scolaires

Si l’on compare les progressions de 6^{e} du professeur M1 avec les chapitres du manuel 6DB05, on s’aperçoit que ce professeur propose une organisation de l’enseignement différente de celle du manuel qu’il utilise. Effectivement, pendant l’entretien, le professeur M1 déclare utiliser plusieurs sources pour construire l’enseignement :

> *« alors, moi je ne me base, pour préparer mes séquences des cours que sur les programmes officiels. Il y a très longtemps que j'ai abandonné l'utilisation du livre, autrement que pour donner les exercices à faire, c'est bien pratique à la maison, mais euh, et à condition de choisir les exercices, parce que dans n'importe quel livre, on a énormément d'exercices qui sont hors programme, et le cours qui est proposé est un cours qui est stéréotypé et sur lequel sont à la limite des programmes ou même aussi hors programme. Il y a très longtemps que les livres je ne les utilise que de temps en temps, pour aller chercher un exercice, mais jamais pour préparer un cours » (Extrait entretien M1, 2011)*

Les progressions construites par le professeur M1 pour deux classes de 6e dans deux années présentent des chapitres différents, même si cet enseignant utilise le même manuel scolaire dans ces deux classes.

- Le professeur M2 et les manuels scolaires

Les progressions du professeur M2 sont très proches de celles du manuel *Multi-math* et *Diabolo*. Cela s'explique par un choix didactique fait par M2. Pendant l'entretien, cet enseignant explique qu'il se base sur les manuels scolaires et les programmes pour concevoir la progression de leur enseignement :

> *« bah, la progression je la fais par rapport aux manuels, en sachant si les programmes ont évolué ou pas. Donc, là le manuel, il est pas tout à fait à jour, quoi, euh, donc je suis les manuels, c'est vraiment ce que je regarde, quoi » (Extrait entretien M2, 2011)*

Les deux perspectives distinctes nous aideront à mieux comprendre et caractériser les choix faits par les professeurs M1 ou M2 dans leurs enseignements.

2. Le niveau du domaine d'étude

À partir des progressions annuelles, des cahiers des élèves et des notes d'observation des classes, nous avons étudié la place et le rôle des grandeurs dans la construction des trois domaines mathématiques : le numérique, la géométrie et les fonctions. Nous avons ajouté à cela l'étude des grandeurs comme éléments constitutifs d'un domaine de grandeurs et de la mesure.

2.1 La non-structuration en domaines

Rappelons que les programmes de 1995 proposent 3 domaines d'étude : « travaux géométriques », « travaux numériques » et « organisation de données, fonctions ». Et comme nous l'avons dit, les programmes de 2005 proposent une organisation de contenus autour de 4 domaines : « nombres et calculs », « géométrie », « organisation et gestion de données, fonctions » et « grandeurs et mesures ». Cependant, dans les enseignements des professeurs M1 et M2, nous n'avons pas repéré des découpages en domaines d'étude. Par exemple, certains enseignants font partager aux élèves leurs cahiers en partie algèbre et géométrie, mais nous n'avons pas observé dans les cahiers des classes des professeurs M1 et M2, ni dans les discours, des références aux domaines étudiés. Dans les progressions et les cahiers des élèves, la première structuration concerne les chapitres.

- Les domaines dans l'enseignement du professeur M1

Néanmoins, lors de l'entretien, le professeur M1 indique l'existence de deux domaines implicites dans l'enseignement au collège :

« on fait de séparation, c'est vrai que la séparation du numérique, géométrie jusqu'à en 3e, je suis tout à fait d'accord, d'encore plus qu'ils nous ont enlevé tout ce qui est géométrie analytique, c'est vrai qu'on peut le considérer comme deux ... je dirai deux chapitres à part. » (Extrait entretien M1, 2011)

Pour les grandeurs la situation est encore différente. Le professeur M1 connaît la prise en compte des grandeurs en tant que domaine d'étude dans les programmes, mais il considère qu'elles doivent être travaillées tout au long du collège dans les différents domaines :

« c'est très artificiel [à propos de la nouvelle structuration des programmes] Bon, la notion de grandeur, je crois que c'est une notion qui est transversale, et il serait très artificiel de faire un cours sur les aires, sur les volumes, alors que sont des choses qui vont rentrer en situation, et donc je préfère les utiliser tout au long de 4 années de collège, mais les étudier en situation, et non-pas de façon très artificielle, un petit peu comme les équations, traiter une équation pour le plaisir de traiter une équation ça sert à rien, surtout à ce niveau-là, il faut que l'équation ait un sens derrière » (Extrait entretien M1, 2011)

Ainsi, on peut expliquer la non-présence d'un domaine des grandeurs dans l'enseignement du professeur M1 du fait que l'étude des grandeurs en tant que domaine d'étude est en rupture avec le caractère d'outil des grandeurs d'après le professeur M1.

- Les domaines dans l'enseignement du professeur M2

L'avis du professeur M2 relativement à la création d'un domaine de grandeurs est différent. D'après le professeur M2, la nouvelle structuration renforcera davantage l'étude sur les unités :

« je pense que ça peut être pas mal, parce que ça leur permet de comprendre les unités, pourquoi de cubes, pourquoi les carrés, pourquoi de kilomètres, des choses comme ça. Et c'est vrai que peut être c'est un peu plus concret, ça arrive souvent dans la vie, si on veut travailler avec les puissances, des choses comme ça, les unités, ça peut être intéressante, quoi. » (Extrait entretien M2, 2011)

Ce discours rejoint les raisons explicitées par les programmes de 2005 pour la création d'un domaine « Grandeurs et mesures ». Ils indiquent que la compréhension des unités donne du sens aux grandeurs courantes et elle favorise l'étude de certains phénomènes de la vie courante à travers des grandeurs plus complexes.

- Bilan

La nouvelle structuration des programmes n'est pas vraiment prise en compte par les professeurs. Les discours des deux enseignants M1 et M2 se confrontent pour nous montrer deux possibles ouvertures des pratiques relativement à la création d'un domaine « Grandeurs et mesure » en 2005 :

- Soit la nouvelle structuration des programmes réduit les liens entre les grandeurs et les autres notions dans l'enseignement ;
- Soit elle enrichit l'étude des grandeurs en tant qu'objet.

L'étude de cette dialectique outil/objet est un point important à analyser dans notre recherche.

2.2 Les grandeurs dans les domaines d'étude

Maintenant nous allons repérer la présence des grandeurs au niveau des domaines mathématiques dans les enseignements des professeurs M1 et M2 en analysant l'organisation didactique globale mise en place par ces professeurs. Ces deux enseignants demandent aux élèves de partager leurs cahiers en une partie leçons et une partie exercices. Ce choix didactique nous révèle des caractéristiques relatives à la place et fonction des grandeurs dans les organisations didactiques globales. En effet, le cahier leçons contient en grande partie des traces sur les moments d'institutionnalisation et de construction du bloc technologique-théorique, et le cahier exercices nous montre des éléments relatifs aux moments de première rencontre et le travail sur la technique. Les domaines que nous étudions sont le numérique, le géométrique et les fonctions. Voici un tableau qui résume la présence des grandeurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2 :

Classe, Enseignant, année	**Numérique**		**Géométrie**		**Fonctions**	
	Cahier Leçons	Cahier Exercices	Cahier Leçon	Cahier exercices	Cahier leçon	Cahier Exercices
6e, M1, 2009-2010	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
6e, M1, 2010-2011	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
6e, M2, 2010-2011	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

Tableau 7-4. Présence des grandeurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2

Même si les grandeurs ne participent que très peu à la construction du domaine du numérique dans la classe de 6e du professeur M2 de l'année 2010-2011, on peut observer que les grandeurs apparaissent, en général, dans tous les domaines mathématiques et dans les découpages que les professeurs produisent relativement aux organisations didactiques globales, à partir des traces dans la partie leçon et la partie exercices.

Si on compare ces résultats avec ceux des programmes de 1995 et 2005, on remarque que les enseignants observés utilisent les grandeurs pour enseigner des notions du numérique, alors même que les programmes de ces deux périodes n'explicitent pas un tel emploi pour les grandeurs.

La plupart de temps, les grandeurs servent comme exemples pour étudier des problèmes de la vie quotidienne qui nécessitent des opérations numériques. Dans les autres domaines, par exemple en géométrie, elles participeront à l'élaboration des définitions des figures et à leurs constructions géométriques. Et dans le domaine fonctions, les grandeurs apparaîtront dans l'étude de la proportionnalité. Bien entendu, ces résultats n'ont rien d'originaux, c'est pourquoi nous examinerons d'une manière plus approfondie la vie des grandeurs dans ces domaines mathématiques en regardant les niveaux de codétermination de plus grande spécificité thèmes et sujets d'étude.

2.3 Conclusion

Au niveau du domaine d'étude, nous avons observé les caractéristiques suivantes :
Premièrement, même si l'on peut regrouper les chapitres en domaines, les enseignants n'explicitent pas une structure selon les domaines mathématiques dans leurs enseignements. Deuxièmement, les enseignants ont des avis différents par rapport à la création d'un domaine des grandeurs. L'enseignant M1 considère que la structuration des grandeurs dans un seul domaine risque de couper les liens entre les grandeurs et d'autres notions. Par contre, l'enseignant M2 estime que l'étude des grandeurs dans un domaine peut renforcer davantage leur étude en tant qu'objet. Troisièmement, les grandeurs ont une forte présence dans la plupart des chapitres relatifs à divers domaines et dans la partie leçons et cours relativement à l'organisation didactique. Ainsi, les grandeurs apparaissent tout au long des progressions mises en place par les enseignants M1 et M2 dans tous les domaines mathématiques étudiés dans notre recherche.

3. Le niveau du secteur d'étude

On a vu que les grandeurs ont une présence insistante dans les pratiques des enseignants M1 et M2. Pour comprendre quelle est leur fonction dans les différents domaines, nous devons descendre dans les niveaux de codétermination. Ainsi nous avons relevé les secteurs d'étude relatifs aux enseignements des professeurs M1 et M2. L'objectif est de comparer les secteurs définis par les programmes et les chapitres travaillés par ces enseignants. Dans cette partie, nous montrons une réorganisation de l'enseignement des professeurs M1 et M2 en termes de secteurs d'étude. Nous situons la place des grandeurs à ce niveau de codétermination.

3.1 Le statut des chapitres au niveau de secteurs d'étude

En général, les chapitres étudiés par les enseignants M1 et M2 ne représentent pas un secteur d'étude dans les programmes. Les secteurs d'étude présents dans les enseignements de ces professeurs se composent de deux ou plus de chapitres. En classe de 6e, nous avons repéré les secteurs d'étude du programme suivants :

Domaines du programme	Secteurs du programme	Chapitres 6e, M1, 2009-2010	Chapitres 6e, M1 2010-2011	Chapitres 6e, M2 2010-2011
N	**Nombres décimaux**	Nombres décimaux (1) ; Opérations sur les nombres décimaux (10)	Opérations sur les nombres décimaux (2)	Numération (1) ; Addition, soustraction, multiplication (5)
	Nombres en écriture fractionnaire	Nombres en écriture fractionnaires (5)	Nombres en écriture fractionnaire(6)	Fractions(3)
	Quotients			Quotients et applications (6)
G	**Figures planes**	Positions relatives à deux droites (2) ; Règle et compas (9) ; Règle et équerre (11)	Règle et compas (1) ; Règle et équerre (3) ; Quadrilatères et triangle rectangle (5)	Règle et compas (2) ; Droites parallèles et perpendiculaires (4)
	Symétries	Symétrie axiale (8)	Symétrie axiale (10)	Symétrie axiale (8)
F	**Proportionnalité**	Proportionnalité (7)	Proportionnalité et pourcentage (7) ; Échelles (9)	-
	Gestion de données	-	-	Gestion de données (11)
GM	**Périmètres** / **Aires**	Périmètres et aires (4)	Aire et périmètre(11)	Aire et périmètre (10)
	Angles	Angles (6)	Mesurer un angle, rapporteur (8)	Angles (6)

Tableau 7-5. Secteurs d'étude relatifs aux progressions des professeurs M1 et M2 en classe de 6e

En classe 5e, nous avons regroupé les chapitres autour des secteurs suivants :

Domaines du programme	Secteurs du programme	Chapitres 5e, M2, 2009-2010
N	**Nombres en écriture fractionnaire**	Fractions (4) ; Opérations en écriture fractionnaire (8) ; Nombres : procédures de calcul (2)
	Nombres relatifs	Nombres relatifs(6) ; Nombres relatifs ; opérations (10)
G	**Solides**	Prisme droit et cylindre (1)
	Symétries	Symétrie de figures simples (3)
	Figures planes	Quadrilatères (9) ; Triangles (5)
GM	**Angles**	Angles (7)
	Aires	Aires (11)

Tableau 7-6. Secteurs relatifs à la progression du professeur M2 en 5e

- Différences et analogies par rapport aux domaines géométrique, numérique et fonctionnel

Par rapport au tableau 7-2, nous avons placé le chapitre « division », présent dans les trois classes de 6e, au niveau du thème d'étude dans les secteurs concernant les nombres décimaux et les fractions, car il s'agit d'étudier des méthodes pour réaliser la division entre nombres entiers, nombres décimaux et fractions. Le chapitre « quotients et applications » forme lui-même un secteur d'étude, car la technologie sous-jacente relève de la notion de quotient et des proportions. En général, on observe que deux ou plus de chapitres forment des secteurs d'étude dans les domaines géométrique et numérique. Dans le domaine fonctions, l'enseignant M1 étudié la proportionnalité au niveau de secteur l'année 2009-2010, la deuxième année ce secteur est constitué de deux chapitres « proportionnalité » et « échelles ». Par contre, dans la progression du professeur M2, on ne trouve pas un chapitre consacré à la proportionnalité, on verra que la proportionnalité est travaillée au niveau de thème d'étude dans le secteur « quotients et applications ».

- Différences et analogies par rapport au domaine des grandeurs

En classe de 6e, comme en 5e, les secteurs d'étude sont constitués d'un ou plus de chapitres. Les grandeurs angle et aire sont étudiées dans des chapitres différents au niveau de secteur. Les aires et les périmètres sont travaillés dans un même chapitre. Nous pensons que ce choix provient de la nécessité de proposer des situations relatives à la différenciation entre aires et périmètres, cette dernière est un objectif de la classe de 6e.

- Bilan

En conclusion, les enseignants M1 et M2 suivent des progressions annuelles constituées par des chapitres autour du niveau du thème d'étude dans les domaines numérique et géométrique et autour du secteur d'étude dans le domaine des grandeurs.

3.2 Place des grandeurs dans les secteurs d'étude

Nous avons comparé les secteurs relatifs aux enseignements des professeurs M1 et M2 avec les secteurs d'étude repérés dans les programmes scolaires des institutions CA1 (1995-2005) et CA4 (2005-), en ne prenant en compte que les secteurs d'étude où des « traces » des grandeurs sont présentes. Nous comprenons comme traces les éléments suivants :

- l'évocation du mot grandeur ou d'une espèce de grandeur ;
- des problèmes qui traitent des situations sur des grandeurs particulières ou qui mettent en relation des grandeurs ;
- des théorèmes relatifs à des espèces de grandeurs ou des propriétés relatives aux grandeurs.

Dans le cadre d'une étude écologique, nous avons structuré ces secteurs, où on repère des traces des grandeurs, par rapport aux 4 domaines étudiés dans cette recherche (numérique, géométrique, fonctions et grandeurs). Dans les tableaux 7-7 et 7-8 des parties 3.2.1 et 3.2.2, nous avons hachuré les cellules quand le secteur n'existe pas dans l'organisation de l'enseignement, nous avons mis « oui » quand les grandeurs sont présentes dans le secteur et « non » quand elles ne le sont pas. Nous présentons les résultats par niveau.

3.2.1 Les classes de 6e des professeurs M1 et M2

Nous rappelons que nous avons analysé 3 classes de 6e. Le tableau suivant situe la présence des grandeurs dans les différents secteurs d'étude des classes des enseignants M1 et M2 :

Domaines du programme	Secteurs du programme	6e, M1, 2009-2010	6e, M1 2010-2011	6e, M2 2010-2011	Programmes CA1 (1995-2005)	Programmes CA4 (2005-)
N	Nombres décimaux	oui	oui	oui	**non**	**non**
	Nombres en écriture fractionnaire	oui	oui	oui	**non**	**non**
	Quotients			oui		
	Nombres relatifs et repérage					oui
G	Figures planes	oui	oui	oui	oui	oui
	Symétries	oui	oui	oui	oui	oui
	Solides				oui	**non**
F	Proportionnalité	oui	oui			oui
	Fonctions à base numérique				oui	
	Fonctions à base géométrique				oui	
GM	Longueurs	oui	oui	oui		oui
	Aires	oui	oui	oui		oui
	Angles	oui	oui	oui		oui
	Volumes					oui

Tableau 7-7. Présence des grandeurs dans les secteurs d'étude en classe de 6e relatifs aux enseignements des professeurs M1 et M2 et aux programmes scolaires

Si on compare tous les secteurs d'étude relatifs aux progressions des enseignants avec les parties des programmes où on trouve des traces des grandeurs, on voit que les grandeurs occupent une place très importante dans l'enseignement des professeurs M1 et M2. En effet, elles sont présentes dans tous les secteurs et ainsi dans tous les domaines relatifs aux progressions des enseignants.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre concernant l'étude institutionnelle, les grandeurs sont très peu évoquées pour enseigner le numérique dans les programmes[3]. Par contre, elles apparaissent dans ce domaine dans les enseignements des professeurs M1 et M2.

De plus, les grandeurs longueurs, aires, et angles ont bien le statut de secteur d'étude en classe de 6e dans les enseignements des professeurs M1 et M2, cependant la notion de volume n'apparaît pas à ce niveau de codétermination dans les classes de ces enseignants.

3.2.2 La classe de cinquième du professeur M2

Pour le niveau 5e, nous n'avons observé qu'une seule classe, celle du professeur M2. Nous présentons les secteurs relatifs à la progression mise en place par cet enseignant et les secteurs repérés dans les programmes de CA1 et CA4 :

Domaines du programme	**Secteurs du programme**	**5e, M2 2009-2010**	**Programmes CA1 (1995-2005)**	**Programmes CA4 (2005-)**
N	Nombres décimaux		**non**	**non**
	Nombres en écriture fractionnaire	oui	**non**	**non**
	Nombres relatifs	oui	**non**	**non**
G	Solides	oui	oui	oui
	Symétries	oui	oui	oui
	Figures planes	oui		oui
F	Proportionnalité		oui	oui
GM	Longueurs			oui
	Angles	oui		oui
	Aires	oui		oui
	Volumes			oui

Tableau 7-8. Présence des grandeurs dans les secteurs d'étude en classe de 5e relatifs aux enseignements du professeur M2 et aux programmes scolaires

Comme pour la classe de 6e, les grandeurs n'apparaissent pas explicitement dans le domaine du numérique dans les textes officiels. De plus, conformément aux directives institutionnelles du programme de 5e du 2005, les grandeurs angles et aires ont bien le statut de secteur d'étude dans la progression du professeur M2. Par contre, la grandeur volume n'est pas travaillée au niveau du secteur dans la classe du professeur M2.

[3] Nous ne prenons pas en compte les documents ressources, car nous rappelons qu'ils n'ont pas un statut d'obligatoire dans l'institution CA4

3.3 Les secteurs du domaine « Grandeurs et mesures »

En général, dans les progressions des professeurs M1 et M2 et dans les manuels scolaires, le domaine des grandeurs et mesures est structuré en deux chapitres : « angles » et « périmètres et aires ». On verra dans l'analyse du niveau de thèmes d'étude que dans la classe de 6e du professeur M2 les conversions d'unités de longueur sont aussi étudiées dans le domaine des fonctions où ils occupent une place en tant sujet d'étude et les volumes apparaîtront au niveau de thème d'étude dans la géométrie. L'enseignant M1 enseigne les conversions d'unités de longueur dans le domaine du numérique, mais contrairement à M2, il ne travaille pas sur le volume. Ainsi, certaines espèces de grandeurs sont étudiées au niveau de secteur d'étude et d'autres au niveau de thèmes dans différents domaines. Pour l'instant, nous ne pouvons pas repérer la constitution d'un domaine grandeurs et mesures comparable à celui des programmes de 2005.

3.4 Conclusion

On peut observer des choix communs au domaine grandeurs et mesures dans les pratiques des deux professeurs. Les espèces de grandeur angles, périmètres et aires sont étudiés au niveau du secteur d'étude et les espèces de grandeur longueur et volume au niveau du thème d'étude ou du sujet d'étude. On peut donc dire que les enseignants M1 et M2 produisent des secteurs semblables à ceux présents dans les manuels scolaires 6BD05 et 6MU05. Ces progressions sont éloignées de la structuration proposée par les programmes scolaires de 1995 et 2005. Ainsi, les enseignements conçues par les professeurs M1 et M2 relativement au domaine grandeurs et mesures au niveau du secteur d'étude ne correspondent à aucun programme des deux époques. Il apparaît que les manuels scolaires ont une forte influence sur les progressions des enseignants M1 et M2. Comme nous l'avons vu dans l'étude des manuels scolaires, l'enseignement des grandeurs est très différent d'un manuel à l'autre et les contraintes institutionnelles apparues en 2005 ne sont pas complètement prises en compte par les auteurs de ces manuels. Ainsi, la transposition didactique relative aux programmes dans l'enseignement semble conditionnée par le geste didactique d'utiliser un manuel scolaire. La décomposition mathématique du domaine grandeurs et mesures en secteurs et thèmes appartenant à divers cadres s'explique par le fait que les manuels scolaires n'ont pas encore trouvé un équilibre relativement aux grandeurs comme nous l'avons montré dans le chapitre IV.

4. Le niveau du thème d'étude

Dans cette partie de l'étude, nous exposons les thèmes d'étude identifiés dans les progressions des enseignants M1 et M2 où on trouve des « traces » des grandeurs. Nous avons choisi de les présenter par domaine d'étude, car nous voulons caractériser les dynamiques inter-domaines et intra-domaine concernant les grandeurs.

4.1 Les thèmes du domaine géométrique

Précédemment, nous avons présenté les secteurs d'étude relatifs aux grandeurs dans les quatre domaines définis par les programmes de 2005. Maintenant, il s'agit d'étudier chacun de ces secteurs du point de vue des thèmes d'étude mis en place par les professeurs M1 et M2 en classe de 6e et 5e relativement aux grandeurs dans le domaine géométrique :

Classe	Secteurs du programme	Thèmes du professeur
6e, M1, 2009-2011	Figures planes	Droites, segments, milieu d'un segment
		Cercle
		Triangle
		Quadrilatères
		Triangle rectangle
	Symétrie axiale	Symétrie axiale
		Médiatrice d'un segment
		Bissectrice d'un angle
6e, M1, 2010-2011	Figures planes	Règle et compas
		Rectangle
		Losange
		Carré
		Triangle rectangle
	Symétrie axiale	Symétrie axiale
		Médiatrice d'un segment
		Bissectrice d'un angle
6e, M2, 2010-2011	Figures planes	Règle
		Compas
	Symétrie axiale	Propriétés de la symétrie axiale
5e, M2, 2009-2011	Solides	Prisme droit
		Cylindre
	Symétrie centrale	Construction
		Propriétés
	Figures planes	Construction de triangles
		Parallélogrammes
		Rectangle
		Losange

Tableau 7-9. Présence des grandeurs dans les thèmes du domaine géométrique dans les enseignements des professeurs M1 et M2

Dans la suite, nous allons présenter une étude du rôle que jouent les grandeurs dans la construction de ces secteurs d'étude en regardant leur présence au niveau de thème d'étude.

4.1.1 Les grandeurs comme éléments constitutifs d'une technologie dans l'étude de la symétrie axiale et centrale

Si on regarde le tableau précédent, on peut observer que les grandeurs sont présentes dans les thèmes d'étude « symétrie axiale », « médiatrice » et « bissectrice » dans les deux classes de 6e du professeur M1 pendant l'année 2009-2010. Par contre, même si les parties de la progression du professeur M2 relativement à la symétrie axiale sont « axe de symétrie », « médiatrice » et « symétrie axiale », les grandeurs n'apparaissent que dans le dernier thème d'étude. Ces grandeurs sont représentées par les espèces de grandeurs angle et longueur. Les différentes places occupées par les grandeurs dans le secteur « symétrie axiale » s'expliquent par le rôle qu'elles jouent dans l'enseignement de ce contenu. Effectivement, dans les classes de 6e du professeur M1, les grandeurs sont des éléments essentiels de la construction de la technologie relative à la symétrie axiale. Par contre, dans la classe du professeur M2, la technologie relative à la symétrie axiale prend appui sur des notions autres que les grandeurs.

Regardons l'exemple de la construction de points symétriques chez M2:

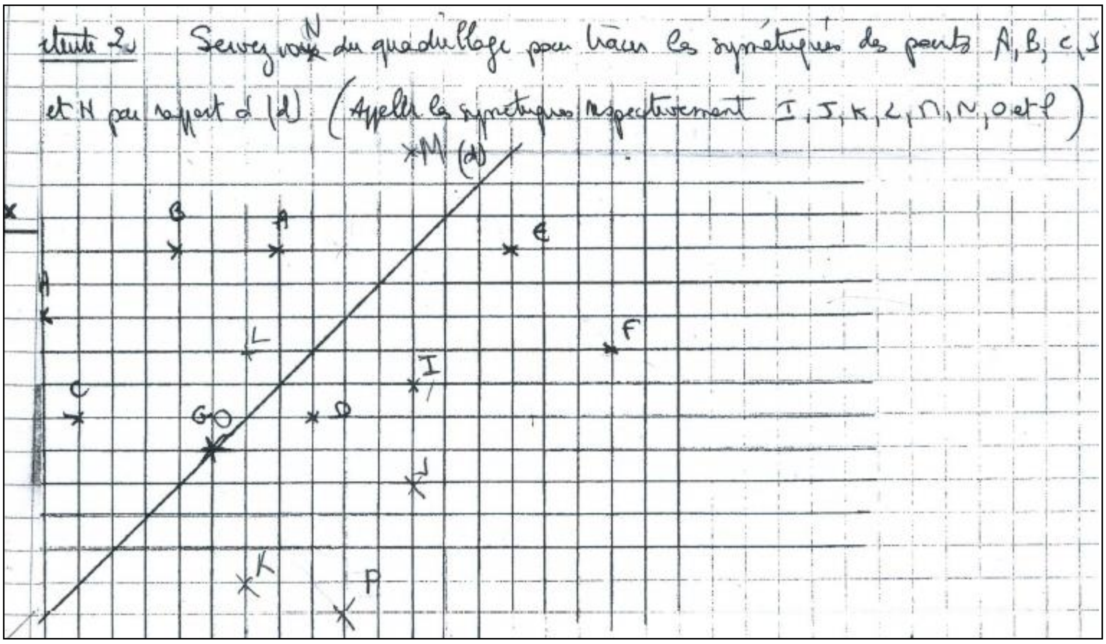


Figure 7-1. Exercice de construction du symétrique d'un point dans la classe 6e du professeur M2

En classe de 6e, le professeur M2 n'utilise pas les notions de milieu d'un segment, et il n'évoque pas l'égalité des distances. Il ne parle pas non plus de la perpendicularité, et il ne travaille pas sur la mesure d'un angle. En général, le professeur M2 prend appui sur les feuilles quadrillées pour construire des points symétriques et des figures symétriques, il emploie aussi la procédure de pliage. En conséquence les longueurs et les angles n'apparaissent pas en tant que notions dans l'enseignement de la symétrie axiale du professeur M2. En revanche, le professeur M1 fait travailler les élèves sur des constructions à la règle et le compas, il évoque souvent les longueurs et les angles dans son discours :

« M1: xxx j'ai plutôt intérêt à avoir une équerre que de mesurer, avoir un rapporteur que une règle, c'est vrai qu'on peut le faire, mais on rapportera des erreurs de mesure. Donc, quand je parle de droite perpendiculaire, ça évoque tout de suite, ce que je peux utiliser : l'équerre. Puis deuxième remarque que nous a faite Marie, la droite d passe par le milieu du segment Aa. Comment il passe par le milieu, peut-on dire que le segment Aa et A'a étaient comment? Marie?
Marie : bah l'intersection
E: de même longueur
M1: de même longueur. Bon, est-ce qu'on sait reporter des segments de même longueur? Donc, reporter des segments de même longueur, ça évoque un outil qui est ?
Es: le compas
M1: Autrement dit, avec une équerre je sais tracer deux droites qui sont perpendiculaires, quand je sais que ces droites sont perpendiculaires je suis capable de trouver son point d'intersection et avec le compas je suis capable de reporter les longueurs. Donc, finalement, avec une équerre et un compas je suis capable de quoi?... De trouver le symétrique d'un point par rapport à une? (Extrait séance 3, M1, 2009-2010)

Les enseignants M1 et M2 étudient aussi la propriété de conservation des grandeurs de deux figures symétriques de manières différentes. Le premier institutionnalise cette propriété au début du chapitre, et les élèves s'en servent pour construire des figures symétriques. Par contre, le professeur M2 enseigne la propriété de conservations à la fin du chapitre. De plus, les exercices proposés par M2 ne nécessitent pas l'utilisation directe de ce théorème, car en général, les problèmes font appel à une technologie relative aux figures superposables et le pliage.

En conclusion, même si les grandeurs sont des éléments très importants dans la construction de la notion de symétrie axiale, leur fonction dépend des technologies présentes dans le discours du professeur dans leurs enseignements, de la place et de la fonction de ces technologies dans la résolution des problèmes. Une technologie basée sur les figures superposables et le pliage réduit considérablement la place de grandeurs dans la construction de la notion de symétrie axiale. La fonction des grandeurs est réduite à la description de tâches, elles disparaissent du discours technologique. Par contre, une technologie qui prend appui sur les notions de milieu et de perpendicularité amène à faire apparaître les longueurs et les angles dans les justifications des techniques.

4.1.2 Les raisons d'être d'un chapitre « règle et compas »

Dans les enseignements du professeur M1 et du professeur M2 pendant l'année 2010-2011, nous pouvons observer un chapitre appelé « Règle et compas ». Ce chapitre n'a pas le même statut dans les deux classes. D'un côté, le professeur M1 enseigne dans ce chapitre les notions premières des constructions. Il s'agit de définir quelques éléments technologiques de la géométrie plane comme la droite, demi-droite, le segment, les points alignés, etc., et de donner des notations et du vocabulaire. Il développe les sujets d'étude « reporter une longueur », « construire un cercle » et « construire un triangle ». Ainsi, ce chapitre rejoint l'étude des « quadrilatères et triangles », et en conséquence, nous le considérons comme deux thèmes d'étude du secteur « figures planes ». D'un autre côté, le professeur M2 divise l'enseignement du chapitre « Règle et compas » en les thèmes d'étude : « règle » et « compas » où il fait travailler les élèves sur les sujets d'étude : « déterminer la longueur d'un segment », « tracer un segment de mesure donnée », « tracer le milieu d'un segment » et « tracer un cercle de rayon donné ».

De cette manière, l'espèce de grandeur « longueur » est présente dans l'enseignement du chapitre « Règle et compas » chez les deux enseignants M1 et M2, mais la place accordée à la grandeur longueur varie pour la construction du domaine géométrique. Effectivement, le professeur M2 propose les types de tâches « reporter une longueur » et « tracer un segment de mesure donnée » pour ensuite étudier le cercle, et plus particulièrement le type de tâches « tracer un cercle de rayon donné » dans le même chapitre. Ainsi, ces types de tâches relatifs aux longueurs n'apparaissent dans aucun autre chapitre du domaine géométrique. Les tâches proposées par le professeur M2 travaillent plutôt l'aspect objet des longueurs :

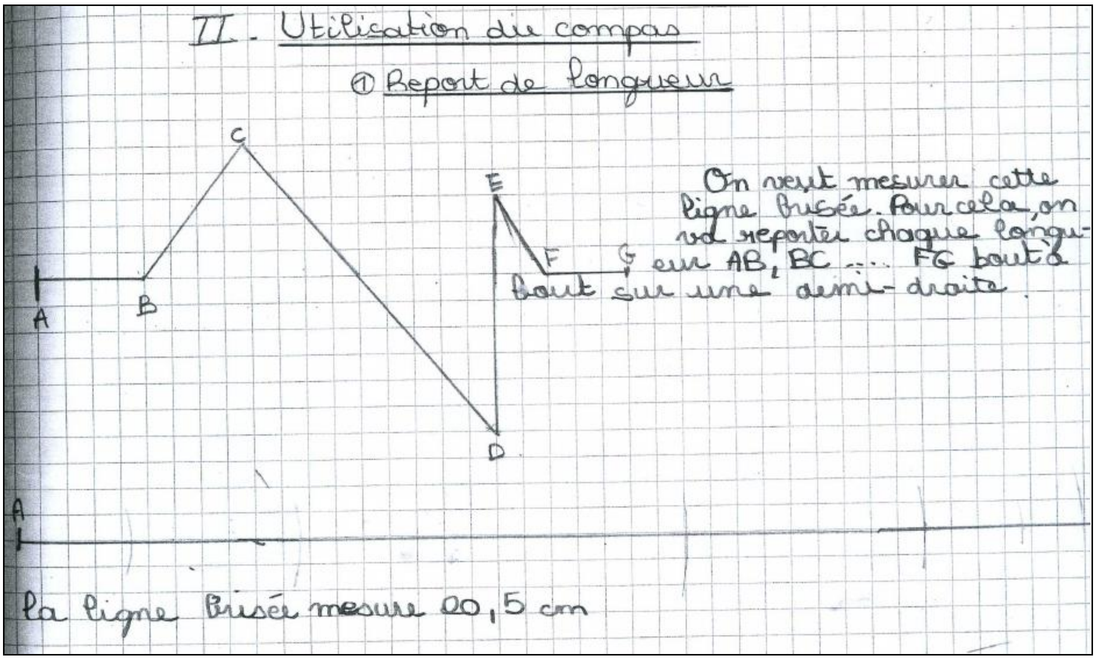


Figure 7-2. Tâche relative au chapitre « règle et compas », 6e, M2, 2010-2011

En revanche, le professeur M1 étudie le report d'une longueur pour après enseigner les constructions des cercles, des losanges et des triangles. De plus, il ajoute à l'enseignement des reports des longueurs, les reports des angles. Ces types de tâches sont retravaillés dans un autre chapitre de la géométrie les « quadrilatères et le triangle rectangle », où il s'agit de construire ces différentes figures planes en connaissant leurs longueurs de côtés et/ou leurs angles. On peut repérer dans le cahier de cours une technologie associée :

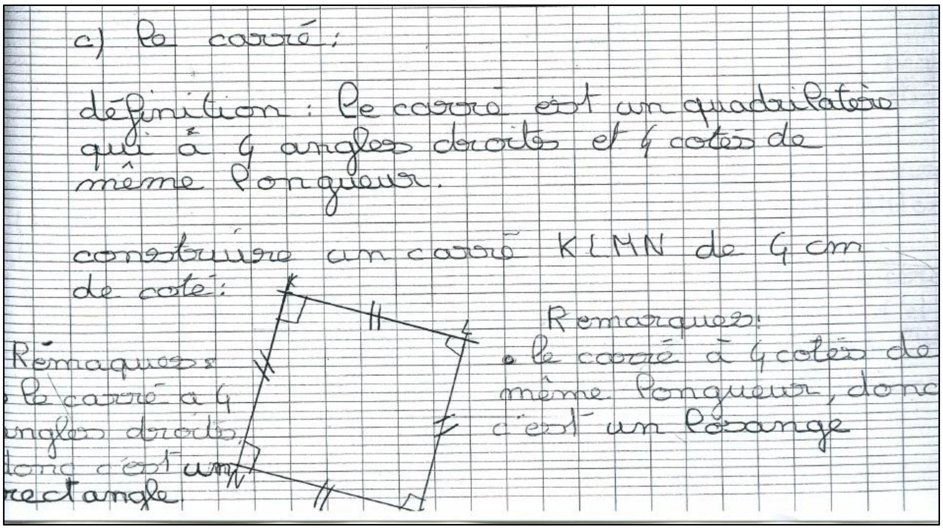


Figure 7-3. Technologie relative au chapitre « règle et compas », 6e, M1, 2010-2011

Ainsi, les longueurs et les angles ont une place très importante dans les constructions géométriques chez le professeur M1. Dans un premier temps, elles sont étudiées en tant qu'objets. Elles fournissent la construction des éléments technologiques fondamentaux pour les constructions de figures planes, et elles deviennent ainsi des outils. En conséquence, dans les enseignements de ce professeur, les raisons d'être de l'étude des longueurs et des angles sont l'apprentissage des constructions géométriques en 6e. Contrairement au professeur M1, l'enseignant M2 centre le chapitre « règle et compas » dans un travail sur les longueurs en tant qu'objet. Il ne les utilise que pour les constructions des cercles, et les grandeurs sont moins présentes en tant qu'outil dans le domaine géométrique (même si elles sont présentes implicitement) chez le professeur M2. Les longueurs restent ainsi dans un même thème sans que s'établissent des liens avec d'autres thèmes.

4.1.3 Les grandeurs dans les thèmes du domaine géométrique

Les grandeurs occupent une place importante dans le domaine géométrique, en tant qu'outil et en tant qu'objet dans les classes de 6e et 5e. En effet, dans les secteurs « symétrie axiale » en 6e et « symétrie centrale » en 5e elles constituent les éléments principaux d'une technologie relative à ces notions, et dans le secteur « figures planes », les grandeurs longueur et angle sont premièrement étudiés comme des objets, pour ensuite être les outils premiers de la construction de figures planes. Les raisons d'être de grandeurs dans la géométrie s'expliquent en relation à la construction de ces secteurs. À l'école élémentaire, les élèves travaillent la symétrie axiale à l'aide du pliage. En classe de 6e, il s'agit d'amener les élèves vers une géométrie plus formelle. Ainsi, la symétrie axiale doit être construite avec les notions d'angle droit et égalité des longueurs. Cependant, la sollicitation de ces éléments technologiques est plus importante dans les classes du professeur M1 que dans la classe du

professeur M2, ce qui a pour conséquence une faible présence des grandeurs dans l'enseignement du professeur M2.
Au collège, les élèves doivent apprendre à construire des figures planes simples. Ce contenu sollicite une appropriation des notions de longueur et d'angle en tant qu'objets. Dans les classes de 6^e du professeur M1, ces deux grandeurs constituent la base des constructions géométrique, contrairement à la classe de 6^e du professeur M2, où elles ne restent travaillées que comme des objets.

4.2 Les thèmes du domaine numérique

Comme nous l'avons dit, dans ce domaine d'étude, les grandeurs apparaissent la plupart du temps dans les exercices proposés par les enseignants M1 et M2. Pour les deux enseignants, il n'existe qu'un seul chapitre du numérique, celui consacré à la division, où nous n'avons pas trouvé des traces de grandeurs. Le tableau suivant présente les thèmes d'étude relatifs aux grandeurs dans le numérique :

Classe	**Secteurs du programme**	**Thèmes du professeur**
6^e, M1, 2009-2011	Fractions	Nombres en écriture fractionnaire
	Nombres décimaux	Addition et propriétés
		Soustraction et propriétés
		Multiplication
		Division
6^e, M1, 2010-2011	Nombres entiers et décimaux	Multiplication et division par 10, 100 et 1000
		Additions
		Soustractions
		Multiplications
		Divisions
	Nombres en écriture fractionnaire	Droite graduée
		Fractions
		Multiplication par une fraction
6^e, M2, 2010-2011	Fractions	Notions
		Additions et soustractions
		Multiplications
5^e, M2, 2009-2010	Fractions	Notions
	Nombres relatifs	Repérage
		Distances

Tableau 7-10. Présence des grandeurs dans les thèmes du domaine numérique dans les enseignements des professeurs M1 et M2

Dans ce tableau, on voit que quatre types de nombres sont étudiés en 6^e et 5^e, les nombres décimaux, les entiers, les nombres en écriture fractionnaire et les nombres relatifs. Dans chacun de ces secteurs, les grandeurs apparaissent dans les thèmes d'étude relatifs aux opérations, à leurs propriétés et au repérage. Dans la suite, nous montrerons la niche qu'occupent les grandeurs dans ces thèmes.

4.2.1 *L'apparition du thème « multiplication par 10, 100 et 1000 » dans la progression du professeur M1*

Dans l'enseignement du professeur M1 en 2010-2011, on voit apparaître un thème d'étude intitulé « multiplication par 10, 100 et 1000 ». L'introduction de ce chapitre représente un choix important fait par le professeur M1 relativement à l'enseignement des grandeurs. Effectivement, même si le nom de ce secteur ne se montre pas immédiatement comme un habitat pour les grandeurs, il constitue le noyau principal des changements d'unités des espèces de grandeurs.

Pendant l'année 2009-2010, les changements d'unités étudiées étaient les conversions d'unités de temps dans le chapitre « Division » et les conversions d'unités d'aire dans le chapitre « Périmètres et aires ». Néanmoins, le nouveau thème « multiplication par 10, 100, 1000 » s'étend à l'étude de changements d'unités de longueur, de masse, de contenance et de volume. Voici un exemple :

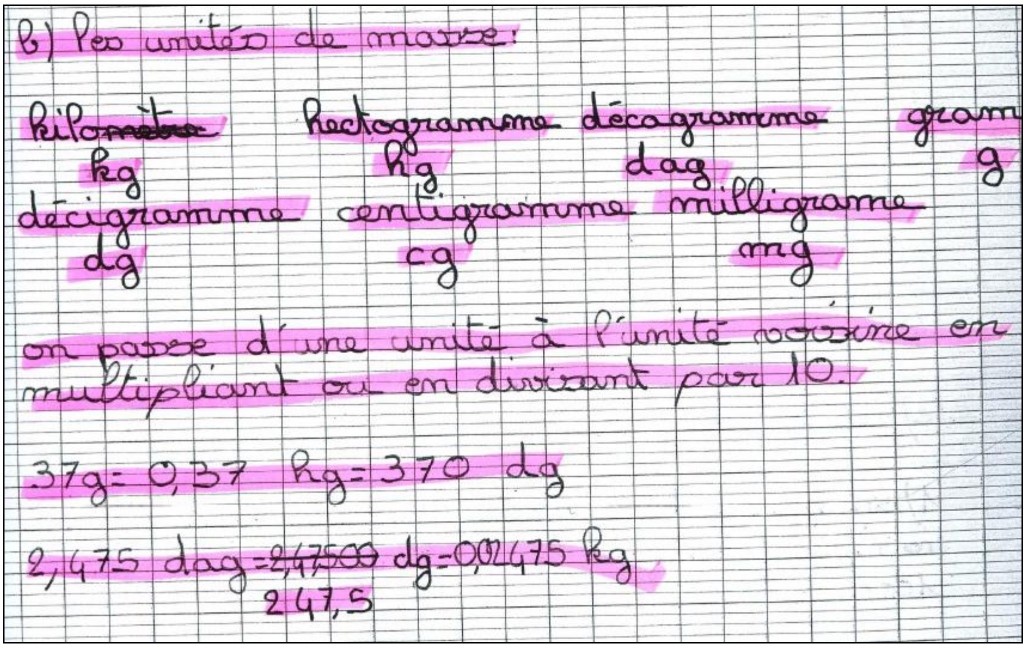
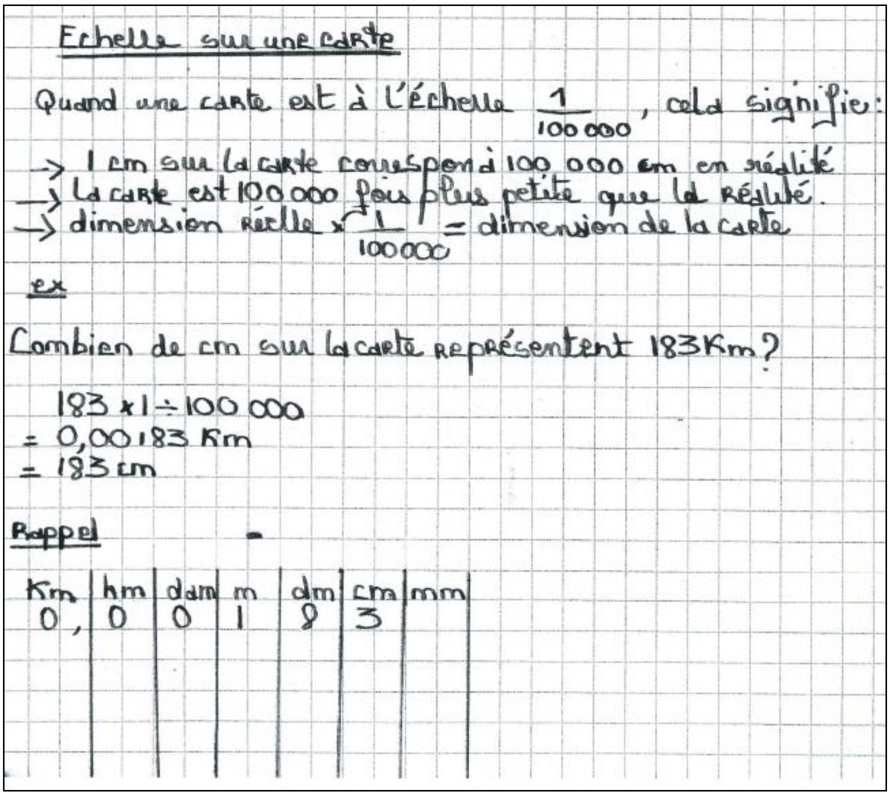


Figure 7-4. Conversion d'unités, 6e, M1, 2010-2011

On voit bien que la technologie sous-jacente aux changements d'unités s'appuie la multiplication par 10, 100 et 1000. Il s'agit de faire des changements d'unités de masse en multipliant ou en divisant par les puissances de 10, cette technique est institutionnalisée par M1 en classe de 6e. Par contre dans la classe de 6e du professeur M2, les techniques relatives aux conversions d'unités sont considérées comme un pré-requis. Effectivement, le professeur M2 écrit « rappel » pour introduire un tableau de changements d'unités de longueurs dans le chapitre « Périmètres et aires » et il les utilise pour étudier les échelles dans le chapitre « Quotients et applications », comme on le voit dans l'extrait suivant :



Echelle sur une carte

Quand une carte est à l'échelle $\frac{1}{100\,000}$, cela signifie :

-> 1 cm sur la carte correspond à 100 000 cm en réalité

-> La carte est 100 000 fois plus petite que la réalité.

-> dimension réelle $\times \frac{1}{100\,000}$ = dimension de la carte

ex

Combien de cm sur la carte représentent 183 Km ?

183 × 1 ÷ 100 000

= 0,00183 Km

= 183 cm

Rappel

Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0,	0	0	1	8	3	

Figure 7-5. Conversions d'unités, 6e, M2, 2010-2011

Dans cet exemple, l'enseignant M2 rappelle la technique d'utilisation du tableau de longueurs pour faire les changements d'unités.

En conclusion, les grandeurs participent de la construction du domaine numérique chez le professeur M1, notamment pour l'enseignement de la multiplication, à travers les changements d'unités. Par contre, chez le professeur M2, les changements d'unités apparaissent dans les explications lors d'un rappel à propos des notions mathématiques du professeur.

4.2.2 *Les grandeurs comme liens entre le numérique et l'extra-mathématique*

En général, dans la classe du professeur M1, les grandeurs apparaissent dans le moment du travail de la technique, c'est-à-dire dans les exercices. Elles servent à exemplifier les opérations sur les nombres dans le cadre de problèmes de la vie quotidienne, comme le montre l'exercice suivant du manuel de la collection *Diabolo* 6DB05 proposé par le professeur M1 en 2010-2011 :

74 Pour fabriquer des sandwiches lors de la kermesse, Benjamin a utilisé :
- 9 baguettes de pain ;
- 500 grammes de beurre ;
- 1,5 kilogramme de jambon.

Il a confectionné trois sandwiches par baguette et les a tous vendus.

1. Sachant qu'un kilogramme de beurre coûte 5,50 euros, qu'une baguette coûte 1,05 euro et qu'un kilogramme de jambon coûte 16 euros, déterminer la somme d'argent que Benjamin a dépensée.

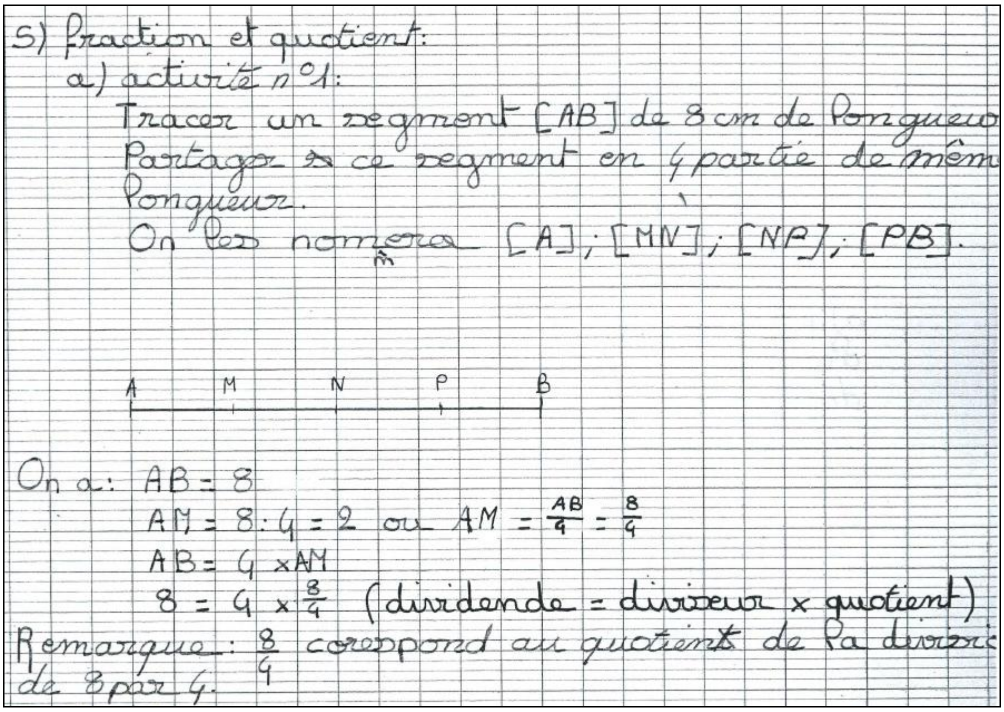
2. Il a vendu chaque sandwich au prix de 2 euros. Quel bénéfice a-t-il fait ?

Figure 7-6. Extrait page 43, exercices 74, manuel 6DB05

Dans cet exemple, on place les élèves dans un cadre de la vie quotidienne, en proposant un problème où on trouve les grandeurs masse et prix. Pour la question 1, les élèves peuvent poser les calculs « 5,50 x 0,5 + 9 x 1,05 + 16 x 1,5 » pour déterminer la somme d'argent dépensé par Benjamin. Ils mettent donc en place des connaissances relatives aux opérations sur les nombres décimaux. Ainsi, dans la classe du professeur M1, il s'agit d'étudier des problèmes qui mettent en relation des grandeurs pour travailler les techniques relatives aux opérations sur les nombres. Dans la classe du professeur M2, nous avons trouvé très peu d'exercices de ce type, ce professeur prend appui sur les grandeurs plutôt pour enseigner la notion de nombre.

4.2.3 Les grandeurs et la construction des nombres

Nous avons vu que les grandeurs prennent une place très importante dans l'enseignement de la multiplication par 10, 100 et 1000 dans la classe de 6e du professeur M1 en 2010-2011. De plus, les grandeurs participent à la construction de la notion de fraction dans la même année chez M1, comme le montre l'extrait suivant :


5) fraction et quotient:

a) activité n°1:

Tracer un segment [AB] de 8 cm de longueu

Partager ce segment en 4 partie de mêm

longueur.

On les nomera [A]; [MN]; [NP]; [PB].

A M N P B

On a: $AB = 8$

$AM = 8 : 4 = 2$ ou $AM = \frac{AB}{4} = \frac{8}{4}$

$AB = 4 \times AM$

$8 = 4 \times \frac{8}{4}$ (dividende = diviseur x quotient)

Remarque: $\frac{8}{4}$ correspond au quotient de la divisi

de 8 par 4.

Figure 7-7. La longueur dans la construction de la notion de fraction, 6e, M1, 2010-2011

Ainsi, les grandeurs participent à la construction des notions du domaine numérique dans d’autres moments de l’étude que celui du travail de la technique chez le professeur M1.

Si on compare les enseignements des professeurs M1 et M2, on voit que le nombre d’exercices concernant les grandeurs proposés par ces professeurs est très différent dans le domaine du numérique. En 2009-2010, nous avons compté dans le cahier « exercices » 8 problèmes relatifs aux grandeurs dans la classe de 6e de M1. En 2010-2011, nous avons trouvé pour le même enseignant 12 exercices relatifs aux grandeurs. En revanche pour le professeur M2 en 2010-2011, nous n’avons compté que 4 exercices concernant des problèmes sur les grandeurs. De plus, sur les 4 exercices proposés 3 correspondent à des représentations de fractions numériques comme des fractions d’une espèce de grandeur. Ce type de problème est absent de l’enseignement du professeur M1. Voici un exemple d’une activité proposée par l’enseignant M2 :

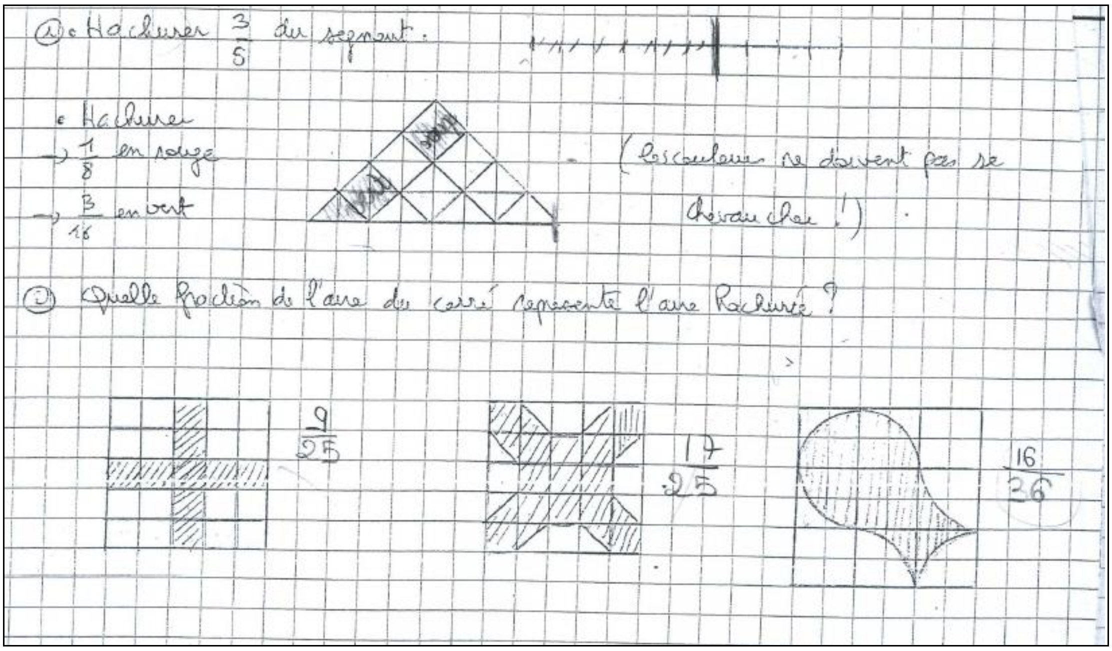


Figure 7-8. Exercice proposé par M2 sur les fractions, 6e, M2, 2010-2011

Ainsi, deux types de représentations des fractions sont étudiés dans la classe du professeur M2. Soit les élèves associent le fractionnement d'une « longueur » à un nombre fractionnaire, soit ils comparent des aires à travers une fraction. Cependant, le statut de la grandeur n'est pas le même dans les exercices 1) et 2) de la figure 7-8. Dans le premier, on parle de l'objet, le segment, et non de la longueur, dans le deuxième il est bien écrit « fraction de l'aire du carré ». Cela montre la difficulté à différencier entre l'objet et la grandeur.

4.2.4 Les grandeurs dans les thèmes du domaine numérique

Dans le domaine du numérique, les grandeurs sont présentes dans tous les secteurs d'étude, mais elles occupent des niches différentes. Dans la classe du professeur M1, elles exemplifient les opérations des nombres décimaux, notamment la multiplication avec les conversions d'unités, ainsi les grandeurs occupent une place très importante dans les interrelations entre les domaines du numérique et de l'extra-mathématique. Dans la classe du professeur M2, elles servent à construire les notions de fraction.

4.3 Les thèmes du domaine des fonctions

Le domaine du fonctionnel est représenté par l'étude de la proportionnalité en classe de 6e, le tableau 7-11 indique les thèmes où des traces des grandeurs peuvent être repérées dans les progressions des enseignants M1 et M2 :

Classe	Secteurs du programme	Thèmes du professeur
6^{e}, M1, 2009-2011	Proportionnalité	Proportionnalité
		Pourcentages
		Longueur d'un cercle
6^{e}, M1, 2010-2011	Proportionnalité et pourcentages	Proportionnalité
		Pourcentages
		Échelles
6^{e}, M2, 2010-2011	Quotients et applications	Proportionnalité
5^{e}, M2, 2009-2010	-	-

Tableau 7-11. Présence des grandeurs dans les thèmes du domaine fonctions dans les enseignements des professeurs M1 et M2

4.3.1 *Deux niveaux pour la proportionnalité*

On observe des niveaux différents de codétermination où se situe la proportionnalité. Dans la progression du professeur M1, la proportionnalité est un secteur d'étude, par contre dans la progression du professeur M2, elle se situe au niveau de thème d'étude.

- La proportionnalité dans l'enseignement du professeur M1

Comme on voit dans le tableau ci-dessus, dans la classe du professeur M1, il s'agit d'étudier la proportionnalité, les pourcentages et les échelles dans le secteur « proportionnalité et pourcentages ». Comme cette notion est construite à partir de l'étude des problèmes qui mettent en relation des grandeurs, celles-ci occupent une grande place dans l'enseignement de la proportionnalité chez le professeur M1. Dans la classe de 6^{e} du professeur M1, on s'intéresse aux propriétés de la proportionnalité. Par exemple, le professeur M1 introduit le chapitre « proportionnalité » l'année 2010-2011 par l'exercice suivant :

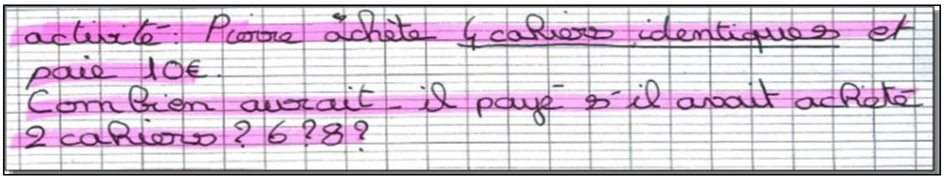

activité : Pierre achète 4 cahiers identiques et paie 10€.
Combien aurait-il payé s'il avait acheté 2 cahiers ? 6 ? 8 ?

Figure 7-9. Exercice d'introduction au chapitre proportionnalité, 6^{e}, M1, 2010-2011

Au tableau les élèves proposent les types de procédures suivantes :

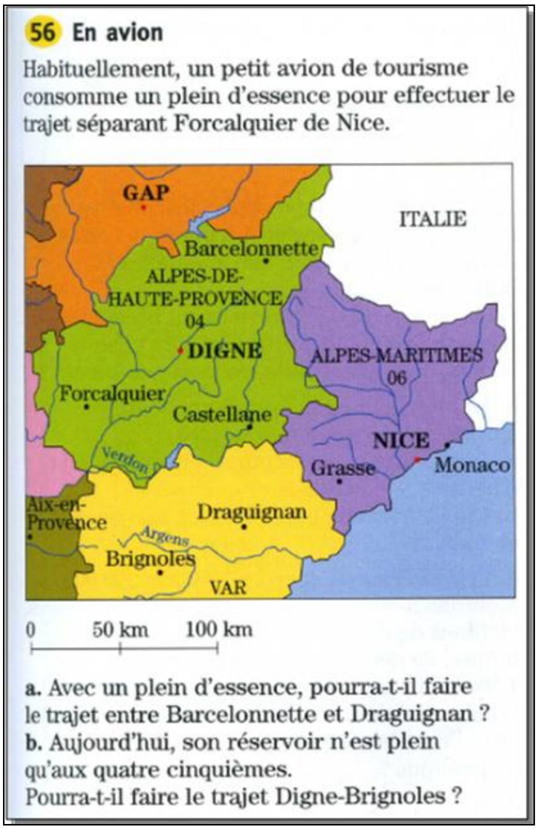
- Si on achète 2 cahiers, on va payer 2 fois moins que pour 4 cahiers, soit 10:2=5
- Si on achète 1 cahier, on le paie 10:4=2,50 €, donc 6 cahiers coutent 2,5 x 6 = 15 €

Figure 7-10. Procédures et réponses à l'exercice de la figure 7-9

On voit donc que l'enseignant emploie la propriété multiplicative dans le langage naturel pour résoudre l'exercice d'introduction et le passage par l'unité dans le cadre des grandeurs.

- La proportionnalité dans l'enseignement du professeur M2

Comme nous l'avons dit, dans la classe du professeur M2, la proportionnalité est abordée après avoir étudié les quotients, les proportions et les pourcentages dans un domaine du numérique. Le premier exemple de proportionnalité concernant les échelles :



56 En avion

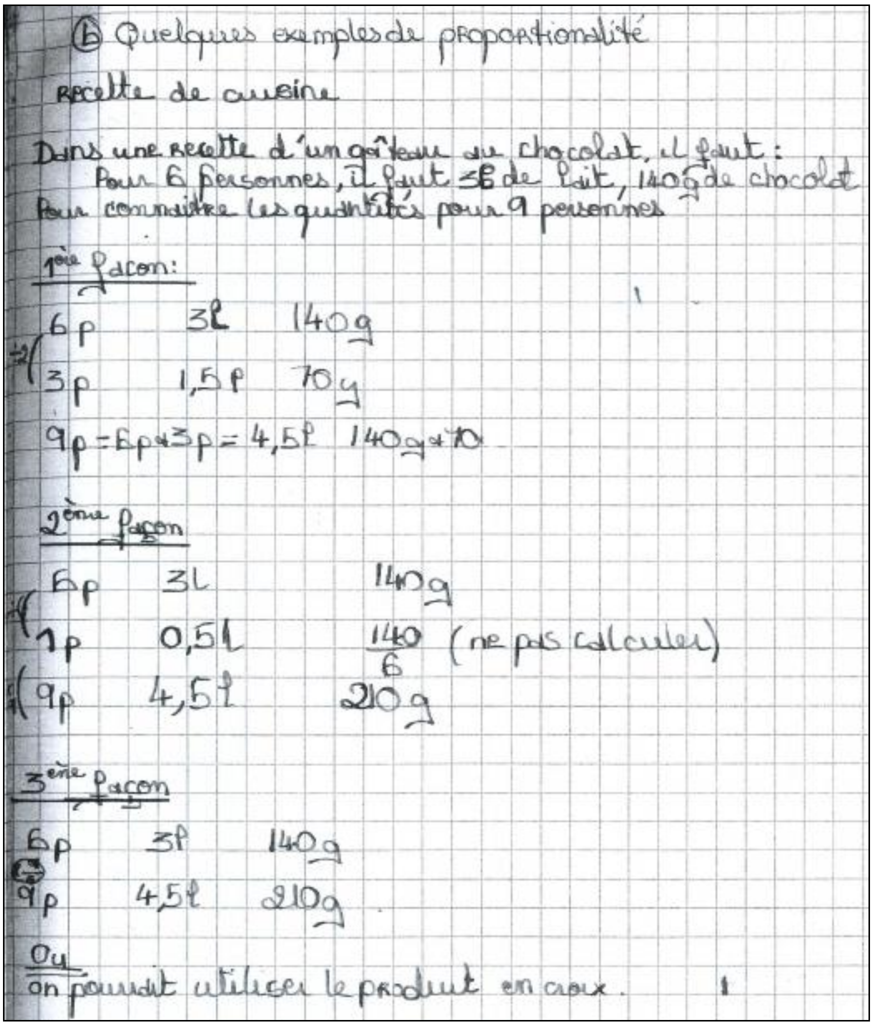
Habituellement, un petit avion de tourisme consomme un plein d'essence pour effectuer le trajet séparant Forcalquier de Nice.

a. Avec un plein d'essence, pourra-t-il faire le trajet entre Barcelonnette et Draguignan ?
b. Aujourd'hui, son réservoir n'est plein qu'aux quatre cinquièmes.
Pourra-t-il faire le trajet Digne-Brignoles ?

Figure 7-11. Premier exercice du thème proportionnalité, 6e, M2, 2010-2011

Pour résoudre ce problème, les élèves utilisent la définition d'échelle, c'est-à-dire, le coefficient de proportionnalité. Les situations sont souvent présentées à l'aide d'un tableau. Ainsi, les raisonnements utilisant le langage naturel, et aussi les grandeurs ne sont pas travaillées dans la classe du professeur M2.

Dans cette classe, la proportionnalité appartient au secteur « quotients et applications » en tant que thème d'étude. Elle est étudiée au même niveau (du thème) que les « quotients », les « proportions » et les « pourcentages ». Ces derniers sont organisés autour d'une théorie du numérique. La proportionnalité prend aussi une place beaucoup plus réduite que dans la classe du professeur M1. De plus, les éléments technologiques relatifs à ces notions s'appuient majoritairement sur le cadre du numérique et non sur le cadre de grandeurs. En effet, l'étude du chapitre « quotients et applications » prend appui sur des technologies relatives à la notion de quotient et les proportions entre nombres. Les grandeurs n'apparaissent pas dans l'enseignement des quotients, proportions et pourcentages. Or, après cet enseignement, le professeur M2 change de cadre en introduisant les unités et les grandeurs pour travailler la proportionnalité à travers des problèmes qui relèvent de l'extra-mathématique, comme dans l'activité suivante :


6) Quelques exemples de proportionnalité

Recette de cuisine

Dans une recette d'un gâteau au chocolat, il faut :
Pour 6 personnes, il faut 3l de lait, 140g de chocolat
Pour connaître les quantités pour 9 personnes

1ère façon:

6p 3l 140g
3p 1,5l 70g
9p = 6p+3p = 4,5l 140g+70

2ème façon

6p 3L 140g
1p 0,5l $\frac{140}{6}$ (ne pas calculer)
9p 4,5l 210g

3ème façon

6p 3l 140g
9p 4,5l 210g

Ou
on pourrait utiliser le produit en croix.

Figure 7-12. Problème de proportionnalité, 6e, M2, 2010-2011

Alors, il semble que les thèmes d'étude « quotients », « proportions » et « pourcentages » et le thème « proportionnalité » prennent appui sur des technologies distinctes. En conclusion, ces thèmes sont structurés autour des organisations mathématiques régionales relatives à des domaines différents.

4.3.2 Les grandeurs dans les thèmes du domaine fonctions

Dans ce domaine, les grandeurs sont présentes à travers la proportionnalité. Comme nous l'avons vu dans notre étude épistémologique, on peut étudier cette dernière notion dans le cadre du numérique en prenant comme éléments premiers les proportions et dans le cadre des fonctions, en étudiant la proportionnalité comme une application linéaire. Les directives institutionnelles sont bien conformes à cette dernière approche. L'enseignant M1 construit des organisations mathématiques conformes aux programmes, cependant l'enseignant M2 semble inscrire la proportionnalité dans le domaine du numérique tout en prenant en compte les contraintes institutionnelles. L'enseignant M2 effectue un changement du domaine numérique vers celui des fonctions à travers l'étude de la proportionnalité. Une étude plus approfondie est nécessaire pour clarifier la niche occupée par les grandeurs dans les deux approches théoriques et observer le passage entre les deux cadres numériques.

4.4 Les thèmes du domaine grandeurs

Nous rappelons que les enseignants M1 et M2 et les manuels scolaires utilisés par ces enseignants ne font pas apparaître un domaine de grandeurs et de la mesure en soi. Nous avons organisé les thèmes d'étude qui pouvaient constituer un domaine des grandeurs :

Classe	**Secteurs du programme**	**Thèmes du professeur**
6^e, M1, 2009-2011	Périmètres	Périmètre d'une figure simple
	Aires	Conversion d'unités d'aire
		Calcul d'aires
	Angles	Mesure d'angles
		Construction d'angles
6^e, M1, 2010-2011	Angles	Utilisation du rapporteur
		Construction d'un angle de mesure donnée
	Aire	Aire d'une figure
		Aire d'un triangle
	Périmètre	Périmètre de figures usuelles
		Longueur d'un cercle
6^e, M2, 2010-2011	Angles	Mesure d'un angle
		Angles particuliers
		Tracer un angle de mesure donné
		Bissectrice d'un angle
	Aire	Calcul d'aires
		Mesure d'aires
		Comparaison d'aires
		Conversion d'unités d'aire
	Périmètre	Calcul de périmètres
		Comparaison de périmètres
5^e, M2, 2009-2010	Angles	Angles d'un triangle
		Angles et droites parallèles
	Aires	Parallélogrammes
		Triangles

Tableau 7-12. Thèmes du domaine grandeurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2

On remarque dans le tableau que les deux enseignants étudient les mêmes secteurs dans les trois classes de 6^e. Ainsi, nous allons analyser les thèmes de chaque secteur défini par une espèce de grandeur.

4.4.1 Des enseignements différents pour les grandeurs

Dans le tableau ci-dessus, nous observons encore que les seules espèces de grandeurs qui se trouvent au niveau de secteurs d'étude sont les périmètres, les aires et les angles dans les progressions de deux enseignants, ni les longueurs, ni volumes n'ont une place comme chapitres. On rappelle aussi que les périmètres et les aires sont étudiés dans un même chapitre et les angles dans un autre chapitre dans les trois classes de 6e. Ce découpage n'est conforme à aucun des deux programmes des périodes A1 et A4, il est plutôt proche de la structuration proposée par le manuel de la collection multi-maths 6MU05. Malgré la ressemblance des secteurs dans les enseignements des professeurs M1 et M2, on observe des thèmes distincts pour les mêmes secteurs d'étude. Comme on verra dans les paragraphes suivants, l'enseignant M1 étudie des thèmes relevant plutôt du cadre numérique, notamment le calcul des aires et les changements d'unités. Par contre, l'enseignant M2 travaille aussi sur la comparaison des aires, la mesure des aires. Il semble que l'enseignant M2 s'intéresse davantage aux aires comme des grandeurs que l'enseignant M1.

4.4.2 Le secteur « angles » dans les enseignements des professeurs M1 et M2

L'enseignant M1 propose d'étudier les mêmes thèmes dans les classes de 6e de 2009-2010 et de 2010-2011. Il s'agit de travailler la mesure des angles en utilisant le rapporteur et la construction des angles d'une mesure donnée. Il enseigne d'autres types de tâches relatifs aux angles dans d'autres chapitres. Par exemple, dans le chapitre « symétrie axiale », les élèves résolvent des problèmes de construction de la bissectrice d'un angle ou dans le domaine de la géométrie, la classe étudie le type de tâches « reporter un angle ». En revanche, le professeur M2 étudie tous ces types de tâches dans un même chapitre, celui des « angles ».

On a vu dans le domaine géométrique que le professeur M1 utilise des tâches relatives aux longueurs et aux angles pour construire des figures planes. De plus, ce professeur nous a affirmé pendant l'entretien qu'il considérait les grandeurs comme des contenus transversaux et comme des outils pour l'enseignement d'autres notions. Ainsi, même si l'enseignant M1 définit un chapitre « angles », les types de tâches relatifs à cette espèce de grandeur sont présents dans d'autres chapitres tout au long de l'année. Contrairement à l'enseignant M1, l'enseignant M2 regroupe tous les types de tâches relatifs aux angles dans un seul chapitre.

4.4.3 Les secteurs « périmètres » et « aires » dans les enseignements des professeurs M1 et M2 en classe de 6e

Dans ce chapitre, il s'agit d'étudier le calcul ou la mesure des périmètres et des aires de figures planes. Les deux enseignants institutionnalisent les formules de calcul des périmètres et des aires de figures usuelles comme le carré, le triangle rectangle et le rectangle.

Le professeur M1 avance dans son discours un enseignement des grandeurs fragmenté avec le but d'utiliser les grandeurs comme des outils pour l'étude d'autres contenus et il présente un chapitre consacré aux périmètres et aires. Néanmoins, on peut trouver ces espèces de grandeurs dans d'autres chapitres. Par exemple, les changements d'unités sont travaillés dans le domaine du numérique, ou encore, le calcul de la longueur d'un cercle est repris comme exemple de situation de proportionnalité. Au niveau de la présentation des contenus, cet enseignant commence ce chapitre en donnant une définition de périmètre et il institutionnalise les formules de périmètre de quelques surfaces usuelles comme dans la figure 7-13:

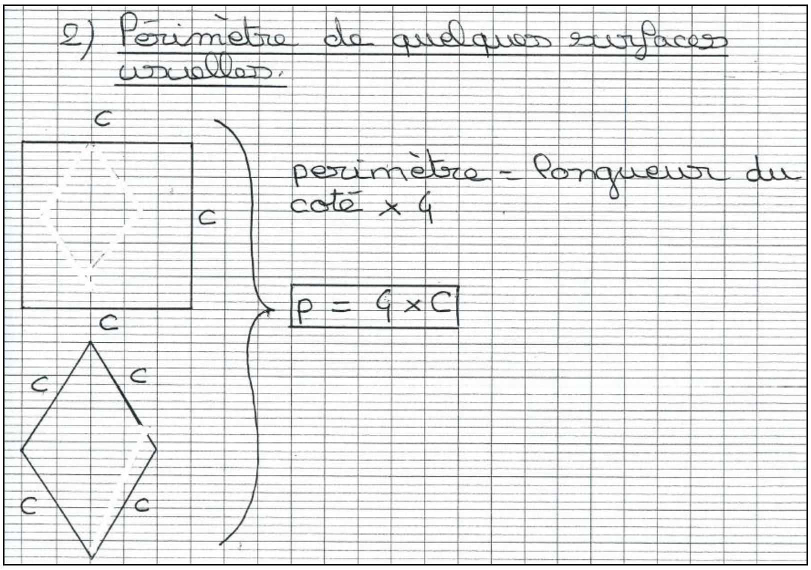
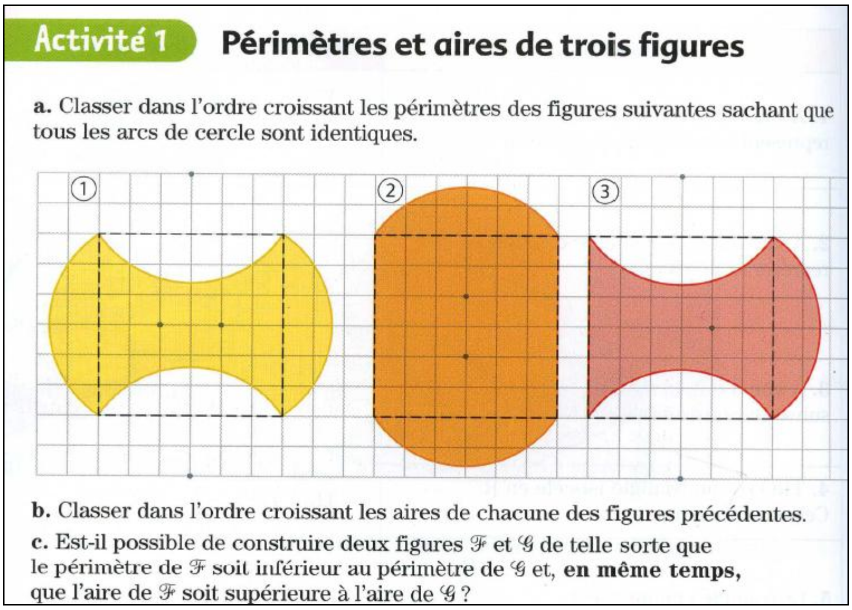


Figure 7-13. Enseignement du périmètre, 6e, M1, 2010-2011

On voit donc que le chapitre commence directement par l'étude des formules. Même si les deux enseignants proposent des types de tâches concernant le comptage d'unités, le professeur M2 donne une plus grande place à des procédures relevant du cadre des grandeurs. En effet, il institutionnalise les découpages et les recollements au niveau du sujet d'étude dans sa progression, de plus plusieurs activités relatives au comptage d'unités sont mises en avant, comme dans cet exemple d'activité donnée par le professeur M2 :



Activité 1 **Périmètres et aires de trois figures**

a. Classer dans l'ordre croissant les périmètres des figures suivantes sachant que tous les arcs de cercle sont identiques.

b. Classer dans l'ordre croissant les aires de chacune des figures précédentes.

c. Est-il possible de construire deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de telle sorte que le périmètre de $\mathcal{F}$ soit inférieur au périmètre de $\mathcal{G}$ et, **en même temps**, que l'aire de $\mathcal{F}$ soit supérieure à l'aire de $\mathcal{G}$?

Figure 7-14. Enseignements des aires et périmètres, 6e, M2, 2010-2011

Ainsi, l'enseignant M2 propose avant l'étude des formules plusieurs exercices relatifs aux techniques de découpage-recollement et dénombrement d'unités en classe de 6e, comme celui de la figure 7-14.
En conclusion, le professeur M1 met en avant l'étude des aires dans le cadre numérique et le professeur M2 centre l'enseignement des aires dans le cadre grandeurs en classe de 6e.

4.4.4 Le chapitre « aires » dans la classe de 5e du professeur M2

Contrairement à la classe de 6e, l'objectif en classe de 5e est d'institutionnaliser les formules d'aire d'un parallélogramme et d'un triangle. Les exercices proposés par le professeur M2 dans cette classe relèvent majoritairement du cadre numérique. Néanmoins, il se sert des procédures travaillées en classe de 6e, comme le découpage-recollement et le dénombrement d'unités, pour justifier les formules d'aire. L'enseignement du professeur M2 montre bien comment l'étude des grandeurs croise les domaines de la géométrie, les grandeurs et le numérique dans le passage de la classe 6e vers la classe de 5e.

4.4.5 Bilan sur les espèces des grandeurs

Dans cette partie, on s'aperçoit que l'étude des grandeurs peut être abordée de différentes manières. D'un côté, les grandeurs existent dans le cadre des grandeurs et dans le cadre du numérique. Le professeur M1 privilège l'étude des formules des aires en 6e et le professeur M2 les procédures de découpage-recollement et les dénombrements d'unités. D'un autre côté, les grandeurs peuvent être travaillées en tant qu'outil ou objet. Par exemple, l'enseignant M1 enseigne les angles avec l'objectif de les employer dans les constructions des figures planes, à la différence de l'enseignant M2, qui les considère en tant qu'objet d'étude.
Les choix faits par les enseignants M1 et M2 nous révèlent deux types de conceptions de l'enseignement des grandeurs. D'une part, le professeur M1 considère les grandeurs comme des objets d'étude transversaux, ainsi il se sert des grandeurs pour étudier d'autres notions relevant d'autres domaines, mais en même temps, il se désintéresse aux grandeurs en tant qu'objets. D'autre part, le professeur M2, conformément aux programmes de 6e, étudie les grandeurs en tant qu'objet, mais il travaille moins les liens avec les autres notions que l'enseignant M1. Cependant, en classe de 5e, l'enseignement du professeur M2 évolue du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.
En conclusion, nous avons constaté des pratiques différentes pour l'étude des grandeurs au niveau des thèmes d'étude chez ces enseignants, mais elles peuvent varier chez un même enseignant d'une classe de 6e à une classe de 5e.

Conclusion du chapitre

Nous avons effectué une première étude générale des pratiques à travers les progressions des enseignants. Dans un premier temps, nous présentons nos premiers résultats en termes de niveaux de codétermination, et dans un deuxième temps nous expliquons nos choix pour l'étude de deux dynamiques spécifiques relativement aux grandeurs dans les pratiques de ces deux professeurs.

- **Les grandeurs dans les niveaux de codétermination**

Comme nous l'avons observé, à travers une étude plus générale aux différents niveaux de domaine, secteur et thème, les grandeurs apparaissent presque tout au long des progressions proposées par les professeurs M1 et M2.

a) La présence des grandeurs dans chaque domaine d'étude

L'étude de la présence dans chaque domaine d'étude nous permet d'avancer les résultats suivants :

- Dans le domaine de la géométrie :

  Les grandeurs sont présentes dans le domaine de la géométrie et accomplissent différentes fonctions. Premièrement, les grandeurs sont la base des constructions géométriques. L'une des raisons d'être de l'étude des espèces de grandeurs angle et longueur en tant qu'objet en classe de 6e est l'enseignement des constructions. Cependant, l'enseignant M1 s'appuie sur les grandeurs pour les constructions de figures géométriques, contrairement à l'enseignant M2 qui ne les utilise qu'implicitement dans son enseignement. Deuxièmement, dans le passage d'une mathématique concrète à une mathématique plus « formelle », les élèves étudient la symétrie axiale de deux points de vue. À l'école élémentaire, la procédure principale est le pliage et au collège la procédure repose sur les notions de milieu et de perpendicularité. Comme le professeur M1 travaille davantage la deuxième de ces procédures dans son discours technologique, on y trouve beaucoup plus des références aux grandeurs que dans le discours du professeur M2, qui étudie les symétries dans le contexte du quadrillage et du pliage. Ainsi, les grandeurs participent à la construction de la technologie de la classe de 6e relativement à la symétrie axiale, mais avec des variations selon les enseignants.

- Dans le domaine du numérique :

  Les deux enseignants utilisent les grandeurs pour enseigner les nombres. L'enseignant M1 exemplifie les opérations sur les nombres à travers l'étude des problèmes qui mettent en relation des grandeurs. Il prend des exemples de la vie quotidienne, mais aussi il enseigne la multiplication en étudiant les conversions d'unités. L'enseignant M2 utilise les grandeurs pour représenter les fractions. Ainsi, on trouve des utilisations différentes pour les grandeurs dans l'enseignement de ces deux professeurs à propos des grandeurs.

– Dans le domaine des fonctions :

Dans les deux pratiques, l'étude de la proportionnalité prend appui sur des problèmes concernant des grandeurs proportionnelles. L'enseignant M1 étudie la proportionnalité au niveau du secteur d'étude, en plaçant cette notion dans un cadre de grandeurs à l'aide des raisonnements dans le langage naturel, et ensuite dans le cadre du numérique à travers leurs mesures. À l'opposé, l'enseignant M2 place la proportionnalité au niveau de thème d'étude dans le secteur « quotients et applications », et il étudie d'abord les notions de proportion et quotient dans un cadre numérique, pour ensuite enseigner la proportionnalité.

Ainsi, les grandeurs peuvent servir à introduire la notion de proportionnalité, mais aussi à étudier des situations de proportionnalité entre grandeurs.

– Dans le domaine des grandeurs et mesures :

Les deux enseignants proposent des secteurs semblables, les différences se trouvent aux niveaux plus spécifiques concernant les types de tâches et les techniques étudiés dans les classes. Il semble que l'enseignant M2 travaille davantage les périmètres et les aires en tant qu'objet, en proposant des situations relatives à la notion de grandeur, contrairement à l'enseignant M1 qui centre son enseignement sur les formules.

De plus, les enseignements du professeur M2 évoluent du cadre des grandeurs en classe de 6e vers le cadre numérique en classe de 5e relativement à chaque espèce de grandeur.

b) Les manuels scolaires comme une condition de l'enseignement

Les progressions des enseignants ne sont pas structurées conformément aux programmes de 2005, ni à ceux de 1995, relativement au domaine grandeurs et mesures. Nous n'avons pas repéré un domaine grandeurs et mesures semblable à celui proposé par les textes officiels de l'époque actuelle CA4. Néanmoins, les progressions sont semblables entre elles au niveau des secteurs d'étude. L'organisation en chapitres proposée, par les enseignants M1 et M2, est similaire aux structurations des manuels scolaires utilisés par ces professeurs. Dans l'enseignement du professeur M2, cela n'est pas une nouveauté, car cet enseignant reconnaît construire ses progressions avec les manuels scolaires. Par contre, le professeur M1 dit programmer l'enseignement selon les programmes scolaires et utiliser très peu les manuels. Nous pensons donc que la non-prise en compte des directives institutionnelles de la part des enseignants s'explique par le choix didactique de programmer l'enseignement à l'aide des manuels scolaires.

c) Les pratiques selon la dialectique outil/objet

Comme nous l'avons dit, les enseignants M1 et M2 organisent leurs enseignements relatifs au domaine de grandeurs de manière semblable. Cependant le traitement donné aux grandeurs n'est pas le même :

- Dans l'enseignement du professeur M1 l'étude des grandeurs est fragmentée, car cet enseignant met en avant les grandeurs comme outil pour l'étude d'autres notions relevant des différents domaines, par exemple, ce professeur étudie les changements d'unités de longueur dans le chapitre consacré aux nombres décimaux, le report des longueurs dans le chapitre relatif aux constructions géométriques, le calcul du périmètre d'un cercle dans les chapitres « proportionnalité et pourcentages » et « périmètres et aires » ;
- Dans l'enseignement du professeur M2, les grandeurs occupent une place moins importante dans la construction des domaines numérique, géométrique et fonctions que dans l'enseignement du professeur M1. Cependant, le professeur M2 étudie davantage les grandeurs en tant qu'objet. Par exemple, il propose des activités concernant les comparaisons des aires et des périmètres, il met en avant les procédures de découpage-recollement, la décomposition et le dénombrement d'unités.

- **Nos axes d'étude ultérieurs au niveau du sujet d'étude**

Nous rappelons que nous nous intéressons aux grandeurs en tant qu'outils dans la construction d'autres domaines et dans les interrelations entre domaines, mais également nous étudions les grandeurs en tant que constituants principaux d'un cadre mathématique. Ainsi, pour poursuivre la présentation de nos analyses des pratiques des professeurs au niveau des sujets d'étude, nous avons choisi d'analyser deux dynamiques particulières relativement aux grandeurs, une dynamique inter-domaines et une dynamique intra-domaine.

a) Le choix d'une dynamique inter-domaines

À partir de nos premiers résultats, nous avons décidé d'étudier plus profondément une dynamique autour de la notion de proportionnalité à travers l'étude des organisations mathématiques et organisations didactiques locales et ponctuelles. Dans l'étude institutionnelle des programmes et des manuels scolaires, nous avons repéré une dynamique grandeurs-fonctionnel-numérique que la notion de proportionnalité fait fonctionner. Dans le cadre des fonctions, elle relève d'un type de fonction, la fonction linéaire, et dans les cadres

numérique et grandeurs, elle est à l'œuvre à travers des problèmes de la vie quotidienne qui mettent en relation des grandeurs ou leurs mesures.
Nous avons choisi cette dynamique pour approfondir les pratiques enseignantes, car les professeurs M1 et M2 proposent deux manières différentes d'étudier la proportionnalité à l'aide des grandeurs. Ainsi, cette étude de la proportionnalité, à travers l'analyse des interrelations entre les domaines grandeurs, fonctionnel et numérique, nous a permis de mettre en évidence des caractéristiques différentes relativement à la place et la fonction des grandeurs. Ce sera l'objet du chapitre VIII.

b) L'étude de la vie d'une espèce de grandeur particulière

Dans l'étude du domaine grandeurs et mesures, nous avons remarqué des traitements différents pour une même grandeur, la grandeur aire, chez les deux enseignants, mais aussi chez un même enseignant. En effet, le professeur M2 met en avant des procédures relevant des cadres géométrique et grandeurs en classe de 6e et du cadre numérique en classe de 5e. Ces deux approches sont conformes aux contenus des programmes scolaires de l'institution CA4. Nous avons fait le choix d'étudier ces deux pratiques en regardant la grandeur aire à deux niveaux différents, à savoir les classes de 6e et 5e chez l'enseignant M2. Nous cherchons ainsi à examiner différentes caractéristiques d'une dynamique intra-domaines à travers l'étude de la vie d'une espèce de grandeur, l'espèce de grandeur aire. Ce sera l'objet du chapitre IX.

Chapitre VIII

Etude des pratiques : La proportionnalité au cœur d'une dynamique grandeurs-fonctions-numérique

Dans la partie précédente, nous avons analysé les choix mathématiques réalisés par les professeurs M1 et M2 pour leurs progressions au niveau du domaine, des secteurs et des thèmes d'étude pour l'enseignement de la proportionnalité en classe de 6^e. Nous avons montré que les progressions des enseignants sont très différentes. D'un côté, le professeur M1 propose d'étudier la proportionnalité en plaçant cette notion au niveau du cadre des grandeurs dans un premier moment. D'un autre côté, le professeur M2 préfère travailler les notions de proportions et quotients dans un cadre numérique avant d'enseigner la proportionnalité en soi dans le même chapitre.

Dans ce chapitre, nous effectuons une seconde analyse sur l'activité des professeurs M1 et M2 en nous plaçant à des niveaux de détermination mathématique plus spécifiques : les thèmes et les sujets d'étude relativement au secteur ou thème « proportionnalité » en 6^e. Notre objectif est d'identifier les interrelations entre les cadres grandeurs, fonctions et numérique à l'égard des grandeurs. Pour effectuer ce travail, nous avons étudié les 2 classes de 6^e pendant l'année 2010-2011. Comme nous l'avons dit dans le chapitre « Etude de pratiques : méthodologie », nous avons observé et enregistré des séances portant sur la proportionnalité, nous avons récupéré les documents de la classe, nous avons fait passer deux tests et à la fin de l'année scolaire un entretien avec les enseignants a été effectué.

Avant l'étude des pratiques de ces enseignants, un travail didactique sur la notion de proportionnalité s'avère nécessaire. Ainsi, nous avons utilisé les travaux de Hersant (2001) pour déterminer les organisations mathématiques possibles en classe de 6^e. En nous appuyant sur cette analyse des types de problèmes, nous identifions dans un premier temps les organisations mathématiques ponctuelles, locales et régionales mettant en jeu la proportionnalité, proposées par le programme et par les deux enseignants, afin de comparer leurs pratiques et le savoir à enseigner.

Dans un second temps, nous identifions dans l'enseignement des professeurs M1 et M2 les organisations didactiques mises en place pour l'étude de ces organisations mathématiques. Nous rappelons que l'analyse de ces organisations s'appuie sur le filtre des grandeurs et la méthode des quatre composantes.

Dans un troisième temps, nous mettons en relation les résultats de nos tests avec les pratiques d'enseignement des professeurs M1 et M2.

Finalement, dans un quatrième temps, nous achevons notre étude, en présentant des conclusions sur la place et le rôle de grandeurs dans l'enseignement de la notion de proportionnalité, et en conséquence dans la construction d'une dynamique grandeurs-fonctions-numérique.

1. Les problèmes de proportionnalité

Nous nous sommes intéressés à la thèse d'Hersant (2001), plus particulièrement à son premier chapitre, dans lequel elle étudie la proportionnalité entre grandeurs d'un point de vue didactique et mathématique au collège. Ces éléments nous aideront à étudier les organisations mathématiques en classe de 6^{e} relativement à la notion de proportionnalité.

1.1 Premiers éléments pour l'analyse d'une dynamique autour de la proportionnalité

L'enseignement de la proportionnalité en 6^{e} est principalement centré sur l'étude de grandeurs proportionnelles dans des problèmes issus de la vie quotidienne. Nous avons identifié deux types de traitement pour la proportionnalité, un traitement numérique et un traitement par les grandeurs, lesquels peuvent se transposer à l'enseignement comme le signale Hersant (2001) dans sa thèse :

> « Lorsqu'on travaille dans le cadre des grandeurs, on parle de grandeurs proportionnelles. Les relations de proportionnalité entre les grandeurs sont explicitées. Si les grandeurs sont de nature différente, la distinction entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire est claire. En revanche, lorsque les grandeurs sont de même nature cette différence n'apparaîtra que si les grandeurs sont mesurées dans des unités différentes. Par ailleurs, lors de la résolution du problème, un passage de la notion de grandeurs proportionnelles à celle de suites de mesures proportionnelles, puis à celle de suites numériques proportionnelles est le plus souvent nécessaire. Ce passage se fait comme un glissement naturel dans l'enseignement bien qu'il corresponde à une étape importante de la modélisation mathématique de la proportionnalité » (Hersant, 2001, p. 56)

Ainsi, les changements de cadres, la nature des grandeurs et des nombres, et les types de relations entre ces grandeurs sont des éléments essentiels pour l'analyse de dynamiques inter-domaines.

Hersant (2001) et Comin (2002) identifient deux théories sur lesquelles peut s'appuyer l'enseignement de la proportionnalité : la théorie des proportions et la théorie relative à la fonction linéaire. Comin signale que, dans l'enseignement, l'étude de la proportionnalité à l'aide des proportions prend place dans le cadre arithmétique et la fonction linéaire dans le cadre algébrique. Aujourd'hui, il semble que la deuxième de ces théories soit la théorie institutionnelle actuelle (Hersant, 2001). Cependant, Comin signale que le travail sur la proportionnalité qui vise la notion de fonction linéaire néglige l'étude des grandeurs :

> « La comparaison des cadres arithmétiques de la proportionnalité et algébrique de la linéarité montre que l'algèbre moderne ne prend pas en charge l'étude des grandeurs. Réciproquement, l'approche des connaissances mathématiques élémentaires avec la proportionnalité des grandeurs rend difficile toute approche par l'algèbre moderne car, telle qu'elle est conçue, l'algèbre ne laisse de place ni au raisonnement arithmétique élémentaire (lequel est remplacé par le calcul algébrique), ni aux grandeurs (qui ne peuvent pas figurer dans les structures algébriques actuelles), ni à la théorie des rapports et proportions, qui est rendue caduque par le calcul algébrique ni, enfin, à la proportionnalité, qui est remplacée par la fonction linéaire » (Comin, 2002, p. 164)

A partir de ces deux approches théoriques, les proportions et la fonction linéaire, nous distinguerons des éléments technologiques différents. Par exemple, dans une théorie des proportions, on trouve la notion de rapport et les proportions. Dans une théorie de la fonction linéaire, les propriétés de linéarité deviennent des objets importants d'étude.

En conséquent, pour étudier la dynamique numérique-grandeurs-fonctionnel relativement à la proportionnalité en termes d'organisations mathématiques, nous devons considérer les domaines, les interrelations entre ces domaines à propos de grandeurs, la nature des grandeurs et des nombres, les types de relations entre les grandeurs et les théories de référence avec leurs technologies respectives.

1.2 Des éléments technologiques pour l'analyse des organisations mathématiques

Nous avons ainsi fait le choix de considérer les éléments technologiques suivants pour l'analyse des organisations mathématiques relatives à la proportionnalité :

1.2.1 La nature des grandeurs et des nombres-mesures

La nature des grandeurs intervient de deux manières dans les problèmes relatifs à la proportionnalité. D'une part, si on étudie des relations entre deux grandeurs de même espèce ou d'espèces différentes, on associe à la proportionnalité un coefficient de proportionnalité numérique pour le premier cas, et une grandeur dans le deuxième cas. D'autre part, les grandeurs peuvent être continues ou discrètes. Les mesures des grandeurs peuvent être des nombres entiers, décimaux, rationnels et réels. En général, en classe de 6e, les entiers vont être utilisés comme des mesures des ensembles de grandeurs discrètes.

1.2.2 Les types de relations entre les grandeurs

Dans la proportionnalité, on peut rencontrer trois types de situations du point de vue des relations entre grandeurs (Hersant, 2001) :

- isomorphisme numérique, dans le cas où aucune grandeur n'intervient ;
- isomorphisme avec une seule espèce de grandeur, dans le cas où une seule grandeur intervient, comme dans les problèmes de partage ;
- isomorphisme entre deux espèces des grandeurs, où deux espèces de grandeurs interviennent.

Dans la proportionnalité, on peut définir aussi une situation dans laquelle plusieurs relations entre les grandeurs interviennent de façon parallèle ou enchainée. On y trouve, entre autres, des problèmes analogues aux situations de recettes et des situations d'augmentation ou de réduction d'une grandeur (généralement des pourcentages).

1.2.3 Les ostensifs

Dans la classe de 6e, nous retenons deux types ostensifs principaux mentionnés par Hersant (2001) des expressions du langage naturel comme « fois moins » ou « fois plus » qui représentent des relations de dépendance entre les grandeurs, et des représentations symboliques plus spécifiques comme le tableau de proportionnalité. En général, on peut associer ces ostensifs à une théorie de l'application linéaire en 6e. D'autres ostensifs apparaissent aussi en 6e comme les écritures des proportions, des rapports et des nombres sous la forme fractionnaire, lesquels servent plutôt à construire des technologies relatives aux proportions.

1.2.4 Les univers relativement aux grandeurs

Comin (2002) distingue trois « cadres » qui permettent de décrire le modèle de la proportionnalité. La proportionnalité peut mettre en jeu deux espèces de grandeurs, ces grandeurs sont exprimées à l'aide des grandeurs mesurées (nombres avec des unités) et leurs mesures à l'aide des nombres. Nous parlerons plutôt des « univers » pour ne pas confondre avec la notion de cadre, au sens de Douady, que nous utilisons dans notre recherche. Ainsi, les situations de proportionnalité font intervenir trois univers relativement aux grandeurs : les grandeurs, les grandeurs mesurées et les nombres.

1.3 Les types de tâches, les techniques et les technologies relatifs à la proportionnalité en 6e

Nous distinguons deux types de situations relativement à la notion de proportionnalité, soit la proportionnalité entre grandeurs dérive d'une construction sociale, soit la proportionnalité représente un modèle physique. En classe de 6e, la majorité de problèmes relatifs à la proportionnalité prennent appui sur des situations de la vie quotidienne, et ainsi l'étude des grandeurs proportionnelles relève des connaissances ou des conventions sociales. Dans la suite, nous allons analyser les organisations mathématiques relatives à la proportionnalité.

1.3.1 Deux catégories de types de tâches

Nous répartissons les types de tâches les plus récurrents en 6e en deux catégories, ceux qui relèvent du calcul d'une grandeur et ceux qui sont centrés sur le calcul du coefficient de proportionnalité :

a) Calcul d'une grandeur

Le genre le plus général se formule ainsi :

– $T_2(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité ;

D'après Vergnaud (1990), on peut classifier les situations de proportionnalité en quatre types de situations :

– $T_2^M(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation multiplication ;

– $T_2^{D-P}(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation division partition ;

– $T_2^{D-Q}(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation division quotition ;

– $T_2^{4p}(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation quatrième proportionnelle.

On peut schématiser ces types de tâches de manière suivante :

Soit G_1 et G_2 deux grandeurs et a,b,c,d leurs mesures respectives :

Situation multiplication

G_1	G_2
1	a
b	?

Situation Division-Partition

G_1	G_2
1	?
b	c

Situation Division-quotition

G_1	G_2
1	a
?	c

Situation 4[e] proportionnelle

G_1	G_2
a	b
c	?

Figure 8-1. Types de situations de proportionnalité identifiées par Vergnaud.

Relativement au calcul d'une grandeur, on peut aussi définir les types de tâches suivants :

- $T_3(prop)$: Appliquer un taux de pourcentage ;
- $T_6(prop)$: Calculer une grandeur après un agrandissement ou une réduction ;
- $T_8(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation d'échelle.

b) Calcul d'un coefficient

- $T_1(prop)$: Reconnaître une situation de proportionnalité ;
- $T_4(prop)$: Calculer un coefficient de proportionnalité ;
- $T_5(prop)$: Calculer une échelle ;
- $T_7(prop)$: Déterminer un taux de pourcentage.

Nous avons décidé de considérer ces types de tâches séparément, même si certains d'entre eux sont des cas particuliers d'autres. Par exemple, une échelle est un coefficient de proportionnalité dans le cas particulier d'une situation d'agrandissement ou réduction. Avec cette catégorisation nous souhaitons prendre en compte la spécificité des situations même si le modèle mathématique est analogue.

1.3.2 Grille d'analyse des techniques et des technologies

Pour analyser les techniques et les technologies relatives au calcul d'une quatrième proportionnelle $T_2^{4p}(prop)$, nous nous basons sur la grille proposée par Hersant (2001) dans sa thèse. Ces éléments sont différenciés par leur lien avec les deux théories possibles : une théorie de proportions et une théorie de l'application linéaire.

Pour décrire les techniques et les technologies nous proposons le formalisme suivant :

Soient U et V deux grandeurs proportionnelles et soient $u_0[m], u_1[m]$ des grandeurs relatives à U dans l'unité $[m]$, et $v_0[n], v_1[n]$ des grandeurs relatives à V dans l'unité $[n]$, u_0, u_1, v_0, v_1 des mesures respectivement des grandeurs U et V. Nous supposons qu'on connaît u_0, u_1, v_0 et on cherche v_1. On peut ainsi organiser cette grille de la manière suivante :

- Eléments techniques et technologiques relevant d'une théorie des proportions

  – τ_r : Multiplication par un rapport scalaire

Le rapport de u_1 à u_0 est $\frac{u_1}{u_0}$. Celui-ci est un rapport scalaire, c'est un nombre. Le rapport de v_1 à v_0 est aussi $\frac{u_1}{u_0}$, donc $\frac{v_1}{v_0} = \frac{u_1}{u_0}$, c'est-à-dire $v_1 = \frac{u_1 \times v_0}{u_0}$.

  – τ_u : Passage par l'unité

A une valeur de U, u_0 fois moins grande que $u_0[m]$, correspond une valeur de V, u_0 fois moins grande que $v_0[n]$, soit $\frac{v_0[n]}{u_0}$. On détermine ainsi la valeur correspondante pour l'unité $1[m]$ de U. Ainsi pour une valeur $u_1[m]$ correspond une valeur de V, u_1 fois plus grande que $\frac{v_0[n]}{u_0}$, soit $v_1[n] = u_1 \times \frac{v_0[n]}{u_0}$.Dans cette technique, il s'agit de mettre en relation la grandeur $v_0[n]$ et les scalaires u_0 et u_1.

  – τ_x : Produit en croix

A partir de la propriété entre les rapports $\frac{u_0}{v_0} = \frac{u_1}{v_1}$, on obtient que $u_0 \times v_1 = u_1 \times v_0$. Il s'agit de mettre en rapport les mesures des grandeurs U et V. Même si on peut envisager ces techniques sur les grandeurs elles-mêmes, leur traitement devient assez compliqué avec les unités. Le produit en croix peut être aussi exprimé classiquement à l'aide d'un tableau :

u_0	v_0
u_1	?

Dans ce cas, on définira la technique comme τ_x^*.

– τ_c : Utilisation du coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs U et V est égal à $\alpha = \frac{v_0}{u_0}$, ainsi on obtient $\alpha = \frac{v_1}{u_1}$. Comme pour τ_x, la même technique est envisagée en utilisant les grandeurs. On peut déterminer le coefficient de proportionnalité en faisant la division entre deux grandeurs, comme par exemple pour la vitesse.

– τ_3 : Règle de trois

Les techniques τ_r et τ_u amènent à la même expression finale $v_1 = \frac{v_0 \times u_1}{u_0}$. Cette expression correspond à la règle de trois.

- Eléments techniques et technologiques relevant d'une théorie de l'application linéaire

Comme nous l'avons dit, les propriétés de linéarité sont souvent exprimées à l'aide des ostensifs « tableau de proportionnalité », « fois plus », « fois moins » en 6e. Nous rappelons qu'en 6e, il ne figure pas une définition de fonction linéaire dans les programmes, mais qu'on utilise plutôt les propriétés additive et multiplicative, et le coefficient de proportionnalité, sans utiliser le formalisme des fonctions, notamment l'ostensif « f(x) ». Plusieurs techniques définies précédemment dans le cadre des proportions peuvent se transposer à la théorie de l'application linéaire. Soit f une fonction linéaire tel que $f(u_0) = v_0$ et $f(u_1) = v_1$.

– τ_u : Calcul de l'image de 1

Dans cette technique, on peut construire le tableau suivant : $\begin{array}{rl} u_0 \rightarrow & v_0 \\ u_1 \rightarrow & v_1 \\ 1 \rightarrow & \frac{u_0}{u_1} \end{array}$

On peut justifier cette technique à l'aide des éléments technologiques relatifs à la fonction linéaire f :

$$f(1) = f\left(\frac{u_0}{u_0}\right) = \frac{1}{u_0} f(u_0) = \frac{v_0}{u_0}, \text{ donc } v_1 = f(u_1) = u_1 \times f(1) = u_1 \times \frac{v_0}{u_0}$$

– τ_c : Utilisation du coefficient de la fonction linéaire

On utilise le coefficient de proportionnalité de la façon suivante :

$\times \frac{v_0}{u_0}$

u_0	v_0
u_1	?

En appliquant les éléments technologiques, propriétés de linéarité, on a que :

$$v_1 = f(u_1) = f\left(\frac{u_0}{u_0} \times u_1\right) = f\left(\frac{u_1}{u_0} \times u_0\right) = \frac{u_1}{u_0} f(u_0) = \frac{u_1}{u_0} \times v_0 = \frac{v_0}{u_0} \times u_1$$

A la liste des techniques exposées par Hersant (2001) exposées, nous ajoutons deux techniques relatives à la linéarité.

– τ_{l_1} : Application de la propriété multiplicative de la linéarité

On peut représenter cette technique dans un tableau de proportionnalité (τ_{l_1} *) :

$\times \frac{u_1}{u_0}$

u_0	v_0
u_1	?

Cette technique est semblable à τ_r. Elle s'appuie sur les éléments technologiques suivants :

$f(\alpha u) = \alpha f(u)$, le coefficient α est de fois appelé rapport de linéarité. On obtient ainsi que $v_1 = f(u_1) = f\left(u_0 \times \frac{u_1}{u_0}\right) = \frac{u_1}{u_0} f(u_0) = \frac{u_1}{u_0} \times v_0$.

– τ_{l_2} : Application de la propriété additive de la linéarité

Dans un tableau (τ_{l_2} *),on peut représenter la technique comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & u_0 \rightarrow & v_0 \\ + & u_1 \rightarrow & v_1 \\ & u_0 + u_1 \rightarrow & v_0 + v_1 \end{array}$$

Pour justifier la technique, on utilise la propriété additive de la linéarité, c'est-à-dire le fait que $f(u_0 + u_1) = f(u_0) + f(u_1) = v_0 + v_1$.

En utilisant la grille des éléments techniques, technologiques et théoriques, nous allons maintenant étudier les organisations mathématiques relatives à la proportionnalité mises en place, d'une part, par le programme et, d'autre part, par les enseignants M1 et M2 en classe de 6e.

2. Comparaison des organisations mathématiques relatives à la proportionnalité

Avant d'analyser les organisations mathématiques mettant en jeu la proportionnalité, qui apparaissent dans le savoir enseigné par les professeurs M1 et M2, nous avons reconstruit les organisations mathématiques « conformes » aux directives institutionnelles relativement au programme de 6e de la période A4. Rappelons que la proportionnalité n'est pas un objet d'étude en soi de la classe de 6e dans l'institution CA1, même si les élèves ont pu rencontrer des situations relevant du modèle proportionnel.

2.1 Le savoir à enseigner : proportionnalité

Dans cette partie, nous avons construit une organisation mathématique relative à la notion de proportionnalité à partir du programme scolaire de la classe de 6e de l'institution CA4.

2.1.1 Identification des tâches et des techniques

Comme nous l'avons vu dans notre étude institutionnelle, les programmes et les documents ressources relatifs aux nouveaux programmes de 2005 mettent en avant un traitement de la proportionnalité dans un cadre des grandeurs. Il s'agit d'étudier des grandeurs proportionnelles à travers des raisonnements directs sur ces grandeurs. On utilise les propriétés d'additivité et d'homogénéité, et la procédure de passage par l'unité pour résoudre des situations de proportionnalité dans un cadre extra-mathématique. L'extrait du programme de la figure 8-2 montre les contenus d'enseignement en classe de 6e :

Objectifs		
La résolution de problèmes a pour objectifs : • de mettre en place les principaux raisonnements qui permettent de reconnaître et traiter les situations de proportionnalité, • d'initier les élèves à la présentation, à l'utilisation et à l'interprétation de données sous diverses formes (tableaux, graphiques…).		
Connaissances	**Capacités**	**Commentaires**
1.1. Proportionnalité Propriété de linéarité. Tableau de proportionnalité.	- Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté : - utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal, - utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal, - passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »), - * *utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.*	Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). Ils doivent relever de domaines familiers des élèves et rester d'une complexité modérée, en particulier au niveau des nombres mis en œuvre. Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples **soit des rapports exprimés sous forme de quotient.*
Pourcentages.	- Appliquer un taux de pourcentage.	Les élèves doivent connaître le sens de l'expression « …% de » et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire.

Figure 8-2. Extrait du programme des mathématiques de 6e

On peut extraire les types de tâches suivants à propos de la proportionnalité identifiés à l'aide de notre grille :

- $T_1(prop)$: Reconnaître une situation de proportionnalité ;
- $T_2(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité (résoudre un problème de proportionnalité) ;
- $T_3(prop)$: Appliquer un taux de pourcentage.

Le programme explicite même certaines techniques à enseigner que nous caractérisons à l'aide de la grille de la section précédente :

- τ_{l_1} : Utilisation d'un rapport de linéarité (ou utilisation de la propriété multiplicative) ;
- $\tau^*{}_c$: Utilisation du coefficient de proportionnalité dans un tableau ;
- τ_u : Passage par l'unité ;
- $\tau^*{}_u$: Passage par l'unité dans un tableau de proportionnalité ;
- τ_3 : Règle de trois.

Les types de nombres à étudier sont les nombres entiers et décimaux, et le coefficient de proportionnalité peut être exprimé à l'aide d'un quotient.

Nous organiserons ces types de tâches et techniques autour d'une organisation mathématiques régionale relative à la proportionnalité.

2.1.2 Analyse de l'organisation mathématique régionale relative à la proportionnalité

Comme on le voit dans l'extrait du programme la proportionnalité représente un secteur d'étude et chacun des types de tâches $T_1(prop)$, $T_2(prop)$ et $T_3(prop)$ peut exister dans les thèmes d'étude « propriétés de linéarité », « tableau de proportionnalité » et « pourcentages ». Ainsi, nous avons construit une organisation mathématique régionale relative à la proportionnalité, conforme au programme de 2005 que nous schématisons de la manière suivante :

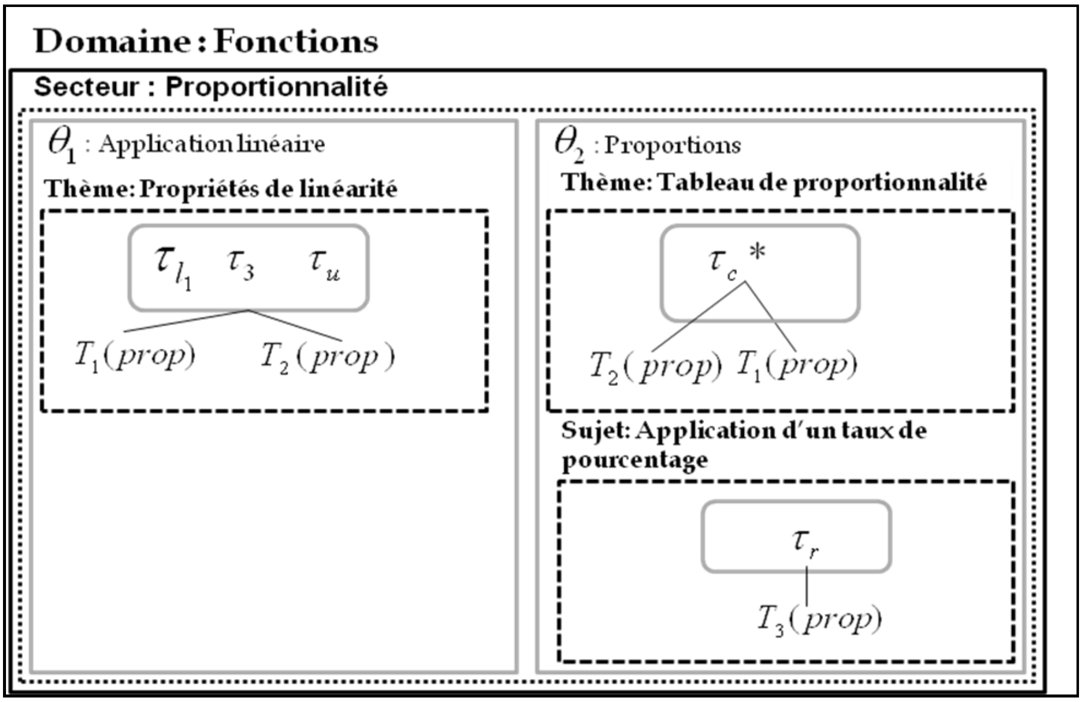


Figure 8-3. OM régionale autour du secteur d'étude « proportionnalité » dans les programmes de 2005

Nous précisons maintenant notre construction en rappelant que les programmes proposent d'étudier la proportionnalité dans le domaine des fonctions. Dans la figure 8-3, nous avons placé l'étude de cette notion au niveau d'un secteur d'étude dans lequel il existe deux technologies relative à la proportionnalité au collège (θ_1, θ_2).

Pour le thème « propriétés de linéarité », les instructions officielles signalent comme technique l'utilisation d'un rapport de linéarité (τ_{l_1}) pour résoudre les types de tâches

$T_1(prop)$: reconnaître une situation de proportionnalité et $T_2(prop)$: calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité. Nous avons vu que les techniques τ_3 : règle de trois et τ_u : passage par l'unité sont communes aux deux technologies, cependant le document ressource « Proportionnalité au collège » (D.G.E.S.C.O, 2005) les placent dans la technologie relative à l'application linéaire.

Dans le thème « tableau de proportionnalité », on peut utiliser le coefficient de proportionnalité ($\tau_c *$) dans un tableau pour résoudre le type de tâches $T_2(prop)$. Cette technique relève d'une technologie des proportions en classe de 6e. La technique $\tau_c *$ peut être aussi justifiée avec d'éléments appartenant aux deux technologies, mais si on place cette technique dans l'application linéaire, on travaille sur la définition de la fonction linéaire, laquelle n'est pas une connaissance de la classe de 6e.

Finalement, on ne trouve qu'un seul type de tâches relatif aux pourcentages, ainsi nous l'avons placé au niveau du sujet d'étude.

Notre reconstruction de l'organisation mathématique régionale relative à la proportionnalité nous montre que les praxéologies présentes dans le programme de 6e peuvent être rattachées aux théories des proportions et de la l'application linéaire. Cette organisation mathématique nous aidera à étudier les pratiques des professeurs M1 et M2.

2.2 Le savoir enseigné par le professeur M1

Nous présentons dans cette partie l'organisation des séances, une organisation didactique et une organisation mathématique relatives au secteur « Proportionnalité » présentes dans la classe de 6e du professeur M1.

2.2.1 Les organisations mathématiques et didactiques régionales

La première observation relative à l'enseignement du professeur M1 est la présence de deux chapitres relevant d'une organisation mathématique régionale autour de la proportionnalité. Le professeur M1 travaille d'abord un chapitre « proportionnalité et pourcentages », ensuite il propose de travailler un chapitre « angles », pour finalement revenir sur la proportionnalité à travers un chapitre « échelles ». Au final, le chapitre « proportionnalité et pourcentages » a duré 8 séances et le chapitre « échelles » 3 séances, ce qui donne un total de 11 séances concernant la proportionnalité. Ces 11 séances se décomposent en 3 correspondant à des séances d'activités et de synthèse de cours, 6 correspondant à des séances d'exercices et 2 séances relatives d'un contrôle et sa correction.

Pour repérer l'avancée des savoir mathématique mis en jeu dans le secteur « Proportionnalité », nous présentons la progression suivie par l'enseignant M1 :

- Séance 1

Le professeur M1 commence le chapitre « Proportionnalité et pourcentages » en proposant aux élèves la tâche suivante :

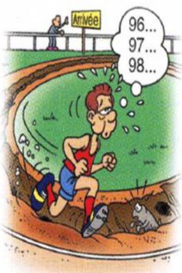
$t_2(prop)$: « Pierre achète 4 cahiers identiques et paie 10 €. Combien aurait-il payé s'il avait acheté 2 cahiers ? 6 cahiers ? 8 cahiers ? »

A partir de cette activité, le professeur M1 introduit la notion de « être proportionnel à » et la notion de « coefficient de proportionnalité ».

- Séance 2

Le professeur M1 ne définit aucun contenu ou propriété dans l'activité précédente. Mais la suite de l'activité de la séance 1, il institutionnalise la notion de « suite de nombres proportionnels ». La définition donnée est la suivante : « Deux suites des nombres sont proportionnels si on obtient les termes de l'une en multipliant les termes de l'autre par le même nombre. Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité ». Il propose comme travail à la maison les exercices 2, 4 et 6 de la page 93 du manuel scolaire de la collection *Diabolo*, 6DB05 :

2 Un athlète de fond s'entraîne tous les jours. Il met 10 minutes pour effectuer cinq tours de piste.



1. Combien de tours de piste va-t-il effectuer en 30 minutes ?
2. S'il parvient à garder le même rythme, prévoir le temps qu'il lui sera nécessaire pour effectuer 100 tours de piste. Expliquer la réponse.

4 La recette ci-dessous indique les quantités d'ingrédients nécessaires pour préparer des coquilles de poissons.
Calculer les quantités nécessaires pour six personnes (on présentera les résultats dans un tableau).

ingrédients	pour 4 personnes
poisson	200 g
gousses d'ail	2
beurre	60 g
farine	2 cuillères à soupe
lait	30 cL
oignons	4

6 La voiture de Boris consomme en moyenne 6 litres de carburant pour parcourir une distance de 100 km.

1. a) Quelle distance peut-il parcourir avec 3 litres de carburant ? avec 18 litres de carburant ?
b) En déduire la distance qu'il pourra parcourir avec 21 litres de carburant.
2. a) Quelle quantité de carburant lui faut-il pour parcourir 500 km ? pour parcourir 25 km ?
b) En déduire la quantité de carburant nécessaire pour parcourir une distance de 525 km.

Figure 8-4. Exercice 2, 4 et 6 page 93, manuel scolaire *Diabolo* 6DB05

- Séance 3

La classe corrige les exercices donnés dans la séance précédente. A la fin de la séance 3 le professeur M1 donne comme devoir à la maison l'exercice 7 de la page 93 et l'exercice 56 de la page 101 du manuel scolaire *Diabolo* 6DB05 :

7 Pour le développement d'une pellicule de 24 photographies, Rémi a payé 8 euros.
Dans le même magasin, Karine a fait développer une pellicule de 36 photographies pour un prix de 11 euros.
Le prix est-il proportionnel au nombre de photos développées dans ce magasin ? Expliquer.

56 Le corps humain est composé de 80 % d'eau. Quelle est la masse d'eau qui compose un homme de 75 kilogrammes ?

Figure 8-5. Exercice 7, page 93 et exercice 56, page 101 du manuel scolaire *Diabolo* 6DB05

- Séances 4, 5 et 6

Tout d'abord l'enseignant M1 corrige les exercices donnés comme devoir dans la séance 3. Puis, l'enseignant caractérise les pourcentages comme une situation spécifique de proportionnalité, et après il propose la tâche suivante :

$t_3(prop)$: « Un objet coûte 46 €, son prix augmente de 3 %. De combien le prix de cet objet augmente-t-il ? »

Pour le résoudre, le professeur M1 enseigne deux techniques. Pour la première, il s'agit d'aborder le problème dans le cadre de la proportionnalité, et dans la deuxième, il institutionnalise « le calcul d'un pourcentage d'une quantité ». Dans les séances 5 et 6, les élèves travaillent sur des types de tâches relatifs au calcul du pourcentage d'une grandeur ou d'un nombre.

- Séances 7 et 8

Ces séances sont consacrées à l'évaluation et la correction d'un contrôle relatif aux notions de proportionnalité et pourcentage. Ces séances terminent le chapitre « Proportionnalité et pourcentages ».

Ensuite, le professeur M1 ne travaille plus sur la notion de proportionnalité pendant quelques séances. Elles portent sur la notion d'angle dans le domaine géométrique. La reprise de la notion de proportionnalité est faite à partir de la notion d'échelle qui commence par la séance 9 :

- Séance 9 : Agrandissement

L'enseignant M1 fait travailler les élèves sur une tâche relative à l'agrandissement des grandeurs tout en s'appuyant sur la proportionnalité. Il définit ensuite le coefficient d'agrandissement comme un coefficient de proportionnalité. A la fin de la séance, il donne comme devoir les exercices 11 et 14 de la page 95 du manuel de la collection *Diabolo* :

11 Sandrine a fait agrandir une photographie dont les dimensions sont de 15 cm sur 11 cm.
La longueur de la photographie agrandie est 30 cm.
Quelle est alors sa nouvelle largeur ?

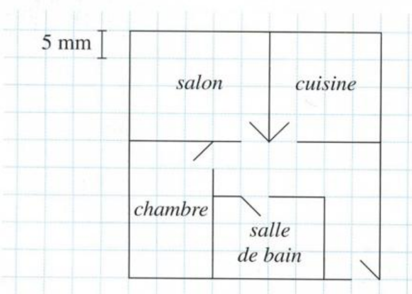
14 Sur une carte à l'échelle 1/100 000, c'est-à-dire une carte sur laquelle 1 cm représente 100 000 cm en réalité, la ville de Montpon et le village de Montignac sont distants de 5 cm.
Exprimer, en centimètre, puis en kilomètre, la distance réelle qui sépare ces deux localités.

Figure 8-6. Exercices 11 et 14, page 95 du manuel scolaire 6DB05

- Séance 10 : Réduction

Les élèves étudient une activité de réduction comme un exemple de proportionnalité. Après l'activité, le professeur M1 institutionnalise le coefficient de réduction comme un coefficient de proportionnalité. Pour finir, l'enseignant et les élèves étudient les problèmes 50 et 51, extraits du manuel *Diabolo* 6DB05, page 100 :

50 Sur un plan
Boris a représenté une partie de sa maison sur un plan à l'échelle 1/200, c'est-à-dire que 1 cm sur le plan représente 200 cm en réalité.
Voici son dessin :



1. Calculer les dimensions réelles de son salon et de sa chambre.
2. Le garage mesure 4,5 mètres de longueur sur 3,5 mètres de largeur. Boris souhaite le représenter sur son plan par un rectangle.
Calculer la longueur et la largeur de ce rectangle.

51 Sur une carte routière
Voici un extrait d'une carte routière à l'échelle 1/1 000 000.

1. Recopier et compléter :
cette échelle signifie que … cm sur la carte représente … cm en réalité.
2. Si l'on mesure 1 cm sur cette carte, combien cela représente-t-il de kilomètres en réalité ?
3. Combien y a-t-il de kilomètres, à vol d'oiseau(1), entre les villes de :
• Ribérac et Mussidan ?
• Bergerac et Ribérac ?
• Périgueux et Bergerac ?
4. À vol d'oiseau, la ville de Bordeaux est située à 110 km de la ville de Périgueux. Quelle distance les sépare sur cette carte ?

Figure 8-7. Exercices 50 et 51, page 100 du manuel *Diabolo* 6DB05

- Séance 11 :

La dernière séance concernant les échelles est consacrée à la correction du devoir donné dans la séance 10.

2.2.2 *Organisation mathématique régionale du savoir enseigné par le professeur M1*

Le professeur M1 étudie dans le chapitre « Proportionnalité et pourcentages » les types de tâches suivants :

- $T_1(prop)$: Reconnaître une situation de proportionnalité ;
- $T_2(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité ;
- $T_3^{'}(prop)$: Appliquer un taux de pourcentage à une grandeur ;
- $T_7(prop)$: Déterminer un taux de pourcentage.

Les types de tâches $T_2(prop)$ et $T_3^{'}(prop)$ sont présents dans les programmes de 2005. On a vu qu'il existe un autre chapitre dénommé « Echelles » dans l'enseignement de M1, où on trouve les types de tâches suivants :

- $T_5(prop)$: Calculer une échelle ;
- $T_6(prop)$: Calculer une grandeur après agrandissement ou réduction.

Ce chapitre relève aussi d'une technologie basée sur la proportionnalité. En effet, l'enseignant M1 traite les problèmes d'agrandissement et de réduction comme des situations de proportionnalité et il définit l'échelle comme le coefficient de proportionnalité de ces situations. Nous pensons donc que le professeur M1 considère ce chapitre plutôt comme un thème d'étude plutôt qu'un secteur. Cela nous amène à proposer l'organisation mathématique régionale suivante :

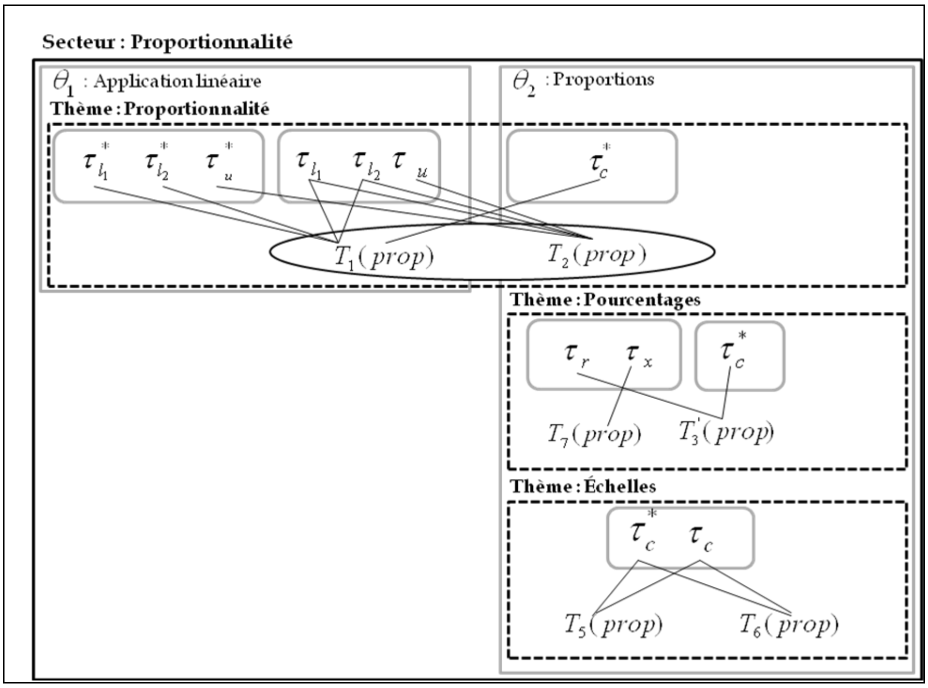


Figure 8-8. OM régionale autour de la proportionnalité dans l'enseignement de M1

L'enseignant M1 étudie trois thèmes d'étude dans sa progression : la proportionnalité, les pourcentages et les échelles. Ces trois thèmes utilisent des éléments technologiques relevant de la notion de proportionnalité. En effet, ce professeur enseigne les pourcentages et les échelles comme des situations de proportionnalité. Pour les types de tâches travaillés présents dans ce secteur $T_1(prop)$, $T_2(prop)$, $T'_3(prop)$, $T_7(prop)$, $T_5(prop)$, $T_6(prop)$, l'enseignant M1 construit des techniques à l'aide d'éléments technologiques relatifs aux deux théories que nous avons repéré : la fonction linéaire et les proportions. Pour les situations de proportionnalité autres que les pourcentages et les échelles, la classe applique la propriété multiplicative de la linéarité (τ_{l_1}) et la propriété additive de la linéarité (τ_{l_2}). La technique de passage par l'unité (τ_u) est travaillée en appliquant ces deux propriétés. En effet, ces trois techniques se construisent à l'aide d'une technologie relative à la fonction linéaire. Par contre, le coefficient de proportionnalité est calculé (τ_c) comme le rapport entre deux grandeurs dans une situation de proportionnalité, et ainsi cette technique appartient plutôt à une technologie relative aux proportions.

En regardant, la figure 8-8, on s'aperçoit aussi que les problèmes relatifs aux pourcentages et échelles sont étudiés avec des éléments technologiques relevant des proportions. En effet, pour ces types de problèmes, les calculs et raisonnement utilisant les propriétés de linéarité qui utilisent les expressions « fois plus » ou « fois moins » ne sont plus présents. Il apparaît ainsi qu'une technologie relative à la fonction linéaire est employée pour introduire la notion de proportionnalité et ainsi justifier les procédures utilisées. A partir du moment où la notion de coefficient de proportionnalité est institutionnalisée, elle devient l'élément technologique principal pour la résolution des problèmes relatifs aux pourcentages et aux échelles.

Par rapport aux programmes, on peut noter que le professeur M1 fait travailler les élèves sur plusieurs exercices relatifs aux échelles en classe de 6e, alors que la notion d'échelle est un contenu de la classe de 5e. De plus, à propos de la notion de pourcentage, il propose le type de tâches $T_7(prop)$: « Déterminer un taux de pourcentage », alors que seul le type de tâches « appliquer un taux de pourcentage » au programme de la classe de 6e. Les autres types de tâches étudiés par le professeur M1 sont conformes aux programmes en vigueur, mais les techniques sont beaucoup plus variées dans la classe du professeur M1 que celles citées par les programmes. Tous ces types de tâches et les techniques associées sont travaillés, en général, dans le cadre des grandeurs comme il est indiqué dans les programmes de l'institution CA4.

2.2.3 *Bilan sur les organisations didactiques et organisations mathématiques régionales relatives la proportionnalité chez le professeur M1*

A travers l'étude des organisations, mathématique et didactique, nous avons souhaité situer l'enseignement du professeur M1 d'une manière générale. L'étude du secteur « proportionnalité » est divisé en deux chapitres dans l'enseignement de M1. Le premier chapitre est consacré aux notions de proportionnalité et pourcentage, et le deuxième à la notion d'échelle. En regardant l'organisation didactique régionale et l'organisation mathématique régionale, on constate que le professeur introduit la notion de proportionnalité en proposant des situations qui mettent en relation deux grandeurs, et que ces situations sont étudiées à l'aide d'une technologie relative à la notion de fonction linéaire. Une fois que le coefficient de proportionnalité est institutionnalisé, il devient l'élément technologique principal des techniques utilisées pour résoudre les problèmes relatifs aux pourcentages et aux échelles. Ces problèmes sont, en général, étudiés dans le cadre des grandeurs, et ainsi il s'agit d'une pratique en conformité avec le programme de 2005. L'enseignement du professeur M1 traverse ainsi les domaines des grandeurs, du fonctionnel et du numérique.

A la section 3, nous poursuivons l'étude de la pratique du professeur M1, en nous centrant sur deux types de tâches spécifiques. Nous avons ainsi décidé d'étudier les types de tâches « calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité » et « appliquer un taux de pourcentage », pour montrer la place et le rôle des grandeurs dans la construction de la notion de proportionnalité et pour caractériser les interrelations entre les cadres grandeurs-fonctions -numérique.

2.3 Le savoir enseigné par le professeur M2

Comme nous l'avons dit dans le chapitre VII section 4.3, la proportionnalité se place au niveau du thème d'étude du secteur « quotients et applications » dans l'enseignement du professeur M2. Nous allons analyser les organisations didactiques et mathématiques régionales mises en place par cet enseignant relativement à ce secteur.

2.3.1 Les organisations didactique et mathématique régionales

Le professeur M2 positionne le chapitre « Quotients et applications » à la fin du deuxième trimestre pendant l'année 2010-2011. Nous n'avons pas pu suivre toutes les séances de ce chapitre. Nous avons observé 4 séances.

Dans le cahier « leçons », nous avons repéré l'organisation suivante du savoir dans le chapitre « quotients et applications » :

- Quelques notions d'introduction

  Le chapitre « Quotients et applications » commence par la définition du quotient, quelques exemples de quotients, la différenciation entre l'écriture entière et l'écriture décimale.

- Des techniques pour calculer le produit d'un quotient par un nombre

  Dans la progression du chapitre, le professeur M2 donne trois techniques pour calculer le produit d'un quotient par un nombre. Il donne ensuite quelques exemples.

- Applications des quotients

  Dans les deux parties précédentes, le professeur M2 a donné des éléments technologiques et techniques pour résoudre certains types de tâches. La classe utilise la notion de quotient pour résoudre des problèmes relatifs à la droite graduée, aux proportions et aux pourcentages.

- La droite graduée

  Les élèves doivent placer des quotients sur une droite graduée.

- Proportions

Le professeur M2 appelle cette partie « proportions », mais le sens donné à la notion de « proportion » est celui de rapport entre une partie d'un ensemble et cet ensemble. Il s'agit de calculer des rapports.

- Pourcentages

Dans cette partie, on s'intéresse au pourcentage d'un nombre. Pour effectuer ce calcul, il est demandé aux élèves d'écrire le pourcentage sous forme de quotient. Le professeur M2 commence cette partie avec l'institutionnalisation suivante :

I_3 : « Pour calculer 37 % de 154, on effectue le calcul suivant : $\frac{37}{100} \times 154$ »

- Proportionnalité

Tout d'abord, l'enseignant M2 donne un problème (figure 8-9) concernant les échelles :

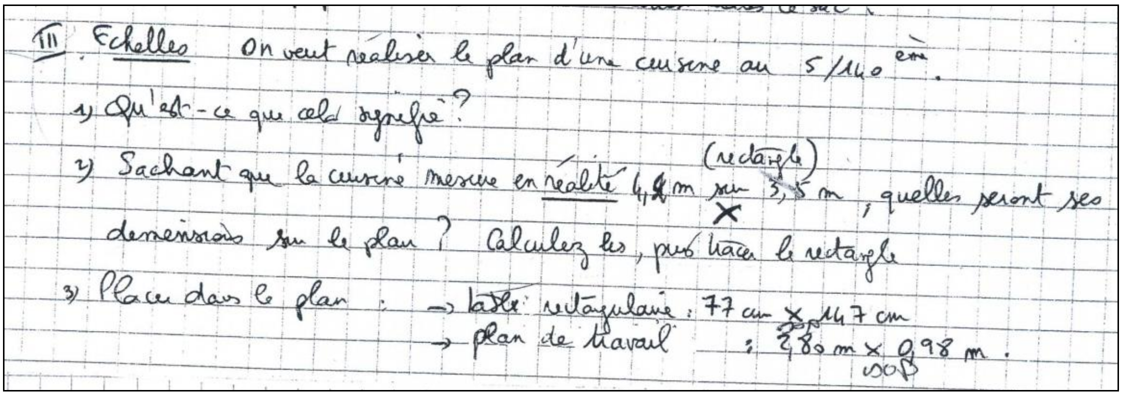
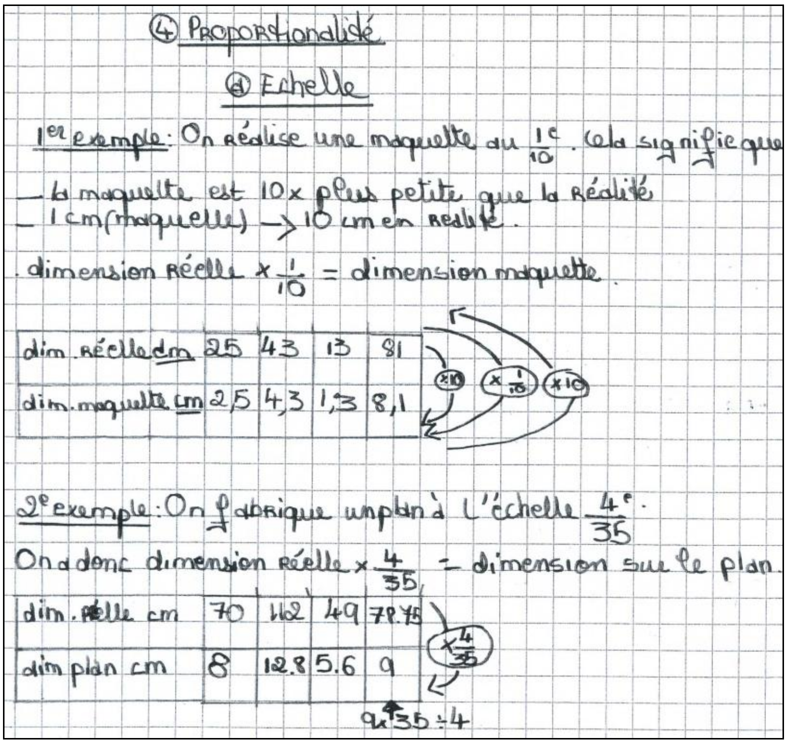

III. Echelles On veut réaliser le plan d'une cuisine au 5/140 ème.
1) Qu'est-ce que cela signifie ?
2) Sachant que la cuisine mesure en réalité 4,2 m sur 3,5 m (rectangle), quelles seront ses dimensions sur le plan ? Calculez les, puis tracer le rectangle
3) Placer dans le plan : → table rectangulaire : 77 cm × 147 cm
→ plan de travail : 2,80 m × 0,98 m.

Figure 8-9. Premier problème de la partie proportionnalité dans l'enseignement de M2

Il institutionnalise ensuite la notion d'échelle à l'aide de deux exemples :



4 Proportionnalité

a) Echelle

1er exemple : On réalise une maquette au $\frac{1^e}{10}$. Cela signifie que

- la maquette est 10x plus petite que la réalité
- 1 cm (maquette) → 10 cm en réalité.

dimension réelle × $\frac{1}{10}$ = dimension maquette.

dim. réelle cm	25	43	13	81
dim. maquette cm	2,5	4,3	1,3	8,1

×10   × $\frac{1}{10}$ ×10

2e exemple : On fabrique un plan à l'échelle $\frac{4^e}{35}$.

On a donc dimension réelle × $\frac{4}{35}$ = dimension sur le plan.

dim. réelle cm	70	112	49	78.75
dim plan cm	8	12.8	5.6	9

× $\frac{4}{35}$

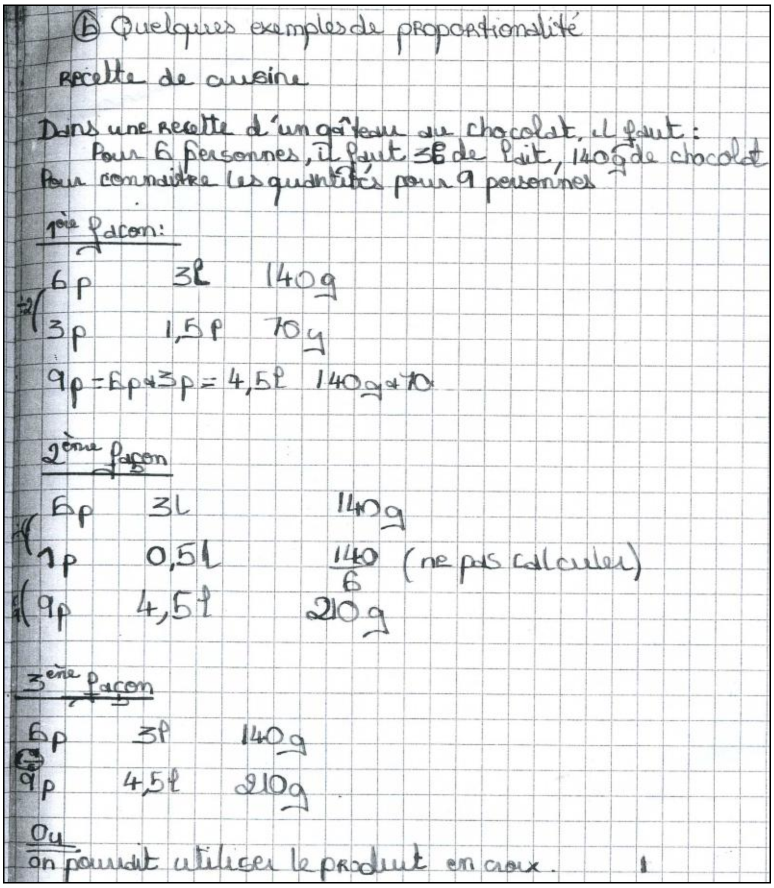
9×35÷4

Figure 8-10. Institutionnalisation de la notion d'échelle dans la classe de M2

Dans cet extrait, les échelles font partie de l'étude de la proportionnalité. Postérieurement, l'enseignant propose un problème de proportionnalité extrait du manuel *Multimaths* :

$t'_2\,(prop)$: « En allant au marché, Shérazade achète des cerises à 2 € le kilo et paie 3,36 €. Quelle quantité de cerises a-t-elle achetée ?» (Manuel 6MU05, exercice 1, page 68)

Puis, les élèves résolvent d'autres problèmes. Finalement, le professeur M2 institutionnalise quatre techniques pour résoudre un problème de proportionnalité à l'aide d'une situation relative à une recette de cuisine :



(b) Quelques exemples de proportionnalité

Recette de cuisine

Dans une recette d'un gâteau au chocolat, il faut :
Pour 6 personnes, il faut 3l de lait, 140g de chocolat
Pour connaître les quantités pour 9 personnes

1ère façon :

6p 3l 140g
3p 1,5l 70g
9p = 6p+3p = 4,5l 140g+70

2ème façon

6p 3l 140g
1p 0,5l $\frac{140}{6}$ (ne pas calculer)
9p 4,5l 210g

3ème façon

6p 3l 140g
9p 4,5l 210g

Ou
on pourrait utiliser le produit en croix.

Figure 8-11. Institutionnalisation des techniques relatives à une situation de proportionnalité dans la classe de M2

2.3.2 *Schéma relatif à l'organisation mathématique régionale*

Nous avons étudié les organisations régionales présentes dans le cahier « leçons » et le cahier « exercices » de la classe du professeur M2 du chapitre « Quotients et applications ». Nous avons relevé les types de tâches suivants dans les cahiers des élèves :

- $T_2(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité ;
- $T_3''(prop)$: Appliquer un taux de pourcentage à un nombre ;
- $T_5(prop)$: Calculer une échelle ;
- $T_8(prop)$: Calculer une grandeur dans une situation d'échelle.

Nous proposons maintenant le modèle de structuration de l'organisation mathématique relativement à la proportionnalité dans la progression du professeur M2 :

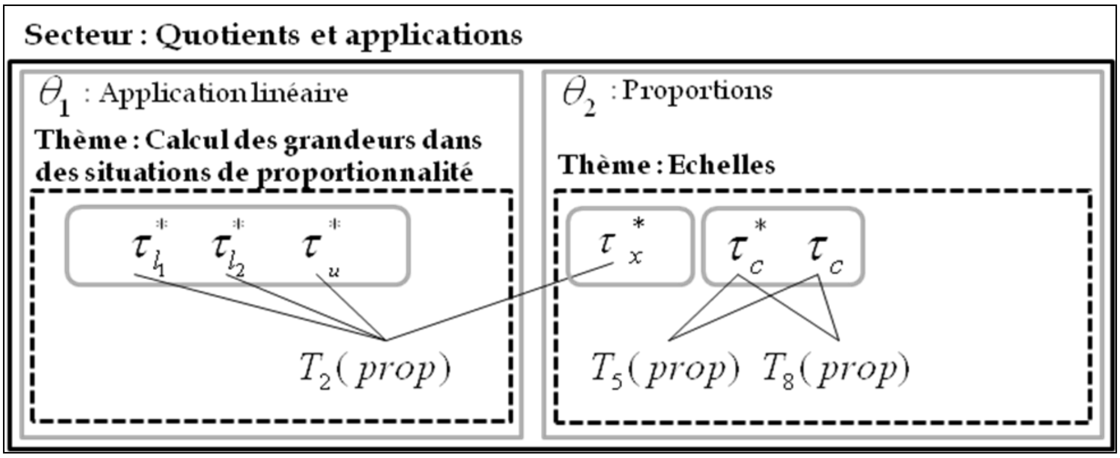


Figure 8-12. Organisation mathématique locale de la proportionnalité dans l'enseignement du professeur M2

- La structuration en thèmes dans le secteur « quotients et applications »

L'enseignant M2 enseigne la proportionnalité au niveau de thème d'étude. Dans le secteur, il étudie dans une même partie des situations de proportionnalité concernant le calcul des grandeurs et les échelles. Le professeur appelle le premier de ces thèmes « la proportionnalité ».

Alors que dans les programmes, les pourcentages font partie du secteur « proportionnalité », cette notion ne fait pas partie de l'étude de la proportionnalité. Elle est placée dans la partie « proportions ». Dans l'enseignement proposé par le professeur M2, les notions de proportionnalité, d'échelle et de pourcentages sont travaillées dans un même chapitre correspondant à un secteur d'étude « quotients et applications ».

- Le thème « échelles »

Au niveau de l'organisation didactique relative à la proportionnalité le professeur M2 commence par travailler des problèmes relatifs aux échelles. La classe du professeur M2 étudie les types de tâches $T_5(prop)$ et $T_6(prop)$. Pour ce faire, il utilise la notion d'échelle. L'échelle est étudiée comme le rapport entre les dimensions réelles de certaines grandeurs et les dimensions du plan, ce qui corresponde à utiliser un coefficient de proportionnalité d'une situation (τ_c). L'étude de ces situations n'est pas pointée par le professeur M2 comme des situations de proportionnalité. Le lien avec la proportionnalité peut être fait à l'aide du titre donné par M2 à cette partie, « proportionnalité », et à l'aide de l'ostensif « tableau ». Ainsi, même si l'étude des échelles est placée dans la partie proportionnalité par l'enseignant M2, nous pensons qu'elle forme un thème d'étude différent de celui de la proportionnalité et elle prend appui sur une technologie relative aux quotients. On comprend ainsi le choix du professeur de proposer un chapitre « quotients et applications ».

- Le thème « Calcul des grandeurs dans des situations de proportionnalité »

Après, avoir enseigné les pourcentages et les échelles le professeur M2 propose une première tâche ($t'_2(prop)$) relative au type de tâches $T_2(prop)$. Elle corresponde à une situation division quotition dans la typologie de Vergnaud (1990). Ensuite, il propose une situation de quatrième proportionnelle basé sur un problème de « recette de cuisine ». Pour la résoudre le professeur propose 4 techniques différentes. Les trois premières utilisent les propriétés additive ($\tau *_{l_2}$) et multiplicative ($\tau *_{l_1}$) de la linéarité, ainsi que la technique de passage par l'unité (τ_u^*). Ces éléments relèvent d'une technologie relative à la fonction linéaire et ils sont travaillés à l'aide d'un tableau de proportionnalité. Ainsi, cette technologie ne paraît pas s'insérer adéquatement dans les organisations mathématiques étudiées auparavant. En effet, les élèves savent multiplier un quotient par un nombre et résoudre des problèmes relatifs aux échelles à l'aide d'un coefficient de proportionnalité. L'organisation mathématique locale relative au calcul des grandeurs fait apparaître des nouvelles techniques et technologies dans le chapitre « quotients et application ».

- Le sujet d'étude «appliquer un taux de pourcentage »

On a vu que l'enseignement du professeur M2 commence par la définition de quotient, puis il donne la définition de proportion. Pour enseigner le type de tâches $T_3^{''}(prop)$, le professeur commence par poser la multiplication entre le pourcentage sous forme de quotient et le nombre, ensuite il propose trois manières différentes de réaliser calculer le produit. Ainsi, la praxéologie sous jacente à ce type de tâches s'appuie sur une technologie relative aux quotients et aux rapports et non à une technologie relevant de la proportionnalité. Elle est ainsi non-conforme aux programmes, lesquels proposent d'étudier les pourcentages dans le secteur « proportionnalité » à l'aide des grandeurs.

- Les domaines

En outre, les grandeurs sont mobilisées dans les thèmes « échelles » et « calcul des grandeurs dans des situations de proportionnalité ». Dans le sujet « appliquer un taux de pourcentage », elles sont absentes. Le chapitre semble divisé en deux parties, d'une part, les quotients, les proportions et les pourcentages qui sont étudiés plutôt dans le domaine du numérique, et d'autre part, les échelles et le calcul des grandeurs dans des situations de proportionnalité qui sont travaillés dans un domaine de grandeurs et qui reprennent les éléments technologiques de la première partie. Une étude plus approfondie nous aidera à caractériser le passage d'un cadre à l'autre et leurs interrelations, si elles existent.

2.3.3 Bilan sur les organisations didactique et mathématique régionales relatives de la proportionnalité chez le professeur M2

L'enseignant M2 semble vouloir insérer l'enseignement de la proportionnalité dans le secteur d'étude « quotients et applications ». Cette perspective n'est pas conforme aux directives institutionnelles qui indiquent que la notion de proportionnalité doit être travaillée principalement avec les propriétés de la fonction linéaire, même si cette dernière n'est pas formalisée. Il apparaît ainsi que l'organisation mathématique locale relative à la proportionnalité se présente de manière isolée dans le secteur « quotients et applications ». De plus, l'étude des notions d'échelle et de calcul des grandeurs proportionnelles s'appuie sur les grandeurs dans ce chapitre. L'enseignement de M2 s'inscrit globalement dans une dynamique des domaines du numérique, des grandeurs et des fonctions.

2.4 Bilan sur les organisations mathématiques relatives à la proportionnalité

Les programmes de 2005 introduisent l'étude de la proportionnalité en tant que notion de la classe de 6^{e}, à la différence des programmes de 1995, où cette étude commence véritablement en classe de 5^{e}. Selon les indications des programmes en vigueur, les techniques relatives aux problèmes de proportionnalité s'appuient principalement sur les propriétés de la fonction linéaire. De ce point de vue, les deux enseignants sont des « bons sujets de l'institution CA4 », ils enseignent la notion de proportionnalité dans ce contexte. De plus, comme il est signalé dans les programmes, les notions d'échelle et de pourcentage peuvent être étudiées comme des cas particuliers de situations de proportionnalité. L'analyse des organisations mathématiques mises en place par les professeurs, nous montre que le professeur M1 enseigne bien les pourcentages comme des exemples de situations de proportionnalité, tandis que le professeur M2 fait apparaître les pourcentages comme un sujet d'étude séparé du thème « proportionnalité ».

Dans les deux pratiques étudiées, la proportionnalité est au centre d'une dynamique grandeurs-fonctionnel-numérique, mais elle est construite de manières différentes dans les classes des professeurs M1 et M2. Dans la classe du professeur M1, cette notion se place au niveau du secteur d'étude et dans l'enseignement du professeur M2 au niveau du thème d'étude. Dans la suite, nous analyserons de manière plus approfondie cette dynamique en étudiant des séances particulières dans les deux classes de 6^{e}.

3. Analyse d'une séance relative au type de tâches $T_2(prop)$ chez le professeur M1

Comme nous l'avons dit, dans la première séance du chapitre « proportionnalité et pourcentages »[1], le professeur M1 commence l'enseignement de la proportionnalité par le problème suivant $t_2(prop)$:

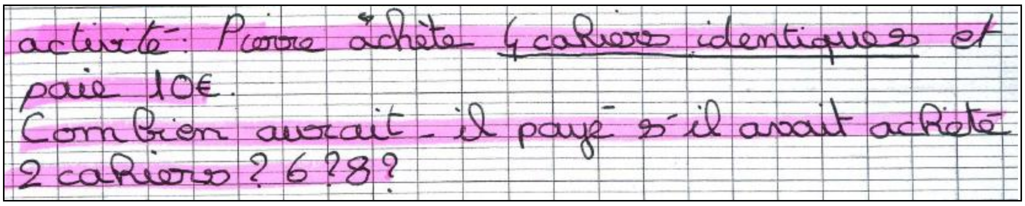

activité : Pierre achète 4 cahiers identiques et paie 10€.
Combien aurait-il payé s'il avait acheté 2 cahiers ? 6 ? 8 ?

Figure 8-13. Problème d'introduction au chapitre proportionnalité dans la classe de M1

Dans cette partie, nous présentons une analyse de cette séance en étudiant les organisations didactiques et mathématiques mises en place par l'enseignant M1.

3.1 La trame de la séance

Cette séance peut être divisée en quatre phases. D'abord le professeur et les élèves font un résumé du conseil de la classe (20 minutes), ensuite le professeur M1 présente et donne le problème de la figure 8-13 aux élèves (1 minute), puis les élèves travaillent sur l'activité et le professeur M1 surveille (10 minutes), et finalement il corrige au tableau le problème à travers une mise en commun (16 minutes).

3.2 L'organisation mathématique liée au problème $t_2(prop)$

Le problème de la figure 8-13 appartient au type de tâches « calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité » ($T_2(prop)$). Il peut être fragmenté en 3 tâches : déterminer le prix de 2 cahiers ($t_2^1(prop)$), 6 cahiers ($t_2^2(prop)$) et 8 cahiers ($t_2^3(prop)$).

Pour résoudre ces tâches plusieurs techniques pouvaient être envisagées. Si on se rappelle les contenus des programmes de 2005, les techniques conseillées pour réaliser le type de tâches $T_2(prop)$ sont :

- τ_{l_1} : Utilisation d'un rapport de linéarité ;
- τ_c : Utilisation du coefficient de proportionnalité ;

[1] La transcription de cette séance est présentée dans l'annexe E

– τ_u : Passage par l'unité ;

– τ_x : Règle de trois ;

Ces quatre techniques peuvent être mise en œuvre à l'aide d'un tableau de proportionnalité. Cette séance est un moment de premier rencontre en classe de 6e pour l'étude des situations de proportionnalité dont est l'objectif visé par le professeur M1 est l'apprentissage de ces techniques. On s'attend ainsi à des raisonnements dans le cadre des grandeurs à l'aide d'ostensifs comme « fois plus » ou « fois moins ».

3.3 L'analyse des organisations mathématiques et didactiques effectives

Les trois tâches n'ont pas la même difficulté. Il paraît plus facile pour les élèves de calculer le prix de 2 cahiers en considérant que 2 cahiers est la moitié de 4 cahiers. Ainsi les élèves et l'enseignant n'ont pas de difficulté pour résoudre la tâche $t_2^1(prop)$:

> *« M1: Bon, c'est bien parce que je vois que parmi vous il y a plusieurs formes d'envisager les choses. (M2 contrôle toujours le travail)*
> *E: 2 cahiers est égal à 5 euros*
> *M1: oui d'accord mais 2 cahiers n'est pas égal à 5 euros, il faut être plus précis.*
> *Alors, d'accord, bon! heee (...) Donc ici, j'ai vu plusieurs personnes répondre à la question.*
> *Si je sais que 4 cahiers coûtent 10 euros, xxx Marie 4 cahiers vont couter combien? Shhh*
> *E: Si on divise 10 par 2, et 4 par 2 xxx*
> *M1: oui, si j'achète deux fois moins de cahiers il semblerait évident que je vais payer la moitié. Donc (M2 écrit sur le tableau) si j'achète deux cahiers on va payer 2 fois moins que pour 4, soit 10:2=5€ » (Extrait séance 6, M1, 2010-2011)*

On voit que la technique s'appuie sur le cadre des grandeurs. On parle de la moitié du prix, la moitié de la quantité d'euros. Les grandeurs qui interviennent dans la situation ne sont pas explicitement identifiées dans un premier moment, les échanges portent plutôt sur les grandeurs mesurées.

Quelques erreurs apparaissent dans le vocabulaire et l'écriture. Dans la deuxième ligne, on voit qu'un élève énonce « 2 cahiers est égale à 5 euros ». Il s'agit d'une erreur habituelle chez les élèves d'écrire les correspondances avec le symbole « = », comme on peut voir dans l'extrait ci-dessous :

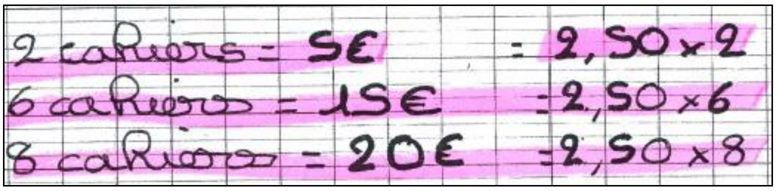

2 cahiers = 5€ = 2,50 x 2
6 cahiers = 15€ = 2,50 x 6
8 cahiers = 20€ = 2,50 x 8

Figure 8-14. Extrait du cahier d'un élève

Pour les autres tâches, les élèves ne rencontrent pas de problèmes. Les élèves participent activement à la classe et donnent plusieurs techniques relativement à l'activité proposée par le professeur M1. Au fur à mesure des réponses des élèves, le professeur M1 écrit sur le tableau plusieurs résolutions des tâches $t_2^1(prop)$, $t_2^2(prop)$ et $t_2^3(prop)$:

- Si on achète 2 cahiers on va payer 2 fois moins que pour 4, soit 10:2=5€
- Si on achète 1 cahier on le paie 10:4=2,50€, donc 6 cahiers coûtent 2,5x6=15€
- 2 cahiers coûtent 5€, 6 cahiers représente le triple de 2 cahiers, donc ils coûtent : 5x3=15€
- 6=4+2 donc le prix des cahiers est égale au prix de 4 cahiers augmenté le prix de 2 cahiers, 10+5=15€
- Pour 8 cahiers on paie 8 fois le prix d'un cahier: 2,5x8=20€
- On remarque que 8=4x2, on paie le double du prix de 4: 10x2=20€
- On remarque que 8=6+2, donc on paie 8 cahiers en ajoutant le prix de 6 au prix de 2, 15+5=20€

Figure 8-15. Solutions des tâches $t_2^1(prop)$, $t_2^2(prop)$, $t_2^3(prop)$.

A partir de cet extrait, on peut repérer les techniques suivantes :

a) Pour la tâche $t_2^1(prop)$: La première ligne montre qu'il s'agit de l'application de propriété multiplicative de la linéarité (τ_{l_1}) sous la forme du langage naturel.

b) Pour la tâche $t_2^2(prop)$: la deuxième, la troisième et la quatrième techniques sont mises en place pour résoudre cette tâche. Dans la deuxième, il s'agit du passage par l'unité (τ_u) en utilisant la propriété multiplicative de la linéarité sous la forme du langage naturel. Dans la troisième technique, les élèves utilisent la propriété multiplicative de la linéarité (τ_{l_1}). Dans la quatrième technique, ils utilisent la propriété additive de la linéarité (τ_{l_2}).

c) Pour la tâche $t_2^3(prop)$: Les dernières techniques sont relatives à cette tâche. Dans la cinquième technique, les élèves mobilisent un passage par l'unité (τ_u). Dans la sixième, ils calculent le prix de 8 cahiers avec la technique de l'application de la propriété multiplicative de la linéarité (τ_{l_1}). Et dans la dernière technique, les élèves utilisent la propriété additive de la linéarité (τ_{l_2}) sous la forme du langage naturel.

Ainsi les techniques utilisées pour résoudre le type de tâches $T_2(prop)$ sont τ_{l_1}, τ_{l_2} et τ_u. Elles sont mises en place à l'aide du langage naturel. Dans les expressions utilisées, on voit que les grandeurs sont très présentes, les élèves disent « 2 cahiers coûtent 5 euros, 6 cahiers coûtent le triple de 2 cahiers ». Par contre, les unités « euros » disparaissent dans les calculs. L'enseignant M1 pose les opérations avec des nombres abstraits, puis il ajoute l'unité pour donner la réponse finale. Il écrit par exemple « 10+5=15€ ». Il apparaît ainsi des égalités entre les grandeurs mesurées et les nombres.

Une fois les solutions trouvées, le professeur M1 propose aux élèves d'écrire les résultats sous la forme d'un tableau :

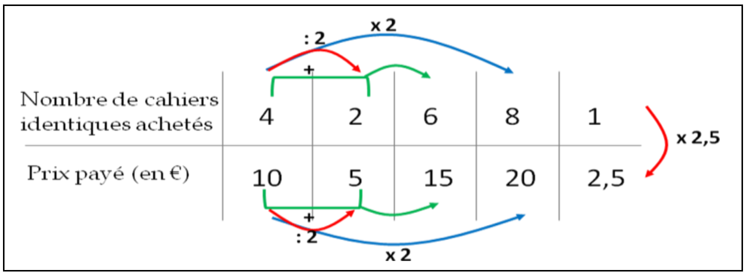


Figure 8-16. Tableau de proportionnalité relatif à l'activité d'introduction

La construction de ce tableau est à la charge du professeur qui questionne les élèves sur les différents mots et valeurs à mettre. Le professeur et les élèves identifient les grandeurs en jeu dans la situation de proportionnalité, soit le nombre de cahiers et le prix. L'unité de la grandeur prix est précisée sur le tableau. Les « valeurs » présentées dans les cases du tableau sont des nombres correspondants aux mesures des grandeurs en jeu. Les techniques énoncées antérieurement à l'aide du langage naturel sont représentées en utilisant les grandeurs, le tableau, des nombres, des flèches et des opérateurs. Ce tableau servira au professeur dans la séance prochaine à institutionnaliser les notions « proportionnel à » et « coefficient de proportionnalité ».

3.4 Bilan de la séance

Nos analyses montrent une forte présence des grandeurs dans la formulation de problèmes de proportionnalité, mais aussi dans les procédures de résolution. La notion de proportionnalité est introduite à l'aide de raisonnements réalisés dans le cadre des grandeurs. Les calculs prennent appui à la fois sur les mesures des grandeurs et les grandeurs mesurées elles-mêmes. Les propriétés multiplicative et additive de la fonction linéaire apparaissent dans le langage naturel, à travers les expressions classiques « fois plus » et « fois moins », et dans la représentation de la situation de proportionnalité à l'aide d'un tableau. Ainsi, le professeur M1 commence par enseigner la notion de proportionnalité dans le cadre des grandeurs, les calculs sont faits dans le cadre du numérique et l'étude d'un tableau de proportionnalité explicite les propriétés de la fonction linéaire, notion appartenant au cadre des fonctions. De ce point de vue, les organisations mathématiques mises en place par l'enseignant M1 sont conformes aux programmes de 2005. De plus, les grandeurs sont très présentes dans la classe du professeur M1, car elles servent à présenter une situation de proportionnalité, mais aussi à résoudre cette situation. En effet, elles apparaissent dans l'énoncé au niveau des tâches, des techniques et des technologies relatives à ces tâches.

4. Analyse des séances relatives au type de tâches $T_2(prop)$ chez le professeur M2

Nous avons choisi cette séance, car elle est la première séance qui traite le type de tâches $T_2(prop)$: calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité[2]. Elle est ainsi la séance d'introduction.

4.1 La trame de la séance

Dans la séance choisie, la classe étudie deux exercices concernant les échelles (figures 8-18 et 8-19) et la tâche $t'_2(prop)$ ci-dessous :

1. En allant au marché, Shérazade achète des cerises à 2 € le kilo et paie 336 €. Quelle quantité de cerises a-t-elle achetée ?

Figure 8-17. Problème 1, page 68 du manuel 6MU05

C'est la première fois que le professeur M2 traite un problème de proportionnalité qui ne concerne pas les échelles. Cette séance se situe à la fin du chapitre « quotients et applications » et juste après l'étude des échelles. La séance commence par la correction d'un exercice relatif aux échelles donné comme devoir de la séance précédente. C'est le professeur M2 qui explique la procédure de résolution et donne la réponse au tableau. Ensuite, il propose un deuxième problème sur les échelles, lequel est traité par un élève au tableau. Finalement, le professeur M2 propose une situation de proportionnalité, il s'agit du problème $t'_2(prop)$ qui met en relation les grandeurs prix et masse. Après, un moment de travail individuel, ce problème est corrigé par deux élèves au tableau, lesquels exposent deux méthodes différentes.

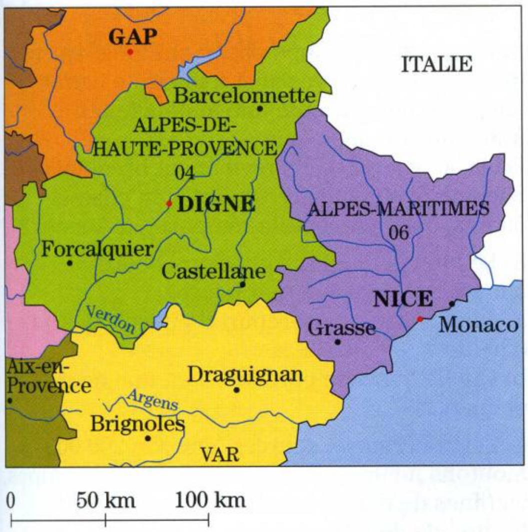
La séance se présente avec les différentes phases suivantes :

- Phase 1 (22 minutes): Correction devoir, exercice 56

L'enseignant corrige au tableau l'activité extraite du manuel *Multimath*, 6MU05 :

56 En avion

Habituellement, un petit avion de tourisme consomme un plein d'essence pour effectuer le trajet séparant Forcalquier de Nice.



a. Avec un plein d'essence, pourra-t-il faire le trajet entre Barcelonnette et Draguignan ?
b. Aujourd'hui, son réservoir n'est plein qu'aux quatre cinquièmes.
Pourra-t-il faire le trajet Digne-Brignoles ?

Figure 8-18. Extrait manuel *Multimath* 6MU05, activité 56, p.77

Le professeur M2 écrit la procédure et la réponse en faisant une mise en commun avec les élèves.

- Phase 2 (10 minutes) : Présentation et travail sur l'exercice 21

Le professeur M2 propose une autre activité du manuel *Multimath* 6MU05 sur les échelles :

21 Partis de Marseille, nous devons aller à Paris. Nous avons déjà parcouru les deux tiers du trajet.
Sachant qu'il y a 810 km de Marseille à Paris, combien de kilomètres avons-nous parcourus ?

Figure 8-19. Extrait manuel *Multimath* 6MU05, activité 21, p.73

[2] La transcription de cette séance est présentée dans l'annexe E

Les élèves travaillent sur l'activité individuellement.

- Phase 3 : Correction de l'exercice 21

  Un élève passe au tableau pour donner leur réponse à l'activité.

- Phase 4 (2 minutes) : Explication sur les changements d'unités de longueur

  Le professeur M2 fait une parenthèse pour expliquer les changements d'unités de longueur.

- Phase 5 (1 minute) : Présentation de la tâche $t'_2(prop)$

  Le professeur présente la tâche $t'_2(prop)$ aux élèves.

- Phases 6 (7 minutes) : Correction de la tâche $t'_2(prop)$ par Tiffany

  La tâche $t'_2(prop)$ (figure 8-17) donnée la phase précédente est corrigée par deux élèves au tableau. La première élève, Tiffany, travaille avec l'unité gramme. Elle calcule la masse de cerises achetés pour 1€, et ensuite elle multiplie cette masse par 3,36.

- Phase 7 (3 minutes) : Correction de la tâche $t'_2(prop)$ par l'élève E1

  Le deuxième élève calcule directement en utilisant le produit en croix. Il faut noter que cette tâche est la première qui concerne des grandeurs différentes de l'espèce de grandeur longueur. En effet, avant cet exercice, les élèves n'ont résolu que des problèmes relatifs aux échelles.

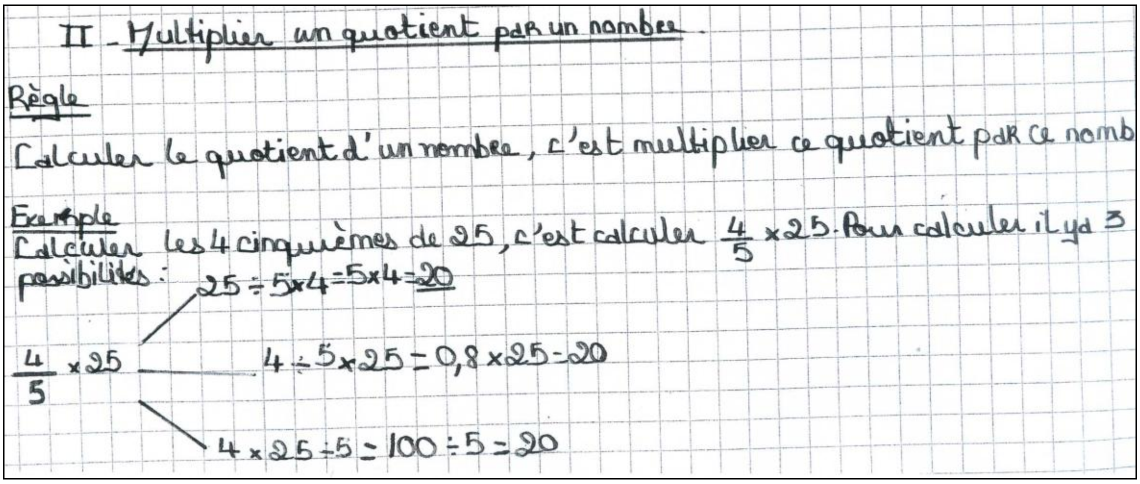
Pour pouvoir comparer les procédures utilisées par la classe du professeur M2 à ceux mises en place par le professeur M1, nous avons centré notre analyse sur la tâche $t'_2(prop)$, c'est-à-dire, sur les phases 5 ,6 et 7, tout en tenant compte des contenus déjà enseignés dans le chapitre.

4.2 Les savoirs construits avant la tâche $t'_2(prop)$

Pour analyser les organisations mathématiques relatives à la tâche $t'_2(prop)$, nous regardons tout d'abord les savoirs construits par le professeur M2 avant de présenter cette tâche.

4.2.1 *Les savoirs mathématiques relatifs aux quotients*

Comme nous l'avons dit, le professeur M2 institutionnalise une définition du quotient et des techniques relatives au calcul du quotient d'un nombre. Trois techniques sont travaillées dans la classe :



II - Multiplier un quotient par un nombre.

Règle

Calculer le quotient d'un nombre, c'est multiplier ce quotient par ce nomb

Exemple

Calculer les 4 cinquièmes de 25, c'est calculer $\frac{4}{5} \times 25$. Pour calculer il y a 3 possibilités :

$\frac{4}{5} \times 25$

$25 \div 5 \times 4 = 5 \times 4 = 20$

$4 \div 5 \times 25 = 0,8 \times 25 = 20$

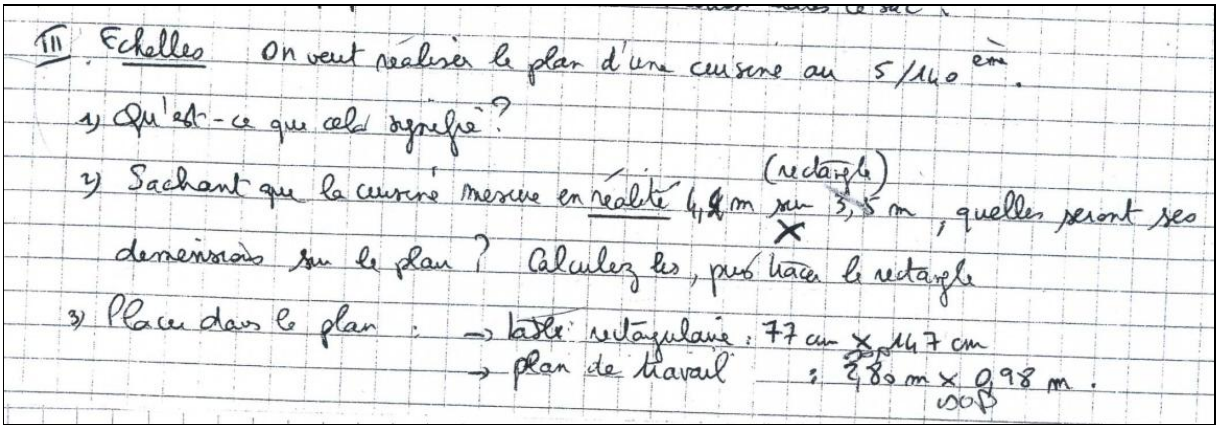
$4 \times 25 \div 5 = 100 \div 5 = 20$

Figure 8-20. Extrait des techniques enseignées par M2 pour multiplier un quotient par un nombre

On remarque que la tâche et les techniques se placent dans un cadre purement numérique. Ce fait est prédominant dans tous les exercices relatifs aux quotients dans la pratique du professeur M2.

4.2.2 *La proportionnalité à travers l'étude des échelles*

Après avoir enseigné les quotients, le professeur M2 travaille les notions de rapport et pourcentage. Ces deux contenus sont présentés d'une manière intégralement numérique. C'est à travers l'étude des échelles que les grandeurs apparaissent pour la première fois dans le chapitre « quotients et applications ». Les échelles sont enseignées comme un exemple de la proportionnalité, il est donc essentiel de regarder les organisations mathématiques construites relativement à ce contexte pour comprendre l'enseignement de la tâche $t'_2\,(prop)$. Le premier problème relatif aux échelles apparaît dans une photocopie distribuée par le professeur M2 :

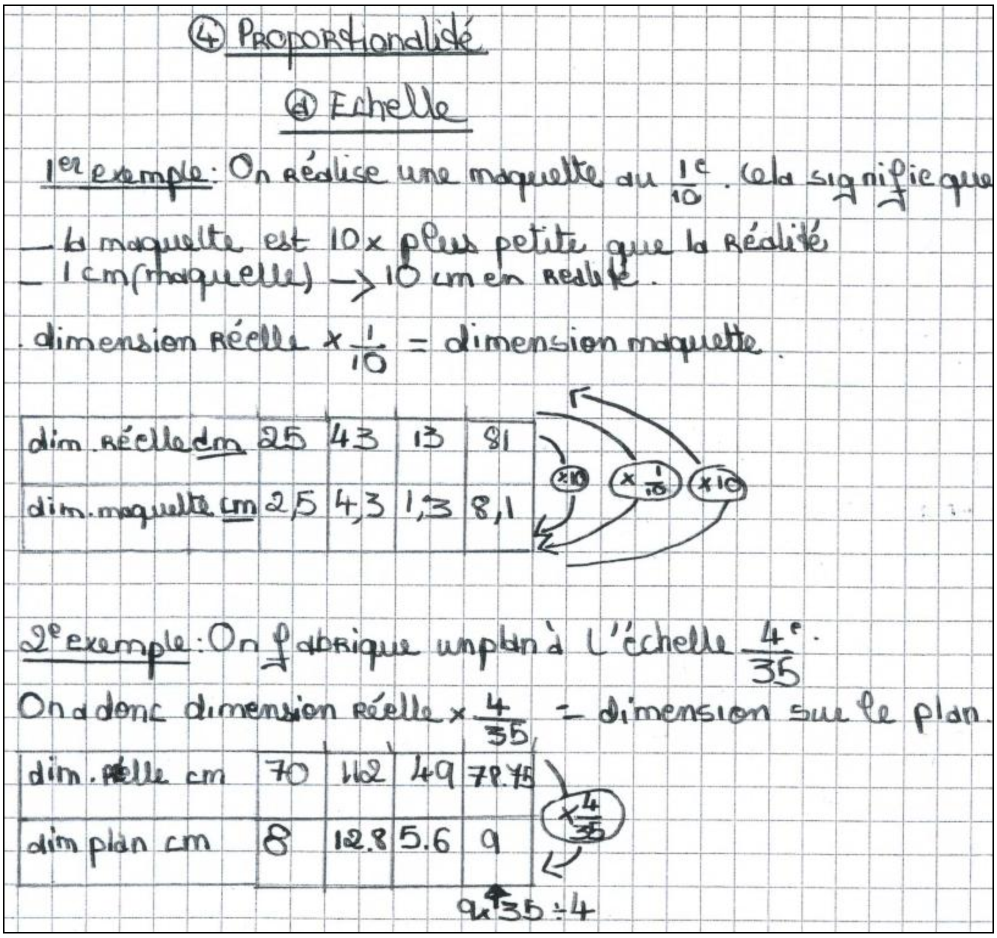


III. Echelles On veut réaliser le plan d'une cuisine au 5/140ème.
1) Qu'est-ce que cela signifie ?
2) Sachant que la cuisine mesure en réalité 4,2 m sur 3,5 m (rectangle), quelles seront ses dimensions sur le plan ? Calculez les, puis tracer le rectangle
3) Placer dans le plan : → table rectangulaire : 77 cm × 147 cm
→ plan de travail : 2,80 m × 0,98 m.

Figure 8-21. Premier exercice relatif aux échelles proposé par M2

Dans cette activité il s'agit de trouver dans la partie 2) et 3) les dimensions sur le plan d'un objet en connaissant ses dimensions réelles et l'échelle. Pour résoudre ce type de tâches plusieurs techniques sont travaillées. Pour la partie 2) les élèves multiplient les dimensions réelles par l'échelle 5/140. Pour la partie 3) le professeur M2 construit un tableau de proportionnalité et multiplie les dimensions réelles par l'échelle. Egalement pour la partie 3) le produit en croix est une autre technique envisagée. Même si la notion sous-jacente à ces techniques est le « coefficient de proportionnalité », le professeur M2 n'énonce jamais cette notion ni celle de proportionnalité.

Pour institutionnaliser la notion d'échelle et les techniques associées, le professeur propose les exemples suivants :


④ Proportionnalité

① Echelle

1er exemple : On réalise une maquette au $\frac{1}{10}^e$. Cela signifie que

– la maquette est 10x plus petite que la réalité

– 1 cm (maquette) → 10 cm en réalité.

. dimension réelle $\times \frac{1}{10}$ = dimension maquette.

dim. réelle cm	25	43	13	81
dim. maquette cm	2,5	4,3	1,3	8,1

2e exemple : On fabrique un plan à l'échelle $\frac{4}{35}^e$.

On a donc dimension réelle $\times \frac{4}{35}$ = dimension sur le plan.

dim. réelle cm	70	112	49	78.75
dim plan cm	8	12.8	5.6	9

Figure 8-22. Institutionnalisation des échelles dans la classe de M2

La notion de « coefficient de proportionnalité » n'est pas explicitée par le professeur. Il n'existe pas une institutionnalisation des éléments relatifs à la proportionnalité comme les mots tableau de proportionnalité, coefficient de proportionnalité, etc. La technique d'utilisation de l'échelle (τ_c) est présentée comme une application particulière aux situations relatives à cette notion, elle n'est pas généralisée aux situations de proportionnalité.

4.3 Analyse des procédures relatives à la tâche $t'_2(prop)$ et de l'institutionnalisation

Précédemment, on a vu aussi que la tâche $t'_2(prop)$ corresponde au type de tâches $T_2(prop)$, « calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité ». Nous rappelons que la tâche est décrite de la manière suivante :

$t'_2(prop)$: « En allant au marché, Shérazade achète des cerises à 2 € le kilo et paie 3,36 €. Quelle quantité de cerises a-t-elle acheté ?»

Le professeur M2 présente la tâche de la manière suivante au tableau :

1 kg ⟶ 2 €
? ⟶ 3,36 €

Figure 8-23. Représentation de la tâche $t'_2\,(prop)$ faite par le professeur M2

On remarque immédiatement que les espèces de grandeurs prix et masse ne sont pas explicitées par l'enseignant M2 au tableau. La tâche est présentée dans l'univers des grandeurs mesurées. Le professeur M2 amène dans le milieu de la situation une partie de la résolution de la tâche en proposant le schéma précédent. Pour résoudre la tâche deux techniques sont proposées par deux élèves qui passent au tableau.

4.3.1 La procédure de Tiffany

Tiffany commence par mettre sa réponse « 1680 g » à la place du symbole « ? » dans la figure 8-23. Le professeur M2 demande la justification d'une telle réponse :

« M2 : déjà tu met 1680, d'où ça vient 1680 ?
Tiffany : c'est en grammes
M2: oui, mais pourquoi 1680 ? il y a un 2, un 1 et un 3,36
Tiffany: je calcule
M2: et voilà, je veux les calculs alors pour que je comprenne
Tiffany: xxx peut être ça ne va pas, comme c'est en kilos
M2: c'est pas demandé. C'est demandé quelle quantité de cerises a-t-elle achetée, c'est demandé en kilos?
Tiffany : non
M2: alors, tu réponds à la question, les autres se taisent et après on verra, et s'il faut le transformer, on le transformera, maintenant tu réponds » (Extrait séance 9, M2, 2010-2011)

Ainsi, Tiffany complète tout en bas de la réponse par : « 500g x 3,36 g = 1680 ». Le professeur M2 l'interroge encore sur les calculs :

« M2: pourquoi t'as fait 500g ?
E: oui?
Tiffany: parce que 1 € est égale à 500 g
M2: ahh, écris ça quelque part, tu mets une flèche alors » (ibidem)

Un élève questionne aussi Tiffany par rapport à ses calculs. Une partie des élèves n'a pas compris la procédure utilisée par la fille. Tiffany ajoute dans une autre ligne « 1€ = 500g », montrant par là qu'elle utilise la technique de passage par l'unité (τ_u). Cette expression montre une erreur assez fréquente chez les élèves. On l'a déjà observée dans la classe du professeur M1. Les élèves confondent la correspondance proportionnelle entre deux grandeurs avec l'égalité entre ces grandeurs. Le professeur M2 ne rectifie pas la faute, par contre il élimine l'unité « g » dans l'expression rédigée avant par Tiffany : « 500g x 3,36g = 1680 », il obtient de cette manière « 500g x 3,36 = 1680 ». Ainsi au tableau, on trouve différentes expressions incorrectes par rapport aux unités. On y voit une égalité avec des espèces de grandeurs différentes et aussi une égalité entre le produit d'une masse par un nombre avec un autre nombre. Le formalisme utilisé n'est pas correct, ni dans les formulations des égalités, ni dans les opérations sur les unités.

Comme plusieurs élèves n'ont pas bien compris la technique employée par Tiffany, le professeur M2 réexplique la méthode en reprenant la responsabilité de la résolution de la tâche :

> « *M2: ok merci, alors elle a fait la chose suivante: Puisque 2 euros, avec deux euros on achète un kilo de cerises, c'est-à-dire pour 1 euro elle aura la moitié d'un kilo, elle va avoir 500 grammes. Est-ce que déjà avec ça on est d'accord?*
> *Es: oui !*
> *M2: j'ai pas demandé de lever la main, baissez les bras pour l'instant, est-ce que vous êtes d'accord avec ça?*
> *Es: oui !*
> *E: oui, mais pas avec ce qu'il y a au- dessous*
> *M2: bon, c'est juste, ensuite puisque elle n'achète pas 1 euro de cerises, mais elle achète pour 3,36 de cerises, bah elle a multiplié les 500 g par 3,36, d'accord? Est-ce que ça vous l'avez compris?*
> *E: oui*
> *E: non*
> *M2: si 2 euros est 1 kg de cerises, pour 1 euro elle aura la moitié, soit 500g. Et puisque, elle va pas acheter 1 euro, elle va acheter 3,36 euros, pour passer de 1 à 3,36 on multiplie par 3,36// Pour passer de 1 à 3,36, on multiplie par 3,36, c'est la même chose, parce que si elle achète par 3,36, ça sera 3,36 fois plus que pour 1 euro, et après elle a fait la multiplication et elle a trouvé 1680 grammes, donc elle a trouvé un moyen de trouver la réponse en passant par combien il y aura de cerises pour 1 euro et après ce que j'aurai pour 3,36. Bon, ça c'est une méthode c'est juste! Est-ce qu'il y a une autre à proposer? » (ibid)*

Cette reprise de la technique à l'aide des formulations à l'aide du langage naturel mobilise les grandeurs. L'extrait nous montre l'importance des grandeurs pour la compréhension de la proportionnalité. Premièrement, le professeur M2 propose une situation mettant en relation deux grandeurs, masse et prix, relevant du type de tâches $T_2(prop)$. Il propose ensuite un schéma de structure de tableau de proportionnalité. L'élève Tiffany semble résoudre la tâche en restant sur le cadre des grandeurs et en utilisant la technique de passage par l'unité (τ_u). En effet, elle calcule la masse de cerises que Shérazade peut acheter pour 1 euro et multiplie cette quantité par 3,36 euros. Même si les unités ne sont pas bien utilisées, on peut penser que les raisonnements faits par Tiffany sont davantage en relation avec les grandeurs.

Les élèves ne comprennent pas la méthode, cela peut être dû au fait que le milieu construit avec le schéma par M2 suggérait d'autres techniques, et il ne favorisait pas le passage par l'unité. Ainsi, pour expliquer la méthode le professeur M2 passe du cadre des fonctions et du numérique à un cadre de grandeurs. Dans son schéma, on pouvait, par exemple, multiplier par un coefficient de proportionnalité sans les unités comme pour les problèmes d'échelles. En raison de l'intervention de Tiffany, le professeur M2 reformule la tâche dans un cadre de grandeurs comme le montre son discours : « *si 2 euros est 1 kg de cerises, pour 1 euro elle aura la moitié, soit 500g. Et puisque, elle va pas acheter 1 euro, elle va acheter 3,36 euros, pour passer de 1 à 3,36 on multiplie par 3,36* ».

Certains élèves ne peuvent pas utiliser directement des notions relatives à la proportionnalité. Cela n'est pas surprenant puisque la classe n'a pas encore étudié des situations de proportionnalité en utilisant les notions de coefficient de proportionnalité ou les propriétés de linéarité. Ainsi, il semble que le passage par des raisonnements dans le cadre des grandeurs soit nécessaire avant d'institutionnaliser d'autres techniques.

4.3.2 La procédure de l'élève E1

Après Tiffany, un deuxième élève passe au tableau pour énoncer une deuxième méthode :

« E1: pour savoir je fais ah//
M2: laisse ta calculatrice, on connaît le résultat
E1: 3,36 fois 1 kilo et le résultat je l'ai divisé par 2
M2: alors, écris 3,36, qu'est-ce que tu as fait après ? fois 1 et puis divisé par 2, et t'as trouvé? 1,68 (l'élève écrit au même temps que le professeur parle 3,36 x 1 : 2 = 1,68 kg)
Ok, est-ce qu'il y a un autre moyen?
E: oui monsieur!
M2: Laura
E: on peut diviser 3,36 divisé par 2
E : c'est pareil !
M2: c'est pareil, mais effectivement le produit en croix, alors je vous ai dit la dernière fois que le produit en croix c'est un truc qui passe partout, mais c'est pas toujours le cas.

Pour passer de 2 à 1 (le professeur pointe 2 euros, puis 1 kg), on divise par 2, et pour passer de là à là (le professeur pointe 3,36 euros, puis le symbole « ? ») je divise par 2, 3,36 divisé par 2, et ça nous fera…

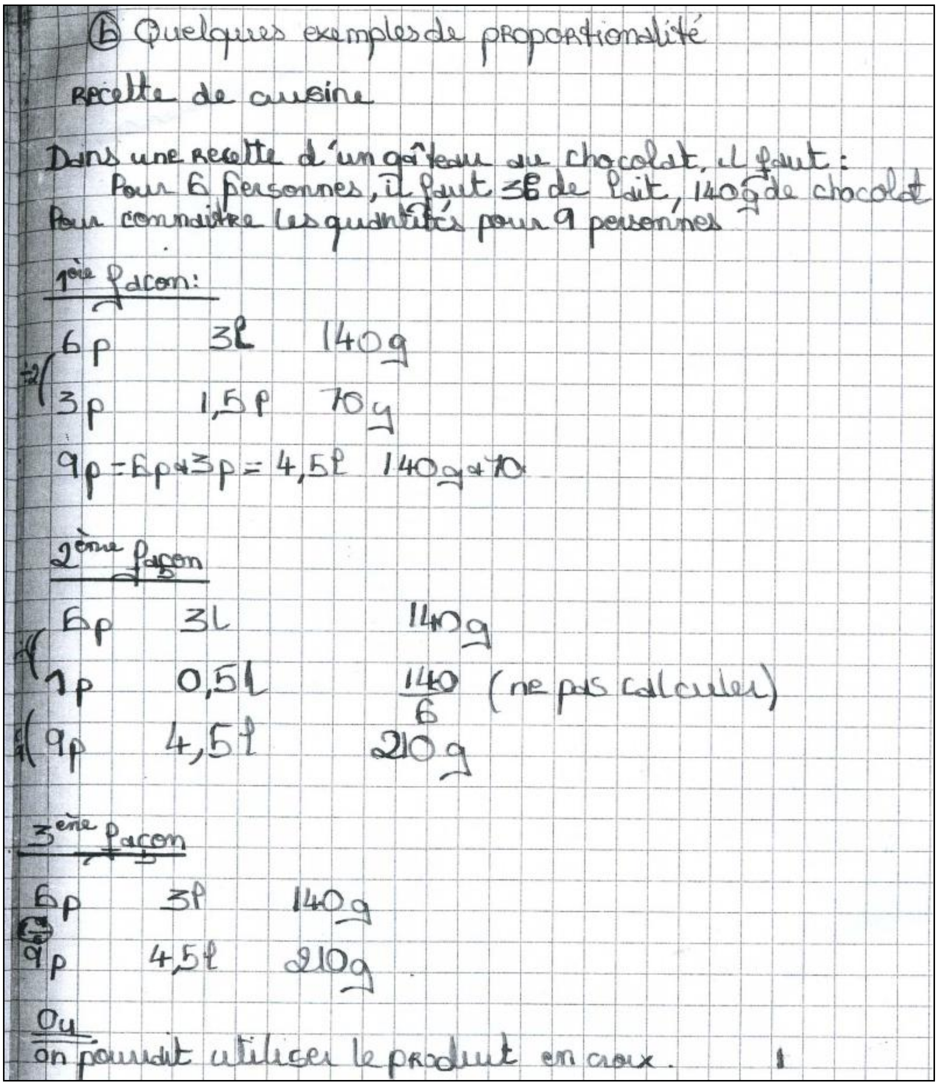
E : à la calculette, ça nous fera comme le produit en croix

Dans cette deuxième méthode, l'élève E1 semble utiliser le produit en croix. Le professeur associe explicitement la procédure employée par l'élève E1 à la procédure de produit en croix. Cette technique n'est pas conforme au programme de la classe de 6e, elle apparaît comme contenu dans la classe de 4e. Il semble ainsi que certains élèves ont étudié à l'école élémentaire la technique du produit en croix. On voit aussi encore une fois que la résolution est faite à l'aide des grandeurs mesurées, mais les unités ne sont bien exprimées dans les calculs.

Rappelons que c'est le premier exercice de ce type traité par l'enseignant M2. Il s'agit d'étudier des grandeurs proportionnelles autres que les longueurs. A différence du professeur M1, l'enseignant M2 ne commence pas la partie « proportionnalité » pour des procédures relatives à des raisonnements dans le cadre des grandeurs. Pour les échelles, la technique mise en avant par le professeur M2 est l'utilisation du coefficient de proportionnalité, cet élément technologique n'a jamais été institutionnalisé. Il apparaît que certains élèves, comme Tiffany, n'ont pas encore automatisé ces techniques, ils ont besoin de travailler avec les grandeurs pour établir ces procédures. Les problèmes sont posés dans un contexte de la vie courante, en prenant des exemples de relations entre les grandeurs. Le professeur M2 place ces problèmes dans le cadre du fonctionnel ou du numérique, sans prendre en charge le passage entre les grandeurs et ces domaines. On peut interpréter ce fait comme la volonté du professeur M2 d'enseigner la proportionnalité comme une application des quotients. Pour comprendre les choix faits par le professeur M2, nous avons considéré l'institutionnalisation réalisée par cet enseignant.

4.3.3 L'institutionnalisation de la proportionnalité

L'institutionnalisation des procédures relatives au type de tâches $T_2(prop)$ est faite dans la séance suivante que nous allons analyser maintenant pour mieux comprendre l'enseignement de M2. Les procédures institutionnalisées pour la résolution du type de tâches $T_2(prop)$ sont présentées dans l'extrait suivant:



6 Quelques exemples de proportionnalité

Recette de cuisine

Dans une recette d'un gâteau au chocolat, il faut :
Pour 6 personnes, il faut 3l de lait, 140g de chocolat
Pour connaître les quantités pour 9 personnes

1ère façon :

6p 3l 140g
3p 1,5l 70g
9p = 6p+3p = 4,5l 140g+70

2ème façon

6p 3l 140g
1p 0,5l $\frac{140}{6}$ (ne pas calculer)
9p 4,5l 210g

3ème façon

6p 3l 140g
9p 4,5l 210g

Ou
on pourrait utiliser le produit en croix.

Figure 8-24. Institutionnalisation des techniques relatives aux situations de proportionnalité chez M2

Le professeur M2 représente la situation de proportionnalité à l'aide d'une structure de tableau, où les grandeurs mesurées sont bien indiquées. Cependant, les espèces de grandeurs en jeu dans la situation de proportionnalité, nombre de personnes, volume et masse, ne sont pas explicitées par le professeur, mais elles sont repérables par l'indication des unités. Dans la première technique, on voit que le professeur utilise la multiplication par un coefficient de linéarité (τ_{l_2}) et ensuite il utilise la propriété d'additivité (τ_{l_1}). Ensuite, la deuxième technique mise en place est le passage par l'unité τ_u en divisant par 6 et ensuite en multipliant par 9. La troisième technique est l'application directe d'un coefficient de linéarité sous forme fractionnaire (τ_{l_2}), en effet, les élèves multiplient par 9/6. Ainsi les techniques institutionnalisées par le professeur M2 sont conformes aux techniques proposées par le programme de la classe de 6e.

On voit une remarque à la fin de l'institutionnalisation « on pouvait utiliser le produit en croix ». Pour expliquer la technique, le professeur dessine le schéma suivant :

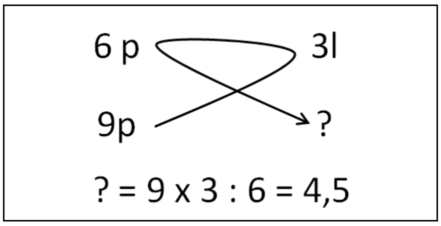


Figure 8-25. Schéma relatif à la technique du produit
en croix dessiné par le professeur M2

Comme nous l'avons dit, cette technique n'est pas conforme aux programmes de 6e. Cependant, elle a été évoquée par les élèves pendant la séance. Dans les séances suivantes, elle sera aussi très présente dans les procédures des élèves.

Comme dans la figure 8-25, les calculs sont faits à l'aide des nombres, les unités sont absentes.

On observe aussi que la technique d'utilisation du coefficient de proportionnalité n'est pas institutionnalisée par le professeur M2. En fait, elle n'est jamais évoquée pour résoudre le type de tâches $T_2(prop)$. Cependant, le coefficient de proportionnalité est l'élément technologique principal dans le thème « échelles ».

Ainsi, la technologie des trois premières techniques repose sur les propriétés de la fonction linéaire, mais à la différence de l'enseignant M1, le professeur M2 n'utilise pour les raisonnements que des représentations schématiques sous forme de tableaux et d'opérateurs. En effet, l'enseignant M1 utilise des raisonnements sous forme de langage naturel à l'aide des ostensifs « fois plus » ou « fois moins ». Les raisonnements proposés par le professeur M2 s'appuient, d'une part, sur les grandeurs mesurées présentes dans le tableau de proportionnalité, et d'autre part, sur les rapports internes entre les grandeurs de même espèce. Cette schématisation de la situation de proportionnalité s'inscrit bien dans le cadre des grandeurs. Mais la difficulté à comprendre que l'opérateur linéaire s'applique à toutes les espèces de grandeurs représentées dans le tableau peut amener les élèves à chercher seulement des relations numériques entre les lignes ou les colonnes en diminuant la place des grandeurs dans leurs raisonnements.

4.4 Bilan de la séance et de l'institutionnalisation

Le professeur M2 place l'étude de la proportionnalité dans le chapitre « quotients et applications ». Nous avons essayé de comprendre ce choix. D'une part, nous avons vu que l'enseignant M2 n'institutionnalise pas la notion de « coefficient de proportionnalité », ni la notion « d'être proportionnel à » comme le professeur M1. De plus, il institutionnalise au niveau de secteur les notions de quotient, rapport, pourcentage et échelle avant de travailler la proportionnalité, mais les techniques et technologies relatives à ces notions ne semblent pas être complètement réinvesties dans les situations de proportionnalité. La cohérence au niveau du secteur pour le thème « proportionnalité » se centre essentiellement sur l'utilisation des quotients pour exprimer des coefficients de linéarité. D'autre part, les situations de proportionnalité sont toujours représentées à l'aide des structures de tableaux. Le contrat didactique implicite pour le traitement de ces situations conduit à trouver de relations numériques entre les lignes et les colonnes de ces tableaux. Cela peut créer des obstacles chez certains élèves qui peuvent associer les tableaux à des situations de proportionnalité. De plus, les programmes indiquent que les situations de proportionnalité doivent être étudiées par d'autres raisonnements ne s'appuyant pas sur les tableaux, pour ainsi détacher ces deux notions.

Les grandeurs servent à énoncer les situations de proportionnalité et les grandeurs mesurées à faire les calculs, cependant elles sont peu employées explicitement dans les techniques et technologies utilisant des tableaux de proportionnalité. En effet, les élèves risquent de se concentrer uniquement sur la recherche de relations numérique entre les différentes mesures.

De plus, comme dans la classe de M1, les unités sont mal utilisées dans les calculs. Le professeur M2 égalise les nombres aux grandeurs mesurées.

A travers l'analyse des séances mettant en jeu le type de tâches $T_2(prop)$ dans la pratique du professeur M2, nous avons mis en évidence une dynamique grandeurs-fonctions-numérique. Les grandeurs occupent une place importante dans la formulation de situation de proportionnalité et il existe une grande diversité de tâches (masse, recette, échelle, etc). Les grandeurs permettent de travailler des calculs dans le numérique et des propriétés de linéarité dans le domaine de fonctions. Leur rôle est de présenter des situations de proportionnalité et de modélisation des situations à l'aide des grandeurs mesurées. Néanmoins, il semble qu'avec la manière de raisonner privilégiée dans ces séances, les élèves ne voient que des procédures numériques, puisque l'enseignement de la proportionnalité prend toujours appui sur les structures de tableaux.

5. L'enseignement des pourcentages dans les deux classes de 6^{e}

L'analyse des progressions chez les deux enseignants montre qu'ils consacrent un thème relatif à la notion de pourcentage. D'autre part, ce thème doit être lié à la proportionnalité comme nous l'avons vu dans la section 2.1. Dans cette partie, nous allons montrer qu'il s'agit de deux enseignements différents relativement aux grandeurs. Pour ce faire, nous avons fait le choix d'étudier le type de tâches $T_3(prop)$, « appliquer un taux de pourcentage ».

5.1 Le type de tâches $T_3(prop)$ chez le professeur M1

Après avoir étudié la proportionnalité, la classe du professeur M1 travaille sur la notion de pourcentage. Il institutionnalise des éléments techniques et technologiques relatifs aux pourcentages en une séance pendant laquelle les élèves travaillent sur quelques exercices.

5.1.1 La trame de la séance

Cette séance comporte plusieurs phases :

- Phase 1 (7 minutes) : Lien entre la proportionnalité et les pourcentages

  Le professeur M1 introduit la séance en expliquant les applications de la proportionnalité dans la vie quotidienne et les autres sciences, plus particulièrement il explique la présence des pourcentages dans la vie quotidienne.

- Phase 2 (7 minutes) : Institutionnalisation de la notion de pourcentage

  Le professeur M1 institutionnalise la notion de pourcentage

- Phase 3 (1 minute) : Présentation de la tâche $t_3(prop)$

  Le professeur M1 propose aux élèves la tâche $t_3(prop)$ suivante : « Un objet coûte 46 €, son prix augmente de 3 %. De combien le prix de cet objet augment-t-il ? »

- Phase 4 (3 minutes) : Travail des élèves sur la tâche $t_3(prop)$

  Les élèves travaillent et le professeur M1 surveille

- Phase 5 (21 minutes) : Correction de la tâche $t_3(prop)$

  Résolution de la tâche $t_3(prop)$ par l'enseignant et les élèves

- Phase 6 (20 minutes) : Exercices sur les pourcentages

  L'enseignant propose des exercices portant sur le calcul d'un pourcentage d'une grandeur. Les élèves les réalisent.

- Phase 7 : Corrections des exercices portant sur les pourcentages

  Quelques élèves passent au tableau pour donner les réponses des exercices.

5.1.2 L'organisation mathématique relative à $t_3(prop)$

La tâche $t_3(prop)$ correspond au type de tâches $T_3(prop)$. Si nous revenons sur les directives des programmes scolaires, on observe qu'ils ne spécifient pas s'il s'agit d'appliquer le pourcentage à un nombre ou à une grandeur. Néanmoins, ils indiquent que les problèmes relatifs à la proportionnalité se placent dans le cadre des grandeurs. Ainsi, nous supposons que les programmes mettent en avant le type de tâches $T_3^{'}(prop)$: appliquer un taux de pourcentage à une grandeur, ce qui correspond à l'exercice proposé. De plus, les programmes présentent ce thème dans le secteur « Proportionnalité » et ainsi la technologie associée devrait prend appui sur la notion de proportionnalité. Dans cette perspective pour calculer des pourcentages, les élèves devraient appliquer des techniques qui relèvent de la proportionnalité. Par exemple, on peut utiliser le coefficient de proportionnalité.

5.1.3 L'analyse des organisations mathématiques et didactiques effectives

Les organisations mathématiques mises en place par le professeur M1 pendant cette séance sont conformes aux programmes de 2005, et à l'organisation mathématique régionale autour du secteur proportionnalité.

Le professeur M1 commence par expliquer que les problèmes de pourcentages sont des situations de proportionnalité, il identifie alors les grandeurs en jeu :

> *« M1: alors, donc ici. On a vu jusqu'à ici qu'on avait une situation de proportionnalité. Quelles sont les grandeurs dedans ? Les éléments qui interviennent?*

Dans cet extrait, on voit bien que M1 place la proportionnalité et les pourcentages dans un cadre des grandeurs, il demande aux élèves de repérer les grandeurs en présence. Ensuite, le professeur M1 propose d'utiliser un tableau de proportionnalité pour résoudre le problème de pourcentage dans la phase 5 :

> *E: 46 euros, et 3%*
>
> *M1: 3% xxx, ça veut dire quoi? /// (M1 dessine un tableau, voir figure 8-26)*
>
> *M1: voilà, pour 100 euros on va avoir une augmentation de 3 euros. Vous voyez ici, qu'intervienne autre chose ici, c'est le prix d'un objet, l'augmentation du prix. Alors, qu'est-ce qu'on sait ici, que s'il objet coûte 100 euros il va augmenter de 3%, et au bout du compte nous ce qu'on voudrait savoir c'est sur...*
>
> *E: 46*
>
> *M1: 46, de combien est-ce qu'il va augmenter ? Alors, entre les deux, il est évident,*

on peut passer par intermédiaire de quoi?
E: 1 euro, c'est 3 centimes
M1: ah, on va essayer de passer ici par intermédiaire, si un objet coûte 1 euro, quel serait son augmentation?
E: 3 centimes » (Extrait séance 8, M1, 2010-2011)

La figure suivante montre le tableau construit par l'enseignant M1 dans le moment de construction du bloc technologique-théorique :

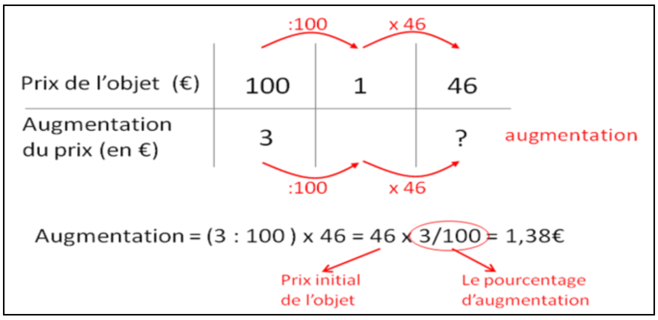


Figure 8-26. Tableau relatif à la tache $t_3(prop)$

On voit que l'enseignant M1 propose la technique de passage par l'unité (τ_u). Dans la dernière ligne, on voit comment le professeur M1 fait le lien entre le tableau et la conception du pourcentage d'une grandeur comme la multiplication d'une fraction avec dénominateur 100 et la grandeur. De la même manière que pour les traitements des problèmes de proportionnalité dans la classe du professeur M1, les unités n'apparaissent qu'à la fin des calculs. Comme on le voit dans la figure 8-26, on opère d'abord sur les mesures et on ajoute l'unité sur le dernier élément, ce qui conduit à l'égalité entre un nombre et une grandeur.

Les grandeurs mesurées sont relativement présentes dans la classe du professeur M1. Par exemple, dans la phase 6, il institutionnalise une technique relative au type de tâches $T_3^{'}(prop)$ de la manière suivante :

Remarque: Pour trouver un pourcentage d'une quantité, il faut multiplier cette quantité par la fraction de dénominateur 100 représentant le pourcentage

Exemple: calculer

15% de 234 € : 234 x 15/100 = 35,1€
7% de 125 g : 125 x 7/100 = 8,75 g

Figure 8-27. Pourcentage d'une quantité chez M1

Dans cet extrait, le professeur M1 définit le pourcentage d'une « quantité » et il propose aux élèves des exemples relatifs au cadre des grandeurs. En effet, il s'agit d'appliquer un taux de pourcentage à une grandeur. Cependant, les calculs sont faits dans le cadre du numérique, pour enfin donner les solutions comme des grandeurs mesurées.

Dans le moment de travail de la technique le professeur M1 propose plusieurs exercices relevant du cadre des grandeurs :

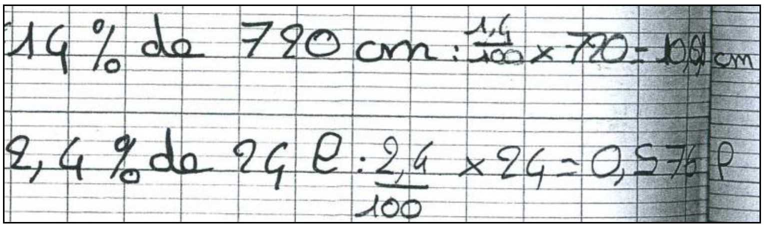


Figure 8-28. Types d'exercices proposés par M1 concernant les pourcentages

A travers la séquence analysée, on voit bien la fonction des grandeurs dans le thème pourcentages dans la classe du professeur M1. Il s'agit d'étudier des problèmes sur le pourcentage d'une grandeur. Ces problèmes sont présentés comme des situations de proportionnalité du cadre fonctionnel. Le traitement de ces problèmes conduit à un passage dans le cadre numérique, le professeur M1 propose d'appliquer le pourcentage d'une grandeur comme la multiplication d'une fraction par la mesure de cette grandeur. Finalement, pour donner les résultats on revient sur le cadre de grandeurs et ajoutant l'unité au résultat numérique obtenu. La notion de pourcentage s'inscrit bien dans une dynamique grandeurs-fonctions-numérique.

5.2 Le type de tâches $T_3(prop)$ chez le professeur M2

Nous rappelons que les pourcentages sont étudiés dans la classe du professeur M2 avant la proportionnalité comme une application des quotients. Le travail sur les pourcentages commence par l'institutionnalisation d'une technique relative à ce type de tâches $T_3(prop)$:

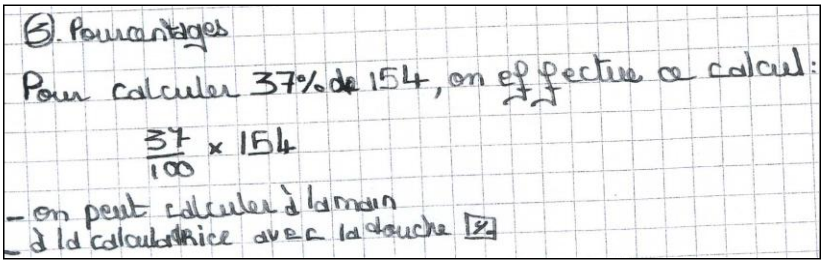


Figure 8-29. Institutionnalisation du calcul d'un pourcentage d'un nombre dans le cahier leçons chez M2

Il n'existe pas de définition de pourcentage, on commence plutôt par l'institutionnalisation d'une technique pour appliquer un pourcentage.

Il ne s'agit pas de calculer le pourcentage d'une grandeur, mais d'un nombre. D'ailleurs, la même situation se reproduit pour les exercices relatifs aux pourcentages. Par exemple, dans un contrôle le professeur M2 demande de calculer les expressions « 12% de 40 » et « 40% de 30 ». La technologie associée aux pourcentages est basée sur les quotients, et ainsi le professeur situe les pourcentages dans le cadre du numérique.

5.3 Bilan sur les pourcentages

La place des grandeurs dans la construction de la notion de pourcentage est très différente dans les deux classes de 6^e^. L'enseignant M1 étudie les pourcentages comme une situation de proportionnalité. Or, on a vu que les grandeurs sont très présentes dans le chapitre « proportionnalité » enseigné par le professeur M1. Ainsi, les pourcentages sont étudiés à l'aide des grandeurs, il s'agit d'appliquer un pourcentage à une grandeur. Par contre, dans l'enseignement du professeur M2 les grandeurs sont absentes. Les pourcentages sont travaillés uniquement comme application de la notion de quotient et leur étude est intégralement placée dans le cadre numérique. Cependant, la technique numérique pour appliquer un pourcentage à une grandeur ou à un nombre est la même dans les deux classes de 6^e^. Il s'agit de multiplier le pourcentage écrit comme une fraction de dénominateur 100 par la mesure de la grandeur ou par le nombre.

6. Les connaissances des élèves relatives à la notion de proportionnalité

Nous rappelons que nous avons fait passer deux types de tâches de l'observatoire EVAPM, qui relèvent de la proportionnalité, dans les deux classes de 6^e^ des professeurs M1 et M2 pendant l'année scolaire 2010-2011 :

- $T_2(prop)$: calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité dans le pré-test
- $T_3(prop)$: appliquer un taux de pourcentage dans le post-test

Dans cette partie, nous allons présenter des résultats généraux obtenus par l'observatoire EVAPM concernant la proportionnalité et les analyses des résultats du pré-test et du post-test relativement aux types de tâches $T_2(prop)$ et $T_3(prop)$.

6.1 Les résultats EVAPM concernant la proportionnalité

Nous indiquons quelques résultats généraux obtenus par EVAPM concernant la proportionnalité et les pourcentages, à partir de la publication de deux études réalisées 6e, l'une concerne les épreuves de 1997 et l'autre de 2005.

- EVAPM 6e, 1997

D'après l'observatoire, la proportionnalité étant un nouveau contenu dans les programmes de 1995 (avant 1995 seulement les pourcentages apparaissent en classe de 6e), son enseignement risque d'être réduit, faute de temps. Ainsi, il n'existerait pas un vrai travail sur la proportionnalité avec des situations assez variées pour une réelle compréhension de cette notion (APMEP, Groupe EVAPM, 1998). Cela pourrait expliquer la baisse du taux de réussite entre les résultats de 1989 et 1997 :

APMEP–Observatoire EVAPM Thème Âge : 11 Question 163

En cinq minutes, une machine d'imprimerie effectue le tirage de 50 journaux.
Complète les tableaux :

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
5	3	

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	5	50

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	2	500

Analyse de la tâche et remarques

SPRESE CM2/81 :
Premier tableau : R = 90 %
Deuxième tableau : R = 65 %
Troisième tableau : R = 28 %
EVAPM6/87 - B18Ap :
Premier tableau : R = 82 %
Deuxième tableau : R = 57 %
Troisième tableau : R = 27 %
EVAPM6/89 - M18 :
Premier tableau : R = 88 % NR = 07 %
Deuxième tableau : R = 59 % NR = 10 %
Troisième tableau : R = 29 % NR = 13 %
EVAPM6/97 - M18 :
Premier tableau : RE : 150 : R = 81 % NR = 05 %
Deuxième tableau : RE : 1 : R = 54 % NR = 05 %
Troisième tableau : RE : 25 : R = 25 % NR = 06 %
Il s'agit ici de compléter un tableau dans le cadre d'une situation de double proportionnalité : la production est proportionnelle à la fois au temps et au nombre de machine.
Les résultats de cet item sont tout à fait stables d'une évaluation à l'autre (EVAPM 6/87, EVAPM 6/89, SPRESE CM2 1981).
Le premier tableau est largement réussi par 82 % des élèves de sixième (EVAPM 6/87).

Suite page 2

Figure 8-30. Extrait question EVAPM n° 163 concernant la proportionnalité et les résultats des épreuves

On voit sur le tableau une légère baisse de taux de réussite entre le questionnaire entre 1989 et 1997. Cette diminution du taux de réussite est beaucoup plus importante pour la tâche $T_3(prop)$, « appliquer un taux de pourcentage » :

APMEP–Observatoire EVAPM Thème Âge : 11 Question 375

Un objet qui valait 400 F a subi une augmentation de 10 %.
Quel est le nouveau prix de cet objet après augmentation ?

Réponse

Analyse de la tâche et remarques

SPRESE-5/82 : (sans calculatrice)
RE 440 F ou 440 : R = 49 %
EVAPM6/87 - A29Ex : (sans calculatrice)
RE 440 F ou 440 : R = 36 %
EVAPM5/88 - B27 : (sans calculatrice)
RE 440 F ou 440 : R = 54 % NR = 14 %
EVAPM6/89 - A13 : (sans calculatrice)
RE 440 F ou 440 : R = 41 % NR = 17 %
EVAPM5/90 - A29 :
RE 440 F ou 440 : R = 58 % NR = 17 %
EVAPM6/97 - A13 : (sans calculatrice)
RE 440, avec ou sans unité. : R = 31 % NR = 21 %
Réponse fausse : 40 ou 40 F : R = 08 % NR = 22 %
voir jumelle QCM 397
voir jumelle QCM 476

Figure 8-31. Extrait question EVAPM n° 375 concernant les pourcentages et les résultats des épreuves

On voit sur la figure une diminution du taux de réussite de 27% entre 1990 et 1997. Selon l'observatoire une des raisons qui explique à ce phénomène est la réduction horaire en classe de 6e.

- EVAPM 6e, 2005

L'observatoire signale qu'il devrait y avoir des améliorations dans les acquis des élèves, du fait que la proportionnalité apparaît comme un contenu à enseigner dans le programme de 6e en 2005, contrairement au programme de 1996 (APMEP, Groupe EVAMP, 2006). Cependant, les résultats des épreuves EVAPM vont dans le sens opposé. Voici un exercice qui était posé en 1989 et 2005 :

APMEP–Observatoire EVAPM Thème Âge : 11 Question 1091

Un fleuriste est chargé de décorer des salles de réception.
Il doit réaliser des bouquets tous identiques ; chaque bouquet est composé de :

8 œillets blancs et 5 œillets rouges.

Afin de pouvoir calculer rapidement les quantités de fleurs dont il a besoin, il construit le tableau suivant :

Œillets blancs	8	16	80	32	40	96	.
Œillets rouges	5	.	.	20	.	.	150
Bouquets	.	.	.	4	.	.	.

Par exemple, avec 32 œillets blancs et 20 œillets rouges, on peut faire 4 bouquets.

1) Complète le tableau (remplis les cases marquées d'un point).

2) Le fleuriste se fait livrer 6 cartons de 50 œillets blancs et 4 cartons de 50 œillets rouges.

Calcule le nombre de bouquets qu'il peut faire avec ces fleurs

Lorsqu'il aura fait ces bouquets, combien lui restera-t-il de fleurs de chaque couleur ?

œillets blancs ?

œillets rouges ?

Analyse de la tâche et remarques

Voir question GRA633.
SPRESE CM2/83 :
tableau rempli sans erreur : R = 40 %
nombre de bouquets : R = 40 %
reste d'œillets blancs : R = 17 %
reste d'œillets rouges : R = 07 %
EVAPM6/89 - P21 :
tableau rempli sans erreur : R = 49 % NR = 07 %
nombre de bouquets : R = 19 % NR = 20 %
reste d'œillets blancs : R = 17 % NR = 33 %
reste d'œillets rouges : R = 11 % NR = 33 %
Les scores sont légèrement meilleurs que dans l'évaluation du SPRESE CM2/83, mais seulement un élève sur deux complète correctement le tableau.
Réf : Brochure 6/1989 p74
Analyse relue le 18/04/99

Figure 8-32. Extrait question EVAPM n°1091 concernant la proportionnalité

Les taux de réussite pour cet exercice sont donnés ci-dessous :

- 49% des élèves complètent correctement le tableau en 1989, contre 30% en 2005 ;

– 19% des élèves calculent sans erreur le nombre de bouquets en 1989, tandis qu'en 2005, 11% seulement arrivent à le calculer ;

D'après EVAPM, cette baisse de score s'explique comme la volonté de la noosphère de donner du sens à la proportionnalité. L'observatoire insiste aussi sur le fait qu'aujourd'hui, les programmes essaient de rompre le lien très fort entre la proportionnalité et les tableaux, en les montrant comme des objets indépendants. Ainsi, les élèves devraient avoir une moindre performance pour compléter des tableaux de proportionnalité que pour résoudre des problèmes de proportionnalité avec d'autres procédures, notamment celles que s'appuient davantage sur le cadre des grandeurs.

6.2 Les résultats du pré-test concernant le type de tâches « calculer une grandeur dans une situation de proportionnalité »

La question 195 de l'observatoire EVAPM est le problème n°2 du pré-test :

Problème N°2:

Jean a acheté pour 54 euros de terrine de foie gras. Le kilogramme de terrine de foie gras coûte 12 euros. Quelle masse de foie gras Jean a-t-il acheté?

Figure 8-33. Problème n°2 du pré-test

Dans la classe du professeur M1, nous rappelons que 26 élèves sur 30 ont passé le test et dans la classe de M2, 24 élèves sur 27.

- Les taux de réussite du problème 2

Nous avons accepté comme réponse correcte 4,5 kg, 4500 gr ou 4,5. Pour ce problème, nous rappelons que nous avons obtenu un taux de réussite de 54% dans la classe du professeur M1, de 42% dans la classe de M2 et de 60% dans l'observatoire EVAPM.

La plupart des élèves ont utilisé une technique correcte, mais certains élèves ont rencontré des difficultés pour donner une réponse finale correcte du fait que 54 n'est pas un multiple de 12. En particulier, les interprétations du reste de la division entre 54 par 12 ont été très variées. La plupart des erreurs trouvées dans les copies des élèves relèvent d'une interprétation incorrecte de la différence entre 54 euros et 48 euros, soit 6 euros. Certains élèves écrivent comme réponse 4kg, d'autres 5kg, d'autres 4 kg et 600 grammes, etc.

- Les procédures du problème 2

Nous avons regroupé les procédures des élèves présentées dans le chapitre VI en 6 catégories de techniques et nous les avons classées en deux univers, univers des nombres et univers des grandeurs mesurées, relativement à ces techniques :

a) Les techniques de l'univers des nombres

- τ_1 : Division numérique
- τ_2 : Calcul multiplicatif sur les nombres
- τ_3 : Calcul additif sur les nombres

b) Les techniques de l'univers des grandeurs mesurées

- τ_4 : Calcul additif sur les grandeurs mesurées
- τ_5 : Calcul multiplicatif sur les grandeurs mesurées

c) Une technique relevant de l'univers des grandeurs mesurées et des nombres

- τ_6 : Division à l'aide d'un schéma

- Les calculs sur les grandeurs

Dans les trois premières techniques présentées les élèves font les calculs sur les nombres, mais certains élèves calculent directement sur les grandeurs. Cependant, ces calculs sont plus difficiles à traiter que les calculs sur les nombres, comme on le voit sur l'extrait suivant :

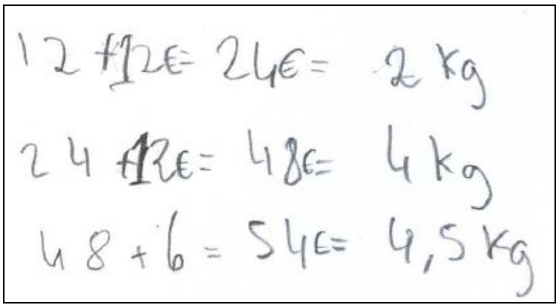


Figure 8-34. Exemple de la technique du calcul additif sur les grandeurs.

Cet élève raisonne dans le cadre des grandeurs et donne la réponse correcte, mais on observe des erreurs dans la mise en relation des différentes grandeurs, il écrit ainsi « 24 euros = 2kg ». Dans l'analyse de séances, on a vu que cette écriture représente une difficulté récurrente chez les élèves, on se demande quelle est la prise en compte de cette difficulté par les professeurs M1 et M2.

- Les taux de réussite par procédure

Par rapport à l'utilisation de ces techniques, nous avons trouvé les résultats suivants :

Technique	M1			M2			Total		
	nombre d'élèves	% d'élèves	Réussite	nombre d'élèves	% d'élèves	Réussite	nombre d'élèves	% d'élèves	Taux de réussite
τ_1	6	23	4/6	7	29	2/7	13	26	46
τ_2	7	27	5/7	7	29	5/7	14	28	71
τ_3	6	23	1/6	5	21	2/5	11	22	27
τ_4	3	12	1/3	2	8	1/2	5	10	40
τ_5	2	8	2/2	1	4	1/1	6	12	100
τ_6	0	0	-	1	4	1/1	4	8	100
Pas de technique repérée	2	8		1	4		6	12	-

Tableau 8-1. Procédures utilisées par les élèves dans la question 2 du pré-test

Le tableau nous montre une utilisation homogène des techniques dans les deux classes et des taux de réussite assez proches. Les élèves de deux classes semblent avoir des connaissances semblables sur la proportionnalité à la rentrée de 6e. Les élèves ont utilisé en majorité les techniques τ_1, τ_2 et τ_3 qui relèvent du cadre numérique. La plupart des procédures des élèves se trouvent dans le cadre numérique, plus de 70% d'entre eux ont abordé le problème sans utiliser les unités. Les grandeurs mesurées sont très peu présentes dans les procédures des élèves, elles apparaissent plutôt dans les réponses finales. De plus, les unités sont assez mal employées, on trouve, par exemple, des égalités entre des prix et des masses. Par rapport au tableau de proportionnalité, il n'y a qu'un élève qui a représenté la situation à l'aide de cet ostensif. Ainsi, le tableau de proportionnalité est presque inexistant dans les procédures des élèves à la rentrée de la classe de 6e.

6.3 Les résultats du post-test concernant le type de tâches appliquer un taux de pourcentage

La question 310 de l'observatoire EVAPM est le problème n°5 du post-test :

Problème N°4:

Un magasin de jouets fait une réduction de 15 % sur le prix des robots. Quel sera le prix d'un robot vendu initialement à 90 euros?

Figure 8-35. Problème 4 du post-test

Dans la classe du professeur M1, 29 élèves sur 30 ont passé le test, et dans la classe du professeur M2, 27 sur 27. Les problèmes de réduction ou d'augmentation sont plus difficiles que la simple application d'un taux de pourcentage pour les élèves.

- Le taux de réussite

Pour le problème 4, nous rappelons que nous avons considéré comme réponse correcte 76,5 euros ou 76,5. Les taux de réussite obtenus ont été 45% dans la classe du professeur M1, 33% dans la classe du professeur M2 et 21% dans l'observatoire EVAPM.

La classe du professeur M2 présente ainsi un taux de réussite plus bas que la celui du professeur M1. Les meilleurs résultats de la classe de l'enseignant M1 peuvent s'expliquer par l'analyse des pratiques des enseignants M1 et M2. Le problème 4 peut se résoudre comme une situation de proportionnalité. Précédemment dans ce chapitre, on a vu que le professeur M1 travaille les problèmes de pourcentages comme une situation de proportionnalité dans le cadre de grandeurs et ils travaillent sur une plus grande variété de types de tâches, en conséquence les élèves ont une meilleure connaissance de ce type de situations. Par contre dans la classe du professeur M2, l'enseignant propose l'application directe d'un pourcentage à un nombre. Pour mieux comprendre ces différences, dans la suite nous présentons l'analyse de procédures des élèves.

- Les procédures

Nous rappelons que nous avons repéré les techniques suivantes dans les procédures utilisés par les élèves :

- τ_1 : Soustraction du 15% de 90 à 90
- τ_2 : Calcul du 10% de 90 et du 5% de 90
- τ_3 : Calcul de 15% de 90
- τ_4 : Soustraction entre 90 et 15 du 15%
- τ_5 : Soustraction entre 90 et 15/100
- τ_6 : Soustraction entre 100 et 15
- τ_7 : Division de 90 par 4
- τ_8 : Calcul du 85% de 90

- Les taux de réussite des procédures

Le tableau 8-2 résume les taux de réussite et d'utilisation des techniques :

Technique	M1			M2			Total		
	nombre d'élèves	% d'élèves	Réussite	nombre d'élèves	% d'élèves	réussite	nombre d'élèves	% d'élèves	Taux de réussite
τ_1	11	38	11/11	5	21	4/5	16	30	94
τ_2	2	7	2/2	2	8	2/2	4	8	100
τ_3	4	14	0/4	8	33	0/8	12	23	0
τ_4	4	14	0/4	1	4	0/1	5	9	0
τ_5	1	3	0/1	1	4	0/5	2	4	0
τ_6	1	3	0/1	-	-	-	1	2	0
τ_7	-	-	-	2	8	0/2	2	4	0
τ_8	-	-	-	1	4	1/1	1	2	100
Pas de technique repérée	6	21	-	4	17	-	10	19	

Tableau 8-2. Procédures utilisées par les élèves dans la question 5 du post-test

On peut remarquer la grande variété de réponses données par les élèves. On a trouvé 8 techniques pour le calcul du type de tâches $T_3(prop)$. Cependant les techniques les plus employées sont τ_1 et τ_3.

- La technique τ_3

La technique institutionnalisée pour résoudre le type de tâches $T_3(prop)$ par les deux enseignants est la technique τ_3. Dans la classe de l'enseignant M1, il s'agissait d'appliquer un pourcentage d'une grandeur, et dans la classe de l'enseignant M2 d'appliquer un pourcentage à un nombre. Dans les deux cas, le professeur écrivait le pourcentage comme une fraction et la multipliait par la mesure de la grandeur ou le nombre. Dans la classe du professeur M1, les élèves ont déjà travaillé pendant l'année des problèmes concernant les réductions et augmentations. Cependant, dans la classe du professeur M2, la plupart des élèves ont utilisé la technique τ_3, mais ils n'ont pas interprété le problème comme une réduction. Cette erreur peut s'expliquer par le fait que M2 n'a proposé aux élèves que des problèmes d'application directe d'un pourcentage à un nombre.

- La technique τ_1

Dans le problème 4, les élèves devaient déterminer un prix après une réduction, la technique τ_1 apparaît comme la plus performante et conforme aux enseignements des professeurs M1 et M2. En effet, on observe que la plupart des élèves qui ont réussi le problème 4 du post-test dans la classe du professeur M1 ont utilisé la technique τ_1.

- Les unités

Dans les deux classes, les unités de prix ne sont pas présentes dans les calculs. Les élèves travaillent dans un cadre numérique, et à la fin ils ajoutent à la réponse l'unité euros comme on l'a vu dans les exemples précédents. Malgré le fait que le professeur M1 travaille les pourcentages dans un cadre de grandeurs et fonctionnel, les élèves préfèrent résoudre le problème 4 dans le cadre du numérique comme le fait la classe du professeur M2.

- Les taux de réussite

On rappelle que dans le chapitre « proportionnalité et pourcentages », le professeur M1 commence par étudier les pourcentages comme un exemple de proportionnalité, pour ensuite institutionnaliser les techniques τ_1 et τ_3. Les élèves de la classe du professeur M1 ont travaillé avec différentes représentations des pourcentages. Ils peuvent envisager les pourcentages comme des situations de proportionnalité, les représenter dans des tableaux ou à l'aide des quotients. Par contre, dans la classe du professeur M2, les pourcentages n'ont été travaillés que sous la forme des quotients. Cette différence peut expliquer les écarts entre les taux de réussite entre les deux classes, 30% des élèves de la classe de M2 ont calculé le 15% de 90 euros sans comprendre qu'il s'agit d'une situation de réduction.

6.4 Bilan sur les connaissances des élèves

A travers de cette étude, nous avons montré les taux de réussite et les techniques utilisées par les élèves pour résoudre deux types de tâches, l'une concernant le calcul d'une grandeur dans une situation de proportionnalité proportionnelle et l'autre l'application d'un pourcentage. A la rentrée de la classe de 6e, les élèves présentent des difficultés dans la résolution du premier type de tâches et, à la fin de l'année scolaire, ils n'ont pas obtenu des bons résultats dans la résolution du deuxième type de tâches. On a aussi repéré que les élèves des classes des professeurs M1 et M2 présentent une grande variété de techniques pour résoudre ces deux types de tâches. Les technologies associées au type de tâches « calculer une grandeur » relèvent généralement des propriétés de la fonction linéaire et celles associées à « appliquer un taux de pourcentage » aux proportions. Pour le cas de la proportionnalité, les élèves se placent dans deux univers, les grandeurs mesurées et les nombres. Par contre, dans le cas du pourcentage, les élèves n'ont utilisé que des techniques relevant de l'univers des nombres. De plus, les élèves n'ont jamais précisé les grandeurs qui intervenaient dans les deux situations. L'utilisation des grandeurs mesurées est, en général, erronée, les élèves posent des égalités entre des nombres et grandeurs, et entre des grandeurs des espèces différentes.

7. Synthèse sur l'enseignement de la proportionnalité du point de vue des grandeurs

En prenant en compte les analyses faites précédemment sur la notion de proportionnalité, nous présentons dans cette partie une synthèse de l'étude des pratiques des enseignants M1 et M2 du point de vue de la place et du rôle des grandeurs.

7.1 Les grandeurs et/ou leurs mesures dans le savoir enseigné

En reprenant les travaux de Comin (2002), nous avons distingué trois univers pour l'étude d'une situation de proportionnalité, l'univers des grandeurs, l'univers des grandeurs mesurées et l'univers des nombres. D'un côté, dans la classe du professeur M1, nous avons observé que cet enseignant utilise des ostensifs appartenant à ces trois univers. En effet, il explicite dans des tableaux les grandeurs mises en relation dans la situation de proportionnalité et les unités associées, et il effectue les calculs à l'aide des nombres abstraits (sans unités). D'un autre côté, l'enseignant M2 étudie la proportionnalité dans l'univers des grandeurs mesurées et des nombres. Effectivement, nous n'avons jamais observé l'explicitation des grandeurs intervenant des les situations de proportionnalité par le professeur. Cependant dans les deux classes, les grandeurs mesurées sont utilisées de manière erronée. Par exemple, les élèves posent des égalités entre des grandeurs d'espèces différentes. Cette utilisation incorrecte est validée par les deux enseignants. Ainsi, le contrat didactique à propos des grandeurs mesurées autorise des expressions comme « 500g x 3,36g = 1680 » ou « 2 :10 = 5 euros ».

Pour l'étude des pourcentages, l'enseignant M1 s'appuie, dans un premier moment de son enseignement, sur des objets des univers des grandeurs, des grandeurs mesurées et des nombres. Il explicite les espèces de grandeurs intervenant dans la situation, il pose les données à l'aide des grandeurs mesurées et fait les calculs sur les mesures. Après le moment d'institutionnalisation, les problèmes sont résolus dans les deux derniers univers. Par contre, M2 enseigne les pourcentages sans utiliser les grandeurs, il place cette notion dans l'univers des nombres. Nonobstant, les élèves de deux classes n'utilisent jamais les grandeurs mesurées pour traiter les problèmes de pourcentages.

7.2 Les dynamiques mises en œuvre

En classe de 6^{e} dans l'institution CA4, la notion de proportionnalité traverse trois domaines : celui des grandeurs, le fonctionnel et le numérique. En effet, l'organisation mathématique régionale, que nous avons construite relativement aux programmes, nous a montré que les situations de proportionnalité étudient des relations entre des grandeurs et que les technologies sont constituées des propriétés de la fonction linéaire et des mesures de ces grandeurs. Cependant, cette dynamique grandeurs-fonctions-numérique se présente de manière différente dans les deux classes de 6^{e}. Dans la classe des professeurs M1 et M2, la notion de proportionnalité est étudiée comme relation entre deux grandeurs proportionnelles.

Dans un premier moment, la classe de l'enseignant M1 résout ces situations à l'aide des raisonnements dans le cadre des grandeurs. En effet, les propriétés de la linéarité sont explicitées à l'aide des expressions « fois plus » ou « fois moins » pour établir des relations entre des grandeurs mesurées. Ensuite, le professeur M1 institutionnalise le coefficient de proportionnalité, les situations prennent toujours appui sur le cadres des grandeurs et les grandeurs en jeu sont présentées à l'aide des tableaux et des unités.

L'enseignant M2 travaille la plupart de temps la notion de proportionnalité à l'aide d'un tableau dans lequel les espèces de grandeurs ne sont pas explicitées, mais seulement les grandeurs mesurées. Les raisonnements peuvent ainsi être réduits aux nombres, la classe se questionne sur la relation numérique existante entre les lignes et les colonnes du tableau. Les calculs sont faits ensuite à l'aide des grandeurs mesurées.

7.3 Les pratiques relatives à la proportionnalité à propos des grandeurs

En regardant les organisations mathématiques et didactiques mises en place par les professeurs M1 et M2, nous avons remarqué deux manières d'étudier la notion de proportionnalité. Dans la classe du professeur M1, la proportionnalité constitue un secteur d'étude et dans la classe du professeur M2 un thème d'étude du secteur « quotients et applications ». L'enseignant M1 étudie des situations de proportionnalité concernant les calculs des grandeurs, les pourcentages et les échelles dans le secteur « proportionnalité », par contre l'enseignant M2 travaille les situations de proportionnalité concernant le calcul des grandeurs et les échelles dans le thème « proportionnalité » et les pourcentages dans le thème « proportions ».

La progression de l'enseignement du professeur M1 montre que sa classe de 6^{e} étudie les situations de proportionnalité en faisant des raisonnements dans le cadre des grandeurs qui mettent en jeu les propriétés additive et multiplicative. Ensuite, le professeur M1 institutionnalise le coefficient de proportionnalité et introduit l'ostensif graphique « tableau de proportionnalité ». L'étude de la notion de proportionnalité est placée dans trois univers : les grandeurs, les grandeurs mesurées et les nombres.

La progression du professeur M2 commence par l'étude des quotients et des rapports dans le cadre du numérique. Dans le même chapitre, on trouve l'étude de la proportionnalité. Le professeur M2 veut utiliser les éléments technologiques de la théorie des quotients pour enseigner cette notion. Cependant, selon les programmes du collège, l'enseignement de la proportionnalité s'appuie sur l'étude des situations mettant en jeu deux grandeurs proportionnelles. Ce travail doit mettre en avant les propriétés de linéarité qui préparent à l'enseignement de la fonction linéaire en classe de 3e. Ainsi, l'enseignant M2 propose de nouveaux éléments technologiques, comme la propriété multiplicative, pour enseigner la proportionnalité en utilisant comme ostensif principal le tableau de proportionnalité, où les raisonnements sur les grandeurs sont peu présents. Cela peut s'expliquer par la volonté du professeur M2 d'investir les connaissances sur les quotients et les rapports dans les situations de proportionnalité. La conception de l'enseignement de la proportionnalité dans le cadre des quotients mise avant par le professeur M2 est confrontée à une contrainte institutionnelle, celle d'étudier cette notion dans le cadre des fonctions. Il semble que des raisonnements à l'aide des propriétés de la linéarité dans le cadre des grandeurs sont négligés au profit de l'étude des relations numériques dans un tableau de proportionnalité. Ces choix d'enseignement peuvent rendre difficile l'étude de la proportionnalité, comme le signale Comin (2002) :

> « La disparition des grandeurs et, subséquemment, des rapports comme objets d'enseignement en mathématiques réduit la proportionnalité à l'étude de relations numériques et rend difficiles les explications qui permettent de distinguer la nature des nombres et leurs fonctions dans différentes situations » (Comin, 2002, p.146)

La progression mise en place par le professeur M2 montre comment des organisations mathématiques appartenant à différentes théories s'opposent dans un même chapitre pour l'étude de la proportionnalité, ce qui semble réduire la place et le rôle des grandeurs dans la construction de cette notion. D'un côté, l'objectif principal du chapitre est l'étude des quotients et des rapports numériques. D'un autre côté, le professeur introduit dans son enseignement les propriétés de linéarité conformément au programme de 6e. Ainsi, les deux technologies ont comme notion commune et centrale les quotients numériques en diminuant les raisonnements sur les grandeurs qui donnent du sens aux situations de proportionnalité. A travers l'analyse des organisations mathématiques présentes dans les programmes scolaires de la classe de 6e, nous avons montré que deux théories coexistent à ce niveau du collège, celle des proportions et celle de la fonction linéaire. D'après Comin (2002), cela peut créer des difficultés pour l'enseignement de la proportionnalité :

> « La coexistence géographique de plusieurs cultures conduit à une hétérogénéité des pratiques de résolution : la coexistence épistémologique de différentes organisations mathématiques semble constituer un obstacle à l'acquisition des connaissances sur la proportionnalité » (Comin, 2002, p.140)

Conclusion du chapitre

L'objet de ce chapitre était d'étudier les pratiques de deux enseignants M1 et M2 en regardant le rôle et la place des grandeurs dans l'enseignement de la proportionnalité. Nous avons identifié ainsi une dynamique grandeurs-fonctions-numérique relativement à cette notion.

Les professeurs M1 et M2 font des choix d'enseignement très différents qui correspondent à des conceptions différentes de la notion de proportionnalité. Le premier étudie cette notion dans deux chapitres, les notions d'échelle et de pourcentage comme des exemples de situations de proportionnalité. Le deuxième enseignant place l'étude de la proportionnalité au niveau de thème d'étude dans le chapitre « quotients et applications ». Les programmes actuels présentent deux technologies pour étudier la notion de proportionnalité, les proportions et la fonction linéaire. Cependant, l'analyse des pratiques des enseignants nous montre que la cohabitation de ces deux technologies crée des difficultés au niveau de l'enseignement. Ainsi, l'enseignant M2 réduit la place des grandeurs dans ses classes au profit des quotients numériques, plus particulièrement des opérateurs de linéarité à l'aide d'un tableau pour l'étude des situations de proportionnalité.

A partir des travaux de Comin (2002), nous avons identifié trois univers : les grandeurs, les grandeurs mesurées et les mesures. Nous avons constaté que le professeur M1 enseigne la proportionnalité en établissant des liens entre ces trois univers. Par contre, le professeur M2 n'identifie jamais les grandeurs en jeu dans les situations de proportionnalité qu'il propose. Cependant, les raisonnements qui donnent du sens aux opérations dans les situations de proportionnalité sont différents dans les classes des professeurs M1 et M2. Dans la classe de 6e du professeur M1, les raisonnements sont placés dans le cadre des grandeurs, ce qui aide à la compréhension des techniques, comme l'application des propriétés de linéarité. Dans la classe de M2, les raisonnements s'appuient peu sur les grandeurs, même si les grandeurs mesurées sont explicitées. La notion de proportionnalité apparaît comme un exemple de l'application de la notion de quotient. En étudiant les tests, nous avons aussi remarqué que la plupart des élèves résolvent les situations de proportionnalité à l'aide des mesures, les unités sont presque toujours absentes. Les programmes de la période actuelle mettent en avant la fonction linéaire comme outil implicite pour l'étude des situations de proportionnalité. Cette nouvelle notion rencontre les anciens éléments théoriques relatifs aux proportions. Il semble que l'utilisation des propriétés de la fonction linéaire favorise l'apprentissage de la proportionnalité quand elles servent d'appui aux raisonnements dans le cadre des grandeurs. Par contre, lorsque ces propriétés sont traitées seulement dans le cas particulier d'un tableau de proportionnalité, elles peuvent réduire l'étude des situations de proportionnalité à un travail sur des relations numériques. Il apparaît ainsi qu'en classe de 6e les grandeurs donnent du sens aux objets et connaissances relatifs à la proportionnalité.

En conclusion, en classe de 6e, le travail sur la proportionnalité peut être envisagé dans trois cadres : grandeurs, fonctions et numérique. Les difficultés relatives à l'enseignement de la proportionnalité apparaissent dans les interrelations entre ces trois cadres. Les éléments technologiques associés à ces différents cadres peuvent se présenter de manière désarticulée, ce qui provoque une réduction de la place des grandeurs et un traitement inadéquat des grandeurs mesurées.

Chapitre IX

Étude des pratiques : la vie d'une espèce de grandeur, le cas de l'aire

Dans le chapitre précédent, nous avons procédé à des analyses relatives aux enseignements des professeurs M1 et M2 du point de vue des dynamiques inter-domaines. Dans ce chapitre, nous passons à l'analyse des pratiques d'enseignement relatives à une grandeur particulière, l'aire.

Tout au long des chapitres, nous avons observé que les grandeurs se caractérisent par leur forte présence en tant qu'outil dans l'enseignement au collège. Dans cette partie, nous voulons nous centrer sur l'aspect objet des grandeurs en étudiant une grandeur spécifique, l'aire. À travers notre étude institutionnelle, nous avons repéré un processus de numérisation des grandeurs au collège. En effet, en classe de 6^{e}, on rencontre des tâches qui mettent en avant les grandeurs en tant que telles, et à partir de la classe de 5^{e}, l'enseignement est focalisé sur leurs mesures. Ainsi, nous avons fait le choix d'étudier les aires dans une classe de 6^{e} et une classe de 5^{e} chez un même enseignant, le professeur M2.

Cette démarche nous conduit à poser les questions suivantes : Quelle est la place et quelle est la fonction de la grandeur « aire » dans les enseignements du professeur M2 ? Quel est système de contraintes internes pesant sur la réalisation effective de tels enseignements ? Quelle évolution peut-on observer entre la classe de 6^{e} et 5^{e} ? Quel écart observe-t-on entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné par le professeur M2 relativement aux aires ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous allons mener une analyse des pratiques en nous appuyant sur des observations de séances, les cahiers des élèves, les progressions des enseignants, etc. Nous avons considéré deux classes, la classe 5^{e} du professeur M2 pendant l'année 2009-2010 et la classe de 6^{e} du professeur M2 pendant l'année 2010-2011. Nous identifions, a priori, dans un premier temps les principaux types de tâches mathématiques relatifs à la grandeur aire. Pour ce faire, nous reconstruisons les organisations mathématiques présentes dans les programmes et dans les enseignements du professeur M2. Ensuite, nous analysons les pratiques du professeur M2 en utilisant le filtre de grandeurs et la méthode des quatre composants. Finalement, nous complétons ce travail par une étude des connaissances des élèves de 6^{e} relativement aux aires.

A partir de ces analyses, nous essayons, d'une part, de caractériser le savoir enseigné par le professeur M2, et ainsi nous souhaitons préciser l'évolution de l'enseignement des grandeurs en fonction des premières classes du collège. D'autre part, notre objectif est de mettre en évidence un ensemble d'éléments permettant d'expliquer les écarts et similitudes existants entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné par le professeur M2 du point de vue des conditions et contraintes qui pèsent sur l'enseignement de l'aire.

1. Le filtre des grandeurs appliqué aux aires

Pour analyser les pratiques d'enseignement, et notamment les organisations mathématiques construites dans les classes nous proposons des outils théoriques permettant de caractériser l'aire en tant que grandeur. Pour ce faire, nous avons adapté notre « filtre des grandeurs » au cas particulier de l'aire. Ainsi, nous présentons les types de tâches, les techniques et technologies relatives aux aires, les ostensifs et non-ostensifs principaux, la dialectique outil/objet et les dynamiques relativement aux aires.

1.1 Les objets, la grandeur et les nombres

Dans notre étude épistémologique, nous avons présenté trois approches théoriques de l'aire : l'aire sans leurs mesures, les aires avec les mesures et les aires en tant que grandeur. L'étude de l'aire en tant que grandeur revient à considérer l'aire d'une surface comme une propriété invariante pour certaines opérations, comme pour les isométries. De ce point de vue, nous avons considéré une relation d'équivalence « avoir même aire » sur un ensemble d'objets, les surfaces. Nous établissons ainsi un lien entre le cadre géométrique et celui des grandeurs. Du point de vue numérique, on choisit une unité d'aire pour mesurer les aires des surfaces. La grandeur aire est ainsi au cœur d'une dynamique géométrique-grandeur-numérique que nous schématisons en nous inspirant des travaux de Moreira-Baltar (1998-1999) :

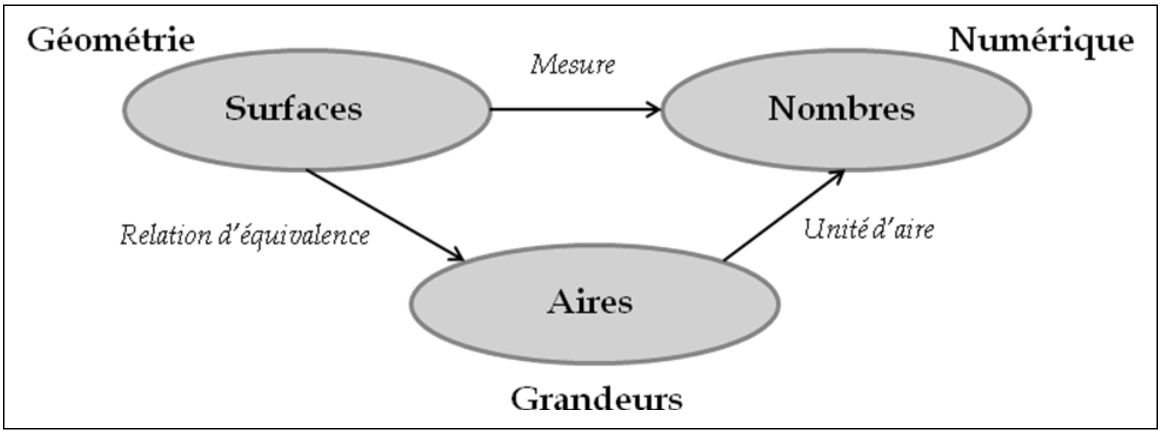


Figure 8-1. Relations entre cadres relativement à l'espèce de grandeur aire

À travers cette dynamique, nous caractérisons trois non-ostensifs principaux : les objets, les grandeurs et les nombres. Les objets sont les surfaces, des éléments du cadre géométrique, l'espèce de grandeur est l'aire et les mesures d'aire sont des nombres réels positifs appartenant au cadre numérique.

Des liens vont s'établir entre ces objets à traves la relation d'équivalence, laquelle permet le passage entre le cadre des grandeurs et le cadre géométrique et les unités d'aire qui permettent le passage entre les grandeurs ou les objets et le cadre numérique. Il s'agit ainsi d'une triple dynamique entre les trois cadres : géométrique, grandeurs et numérique.

Les notions de surface, d'aire et de nombre, ainsi que la dynamique mise en place, constituent les éléments premiers pour analyser l'enseignement de l'aire au collège.

1.2 Les types de tâches identifiés avec le « filtre de grandeurs »

Dans le chapitre 1, nous avons présenté sept genres de tâches relatifs aux grandeurs. Si on considère la grandeur « aire », on peut classifier les tâches dans les types suivants :

- $T_1(aire)$: Comparer des aires ;
- $T_2(aire)$: Calculer une aire ;
- $T_3(aire)$: Étudier les effets de déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'aire d'un objet ;
- $T_4(aire)$: Produire un objet d'une aire donnée ;
- $T_5(aire)$: Produire un objet d'une aire plus grande ou plus petite que l'aire d'un objet donné ;
- $T_6(aire)$: Changer d'unités d'aire ;

Dans les programmes et les enseignements du professeur M2, nous avons repéré 4 types de tâches, $T_1(aire)$, $T_2(aire)$, $T_3(aire)$ et $T_6(aire)$. Cependant les types de tâches $T_1(aire)$, $T_2(aire)$ et $T_6(aire)$ apparaissent dans les chapitres consacrés aux aires dans les enseignements du professeur M2 et le type de tâches $T_3(aire)$ apparaît dans d'autres chapitres comme celui relatif à la proportionnalité.

1.3 Les techniques et les technologies

Comme nous l'avons dit, dans le chapitre épistémologique, nous avons exposé deux théories concernant les aires, celle construite par Hilbert et celle écrite par Lebesgue. Pour caractériser les techniques et les éléments technologiques relatifs à ces techniques, nous nous appuyons sur les travaux réalisés par Moreira-Baltar (1994, 1996, 1999) concernant les aires et sur des outils technologiques appartenant à ces deux théories. Pour chaque type de tâches, nous allons présenter un ensemble de techniques et technologies possibles, mais la plupart des tâches peuvent être résolues en associant divers éléments techniques et technologiques. Nous nous limiterons à présenter les techniques et technologies relatives aux genres de tâches rencontrés dans les programmes et dans les enseignements du professeur M2 :

- Pour $T_1(aire)$: Comparer des aires

Nous avons classé les techniques relatives à ce type de tâches selon le cadre mathématique où se trouvent la plupart des éléments technologiques. Nous considérons ainsi le cadre géométrique, grandeurs et numérique.

a) Techniques relatives au cadre du géométrique

- τ_{IS} : Inclusion et superposition

Cette technique est essentiellement géométrique. Les formes des surfaces à comparer jouent un rôle très important, la notion de mesure n'intervient pas. Si une surface S peut être ramenée, par déplacement, à l'intérieur d'une surface S' on dira que son aire est plus petite que celle de S'. S'il y a superposition on dira que les deux surfaces ont même aire. La technologie repose sur les propriétés suivantes :

Soit $A(S)$ l'aire d'une surface S, on a que $A(f(S)) = A(S)$ A(f(S)) =A(S), pour une isométrie f ;

Si $S \subseteq S'$ alors $A(S) \leq A(S')$

- τ_{DR} : Découpage-recollement

Cette procédure consiste en la décomposition des figures à comparer et la comparaison des morceaux ainsi obtenus. Elle repose sur le théorème et la propriété suivants :

Soient A et B deux surfaces. On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement s'il existe une partition de A (resp. de B), A = A1 UA2 U … U An (resp. B = B1 U B2 U … U Bn) et, pour chaque i = 1, 2, . . . , n, une isométrie gi de Ai sur Bi ;

Si S et S' sont quasi-disjointes $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$

- τ_C : Complémentation

Cette technique repose sur le fait que deux figures équicomplémentaires ont même aire. Ces sont les propriétés d'invariance par isométrie et l'additivité qui justifient cette procédure. Par exemple, si on veut calculer l'aire du parallélogramme (P), on peut procéder de la manière suivante :

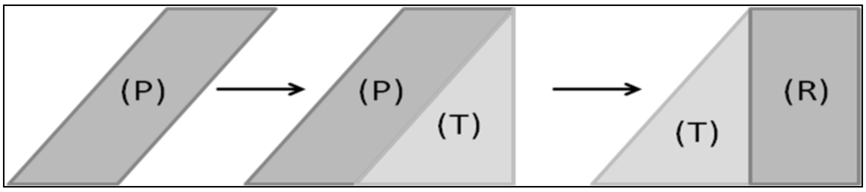


Figure 8-2. Méthode de complémentation dans le cas de l'aire d'un parallélogramme

On peut trouver un polygone, dans notre cas, un triangle (T), tel que le polygone (P)U(T) et le polygone (T)U(R) sont équivalents par découpage-recollement. Ainsi, le parallélogramme (P) et le rectangle (R) sont équivalents par complémentation, et donc ils ont la même aire.

- τ_{CP} : Comparaison par pavage

Le pavage permet de comparer des surfaces à travers des pavés. Dans ce cas, on est amené à comparer les nombres de surfaces « pavés » qui composent les surfaces à comparer. Par exemple, les surfaces suivantes n'ont pas la même aire :

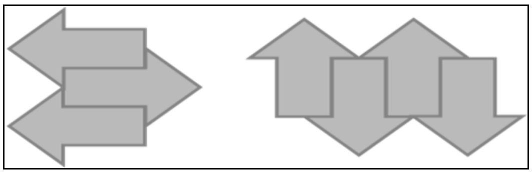


Figure 8-3. Comparaison de deux surfaces par pavage

La première surface est composée de trois « pavés flèches » et la deuxième de quatre « pavés flèches », on peut en déduire donc que l'aire de la première surface est plus petite que l'aire de la deuxième surface.

Il est possible que la figure ne soit pas pavable. Voici un exemple :

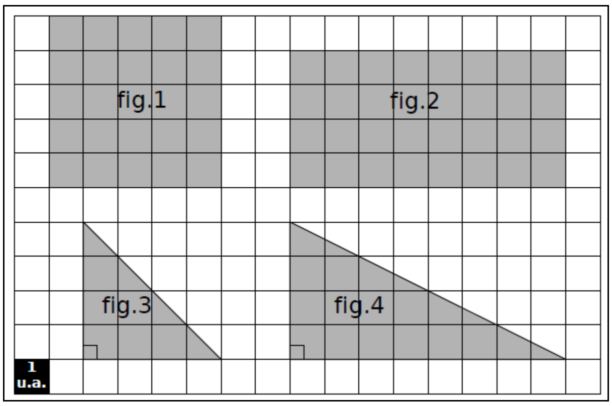


Figure 8-4. Exemple des surfaces pavables et non-pavables

Dans l'exemple ci-dessus (Figure 8-4), les figures 1 et 2 sont pavables avec la surface « 1 u.a. » et on peut les comparer en comparant les pavés nécessaires pour les recouvrir. Par contre, les figures 3 et 4 ne sont pas pavables avec la surface « 1 u.a ». Dans ce cas, on peut utiliser une autre procédure celle de dénombrement d'unités. On considère l'aire de la surface « 1 u.a. » comme l'unité d'aire. Ainsi, pour la figure 3, on peut procéder au comptage d'unités « 1 u.a. », on aura 6 u.a. + 4x1/2 u.a. soit 8 unités d'aire « u.a ». La technologie s'appuie sur la notion d'aire et la mesure de l'aire, on place donc cette technique dans le cadre des grandeurs.

b) Techniques relatives au cadre des grandeurs

- τ_{DE} : Dénombrement d'unités et sous-unités fractionnaires

Comme nous l'avons vu, cette procédure est liée à celle du pavage. Il s'agit de choisir un objet unité de mesure, et on compare le nombre d'unités ou sous-unités fractionnaires nécessaires pour recouvrir chaque surface. La technologie sous-jacente repose sur le fait qu'étant choisie une unité, des surfaces de même mesure ont même aire. Par exemple, quand on présente les surfaces à comparer sur de papier quadrillé, les élèves seront amenés à comparer les aires en comptant la quantité de « carrés » qui recouvrent ces deux surfaces.

c) Techniques relatives au cadre du numérique

- τ_{CF} : Comparaison de mesures par formule

Pour comparer les aires, on compare leurs mesures. On utilise les formules de calcul d'aire de surfaces, on travaille ainsi sur les nombres dans le cadre du numérique. Les principaux non-ostensifs sont les nombres et les opérations et les formules d'aire attachées à chaque type de surfaces.

- Pour $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface

Comme il s'agit de calculer l'aire d'une surface, la technologie prend appui sur les mesures des aires. Dans ce type de tâches, on peut définir des sous-types de tâches selon la surface, ainsi nous notons le sous-type de tâches « calculer l'aire d'un triangle » comme $T_{2_{triangle}}(aire)$.

Pour calculer l'aire d'une surface, on utilise diverses procédures analogues à celles utilisées pour comparer les mesures d'aires :

a) Techniques relatives au cadre des grandeurs

- τ^*_{CP} : Calcul de l'aire par pavage

Les élèves peuvent choisir une surface de référence s, le « pavé », ou le problème peut leur suggérer. Ils recouvrent la surface, et ensuite ils comptent le nombre de « pavés ». L'aire est le nombre de « pavés » multiplié par l'aire d'un pavé. Par exemple, la surface 3, de la figure 8-4 n'est pas pavable avec la surface « 1 u.a. ». Par contre, on peut paver la figure 3, avec le petit triangle de la figure 8-5 :

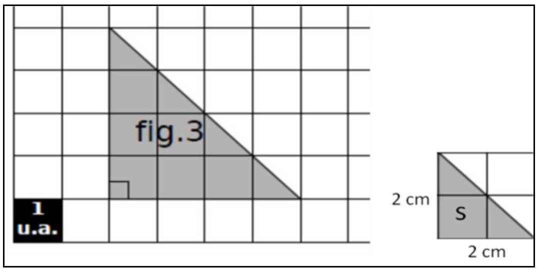


Figure 8-5. Exemple de calcul d'aire par pavage

On utilise quatre fois la surface s pour paver la figure 3. De plus, si on a les mesures des longueurs (côtés perpendiculaires) du triangle s égales à 2 cm, l'aire de s est donc 2 cm². Ainsi, on multiplie 4 x 2 cm², et l'aire de la figure 3 est donc égale à 8 cm².

Dans le cas où les surfaces ne sont pas pavables avec une surface s donnée, on peut étendre l'application mesure à travers deux procédures :

Soit on utilise le découpage-recollement pour fabriquer une surface S' de même aire que S et pavable avec s, dans ce cas on calcule après un pavage l'aire d'une figure obtenue à travers la procédure de découpage-recollement, nous noterons cette technique $\tau^*_{CP}(\tau_{DR})$;

Soit on utilise des encadrements de S par des surfaces pavables avec s qui approchent S de mieux en mieux par l'intérieur et par l'extérieur (par exemple en se servant d'un quadrillage).

- τ^*_{CP} : Dénombrement d'unités ou sous-unités fractionnaires

Si la surface S est pavable avec une surface s, et on considère l'aire de s comme l'unité d'aire, u, le dénombrement avec l'unité u est un nombre entier positif trouvé après le comptage des unités u. Si S n'est pas pavable avec la surface s, on considère des subdivisions de l'aire de s, c'est-à-dire, des sous-unités fractionnaires relatives à l'unité u, et l'aire de la surface S est, soit un nombre entier ou soit un nombre rationnel. L'usage du papier quadrillé comme support pour la surface de départ favorise la mise en œuvre de cette procédure.

b) Techniques relatives au cadre du numérique

- τ^*_{CF} : Calcul par formule

On sait que pour chaque surface, on a des formules d'aire qu'on peut appliquer si on connaît les valeurs numériques des variables qui interviennent dans la formule.

Aux procédures déjà citées, on peut ajouter une autre étape selon le problème considéré. Quelques fois, on devra décomposer les figures et ensuite appliquer les techniques présentées ci-dessus :

- τ_D : Décomposition

Par exemple, il est possible qu'au collège on trouve des tâches où il faut décomposer une surface en figures usuelles. Ensuite, on applique les formules d'aires aux figures usuelles. Dans ce cas, on écrira la technique comme $\tau^*_{CF}(\tau_D)$.

Comme nous l'avons dit, il s'agit d'une présentation générale des techniques pour chaque type de tâches. Dans plusieurs procédures, on trouve en fait la combinaison des plusieurs de ces techniques.

- Pour $T_3(aire)$: Étudier les effets de déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'aire d'un objet

Dans ce type de tâches, on trouve le sous-type de tâches $T_3'(aire)$: calculer une aire après agrandissement ou réduction. Dans ce cas, la technique la plus commune est de multiplier par le carré du coefficient d'agrandissement ou réduction (τ_{k^2}). Cette technique est justifiée par le fait que l'aire est une grandeur bidimensionnelle.

- Pour $T_6(aire)$: Changer d'unités d'aire

- τ_t : Tableau d'unités d'aire

Dans cette technique, on utilise le tableau de conversion d'unités d'aire comme suit :

Par exemple, on veut 3, 5 km^2 en m^2

- on place la virgule dans le tableau:

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
	,												

- on place les chiffres :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
3	,5	0	0	0	0	0							

-on déplace la virgule :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
3	5	0	0	0	0	0,	0	0	0	0	0	0	0

- reporte le résultat

km^2		hm^2		dam^2		m^2	
3	5	0	0	0	0	0,	0

Conclusion : 3,5 km^2 = 3500000 m^2

- $\tau_\times$: Multiplication (ou division) par 100, 1000, etc.

En utilisant le tableau précédent, on peut expliquer que pour convertir une unité d'aire en celle immédiatement inférieure on multiplie par 100 et pour la convertir en celle immédiatement supérieure on divise par 100.

Ainsi, par exemple, pour convertir 3,5 km^2 en m^2, on observe que l'unité m^2 est trois « places » à droite de l'unité km^2, on doit donc multiplier 3 fois par 100 le 3,5 km^2, soit

3,5 km^2 = 3,5 x 100 x 100 x 100 m^2 = 3500000 m^2.

- τ_d : Déplacement de la virgule

Pour un nombre décimal, si on avance la virgule d'un rang vers la droite ou vers la gauche on rend le nombre 10 plus grand ou 10 plus petit. Ainsi, si on veut convertir 3,5km^2 en m^2. On utilise le fait que 1 km^2 est 1000000 plus grand que 1 m^2, donc on déplace la virgule de 6 rangs vers la droite, on obtient ainsi que 3,5km^2 = 3500000m^2.

- τ_e : Utilisation directe d'équivalences

Si on connaît les équivalences entre les unités de mesure d'aire, on peut les utiliser directement sur les calculs. Par exemple :

3,5km^2 = 3,5 x 1 km^2 = 3,5 x 1000000 m^2 = 3500000m^2.

Cette technique, où les données sont des grandeurs, est appelée concrète par Chevallard et Bosch (2000-2001). Ces auteurs construisent une théorie pour ces changements d'unités que nous avons présentée dans notre étude épistémologique du chapitre II.

- τ_p : Quatrième proportionnelle

Les changements d'unités peuvent être travaillés comme des exemples d'une situation de proportionnalité. Ainsi, on est ramené ainsi à utiliser les techniques déjà décrites dans le chapitre précédent, par exemple le produit en croix ou les propriétés de linéarité.

1.4 Les ostensifs

Comme nous l'avons vu, les non-ostensifs principaux sont les objets, les grandeurs et les nombres. Ainsi, on trouve comme ostensifs les dessins de figures géométriques et les symboles représentant les nombres et les unités (2, 10, m², 5cm, etc).

D'une part, dans les technologies relatives à la théorie d'Hilbert, on peut observer dans les dessins de figures géométriques, des flèches ou de coloriage pour indiquer des décompositions et recompositions. D'autre part, dans les technologies relatives à la théorie de Lebesgue, on trouve des quadrillages et des flèches pour indiquer les mesures des côtés des figures. Quand on travaille avec les formules, on utilise des expressions littérales et le symbole d'égalité. On peut aussi trouver des ostensifs du langage naturel pour exprimer les techniques, comme « je déplace », « je compte 1,2,3… », etc. Ceci de manière générale, car comme nous l'avons dit, les techniques se présentent souvent composées d'éléments technologiques communs aux deux théories.

1.5 Les dimensions outil et objet

Comme nous l'avons déjà montré dans les chapitres précédents, les grandeurs sont très présentes tout au long du collège sous la forme d'outil et d'objet. Elles forment un domaine « grandeurs et mesures » et jouent un rôle assez important dans la construction d'autres domaines et dans le fonctionnement des dynamiques inter-domaines.

Précédemment, nous avons étudié la place et le rôle de grandeurs dans la construction d'autres domaines et dans leurs interrelations. Dans cette partie de notre thèse, nous centrerons notre travail sur l'aspect objet des grandeurs en étudiant des chapitres consacrés aux aires dans les enseignements du professeur M2 dans des classes de 6e et de 5e.

2. Le point de vue institutionnel

Actuellement, en France, la notion d'aire est abordée pour la première fois à l'école élémentaire. Ce travail se poursuit au collège, mais en mettant l'accent sur l'aspect numérique des aires comme nous l'avons vu dans notre étude institutionnelle.

Cette partie caractérise les organisations mathématiques présentes dans les instructions officielles actuelles relativement à l'enseignement de l'aire.

2.1 Les objets étudiés et les objectifs des programmes

La notion d'aire est principalement travaillée en classe de 6^{e} et 5^{e}. Les surfaces planes étudiées sont le rectangle, le triangle rectangle et le disque en classe de 6^{e}. En 5^{e}, il s'agit d'étudier les aires de parallélogrammes, des triangles quelconques et des surfaces décomposables en figures usuelles. On travaille aussi sur les aires latérales des prismes droits et des cylindres. La notion d'aire réapparaît en classe de 3^{e} avec le calcul l'aire d'une sphère.

Dans toutes les classes, les problèmes relatifs aux aires doivent être empruntés à la vie courante et l'utilisation d'unités est légitime, il s'agit de donner du sens aux aires (Ministère de l'éducation nationale, 2008). Au collège, on cherche à compléter les connaissances déjà vues à l'école élémentaire, mais on veut aussi construire les formules relatives aux calculs d'aires. En classe de 6^{e}, on articule les connaissances avec l'école élémentaire pour assurer la continuité, ainsi l'aire est étudiée en tant que grandeur. Par contre, à partir de la classe de 5^{e}, l'objectif est de « calculer », l'enseignement est centré sur les mesures d'aire.

À partir de ces premières indications données par la noosphère, on peut extraire des nouveaux éléments à analyser dans les pratiques d'enseignement :

- place des problèmes de la vie courante ;
- place et traitement des unités d'aire ;
- étude de l'aire en tant que grandeur ;
- continuité entre la l'école élémentaire et la classe de 6^{e} ;
- évolution entre la classe de 6^{e} et 5^{e} relativement à l'enseignement de l'aire ;
- étude de l'aire dans un cadre numérique, notamment à travers leurs mesures et les formules.

2.2 Les contenus et compétences demandés par les programmes

Nous souhaitons présenter la programmation des contenus d'enseignement au collège. Pour comprendre cette progression, nous commencerons par les connaissances déjà développées à l'école élémentaire :

- Les aires à l'école élémentaire

A ce niveau, il s'agit de comparer de surfaces selon leurs aires, d'étudier les unités d'aire usuelles et de faire de conversions, et de calculer avec une formule l'aire d'un rectangle et d'un triangle. Les activités de comparaison des aires occupent une grande place à l'école, comme le signalent les documents d'accompagnement

> « Un premier temps doit être consacré à des activités de comparaison d'aires. Il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surfaces peuvent être soit dessinées sur une feuille de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais (pièces de Tangram, par exemple). Il s'agit :
>
> - des surfaces d'aires très différentes : la superposition (mentale ou effective) permet de constater que l'une est beaucoup plus étendue que l'autre ;
>
> - des surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
>
> - des surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires » (Ministère de l'éducation nationale, 2002)

Même si ces documents d'accompagnement ne sont plus en vigueur, aujourd'hui à l'école élémentaire, les activités de comparaison des aires sans avoir recours à leurs mesures sont au cœur de l'enseignement de l'aire en tant que grandeur.

- Les aires au collège

En continuité avec l'école élémentaire, les activités proposées en classe de 6e mettent en avant la notion d'aire en tant que grandeur. Par exemple, il s'agit de comparer géométriquement des aires pour ensuite introduire des activités de pavages et les formules :

4.3 Aires : mesure, comparaison et calcul d'aires	- Comparer géométriquement des aires. - Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple. - Différencier périmètre et aire. - Calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont données. - Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un rectangle. - Calculer l'aire d'un triangle rectangle, **d'un triangle quelconque dont une hauteur est tracée.* - Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un disque. - Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure.	Poursuivre le travail effectué à l'école élémentaire, en confrontant les élèves à des problèmes. La comparaison d'aires sans avoir recours à des formules est particulièrement importante pour affermir le sens de cette notion. Certaines activités proposées conduisent les élèves à comprendre notamment que périmètre et aire ne varient pas toujours dans le même sens. Une démarche expérimentale permet de vérifier la formule de l'aire du disque.

Figure 8-6. Contenus et compétences dans les programmes relativement aux aires en 6e

Ainsi, l'objectif en classe de 6e est d'affermir la notion d'aire en tant que grandeur, pour ensuite conduire son enseignement dans un cadre numérique. L'étude des aires à travers leurs mesures s'installe plus fortement en classe de 5e, où les contenus sont centrés sur le calcul :

4.3 Aires Parallélogramme, triangle, disque.	- *Calculer l'aire d'un parallélogramme.* - Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée. - Calculer l'aire d'une surface plane ou celle d'un solide, par décomposition en surfaces dont les aires sont facilement calculables.	*La formule de l'aire du parallélogramme est déduite de celle de l'aire du rectangle.* *Le fait que chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire est justifié.* Dans le cadre du socle les élèves peuvent calculer ainsi l'aire d'un parallélogramme. Les élèves peuvent calculer l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution à partir du périmètre de leur base et de leur hauteur.

Figure 8-7. Contenus et compétences dans les programmes relativement aux aires en 5e

Le travail sur les aires est complètement dirigé vers l'étude de formules de calcul, c'est-à-dire dans un cadre du numérique en lien avec le cadre grandeurs.

Finalement, en 3e, il s'agit aussi d'étudier une formule, celle relative à l'aire d'une sphère.

2.3 Une reconstruction des organisations mathématiques présentes dans les programmes

À partir des programmes de 6e et 5e, nous avons reconstruit les organisations mathématiques repérées dans ces textes relativement aux aires par rapport aux types de taches, techniques, technologies et théories définis avec le filtre des grandeurs, mais aussi en termes de niveaux de codétermination.

2.3.1 Le programme de la classe de 6e

Précédemment, nous avons présenté les contenus du programme de 6e de la période A4. Voici un schéma qui résume les organisations mathématiques régionales dans ce niveau :

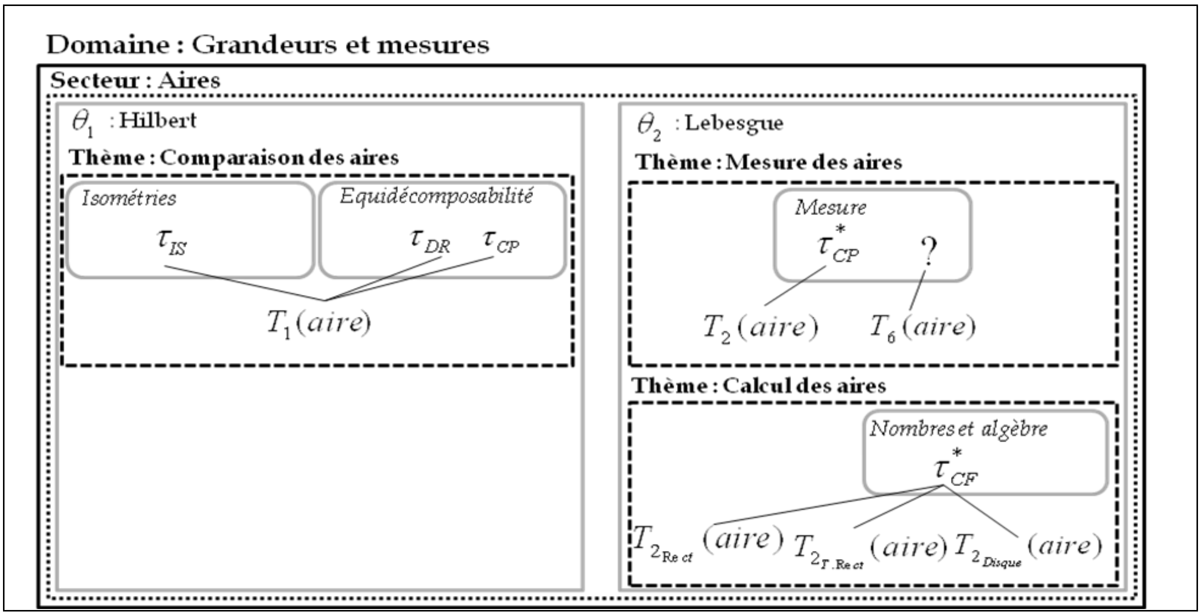


Figure 8-8. Reconstruction des organisations mathématiques relatives aux aires présentes dans les programmes de 6e

En classe de 6e, nous avons identifié trois types de tâches relativement à l'espèce de grandeur aire :

- $T_1(aire)$: Comparer géométriquement des aires
- $T_2(aire)$: Calculer des aires, notamment calculer l'aire d'un rectangle ($T_{2Rect}(aire)$), d'un triangle rectangle ($T_{2_{T.Rect}}(aire)$ et d'un disque ($T_{2_{Disque}}(aire)$)
- $T_6(aire)$: Changer d'unités d'aire

Le programme de 6e indique que le type de tâche $T_1(aire)$ doit être résolu dans le cadre géométrique sans avoir recours aux mesures. De plus, il signale que l'étude des procédures étudiées à l'école élémentaire se poursuit en classe de 6e. Ainsi, nous envisageons comme procédés possibles à la résolution du type de tâches $T_1(aire)$ les techniques : τ_{IS} inclusion superposition, τ_{DR} découpage-recollement et τ_{CP} comparaison par pavage. Nous considérons que la première technique est constituée des notions relevant des isométries, car pour réaliser une inclusion ou superposition les élèves devront faire des rotations ou des translations des surfaces. Les deux autres techniques sont constituées des éléments technologiques relatifs à notion d'équidécomposabilité, car les élèves devront diviser les surfaces et former une autre surface ou comparer la quantité des morceaux obtenus après le partage. Comme toutes ces techniques ne font pas appel au concept de mesure, le type de tâche $T_1(aire)$, comparer des aires fait partie d'une technologie dite géométrique, celle développée par Hilbert.

Dans le cas du type de tâches $T_2(aire)$, la technique recommandée par le programme est l'utilisation d'un pavage (τ_{CP*}), mais pour déterminer l'aire, les élèves doivent connaître la mesure de l'aire d'un pavé. Pour les types de tâches $T_{2\mathrm{Re}\,ct}(aire)$, $T_{2_{T.\mathrm{Re}\,ct}}(aire)$ et $T_{2_{Disque}}(aire)$ la technique prescrite est l'utilisation de la formule (τ_{CF*}), pour laquelle les élèves doivent mettre en place des connaissances numériques et algébriques. Puisque, les types de tâches se résolvent avec des techniques qui mettent en joue la mesure, elles se regroupent autour de la technologie décrite par Lebesgue.

Finalement, les programmes de 6e indiquent de travailler sur les conversions d'unités d'aire ($T_6(aire)$). Même si la technique relative à ce type de tâches n'est pas explicitée dans les contenus, nous avons vu qu'il est souhaitable d'utiliser les équivalences entre les unités. De plus, le changement d'unités est l'action de donner la mesure de l'aire d'une surface dans une autre unité d'aire. Nous l'avons ainsi placé dans le thème « mesure des aires ».

En conclusion, dans le secteur « aires » de la classe de 6e, il existe deux technologies, l'une prend comme éléments principaux les isométries et l'équidécomposabilité et l'autre la notion de mesure et les nombres.

2.3.2 *Le programme de la classe de 5e*

Comme pour la classe de 6e, nous avons reconstruit les organisations mathématiques présentes dans les programmes dans la classe de 5e :

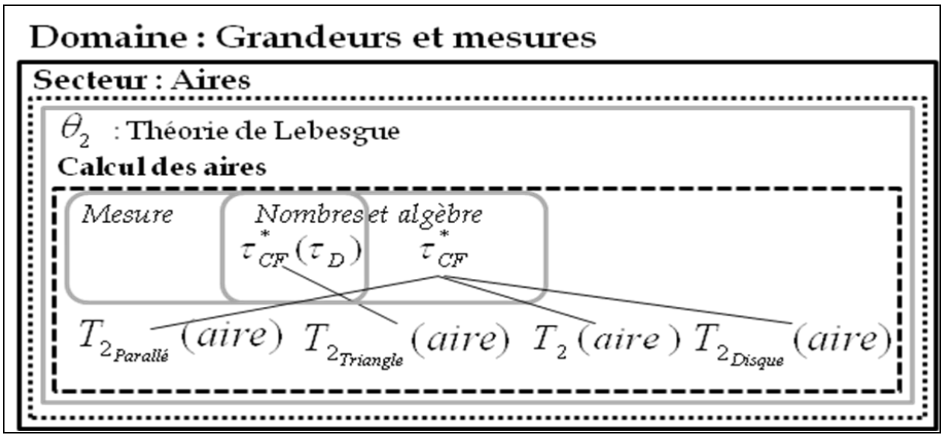


Figure 8-9. Reconstruction des organisations mathématiques relatives aux aires présentes dans les programmes de 5e

Tous les types de tâches que nous avons repérés dans les programmes relèvent du calcul des aires :

- $T_{2_{Parallé}}(aire)$: Calculer l'aire d'un parallélogramme
- $T_{2_{Triangle}}(aire)$: Calculer l'aire d'un triangle
- $T_{2_{Disque}}(aire)$: Calculer l'aire d'un disque[1]
- $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface par décomposition

Les programmes suggèrent que pour calculer les aires de ces surfaces les élèves doivent utiliser les formules (τ_{CF*}), ils utilisent ainsi des connaissances numériques et algébriques. Le calcul des aires par décomposition fait appel à la propriété additive de la mesure. Ces éléments technologiques appartiennent à la technologie définie par Lebesgue.

En conclusion, les programmes de la classe de 5e mettent en avant le calcul des aires et ainsi la technologie privilégiée relève plutôt du numérique.

2.4 Bilan sur le point de vue institutionnel

En regardant les organisations mathématiques régionales que nous avons reconstruites à partir des programmes scolaires, on s'aperçoit que la technologie « Hilbert » disparaît en classe de 5e. En effet, le type de tâches $T_1(aire)$, comparer géométriquement des aires, est absent en classe de 5e, et les types de tâches mis en avant sont les calculs des aires. En conséquence les techniques relevant de la technologie « Hilbert » ne sont plus nécessaires à l'enseignement de l'aire. Par la suite, nous comparerons les organisations mathématiques mises en place par l'enseignant M2 et celles que nous avons reconstruites. Notre objectif est d'observer le passage entre de la classe de 6e vers la classe de 5e.

3. Le chapitre « Aires et périmètres » en classe de 6e

L'enseignant M2 propose un chapitre dénommé « Aires et périmètres » en classe de 6e. Voyons les organisations didactiques et mathématiques relatives à ce chapitre.

3.1 L'organisation didactique et mathématique régionale

On a vu que les programmes indiquent quatre secteurs d'étude dans le domaine « Grandeurs et mesures » en classe de 6e : longueurs, angles, aires et volumes. L'enseignant M2 fait le choix de travailler les aires et les périmètres dans un même chapitre. Ces deux notions seront

[1] Le calcul d'aire d'un disque n'est pas explicité dans les contenus, mais dans les connaissances il est signalé « Aires : Parallélogramme, triangle, disque », nous avons donc supposé qu'il s'agit de calculer l'aire d'un disque.

étudiées par la classe du professeur M2 simultanément. En effet, dans l'enseignement du professeur M2, nous n'avons pas relevé de travaux séparés sur les « aires » et les « périmètres », il s'agit plutôt de calculer l'aire et le périmètre d'un même objet dans une même activité. Par contre, dans l'étape d'institutionnalisation, il existe deux organisations mathématiques, l'une autour des périmètres et l'autre autour des aires.

Le chapitre « aires et périmètres » est étudié à la fin de l'année scolaire (2010-2011). On compte en total 7 séances sur les « aires et les périmètres », 2h de cours, 5 heures d'exercices et 1 d'évaluation sous la forme de devoir. Le savoir est organisé de la manière suivante dans la progression relative à ce chapitre :

- Séance 1 : Introduction au chapitre

Le chapitre « aires et périmètres » commence par l'activité 1, page 156 du manuel *Multi-math* 6MU05 :

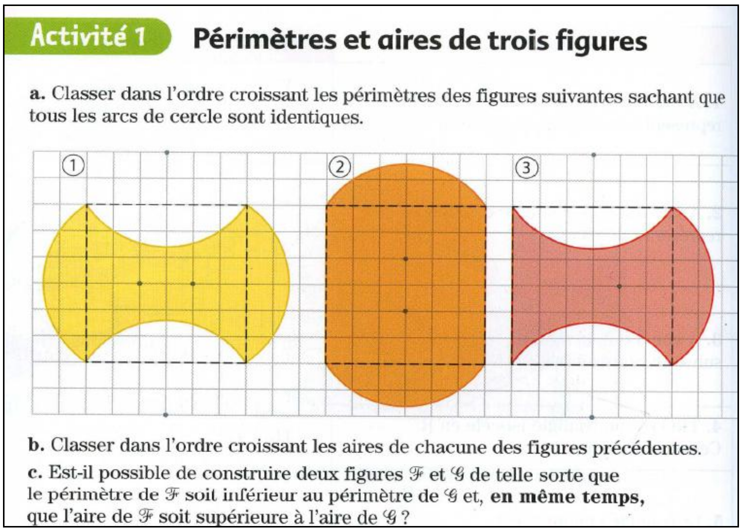


Figure 8-10. Extrait manuel *Multi-math* 6MU05 p.156

Dans ce problème, il s'agit de comparer des aires ($T_1(aires)$) et des périmètres. Les élèves passent au tableau pour corriger ce problème. Les techniques utilisées sont celles de découpage-recollement τ_{DR} et le dénombrement d'unités τ_{DE}. À partir de cette activité, le professeur M2 aborde la différence entre aire et périmètre d'une figure. Le contenu est centré sur le fait que « l'aire et le périmètre ne varient pas dans le même sens », lequel correspond à une capacité prescrite par les programmes actuels du collège. Cette capacité n'apparaît pas explicitement dans les programmes précédents. Ainsi, la tâche est conforme aux programmes de 6e.

- Séance 2 : Exercices des calculs des périmètres

La deuxième séance se déroule le même jour que la première. Il s'agit d'une séance d'exercices, où le professeur M2 propose l'activité suivante :

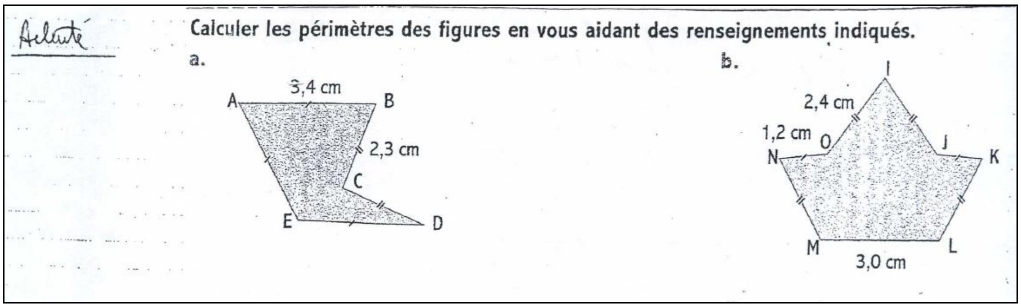


Figure 8-11. Activité sur les périmètres, séance 2

Il s'agit de calculer les périmètres de deux figures. Les élèves corrigent au tableau les problèmes à l'aide de l'enseignant. Ensuite, les élèves travaillent sur l'activité 2, page 156 du manuel scolaire 6MU05 :

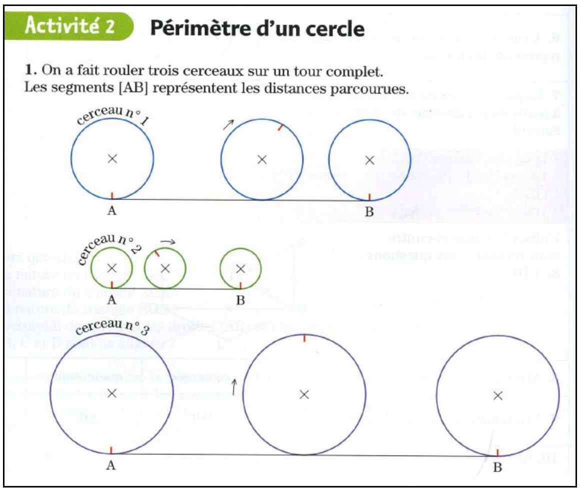


Figure 8-12. Extrait manuel *Multi-math* 6MU05, p.156

À travers ces deux activités, l'enseignant cherche à construire le bloc technologique-théorique relatif aux périmètres qui sera institutionnalisé la séance suivante.

- Séance 3 : Institutionnalisation des techniques de calcul des périmètres

Dans cette séance de cours, le professeur M2 corrige l'activité 2, page 156 du manuel scolaire. Ensuite il institutionnalise la technique de calcul de périmètre des polygones et la formule de périmètre d'un cercle.

L'enseignant fait aussi un rappel sur les conversions d'unités de longueur. Il donne ensuite comme devoir les exercices 9, page 162 du manuel scolaire *Multi-math* :

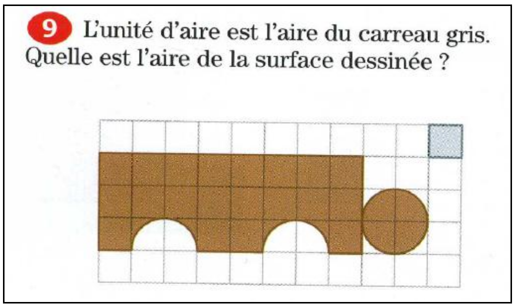


Figure 8-13. Exercice 9, p. 162, manuel *Multi-math* 6MU05

Et l'exercice 10, page 163 du même manuel 6MU05 :

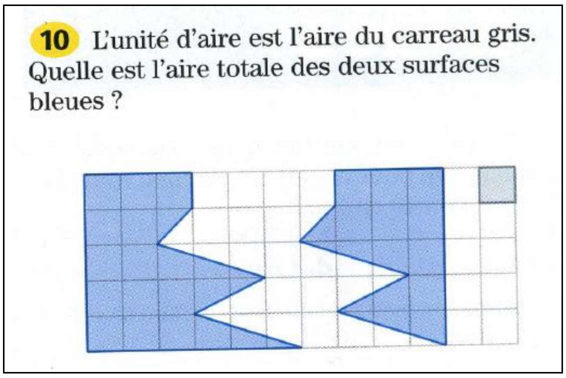


Figure 8-14. Exercice 10, page 163, manuel 6MU05

Les deux tâches relèvent du type de tâches $T_2(aires)$: calculer l'aire d'une surface.

- Séance 4 : Exercices des calculs d'aires et de périmètres

La séance commence par la correction du devoir de la séance dernière, cet-à-dire les exercices 9 et 10. Ces deux exercices sont résolus à l'aide des techniques de découpage-recollement τ_{DR}, de dénombrement d'unités τ_{DE} et d'utilisation de la formule τ_{CF} .

Après la correction, l'enseignant M2 propose une autre activité relative aux calculs des aires :

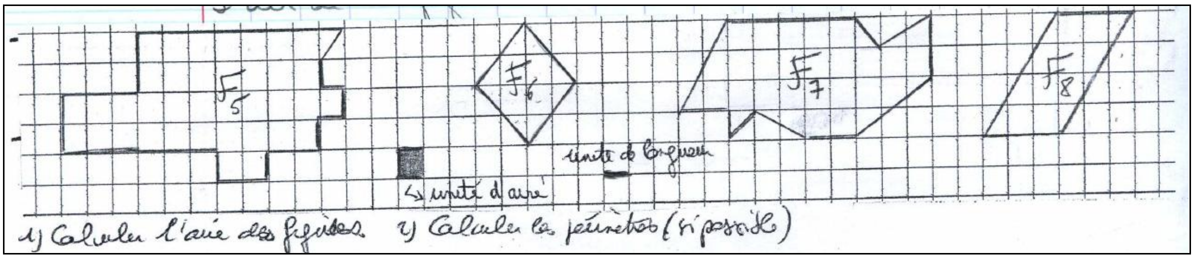


Figure 8-15. Activité 1, séance 4

La correction est faite par les élèves au tableau. Une autre activité est présentée par le professeur M2, où il s'agit de calculer l'aire de la figure F :

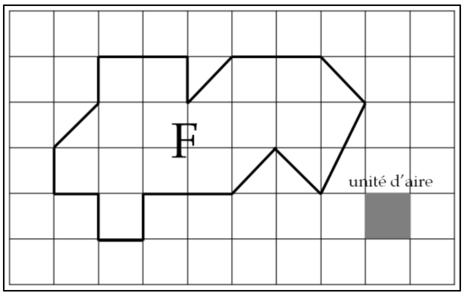


Figure 8-16. Figure activité 2, séance 4

Elle est corrigée par le professeur M2. Dans ces deux activités, les techniques utilisées sont bien le dénombrement d'unités et le découpage-recollement.

Finalement, l'enseignant donne la définition d'aire, « l'aire d'une figure représente la portion du plan qu'elle occupe » et deux exercices à faire à la maison, le 11 et 18 de la page 163 du manuel scolaire :

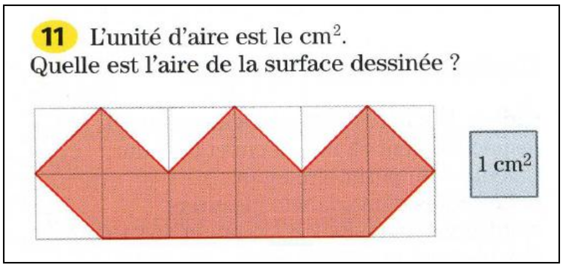


Figure 8-17. Extrait manuel *Multi-math* 6MU05, page 163.

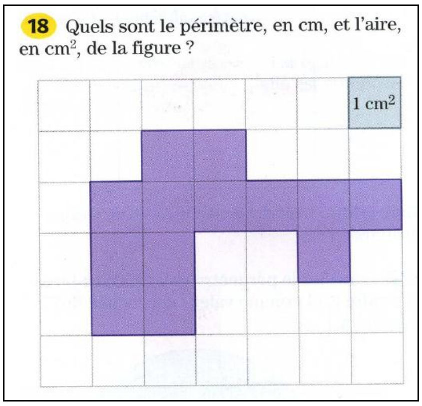
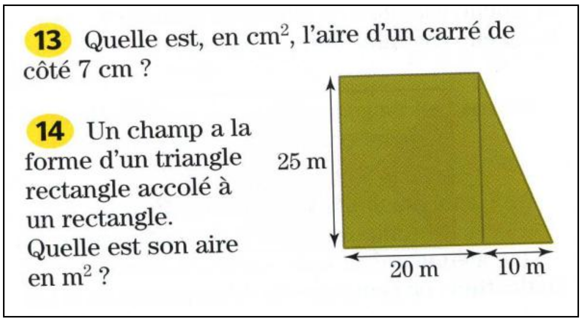


Figure 8-18. Extrait manuel *Multi-math* 6MU05, page 163

À travers ces deux problèmes, on voit comme l'enseignant passe du travail sur les aires avec les unités « aire du carré gris » vers une unité numérique explicitée « 1 cm² ». Ainsi l'enseignement commence dans un cadre géométrique-grandeurs pour passer à un cadre des grandeurs-numérique.

- Séance 5 : Institutionnalisation des formules d'aire de figure usuelles

Les élèves corrigent au tableau le devoir de la séance précédente, les exercices 11 et 18 de la page 163. Après, le professeur M2 institutionnalise les formules d'aire d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle, pour ensuite faire travailler les élèves sur les exercices 13 et 14 de la page 163 du manuel :


13 Quelle est, en cm², l'aire d'un carré de côté 7 cm ?

14 Un champ a la forme d'un triangle rectangle accolé à un rectangle. Quelle est son aire en m² ?

Figure 8-19. Exercices 13 et 14, page. 163, manuel 6MU05

Dans l'exercice 13, les élèves calculent l'aire d'un carré $T_{2_{Carré}}(aires)$, dans l'exercice 14, ils calculent l'aire d'un rectangle $T_{2_{Re\,ct.}}(aires)$ et l'aire d'un triangle rectangle $T_{2_{T.rect}}(aires)$. Pour les deux exercices, ils utilisent la formule d'aire (τ_{CF*}) de chacune des surfaces impliquées.

- Séances 6 et 7

Dans ces séances, le professeur M2 institutionnalise la technique d'utilisation du tableau de conversion d'unités d'aire pour les changements d'unités ($T_6(aires)$) et la technique de découpage-recollement (τ_{DR}). Une évaluation sous la forme de devoir est présentée aux élèves, puis elle est corrigée pendant la dernière séance.

Postérieurement, nous présenterons l'analyse d'une séance particulière de la progression mise en place par le professeur M2 en classe de 6e. Cette séance est la séance 4 du chapitre « aires et périmètres » pour laquelle nous souhaitons analyser les organisations didactiques, et les organisations mathématiques locales et ponctuelles.

3.2 Schéma de l'organisation mathématique régionale mise en place par le professeur M2

Nous résumons à travers le schéma suivant, l'organisation mathématique régionale mise en place par le professeur M2 relativement aux aires :

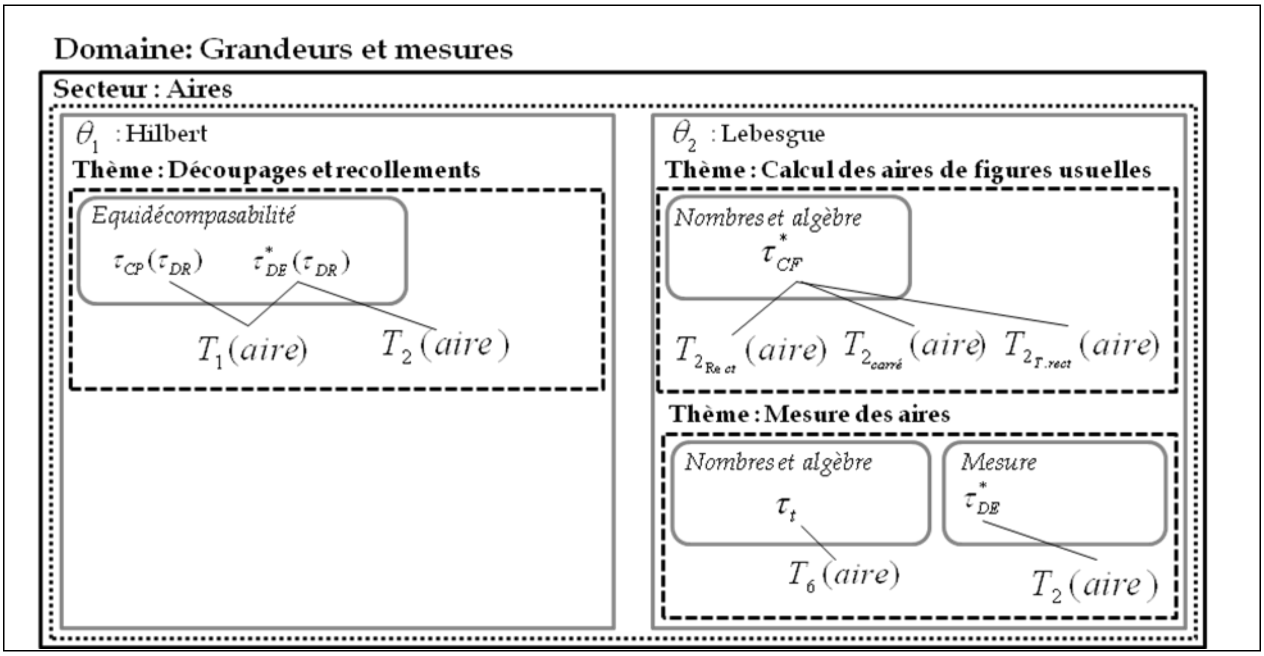


Figure 8-20. Organisation mathématique régionale mise en place par M2 en classe de 6e

En comparant l'organisation mathématique régionale mise en place par professeur M2 en classe de 6e à celle prescrite par les programmes scolaires, on remarque qu'elles sont assez proches. L'enseignant M2 traite en classe la plupart des types de tâches présentes dans les programmes scolaires, elles sont comparer des aires $T_1(aires)$, calculer des aires de surfaces $T_2(aires)$ (rectangle, carré, triangle rectangle) et convertir des unités d'aire $T_6(aires)$. Le seul type de tâches qui n'apparaît pas dans la progression du professeur M2 est « calculer l'aire d'un disque ». Au niveau des techniques, on voit aussi que la plupart de techniques travaillées par le professeur M2 sont conformes aux programmes de l'institution CA4. En effet, les techniques étudiées par cet enseignant sont le dénombrement d'unités τ_{DE}, le découpage-recollement τ_{DR}, le pavage τ_{CP} et l'utilisation de formules d'aire τ_{CF}. Par rapport aux technologies, l'enseignant M2 étudie les aires sans les mesures et avec les mesures, ainsi cette espèce de grandeur se construit dans le cadre géométrique, numérique et celui des grandeurs dans la classe de 6e du professeur M2.

3.3 Bilan sur le chapitre « aires et périmètres » en classe de 6e

Dans la progression relative à l'enseignement des aires, on observe le passage du cadre géométrique, vers les grandeurs et finalement vers le cadre numérique. Effectivement, l'enseignant M2 commence le chapitre « aires et périmètres » par un problème relatif à la comparaison des aires. Il est résolu dans le cadre géométrique, car il s'agit de comparer les nombres de pavés sans faire référence aux mesures et aux unités. Ensuite, l'aire est étudiée en tant que grandeur à travers la technique de dénombrement d'unités en prenant comme unité « 1 cm² ». Finalement, cette espèce de grandeur est travaillée dans le cadre numérique à travers les formules.

4. Le chapitre « Aires » en classe de 5e

Dans cette partie, nous allons présenter les organisations didactiques et mathématiques régionales mises en place par le professeur M2 dans la classe de 5e de l'année 2009-2010.

4.1 L'organisation didactique et mathématique régionale

Le chapitre « aires » est le dernier chapitre traité par le professeur M2 dans la classe de 5e. Le professeur M2 enseigne ce chapitre pendant 5 séances. On compte 4 séances de cours, 1 séance d'exercices et aucune séance d'évaluation. Nous avons assisté aux séances 1, 2, 3 et 5. Les principales activités et connaissances étudiées dans chaque séance sont :

- Séance 1 : Formule de calcul de l'aire d'un losange

Cette séance est composée de deux activités. La première vise réactiver des connaissances de la classe de 6e à travers le type de tâches $T_2(aires)$: calculer l'aire d'une surface, pour laquelle les élèves utilisent les procédures de découpage-recollement τ_{DR}, de décomposition τ_D et d'utilisation des formules d'aire d'un carré, un rectangle et un triangle rectangle τ_{CF} * :

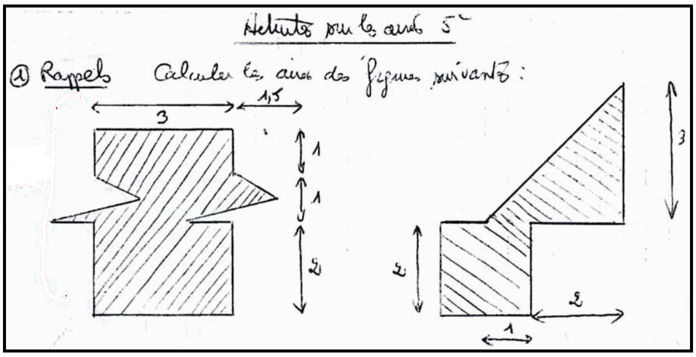


Figure 8-21. Activité 1, séance 1

Cette activité sert à introduire aussi le concept d'aire. Les connaissances et techniques réveillées sont nécessaires pour pouvoir aborder convenablement l'activité suivante, car dans la deuxième activité, il s'agit de déduire la formule d'aire d'un losange à partir de l'aire d'un rectangle :

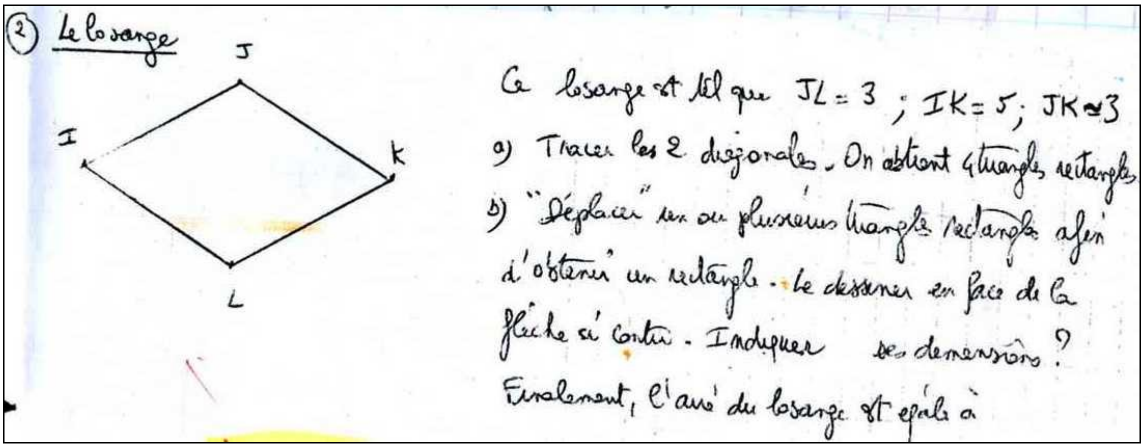


Figure 8-22. Activité 2, séance 1

Pour travailler convenablement sur l'activité, les élèves doivent utiliser les techniques utilisées dans la première activité.

A la fin de la séance, le professeur M2 donne comme devoir l'exercice 13, de la page 233 du manuel *Diabolo* 5DB06 :

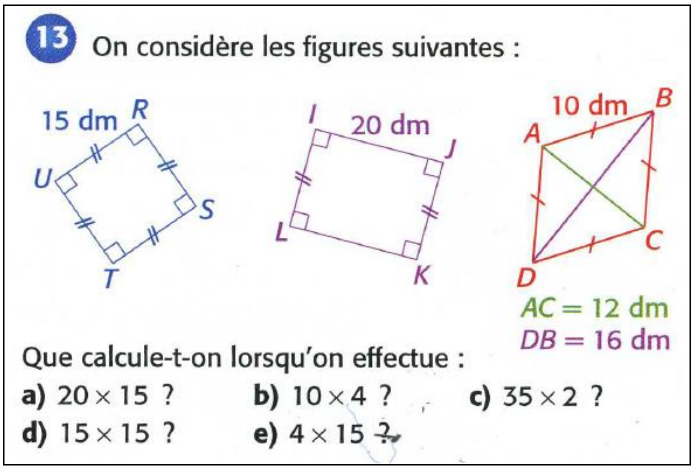


Figure 8-23. Exercice 13, page 233, manuel *Diabolo* 5DB06

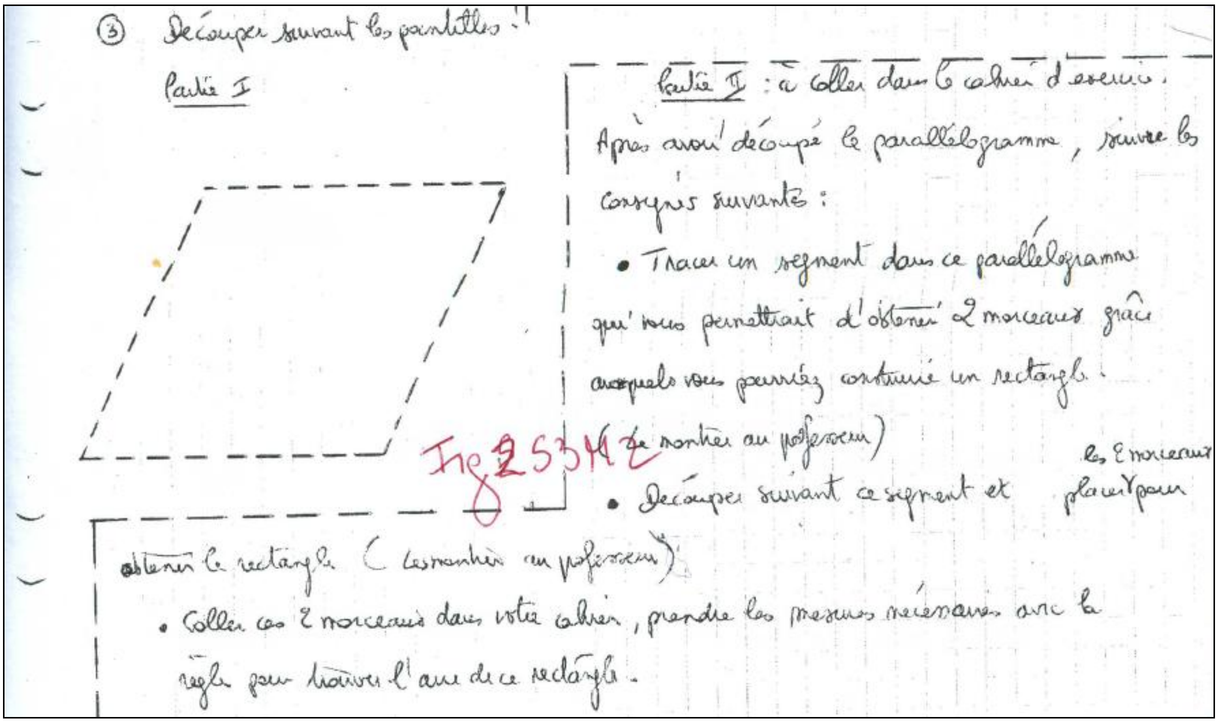
Avec cet exercice, l'enseignant M2 vise l'apprentissage des formules de l'aire du carré, du rectangle et du losange. Dans l'enseignement du professeur M2 apparaît ainsi un type de tâches que nous n'avons pas considéré dans notre étude, il s'agit « d'associer des expressions numériques au calcul de l'aire d'une surface », nous la dénommerons $T_N(aires)$.

- Séance 2 : Formules d'aire et de périmètre d'un rectangle

La séance commence par la correction d'un devoir sur les nombres relatifs et les opérations. Ensuite le professeur M2 corrige l'exercice 13 de la page 233 donné la séance précédente et il rappelle les formules d'aire et de périmètre d'un rectangle.

- Séance 3 : Formule d'aire d'un parallélogramme

L'enseignant rappelle la formule d'aire d'un carré et la formule de l'aire d'un losange étudiée dans la première séance. Ensuite, il propose une activité concernant l'aire d'un parallélogramme :


③ Découper suivant les pointillés !

Partie I

Partie II : à coller dans le cahier d'exercices.

Après avoir découpé le parallélogramme, suivre les consignes suivantes :

• Tracer un segment dans ce parallélogramme qui vous permettrait d'obtenir 2 morceaux grâce auxquels vous pourriez construire un rectangle. (le montrer au professeur)

• Découper suivant ce segment et placer les 2 morceaux pour obtenir le rectangle (le montrer au professeur)

• Coller ces 2 morceaux dans votre cahier, prendre les mesures nécessaires avec la règle pour trouver l'aire de ce rectangle.

Figure 8-24. Activité 1, séance 3

L'activité est corrigée par un élève et par le professeur M2. L'enseignant institutionnalise la formule d'aire d'un parallélogramme. Finalement, il donne comme devoir l'exercice 12 de la page 233 du manuel 5DB06 :

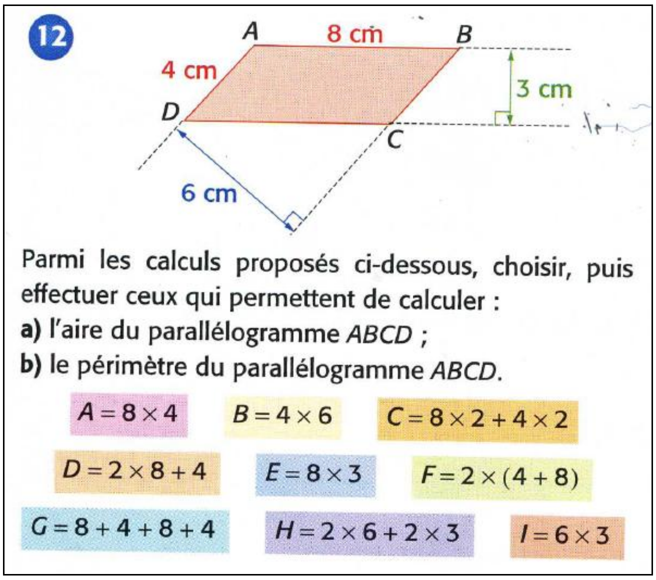


Figure 8-25. Exercice 12, page 233, manuel *Diabolo* 5DB06

Une fois de plus, l'enseignement du professeur M2 est centré sur les formules d'aires de surfaces planes. Dans cette activité il s'agit de reconnaître le calcul numérique donnant l'aire du parallélogramme.

- Séance 4 : Formule d'aire d'un triangle

L'enseignant institutionnalise la formule de calcul de l'aire d'un triangle quelconque sans proposer des activités d'introduction comme pour le losange et le parallélogramme. Il donne comme devoir l'exercice 5 de la page 231 du manuel scolaire :

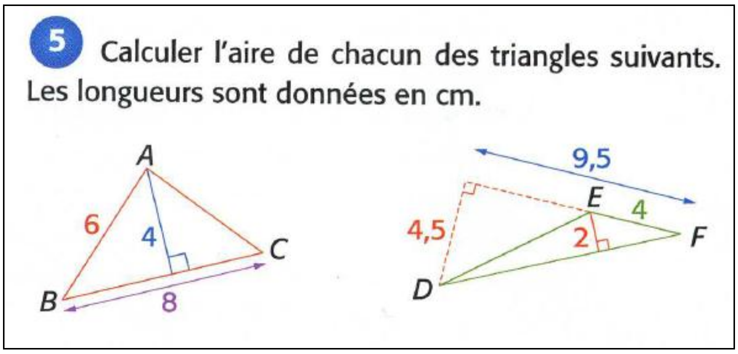


Figure 8-26. Exercice 5, page 231, manuel *Diabolo* 5DB06

Cette tâche est du type $T_2(aires)$, calculer l'aire d'une surface, et ainsi l'enseignant M2 fait travailler les élèves sur la technique d'utilisation de la formule.

- Séance 5

Le professeur M2 explique que cette séance est la dernière de l'année. Les élèves travaillent sur une activité concernant la relation entre les aires des deux triangles formés par la médiane d'un triangle. Ainsi, M2 institutionnalise la propriété des médianes « la médiane coupe le triangle en deux triangles de même aire ».

4.2 Schéma de l'organisation mathématique régionale mise en place par le professeur M2

Nous résumons dans le schéma ci-dessous l'organisation mathématique régionale mise en place par le professeur M2 en classe de 5e :

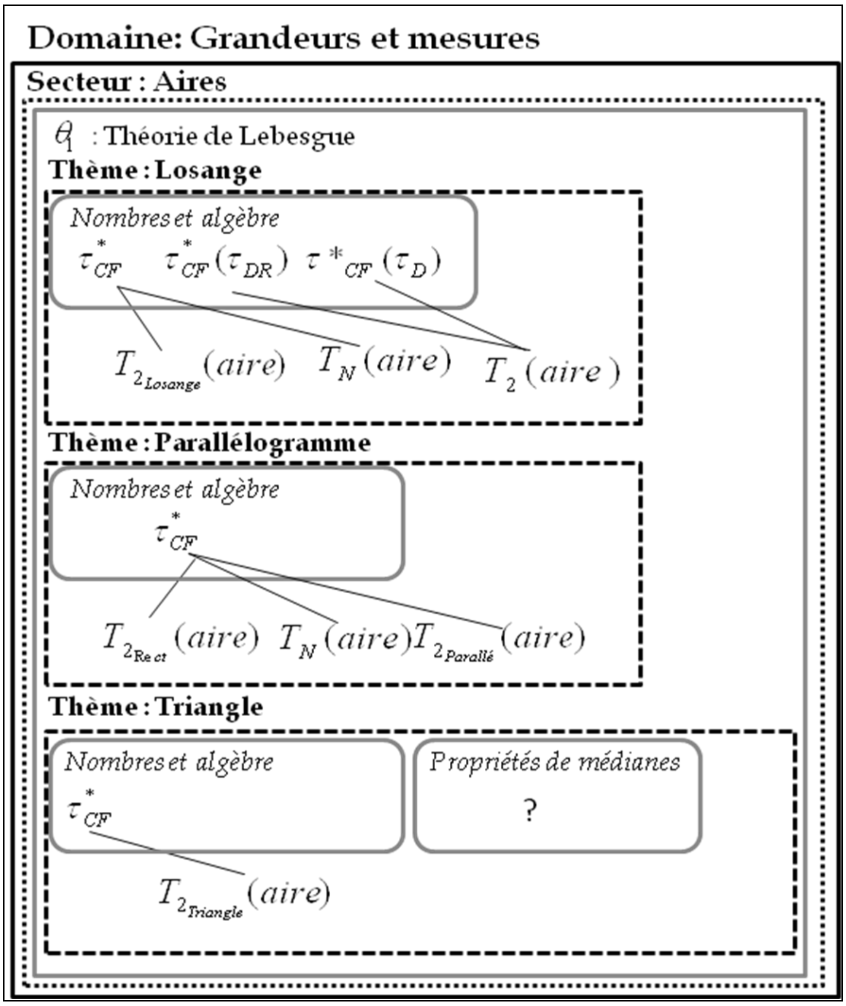


Figure 8-27. Organisation mathématique régionale mise en place par M2 en classe de 5e

L'enseignant M2 centre l'étude des aires sur trois surfaces le losange, le parallélogramme et le triangle. Pour le losange et le parallélogramme, il s'agit de calculer les aires de ces surfaces $T_2(aires)$, mais aussi d'associer des expressions numériques aux calculs des aires $T_N(aires)$. La technique centrale est l'utilisation de la formule τ^*_{CF}. Dans le thème « aires », il existe aussi un élément technologique qui ne sera pas utilisé dans la suite du chapitre. En effet, le professeur M2 institutionnalise la propriété de médianes d'un triangle la dernière séance du chapitre aires.

4.3 Bilan sur le chapitre « aires en classe de 5e »

Dans la progression du professeur M2, plusieurs séances sont destinées à l'institutionnalisation des formules, et très peu au travail sur les techniques. Il semble que la position du chapitre « aires » dans la progression annuelle du professeur M2 a obligé à une étude plus condensée des aires pour ainsi arriver à travailler sur tous les contenus demandés par les programmes en vigueur.

Par rapport aux organisations mathématiques régionales prescrites par les programmes scolaires, on voit que les organisations mathématiques mises en place par le professeur M2 sont centrées sur la notion d'aire du point de vue numérique. Dans la classe de 5e du professeur M2, le travail est consacré à l'étude des formules d'aire, notamment celles du losange, du rectangle et du triangle, comme l'indiquent les programmes scolaires. Ainsi, le passage à la classe de 5e représente la première étape de l'étude des aires d'un point de vue purement numérique.

Nous avons choisi la première séance du chapitre « aires » pour analyser les organisations mathématiques et didactiques ponctuelles et locales mises en place par l'enseignant M2 dans la classe de 5e. Cette analyse sera présentée postérieurement.

5. Analyse d'une séance de la classe de 6e : Calculs des aires

Cette séance est la quatrième du chapitre « Aires et périmètres »[2]. Elle se déroule au mois de mai de l'année scolaire 2010-2011, nous avons recueilli des observations personnelles écrites, des enregistrements audio et les cahiers des élèves.

Elle débute par la correction d'un devoir portant sur deux exercices du manuel scolaire *Multi-math* 6MU05. Une fois la correction terminée, le professeur M2 consacre les minutes suivantes à faire travailler les élèves sur deux activités.

5.1 La trame de la séance

- Phase 1 (0 à 3 minutes et demie) : Correction du devoir, exercices 9 et 10, page 162 du manuel Multi-math 6MU05

Le professeur M2 corrige le devoir de la séance précédente. Il s'agit de calculer les aires de deux surfaces S_{D_9} et $S_{D_{10}}$:

[2] La transcription de cette séance est présentée dans l'annexe F

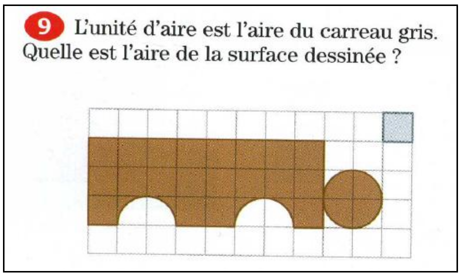


Figure 8-28. Exercice 9, p. 162, manuel Multi-math 6MU05

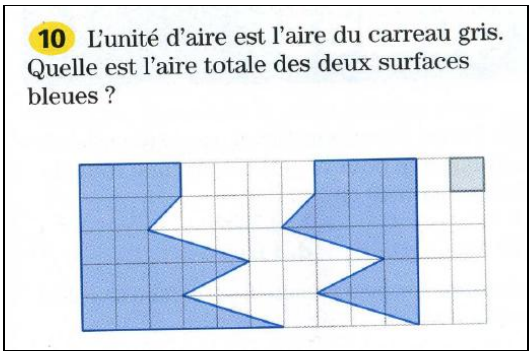


Figure 8-29. Exercice 10, page 163, manuel Multi-math 6MU05

La correction est faite par deux élèves au tableau, Zoia et Camille, qui passent à leur tour au tableau. Les réponses sont validées par le professeur M2.

- Phase 2 (3 minutes et demie à 19 minutes et demie) : Présentation et travail sur l'activité 1

L'enseignant M2 distribue une feuille avec la première activité de la séance. Il s'agit de calculer les aires et les périmètres des figures F_5, F_6, F_7 et F_8 :

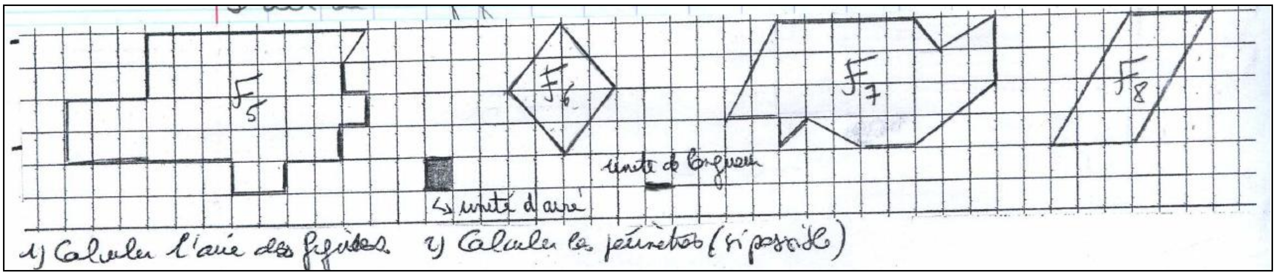


Figure 8-30. Activité 1, séance 4, 6e, M2

Les élèves travaillent individuellement sur l'activité pendant 14 minutes.

- Phase 3 (19 minutes et demie à 27 minutes) : Correction collective du calcul des aires et des périmètres des figures F_5 et F_6 par un élève

Après le travail individuel de chaque élève, le professeur M2 demande à Farah de passer au tableau et donner les résultats pour les aires et les périmètres des figures F_5 et F_6. L'enseignant valide les réponses données par Farah et explique les procédures possibles aux autres élèves.

- Phase 4 (27 à 30 minutes) : Correction collective du calcul des aires et des périmètres des figures F_7 et F_8 par un élève

Une fois que les aires et les périmètres des surfaces F_5 et F_6 ont été calculés, l'enseignant appelle Emma au tableau. Elle écrit les réponses, celles-ci sont validées et expliquées par le professeur M2. Le professeur discute avec les élèves sur des procédures non-valables pour les calculs des périmètres de F_7 et F_8.

- Phase 5 (30 à 33 minutes) : Rappel collectif sur les conversions d'unités de longueur

Le professeur M2 dessine un tableau et, à l'aide des élèves, il complète les unités à mettre dans le tableau de conversion d'unités de longueur.

- Phase 6 (33 à 35 minutes) : Institutionnalisation de la notion d'aire

Dans cette phase, l'enseignant M2 institutionnalise la définition d'aire comme « la portion du plan qu'elle occupe ».

- Phase 7 (35 à 42 minutes) : Présentation et travail sur l'activité 2

L'enseignant dessine au tableau quadrillé la figure F :

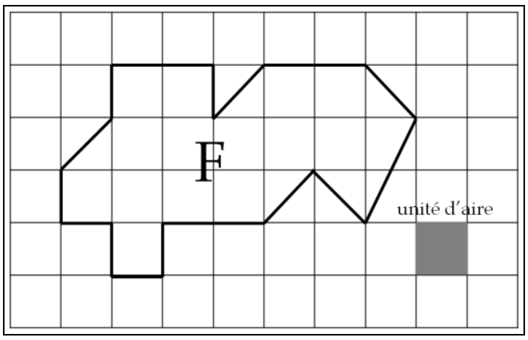


Figure 8-31. Figure activité 2, séance 4, 6e, M2

Les élèves doivent calculer l'aire de cette figure. Ils travaillent individuellement.

- Phase 8 (42 à 47 minutes) : Correction de l'activité 2 par le professeur M2

Le professeur M2 corrige l'activité au tableau à l'aide des élèves.

Voici un schéma qui résume les phases de la trame :

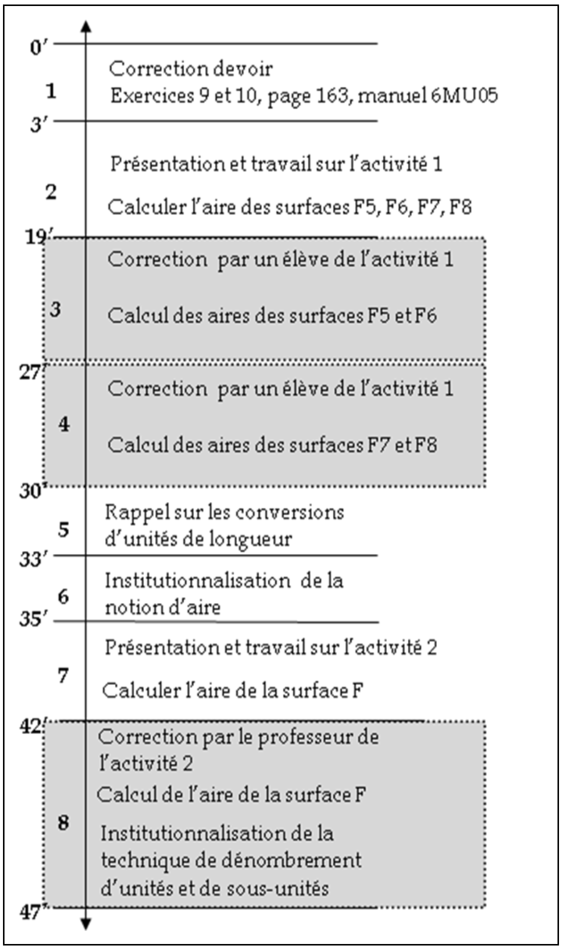


Figure 8-32. Schéma de la trame de la séance 4

5.2 Analyse de la phase 1

Dans la phase 1, le but pour le professeur est de corriger deux problèmes donnés comme devoir la séance précédente, les exercices 9 et 10 de la page 162 du manuel scolaire de la collection *Multi-math.* L'enseignant M2 propose un travail relatif à une organisation mathématique ponctuelle à propos du type de tâches $T_2(aire)$: « Calculer l'aire d'une surface » en résolvant ces deux exercices.

5.2.1 Reprise des techniques de l'école élémentaire

Premièrement, nous analysons les organisations mathématiques et didactiques relatives à l'exercice 9.

a) Analyse a priori de l'exercice 9 :

Nous avons dénommé la surface de cet exercice S_{D_9}. La tâche est de « calculer l'aire de la surface S_{D_9} », laquelle correspond au type de tâches $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface. On voit que la surface relative à la tâche t_{D_9} est présentée sur du papier quadrillé et que l'unité d'aire donnée est celle du « carreau gris ». De plus, on distingue deux surfaces connues, la première est un « rectangle », dans lequel on a enlevé deux demi-disques et la deuxième est un disque. Ainsi, les élèves peuvent utiliser une technique composée de deux étapes :

- les élèves ont la possibilité de faire un découpage-recollement (τ_{DR}). Ils décomposent le disque en deux demi-disques qu'ils déplaceront pour combler les deux « trous » de demi-disques du rectangle, de cette manière, ils obtiennent un rectangle ;
- ensuite, ils peuvent calculer l'aire du rectangle obtenu par découpage-recollement en comptant le nombre de carreaux gris contenus dans cette surface (τ_{DE}) ou ils peuvent utiliser la formule d'aire d'un rectangle en prenant comme unité le côté du carré gris ($\tau *_{CF}$)

D'autres techniques pouvaient être envisagées, comme décomposer la surface et calculer l'aire du « rectangle avec de trous » et le disque séparément. Mais, l'aire d'un disque est une nouvelle connaissance en classe de 6e et il peu probable qu'elle soit utilisées par les élèves de ce niveau. De plus, le disque comble parfaitement les trous du rectangle, ce qui met en avant la procédure de découpage-recollement. Le fait d'utiliser du papier quadrillé favorise le dénombrement d'unités et la formule.

b) Les organisations mathématiques et didactiques mises en place

Pour corriger l'exercice 9, l'enseignant M2 appelle au tableau à un élève, Zoia :

M2: bon, alors, j'envoie qui? shut!!! Zoia tu fais le 9? (Zoia passe au tableau act.9, p.162)
Zoia : (Zoia écrit 24,5)
M2: 24 et demi
Zoia : unités carrées (Zoia efface et écrit « 24 □ »)
M2: pourquoi 24?
Zoia : parce que j'ai la moitié du petit cercle, et à côté il y a deux cercles
M2: il y a deux cercles? Il y a un disque, et avec ce cercle qu'est-ce que t'en fais?

Zoia: bah, je coupe
M2: tu coupes en deux et? tu combles les trous, donc du coup tu te trouves avec un quoi?
Zoia: avec un rectangle
M2: un rectangle qui fait combien sur combien?
Zoia: 3 sur 8
M2: 8, donc c'est pour ça que ça fait 24. Tout le monde est d'accord?
Es: oui
M2: vous avez le droit de découper, de combler les trous toc, toc, ça marche, ça vous fait un rectangle. Ce rectangle fait 3 carreaux sur 8 carreaux, ça fait 24 carreaux.

Pour l'instant, le professeur M2 n'a pas institutionnalisé les formules d'aire des figures usuelles cette année, mais à l'école élémentaire les élèves sont supposés connaître la formule d'aire du carré et du rectangle. Les élèves ont comparé des aires à travers de procédures de découpage-recollement et des dénombrements d'unités dans la première séance consacrée au chapitre « Aires et périmètres ». Ainsi, les connaissances nécessaires pour résoudre la tâche t_{D_9} ont déjà été activées, mais elles n'ont pas été institutionnalisées. Nous considérons ainsi ce travail comme un moment de construction des éléments technologiques et théoriques nécessaires pour résoudre le type de tâches $T_2(aire)$. Il semble que le professeur M2 cherche faire travailler les élèves sur la technique de découpage-recollement, τ_{DR}, et la technique de dénombrement d'unités, τ_{DE}. Mais la technique mise en place pour résoudre la tâche n'apparaît pas très clairement dans le discours de M2. D'un côté, le professeur M2 demande à Zoia : « un rectangle, qui fait combien sur combien ? », ce qui nous amène à penser qu'il cherche à utiliser la formule d'aire du rectangle. D'autre côté, il réalise un comptage bidimensionnel des carreaux : « ce rectangle fait 3 carreaux sur 8 carreaux ». Ces deux techniques sont considérées comme des connaissances acquises par le professeur M2 qui les utilise de manière naturelle, peut-être du fait qu'elles sont assez travaillées dans l'école élémentaire.

Pour résoudre l'exercice 9, l'enseignant M2 donne la responsabilité à Zoia de donner la réponse de la tâche t_{D_9}. Ensuite, il reprend en charge la correction de l'exercice 9 en questionnant Zoia sur les procédures utilisées pour obtenir la réponse « 24 □ ». Le milieu est donc enrichi avec le dialogue entre le professeur et l'élève. En effet, cette discussion permet d'aborder les techniques visées par l'enseignant τ_{DR} et τ_{DE}. Le contrat didactique qui se dégage est la possibilité de « découper et combler des trous » pour calculer des aires et aussi le fait de signaler les unités « □ » comme des unités valables.

5.2.2 Quelles unités ?

Dans cette section, nous analysons les organisations mathématiques et didactiques mises en place pour résoudre l'exercice 10 de la page 163 du manuel scolaire *Multi-math* 6MU05. La surface $S_{D_{10}}$ est l'union de deux surfaces que nous notons, $S'_{D_{10}}$ et $S''_{D_{10}}$. Il s'agit de calculer l'aire de la surface $S_{D_{10}} = S'_{D_{10}} \cup S''_{D_{10}}$, nous notons cette tâche $t_{D_{10}}$. Elle est relative aux types de tâches $T_2(aire)$: calculer l'aire d'une surface. Dans l'exercice 9, on pouvait reconnaître deux surfaces usuelles, le rectangle et le disque. Par contre, $S'_{D_{10}}$ et $S''_{D_{10}}$ ne sont pas des surfaces connues par les élèves. Cependant, la configuration de l'exercice 10 conduit à faire un déplacement horizontal à gauche de la surface $S''_{D_{10}}$ et ainsi obtenir un rectangle à partir de l'union de $S'_{D_{10}}$ et $S''_{D_{10}}$. La première partie de la technique consiste ainsi à faire un recollement (τ_{DR}) entre les surfaces $S'_{D_{10}}$ et $S''_{D_{10}}$. Ensuite, comme l'exercice 10 est présenté sur papier quadrillé et l'unité d'aire est le « carreau gris », les élèves peuvent être amenés à faire un dénombrement d'unités τ_{DE} ou à utiliser la formule d'aire d'un rectangle $\tau*_{CF}$. Comme pour l'exercice 9, nous notons cette technique $\tau_{DE}(\tau_{DR})$ ou $\tau*_{CF}\ (\tau_{DR})$.

Nous rappelons que l'exercice 10 est un devoir à la maison donné la séance précédente. Pour le corriger, l'enseignant M2 demande à l'élève Camille, de passer au tableau :

> *M2: Camille le 10*
> *Camille : (Camille passe au tableau et écrit « L'aire de la figure est 30 unités »)*
> *M2: Pourquoi 30 unités? Cami?*
> *Camille: parce que c'est un rectangle*
> *M2: oué, on tombe sur un rectangle qui fait 1,2,3,4,5 sur 1,2,3,4,5,6, oui, 5 fois 6. D'accord? Donc tout ça a été fait soit par découpage ou on comble les trous pour obtenir des figures simples, soit la deuxième partie vous collez un morceau et puis en morceau, en fait ça vous un rectangle. ça va? c'est bon?*

On remarque le fait que Camille utilise le mot « unités » pour donner l'aire de la surface. Dans l'exercice 9, Zoia utilise le dessin « □ » pour signaler les unités d'aire. Dans les deux cas, l'enseignant M2 continue les explications avec les mots choisis par chaque élève, c'est-à-dire, pour l'exercice 9 les unités d'aire sont les « □ » et pour l'exercice 10 les unités sont les « unités », même si les deux problèmes sont présentés dans la même configuration avec un quadrillage et un carreau gris. On ne trouve pas de remarques faites par le professeur en relation avec les unités d'aire. Comme le signale le manuel scolaire dans les deux exercices, l'unité d'aire est bien l'aire du carreau gris. Dans ce contexte la réponse de Zoia en « □ » amène à des confusions sur la conception d'aire, car le symbole « □ » peut représenter à la fois une surface et une aire. Cela nous laisse penser que le concept d'aire risque d'être très proche d'une conception grandeur-objet[3]. Dans la réponse de Camille, le mot « unités » est ambigu et incomplet, car on ne sait pas s'il s'agit d'unités d'aire et de quelles unités d'aire. Malgré cela, l'enseignant M2 valide la réponse en « unités ». Même si l'enseignant M2 met en avant avec les problèmes 9 et 10 du manuel scolaire une conception de l'aire en tant que grandeur à travers la technique de dénombrement, cette conception d'aire reste attachée à la surface et l'utilisation et place des unités restent confuses dans ses enseignements.

En outre, l'enseignant M2 favorise la procédure de découpage-recollement (τ_{DR}) comme la technique principale pour résoudre les exercices 9 et 10, et il commence ainsi le moment d'institutionnalisation. Cela nous confirme le fait que le professeur M2 vise réactiver cette technique emblématique de l'école élémentaire dans la classe de 6e.

5.2.3 Bilan concernant la phase 1

Nous nous basons sur les outils de notre cadre théorique, les organisations mathématiques et la méthode des quatre composantes[4], pour résumer les organisations mathématiques et didactiques relatives aux tâches t_{D_9} et $t_{D_{10}}$ dans les tableaux ci-dessous. Premièrement, nous présentons l'organisation mathématique :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 1	
Bloc théorique-technologique	- La théorie est absente, mais rattachée aux théories d'Hilbert et de Lebesgue et aux figures équidé-composables et à la mesure. - Les éléments technologiques apparaissent oralement dans le discours de M2
Technique	$\tau_{DE}(\tau_{DR})$: Dénombrement d'unités après découpage-recollement ou $\tau^*_{CF}\ (\tau_{DR})$: Utilisation de la formule après découpage recollement
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface
Tâches	t_{D_9} : Calculer l'aire de la surface S_{D_9} $t_{D_{10}}$: Calculer l'aire de la surface $S_{D_{10}}$

Tableau 8-1. Organisation mathématique ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 1

Deux tâches sont proposées aux élèves, elles sont du type $T_2(aires)$. Nous n'avons pas pu différencier dans son discours si le professeur M2 fait référence à la technique $\tau_{DE}(\tau_{DR})$ ou $\tau^*_{CF}\ (\tau_{DR})$ pour résoudre ces deux tâches. Mais dans les deux cas, l'enseignant utilise des éléments technologiques de la théorie d'Hilbert, comme le découpage recollement et de la théorie de Lebesgue, la formule et/ou le dénombrement.

[3] Voir typologie de conceptions dans le chapitre I

[4] Voir la méthodologie de l'étude des pratiques dans le chapitre V

Maintenant, nous présentons l'organisation didactique relative à la phase 1 :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 1	
Moment didactique	Construction du bloc technologique-théorique et début de l'institutionnalisation
Contrat didactique	Confus par rapport aux unités : on valide « □ » et « unités » comme unités d'aire
Milieu	Il est enrichi avec les échanges entre les élèves et M2
Topos	Correction collective des tâches : Responsabilités partagées, l'élève donne la réponse et M2 la valide
Temps didactique	Reprise d'une technique emblématique de l'école élémentaire

Tableau 8-2. Organisation didactique ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 1

Pour les deux exercices 9 et 10, le professeur M2 fait une correction collective, où un élève donne la réponse, laquelle est expliquée à la classe par M2. L'enseignant insiste sur la procédure de découpage-recollement dans son discours, ainsi il commence le début de l'institutionnalisation. En outre, le contrat didactique mis en place par l'enseignant par rapport aux unités crée une confusion autour de la notion d'aire, car les réponses « □ » et «unités » sont acceptées comme correctes.

En conclusion, dans les premiers cours relatifs aux aires, la séance 1 et la séance 4 du chapitre « Aires et périmètres », les aires sont travaillées en tant que grandeur avec la technique composée $\tau_{DE}(\tau_{DR})$. Cette technique est très présente à l'école élémentaire. En classe de 6e, elle est justifiée du fait qu'à ce niveau les élèves « comparent des aires sans avoir recours à des formules » (Ministère de l'Education Nationale, 2008), et donc il paraît naturel de faire le passage au calcul des aires à travers la technique de découpage-recollement et le dénombrement d'unités. Cependant, des difficultés persistent sur la place et la fonction des unités dans les dénombrements.

5.3 Analyse des phases 2,3,4

L'enseignant M2 distribue une feuille avec les figures F_5, F_6, F_7, F_8, il s'agit de calculer les aires et les périmètres de ces quatre figures :

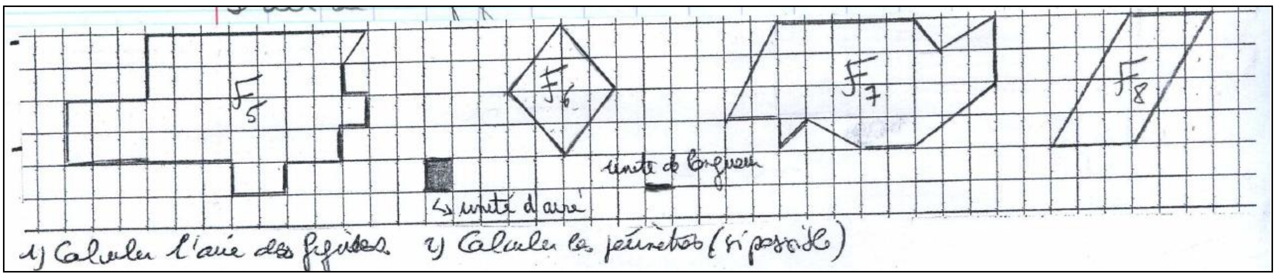


Figure 8-33. Activité 1, séance 4

Nous centrerons nos analyses sur les calculs des aires.

5.3.1 L'organisation mathématique

L'enseignant met en place une organisation mathématique ponctuelle relatives aux types de tâches $T_2(aire)$: calculer l'aire d'une surface. D'après nos observations, l'objectif de l'activité est de construire les éléments technologiques et théoriques relatifs à la technique τ_{DE} : dénombrement d'unités et de sous-unités. En effet, les figures sont présentées sur de papier quadrillé et il est dessiné un rectangle gris. Ainsi, la configuration de l'activité met en avant la technique τ_{DE}. Cependant le statut de l'unité n'est pas explicité, le rectangle gris peut représenter une unité d'aire, mais aussi une surface.

5.3.2 Les réponses des élèves

Dans la phase 3, un élève, Farah, passe au tableau pour donner les aires de F_5 et F_6. Il donne en premier l'aire de la figure F_5 :

M2 : alors, on va faire le bilan ! (…) Alors, pour le premier. Alors, Farah tu fais les deux premiers
E : est-ce qu'on va expliquer monsieur comment on a fait ?
M2 : alors, l'aire qui t'as trouvé ?
Farah : (Farah écrit 37,5)
M2 : Tttttt, l'unité ?
Farah: ah si! (Farah met le dessin d'un carreau, □)
M2: alors 37,5 carreaux,

Ensuite, les élèves et l'enseignant discutent sur le périmètre de la figure F_5. Farah écrit ensuite l'aire de la figure F_6 :

Farah : (Il écrit 8 □)
M2: bon, dans le deuxième 8 carreaux pour l'aire, vous êtes d'accord?
Es: oui!

Dans la phase 4, un autre élève, Emma donne les aires des figures F_7 et F_8 :

M2: ensuite, j'envoie quelqu'un pour 7 et 8, Emma! pour 7 et 8!
Emma: (Emma passe au tableau. Elle écrit pour la Figure 7, aire =29 □). Le périmètre on peut pas le faire monsieur !
M2: d'accord, bon, tu mets une croix.
Emma : (Emma met une croix et continue par la figure F8, elle écrit 12 □)
M2: alors 29 on accepte (...) 12 pour F8

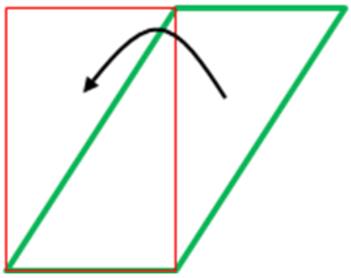
Nous faisons l'hypothèse que cette activité est proposée pour construire ou reconstruire la technique de dénombrement d'unités τ_{DE}. Effectivement, les surfaces proposées sont des figures planes non-usuelles, et comme les élèves ne peuvent pas appliquer les formules de calcul directement, ils utilisent la technique τ_{DE}. La responsabilité de donner les réponses correctes repose sur les élèves, mais ces réponses sont aussi validées par l'enseignant. L'enseignant M2 propose une fois de plus de calculer des aires avec une unité non-conventionnelle, l'aire du petit rectangle.

5.3.3 La mise en avant de la technique τ_{DE}

Suite à une discussion sur l'utilisation de la technique de découpage-recollement pour calculer des périmètres, le professeur M2 reprend cette technique et explique comment l'utiliser pour calculer l'aire de la figure F_8 :

> *M2: 12: il y en a que, oui, il y en a qui ont pas trouvé, c'est vrai que cela, il est en peu plus embêtant parce que eh, la partie de carreaux c'est pas la même que cette partie de carreaux. Quel est le moyen relativement simple de trouver?*
> *E: ehh on fait, là sur la...*
> *M2: ça sera plus simple (...) c'est dans cette partie là vous la mettez ici, vous découpez, cette partie vous la mettez là, vous vous retrouvez avec un rectangle, qui fait 3 sur 4, donc ça fait 12 et ça marche pour l'aire, pas pour le périmètre, d'accord? Le découpage ça marche pas pour le périmètre.*

Le professeur M2 dessine sur le tableau :



On voit à travers le discours du professeur M2 que les élèves n'ont pas privilégié la procédure de découpage-recollement, même si cette technique est convenable avant de faire un dénombrement d'unités même si elle venait d'être travaillée dans la même séance. Il semble que la présence d'un quadrillage et la configuration des surfaces, qui ne sont pas de manière évidente décomposables en figures connues, ont favorisé le dénombrement d'unités. On remarque que la figure F_5 conduit les élèves à utiliser la technique τ_{DE}, mais les aires des figures F_6 et F_8 peuvent se calculer à travers la technique composée $\tau_{DE}(\tau_{DR})$. La figure F_7 peut aussi se résoudre avec cette technique, mais les découpages et recollements sont beaucoup plus difficiles à distinguer. Il semble que le quadrillage peut bloquer la mise en place d'autres procédures comme le découpage-recollement chez les élèves. Le milieu dans lequel se présentent les figures F_5, F_6, F_7, F_8 favorise le dénombrement d'unités par rapport à d'autres techniques.

Quand les élèves Farah et Emma passent au tableau, ils donnent les réponses, mais on trouve moins d'interventions du professeur M2 pour expliquer les procédures concernant les calculs des aires, cela peut être dû au fait que les techniques viennent d'être travaillées dans la même séance.

5.3.4 Bilan concernant les phases 2,3,4

Voici un tableau qui résume les organisations mathématiques et didactiques ponctuelles relatives à cette activité :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 2, 3, 4	
Bloc théorique-technologique	La théorie est absente, mais rattachée aux théories de Lebesgue, Mesure
Technique	τ_{DE} : Dénombrement d'unités
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface
Tâches	Calculer les aires des figures F_5, F_6, F_7, F_8

Tableau 8-3. Organisation mathématique ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 2, 3, 4

Même si pour la figure F_8, l'enseignant M2 utilise la procédure de découpage-recollement, il centre l'attention sur la technique τ_{DE}. Cette technique est mise en avant en raison du choix des figures non-usuelles. Cela pourrait favoriser une conception d'aire en tant que grandeur, mais le dessin du rectangle gris peut amener à confondre les notions de surface et d'aire.

Nous résumons l'organisation didactique de la manière suivante :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 2, 3, 4	
Moment didactique	Construction du bloc technologique-théorique
Contrat didactique	Les unités sont exprimées comme « □ » et la technique τ_{DR} est toujours une technique valide
Milieu	Le quadrillage favorise la technique τ_{DE} et semble faire obstacle à l'utilisation d'autres procédures
Topos	Réponses données par les élèves, peu d'interventions de la part du professeur M2
Temps didactique	Prolongation du travail de calcul des aires avec la technique τ_{DE}

Tableau 8-4. Organisation didactique ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 2, 3, 4

Comme nous pouvoir voir dans le tableau ci-dessus, l'organisation didactique est organisée autour de la technique τ_{DE}. L'activité proposée par le professeur M2 vise la construction d'un bloc technico-théorique relativement à τ_{DE}. Cependant, la dimension donnée à l'association du quadrillage avec la mise en place de la technique τ_{DE} dans le milieu construit par le professeur M2 semble avoir bloqué l'utilisation d'autres techniques convenables pour la résolution de l'activité 1.

5.4 Analyse de la phase 6

La phase 5 n'a pas été analysée, car le contenu relatif à cette phase relève des longueurs.

Après avoir fait un rappel sur les conversions d'unités de longueur, l'enseignant M2 donne une définition du concept d'aire :

> *M2: bon, voilà, ça c'était pour faire un rappel. Ensuite, grand 2, les aires*
> *E: attendez, monsieur*
> *M2: l'aire d'une figure (...) Le périmètre d'une figure c'était quoi? c'était le...*
> *E: contour*
> *M2: la longueur*
> *E: la longueur des côtés*
> *M2: la longueur du contour de la figure, et l'aire ça sera quoi?*
> *E: c'est la surface*
> *M2: c'est la surface représentée par le cadre, la portion qui est représentée à l'intérieur de la figure. Alors, l'aire représente la portion du plan qu'elle occupe. (M2 écrit : « II. Aires. L'aire d'une figure représente la portion du plan qu'elle occupe »)*
> *E: c'est quoi une portion?*
> *M2: portion? portion d'une tarte*
> *E: par rapport à quoi?*
> *M2: portion d'une tarte, bah c'est une portion, t'as le plan, t'as la feuille et puis la figure représente une portion de la feuille.*

Le professeur institutionnalise ainsi un élément technologique très important, il définit l'aire d'une « figure » comme « la portion du plan qu'elle occupe ». Cette définition est différente de celle donnée par le manuel scolaire de la collection *multi-math,* 6MU05. Pour ce manuel, « l'aire d'une surface mesure son étendue, la portion de plan qu'elle occupe ».

La première différence concerne le fait que l'enseignant M2 parle de l'aire d'une « figure » et le manuel de l'aire d'une « surface ». Deuxièmement, pour le professeur M2 « la portion du plan », c'est l'aire et pour le manuel c'est la surface. Ainsi, dans la classe du professeur M2, l'aire est définie comme un élément géométrique et dans le manuel Multi-math 6MU05 comme une mesure ou une grandeur

Une troisième définition est donnée par le manuel de la collection Diabolo : « l'aire d'une surface correspond à l'étendue de la surface ». Cette caractérisation de l'aire correspond plutôt à une conception de l'aire en tant que grandeur.

Dans la définition, le professeur M2 utilise le mot « portion », lequel n'est pas compris par un élève. Le professeur lui explique alors que la figure « représente une portion de la feuille ». On remarque que l'aire et la figure semblent apparaître comme des concepts analogues. Cela renforce le fait que dans la classe de 6e du professeur M2, l'aire est considérée comme une notion très proche de la notion de surface. Ainsi le discours du professeur met en avant une conception géométrique de l'aire. On se demande alors si les unités d'aire dessinées comme des carreaux ou des rectangles gris représentent une aire ou une surface.

5.5 Analyse des phases 7 et 8

5.5.1 Institutionnalisation de la technique τ_{DE}

L'enseignant M2 propose l'activité 2, où il s'agit de calculer l'aire de la figure F suivante :

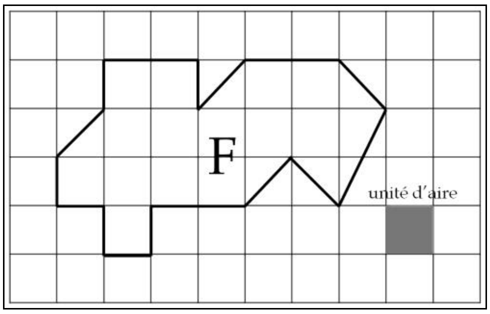


Figure 8-34. Dessin activité 2, séance 4, 6e, M2

Elle est travaillée dans le cahier « cours » après l'institutionnalisation de la notion d'aire. Comme nous l'avons vu précédemment, le professeur M2 avance la technique de dénombrement d'unités et de sous-unités depuis le début du chapitre, nous pensons que le fait de mettre cette technique dans le cahier cours représente l'institutionnalisation de cette technique. Le professeur M2 présente l'activité 2 aux élèves comme suit :

> *M2: allez, vous allez faire une figure, vous allez essayer de respecter celle que je vais faire au tableau, donc en respectant les carreaux, comme ça on aura tous la même chose (M2 dessine la figure F)*
> *E: monsieur, on est obligé de le faire à la règle?*
> *Es : (Elèves dessinent la figure dans leurs cahiers)*
> *M2 : et cette figure vous l'appelez F comme figure. (M2 écrit au tableau: la figure F a une aire de ...)*
> *M2: allez vous comptez la... retrouver l'aire de cette figure (les élèves travaillent)*

Dans la phase 8, il s'agit de corriger l'activité2 L'enseignant M2 corrige collectivement le calcul l'aire de la figure F, nous appellerons cette tâche t_F. Elle concerne le type de tâches $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface. Dans le discours du professeur M2, on voit que la technique est suggérée aux élèves, ils doivent « compter », c'est-à-dire, la technique visée pour résoudre t_F est la technique τ_{DE}, dénombrement d'unités. Ainsi, le milieu est constitué du dessin fait par M2 au tableau et des consignes, mais aussi de la technique évoquée par le professeur M2 pendant la présentation de l'activité 2 et du milieu précédent.

5.5.2 Des difficultés pour le comptage de sous-unités

La réponse et les explications relatives à l'activité 2 sont entièrement à la charge de l'enseignant M2 :

> *M2: bon, Laura, non pas Laura, Ian, 1,2,3,4....5,6,7...8,9,10,11,12,13, ça c'est tous les complets, d'accord?*
> *E: non monsieur, il vous en manque 1*
> *E: vous avez oubliez 1*
> *E: à gauche! à gauche!*
> *M2: 14 quand même 14, plus... celui-là avec celui-là, les quatre*
> *E: 15 et 16*
> *M2: 16 d'accord ? Cette partie là...*
> *E: ça fait 2*
> *M2: cette partie là...*
> *E: ça fait 1*
> *M2: c'est la moitié de ça, donc c'est la moitié de 2, donc c'est 1. Donc on est à 17 et il reste cette moitié là, donc ça fait 17 et demi (M2 écrit 17,5). D'accord, vous voulez que je reprenne?*
> *E: oui*
> *M2: alors, on a dit cela 1,2,3,4,5,6,6,8,9,10,11,12,13,14 tous ce qui est complet, donc c'est 14 déjà. Cette moitié et cette moitié ça fait 1, 15. Cette moitié avec cette moitié 16, cette moitié on peut pas la mettre une autre moitié parce que ça c'est pas une moitié et ça non plus*
> *E: on peut la mettre là*
> *M2: la mettre où, là? Non, il me reste ça à moi, il me reste ça. Là j'ai une moitié, mais là j'ai pas une moitié, je suis embêté, par contre il faut raisonner comme ça: ça c'est partie là, cette partie qui est ici, c'est la moitié de ce rectangle, or ce rectangle fait deux carreaux, donc cette partie hachurée c'est un carreau, donc ça fait 17, plus la moitié de carreau ça fait 17 et demi. ///*

Voici un schéma du comptage[5] fait par le professeur M2 :

[5] Les numéros ont été ajoutés par nous pour montrer la série des gestes faite par M2 pendant le comptage.

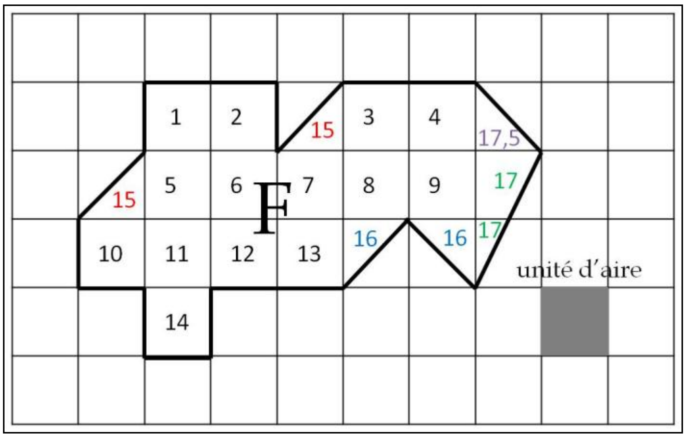


Figure 8-35. Schéma représentant le comptage réalise par M2 dans l'activité 2

L'enseignant M2 compte les unités d'aires entières (1-14), ensuite il compte les moitiés d'unités d'aire (15-16), après il réalise un recollement entre deux fractions d'unités d'aire pour obtenir 1 unité d'aire (17), pour finalement compter une autre demi-unité (17,5). Il se conclût alors que l'aire de la figure F est de « 17,5 □ ». Ainsi, une fois de plus, le contrat d'écriture admet le symbole « □ » comme unité d'aire.

Le dénombrement d'unités entières ne pose pas des problèmes aux élèves, les demi-unités ne présentent pas ici des difficultés pour les élèves. Par contre, les sous-unités différentes des demi-unités sont plus difficiles à repérer. Les élèves semblent penser que toute subdivision d'une unité représente la moitié de l'unité.

La procédure τ_{DE} : dénombrement d'unités et de sous-unités est institutionnalisée par l'enseignant M2 après la définition de l'aire. Dans certaines situations le dénombrement d'unités est la technique utilisée pour calculer l'aire de surfaces et les unités sont les aires de carreaux écrites de la manière suivante « □ ».

5.5.3 *Bilan concernant les phases 7 et 8*

Voici un tableau qui résume l'organisation mathématique mise en place par l'enseignant M2 :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 8	
Bloc théorique-Technologique	La théorie est absente, mais rattachée aux théories de Lebesgue, Mesure
Technique	τ_{DE} : Dénombrement d'unités
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface
Tâches	t_F : Calculer les aires de la surface F

Tableau 8-5. Organisation mathématique ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 7 et 8

En continuité avec l'activité 1, l'enseignant M2 propose à nouveau le type de tâches $T_2(aires)$, où la surface est dessinée sur un quadrillage. Il cherche ainsi à travailler la technique de dénombrement d'unités et de sous-unités τ_{DE}.

L'organisation didactique ponctuelle peut se résumer de la manière suivante :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 8	
Moment didactique	Institutionnalisation
Contrat didactique	τ_{DE} est la technique étudiée pour résoudre $T_2(aires)$, « il faut compter » Les unités d'aire sont les carreaux « □ »
Milieu	La technique à utiliser est donnée par M2 M2 dénombre avec son doigt les carreaux comptés
Topos	La résolution de t_F et l'institutionnalisation de τ_{DE} sont à la charge de M2
Temps didactique	Institutionnalisation de la technique τ_{DE}, après plusieurs problèmes analogues à t_F et après la définition d'aire

Tableau 8-6. Organisation mathématique ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 7 et 8

A différence des autres phases, dans la phase 7, l'enseignant M2 indique bien qu'il faut compter les carreaux. Ainsi, l'objectif du professeur M2 est d'institutionnaliser le dénombrement d'unités. Par contre, le statut du « □ » n'est toujours pas défini, ce symbole peut être considéré comme une surface ou une aire. Autant dans les réponses des élèves qu'au niveau de l'institutionnalisation du professeur, cette utilisation est validée par l'enseignant M2.

5.6 Bilan concernant la séance

L'objectif de l'enseignant M2 dans cette séance est d'institutionnaliser la technique de dénombrement d'unités et de sous-unités τ_{DE} dans les exercices avec du quadrillage. Pour ce faire, il propose différentes tâches du type $T_2(aires)$ dans un milieu matériel favorisant l'utilisation de cette technique. Cette utilisation technique est présentée comme naturelle et connue aux élèves, elle a déjà été travaillée dans la séance précédente sans être institutionnalisée et parce qu'elle est l'une des techniques emblématiques de l'école élémentaire. Ainsi, l'étude de l'aire dans cette classe de 6^{e} commence avec l'exploitation des techniques employées à l'école élémentaire : le découpage-recollement τ_{DR} et le dénombrement d'unités τ_{DE}. D'après notre analyse des organisations mathématiques relatives à l'aire, la première de ces techniques relève du cadre géométrique et la deuxième du cadre des grandeurs. Dans cette séance, l'aire est placée par l'enseignant M2 dans ces deux cadres. En effet, d'un côté le professeur M2 considère l'aire comme une portion du plan et d'un autre côté, il met en avant l'aire comme la quantité d'unités nécessaires pour recouvrir une surface. Cependant, l'emploi des unités reste ambigu dans l'enseignement du professeur M2, car les unités sont présentées à travers le symbole « □ » ou parfois avec le mot « unités ». Cela peut renforcer une conception d'aire comme surface.

6. Analyse d'une séance de la classe de 5e : La formule d'aire du losange

Cette séance du chapitre « Aires » porte sur des rappels à propos des aires du triangle et des quadrilatères et sur l'introduction de l'aire du losange[6]. Elle est la première séance du chapitre « Aires », nous l'avons analysée à partir des notes d'observation, des enregistrements audio et des cahiers des élèves.

La séance 1 ne commence qu'après 4 minutes, pendant lesquelles le professeur donne les moyennes de l'année aux élèves. Les élèves sont ensuite amené, dans une première période, à travailler sur une activité de calcul de l'aire de surfaces complexes composées par des triangles et rectangles (17 minutes), cette activité comporte 2 aires à calculer. Puis, dans une deuxième période, le professeur propose une autre activité qui porte sur l'aire du losange (25 minutes). Ce problème est organisé en deux parties : construire un rectangle à partir d'un losange et calculer l'aire du losange.

6.1 La trame de la séance

Nous proposons une trame de la séance en faisant apparaître un découpage temporel et en précisant les différentes tâches proposées aux élèves, lesquelles vont constituer les phases décrites ci-dessous.

- Phase préliminaire (0 à 3 minutes) : L'entrée de la classe et communication des moyennes de l'année

Le professeur informe aux élèves sur leurs moyennes de l'année.

Première période

- Phase 1 (fin de la minute 3 à début minute 6) : Introduction du chapitre

Le professeur rappelle les contenus déjà vus en sixième et explique quels seront les nouveaux savoirs à étudier dans le chapitre.

[6] La transcription de cette séance est présentée dans l'annexe F

- Phase 2 (minute 6) : Présentation de l'activité 1 et établissement des consignes du travail

Le professeur distribue la feuille qui contient l'activité 1 et explique les consignes du travail : « Bon, je vous donne la première partie, vous collez ça sur votre cahier d'exercices, c'est un rappel de 6e, je vous laisse quelques minutes ».

Les élèves doivent calculer l'aire des deux surfaces composées par des triangles et des rectangles. Ci-dessous la feuille contenant les données et les consignes de l'activité 1 :

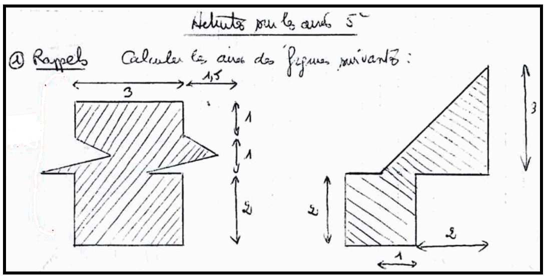


Figure 8-36. Activité 1, séance 1, 5e, M2

Cette activité concerne deux tâches relatives à deux surfaces S_a et S_b. Nous les appellerons t_a^1 et t_b^1.

- Phase 3 (minute 7 à fin minute 14) : Travail des élèves sur l'activité 1

Les élèves travaillent individuellement, le professeur répond des questions à chaque élève.

Après 3 minutes, le professeur dessine les figures au tableau.

- Phase 4 (minute 15 à fin minute 16) : Correction du calcul de l'aire de la surface S_a par le professeur

Cette phase commence par la correction du travail de la première surface de l'activité 1 par le professeur. Ensuite, les élèves reconnaissent un rectangle dans la nouvelle figure et ils distinguent aussi ses mesures. Finalement, le professeur demande la formule pour calculer l'aire d'un rectangle.

- Phase 5 (minute 17 à minute 20) : Correction du calcul de l'aire de la surface S_b par un élève et par le professeur

Le professeur commence cette phase en faisant reconnaître aux élèves les figures qui composent la deuxième surface de l'activité 1, puis il appelle un élève au tableau. L'élève calcule l'aire du triangle et du carré avec les formules, et ensuite il les additionne.

Dans cette phase, on retrouve aussi une discussion sur l'absence des codages dans les figures. Le professeur justifie que le quadrillage n'est pas apparu sur les copies, à ce qu'un élève répond : « On a pas la preuve que c'est un quadrillage ».

Deuxième période

- Phase 6 (minute 20) : Passation feuille activité 2 et consignes

Le professeur explique que l'activité porte sur l'aire du losange et il donne les consignes du travail, qui sont les mêmes que celles de l'activité 1.

L'activité 2 est composée de deux parties relativement à deux tâches. Dans la première, il s'agit de construire un rectangle à partir d'un losange par découpage et recollement. Ensuite, dans la deuxième partie, les élèves doivent calculer l'aire du losange. On peut observer ci-dessous les données et les consignes de l'activité 2 :

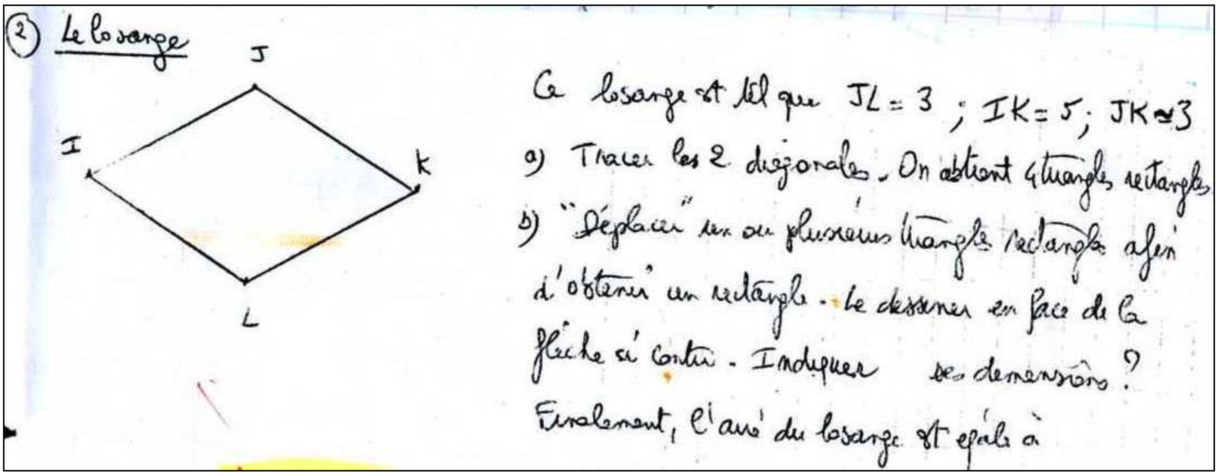


Figure 8-37. Activité 2, séance 1, 5e, M2

- Phase 7 (minute 21 à minute 30) : Travail des élèves sur l'activité 2

Les élèves travaillent individuellement comme dans l'activité 1, le professeur contrôle leur travail.

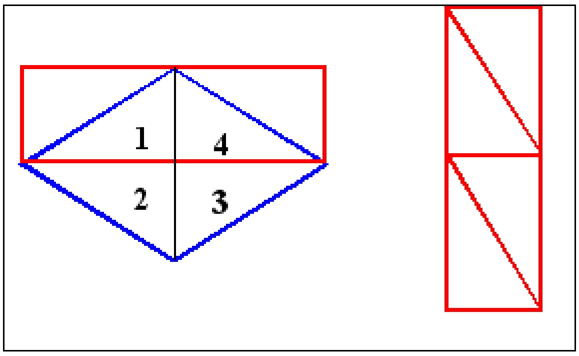
- Phase 8 (minute 30 à minute 35) : Correction par un élève de la première tâche avec des interventions du professeur

L'élève donne une première possibilité de recollement. Le professeur fait remarquer aux élèves qu'il existe plusieurs manières de décoller et recoller le losange pour former un rectangle. L'élève commence ainsi un deuxième exemple qui est fini par l'enseignant.

- Phase 9 (minute 36 à fin minute 37) : Correction de la deuxième tâche par le professeur

Le professeur calcule l'aire du rectangle avec une formule. Pour expliquer le calcul, il utilise des couleurs différentes :

> *« si vous prenez le bleu qui est là, là vous avez 1, 2, 3 d'accord? Et ici vous avez 1, 2, et demi d'accord? Ou alors si vous prenez le rouge, le rouge ça va vous donner 1, 2, 3, 4 ; 5 et 1 et demi. Ça dépend de la figure comme vous l'avez obtenue, soit le rectangle bleu qui vous donne 3 X 2,5, soit le rectangle rouge qui vous donne 5 X 1,5, en total ça vous fait combien? »*



- Phase 10 (minute 38 à minute 44) : Institutionnalisation de la formule d'aire d'un losange

Le professeur met en relation les diagonales du losange avec les côtés du rectangle, en posant des questions aux élèves. Les élèves répondent :

> *« M2 : Maintenant, si je regarde précisément, c'était quoi le 5 dans mon losange ?*
> *Elève : C'était les deux parties mises à côté, la diagonale, la diagonale !!!*
> *M2 : C'était la longueur de la grande diagonale. C'était ça, d'accord, et si je regarde cette formule là, donc le 5 c'est la longueur de la grande diagonale et le 1,5 ? »*

Après avoir mis en relation les diagonales et les côtés des rectangles obtenus, le professeur demande aux élèves s 'il existe une formule pour calculer l'aire d'un losange :

> *« c'est que vous faites, la petite diagonale multipliée par la moitié de la grande diagonale. Donc est-ce que vous pouvez trouver une formule qui permet de calculer l'aire d'un losange ? »*

Finalement, il copie la formule sur le tableau : Aire du losange= $\frac{D \times d}{2}$

- Dernière phase (minute 45) : Sonnerie et sortie

Le professeur demande aux élèves de sortir leurs cahiers de cours : « On va vraiment commencer », mais la sonnerie interrompt le professeur et les élèves sortent.

Le schéma ci-dessous qui résume la trame de la séance :

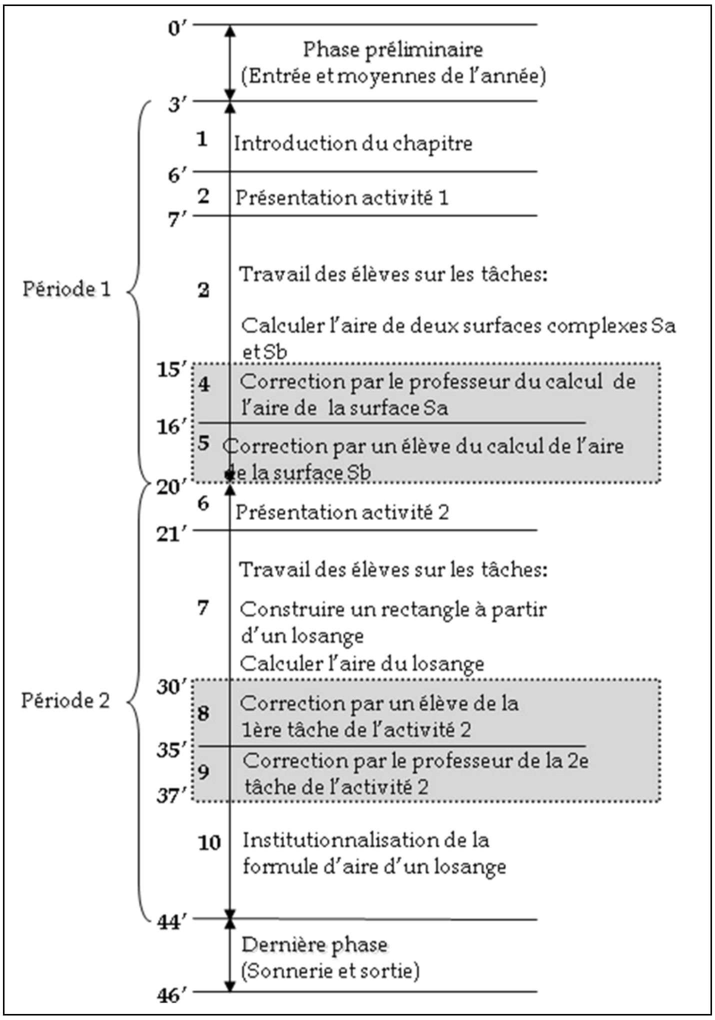


Figure 8-38. Trame de la séance 1 en classe de 5e

Dans la suite, nous nous intéresserons aux organisations mathématiques et didactiques mises en place par l'enseignant M2 pendant le déroulement de la séance 1, nous les avons analysées par phase.

6.2 Analyse de la phase 1

L'enseignant M2 commence le cours en introduisant les contenus du chapitre :

« M2: Alors dans ce chapitre on va rappeler très rapidement// on va ajouter à ça l'aire du losange, qu'on verra tout à l'heure, on rejouera après le parallélogramme, le triangle peut être que vous le connaissez déjà xxx et quand on aura ça on va essayer de calculer des surfaces des figures un peu plus complexes. Et après on terminera par les droites particulières que vous connaissez déjà, la médiatrice on a déjà parlé, la bissectrice, on a déjà parlé aussi, la hauteur, on parlera un petit peu et les médianes »

Dans son discours, le professeur évoque le type de tâches $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface, l'objectif de la séance est d'étudier l'aire d'un losange. Le professeur indique les objectifs du chapitre et les contenus qui seront rencontrés postérieurement. En effet, il rappelle les connaissances déjà travaillées et il explique quels seront les types de tâches à résoudre dans cette partie, tout en les mettant en lien avec le chapitre suivant. Ainsi les élèves doivent apprendre à calculer l'aire d'un losange, et dans les séances suivants les aires d'un parallélogramme et d'un triangle.

Ce type de tâches, correspondant à l'organisation mathématique visée, sont conformes aux programmes en vigueur, en lien avec le sujet « Calcul de l'aire d'un parallélogramme », du thème « Aires ».

6.3 Analyse des phases 2 et 3

6.3.1 Analyse a priori des organisations mathématiques

Dans cette partie, nous présentons les organisations mathématiques que l'enseignant M2 veut mettre en place.

- Les types de tâches et les techniques

L'objectif du professeur M2 est d'enseigner aux élèves la formule de l'aire d'un losange, cela est clairement énoncé par le professeur : *« on va ajouter à ça l'aire du losange, on le verra tout à l'heure ».* Le professeur propose deux activités aux élèves. La première a comme but de rappeler les formules des aires d'un rectangle et d'un triangle, ainsi que la technique de découpage-recollement (τ_{DR}) qui seront utilisées pour résoudre la deuxième activité. Ainsi, son objectif est la mise en place d'une organisation mathématique ponctuelle relative au calcul de l'aire d'un losange. Pour ce faire, il prévoit une activité relative à une organisation mathématique locale qui concerne le calcul de l'aire des surfaces complexes.

Dans l'activité 1, figure 8-36, nous repérons 2 tâches à réaliser par les élèves :

- t_a^1 : Calculer l'aire de la surface S_a et t_b^1 : Calculer l'aire de la surface S_b

Ainsi, on peut identifier le type de tâches $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface complexe.

Pour résoudre la tâche t_a^1 , la classe peut utiliser une technique que nous décomposerons de la façon suivante :

- Identification de la surface : Elle est constituée d'un rectangle auquel on a découpé deux triangles. Ces triangles sont ajoutés dans une autre partie du rectangle ;
- Découpage-recollement τ_{DR} : on prend les morceaux et on les colle de façon d'obtenir un rectangle ;
- Calcul de l'aire du rectangle τ_{CF} : On utilise la formule pour calculer l'aire du rectangle.

Cette technique sera notée $\tau *_{CF}\ (\tau_{DR})$ dans la suite.

Ensuite pour résoudre la tâche t_b^1, les élèves peuvent utiliser la technique suivante :

- Identification de figures connues τ_{DE} : On voit que la surface complexe est composée par un carré et un triangle ;
- Calcul de l'aire de chaque surface τ_{CF} : On utilise la formule de l'aire du carré et du triangle pour calculer l'aire de chaque surface ;
- Addition des aires.

Cette technique sera notée $\tau *_{CF}\ (\tau_{DE})$ dans la suite.

- Les éléments technologiques

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des aires avec le filtre de grandeurs, les techniques $\tau *_{CF}\ (\tau_{DR})$ et $\tau *_{CF}\ (\tau_{DE})$ prennent appui sur les éléments technologiques suivants : propriété d'additivité de l'aire, invariance de l'aire d'une figure après un découpage-recollement, formules des aires de figures planes (triangle, carré, rectangle), opérations avec des nombres décimaux et entiers.

6.3.2 Le déroulement des phases 2 et 3

Dans ces phases, on trouve l'apparition du type de tâches $T_2(aire)$ à travers des tâches t_a^1 et t_b^1. Les élèves doivent calculer les aires des surfaces S_a et S_b de la figure 8-36 :

(M2 donne la feuille avec l'activité 1)

M2 : Bon, je vous donne la première partie, vous collez ça sur votre cahier d'exercice, c'est rappel 6e, je vous laisse quelques minutes.

Il s'agit d'un « rappel », c'est-à-dire d'une reprise des sous-types de tâches de 6e, calculer l'aire d'un rectangle (ou carré) et calculer l'aire d'un triangle rectangle. Les élèves ont quelques minutes pour travailler sur l'activité 1. Le travail est individuel et complètement à la charge des élèves. Ils utilisent leurs connaissances de 6e et les dessins de la feuille qui vont constituer le milieu de cette situation. Par contre, le milieu matériel ne permet pas de repérer sans ambiguïté les types des surfaces présents sur la feuille, car on ne voit pas des codages. Les élèves reconnaissent de manière visuelle les surfaces. De plus, les unités de longueur ne sont pas données.

6.4 Analyse de la phase 4

Nous rappelons que la phase 4 concerne la correction du calcul de l'aire de la surface S_a. La figure S_a est dessinée par le professeur au tableau et il apporte une partie de la technique de résolution aux élèves à travers de son discours.

6.4.1 Le contrat didactique concernant les unités

Le professeur M2 calcule l'aire de la surface S_a au tableau :

M2: il y a des choses qu'on peut observer, que ce point qui est là, on peut le mettre ici, du coup ça déplace plus et là c'est complet. D'accord? Et pareil pour l'autre partie, celle-ci on peut la mettre ici, donc j'ai plus de point et là c'est complet. Je me retrouve avec un ...

Es: rectangle

M2: qui mesure combien sur combien?

E1: 4 sur 3

M2: 3 sur 4, donc l'aire... comment on fait pour calculer l'aire du rectangle? // Longueur par largeur, shut la longueur c'est...

E: 3

M2: 3? Alors la longueur c'est la plus grande, alors c'est...

Es: 4

M2: 4, la largeur?

E: 3

M2: 3, la réponse xxx est 12 rien d'autre. Si par contre, il y avait l'unité, parce que effectivement cette figure, elle est au départ en centimètres. S'il y avait une unité, il faut mettre quoi derrière?

Es: centimètres carrés

M2: centimètres carrés, vous êtes en dimension 2, donc centimètres carrés d'accord. Soit vous *mettez rien parce qu'il a rien au départ, et c'est 12 sans rien. Soit s'il y a l'unité c'est l'unité qui doit avoir le carré, parce que ça c'est 4cm fois 3 cm donc le cm*

Dans les premières lignes, on observe que le professeur M2 applique un découpage-recollement (τ_{DR}) à la surface S_a pour obtenir un rectangle. Ensuite, il calcule l'aire du rectangle avec une formule ($\tau *_{CF}$). Une particularité de cette technologie mise en place par l'enseignant M2 est que les opérations portent sur les mesures et non sur les grandeurs (avec les unités). Ainsi pour résoudre cette tâche t_a^1, le professeur écrit :

$$\boxed{Aire = L \times l = 4 \times 3 = 12}$$

C'est-à-dire, les calculs se font dans le cadre numérique. D'ailleurs, on a vu que les unités n'apparaissent pas non plus sur les dessins.

Le contrat didactique concernant les unités est établi à la fin de l'extrait : si dans le problème les mesures des longueurs sont données sans les unités, la réponse doit s'écrire sans les unités, par contre si dans l'exercice les longueurs sont données avec les unités, les élèves doivent mettre les unités. Ainsi, il complète les calculs avec les centimètres :

$$\boxed{Aire = L \times l = 4cm \times 3cm = 12cm^2}$$

De plus, le fait de mettre « cm² » est justifié par la dimension de travail, c'est-à-dire la dimension 2.

6.4.2 *Place de l'aire en tant que grandeur*

Il est très clair que l'enseignant n'utilise pas dans les calculs les unités. Dans les formules la classe travaille avec des mesures, et les réponses sont données aussi sur cette forme. Ainsi les grandeurs dans les calculs de la classe de M2 n'interviennent pas.

Ils n'interviennent pas non plus comme des caractéristiques des objets mathématiques, les côtés des figures sont des nombres sans unités. Alors, quelle signification peut-on donner à ces nombres dans la figure ? Où trouve-t-on donc les grandeurs ? Des petites traces existent dans les techniques relatives à certains types de tâches. D'une part le découpage-recollement fait appel à la propriété d'invariance de l'aire par isométrie, et d'une autre part la technique de décomposition est justifiée par la propriété d'additivité de la mesure. Pour que les élèves utilisent ces deux techniques, il est nécessaire qu'une conception de grandeur correspondante à l'aire.

La justification de ces deux techniques n'est pas abordée par l'enseignant. Il semble qu'elles se présentent comme naturelles chez les élèves. Peut être, du fait que ce type de travail est très pratiqué en classe de 6e, comme nous l'avons vu dans l'analyse de la séance 4 de ce niveau.

6.4.3 *Bilan concernant la phase 4*

Nous résumons l'enseignement de M2 du point de vue des organisations mathématiques dans le tableau suivant :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 4	
Bloc théorique-Technologique	Mesure, nombres, équidécomposabilité, pas d'unités, formules
Technique	$\tau*_{CF}\ (\tau_{DR})$: Utilisation de la formule d'aire d'un rectangle après découpage-recollement
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface
Tâches	t_a^1 : Calculer les aires de la surface S_a

Tableau 8-7. Organisation mathématique mise en place par M2 dans la phase 4

L'organisation mathématique mise en place par le professeur M2 relève plutôt du cadre numérique. Les mesures sont très présentes et la formule est l'élément technologique principal.

Pour résumer l'organisation didactique, nous nous servons du tableau suivant :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 4	
Moment didactique	Construction du bloc technologique-théorique nécessaire pour travailler l'activité 2
Contrat didactique	Quand les longueurs de côtés sont données avec les unités, on répond en cm² et quand on ne donne que les mesures, on répond sans unités
Milieu	Le milieu est construit par M2, M2 présente la première partie de la technique $\tau*_{CF}\ (\tau_{DR})$ et il questionne les élèves pour les amener vers la deuxième partie de la technique
Topos	Le calcul de l'aire de la surface S_a est presque complètement à la charge du professeur
Temps didactique	Il s'agit d'un rappel de la classe de 6e

Tableau 8-8. Organisation didactique mise en place par M2 dans la phase 4

Dans son discours, l'enseignant M2 signale qu'il s'agit des problèmes traités en classe de 6e. Cela semble conduire le professeur à prendre plus de responsabilités dans la correction de l'activité 1, car son objectif vise plutôt les apprentissages relatifs à la deuxième activité.

Nous avons vu que le contrat didactique en classe de 6e relativement aux unités est confus. En classe de 5e, ces difficultés sont toujours présentes, des réponses avec et sans unités sont considérées comme correctes par le professeur M2.

6.5 Analyse de la phase 5

6.5.1 *Quelle géométrie en classe de 5e ?*

Dans cette phase, la classe corrige la tâche t_b^1. L'aire de la surface S_b de l'activité 1 est donnée par un élève au tableau et validée par le professeur. L'élève calcule l'aire du « carré » et du triangle « rectangle » et additionne les deux aires :

2 x 2 = 4   3 x 3 = 9
             9:2 = 4,5
   4 + 4,5 = 8,5

Les calculs sont réalisés sans les unités, ils sont validés par l'enseignant M2. Cependant l'absence des codages et la validité des procédures utilisées sont discutées par un élève qui questionne aussi l'absence du quadrillage :

M2: la réponse finale c'est 8,5. Ça c'est pour le carré, ça c'est pour le triangle rectangle et ça c'est la réponse finale. Donc partez du principe qu'il y avait bien un quadrillage derrière, donc il y avait bien un angle droit pour le rectangle et il y a bien un carré en bas à droite

E: xxx quadrillage xxx

M2: bah, si on commence à se poser ce genre de questions, après on s'en sort plus

E1: mais vous nous avez dit de toujours poser de questions comme ça

M2: C'est vrai, xxx on part du principe que cet un quadrillage, c'est là qu'il est pas passé

E1: On a pas la preuve que c'est un quadrillage

M2: C'est vrai, donc on peut pas le faire. Mais vous avez raison, vous avez tout à fait raison

Le contrat didactique basé sur la géométrie concrète et sur la reconnaissance visuelle des surfaces planes est rejeté. En effet, dans un premier instant, les figures étaient faites sur du quadrillage, qui n'est pas sorti sur les photocopies, ce qui a changé le milieu matériel prévu par l'enseignant M2. Ainsi, le professeur a dû expliciter à la classe que les figures étaient réalisées sur du papier quadrillé. Les élèves ont pris en compte les flèches comme les côtés entiers ou la moitié des côtés, les nombres comme les mesures de ces côtés et les figures comme un rectangle, un carré et un triangle. Du point de vue mathématique, les élèves sont donc dans un contrat où les validations se feront avec des outils concrets, mais ce contrat ne correspond pas à une classe de 5e. Ainsi, les questions posées par un élève provoquent une reformulation du contrat.

À travers cette situation, on voit l'importance d'établir un contrat didactique relatif au traitement des unités et à la représentation des surfaces de manière claire. D'un côté, au collège, on passe d'une géométrie concrète à une géométrie plus « abstraite », ainsi les mesures des grandeurs peuvent être ou pas représentées en vraie grandeur ou proportionnellement. D'un autre côté, les unités de mesure doivent être explicitées dans le problème, même si elles disparaissent dans les calculs.

6.5.2 *Bilan concernant la phase 5*

Comme nous l'avons vu dans la première partie de l'activité 1, l'enseignant a comme objectif de réactiver les connaissances nécessaires pour travailler l'activité 2, pour ce faire il met en place l'organisation mathématique suivante :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 5	
Bloc théorique-Technologique	Mesure, nombres, propriété d'additivité, pas d'unités, formules
Technique	$\tau^*_{CF}\ (\tau_D)$: Utilisation de la formule d'aire d'un rectangle après décomposition
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface
Tâches	t_b^1 : Calculer les aires de la surface S_b

Tableau 8-9. Organisation mathématique mise en place par M2 dans la phase 5

Dans l'activité 1, les longueurs sont données comme des mesures sans les unités et la tâche est résolue aussi sans les unités. Ainsi les éléments technologiques relèvent du cadre numérique. L'organisation didactique est résumée dans le tableau suivant :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans la phase 5	
Moment didactique	Construction du bloc technologique-théorique nécessaire pour travailler l'activité 2
Contrat didactique	Il est redéfini au cours de la séance, car le milieu matériel prévu par M2 n'est pas installé
Milieu	Le milieu matériel prévu pour l'enseignant était une feuille avec un quadrillage, mais ce dernier n'est pas sorti dans les photocopies. M2 doit apporter cette information aux élèves
Topos	La réponse est donnée par un élève, mais ensuite l'enseignant M2 prend la responsabilité à cause du problème de quadrillage
Temps didactique	La tâche est un rappel de 6e, elle servira à traiter l'activité 2

Tableau 8-10. Organisation didactique mise en place par M2 dans la phase 5

Quand le professeur M2 propose l'activité 1, sans le quadrillage, il ne donne pas d'importance au fait que les unités n'apparaissent pas dans la figure. En effet, les unités devraient être données par le milieu matériel, absence due à un problème des photocopies. Ainsi, les unités ont disparu de l'activité. L'enseignant reprend donc le contrat didactique concernant les unités et les codages suite au questionnement d'un élève. Le fait de travailler dans un cadre numérique en 5e conduit l'enseignant M2 à concentrer l'étude sur les nombres et oublier les unités, et donc les grandeurs.

6.6 Analyse des phases 6 et 7

6.6.1 Analyse a priori des organisations mathématiques

Avec l'activité 2, présentée comme dans la figure 8-36, l'enseignant souhaite que les élèves trouvent et justifient la formule d'aire d'un losange. Cette activité est composée des tâches suivantes :

t_a^2 : Construire un rectangle à partir du losange de l'activité 2 et t_b^2 : Calculer l'aire de ce losange

Ainsi, on peut identifier le type de tâches $T_2(aire)$: Calculer l'aire d'une surface complexe et $T*$: Construire un rectangle à partir d'un losange.

La technique possible pour traiter la tâche t_a^2 est :

- Découpage-recollement τ_{DR} : On trace les diagonales du losange et on obtient 4 triangles, et avec eux on forme un rectangle

Finalement, les techniques associées à la tâche t_b^2 sont :

- Calcul de l'aire du losange $\tau*_{CF}$: On calcule l'aire du rectangle obtenu à partir du losange par découpage-recollement avec la formule d'aire du rectangle

Pour l'activité 2, les éléments technologiques sont relatifs aux techniques τ_{DR} et τ_{CF} : invariance de l'aire d'une figure après un découpage-recollement, formules des aires de figures planes (rectangle), opérations avec des nombres décimaux et entiers.

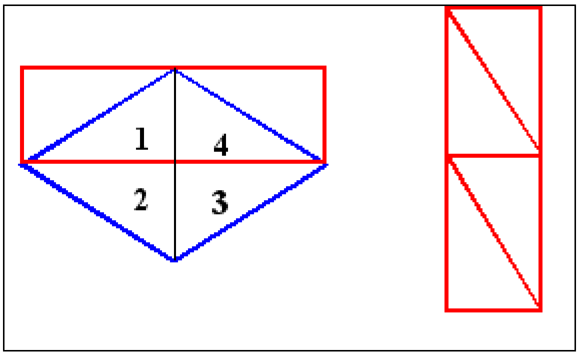
6.6.2 Les organisations mathématiques mises en place

Pour résoudre le type de tâches « construire un rectangle à partir d'un losange », la technique est proposée par le professeur, sur la feuille d'exercices il est spécifié que les élèves doivent « tracer les deux diagonales pour obtenir 4 triangles rectangles ». C'est à partir de ces triangles rectangles que les élèves doivent construire un rectangle. La procédure à utiliser est explicitée dans la feuille, ils doivent « déplacer » les triangles rectangles. Ainsi, c'est une procédure de découpage-recollement (τ_{DR}) proposée directement par le professeur M2.

Ensuite, les élèves sont confrontés au type de tâches « calculer l'aire d'un losange ». Ils connaissent la mesure du côté du losange et les mesures des diagonales, mais une fois de plus les unités ne sont pas précisées.

L'activité proposée par l'enseignant vise la mise en place d'un élément technologique, la formule d'aire d'un losange, lequel est un objectif de 5^{e}. Par contre, le travail des élèves ne correspond pas à cet objectif comme on le voit dans l'extrait suivant :

M2: si vous prenez le bleu qui est là, là vous avez 1, 2, 3 d'accord? Et ici vous avez 1, 2, et demi d'accord? Ou alors si vous prenez le rouge, le rouge ça va vous donner 1, 2, 3, 4,5, et 1 et demi.



Ça dépend de la figure comme vous l'avez obtenue, soit le rectangle bleu qui vous donne 3 X 2,5, soit le rectangle rouge qui vous donne 5 X 1,5, en total ça vous fait combien?

E1: 7,5

Aire du losange = 3 x 2,5
= 5 x 1,5
= 7,5

Ainsi, les techniques mises en œuvre par les élèves pour la tâche t_a^2 sont :

- Tracer les diagonales d'un losange
- Construire un rectangle à partir d'un losange et indiquer ses dimensions

Et pour la tâche t_b^2

- Utilisation du rectangle construit
- Calculer l'aire du rectangle

Les élèves doivent ensuite en déduire la formule d'aire d'un losange pour arriver à la connaissance espérée, mais la formule n'apparaît pas dans les procédures, ils se ramènent à l'utilisation de la formule d'aire d'un rectangle. De plus, les mesures des longueurs sont données comme des nombres et non comme des variables exprimées par des lettres, les élèves n'ont donc pas besoin de mettre en relation l'aire d'un losange et d'un rectangle et cet objectif n'est pas explicité aux élèves. Ainsi le milieu et la dévolution de la formule de l'aire du losange n'amènent pas les étudiants à construire la connaissance visée, cette construction est à la charge du professeur.

6.6.3 Bilan concernant les phases 6 et 7

Nous résumons l'organisation mathématique ponctuelle mise en place par élèves dans les phases 6 et 7 :

OM ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 6 et 7	
Bloc théorique-Technologique	Mesure, nombres, équidécomposabilité, pas d'unités, formules
Technique	$\tau*_{CF}\ (\tau_{DR})$: Utilisation de la formule d'aire d'un rectangle après découpage-recollement
Types de tâches	$T_2(aires)$: Calculer l'aire d'une surface (rectangle) $T*$: Construire un rectangle à partir d'un losange.
Tâches	t_a^2 : Construire un rectangle à partir du losange de l'activité 2 t_b^2 : Calculer l'aire de ce losange

Tableau 8-11. Organisation mathématique mise en place par M2 dans les phases 6 et 7

L'organisation mathématique mise en place par le professeur M2 relève plutôt du cadre numérique. Les mesures sont très présentes et les unités complètement absentes dans l'activité et dans les calculs. L'objectif de l'activité 2 porte sur l'élément technologique « formule du calcul d'aire d'un losange ». Mais ce dernier n'apparaît pas dans l'organisation mathématique ponctuelle mobilisée par les élèves.

6.7 Analyse des phases 8, 9 et 10

6.7.1 L'institutionnalisation de la formule d'aire d'un losange

Un élève donne l'une des possibilités de construction du rectangle à partir du losange IJKL. Une autre possibilité est proposée par l'enseignant. Ces deux configurations seront présentées dans les analyses des phases suivantes.

Comme nous l'avons vu, la formule de l'aire d'un losange n'apparaît pas dans l'organisation mathématique effective chez élèves. Ainsi l'enseignant M2 tente une certaine dévolution du problème de la formule à travers son discours. La formule d'aire du losange apparaîtra seulement comme un élément technologique après l'institutionnalisation faite par le professeur M2 :

M2: Donc là vous êtes ramenés, xxx le losange, je déplace les morceaux pour obtenir un rectangle, parce que je sais calculer l'aire d'un rectangle. Maintenant, si je regarde précisément, c'était quoi le 5 dans mon losange?
E1: C'était les deux parties mises à côté, la diagonale, la diagonale!!!
M2: c'était la longueur de la grande diagonale. C'était ça, d'accord, et si je regarde cette formule là donc le 5 c'est la longueur de la grande diagonale et le 1,5 c'est quoi?
E: la moitié de la petite
M2: la moitié de la petite. Si je regarde cette partie là, d'accord? Si je regarde l'autre partie qui est là, le 3 c'était quoi?
E: C'était la diagonale
M2; la longueur, la longueur de la plus petite diagonale et le 2,5 c'est la...
E: la moitié de la grande diagonale
M2: la moitié de la grande diagonale, la moitié de la longueur de la grande diagonale, c'est que vous fait, la petite diagonale, multipliée par la moitié de la grande diagonale. Donc est-ce que vous pouvez trouver une formule qui permet de calculer l'aire du losange? En cas général ///
E: xxx
M2: donc je prends la longueur de la grande multipliée par la petite, et après xxx, donc je multiplie les diagonales et je divise par 2/// Et en quoi le côté du losange va me servir pour calculer l'aire?
E: jamais

Même si la tâche ne permet pas aux élèves d’en déduire la formule de l’aire d’un losange par eux-mêmes, elle peut apparaître en acte chez les élèves mettant en relation les côtés d’un rectangle et les diagonales d’un losange pour arriver à la formule cherchée.

L’institutionnalisation de la formule est faite à partir d’un exemple. Ainsi, nous observons un contrat de généralisation d’une formule à partir d’un exemple sans que la formule soit démontrée :

M2 : Donc écrivez dessus, quelque part de votre copie, aire du losange égale D x d/2
(M2 écrit la formule sur le tableau et réexplique la formule)

Si les mesures des longueurs des côtés n’avaient pas été données comme des nombres, la formule aurait pu être généralisée et démontrée. La tâche pourrait être mieux exploitée si des mesures déterminées n’avaient pas été données et si le professeur avait demandé aux élèves de calculer directement l’aire du losange.

6.7.2 *Bilan concernant les phases 8, 9 et 10*

Nous présentons l'organisation didactique mise en place dans les phases 8, 9 et 10 :

OD ponctuelle mise en place par M2 dans les phases 8, 9 et 10	
Moment didactique	Institutionnalisation de la formule de calcul d'aire d'un losange
Contrat didactique	Le professeur pose des questions et les élèves répondent
Milieu	M2 fournit un milieu adéquat pour construire la formule de l'aire du losange à travers son discours
Topos	La responsabilité est à la charge du professeur
Temps didactique	Institutionnalisation d'un élément technologique à la fin de la séance

Tableau 8-12. Organisation didactique mise en place par M2 dans les phases 8, 9 et 10

Comme l'activité 2 ne permet pas la dévolution de l'objectif, soit la formule de l'aire d'un losange, le professeur M2 doit mettre en relation l'aire du rectangle et l'aire du losange à travers son discours, et ainsi institutionnaliser cet élément technologique.

6.8 Bilan concernant la séance

Pour la mettre en place l'organisation mathématique ponctuelle, le professeur M2 utilise un dispositif de travail individuel relativement à une première activité pour réactiver les connaissances de 6^{e}. Ces sont les élèves qui seront responsables de cette activité, mais la validation des réponses est prise en charge par le professeur.

Dans cette première activité, les grandeurs n'apparaissent pas en tant que telles, car les unités ne sont pas données. Par contre, cette activité permet la reprise de la technique de découpage-recollement et la formule du calcul de l'aire d'un rectangle. Ces connaissances sont des reprises (Larguier, 2009) de la classe de 6^{e}, comme on l'a vu dans l'analyse de la séance relativement à ce niveau, et elles sont indispensables pour la mise en place du milieu de l'activité 2.

Même si le milieu est favorable, l'organisation mathématique ponctuelle visée ne sera pas construite par les élèves. Les tâches amènent les élèves plutôt à des activités de découpage-recollement plus qu'un travail direct sur la formule de l'aire d'un losange. Ainsi, la tâche proposée par l'enseignant ne permet pas la dévolution nécessaire pour que les élèves déduisent la formule de l'aire du losange. Dans la mise en commun, le professeur cherche à attraper cette organisation mathématique, en établissant un dialogue avec les élèves. Il les interroge pour mettre en rapport les côtés d'un rectangle et les diagonales du losange. On voit donc qu'en classe de 5^{e}, l'objectif pour le professeur M2 est d'enseigner les formules de calcul d'aire des surfaces planes. Les contenus se placent ainsi dans un cadre numérique, même si elles sont déduites à l'aide des procédures de découpage-recollement, lesquelles sont relatives au cadre géométrique.

L'absence d'unités dans les calculs et sur les dessins fait en partie disparaître la notion d'aire en tant que grandeur. L'objet central d'étude est la formule, autrement dit le travail d'étude des aires s'inscrit dans un cadre numérique et géométrique. La technique de découpage-recollement fait davantage intervenir les grandeurs, mais le professeur ne questionne pas les élèves à ce sujet, il ne propose aucune discussion autour de l'invariance de l'aire par isométries ou par découpage-recollement. Au contraire, il met l'accent sur les résultats numériques obtenus avec les formules.

À un moment donné, le problème des unités est abordé par le professeur. Il explique que les dessins étaient réalisés sur un quadrillage en centimètres. Mais, une fois de plus, le sujet est rejeté, les techniques de calcul sur les grandeurs ne font pas partie de l'enseignement du professeur M2. Le contrat didactique est clair, les calculs se font sans les unités et si on veut les faire apparaître dans les réponses, elles se justifient par la dimension de l'espace de travail : si la dimension est égale à 2, on répond en cm^2, le contrat didactique reste ainsi confus relativement aux unités de mesure.

7. Les connaissances des élèves de 6^e

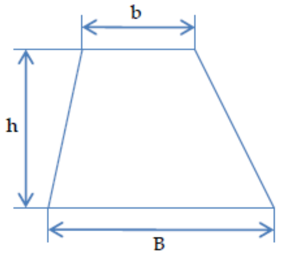
Comme nous l'avons vu, nous avons fait passer deux tests aux classes de 6^e des enseignants M1 et M2. Un pré-test a été fait à la rentrée de l'année scolaire 2010-2011 et un post-test à la fin de la même année. Nous présenterons quelques résultats concernant principalement la classe du professeur M2. Notre objectif est de mettre en relation les rapports personnels des élèves et la pratique du professeur M2. Nous précisons que le post-test a été passé juste après le chapitre « aires et périmètres » dans la classe du professeur M2, en revanche dans la classe du professeur M1, ce test a été passé avant l'enseignement des aires.

7.1 Les formules d'aire

Nous avons proposé deux problèmes qui impliquent l'application des formules d'aire. Dans le pré-test, nous avons demandé aux élèves de calculer l'aire d'un trapèze, mais comme la formule d'aire d'un trapèze n'est pas un objectif de la classe de 6^e, nous l'avons fournie aux élèves dans l'énoncé :

<u>*Problème N°1:*</u>

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule:



$$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze qui vérifie:
B=2,5 cm ; b=1,5 cm ; h=5 cm.

Figure 8-39. Problème 1 du pré-test

À travers ce problème, nous voulions savoir si les élèves peuvent calculer l'aire d'une surface avec une formule, même s'ils n'ont pas la justification de cette formule. Nous souhaitons étudier les compétences des élèves pour résoudre des problèmes de calcul des aires à l'aide des formules sans avoir auparavant travaillé sur les aires en tant que grandeur. Notre choix est justifié par le fait que dans les pratiques d'enseignement, il est assez habituel que les enseignants donnent les formules d'aires des surfaces sans travailler l'aire en tant que grandeur et les mesures des aires.

Il apparaît que, dans la classe de 6^{e} du professeur M2, les élèves n'appliquent pas facilement une formule, le taux de réussite du 25 %. Les résultats montrent ainsi que le passage des longueurs de côtés indiquées sur les dessins au calcul de l'aire avec la formule présente des difficultés chez les élèves. Dans la classe du professeur M2, parmi les élèves qui n'ont pas réussi à calculer l'aire du trapèze, nous relevons :

- 17% du total des élèves qui additionnent les trois longueurs ;
- 38 % du total des élèves qui ne divisent pas par 2.

A la fin de l'année scolaire 2010-2011, nous avons fait passer une question dans le post-test concernant le calcul de l'aire d'un triangle. Les élèves ont travaillé les formules d'aire du carré, du rectangle et du triangle lors du chapitre « aires et périmètres ». Voici la question du post-test :

Problème N°6:

ABCD est un rectangle. Calculer l'aire de la partie hachurée.

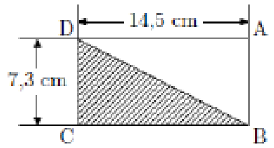


Figure 8-40. Problème 6 du post-test

Les résultats relatifs à cette question ont été très satisfaisants. Les élèves de la classe de 6e du professeur M2 ont obtenu un taux de réussite de 87%, pourcentage largement supérieur à celui de la classe de 6e du professeur M1 (31%) et celui de l'observatoire EVAPM (40% en 1997). Les élèves ont exprimé les calculs de deux manières. La première technique est de multiplier les mesures des côtés du rectangle, soit « 14,5 x 7,3 = 105,85 » et ensuite de diviser par 2, soit « 105,85 : 2 = 52,925 ». La deuxième technique est de faire le calcul à partir d'une seule expression, c'est-à-dire, les élèves écrivent « 14,5 x 7,3 : 2 = 52,925 ».

La première de ces techniques pourrait s'interpréter comme le calcul de l'aire du rectangle ABCD, suivi du calcul de l'aire du triangle BCD comme la moitié de celle du rectangle. Dans les justifications de quelques élèves, nous avons relevé des traces concernant un tel raisonnement :

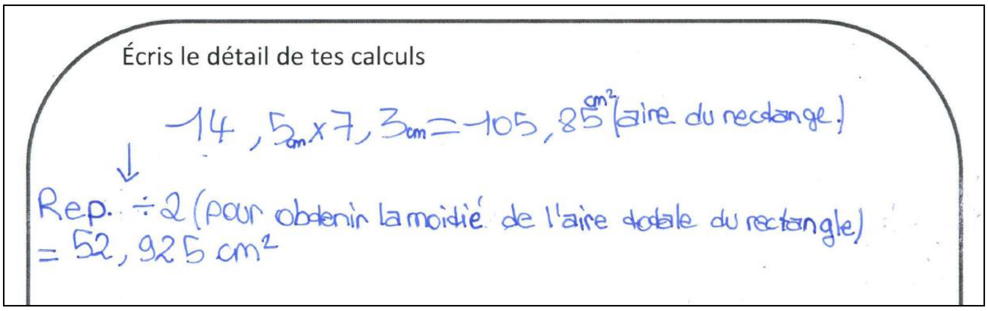


Figure 8-41. Réponse d'un élève au problème 6 du post-test

Cela peut s'expliquer par le fait que l'enseignant M2 a institutionnalisé la formule suivant de l'aire d'un triangle rectangle: « (L x l)/2 », en établissant un lien entre l'aire du rectangle et l'aire d'un triangle rectangle. La justification du calcul de l'aire d'un triangle rectangle comme la moitié de l'aire d'un rectangle est facilement retenue par la plupart des élèves qui l'utilisent sans difficulté dans le problème 7. Nous pensons aussi que le travail sur les aires avec des découpages-recollements, des pavages et de décompositions a favorisé la compréhension de la formule d'aire d'un triangle rectangle, cependant il reste à voir si cette connaissance perdure dans le temps.

7.2 Le comptage d'unités et de sous-unités

Pour observer les procédures de comptage d'unités et de sous-unités (τ_{DE}) et la technique de découpage-recollement (τ_{DR}), nous avons demandé aux élèves de résoudre trois problèmes concernant les aires. Les deux premiers ont été étudiés dans le pré-test, il s'agit du problème 7 et 8, et le troisième du problème 1 du post-test.

- Le problème 7 du pré-test

Nous avons demandé aux élèves de construire une surface de cinq unités carrées :

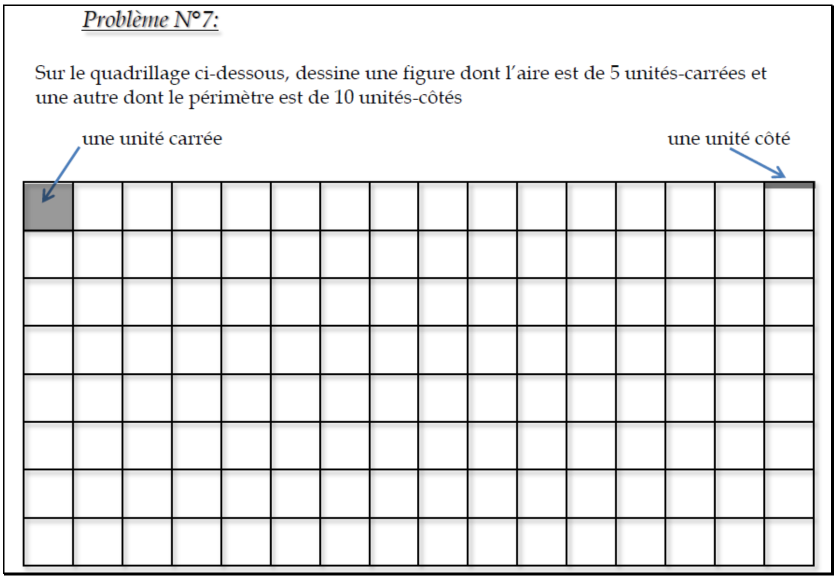


Figure 8-42. Problème 7, pré-test

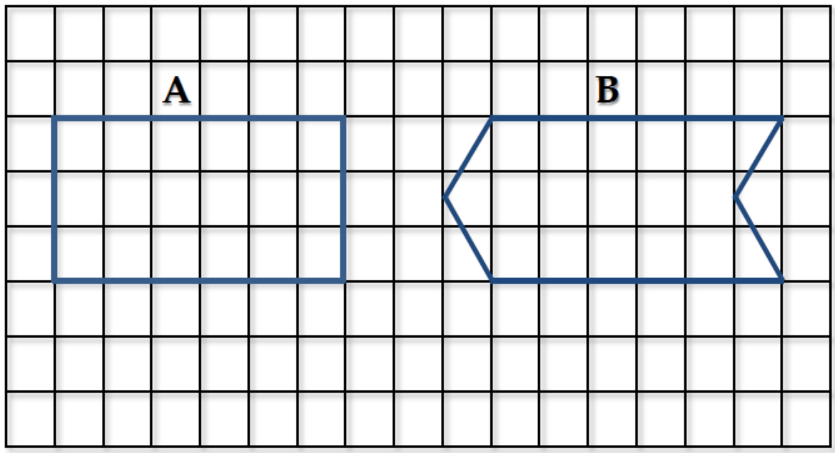
La classe de 6e du professeur M2 a obtenu de très bons résultats, 96% de la classe a dessiné une surface correcte. En comparaison avec la classe de l'enseignant M1 et l'observatoire EVAMP, les élèves ont des meilleurs résultats. Les élèves de la classe de l'enseignant M1 ont un taux de réussite de 67%. Cependant, dans l'observatoire EVAMP 1997 la surface à dessiner était un triangle rectangle, la tâche était beaucoup plus difficile que celle que nous avons posée aux élèves de 6e. Les mauvais résultats indiqués par EVAMP 1997 (47% du taux de réussite) peuvent s'expliquer par le fait que les élèves doivent mobiliser plus des connaissances pour dessiner un triangle rectangle plutôt qu'une surface quelconque. Les bons résultats de la classe de 6e du professeur M2 nous montrent que les élèves maîtrisent la technique de comptage d'unités entières.

- Le problème 8 du pré-test

Le deuxième exercice que nous avons posé aux élèves dans le pré-test concernant les techniques τ_{DE} et τ_{DR} est le problème 8, partie 1) :

Problème N°8:

Observe les deux figures ci-dessous et réponde aux questions.



1. Comparer les aires des figures A et B. (Ont-elles la même aire? Laquelle a l'aire la plus grande? Laquelle a l'aire la plus petite?)

Figure 8-43. Problème 8 1), pré-test

Dans cette tâche, il s'agit de comparer les aires des surfaces A et B. La plupart des élèves de la classe de 6e du professeur M2 ont donné la réponse correcte, c'est-à-dire ils ont écrit que les aires des surfaces A et B sont égales (83%). Le taux de réussite est plus élevé que dans la classe du professeur M1 (42%) et que dans l'observatoire EVAPM 1996 (54%). Cependant, les parties triangulaires de la surface B dans l'observatoire EVAPM sont des demi-cercles.

Dans 58% des cas, nous n'avons pas pu repérer la technique utilisée pour comparer les aires de A et B, car on ne trouve aucune trace dans les copies des élèves. Dans 33% des cas, nous avons observé l'utilisation de la technique de dénombrement d'unités τ_{DE} et dans 8% des cas, les élèves ont utilisé un découpage-recollement et ensuite un comptage d'unités $\tau_{DE}(\tau_{DR})$. Cette dernière technique se manifeste par des flèches faites par les élèves pour indiquer le découpage-recollement et par des points pour indiquer le comptage d'unités.

Les résultats positifs de la classe de M2 relativement aux deux problèmes du pré-test nous montrent que les élèves maîtrisent la procédure de comptage d'unités entières et qu'ils ont acquis des conceptions d'aire appartenant aux cadres géométriques et celui des grandeurs.

- Le problème 1 du post-test

Après l'enseignement du professeur M2 concernant les aires, nous avons proposé le problème 1 aux élèves dans le post-test :

Problème N°1:

Calcule l'aire de ce trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré. :

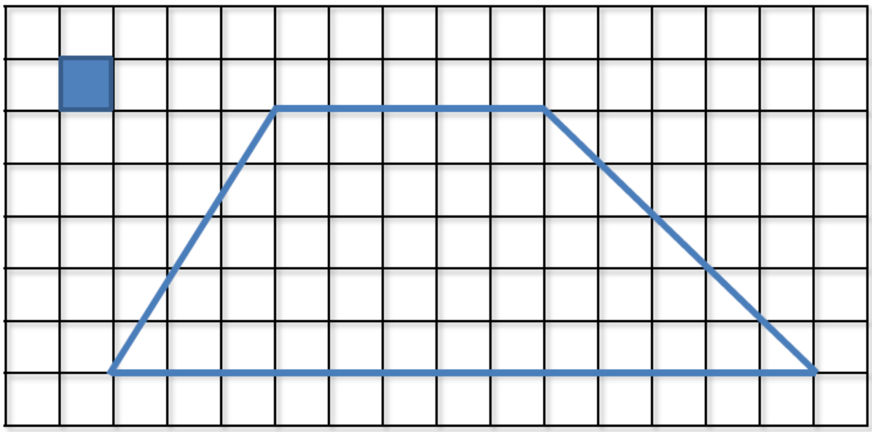


Figure 8-44. Problème 1, post-test

Dans cet exercice les élèves doivent calculer l'aire du trapèze. La formule d'aire de cette surface n'a pas été traitée dans le chapitre « aires et périmètres ». On voit que ce problème est plus compliqué que les problèmes 7 et 8 du pré-test. En effet, le dénombrement d'unités direct est plus difficile à mettre en place, car les éléments qui constituent la surface sont de demi-unités et de fractions d'unités. De plus, la procédure de découpage n'est pas possible, même si dans la figure on distingue deux triangles aux extrêmes et un carré au milieu du trapèze, le recollement des deux triangles ne forme pas un rectangle. Ainsi, les élèves doivent utiliser d'autres procédures, comme la décomposition de la figure en deux triangles et un carré.

Les résultats obtenus par la classe de 6e du professeur M2 sont meilleurs que les résultats de la classe du professeur M1 et ceux d'EVAPM. Le taux de réussite de la classe de M2 est du 50%, celui de la classe du professeur M1 est de 14 % et ceux d'EVAPM sont du 21% (1987), 14% (1989) et 19% (1997). Cependant, les conditions ne sont pas les mêmes, la classe du professeur M1 n'a pas encore travaillé sur les aires et la classe du professeur M2 a passé le test juste après l'enseignement des aires. De plus, la classe de M2 avait déjà montré des meilleurs résultats dans le pré-test. Nous allons donc centrer nos analyses sur les procédures et les erreurs relatives aux productions des élèves.

Nous avons repéré trois techniques utilisées par les élèves :

- La première technique est celle du dénombrement d'unités et de sous-unités τ_{DE} :

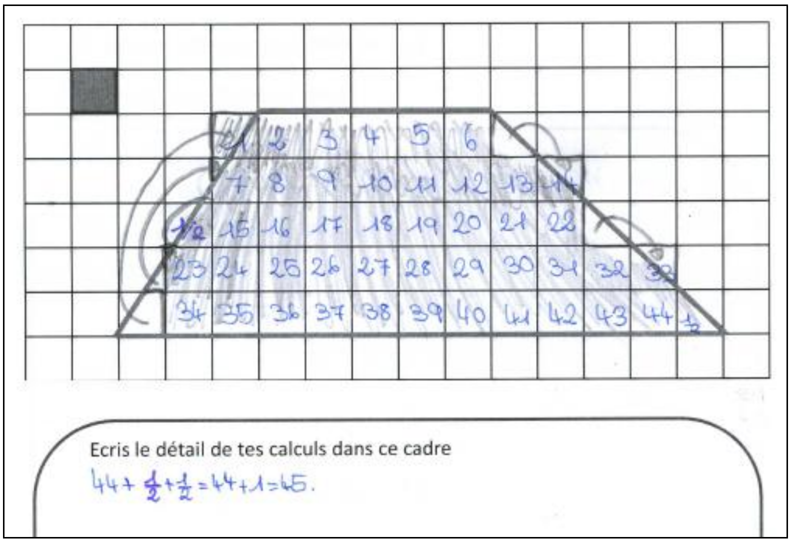


Figure 8-45. Réponse d'un élève au problème 1 du post-test

Cette technique a été la plus utilisée par les élèves, 46%.

- Une autre technique mise en place par les élèves a été de décomposer la figure en 2 triangles rectangles et un carré, et ensuite calculer les aires avec les formules relatives à ces surfaces, pour finalement les additionner $\tau_{CF}(\tau_D)$:

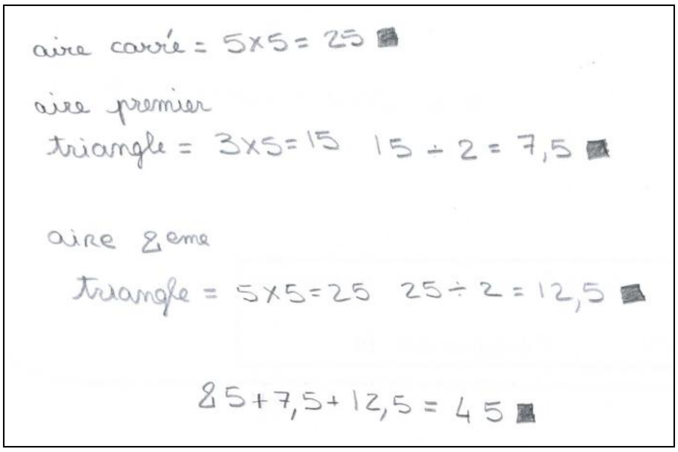


Figure 8-46. Réponse d'un élève au problème 1 du post-test

29% des élèves a utilisé cette technique.

- La troisième technique observée associe les deux techniques précédentes. Les élèves ont décomposé le trapèze en deux triangles rectangles. L'aire du triangle rectangle à gauche est calculée avec la formule d'aire et les aires du carré et du triangle rectangle à droite sont calculées avec un dénombrement d'unités $\tau_{CF}(\tau_D) U \tau_{DE}(\tau_D)$:

39+2,5 7,5:43
J'ai d'abord calculer tous les entiers (39) puis les moitiés (2,5) puis j'ai calculer le en faisant L×l÷2 (3×5÷2:7,5)

Figure 8-47. Réponse d'un élève au problème 1 du post-test

Cette technique a été utilisée par 13% des élèves.

La plupart des élèves qui ont réussi la tâche ont mobilisé les deux dernières techniques. On observe que les 73% des élèves qui ont employé la technique τ_{DE} n'ont pas donné une réponse correcte. Nous confirmons ainsi nos remarques faites pendant l'étude des séances. Effectivement, dans l'analyse de la séance 4 de la classe de 6e, nous avons observé que le quadrillage semble faire obstacle à l'utilisation d'autres procédures. Au moment de la passation du post-test, les élèves maîtrisent la procédure de découpage-recollement et la procédure de dénombrement d'unités dans les exercices 7 et 8 du pré-test. De plus, ils ont eu des très bons résultats dans un problème de calcul de l'aire d'un triangle rectangle comme nous l'avons vu dans le problème 7 du post-test analysé précédemment, c'est-à-dire, les élèves connaissent les formules d'aires d'un carré et d'un triangle rectangle. On voit ainsi que les élèves maîtrisent les éléments technologiques relatifs aux techniques $\tau_{CF}(\tau_D)$ et $\tau_{CF}(\tau_D) U \tau_{DE}(\tau_D)$, mais la moitié de la classe a privilégié la technique τ_{DE}, laquelle est beaucoup plus difficile à mobiliser pour obtenir la bonne réponse, car il s'agit de compter de sous-unités fractionnaires.

En conclusion, les élèves de la classe de 6e du professeur M2 maîtrisent la technique de dénombrement d'unités quand ils comptent des unités entières ou de demi-unités. Par contre, quand ils doivent compter des sous-unités fractionnaires, le quadrillage semble faire obstacle à l'utilisation d'autres procédures plus performantes pour résoudre la tâche et à la réussite de la tâche.

7.3 Le passage des surfaces aux formules

Pour montrer les difficultés concernant le lien entre les surfaces et les formules d'aire relatives à ces surfaces, nous avons fait le choix d'étudier le type de tâches $T_4(aire)$: Construire une surface en connaissant son aire.

Comme nous l'avons vu dans les problèmes précédents, les élèves ne présentent pas des difficultés pour construire une surface d'aire donnée dans le contexte d'un quadrillage où ils doivent compter les unités d'aire comme dans le problème 7a) du pré-test. De plus, les élèves connaissent bien la formule de l'aire d'un rectangle. Dans notre post-test, nous avons demandé aux élèves de construire un rectangle de 36 cm² :

Problème N°7:

Luc possède des petits carrés de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des rectangles d'aire 36 cm².

Dessine deux possibilités de rangement qui donnent des rectangles différents.

Figure 8-48. Problème 7, post-test

Pour ce problème, nous avons accepté comme réponse correcte le dessin d'un seul rectangle et éventuellement fait à main levée. Le taux de réussite à été du 54% dans la classe de 6ᵉ du professeur M2. Nous avons repéré plusieurs procédures et réponses que nous avons regroupées selon les différentes techniques :

- τ_{DE} : Les élèves dessinent les surfaces en comptant des unités d'aire de 1 cm² ;

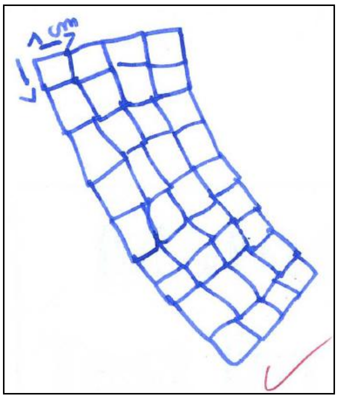


Figure 8-49. Réponse d'un élève au problème 7 du post-test

On voit dans cet exemple que l'élève a dessiné chaque carré d'un 1 cm de côté jusqu'à obtenir un rectangle formé de 36 carrés. Pour bien réussir le dessin, l'élève a dû prendre en compte la décomposition multiplicative du nombre 36, même si cela n'apparaît pas dans la copie de l'élève.

- τ_N : Les élèves décomposent le nombre 36 comme produit de deux facteurs ;

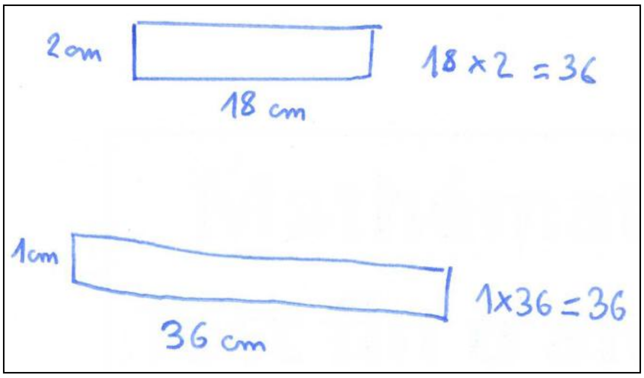


Figure 8-50. Réponse d'un élève au problème 7 du post-test

La prise en compte de la décomposition du nombre 36 comme produit de deux facteurs prend appui sur la formule de l'aire d'un rectangle. De cette manière, les élèves qui ont utilisé cette technique font le lien entre la formule de l'aire d'un rectangle et les côtés de cette surface.

- τ_{L+l} : Les élèves dessinent le rectangle en prenant des longueurs L et l telles que

L + l = 36

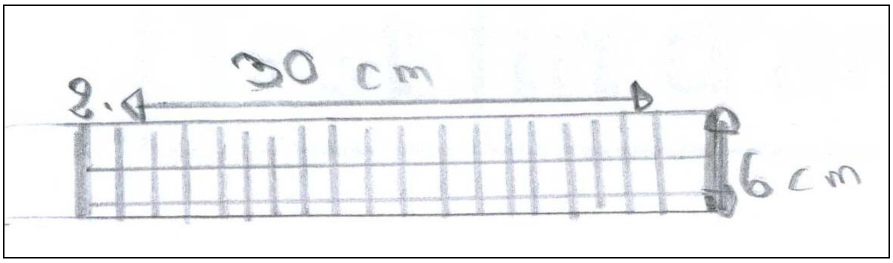


Figure 8-51. Réponse d'un élève au problème 7 du post-test

D'autres élèves ont basé leurs procédures sur des formules, mais les formules utilisées ne sont pas toujours correctes. Quelques élèves ont employé des formules relatives aux longueurs, comme dans le cas de la technique τ_{L+l}.

- τ_{2L+2l} : Les élèves dessinent le rectangle en prenant des longueurs L et l, telles que

2L + 2l = 36

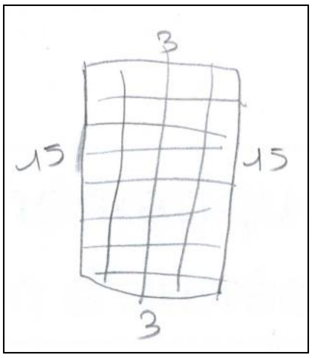


Figure 8-52. Réponse d'un élève au problème 7 du post-test

Un autre exemple d'erreur est l'utilisation de la technique τ_{2L+2l}. Ici, les élèves ont utilisé la formule du périmètre d'un rectangle à la place de la formule d'aire.

La technique la plus utilisée a été la technique τ_N (42%). De plus tous les élèves qui ont employé cette technique ont donné une réponse correcte. Cependant, on observe des confusions entre les formules d'aire et de périmètre. En effet, même si les élèves peuvent calculer l'aire d'un rectangle avec la formule d'aire sans difficulté, certains utilisent des formules relatives aux périmètres (30%) quand on leur demande de dessiner une surface d'une aire donnée. Cela montre que, même si les élèves maîtrisent les formules, ils ont des difficultés à associer cette formule à la surface respective. Il apparaît ainsi que des élèves mémorisent les formules sans toujours comprendre leur vrai fonctionnement.

7.4 Place et fonction des unités dans les calculs

Pour étudier le traitement des unités chez les élèves, nous avons choisi de présenter les types de réponses relatives au problème 1 du pré-test (figure 8-39) et au problème 6 du post-test (figure 8-40).

Nous rappelons que dans le problème 1, les élèves doivent appliquer la formule du calcul d'aire d'un trapèze. Le tableau suivant résume les types de réponses données par les élèves dans le problème 1 relativement aux unités dans la classe de 6e du professeur M2 :

Types de calculs et types de réponses	Nombre d'élèves	Pourcentage
Calculs sans les unités et résultat en cm^2	4	17 %
Calculs sans les unités et résultat en cm	7	29%
Calculs sans les unités et résultat sans les unités	5	21%
Calculs avec les unités et résultat en cm^2	1	4%
Calculs avec les unités et résultat en cm	4	17%
Pas de réponse repérée	3	13%

Tableau 8-13. Types de calculs et types de réponses relatifs au problème 1 du pré-test dans la classe de M2

On voit dans le tableau ci-dessus que des élèves ne donnent pas l'unité d'aire dans la réponse (21%) ou ils donnent comme unité « cm » (46%). On observe aussi qu'en général, les calculs sont faits sans les unités. De plus une grande partie des élèves confond l'unité de longueur avec l'unité d'aire. Ce problème a été proposé à la rentrée de l'année scolaire, ce qui montre que certains élèves arrivent au collège avec des difficultés relatives à la place des unités dans les calculs et dans les réponses. Comme nous l'avons vu, l'enseignant M2 ne prend pas en charge ces difficultés, au contraire, son enseignement réduit la place des unités dans les calculs.

Regardons les types de calculs et de réponses relatifs au problème 6 (figure 8-40) à la fin de l'année scolaire dans la classe de 6e du professeur M2 :

Types de calculs et types de réponses	Nombre d'élèves	Pourcentage
Calculs sans les unités et résultat en cm^2	7	29%
Calculs sans les unités et résultat en cm	3	13%
Calculs sans les unités et résultat sans les unités	9	38%
Calculs avec les unités et résultat en cm^2	1	4%
Calculs avec les unités et résultat en cm	1	4%
Calculs avec les unités et résultat sans unités	1	4%
Pas de technique repérée	2	8%

Tableau 8-14. Types de calculs et types de réponses relatifs au problème 6 du post-test dans la classe de M2

Comme pour le pré-test, la plupart des élèves ne font pas des calculs sur les unités, 80% d'entre eux effectuent les calculs sur les mesures. Nous rappelons que le contrat didactique mis en place par le professeur M2 établit que si les unités sont données dans le problème, la réponse doit être rédigée avec les unités correspondantes, et que pour les aires, on écrit « cm^2 », car on travaille en dimension 2. Par contre, on voit que seulement 33% des élèves écrivent la bonne unité dans la réponse, ces élèves sont ainsi dans le contrat didactique établi par l'enseignant M2. Cependant, certains élèves confondent l'unité de longueur avec l'unité d'aire (17%).

En conclusion, les difficultés rencontrées au début de l'année scolaire persistent à la fin de l'année scolaire. Cela s'explique par le fait que l'enseignant M2 travaille les unités d'une manière confuse comme on l'a vu dans l'analyse de la séance 4 de la classe de 6^e.

7.5 Les conversions d'unités

Dans les enseignements mis en place par le professeur M2, nous avons montré qu'il existe des problèmes dans le traitement et la place donnés aux unités. D'un côté, on a pu remarquer que le statut des « carreaux » comme unité de mesure reste flou, du fait qu'ils peuvent représenter à la fois des surfaces et des unités d'aire. D'un autre côté, les unités disparaissent des exercices et des calculs. De plus, dans la progression de l'enseignant M2, on ne trouve qu'une séance consacrée aux changements d'unités et un seul exemple. Il est donc évident de s'attendre à des mauvais résultats dans les problèmes concernant les changements d'unités. Effectivement, dans le premier test nous avons posé l'exercice suivant :

Problème N°6:
Compléter:
35,7 cm = ____________ m
8,56 m² = ____________ cm²

Figure 8-53. Problème 6, pré-test

Le taux de réussite pour les conversions d'aire est de 15% dans la classe du professeur M2. Par contre, dans la classe du professeur M1, les élèves ont débuté l'année par l'étude des opérations, où ils ont travaillé sur les conversions d'unités. Ils ont ainsi obtenu un taux de réussite de 65%. Dans l'observatoire EVAPM le taux est autour de 50% de réussite. Dans la classe du professeur M2, nous avons distingué trois techniques. La première technique est l'utilisation du tableau de conversion d'unités de longueur pour faire les changements d'unités d'aire, ce qui a amené les élèves à des réponses incorrectes (33%), la deuxième mobilise le tableau de conversion d'unités d'aire (17%), finalement dans la troisième technique les élèves ont déplacé la virgule (29%). Ainsi, la technique la plus utilisée par les élèves met en jeu le tableau de conversion d'unités de longueur ou d'aire, technique souvent mal employée.

A la fin de l'année scolaire, nous avons demandé aux élèves de résoudre la tâche suivante :

Problème N°2:
Les dimensions d'une table rectangulaire sont 2,50 m et 0,96 m.
a) Quelles sont ses dimensions en cm ?
b) Quelle est son aire en dm²?

Figure 8-54. Problème 2, post-test

Dans le problème 2b), le taux de réussite est similaire à celui du pré-test, il est de l'ordre de 16%. Le problème est beaucoup plus compliqué, car il fallait calculer l'aire d'un rectangle et faire le changement d'unités. Indiquons aussi que les élèves ont déjà travaillé sur une technique relative aux changements d'unités d'aire. Les 4 élèves qui ont réussi à donner la réponse correcte à 2b) ont d'abord converti directement les longueurs de la table en dm et ensuite ils ont calculé l'aire du rectangle. Ainsi, la technique τ_t basée sur l'utilisation d'un tableau de conversion d'unités d'aire, enseignée par le professeur M2, n'est pas investie par les élèves qui ont réussi la tâche. Elle a fait obstacle aux élèves qui l'ont utilisé, car ils ont employé le tableau d'unités de longueur à la place de celui des aires.

En conclusion, les conversions d'unités d'aire représentent des difficultés importantes pour les élèves, lesquelles ne sont pas prises en charge dans la classe. Il apparaît que ce type de tâches ne trouve pas une vraie place dans les enseignements du professeur M2, ce qui provoque de faibles compétences chez les élèves à propos de conversions d'unités d'aire.

7.6 Conclusion relative aux connaissances des élèves

L'enseignant M2 a travaillé les aires en 6e des points de vue géométrique, des grandeurs et numérique. En effet, il a mis en avant les procédures de découpage-recollement, le dénombrement d'unités et l'utilisation de formules d'aire. Les élèves de cette classe ont montré de très bons résultats dans le pré-test et le post-test par rapport à la classe du professeur M1. Cependant, on trouve des obstacles chez les élèves du professeur M2. Premièrement, le quadrillage met en avant une procédure de dénombrement, même si cette technique n'est pas la plus performante pour résoudre la tâche. En effet, le contrat didactique installé par l'enseignant M2 favorise à la technique de dénombrement dans le contexte du quadrillage. Deuxièmement, même si les élèves connaissent très bien les formules d'aire, ils trouvent des difficultés à associer les éléments de la formule à la surface. Cela peut s'expliquer par le fait que le passage entre l'aire géométrique-grandeur et les formules n'a pas été pris en charge par le professeur M2 dans ses enseignements. Troisièmement, les plus importantes difficultés se révèlent dans les conversions et traitements des unités. L'élimination des unités des enseignements du professeur M2 semble avoir eu de fortes conséquences sur les connaissances des élèves.

8. Bilan sur la pratique du professeur M2 relativement à la grandeur aire

Dans cette section, nous allons exposer une synthèse des analyses des deux séances de 6e et 5e du professeur M2.

8.1 Les problèmes de la vie courante

Dans l'enseignement du professeur M2, nous n'avons presque pas trouvé des problèmes relatifs à la vie courante dans les chapitres consacrés aux aires. La seule référence apparaît dans le problème 14 de la figure 8-19, où il est indiqué de calculer l'aire d'un « champ ». On a vu que les programmes scolaires actuels donnent une grande importance à l'étude de l'extra-mathématique, mais l'enseignant M2 centre l'enseignement de l'aire en tant qu'objet mathématique sans faire des liens avec d'autres sciences ou avec la vie quotidienne.

8.2 L'aire en tant que grandeur

On a pu voir qu'en classe de 6e l'aire en tant que grandeur occupe une place beaucoup plus importante qu'en classe de 5e. Cela s'explique par le fait qu'à partir de la classe de 5e, la noosphère prescrit des tâches relevant du numérique. Cependant, dans les textes officiels et dans la classe du professeur M2, l'étude de l'aire en tant que grandeur apparaît dans la justification des formules, notamment pour la formule d'aire d'un parallélogramme. De ce point de vue, l'enseignant M2 met en place des organisations mathématiques conformes aux programmes en vigueur en 6e et en 5e. Malgré cela, on remarque une ambiguïté sur la conception de l'aire. En effet, l'aire est enseignée aux élèves comme un concept se distinguant difficilement de celui de surface en classe de 6e.

8.3 Les mesures et les nombres

Les nombres et les mesures sont très présents dans les classes du professeur M2. On a observé que les mesures des longueurs et des aires sont données sans référence aux unités. Les calculs se font ainsi sur les nombres, cela a comme conséquence la disparition de l'aire en tant que grandeur dans les solutions des problèmes relatifs à cette notion. Par exemple, on a observé que certains élèves de 6e donnent l'aire d'une figure en utilisant « cm » comme unité d'aire.

8.4 Prise en charge d'une dynamique géométrique-grandeurs-numérique

Au début de ce chapitre, nous avons présenté une dynamique inter-domaines relative aux aires que nous avons schématisée à l'aide de la figure suivante :

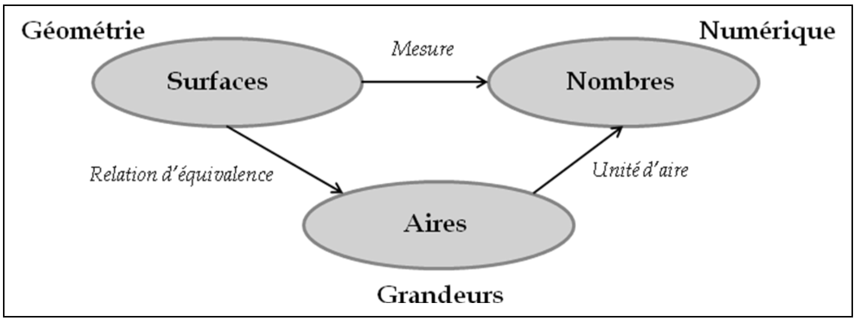


Figure 8-55. Dynamique inter-domaines autour de l'espèce de grandeur aire

Dans cette dynamique le passage des surfaces aux aires n'a pas été véritablement pris en charge par le professeur. Effectivement, nous n'avons pas trouvé des problèmes qui montrent, par exemple, que deux surfaces différentes peuvent avoir même aire et, comme nous l'avons dit précédemment, les aires et les surfaces sont présentées comme des concepts très proches chez M2. Il semble ainsi que l'enseignant M2 rassemble le cadre géométrique et celui des grandeurs dans un seul cadre. Le passage vers le numérique est réalisé à travers le dénombrement « des surfaces » en classe de 6e, et en classe de 5e, le lien entre le numérique et le géométrique-grandeurs se construit avec la mesure, ce que nous résumons dans la figure suivante :

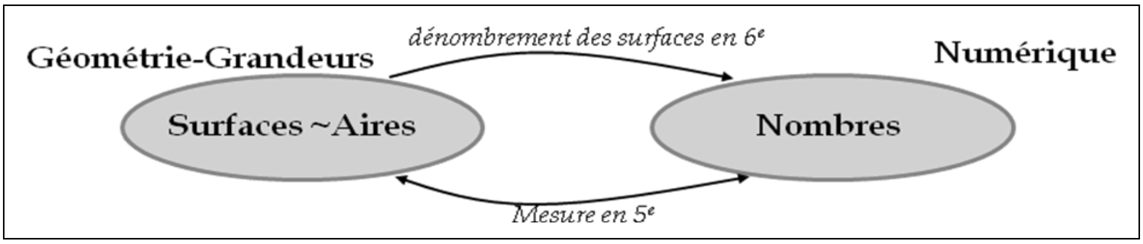


Figure 8-56. Schéma de la dynamique mise en place par M2

8.5 Le traitement des unités

Dans les progressions relatives aux aires les unités apparaissent très peu, alors que les nouveaux programmes demandent de faire des calculs directs sur les unités. De plus, quand les unités apparaissent dans l'enseignement du professeur M2 leur statut n'est pas bien défini. Premièrement, le symbole « □ », utilisé parfois comme unité, concerne deux conceptions d'aire, l'une en tant que surface et l'autre en tant que grandeur. Deuxièmement, le contrat didactique mis en place par l'enseignant M2 conduit à accepter aussi bien des réponses avec unités et des réponses sans unités. Troisièmement, quand les réponses sont données avec des unités, plusieurs ostensifs peuvent être utilisés pour un même problème : « □ », « unités » et « cm^2 », ce qui ajoute des difficultés au niveau des élèves, car les liens ne sont pas travaillés.

8.6 La continuité entre l'école élémentaire et la classe de 6e

Par rapport à l'articulation entre l'école élémentaire et le collège, des types de tâches et des techniques de l'école élémentaire continuent à être exploités en classe de 6e. L'enseignant M2 fait travailler les élèves sur des comparaisons d'aires et des calculs d'aires de surfaces, lesquels favorisent les procédures de découpage-recollement, les décompositions, les dénombrements d'unités et l'utilisation de formules d'aire.

8.7 Le passage de la classe de 6e à la classe de 5e

Les types de tâches proposés dans les classes de 6e et de 5e sont très différents, mais aussi les connaissances visées. En classe de 6e, les aires sont travaillées par le professeur M2 initialement dans le cadre géométrique et celui des grandeurs, pour ensuite travailler dans le cadre numérique. En revanche en classe de 5e, les organisations mathématiques visées appartiennent au cadre numérique, lesquelles sont justifiées à l'aide des éléments technologiques et théoriques du cadre géométrique-grandeurs. Le professeur M2 explicite ce passage entre la classe de 6e et 5e dans l'entretien :

> *« alors en 6e, on travaille plus sur les découpages et des choses comme ça, tout en faisant apparaître les formules et tout en.... bah je leur dis toujours prenez la distance par rapport aux formules. Par exemple le périmètre, ils veulent forcément utiliser une formule, alors qu'il suffit de comprendre que c'est de calculer le tour. Pour la surface, heee, quand c'est des surfaces, on peut faire de découpages, c'est plus facile, maintenant après on est bien obligé d'utiliser les formules à un moment donné, quoi. Donc, après ça dépend de classes, en 6e il y a encore ces histoires de découpages, en 5e un petit peu aussi, et après à partir de la 4e, 3e c'est plus l'utilisation des formules, de la numérisation » (Extrait entretien de M2)*

À travers de cet extrait on peut observer la prise en compte des directives institutionnelles par le professeur M2. Nous avons vu dans le chapitre III que les programmes exposent un passage du cadre géométrique vers le cadre numérique tout au long du collège. De ce point de vue, l'enseignant M2 est un « bon sujet » de l'institution CA4. Ainsi, les difficultés de l'application de nouveaux programmes de 2005 par le professeur M2 ne semblent pas être une conséquence de l'attachement de cet enseignant à d'autres institutions, comme l'institution CA1, mais plutôt un manque des connaissances mathématiques nécessaires pour la mise en place de ces nouveaux programmes.

Conclusion du chapitre

Nous avons montré dans ce chapitre que l'aire en tant qu'espèce de grandeurs se trouve au centre d'une dynamique géométrique-grandeurs-numérique. En effet, l'aire peut être étudiée sans les mesures, comme dans la théorie d'Hilbert et avec les mesures comme dans la théorie de Lebesgue. D'un côté, les contraintes institutionnelles en classe de 6e conduisent l'enseignant M2 en classe de 6e à faire le passage des procédures de découpage-recollement vers les formules en passant par le dénombrement d'unités. D'un autre côté, les programmes de la classe de 5e prescrivent un traitement numérique des aires, notamment avec les formules des aires de surfaces, ce qu'on trouve bien chez le professeur M2. Par contre, la conformité de l'enseignement du professeur M2 relativement aux programmes, ne garantit pas que les éléments technologiques et théoriques soient épistémologiquement adéquats pour les niveaux de classes de 6e et 5e. Ainsi, nous avons montré que la différenciation entre grandeur, mesure et objet n'est pas abordée dans les classes du professeur M2. L'aire est étudiée comme un concept proche de celui de surface, et les longueurs sont données sans les unités. De plus, les analyses que nous avons menées nous ont également permis de mettre en évidence que le traitement et la place des unités restent confus dans les enseignements du professeur M2. Cela a comme conséquence la difficulté à donner la bonne unité de mesure dans les situations relatives aux aires chez les élèves.

L'analyse écologique menée dans le chapitre III nous a permis de mettre en évidence les nouvelles contraintes et conditions qui apparaissent avec la création d'un domaine grandeurs et mesures. L'intégration des organisations mathématiques dans le chapitre concernant les aires par les professeurs de collège requiert des connaissances technologiques et théoriques. Malgré une forte volonté du professeur M2 d'étudier les aires de différents points de vue, cette intégration est confrontée aux technologies et théories mises en place par cet enseignant dans une époque antérieure aux nouveaux programmes. Incorporer l'étude des aires en tant que grandeur dans son cours de manière à faire vivre le domaine grandeurs et mesures demande la construction de nouvelles organisations mathématiques permettant de le faire. De fait, le seul moyen de faire vivre les aires en tant que grandeur est de proposer des problèmes pour différencier, d'une part, la notion d'aire de celle de surface et, d'autre part, la notion d'aire de la notion de mesure. Or, nous avons vu que les choix mathématiques faits par le professeur M2 favorisent un amalgame entre l'aire et la surface et un manque de lien entre l'aire et les mesures. Ainsi, le besoin de technologies pertinentes au niveau du traitement de cette espèce de grandeurs et au niveau du traitement des unités explique la difficulté à faire vivre l'aire en tant que grandeur dans les classes de 6^{e} et 5^{e} du professeur M2.

Conclusion générale

Notre projet s'inscrit dans l'étude de la place et du rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques fonctionnel, numérique et géométrique et leurs interrelations au collège en France. Nous avons vu que les divers changements au niveau de l'enseignement, notamment la reforme de 1970 et la création d'un domaine grandeurs en 2005, engendrent des nouvelles conditions et contraintes pour l'enseignement et l'apprentissage des grandeurs que nous avons analysées. Compte tenu du questionnement, nous avons décidé de réaliser notre travail principalement dans le cadre d'une perspective anthropologique en observant les différentes dimensions du savoir (savoir savant, savoir à enseigner, savoir enseigné, savoir appris) relativement aux grandeurs au collège.

Notre problématique nous a conduit à une approche didactique en trois temps. Dans un premier temps, nous avons analysé quelques aspects mathématiques et historiques à propos des grandeurs qui nous ont permis d'identifier les différents habitats et niches pour les grandeurs dans les mathématiques et corollairement dans ses évolutions. Dans un deuxième temps, nous avons fait une étude institutionnelle en nous appuyant sur l'analyse des programmes et des documents associés entre 1995-2010. Ceci nous a permis de caractériser et analyser deux institutions : collège dans la période 1995-2005 (CA1) et collège à partir de 2005 (CA4). Ce travail a été complété par l'examen des différents manuels scolaires appartenant à ces deux périodes. Dans un troisième temps, nous avons mené une étude du système d'enseignement en lui-même qui s'appuie sur l'analyse des pratiques et des connaissances des élèves à propos des grandeurs. Pour ce faire, nous avons étudié 4 classes du collège de deux professeurs M1 et M2. Cette troisième étape de notre étude nous a permis de déterminer et d'interpréter les conditions et les contraintes qui pèsent sur leurs pratiques, la place et la fonction données aux grandeurs dans leurs enseignements et les rapports personnels des enseignants et des élèves relativement aux grandeurs.

Dans cette partie nous allons présenter les résultats les plus significatifs de cette recherche tout en montrant les limites de la recherche et les perspectives de notre travail.

1. La méthodologie et le cadre théorique

En choisissant de travailler les grandeurs et leurs mesures, nous avions un défi de taille à relever. En effet, les grandeurs sont travaillées tout au long du collège dans tous les domaines mathématiques. Toutefois, la méthode de carottage (Larguier, 2009), nous a permis de repérer et d'analyser des habitats pour les grandeurs à l'aide des « échantillons ». Nous avons aussi fait le choix de ne pas révéler notre objet d'étude aux enseignants pour influencer le moins possible le fonctionnement de la classe. Cependant, nous avons trouvé cette contrainte assez difficile à gérer du fait que les professeurs ne nous explicitaient pas toujours leurs choix relatifs aux progressions. De plus, la seule présence du chercheur est déjà un élément perturbateur dans la classe. Les professeurs ont manifesté plusieurs fois leur désir de discuter sur leurs propres pratiques avec le chercheur.

Du point de vue théorique, cette recherche nous a permis de mettre en évidence la pertinence de la théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard pour étudier les contraintes et les conditions qui pèsent sur les pratiques d'enseignement. L'étude en termes de niveaux de codétermination didactique est un outil important pour comprendre les choix des professeurs vis-à-vis des institutions d'enseignement. Les praxéologies mathématiques et didactiques sont dépendantes des contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants.

2. Les grandeurs en tant qu'objet d'étude au collège

À partir des travaux de Douady (1986), nous avons considéré pour notre étude deux dimensions de la notion de grandeur, celle d'objet et celle d'outil. Dans cette partie, nous présenterons les résultats de notre recherche concernant les grandeurs comme des objets d'étude.

2.1 La constitution d'un cadre des grandeurs dans les programmes de 2005

Conséquence de l'évolution des mathématiques, les grandeurs ont été rejetées en dehors des mathématiques dans la période de la reforme de 1970. À partir de 1995, les grandeurs réapparaissent timidement dans les programmes du collège avec une certaine confusion sur la place qu'il faut leur accorder. En 2005, cette place devient plus importante dans l'institution puisque les programmes présentent les grandeurs comme un domaine au même niveau que ceux du numérique, du géométrique et du fonctionnel. Ainsi, nous avons admis que, suite à ces bouleversements, de nouvelles contraintes et conditions se présentent pour les grandeurs dans les différentes institutions. Pour étudier la vie des grandeurs dans les périodes 1995-2005 (A1) et 2005-2012 (A4), nous avons mené une analyse institutionnelle à propos des grandeurs en nous plaçant dans une perspective écologique.

Nous avons montré que la période A1 est une période de transition entre un enseignement numérisé des grandeurs, conséquence de la réforme des mathématiques modernes, et un enseignement centré sur les grandeurs en tant qu'objets d'étude dans la période A4. L'importance donnée à l'enseignement des grandeurs en 2005 montre la volonté de la noosphère d'approcher les domaines des mathématiques et de l'extramathématique et de favoriser la construction cognitive d'autres notions mathématiques. Ainsi, les organisations mathématiques relatives aux grandeurs en tant qu'objet qui se trouvaient fragmentées en plusieurs domaines dans l'institution CA1 se regroupent pour former un domaine tout entier, celui des « grandeurs et mesures » dans l'institution CA4. Nous avons vu que ces nouvelles contraintes engendrent de nouveaux besoins au niveau des organisations mathématiques et didactiques pour l'étude de ce domaine. Plus particulièrement, la création d'un domaine des grandeurs nécessite des nouvelles technologies et théories pour leur enseignement. Des éléments technologiques et théoriques possibles sont présentés dans un document ressource, *Grandeur et mesure au collège*, lequel n'a pas un caractère obligatoire pour les professeurs du collège.

L'étude des programmes, en termes de niveaux de codétermination, nous a aussi révélé que la création du domaine des grandeurs et mesures a modifié le positionnement des grandeurs dans l'échelle des niveaux de codétermination. Dans la période A1, chaque espèce de grandeur formait un thème ou un sujet d'étude tandis que dans la période A4 elles constituent un secteur d'étude. L'analyse des manuels scolaires nous a montré que cette nouvelle organisation des connaissances n'est pas complètement prise en compte par les auteurs de ces documents. De cette manière, trois institutions sont caractérisées par des conditions différentes pour l'enseignement des grandeurs. Premièrement, l'institution CA4 met en avant l'enseignement des grandeurs en tant que domaine d'étude et les espèces de grandeur en tant que secteur d'étude, et elle accentue la dimension objet des grandeurs. Deuxièmement, l'institution scolaire plus ancienne CA1 conduit à un renforcement de l'étude de grandeurs de façon fragmentée. Troisièmement, chaque manuel scolaire présente l'enseignement des grandeurs de façon divisée, lequel dépend du type de grandeur, en laissant de côté un travail sur la notion de grandeur elle-même. Les enseignants peuvent ainsi se trouver de cette manière assujettis à trois institutions. En effet, la plupart des professeurs utilisent les programmes comme référence dans leurs pratiques, ils s'appuient sur les manuels scolaires pour concevoir leurs enseignements et plusieurs d'entre eux ont fait ces études pendant la période A1.

L'analyse des progressions des enseignants observés relativement au domaine grandeurs et mesures montre qu'elles ne sont pas structurées conformément aux programmes de 2005, ni à ceux de 1995. Cela s'explique, pour nous, par le fait qu'il est nécessaire de construire des organisations mathématiques qui répondent à des conditions didactiques déterminées pour faire vivre des enseignements conformes aux rapports institutionnels à l'objet grandeur de l'institution CA4. Ces résultats confortent notre première hypothèse :

La remontée des grandeurs relativement aux niveaux de codétermination didactique dans l'institution d'enseignement ne garantit pas que ces changements puissent être transplantés dans le système d'enseignement. Il existe un véritable écart entre la noosphère et le système d'enseignement relativement aux grandeurs du point de vue de leur place dans l'échelle de niveaux de codétermination.

Néanmoins nous avons observé que les progressions sont semblables entre elles au niveau du secteur d'étude. Il apparaît que les organisations en chapitres proposées par les enseignants M1 et M2 sont similaires aux structurations des manuels scolaires utilisés par ces professeurs. Ainsi, la non-prise en compte des directives institutionnelles de la part des enseignants peut s'expliquer par le choix didactique de programmer l'enseignement à l'aide des manuels scolaires, lesquels, en général, ne sont complètement conformes ni aux programmes de la période A1, ni à ceux de la période A4.

2.2 Les pratiques d'enseignement relativement aux grandeurs : le cas de la grandeur aire

Pour étudier les pratiques des professeurs relativement au domaine des grandeurs, nous avons choisi d'analyser l'enseignement d'une espèce de grandeur particulière, la grandeur aire. Nous avons observé le même enseignant M2 dans une classe de 6^{e} et dans une classe de 5^{e}. En nous appuyant sur notre outil méthodologique « le filtre des grandeurs », nous avons essayé de caractériser l'enseignement de cette grandeur au collège.

L'étude épistémologique nous a montré que la notion d'aire peut être travaillée de deux manières : dans le cadre géométrique sans les mesures et dans le cadre numérique à l'aide de leurs mesures. Cette espèce de grandeur se trouve ainsi au centre d'une dynamique grandeurs-géométrique-numérique. Ces deux traitements nous ont aidés à identifier deux pratiques d'évaluation de la grandeur aire au sens de notre filtre des grandeurs. Ainsi, dans l'étude des programmes scolaires, nous avons vu qu'en classe de 6^{e} la notion d'aire est étudiée principalement dans le cadre des grandeurs et de la géométrie, tandis qu'en classe de 5e leur étude est généralement numérique. En effet, dans l'institution CA4 les organisations mathématiques relatives aux grandeurs évoluent des cadres géométrique et grandeurs vers un cadre numérique dans les différentes classes. L'analyse de la pratique du professeur M2 révèle que les tâches et techniques mises en place par cet enseignant sont conformes aux directives institutionnelles. D'un côté, ces contraintes institutionnelles en classe de 6e conduisent l'enseignant M2 en classe de 6e à faire le passage des procédures de découpage-recollement vers les formules en passant par le dénombrement d'unités. D'un autre côté, les programmes de la classe de 5e prescrivent un traitement numérique des aires, notamment sur les formules des aires. L'enseignement du professeur M2 est conforme à ce rapport institutionnel aux grandeurs relativement aux types de tâches et techniques qui sont prescrits.

Cependant, la création d'un domaine des grandeurs provoque une évolution des technologies et théories entre les périodes A1 et A4 : les organisations régionales et globales dans l'institution CA4 devraient faire appel à de nouveaux éléments technologiques et théoriques qui n'existaient pas dans les anciennes organisations mathématiques de l'institution CA1. Par exemple, la technique pour les changements des unités d'aire ne devrait plus s'appuyer systématiquement sur le tableau de proportionnalité, mais plutôt sur des calculs directs sur les unités. Plus particulièrement, nous avons observé au niveau technologico-théorique que la différenciation entre grandeur-mesure-objet n'est pas abordée dans les classes de M2. Notamment, l'aire est étudiée comme un concept proche de celui de surface. De plus, les analyses que nous avons menées nous ont également permis de mettre en évidence que le traitement et la place des unités restent confus dans les enseignements de M2. Par exemple, les longueurs sont données sans les unités. Ce phénomène s'inscrit bien dans notre hypothèse 2 :

> L'introduction des grandeurs dans le système d'enseignement en tant que domaine d'étude a modifié l'équilibre écologique du système. Les enseignants présentent des difficultés dans l'intégration des nouvelles conditions et contraintes pour l'enseignement des grandeurs dans leurs pratiques, ce qui se traduit par une réduction de la place des grandeurs dans les enseignements proposés.

L'intégration des organisations mathématiques dans le chapitre concernant les aires requiert des connaissances technologiques et théoriques chez les professeurs du collège. Malgré une forte volonté du professeur M2 d'étudier les aires de différents points de vue, cette intégration est confrontée aux technologies et théories mises en place par cet enseignant à une époque antérieure aux nouveaux programmes. Incorporer l'étude des aires en tant que grandeur dans son cours de manière à faire vivre un domaine « grandeurs et mesures » demande la construction de nouvelles organisations mathématiques permettant de le faire. Il apparaît ainsi que le professeur M2 montre un manque de savoir pour le professeur (Cirade, 2008a, 2008b) au niveau technologique et théorique pour enseigner les grandeurs en tant que domaine d'étude.

2.3 Conditions et contraintes relatives à l'enseignement de l'aire

L'enseignement des aires au collège est soumis à un ensemble des conditions et contraintes. Les études épistémologique, institutionnelle et des pratiques relativement à cette grandeur nous ont conduit à définir ces assujettissement en termes de niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 1999) :

- **Au niveau de la discipline** : l'étude épistémologique a montré que la notion de grandeur a été rejetée des mathématiques et des programmes de 1970. De plus, il existe différentes théories relativement à la notion de grandeur et à chaque espèce de grandeur. Ainsi nous voyons encore aujourd'hui que les mathématiques nécessaires pour l'enseignement de l'aire (Cirade, 2008a, 2008b) restent un domaine flou pour les enseignants, amenant le professeur M2 à enseigner l'aire comme un concept très proche de celui de surface.
- **Au niveau du domaine** : les nouveaux programmes de la période CA4 définissent les grandeurs comme un domaine, cependant avant cette période les grandeurs étaient étudiées plutôt dans le domaine géométrique, ce qui rend difficile pour un professeur de différencier ces deux domaines. L'enseignement de M2 risque de conduire à un amalgame des notions de surface et d'aire chez les élèves. De plus, pendant de longues périodes les unités étaient absentes des calculs, aujourd'hui elles réapparaissent dans les textes officiels dans le domaine des grandeurs, mais les enseignants ne sont pas prêts à prendre en compte ce changement, comme on le voit avec M2 qui exclut les unités de son enseignement.
- **Au niveau de secteur, thème et sujet :** de la classe de 6^{e} à la classe de 5^{e} les types de tâches, les techniques et les technologies évoluent du domaine géométrique vers le domaine numérique. Ainsi, les éléments technologiques et techniques relatifs à la théorie d'Hilbert, comme l'équidécomposabilité et le découpage recollement, sont moins présents en classe de 5^{e}. Dans ce dernier niveau, l'enseignement est centré sur l'étude des formules.

3. Les grandeurs dans la construction d'autres domaines mathématiques

Nous avons identifié que dans les programmes les grandeurs servent à étudier d'autres notions mathématiques. Elles participent ainsi en tant qu'outil à la construction d'autres domaines mathématiques et notions. Dans cette partie, nous revenons sur les résultats de notre recherche concernant les grandeurs comme outil.

3.1 Place et rôle des grandeurs dans la construction d'autres domaines mathématiques

Les grandeurs ont joué un rôle fondamental dans le développement des nombres, du calcul et de la géométrie. Cependant, les bouleversements épistémologiques provoqués par l'évolution des mathématiques, et des sciences en général, ont progressivement éliminé les grandeurs de la construction des ensembles de nombres. A l'aide d'une étude épistémologique, nous avons montré différentes fonctions des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques. Cet aspect outil des grandeurs justifie leur retour dans les programmes de la période A1. Selon les programmes de cette époque, les grandeurs servent à construire d'autres notions mathématiques d'une manière plus accessible aux élèves. De plus, les mathématiques au collège ne doivent pas être formelles, les connaissances sont tenues d'être proches de la réalité pour faciliter la compréhension chez les élèves.

L'étude institutionnelle a montré que les fonctions des grandeurs dans la construction d'autres domaines restent à peu près similaires dans les institutions CA1 et CA4 au niveau de la structuration de l'enseignement. Dans le domaine géométrique, les grandeurs sont des éléments constitutifs de propriétés et théorèmes relatifs aux objets géométriques et du domaine des fonctions, elles sont source des problèmes relatifs à la proportionnalité. Cependant, pour le domaine du numérique nous avons trouvé peu des traces des grandeurs dans ces deux périodes, bien que les documents ressources proposent un appui important sur les grandeurs pour la construction du numérique, notamment pour la construction des fractions et des opérations. On observe ainsi une stabilisation de l'enseignement des domaines numérique, géométrique et fonctionnel relativement aux rôles des grandeurs. Les contraintes des deux périodes sont intégrées par les auteurs des manuels scolaires relativement à la vie des grandeurs dans les domaines autres que celui des grandeurs.

3.2 Les pratiques des enseignants M1 et M2 relativement à une dynamique grandeurs-fonctions-numérique

Pour étudier la place et le rôle des grandeurs en tant qu'outil pour la construction des domaines autres que celui des grandeurs dans le système d'enseignement, nous avons fait le choix d'analyser les pratiques des enseignants M1 et M2 relativement à la notion de proportionnalité dans deux classes de 6^{e}. Cette notion traverse trois domaines : « grandeurs », « fonctionnel » et « numérique » en classe de 6^{e} dans l'institution CA4. En effet, l'organisation mathématique régionale que nous avons construite relativement aux programmes a montré que les situations de proportionnalité étudient des relations entre des grandeurs et les technologies proposées par les programmes sont constituées des propriétés de la fonction linéaire et des rapports entre grandeurs. Cependant, cette dynamique grandeurs-fonctions-numérique est construite de manière différente dans les deux classes de 6^{e}. À partir des travaux de Comin (2002), nous avons identifié trois univers : les grandeurs, les grandeurs mesurées et les mesures. Nous avons constaté que le professeur M1 enseigne la proportionnalité en établissant des liens entre ces trois univers. Par contre, le professeur M2 n'identifie jamais les espèces de grandeurs en jeu dans les situations de proportionnalité qu'il propose. Dans la classe de M2, les raisonnements s'appuient plutôt sur les grandeurs mesurées qui, elles, sont explicitées.

La progression de M2 commence par l'étude des quotients et des rapports dans le cadre du numérique. Il semble que ce professeur souhaite utiliser les éléments technologiques de la théorie des rapports et proportions pour enseigner cette notion. Cependant, dans l'institution CA4, l'enseignement de la proportionnalité s'appuie sur l'étude des situations mettant en jeu deux grandeurs proportionnelles et ce travail doit mettre en avant les propriétés de linéarité. Ainsi, l'enseignant M2 propose de nouveaux éléments technologiques, comme la propriété multiplicative, pour enseigner la proportionnalité en utilisant comme ostensif principal le tableau de proportionnalité. Ce professeur commence directement l'étude de la proportionnalité à l'aide d'un tableau où il s'agit de trouver des relations numériques entre les lignes et les colonnes, et ainsi la présence des grandeurs est réduite à l'étude des mesures. Cela peut s'expliquer par la volonté du professeur M2 d'investir les connaissances sur les quotients et les rapports dans les situations de proportionnalité. La conception de l'enseignement de la proportionnalité dans le cadre des proportions mise avant par M2 est confrontée à une contrainte institutionnelle, celle d'étudier cette notion dans le cadre des fonctions. Il semble que des raisonnements à l'aide des propriétés de la linéarité dans le cadre des grandeurs sont négligés au profit de l'étude des relations numériques dans un tableau de proportionnalité. Cette situation nous amène à conforter notre hypothèse 3:

Si la plupart des concepts mathématiques ont été construits à partir des grandeurs, les changements de rattachement épistémologiques relatifs à l'évolution des sciences ont eu pour conséquence la cohabitation de différentes connaissances pour l'étude d'une même notion dans l'enseignement. Ceci peut provoquer une désarticulation des organisations mathématiques au niveau de la construction de ces différents domaines mathématiques à l'aide des grandeurs.

En conclusion, le travail sur la proportionnalité peut être envisagé dans trois cadres : grandeurs, fonctions et numérique. Les difficultés relatives à l'enseignement de la proportionnalité apparaissent dans les interrelations entre ces trois cadres. Les éléments technologiques associés à ces différents cadres peuvent se présenter de manière désarticulée ce qui provoque une réduction de la place des grandeurs et un traitement inadéquat des grandeurs mesurées.

4. Apports, limites et perspectives de la recherche

4.1 Une étude macro-didactique

La grandeur est une notion qui traverse tous les domaines d'enseignement au collège, comme le signale Brousseau (2002) : « les conditions théoriques et pratiques de l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures est typiquement une question de *macro-didactique* dans tous les sens du terme ». Cela nous a amené à étudier les grandeurs tout au long du collège. Notre projet a été ambitieux. Nous avons recueilli et analysé des nombreuses données. Néanmoins, nous avons pu compter sur une méthode adaptée à notre problématique, la méthode de carottage (Larguier, 2009). Elle nous a servi à examiner la vie des grandeurs dans les progressions annuelles des professeurs observés. Cependant, plusieurs données restent à exploiter. En effet, pour notre recherche, nous avons fait le choix de présenter des analyses sur l'espèce de grandeur aire et sur la proportionnalité en classe de 6e et 5e. Nous avons ainsi omis l'étude des manuels scolaires à d'autres niveaux du collège et aussi l'étude de certaines séances concernant l'enseignement des grandeurs.

4.2 L'étude des rapports des élèves

Un des axes d'analyse a été d'étudier les connaissances des élèves actuels relativement aux grandeurs. Pour cela, nous avons fait le choix de proposer deux tests basés sur des exercices proposés par l'observatoire EVAPM. Même si ce travail nous a aidés à comparer les résultats des classes avec les résultats d'EVAPM et à observer les techniques des élèves, il ne nous a pas permis de faire une étude cognitive plus approfondie. En effet, l'observatoire EVAPM a été une contrainte forte pour les choix des problèmes, lesquels se sont révélés parfois inadaptés. Ainsi, notre recherche pourrait être complétée par une étude cognitive des connaissances des élèves à propos des grandeurs de manière à caractériser mieux la place et le rôle des grandeurs dans le savoir appris.

4.3 L'exploitation du filtre des grandeurs

Nous nous sommes inspirés des travaux de Bronner (2007) pour élaborer un outil, le filtre des grandeurs. Cet instrument nous a aidés à délimiter et caractériser le domaine des grandeurs au collège. Plus particulièrement, nous avons ainsi étudié les organisations mathématiques et didactiques, les contrats institutionnels de calcul, les objets, les raisons d'être des grandeurs et les dynamiques intra et inter-domaines mettant en jeu ces objets. Cependant, notre recherche nous a montré que chaque espèce de grandeur se construit à l'aide d'éléments propres à chaque espèce de grandeur. Par exemple, nous avons adapté le filtre des grandeurs au cas spécifique de la grandeur aire. Nous pensons ainsi qu'il reste des éléments à préciser et approfondir dans notre filtre des grandeurs et qu'il serait intéressant aussi d'appliquer cet outil aux différentes espèces de grandeurs.

4.4 Formation des professeurs

Notre recherche a mis en évidence que l'étude des niveaux de codétermination didactique est un moyen efficace pour comprendre les rapports institutionnels et les assujettissements des professeurs aux différents systèmes institutionnels. Cependant, nous avons vu que cela nécessite l'étude des organisations mathématiques et didactiques qui déterminent les conditions et contraintes aux différents niveaux de l'échelle de codétermination. Nous avons montré que les difficultés de l'enseignement des grandeurs se trouvent notamment dans les éléments technologiques et théoriques relatifs à ces notions. Les professeurs présentent un manque technologique et théorique pour l'enseignement adéquat des grandeurs au collège. De cette manière, nous pensons important de définir les connaissances mathématiques et didactiques nécessaires à l'enseignement d'un domaine des grandeurs. Par exemple, il nous semble nécessaire, d'une part, de former les enseignants aux différences entre grandeurs, objets et mesures et aux différents traitements des grandeurs, plus particulièrement au niveau de la gestion des unités. D'autre part, il semble intéressant d'amener les enseignants à réfléchir sur les difficultés épistémologiques et didactiques relatives aux grandeurs. Nous espérons que notre étude montre la nécessité de placer les contenus mathématiques relatifs aux grandeurs au cœur de la formation des enseignants. Une sensibilisation des enseignants à propos de la complexité de la notion de grandeurs est une nécessité pour l'enseignement de ces objets auquel la formation devra faire face.

Bibliographie

ANWANDTER-CUELLAR N. (2008), *Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume*. Mémoire Master 2 HPDS, Université Montpellier 2, France.

APMEP Groupe EVAPM. Grt. ; Le Borgne Philippe. Dir. (2009), L'enquête EVAPM 2008. Une enquête par les enseignants, pour l'éducation mathématique des élèves. In *Bulletin de l'APMEP,* n°481, Paris : APMEP, p. 193-243.

APMEP Groupe EVAPM. Grt. ; Bodin Antoine et al. (2006), *Etude de 6e 2005. Evaluation des acquis des élèves à la fin du second trimestre*. Publication APMEP, n° 174, Paris : APMEP.

APMEP Groupe EVAPM. Grt. ; Ayrault Françoise et al. (1998), *EVAPM 6e/1997. Fascicule 2*. Publication APMEP, n°118, Paris : APMEP.

APMEP Groupe EVAPM. Grt. ; Ayrault Françoise et al. (1997), *EVAPM 6e/1997. Fascicule 1. Dossier du professeur*. Publication APMEP, n°112, Paris : APMEP.

ARTAUD M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique de l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la IXe école d'été de Didactique des* mathématiques, Houlgate, 19-27 août 1997, s. l. n. d, ARDM, p. 99-139

ARTAUD M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie. In *Actes du colloque européen ITEM*, Reims, 20, 21, 22 juin 2003

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, p. 77-124.

BOSCH M., GASCON J. (2002), Organiser l'étude. 2. Théories & empiries In *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001*. Grenoble : La pensée sauvage.

BOSCH M., GASCON J. (2004), La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Document en ligne consulté le 1-06-2011 www.ugr.es/~jgodino/siidm/.../gascon_unidad_analisis.doc

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004), Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques* 24/2.3, p.205-250.

BRONNER A. (1997), *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat non publié, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

BRONNER A. (2007), *La question du numérique : Le numérique en questions ?* Habilitation à diriger de recherches non publié, Université Montpellier 2.

BRONNER A., BELLARD N., GIRMENS Y., LARGUIER M., PELLEQUER S., ROCHE M., SECO M. & VERGNE C. (2003), Faire ou ne pas faire des mathématiques, Des outils d'étude, Exemple dans le cas de l'étude du signe du binôme. In J. Coulomb, J. Douaire et R. Noirfalise (Eds.) *Faire des maths en classe? Didactique et analyse de pratiques enseignantes*. Paris : INRP.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7/2 p. 33-115.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1991-1992), Le poids d'un récipient. Etude de problèmes du mesurage en CM. *Grand N*, n°50, p. 65-87.

BROUSSEAU G. (2001), L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : Micro et Macro – didactique. Article publié in *La matematica et la sua didattica* n°1, p. 5-30 Traduction Maria Polo du texte non encore publié en français. Document en ligne consulté le 15-08-2010 http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Enseignement_des_maths.pdf

BROUSSEAU G. (2002), Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Dorier J. -L et al. (eds) *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAMBRIS C. (2008), *Relations entre les gr andeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat non publié, Université Paris 7.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac, G. et al. (éd.) *La transposition didactique à l'épreuve*, Grenoble : La Pensée sauvage, p.135- 180.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, p. 221-265.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2000-2001), Les grandeurs mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, n°55, p. 5-32.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2002), Les grandeurs mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, n°59, p. 43-76.

CHEVALLARD, Y. (2003), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux IIIe Journées d'étude franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S., M. Caillot (éds), *Rapport au savoir et didactiques*, Paris : Fabert, p. 81-104.

CHEVALLARD, Y. (2002), Organiser l'étude 3. Ecologie& régulation. In Dorier, J.-L. et al. (éds.). *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, *Corps, 21-30 Août 2001*, Grenoble : La Pensée Sauvage. p. 41-46.

CHEVALLARD Y. (2007), *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Document en ligne, consulté le 30-07-2010. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134.

CIRADE, G. (2008a), Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*, p. 249-277. ARDM et IREM de Paris 7.

CIRADE, G. (2008b), Les angles alternes-internes : un problème de la profession, *Petit x*, n°76, p. 5-26.

COMIN E. (2002), L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22/2.3, p. 135-182.

DHOMBRES J., REIGNIER J., ROUCHE N. (1997), *Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques*. CREM A.S.B.L., Nivelles Belgique.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil – objet. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 7/2, p. 5-31.

EUCLIDE. (1994), *Les Éléments*. Volume II, Livres V à IX [Livres V-VI, Proportions et similitude ; Livres VII-IX, Arithmétique] ; trad. du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France.

FRIEDELMEYER J-P. (2001), Grandeurs et nombres : l'histoire edifiante d'un couple fecond. *Repères IREM* n°44.

GRUPO BAHUJAMA. (2000), Análisis didáctico del artículo "El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en el marco de la teoría antropológica. Document en ligne, consulté le 1-08-2010. www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Bahujama.rtf.

HERSANT M. (2001), *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris 7- Denis Diderot.

LARGUIER M. (2009), *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2.

LEBESGUE H. (1975), *La mesure des grandeurs*, Librairie A. Blanchard, Paris.

MOREIRA-BALTAR P.(1994-1995), Etude des situations autour du concept d'aire de surface planes. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques 1994-1995*, séminaire n°171, p 189-218.

MOREIRA-BALTAR P. (1996-1997), A propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x*, n°43, p. 43-68.

MOREIRA-BALTAR P. (1998-1999), Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège. *Petit x*, n°49, p. 45-78.

PERRIN D. (2006), *Aires et volumes : découpage et recollement*, document en ligne, consulté le 1-06-2010.
www.euler.acversailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf

PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A. (2e ed. 1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris P.U.F.

PRESSIAT A. (2002), Grandeurs et mesures : Evolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. In Dorier J. -L et al. (éds) *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 août 2001*, version électronique du cédérom d'accompagnement. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PRESSIAT A. (2009), La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. *Bulletin de l'APMEP*, n° 483, p. 467-500. APMEP, Paris.

PRESSIAT A. (2006a), *Calculer avec les grandeurs*. Actes de l'Université d'été de Saint-Flour 2005 "Le calcul sous toutes ses formes", site académique de Clermont-Ferrand.

PRESSIAT A. (2006b), *Quotients - Proportionnalité – Grandeurs au collège*, document en ligne consulté le 10-03-2011, http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/confpressiat/Quotients.pdf

RAJOSON, L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille III.

ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Didier-Hatier, Bruxelles.

ROUCHE N. (1994), Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères*, n° 15, p. 25-36. TOPIQUES éd. Metz.

SANTOS-FARIAS L-M. (2010), *Etude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2.

VERGNAUD G. (1990), *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2.3, p. 133-170, Ed. La Pensée Sauvage

WALDEGG, G. (2004,) L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin. *Actes du colloque Rencontre internationale de Peiresc sur la pensée numérique* (Peiresc, 7-10 septembre 1999), éditions C. ALVAREZ, J. DHOMBRES & J.-C. PONT, Sciences et techniques en perspective, 2, 8.

Programmes, documents officiels et manuels scolaires

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (1996), *Mathématiques 6e*, Collection Triangle, éd. Hatier, Paris.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2001), *Mathématiques 5e*, Collection Triangle, éd. Hatier, Paris.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2005), *Mathématiques 6e*, Collection Triangle, éd. Hatier, Paris.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2010), *Mathématiques 6e*, Collection Triangle, éd. Hatier, Paris.

CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2010), *Mathématiques 5e*, Collection Triangle, éd. Hatier, Paris.

CHARMANTY O., MERLIER J.M., FREYCENET P. (2005), *Mathématiques 6e*, Collection Diabolo, éd. Hachette, Paris.

C.N.D.P. (1996a), *Programmes de 6e*. Document en ligne, consulté le 20-10-2008 http://pedagogie.ac-amiens.fr/math-sciences/IMG/pdf/maths_prog6e.pdf

C.N.D.P. (1996b), *Accompagnement des programmes de 6e*. Document en ligne, consulté le 22-04-2010 http://cours2math.free.fr/explorer//PROGRAMMES%20DU%20COLLEGE/_DOC_acc_prog_maths_6.pdf

C.N.D.P. (1997a), *Programmes de 5e et 4e*. Document en ligne, consulté le 20-10-2008 http://pedagogie.ac-amiens.fr/math-sciences/IMG/pdf/maths_prog54e.pdf

C.N.D.P. (1997b), *Accompagnement des programmes de 5e et 4e. Mathématiques*. Document en ligne, consulté le 18-05-2011 http://pedagogie.ac-amiens.fr/math-sciences/IMG/pdf/maths_prog54e_docaccomp.pdf

C.N.D.P. (1998), *Programmes de 3e*. Document en ligne, consulté le 20-10-2008 http://pedagogie.ac-amiens.fr/math-sciences/IMG/pdf/maths_prog3e.pdf

C.N.D.P. (1999), *Accompagnement du programme de 3e.* . Document en ligne, consulté le 15-10-2009 http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Quatre/Docs/prgms/prog4.pdf

D.G.E.S.C.O. (2002), *Document d'accompagnement. Articulation école collège.* Document en ligne, consulté le 20-10-2010 http://www.ia94.ac-creteil.fr/mathematiques/pdf_math/C3_6.pdf

D.G.E.S.C.O. (2005), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e. Proportionnalité au collège.* Document en ligne, consulté le 22-04-2010, http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

D.G.E.S.C.O. (2006), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e. Les nombres au collège*. Document en ligne, consulté le 22-04-2010, http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

D.G.E.S.C.O. (2007), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège. Grandeurs et mesures au collège.* Document en ligne, consulté le 20-10-2009 http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf

D.G.E.S.C.O. (2007a), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e. Géométrie au collège.* Document en ligne, consulté le 22-04-2010, http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

D.G.E.S.C.O. (2007b), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e. Le calcul numérique au collège.* Document en ligne, consulté le 22-04-2010, http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

D.G.E.S.C.O. (2008), *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e. Du numérique au littéral au collège*. Document en ligne, consulté le 22-04-2010, http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au-lycee.html

FOURTON J.L., LANOELLE A., PERRINAUD J.C. (2006), *Mathématiques 5e*, Collection Dimathème, éd. Didier, Paris.

MERLIER J.M. et al. (2006), *Mathématiques 5e*, Collection Diabolo, éd. Hachette, Paris.

Ministère de l'Education Nationale. (2002), *Documents d'accompagnement. Mathématiques. Grandeurs et mesure à l'école élémentaire*. Document en ligne, consulté le 20-10-2011 http://dpernoux.chez-alice.fr/Docs/grandeurs.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE. (2008), *Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques.* Document en ligne, consulté le 20-10-2008 http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

PICCHIOTTINO J.D., AMIGO P., JEUFFROY M. (2005), *Mathématiques 6e*, Collection Multimath, éd. Hatier, Paris.

Table des matières

Annexe A

Entretiens des enseignants M1 et M2

A.1 Transcription de l'entretien du professeur M1

H :m :s	Extrait
0:00:06	N: Bon, on commence avec les questions
0:01:37	M1: oui
0:00:14	N: Depuis combien d'années enseignez-vous?
0:00:19	M1: maintenant, ça fait à peu près 38 ans, depuis la rentrée 75
0:00:26	N: d'accord, donc vous avez vu tous les changements de programmes
0:00:29	M1: ah, oui, j'ai tout connu, j'ai tout connu, depuis... j'ai commencé avec tout ce que qui été, disons entre guillemets math modernes, c'est-à-dire, toutes les notions philosophiques qu'on nous faisait faire au 6e du style, ehhh, fonction, bijection et injection, pour lesquels ils répondaient bien gentiment par des formules toutes faites, mais qu'ils étaient incapables de saisir, et puis on est passé par toutes les réformes successives qu'il y a eu, bon, qui ont toutes apporté quelque chose de différent, et actuellement je dirai qu'on se recentre plutôt davantage sur des choses beaucoup plus pratiques, beaucoup plus accessibles aux élèves. On a quitté le domaine des grandes philosophies et xxx qui était très bien, je dirai, au niveau terminal et au niveau fac, donc en collège n'amène absolument à rien. Je me rappelle d'un temps, où on faisait calculer en base 2, en base 6, en base 8
0:01:32	N: ah oui?
0:01:33	M1: ouiiiii, bon, alors qu'on avait pas la notion de puissance, par exemple. Je suis né à une époque, où j'ai été obligé de faire ce qui était demandé de faire, mais j'aurai envie de couper énormément des choses de ces programmes là, j'ai senti entre les élèves et moi un fossé énorme
0:02:01	N: et pour les programmes d'aujourd'hui?
0:02:02	M1: alors, les programmes d'aujourd'hui, j'ai trouve, sont beaucoup plus en rapport avec, déjà, avec le contexte dans lequel ils vivent, on essaie avant tout de se baser sur des situations xxx qui leur sont familières, et puis je sens qu'on s'est recentré un petit peu sur l'essentiel. Alors, c'est vrai qu'il y a moins de maths, au sens de la science, mais je dirai qu'on prépare davantage des élèves à une seconde indifférencié
0:02:37	N: quand vous préparez vos cours, vous utilisez les programmes? Les manuels?
0:02:42	M1: alors, moi je ne me base, pour préparer mes séquences des cours que sur les programmes officiels. Il y a très longtemps que j'ai abandonné l'utilisation du livre, autrement que pour donner les exercices à faire, c'est bien pratique à la maison, mais ehh, et à condition de choisir les exercices, parce que dans n'importe quel livre, on a énormément d'exercices qui sont hors programme, et le cours qui est proposé est un cours qui est stéréotypé et sur lequel, sont à la limite des programmes où même aussi hors programme. Il y a très longtemps que les livres je ne les utilise que de temps en temps, pour aller chercher un exercice, mais jamais pour préparer un cours
0:03:33	N: Comme vous savez en 2005, il y a la nouvelle structuration des programmes...qu'en pensez-vous de cette nouvelle structuration?
0:03:54	M1: c'est très artificiel, on fait de séparation, c'est vrai que la séparation du numérique/ géométrie jusqu'à en 3e, je suis tout à fait d'accord, encore plus qu'ils nous ont enlevé tout ce qui est géométrie analytique, c'est vrai qu'on peut le considérer comme deux ... je dirai deux chapitres à part. Bon, la notion de grandeur, je crois que c'est une notion qui est transversale, et il serait très artificiel de faire un cours sur les aires, sur les volumes, alors que sont des choses qui vont rentrer en situation, et donc je préfère les utiliser tout au long de 4 années de collège, mais les étudier en situation, et non pas de façon très artificielle, un petit peu comme les équations, traiter une équation pour le plaisir de traiter une équation ça sert à rien, surtout à ce niveau-là, il faut que l'équation ait un sens derrière.
0:04:54	N: et donc pour vos pratiques, vous vous basez sur quoi? Sur les programmes antérieurs?
0:05:02	M1: non, je dirai que pour moi les programmes me donnent une trame, c'est tout. J'ai une certain des notions à traiter, mais je me garde la liberté de le traiter à ma façon, déjà parce que d'une classe à l'autre, on a des publics complètement différents, alors avec certaines

	classes, on va pouvoir aller plus vers une abstraction, avec une autre classe, on va rester terre à terre, et pour moi le but est, lorsque le cours est créé les gamins que j'ai xxx, même si on a pas fait des choses formidables et très belles, au moins on a fait des choses qui sont pratiques, et ils partent des cours en ayant une notion des choses. Selon les cas, selon les niveaux, ça va prendre des formes totalement différentes, ce qui fait que je me lâche en petit peu de directives très strictes.
0:06:06	N: Donc, vous disiez que les grandeurs sont une notion transversale...
0:06:09	M1: oui, pour moi, oui
0:06:13	N: le fait de... vous pensez qu'on isole les grandeurs si on les met dans un seul domaine?
0:06:20	M1: moi, j'ai peur que quand on découpe le programme en grandes tranches, on évitera pas que, notamment je pense aux enseignants débutants qui n'ont rien d'autre, en général le livre et n'ont pas une vision suffisamment globale des programmes, et on risque d'arriver, disons un isolament des choses, où on va traiter les grandeurs dans un chapitre.
0:06:48	N: oui, est-ce que vous pensez que les programmes mettent, quand même, en relation les grandeurs avec d'autres notions?
0:06:56	M1: oui, heee, disons, on ne peut pas s'en passer, je prends un exemple, on est sur les solides de l'espace, automatiquement quand on veut étudier un solide, on va être amènes à parler de longueurs de ses arrêtes, quand il y a des arrêtes, et on va être amènes à parler de l'aire de la base, de la surface latérale, l'aire totale du solide, on va calculer son volume, donc automatiquement je dirai qu'on va revenir sur toutes ces notions-là, à travers des situations. On parle des grandeurs quotients, la vitesse, je trouve, disons, aberrante de faire une leçon sur les unités de vitesse, elles trouvent leur place tout à fait naturellement quand on va étudier la proportionnalité, les problèmes de déplacement et autres. C'est à ce moment que ça va rentre et ça va prendre un sens.
0:07:51	N: D'accord. Maintenant je viens de vous montrer les documents xxx , je voudrais savoir qu'est-ce que vous pensez?
0:07:59	M1: pfff, c'est un support comme un autre, qui demande à mon avis, déjà une... comment dire? ehhh, de prendre un certain recul, parce que c'est un très bon document pour l'enseignant, à condition de ne pas les sortir tel qu'il est dans une classe et pas avec n'importe quelle classe. Donc, ça peut donner des pistes, mais je dirai que c'est un petit peu comme les pantoufles, moi mes pantoufles j'aime bien les acheter neuves et les faire à mon pied, j'ai horreur de prendre les pantoufles de quelqu'un d'autre. Les documents c'est pareil, c'est utile, je ne nierai pas que c'est indispensable, parce que bon on arrive à trouver des informations suffisantes et en quantité suffisante et de qualité suffisante. Bon, c'est un bon document pour l'enseignant, mais à condition qu'il prenne un certain recul.
0:09:08	N:Par rapport aux manuels scolaires, la présentation qui font des chapitres ça vous convient?
0:09:17	M1: je ne me sers jamais des manuels scolaires
0:09:18	N: vous avez jamais regardé à peu près?
0:09:20	M1: Si, j'ai regardé, mais heee déjà heee, j'ai horreur d'avancer par tranches, c'est-à-dire, que tout au long de l'année, on va faire de retour sur les notions. Une notion pour qu'elle puisse être assimilée par un élève, il faut qu'elle revienne souvent, or si on voit début d'année, par exemple les équations et on les fait pas vivre tout au long de l'année, je suis persuadé qu'en fin d'année, deux élèves sur trois découvrent une équation. Donc, pour moi, disons, le chapitre est pratique parce que ça me permet de donner des exercices aux élèves, en leur donnant un exercice par chapitre, mais très souvent on revient sur des notions, on revient sur des chapitres et je dirai que j'essaie au maximum de faire ce qu'on appelle une progression spirale. C'est-à-dire que tout au long de l'année on va revenir sur les notions et ces notions-là, elles vont vivre tout au long de l'année.
0:10:22	N: Et par rapport aux activités, elles font vraiment vivre les grandeurs? Ou elles sont adaptées aux élèves de collège?
0:10:36	M1: je dirai que les activités qu'on trouve dans les livres sont selon les livres... je dirai de valeur très inégale, donc là si on veut travailler avec les livres pour trouver les activités qui

	introduisent à quelque chose, et... déjà bien choisir le livre, bien préparer ces activités à la main, c'est parce que 9 fois sur 10, je dirai que l'activité est très creuse. C'est un exercice comme un autre, mais xxx rien du tout. Donc, à mon avis, une activité d'introduction à une notion, ça se construit en fonction de la classe qu'on a, et ça m'arrive très souvent de présenter des notions de deux façons différentes dans deux classes parallèles la même année, parce que je sais qu'avec une classe ça va pas passer, alors qu'avec l'autre je peux aller beaucoup plus loin.
0:11:42	N: ehh, en mathématiques, les grandeurs elles sont pas bien définies, par rapport à la théorie mathématique, et elles ne sont pas enseignées, non plus dans le parcours de professeur, donc je voulais savoir qu'est-ce que c'est une grandeur pour vous?
0:12:06	M1: alors, c'est très vaste, ehh une grandeur c'est avant tout physique, c'est une relation entre les math et la physique, ehh une grandeur est forcément une référence à une unité. Alors, une unité, je dirai une unité de certains sens, unité légale, bon on peut bien travailler avec des unités de circonstance, nous en classe on travaille très souvent avec le carreau. Alors que le carreau, petit carreau, grand carreau, donc c'est souvent très pratique et suffisant, après si on veut uniformiser les choses, on va passer sur le système métrique et d'autres système. Donc, en fait je dirai que la grandeur c'est avant tout un lien entre la réalité telle que les élèves la vivent et je dirai des notions mathématiques. On peut très bien parler des segments, sans jamais parler des longueurs.
0:13:15	N: et mesure?
0:13:17	M1: alors, ehh, ppp, une mesure, alors là c'est encore une autre chose pour moi, c'est un résultat de l'expérience, on va mesurer quelque chose, donc forcément une unité de mesure, on a forcément défini un cadre expérimental. Comme j'ai dit tout à l'heure, on peut très bien comparer des segments entre eux sans avoir besoin de les mesurer, voilà. Maintenant si je veux rentrer dans un cadre très concret, je vais demander à un élève de mesurer un angle, de mesurer une longueur parce que je vais reproduire à l'identique une figure, créer un modèle réduit, donc je vais xxx vraiment dans le côté expérimental, dans le côté ehhh je dirai complètement manipulation de l'objet.
0:14:24	N: Si vous deviez expliquer la notion de longueur aux élèves, que diriez-vous? ou la notion d'angle? ou la notion d'aire?
0:14:35	M1: alors en 6e, on a pas la notion de longueur, la notion d'angle puisque c'est en 6e que les élèves découvrent l'utilisation du rapporteur. Jusque là on a utilisé de gabarit ou comparé des angles entre eux, plus grand, plus petit, ça en principe ça va, mais à partir de la classe de 6e on va leur demander de mesure un angle et de savoir rapporter un angle. (...) Alors disons que (...), là on est vraiment dans la pratique et on est dans la première confrontation entre déjà une mesure qui n'est pas quelque chose d'exacte, si on donne le même angle à tous les élèves de la classe, il suffit que le trait tombe entre deux graduations du rapporteur et là il y a un choix à faire. Donc, on est plus, je dirai, dans des valeurs exactes, donc ça permet déjà d'introduire, avec ces élèves là, la notion de valeur approchée, d'erreur de lecture. Lorsqu'on fait une mesure on va voir une bonne idée de quelque chose référencée à une unité donnée. Si maintenant, je veux reproduire un angle par xxx, il est bien évident que je vais pas le mesurer.
0:16:06	N: Mais est-ce que vous donnez une définition d'angle?
0:16:11	M1: Non, ehhh alors de définition d'angle non, hheee, notamment c'est un 6e qu'on introduit des angles, la notion d'angle c'est quelque chose d'assez difficile à ce niveau là, si on veut donner une vraie explication, une vraie définition. Au niveau des aires, bon mis à part que l'aire c'est la mesure de l'étendue d'une surface, je me vois mal en 6e définir l'aire différemment. Donc, on reste toujours très pratique, très près de ce que peut comprendre l'élève.
0:16:56	N: à l'école élémentaire, les élèves travaillent la notion d'aire avec des découpages, des recollements, au collège ils travaillent plutôt les formules.
0:17:09	M1: Alors, disons, au collège, on fait hee le passage de l'un à l'autre, c'est justement la transition, et c'est aussi l'occasion pour eux de quitter le domaine plus purement technique à

	une évolution de quelque chose qui est beaucoup plus structurée. Et c'est vrai qu'au collège on va moins utiliser la notion de mesure, alors on va l'utiliser pour certaines choses, dans certains cas pratiques, mais justement le but, le problème au collège c'est d'arriver à décrire tout un tas des situations confortables, du style, je prends une équerre, je regarde, bon, l'angle, il est droit, par exemple. Je mesure angles, ont la même mesure ou à peu près. Et on va évoluer vers l'utilisation des propriétés de figures, vers une certaine abstraction et bien qu'en 3e encore on trouve, quelque chose du style: je vois sur la figure que. Bon, ça c'est quelque chose qui persiste depuis l'école élémentaire, mais je pense que le rôle du collège est justement de faire cette transition entre le purement expérimentale pour aller progressivement vers des solutions qui sont des déductions à partir des propriétés fondamentales d'une figure.
0:18:43	N: pour faire le passage des activités de découpages vers les formules, comment vous le faites?
0:18:58	M1: alors, ehhhh. Des activités, on a petit à petit de mettre l'élève dans des situations où le découpage ne suffit pas, alors tout simplement si j'ai une figure qui est dessinée sur de quadrillage en suivant bien les lignes du quadrillage pas de problème, ils vont pouvoir calculer un périmètre, ils vont pouvoir compte des carreaux pour donner une aire, bon. Déjà si je commence à prendre la figure sur papier millimétré avec une figure qui ne tombe pas bien, on va s'apercevoir qu'au mieux on va pouvoir donner un encadrement entre une valeur inférieure et une valeur supérieure les plus proches possibles, disons, xxx et on s'aperçoit que si on veut vraiment arriver à donner l'aire de la figure à un moment donné, il va bien falloir passer à une autre chose de plus performante, et alors là c'est le passage, disons, de l'élaboration des formules de calcul. Mais le but avant tout c'est de mettre en échec une habitude pour arriver à mettre en place autre chose.
0:20:29	N: qu'est-ce que vous utilisez, vous avez dit que vous faites des retours, avec quelle notion vous mettez en lien les grandeurs? Quand vous utilisez les grandeurs pour enseigner d'autres notions?
0:20:49	M1: alors, un exemple lorsqu'on aborde le théorème de Thalès, on va partir au départ, je dirai comparaison de deux triangles, donc je vais rejoindre d'utiliser des longueurs pour montrer qu'en fait, j'ai bien deux triangles, mais ces deux triangles ont en lien entre eux et que les longueurs des côtés sont proportionnels. Je pars de la mesure, alors en général on va utiliser un logiciel de géométrie dynamique qui va permettre d'avoir beaucoup de mesures et de faire apparaître la constance du rapport. Donc là je vais partir des grandeurs pour essayer de faire apparaître un phénomène qui à partir de là on va essayer d'en déduire, une, une, je dirai, une théorie. On a des exemples dans lesquels on va partir des grandeurs pour aller vers quelque chose, par contre quand on aborde les solides, bah, les solides ont va partir de l'objet, on va le décrire géométriquement et puis après on réutilisera les grandeurs pour aller chercher des éléments particuliers tels que l'aire latérale, l'aire de base, le volume. Donc là on partira du solide vers les grandeurs.
0:22:23	N: d'accord, d'après votre expérience quelles sont les grandeurs les plus compliquées?
0:22:31	M1: ahhh, alors heee, je dirai que les plus grosses difficultés heee dans le domaine, par exemple périmètre et aire en 6e, où les enfants mélangent les deux. Pour eux, c'est quelque chose qui est pas claire du tout, le périmètre, l'aire de la surface, le périmètre de la surface, donc là ça demande deee, donc en plus le fait que les deux notions ne sont pas liées. C'est-à-dire que je peux avoir des figures qui ont la même aire sans avoir le même périmètre, d'autres qui ont le même périmètre, mais qui ont pas la même aire. D'autres qui ont le même périmètre et la même aire, donc pour eux c'est très confus, donc ça va se mettre en place petit à petit, ehhh. Après la difficulté qu'on va voir avec les grandeurs c'est les grandeurs quotients et les grandeurs produits, où là, il y a un manque de maîtrise, je dirai un manque souvent de réflexion, parce qu'on fait passer, je prends un exemple, de mètre par seconds à kilomètres par heure, il y a pas, je dirai des formules toutes faites, il suffit de réfléchir un petit peu et de convertir chacune des unités dans l'autre. Or je crois que le problème est qu'on les habitue trop à avoir la formule qui passe de l'une à l'autre.

A.2 Entretien du professeur M2

h :m :s	Extrait
X	N: (Depuis combien d'années enseignez-vous?)
0:00:12	M2: à la première question, je peux te répondre 17, 18
X	N: (Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir les exercices ? De quelle manière ?)
0:00:20	M2: manuels scolaires, oui. Pour les exercices, mais je vais également sur internet pour chercher les activités, chercher des exercices, parce que les manuels c'est bien, mais il n'y a pas toujours ce qu'on veut. En fin, c'est pas toujours adapté à ce qu'on a envie de transmettre aux élèves quoi.
X	N: (Consultez-vous systématiquement les programmes du collège ? Est-ce que vous les suivez à la lettre ?)
0:00:44	M2: non, je le suis à la lettre dans les grandes lignes, après par forcement au pied de la lettre.
0:00:55	N: et quand vous construisez vos progressions, vous regardez les programmes? plutôt les manuels?
0:01:03	M2: bah, la progression je la fais par rapport aux manuels, en sachant si les programmes ont évolué ou pas. Donc, là le manuel, il est pas tout à fait à jour, quoi, heee, donc je suis les manuels, ce vraiment ce que je regarde, quoi.
X	N: (Consultez-vous les documents d'accompagnement ?)
0:01:22	M2: bah celui-là non, (en faisant référence au document grandeurs et mesures), heee, on a des bouquins, par exemple, en géométrie de cahiers de géométrie qui sont pas mal, en 6e en et 5e que je consulte et que j'utilise beaucoup pour les activités, pour les exercices et après les ressources sur internet surtout ça.
X	N: (Comment préparez-vous vos progressions ? Quels éléments prenez-vous en compte ?)
0:01:51	M2: je me base par rapport aux bouquins, parce qu'ils ont leurs bouquins eux, de toute façon et après je rajoute des choses, par exemple en 3e, l'année dernière, ils avaient pas le bon bouquin, et il y avait le chapitre qui était apparu, donc il fallait bien se baser par rapport à leur bouquin pour le chapitre qui était à voir, mais dans le nouveau il y avait bien d'autres choses, donc on le faisait des photocopies pour les nouveaux chapitres et puis, on travaillait comme ça, on travaillait par photocopie et on travaillait par internet.
0:02:20	N: après les questions, c'est plutôt sur les grandeurs, comme je vous disais, il y a la nouvelle structuration et donc, que pensez-vous du fait qu'il y a maintenant un domaine grandeurs et mesures? Pourquoi il est au même titre que la géométrie ou que les nombres?
0:02:34	M2: pourquoi? je sais pas
0:02:36	N: hee, pas pourquoi, qu'est-ce que vous en pensez?
0:02:39	M2: je pense que ça peut être pas mal, parce que ça leur permet de comprendre les unités, pourquoi de cubes, pourquoi les carrés, pourquoi de kilomètres, des choses comme ça. Et c'est vrai que peut être c'est un peu plus concret, ça arrive souvent dans la vie, si on veut travailler avec les puissances, des choses comme ça, les unités, ça peut être intéressante, quoi.
X	N: (est-ce que vos pratiques ont changé vis-à-vis de ces nouveaux programmes ?)
0:03:06	M2: vis-à-vis des programmes?
0:03:08	N: des programmes de 2005, en fait.
0:03:11	M2: bah, pas énormément. Mais en 2005, j'avais pas de 6e, du coup, j'étais, par rapport à avant heee (...)
0:03:21	N: par exemple en 3e, il y a des grandeurs quotients et produits qui sont rentrées en 2005, je sais si...
0:03:28	M2: bah si, il a bien fallu faire quelques changements et puis les faire intervenir dans le...dans ce qu'on demandait au 3e, donc oui, ça a changé, oui

X	N: (En lien avec quelles notions, pensez-vous, que les programmes proposent de travailler les grandeurs ?)
0:03:45	M2: tout ce qui est vitesse, tout ce qui est puissance, tout ce qui est heeee, les aires, les volumes, heee, qu'est qu'il y a d'autre, en gros c'est ça non? je crois que c'est ça.
X	N: (Que pensez-vous du document « Grandeurs et mesures » ?)
0:04:02	M2: je le connais pas, document "grandeurs et mesures" je connais pas
X	N: (Le(s) manuels que vous utilisez fait-il (font-ils) référence aux grandeurs ? Dans quelles parties ? et sous quelles formes ?)
0:04:07	M2: alors, les grandeurs ça apparaît dans les volumes, pour quel niveau?
0:04:22	N: au collège, en général.
0:04:24	M2: au collège en général? bah c'est vitesse, c'est tout ce qui est bahhhhn, volume, aire, vitesse, puissances, toutes les situations physiques, des choses comme ça
0:04:42	N: parce qu'en fait, il y a des programmes qui prennent en compte la nouvelle organisation, d'autres qui font comme avant 2005, ce que je vous demande c'est s'ils prennent en compte de manière différente ou vous pensez que c'est pareil?
0:04:53	M2: en 4e, en 3e oui, on a pas le choix, puisqu'il y a des nouveaux chapitres qui sont apparus, donc qui ont xxx. En 6e, heee, je vois pas trop, mais pas xxx, c'est plus flagrant en 3e. Après en 5e, je sais pas si ça apparaît en 5e, ça me dit rien, en 5e il y a pas, et en 4e, je crois pas non plus. Surtout 6e et 3e, en fait.
X	N: (Qu'est-ce qu'une grandeur pour vous ? Et une mesure ?)
0:05:22	M2: une grandeur et une mesure? qu'est-ce qu'une grandeur? et une mesure? je sais pas trop. Une grandeur c'est une..., une grandeur ça utilise une..., c'est difficile à dire, une... une unité de grandeur ça sera pas une unité simple, ça sera une unité composée, donc ça fait intervenir plusieurs paramètres, pour moi. Voilà, donc si ça se trouve, ce que c'est totalement faux ce que j'ai dit. Pour moi une grandeur c'est, bah la vitesse ça utilise deux notions, la notion de durée et la notion de distance, alors qu'une mesure pour c'est, je mesure un objet, ça fait tant sur tant.
0:06:33	N: donc c'est plutôt l'action de mesurer?
0:06:40	M2: oui, voilà, une vitesse on peut pas la mesurer, on peut la calculer, alors qu'une mesure on peut la mesurer.
0:06:47	N: mais, par exemple la question suivante c'est: si vous deviez expliquer la notion de longueur (angle, aire, volume) aux élèves que diriez-vous ?
0:07:01	M2: alors la longueur c'est la mesure d'un côté, l'aire c'est la place occupée par l'objet, donc...
0:07:09	N: et vous donnez ces définitions aux élèves?
0:07:10	M2: oui, si j'écris ça, j'écris ça. En 6e, c'est ce que je fais, en 6e, l'aire c'est la place occupée par l'objet, et le périmètre c'est la longueur de tout. Alors, je sais pas si on peut écrire ça directement, mais en gros c'est ça.
0:07:26	N: et le volume?
0:07:28	M2: le volume c'est la contenance d'un objet.
0:07:35	N: je voulais savoir c'est si vous travaillez plutôt la notion numérique ou vous faites aussi un travail géométrique sur les grandeurs.
0:08:05	M2: alors en 6e, on travaille plus sur les découpages et des choses comme ça, tout en faisant apparaître les formules et tout en.... bah je leur dis toujours prenez de la distance par rapport aux formules. Par exemple le périmètre, ils veulent forcément utiliser une formule, alors qu'il suffit de comprendre que c'est de calculer le tour. Pour la surface, heee, quand c'est des surfaces, on peut faire de découpages, c'est plus facile, maintenant après on est bien obligé d'utiliser les formules à un moment donné, quoi. Donc, après ça dépend de classes, en 6e il y a encore ces histoires de découpages, en 5e un petit peu aussi, et après à partir de la 4e, 3e c'est plus l'utilisation des formules, de la numérisation.
0:08:42	N: Utilisez-vous les grandeurs pour enseigner d'autres notions mathématiques ? Vous avez dit les puissances ...?

0:08:51	M2: heeeee, non, je crois pas non.
0:09:01	N: non? vous avez dit que vous travaillez les puissances, par exemple vous utilisez les unités de mesure pour travailler avec les puissances.
0:09:12	M2: oui, d'accord. Mais c'est pas la puissance elle même, bah...
0:09:17	N: oui, je veux dire donner des exemples, par exemple, des grandeurs pour enseigner une autre chose ou des activités deeee...
0:09:24	M2: non, ça j'ai jamais utilisé, non.
0:09:27	N: d'accord, par rapport aux connaissances des élèves quelles sont les grandeurs géométriques les plus difficiles à comprendre pour les élèves? où vous trouvez plus de difficulté?
0:09:41	M2: moi, je trouve que c'est le périmètre, alors que ça me paraît le plus simple, parce que le périmètre (...) le, la numérisation fait qu'ils veulent forcément à un moment, avoir des formules tout le temps. Et le périmètre du rectangle, que c'est un exemple typique, c'est qu'ils veulent trouver le périmètre du rectangle parce qu'ils vont vouloir appliquer une formule, alors qu'en faisant le tour ils peuvent trouver facilement, et je trouve que là ils se trompent souvent. Alors que l'aire, c'est, c'est, soit ils ont compris la numérisation avec la formule et ils peuvent l'appliquer, soit ils ont pas compris et puis ils vont se tromper quoi. Alors que le périmètre ils pouvaient s'en sortir plus facilement et systématiquement ils veulent se lancer dans la formule et ils se trompent. Pour moi, c'est ce qui marque le plus, alors après c'est peut être pas général, mais c'est ce qui me marque le plus.
0:10:40	N: bon, c'est tout, mais en général quelles difficultés?
0:10:42	M2: bon c'est les grandeurs, c'est pas que les grandeurs ah?

Annexe B

Analyse préalable des questions EVAPM

1. Volume

N° question EVAPM	Type de tâches / Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires	Possibles difficultés
185	Calculer un volume	-Il est donné les longueurs d'une boîte -il est indiqué de ne pas oublier les unités de mesure -la question est directe -Objet concret	Formule volume du parallélépipède rectangle ; unités de mesure.	-Unités de mesure -Multiplication des décimaux
196	Calculer l'une des dimensions d'un solide en connaissant son volume et les autres dimensions	-Il est donné l'objet et sa capacité, et sa forme géométrique avec deux de ses dimensions -il faut expliquer la procédure -Objets concrets	Capacité ; litre ; formule du volume d'un pavé droit ou parallélépipède rectangle.	-équivalence $1000L=1m^3$ résolution de l'équation 2m x 1m x Xm = 2500 L
224	Calculer le volume d'un solide	-Dessin -Il est indiqué la technique à utiliser :le comptage -objets concrets	Comptage tridimensionnel ; volume	-abstraction de la figure en 3D
242	Calculer la quantité de petits cubes qui forment un solide	-objets concrets	Comptage tridimensionnel	

2. Aires

N° question EVAPM	Type de tâches / Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires	Possibles difficultés
165	Calculer l'aire d'une surface	-Dessin -il est donné les longueurs -Il y a un cadre pour le résultat et un autre pour justifier -Il est écrit de ne pas oublier l'unité -l'unité de longueur n'apparaît pas sur le dessin	-Carré -Triangle rectangle -Aire -Formule du calcul de l'aire d'un carré et d'un triangle rectangle	
167,241	Calculer l'aire d'une surface	-Dessin sur un quadrillage	-Aire -Comptage	-Mot calcule (167)

			bidimensionnel	
169	Calculer l'aire d'un solide	-Quelques mots sont en gras -Contexte vie quotidienne	-Aire d'un cube -10000 cm^2=1 m^2	-aire d'un cube -changement d'unité -valeur non exacte : décimal -distinction entre longueur, aire et volume
174	Calculer l'aire	-Contexte vie quotidienne -Dessin -Deux questions	Périmètre d'un carré; Formule de l'aire d'un carré, Aire	-Formulation de la question
183	Changer d'unités de longueur et d'aire	-Compléter un tableau	-Relations entre les unités de longueur et d'aire	
186, 218	Calculer l'aire d'une surface	-Dessin -Il est indiqué de ne pas oublier les unités	-Rectangle -Formule de l'aire d'un rectangle ou d'un triangle	
187	Calculer l'aire et le périmètre d'une surface	-Objet concret -Deux questions -Indiqué de ne pas oublier les unités	-Périmètre -Aire d'un rectangle	
197	Calculer la longueur d'une surface en connaissant son aire et l'autre dimension		Rectangle ; aire et périmètre d'un rectangle	Compréhension de l'énoncé
198	Calculer la valeur approchée de l'aire	-Formule donnée	-convertir cm^2 en mm^2, valeur approchée de π	
225	Dessiner une figure d'une aire donnée	-2 questions -indiqué l'unité carrée	Aire ; triangle rectangle	
311	Calculer l'aire d'une surface	-La formule est donnée -Dessin	Trapèze ; aire	
330	Calculer l'aire d'une surface Dessiner une surface d'une aire donnée	-Dessin et quadrillage -Exemple de réponse attendue -Deux questions : calculer et dessiner -Unités sont données	Aire ;	
331	Comparer d'aires Comparer de périmètres	-Dessins et quadrillage -Deux questions -Choisir la phrase juste	Aire, périmètre	Côtés arrondis
394 (Voir 183)	Changer d'unités	-Vrai ou faux -Tableau	Conversion d'unités	
796	Calculer l'une de dimension d'une surface en connaissant son aire	-Contexte vie réelle	Calculer l'aire d'un rectangle	Aire est un décimal

	et l'autre dimension			
848 (voir 331 et 1125)	Comparer d'aires Comparer de périmètres	-Dessins et quadrillage -Deux questions -Ranger en ordre croissant	Aire ; périmètre	Côtés arrondis
923	Calculer l'aire et le périmètre d'une surface	-Contexte vie réelle -deux questions -associer l'aire ou le périmètre au dessin	Calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle	
1110	Calculer l'une de dimension d'une surface en connaissant son aire et l'autre dimension	-Contexte vie réelle	Calculer l'aire d'un rectangle	Confusion entre les valeurs qu'il faut trouver
1124	Calculer l'aire d'une surface	Dessin où les longueurs sont données	Calculer l'aire d'un rectangle ; additivité de l'aire	Trouver les valeurs des côtés nécessaires aux calculs

3. Proportionnalité

N° question EVAPM	Type de tâches / Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires	Possibles difficultés
157	Calculer la quatrième proportionnelle	-Il n'est pas indiqué que les surfaces sont proportionnelles -Contexte vie réelle	-Quatrième proportionnelle -Agrandissement	-Il n'apparaît pas la proportionnalité
195, 193	Calculer la quatrième proportionnelle	-Contexte vie réelle	-Quatrième proportionnelle	
194	Calculer la quatrième proportionnelle	-Contexte vie réelle	-Quatrième proportionnelle	
202 (Voir 753 et 202)	Compléter un tableau de proportionnalité	-Tableau	Coefficient de proportionnalité ; L'agrandissement d'un triangle, agrandi les côtés et les angles se conservent	Savoir que les angles ne changent pas
310,375 (voir 397)	Calculer un pourcentage	-Contexte vie réelle	Pourcentage a%b=ab/100	Mot remise

4. Longueur

N° question EVAPM	Type de tâches / Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires	Possibles difficultés
183 (voir 395)	Changer d'unités	Compléter un tableau Unités sont données	Conversion d'unités	
184	Changer d'unités	Contexte vie réelle	Convertir m en cm	
219 (voir 396)	Calculer une longueur	La formule est donnée	Multiplier	Phrase « Unité près par défaut »
357	Tracer un segment d'une longueur donnée	Dessin Il n'est pas indiqué d'utiliser des instruments	Reporter une longueur	
388	Comparer des longueurs	Dessin Tableau V ou F	Reporter une longueur	
937	Construire un triangle donné leurs côtés	Longueurs sont données	Reporter une longueur Construire un triangle	
938	Reporter une longueur	Dessin	Reporter une longueur	

5. Angles

N° question EVAPM	Type de tâches/ Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires
148	Calculer les angles d'une figure	-Théorème sur la somme des angles d'un triangle est donné -Dessin -les données apparaissent sur le dessin et dans l'énoncé	-la somme des angles d'un triangle est 180°
239, 332	Reporter un angle	Angle donné comme dessin	Reporter un angle
333	Calculer un angle	-dessin -Les données sont dans l'énoncé et le dessin	Somme et soustraction d'angles
941	Construire la bissectrice d'un angle	-Dessin d'un triangle	Construire bissectrice

6. Agrandissement

N° question EVAPM	Type de tâches / Objectif	Caractéristiques de l'énoncé	Connaissances nécessaires
191	Agrandir un parallélépipède rectangle	Dessin et quadrillage	Agrandir un solide

Annexe C

Progressions des enseignants M1 et M2

C.1 Progression du professeur M1, classe de 6e, 2009-2010

	Fin premier trimestre							Vacances
Semaine	05/11/09	09/11/09	16/11/09	23/11/09	30/11/09	7/12/09	14/12/09	21/12/09
Chapitre	Opérations sur les nombres décimaux				Positions relatives à deux droites			
Devoirs			Contrôle 16/11		Devoir 30/11		Devoir 17/12	
Observ.								

	Début deuxième trimestre						Vacances
Semaine	04/01/10	11/01/10	18/01/10	25/01/10	01/02/10	08/02/10	15/02/10
Chapitre			La division				
Devoirs		Contrôle 13/01	Devoir 21/01	Contrôle 27/01			
Observ.							

	Fin deuxième trimestre						Vacances
Semaine	01/03/10	08/03/10	15/03/10	22/03/10	29/03/10	05/04/10	12/04/10
Chapitre	Périmètres et Aires		Nombres en écriture fractionnaire		Angles		
Devoirs	Devoir 01/03	Contrôle 10/03		Contrôle 25/03		Devoir 07/04	
Observ.							

	Troisième trimestre										Vacances
Semaine	26/04/10	03/05/10	10/05/10	17/05/10	24/05/10	31/05/10	07/06/10	14/06/10	21/06/10	28/06/10	5/07/10
Chapitre		Proportionnalité			Pas d'information		Symétrie axiale		Pas d'information		
Devoirs	Contrôle 28/04		Contrôle				1h 07/06 2h 09/06 1h 10/06	1h 14/06 2h 16/06 1h 17/06			
Observ.											

C.2 Contenus des chapitres 6e/ M1/ 2009-2010

Chapitre	Partie	Sous-partie
Nombres entiers, nombres décimaux	Définitions	Reconnaissance un nombre entier et un nombre décimal
		Dénomination des parties d'un nombre décimal
		Ecriture des décimaux
		Comparaison des nombres décimaux
		Encadrement des décimaux
		Multiplication division d'un décimal par 10,100,1000
		Repérage d'un point sur une droite graduée
	Opérations	Addition et propriétés
		Soustraction et propriétés
		Multiplication
		Division
Division	Quotient exact, quotient approché	Calcul de la valeur approchée, Troncature, Valeur arrondie
	Unités de temps	Conversion d'unités de temps
	Critères de divisibilité	
Figures géométriques simples	Droites, segments, milieu d'un segment	Tracer une droite
		Mesurer la longueur d'un segment
	Cercle	Reconnaître un cercle
	Triangle	Reconnaître un triangle
Positions relatives de deux droites	Quadrilatères	Reconnaître un losange
		Reconnaître un rectangle
		Reconnaître un carré
	Droites	Construction de droites perpendiculaires
	Triangle rectangle	Reconnaître un triangle rectangle
		Construire un triangle rectangle
Périmètre et aire d'une surface	Périmètre	Calcul du périmètre d'une figure simple
	Aire	Unités de mesure d'une surface
		Calcul de l'aire d'une surface
Fractions	Nombres en écriture fractionnaire	Reconnaître une fraction
		Reconnaître de fractions égales
		Calcul de la valeur approchée d'un quotient
		Multiplier par un nombre en écriture fractionnaire
Angles	Mesure d'angles	Mesurer un angle
		Construire un angle de mesure donnée
	Types d'angles	Reconnaître les différents types d'angles
	Bissectrice	Construire la bissectrice d'un angle
Proportionnalité	Proportionnalité	Résoudre des problèmes de proportionnalité
		Compléter un tableau de proportionnalité
	Pourcentage	Application d'un pourcentage
	Longueur d'un cercle	Calcul du diamètre d'un cercle un connaissant sa longueur
Symétrie axiale	Symétrie axiale	Construire une figure symétrique
		Symétrique d'un point

	Médiatrice	Construire la médiatrice d'un segment
		Déterminer l'axe de symétrie d'une figure
	Bissectrice	Construire la bissectrice d'un angle

C.3 Progression du professeur M2, classe de 5e, 2009-2010

	Fin premier trimestre							Vacances
Semaine	05/11/09	09/11/09	16/11/09	23/11/09	30/11/09	7/12/09	14/12/09	21/12/09
Chapitre		Symétries de figures simples		Fractions				
Devoirs			Contrôle n°6 20/11				Contrôle n°8 14/12	
Observ.								

	Début deuxième trimestre						Vacances
Semaine	04/01/10	11/01/10	18/01/10	25/01/10	01/02/10	08/02/10	15/02/10
Chapitre	Triangles		Nombres relatifs				
Devoirs			Contrôle n°10			Contrôle n°11 08/02	
Observ.							

	Fin deuxième trimestre						Vacances
Semaine	01/03/10	08/03/10	15/03/10	22/03/10	29/03/10	05/04/10	12/04/10
Chapitre	Angles			Opérations en écriture fractionnaire			
Devoirs			Contrôle n°13 19/03			Contrôle n°14 06/04	
Observ.							

	Troisième trimestre										Vacances
Semaine	26/04/10	03/05/10	10/05/10	17/05/10	24/05/10	31/05/10	07/06/10	14/06/10	21/06/10	28/06/10	5/07/10
Chapitre	Quadrilatères			Nombres relatifs et opérations			Aires				
Devoirs				Contrôle n°17 17/05			Devoir n°19 08/06				
Observ.							1h 11/06	1h 14/06 1h 15/06	1h 21/06		

C.4 Contenus des chapitres M2/5e/2009-2010

Chapitre	Partie	Sous-partie
Nombres. Calculs priorités	Expressions sans parenthèses	Additions et soustractions
		Multiplication et divisions
	Expressions avec parenthèses	Calcul sans calculatrice
		Calcul avec calculatrice
	Ecritures fractionnaires	Calcul opérations fractions
	Ecritures littérales	Calcul en écriture littéral
Ecritures fractionnaires	Notions	Reconnaître une fraction
		Ecrire un fraction comme nombre décimal
	Proportions	Représenter une proportion
	Quotient égal	Simplification
		Amplification
	Comparaison de quotients	Comparer deux quotients de même numérateur
		Comparer une fraction et un nombre entier
		Comparer deux quotients de même dénominateur
Nombres relatifs	Repérage	Repérage sur une droite graduée
		Repérage dans un plan
	Comparaison	Comparaison de nombres relatifs
Opérations sur les nombres relatifs		Addition
		Somme algébrique
		Soustraction
		Calcul d'une distance
Fractions	Additions, soustraction, multiplication	Calculer la somme, la reste, le produit entre fractions
Prismes droits, cylindres	Prismes droits	Reconnaître un prisme droit
		Calculer l'aire latérale d'un prisme droit
		Calculer l'aire totale d'un prisme droit
	Cylindres	Reconnaître un cylindre
		Aire d'un cylindre
Symétrie centrale	Définitions	Construire le symétrique d'un point
		Construire la symétrie d'une figure
	Propriétés	Trouver le centre de symétrie
		Trouver les axes de symétrie
Triangles	Inégalité triangulaire	Connaître la propriété d'inégalité triangulaire
	Construction de triangles	Connaissant les trois mesures
		Connaissant un angle et deux côtés
		Connaissant deux angles et un côté
	Triangle et cercle circonscrit	Construire le cercle circonscrit à un triangle
Angles et triangles	Somme d'angles d'un triangle	Dans un triangle équilatéral
		Dans un triangle isocèle
		Dans un triangle rectangle
	Angles et droites parallèles	Triangles opposés par un sommet
		Angles alternes internes
		Angles correspondants
Quadrilatères	Parallélogrammes	Identifier un parallélogramme

		Trouver le centre de symétrie d'un parallélogramme
		Connaître les propriétés d'un parallélogramme
	Rectangle	Identifier un rectangle
	Losange	Identifier un losange
Aires	Parallélogrammes	Calculer l'aire d'un losange
		Calculer l'aire d'un parallélogramme
	Triangles	Calculer l'aire d'un triangle

C.5 Progression du professeur M1, classe de 6e, 2010-2011

	Fin premier trimestre							Vacances
Semaine	02/11/10	08/11/10	15/11/10	22/11/10	29/11/10	6/12/10	13/12/10	20/12/10
Chapitre	Règle et compas			Opérations avec des nombres décimaux			Règle et équerre	
Devoirs							Contrôle 10/12 DM	
Observ.				2h 24/11			1h 15/12	

	Début deuxième trimestre								Vacances
Semaine	03/01/11	10/01/11	17/01/11	24/01/11	31/01/11	07/02/11	14/02/11	21/02/11	28/02/11
Chapitre	Règle et équerre	Division			Quadrilatères et triangle rectangle		Constructions	Nombres en écriture fractionnaire	
Devoirs						Contrôle 04/02	Contrôle 18/02		
Observ.	1h 05/01					1h 09/02			

	Fin deuxième trimestre						Vacances
Semaine	14/03/11	21/03/11	28/03/11	04/04/11	11/04/11	18/04/11	25/04/11
Chapitre	Nombres en écriture fractionnaire	Proportionnalité et pourcentages		Mesurer un angle- Rapporteur		Echelles	
Devoirs				Contrôle 01/04	Contrôle 08/04	Devoir en classe 22/04	
Observ.		2h 23/03	1h 30/03		2h 13/04		

	Troisième trimestre								Vacances
Semaine	09/05/11	16/05/11	23/05/11	30/05/11	06/06/11	13/06/11	20/06/11	27/06/11	04/07/10
Chapitre	Symétrie axiale			Aire et périmètre					
Devoirs									
Observ.				1h 01/06 Post-test 01/06	1h 06/06 Entretien				

C.6 Contenus des chapitres 6e/ M1/ 2010-2011

Chapitre	Partie	Sous-partie
Nombres entiers, nombres décimaux	Opérations	
	Ecriture d'un nombre décimal	
	Encadrement	
Multiplication et division par 10 ; 100 ; 1000	Multiplication par 10 ; 100 ; 1000	Multiplier un nombre par 10 ; 100 ; 1000
	Division par 10 ; 100 ; 1000	Diviser un nombre par 10 ; 100 ; 1000
	Systèmes d'unités	Changer d'unités de longueur
		Changer d'unités de masse
		Changer d'unités de capacité
		Changer d'unités d'aire
		Changer d'unités de volume
		Comparaison des mesures d'une grandeur en différentes unités
Règle et compas	Eléments premiers	
	Cercle	Construire un cercle de rayon donné
	Triangle	Construire un triangle dont on connaît les longueurs des 3 côtés
	Longueur	Reporter une longueur
		Mesurer une longueur
		Tracer un segment de longueur donnée
	Losange	Construire un losange dont on connaît la longueur du côté et la diagonale (ou la mesure d'un angle)
	Angles	Reproduire un angle
Opérations avec des nombres décimaux	Multiplication	Calculer un prix
	Opérations plus complexes	
Règle et équerre	Droites perpendiculaires	
	Droites parallèles	
	Droites parallèles coupées par une sécante	
Division	Division entre nombres entiers	
	Division euclidienne	
	Multiplies et diviseurs	
Quadrilatères et triangle rectangle	Rectangle	
	Losange	Construire un losange
	Carré	Construire un carré
	Triangle rectangle	Construire un triangle rectangle
Constructions	Proportionnalité	
	Pourcentage	
	Longueur d'un cercle	
Nombres en écriture fractionnaire	Droite graduée	Placer des points sur une droite graduée
	Fraction et quotient	Partager la longueur d'un segment
	Décimaux	
	Valeur approchée	
	Multiplication par une fraction	Calculer la fraction d'une grandeur
Proportionnalité et pourcentages	Notion de proportionnalité	Compléter un tableau de proportionnalité entre grandeurs
		Reconnaître une situation de proportionnalité entre grandeurs

	Coefficient de Proportionnalité	Résoudre une situation de proportionnalité entre grandeurs
	Pourcentages	Calculer le pourcentage d'une grandeur
	Échelles	Calculer l'échelle d'un dessin
		Compléter un tableau relatif à un agrandissement ou une réduction
Mesurer un angle-Rapporteur	Utilisation du rapporteur	Reproduire un angle
	Construction d'un angle	Construire un angle de mesure donnée
	Construction des triangles	Construire un triangle
Echelles	Réduction	
	Agrandissement	
Symétrie axiale	Symétrique d'un point	
	Propriétés de la symétrie axiale	
	Symétrique d'une figure	
	Médiatrice d'un segment	
	Bissectrice d'un angle	Construire la bissectrice d'un angle
Aire et périmètre	Périmètres de figures	Calculer le périmètre d'une figure
	Longueur d'un cercle	
	Aire d'une figure	
	Aire d'un triangle	

C.7 Progression du professeur M2, classe de 6e, 2010-2011

	Fin premier trimestre							Vacances
Semaine	02/11/10	08/11/10	15/11/10	22/11/10	29/11/10	6/12/10	13/12/10	20/12/10
Chapitre	Fractions		Droites parallèles et perpendiculaires			Addition, soustraction, multiplication		
Devoirs								
Observ.	Pré-test 05/11				1h 30/11			

	Début deuxième trimestre								Vacances
Semaine	03/01/11	10/01/11	17/01/11	24/01/11	31/01/11	07/02/11	14/02/11	21/02/11	28/02/11
Chapitre	Angles			Division			Symétrie axiale		
Devoirs									
Observ.		2h 11/01				1h 08/02			

	Fin deuxième trimestre						Vacances
Semaine	14/03/11	21/03/11	28/03/11	04/04/11	11/04/11	18/04/11	25/04/11
Chapitre	Quotient, proportions et proportionnalité					Aire et périmètre	
Devoirs							
Observ.			1h 01/04		2h 12/04	2h 19/04	

	Troisième trimestre								Vacances
Semaine	09/05/11	16/05/11	23/05/11	30/05/11	06/06/11	13/06/11	20/06/11	27/06/11	04/07/10
Chapitre	Aire et périmètre		Gestion de données			Parallélépipède rectangle			
Devoirs									
Observ.	1h 13/05				Post-test 12/06 Entretien				

C.8 Contenus des chapitres 6e/ M2/ 2010-2011

Chapitre	Partie	Sous-partie
Numération	Les bases	
	Dans la pratique	
	Multiplication et division par 10 ; 100, 1000	
Règle et compas	La règle	Déterminer si un point est le milieu d'un segment
	Utilisation du compas	Report d'une longueur
		Mesurer une longueur
Fractions	Fractions	
	Applications	
Droites parallèles et perpendiculaires	Droites perpendiculaires	
	Droites parallèles	
	Propriétés droites parallèles et perpendiculaires	
Addition, soustraction et multiplication	Addition et soustraction	
	Opérations à trous ou équations	
	Multiplications	
Angles	Généralités	Définition
		Mesure d'un angle
	Utilisation du rapporteur	Trouver la mesure d'un angle
		Trouver la mesure d'un angle
	Bissectrice d'un angle	Tracer la bissectrice d'un angle
Division	Définition	
	Exemples	
	Dividende décimal	
Symétrie axiale	Axe de symétrie	
	Symétrie axiale	
	Propriétés	Propriété de conservation des grandeurs
Quotients, proportions et proportionnalité	Généralités	
	Multiplier un quotient par un nombre	
	Applications	
	Proportionnalité	Déterminer une échelle
		Compléter un tableau de proportionnalité
		Calculer le temps, la vitesse, la distance
		Résoudre une situation de proportionnalité
Aire et périmètre	Périmètres	Calculer le périmètre d'une figure
		Comparer des périmètres
	Aires	Calculer l'aire d'un carré
		Calculer l'aire d'un rectangle
		Calculer l'aire d'un triangle rectangle
		Changer d'unités d'aire
		Comparer des aires
		Mesurer l'aire d'une figure
Gestion de données	Des données au tableau	
Parallélépipède rectangle		

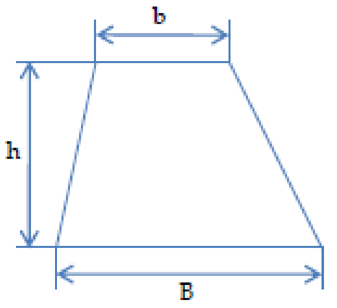
Annexe D

Pré-test et post-test

D.1 Pré-test

Problème N°1:

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule:



$$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze qui vérifie:
B=2,5 cm ; b=1,5 cm ; h=5 cm.

Ecris le détail de tes calculs dans ce cadre

Aire du trapèze:

Problème N°2:

Jean a acheté pour 54 euros de terrine de foie gras. Le kilogramme de terrine de foie gras coûte 12 euros. Quelle masse de foie gras Jean a-t-il acheté?

Explique ta réponse

Réponse:

Problème N°3:

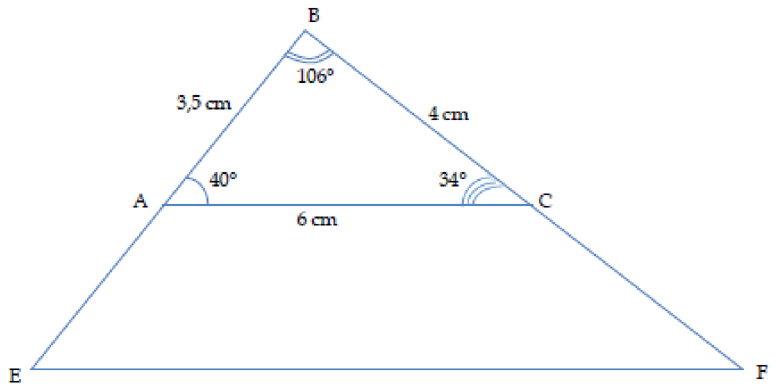
Un champ rectangulaire a une aire de 460 m^2. L'une de ses dimensions est de 23 m. Calcule l'autre dimension

Explique ce que tu fais

Réponse:

Problème N°4:

On obtient le triangle EBF en doublant les longueurs des côtés du triangle ABC.

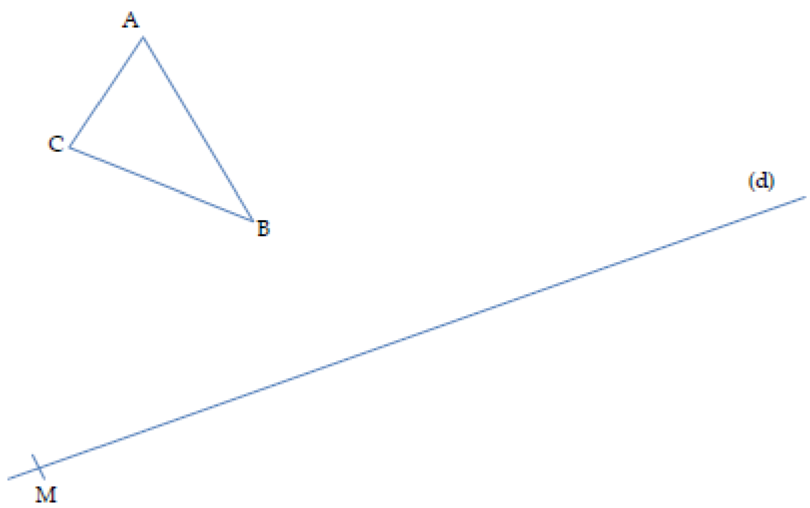


Indique dans le tableau ci-dessous les mesures (côtés et angles) du triangle EBF.

EB	BF	EF	E	B	F

Problème N°5:

Place le point N sur la droite (d) de telle manière que la distance MN soit égale à AB + BC + CA



Problème N°6:

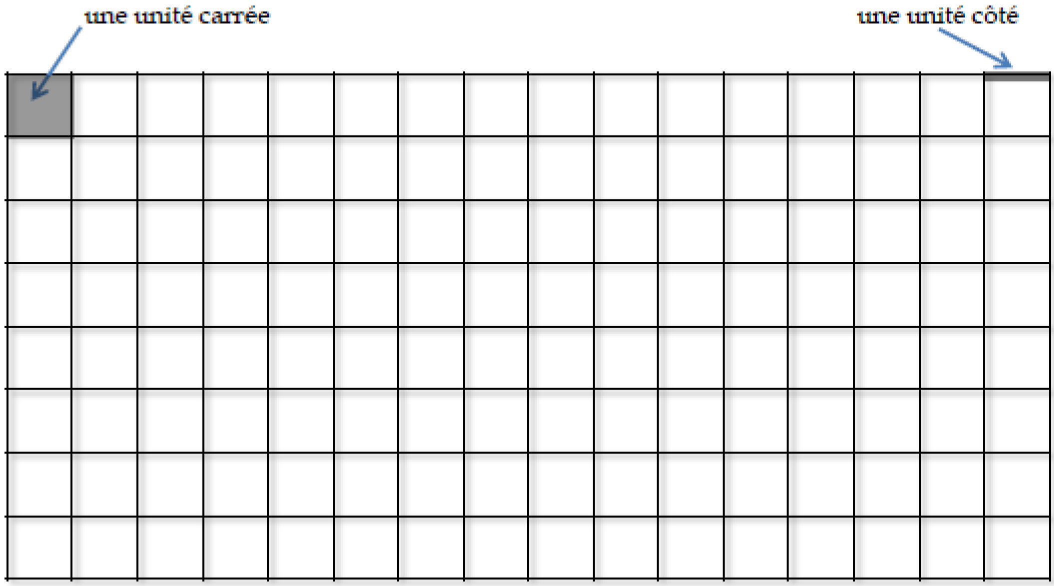
Compléter:

35,7 cm = _____________ m
8,56 m² = ______________ cm²

Explique ce que tu fais

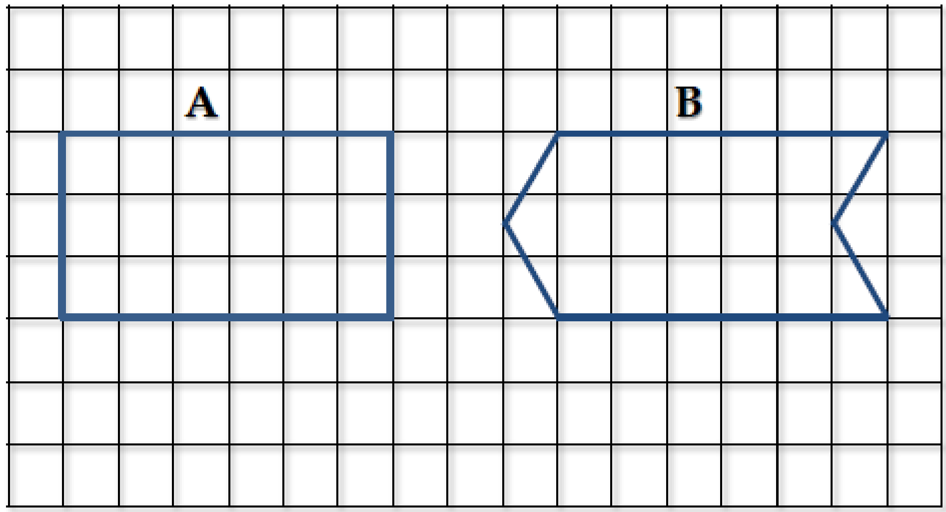
Problème N°7:

Sur le quadrillage ci-dessous, dessine une figure dont l'aire est de 5 unités-carrées et une autre dont le périmètre est de 10 unités-côtés



__Problème N°8:__

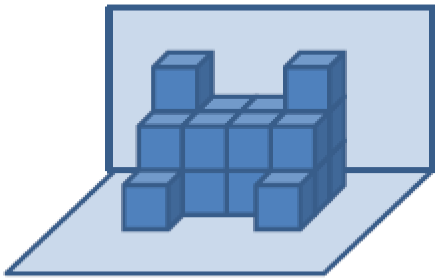
Observe les deux figures ci-dessous et réponde aux questions.



1. Comparer les aires des figures A et B. (Ont-elles la même aire? Laquelle a l'aire la plus grande? Laquelle a l'aire la plus petite?)

2. Comparer les périmètres des figures A et B. (Ont-elles le même périmètre? laquelle a le périmètre le plus grand? Laquelle a le périmètre le plus petit?)

Problème N°9:



Pierre a empilé des cubes en polystyrène contre un mur. Sachant qu'il n'y pas de trous dans la construction :

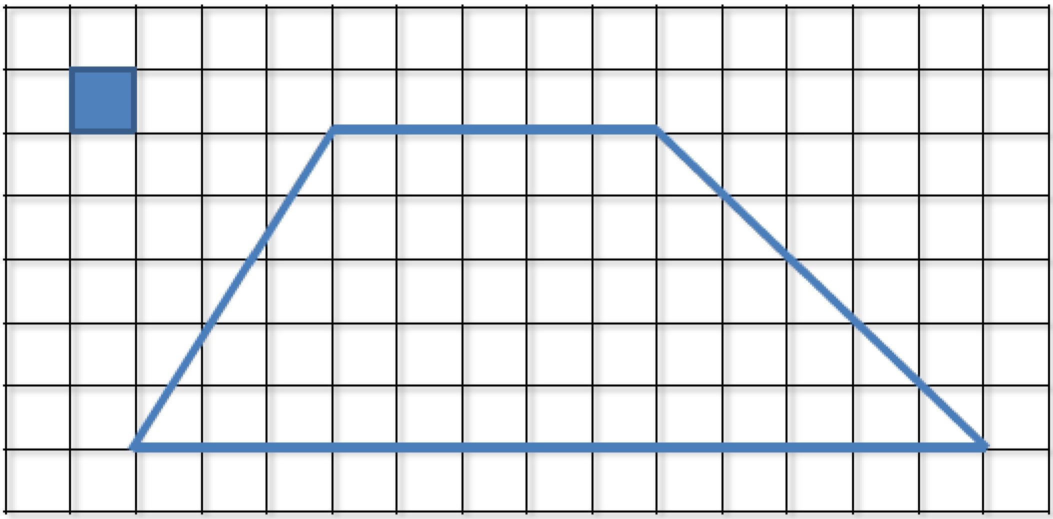
a) Combien de cubes a-t-il utilisé?

a) Si chaque cube a un volume de 8 dm^3. Quel est le volume de la construction?

D.2 Post-test

Problème N°1:

Calcule l'aire de ce trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré. :



Ecris le détail de tes calculs dans ce cadre

Aire du trapèze:

Problème N°2:

Les dimensions d'une table rectangulaire sont 2,50 m et 0,96 m.

a) Quelles sont ses dimensions en cm ?

b) Quelle est son aire en dm^2?

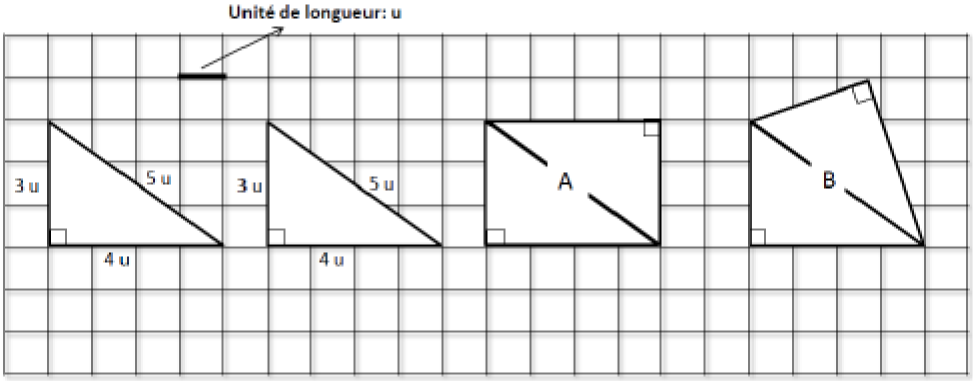
Explique ta réponse

Réponse: a)

b)

Problème N°3:

Pierre a réalisé deux assemblages différents A et B des deux pièces triangulaires, comme l'indique la figure ci-dessous.



Quel est le périmètre de chacun des assemblages A et B?

Périmètre assemblage A:

Périmètre assemblage B:

Problème N°4:

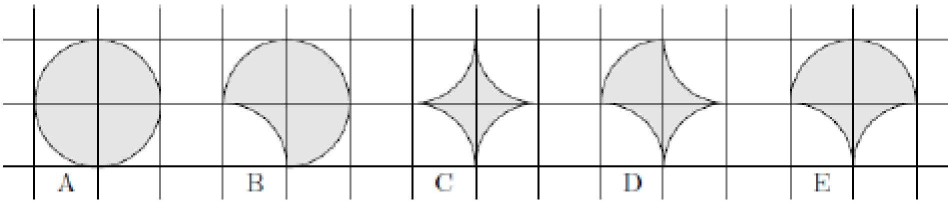
Un magasin de jouets fait une réduction de 15 % sur le prix des robots. Quel sera le prix d'un robot vendu initialement à 90 euros?

Écris le détail de tes calculs

Réponse:

Problème N°5:

Les figures ci-dessous ont été construites à l'aide d'un quadrillage à mailles carrées. Les contours de ces figures sont formés d'arcs de cercles de même rayon.



1) Compare les périmètres des figures A,B,C,D,E.

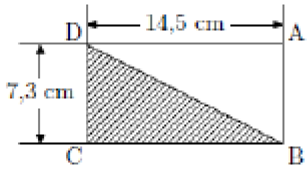
Réponse et explications

2) Range toutes ces figures de la plus petite aire à la plus grande.

Réponse et explications

Problème N°6:

ABCD est un rectangle. Calculer l'aire de la partie hachurée.



Écris le détail de tes calculs

Réponse:

Problème N°7:

Luc possède des petits carrés de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des rectangles d'aire 36 cm².

Dessine deux possibilités de rangement qui donnent des rectangles différents.

Annexe E

Transcriptions des séances concernant la proportionnalité dans les classes des professeurs M1 et M2

Convention de transcription :

M1, M2, M3 = le maître
E = élève non identifié
E1, E2, E3… = élève identifié
Es = Plusieurs élèves parlent à l'unisson

(Description) = indications de gestes qui accompagnent le discours.
(?) = le transcripteur n'est pas sûr de sa proposition
xxx = le transcripteur ne parvient pas à décoder ce qui est dit
(…) = pause dans le discours
// = le discours est coupé ou interrompu
/// = Transcripteur coupe le discours
† = Ecriture sur le tableau
Fig n° 1, 2, 3 … (S1,S2, … + M1, M2, M3) = Figure ou dessin, avec la séance et le maître.

E.1 Séance concernant la proportionnalité dans la classe de M1

Séance 6/M1/2010-2011/Chapitre : « Proportionnalité »

Enseignant : M1

Classe : 6e

Date: 23/03/2011

Type de séance : Activité d'introduction du concept de proportionnalité

Temps h :m :s	Extrait
0:00:00	M1: Partie leçon
0:00:14	M1: Donc, heee, vous laissez 5 ou 6 lignes xxx, et je vous propose l'activité suivante...là vous laissez 5, 6 lignes à peu près (...)
0:00:54	M1: Alors, je vous propose la situation suivante: (M1 écrit sur le tableau) Pierre achète 4 cahiers identiques et paie 10 euros. Combien aurait-il payé s'il avait acheté 2 cahiers? 6 cahiers? 8 cahiers? Au brouillon vous cherchez, savoir comment xxx vraiment en place pour xxx
0:02:42	(Elèves travaillent individuellement)
0:03:31	M1: je vous laisse réfléchir deux minutes
0:09:15	M1: Alors, donc ici (...)
0:09:57	(Elèves parlent entre eux et M1 circule dans la salle en contrôlant les productions des élèves)
0:11:02	M1: Bon, c'est bien parce que ce je vois que parmi vous il y a plusieurs formes d'envisager les choses. (M2 contrôle toujours le travail)
0:11:17	E: 2 cahiers= 5 euros
0:11:28	M1: oui d'accord mais 2 cahiers n'est pas égal à 5 euros, il faut être plus précis
0:13:05	M1: alors, d'accord, bon! heee (...) Donc ici, j'ai vu plusieurs personnes répondre à la question. Si je sais que 4 cahiers coûtent 10 euros, xxx Marie 4 cahiers vont coûter combien? Shhh
0:13:39	E: Si on divise 10 par 2, et 4 par 2 xxx
0:13:56	M1: oui, si j'achète deux fois moins de cahiers il semblerai évident que je vais payer la moitié. Donc (M2 écrit sur le tableau) si j'achète deux cahiers on va payer 2 fois moins que

	pour 4, soit 10:2=5e. Si maintenant, j'achète 6 cahiers, je vais payer combien?
0:15:07	E: Moi, est-ce que j'ai fait c'est trouver le prix d'un seul cahier, C'est à dire 10 divise par 4, 2 euros 50 et je multiplie par 6, 15 euros
0:15:23	M1: D'accord, pour le moment vous marquez rien, j'enregistre ce que vous me dites. Donc tu me dis, donc heee (...) (M1 écrit sur le tableau): Si on achète 1 cahier on le paie 10:4=2,50e, donc 6 cahiers coûtent 2,5x6=15e. Est-ce que quelqu'un a trouvé une autre façon de trouver le prix de 6 cahiers?
0:16:12	E: Et on fait 5e fois 3
0:16:15	M1: xxx 6 c'est le prix de... de... 2. Bon, (M1 écrit au tableau): Deux cahiers coûtent 5e, 6 cahiers représentent le triple de 6 cahiers, donc ils coûtent 5X3=15euros. On arrive au même résultat
2:50:50	E: Si on a 4 cahiers, 4+2 ça fait 6 cahiers, 10+5 ça fait 15 euros
0:17:13	M1: ah, si on connaît le prix de 4 et le prix de 2, si j'en achète 6, donc (...) le prix de 6 cahiers est égal au prix de 4 cahiers augmenté le prix de 2 cahiers, 10+5=15euros. Donc, vous voyez ici, on a combien de façons de trouver ça? //
0:18:40	M1: Donc, je dirai que xxx heee et si je veux 8 cahiers?
0:18:58	E: Donc, heee deux cinquante, ha non!
0:19:00	M1: oui, deux cinquante fois huit
0:19:04	E: ah, mais on peut aussi quadrupler
0:19:06	M1: ah! Donc pour 8 cahiers, on paie 8 fois le prix d'un cahier //
0:19:16	E: On a aussi qui 4 cahiers coûtent 10euros xxx
0:19:24	M1: Oui, on remarque que 8 = 4 x 2, donc on paie 8 cahiers le double du prix de 4, autrement dit 10x2, Voilà. D'après ce que j'ai vu dans vos cahiers de brouillon, vous avez mis certainement en place le passage systématique de qu'on parle. D'autre, on utilisait ici, les liens qu'il avait entre le nombre des cahiers et xxx.
0:20:22	E: mais aussi 6 cahiers et qui coûtent 15euros, et donc 6 est 15+5 ça fait 20
0:20:28	M1: D'accord, 8 c'est 6, 2, donc on paie 8 cahiers en ajoutant le prix de 6 au prix de 2, c'est-à-dire 15+5=20 euros. Bon, ça va xxx que vous avez mis en place
0:21:15	Es: oui!!!
0:21:16	M1: Vous avez vu que xxx nous amènent au même résultat. Alors, au cours. Qu'est-ce qu'il y a dans l'énoncé qui peut faire que c'est qui est écrit là paraît normal?
0:21:56	E: xxx
0:22:00	M1: Oui, mais il y a un mot
0:22:01	E: Il paraît évident que lorsque hee
0:22:08	M1: ah oui, mais est-ce que est évident heee, pourquoi? Moi, je lisais dans l'énoncé un mot qui xxx
0:22:17	M1: Ici, j'ai dit qu'on a acheté des cahiers...
0:22:20	E: Identiques, s'il n'y a pas //
0:22:22	M1: identiques, donc donné qu'ils sont identiques qu'on peut que xxx pour que tous ont le même prix, d'accord. Et alors, heee, ici j'aurais pu résumer un petit peu tout ça sur la forme d'un tableau de nombres, d'accord. Donc, on peut écrire ces résultats sur la forme d'un tableau. Dans ce tableau qu'est-ce que je vais faire intervenir? qu'est-ce qui va comprendre ce tableau?
0:23:24	E: le prix
0:23:27	M1: Donc je dois avoir le prix de cahiers et puis?
0:23:37	E: le nombre, le nombre de cahiers
0:23:37	M1: le nombre de cahiers que je vais acheter, d'accord. Donc, dans ce tableau, je vais trouver ici le nombre de cahiers identiques achetés et puis le prix payé en euros. Je vous laisse marquer ce qui est là.
0:24:43	(Elèves copient ce qui est écrit sur le tableau)
0:27:05	(Sonnerie) M1: vous sortez

E.2 Séance concernant la proportionnalité dans la classe de M2

Séance 8/ M2/2010-2011/Chapitre: "Quotients, proportions et proportionnalité"

Enseignant : M2

Classe: 6e

Date: 12/04/2011

Type de séance: Séance d'exercices sur les échelles, et ensuite sur la proportionnalité à la minute 41.

Temps h :m :s	Extrait
0:40:54	E: alors, on va corriger les deux exos, qu'on avait pour aujourd'hui
0:41:05	M2: allez, maintenant on va corriger, ce que vous aviez à faire pour aujourd'hui.
0:41:08	E: oui!!!
0:41:24	M2: alors, pour les exercices, il y avait pour aujourd'hui le 1, le 2 et le 5. Donc le 1, je voudrais voir....Tiffany pour le 1
0:41:39	E: moi le 2 s'il vous plaît !
0:41:39	M2: shut, stop!
0:41:47	(Tiffany passe au tableau pour faire l'activité 1 de la page 68, mais les élèves continuent à poser des questions sur l'activité précédente)
0:43:31	M2: correction du départ et après j'enverrai quelqu'un, on a Shérazade achète des cerises à 2 euros le kilo, ça veut dire quoi 2 euros le kilo?
0:43:39	E: 2 euros le kilo!
0:43:46	M2: alors (M2 écrit en même temps) 1 kilo, 2 euros, d'accord, soit vous le mettez comme ça, soit comme ça. Après, on dit elle paie 3 euros 36, ça va avec les kilos ou avec les euros?
0:44:09	E: bah, euros!
0:44:10	M2: euros quoi (M2 complète au tableau avec 3,36 et en bas de 2 €), en fait, on nous demande ça (il marque le symbole "?" en bas de 1 kg) d'accord, Tiffany vas-y! (Tiffany complète à la place du symbole "?" par 1680 g)
0:45:24	M2 : déjà tu mes 1680, d'où ça vient 1680 ?
0:45:24	Tiffany : c'est en grammes
0:45:26	M2: oui, mais pourquoi 1680 ? il y a un 2, un 1 et un 3,36
0:45:37	Tiffany: je calcule
0:45:39	M2: et voilà, je veux les calculs alors pour que je comprenne
0:45:42	Tiffany: xxx peut être ça ne va pas, comme c'est en kilos
0:45:45	M2: c'est pas demandé, c'est demandé quelle quantité de cerises a-t-elle achetée, c'est demandé en kilo?
0:45:49	Tiffany : non
0:45:49	M2: alors, tu réponds à la question, les autres se taisent et après on verra, et s'il faut le transformer, on le transformera, maintenant tu réponds
0:46:00	(Tiffany écrit à la ligne 500g x 3,36 g = 1680)
0:46:36	M2: pourquoi t'as fait 500g ?
0:46:41	E: oui?
0:46:43	Tiffany: parce que 1 € est égal à 500 g
0:46:43	M2: ahh, écris ça quelque part, tu mets une flèche alors
0:46:50	Tiffany (tout en bas elle met 1e = 500 g)
0:46:52	(sonnerie)
0:46:57	M2: on corrige ça et après on fait la pause, d'accord? on la laisse terminer, on corrige et

	après on fait la pause
0:47:10	M2: ok merci, alors elle a fait la chose suivante: Puisque, 2 euros, avec deux euros on achète un kilo de cerises, c'est-à-dire pour 1 euro elle aura la moitié d'un kilo, elle va avoir 500g. Est-ce que déjà avec ça on est d'accord?
0:47:31	Es: oui
0:47:33	M2: j'ai pas demandé de lever la main, baissez les bras pour l'instant, est-ce que vous êtes d'accord avec ça?
0:47:37	Es: oui
0:47:37	E: oui, mais pas avec ce qu'il y a au-dessus
0:47:41	M2: bon, c'est juste, ensuite puisqu'elle n'achète pas 1 euro de cerises, mais elle achète pour 3,36 de cerises, bah elle a multiplié les 500 g par 3,36, d'accord? Est-ce que ça vous l'avez compris?
0:47:58	E: oui
0:47:59	E: non
0:48:01	M2: si 2 euros est 1 kg de cerises, pour 1 euro elle aura la moitié, soit 500g. Et puisque, elle va pas acheter 1 euro, elle va acheter 3,36 euros, pour passer de 1 à 3,36 on multiplie par 3,36// tu veux comprendre, tu écoutes! je te demande pas comment t'as fait, tu m'as dit j'ai pas compris, je t'explique ça! // Pour passer de 1 à 3,36, on multiplie par 3,36, c'est la même chose, parce que si elle achète par 3,36, ça sera 3,36 fois plus que pour 1 euro, et après elle a fait la multiplication et elle a trouvé 1680 g, donc elle a trouvé un moyen de trouver la réponse en passant par combien il y aura de cerises pour 1 euro et après ce que j'aurai pour 3,36 (M2 enlève g de 3,36 dans le tableau) Bon, ça c'est une méthode c'est juste! (…) Est-ce qu'il y a une autre à proposer?
0:49:10	E: oui
0:49:18	M2: alors…(Un élève passe au tableau, mais il n'écrit pas de solution, puis il repart à sa place)
0:50:46	E: (autre élève passe au tableau), pour savoir je fais ahh//
0:50:50	M2: laisse ta calculatrice, on connaît le résultat
0:50:54	E: 3,36 fois 1 kilo et le résultat je l'ai divisé par 2,
0:51:02	M2: alors, écris 3,36 fois 1 et puis divisé par 2, et t'as trouvé? 1,68 (l'élève écrit 3,36 x 1 : 2 = 1,68 kg) Ok, est-ce qu'il y a un autre moyen?
0:51:31	E: oui monsieur!
0:51:34	M2: Laura
0:51:38	E: on peut diviser 3,36 divisé par 2
0:51:38	E : c'est pareil !
0:51:39	M2: c'est pareil, mais effectivement le produit en croix, alors je vous ai dit la dernière fois que le produit en croix c'est un truc qui passe par tout, mais c'est pas toujours le cas. Pour passer de 2 à 1 (le professeur pointe 2 euros, puis 1 kg), on divise par 2, et pour passer de là à là (le professeur pointe 3,36 euros, puis le symbole « ? ») je divise par 2, 3,36 divisé par 2, et ça nous fera…///
0:51:50	A la calculette, ça nous fera comme le produit en croix

Annexe F

Transcription des séances concernant les aires dans les classes de 6^e et 5^e du professeur M2

Convention de transcription :

M1, M2, M3 = le maître
E = élève non identifié
E1, E2, E3… = élève identifié
Es = Plusieurs élèves parlent à l'unisson

(Description) = indications de gestes qui accompagnent le discours.
(?) = le transcripteur n'est pas sûr de sa proposition
xxx = le transcripteur ne parvient pas à décoder ce qui est dit
(…) = pause dans le discours
// = le discours est coupé ou interrompu
/// = Transcripteur coupe le discours
□= Ecriture sur le tableau
Fig n° 1, 2, 3 … (S1,S2, … + M1, M2, M3) = Figure ou dessin, avec la séance et le maître.

F.1 Séance concernant les aires dans la classe de 5^{e} du professeur M2

Séance 1: Aires / 2009-2010/ Chapitre : « Aires «

Enseignant : M2

Classe : 5e

Date : 11-06-2010
Type de séance : Aire du losange

M/S	Extrait
00:52	**(M2 donne les moyennes)**
03:44	M2: Vous prenez le cahier d'exercices et vous écrivez le titre du chapitre./// Alors dans ce chapitre on va rappeler très rapidement// on va ajouter à ça l'aire du losange, qu'on verra tout à l'heure, on rejouera après le parallélogramme, le triangle, peut être que vous le connaissez déjà xxx et quand on aura ça on va essayer de calculer des surfaces des figures un peu plus complexes. Et après on terminera par les droites particulières que vous connaissez déjà, la médiatrice on a déjà parlé, la bissectrice, on a déjà parlé aussi, la hauteur, on parlera un petit peu et les médianes/// Bon, je vous donne la première partie, vous collez ça sur votre cahier d'exercices, c'est rappel 6e, je vous laisse quelques minutes.
06:49	**(M2 donne ma feuille avec la figure Fig1S1M2 et Fig2S1M2)**
09:26	**(M2 dessine les figures au tableau, les élèves travaillent dans leurs places)**
14:59	M2: on va vite corriger ça, après je donne la suite, et la j'enverrai quelqu'un au tableau. Alors dans le premier, vous avez ici deux exemples xxx vous savez calculer l'aire du rectangle et après de figures complexes comme ici, hee il n'y a pas de formule pour les figures complexes. Par contre il y a des choses qu'on peut observer, que ce point qui est là, on peut le mettre ici, du coup ça déplace plus et là c'est complet. D'accord? Et pareil pour l'autre partie, celle-ci on peut la mettre ici, donc j'ai plus de point et là c'est complet. Je me retrouve avec un ...
15:49	Es: rectangle

15:51	M2: qui mesure combien sur combien?
15:53	E1: 4 sur 3
15:53	M2: 3 sur 4, donc l'aire... comment on fait pour calculer l'aire du rectangle? // Longueur par largeur, shunt la longueur c'est...
16:17	E: 3
16:19	M2: 3? Alors la longueur c'est la plus grande, alors c'est...
16:19	Es: 4
16:21	M2: 4, la largeur?
16:22	E: 3
16:23	M2: 3, la réponse xxx est 12 rien d'autre. Si par contre, il y avait l'unité, parce que effectivement cette figure, elle est au départ en centimètres. S'il y avait une unité, il faut mettre quoi derrière?
16:47	Es: centimètres carrés
16:50	M2: centimètres carrés, vous êtes en dimension 2, donc centimètres carrés d'accord. Soit vous mettez rien parce qu'il a rien au départ est c'est 12 sans rien. Soit s'il y a l'unité c'est l'unité qui doit avoir le carré, parce que ça c'est 4cm x 3 cm donc le cm // Alors le deuxième c'est quand même une histoire de je connais deux questions et deux réponses, qu'on fera pas ici, par contre je peux considérer ma figure comme xxx
17:32	E1: triangle carré
17:33	M2: Voilà en deux parties
17:48	**(E passe au tableau)**
19:07	M2:bon, vu qu'il y a quand même des interrogations, c'est pourquoi le A ça sera la moitié de la longueur de carré, bon c'est vrai qu'au départ c'était fait sur un quadrillage, donc du coup il y avait xxx qui permettait de savoir que... xxx il est pas passé
19:23	E1: C'est quoi la réponse monsieur?
19:25	M2: la réponse finale c'est 8,5. Ça c'est pour le carré, ça c'est pour le triangle rectangle et ça c'est la réponse finale. Donc partez du principe que il y avait bien un quadrillage derrière, donc il y avait bien un angle droit pour le rectangle et il y a bien un carré xxx
19:40	E: xxx quadrillage xxx
19:44	M2: bah, si on commence à se poser ce genre de questions, après on s'en sort plus
19:47	E1: mais vous nous avez dit de toujours poser de questions comme ça
19:49	M2: C'est vrai, xxx on part du principe que ce un quadrillage, c'est là qu'il est pas passé
19:59	E1: On a pas la preuve que c'est un quadrillage
20:01	M2: C'est vrai, donc on peut pas le faire. Mais vous avez raison, vous avez tout à fait raison (...) Bon, je vous donne l'aire fixe, l'aire fixe c'est le losange, le losange, on a jamais vu la formule qui permet de calculer la surface, heee. Voilà, je vous donne ça, vous le collez en dessous, pareil vous faites et là quelqu'un passe au tableau pour répondre aux questions.
20:50	**(M2 passe une deuxième feuille avec la figure Fig3S1M2, les élèves travaillent)**
30:11	M2: Bon, allez, qui veut faire ça? Ça va?
30:18	**(Elève passe au tableau)**
30:21	M2: il y a plusieurs possibilités pour déplacer votre triangle rectangle de manière d'obtenir un rectangle.
34:59	M2: Alors il y a plusieurs possibilités, on va commence à placer deux triangles rectangles, on le colle xxx d'accord, pareil ici/// Par contre quand vous avez calculé la surface, qu'est-ce que vous avez fait comme calcul?
35:59	E: xxx
36:10	M2: pour avoir l'aire du losange, on peut pas le faire
36:18	E: la longueur par la largeur
36:23	M2: la longueur par la largeur, alors la longueur il fait combien?
36:25	E: xxx

36:35	M2: si vous prenez le bleu qui est là, là vous avez 1, 2, 3 d'accord? Et ici vous avez 1, 2, et demi d'accord? Où alors si vous prenez le rouge, le rouge ça va vous donner 1, 2, 3, 4,5, et 1 et demi. Ça dépend de la figure comme vous l'avez obtenue, soit le rectangle bleu qui vous donne 3 X 2,5, soit le rectangle rouge qui vous donne 5 X 1,5, en total ça vous fait combien?
37:13	E1: 7,5
37:16	M2: 7,5 d'accord? Donc là vous êtes ramenés, xxx le losange, je déplace les morceaux pour obtenir un rectangle, parce que je sais calculer l'aire d'un rectangle. Maintenant, si je regarde précisément, c'était quoi le 5 dans mon losange?
37:39	E1: C'était les deux parties mises à côté, la diagonale, la diagonale!!!
37:46	M2: c'était la longueur de la grande diagonale. C'était ça, d'accord, et si je regarde cette formule là donc le 5 c'est la longueur de la grande diagonale et le 1,5 c'est quoi?
37:58	E: la moitié de la petite
38:01	M2: la moitié de la petite. Si je regarde cette partie là, d'accord? Si je regarde l'autre partie qui est là, le 3 c'était quoi?
38:13	E: C'était la diagonale
38:17	M2; la longueur, la longueur de la plus petite diagonale et le 2,5 c'est la...
38:21	E: la moitié de la grande diagonale
38:26	M2: la moitié de la grande diagonale, la moitié de la longueur de la grande diagonale, c'est que vous fait, la petite diagonale, multipliée par la moitié de la grande diagonale. Donc est-ce que vous pouvez trouver une formule qui permet de calculer l'aire du losange? En cas général ///
38:56	E: xxx
39:01	M2: donc je prends la longueur de la grande multipliée par la petite, et après xxx, donc je multiplie les diagonales et je divise par 2/// Et en quoi le côté du losange va me servir pour calculer l'aire?
40:23	E: jamais
40:24	M2: jamais! Donc le côté du losange sert pas à calculer la surface, contrairement au carré, contrairement au rectangle/// Donc écrivez dessus, quelque part de votre copie, aire de losange égale D x d/2
41:19	**(M2 écrit la formule sur le tableau et réexpliquer la formule)**
44:02	M2: donc prenez vos cahiers de cours, parce qu'on va vraiment commencer. Le titre du chapitre "Rappels: aires de figures usuelles"

F.2 Séance concernant les aires dans la classe de 5^e du professeur M2

Séance 13/M2/ 2010-2011/Chapitre : "Périmètres et Aires"

Enseignant: M2

Classe: 6e

Date: 13/05/2011

Description : Séance après la rentrée des vacances de printemps. M2 corrige des exercices de la séance précédente et ensuite distribue une feuille avec des exercices portant sur les aires.

h :m :s	Extrait
0:00:04	M2: page 160...
0:00:05	E: 162
0:00:16	M2: bon, alors, j'envoie qui? shut!!! Zoia tu fais le 9? (Zoia passe au tableau act.9, p.162)
0:00:42	M2: Camille le 10. (Camille passe au tableau, act.10, p.163)
0:01:38	(Zoia écrit 24,5)
0:01:41	M2: 24 et demi
0:01:44	Zoia: unités carrées (Zoia efface et met 24 et le dessin d'un carreau)
0:02:14	M2: pourquoi 24?
0:02:14	Zoia: parce que xxx la moitié petite, et à côté il y a deux cercles
0:02:25	M2: il y a deux cercles? Il y a un disque, et avec ce cercle qu'est-ce que t'en fais?
0:02:38	Zoia: bah, je coupe
0:02:39	M2: tu coupes en deux et? tu combles les trous, donc du coup tu te trouves avec un quoi?
0:02:46	Zoia: avec un rectangle
0:02:46	M2: un rectangle qui fait combien sur combien?
0:02:50	Zoia: 3 sur 8
0:02:54	M2: 8, donc c'est pour ça que ça fait 24. Tout le monde est d'accord?
0:02:58	Es: oui
0:02:59	M2: vous avez le droit de découper, de combler les trous toc, toc, ça marche, ça vous fait un rectangle. Ce rectangle fait 3 carreaux sur 8 carreaux, ça fait 24 carreaux. Pourquoi 30 unités? Cami?
0:03:13	Camille: parce que xxx
0:03:18	M2: oué, on tombe sur un rectangle qui fait 1,2,3,4,5 sur 1,2,3,4,5,6, oui, 5 fois 6. D'accord? Donc tout ça a été fait soit par découpage ou on comble les trous pour obtenir des figures simples, soit la deuxième partie vous collez un morceau et puis en morceau, en fait ça vous un rectangle. ça va? c'est bon? Bon, je vous distribue un papier que je voulais vous distribuer la dernière fois, mais que je n'avais pas pris, vous la collez dans votre cahier exercices et c'est pareil, c'est une figure, vous calculez l'aire de chacune des figures et le périmètre si c'est possible.
0:04:03	E: vous avez dit quoi? c'est pas possible?
0:04:05	M2: on verra
0:04:08	(M2 distribue les feuilles et les élèves travaillent)
0:05:29	M2: pour ceux qui ont passé le concours kangourou, si tout va bien, il y aura la remise des prix jeudi prochain à 11h.///

0:19:25	M2: alors, on va faire le bilan! (...) Alors, pour le premier. Alors, Farah tu fais les deux premiers
0:20:25	E: est-ce qu'on va expliquer, monsieur comment on a fait?
0:20:34	M2: alors, l'aire qui t'as trouvé? (Farah écrit 37,5) Tttttt, l'unité?
0:20:45	Farah: ah si! (Farah met le dessin d'un carreau)
0:20:48	M2: alors 37,5 carreaux, alors quel est le périmètre? (Farah écrit 33,5) Alors comment tu as fait pour trouver 33,5?
0:21:03	Farah: bah, je compte tous les petits traits du carreau, et be up, ça fait 33 carreaux
0:21:10	M2: alors il y a un qui traverse un carreau, (M2 écrit 34), 34, bon je vais le faire là, il y a le quadrillage (M2 dessine la figure au tableau). Alors ça c'est l'unité de longueur, c'est unité de longueur, ça représente la longueur d'un carreau, qu'elle soit là, ou qu'elle soit là, c'est la même, donc vous pouvez comptabiliser tout ce qui est horizontal, tout ce qui est vertical. (M2 marque la diagonale du carreau). ça c'est pas la même chose que ce qui est blanc!
0:22:09	E: ah bon?
0:22:10	E: ah bon?
0:22:12	E: mais c'est plus grand!
0:22:14	M2: pourquoi?
0:22:21	E: c'est pareil
0:22:21	E: c'est la diagonale
0:22:22	M2: alors çaaaaaa.... qu'est qu'on a fait cette année? je suis pas sûr qu'on la fait cette année. Qu'est que vous avez comme angle droit ici? comme angle, pardon? (M2 montre l'angle droit du carreau)
0:22:30	Es: un angle droit
0:22:32	M2: un angle droit qui fait combien?
0:22:34	Es: 90°
0:22:36	M2: 90°, d'accord? c'est un triangle qui est comment celui-ci?
0:22:42	Es: rectangle!
0:22:44	M2: rectangle et?
0:22:49	E: isocèle
0:22:52	M2: ces deux-là sont égaux, on va voir qu'il n'est pas équilatéral, il est isocèle. Dans un triangle isocèle, je sais pas si on la vu cette année, mais bon! Tan pis! est-ce que vous savez qu'est-ce il y a de particulier dans les angles d'un triangle isocèle?
0:23:12	E: il y a deux angles xxx
0:23:14	E: deux angles égaux!
0:23:19	E: l'angle fait 90, les autres deux angles font 45.
0:23:24	M2: alors ces deux angles-là sont égaux et ils font 45, car 45 + 45 + 90 ça fait la totalité, donc ça fait 180. D'accord?, Oh!, là ça fait 45, 45, si vous aviez un triangle équilatéral, donc trois côtés égaux, qu'est-ce que vous auriez forcément comme mesure d'angle? est-ce que vous le savez?
0:23:47	E: 60
0:23:48	M2: 60, parce que la somme fait 180; 60, 60 et 60 ça fait 180, et comme à chaque fois vous avez cette partie-là, ces deux côtés égaux, donc ces angles-là sont les mêmes. Cette partie-là sont les mêmes, deux côtés égaux, donc ces angles-là sont les mêmes, donc du coup vous avez partout les mêmes angles. Donc, obligatoirement, vous avez 6à dégrées. Ici, vous avez 90 ça peut pas être 80.
0:24:15	E: ils s'appellent comment les trois, les trois?
0:24:20	E: 45 + 45+90 ça fait 180
0:24:21	M2: oui
0:24:25	E: pour tous les triangles?

0:24:26	M2: 180 c'est pour tous les triangles
0:24:30	E: il s'appelle comment ce triangle-là?
0:24:32	M2: équilatéral. Donc quand vous avez 90 degrés, ça peut pas être un triangle équilatéral, donc ce côté bleu, il est forcément plus grand que les deux autres.
0:24:40	E: mais pourquoi? quel rapport?
0:24:43	M2: bah, donc ici, il est plus grand, c'est-à-dire qu'on peut pas comptabiliser ahhh, quand vous avez comme dans la figure, quand vous avez ça. On peut comptabiliser celui-là, celui-là, celui-là, celui-là, mais pas celui-là. Donc, le truc, la totalité sans lui ça doit faire 37, non...
0:25:09	E: 33
0:25:09	M2: 33, et lui....
0:25:12	E: non 37 degrés donc
0:25:13	M2: on sait pas, donc... à cause de lui je peux pas calculer le périmètre
0:25:20	E: donc monsieur ça y est? ça fait 32? ça fait 33 si on le compte
0:25:26	M2: on peut tout compte sauf lui
0:25:28	E: oui, mais si on le compte pas dans la figure, ça fait 32
0:25:32	E: ça fait 33
0:25:33	M2: 32, 32 plus lui
0:25:36	E: moi aussi , j'avais mis 33
0:25:37	M2: j'ai pas dit ça avant, j'ai dit le périmètre si on le connaissait ça serait 32 plus cette longueur-là, mais cette longueur-là on la connait pas, donc c'est pas 32
0:25:48	E: donc c'est pas ça?
0:25:49	M2: c'est un truc, un peu plus que 32
0:25:50	E: donc on peut pas dire que c'est 32?
0:25:51	M2: on peut pas dire, pensez que ça c'est plus que 1, parce que c'est plus grand, donc on sait que ça serait 33 et quelque
0:26:08	E: mais monsieur on peut le mesurer
0:26:09	M2: oui, mais on peut pas le mesurer exactement donc...on peut pas le faire.///
0:26:29	M2: bon, dans le deuxième 8 carreaux pour l'aire, vous êtes d'accord?
0:26:33	E: oui!
0:26:36	M2: 8 longueurs pour le périmètre, vous êtes d'accord?
0:26:38	E: non
0:26:39	E: non
0:26:44	M2: on peut pas calculer puisque vous êtes sur des longueurs qui sont en biais
0:26:48	E: bah oui
0:26:52	M2: et comme il y a que des longueurs en biais partout, on peut pas calculer, mais comme il vous donne pas l'unité de longueur, l'unité de longueur, c'est pas l'unité de 8, la longueur du carreau
0:27:04	E: on met quoi alors monsieur? (M2 efface 8 longueurs et met une croix)
0:27:11	M2: ensuite, j'envoie quelqu'un pour 7 et 8, Emma! pour 7 et 8! (Emma passe au tableau. Elle écrit pour la Figure 7, aire =29 carreaux)
0:28:02	Emma: le périmètre on peut pas le faire monsieur
0:28:02	M2: d'accord, bon, tu mets une croix.
0:28:03	(Emma met une croix et continue pour la figure 8, elle écrit 12 carreaux)
0:28:07	M2: alors 29 on accepte (...) 12 pour F8, alors quel est le périmètre? le périmètre est en biais.
0:28:28	(Emma met une croix pour le périmètre de F8)
0:28:28	E: oui, mais après xxx
0:28:29	M2: ah non, parce que, rappelez-vous le découpage et... vous pouvez pas faire de

	découpages pour le périmètre
0:28:34	E: si on peut, on peut!
0:28:35	M2: non, on peut pas
0:28:39	E: mais monsieur, si on redresse la figure ça fait 14
0:28:43	M2: mais t'as pas le droit de redresser la figure
0:28:43	E: mais c'est pas grave parce que//
0:28:44	M2: mais si
0:28:44	E: ça fait la même chose
0:28:45	M2: t'as pas le droit de redresser
0:28:49	E: oui, mais c'est quand même juste, si je la redresse
0:28:52	M2: si tu redresses et... cette longueur-là comme ça sera la même
0:28:57	E: ça sera la même
0:28:58	M2: mais ça, si tu sais pas ce qu'elle va faire, quand ça sera debout
0:29:01	E: pourquoi? mais si je peux le savoir
0:29:04	M2: comment dire? shut! je redresse ça et je le mets tout droit
0:29:10	E: oui, mais regardez!
0:29:10	M2: ça va donner ça
0:29:12	E: oui
0:29:12	M2: je sais pas où j'arrive là, je sais pas combien ça va faire. Là pareil
0:29:20	E: ah, ok oui
0:29:22	M2: 12: il y en a que, oui, il y en a qui ont pas trouvé, c'est vrai que ce là, il est en peu plus embêtant parce que eh, la partie de carreaux c'est pas la même que cette partie de carreaux. Quel est le moyen relativement simple de trouver?
0:29:35	E: ehh on fait, là sur la...
0:29:41	M2: ça sera plus simple (...)
0:30:00	M2: c'est pas redresser, vous avez pas le droit, c'est dans cette partie-là vous la mettez ici, vous découpez, cette partie vous la mettez là, vous vous retrouvez avec un rectangle, qui fait 3 sur 4, donc ça fait 12 et ça marche pour l'aire, pas pour le périmètre, d'accord?. Le découpage ça marche pas pour le périmètre. Bon, c'est bon tout le monde? (...) Allez, vous allez prendre vos cahiers de cours, parce que la dernière fois je voulais l'écrire dans les cours, mais comme j'avais oublié mes papiers, je pouvais pas le faire. ///
0:31:10	M2: alors dans les cours on avait parlé du cercle, on avait écrit la formule du cercle, du périmètre du cercle, et on avait fait une remarque, ok. Vous écrivez en dessous, rappel conversions. Donc le tableau de conversions, les conversions de longueur, donc c'est des conversions que vous utiliser assez régulièrement, qu'on a utilisé à... également pour les échelles, par exemple. Je le remets quand même (M2 fait en tableau de conversions sur le tableau). Alors, qu'est que vous mettez à gauche?
0:32:13	E: eh millimètre
0:32:15	M2: à gauche
0:32:18	E: décamètres
0:32:18	M2: décamètres
0:32:24	E: hectomètres, kilomètres et de côté décimètres, centimètres
0:32:30	M2: shut! (...)
0:32:38	E: monsieur le tableau on doit l'apprendre par cœur?
0:32:42	M2: bah, le tableau de conversion si vous le connaissez pas vous allez être bien embêté dans certains cas, donc l'apprendre par cœur, je dirai oui quelque part, ou savoir le refaire facilement.
0:32:53	E: le tableau des aires, il est plus dur?
0:32:55	M2: il est un peu plus dur oui. Et à droite?

0:33:01	E: décimètres
0:33:05	M2: ensuite?
0:33:06	E: centimètres
0:33:08	E: millimètres
0:33:12	(M2 complète le tableau de conversion)
0:33:46	M2: bon, voilà, ça c'était pour (...) rappel. Ensuite, grand 2, les aires
0:33:51	E: attendez, monsieur
0:34:10	M2: l'aire d'une figure (...) Le périmètre d'une figure c'était quoi? c'était le...
0:34:36	E: contour
0:34:36	M2: la longueur
0:34:37	E: la longueur des côtés
0:34:39	M2: la longueur du contour de la figure, et l'aire ça sera quoi?
0:34:43	E: c'est la surface
0:34:44	M2: c'est la surface représentée par le cadre, la portion qui est représentée à l'intérieur de la figure. Alors, (M2 écrit) représente la portion du plan qu'elle occupe.
0:35:03	E: c'est quoi une portion?
0:35:06	M2: portion? portion d'une tarte
0:35:08	E: par rapport à quoi?
0:35:08	M2: portion d'une tarte, bah c'est une portion, t'as le plan, t'as la feuille et puis la figure représente une portion de la feuille.
0:35:45	M2: allez, vous allez faire une figure, vous allez essayer de respecter celle que je vais faire au tableau, donc en respectant les carreaux, comme ça on aura tous la même chose (M2 dessine la figure F)
0:36:00	E: monsieur, on est obligé de le faire à la règle? (Elèves dessinent la figure dans leurs cahiers)
0:36:32	M2et cette figure vous l'appelez F comme figure ///
0:38:28	(M2 écrit au tableau: la figure F a une aire de ...)
0:38:49	M2: allez vous comptez la... retrouver l'aire de cette figure (Elèves travaillent)
0:42:31	M2: bon, Laura, non pas Laura, Ian, 1,2,3,4....5,6,7...8,9,10,11,12,13, ça c'est tous les complets, d'accord?
0:42:41	E: non monsieur, il vous en manque 1
0:42:44	E: vous avez oubliez 1
0:42:44	E: à gauche! à gauche!
0:42:46	M2: 14 quand même en 14, plus... celui-là avec celui-là, les quatre
0:42:58	E:15 et 16
0:43:00	M2: 16 d'accord? Cette partie-là...
0:43:04	E: ça fait 2
0:43:06	M2: cette partie-là...
0:43:07	E: ça fait 1
0:43:08	M2: c'est la moitié de ça, donc c'est la moitié de 2, donc c'est 1. Donc on est à 17 et il reste cette moitié-là, donc ça fait 17 et demi (M2 écrit 17,5). D'accord, vous voulez que je reprenne?
0:43:28	E: oui
0:43:32	M2: alors, on a dit cela 1,2,3,4,5,6,6,8,9,10,11,12,13,14 tout ce qui est complet, donc c'est 14 déjà. Cette moitié et cette moitié, ça fait 1, 15. Cette moitié avec cette moitié 16, cette moitié on peut pas la mettre une autre moitié parce que ça c'est pas une moitié et ça non plus
0:44:06	E: on peut la mettre là
0:44:07	M2: la mettre où, là? Non, il me reste ça à moi, il me reste ça. Là j'ai une moitié, mais là j'ai pas une moitié, je suis embêté, par contre il faut raisonner comme ça: ça c'est partie

	là, cette partie qui est ici, c'est la moitié de ce rectangle, or ce rectangle fait deux carreaux, donc cette partie hachurée c'est un carreau, donc ça fait 17, plus la moitié de carreau ça fait 17 et demi. ///
0:45:01	M2: bon 17 et demi, qu'est-ce que je voulais voir d'autre, rien c'est bon. Bon les cours, vous le prenez, vous le refermez, vous prenez la partie exercices, voilà. Vous allez prendre votre livre à la page 163, allez rapidement, vous me faites le numéro 11 et 18, page 163.
0:46:25	(Elèves travaillent)
0:46:41	(sonnerie)

Résumé : Cette recherche propose d'étudier la place et le rôle des grandeurs dans la construction des différents domaines mathématiques et de leurs interrelations au collège. Elle s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard. Une analyse épistémologique des savoirs mathématiques relatifs aux grandeurs nous a permis d'examiner les choix institutionnels et leurs effets sur l'enseignement. Nous complétons ce travail par une étude écologique et praxéologique des programmes, et des documents institutionnels actuels pour caractériser les rapports institutionnels aux grandeurs. Une méthodologie du type clinique est mise en œuvre pour analyser le savoir enseigné concernant les grandeurs dans des classes de 6e et 5e en France. Pour cette étude, nous nous sommes inspirés des travaux de Bronner à propos du numérique pour élaborer un outil, le filtre des grandeurs, qui sert à décrire et analyser les pratiques relatives aux grandeurs au collège. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés aux interrelations entre les grandeurs, le fonctionnel et le numérique en prenant le cas de la proportionnalité, et au fonctionnement interne des grandeurs en étudiant l'espèce de grandeur aire.

La recherche met en évidence que l'introduction des grandeurs en tant que domaine d'étude dans les programmes du collège de 2005 crée chez les professeurs des difficultés dans l'intégration des nouvelles technologies et théories pour un enseignement adéquat des grandeurs. De plus, elle montre une certaine stabilisation de la place et la fonction des grandeurs dans la construction d'autres domaines mathématiques, mais met en évidence des difficultés au niveau des interrelations entre ces domaines.

Mots clés : grandeurs, collège, théorie anthropologique du didactique, pratiques des enseignants.

Abstract: This research aims at studying the place and role of magnitudes in the development of different mathematics fields and in their interrelations at school. Our perspective is that of the Anthropological Theory of the Didactic developed by Yves Chevallard. An epistemological analysis of the mathematical knowledge related to magnitudes allowed us to examine certain institutional choices and their impact on teaching. This work is complemented by an ecological and praxeological study of the curricula, school textbooks and corporate documents to characterize the institutions' relations to magnitudes. A clinical type methodology was used to analyze the knowledge concerning magnitudes taught in grade 6 and 7 in France. This study was inspired by Bronner's work about the numeric to develop a tool - a magnitudes filter - which is used to describe and analyze the practices related to magnitudes at school. In particular, this research focused on the interrelations between the magnitudes, the functional and the numeric in the case of proportionality and on the internal functioning of magnitudes in the case of the area magnitude.

As a result, this research shows that the introduction of magnitudes as a study domain in school programs of 2005 creates difficulties among professors in integrating new technologies and theories for an adequate teaching of magnitudes. Moreover, it shows a certain stabilization of the place and role of magnitudes in the development of different mathematics fields, but difficulties concerning the interrelations between these areas.

Key words: Magnitudes, school, Anthropological Theory of the Didactic, teaching practices