



**HAL**  
open science

# Conception d'un Pro Logiciel Interactif sous R pour la Simulation de Processus de Diffusion

Arsalane Guidoum

► **To cite this version:**

Arsalane Guidoum. Conception d'un Pro Logiciel Interactif sous R pour la Simulation de Processus de Diffusion. Probabilités [math.PR]. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2012. Français. NNT: . tel-00735806

**HAL Id: tel-00735806**

**<https://theses.hal.science/tel-00735806>**

Submitted on 26 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 26/2012-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER.

EN MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : PROBABILITÉ & STATISTIQUE

Par : Arsalane Chouaib GUIDOUM

Sujet

Conception d'un Pro Logiciel Interactif Sous  
R Pour La Simulation de Processus de  
Diffusion

Soutenu publiquement le 25/02/2012, devant le jury composé de :

Mr. Mustapha MOULAI	Professeur	à l'USTHB	Président.
Mr. Kamal BOUKHETALA	Professeur	à l'USTHB	Directeur de Mémoire.
Mr. Rachid OUAFI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur.
Mr. Abdelkader TATACHAK	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur.

# Table des matières

Table des matières . . . . .	iii
Liste des figures . . . . .	v
<b><i>Introduction Générale</i></b>	<b>3</b>
<b>1 Généralité sur Les Processus Stochastiques</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Définitions des processus . . . . .	7
1.3 Processus stochastiques particuliers . . . . .	8
1.4 Processus stochastiques établi à partir de la distribution gamma . . . . .	10
1.5 Processus stochastiques établi à partir de la distribution de Student . . . . .	11
1.6 Processus de Markov . . . . .	12
1.7 Processus du second ordre . . . . .	13
1.8 Processus ergodiques . . . . .	15
1.9 Martingales et temps d'arrêt . . . . .	16
1.9.1 Temps d'arrêt . . . . .	16
1.9.2 Théorème d'arrêt . . . . .	17
<b>2 Mouvement Brownien</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Construction du mouvement brownien . . . . .	20
2.2.1 Construction par un processus gaussien . . . . .	20
2.2.2 Construction par une limite d'une marche aléatoire . . . . .	21
2.2.3 Construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L) . . . . .	22
2.3 Semi-groupe du mouvement brownien . . . . .	24
2.3.1 Propriété de Markov . . . . .	24
2.3.2 Mouvement brownien multidimensionnel . . . . .	25
2.4 Approximation la dérive d'un mouvement brownien standard par un bruit blanc gaussien . . . . .	27
2.5 Continuité des trajectoires . . . . .	27
2.6 Régularité des trajectoires . . . . .	28
2.7 Mouvement brownien arithmétique . . . . .	32
2.8 Mouvement brownien géométrique . . . . .	34
2.9 Pont brownien . . . . .	36

2.9.1	Construction par processus contraint . . . . .	37
2.9.2	Construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L) . . . . .	39
2.10	Martingales exponentielles . . . . .	39
2.10.1	Caractérisation de Paul Lévy du mouvement brownien . . . . .	40
2.10.2	La loi du temps d'atteinte du mouvement brownien . . . . .	42
2.10.3	Les temps de passage du mouvement brownien . . . . .	43
2.11	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Processus de Diffusion</b> . . . . .	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Intégrale stochastique . . . . .	48
3.2.1	L'intégrale d'Itô . . . . .	48
3.2.2	L'intégrale de Stratonovitch . . . . .	50
3.2.3	Processus d'Itô . . . . .	51
3.2.4	Formule d'Itô . . . . .	52
3.2.5	La règle de multiplication . . . . .	55
3.3	Équations différentielles stochastiques . . . . .	56
3.3.1	Introduction et définitions . . . . .	56
3.3.2	Existence et unicité des solutions de l'ÉDS . . . . .	59
3.3.3	Équation de Langevin . . . . .	61
3.3.4	Bruit blanc, bruit coloré . . . . .	62
3.3.5	Transformée de Lamperti . . . . .	64
3.4	Schémas numériques . . . . .	65
3.4.1	Simulation numérique . . . . .	68
3.4.2	Relation entre le schéma d'Euler et Milstein . . . . .	72
3.5	Les modèles attractives . . . . .	75
3.5.1	Modèle d'une diffusion en attraction $\mathcal{M}_{s \geq 1}^\sigma(V_t)$ . . . . .	76
3.5.2	Modèle de deux diffusion en attraction $\mathcal{M}_{m > 0}^\sigma(V_t^{(1)}) \leftrightarrow \mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$ . . . . .	80
3.6	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Comportement Asymptotique Des Processus de Diffusion</b> . . . . .	<b>84</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Équation de Fokker-Planck . . . . .	85
4.2.1	L'origine de l'équation de Fokker-Planck . . . . .	87
4.2.2	Modélisation d'une équation physique . . . . .	89
4.2.3	Existence d'une solution . . . . .	94
4.3	Processus de diffusion stationnaires . . . . .	95
4.4	Classification des processus de diffusion linéaire . . . . .	96
4.4.1	Processus de diffusion de type $N$ . . . . .	97
4.4.2	Processus de diffusion de type $G$ . . . . .	101
4.4.3	Processus de diffusion de type $B$ . . . . .	105
4.5	Calculs de l'instant de premier passage . . . . .	108
4.5.1	IPP d'une diffusion en attraction $\mathcal{M}_{s \geq 1}^\sigma(V_t)$ . . . . .	109

4.5.2	IPP de deux diffusion en attraction $\mathcal{M}_{m>0}^\sigma(V_t^{(1)}) \leftrightarrow \mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$ . . . . .	114
4.6	Conclusion . . . . .	115
	<b><i>Conclusion Générale</i></b>	<b>116</b>
	<b><i>Annexe A : R Code</i></b>	<b>117</b>
	<b><i>Annexe B : Packages Sim.DiffProc &amp; Sim.DiffProcGUI</i></b>	<b>122</b>
	<b><i>Bibliographie</i></b>	<b>131</b>

# Table des figures

1.1	Bruit blanc gaussien avec $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ . . . . .	9
1.2	Densité spectrale d'un bruit blanc gaussien. . . . .	9
1.3	Processus aléatoire établi à partir de la distribution $\Gamma(0.5, 2)$ . . . . .	11
1.4	Processus aléatoire établi à partir de la distribution $St_{(2)}$ . . . . .	12
2.1	Trajectoire brownienne simulée a partir d'une distribution gaussienne. . . . .	21
2.2	Flux de trajectoires brownienne simulées a partir d'une distribution gaussienne. . . . .	21
2.3	Trajectoire brownienne comme limite d'une marche aléatoire. . . . .	22
2.4	Approximation d'un mouvement brownien par le D.K.L. . . . .	24
2.5	Mouvement brownien 2-D simulée a partir d'une distribution gaussienne. . . . .	26
2.6	Approximation d'un mouvement brownien 2-D par une marche aléatoire. . . . .	26
2.7	Mouvement brownien 3-D simulée a partir d'une distribution gaussienne. . . . .	26
2.8	Fonction de covariance empirique d'un mouvement brownien standard. . . . .	29
2.9	Le mouvement brownien standard est non différentiables. . . . .	31
2.10	La limite de mouvement brownien standard par rapport au temps. . . . .	31
2.11	Trajectoire d'un mouvement brownien arithmétique avec $\theta = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	34
2.12	Flux d'un mouvement brownien arithmétique avec $\theta = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	34
2.13	Trajectoire d'un mouvement brownien géométrique avec $\theta = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	35
2.14	Flux d'un mouvement brownien géométrique avec $\theta = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	35
2.15	Trajectoire d'un pont brownien à partir de $X_{t_0} = -2$ et $X_T = 1$ . . . . .	38
2.16	Flux de 100 trajectoires d'un pont brownien standard $X_{t_0} = X_T = 0$ . . . . .	38
2.17	Approximation d'un pont brownien standard par le D.K.L. . . . .	39
3.1	Simulation l'intégrale stochastique $\int_0^t W_s dW_s$ vs $\int_0^t W_s \circ dW_s$ . . . . .	51
3.2	Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec $r = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	59
3.3	Flux d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec $r = 2$ et $\sigma = 1$ . . . . .	59
3.4	Trajectoire simulée de l'équation de Langevin avec $a = 2$ et $D = 1$ . . . . .	62
3.5	L'équation de Langevin en deux dimensions avec $a = 2$ et $D = 1$ . . . . .	62
3.6	Simulation une seule trajectoire du modèle Radial Ornstein-Uhlenbeck par le schéma d'Euler. . . . .	70
3.7	Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle Radial Ornstein-Uhlenbeck par le schéma d'Euler. . . . .	70

3.8	Simulation une seule trajectoire du modèle $dX_t = (0.03tX_t - X_t^3)dt + 0.2dW_t$ par le schéma de Milstein. . . . .	71
3.9	Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle $dX_t = (0.03tX_t - X_t^3)dt + 0.2dW_t$ par le schéma de Milstein. . . . .	71
3.10	Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle $dX_t = \cos(t)dt + \sin(t)dW_t$ par le schéma de Itô-Taylor. . . . .	72
3.11	Transformation de modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) $dX_t = (0.1 - 0.2X_t)dt + 0.05\sqrt{X_t}dW_t$ . . . . .	75
3.12	Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 2-D avec $s = 1$ . . . . .	79
3.13	Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 3-D avec $s = 1$ . . . . .	79
3.14	Ttrajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 2-D avec $s > 1$ . . . . .	80
3.15	Ttrajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 3-D avec $s > 1$ . . . . .	80
3.16	L'interaction entre deux insectes en 2-D. . . . .	83
3.17	L'interaction entre deux insectes en 3-D. . . . .	83
4.1	L'oscillateur de <i>Van Der Pol</i> , régime permanent sinusoïdal $a = 0$ . . . . .	94
4.2	L'oscillateur de <i>Van Der Pol</i> , régime permanent non sinusoïdal $a > 0$ . . . . .	94
4.3	Simulation un échantillon de taille 100 à partir du modèle VAG. . . . .	99
4.4	Ajustement de la distribution stationnaire du modèle VAG par la méthode d'histogramme. . . . .	101
4.5	Ajustement de la distribution stationnaire du modèle VAG par la méthode du noyau. . . . .	101
4.6	Ajustement de la distribution stationnaire du modèle CIR par la méthode d'histogramme. . . . .	104
4.7	Ajustement de la distribution stationnaire du modèle CIR par la méthode du noyau. . . . .	104
4.8	Ajustement de la distribution stationnaire de processus de diffusion de Jacobi par la méthode d'histogramme. . . . .	107
4.9	Ajustement de la distribution stationnaire de processus de diffusion de Jacobi par la méthode du noyau. . . . .	107
4.10	L'instant de premier passage du modèle $M_{s=1}^\sigma(V_t)$ en 2-D. . . . .	111
4.11	L'instant de premier passage du modèle $M_{s=1}^\sigma(V_t)$ en 3-D. . . . .	111
4.12	Ajustement de la distribution de $1/\tau_c^{s=1}$ par la méthode d'histogramme. . . . .	112
4.13	Ajustement de la distribution de $1/\tau_c^{s=1}$ par la méthode du noyau. . . . .	112
XIV	Graphical User Interface for <b>Sim.DiffProc</b> package at start-up. . . . .	126

## Remerciements.

**T**out d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

**J**e tiens à remercier avec tous mes sentiments de respectueuse gratitude mon promoteur Mr. *Kamal BOUKHETALA* Professeur à l'USTHB pour sa proposition de sujet ainsi pour son soutien, ses orientations et ses précieux conseils.

**J**'exprime aussi ma profonde gratitude à Mr. *Mustapha MOULAI* Professeur à l'USTHB, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

**J**e remercie également : Mr. *Rachid OUAFI* Maître de conférences à l'USTHB, et Mr. *Abdelkader TATACHAK* Maître de conférences à l'USTHB, pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

**E**nfin, je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé, et qui ont contribué de proche ou de loin à la réalisation de ce travail.



## Résumé

Dans ce travail, on propose un nouveau package **Sim.DiffProc** [9] pour la simulation des processus de diffusion, muni d'une interface graphique (GUI), sous langage R. Le développement de l'outil informatique (logiciels et matériels) ces dernières années, nous a motivé de réaliser ce travail. A l'aide de ce package, nous pouvons traiter beaucoup de problèmes théoriques difficiles liée à l'utilisation des processus de diffusion, pour des recherches pratiques, tels que la simulation numérique trajectoires de la solution d'une ÉDS. Ce qui permet à beaucoup d'utilisateurs dans différents domaines à l'employer comme outil sophistiqué à la modélisation de leurs problèmes pratiques. Le problème de dispersion d'un polluant [2, 4], en présence d'un domaine attractif que nous avons traité dans ce travail en est un bon exemple. Cet exemple montre l'utilité et l'importance pratique des processus de diffusion dans la modélisation simulation de situations réelles complexes. La fonction de densité de la variable aléatoire  $\tau_c$  "instant de premier passage" de la frontière de domaine d'attraction peut être utilisée pour déterminer le taux de concentration des particules polluantes à l'intérieur du domaine. Les études de simulation et les analyses statistiques mises en application à l'aide du package **Sim.DiffProc**, se présentent efficaces et performantes, comparativement aux résultats théoriques explicitement ou approximativement déterminés par les modèles de processus de diffusion considérés.

# Introduction générale

La nature aléatoire de nombreux phénomènes évolutifs, dans des domaines très divers, tels ceux de la physique, astronomie, biologie, les mathématiques financières, géologie, analyse génétique, épidémiologie et beaucoup d'autres champs de la science et de l'ingénierie, nécessite fréquemment la description de tels phénomènes par des équations différentielles stochastiques, qui peuvent être un outil puissant pour la modélisation. L'étude des équations stochastiques s'est beaucoup développée ces dernières années, c'est un domaine plein de perspectives et de recherche. Dans beaucoup de literatures, on rencontre les équations stochastiques avec légère variations d'écriture, ainsi que leurs divers applications, voir par exemple [1, 18, 21, 36, 40].

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , Considérons, pour  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , champ vectoriel régulier, l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \mu(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

la solution de l'équation (1), si elle est unique, est représentée par une trajectoire. Dans la plupart des applications où une telle équation différentielle ordinaire intervient, les trajectoires mesurées expérimentalement ne sont que rarement conformes aux solutions analytiques de l'équation. Des effets aléatoires viennent se superposer à la trajectoire idéale, et il semble donc raisonnable de modifier l'équation (1) en y introduisant un processus aléatoire perturbant le système. Formellement, la modification s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\xi_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

où :  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $\xi_t$  est un bruit blanc gaussien  $m$ -dimensionnel. Cette approche soulève les problèmes suivants :

1. Définir  $\xi_t$  de manière rigoureuse.
2. En déduire l'influence de  $\xi_t$  dans la résolution de l'équation (1).
3. Montrer que l'équation (1) a une solution, discuter de l'unicité, du comportement asymptotique, du rôle de  $\sigma$ , de  $x_0, \dots$

Considérons tout d'abord que le bruit blanc gaussien  $\xi_t$  est la dérivée formelle du processus de Wiener. Dans le cas général, l'équation (2) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

l'équation obtenue alors est une équation différentielle stochastique.

Dans notre travail on s'intéresse à les solutions des équations différentielles stochastiques qu'on va étudier, sont des processus Markoviens à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , qu'on appelle les processus de diffusion qui constituent la plus importante classe. Cependant, le mouvement Brownien  $W_t$  (où processus de Wiener) est utilisé comme un modèle de diffusion homogène. Les modèles de diffusions sont représentés par des équations différentielles stochastiques de la forme (3), dite équation de type Itô.

Le mathématicien Kiyoshi Itô [27], a donné un sens à ces équations, et a montré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3) sous certaines conditions de régularité des fonctions  $\mu(t, x)$  et  $\sigma(t, x)$ , appelées respectivement coefficient de dérive et coefficient de diffusion.  $X_t$  est solution de l'équation (3) si et seulement si :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

$X_t$  est donc défini à l'aide d'intégrales dites intégrales stochastiques d'Itô.

Notre travail est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions fondamentales et les principaux aspects théoriques des processus stochastiques. Les martingales sont un outil essentiel et important, qui nous a permis d'établir de nombreux résultats ainsi le théorème d'arrêt.

Le second chapitre est consacré à l'étude détaillée du mouvement Brownien, sa construction, ces propriétés, ainsi sa simulation unidimensionnelle et multidimensionnelle. La difficulté de modélisation du mouvement brownien réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul, c'est-à-dire que le coefficient de dérive est nul, il n'y a pas de mouvement d'ensemble. Pour cela il est aussi possible de définir la notion de mouvement brownien avec dérive. Il s'agit d'un mouvement brownien arithmétique (dans la finance modèle de *Merton*). Le mouvement brownien géométrique (où le modèle de marché de *Black et Scholes*) et le pont brownien, sont des objets mathématiques de la théorie des probabilités, représentent l'un des plus importants processus stochastiques et ont de nombreuses applications dans la finance, et ce en les illustrant par des exemples de simulation, afin de rendre plus facile la compréhension des propriétés qui le caractérisent. On termine ce chapitre par la détermination des lois des temps de passage, et la caractérisation de *Paul Lévy* du mouvement brownien.

Le troisième chapitre est composé de quatre parties. La première partie sera consacrée à donner un sens à l'intégrale stochastique lorsque celle-ci est prise par rapport à un mouvement brownien, notons juste que la construction de cet intégrale au sens d'Itô [27] fait appel à un changement de la mesure d'intégration habituelle par une nouvelle mesure, ainsi nous parlons de la formule d'Itô dans le cas unidimensionnel et multidimensionnel, qui sera illustrée par quelques exemples

d'applications. Dans la deuxième partie on s'intéresse à définir les équations différentielles stochastiques d'une manière générale, à l'exception les processus de diffusion, naturellement nous annonçons le théorème de l'existence et unicité des solutions des ÉDS, nous donnons la définition et la différence entre un bruit blanc et un bruit coloré, ainsi la transformée de *Lamperti* [30] qui sera très utile sur le plan numérique pour améliorer la précision. La détermination de la solution exacte de  $X_t$  d'une ÉDS est très difficile à déterminer surtout lorsque la partie aléatoire est exprimée en fonction du processus  $X_t$ , c'est ainsi qu'on se tourne vers les méthodes numériques de l'ÉDS dont la base est fondée sur la discrétisation du temps. Nous présenterons alors dans la troisième partie, l'approche numérique, en citant les principaux schémas qui la concernent et qui permettent d'approcher la solution exactes de ces équations. Nous illustrerons par des exemples de simulation des différents méthodes. Dans la dernière partie de ce chapitre on s'intéresse à l'utilisation des processus de diffusion dans la modélisation de deux phénomènes, le premier est de modéliser une trajectoire d'un polluant, qui se déplace sur une surface d'eau turbulente en présence d'un mécanisme d'attraction [2, 4], et le deuxième porte sur une modélisation d'un phénomène d'attraction entre deux insectes mâle et femelle [5].

Le dernier chapitre, nous commençons par la présentation de deux équations fondamentales permettant de d'écrire l'évolution des lois de probabilités relatives à un processus de diffusion. Les équations de *Fokker-Planck* [35] ou les équations de *Kolmogorov*, qui décrit l'évolution dynamique de la densité de probabilité d'un système hors d'équilibre, ainsi sa distribution stationnaire si elle existe. Nous annonçons deux théorèmes donnant l'existence d'une relation simple entre les deux différentielles Itô et Stratonovitch, ces derniers sont très utiles pour la modélisation d'une équation physique, nous illustrerons cette modélisation par l'exemple de *l'oscillateur de Van Der Pol*. Par la suite nous parlerons de classification des processus de diffusion linéaire, en distinguant trois types. Ce chapitre se terminera par l'étude et l'analyse statistique de la variable aléatoire l'instant de premier passage "IPP" dans le cas du modèle d'une diffusion en attraction [2, 4, 6, 7], et l'instant de la première rencontre entre deux insectes, c'est-à-dire dans le cas du modèle de deux diffusion en attraction.

On terminera ce travail avec une conclusion générale, et quelques perspectives. Il est à noter que dans tous nos programmes, nous utiliserons le langage R [32], qui sont présentées dans *l'annexe A*, ainsi pour toutes les exemples. Dans *l'annexe B* nous donnons quelques règles pour la création des packages sous R, et nous donnons aussi une présentation de deux packages :

- (1) **Sim.DiffProc** : Simulation of Diffusion Processes [8, 9].
- (2) **Sim.DiffProcGUI** : Graphical User Interface for Simulation of Diffusion Processes [10].

# 1

## Généralité sur Les Processus Stochastiques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Définitions des processus</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Processus stochastiques particuliers</b>	<b>8</b>
<b>1.4</b>	<b>Processus stochastiques établi à partir de la distribution gamma</b>	<b>10</b>
<b>1.5</b>	<b>Processus stochastiques établi à partir de la distribution de Student</b>	<b>11</b>
<b>1.6</b>	<b>Processus de Markov</b>	<b>12</b>
<b>1.7</b>	<b>Processus du second ordre</b>	<b>13</b>
<b>1.8</b>	<b>Processus ergodiques</b>	<b>15</b>
<b>1.9</b>	<b>Martingales et temps d'arrêt</b>	<b>16</b>

---

## 1.1 Introduction

L'origine des processus stochastiques remonte aux progrès faits au début du  $XX^e$  siècle dans certaines branches appliquées, telles que la mécanique statistique (par Gibbs, Boltzmann, Poincaré, Smoluchowski et Langevin). Les bases théoriques ont été formulées plus tard par [17, 28] et d'autres (1930-1940). C'est durant cette période que le mot "stochastique", qui provient du grec *stokhastikos* "conjectural", a commencé à être employé. D'autres progrès ont été faits aussi à partir du mouvement brownien en physique (par Einstein, Lévy et Wiener).

Nous introduisons dans ce chapitre les principaux processus aléatoires à l'exception du mouvement brownien qui fait l'objet d'un chapitre séparé. Nous retrouverons la plupart de ces processus dans les problèmes de calcul stochastique. Les processus du second ordre ont de nombreuses applications en théorie du signal.

## 1.2 Définitions des processus

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et  $T$  un ensemble d'indices ( $T = [a, b]$ ,  $T = [0, \infty[$ ,  $\dots$ ) un processus stochastique  $X(t, \omega)$  à valeur dans un espace mesurable  $(E, \xi)$  est une application de  $T \times \Omega$  dans  $E$  qui est mesurable par rapport à la mesure du produit  $\lambda \cdot \mathbb{P}$  où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $T$ . Il est noté indifféremment  $X_t(\omega)$  ou  $X(t, \omega)$ . La fonction  $t \mapsto X(t, \omega)$  est appelée trajectoire ou réalisation de  $X_t$ . À  $t$  fixé, la fonction  $\omega \mapsto X(t, \omega)$  est une variable aléatoire.  $X_t$  est adapté à la filtration  $\mathfrak{F}_t$  si  $X_t$  est  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable. Le théorème de Kolmogorov assure l'existence des processus stochastiques.  $X_t$  est un processus centré si son espérance est nulle  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ , et si  $X_t$  est dans  $L^2$  ( $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ ), on définit :

La moyenne du processus

$$m_x(t) = \mathbb{E}(X_t(\omega)) = \int_{\Omega} X_t(\omega) dP(\omega)$$

La variance

$$\sigma_x^2(t) = \mathbb{E}[|X_t - \mathbb{E}(X_t)|^2]$$

La fonction de covariance

$$\begin{aligned} \Gamma(s, t) &= \mathbb{E}(X_s - \mathbb{E}(X_s))(X_t - \mathbb{E}(X_t)) \\ &= \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t) \end{aligned}$$

La régularité des trajectoires est déterminée par le théorème de Kolmogorov.

**Théorème 1.1 (Kolmogorov)** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique tel que pour tout  $t$ ,  $t+h$  dans  $[a, b]$ , il existe des constantes  $p > 0$ ,  $c > 0$  et  $r > 0$  vérifiant

$$\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^p] \leq c|h|^{1+r}$$

alors presque toutes les trajectoires sont continues.

Les théorèmes suivants fondent la représentation spectral des processus stationnaires.

**Théorème 1.2 (Herglotz)** Soit  $c$  une fonction semi-définie positive de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$ . Il existe une unique mesure positive  $\mu$  sur  $] -\pi, +\pi]$  telle que pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$c(n) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda)$$

**Théorème 1.3 (Bochner)** Soit  $c$  une fonction continue et semi-définie positive de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . Il existe une unique mesure bornée  $\mu$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d\mu(\lambda)$$

**Définition 1.1 (Filtration)** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, la filtration est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{A}$ , noté par  $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ . La tribu  $\mathfrak{F}_t$  est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux événements pouvant intervenir.

**Définition 1.2 (Processus adapté)** Un processus  $\{X_t, t \geq 0\}$  est dit adapté à la filtration  $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$  si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable. Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.

### 1.3 Processus stochastiques particuliers

**Définition 1.3 (Processus strictement stationnaire)** Un processus  $X_t$  est strictement stationnaire si pour tout entier  $n$  et pour tous réels  $t_1, t_2, \dots, t_n$  et pour tout  $h$ , les variables aléatoires  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  et  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$  ont même loi.

**Définition 1.4 (Processus stationnaire)** Un processus  $X_t$  est stationnaire (ou faiblement stationnaire) si :

- son espérance  $\mathbb{E}(X_t)$  est une constante indépendante du temps  $t$ .
- sa fonction de corrélation  $R(s, t)$  ne dépend que de la différence  $\tau = t - s$ .
- $R(\tau)$  est continue (à l'origine).

Si  $X_t$  est un processus stationnaire, sa fonction de corrélation est continue en 0 et définie positive. La fonction

$$\Phi(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

est une fonction caractéristique d'après le théorème 1.3 de Bochner. Par conséquent, il existe une fonction  $Z(\omega)$  appelée fonction de répartition spectrale telle que  $Z(\omega)$  s'annule au voisinage de  $-\infty$ , et reste fini lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$  telle que

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dZ(\omega)$$

De plus, si  $Z$  est absolument continue, il existe une fonction  $S(\omega)$  appelée densité spectrale du processus  $X_t$ , telle que  $S(\omega) = dZ(\omega)/d\omega$  et

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega$$

Par application de la transformée de Fourier inverse, si  $\int |R(\tau)| d\tau < \infty$  alors la densité spectrale est donnée par

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau$$

**Exemple 1.1** Un bruit blanc est un processus stationnaire dont la densité spectrale est constante  $S_X(\omega) = a$ . Sa fonction de corrélation est donc de la forme  $R_X(\tau) = a\delta(\tau)$ . Un tel processus contient toutes les fréquences (d'où son nom de bruit blanc). Sa variance n'est pas bornée, il n'est donc pas réalisable en théorie.

Les figures 1.1 et 1.2 montre une seule trajectoire simulée d'un bruit blanc gaussien, avec sa densité spectrale estimée.

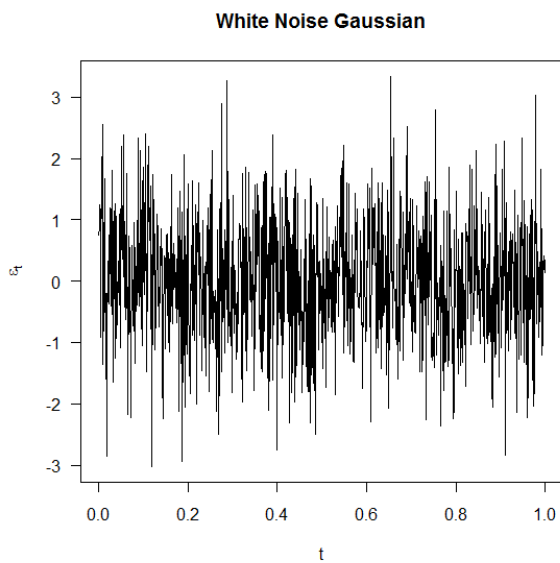


FIGURE 1.1 – Bruit blanc gaussien avec  $m = 0$  et  $\sigma^2 = 1$ .

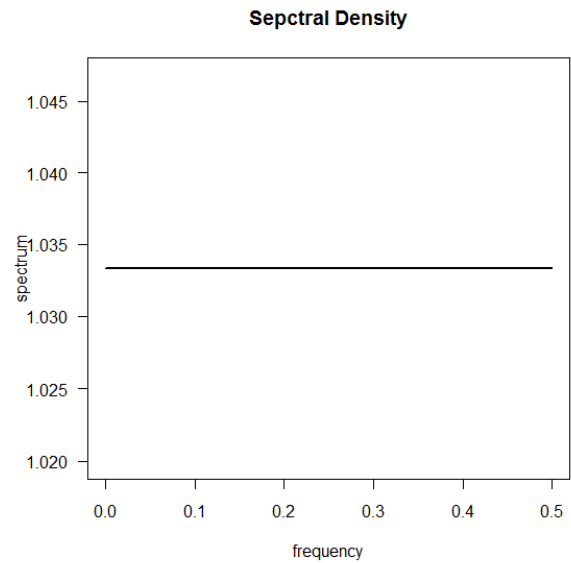


FIGURE 1.2 – Densité spectrale d'un bruit blanc gaussien.

**Définition 1.5 (Processus à accroissements indépendants)** Un processus  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants si pour tous réels  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes. Si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants, alors pour tout  $s$  et  $t$  tels que  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de  $\mathfrak{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ . La loi de  $X_t$  est entièrement déterminée par la loi de  $X_t - X_s$ .



**Définition 1.6 (Processus à accroissements indépendants stationnaires)** Un processus  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants et si  $X_t - X_s$  a même loi que  $X_{t-s}$ . Si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_1}(x_1 + \dots + x_n) \Phi_{t_1, t_2}(x_2 + \dots + x_n) \dots \Phi_{t_{n-1}, t_n}(x_n)$$

avec

$$\Phi_{t_i, t_{i+1}}(x) = \mathbb{E}[\exp ix(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$$

si  $X_t$  est un processus à accroissement indépendants stationnaires alors sa loi est indéfiniment divisible. La loi du processus  $X_t$  est entièrement déterminée par la loi de  $X_1$ .

**Théorème 1.4** Soit  $X_t$  un processus à accroissement indépendants stationnaires,  $(\mathfrak{F}_t)$  la filtration engendrée par le processus  $X_t$  et  $T$  un temps d'arrêt. Alors le processus  $Y_t = X_{T+t} - X_t$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires de même loi que  $X_t$  et indépendant de  $\mathfrak{F}_T$ .

**Définition 1.7 (Processus gaussien)** Un processus  $X_t$  est gaussien si pour tout entier  $n$  et pour tous réels  $t_1, t_2, \dots, t_n$  les variables aléatoires  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  ont une distribution gaussienne. Si on note  $m(t)$  l'espérance de  $X_t$  et  $R(s, t)$  la fonction de corrélation du processus, sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{E} \left( \exp i \sum_{j=1}^n x_j X_{t_j}(\omega) \right) \\ &= \exp \left( i \sum_{j=1}^n x_j m(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k R(t_j, t_k) \right) \end{aligned}$$

un processus gaussien est entièrement déterminé par la donnée de sa valeur moyenne  $m(t)$  et de sa fonction de corrélation  $R(s, t)$ .

## 1.4 Processus stochastiques établi à partir de la distribution gamma

La distribution gamma, caractérisée par les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , se définit comme suit :

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction gamma définie comme :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \exp(-y) dy$$

À noter que si  $\alpha = n$  et que  $n$  est un entier, on a alors le résultat suivant :

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

La moyenne d'une variable aléatoire  $X$  qui obéit à une distribution gamma est de :

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$$

Et sa variance est de :

$$\text{var}(X) = \alpha\beta^2$$

La figure 1.3 montre l'évolution d'un tel processus. Comme on peut le constater à la lecture de cette figure, de nombreux sauts se manifestent dans un tel processus stochastique, en ce sens que ces sauts s'éloignent de beaucoup plus d'écart-types de la moyenne que ne l'autorise la distribution normale.

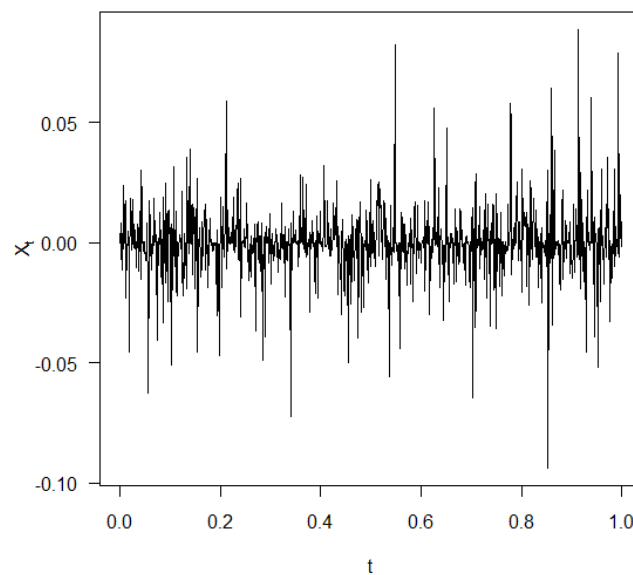


FIGURE 1.3 – Processus aléatoire établi à partir de la distribution  $\Gamma(0.5, 2)$ .

## 1.5 Processus stochastiques établi à partir de la distribution de Student

La distribution de Student est une autre distribution qui est de plus en plus utilisée dans la modélisation des prix des produits dérivés.

Soit  $Z$  une  $N(0, 1)$  et  $\chi_{(r)}^2$  une variable aléatoire Chi-deux avec  $r$  degrés de liberté. Alors  $T = \frac{Z}{\sqrt{\chi_{(r)}^2/r}}$  a une distribution Student qui est notée  $St_{(r)}$ . Elle est symétrique autour de 0, mais tend vers la distribution normale lorsque le nombre de degrés de liberté se dirige vers l'infini.

La figure 1.4 prend acte de l'évolution d'un tel processus. Encore une fois, des sauts très apparents se font jour lors du déroulement du processus stochastique de la série, ils sont d'autant plus amples que l'on réduit le nombre de degrés de liberté de la distribution de Student.

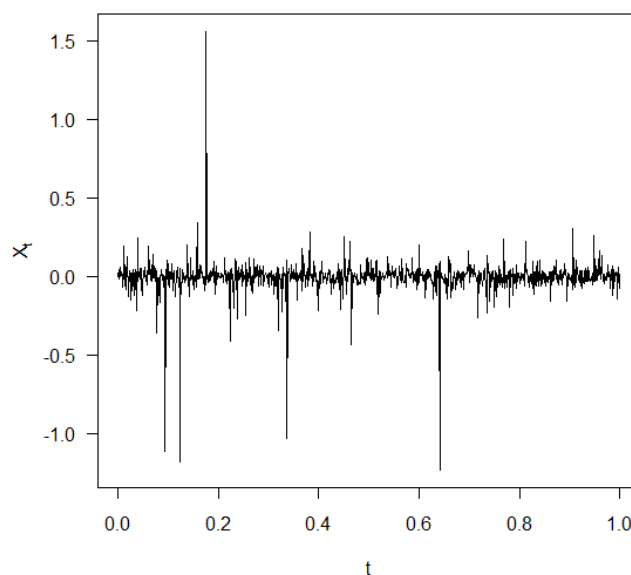


FIGURE 1.4 – Processus aléatoire établi à partir de la distribution  $St_{(2)}$ .

## 1.6 Processus de Markov

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(E, \mathfrak{B})$  l'espace des états,  $\mathfrak{B}$  désigne la tribu des boréliens de  $E$ . Un processus  $X_t$  est un processus de *Markov* si pour tout  $u$  et  $t \geq 0$  et pour tout  $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ , on a

$$\mathbb{P}(X_{t+u} \in \mathcal{A} | X_s, s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+u} \in \mathcal{A} | X_t)$$

Ce qui signifie que le processus ne dépend que du dernier instant et non de toute son histoire

$$\mathbb{P}(X_{t_n} < x_n | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = x_{t_1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} < x_n | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}})$$

Pour démontrer qu'un processus est un processus de *Markov*, il suffit de montrer par le théorème de classe monotone que pour tout  $n$ , pour tous réels  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  et pour toute fonction  $f$

borélienne bornée

$$\mathbb{E}(f(X_{t_n})) = \mathbb{E}(f(X_{t_n})|X_{t_{n-1}})$$

La probabilité de transition pour passer de l'état  $x$  au temps  $s$  à un état appartenant à  $\mathcal{A}$  à l'instant  $t$  est notée pour  $s < t$

$$P_{s,t}(x, \mathcal{A}) = p(s, x; t, \mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{A} | X_s = x)$$

La fonction  $\mathcal{A} \mapsto p(s, x; t, \mathcal{A})$  est une probabilité sur  $\mathfrak{B}$ . La probabilité de transition vérifie l'équation de *Chapman-Kolmogorov* qui s'écrit sous les formes suivantes. Soit  $s < u < t$  tel que  $X_u = y$ , on a

$$P_{s,t}(x, \mathcal{A}) = \int_E P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, \mathcal{A})$$

et dans le cas d'un espace  $E$  dénombrable

$$P_{s,t}(x, z) = \sum_{y \in E} P_{s,u}(x, y) P_{u,t}(y, z)$$

Si on note  $p_{t_0}(\mathcal{A})$  la distribution de  $X_{t_0}$

$$p_{t_0}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_{t_0} \in \mathcal{A})$$

alors pour tous réels  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \int_E p_{t_0}(dx_0) \prod_{k=1}^{n-1} \int_{B_k} p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, dx_k) p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, B_n)$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X_t \in B) = \int_E p(t_0, x; t, B) p_{t_0}(dx)$$

Le processus  $X_t$  est un processus de *Markov homogène* si pour tout  $s$  et  $t$  de  $T$ , la transition

$$p(s, x; t, B) = p(x, \tau, B)$$

ne dépend que de  $\tau = t - s$ . Les opérateurs  $P_{s,t} = P_{t-s}$  sont notés simplement  $P_t$ . Ils forment dans le cas homogène un semi-groupe. On a  $P_t P_s = P_{t+s}$ , pour tout  $s, t > 0$ .

## 1.7 Processus du second ordre

Un processus  $X_t$  est un processus du second ordre si  $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ . Une série chronologique est un processus du second ordre à temps discret. On dit que le processus du second ordre  $X_t$  converge en moyenne quadratique (i.e. dans  $L^2$ ) vers une variable aléatoire  $Y$  quand  $t$  tend vers  $t_0$  si et seulement si sa fonction de corrélation converge quand  $s$  et  $t$  tendent vers  $t_0$  et dans ce cas

$$R(s, t) \xrightarrow{s, t \rightarrow t_0} \mathbb{E}|Y|^2$$

On dit que  $X_t$  un processus du second ordre est continu en moyenne quadratique si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}|X_{t+h} - X_t|^2 = 0$$

**Proposition 1.1** Un processus du second ordre  $X_t$  est continu en moyenne quadratique si et seulement si sa fonction de corrélation  $R(t, t)$  est continue en  $t$ .

La continuité en moyenne quadratique n'entraîne pas la continuité des réalisations du processus. Si  $X_t$  est un processus de Poisson, sa fonction de corrélation  $R(s, t) = \lambda \min(s, t)$  est continue, mais presque toutes les réalisations ont des discontinuités sur un intervalle de temps fini. On dit que  $X_t$  un processus du second ordre est dérivable en moyenne quadratique si la limite du taux d'accroissement  $(X_{t+h} - X_t)/h$  converge dans  $L^2$  vers une variable notée  $X'_t$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int \left| \frac{X_{t+h} - X_t}{h} - X'_t \right|^2 = 0$$

**Proposition 1.2** Un processus du second ordre  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique si et seulement si sa fonction de corrélation  $R(s, t)$  est dérivable en  $(s, t)$

La dérivation en moyenne quadratique est linéaire. Si  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique, alors  $X_t$  est continue en moyenne quadratique.

**Proposition 1.3** Si  $X_t$  est un processus du second ordre centré et dérivable en moyenne quadratique et si les dérivées partielles existent, alors

$$R_{X^{(k)}X^{(l)}}(s, t) = \mathbb{E}[X^{(k)}(s)X^{(l)}(t)] = \frac{\partial^{k+l}}{\partial s^k \partial t^l} R_X(s, t)$$

En particulier, un processus stationnaire est différentiable en  $t$  si et seulement si sa fonction de corrélation  $R(u)$  admet une dérivée du second ordre en  $u$  et dans ce cas

$$R_{X^{(k)}X^{(l)}}(u) = (-1)^k \frac{d^{k+l}}{du^{k+l}} R_X(u)$$

Si  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique et si  $X_t$  admet la densité spectrale  $S_X(\omega)$ , alors le processus dérivé admet une fonction spectrale  $S_{X'}(\omega)$  donnée par

$$S_{X'}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega)$$

Plus généralement,

$$S_{X^{(k)}X^{(l)}}(\omega) = (i\omega)^k (i\omega)^l S_X(\omega)$$

En particulier, la fonction de corrélation de la dérivée d'ordre  $k$  d'un processus  $X_t$  est

$$R_{X^{(k)}}(u) = (-1)^k \frac{d^{2k}}{du^{2k}} R_X(u)$$

Sa fonction spectrale est donnée par la formule

$$S_{X^{(k)}}(\omega) = (-1)^k (\omega)^{2k} S_X(\omega)$$

**Théorème 1.5 (Karhunen-Loève)** Soit  $X_t$  un processus du second ordre pour  $t \in [a, b]$ , continu en moyenne quadratique, centré. Il existe un et un seul développement, appelé développement de Karhunen-Loève de la forme

$$X_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega)\Phi_n(t)$$

où les  $Y_n$  sont des variables aléatoires du second ordre telles que  $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = 0$  si  $i \neq j$  et  $\mathbb{E}(|Y_i|^2) = \lambda_i$  où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres et les  $\Phi_i$  sont les vecteurs propres de l'opérateur  $R : L^2 \rightarrow L^2$  symétrique compact

$$Rf(s) = \int_a^b R(s, t)f(t)dt$$

vérifiant

$$\int_a^b R(s, t)\Phi_n(t)dt = \lambda_n \Phi_n(t)$$

**Exemple 1.2** Pour un mouvement brownien  $\{W_t, 0 \leq t \leq 1\}$  (Chapitre 2 Section 2.2.3), le développement s'écrit pour une suite de variables aléatoires  $Z_n$  de loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$  telles que  $\mathbb{E}|Z_n|^2 = 1$ ,

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(n + 1/2)\pi t}{(n + 1/2)\pi}$$

Et pour un pont brownien standard  $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$  (Chapitre 2 Section 2.9.2), nous avons le D.K.L

$$X_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}$$

## 1.8 Processus ergodiques

Un processus du second ordre  $X_t$  de moyenne  $m(t)$  et de fonction de corrélation  $R(s, t)$  est *ergodique* si

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(s, t) ds dt \xrightarrow{m.q} 0$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{T} \int_0^T (X_t - m(t)) dt \xrightarrow{m.q} 0$$

si  $X_t$  est stationnaire,  $X_t$  est ergodique si et seulement si

$$R(\tau) \xrightarrow{|\tau| \rightarrow \infty} 0$$

ou :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau = 0$$

Ainsi la connaissance de la fonction de corrélation et de la moyenne permet de déterminer si le processus est ergodique.

## 1.9 Martingales et temps d'arrêt

Les martingales à temps discret ou à temps continu sont l'outil essentiel du probabiliste. Elles permettent d'établir de nombreux résultats.

**Définition 1.8** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, muni d'une filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ . Un processus à valeurs réelles  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une  $\mathfrak{F}_t$ -martingale si :

- il est adapté à la filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ , ce qui veut dire que pour tout  $t$ ,  $M_t$  est  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable.
- chaque variable  $M_t$  est intégrable, et :

$$s \leq t \Rightarrow \mathbb{E}(M_t | \mathfrak{F}_s) = M_s$$

on dit que  $M_t$  est une  $\mathfrak{F}_t$ -sur-martingale (resp.  $\mathfrak{F}_t$ -sous-martingale) si l'égalité ci-dessus est remplacée par :

$$\mathbb{E}(M_t | \mathfrak{F}_s) \leq M_s \quad (\text{resp. } \mathbb{E}(M_t | \mathfrak{F}_s) \geq M_s)$$

En particulier, l'espérance  $\mathbb{E}(M_t)$  d'une martingale, (resp. d'une sur-martingale, sous-martingale), est une fonction constante du temps (resp. décroissante, croissante). De manière évidente, une martingale est un processus qui est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale et si  $M_t$  est une martingale, alors  $-M_t$  est une sous-martingale.

**Propriété 1.1** (1).  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale si et seulement si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

(2).  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une sous-martingale si et seulement si  $(-M_t)_{t \geq 0}$  est une sur-martingale.

(3). La somme de deux martingales (resp. sous-martingale, sur-martingale) est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).

### 1.9.1 Temps d'arrêt

Cette notion joue un rôle très important en théorie des probabilités.

**Définition 1.9** Soit  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration. Une application  $T : \Omega \mapsto [0, \infty[$  est un *temps d'arrêt* si  $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$  pour tout  $t \geq 0$ .

Un temps d'arrêt est donc un temps aléatoire, tel que sur chaque ensemble  $\{\omega : T(\omega) \leq t\}$ , l'application  $\omega \mapsto T(\omega)$  dépend seulement de ce qui s'est passé avant le temps  $t$ .

Un joueur honnête, qui ne peut pas anticiper sur les événements futurs, peu décider d'arrêter le jeu au temps aléatoire  $T$  uniquement si  $T$  est un temps d'arrêt. Un exemple trivial de temps d'arrêt est donné par  $T(\omega) = t$  pour tout  $\omega$ .

En dehors des temps constants, l'exemple fondamental de temps d'arrêt est le *temps d'atteinte* d'un ensemble borélien  $\mathcal{A}$  par un processus  $X_t$  à trajectoires continues à droite et adapté à la filtration  $\mathfrak{F}_t$ . On définit plus précisément :

$$T = \inf(t \geq 0; X_t \in \mathcal{A})$$

### 1.9.2 Théorème d'arrêt

Soit  $M_t$  une martingale. La propriété des martingale peut facilement être étendue aux temps d'arrêt bornés.

**Théorème 1.6** *Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt et si  $a \in \mathbb{R}$ , alors :*

$$\mathbb{E}(M_T | \mathfrak{F}_S) = M_S \quad \text{sur l'ensemble } \{S \leq T \leq a\} \quad (1.1)$$

*En particulier, si  $T$  est un temps d'arrêt qui est borné, on a :*

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) \quad (1.2)$$

Quand  $M_t$  désigne de nouveau le gain d'un joueur au temps  $t$ , la propriété (1.2) peut être interprétée comme suit. Quelle que soit la stratégie non anticipante que le joueur choisit pour arrêter le jeu, et s'il doit finir de jouer avant un temps déterministe donné (aussi grand que soit ce temps), alors la valeur espérée de son gain est constante et égale à son capital initial.

Observons que la relation (1.1) est, en général, fautive sur l'ensemble  $\{S \leq T\}$ , et de même (1.2) est fautive si  $T$  n'est pas borné. Par exemple si  $M_t = B_t$  ou  $B_t$  est un mouvement brownien et si  $T = \inf(t : M_t = 1)$ , alors  $\mathbb{E}(M_0) = 0 < \mathbb{E}(M_T) = 1$ . Dans ce cas, le temps aléatoire  $T$  est presque sûrement fini, mais n'est pas borné et a même une espérance infinie.



# 2

## Mouvement Brownien

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Construction du mouvement brownien</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Semi-groupe du mouvement brownien</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Approximation la dérive d'un mouvement brownien standard par un bruit blanc gaussien</b>	<b>27</b>
<b>2.5</b>	<b>Continuité des trajectoires</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Régularité des trajectoires</b>	<b>28</b>
<b>2.7</b>	<b>Mouvement brownien arithmétique</b>	<b>32</b>
<b>2.8</b>	<b>Mouvement brownien géométrique</b>	<b>34</b>
<b>2.9</b>	<b>Pont brownien</b>	<b>36</b>
<b>2.10</b>	<b>Martingales exponentielles</b>	<b>39</b>
<b>2.11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

---

## 2.1 Introduction

Le mouvement brownien est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le biologiste Robert Brown [11] alors qu'il observait du pollen de *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes, en suspension dans l'eau.

La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante

1. Entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante.
2. La grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

Cette description permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Brown n'est pas exactement le premier à avoir fait cette observation. Il signale lui-même que plusieurs auteurs avaient suggéré l'existence d'un tel mouvement (en lien avec les théories vitalistes de l'époque). Parmi ceux-ci, certains l'avaient effectivement décrit, on peut mentionner en particulier l'abbé John Turberville Needham (1713-1781), célèbre à son époque pour sa grande maîtrise du microscope.

La réalité des observations de Brown a été discutée tout au long du XXe siècle. Compte tenu de la médiocre qualité de l'optique dont il disposait, certains ont contesté qu'il ait pu voir véritablement le mouvement brownien, qui intéresse des particules de quelques micromètres au plus. Les expériences ont été refaites par l'Anglais Brian Ford [12] au début des années 1990, avec le matériel employé par Brown et dans les conditions les plus semblables possibles. Le mouvement a bien été observé dans ces conditions, ce qui valide les observations de Brown.

Quelques années plus tard en 1905, Albert Einstein mit en évidence les étranges relations que le processus entretenait avec l'équation de la chaleur. Vers 1909, Jean Perrin entreprit son étude expérimentale et Paul Langevin posa la première équation. Mais il faudra attendre 1925 et les travaux de Norbert Wiener pour que le mouvement brownien ait véritablement un sens mathématique comme modèle d'un bruit blanc. À partir des années 1950, Kiyoshi Itô [27] l'utilisa pour définir l'intégrale qui porte son nom et jeta les bases du calcul stochastique.

Nous nous intéressons dans ce chapitre principalement à les principaux processus aléatoires à l'exception du mouvement brownien, ces propriétés, ces caractéristiques, ainsi sa construction mathématique et sa simulation par trois approches, nous retrouverons la plupart de ces processus dans les problèmes de calcul stochastique. Nous introduisons la notion de martingale exponentielle qui joue un rôle très importante dans les calculs des lois des temps de passage du mouvement brownien, ainsi la théorème de caractérisation de *Paul Lévy*.

## 2.2 Construction du mouvement brownien

Ce processus de diffusion peut être construit par différentes approches. Les définitions les plus usuelles du mouvement brownien sont les suivantes.

### 2.2.1 Construction par un processus gaussien

Un processus stochastique  $W_t$  est un *mouvement brownien* ou un *processus de Wiener* si  $W_0 = 0$  (on dit que  $W_t$  est issu de 0) et si pour tous réels  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont indépendantes et suivent une distribution gaussienne centrée réduite (on dit que le mouvement brownien est standard si  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ ) telle que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t) = 0 \\ \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^2 = h \end{cases}$$

Dans le cas général, lorsque le mouvement brownien n'est pas centré réduit, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = m(t_k - t_{k-1}) \\ \mathbb{E}((W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) - m(t_k - t_{k-1}))^2 = \sigma^2(t_k - t_{k-1}) \end{cases}$$

le vecteur  $(W_{t_0}, W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  est un vecteur gaussien. Le processus  $W_t$  suit une loi gaussienne de moyenne  $mt$  et de variance  $\sigma^2 t$ . On peut facilement simuler une trajectoire de mouvement brownien dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , il suffit de fixer un pas de temps  $\Delta t > 0$  et d'écrire

$$W(\Delta t) = W(\Delta t) - W(0) \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$$

Les accroissements  $(W_{n\Delta t} - W_{(n-1)\Delta t})$  étant indépendants et gaussiens, il suffit donc de simuler une loi gaussienne

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$$

Ainsi, nous pouvons simuler facilement une seule trajectoire brownienne de la façon suivante. On considère la subdivision de l'intervalle de temps  $[0, T]$  suivante  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ , avec  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , pour  $i = 1$  on a  $W(0) = W(t_1) = 0$ . On donne l'algorithme suivant :

1. Générer un nouveau variable aléatoire  $Z$  de la distribution gaussienne  $N(0, 1)$ .
2.  $i = i + 1$ .
3.  $W(t_i) = W(t_{i-1}) + Z\sqrt{\Delta t}$ .
4. Si  $i \leq N + 1$ , réitérez à l'étape 1.

La fonction `BMN` permet de simuler un mouvement brownien standard  $\{W_t, t \geq 0\}$  dans l'intervalle de temps  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , et la fonction `BMNF` permet de simuler un flux brownien standard ( $C = \sigma^2$ )

```
R> BMN(N = 1000, t0 = 0, T = 1, C = 1)
```

```
R> BMNF(N = 1000, M = 100, t0 = 0, T = 1, C = 1)
```

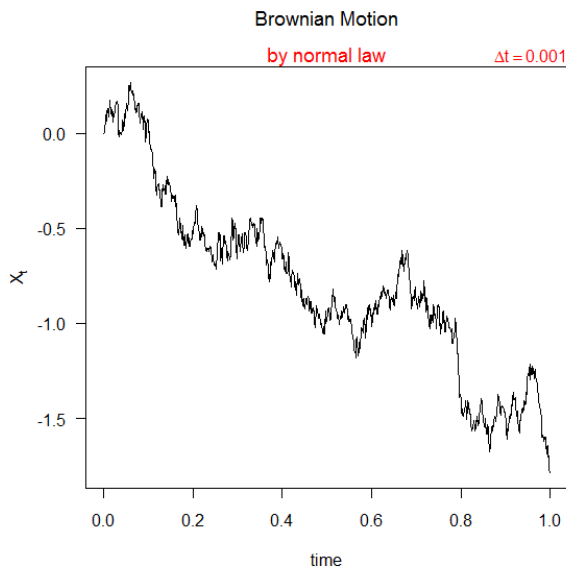


FIGURE 2.1 – Trajectoire brownienne simulée a partir d’une distribution gaussienne.

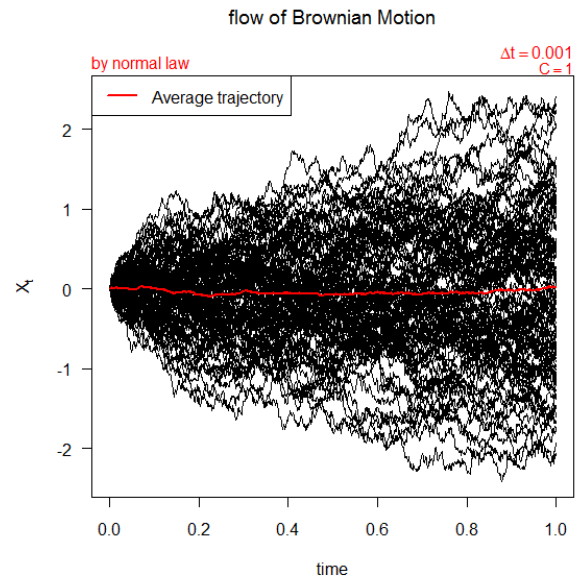


FIGURE 2.2 – Flux de trajectoires brownienne simulées a partir d’une distribution gaussienne.

### 2.2.2 Construction par une limite d’une marche aléatoire

Une caractérisation du mouvement brownien indique qu’il peut voir en tant que limite d’une marche aléatoire dans le sens suivant. Considérons une suite de variables aléatoires indépendants  $X_i$  centrées de variance  $\sigma^2$  et la marche aléatoire  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si } p = 1/2 \\ -1 & \text{si } p = 1/2 \end{cases}$$

On définit une suite de variables  $Y_n$  par la formule suivante :

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$$

où  $[.]$  est la partie entière.

Ce résultat fondamental est donné par le théorème de Donsker (1951) et est, en fait, au niveau des processus, une version du théorème usuel de la limite centrale

**Théorème 2.1 (Principe d’invariance de Donsker)** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, avec  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$ . Soit  $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$  avec  $S_0 = 0$ .

Les processus des sommes normalisées  $Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]}$  (où  $[nt]$  désigne la partie entière de  $nt$ ) convergent en loi, en tant que processus, vers le mouvement brownien.

Cette convergence donne une définition du mouvement brownien comme l'unique limite (en loi) de marches aléatoires.

Le code 1, permet de simuler un mouvement brownien standard comme l'unique limite de marche aléatoire. La figure 2.3 donne une représentation de l'approximation d'un mouvement brownien par une marche aléatoire pour  $n = 10, n = 100$  et  $n = 1000$ .

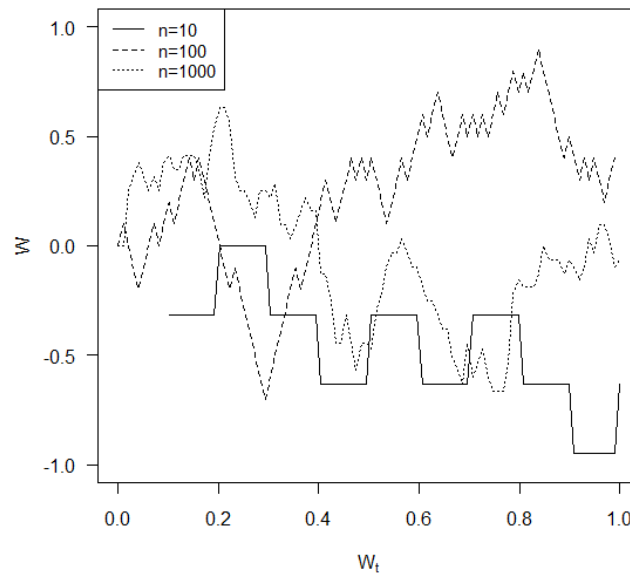


FIGURE 2.3 – Trajectoire brownienne comme limite d'une marche aléatoire.

### 2.2.3 Construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L)

Pour un mouvement brownien  $\{W_t, 0 \leq t \leq 1\}$ , le développement de *Karhunen-Loève* [15, 16] s'écrit pour une suite de variables aléatoires  $Z_n$  de loi normale centrée réduite telles que  $\mathbb{E}|Z_n^2| = 1$ ,

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(n+1/2)\pi t}{(n+1/2)\pi} \quad \forall t \in [0, 1] \quad (2.1)$$

**Preuve** À partir du théorème de *Karhunen-Loève* 1.5, on a l'équation aux valeurs propres

$$\int_0^1 (s \wedge t) \phi_n(s) ds = \lambda_n \phi_n(t)$$

s'écrit

$$\int_0^t s \phi_n(s) ds + \int_t^1 t \phi_n(s) ds = \lambda_n \phi_n(t)$$

soit en dérivant

$$\lambda_n \phi_n'(t) = \int_t^1 \phi_n(s) ds$$

deux fois

$$\lambda_n \phi_n''(t) = -\phi_n(t)$$

avec  $\phi_n'(1) = 0$ . La résolution de cette équation conduit à

$$\phi_n(t) = c \sin(t/\sqrt{\lambda_n})$$

La constante  $c$  est déterminée par le fait que les fonctions propos sont orthonormées

$$\int_0^1 \phi_n^2(s) ds = 1$$

d'où  $c = \sqrt{2}$ . La condition limite  $\phi_n'(1) = 0$  donne l'équation  $\cos(1/\sqrt{\lambda_n}) = 0$  qui fournit les valeurs propres

$$\lambda_n = \frac{1}{(n + 1/2)\pi^2}$$

d'où le développement

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(n + 1/2)\pi t}{(n + 1/2)\pi}$$

Le code 2 (Annexe A), permet de simuler un mouvement brownien standard à partir de D.K.L. La figure 2.4 donne une représentation graphique d'une approximation d'un mouvement brownien par le D.K.L pour  $n = 10, n = 100$  et  $n = 1000$ .

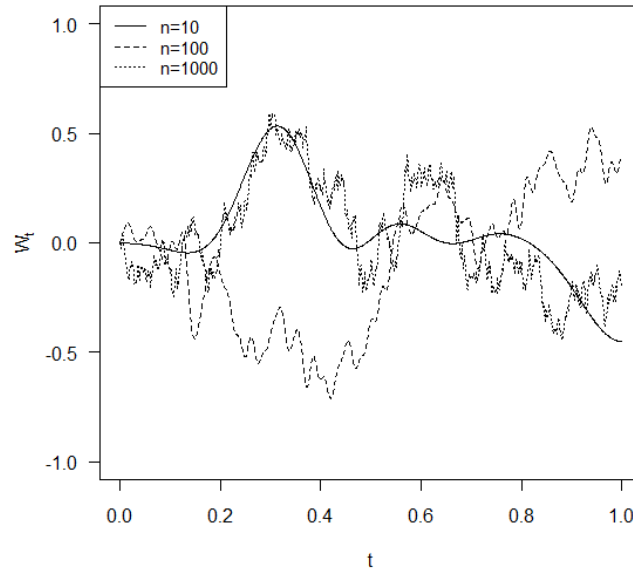


FIGURE 2.4 – Approximation d'un mouvement brownien par le D.K.L.

## 2.3 Semi-groupe du mouvement brownien

### 2.3.1 Propriété de Markov

Considérons un mouvement brownien  $W_t$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , et la filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  qu'il engendre. Puisqu'il est à accroissements indépendants, la variable  $Y := W_{t+s} - W_t$  est indépendante de la tribu  $\mathfrak{F}_t$ . On a pour chaque fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{E}(f(W_{t+s})|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}(f(W_t + Y)|\mathfrak{F}_t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s} f(W_t + x) dx \quad (2.2)$$

Cette formule montre que conditionnellement à  $\mathfrak{F}_t$ , la loi de  $W_{t+s}$  ne dépend pas de tout le passé (c'est-à-dire de toutes les variables  $W_r$  pour  $r \leq t$ ), mais seulement de la valeur "présente"  $W_t$  du processus. On dira que le mouvement brownien est un **processus de Markov**.

**Définition 2.1** Un processus  $X_t$  est un processus de Markov si, étant donné la filtration  $\mathfrak{F}_t$  engendrée par le processus, celui-ci vérifie la propriété de Markov, à savoir que pour tous  $s, t \geq 0$  et pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_t) \quad (2.3)$$

Dans le cas du mouvement brownien, les variables  $W_r$  pour  $r \geq t$ , sont indépendantes, conditionnellement à la valeur de  $W_t$ . De plus, la loi de  $W_{t+s}$  sachant  $\mathfrak{F}_t$  dépend bien sûr de  $s$ , mais pas de  $t$ . On dit que le mouvement brownien est un **processus de Markov homogène**.

**Définition 2.2** Soit  $X_t$  un processus de Markov **homogène**. On appelle **semi-groupe de transition** de  $X_t$  la famille  $(P_t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs positifs linéaires :

$$P_t : \Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto P_t \Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$P_t \Phi(x) = \mathbb{E}(\Phi(X_t) | X_0 = x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) P_t(x, dy)$$

qui satisfait  $P_t 1 = 1$  et la propriété de semi-groupe :

$$P_0 = Id \quad , \quad P_{t+s} = P_s \circ P_t \quad \forall s, t \geq 0 \quad (2.4)$$

Dans le cas du mouvement brownien, qui est un processus de markov homogène, le semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  est donné par :

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy \quad (2.5)$$

comme le montre immédiatement la formule (2.2).

En utilisant les relations (2.2) et (2.5), on obtient facilement les propriétés :

$$\mathbb{E}(W_t | \mathfrak{F}_s) = W_s \quad ; \quad \mathbb{E}(W_t^2 | \mathfrak{F}_s) = W_s^2 + t - s \quad , \quad \forall s < t \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Mouvement brownien multidimensionnel

Le mouvement brownien multidimensionnel est très utilisé dans les modèles de marche en temps continu. Par exemple, lors de la modélisation simultanée des prix de plusieurs actifs risqués.

**Définition 2.3** Un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel est une collection  $W = (W^i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $d$  mouvements browniens à valeurs réelles  $W^i = (W_t^i)_{t \geq 0}$ , qui sont **indépendants** entre eux.

Ce processus est encore un processus de Markov homogène (et même un processus à accroissements indépendants). Son semi-groupe vaut alors :

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|y-x\|^2}{2t}\right) dy \quad (2.7)$$

où  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{R}^d$ ,  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ , et  $dy$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

Les deux fonctions BMN2D et BMRW2D permettent de simuler un mouvement brownien 2 dimensions, respectivement par la distribution gaussienne et par approximation une marche aléatoire.



```
R> BMN2D(N = 10000, t0 = 0, T = 1, x0 = 0, y0 = 0, Sigma = 1)
R> BMRW2D(N = 10000, t0 = 0, T = 1, x0 = 0, y0 = 0, Sigma = 1)
```

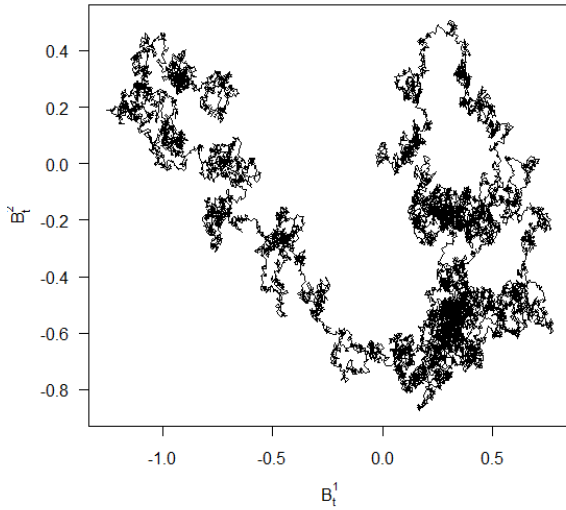


FIGURE 2.5 – Mouvement brownien 2–D simulée a partir d’une distribution gaussienne.

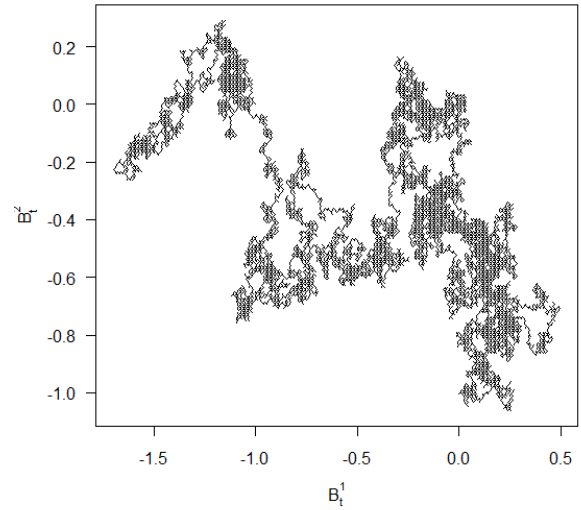


FIGURE 2.6 – Approximation d’un mouvement brownien 2–D par une marche aléatoire.

La fonction `BMN3D` permet de simulée un mouvement brownien 3-dimensions.

```
R> BMN3D(N = 10000, t0 = 0, T = 1, X0 = 0, Y0 = 0, Z0 = 0, Sigma = 1)
```

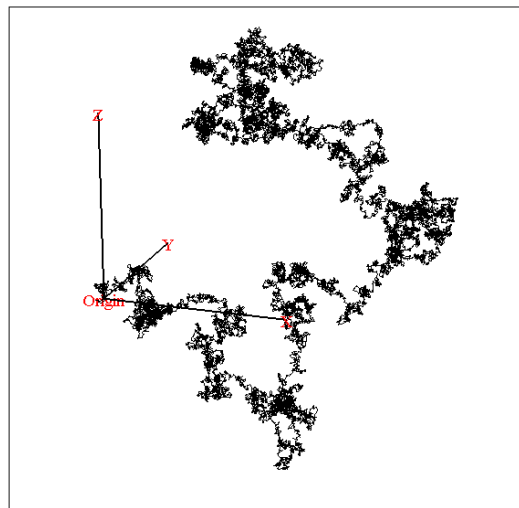


FIGURE 2.7 – Mouvement brownien 3–D simulée a partir d’une distribution gaussienne.

## 2.4 Approximation la dérive d'un mouvement brownien standard par un bruit blanc gaussien

Un bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale est la même pour toutes les fréquences, on parle souvent de bruit blanc gaussien, il s'agit d'un bruit blanc qui suit une loi normale de moyenne et variance données.

**Définition 2.4** Un processus  $\varepsilon_t$  est qualifié de bruit blanc gaussien si :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$
- $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_s$  sont indépendants  $\forall t \neq s$
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Par analogie avec le bruit blanc en temps discret, défini comme une suite de variables aléatoires, centrées, du second ordre et indépendants, on cherche à définir  $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 0}$  comme un processus stochastique vérifiant  $\forall t > 0$  et  $\forall h > 0$  :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \delta_0(h)$

où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac en 0.

Un tel processus n'existe pas. Son idéalisation est la dérivée d'un mouvement brownien standard. Si pour  $\Delta t > 0$  fixé, on considère le processus

$$\varepsilon_t = \frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{\Delta t}$$

Il est facile de montrer grâce aux propriétés données par la définition de mouvement brownien que :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|h|}{\Delta t}\right) 1_{[0,1]} \left(\frac{|h|}{\Delta t}\right)$$

Quand  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h})$  converge vers  $\delta_0(h)$ . Il est donc clair que la dérivée formelle  $\frac{dW_t}{dt}$  a les propriétés d'un bruit blanc gaussien. Ce qui justifie l'affirmation concernant l'idéalisation du bruit blanc.

Donc on peut écrire formellement :

$$\varepsilon_t = \frac{dW_t}{dt}$$

## 2.5 Continuité des trajectoires

Dire qu'un processus aléatoire  $\{X_t, t \geq 0\}$  est continu c'est, par définition dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |X_{t+h} - X_t| = 0$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte. La plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi. Elle est évidemment vérifiée. Nous allons démontrer une continuité en probabilité pour le mouvement brownien standard.

**Proposition 2.1** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\{W_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|W_{t+h} - W_t| > \varepsilon) = 0$$

**Preuve** Soit  $h > 0$ , par définition, l'accroissement  $W_{t+h} - W_t$  admet pour loi  $N(0, h)$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|W_{t+h} - W_t| > \varepsilon) &= \frac{2}{h} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \\ &< 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon x}{2h}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} \frac{2h}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2h}} \end{aligned}$$

Le dernier terme converge vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ .

## 2.6 Régularité des trajectoires

Le mouvement brownien a de nombreuses propriétés dont certaines peuvent être prise comme définition.

**Proposition 2.2** Le processus  $W_t$  est un processus à accroissements indépendants de fonction de covariance

$$\Gamma(s, t) = \mathbb{E}(W_s W_t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

**Preuve** Le mouvement brownien est un processus centré, les accroissements étant indépendants, on a pour  $0 \leq s < t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_s W_t) &= \mathbb{E}(W_s (W_t - W_s)) + \mathbb{E}(W_s^2) \\ &= \mathbb{E}(W_s) \mathbb{E}(W_t - W_s) + \text{var}(W_s) \\ &= 0 + \sigma^2 s = \sigma^2 s \end{aligned}$$

et pour  $0 \leq t < s$  on a,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_t W_s) &= \mathbb{E}(W_t (W_s - W_t)) + \mathbb{E}(W_t^2) \\ &= \mathbb{E}(W_t) \mathbb{E}(W_s - W_t) + \text{var}(W_t) \\ &= 0 + \sigma^2 t = \sigma^2 t \end{aligned}$$

d'où :  $\mathbb{E}(W_s W_t) = \sigma^2 \min(s, t)$ .

La fonction  $\text{BM}_{\text{cov}}$  donne une représentation graphique (Figure 2.8) de la fonction de covariance empirique d'un mouvement brownien standard (pour  $M = 500$  trajectoires simulées de taille  $N = 1000$ ,  $C = \sigma^2$ ).

R> BMcov(N = 1000, M = 500, T = 1, C = 1)

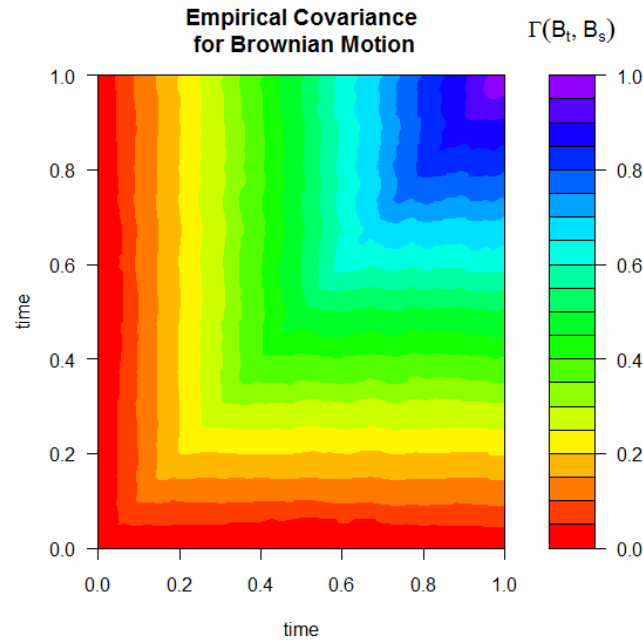


FIGURE 2.8 – Fonction de covariance empirique d’un mouvement brownien standard.

**Proposition 2.3** La densité de  $\Delta W = (W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$  est donnée par

$$f_{\Delta W}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \frac{-x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}$$

**Proposition 2.4** La densité de  $W = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  est

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \sum_{j=1}^n \frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}$$

**Proposition 2.5** Pour un mouvement brownien standard ( $m = 0, \sigma = 1$ ) et pour tout  $n$ , l’espérance

$$\mathbb{E}(W_{t+h} - W_t)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2h} dx = 1.3 \dots (2n - 1)h^n$$

Presque toutes les réalisations du mouvement brownien sont continues (appliquer le théorème 1.1 de Kolmogorov avec  $c = 3, p = 4$  et  $r = 1$ ).

**Proposition 2.6** Soit  $W_t$  un mouvement brownien standard. On a presque sûrement,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty & , \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty & , \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty, \end{aligned}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{t} = 0.$$

**Preuve** Comme pour tout  $s > 0$ ,

$$U = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_{t-s} - W_t}{\sqrt{t}}$$

cette limite est indépendante de la tribu  $\sigma(W_u, u \leq s)$  et donc de  $\sigma(W_u, u \leq 0)$  et par conséquent d'elle-même. On a soit  $\mathbb{P}(U = +\infty) = 1$  soit  $\mathbb{P}(U = a) = 1$ . Supposons que la limite sup soit atteinte en  $a$ . Pour tout  $b > a$ ,  $\mathbb{P}\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}} > b\right)$  tend vers 0, mais  $\mathbb{P}\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}} > b\right) = \mathbb{P}(W_1 > 0) = 1$ , Donc  $a$  ne peut être qu'infini. Pour la limite inférieure, il suffit de considérer  $-W_t$ . Pour les limites au voisinage de zéro, on considérera le processus  $X_t = tW_{1/t}$ , pour établir la dernière formule, on pose  $s = 1/t$  et on considère le mouvement brownien  $X_t = tW_{1/t}$ , on a  $W_t/t = sW_{1/s} = X_s \rightarrow 0$  p.s. puisque  $X_t$  est un mouvement brownien standard.

Les deux codes 3 et 4, permettent de vérifier par simulation la proposition 2.6, le mouvement brownien standard est simulée à partir de développement de Karhunen-Loève. La figure 2.9 montre clairement que le mouvement brownien standard est non différentiables, et la figure 2.10 montre que la limite de mouvement brownien standard par rapport au temps tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

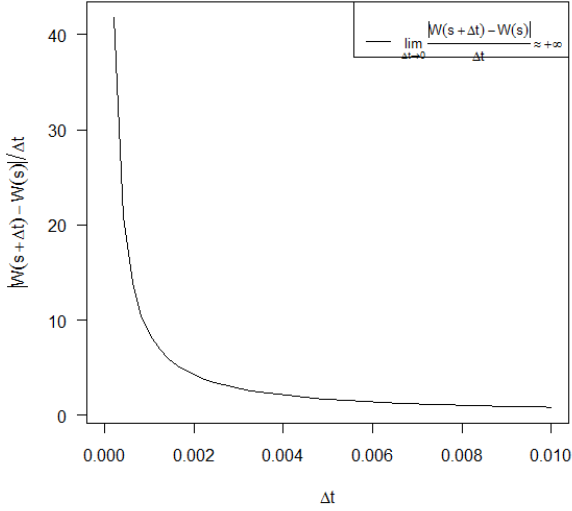


FIGURE 2.9 – Le mouvement brownien standard est non différentiables.

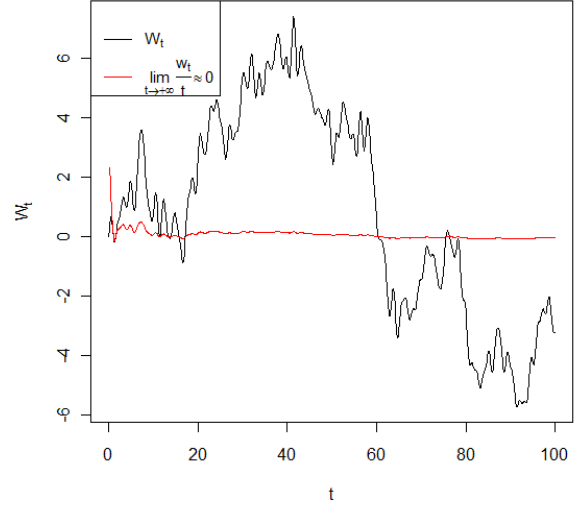


FIGURE 2.10 – La limite de mouvement brownien standard par rapport au temps.

**Proposition 2.7** Soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$  une subdivision de l'intervalle  $[0, t]$  dont le pas tend vers 0, la variation quadratique converge dans  $L^2$  vers  $t$

$$V_n = \sum_{k=0}^n (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \xrightarrow{L^2} t$$

**Preuve** Le calcul de la norme donne

$$\begin{aligned} \|V_n - t\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^n (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k) \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^n ((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k))^2 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(X_i X_j) \end{aligned}$$

avec

$$X_i = ((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i))$$

Le produit des termes croisés est nul, car on a pour  $i < j$

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i X_j) | \mathfrak{F}_{t_j}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j | \mathfrak{F}_{t_j})) = 0$$

et puisque  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  est  $\mathfrak{F}_{t_j}$ -mesurable. Il reste donc

$$\|V_n - t\|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k))^2$$

Mais les accroissements  $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 / (t_{k+1} - t_k)$  ont même loi que  $Z^2$ , où  $Z$  est une variable aléatoire centrée réduite. D'où

$$\begin{aligned} \|V_n - t\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E}(Z^2 - 1)^2 \sum_{k=0}^n (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(Z^2 - 1)^2 t \sup(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Proposition 2.8** Si  $W_t$  est un mouvement brownien, alors il en est de même pour les processus suivante

- (1).  $X_t = \frac{1}{a} W_{a^2 t}$  pour  $a$  constante non nulle (invariance par changement d'échelle).
- (2).  $X_t = t W_{1/t}$  pour  $t > 0$  et  $X_0 = 0$  (invariance par inversion de temps).
- (3).  $X_t = W_{T-t} - W_T$  avec  $T > 0$  et  $t \in [0, T]$  (invariance par retournement du temps).

**Preuve** Il suffit de vérifier que le processus est gaussien et de même covariance que  $W_t(t \wedge s)$ . Vérifions (1), on a

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{1}{a^2} \mathbb{E}(W_{a^2 s} W_{a^2 t}) = \frac{1}{a^2} \min(a^2 s, a^2 t) = \min(s, t)$$

De même pour (2), on a

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = ts \mathbb{E}(W_{1/s} W_{1/t}) = ts \min(1/s, 1/t) = \min(s, t)$$

et pour (3), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s X_t) &= \mathbb{E}((W_{T-s} - W_T)(W_{T-t} - W_T)) \\ &= \mathbb{E}(W_{T-s} W_{T-t}) - \mathbb{E}(W_{T-s} W_T) - \mathbb{E}(W_T W_{T-t}) + \mathbb{E}(W_T^2) \\ &= \min(T-s, T-t) - T + s + t \end{aligned}$$

$$\text{Si } t > s, \quad \mathbb{E}(X_s X_t) = T - t - T + s + t = s$$

$$\text{Si } t < s, \quad \mathbb{E}(X_s X_t) = T - s - T + s + t = t$$

d'où :  $\mathbb{E}(X_s X_t) = \min(s, t)$ .

## 2.7 Mouvement brownien arithmétique

Le mouvement brownien standard ou processus de Wiener que nous avons étudié comporte certaines lacunes. D'abord sa *dérivée* est nul, or plusieurs processus stochastiques comportent une tendance. Par exemple les indices boursiers font montre d'une tendance à la hausse à long terme. De plus, la variance d'un processus stochastique est égale au pas  $\Delta t$ , comme cette variance ne peut accepter qu'un nombre très limité de processus stochastiques, il y a lieu de choisir la partie aléatoire d'un processus stochastique par la variance observée de la série. Le *mouvement*

*brownien arithmétique* où *mouvement brownien avec dérive* (Dans la finance modèle de Merton (1973)) corrige ces deux déficiences du processus de Wiener. Il s'écrit comme suit

$$dX_t = \theta dt + \sigma dW_t \quad (2.8)$$

où  $\theta$  est la dérive de processus et  $\sigma$  son écart-type,  $W_t$  est un mouvement brownien standard. À partir de l'équation différentielle stochastique (2.8) on remarque que c'est la partie stochastique du processus qui domine à court terme et sa tendance à long terme.<sup>1</sup>

Pour simuler une seule trajectoire du mouvement brownien arithmétique sur un intervalle de temps  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , nous avons utilisé la fonction `ABM`. Et pour un flux de trajectoires utilisant la fonction `ABMF`.

On considère la subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, T]$  suivante  $t_0 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ , avec  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , pour  $i = 0$  on a  $W(0) = W(t_0) = 0$  et  $X(0) = X(t_0) = x_0$ , on a l'algorithme suivant :

1. Générer un nouveau variable aléatoire  $Z$  de la distribution gaussienne  $N(0, 1)$ .
2.  $i = i + 1$ .
3.  $W(t_i) = W(t_{i-1}) + Z\sqrt{\Delta t}$ .
4.  $X(t_i) = X(t_{i-1}) + \theta\Delta t + \sigma(W(t_i) - W(t_{i-1}))$
5. Si  $i \leq N + 1$ , réitérez à l'étape 1.

**Remarque 2.1** Si  $\theta = 0$  on a un mouvement brownien.

Comme on prend acte la figure 2.11, le mouvement brownien arithmétique est caractérisé par un dérive à long terme ponctué de déviations qui dépendent de l'écart-type du processus stochastique.

```
R> ABM(N = 1000, t0 = 0, T = 1, x0 = 0, theta = 2, sigma = 1)
R> ABMF(N = 1000, M = 100, t0 = 0, T = 1, x0 = 0, theta = 2, sigma = 1)
```

1. En effet,  $\theta$  est multiplié par  $dt$  et  $\sigma$  par  $\sqrt{dt}$ .



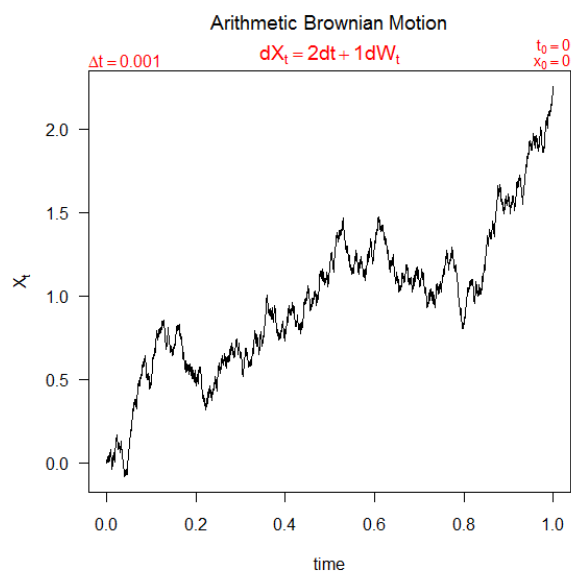


FIGURE 2.11 – Trajectoire d'un mouvement brownien arithmétique avec  $\theta = 2$  et  $\sigma = 1$ .

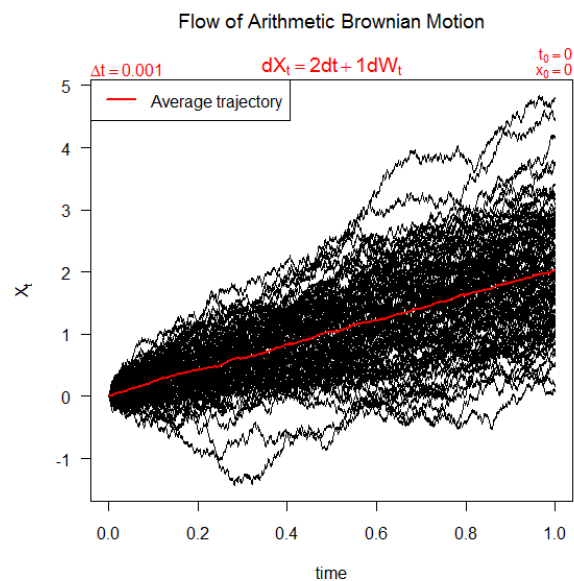


FIGURE 2.12 – Flux d'un mouvement brownien arithmétique avec  $\theta = 2$  et  $\sigma = 1$ .

## 2.8 Mouvement brownien géométrique

Un mouvement brownien arithmétique est inapproprié pour décrire l'évolution du prix d'une action, étant donné la croissance espérée du prix de cette action, désignée par  $\theta$ , et l'écart-type du taux de rendement de l'action, représenté par  $\sigma$ . En effet, cela supposerait que le rendement total de l'action soit  $\frac{dS_t}{S_t}$ , aurait tendance à diminuer au cours du temps, ce qui est contraire aux données observées sur les rendements des actions. On fait donc l'hypothèse que le prix d'une action obéir à un *mouvement brownien géométrique* où le modèle de marché de *Black et Scholes*, c'est-à-dire

$$dS_t = \theta S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.9)$$

La dérive et l'écart-type sont donc multipliés par  $S_t$ , soit le niveau du prix de l'action. Il s'ensuit le taux de rendement de l'action suit un mouvement brownien arithmétique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \theta dt + \sigma dW_t \quad (2.10)$$

Utilisant le *lemme d'Itô* que nous examinerons plus en détail dans le chapitre suivant, l'équation différentielle stochastique (2.9) admet pour solution

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right], \quad S_0 > 0 \quad (2.11)$$

Comme le mouvement brownien standard  $W_t$  est de loi  $N(0,t)$ ,  $\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$  est de loi  $N\left(\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$  et  $S_t$  est de loi lognormale.

Pour simuler une seule trajectoire du mouvement brownien géométrique (utilisant l'équation (2.11)) sur un intervalle de temps  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , nous avons utilisé la fonction GBM. Et pour un flux de trajectoires utilisant la fonction GBMF.

```
R> GBM(N = 1000, t0 = 0, T = 1, x0 = 1, theta = 2, sigma = 1)
R> GBMF(N = 1000, M = 100, t0 = 0, T = 1, x0 = 1, theta = 2, sigma = 1)
```

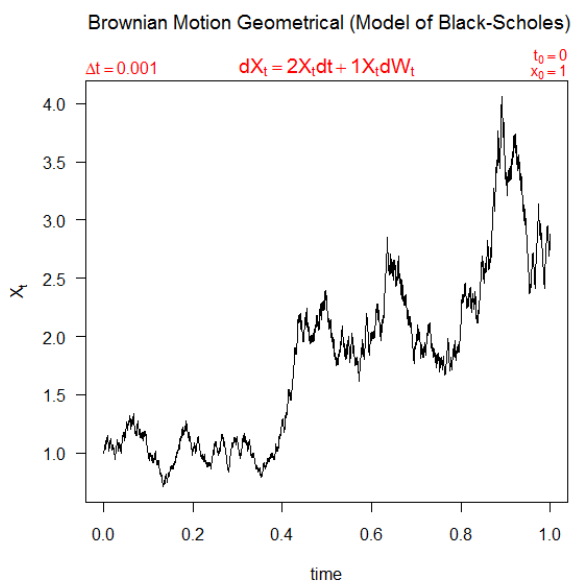


FIGURE 2.13 – Trajectoire d'un mouvement brownien géométrique avec  $\theta = 2$  et  $\sigma = 1$ .

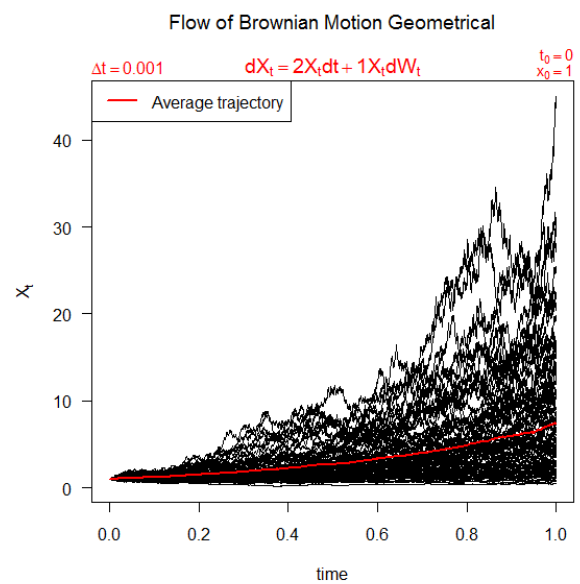


FIGURE 2.14 – Flux d'un mouvement brownien géométrique avec  $\theta = 2$  et  $\sigma = 1$ .

Si l'équation différentielle stochastique du prix de l'action se conforme à un mouvement brownien géométrique, alors le prix de l'action suit une loi lognormale. Et si tel le cas le logarithme de  $S_t$  suit une loi normale. Pour le montrer soit l'équation (2.9) du prix de l'action, et soit la fonction  $g$  qui est égale à  $\ln(S_t)$ . Cette fonction dépend donc de la variable aléatoire  $S_t$ . Selon le lemme d'Itô, l'équation différentielle de la fonction  $g$  s'écrit

$$dg_t = \frac{\partial g}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} dS_t^2 \tag{2.12}$$

Le lemme d'Itô s'apparente donc à une expansion de Taylor du second degré. Or,

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

En substituant ces dérivées dans l'équation (2.12) et en remplaçant  $dS_t$  par l'équation (2.9), on obtient

$$dg_t = \frac{1}{S_t}(\theta S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2S_t^2} \quad (2.13)$$

Avec  $dS_t^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$ , nous le justifierons dans le chapitre suivant. Après simplification de l'équation (2.13), on obtient

$$dg_t = \left( \theta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (2.14)$$

Le logarithme de  $S_t$ , soit la fonction  $g$  suit bien une loi normale puisque  $dW_t$  obéit à une loi normale. On peut alors écrire le prix de l'action comme suit

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[ \left( \theta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right] \quad (2.15)$$

## 2.9 Pont brownien

Un *pont brownien* est un objet mathématique de la théorie des probabilités, également appelé **mouvement brownien attaché** ("tied down brownian motion" en anglais), **mouvement brownien attaché en  $a$**  ("brownian motion tied down at  $a$ " en anglais) ou **mouvement brownien épinglé** ("pinned brownian motion" en anglais).

Considérons un mouvement brownien  $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$ . On veut calculer la loi conditionnelle de  $W_t$  par rapport à la tribu engendrée par la variable aléatoire  $W_1$ . Notons  $\mathcal{L}(a, \cdot)$  la loi conditionnelle de  $W_t$  sachant  $W_1 = a$ . Si l'on modifie la loi du processus  $W_t$ , celui-ci change de nom et de propriétés.

**Définition 2.5** Le processus  $W_t$  sous la loi  $\mathcal{L}(a, \cdot)$ , est appelé le **pont brownien**, et **pont brownien standard** si  $a = 0$ .

**Définition 2.6** Un pont brownien  $X_t$  est un processus stochastique à temps continu dont la loi celle d'un processus de Wiener sachant l'événement  $W_0 = W_1 = a$ . Il s'agit d'un processus aléatoire gaussien, c'est à dire que la loi de probabilité de tout vecteur  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  conditionnellement à  $W_1 = a$  est gaussienne. Il est alors caractérisé par sa moyenne et sa fonction de covariance, qui sont données par :

$$\mathbb{E}(W_t | W_1 = a) = at \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

$$cov(W_s, W_t | W_1 = a) = s(1-t) \quad \forall 0 \leq s < t \leq 1$$

Observons que la moyenne dépend de  $a$ , mais pas la covariance. Et si  $a = 0$  on a un pont brownien standard dont

$$\mathbb{E}(W_t | W_1 = 0) = 0 \quad \text{et} \quad cov(W_s, W_t | W_1 = 0) = s(1-t) \quad \forall 0 \leq s < t \leq 1$$

Son semi-groupe de transition est donné par la formule suivante, pour  $0 \leq s < t < 1$

$$P_{s,t}^{(a)}(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi(t-s)(1-t)}{1-s}}} \exp\left(-\frac{\left(y - \frac{1}{1-s}(x(1-t) + a(t-s))\right)^2}{\frac{2(t-s)(1-t)}{1-s}}\right) dy$$

Le pont brownien peut être vu comme la définition de la loi d'un point  $X_\theta$  à la date  $\theta \in [s, t]$ , intermédiaire sur la trajectoire d'un mouvement brownien dont  $X_s$  et  $X_t$  sont connus, un tel point suit une loi normale

$$N\left(X_s + \frac{\theta - s}{t - s}(X_t - X_s), \frac{(t - \theta)(\theta - s)}{t - s}\right)$$

**Proposition 2.9** Si  $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$  est un mouvement brownien standard, alors on a

- (1).  $X_t = W_t - tW_1$  est un pont brownien.
- (2).  $X_t = (1 - t)W_{t/1-t}$  est un pont brownien.

**Preuve** Il suffit de vérifier que le processus est gaussien et de covariance égale à  $s(1 - t) \quad \forall 0 \leq s < t \leq 1$ . Vérifions (1), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s X_t) &= \mathbb{E}((W_s - sW_1)(W_t - tW_1)) \\ &= \mathbb{E}(W_s W_t) - t\mathbb{E}(W_s W_1) - s\mathbb{E}(W_t W_1) + ts\mathbb{E}(W_1^2) \\ &= \min(s, t) - ts = s(1 - t) \end{aligned}$$

De même pour (2), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s X_t) &= \mathbb{E}((1 - s)(1 - t)W_{s/1-s}W_{t/1-t}) \\ &= (1 - s)(1 - t) \min\left(\frac{s}{1 - s}, \frac{t}{1 - t}\right) \\ &= \min(s(1 - t), t(1 - s)) = s(1 - t) \end{aligned}$$

## 2.9.1 Construction par processus contraint

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard,  $a$  et  $b$  des réels quelconques. On définit le processus  $(X_\theta)_{s \leq \theta \leq t}$ , comme la déformation de  $W_t$ , à partir de l'instant  $\theta = s$  forcée de passer par  $a$  à la date  $\theta = t$ . À tout instant, utilisant la nullité de l'espérance de  $dW_t$  pour tout  $t$ , on écrit donc le *drift* du processus  $X_\theta$  comme la différence entre  $a$  et  $X_\theta$ , sur le temps restant avant  $t$ . On obtient donc une description du processus  $X_\theta$  comme :

$$dX_\theta = \frac{a - X_\theta}{t - \theta} d\theta + dW_\theta, \quad \text{avec } X_s = b \quad \text{et } X_t = a. \quad (2.16)$$

L'équation différentielle stochastique (2.16) (voir le chapitre correspondant) admet pour solution :

$$X_{s,b}^{t,a}(\theta) = b + W_{\theta-s} - \frac{\theta - s}{t - s}(W_{t-s} - a + b) \quad (2.17)$$

Nous pouvons simuler une trajectoire d'un pont brownien directement à partir de l'équation (2.17). On considère la subdivision de l'intervalle de temps  $[0, T]$  suivante  $0 = t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ , avec  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , pour  $i = 1$  et  $W(0) = W(t_1) = 0$ , on a l'algorithme suivant :

1. Générer une nouvelle variable aléatoire  $Z$  de distribution gaussienne  $N(0, 1)$ .
2.  $i = i + 1$ .
3.  $W(t_i) = W(t_{i-1}) + Z\sqrt{\Delta t}$ .
4.  $X(t_i) = b + W(t_i) - \frac{t_i}{T}(W_T - a + b)$
5. Si  $i \leq N + 1$ , réitérez a l'étape 1.

**Remarque 2.2** Si  $a = b = 0$  on a un pont brownien standard.

La fonction BB (Brownian Bridge) permet de simuler un pont brownien sur l'intervalle de temps  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , et la fonction BBF permet de simuler un flux de pont brownien.

```
R> b <- - 2; a <- 1;
R> BB(N = 1000, t0 = 0 , T = 1 , x0 = b, y = a)
R> BBF(N = 1000, M = 100, t0 = 0, T = 1, x0 = 0, y = 0)
```

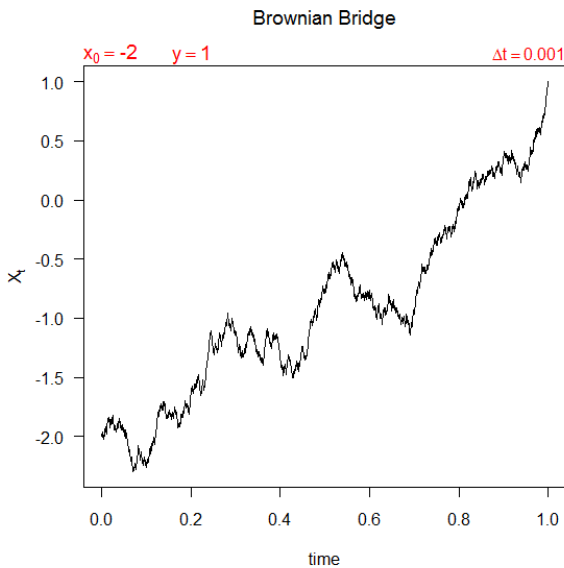


FIGURE 2.15 – Trajectoire d'un pont brownien à partir de  $X_{t_0} = -2$  et  $X_T = 1$ .

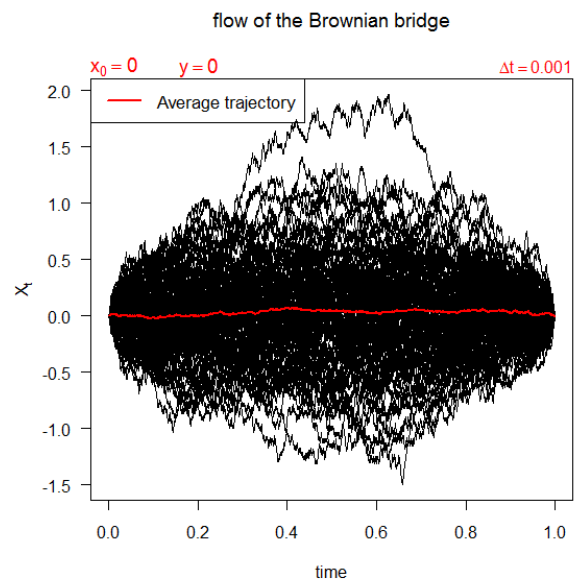


FIGURE 2.16 – Flux de 100 trajectoires d'un pont brownien standard  $X_{t_0} = X_T = 0$ .

## 2.9.2 Construction par le développement de Karhunen-Loève (D.K.L)

Pour un pont brownien standard  $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$  est un processus gaussien centré, à trajectoires continues (p.s), tel que  $X(0) = X(1) = 0$ . Le développement de *Karhunen-Loève* [15, 16] s'écrit pour une suite de variables aléatoires  $Z_n$  de loi normale centrée réduite telles que  $\mathbb{E}|Z_n^2| = 1$ ,

$$X_t = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \quad \forall t \in [0, 1] \quad (2.18)$$

Utilisant le code 5 pour simulée un pont brownien standard a partir de D.K.L. La figure 2.17 donne une représentation graphique d'une approximation d'un pont brownien standard par le D.K.L pour  $n = 10, n = 100$  et  $n = 1000$ .

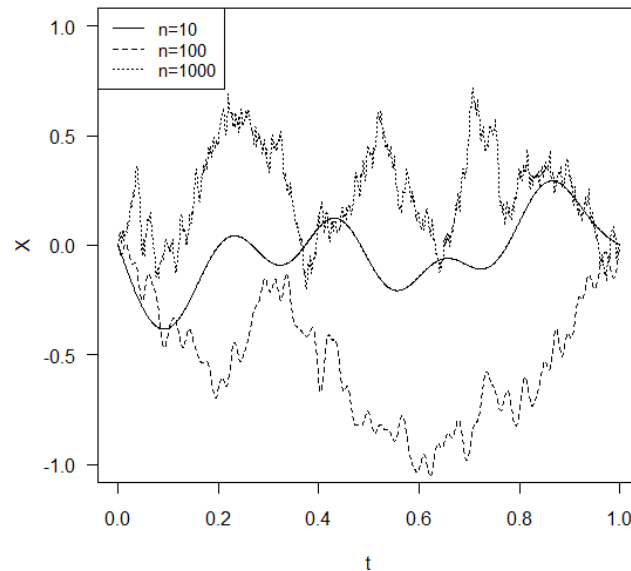


FIGURE 2.17 – Approximation d'un pont brownien standard par le D.K.L.

## 2.10 Martingales exponentielles

D'autres martingales sont liées au mouvement brownien. Les considérer permet d'obtenir d'intéressants résultats. La martingale exponentielle ou martingale de *Wald*, permet en particulier d'obtenir des résultats concernant les processus à accroissements indépendants ayant une dérive. On note

$$M_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right), \quad \forall t \geq 0$$

$M_t$  est une martingale par rapport au mouvement brownien, i.e., pour  $s < t$ ,

$$\mathbb{E}(M_t | W_s, s \leq t) = M_s$$

### 2.10.1 Caractérisation de Paul Lévy du mouvement brownien

Soit  $\{W_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien. Les processus suivantes sont des martingales continues relativement à la filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$

$$X_t = W_t \tag{2.19}$$

$$Y_t = W_t^2 - t \tag{2.20}$$

$$Z_t = \int_0^t f(s) dW_s \quad \text{où } f \in L^2 \quad (\text{version continue de l'intégrale stochastique}) \tag{2.21}$$

$$L_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \tag{2.22}$$

**Preuve** Pour (2.19), si  $s \leq t$  alors  $X_t - X_s$  est indépendante de  $\mathfrak{F}_s$  donc on a

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s | \mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$$

d'où

$$\mathbb{E}(W_t - W_s | \mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}(W_t | \mathfrak{F}_s) - W_s = 0$$

Pour (2.20), de même on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2 | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathfrak{F}_s) + 2\mathbb{E}(W_s(W_t - W_s) | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathfrak{F}_s) + 2W_s \mathbb{E}((W_t - W_s) | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(W_{t-s}^2) = t - s \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(W_t^2 - t | \mathfrak{F}_s) = W_s^2 - s \quad \forall s \leq t$$

Pour (2.21), Si  $f$  est une fonction étagée,

$$f = \sum_i \lambda_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

le processus  $Z_t$

$$Z_t = \int_0^t f(s) dW_s = \sum_i \lambda_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t})$$

est une martingale comme somme de deux martingales arrêtées. De plus,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left( \int_0^t f^2(s) ds \right)$$

Si  $f$  est dans  $L^2$ , il existe une suite de fonctions  $f_n$  qui converge vers  $f$ . La somme

$$\int_0^t f_n(s) dW_s$$

est une suite de martingales. En passant à la limite, on voit que  $Z_t$  est une martingale.

Pour (2.22), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_t | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E} \left( e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_s - \sigma W_s} | \mathfrak{F}_s \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} \mathbb{E} \left( e^{\sigma W_t + \sigma W_s - \sigma W_s} | \mathfrak{F}_s \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} \mathbb{E} \left( e^{\sigma W_s} e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathfrak{F}_s \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} e^{\sigma W_s} \mathbb{E} \left( e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathfrak{F}_s \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} e^{\sigma W_s} \mathbb{E} \left( e^{\sigma W_{t-s}} \right) \end{aligned}$$

et comme on  $W_t$  est un processus gaussien à accroissements indépendants et stationnaires, donc  $W_{t-s} \sim N(0, t-s) = \sqrt{t-s} N(0, 1)$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_t | \mathfrak{F}_s) &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} e^{\sigma W_s} \mathbb{E} \left( e^{\sigma \sqrt{t-s} N(0,1)} \right) \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} t} e^{\sigma W_s} e^{\frac{\sigma^2}{2} (t-s)} \\ &= \exp \left( \sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s \right) \end{aligned}$$

D'une manière plus générale, le processus  $M_t$  est une martingale

$$M_t = \exp \left( \int_0^t f(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right) \quad \text{où } f \in L^2$$

En prenant pour fonction  $\lambda f$  on construit une infinité de martingales, le processus  $M_t$  devient

$$M_t = \exp \left( \lambda \int_0^t f(s) dW_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right)$$

En dérivant selon le paramètre  $\lambda$ , on obtient de nouvelles martingales. Pour  $f = 1$ , on trouve que  $M_t = \exp \left( \lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right)$  est une martingale. En dérivant, on obtient une suite de martingales  $\partial M_t / \partial \lambda |_{\lambda=0} = W_t$ ,  $\partial^2 M_t / \partial \lambda^2 |_{\lambda=0} = W_t^2 - t$ ,  $\partial^3 M_t / \partial \lambda^3 |_{\lambda=0} = W_t^3 - 3t W_t, \dots$



**Théorème 2.2 (Caractérisation de Paul Lévy du mouvement brownien)** Soit  $X_t$  un processus aléatoire réel *continu*. Pour que  $X_t$  soit un mouvement brownien il faut et il suffit que  $X_t$  et  $X_t^2 - t$  soient des martingales pour la filtration propre de  $X_t$ .

Autrement dit, toute martingale *continue* est un mouvement brownien. L'hypothèse continue est essentielle. Le processus de Poisson  $N_t$  est une martingale, même que  $N_t^2 - t$ , mais il n'est pas continu et donc n'est pas un mouvement brownien.

### 2.10.2 La loi du temps d'atteinte du mouvement brownien

Soit  $W_t$  un mouvement brownien, les martingales exponentielles permettent de calculer les lois des temps de passage. Soit  $a > 0$ , on définit  $T_a$  le temps d'arrêt (Chapitre 1 Section 1.9.1), avec  $T_0 = 0$

$$T_a = \inf\{t > 0 : W_t = a\}$$

représentant le premier instant où le mouvement brownien atteint la valeur  $a$ . On pose  $T_a = \inf(\emptyset) = \infty$ . On peut calculer la *transformée de Laplace* de la variable aléatoire  $T_a$ , en considérant la martingale

$$U_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

En arrêtant  $U_t$  à l'aide de  $T_a$ , on introduit la martingale

$$X_t = U_{t \wedge T_a} = \exp\left(\sigma W_{t \wedge T_a} - \frac{\sigma^2}{2}(t \wedge T_a)\right)$$

qui converge vers

$$\exp\left(\sigma a - \frac{\sigma^2}{2}T_a\right) 1_{\{T_a < \infty\}}$$

Pour  $\sigma > 0$ ,  $X_t$  est une martingale bornée puisque  $W_{t \wedge T_a}$  est majorée par  $a$ . On peut donc appliquer la relation (1.2) à la martingale  $X_t$  et au temps d'arrêt  $T_a$ , ce qui donne  $\mathbb{E}(X_{T_a}) = \mathbb{E}(X_0) = 1$ . Puisque

$$X_{T_a} = \exp\left(\sigma a - \frac{\sigma^2}{2}T_a\right)$$

Si l'on pose  $\theta = \sigma^2/2$ , on obtient :

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta T_a)) = \exp(-a\sqrt{2\theta}) \tag{2.23}$$

On obtient ainsi la *transformée de Laplace* de la variable aléatoire  $T_a$ , cette transformée de Laplace peut être inversée, et cela montre que  $T_a$  admet une densité sur  $\mathbb{R}^+$  donnée par :

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right); \quad a > 0, \quad t > 0 \tag{2.24}$$

La loi de  $T_a$  s'appelle une **loi stable d'indice 1/2** où **distribution de Lévy**. En particulier, on en déduit que

$$\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_a) = \infty$$

Des formules similaires existent avec  $-a$  au lieu de  $a$  si  $a$  est négatif, par symétrie du mouvement brownien. Le processus  $-W_t$  est encore un mouvement brownien, et le temps d'atteinte de  $a$  par  $-W_t$  est égale au temps d'atteint de  $-a$  par  $W_t$ .

**Exemple 2.1** Soit  $W_t$  un mouvement brownien standard. On note

$$T_x = \inf\{t \geq 0, W_t = x\}$$

et on considère une variable exponentielle  $X$  de paramètre 1, alors on a

$$\mathbb{P}(T_x < X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_x < t) e^{-t} dt = \mathbb{E}(e^{-T_x}) = e^{-\sqrt{2}x}$$

### 2.10.3 Les temps de passage du mouvement brownien

Considérons maintenant  $a > 0$  et  $b > 0$ , et soit  $T = \min(T_a, T_{-b})$ . La martingale  $M_t = W_{\min(T, t)}$  est bornée, donc uniformément intégrable, et on peut appliquer la relation (1.2) au temps  $T$ . cela entraîne que :

$$0 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_T) = a\mathbb{P}(T = T_a) - b\mathbb{P}(T = T_{-b})$$

Mais  $\{T = T_a\} = \{T_a < T_{-b}\}$  et  $\{T = T_{-b}\} = \{T_{-b} < T_a\}$ , de telle sorte que finalement on obtient

$$\mathbb{P}(T_a < T_{-b}) = \frac{b}{a+b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_{-b} < T_a) = \frac{a}{a+b}$$

**Proposition 2.10** Les temps de passage sont donnés par

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta T_{-b}) 1_{\{T_{-b} < T_a\}}) = \frac{\sinh(a\sqrt{2\theta})}{\sinh((b+a)\sqrt{2\theta})} \quad (2.25)$$

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta T_a) 1_{\{T_a < T_{-b}\}}) = \frac{\sinh(b\sqrt{2\theta})}{\sinh((b+a)\sqrt{2\theta})} \quad (2.26)$$

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta(T_a \wedge T_{-b}))) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\theta})} \quad (2.27)$$

**Preuve** Pour (2.25) on a  $\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$  et  $\exp(-\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$  sont des martingales, le processus

$$X_t = (\alpha \exp(\sigma W_t) + \beta \exp(-\sigma W_t)) \exp(-\sigma^2 t/2)$$

est une martingale. Soit  $T = \inf(T_a, T_{-b})$  un temps d'arrêt. Le processus  $X_{t \wedge T}$  est une martingale bornée (puisque  $-b \leq W_{t \wedge T} \leq a$ ). Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le processus  $X_{t \wedge T}$  tend vers

$$(\alpha \exp(\sigma W_T) + \beta \exp(-\sigma W_T)) \exp(-\sigma^2 T/2)$$

où  $W_T$  vaut

$$W_T = a1_{\{T_a < T_{-b}\}} - b1_{\{T_{-b} < T_a\}}$$

Choisissons  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que  $\alpha \exp(\sigma a) + \beta \exp(-\sigma a) = 0$ . Par exemple en prenant,  $\alpha = \exp(-\sigma a)/2$  et  $\beta = -\exp(\sigma a)/2$ . Le processus

$$X_t = \sinh(\sigma(W_t - a)) \exp(-\sigma^2 t/2)$$

est une martingale. Donc le processus arrêté

$$X_{t \wedge T} = \sinh(\sigma(W_{t \wedge T} - a)) \exp(-\sigma^2(t \wedge T)/2)$$

est aussi une martingale. Par conséquent, d'après le théorème d'arrêt (Chapitre 1 Section 1.9.2)

$$\mathbb{E}(X_{T_{-b}}) = \mathbb{E}(X_0) = \sinh(-\sigma a) \Leftrightarrow \sinh(\sigma(-b - a)) \mathbb{E}(\exp(-\sigma^2 T_{-b}/2) 1_{\{T_{-b} < T_a\}}) = \sinh(-\sigma a)$$

et comme la fonction  $\sinh$  est une fonction impaire ( $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ ), donc on a

$$\mathbb{E}(\exp(-\sigma^2 T_{-b}/2) 1_{\{T_{-b} < T_a\}}) = \frac{\sinh(\sigma a)}{\sinh(\sigma(b + a))}$$

Si l'on pose  $\theta = \sigma^2/2$ , on obtient

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta T_{-b}) 1_{\{T_{-b} < T_a\}}) = \frac{\sinh(a\sqrt{2\theta})}{\sinh((b + a)\sqrt{2\theta})}$$

On démontre la formule (2.26) de la même manière, choisissons  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que  $\alpha \exp(-\sigma b) + \beta \exp(\sigma b) = 0$ , en prenant  $\alpha = \exp(\sigma b)/2$  et  $\beta = -\exp(-\sigma b)/2$ . Dons le processus

$$X_t = \sinh(\sigma(W_t + b)) \exp(-\sigma^2 t/2)$$

est une martingale. Donc on le processus arrêté

$$X_{t \wedge T} = \sinh(\sigma(W_{t \wedge T} + b)) \exp(-\sigma^2(t \wedge T)/2)$$

est aussi une martingale. Appliquons le théorème d'arrêt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{T_a}) = \mathbb{E}(X_0) = \sinh(\sigma b) &\Leftrightarrow \sinh(\sigma(a + b)) \mathbb{E}(\exp(-\sigma^2 T_a/2) 1_{\{T_a < T_{-b}\}}) = \sinh(\sigma b) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(\exp(-\sigma^2 T_a/2) 1_{\{T_a < T_{-b}\}}) = \frac{\sinh(\sigma b)}{\sinh(\sigma(a + b))} \end{aligned}$$

On a  $\theta = \sigma^2/2$ , on obtient

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta T_a) 1_{\{T_a < T_{-b}\}}) = \frac{\sinh(b\sqrt{2\theta})}{\sinh((b + a)\sqrt{2\theta})}$$

La troisième formule (2.27) est la somme des deux premières (2.25) et (2.26) dans laquelle on prendra  $a = b$ , donc on

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta(T_a \wedge T_{-a}))) = \frac{2 \sinh(a\sqrt{2\theta})}{\sinh(2a\sqrt{2\theta})}$$

On sait que  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$  ( $x = a\sqrt{2\theta}$ ), d'où on trouve

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta(T_a \wedge T_{-a}))) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\theta})}$$

## **2.11 Conclusion**

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines. À l'heure actuelle, un rôle important en mathématiques financières. Comme on a pu le constater dans ce chapitre, il y a plusieurs façons de simuler un processus stochastique d'une variable aléatoire. Le processus de Wiener est à la base de toutes ces représentations stochastiques. Il entre justement dans la formulation de la partie stochastique de ces divers modèles. Le mouvement brownien arithmétique est le plus simple des processus stochastiques. Mais, pour modéliser le prix d'une action, son principal désavantage est que le rendement de cette action est une fonction décroissante du prix de l'action. On recourt par conséquent au mouvement brownien géométrique pour représenter le mouvement stochastique du prix d'une action. Dans ce chapitre, nous avons présenté le théorème de *Paul Lévy* qui caractérise un mouvement brownien, et on a montré l'importance du théorème d'arrêt dans les calculs des temps de passages, à cause de la propriété de martingale.

# 3

## Processus de Diffusion

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Intégrale stochastique</b>	<b>48</b>
<b>3.3</b>	<b>Èquations différentielles stochastiques</b>	<b>56</b>
<b>3.4</b>	<b>Schémas numériques</b>	<b>65</b>
<b>3.5</b>	<b>Les modèles attractives</b>	<b>75</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

---

### 3.1 Introduction

Afin de prendre en compte les modélisations de force aléatoires qui interviennent dans les équations de la dynamique comme des termes complémentaires, on a cherché à donner un sens à l'intégrale lorsque celle-ci est prise par rapport à un processus stochastique. Ce chapitre est consacré dans un premier temps à étudier l'intégrale

$$\int_a^b f(t, \omega) dW(t, \omega)$$

dans la quelle  $W_t$  est un mouvement brownien standard et  $f$  un processus stochastique. Si  $f$  est une fonction déterministe de classe  $C^1$ , l'intégrale est une intégrale de *Stieltjes* classique. Mais si  $f$  dépend aléatoirement de la variable  $\omega$ , comme le mouvement brownien standard n'est nulle part différentiable et que presque toutes ces réalisations n'ont pas de variations bornées, l'intégrale n'a pas de sens. [27] a été le premier à donner un sens à cette intégrale. À la suite des travaux d'Itô, *Stratonovitch* a proposé une autre définition de l'intégrale stochastique, la construction de l'intégrale d'Itô est assez technique. Dans le contexte de l'intégrale stochastique, nous employons indifféremment la notion de processus de Wiener et celle de mouvement brownien.

Les systèmes apparaissant dans les applications sont souvent soumis à des perturbations que l'on peut considérer comme aléatoires. Dans le cas où le bruit  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc gaussien, on peut modéliser l'équation par un mouvement brownien et la traiter comme une équation d'Itô. On note  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  le vecteur décrivant l'état du système à l'instant  $t$ . On va considérer des processus  $X_t$  qui sont solution d'une forme perturbée de l'équation différentielle :

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\varepsilon_t \quad (3.1)$$

où le vecteur  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  décrit l'état du système à l'instant  $t$ . L'équation (3.1) peut s'écrire formellement :

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \frac{dW_t}{dt} \quad (3.2)$$

où  $\frac{dW_t}{dt}$  est la dérivée formelle par rapport au temps d'un mouvement brownien  $W_t$  (Chapitre 2 Section 2.4). En fait, la dérivée  $\frac{dW_t}{dt}$  n'existe pas (Dans la littérature d'ingénieur, la dérivée de Wiener est souvent appelée *bruit blanc*). L'équation (3.2) doit être réécrite avec la notation différentielle

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (3.3)$$

avec  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  sont des fonctions mesurables localement bornées sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas où le processus  $X_t$  est markovien, on a ce qu'on appelle une *diffusion*.

Nous décrivons dans ce chapitre des méthodes numériques pour la résolution d'équation différentielles stochastiques (ÉDS). Pour approcher numériquement l'équation (3.3), on utilise

des schémas aux différences classiques et le fait que pour un pas  $h$  donné, les variables  $W_{(n+1)h} - W_{nh}$  suivent des lois gaussiennes indépendantes de variance  $h$ . On note  $x_t$  le processus approché et on considère la subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

de pas régulier

$$h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Dans le cas multidimensionnel  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  et  $X_t = (X_1(t), \dots, X_d(t))$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ . Le mouvement brownien a  $p$  composantes  $W_t = (W_1(t), \dots, W_p(t))$  et  $\sigma_j = (\sigma_j^1, \sigma_j^2, \dots, \sigma_j^d)$  pour  $j = 1, \dots, d$ . L'équation (3.3) s'écrit

$$X_t = \mu(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^p \sigma_j(t, X_t)dW_j(t)$$

et se traite de la même manière.

La dernière partie de ce chapitre concerne l'utilisation des processus de diffusion dans la modélisation et l'étude analytique et par simulation de deux problèmes :

- Le premier problème est de modéliser une trajectoire d'un polluant, qui se déplace sur une surface d'eau turbulente en présence d'un mécanisme d'attraction, qui est donnée par (Boukhetala 1994,1996 [2, 4]).
- Le deuxième problème porte sur une modélisation d'un phénomène d'attraction entre deux insectes mâle et femelle, qui est donnée par (Boukhetala 1998 [5]).

## 3.2 Intégrale stochastique

### 3.2.1 L'intégrale d'Itô

On considère une espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $\mathfrak{F}_t$ , i.e. une suite de tribus croissantes pour l'inclusion. On appelle *tribu des prévisibles* sur  $\Omega \times [0, \infty[$  la plus petite tribu rendant mesurable tous les processus continus adaptés à la filtration  $\mathfrak{F}_t$ . Un processus ou un ensemble est *prévisibles* s'il est mesurable par rapport à cette tribu. Supposons donné un processus de Wiener standard  $W_t$ , adapté à la filtration  $\mathfrak{F}_t$  et tel que pour tout  $0 \leq s \leq t$  l'accroissement  $W_t(\omega) - W_s(\omega)$  soit indépendant de  $\mathfrak{F}_s$ . Sur un intervalle de temps  $[a, b]$ , on note  $\mathbb{H}^2$  l'ensemble des processus  $f(t, \omega)$  définis pour  $t \in [a, b]$ ,  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable et de carré intégrable presque sûrement. Dans ces conditions, si  $f$  est dans  $\mathbb{H}^2$  et si  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$  est subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ , alors  $f$  est indépendant des increments  $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ , en d'autre termes  $f$  est prévisible. Pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{H}^2$ , on définit l'*intégrale stochastique d'Itô* comme la limite dans  $L^2$  des accroissements ci-dessous (on notera que toutes les limites de cette section sont des limites quadratiques, i.e. dans  $L^2$ ). On définit ainsi l'intégrale stochastique comme la limite des sommes Riemann.

$$\int_a^b f(t, \omega)dW(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(t_i, \omega)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

Cette définition est cohérente avec les propriétés usuelles de l'intégrale. On a de plus quelques propriétés complémentaires liées à la dépendance aléatoire de  $f$

(1) Si  $f \in \mathbb{H}^2$  et si  $\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t)) dt < \infty$ , alors

$$\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t)) dW_t = 0$$

(2) Si  $f, g \in \mathbb{H}^2$  et si  $\int_a^b [\mathbb{E}(f^2(t)) + \mathbb{E}(g^2(t))] dt < \infty$ , alors

$$\mathbb{E} \left( \int_a^b f(t) dW_t \right) \left( \int_a^b g(t) dW_t \right) = \int_a^b \mathbb{E}(f(t)g(t)) dt$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E} \left( \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 = \int_a^b \mathbb{E}(f^2(t)) dt$$

Le résultat suivant montre que l'intégrale stochastique est une martingale. Si  $f(t, \omega) \in \mathbb{H}^2$  et si pour tout  $t \in [a, b]$ , la somme  $\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t)) dt < \infty$ , alors l'intégrale stochastique

$$\int_a^b f(t, \omega) dW(t, \omega)$$

est une martingale (la démonstration dans la page 40) est ces trajectoires sont p.s. continues.

**Exemple 3.1** Calcul de  $I_0 = \int_{t_0}^t W_s dW_s$

Considérons la subdivision de l'intervalle  $[t_0, t] : t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$  et appliquons la définition. On rappelle que toutes les limites sont des limites prises dans  $L^2$

$$I_0 = \lim \sum_{i=0}^n W_{t_i} [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]$$

En considérant la somme

$$I_1 = \lim \sum_{i=0}^n W_{t_{i+1}} [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]$$

on peut former la différence et appliquer les propriétés du mouvement brownien

$$I_1 - I_0 = \lim \sum_{i=0}^n [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2 = t - t_0$$

De manière générale, considérons

$$I_\lambda = (1 - \lambda)I_0 + \lambda I_1$$



On a

$$\begin{aligned}
 I_\lambda &= \lim \sum_{i=0}^n [\lambda W_{t_{i+1}} + (1-\lambda)W_{t_i}] [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \\
 &= \lim \sum_{i=0}^n [W_{t_i} W_{t_{i+1}} - W_{t_i}^2 + \lambda [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2] \\
 &= \lim \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} [W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2] + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) (t - t_0) \\
 &= \frac{1}{2} [W_t^2 - W_{t_0}^2] + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) (t - t_0)
 \end{aligned}$$

d'où la valeur de l'intégrale d'Itô obtenue pour  $\lambda = 0$

$$I_0 = \int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2} [W_t^2 - W_{t_0}^2] - \frac{t - t_0}{2}$$

Remarquons que ce type de calcul ne respecte pas les lois du calcul différentiel ordinaire puisqu'on voit apparaître un terme supplémentaire. Pour  $t_0 = 0$  l'équation

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}$$

peut s'écrire

$$W_t^2 = \int_0^t ds + 2 \int_0^t W_s dW_s$$

soit sous forme différentielle

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t$$

ce qui montre clairement le terme supplémentaire ( $dt$ ). Dans les calculs stochastiques, la dérivation doit être poursuivie à l'ordre 2, les termes croisés sont nuls  $dW_t \cdot dt = dt \cdot dW_t = 0$ , de même que le terme  $dt \cdot dt = 0$ . En revanche, le terme  $dW_t \cdot dW_t = dt$  donne naissance à un terme supplémentaire.

### 3.2.2 L'intégrale de Stratonovitch

Qui est définie par la limite quadratique

$$\int_a^b f(t, \omega) \circ dW(t, \omega) = \lim \sum_{i=0}^n \frac{f(t_i, \omega) + f(t_{i+1}, \omega)}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

satisfait les règles du calcul différentiel ordinaire. En reprenant le calcul précédent pour  $\lambda = 1/2$ , on trouve

$$I_{1/2} = \int_{t_0}^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2} [W_t^2 - W_{t_0}^2]$$

Dans ce cas, il n'y a pas de terme supplémentaire. On préfère toutefois développer le calcul stochastique en utilisant la définition d'Itô.

La fonction `ItovsStra` permet de simuler l'intégrale stochastique  $I_0$  par les deux types *Itô* et *Stratonovitch*, sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  avec un pas  $\Delta t = T/N$ .

Nous avons observé lors de la construction de l'intégrale stochastique  $I_0$  au sens d'Itô dans la figure 3.1, que les trajectoires du processus  $\{\int_0^t W_s dW_s, 0 \leq t \leq T\}$  pouvaient être négatives à certains instants.

```
R> ItovsStra(N = 1000, T = 1)
```

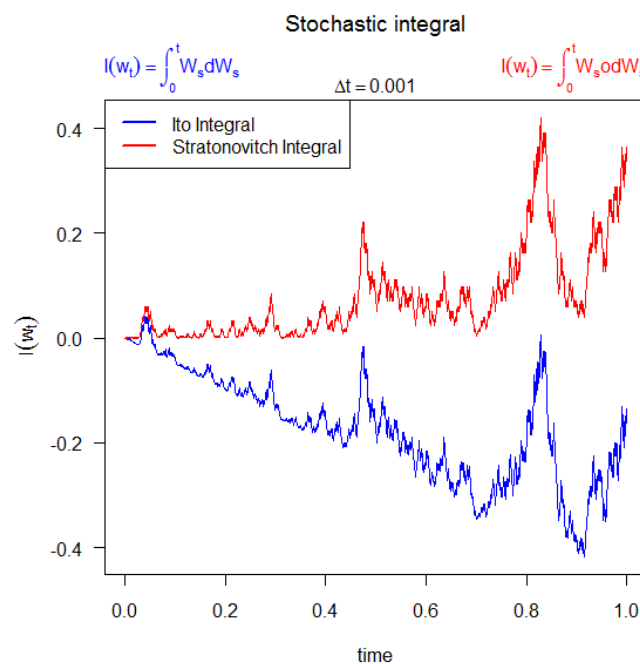


FIGURE 3.1 – Simulation l'intégrale stochastique  $\int_0^t W_s dW_s$  vs  $\int_0^t W_s \circ dW_s$ .

### 3.2.3 Processus d'Itô

On appelle processus d'Itô, un processus  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad (3.4)$$

avec

- (1)  $\mu = \{\mu_t, 0 \leq t \leq T\}$  et  $\sigma = \{\sigma_t, 0 \leq t \leq T\}$  sont des processus adaptés à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$
- (2)  $\mathbb{P} \left[ \int_0^T |\mu_s| ds < \infty \right] = 1$

$$(3) \mathbb{P} \left[ \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty \right] = 1$$

Écrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (3.5)$$

**Remarque 3.1** Par conséquent, si le coefficient de dérive est nul, c'est-à-dire que  $\mu_t = 0$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ , alors le processus d'Itô  $X_t$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad (3.6)$$

est une  $\mathfrak{F}_t$ -martingale si et seulement si  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty \right]$  est vérifié.

### 3.2.4 Formule d'Itô

Pour un processus stochastique  $X_t$  vérifiant

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) dW_t$$

on note sous forme différentielle

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

Si  $f(t, x)$  est une fonction de classe  $C^2$ , alors  $f(t, X_t)$  admet une intégrale stochastique par rapport au même processus de Wiener donnée par la *formule d'Itô*

$$df(t, X_t) = \left( \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \mu(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dW_t \quad (3.7)$$

Cette formule permet de trouver les solutions de l'équation différentielle stochastique (3.3), et le calcul d'espérance d'un processus donné. Elle permet aussi de montrer que certains processus sont des martingales (puisque l'intégrale stochastique est une martingale).

Par exemple, si  $f(x) = x^2$ , alors

$$f(W_t) = W_t^2 \quad \text{et} \quad f(W_0) = W_0^2 = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial w}(W_s) = 2W_s \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2.$$

En remplaçant dans la formule (3.7), nous obtenons

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t$$

sous forme intégrale

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + \int_0^t ds = 2 \int_0^t W_s dW_s + t$$

ce qui implique

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

D'une manière générale la dérivé stochastique du processus  $X_t = W_t^n$ . Posons  $f(t, x) = x^n$  et appliquons la formule d'Itô. Il vient

$$dW_t^n = \frac{1}{2}n(n-1)W_t^{n-2}dt + nW_t^{n-1}dW_t$$

sous forme intégrale

$$W_t^n = \frac{1}{2}n(n-1) \int_0^t W_s^{n-2} ds + n \int_0^t W_s^{n-1} dW_s \Leftrightarrow \int_0^t W_s^{n-1} dW_s = \frac{1}{n}W_t^n - \frac{n-1}{2} \int_0^t W_s^{n-2} ds$$

Pour  $n = n + 1$ , on obtient

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{n}{2} \int_0^t W_s^{n-1} ds$$

**Exemple 3.2** Soit le mouvement brownien géométrique où le modèle de marché de Black et Scholes (Chapitre 2 Section 2.8)

$$dS_t = \theta S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{3.8}$$

on chercher une solution unique explicite à ce modèle, nous appliquons la formule d'Itô (3.7) à l'équation (3.8), posant  $f(t, x) = \ln(x)$ , on a

$$\begin{aligned} d\ln(S_t) &= \left( 0 + \theta S_t \frac{1}{S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) \right) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t \\ &= \left( \theta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

sous forme intégrale

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \left( \theta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW_s \\ &= \ln(S_0) + \left( \theta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \end{aligned}$$

d'où la solution de l'équation (3.8), pour  $t \geq 0$  et  $S_0 > 0$  est

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

**Exemple 3.3** Soit à calculer la dérivée stochastique du processus  $Y_t = e^{W_t}$ , où  $W_t$  est un mouvement brownien standard. Posons  $X_t = W_t$ ,  $f(t, x) = e^x$  et appliquons la formule (3.7). il vient

$$d(e^{W_t}) = \frac{1}{2}e^{W_t}dt + e^{W_t}dW_t$$

soit sous forme intégrale

$$e^{W_t} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t e^{W_s} ds + \int_0^t e^{W_s} dW_s$$

En prenant l'espérance de chaque membre et en appliquant les règles de calcul du paragraphe précédent (l'espérance de l'intégrale en  $dW_s$  est nulle).

$$\mathbb{E}(e^{W_t}) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(e^{W_s}) ds$$

En posant

$$y(t) = \mathbb{E}(e^{W_t})$$

l'équation précédente est une équation différentielle du premier ordre déterministe en  $y(t)$  avec comme condition initiale  $y(0) = 1$

$$y'(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

qui admet comme solution

$$y(t) = \mathbb{E}(e^{W_t}) = e^{t/2}$$

Remarquons que l'application de la formule d'Itô à la fonction  $f(t, x) = e^{iux}$  permet le calcul de la fonction caractéristique de  $W_t$ .

$$\mathbb{E}(e^{iuW_t}) = e^{-tu^2/2}$$

### Formule d'Itô Multidimensionnel

Soit  $X_t$  un processus de dimension  $m$  vérifiant l'équation

$$dX_t = A(t)dt + B(t)dW_t \tag{3.9}$$

où  $A(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_m(t))$  et  $B(t) = (\sigma_{ij}(t))$  est une matrice  $m \times n$ . Le mouvement brownien étant de dimension  $n$   $W_t = (W_1(t), \dots, W_n(t))$ . Soit  $f(t, x)$  une fonction définie pour  $t \in [a, b]$  et  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  de classe  $C^2$ , alors le processus  $f(t, X_t)$  admet une dérivée stochastique donnée par

$$df(t, X_t) = \left( \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \mu_i(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sigma_{i,k}(t) \sigma_{j,k}(t) \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sigma_{i,k}(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x_i} dW_k(t) \tag{3.10}$$

Dans le cas, où la fonction  $f$  est indépendante du temps et  $X_t = W_t$  est un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^n$ , la formule d'Itô se simplifie en

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t \nabla f(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(W_s) ds \quad (3.11)$$

### 3.2.5 La règle de multiplication

La règle de multiplication ou intégration par parties est utile lorsque nous voulons étudier, par exemple le comportement du prix actualisé d'un actif lorsque nous connaissons les processus pour l'évolution du prix de l'actif et celui du facteur d'actualisation.

**Théorème 3.1 (Intégration par parties)** Soit  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô tels que

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad \text{et} \quad dY_t = \tilde{\mu}_t dt + \tilde{\sigma}_t dW_t \quad (3.12)$$

la formule d'Itô (3.10) conduit à la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} dX_t Y_t &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t \\ &= (\tilde{\mu}_t X_t + \mu_t Y_t + \sigma_t \tilde{\sigma}_t) dt + (\tilde{\sigma}_t X_t + \sigma_t Y_t) dW_t \end{aligned} \quad (3.13)$$

où la variation quadratique est caractérisée par

$$d\langle X, Y \rangle_t = \sigma_t \tilde{\sigma}_t dt$$

**Preuve** En particulier lorsque les browniens sont les mêmes et que la matrice  $B(t)$  se réduit à un vecteur, la dérivée s'écrit

$$df = \left( \partial_t f + \mu_t \partial_x f + \tilde{\mu}_t \partial_y f + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \partial_{xx} f + 2\sigma_t \tilde{\sigma}_t \partial_{xy} f + \tilde{\sigma}_t^2 \partial_{yy} f) \right) dt + (\sigma_t \partial_x f + \tilde{\sigma}_t \partial_y f) dW_t$$

appliquons cette formule à la fonction  $f(t, x, y) = xy$ , on trouve directement le résultat

$$\begin{aligned} dX_t Y_t &= (\mu_t Y_t + \tilde{\mu}_t X_t + \sigma_t \tilde{\sigma}_t) dt + (\sigma_t Y_t + \tilde{\sigma}_t X_t) dW_t \\ &= \mu_t Y_t dt + \tilde{\mu}_t X_t dt + \sigma_t \tilde{\sigma}_t dt + \sigma_t Y_t dW_t + \tilde{\sigma}_t X_t dW_t \\ &= Y_t (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + X_t (\tilde{\mu}_t dt + \tilde{\sigma}_t dW_t) + \sigma_t \tilde{\sigma}_t dt \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t \end{aligned}$$

**Exemple 3.4 (La valeur actualisée d'un actif risqué)** Supposons que le processus stochastique  $S_t$  satisfaisant l'équation (3.8), est l'évolution du prix d'un titre risqué. Le processus  $\{Y_t = e^{-rt}, t \geq 0\}$  est notre facteur d'actualisation. Notons que

$$\frac{d}{dt} Y_t = -r e^{-rt} = -r Y_t$$

c'est-à-dire que le processus  $Y_t$  est un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle

$$dY_t = -r Y_t dt$$

le processus  $Z_t = Y_t S_t$  représente l'évolution de la valeur actualisée du prix du titre. La règle de multiplication (3.13) entraîne que

$$\begin{aligned} dZ_t &= dY_t S_t \\ &= Y_t dS_t + S_t dY_t + d\langle S, Y \rangle_t \\ &= Y_t(\theta S_t dt + \sigma S_t dW_t) + S_t(-rY_t dt) \\ &= (\theta - r)S_t Y_t dt + \sigma S_t Y_t dW_t \\ &= (\theta - r)Z_t dt + \sigma Z_t dW_t \end{aligned}$$

sous sa forme intégrale, cette dernière équation s'écrit

$$Z_t = Z_0 + (\theta - r) \int_0^t Z_s ds + \sigma \int_0^t Z_s dW_s$$

### 3.3 Équations différentielles stochastiques

#### 3.3.1 Introduction et définitions

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation du type suivant :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.14)$$

Dans cette équation,  $dW_t$  est la différentielle d'un mouvement brownien standard  $W_t$ , et  $\mu, \sigma$  sont les coefficients de l'équation (ce sont des fonctions de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), et  $x_0 \in \mathbb{R}$  est la valeur initiale. Tous ces termes sont donnés. La notation (3.14) est la plus usuelle.

**Définition 3.1** Rechercher une solution de l'équation (3.14) consistera à rechercher un processus  $\{X_t, t \geq 0\}$  satisfaisant l'équation intégrale :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad (3.15)$$

où la seconde intégrale est une intégrale stochastique.

L'équation (3.14) ou l'équation (3.15) étaient jusqu'à présent unidimensionnelles. On peut également définir une équation  $d$ -dimensionnelle de la manière suivante. Le processus inconnu  $X = (X^i)_{1 \leq i \leq d}$  est une famille de processus à valeurs réelles  $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$ , la condition initiale  $x_0 = (x_0^i)_{1 \leq i \leq d}$  appartient à  $\mathbb{R}^d$ , le mouvement brownien  $W = (W_t^j)_{1 \leq j \leq q}$  est  $q$ -dimensionnel, et les coefficients ont les dimensions appropriées, soit  $\mu = (\mu^i)_{1 \leq i \leq d}$  et  $\sigma = (\sigma^{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq q}$ , où les coefficients  $\mu^i$  et  $\sigma^{i,j}$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On écrit encore l'équation sous les formes (3.14) ou (3.15), mais cela signifie maintenant que l'on a :

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t \mu^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^q \int_0^t \sigma^{i,j}(s, X_s)dW_s^j; i = 1, \dots, d \quad (3.16)$$

**Définition 3.2** Quand les coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  ne dependent pas du temps et sont seulement des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^d$ , on dit que l'équation est **homogène**.

Le coefficient  $\mu$  est appelé le **coefficient de dérive**, tandis que  $\sigma$  est le **coefficient de diffusion**. Un processus qui résout l'équation (3.14), ou de manière équivalente (3.16), est appelé **processus de diffusion** ou, plus simplement, une **diffusion**.

**Définition 3.3 (Processus de diffusion)** Un processus de diffusion est un processus de Markov à trajectoires continues vérifiant l'équation d'Itô (3.14). Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus aléatoire défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs réels, muni d'un filtration  $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ . On dit que  $X_t$  est un processus de diffusion caractérisée par

- (1) la limite donnant la dérive

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t = x)}{h} = \mu(x, t)$$

- (2) la limite donnant la diffusion

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x)}{h} = \sigma^2(x, t)$$

- (3) la condition de Dyukin

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon | X_t = x)}{h} = 0$$

**Remarque 3.2** Le mouvement brownien standard est un processus de diffusion avec coefficient de dérive nulle et coefficient de diffusion égale à 1.

**Preuve**

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t | W_t = x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t | W_t - W_0 = x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(W_{t+h} - W_t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbb{E}(W_{t+h}) - \mathbb{E}(W_t)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}((W_{t+h} - W_t)^2 | W_t = x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}((W_{t+h} - W_t)^2 | W_t - W_0 = x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}((W_{t+h} - W_t)^2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h = 1 \end{aligned}$$



**Exemple 3.5** Le processus *d'Ornstein-Uhlenbeck* est la diffusion solution de l'équation (de Langevin Section 3.3.3)

$$dX_t = -rX_t dt + \sigma dW_t$$

où  $r$  et  $\sigma$  sont des constantes positives et  $W_t$  un processus de Wiener standard. On suppose de plus qu'à l'instant initial  $X_0 = x_0$ . En posant

$$Y_t = X_t e^{rt}$$

et en appliquant la formule d'Itô (3.7) à la fonction  $f(t, x) = xe^{rt}$ , on obtient

$$dY_t = \sigma e^{rt} dW_t$$

sous forme intégrale

$$Y_t = Y_0 + \sigma \int_{t_0}^t e^{rs} dW_s$$

d'où la solution pour  $t \geq t_0$ ,

$$X_t = X_{t_0} e^{-r(t-t_0)} + \sigma \int_{t_0}^t e^{-r(t-s)} dW_s$$

En notant  $x_0 = \mathbb{E}(X_{t_0})$ , le processus *d'Ornstein-Uhlenbeck* a pour moyenne

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-r(t-t_0)}$$

En appliquant la formule d'Itô au processus  $Z_t = X_t^2$ , on a

$$dZ_t = -2rZ_t dt + \sigma^2 dt + 2\sigma dW_t$$

En prenant la moyenne, on trouve en résolvant une équation différentielle ordinaire

$$\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \frac{\sigma^2}{2r} \left(1 - e^{-2r(t-t_0)}\right) + \mathbb{E}(X_{t_0}^2)$$

D'où la variance du processus *d'Ornstein-Uhlenbeck*

$$\text{var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - [\mathbb{E}(X_t)]^2 = \frac{\sigma^2}{2r} \left(1 - e^{-2r(t-t_0)}\right)$$

La fonction de corrélation du processus *d'Ornstein-Uhlenbeck* vaut

$$R(t, s) = \frac{\sigma^2}{2r} e^{-r|t-s|}$$

Nous pouvons simuler une trajectoire du processus *d'Ornstein-Uhlenbeck* comme suit. On considère la subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, T]$  suivante  $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ , avec  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , pour  $i = 1$  on a  $W(t_0) = W(t_1) = 0$  et  $X(t_0) = x_0$ , on a l'algorithme suivant :

1. Générée un nouveau variable aléatoire  $Z$  de la distribution gaussienne  $N(0, 1)$ .
2.  $i = i + 1$ .
3.  $W(t_i) = W(t_{i-1}) + Z\sqrt{\Delta t}$ .
4.  $I_i = e^{-r(t_{i+1}-t_i)}(W_{i+1} - W_i)$
5.  $X(t_i) = X(t_0)e^{-r(t_i-t_0)} + \sigma \sum_{j=1}^i I_j$ .
6. Si  $i \leq N + 1$ , réitérez a l'étape 1.

La fonction `OU` permet de simuler une seule trajectoire de  $X_t$  dans l'intervalle  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , et la fonction `OUF` permet de simuler un flux de  $X_t$ .

R> `OU(N = 1000, t0 = 0, T = 10, x0 = 10, r = 2, sigma = 1)`

R> `OUF(N = 1000, M = 100, t0 = 0, T = 10, x0 = 10, r = 2, sigma = 1)`

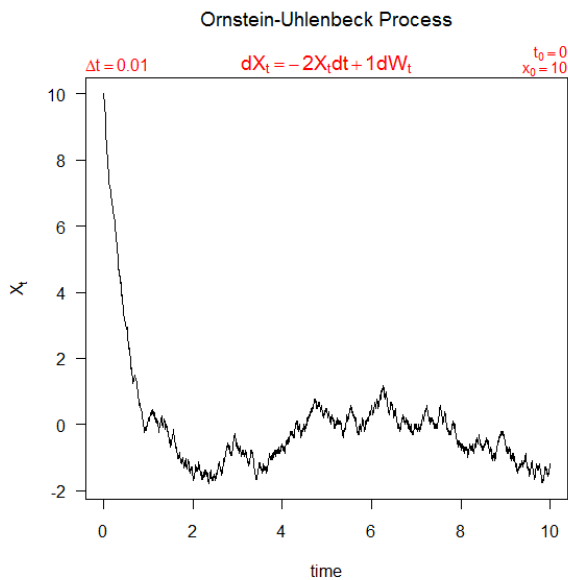


FIGURE 3.2 – Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec  $r = 2$  et  $\sigma = 1$ .

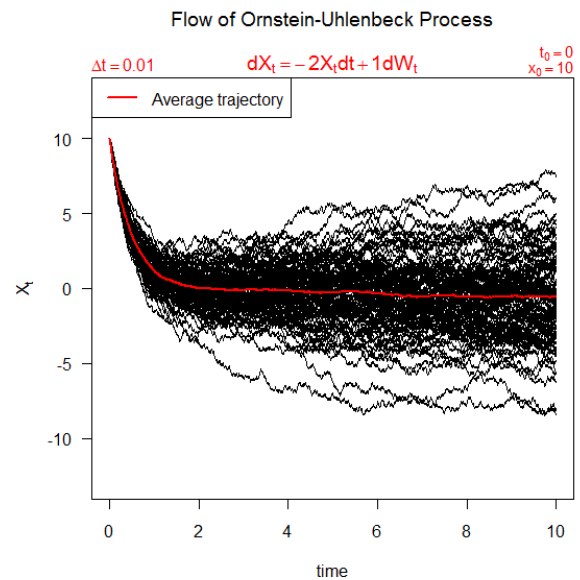


FIGURE 3.3 – Flux d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec  $r = 2$  et  $\sigma = 1$ .

### 3.3.2 Existence et unicité des solutions de l'ÉDS

Soit  $T > 0$ ,  $\mu(t, x)$  une fonction mesurable de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\sigma(t, x)$  une fonction mesurable de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :

- (1) *Condition de croissance* : il existe une constante  $C$  telle que

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

(2) *Condition de Lipschitz* : il existe une constante  $K$  telle que

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

(3)  $X_0$  est une variable indépendante de la tribu  $\sigma(W_s, s \geq 0)$  et  $\mathbb{E}|X_0^2| < \infty$ ,

Alors l'équation différentielle stochastique d'Itô (3.14) admet une solution unique  $X_t$  dont presque toutes les réalisations sont continues, qui est un processus de Markov de loi initiale  $X_0$  et de probabilité de transition

$$p(s, x, t, \mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{A} | X_s = x)$$

De plus, si les fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  sont continues, alors  $X_t$  est un processus de diffusion de dérive  $\mu(t, x)$  et de matrice de diffusion  $\sigma\sigma^T$  (symétrique et semi-définie positive). En particulier lorsque  $\mu$  et  $\sigma$  sont lipschitziennes, l'équation (3.14) admet une solution unique.

**Remarque 3.3** (1) Une équation peut admettre une solution locale sans admettre de solution globale. Par exemple sur  $[0, 1]$ , l'équation

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t^2, \quad X_0 = 1$$

admet une solution unique locale sur  $[0, 1[$

$$X_t = \frac{1}{1-t}, \quad t \in [0, 1[$$

mais n'admet pas de solution globale sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

(2) La condition de croissance évite que les solutions explosent, i.e. que les solutions  $|X_t|$  tendent vers l'infini en un temps fini. L'équation

$$dX_t = \frac{1}{2}aX_t^3 dt, \quad X_t = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad y > 0$$

admet une solution

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{y^2 - at}}$$

qui diverge dans la direction  $y^2 = at$ . Si la condition de croissance n'est pas satisfaite, l'équation peut quand même avoir une solution.

(3) La condition de Lipschitz garantit l'unicité. L'équation

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dt, \quad X_0 = 0$$

admet plus d'une solution

$$X_t = (t - a)^3 1_{t > a}$$

car la fonction  $\mu(t, x) = 3x^{2/3}$  ne vérifie pas la condition de Lipschitz.

### 3.3.3 Équation de Langevin

Des particules dans un fluide sont soumises à une force de frottement proportionnelle à la vitesse de ces particules et à une force aléatoire. La vitesse des particules est processus aléatoire. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{dv}{dt} = -av + \zeta(t)$$

avec  $a = 6\pi\eta r/m$ , la masse d'une particule étant  $m$  et  $\eta$  désigne la viscosité du fluide. Les particules sont assimilées à des petites sphères de rayon  $r$ . La force aléatoire  $\zeta(t)$  est un bruit blanc, son espérance est nulle et sa fonction de corrélation est constant,  $D$  est appelé coefficient de diffusion d'Einstein.

$$\mathbb{E}(\zeta(t)) = 0 \quad R(s, t) = 2D\delta(t - s)$$

En termes mathématiques, ce problème s'écrit sous la forme d'une équation d'Itô

$$dX_t = -aX_t dt + \sqrt{2D}dW_t \tag{3.17}$$

$W_t$  est un processus de Wiener standard. Appliquons la formule d'Itô (3.7) à  $Y_t = X_t e^{at}$ , en posant  $f(t, x) = xe^{at}$ , on a  $\partial_t f = axe^{at}$ ,  $\partial_x f = e^{at}$  et  $\partial_{xx} f = 0$ . On en déduit que la solution est le processus de diffusion, markovien, gaussien  $X_t$  donné par

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{a(t-s)} dW_s$$

De cette expression, on posant  $x_0 = \mathbb{E}(X_0)$ , on trouve l'espérance

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-at}$$

et la variance du processus

$$\text{var}(X_t) = \frac{D}{a} (1 - e^{-2at})$$

La fonction de corrélation du processus est

$$R(s, t) = \frac{D}{a} e^{-a|t-s|}$$

En supposant que  $\text{var}(X_0) < \infty$ , il s'en suit que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a

$$\mathbb{E}(X_t) \longrightarrow 0$$

et

$$\text{var}(X_t) \longrightarrow D/a$$

La distribution de  $X_t$  approche de la loi  $N(0, \frac{D}{a})$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Ainsi, quelque soit la distribution initiale, la solution de l'équation différentielle stochastique pour des temps très grands suit approximativement une loi gaussienne centrée et de variance  $D/a$  (Chapitre 4 exemple 4.2), qui

représente un équilibre entre la force aléatoire de perturbation  $dW_t$  (que nous avons appelé dans l'introduction un bruit blanc) et la force de frottement  $-aX_t$ .

Le code 6 permet de simuler une seule trajectoire de l'équation de Langevin  $X_t$  avec un pas  $\Delta t = 10^{-4}$  (peut être fixé par l'utilisateur), et les deux paramètres  $a = 2$  et  $D = 1$ , qui est présentée par la figure 3.4. Et le code 7 permet de simuler l'équation de Langevin en deux dimensions avec les conditions initiales  $x_0 = 5$  et  $y_0 = 6$ , comme c'est illustré par la figure 3.5. C'est-à-dire que on a système d'équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t dt + \sqrt{2D}dW_t^1, & X_0 = x_0 \\ dY_t = -aY_t dt + \sqrt{2D}dW_t^2, & Y_0 = y_0 \end{cases}$$

Avec  $W_t^1$  et  $W_t^2$  deux mouvements browniens standards indépendants,  $a = 2$  et  $D = 1$ .

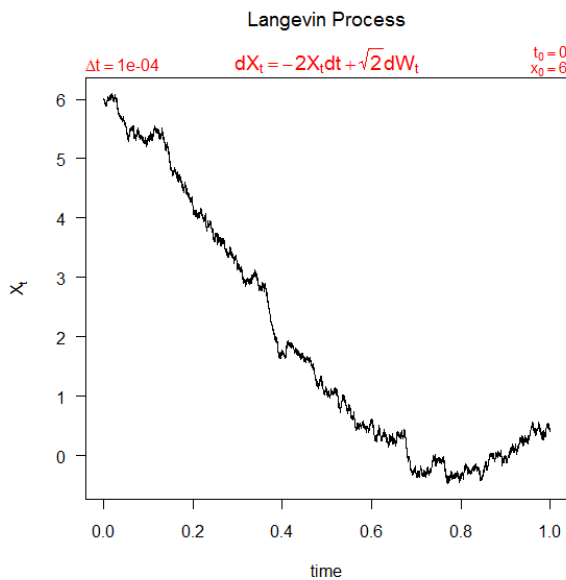


FIGURE 3.4 – Trajectoire simulée de l'équation de Langevin avec  $a = 2$  et  $D = 1$ .

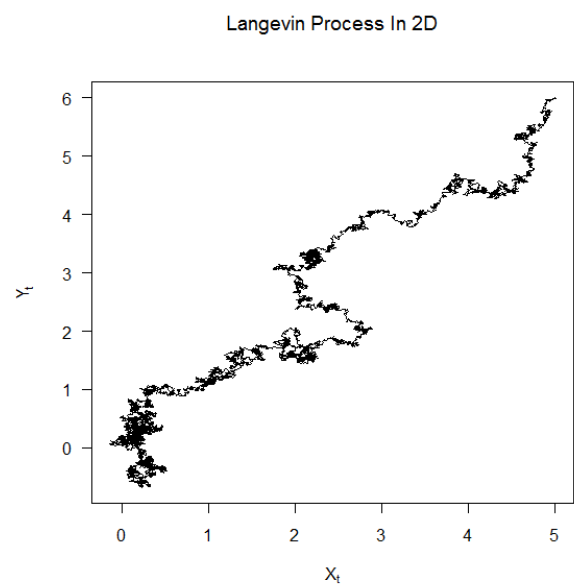


FIGURE 3.5 – L'équation de Langevin en deux dimensions avec  $a = 2$  et  $D = 1$ .

### 3.3.4 Bruit blanc, bruit coloré

L'interprétation en sciences physiques des équations stochastiques repose sur la notion de *bruit blanc* ou de *bruit coloré*. Un processus de Markov continu a des increments  $X(t+dt) - X(t)$  qui ne dépendent que du temps  $t$ ,  $dt$  et de  $X(t)$  et de manière différentiable pour  $X(t) = x$  de  $t$  et de  $x$ . La continuité de  $X(t)$  traduit le fait que l'increment  $X(t+dt) - X(t)$  sachant que  $X(t) = x$  tend vers 0 quand  $dt$  tend vers 0. Cet increment suit une équation de la forme

$$X(t+dt) - X(t) = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)N(0,1)\sqrt{dt} \quad (3.18)$$

où  $\mu(t, x)$  et  $\sigma(t, x)$  sont des fonctions arbitraires et  $N(0, 1)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. En remplaçant  $x$  par  $X_t$ , on a

$$\frac{X(t + dt) - X(t)}{dt} = \mu(t, X_t)dt + \frac{\sigma(t, X_t)N(0, 1)}{\sqrt{dt}}$$

Le processus aléatoire  $N(0, 1)/\sqrt{dt}$  suit une loi gaussienne  $N(0, 1/dt)$ . La limite de ce processus définit le *bruit blanc gaussien*

$$\xi(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} N\left(0, \frac{1}{dt}\right)$$

Ce bruit conduit à l'équation de Langevin (3.17)

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\xi(t)$$

Il vérifie les propriétés

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \rangle &= \mathbb{E}(\xi(t)) = 0 \\ \langle \xi(s), \xi(t) \rangle &= R(s, t) = \delta(t - s)\end{aligned}$$

La fonction de corrélation ne dépend que de la différence  $\tau = t - s$ . La densité spectrale du processus vaut

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = 2$$

Le spectre du bruit blanc est constant et indépendant des fréquences.

Un *bruit coloré* est un bruit dont la densité spectrale dépend des fréquences. La couleur est la sélectivité<sup>1</sup> du spectre de fréquences. Donnons deux exemples de bruit coloré

- (1) Le processus *d'Ornstein-Uhlenbeck stable* (l'exemple 3.5) est un bruit coloré. Il est obtenu à partir du processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $X_t$  dépendant d'un instant  $t_0$  et en faisant tendre le temps initial vers  $-\infty$

$$\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow -\infty} X_t = N\left(0, \frac{\sigma^2}{2r}\right)$$

Ce processus est indépendant de la condition initiale  $x_0$  et de  $t$ . Il vérifie les propriétés

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon(t) \rangle &= \mathbb{E}(\varepsilon(t)) = 0 \\ \langle \varepsilon(s), \varepsilon(t) \rangle &= R(s, t) = \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r|t-s|}\end{aligned}$$

Lorsque le paramètre  $r$  tend vers l'infini, ce bruit coloré tend vers un bruit blanc. Sa densité spectrale est

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{2\sigma^2}{\omega^2 + r^2}$$

---

1. Télécommunications capacité d'un récepteur à capter les signaux d'un émetteur tout en éliminant les signaux émis par des fréquences voisines.

- (2) Un autre exemple de bruit coloré est le *bruit des télégraphistes*. Le processus stochastique est un processus  $X_t = \pm a$ , qui ne prend que deux valeurs. L'intervalle de temps entre les changements de signe est distribué exponentiellement. Si on note  $\mu$  le nombre moyen de changement de signe par unité de temps, le processus a pour fonction de corrélation

$$\langle X(s), X(t) \rangle = R(s, t) = a^2 e^{-2\mu|t-s|}$$

Sa densité spectrale vaut

$$S(\omega) = a^2 \frac{8\mu}{\omega^2 + 4\mu^2}$$

### 3.3.5 Transformée de Lamperti

Avant d'aborder les méthodes de résolution numérique, nous allons introduire *la transformée de Lamperti* [30] qui est très utile pour traiter de nombreux processus stochastiques markoviens. Sous la forme différentielle suivante

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (3.19)$$

On appelle la transformée de Lamperti de  $X$ , la fonction  $Y$  définie de la manière suivante :

$$Y_t = F(X_t) = \int_0^{X_t} \frac{du}{\sigma(u)} \quad (3.20)$$

Avec ce changement de variable, l'équation stochastique (3.19) devient

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t)dt + dW_t$$

avec

$$\mu_Y(t, Y_t) = \frac{\mu(t, F^{-1}(y))}{\sigma(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \sigma(F^{-1}(y))$$

d'où, on a

$$dY_t = \left( \frac{\mu(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2} \sigma_x(X_t) \right) dt + dW_t \quad (3.21)$$

**Preuve** Appliquant la formule d'Itô (3.7) à la fonction  $Y_t = f(t, x) = \int_0^x \frac{du}{\sigma(u)}$ , avec

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sigma(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{\sigma_x(x)}{\sigma^2(x)}$$

on obtient directement le résultat

$$\begin{aligned} dY_t = df(t, x) &= \left( 0 + \mu(t, X_t) \frac{1}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2} \sigma^2(X_t) \frac{\sigma_x(X_t)}{\sigma^2(X_t)} \right) dt + \sigma(X_t) \frac{1}{\sigma(X_t)} dW_t \\ &= \left( \frac{\mu(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2} \sigma_x(X_t) \right) dt + dW_t \end{aligned}$$

L'intérêt de cette transformation est qu'elle supprime le bruit multiplicatifs de l'équation différentielle stochastique initiale au profit d'une équation de Langevin non linéaire avec un bruit blanc simple. Nous allons voir par la suite que sur le plan numérique ce changement de variable est très utile et peut améliorer la précision numérique. Cette transformation a été l'objet de peu de travaux jusqu'à un passé récent, elle est étudié en détail ses propriétés et son intérêt dans [19]. En fait, la transformation de Lamperti peut être envisagée d'au moins deux points de vue. D'une part, elle permet une manipulation indirecte des processus auto-similaires (filtrage, prédiction, etc.) en opérant sur leurs contreparties stationnaires. D'autre part, des outils stationnaires classiques peuvent être "Lampertisés", offrant ainsi de nouvelles façons de manipuler les processus auto-similaires<sup>2</sup>.

### 3.4 Schémas numériques

De manière similaire aux équations différentielles ordinaires où la résolution numérique passe par une discrétisation du temps et un schéma d'approximation concernant l'intervalle de temps élémentaire sur lequel l'intégration est faite, il est nécessaire de procéder de manière similaire avec les équations différentielles stochastiques, à quelques différences près :

- (i) Pour une équation ordinaire, la trajectoire étant déterministe (en tout cas pour les exemples simples à une particule, oscillateur harmonique ou anharmonique), on peut contrôler avec la solution exacte la qualité de l'approximation. Avec un processus de Wiener, nous avons vu que deux trajectoires sont très différentes (Figure 2.2), cette différence s'accroissant avec le temps. Si par contre, on cherche à résoudre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Figure 3.3), on sait que le système évolue vers une distribution stationnaire que la variance des trajectoires est finie.
- (ii) Les schémas d'approximation des méthodes de résolution des équations différentielles sont basés sur le calcul différentiel usuel. Dans le cas des équations différentielles stochastiques, ces schémas reposent sur le calcul différentiel stochastique de nature assez différente.
- (iii) Des questions fondamentales sur l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation existent de manière similaire aux équations ordinaires. Sans bien évidemment rentrer dans le détail qui relève de travaux très techniques, il y a deux critères pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle donné (Section 3.3.2)

Dans beaucoup de literatures peut être vue dans les références, les schémas numériques pour la résolution numérique de l'équation (3.22) ont été proposés dans [22, 29, 31, 37, 40].

Soit à nouveau la forme différentielle de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (3.22)$$

avec  $W_t$  est un processus de Wiener et  $x_0$  la valeur initiale. On utilise des schémas aux différences classiques et le fait que pour un pas  $h$  donné, les variables  $W_{(n+1)h} - W_{nh}$  suivent des lois

---

2. On appelle processus auto-similaires les processus dont la loi est invariante par changement d'échelle des temps.



gaussiennes indépendantes de variance  $h$ . On note  $x_t$  le processus approché et on considère la subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

de pas régulier

$$h = \Delta t = t_{n+1} - t_n = \frac{(T - t_0)}{N}$$

où

$$t_n = n\Delta t, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Posant la notation suivante  $X_n = X_{t_n}$ , les trois variables aléatoires suivantes seront employées dans les schémas

$$\begin{aligned} \Delta W_n &= W_{t_{n+1}} - W_{t_n}, \\ \Delta Z_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW_s ds, \\ \Delta \bar{Z}_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s ds dW_s. \end{aligned}$$

Ils sont obtenus comme des variables aléatoires normales, utilisant la transformation suivante

$$\begin{aligned} \Delta W_n &= \xi_{n,1}(\Delta t)^{1/2}, \\ \Delta Z_n &= \frac{1}{2} \left( \xi_{n,1} + \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}} \right) (\Delta t)^{3/2}, \\ \Delta \bar{Z}_n &= \frac{1}{2} \left( \xi_{n,1} - \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}} \right) (\Delta t)^{3/2}. \end{aligned}$$

Ainsi qu'eux nous employons plus loin  $\Delta \tilde{W}_n = \xi_{n,2}(\Delta t)^{1/2}$ , avec  $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}$  deux variables indépendantes de loi  $N(0, 1)$ .

### Schéma d'Euler

$$X_{n+1} = X_n + f_n \Delta t + g_n \Delta W_n \tag{3.23}$$

### Schéma de Milstein

$$X_{n+1} = X_n + f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t) \tag{3.24}$$

**Schéma de Milstein Seconde**

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} = & X_n + f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t) + f'_n g_n \Delta Z_n \\
 & + \left( g'_n f_n + \frac{1}{2} g''_n g_n^2 \right) \Delta \bar{Z}_n + \frac{1}{6} (g_n'^2 g_n + g_n'' g_n^2) ((\Delta W_n)^3 - 3 \Delta t \Delta W_n)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

**Schéma de Itô-Taylor D'ordre 1.5**

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} = & X_n + f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t) + f'_n g_n \Delta Z_n \\
 & + \left( g'_n f_n + \frac{1}{2} g''_n g_n^2 \right) \Delta \bar{Z}_n + \frac{1}{6} (g_n'^2 g_n + g_n'' g_n^2) ((\Delta W_n)^3 - 3 \Delta t \Delta W_n) \\
 & + \frac{1}{2} \left( f'_n f_n + \frac{1}{2} f''_n g_n^2 \right) (\Delta t)^2
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

**Schéma de Heun D'ordre 2**

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{2} [F_1 + F_2] \Delta t + \frac{1}{2} [G_1 + G_2] \Delta W_n \tag{3.27}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F(X_n), & G_1 &= g(X_n), \\
 F_2 &= F(X_n + F_1 \Delta t + G_1 \Delta W_n), & G_2 &= g(X_n + F_1 \Delta t + G_1 \Delta W_n), \\
 F_x &= \left[ f - \frac{1}{2} g' g \right] (x).
 \end{aligned}$$

**Schéma de Runge-Kutta D'ordre 3**

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{4} [F_1 + 3F_3] \Delta t + \frac{1}{4} [G_1 + 3G_3] \Delta W_n + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ f'_n g_n - g'_n f_n - \frac{1}{2} g''_n g_n^2 \right] \Delta t \Delta \tilde{W}_n \tag{3.28}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F(X_n), & G_1 &= g(X_n), \\
 F_2 &= F\left(X_n + \frac{1}{3}F_1\Delta t + \frac{1}{3}G_1\Delta W_n\right), & G_2 &= g\left(X_n + \frac{1}{3}F_1\Delta t + \frac{1}{3}G_1\Delta W_n\right), \\
 F_3 &= F\left(X_n + \frac{2}{3}F_2\Delta t + \frac{2}{3}G_2\Delta W_n\right), & G_3 &= g\left(X_n + \frac{2}{3}F_2\Delta t + \frac{2}{3}G_2\Delta W_n\right), \\
 F_x &= \left[f - \frac{1}{2}g'g\right](x).
 \end{aligned}$$

### 3.4.1 Simulation numérique

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques est très important, car ce n'est pas toujours facile à déterminer la solution analytiquement. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène, où par exemple l'analyse statistique de la variable aléatoire l'instant de premier passage (*IPP*) correspondant à la solution de l'équation, qui sera illustré dans le chapitre suivant. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des ÉDS.

L'approcher est simple, simuler numériquement  $X_t$  jusqu'au temps  $T$ , puis approcher l'espérance  $\mathbb{E}(X_t)$  à l'aide de la loi des grands nombres, c'est-à-dire la moyenne de  $M$  trajectoires indépendantes de  $X_t$ . Cette dernière technique présente un certain intérêt, surtout lorsque la dimension de  $X_t$  est grande. En effet, les méthodes où les schémas numériques deviennent dans ce cas vite lourdes à mettre en oeuvre. La fonction `snssde`<sup>3</sup> permet de simuler numériquement la solution approchée des ÉDS par les schémas numériques qui sont en détail dans la section précédente.

```

R> help("snssde")
R> example("snssde")
R> snssde(N, M, T = 1, t0, x0, Dt, drift, diffusion, Output = FALSE,
+       Methods = c("SchEuler", "SchMilstein", "SchMilsteinS",
+       "SchTaylor", "SchHeun", "SchRK3"), ...)

```

---

3. *simulation numerical solution of stochastic differential equations.*

**Détails :**

N	La taille de processus.
M	Le nombre de trajectoire à simulée.
T	L'instant final (par défaut égale à 1).
t0	L'instant initial.
x0	La valeur initial.
Dt	La discrétisation où le pas (Si Dt est fixée alors par défaut T = t0 + Dt * N).
drift <sup>4</sup>	Coefficient de dérive (une expression qui dépende de x et de t).
diffusion <sup>5</sup>	Coefficient de diffusion (une expression qui dépende de x et de t).
Output	Pour sauvegardée les résultats de simulation sous forme Excel (par défaut c'est FALSE).
Methods	Différents méthodes de simulation (par défaut schéma d'Euler), avec SchEuler(3.23), SchMilstein(3.24),SchMilsteinS(3.25), SchTaylor(3.26), SchHeun(3.27), SchRK3(3.28).

**Exemples illustratifs :**

**Radial Ornstein-Uhlenbeck (ROU)**

Ce modèle est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \left( \frac{\theta}{X_t} - X_t \right) dt + \sigma dW_t, \quad x_0 > 0.$$

avec  $\theta, \sigma > 0$ , en simuler numériquement par la méthode d'Euler (3.23), une seule trajectoire de la solution approché ce modèle qui est présentée dans la figure 3.6. En suite un flux de  $M = 100$  trajectoires indépendantes avec leurs moyenne qui est illustré par la figure 3.7. Posant par exemple  $\theta = 1$  et  $\sigma = 0.25$ , pour un pas  $\Delta t = 0.01$  et la valeur initiale  $x_0 = 3$ .

```
R> f <- expression( (1/x) - x )
R> g <- expression( 0.25 )
R> snssde(N = 1000, M = 1, t0 = 0, x0 = 3, Dt = 0.01, drift = f,
+         diffusion = g)
R> snssde(N = 1000, M = 100, t0 = 0, x0 = 3, Dt = 0.01, drift = f,
+         diffusion = g)
```

- 
4.  $\mu(t, X_t)$  peut être constant où une fonction qui dépende de  $x$  ou  $t$ .
  5.  $\sigma(t, X_t)$  peut être constant où une fonction qui dépende de  $x$  ou  $t$ .

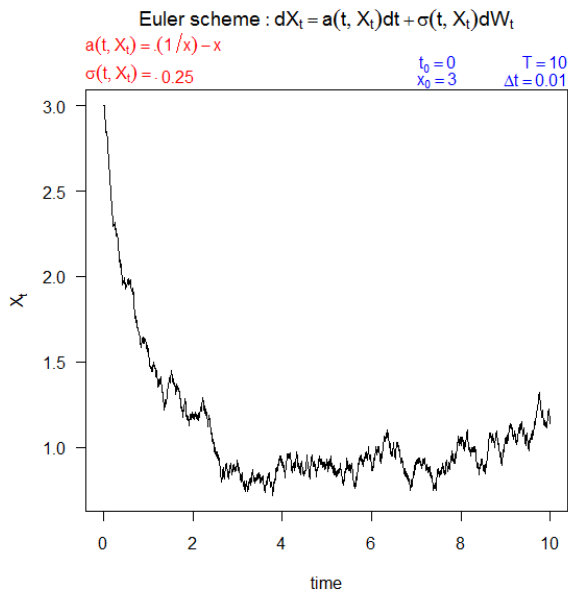


FIGURE 3.6 – Simulation une seule trajectoire du modèle Radial Ornstein-Uhlenbeck par le schéma d’Euler.

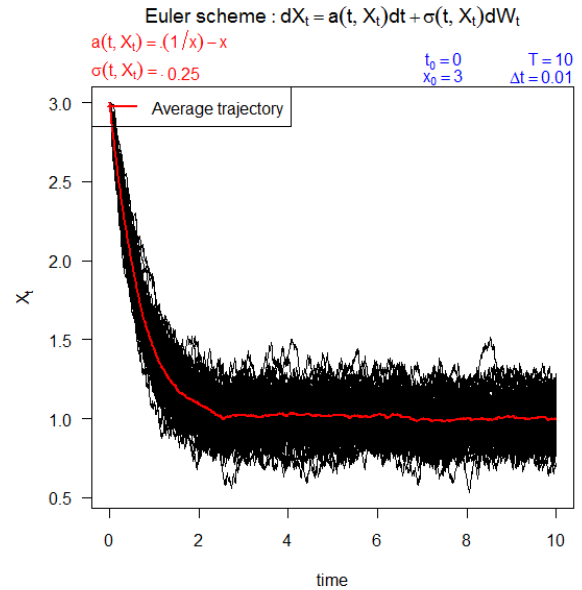


FIGURE 3.7 – Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle Radial Ornstein-Uhlenbeck par le schéma d’Euler.

### Coefficient de dérive en fonction de $x$ et $t$

On consider l’équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = (\alpha X_t - X_t^3)dt + \sigma dW_t, \quad x_0 = 0.$$

Avec  $\alpha, \sigma > 0$ , cette équation n’admet pas une solution de forme explicite. En utilise le schéma de Milstein (3.24), pour simulée numériquement une solution approché de  $X_t$ . En remarque que cette équation différentielle est spéciale car les trajectoires simulées de ce processus sont comprises entre  $\pm\sqrt{\alpha t}$  qui est illustré dans la figure 3.8, c’est-à-dire que la variance de  $X_t$  dépende de temps  $t$ . La simulation d’un flux de 100 trajectoires de  $X_t$  montre que son espérance tend vers 0 quand  $t$  tend vers l’infini, qui est donné par la figure 3.9. Posant  $\alpha = 0.03$  et  $\sigma = 0.2$ , pour un pas  $\Delta t = 0.1$  et la valeur initiale  $x_0 = 0$ .

```
R> f <- expression( (0.03 * t * x - x^3) )
R> g <- expression( 0.2 )
R> snssde(N = 1000, M = 1, t0 = 0, x0 = 0, Dt = 0.1, drift = f,
+         diffusion = g, Methods="SchMilstein")
R> snssde(N = 1000, M = 100, t0 = 0, x0 = 0, Dt = 0.1, drift = f,
+         diffusion = g, Methods="SchMilstein")
R> G <- fonction(t) sqrt(0.03 * t)
R> t <- seq(0, 100, by = 0.1)
R> points(t, +G(t), type="l", col="blue", lwd=2)
R> points(t, -G(t), type="l", col="blue", lwd=2)
```

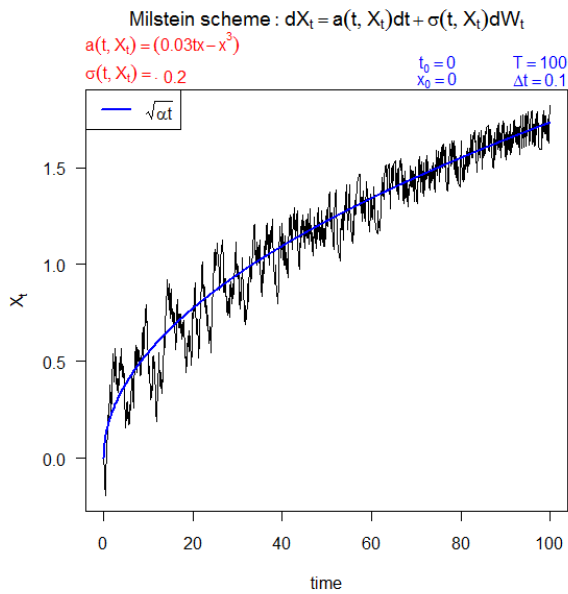


FIGURE 3.8 – Simulation une seule trajectoire du modèle  $dX_t = (0.03tX_t - X_t^3)dt + 0.2dW_t$  par le schéma de Milstein.

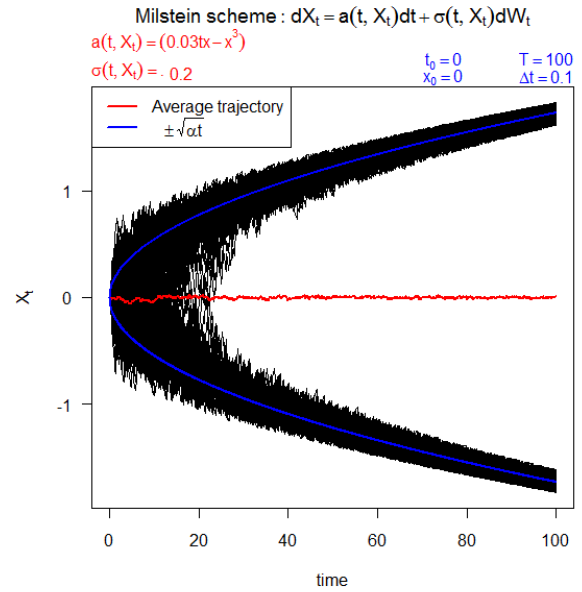


FIGURE 3.9 – Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle  $dX_t = (0.03tX_t - X_t^3)dt + 0.2dW_t$  par le schéma de Milstein.

### Coefficients de dérive et de diffusion en fonction de $t$

Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \cos(t)dt + \sin(t)dW_t, \quad x_0 = 0.$$

Cette équation n'admet pas une solution de forme explicite. En utilise le schéma de Itô-Taylor D'ordre 1.5 (3.26), pour simulée numériquement une solution approché de  $X_t$ . D'après la figure 3.10 en remarque que l'espérance de  $X_t$  égale à  $x_0 + \sin(t)$ .

```
R> f <- expression( cos(t) )
R> g <- expression( sin(t) )
R> snssde(N = 1000, M = 100, t0 = 0, x0 = 0, Dt = 0.1, drift = f,
+        diffusion = g, Methods="SchTaylor")
R> G <- fonction(t) sin(t)
R> t <- seq(0, 100, by = 0.1)
R> points(t, G(t), type="l", col="blue", lwd=2)
```

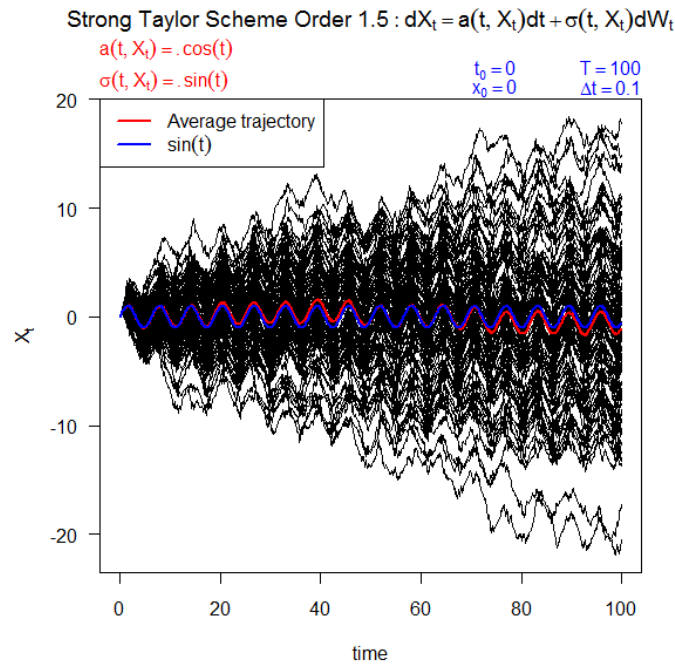


FIGURE 3.10 – Simulation un flux de 100 trajectoires du modèle  $dX_t = \cos(t)dt + \sin(t)dW_t$  par le schéma de Itô-Taylor.

**Remarque 3.4 (Temps d'exécution)** Le langage R n'étant pas un langage compilé mais interprété ligne à ligne, les instructions de ce type sont exécutées lentement et on préférera, lorsque c'est possible, utiliser les outils de calcul sur les vecteurs et les matrices (Optimisés sous R). La fonction `system.time` permet de mesurer le temps d'exécution d'une fonction et de comparer la vitesse d'exécution de plusieurs programmes. On peut gagner un temps considérable (10 à 100 fois plus rapide) en repérant les fonctions qui prennent du temps et en les programmant dans un langage compilé (C en particulier). L'avantage de langage R c'est les calculs formelles (pas besoin de donner les dérivées de coefficient de dérive et de diffusion dans les schémas numérique).

### 3.4.2 Relation entre le schéma d'Euler et Milstein

L'approximation de schéma de Milstein (3.24) a un ordre fort de convergence égal à 1. Cette méthode améliore donc les instabilité numériques par rapport à la méthode d'Euler (3.23). Toutefois, il y a un lien entre les deux méthodes dans le cas où on peut réaliser une transformée de Lamperti (3.21) de l'équation différentielle stochastique de départ. En effet, dans le cas où l'équation stochastique de départ n'a pas de bruit multiplicatif, comme par exemple dans l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la méthode d'Euler a un ordre de convergence fort qui devient égal à 1. Or, avec une transformée de Lamperti (si  $g(X_t)$  est indépendante du temps), on peut transformer l'équation stochastique en une autre équation sans bruit multiplicatif. Ainsi, on peut montrer que le schéma d'Euler de l'équation transformée est identique au schéma de Milstein

sur l'équation originale. Dans le cas où la transformée de Lamperti est difficile à obtenir analytiquement, il est utile d'utiliser le schéma de Milstein qui est plus précis.

**Preuve** Soit le schéma de Milstein de l'équation différentielle stochastique (3.22)

$$X_{n+1} = X_n + f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t)$$

Soit la fonction  $y = F(x)$  et l'inverse  $x = G(y)$ , appliquons la transformée de Lamperti (3.21) à  $Y_t = F(X_t)$ , on trouve

$$dY_t = \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) dt + dW_t$$

En suite appliquons le schéma d'Euler (3.23) à l'équation  $Y_t$

$$\Delta Y = Y_{n+1} - Y_n = \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) \Delta t + \Delta W_n$$

Et en appliquant le développement de Taylor à l'inverse de la transformation de Lamperti, i.e. à  $X_t = G(Y_t)$ , on trouve

$$G(Y_n + \Delta Y) = G(Y_n) + G'(Y_n) \Delta Y + \frac{1}{2} G''(Y_n) (\Delta Y)^2 + O(\Delta Y^3)$$

Notons

$$G'(Y_n) = \frac{d}{dy} F^{-1}(y) = \frac{1}{F'(G(y))} = g_n$$

et

$$G''(Y_n) = G'(Y_n) g'_n = g_n g'_n$$

Donc finalement, on a

$$\begin{aligned} G(Y_n + \Delta Y) - G(Y_n) &= g_n \Delta Y + \frac{1}{2} g_n g'_n (\Delta Y)^2 + O(\Delta Y^3) \\ &= g_n \left[ \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) \Delta t + \Delta W_n \right] + \frac{1}{2} g_n g'_n \left[ \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) \Delta t + \Delta W_n \right]^2 \\ &\quad + O(\Delta Y^3) \\ &= \left[ g_n + \frac{1}{2} g_n g'_n \left( \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) \Delta t + \Delta W_n \right) \right] \left( \left( \frac{f_n}{g_n} - \frac{1}{2} g'_n \right) \Delta t + \Delta W_n \right) \\ &\quad + O(\Delta Y^3) \\ &= \left( g_n + \frac{1}{2} g_n g'_n \Delta W_n \right) \Delta W_n + \left( f_n - \frac{1}{2} g_n g'_n \right) \Delta t + O(\Delta t^{3/2}) \\ &= f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t) + O(\Delta t^{3/2}) \end{aligned}$$

Puisque on a  $\Delta W_n = \xi_{n,1}(\Delta t)^{1/2}$  et  $(\Delta W_n)^2 = \xi_{n,1}^2 \Delta t$ , d'où on trouve le schéma de Milstein

$$G(Y_n + \Delta Y) - G(Y_n) = X_{n+1} - X_n = f_n \Delta t + g_n \Delta W_n + \frac{1}{2} g'_n g_n ((\Delta W_n)^2 - \Delta t) + O(\Delta t^{3/2})$$



**Exemple 3.6 (Transformation de modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR))** Le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) est utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt court terme. Il s'agit de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0. \quad (3.29)$$

où sous cette forme

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0. \quad (3.30)$$

Notons que la solution de cette de l'équation (3.30) reste strictement positive sous la condition  $2\kappa\theta > \sigma^2$ . Le paramètre  $\theta$  donne la moyenne à long terme, et  $\kappa > 0$  donne la vitesse à laquelle le processus va converger vers cet équilibre.

Appliquons le schéma de Milstein (3.24) à l'équation (3.29), on a :

$$\Delta X = \left( (\theta_1 - \theta_2 X_n) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) \Delta t + \theta_3 \sqrt{X_n} \Delta W_n + \frac{1}{4}\theta_3 (\Delta W_n)^2 \quad (3.31)$$

Maintenant appliquons la formule d'Itô (3.7) à  $Y_t = \sqrt{X_t}$  pour l'équation (3.29), en posant  $y = f(t, x) = \sqrt{x}$ , on a  $\partial_t f = 0$ ,  $\partial_x f = 1/2\sqrt{x}$  et  $\partial_{xx} f = -1/4x^{3/2}$ . On obtient :

$$dY_t = \frac{1}{2Y_t} \left( (\theta_1 - \theta_2 Y_t^2) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) dt + \frac{1}{2}\theta_3 dW_t \quad (3.32)$$

Appliquons le schéma d'Euler (3.23) à  $Y_t$ , on a

$$\Delta Y = \frac{1}{2Y_n} \left( (\theta_1 - \theta_2 Y_n^2) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) \Delta t + \frac{1}{2}\theta_3 \Delta W_n$$

Et en appliquant le développement de Taylor à l'inverse de  $y = \sqrt{x}$ , c'est-à-dire à  $G(y) = x^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} G(Y_n + \Delta Y) - G(Y_n) &= (Y_n + \Delta Y)^2 - Y_n^2 \\ &= (\Delta Y)^2 + 2Y_n \Delta Y \\ &= \left[ \frac{1}{2Y_n} \left( (\theta_1 - \theta_2 Y_n^2) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) \Delta t + \frac{1}{2}\theta_3 \Delta W_n \right]^2 \\ &\quad + \left( (\theta_1 - \theta_2 Y_n^2) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) \Delta t + Y_n \theta_3 \Delta W_n \\ &= \left( (\theta_1 - \theta_2 Y_n^2) - \frac{1}{4}\theta_3^2 \right) \Delta t + \theta_3 Y_n \Delta W_n + \frac{1}{4}\theta_3 (\Delta W_n)^2 + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

On remplace  $Y_t = \sqrt{X_t}$ , on trouve la même résultat (3.31).

### Exemple de simulation

Le code 8 nous permet de comparer entre le processus origine  $X_t$  (3.29) avec son transformation  $Y_t$  (3.32), qui est illustré par le graphique 3.11. Posons  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.1, 0.2, 0.05)$ , avec un pas  $\Delta t = 0.1$  et  $x_0 = 1$ . ( $2\theta_1 > \theta_3^2$  est vérifiée)

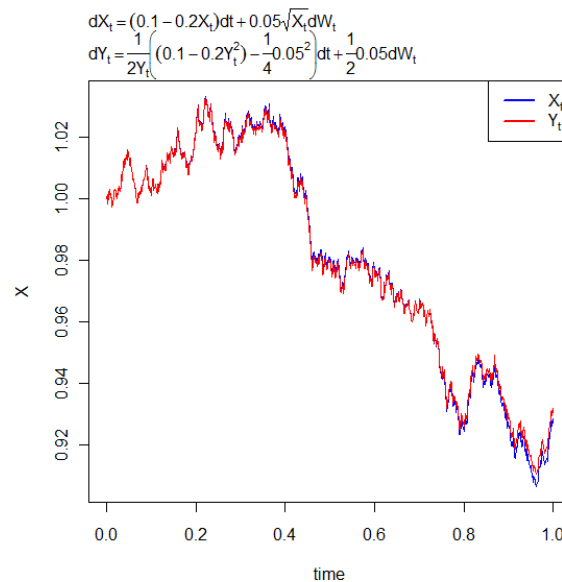


FIGURE 3.11 – Transformation de modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR)  $dX_t = (0.1 - 0.2X_t)dt + 0.05\sqrt{X_t}dW_t$ .

## 3.5 Les modèles attractives

Le phénomène de dispersion est un problème complexe, souvent caractérisé par sa diffusion. Beaucoup de situations réelles se comportent naturellement à ce phénomène de dispersion, notamment en environnement, biologie, chimie, etc... La modélisation mathématique ou par simulation du comportement dynamique de tels phénomènes est très difficile, et nécessite souvent un outil puissant, pour décrire le phénomène observé.

Différentes approches, déterministes et non déterministes ont été proposées par plusieurs auteurs, pour décrire l'évolution des phénomènes de dispersion, voir par exemple [23, 26, 24, 2, 4, 5]. Les modèles mathématiques de diffusion dont l'origine est un phénomène biologique (voir le cas particulier du mouvement Brownien), peuvent être un outil de modélisation intéressant pour beaucoup de phénomènes de dispersion. Dans un premier cas, on propose un modèle de dispersion d'un polluant qui se déplace sur une surface d'eau turbulente, en présence d'un mécanisme d'attraction (une cible), qui oriente le polluant vers un point de localisation. Le deuxième modèle décrit le comportement d'une population d'insectes, où deux insectes mâle-femelle s'attirent l'un vers l'autre. On fait les hypothèses suivantes :

- H1 Le mouvement des insectes (les polluantes) est Markovien.
- H2 Le domaine  $D$  est compact.
- H3 Le mécanisme d'attraction est suffisamment fort pour attirer les insectes (les polluantes).
- H4 Les insectes (les polluantes) se déplacent, indépendamment les uns des autres.
- H5 Les forces extérieures opposées déplacement de l'insecte (les polluantes) sont négligeables.
- H6 Les taux d'immigration et de mortalité sont négligeables.

Sous ces hypothèses, la famille de modèles que nous proposons est une idéalisation mathématique d'un système réel complexe, c'est aussi une sorte de simulation par des processus de diffusion du phénomène observé.

### 3.5.1 Modèle d'une diffusion en attraction $\mathcal{M}_{s \geq 1}^\sigma(V_t)$

La pollution est un problème qui menace aujourd'hui la nature des humains et des espèces. En particulier, la pollution de l'eau est un sujet important, auquel beaucoup de scientifiques s'intéressent actuellement. Généralement on utilise les équations aux dérivées partielles déterministes, pour décrire la densité du polluant. Les processus de diffusion sont utilisés comme modèles mathématiques pour décrire le comportement dynamique des particules polluantes [24]. Le modèle que nous proposons ici décrit le comportement dynamique d'une particule en mouvement sur une surface d'eau turbulente [2, 4].

On suppose qu'on observe à l'instant  $t$ , la position  $V_t = (X_t, Y_t) \in D \subset \mathbb{R}^2$  d'un particule. Le point  $V_0 = (X_0, Y_0)$  représente une position initiale du polluant observé. La nature du phénomène observé implique que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $V_t$  peut être considéré comme processus de diffusion. On désigne par  $L(x, y, t)$  la profondeur de la surface d'eau au point  $(x, y)$  et à l'instant  $t$ ,  $U_w(x, y, t)$  et  $V_w(x, y, t)$  sont respectivement les champs de vitesses, dus au mouvement d'eau, suivant les directions  $x$  et  $y$ .  $U_a(x, y, t)$  et  $V_a(x, y, t)$  sont respectivement les champs de vitesses, dus au mécanisme d'attraction, suivant les directions  $x$  et  $y$ . Le coefficient de dispersion est notée par  $D(x, y, t)$ . À chaque instant  $t$  la position de la particule est supposée être un processus de diffusion  $V_t = (X_t, Y_t)$ , solution de système d'équation différentielle stochastique suivante [4]

$$dV_t = \begin{cases} dX_t = \left( -U_a + U_w + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{L}{D} + \frac{\partial D}{\partial x} \right) dt + \sqrt{2D} dW_t^1 \\ dY_t = \left( -V_a + V_w + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{L}{D} + \frac{\partial D}{\partial y} \right) dt + \sqrt{2D} dW_t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (3.33)$$

Avec

$$U_a = \frac{Kx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{s+1}}, \quad V_a = \frac{Ky}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{s+1}}, \quad D(x, y, t) = \frac{1}{2}\sigma^2$$

$\sigma$  et  $K$  sont des constantes positives,  $s \geq 1$  et  $2K > \sigma^2$ ,  $W_t^1$  et  $W_t^2$  deux mouvements browniens standards indépendants.  $U_w(x, y, t)$  et  $V_w(x, y, t)$  sont supposés négligeable et la profondeur  $L(x, y, t)$  est constante.

Pour chaque particule, on suppose qu'il y a conservation de la masse, ce qui est traduit par l'équation suivante [24]

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial UL}{\partial x} + \frac{\partial VL}{\partial y} = 0 \quad (3.34)$$

Avec

$$U(x, y, t) = U_w(x, y, t) + U_a(x, y, t) \quad \text{et} \quad V(x, y, t) = V_w(x, y, t) + V_a(x, y, t)$$

D'où le système (3.33) devient

$$dV_t = \begin{cases} dX_t = \frac{-KX_t}{(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2})^{s+1}} dt + \sigma dW_t^1 \\ dY_t = \frac{-KY_t}{(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2})^{s+1}} dt + \sigma dW_t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (3.35)$$

Appliquons la formule d'Itô multidimensionnel (3.10) au processus  $R_t = \|(X_t, Y_t)\|$ , avec  $R_t$  est la distance depuis l'attraction (la cible) à l'instant  $t$ . Posant  $f(x, y, t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a  $\partial_t f = 0$

$$\partial_x f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \partial_{xx} f = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \partial_y f = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \partial_{yy} f = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

d'où, la formule d'Itô entraîne

$$\begin{aligned} d\left(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}\right) &= \left(-U_a \frac{X_t}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} - V_a \frac{Y_t}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} + D \frac{X_t^2 + Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^{3/2}}\right) dt \\ &\quad + \sqrt{2D} \frac{X_t}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} dW_t^1 + \sqrt{2D} \frac{Y_t}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} dW_t^2 \\ &= \left(-\frac{KX_t^2}{(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2})^{s+2}} - \frac{KY_t^2}{(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2})^{s+2}} + D \frac{X_t^2 + Y_t^2}{(X_t^2 + Y_t^2)^{3/2}}\right) dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{2D}}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} (X_t dW_t^1 + Y_t dW_t^2) \\ &= \left(-\frac{K(X_t^2 + Y_t^2)}{(\sqrt{X_t^2 + Y_t^2})^{s+2}} + \frac{D}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}}\right) dt + \frac{\sqrt{2D}}{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2}} (X_t dW_t^1 + Y_t dW_t^2) \end{aligned}$$

Posant le changement de variable en coordonnées polaire suivant

$$\begin{cases} X_t = R_t \cos(\theta_t) \\ Y_t = R_t \sin(\theta_t) \end{cases}$$

Ce qui impliquera

$$dR_t = \left(-\frac{K}{R_t^s} + \frac{D}{R_t}\right) dt + \sqrt{2D} (\cos(\theta_t) dW_t^1 + \sin(\theta_t) dW_t^2)$$

**Proposition 3.1** Soit  $W_t^1$  et  $W_t^2$  deux mouvements browniens standards indépendants, alors on a

$$d\tilde{W}_t = \cos(\theta_t)dW_t^1 + \sin(\theta_t)dW_t^2$$

est un mouvement brownien standard.

**Preuve**  $d\tilde{W}_t$  est un mouvement brownien standard, vérifiant :

$$\mathbb{E}(d\tilde{W}_t) = \cos(\theta_t)\mathbb{E}(dW_t^1) + \sin(\theta_t)\mathbb{E}(dW_t^2) = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left(\left(d\tilde{W}_t\right)^2\right) = \cos^2(\theta_t)dt + \sin^2(\theta_t)dt = (\cos^2(\theta_t) + \sin^2(\theta_t))dt = dt$$

Donc d'après cette proposition le processus  $R_t$  est

$$\begin{aligned} dR_t &= \left(-\frac{K}{R_t^s} + \frac{D}{R_t}\right)dt + \sqrt{2D}d\tilde{W}_t \\ &= \left(-\frac{K}{R_t^s} + \frac{\sigma^2}{2R_t}\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

On obtient, après simplification, le processus de diffusion  $R_t$  solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dR_t = \left(\frac{\sigma^2 R_t^{s-1} - K}{R_t^s}\right)dt + \sigma d\tilde{W}_t, \\ R_0 = a \end{cases} \quad a > 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.36)$$

On s'intéresse particulièrement a la simulations aux deux modèles  $\mathcal{M}_{s=1}^\sigma(V_t)$  et  $\mathcal{M}_{s>1}^\sigma(V_t)$  en 2- et 3- dimensions.

**Simulation du modèle  $\mathcal{M}_{s=1}^\sigma(V_t)$**

L'équation de ce modèle, est de la forme

$$dV_t = \begin{cases} dX_t = \frac{-KX_t}{X_t^2 + Y_t^2}dt + \sigma dW_t^1 \\ dY_t = \frac{-KY_t}{X_t^2 + Y_t^2}dt + \sigma dW_t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (3.37)$$

La fonction `RadialP2D_1`<sup>6</sup> permet de simulée le phénomène du polluant qui se déplace sur une surface d'eau turbulente en 2-Dimensions (figure 3.12). Et la fonction `RadialP3D_1` simuler le phénomène en 3-Dimensions (figure 3.13). `att1in3D`

6. Le constant  $v$  est un rayon d'une sphère où un cercle qui nous permettre de donnée la première instant d'attendre la cible par une polluant.

```
R> RadialP2D_1(N = 10000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X0 = 2, Y0 = 1,
+             v = 0.3, K = 2, Sigma = 0.2)
R> RadialP3D_1(N = 10000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X0 = 1, Y0 = 1.25,
+             Z0 = 0.5, v = 0.2, K = 2, Sigma = 0.2)
```

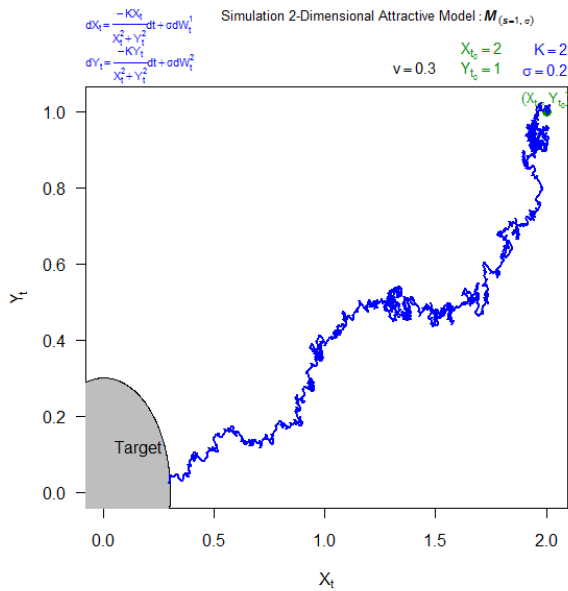


FIGURE 3.12 – Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 2-D avec  $s = 1$ .

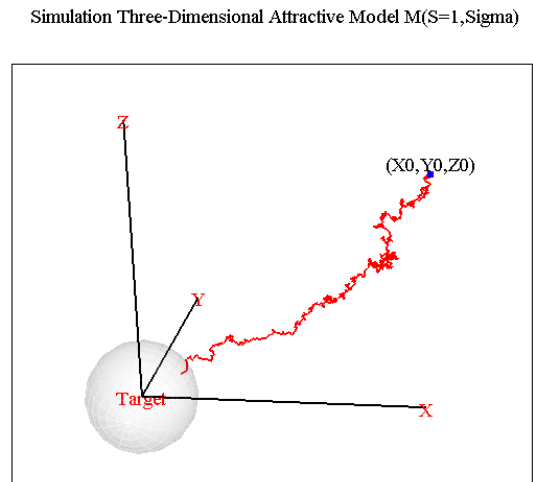
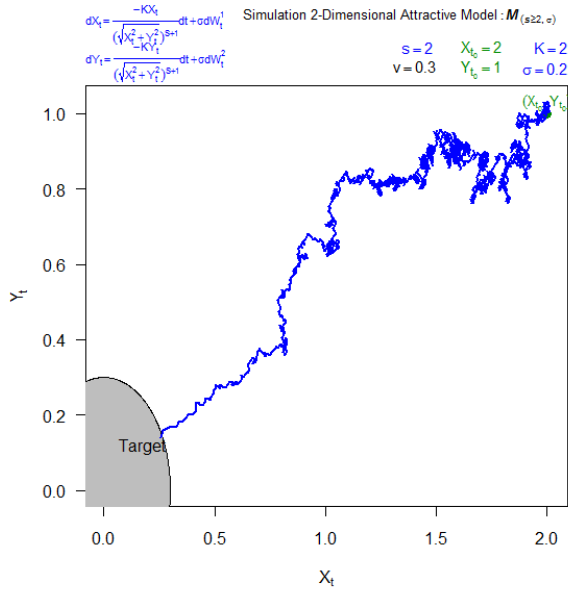


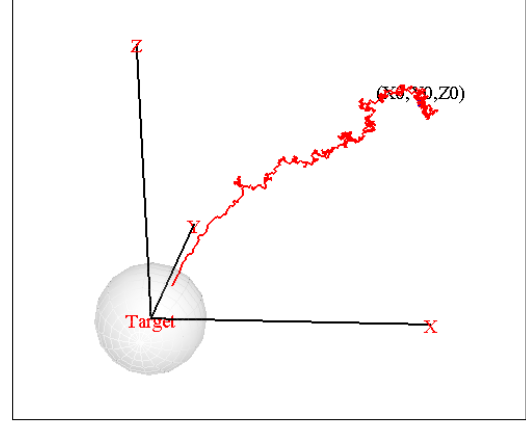
FIGURE 3.13 – Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 3-D avec  $s = 1$ .

### Simulation du modèle $\mathcal{M}_{s>1}^\sigma(V_t)$

L'équation de ce modèle est donnée par le système d'équation (3.35). La fonction `RadialP2D_2` permet de simuler le phénomène du polluant qui se déplace sur une surface d'eau turbulente en 2-Dimensions (figure 3.14). Et la fonction `RadialP3D_2` simuler le phénomène en 3-Dimensions (figure 3.15).

```
R> RadialP2D_2(N = 10000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X0 = 2, Y0 = 1,
+             v = 0.3, K = 2, s = 2, Sigma = 0.2)
R> RadialP3D_2(N = 10000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X0 = 1, Y0 = 1.25,
+             Z0 = 0.5, v = 0.2, K = 2, s = 2, Sigma=0.2)
```


 FIGURE 3.14 – Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 2-D avec  $s > 1$ .

 Simulation Three-Dimensional Attractive Model  $M(S > 1, \text{Sigma})$ 

 FIGURE 3.15 – Trajectoire du polluant dans une surface d'eau turbulente en 3-D avec  $s > 1$ .

### 3.5.2 Modèle de deux diffusion en attraction $\mathcal{M}_{m>0}^\sigma(V_t^{(1)}) \leftrightarrow \mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$

Dans le paragraphe suivante, nous allons proposer, un modèle de deux diffusion en attraction [5], l'une de dérive nulle  $\mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$  et l'autre  $\mathcal{M}_{m>0}^\sigma(V_t^{(1)})$ , de dérive non nulle. Ce qui peut modéliser le comportement de deux insectes, l'un attire l'autre.

On considère  $V_t^{(1)} = (X_{t,1}, X_{t,2})$  et  $V_t^{(2)} = (Y_{t,1}, Y_{t,2})$  deux processus aléatoire de diffusion, qu'on suppose représentant respectivement les positions d'un insecte mâle et d'un insecte femelle, et que le mâle est attiré par la femelle. Le comportement de la femelle est supposé être un processus de mouvement brownien, défini par l'équation suivante

$$dV_t^{(2)} = \sigma I_{2 \times 2} dW_t \quad (3.38)$$

alors que le comportement du mâle est supposé être un processus de diffusion, dont la dérive est orientée, à chaque instant  $t$ , vers la position de la femelle, et qui est donné par l'équation suivante

$$dV_t^{(1)} = dV_t^{(2)} + \mu_{m+1}(\|D_t\|) D_t dt + \sigma I_{2 \times 2} d\tilde{W}_t \quad (3.39)$$

où

$$\begin{cases} D_t = V_t^{(1)} - V_t^{(2)} \\ \mu_m(\|d\|) = -\frac{K}{\|d_t^m\|} \end{cases}$$

$K$  et  $m$  sont des constantes positives, et  $K > \sigma^2$ .

Le modèle proposé est de la forme suivante

$$dV_t^{(1)} = \begin{cases} dX_{t,1} = dY_{t,1} - \frac{K(X_{t,1}-Y_{t,1})}{\left(\sqrt{(X_{t,1}-Y_{t,1})^2+(X_{t,2}-Y_{t,2})^2}\right)^{m+1}} dt + \sigma d\tilde{W}_t^1 \\ dX_{t,2} = dY_{t,2} - \frac{K(X_{t,2}-Y_{t,2})}{\left(\sqrt{(X_{t,1}-Y_{t,1})^2+(X_{t,2}-Y_{t,2})^2}\right)^{m+1}} dt + \sigma d\tilde{W}_t^2 \end{cases}, t \in [0, T] \quad (3.40)$$

$$dV_t^{(2)} = \begin{cases} dY_{t,1} = \sigma dW_t^1 \\ dY_{t,2} = \sigma dW_t^2 \end{cases}, t \in [0, T] \quad (3.41)$$

avec  $\tilde{W}_t^1, \tilde{W}_t^2, W_t^1$  et  $W_t^2$  sont des mouvements Browniens indépendants.

Appliquons la formule d'Itô multidimensionnel (3.10) au processus  $R_t = \|(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})\|$ , avec  $R_t$  représente la distance entre les deux insectes a l'instant  $t$ . Posant  $f(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ , on a  $\partial_t f = 0$

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f &= \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}, & \partial_{x_1 x_1} f &= \frac{(x_2 - y_2)^2}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \\ \partial_{x_2} f &= \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}, & \partial_{x_2 x_2} f &= \frac{(x_1 - y_1)^2}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \\ \partial_{y_1} f &= \frac{-(x_1 - y_1)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}, & \partial_{y_1 y_1} f &= \frac{(x_2 - y_2)^2}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \\ \partial_{y_2} f &= \frac{-(x_2 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}, & \partial_{y_2 y_2} f &= \frac{(x_1 - y_1)^2}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

d'où, la formule d'Itô entraîne

$$\begin{aligned} df &= \left( \partial_t f + A_1 \partial_{x_1} f + A_2 \partial_{x_2} f + \frac{\sigma^2}{2} (\partial_{x_1 x_1} f + \partial_{x_2 x_2} f + \partial_{y_1 y_1} f + \partial_{y_2 y_2} f) \right) dt \\ &+ \sigma \left( (\partial_{x_1} f + \partial_{y_1} f) dW_t^1 + (\partial_{x_2} f + \partial_{y_2} f) dW_t^2 + \partial_{x_1} f d\tilde{W}_t^1 + \partial_{x_2} f d\tilde{W}_t^2 \right) \\ &= \left( A_1 \frac{X_{t,1} - Y_{t,1}}{\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}} + A_2 \frac{X_{t,2} - Y_{t,2}}{\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}} \right. \\ &+ \left. \sigma^2 \frac{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}{((X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2)^{3/2}} \right) dt + \sigma \left( \frac{X_{t,1} - Y_{t,1}}{\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}} d\tilde{W}_t^1 \right. \\ &+ \left. \frac{X_{t,2} - Y_{t,2}}{\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}} d\tilde{W}_t^2 \right) \end{aligned}$$



Avec

$$A_1 = \frac{-K(X_{t,1} - Y_{t,1})}{\left(\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}\right)^{m+1}} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{-K(X_{t,2} - Y_{t,2})}{\left(\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}\right)^{m+1}}$$

D'où

$$df = \left( \frac{-K((X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2)}{\left(\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}\right)^{m+2}} + \sigma^2 \frac{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}{((X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2)^{3/2}} \right) dt \\ + \frac{\sigma}{\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}} \left( (X_{t,1} - Y_{t,1})d\tilde{W}_t^1 + (X_{t,2} - Y_{t,2})d\tilde{W}_t^2 \right)$$

Posant le changement de variable en coordonnées polaire suivant

$$\begin{cases} X_{t,1} - Y_{t,1} = R_t \cos(\theta_t) \\ X_{t,2} - Y_{t,2} = R_t \sin(\theta_t) \end{cases}$$

Ce qui impliquera que

$$df = d\left(\sqrt{(X_{t,1} - Y_{t,1})^2 + (X_{t,2} - Y_{t,2})^2}\right) = dR_t$$

Donc

$$dR_t = \left( \frac{-K}{R_t^m} + \frac{\sigma^2}{R_t} \right) dt + \sigma \left( \cos(\theta_t)d\tilde{W}_t^1 + \sin(\theta_t)d\tilde{W}_t^2 \right) \\ = \left( \frac{-K}{R_t^m} + \frac{\sigma^2}{R_t} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

On obtient, après simplification, le processus de diffusion  $R_t$  solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dR_t = \left( \frac{\sigma^2 R_t^{m-1} - K}{R_t^m} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t, \\ R_0 = a \end{cases} \quad a > 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.42)$$

Ce modèle permet de réaliser sur ordinateur une simulation dynamique du phénomène réel.

### Simulation le modèle $\mathcal{M}_{m>0}^\sigma(V_t^{(1)}) \leftrightarrow \mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$ en 2- et 3- Dimensions

La fonction `TwoDiffAtra2D`<sup>7</sup> permet de simuler le phénomène en 2-Dimensions, c'est-à-dire simulé les deux systèmes d'équations différentielles stochastiques (3.40) et (3.41), qui est donnée par la figure 3.16. Et la fonction `TwoDiffAtra3D` simuler le phénomène en 3-Dimensions, la figure 3.17 donne une illustration de l'interaction entre deux insectes.

7. Le constant  $v$  est un seuil qui nous permet de donner l'instant de la première rencontre entre les deux insectes (voir les détails `help("TwoDiffAtra2D")`).

```
R> TwoDiffAtra2D(N = 2000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X1_0 = 0.5, X2_0 = 1,
+               Y1_0 = -0.5, Y2_0 = -1, v = 0.01, K = 2, m = 0.25, Sigma = 0.1)
R> TwoDiffAtra3D(N = 5000, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X1_0= 1, X2_0 = 1,
+               X3_0 = 2, Y1_0 = -0.5, Y2_0 = -1, Y3_0 = 0.25, v = 0.01,
+               K = 3, m = 0.2, Sigma = 0.2)
```

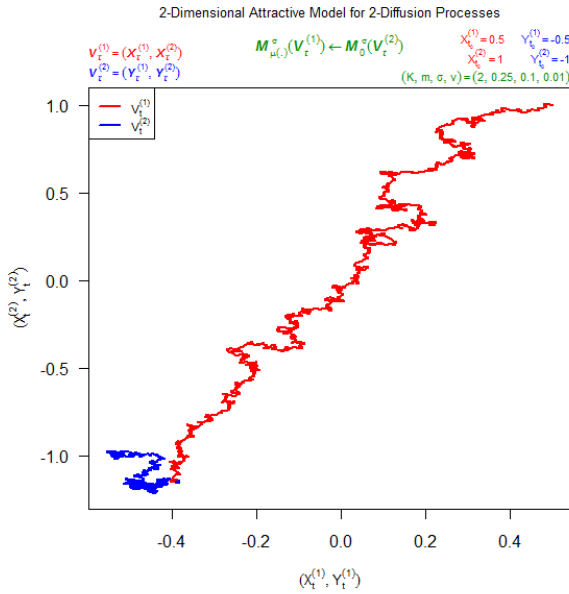


FIGURE 3.16 – L’interaction entre deux insectes en 2–D.

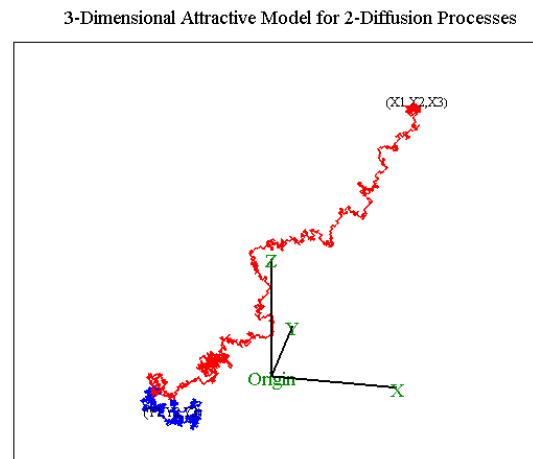


FIGURE 3.17 – L’interaction entre deux insectes en 3–D.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les définitions et les règles essentielles du calcul différentiel et intégral stochastique, et en particulier on a montré comment on intègre une équation différentielle stochastique à coefficients lipschitziens. L’intégrale stochastique aborde définie globalement sur l’espace de toutes les trajectoires par convergence en  $L^2$ . La formule de Itô nous a permis de résoudre des ÉDS, ce qui implique son importance dans les calculs analytiques, et on a montré l’intérêt pratique de la simulation d’équations différentielles stochastiques qui est très important, car ce n’est pas toujours facile à déterminer la solution analytiquement, cela rend difficile l’étude de l’évolution dynamique d’un phénomène. Nous avons vu la puissance de la modélisation par les processus de diffusion en présence d’un mécanisme attractif, qui peut représenter certains phénomènes réels tels que la trajectoire d’un polluant dans une surface d’eau turbulente.

# 4

## Comportement Asymptotique Des Processus de Diffusion

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>4.2</b>	<b>Équation de Fokker-Planck</b>	<b>85</b>
<b>4.3</b>	<b>Processus de diffusion stationnaires</b>	<b>95</b>
<b>4.4</b>	<b>Classification des processus de diffusion linéaire</b>	<b>96</b>
<b>4.5</b>	<b>Calculs de l'instant de premier passage</b>	<b>108</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de deux équations fondamentales permettant de d'écrire l'évolution des lois de probabilités relatives à un processus de diffusion. Il s'agit maintenant d'obtenir l'information maximale possible dans un cadre probabiliste, c'est-à-dire de déterminer les lois de probabilités elles-mêmes, pour décrire l'évolution temporelle d'un système hors d'équilibre obéissant à une dynamique markovienne.

L'équation de Fokker-Planck ou équation de Kolmogorov progressive est une équation aux dérivées partielles linéaire que doit satisfaire la densité de probabilité de transition  $p(s, x; t, y)$  d'un processus de Markov. A l'origine, une forme simplifiée de cette équation a permis d'étudier le mouvement brownien (Chapitre 2), équation qui est assimilable dans ce cas à l'équation de la chaleur. Comme la plupart des équations aux dérivées partielles, elle ne donne des solutions explicites que dans des cas bien particuliers portant à la fois sur la forme de l'équation, sur la forme du domaine où elle est étudiée. À chaque équation d'Itô (3.4) est associée une équation de Fokker-Planck qui décrit l'évolution dynamique de la densité du processus considéré, ainsi sa distribution stationnaire si il existe. Ces équations sont étudiés en détail ses propriétés, méthodes de solutions et simulation dans [18, 21, 25, 35].

À titre d'illustration, ce chapitre se termine par l'étude et l'analyse statistique de la variable aléatoire l'instant de premier passage "IPP" ("first passage time" en anglais). Dans le modèle d'une diffusion en attraction  $\mathcal{M}_{s \geq 1}^\sigma(V_t)$  (Chapitre 3 section 3.5.1), le taux  $\tau_c^{(s)}$  du polluant qui passe la frontière d'un voisinage d'une cible est analytiquement étudié pour le cas  $s = 1$ , le deuxième cas de  $s > 1$  est étudié par simulation [2, 4, 6, 7]. Dans le deuxième modèle de deux diffusion en attraction (Chapitre 3 section 3.5.2), une étude par simulation est effectuée pour la densité de probabilité de l'instant de la première rencontre  $\tau(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$  entre deux insectes.

## 4.2 Équation de Fokker-Planck

À chaque équation d'Itô

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (4.1)$$

correspond une équation aux dérivées partielles que vérifie la probabilité de transition  $p(s, x; t, y) = p$ . Cette équation est appelée équation de Fokker-Planck ou équation de Kolmogorov progressive, qui est sous cette forme

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2(t, y) \cdot p) - \frac{\partial}{\partial y} (\mu(t, y) \cdot p), \quad (s, x) \text{ fixé} \quad (4.2)$$

Il existe une autre équation vérifiée par la densité de probabilité  $p$  qui est appelée *équation de Kolmogorov rétrograde*. Elle porte sur la variable  $x$  de départ

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2} \sigma^2(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p + \mu(s, x) \frac{\partial}{\partial x} p, \quad (t, y) \text{ fixé} \quad (4.3)$$

L'équation de Fokker-Planck suppose, comme nous allons le voir, que le processus est markovien et que le bruit est un processus gaussien. Elle n'est donc pas valable pour tous les types de bruits.

Sous forme multidimensionnel, l'équation de Fokker-Planck ne change pas d'allure, elle est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{L} * p \quad (4.4)$$

où  $\mathcal{L}*$  est un opérateur connu sous le nom d'opérateur infinitésimal ou opérateur de Dynkin et prend la forme suivante, en dimension  $n$  :

$$\mathcal{L} = \sum_i \mu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Prenons un exemple simple. Supposons un processus de Wiener standard avec un coefficient de diffusion constant égale à  $\sigma$ , c'est-à-dire :

$$dX_t = \sigma dW_t$$

L'équation de Fokker-Planck de ce processus est :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(s, x; t, y) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x; t, y) \quad (4.5)$$

On peut vérifiée facilement que la solution de cette dernière est une densité gaussienne :

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{\sigma^2(t-s)}\right), \quad t > s \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ce qui est donnée par l'équation (2.5) (Chapitre 2 section 2.3). Ce résultat est souvent cité dans les livres récents en finance quantitative. Pour ce qui concerne le cas d'un mouvement brownien géométrique (Chapitre 2 section 2.8) la solution de l'équation de Fokker-Planck est la densité lognormale  $p(t, S; t', S')$ . En effet, supposons le mouvement brownien géométrique pour l'action  $S$  :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \theta dt + \sigma dW_t, \quad S_0 > 0$$

alors l'équation de Fokker-Planck est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S'^2} (\sigma^2 S'^2 p) - \frac{\partial}{\partial S'} (\theta S' p), \quad (t, S) \text{ fixé} \quad (4.6)$$

où  $p$  définit la densité de probabilité de transition d'un état à un autre,  $t$  le temps présent et  $t'$  le temps futur,  $S$  le prix de l'action au temps présent  $t$  et  $S'$  le prix de l'action à une période future. La solution de l'équation (4.6) est donnée par :

$$p(t, S; t', S') = \frac{1}{\sigma S' \sqrt{2\pi(t' - t)}} \exp \left[ -\frac{[\log(S/S') + (\theta - (1/2)\sigma^2)(t' - t)]^2}{2\sigma^2(t' - t)} \right]$$

**Remarque 4.1** On fait les observations suivantes.

- (1) L'équation de Fokker-Planck est une équation aux dérivées partielles linéaire, dont la solution unique sera fixée par la donnée d'une condition initiale  $p(x, t_0) = p_0(x)$  étant une fonction donnée à l'avance. D'autre part, la solution doit être une fonction positive et intégrable, non seulement localement, mais encore sur tout le domaine accessible à la variable  $x$ . Ces conditions définissent des *conditions aux limites*<sup>1</sup> assurant l'appartenance de l'ensemble des solutions particulières obtenues en tant que modes propres.
- (2) L'équation de Fokker-Planck est déterminée par la fonction de dérive  $\mu(x, t)$  qui caractérise le déplacement du mouvement, et la fonction  $\sigma(x, t) > 0$  qui, elle, caractérise la diffusion.
- (3) L'équation de Fokker-Planck est dite linéaire<sup>2</sup> si :

$$\mu(x, t) = a_1 + a_2x \quad \text{et} \quad \sigma(x, t) = a_3$$

et quasi-linéaire si  $\mu(x, t)$  est non linéaire et  $\sigma(x, t) = a_3$ .

- (4) Si l'équation différentielle stochastique est linéaire, alors la solution de l'équation de Fokker-Planck est gaussienne.

### 4.2.1 L'origine de l'équation de Fokker-Planck

Soit  $X_t$  un processus de Markov de probabilité de transition  $P(x, t + h | x_0, t)$ . On souhaite calculer la dérivée temporelle de la densité de probabilité  $p(x, t + h)$  de la variable aléatoire  $X$  à l'instant  $t + h$ .

$$p(x, t + h) = \int P(x, t + h | x_0, t) p(x_0, t) dx_0$$

a partir des relations

$$P(x, t + h | x_0, t) = \int \delta(z - x) P(z, t + h | x_0, t) dz$$

et

$$\begin{aligned} \delta(z - x) &= \delta(z - x + x_0 - x_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - x_0)^n}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^n \delta(x - x_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - x_0)^n}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x_0 - x) \end{aligned}$$

---

1. Il convient de noter que certaines conditions aux limites s'expriment physiquement.

2. Le terme linéaire se rapporte ici aux propriétés de  $\mu(x, t)$  et  $\sigma(x, t)$ . L'équation de Fokker-Planck est, elle, toujours linéaire pour  $p$ .

on établit que

$$P(x, t+h|x_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x_0 - x) \int (z - x_0)^n P(z, t+h|x_0, t) dz$$

en introduisant les moments

$$\begin{aligned} M_n(x_0, t, h) &= \mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^n | X_t = x_0) \\ &= \int (y - x_0)^n P(y, t+h|x_0, t) dy \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} P(x, t+h|x_0, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x_0 - x) M_n(x_0, t, h) \\ &= \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x_0, t, h) \right) \delta(x_0 - x) \\ &= \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, t, h) \right) \delta(x - x_0) \end{aligned}$$

Mais en considérant que  $h$  est petit, on peut écrire

$$\begin{aligned} p(x, t+h) - p(x, t) &= h \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + O(h^2) \\ &= \int (P(x, t+h|x_0, t) - 1) p(x_0, t) dx_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int \delta(x - x_0) M_n(x, t, h) p(x_0, t) dx_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \frac{M_n(x, t, h)}{n!} p(x, t) \end{aligned}$$

Et en utilisant un développement de Taylor pour  $M_n(x, t, h)$ , on a

$$\begin{aligned} M_n(x, t, h) &= \int (x - x_0)^n P(x, t|x_0, t) dx + \frac{d}{dh} \int (x - x_0)^n P(x, t|x_0, t) dx \Big|_{h=0} h + O(h^2) \\ &= h D^{(n)}(x, t) + O(h^2) \end{aligned}$$

car

$$P(x, t|x_0, t) = \delta(x - x_0)$$

et avec

$$D^{(n)}(x, t) = \frac{d}{dh} M_n(x, t, h) \Big|_{h=0}$$

d'où

$$\begin{aligned} p(x, t+h) - p(x, t) &= h \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + O(h^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t) p(x, t) \end{aligned}$$

On en déduit les *équation de Kramers-Moyal* [25]

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t) p(x, t) \quad (4.7)$$

dont l'équation de Fokker-Planck (4.2) est un cas particulier de l'équation de Kramers-Moyal (4.7). Lorsque le bruit est un processus gaussien, comme un bruit blanc, on démontre que les coefficients de Kramers-Moyal sont nuls pour  $n \geq 3$ , c'est-à-dire

$$D^{(n)}(x, t) = 0, \quad \text{si } n \geq 3$$

Dans ces conditions, l'équation de Fokker-Planck s'écrit

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) p(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) p(x, t)$$

avec

$$D^{(1)}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} M_1(x, t, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t = x)$$

et

$$D^{(2)}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} M_2(x, t, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x)$$

## 4.2.2 Modélisation d'une équation physique

Avant d'aborder la modélisation, nous annonçons deux théorèmes, donnant l'existence d'une relation simple entre les deux différentielles Itô et Stratonovitch, qui permet de passer de l'une à l'autre pour la résolution d'une équation différentielle stochastique

**Théorème 4.1 (Différentielle d'Itô convertit en différentielle de Stratonovitch)** *Si un processus stochastique  $X_t$  satisfait l'équation d'Itô :*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

*alors il satisfait également l'équation de Stratonovitch :*

$$dX_t = \underline{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dW_t$$

*où le coefficient de dérive modifié  $\underline{\mu}(t, X_t)$  est défini par :*

$$\underline{\mu}(t, x) = \mu(t, x) - \frac{1}{2} \sigma(t, x) \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}$$



**Théorème 4.2 (Différentielle de Stratonovitch convertit en différentielle d'Itô)** *Si un processus stochastique  $X_t$  satisfait l'équation de Stratonovitch :*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dW_t$$

*alors il satisfait également l'équation d'Itô :*

$$dX_t = \underline{\mu}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

*où le coefficient de dérive modifié  $\underline{\mu}(t, X_t)$  est défini par :*

$$\underline{\mu}(t, x) = \mu(t, x) + \frac{1}{2}\sigma(t, x)\frac{\partial\sigma(t, x)}{\partial x}$$

On considère une équation physique déterministe unidimensionnelle soumise à un bruit blanc  $\xi(t)$ , sous la forme suivante

$$\dot{x}(t) = \mu(x, t) + \sigma(x, t)\xi(t) \tag{4.8}$$

On suppose que le bruit est un processus centré  $\mathbb{E}(\xi(t)) = 0$  et de fonction de corrélation  $R(s, t) = \mathbb{E}(\xi(s)\xi(t)) = \delta(t - s)$ . Le bruit blanc est modélisé par un processus de Wiener standard  $W_t$ . L'équation physique (4.8) se transcrit directement en *équation de Stratonovitch*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dW_t \tag{4.9}$$

et se convertit en équation d'Itô sous la forme (appliquons le théorème 4.2)

$$dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t \tag{4.10}$$

Avec

$$A(x, t) = \mu(x, t) + \frac{1}{2}\sigma(x, t)\frac{\partial\sigma(x, t)}{\partial x}$$

et

$$B(x, t) = \sigma(x, t)$$

D'où l'équation physique (4.8) se traduit en équation d'Itô sous la forme suivante

$$dX_t = \left( \mu(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)\frac{\partial\sigma(t, X_t)}{\partial x} \right) dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{4.11}$$

L'équation de Fokker-Planck pour l'équation physique (4.8), s'écrit alors

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x, t) \cdot p + \frac{1}{2}\sigma(x, t)\frac{\partial}{\partial x} (\sigma(x, t) \cdot p) \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma(x, t) \cdot p)$$

Dans le cas multidimensionnel, on note  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Le vecteur  $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$  représente des bruits blancs centrés et de fonctions de corrélation normées

$$R_{ij}(s, t) = \mathbb{E}(\xi_i(t)\xi_j(s)) = \delta(t - s)$$

Les quantités  $\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . L'équation physique multidimensionnel, s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = \mu(x, t) + \sigma_1(x, t)\xi_1(t) + \dots + \sigma_m(x, t)\xi_m(t) \quad (4.12)$$

se traduit mathématiquement par l'équation de Stratonovitch

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t, X_t) \circ dW_i(t)$$

où  $W_1(t), \dots, W_m(t)$  sont  $m$  processus de Wiener standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Cette équation correspond à l'équation d'Itô pour  $i = 1, \dots, n$

$$dX_t^i = \left( \mu^i(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sigma_j^k(t, X_t) \frac{\partial \sigma_j^i(t, X_t)}{\partial x_k} \right) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(t, X_t) dW_j^i(t)$$

Si l'on pose

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n A^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

avec

$$A^i(x) = \mu^i(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sigma_j^k(t, X_t) \frac{\partial \sigma_j^i(t, X_t)}{\partial x_k}$$

et

$$B^{ij}(x) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(x)$$

alors le processus de diffusion  $X_t$  vérifie l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{L}p$$

**Exemple 4.1 (L'oscillateur de Van Der Pol)** On considère l'équation de *Van Der Pol* pour l'oscillateur<sup>3</sup> électrique, soumis à une force d'excitation aléatoire  $F$ , qui est centrée et de fonction de corrélation  $\mathbb{E}(F_t F_{t+h}) = 2\sigma\delta(h)$ ,

$$\ddot{X} + a \left( \frac{X^2}{b^2} - 1 \right) \dot{X} + \omega_0^2 X = F(t) \quad (4.13)$$

L'équation de *Van Der Pol* (4.13) est utilisée pour modéliser des oscillateurs entretenus. Elle n'est pas linéaire et n'a pas de solution explicite. Les paramètres caractéristiques de cette équation sont : la pulsation<sup>4</sup> propre  $\omega_0$ , le paramètre de réaction<sup>5</sup>  $a$  et le paramètre de contrôle  $b$ .

- 
3. Électricité : dispositif électrique qui sert à produire un courant alternatif périodique de fréquence déterminée.
  4. Physique : augmentation momentanée et périodique de l'intensité d'une onde.
  5. Physique : processus de modification de la structure d'un noyau atomique avec libération d'énergie.

On écrit cette équation du second degré sous la forme d'un système d'équations du premier degré

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -a \left( \frac{X^2}{b^2} - 1 \right) Y - \omega_0^2 X + F(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

se traduit mathématiquement par l'équation de Stratonovitch

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = - \left( a \left( \frac{X_t^2}{b^2} - 1 \right) Y_t + \omega_0^2 X_t \right) dt + 2\sigma \circ dW_t \end{cases}$$

l'équation (4.13) se traduit à un système d'équations d'Itô sous la forme suivante

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = - \left( a \left( \frac{X_t^2}{b^2} - 1 \right) Y_t + \omega_0^2 X_t \right) dt + 2\sigma dW_t \end{cases} \quad (4.15)$$

L'équation de Fokker-Planck pour l'équation de *Van Der Pol* (4.13), s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(yp) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \left( \frac{x^2}{b^2} - 1 \right) yp \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_0^2 xp) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (2\sigma p) \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} p + a \left( \frac{x^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} (yp) + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} p + \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} p \end{aligned}$$

### Simulation numérique de l'équation de Van Der Pol

La fonction `snssde2D`<sup>6</sup> permet de simuler numériquement la solution approchée des systèmes d'équations différentielles stochastiques deux dimensions par des schémas numériques classiques.

```
R> help("snssde2D")
R> example("snssde2D")
R> snssde2D(N, T = 1, t0, x0, y0, Dt, driftx, drifty, diffx, diffy,
+         Step = FALSE, Output = FALSE, Methods = c("SchEuler",
+         "SchMilstein", "SchMilsteinS", "SchTaylor", "SchHeun",
+         "SchRK3"), ...)
```

---

6. *simulation numerical solution of stochastic differential equations two-dimensional.*

**Détails :**

N	La taille de processus.
M	Le nombre de trajectoire à simulée.
T	L'instant final (par défaut égale à 1).
t0	L'instant initial.
x0 & y0	Les valeurs initiaux.
Dt	La discrétisation où le pas (Si Dt est fixée alors par défaut T = t0 + Dt * N).
driftx & drifty	Coefficient de dérive (une expression qui dépende de x, y et de t).
diffx & diffy	Coefficient de diffusion (une expression qui dépende de x, y et de t).
Output	Pour sauvegardée les résultats de simulation sous forme Excel (par défaut c'est FALSE).
Step	Pour l'animation, simulation étape par étape (par défaut c'est FALSE).
Methods	Différents méthodes de simulation (par défaut schéma d'Euler), avec SchEuler(3.23), SchMilstein(3.24), SchMilsteins(3.25), SchTaylor(3.26), SchHeun(3.27), SchRK3(3.28).

Posant par exemple  $(b, \omega_0, \sigma) = (4, 2, 0.5)$  et  $x_0 = y_0 = 0$ . On remarque deux états du ce système physique très différents pour le paramètre  $a = 0$  et  $a > 0$ , donc on a l'équation physique

$$\begin{cases} \ddot{X} + 4X = F(t), & a = 0 \\ \ddot{X} + 2\left(\frac{X^2}{16} - 1\right)\dot{X} + 4X = F(t), & a > 0 \end{cases}$$

se convertit mathématique en équation d'Itô

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = -4X_t dt + dW_t \end{cases}, \quad a = 0$$

et

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = -\left(2\left(\frac{X_t^2}{16} - 1\right)Y_t + 4X_t\right) dt + dW_t \end{cases}, \quad a > 0$$

```
R> fx <- expression( y )
R> gx <- expression( 0 )
R> fy1<- expression( -4*x )
R> gy <- expression( 1 )
R> snssde2D(N = 10000, T = 1, t0 = 0, x0 = 0, y0 = 0, Dt = 0.1,
+          driftx = fx, drifty = fy1, diffx = gx, diffy = gy)
R> fy2<- expression( -(2*((x/4)^2 -1)*y + 4*x) )
R> snssde2D(N = 10000, T = 1, t0 = 0, x0 = 0, y0 = 0, Dt = 0.1,
+          driftx = fx, drifty = fy2, diffx = gx, diffy = gy)
```

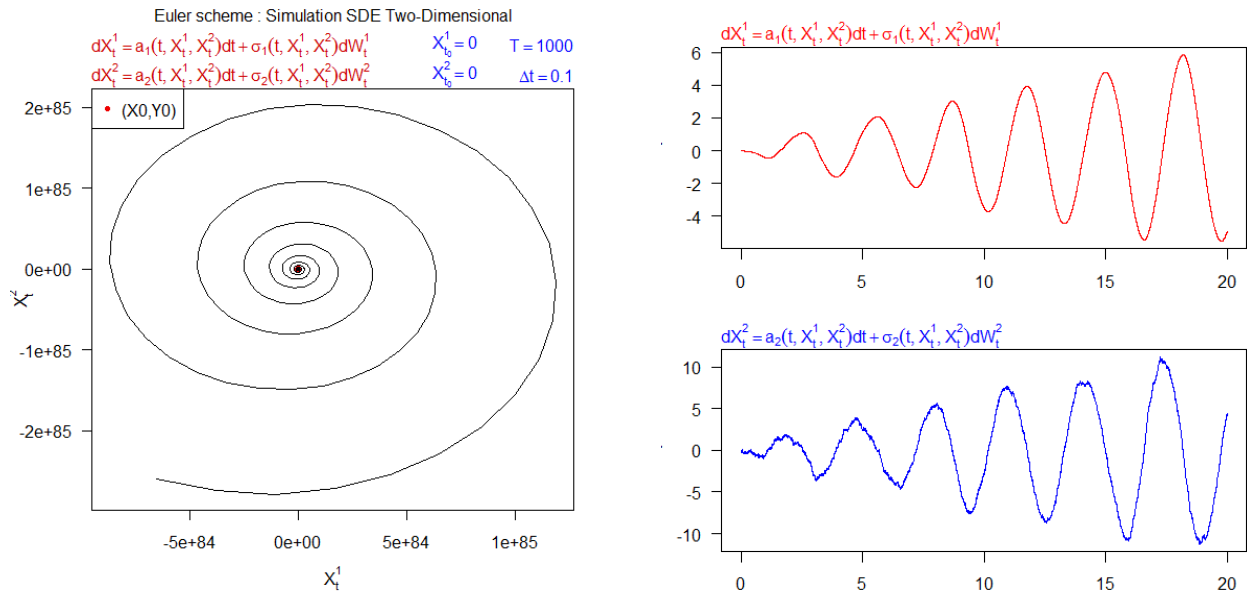


FIGURE 4.1 – L'oscillateur de Van Der Pol, régime permanent sinusoïdal  $a = 0$ .

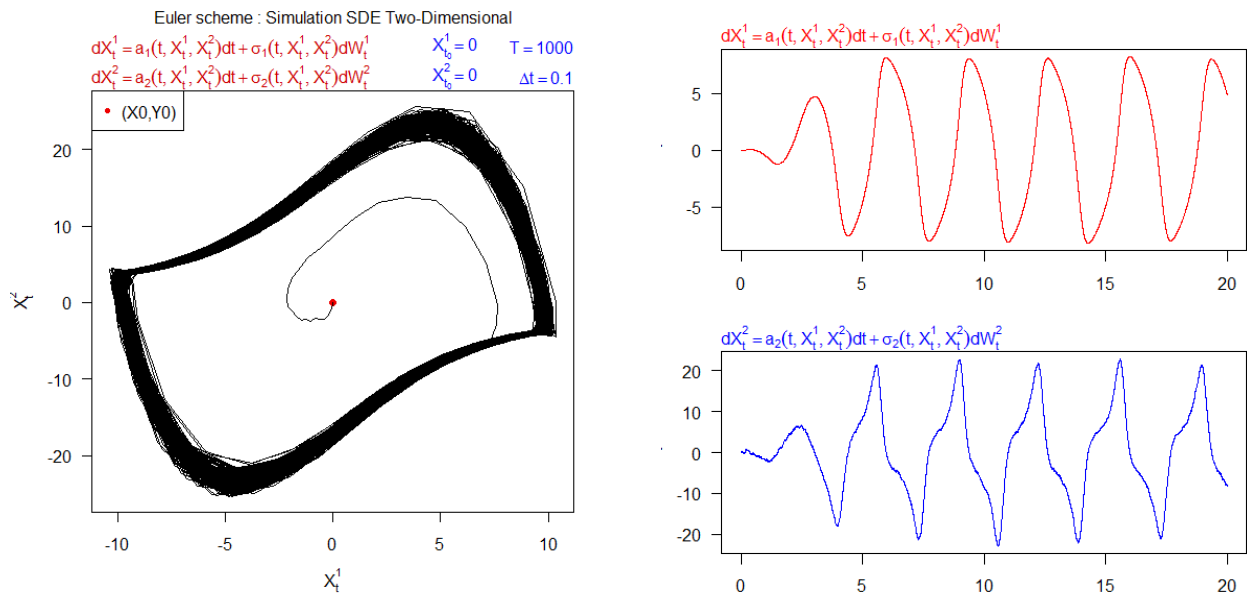


FIGURE 4.2 – L'oscillateur de Van Der Pol, régime permanent non sinusoïdal  $a > 0$ .

### 4.2.3 Existence d'une solution

Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \mu_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On considère l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{L} * p$$

On établit que lorsque les coefficients  $\mu(x, t)$  et  $\sigma(x, t)$  sont lipschitziens (Chapitre 3 section 3.3.2) et vérifient une condition supplémentaire d'uniforme ellipticity, l'équation de Fokker-Planck a une solution unique. Plus précisément, on a le résultat suivante.

**Théorème 4.3** *On suppose que les coefficients de l'équation de Fokker-Planck sont lipschitziens et qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que les coefficients  $\mu_{ij}(x, t)$  vérifient la condition*

$$\sum_{ij} \sigma_{ij}(x, t) y_i y_j \geq c |y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

où  $|y|$  est la norme de  $y$ , alors il existe une unique solution de l'équation de Fokker-Planck  $p(s, x; t, y)$  continue et à dérivées partielles  $\partial_{x_i} p$  et  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} p$  continues.

### 4.3 Processus de diffusion stationnaires

Un processus aléatoire de diffusion est dite stationnaire si sa densité de probabilité de transition  $p(s, x; t, y)$ , vérifie l'équation suivante

$$\pi(y) = \int_{\mathbb{R}} p(s, x; t, y) \pi(x) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

où  $\pi(y)$  est appelée distribution stationnaire du processus si il existe. Pour laquelle on a :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Peut être obtenue explicitement ou numériquement en résolvant l'une ou l'autre des équations de Fokker-Planck qui ne dépend pas du temps (progressive (4.16) où rétrograde (4.17))

$$\frac{d}{dy} (\mu(y) \pi(y)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} (\sigma^2(y) \pi(y)) = 0 \tag{4.16}$$

où

$$\mu(x) \frac{d}{dx} \pi(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} \pi(x) = 0 \tag{4.17}$$

**Exemple 4.2 (Distribution stationnaire de l'équation de Langevin)** Soit à nouveau l'équation de Langevin (Chapitre 3 section 3.3.3),

$$dX_t = -aX_t dt + \sqrt{2D} dW_t$$

On a  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  et la fonction de corrélation  $R(s, t) = (D/a)e^{-a|t-s|}$  dépende de  $h = t - s$ , donc le processus de Langevin est stationnaire au sens faible, c'est-à-dire qu'il existe une distributions stationnaire qui vérifie

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

d'après l'équation (4.16), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(-ay\pi(y)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2}(2D\pi(y)) &= 0 \Leftrightarrow a \frac{d}{dy}(y\pi(y)) + D \frac{d^2}{dy^2}\pi(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow ay\pi(y) + D \frac{d}{dy}\pi(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow ay\pi(y) = -D \frac{d}{dy}\pi(y) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi'(y)}{\pi(y)} = -\frac{a}{D}y \\ &\Leftrightarrow \ln |\pi(y)| = -\frac{a}{2D}y^2 + C \\ &\Leftrightarrow \pi(y) = K \exp\left(-\frac{a}{2D}y^2\right) \end{aligned}$$

Avec  $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi(D/a)}}$ , donc on trouve la distributions stationnaire  $\pi(y)$  de l'équation de Langevin, qui suit une loi gaussienne  $N(0, D/a)$

$$\pi(y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi D}{a}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a}{D} y^2\right)$$

## 4.4 Classification des processus de diffusion linéaire

Soit  $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  un processus de diffusion, solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \tag{4.18}$$

L'équation (4.18) est dite *linéaire* si les coefficients de dérive  $A(t, x)$  et de diffusion  $B(t, x)$  sont de la forme suivante

$$A(t, x) = C(t) + D(t)x, \quad \text{avec } C : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et } D : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

$$B(t, x) = E(t) + F(t)x, \quad \text{avec } E : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \quad \text{et } F : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$$

où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$  est l'espace des fonctions linéaires continues de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ .

**Définition 4.1** Une équation différentielle stochastique *linéaire* est dite *homogène* si  $C(t) = E(t) = 0$ . Et elle est *linéaire au sens faible* si  $F(t) = 0$ .

Maintenant, on considère l'équation différentielle stochastique (4.18) de coefficient de dérive  $A(t, x) = r(\theta - x)$  avec  $r > 0$ , et coefficient de diffusion  $B(t, x)$  qui peut être *constant*, *linéaire dépend de  $x$* , ou du type *polynômial*. Ces trois types de coefficient de diffusion conduisent, respectivement, aux distributions stationnaires *Gaussiennes*, *Gamma*, et *Bêta*<sup>7</sup>. Nous ressemblant certaines de leurs propriétés dans le suivant.

#### 4.4.1 Processus de diffusion de type $N$

Pour ce modèle, nous avons :

Coefficient de dérive :	$A(t, X_t) = r(\theta - X_t), \quad r > 0.$
Coefficient de diffusion :	$B(t, X_t) = \sqrt{2\sigma}, \quad \sigma > 0.$
ÉDS :	$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sqrt{2\sigma}dW_t.$
Distribution stationnaire :	$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta}\right), \quad \delta = \frac{\sigma}{r}.$
Statistique :	moyenne, mode = $\theta$ , variance = $\delta$ .

**Preuve** D'après l'équation (4.16), on a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (r(\theta - x)\pi(x)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (2\sigma\pi(x)) &= 0 \Leftrightarrow r \frac{d}{dx} ((\theta - x)\pi(x)) - \sigma \frac{d^2}{dx^2} \pi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) - \sigma \frac{d}{dx} \pi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) = \sigma \frac{d}{dx} \pi(x) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{r}{\sigma} (\theta - x) \\
 &\Leftrightarrow \ln |\pi(x)| = -\frac{r}{2\sigma} (\theta - x)^2 + C \\
 &\Leftrightarrow \pi(x) = K \exp\left(-\frac{r}{2\sigma} (x - \theta)^2\right)
 \end{aligned}$$

Avec  $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma/r)}}$ , donc on trouve la distributions stationnaire  $\pi(x)$  de ce type d'équation, qui suit une loi gaussienne  $N(0, \sigma/r)$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta}\right), \quad \delta = \frac{\sigma}{r}$$

---

7. La loi bêta standard  $\mathcal{B}_{[0,1]}$



### Simulation numérique de la distribution stationnaire de modèle de type N

Dans cette simulation il s'agit pas de résoudre numériquement l'équation différentielle ordinaire d'ordre deux (4.16) où (4.17) pour trouver la distribution stationnaire  $\pi(x)$  de processus  $X_t$ . L'idée est de simulée un flux de  $M$  trajectoires de ce processus et en coupant à un instant donnée  $t$ , donc on obtient un échantillon de taille  $M$  de ce modèle à l'instant  $t = v$  que l'on note par  $X_v = (x_v^1, x_v^2, \dots, x_v^M)$ . A partir de sa, en fait une analyse statistique a  $X_v$ , ainsi l'ajustement de la distribution de la variable aléatoire  $X_v$  utilisant deux méthodes, la méthode de histogramme et la méthode du noyau [38]. Avant d'aborder les simulations, nous donnons une présentation de la méthode du noyau.

**Définition 4.2 (Méthode du noyau)** La méthode du noyau est une méthode non paramétrique, qui consiste à estimer la densité de probabilité inconnue  $f_X(x)$  d'une certaine variable aléatoire  $X$ , définie sur un domaine  $D$ , et dont on connaît qu'un échantillon  $E = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  de sa réalisation. Un estimateur  $\hat{f}_{n,h}(x)$ , dite du noyau, de la variable  $X$ , au vu de l'observation de  $E$ , est donné par :

$$\hat{f}_{n,h}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

$K$  est une fonction, dit noyau, et l'estimateur de cette fonction est caractérisée par le paramètre de lissage  $h$ . Cette fonction est supposé bornée, et elle vérifie :

$$K(x) \geq 0 \quad , \quad \int_D K(x) dx = 1$$

Les noyaux les plus utilisées sont *Gaussien*, *cosinus*, *rectangulaire*, *triangulaire*. Le problème fondamental dans l'utilisation de cette méthode est comment choisir le paramètre  $h$ , pour obtenir un estimateur optimal de  $f_X(x)$ .

On considère par exemple le modèle de *Vasicek généralisé* (VAG) décrit par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \zeta dW_t, X_0 = x_0 \tag{4.19}$$

avec  $\zeta = \sqrt{2\sigma}$ , la forme explicite de la solution de l'équation (4.19) est :

$$X_t = \theta + (X_0 - \theta)e^{-rt} + \zeta \int_0^t e^{-r(t-s)} dW_s$$

La fonction `AnaSimX` permettre de simulée numériquement un échantillon  $X_v$  de taille  $M$  à partir d'une ÉDS.

```
R> help("AnaSimX")
R> AnaSimX(N, M, t0, Dt, T = 1, X0, v, drift, diff, Output = FALSE,
+         Methods = c("Euler", "Milstein", "MilsteinS", "Ito-Taylor",
+                    "Heun", "RK3"), ...)
```

Posant  $(r, \theta, \sigma) = (2, -2, 1)$  et  $x_0 = 4$ , donc on a le modèle

$$dX_t = 2(-2 - X_t)dt + \sqrt{2}dW_t, X_0 = 4$$

```
R> f <- expression( 2*(-2-x) )
R> g <- expression( sqrt(2) )
R> AnaSimX(N = 1000, M = 100, t0 = 0, Dt = 0.01, X0 = 4, v = 9,
+         drift = f, diff = g)
R> X
[1] -2.1943293 -2.2719547 -3.1151950 -0.6626404 -2.5430828  0.3602131
[7] -3.2372479 -2.0337318 -1.9326694 -1.4953072 -2.9416240 -1.9643427
[13] -2.0874472 -2.4104522 -2.6901473 -2.1066782 -1.6935978 -2.7531990
.      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .
[85] -2.3721165 -2.0848300 -2.5641703 -1.6872738 -0.6147365 -2.0119820
[91] -2.5983331 -2.0200177 -3.7215718 -1.4605711 -2.3753241 -2.3620768
[97] -1.9748765 -2.2800181 -2.7551030 -2.1111137 -2.3917035 -1.0311714
```

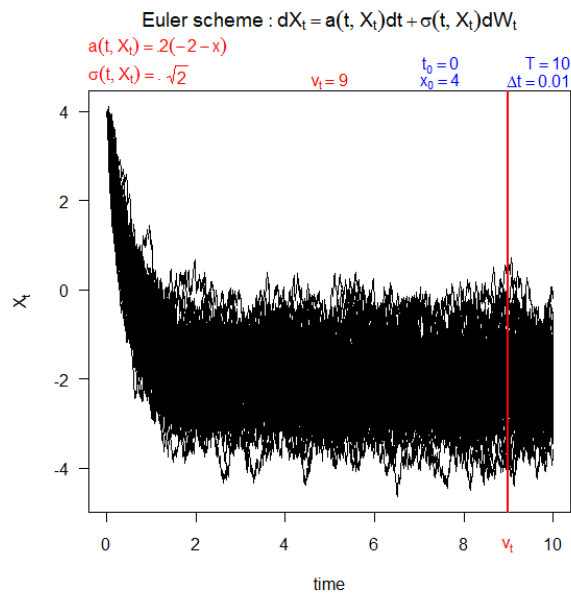


FIGURE 4.3 – Simulation un échantillon de taille 100 à partir du modèle VAG.

Statistique descriptive :

```
R> summary(X)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
```

```
-3.7570 -2.4160 -2.0520 -2.0080 -1.6070 0.3602
R> var(X)
[1] 0.5546319
```

**La fonction `Ajdnorm` permet de estimer les paramètres de la loi normale par la méthode de maximum de vraisemblance, ainsi l'intervalle de confiance pour  $\alpha = 0.95$ .**

```
R> Ajdnorm(X, starts = list(mean = 1, sd = 1), level = 0.95)
Profiling...
$summary
Maximum likelihood estimation
Call:
mle(minuslogl = lik, start = starts)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error
mean	-2.0063018	0.07482636
sd	0.7445129	0.05291131

-2 log L: 222.5311

\$coef

	mean	sd
	-2.0063018	0.7445129

\$AIC

[1] 226.5311

\$vcov

	mean	sd
mean	5.598984e-03	-3.358252e-08
sd	-3.358252e-08	2.799606e-03

\$confint

	2.5 %	97.5 %
mean	-2.1543897	-1.858205
sd	0.6517166	0.861606

**La fonction `hist_general` permet de ajuster la distribution de l'échantillon  $X_n$  par la méthode de l'histogramme. Et la fonction `Kern_general` c'est l'ajustement par la méthode du noyau.**

```
R> help(hist_general)
R> help(Kern_general)
R> hist_general(Data = X, Breaks = 'Sturges', Law = "Norm")
R> Kern_general(Data = X, bw='Bcv', k = "gaussian", Law = "Norm")
```

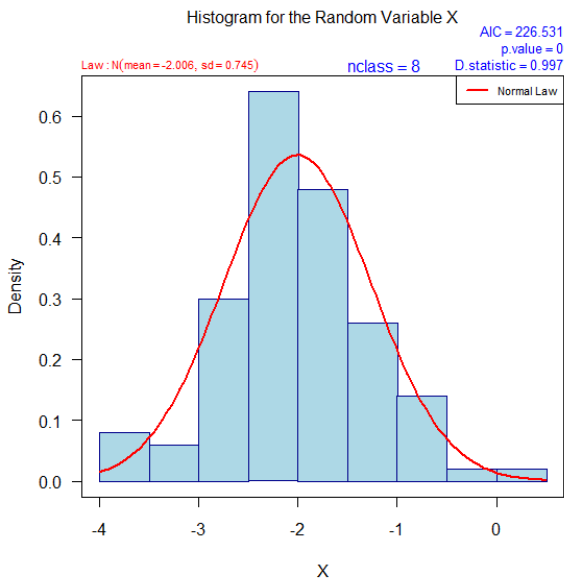


FIGURE 4.4 – Ajustement de la distribution stationnaire du modèle VAG par la méthode d’histogramme.

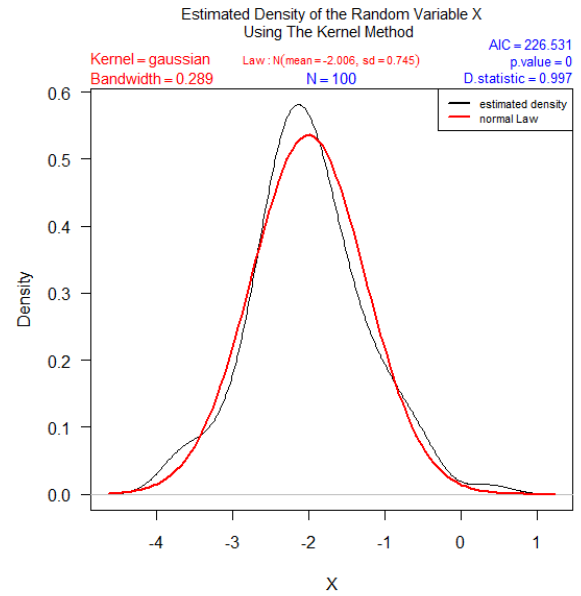


FIGURE 4.5 – Ajustement de la distribution stationnaire du modèle VAG par la méthode du noyau.

Test de Kolmogorov-Smirnov :

```
R> ks.test(X, "pnorm", mean = -2, sd = sqrt(1/2) )
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  X
D = 0.0621, p-value = 0.8357
alternative hypothesis: two-sided
```

#### 4.4.2 Processus de diffusion de type $G$

Pour ce modèle, nous avons :

Coefficient de dérive :  $A(t, X_t) = r(\theta - X_t), \quad r > 0.$

Coefficient de diffusion :  $B(t, X_t) = \sqrt{\sigma X_t}, \quad \sigma > 0.$

ÉDS :  $dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sqrt{\sigma X_t}dW_t.$

Distribution stationnaire :  $\pi(x) = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{-1+\frac{\theta}{\delta}} \frac{e^{-\frac{x}{\delta}}}{\Gamma\left(\frac{\theta}{\delta}\right)}, \quad \delta = \frac{\sigma}{2r}.$

Statistique : moyenne =  $\theta$ , mode =  $\theta - \delta$ , variance =  $\delta\theta$ .

**Preuve** D'après l'équation (4.16), on a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (r(\theta - x)\pi(x)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sigma x \pi(x)) &= 0 \Leftrightarrow r \frac{d}{dx} ((\theta - x)\pi(x)) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2}{dx^2} (x\pi(x)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) - \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dx} (x\pi(x)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) = \frac{\sigma}{2} (\pi(x) + x\pi'(x)) \\
 &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) - \frac{\sigma}{2} \pi(x) = \frac{\sigma}{2} x\pi'(x) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{2}{\sigma x} \left( r(\theta - x) - \frac{\sigma}{2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \left( \frac{2r\theta}{\sigma} - 1 \right) \frac{1}{x} - \frac{2r}{\sigma} \\
 &\Leftrightarrow \ln |\pi(x)| = \left( \frac{2r\theta}{\sigma} - 1 \right) \ln(x) - \frac{2r}{\sigma} x + C \\
 &\Leftrightarrow \pi(x) = K x^{\frac{2r\theta}{\sigma} - 1} \exp \left( -\frac{2r}{\sigma} x \right)
 \end{aligned}$$

Posant  $\delta = \frac{\sigma}{2r}$  avec  $K = \delta^{1 - \frac{\theta}{\delta}} / \Gamma \left( \frac{\theta}{\delta} \right)$ , d'où on trouve la distributions stationnaire  $\pi(x)$  d'une équation de type G, qui suit une loi gamma  $\gamma \left( \frac{\theta}{\delta}, \frac{1}{\delta} \right)$

$$\pi(x) = \left( \frac{x}{\delta} \right)^{-1 + \frac{\theta}{\delta}} \frac{e^{-\frac{x}{\delta}}}{\Gamma \left( \frac{\theta}{\delta} \right)}$$

### Simulation numérique de la distribution stationnaire de modèle de type G

On considère par exemple le modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (Chapitre 3 exemple 3.6) décrit par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0. \tag{4.20}$$

Avec la condition  $2r\theta > \sigma^2$ . Posant par exemple  $(r, \theta, \sigma) = (0.5, 3, 1)$  et  $x_0 = 100, \Delta t = 0.1$ , donc on a le modèle

$$dX_t = \frac{1}{2} (3 - X_t) dt + \sqrt{X_t} dW_t, \quad x_0 = 100$$

simulons numériquement un échantillon  $X_{v=90}$  de taille 100 à partir de cette équation

```

R> f <- expression( 0.5*(3-x) )
R> g <- expression( sqrt(x) )
R> AnaSimX(N = 1000, M = 100, t0 = 0, Dt = 0.1, X0 = 100, v = 90,
+         drift = f, diff = g)
R> X

```

```
[1] 1.9781677 2.7698461 1.9426347 6.8094888 3.2716436 11.0541449
[7] 1.6495788 2.7213673 5.6279096 4.1147230 3.6330197 1.8322262
.      .      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .      .
[89] 2.1697131 6.5484018 0.8467619 2.5333814 1.1763158 3.3743554
[95] 0.4432751 3.7510871 1.6463437 2.0691975 1.8540492 3.8536741
R> summary(X)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.5483  1.7760  2.7510  3.1900  4.2450 10.0500
R> var(X)
[1] 3.492991
```

**Estimations des paramètres :**

```
R> Ajdgamma(X, starts = list(shape = 1, rate = 1), leve = 0.95)
Profiling...
$summary
Maximum likelihood estimation
Call:
mle(minuslogl = lik, start = starts)
```

```
Coefficients:
      Estimate Std. Error
shape 3.079444  0.4161674
rate  0.962066  0.1412105
```

-2 log L: 376.7305

```
$coef
  shape    rate
3.079444 0.962066
```

```
$AIC
[1] 380.7305
```

```
$vcov
      shape    rate
shape 0.17319531 0.05410881
rate  0.05410881 0.01994040
```

```
$confint
      2.5 %    97.5 %
```

```
shape 2.3372820 3.972203
rate 0.7104027 1.265122
```

Ajustement de la distribution stationnaire  $\pi(x)$  :

```
R> hist_general(Data = X, Breaks='Sturges', Law = "Gamma")
R> Kern_general(Data = X, bw='SJ', k = "gaussian", Law = "Gamma")
```

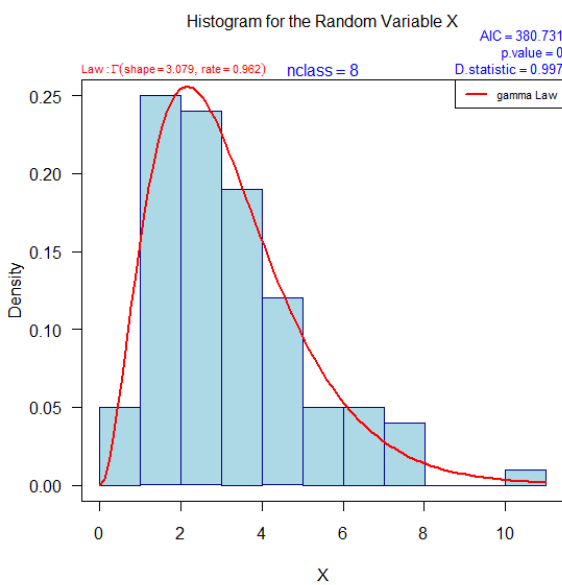


FIGURE 4.6 – Ajustement de la distribution stationnaire du modèle CIR par la méthode d’histogramme.

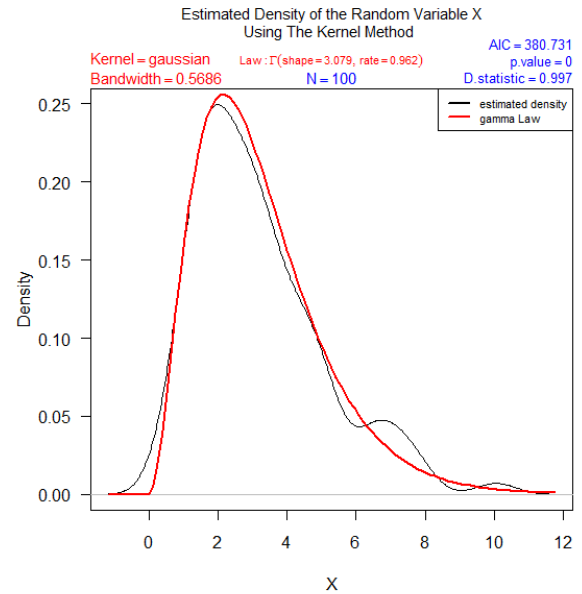


FIGURE 4.7 – Ajustement de la distribution stationnaire du modèle CIR par la méthode du noyau.

Test de Kolmogorov-Smirnov :

```
R> ks.test(X, "pgamma", shape = 3, rate = 1 )
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: X
D = 0.0722, p-value = 0.6741
alternative hypothesis: two-sided
```

### 4.4.3 Processus de diffusion de type B

Pour ce modèle, nous avons :

Coefficient de dérive :  $A(t, X_t) = r(\theta - X_t), \quad r > 0, \quad \theta \in ]0, 1[$

Coefficient de diffusion :  $B(t, X_t) = \sqrt{\sigma X_t(1 - X_t)}, \quad \sigma > 0.$

ÉDS :  $dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sqrt{\sigma X_t(1 - X_t)}dW_t, \quad X_0 \in [0, 1].$

Distribution stationnaire :  $\pi(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\delta})}{\Gamma(\frac{\theta}{\delta})\Gamma(\frac{1-\theta}{\delta})} x^{-1+\frac{\theta}{\delta}}(1-x)^{-1+\frac{1-\theta}{\delta}}, \delta = \frac{\sigma}{2r}.$

Statistique :  $\text{moyenne} = \theta, \quad \text{mode} = \frac{\theta - \delta}{1 - 2\delta}, \quad \text{variance} = \frac{\theta(1 - \theta)}{1 + \delta}.$

**Preuve** D'après l'équation (4.16), on a

$$\frac{d}{dx} (r(\theta - x)\pi(x)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sigma x(1 - x)\pi(x)) = 0 \Leftrightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow r \frac{d}{dx} ((\theta - x)\pi(x)) - \frac{\sigma}{2} \frac{d^2}{dx^2} (x(1 - x)\pi(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow r(\theta - x)\pi(x) - \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dx} (x(1 - x)\pi(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2r}{\sigma} (\theta - x)\pi(x) = ((1 - 2x)\pi(x) + x(1 - x)\pi'(x)) \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{2r}{\sigma} (\theta - x) - (1 - 2x) \right) \pi(x) = x(1 - x)\pi'(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{2r(\theta - x) - \sigma(1 - 2x)}{x(1 - x)} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{2r\theta - \sigma}{x} - \frac{2r(1 - \theta) - \sigma}{1 - x} \right) \\ &\Leftrightarrow \ln |\pi(x)| = \frac{2r\theta - \sigma}{\sigma} \ln |x| + \frac{2r(1 - \theta) - \sigma}{\sigma} \ln |1 - x| + C \\ &\Leftrightarrow \pi(x) = Kx^{\frac{2r\theta}{\sigma} - 1} (1 - x)^{\frac{2r(1 - \theta)}{\sigma} - 1} \end{aligned}$$

Posant  $\delta = \frac{\sigma}{2r}$  avec  $K$  égale à

$$K = \frac{\Gamma(\frac{1}{\delta})}{\Gamma(\frac{\theta}{\delta})\Gamma(\frac{1-\theta}{\delta})}$$

d'où on trouve la distributions stationnaire  $\pi(x)$  d'une équation de type B, qui suit une loi bêta standard  $\mathcal{B}(\frac{\theta}{\delta}, \frac{1-\theta}{\delta})$

$$\pi(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\delta})}{\Gamma(\frac{\theta}{\delta})\Gamma(\frac{1-\theta}{\delta})} x^{-1+\frac{\theta}{\delta}}(1-x)^{-1+\frac{1-\theta}{\delta}}$$



### Simulation numérique de la distribution stationnaire de modèle de type B

On considère le processus de *diffusion de Jacobi*  $X_t$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sqrt{\sigma X_t(1 - X_t)}dW_t, \quad X_0 = x_0 \in [0, 1]. \quad (4.21)$$

Avec  $\theta \in ]0, 1[$ . Posant par exemple  $(r, \theta, \sigma) = (2, 0.5, 1)$  et  $x_0 = 0, \Delta t = 0.01$ , donc on a le modèle

$$dX_t = 2 \left( \frac{1}{2} - X_t \right) dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)}dW_t, \quad X_0 = 0.$$

Simulons numériquement un échantillon  $X_{v=9}$  de taille 100 à partir de cette équation

```
R> f <- expression( 2*(0.5-x) )
R> g <- expression( sqrt(x*(1-x)) )
R> AnaSimX(N = 1000, M = 100, t0 = 0, Dt = 0.01, X0 = 0, v = 9,
+         drift = f, diff = g)
R> X
[1] 0.61568827 0.22363297 0.23333832 0.34456437 0.86391343 0.67870198
[7] 0.82226081 0.06663198 0.60156924 0.58966279 0.57626142 0.63231225
.      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .
.      .      .      .      .      .
[89] 0.43607965 0.61750493 0.19505968 0.87196355 0.79428433 0.61846946
[95] 0.72321640 0.45797652 0.88082305 0.53119498 0.49339106 0.48472011
R> summary(X)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01721 0.35020 0.53090 0.51870 0.71230 0.94530
R> var(X)
[1] 0.0502775
```

Estimations des paramètres :

```
R> Ajdbeta(X, starts = list(shape1 = 1, shape2 = 1), leve = 0.95)
Profiling...
$summary
Maximum likelihood estimation

Call:
mle(minuslogl = lik, start = starts)

Coefficients:
           Estimate Std. Error
shape1 2.020047    0.2739796
```

```

shape2 1.909258  0.2571918

-2 log L: -23.83837

$coef
  shape1  shape2
2.020047 1.909258
$AIC
[1] -19.83837

$vcov
           shape1      shape2
shape1 0.07506481 0.05515151
shape2 0.05515151 0.06614760
$confint
      2.5 %   97.5 %
shape1 1.531554 2.607888
shape2 1.450570 2.460968
    
```

Ajustement de la distribution stationnaire  $\pi(x)$  :

```

R> hist_general(Data = X, Breaks='Sturges', Law = "Beta")
R> Kern_general(Data = X, bw='Bcv', k = "gaussian", Law = "Beta")
    
```

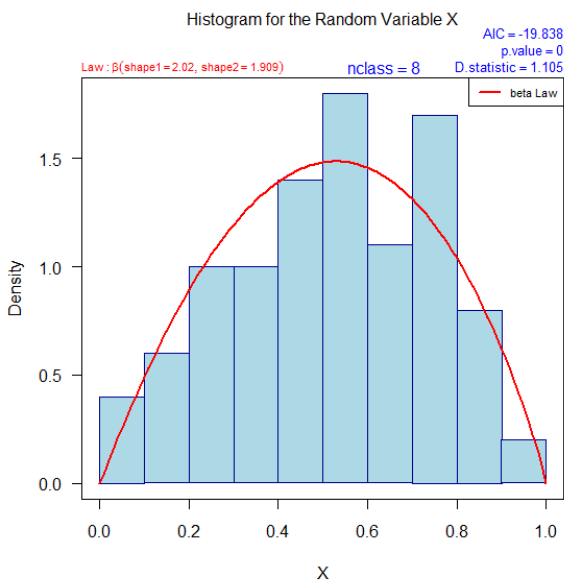


FIGURE 4.8 – Ajustement de la distribution stationnaire de processus de diffusion de Jacobi par la méthode d’histogramme.

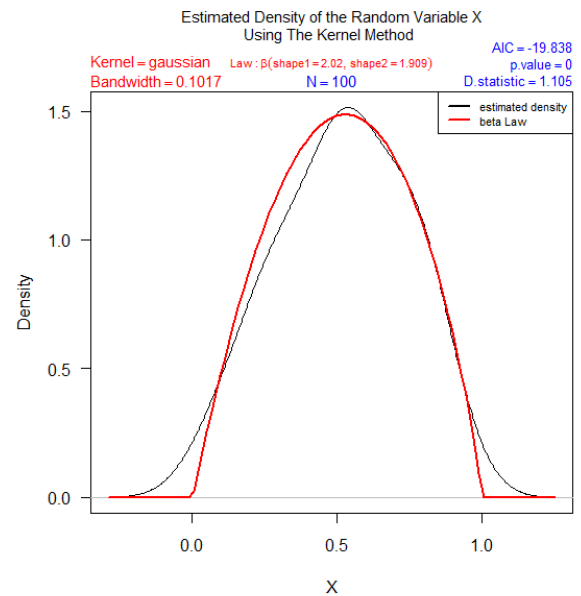


FIGURE 4.9 – Ajustement de la distribution stationnaire de processus de diffusion de Jacobi par la méthode du noyau.

Test de Kolmogorov-Smirnov :

```
R> ks.test(X, "pbeta", shape1 = 2, shape2 = 2 )
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  X
D = 0.0803, p-value = 0.5385
alternative hypothesis: two-sided
```

**Propriété 4.1 (Diffusion de Pearson)** Une diffusion de Pearson<sup>8</sup>  $\{X_t, t \geq 0\}$  [20], est une solution stationnaire à une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sqrt{2\sigma(aX_t^2 + bX_t + c)}dW_t \quad (4.22)$$

Avec  $r > 0$  c'est la vitesse de convergence vers l'équilibre, et  $\theta$  c'est la moyenne à l'équilibre,  $\sigma > 0$ . Les paramètres qui caractérisent la diffusion  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constants dans  $\mathbb{R}$ . Remarquons que ce modèle est stationnaire pour certaines conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a

- Si  $a = b = 0$  et  $c = 1 \Leftrightarrow$  Processus de diffusion linéaire de *type N*.
- Si  $a = c = 0$  et  $b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$  Processus de diffusion linéaire de *type G*.
- Si  $-a = b = \frac{1}{2}$  et  $c = 0$ , avec  $\theta \in ]0, 1[ \Leftrightarrow$  Processus de diffusion linéaire de *type B*.

## 4.5 Calculs de l'instant de premier passage

Les instants de premier passage "*IPP*" jouent un rôle très important en pratique. L'objet de cette étude est de déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\tau$  l'instant de premier passage d'un processus de diffusion  $X_t$ . Dans le chapitre 2 la technique des martingales et théorème d'arrêt qui nous a permis de déterminer la loi du temps d'atteinte du mouvement brownien à un point donné  $a$  (le mouvement brownien est un martingale). Dans cette section, on peut utiliser les techniques de la transformée de Laplace, pour déterminer la loi de probabilité de  $\tau$ .

Soit  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus de diffusion solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (4.23)$$

On admet que les coefficients  $\mu(x, t)$  et  $\sigma(x, t)$  remplissent les conditions d'existence et unicité de la solution  $X_t$  (Chapitre 3 section 3.3.2). Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  que l'on va supposer ouverte et bornée et soit  $a$  un élément de  $D$ . On définit la variable aléatoire  $\tau_a$  :

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \partial D, X_t = a\}$$

$\tau_a$  représentant le premier instant où le processus  $X_t$  frappe la frontière du domaine  $D$ .

---

8. La fonction `PDP` permet de simuler *Pearson Diffusions Process*. voir `help(PDP)` pour plus de détails (Package **Sim.DiffProc**).

### 4.5.1 IPP d'une diffusion en attraction $\mathcal{M}_{s \geq 1}^\sigma(V_t)$

Dans une première partie, pour le cas  $s = 1$ , nous allons effectuer une étude analytique, afin de déterminer explicitement la densité de la variable  $\tau_c^{(s=1)}$ , cette loi de probabilité permet d'approximer pour ce modèle, le taux des polluants qui dépasse la frontière  $\partial D(0, c)$ . Pour le cas de  $s > 1$ , la simulation est utilisée pour déterminer approximativement la densité de la variable  $\tau_c^{(s>1)}$  [2, 4, 6, 7].

#### Modèle $\mathcal{M}_{s=1}^\sigma(V_t)$

L'équation de ce modèle, pour le processus radial  $R_t$ , est de la forme :

$$\begin{cases} dR_t = \frac{\sigma^2(1-k)}{2R_t} dt + \sigma d\tilde{W}_t, \\ R_0 = a \end{cases} \quad a > 0, \quad t \in [0, T] \quad (4.24)$$

Avec  $k = \frac{2K}{\sigma^2}$  pour des raisons de calcul. On utilise l'équation (4.24) pour déterminer explicitement la loi de probabilité de  $\tau_c^{(1)}$ .

La probabilité de transition  $f_t(r|a)$  represents la densité de  $R_t$  avec  $R_0 = a$ , qui est donné par l'équation de Fokker-Planck rétrograde (4.3) :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(r|a) = (1-k) \frac{\sigma^2}{2a} \frac{\partial}{\partial a} f_t(r|a) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f_t(r|a) \quad (4.25)$$

avec la condition initiale  $f_0(r|a) = \delta(a-r)$ , où  $\delta(\cdot)$  fonction de *Dirac*.

La forme analytique de la densité  $f_t(r|a)$  peut être explicitement déterminée en inversant son transformant de Laplace  $f_\lambda(r; a)$ , qui est la solution de l'équation suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f_\lambda(r; a) + (1-k) \frac{\sigma^2}{2a} \frac{\partial}{\partial a} f_\lambda(r; a) - \lambda f_\lambda(r; a) = -\delta(a-r) \quad (4.26)$$

Puisque :

$$\mathcal{L} \left( \frac{\partial}{\partial t} f_t(r|a) \right) = \int_0^t e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} f_t(r|a) dt = -f_0(r; a) + \lambda f_\lambda(r; a)$$

Une technique standard [39, 5], la solution de l'équation (4.26) pouvoir être formellement exprimé comme :

$$f_\lambda(r; a) = \frac{-2g_{1,\lambda}(r)g_{2,\lambda}(a)}{\sigma^2 \left( g_{1,\lambda}(r)g'_{2,\lambda}(a) - g'_{1,\lambda}(r)g_{2,\lambda}(a) \right)}, \quad a > r \quad (4.27)$$

avec :

$$g_{1,\lambda}(a) = a^m I_m \left( \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\sigma} \right) \quad \text{et} \quad g_{2,\lambda}(a) = a^m H_m \left( \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\sigma} \right)$$

avec  $m = k - \frac{1}{2}$ ,  $I_m$  et  $H_m$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiée [39] de première et seconde ordre, définies par :

$$I_m(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i+m} \quad \text{et} \quad H_m(z) = \frac{\pi I_{-m}(z) - I_m(z)}{2 \sin(m\pi)}$$

On remplace  $g_{1,\lambda}$  et  $g_{2,\lambda}$  dans l'équation (4.27), on trouver :

$$f_\lambda(r;a) = \frac{2}{\sigma^2 \sqrt{a}} \left(\frac{a}{r}\right)^{m+\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} H_m \left(\frac{a\sqrt{2\lambda}}{\sigma}\right) I_m \left(\frac{r\sqrt{2\lambda}}{\sigma}\right), \quad a > r \quad (4.28)$$

l'inverse de l'équation (4.28), est donnée par :

$$f_t(r|a) = \left(\frac{1}{\sigma^2 t}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^k \sqrt{\frac{r^3}{a}} \exp\left(-\frac{a^2+r^2}{2\sigma^2 t}\right) I_m\left(\frac{ar}{\sigma^2 t}\right) \quad (4.29)$$

Maintenant nous définissons la variable aléatoire  $\tau_c^{(1)}$  par :

$$\tau_c^{(1)} = \inf\{t \geq 0 : R_t \leq c, \quad R_0 = a\}$$

On a,

$$f_{\tau_c^{(1)}}(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_c^{(1)}} | R_0 = a) = \frac{g_{2,\lambda}(a)}{g_{2,\lambda}(c)}, \quad a \geq c$$

Pour des petites valeurs de  $c$ , nous obtenons ([5, 6])

$$f_{\tau_c^{(1)}}(\lambda) = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2\lambda}}{\sigma}\right)^m}{2^{m-1} \Gamma(m)} H_m \left(\frac{a\sqrt{2\lambda}}{\sigma}\right) \quad (4.30)$$

en inversant (4.30), on trouve l'expression analytique de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\tau_c^{(1)}$ , donnée par :

$$f_{\tau_c^{(1)}}(\tau) = \frac{1}{2\Gamma(m)} \left(\frac{a^2}{2\sigma^2 \tau}\right)^{m-1} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2 \tau}\right) \quad (4.31)$$

Le changement de variable :

$$X = \frac{a^2}{\sigma^2 \tau}$$

donne

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

d'où, on a :

$$F_{\tau_c^{(1)}}(\tau) = 1 - F_{\Gamma(m, 1/2)} \left(\frac{a^2}{\sigma^2 \tau}\right)$$

avec  $m = k - \frac{1}{2} = \frac{2K}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ , et  $\Gamma(m, 1/2)$  est la loi gamma.

**Remarque 4.2** La condition  $2K > \sigma^2$ , doit être vérifiée (Chapitre 3 section 3.5.1)

### Simulation la variable $\tau_c^{(1)}$

La fonction `tho_M1` permet de simuler un échantillon de taille  $M = 50$  de la variable aléatoire  $\tau_c^{(1)}$ . Avec  $K = 2$  et  $\sigma = 1$ , le pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , et le  $c = v = 0.5$ .

```
R> tho_M1(N = 1000, M = 50, t0 = 0, T = 1, R0 = 1, v = 0.5, K = 2,
+         sigma = 1)
R> FPT
[1] 0.245 0.037 0.113 0.050 0.060 0.046 0.107 0.182 0.232 0.056 0.032
[12] 0.219 0.085 0.065 0.090 0.032 0.083 0.147 0.065 0.053 0.072 0.073
[23] 0.074 0.040 0.099 0.101 0.177 0.072 0.089 0.198 0.108 0.088 0.058
[34] 0.071 0.181 0.209 0.117 0.082 0.057 0.136 0.078 0.133 0.026 0.121
[45] 0.079 0.331 0.158 0.090 0.091 0.074
```

Les deux figures 4.10 et 4.11 donne une illustration de l'instant où le processus  $R_t$  frappe la frontière du domaine  $D$ . On défini le domaine  $D$  par un cercle de rayon  $c = v = 0.3$  (en deux dimensions), et par une sphère de rayon  $c = v = 0.3$  (en trois dimensions).

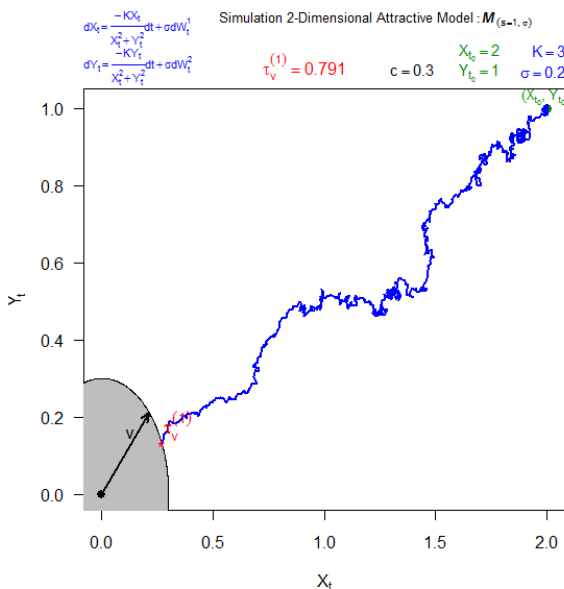


FIGURE 4.10 – L’instant de premier passage du modèle  $M_{s=1}^\sigma(V_t)$  en 2-D.

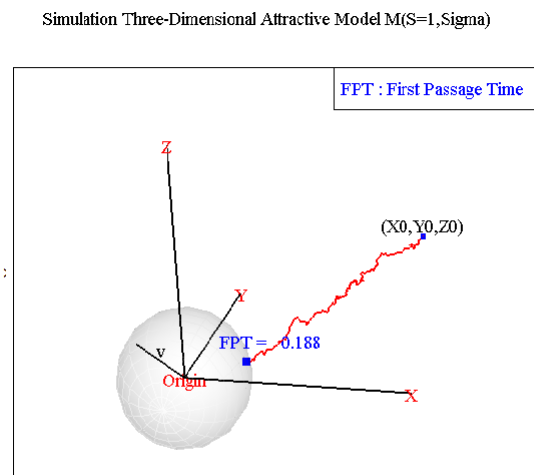


FIGURE 4.11 – L’instant de premier passage du modèle  $M_{s=1}^\sigma(V_t)$  en 3-D.

### Estimation de la distribution de $Y = \frac{a^2}{\sigma^2} \frac{1}{\tau_c^{(1)}}$

```
R> Y = 1/FPT
R> Ajdgamma(Y, starts = list(shape = 1, rate = 1), leve = 0.95)
Profiling...
$summary
```

```

Maximum likelihood estimation
Call:
mle(minuslogl = lik, start = starts)
Coefficients:
      Estimate Std. Error
shape 3.5297529 0.68206463
rate  0.2684711 0.05574823
-2 log L: 319.8036
$coef
      shape      rate
3.5297529 0.2684711
$AIC
[1] 323.8036
$vcov
      shape      rate
shape 0.46521216 0.035382963
rate  0.03538296 0.003107865
$confin
      2.5 %      97.5 %
shape 2.3624031 5.0474887
rate  0.1731289 0.3925789
R> hist_general(Data = Y, Breaks='Sturges', Law = "Gamma")
R> Kern_general(Data = Y, bw='SJ', k = "gaussian", Law = "Gamma")

```

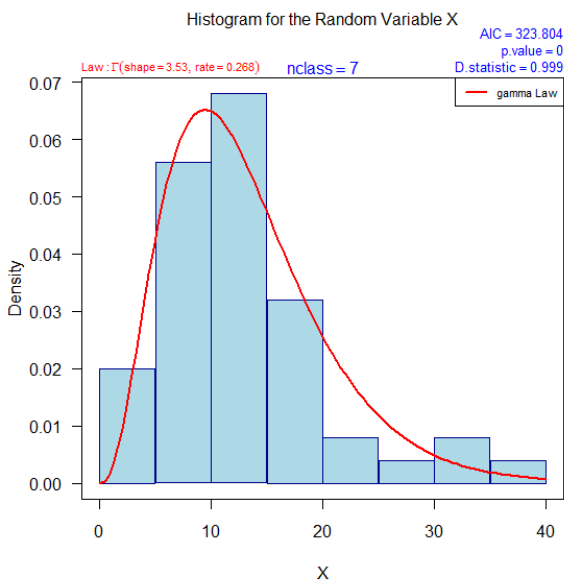


FIGURE 4.12 – Ajustement de la distribution de  $1/\tau_c^{s=1}$  par la méthode d’histogramme.

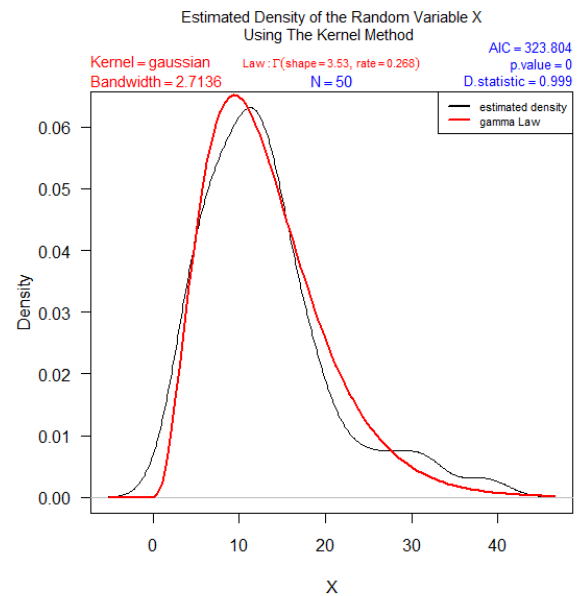


FIGURE 4.13 – Ajustement de la distribution de  $1/\tau_c^{s=1}$  par la méthode du noyau.

### Modèle $\mathcal{M}_{s>1}^\sigma(V_t)$

Le processus de diffusion radial, qui décrit ce modèle est donné par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dR_t = \left( \frac{\sigma^2 R_t^{s-1} - K}{R_t^s} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t, \\ R_0 = a \end{cases} \quad a > 0, \quad t \in [0, T] \quad (4.32)$$

L'estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\tau_c^{(s>1)}$  sera effectuée sur la base de la simulation d'un flux de trajectoires. Les observations simulées de la variable  $\tau_c^{(s>1)}$ , seront traitées statistiquement par deux méthodes, la méthode de l'histogramme et la méthode du noyau, pour estimer sa densité. Ce modèle est analytiquement difficile à résoudre.

### Simulation la variable $\tau_c^{(s>1)}$

La fonction `tho_M2` permet de simuler un échantillon de taille  $M = 50$  de la variable aléatoire  $\tau_c^{(s>1)}$ . Avec  $s = 2$ ,  $K = 3$  et  $\sigma = 1$ , le pas  $\Delta t = (T - t_0)/N$ , et le  $c = v = 0.5$ .

```
R> tho_M2(N = 1000, M = 50, t0 = 0, T = 1, R0 = 2, v = 0.5, K = 3, s = 2,
+        Sigma = 0.3)
```

```
R> FPTT
```

```
[1] 0.856 0.827 0.763 0.795 0.710 0.963 0.948 0.620 0.895 0.788 0.831
[12] 0.840 0.848 0.918 0.952 0.662 0.775 0.894 0.769 0.599 0.676 0.971
[23] 0.805 0.840 0.557 0.821 0.833 0.707 0.661 0.597 0.751 0.694 0.732
[34] 0.993 0.599 0.867 0.790 0.935 0.639 0.868 0.973 0.579 0.832 0.904
[45] 0.880 0.880 0.739 0.602 0.794 0.932
```

On fait l'ajustement de la variable  $Y = 1/\tau_c^{s=2}$  par les lois : *gamma*, *exponentiel*, *lognormale* et *weibull*. Le meilleur modèle est choisi par le critère *AIC* (minimum *AIC*).

```
R> Mod1 <- Ajdgamma(Y, starts = list(shape = 1, rate = 1), leve = 0.95)
```

```
$AIC
```

```
[1] 197.0462
```

```
R> Mod2 <- Ajdweibull(Y, starts = list(shape = 1, scale = 1), leve = 0.95)
```

```
$AIC
```

```
[1] 203.6206
```

```
R> Mod3 <- Ajdexp(Y, starts = list(lambda = 1), leve = 0.95)
```

```
$AIC
```

```
[1] 294.9443
```

```
R> Mod4 <- Ajdlognorm(Y, starts = list(meanlog = 1, sdlog = 1), leve = 0.95)
```

```
$AIC
```

```
[1] 199.8586
```

En remarque que la loi *gamma* ajuste mieux la distribution de la variable aléatoire  $Y = 1/\tau_c^{s=2}$ , selon le critère *AIC*.



### 4.5.2 IPP de deux diffusion en attraction $\mathcal{M}_{m>0}^\sigma(V_t^{(1)}) \leftrightarrow \mathcal{M}_0^\sigma(V_t^{(2)})$

Le processus de diffusion  $X_t$  qui décrit ce modèle est donné par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \left( \frac{\sigma^2 X_t^{m-1} - K}{X_t^m} \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t, \\ X_0 = a \end{cases} \quad a > 0, \quad t \in [0, T] \quad (4.33)$$

$K$  et  $m$  sont des constantes positives, et  $K > \sigma^2$ .

L'estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\tau_c(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$  sera effectuée sur la base de la simulation. Cette variable représente l'instant de la première rencontre entre les deux insectes, défini par :

$$\tau_c(V_t^{(1)}, V_t^{(2)}) = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq c\}$$

La fonction `tho_02diff` permet de simuler un échantillon de taille  $M = 50$  de la variable aléatoire  $\tau_c$ . Avec  $K = 4$ ,  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.2$ , le pas  $\Delta t = 0.01$ , et le  $c = v = 0.05$ .

```
R> tho_02diff(N = 1000, M = 50, t0 = 0, Dt = 0.001, T = 1, X1_0 = 1,
+           X2_0 = 1, Y1_0 = 0.5, Y2_0 = 0.5, v = 0.05, K = 4, m = 0.5,
+           Sigma = 0.2)
R> FPT
[1] 0.140 0.085 0.104 0.177 0.112 0.098 0.067 0.085 0.142 0.128 0.086
[12] 0.085 0.100 0.080 0.132 0.120 0.108 0.083 0.089 0.074 0.073 0.085
[23] 0.057 0.163 0.114 0.076 0.106 0.167 0.076 0.110 0.105 0.095 0.098
[34] 0.102 0.112 0.096 0.120 0.066 0.097 0.098 0.097 0.091 0.083 0.091
[45] 0.109 0.071 0.181 0.157 0.083 0.093
```

De même on fait l'ajustement de la variable  $Y = 1/\tau_c$  par les lois : *gamma*, *exponentiel*, *lognormale* et *weibull*. Le meilleur modèle est choisi par le critère *AIC* (minimum *AIC*).

```
R> Mod1 <- Ajdgamma(Y, starts = list(shape = 1, rate = 1), leve = 0.95)
$coef
  shape      rate
16.079041 1.544863
$AIC
[1] 234.4629
R> Mod2 <- Ajdweibull(Y, starts = list(shape = 1, scale = 1), leve = 0.95)
$coef
  shape      scale
4.403975 11.394287
$AIC
[1] 235.836
R> Mod3 <- Ajdexp(Y, starts = list(lambda = 1), leve = 0.95)
$coef
```

```
lambda
0.09607808
$AIC
[1] 329.5738
R> Mod4 <- Ajdlognorm(Y, starts = list(meanlog = 1, sdlog = 1), leve = 0.95)
$coef
  meanlog      sdlog
2.3111742 0.2560689
$AIC
[1] 236.0461
```

En remarque après cette simulation que la loi *gamma* ajuste mieux la distribution de la variable aléatoire  $Y = 1/\tau_c$ , mais si on répète les simulations on remarque que les lois *weibull* et *lognormale* ajuste aussi mieux la distribution de  $1/\tau_c$ .

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vues l'importance de décrire l'évolution dynamique de la densité de transition du processus considéré, cela repose sur la résolution d'une équation aux dérivée partielle, qui ce n'est pas toujours facile à déterminée sa solution, car les conditions aux limites sont généralement exprimées physiquement. La simulation des processus de diffusion est un objet très puissant pour simulée l'instant de premier passage "IPP" dans les modèles attractives. Les méthodes d'ajustements de la distribution de probabilité, histogramme et méthode de noyau son efficace.

## Conclusion générale

Il y a plus d'un demi siècle que la théorie des processus de diffusion a été introduite, sous certaines conditions, les équations différentielles stochastiques de type Itô, sont des processus de diffusion. Ce travail a été consacré à l'utilisation de l'aspect théorique des ÉDS, comme un outil mathématique, dans la modélisation de certains phénomènes réels, présentant un intérêt pratique, où on démontre, à travers ces exemples pratiques, l'importance et l'intérêt de la simulation. Après une analyses statistique des résultats obtenus par simulation, on peut les utilisés pour une aide à la décision. Généralement, il est à remarquer que une solution analytique exacte d'une ÉDS n'est pas toujours facile à obtenir, car les règles classiques de différentiabilité ne sont pas toujours applicables, à cause de la propriété de martingale que doit vérifier l'intégrale stochastique d'Itô. La formule d'Itô, permet de donne une transformation simplifiée de l'équation initiale, souvent utilisée pour la résolution des ÉDS. Dans ce travail nous avons fourni au lecteur un package **Sim.DiffProc**, muni d'une interface graphique sous langage R, de manière à ce qu'on puisse simulé des modèles de diffusion d'ÉDS et analysé statistiquement les résultats de simulation.

Cette étude nous à permet de tracer quelques lignes perspectives, tel que le problème de la détermination analytique de la fonction de densité de transition  $p(s, x; t, y)$  ou de la variable de sortie du processus solution, nécessite la résolution d'équations aux dérivées partielles, qui ne sont pas toujours faciles à résoudre, la méthode des différence finies est parfois utilisée pour déterminer une solution numérique approchée du problème, d'ou la nécessité de développement et l'utilisation des algorithmes générales pour déterminée les densités de transition pour n'importe quel processus de diffusion, ainsi des méthodes de validation, pour les résultats obtenus par les simulations.

## Annexe A : R Code

L'objectif de l'annexe A est de montrer l'efficacité et la puissance de la simulation sous langage R, et donner une idée sur la programmation mathématique, qui n'est pas très différente de Matlab.

### Code 1

```
R> n <- 10 ;T <- 1;
R> t <- seq (0,T, length =100)
R> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
R> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
R> W <- as.numeric (W)/ sqrt (n)
R> plot (t,W, type ="l",xlab=expression(W[t]),ylim=c(-1,1),las=1)
R> n <- 100
R> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
R> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
R> W <- as.numeric (W)/ sqrt (n)
R> lines (t,W, lty =2)
R> n <- 1000
R> S <- cumsum (2*( runif (n ) >0.5) -1)
R> W <- sapply (t, function (x) ifelse (n*x >0,S[n*x] ,0))
R> W <- as.numeric (W)/ sqrt (n)
R> lines (t,W, lty =3)
R> legend("topleft",c("n=10","n=100","n=1000"),lty=c(1,2,3),
+        lwd=1,cex=0.9)
```

### Code 2

```
R> phi <- function (i,t){
+   (sqrt(2)/ ((i + 0.5) *pi)) * sin ((i + 0.5) *pi*t) }
R> N <- 1000
R> t <- seq (0,1, length =N +1)
R> W <- numeric (N +1)
R> n <- 10
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) W[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
```

```

+           function(x) phi(x,t[i]))
R> plot (t,W, type ="l",ylim =c( -1 ,1),xlab=expression(W[t]),las =1)
R> n <- 100
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) W[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+           function(x) phi(x,t[i])))
R> lines(t,W, lty =2)
R> n <- 1000
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) W[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+           function (x) phi(x,t[i])))
R> lines(t,W, lty =3)
R> legend("topleft",c("n=10", "n=100", "n=1000"),lty=c(1,2,3),
+   lwd=1,cex=0.9)

```

**Code 3**

```

R> phi <- function (i,t,T){
+   (2* sqrt (2*T))/ ((2 *i +1) *pi) * sin (((2 *i +1) *pi*t)/(2*T))
+   }
R> s <- 0.1; n <- 100; T <- 1;
R> Z <- rnorm (n)
R> Delta <- seq(0, 0.01, length =50)
R> W <- sum (Z* sapply (1:n, function (x) phi (x ,s ,T )))
R> for (i in Delta ){W_h <- sum (Z* sapply (1:n,
+   function (x) phi (x ,s+i,T )))}
R> lim_W <- abs(W_h - W)/ Delta
R> plot(Delta , lim_W , type ="l",xlab = expression ( Delta *t),las=1,
+   ylab = expression ( abs (W (s+ Delta *t)- W (s)) / Delta *t))
R> max(lim_W ,na.rm=T)
[1] Inf

```

**Code 4**

```

R> phi <- function (i,t,T){
+   (2* sqrt (2*T))/ ((2 *i +1) *pi) * sin (((2 *i +1) *pi*t)/(2*T))
+   }
R> T <- 100; N <- 1000;
R> t <- seq (0,T, length =N +1)
R> W <- numeric (N +1)
R> n <- 100
R> Z <- rnorm (n)
R> for (i in 2:( N +1)) W[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+   function (x) phi (x,t[i],T )))

```

```
R> plot (t,W, type ="l",ylab=expression(W[t]))
R> lines(t,W/t,col="red")
R> legend("topleft",c(expression(W[t]),expression(lim(frac(w[t],t),
+      t%->%+infinity) %~%0)),lty=c(1),col=c("black","red"),
+      lwd=1,cex=0.9)
```

**Code 5**

```
R> phi <- function (i,t){
+ (sqrt(2)/ (pi * i)) * sin (pi*i*t) }
R> N <- 1000
R> t <- seq (0,1, length =N +1)
R> X <- numeric (N +1)
R> n <- 10
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) X[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+      function(x) phi(x,t[i])))
R> plot (t,X, type ="l",ylim=c(-1,1), las =1)
R> n <- 100
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) X[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+      function(x) phi(x,t[i])))
R> lines(t,X, lty =2)
R> n <- 1000
R> Z <- rnorm(n)
R> for (i in 2:( N +1)) X[i] <- sum (Z* sapply (1:n,
+      function (x) phi(x,t[i])))
R> lines(t,X, lty =3)
R> legend("topleft",c("n=10","n=100","n=1000"),lty=c(1,2,3),
+      lwd=1,cex=0.9)
```

**Code 6**

```
R> N = 10000; t0 = 0; Dt = 0.0001; x0 = 6; a = 2; D = 1;
R> time <- c(t0 ,t0+ cumsum(rep(Dt,N)))
R> u = runif(N,0,1)
R> for (i in 1:length(u)){
+   if ( u[i] >= 0.5)
+     u[i] = +1
+   else u[i] = -1   }
R> w = cumsum(c(0,u))*sqrt(Dt)
R>
R> Ito.sum <- c(0,sapply(1:(N+1),function(x){
```

```

+       exp(-a*(time[x+1]-time[x]))*(w[x+1]-w[x]))))
R> X <- sapply(1:(N+1),function(x){
+       x0*exp(-a*time[x])+sqrt(2*D)*sum(Ito.sum[1:x])})
R> plot(time,X,type="l",las=1,xlab="time",ylab=expression(X[t]))
R> mtext("Langevin Process",line=2.5,cex=1.2)
R> mtext(bquote(dX[t]==-(a)*X[t]*dt+sqrt(. (2*D))*dW[t]),
+ line=0.25,cex=1.2,col="red")
R> mtext(bquote(x[.(0)]==(x0)),line=0.1,cex=0.9,adj=1,col="red")
R> mtext(bquote(t[0]==.(t0)),line=0.9,cex=0.9,adj=1,col="red")
R> mtext(bquote(Delta*t==(delta.time)),line=0.4,cex=1,adj=0,col="red")
R> data.frame(time,X)

```

### Code 7

```

R> N = 10000; t0 = 0; Dt = 0.0001; a = 2; D = 1;
R> x0 = 5; y0 = 6;
R> time <- c(t0 ,t0+ cumsum(rep(Dt,N)))
R> wx = cumsum(rnorm(N+1,mean=0,sd=sqrt(Dt)))
R> wy = cumsum(rnorm(N+1,mean=0,sd=sqrt(Dt)))
R> Ito.sumx <- c(0,sapply(1:(N+1),function(x){
+       exp(-a*(time[x+1]-time[x]))*(wx[x+1]-wx[x]))})
R> Ito.sumy <- c(0,sapply(1:(N+1),function(x){
+       exp(-a*(time[x+1]-time[x]))*(wy[x+1]-wy[x]))})
R> X <- sapply(1:(N+1),function(x){
+       x0*exp(-a*time[x])+sqrt(2*D)*sum(Ito.sumx[1:x])})
R> Y <- sapply(1:(N+1),function(x){
+       y0*exp(-a*time[x])+sqrt(2*D)*sum(Ito.sumy[1:x])})
R> plot(X,Y,type="l",las=1,xlab=expression(X[t]),ylab=expression(Y[t]))
R> mtext("Langevin Process In 2D",line=2.5,cex=1.2)
R> data.frame(X,Y)

```

### Code 8

```

R> N = 1000; t0 = 0; Dt = 0.001; theta1 = 0.1; theta2 = 0.2;theta3=0.05;
R> x0 = y0 = 1;
R> Error1 <- (2*theta1 > (theta3)^2)
R> time <- c(t0 ,t0+ cumsum(rep(Dt,N)))
R> w = cumsum(rnorm(N+1,mean=0,sd=sqrt(Dt)))
R> Dw <- diff(w)
R> X <- Y <- numeric()
R> X[1] = Y[1] <- x0
R> for (i in 2:(N+1)){
+   X[i] = X[i-1] + ((theta1 - theta2 * X[i-1])-0.25*(theta3)^2) * Dt +

```

```

+       theta3 * sqrt(X[i-1])*Dw[i-1] +0.25 * theta3 *(Dw[i-1])^2
+   Y[i] = Y[i-1] + ((theta1 - theta2 * (Y[i-1])^2)-0.25*(theta3)^2)*Dt +
+       theta3*Y[i-1]*Dw[i-1]+0.25*theta3*(Dw[i-1])^2
+ }
R> plot(time,X,type="l",col="blue")
R> lines(time,Y,type="l",col="red")
R> mtext(bquote(dX[t]==(. (theta1)-. (theta2)*X[t])*dt+. (theta3)*sqrt(X[t])*
+   dW[t]),line=2.5,cex=1,adj=0)
R> mtext(bquote(dY[t]==frac(1,2*Y[t])*bgroup("(",(. (theta1)-. (theta2)*
+   Y[t]^2)-frac(1,4)*. (theta3)^2 ,")" ) *dt+frac(1,2)*. (theta3)*dW[t]),
+   line=0.1,cex=1,adj=0)
R> legend("topright",border="gray",c(expression(X[t]),expression(Y[t])),
+   lty=c(1,1),col=c("blue","red"),lwd=2)
R> Error2 <- sum(abs(X-Y))/N
R> Error1
[1] TRUE
R> Error2
[1] 0.0009837406

```



## Annexe B : Packages **Sim.DiffProc** & **Sim.DiffProcGUI**

L'objectif de l'annexe B est de donner quelques règles pour la création des packages sous langage R. Et aussi une présentation des deux packages **Sim.DiffProc** et **Sim.DiffProcGUI**.

### Création d'un package

Pour créer un package sous langage R [32], il vous faut installer sur votre ordinateur un certain nombre de logiciels, tous sont disponibles gratuitement sur le web, puis les configurer.

- **Perl** : est un langage optimisée pour l'extraction d'informations de fichiers textes et la génération de rapports.

<http://www.activestate.com/Products/ActivePerl/Download.html>

- **Rtools** : Les Rtools sont des outils Unix qui fournissent une couche d'émulation pour le système Windows. Ils rendent possible l'exécution de programmes Unix sous Windows.

<http://www.murdoch-sutherland.com/Rtools/tools.zip>

- **MinGW** : permet de compiler du code C, C++ et FORTRAN. Si vous n'incluez pas de langage autre dans votre code, vous n'avez pas besoin de MinGW.

Sinon : <http://prdownloads.sourceforge.net/mingw/MinGW-5.0.0.exe>

- **HTML Help Workshop** : Ce logiciel permet de produire des aides au format .chm, le format d'aide propriétaire de Windows. <http://msdn.microsoft.com/library/en-us/htmlhelp/html/hwmicrosofthtmlhelpdownloads.asp>

- **Un compilateur L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** : permet de produire une aide au format pdf. Plusieurs compilateurs sont disponibles, MiKTeX est assez stable. <http://www.miktex.org/>

- **FTP** : quand vous aurez terminé votre package, il vous faudra le poster sur le site du CRAN. Cela se fait grâce à un logiciel gérant le FTP (File Transfert Protocol). Là encore, plusieurs choix sont possibles. <http://filezilla-project.org/>

La création d'un package se fait via une fenêtre de commande DOS ou une fenêtre terminal sous Linux. Tous les nouveaux programmes qui viennent d'être installés doivent être accessibles depuis cette fenêtre. Pour cela, il faut préciser l'endroit où ils ont été installés sur votre ordinateur. Cela se fait en modifiant la variable **PATH**.

Le plus simple est de créer un fichier `Rpath.bat` contenant la définition de la variable **PATH**. À noter que les espaces ne sont pas acceptés dans les noms de fichier. Sous Windows, Programme File doit donc être abrégé en `PROGRA~1`. La séparation des différents chemins peut se faire grâce à (`;`). Pour plus de lisibilité, il est possible de définir le **PATH** sur plusieurs lignes :

```
SET PATH =C:\ Rtools \bin
SET PATH =% PATH %;C:\ Perl \bin
SET PATH =% PATH %;C:\ Rtools \ MinGW \bin
SET PATH =% PATH %;C:\ PROGRA~1\R\R -2.13.1\ bin
SET PATH =% PATH %;C:\ PROGRA~1\R\R -2.13.1\ include
SET PATH =% PATH %;C:\ PROGRA~1\ MIKTEX~ 2.9\ miktex \bin
SET PATH =% PATH %;C:\ PROGRA~1\ HTMLHE~1
SET PATH =% PATH %;C:\ WINDOWS
SET PATH =% PATH %;C:\ WINDOWS \ system32
```

Si vous sauvegardez `Rpath.bat` dans le répertoire racine `C:/`, il vous suffit ensuite de taper `C:/Rpath` dans la fenêtre système que vous venez d'ouvrir et votre variable `PATH` est modifiée comme il convient. Il est également possible de modifier la variable `PATH` en allant explorer les variables d'environnement. Mais ces modifications sont permanentes jusqu'à ce qu'elles soient rectifiées. Cela veut dire qu'à chaque fois que vous allumerez votre ordinateur, le `PATH` sera modifiée même si vous n'avez pas de package à compiler ce jour-là. Votre ordinateur sera un peu moins rapide. Aussi, il est plus intéressant de créer un fichier `Rpath.bat` que l'on exécutera les jours où c'est nécessaire.

Un package est un ensemble de plusieurs fichiers et répertoires, tous réunis dans un répertoire racine. Le répertoire racine a pour nom le futur nom du package (par exemple `Monpackage`). Il contient un fichier nommé `DESCRIPTION`, un fichier nommé `NAMESPACE`, plus les répertoires `/R/`, `/man/`, `/data/` et `/tests/`.

**DESCRIPTION** : contient une description du package.

**NAMESPACE** : sert à définir la visibilité de nos fonctions et des fonctions des autres packages, via `import` et `export`.

**/R/** : contient le code des programmes.

**/man/** : contient les fichiers d'aide.

**/data/** : contient les jeux de données.

**/tests/** : contient les fichiers permettant de tester notre programme (tests selon la R Core Team<sup>1</sup>)

`package.skeleton` est une fonction qui crée pour vous l'arborescence des fichiers (répertoire racine, répertoires `/R/`, `/man/` et `/data/`). Elle crée aussi les fichiers d'aide (dans `/man/`), les fichiers codes (dans `/R/`), éventuellement les données (dans `/data/`), le fichier `DESCRIPTION` et éventuellement le fichier `NAMESPACE`. L'idée est d'utiliser `package.skeleton` pour la création initiale de votre package, puis de modifier ensuite à la main les fichiers qu'il a créés.

```
R> help(package.skeleton)
```

Lorsque les fichiers sources (programme, aides et données) sont prêts, il reste à les vérifier, à construire le package et éventuellement à construire des documentations au format pdf. Ces trois étapes se font dans une fenêtre de commandes DOS sur Windows ou une fenêtre terminal sur Linux. Pour plus de détails [32, 33].

---

1. La R Core Team a mis au point un système de gestion de tests automatiques très performant.

## Présentation du package

Le package **Sim.DiffProc**<sup>2</sup> [9] sous la version de Windows de langage R à été développée pour simuler et traiter statistiquement des équations différentielles stochastiques d'une façon générale à l'exception des processus de diffusion [8]. Le langage R n'incorpore pas une interface graphique GUI<sup>3</sup>, mais il inclut des outils pour construire des interfaces graphiques. Basé sur le package **tcltk**<sup>4</sup> [13, 14, 41], qui fournit la possibilité de créer une interface à la boîte à outils de Tcl/Tk. Le package **Sim.DiffProcGUI**<sup>5</sup> [10] fournit une interface graphique pour les fonctions qui sont dans le package **Sim.DiffProc**.

## Installation du package

L'installation<sup>6</sup> du package **Sim.DiffProcGUI** sous R est simple, il suffira de écrire dans R Console la commande suivante :

```
R> install.packages("Sim.DiffProcGUI")
```

Pour le chargement de package après l'installation et pour des informations sur le package, est décrit par les commandes suivantes :

```
R> library("Sim.DiffProcGUI")
Le chargement a nécessité le package : Sim.DiffProc
Le chargement a nécessité le package : tcltk
Chargement de Tcl/Tk... terminé
Le chargement a nécessité le package : tcltk2
Le chargement a nécessité le package : stats4
Le chargement a nécessité le package : rgl
Le chargement a nécessité le package : xlsx
Le chargement a nécessité le package : xlsxjars
Le chargement a nécessité le package : rJava
Sim.DiffProcGUI version 2.0-Sat Feb 26 15:58:10 2011.
BOUKHETALA Kamal <kboukhetala@usthb.dz>.
GUIDOUM Arsalane <starsalane@gmail.com>.
University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB)
Faculty of Mathematics
Department of Probabilities and Statistics.
Copyright (C) 2011 Algeria.
User Interface :: Sim.DiffGUI().
R> library(help="Sim.DiffProc")
R> library(help="Sim.DiffProcGUI")
```

---

2. **Sim.DiffProc** : Simulation of Diffusion Processes.

3. GUI : Graphical User Interface.

4. **tcltk** : Tool Command Language.

5. **Sim.DiffProcGUI** : Graphical User Interface for Simulation of Diffusion Processes.

6. Il faut être connecté à Internet pour effectuer ces opérations, où téléchargé manuellement les deux packages [9, 10].

Information sur le package **Sim.DiffProc** :

```
Package:          Sim.DiffProc
Type:            Package
Title:          Simulation of Diffusion Processes
Version:        2.0
Date:           2011-02-09
Author:         BOUKHETALA Kamal <kboukhetala@usthb.dz>,
                GUIDOUM Arsalane <starsalane@gmail.com>
Maintainer:     BOUKHETALA Kamal <kboukhetala@usthb.dz>
Depends:        R (>= 2.11.0), tcltk, tcltk2, stats4, rgl, xlsx
License:        GPL (>= 2)
URL:           http://www.r-project.org
Repository:     CRAN
LazyLoad:       yes
Packaged:       2011-02-12 17:35:17 UTC;
Date/Publication: 2011-02-13 16:11:13
Built:          R 2.13.1; ; 2011-09-29 07:46:05 UTC; windows
```

Information sur le package **Sim.DiffProcGUI** :

```
Package:          Sim.DiffProcGUI
Type:            Package
Title:          Graphical User Interface for Simulation of
                Diffusion Processes
Version:        2.0
Date:           2011-02-26
Author:         BOUKHETALA Kamal <kboukhetala@usthb.dz>,
                GUIDOUM Arsalane <starsalane@gmail.com>
Maintainer:     BOUKHETALA Kamal <kboukhetala@usthb.dz>
Depends:        Sim.DiffProc (>= 2.0)
License:        GPL (>= 2)
LazyLoad:       yes
Packaged:       2011-02-26 17:46:40 UTC;
Repository:     CRAN
Date/Publication: 2011-02-27 16:28:40
Built:          R 2.13.1; ; 2011-09-29 07:48:20 UTC; windows
```

Pour quelques démonstrations graphique de package **Sim.DiffProc**, est décrit par la commande suivante :

```
R> demo(Sim.DiffProc)
```

Les objectifs de conception de l'interface graphique est : renforcer le package **Sim.DiffProc**, pour une utilisation facile, une interface simple et familière de menu/dialogue-boîte. Le menu

principale est : *File, Edit, Brownian Motion, Stochastic Integral, Stochastic Models, Parametric Estimation, Numerical Solution of SDE, Statistical Analysis, Help " ?"*. Après chargement du package, la fenêtre GUI devrait apparaître plus ou moins comme dans la figure XIV.

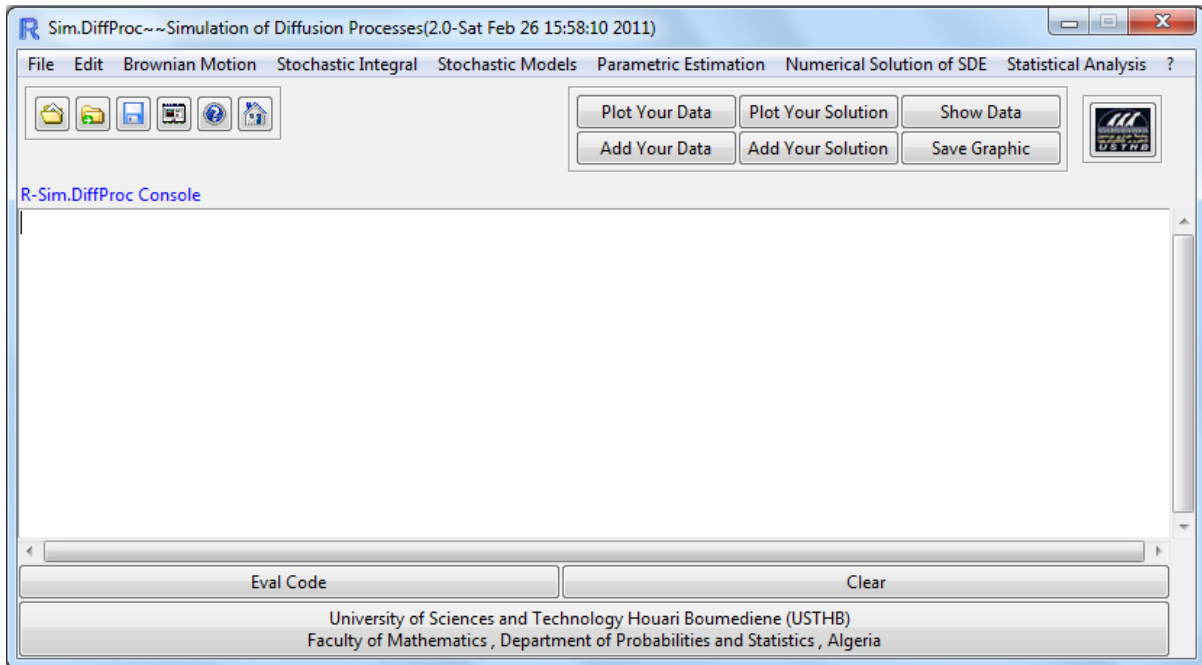


FIGURE XIV – Graphical User Interface for **Sim.DiffProc** package at start-up.

Cette interface graphique d'écran de GUI à été crée sous Windows Seven. En cas de l'utilisation une autre version Windows, ou une autre plate-forme, l'image d'écran de GUI peut être différent<sup>7</sup>. Toutes les fonctions du menu mènent aux zones de dialogue, c'est-à-dire interactif.

Le menu complet (tree) pour le package **Sim.DiffProcGUI** (version 2.0) est montré ci-dessous. toutes les fonctions de menu mènent aux zones de dialogue c'est-à-dire interactif.

```
File |- Open file
      |- Change working directory
      |- Import data from...
      |- Save
      |- Save graphic
      |- Quit
          ||- Quit Sim.DiffProcGUI
          ||- Quit R
Edit |- Eval code      Ctrl+R
```

7. Nous employent la version R sous Windows, cependant, le langage R est disponible sur d'autres plates-formes, des ordinateurs de Macintosh et des systèmes d'Unix/Linux. L'utilisation de R et le package **Sim.DiffProcGUI** sur ces autres systèmes est très semblable à leur utilisation sous Windows.

```

|- Clear          Ctrl+T
|- Undo           Ctrl+Z
|- Redo           Ctrl+W
|- Cut            Ctrl+X
|- Copy           Ctrl+C
|- Paste          Ctrl+V
|- Select All    Ctrl+A
|- Delete        Ctrl+D

Brownian Motion| - Creating Brownian Motion
                |     ||- By the normal distribution
                |     ||- By a random walk
|- Creating flow for Brownian Motion
                |     ||- By the normal distribution
                |     ||- By a random walk
|- Creating Arithmetic Brownian Motion
                |     ||- Arithmetic brownian
                |     ||- Flow of arithmetic brownian
|- Creating Geometric Brownian Motion
                |     ||- Geometric brownian
                |     ||- Flow of geometric brownian
|- Creating Brownian Bridge
                |     ||- Brownian bridge
                |     ||- Flow of brownian bridge
|-Brownian Motion Property
                |     ||- Empirical covariance for brownian motion
                |     ||- Limite for brownian motion
                |     ||- Invariance by reversal of time
                |     ||- Invariance by scaling
|- Brownian Trajectory in 2D
                |     ||- By the normal distribution
                |     ||- By a random walk
|- Brownian Trajectory in 3D
                |     ||- By the normal distribution
                |     ||- By a random walk

Stochastic Integral|- Stratonovitch Integral - Integral(W(s) o dW(s),0,t)
                   |     ||- Integral(alpha o dW(s),0,t)
                   |     ||- Integral(W(s)^n o dW(s),0,t)
|- Ito Integral - Integral(W(s)dW(s),0,t)
                   |     ||- Integral(alpha*dW(s),0,t)
                   |     ||- Integral(W(s)^n*dW(s),0,t)
|- Ito Integral vs Stratonovitch Integral
                   |     ||-Integral(W(s)dW(s),0,t) vs Integral(W(s) o dW(s),0,t)
                   |     ||- Integral(s*dW(s),0,t) vs Integral(s o dW(s),0,t)

```

```

                                ||- Integral(W(s)^n*dW(s),0,t)vsIntegral(W(s)^n o dW(s),0,t)
Stochastic Models |- Attractive Model
                    |   ||- Attractive Model for One-System SDE
                    |   ||- Attractive Model for Two-System SDE
                    |       |||- Two-Dimensional Attractive Model
                    |       |||- Three-Dimensional Attractive Model
                    |       |||- Simulation The First Passage Time
|- Bessel Process
|- Constant Elasticity of Variance Model
|- Cox-Ingersoll-Ross Model
    |   ||- CIR Model
    |   ||- The Modified CIR and hyperbolic Process
|- Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders Model
|- Diffusion Bridge Model
|- Double-Well Potential Model
|- Exponential Martingales Process
|- Gaussian Diffusion Model
    |   ||- Hull-White/Vasicek (HWV)
    |       |||- Hull-White/Vasicek Model
    |       |||- Flow of Hull-White/Vasicek Model
    |   ||- Ornstein-Uhlenbeck Process
    |       |||- Ornstein-Uhlenbeck Process
    |       |||- Flow of Ornstein-Uhlenbeck Process
    |       |||- Radial Ornstein-Uhlenbeck Process
|- Hyperbolic Process
    |   ||- Hyperbolic Process
    |   ||- General Hyperbolic Diffusion
|- Inverse of Feller Square Root Model
|- Jacobi Diffusion Process
|- Pearson Diffusions Process
|- Stochastic Process
    |   ||- Stochastic Process The Gamma Distribution
    |   ||- Stochastic Process The Student Distribution
    |   ||- Random Walk
    |   ||- White Noise Gaussian
Parametric Estimation |- Parametric Estimation of Arithmetic Brownian Motion
                    |- Parametric Estimation of Model Black-Scholes
                    |- Parametric Estimation of Hull-White/Vasicek Model
                    |- Parametric Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Model
                        ||- Exact likelihood Inference
                        ||- Explicit Estimators
Numerical Solution of SDE |- One-Dimensional SDE
                            |   ||- Euler Scheme

```

```

|           ||- Predictor-Corrector Method
|           ||- Milstein Scheme
|           ||| - Milstein Scheme
|           ||| - Milstein Second Scheme
|           ||- Strong Ito-Taylor Scheme
|           ||- Heun Scheme
|           ||- Runge-Kutta Scheme
|- Two-Dimensional SDE
|           ||- Euler Scheme
|           ||- Predictor-Corrector Method
|           ||- Milstein Scheme
|           ||| - Milstein Scheme
|           ||| - Milstein Second Scheme
|           ||- Strong Ito-Taylor Scheme
|           ||- Heun Scheme
|           ||- Runge-Kutta Scheme
Statistical Analysis |- Simulation M-Samples of Random Variable
|- Simulation The First Passage Time FPT
|- Ploting
|   ||- Histograms
|   ||- Kernel Density
|   ||- Empirical Distribution
|- Adjustment of Distributions
|   ||- Beta Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Chi-Squared Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Exponential Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Fisher Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Gamma Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Log Normal Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters
|       ||| - Kolmogorov-Smirnov Tests
|   ||- Normal Distribution
|       ||| - Estimate of The Parameters

```



```

|                                     |||- Kolmogorov-Smirnov Tests
|           ||- Student Distribution
|                                     |||- Estimate of The Parameters
|                                     |||- Kolmogorov-Smirnov Tests
|           ||- Weibull Distribution
|                                     |||- Estimate of The Parameters
|                                     |||- Kolmogorov-Smirnov Tests
|- Density Estimation
|       ||- by Histograms Methods
|       ||- by Kernel Methods
|- Distribution Estimation

Help "?" |- Demos
|       ||- Attractive Model for One-System SDE (2D)
|       ||- Attractive Model for One-System SDE (3D)
|       ||- Attractive Model for Two-System SDE (2D)
|       ||- Attractive Model for Two-System SDE (3D)
|       ||- Brownian Motion in 2D plane
|       ||- Flow of the Diffusion Processes
|       ||- Numerical Simulation of One-Dimensional SDE
|       ||- Numerical Simulation of Two-Dimensional SDE
|       ||- Stochastic Processes (Models)
|- Teachware
|- Start Sim.DiffProc help (.HTML)
|- Start Sim.DiffProc help (.PDF)
|- Start R help system
|- About Sim.DiffProc

```

L'interface de **Sim.DiffProc** inclut quelques éléments en plus des menus et des dialogues, les expositions externes qui sont montrés par la figure XIV, on a :

*Plot your data* : c'est pour tracer votre donnée en fonction du temps (time series).

*Add your data* : c'est pour ajouter votre donnée dans un graphe (par exemple pour la comparer).

*Plot your solution* : c'est pour tracer la solution d'une ÉDS si il existe (par exemple la solution de Black-Scholes).

*Add your solution* : ajouter la solution dans un graphe (par exemple simulée un flux de modèle de Black-Scholes et ajouter la solution trouvée).

*Show data* : les données importées sont sauvegardées automatiquement dans cette fenêtre.

*Save graphic* : sauvegarder les graphes sous différents formats (.pdf, .png, .jpeg, ...)

# Bibliographie

- [1] Allen E (2007). *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 13 : 978-1-4020-5953-7.
- [2] Boukhetala K (1994). Simulation Study of a Dispersion About an Attractive Center. *In proceeding of 11th Symposium Computational Statistics.*, pp. 128–130, Edited by R. Dutter and W. Grossman, Wien, Austria.
- [3] Boukhetala K (1995). Identification and simulation of a communication system. *Maghreb Mathematical Review*, **2**, pp. 55–79.
- [4] Boukhetala K (1996). *Computer Methods and Water Resources, Modelling and Simulation of a Dispersion Pollutant with Attractive Centre*, volume 3, pp. 245–252, Computational mechanics publications edition. Boston, USA.
- [5] Boukhetala K (1998). *Application des Processus de Diffusion, Echantillonnage Optimal*. Ph.D. thesis, University of Science and Technology Houari Boumediene, BP 32 El-Alia, U.S.T.H.B, Algeria.
- [6] Boukhetala K (1998). Estimation of the first passage time distribution for a simulated diffusion process. *Maghreb Mathematical Review*, **7**, pp. 1–25.
- [7] Boukhetala K (1998). Kernel density of the exit time in a simulated diffusion. *The Annals of The Engineer Maghrebian*, **12**, pp. 587–589.
- [8] Boukhetala K, Guidoum A (2011). Sim.DiffProc : A Package for Simulation of Diffusion Processes in R. *Le Hal revue du centre national de la recherche scientifique (France)*. Preprint submitted to *Journal of Statistical Software (JSS)*, 25 May 2011. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00629841/fr/>.
- [9] Boukhetala K, Guidoum A (2011). *Sim.DiffProc : Simulation of Diffusion Processes*. R package version 2.0. <http://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProc>.
- [10] Boukhetala K, Guidoum A (2011). *Sim.DiffProcGUI : Graphical User Interface for Simulation of Diffusion Processes*. R package version 2.0. <http://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProcGUI>.
- [11] Brown R (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, **4**, pp. 161–173. <http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/dws/Brownian.pdf>.

- [12] Brian J F (1992). Brownian movement in Clarkia pollen : a reprise of the first observations. *The Microscope*, **40(4)**, pp. 235–241.
- [13] Dalgaard P (2001). A Primer on the R-Tcl/Tk Package. *R News*, **1(3)**, pp. 27–31.
- [14] Dalgaard P (2002). Changes to the R-Tcl/Tk Package. *R News*, **2(3)**, pp. 25–71.
- [15] Deheuvels P (2006). Karhunen-Loève expansions of mean-centered Wiener processes. *High Dimensional Probability*, **51**, pp. 62–76.
- [16] Deheuvels P, G. Peccati G, Yor M (2006). On quadratic functionals of the brownian sheet and related processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **116**, pp. 493–538.
- [17] Doob J L (1942). What is a stochastic process ?. *The American Mathematical Monthly*, **49**, pp. 648–653.
- [18] Douglas H, Peter P (2006). *Stochastic Differential Equations in Science and Engineering*. World Scientific Publishing. ISBN 981-256-296-6.
- [19] Flandrin P, Borgant P, Amblard P O (2003). From Stationarity to Self-similarity, and Back : Variations on the Lamperti Transformation. in *Processes with Long-Range Correlations*, pp. 88–117. Springer-Verlag
- [20] Forman J L, Sørensen M (2007). The Pearson Diffusions : A Class of Statistically Tractable Diffusion Processes. *SSRN : Social Science Research Network*, <http://ssrn.com/abstract=1150110>.
- [21] Franck J (2009). *Modèles aléatoires et physique probabiliste*. Springer-Verlag, New York. ISBN 13 : 978-2-287-99307-7.
- [22] Greiner A, Strittmatter W, Honerkamp J (1988). Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. *The Journal of Statistical Physics*, **51(1/2)**.
- [23] Haderler K, de Mottoni P, Schumacher K (1980). Dynamic Models for Animal Orientation. *The Journal of Mathematical Biology*, **10**, pp. 307–332.
- [24] Heemink A (1990). Stochastic Modelling of Dispersion in Shallow Water. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **4**, pp. 161–174.
- [25] Heinz S (2011). *Mathematical Modeling*. Stochastic Evolution, pp. 295–334, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-20310-7.
- [26] Helland S (1983). Diffusion models for the dispersal of insects near an attractive center. *The Journal of Mathematical Biology*, **18**, pp. 103–122.
- [27] Itô K (1944). Stochastic integral. Tokyo, *Proc. Jap. Acad*, **20**, pp. 519–529.
- [28] Kolmogorov A N (1936). *Math. Sbornik. N.S.*, **1**, pp. 607–610.
- [29] Kloeden P, Platen E (1989). A Survey of Numerical Methods for Stochastic Differential Equations. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **3**, pp. 155–178.
- [30] Lamperti J (1962). Semi-stable stochastic processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, **104**, pp. 62–78. <http://www.jstor.org/stable/1993933>.
- [31] Peter E, Eckhard P (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-54062-8.

- 
- [32] R Development Core Team (2011). *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, <http://www.R-project.org/>.
- [33] R Development Core Team (2011). *Writing R extensions*. version 2.13.1 (2011-07-08), ISBN 3-900051-11-9.
- [34] Racicot F É, Théoret R (2006). *Finance Computationnelle et Gestion des Risques*. Presses de l'Université du Québec. ISBN 2-7605-1447-1.
- [35] Risken H (2001). *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solutions and Applications*. 2nd edition, Springer Series in Synergetics. ISBN 9783540615309.
- [36] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, Teugels J (1998). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.
- [37] Saito Y, Mitsui T (1993). Simulation of Stochastic Differential Equations. *The Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **3**, pp. 419–432.
- [38] Silverman B W (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London.
- [39] Soong T T (1973). *Random differential equations in science and engineering*. Academic Press, New York. LC NUMBER : QA274.23 .S58.
- [40] Stefano M (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-75838-1.
- [41] Welch B (2000). *Practical Programming in Tcl and Tk*. 3rd edition. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA. ISBN 0-13-022028-0.