Contrôle impulsionnel des processus de Markov

Maurice Robin

N° d'enregistrement
au C. N. R. S.

THÈSE

DE

DOCTORAT D'ÉTAT ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS IX

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Maurice ROBIN

1ère THÈSE :

CONTRÔLE IMPULSIONNEL DES PROCESSUS DE MARKOV

2ème THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenue le 17 mars 1978 devant la Commission d'examen composée de:

MM.	LIONS	Président
	BENSOUSSAN	
	POENARU	Examinateurs
	AUBIN	
	JACOD	

à Christine ...

J'adresse ici mes plus vifs remerciements

au Professeur LIONS qui m'a accueilli au LABORIA et qui a bien voulu présider le Jury,

au Professeur BENSOUSSAN qui m'a inspiré ce travail, qui en a dirigé le développement et m'a toujours fait bénéficier de ses conseils amicaux,

à tous mes camarades du LABORIA pour leur amicale et patiente collaboration.

Je remercie également

le Professeur POENARU qui a bien voulu diriger le second sujet de Thèse,

les Professeurs AUBIN et JACOD qui m'ont fait l'honneur et l'amitié de participer au Jury.

Les remerciements vont aussi à Madame DECALF qui a patiemment dactylographié ce travail.

Plan Détaillé

Pages

INTRODUCTION

1. Généralités :

Dans de nombreux problèmes de contrôle optimal, le contrôle n'intervient qu'à une suite d'instants et non pas de façon permanente. Donnons tout de suite un exemple simple pour fixer les idées. Considérons un matériel qui se dégrade au cours du temps et supposons que son état d'usure à l'instant t soit noté x_t, avec $x_t \in [0,1]$ où "1" signifie "matériel neuf", "0", "matériel hors d'usage". L'évolution de x_t est en général aléatoire mais on suppose que l'on observe x_t, $\forall$ t. A tout instant t, on peut remplacer le matériel par un matériel neuf du même type.

Appelons "état du système" à t, soit y_t, l'état d'usure du matériel en fonctionnement à t : y_t va brusquement prendre la valeur 1 à un instant de remplacement puis l'évolution de l'état continuera librement jusqu'au prochain instant de remplacement.

Supposons maintenant qu'un coût est associé à l'évolution de y_t (coût d'entretien par exemple), et que les matériels neufs doivent être payés à un prix donné. Un problème naturel est celui de la détermination d'une suite d'instants de remplacement qui minimise un coût global de fonctionnement (coût d'entretien plus coût de remplacement) sur une période donnée.

Plus généralement, on peut supposer que le matériel peut être remplacé par un autre du même type mais "d'occasion". On doit alors faire le choix de l'état du nouveau matériel pour chaque date de remplacement et des états des matériels remplaçants.

D'autres types de rpblèmes de contrôle présenteront cette même caractéristique, à savoir que l'on recherche une suite (τ^i,ξ^i) $i \geq 1$ "d'impulsions" que l'on fait subir à l'état de système de façon à minimiser un certain critère.

Citons, à titre d'exemple, les problèmes de démarrage de machines : on démarre ou on arrête des unités de production selon l'avolution de la demande (cf. [37], [38]), ou encore on cherche à effectuer des travaux à des postes de service différents suivant la longueur des files d'attente qui se produisent en amont de ces postes de service (cf. [55]). On pourra trouver de nombreux autres exemples dans A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11], [12], qui ont appelé "problèmes de contrôle impulsionnel" ce type de situations.

Dans toutes ces situations, il peut, d'autre part, se produire que l'effet d'une décision ne soit pas instantané mais nécessite un certain délai (délai de livraison pour la gestion de stocks, délai de mise en route de machines etc...). Ce délai peut être fixe ou aléatoire. La formulation mathématique d'un problème de contrôle impulsionnel demandera que soient précisés :

- la dynamique du système sans contrôle (ex : loi d'évolution de x_t pour le matériel type) ;

- les contrôles admissibles (ex : suite (τ^i, ξ^i) $i \geq 1$, comportant des contraintes telles que le retard..) ;

- l'évolution de l'état du système pour un contrôle admissible quelconque (ex : loi d'évolution de y_t)

- un critère (ex : coût global de gestion...).

L'objet de ce travail est d'étudier des problèmes de contrôle impulsionnel pour une large classe de processus sotochastique et dans une grande variété de situations.

2. Les processus aléatoires envisagés :

Les processus aléatoires que l'on considèrera ici seront toujours des processus de Markov. Il semble que ce soit là un cadre suffisamment général pour l'essentiel des applications quand l'observation du système est complète. D'autre part, dans la quasi-totalité des problèmes de contrôle stochastique étudiés jusqu'à présent, il n'y a que dans le cas markovien (ou dans des cas qui s'y ramènent) que l'on a su obtenir des résultats permettant un calcul effectif d'un contrôle optimal (ou plutôt d'une approximation d'un contrôle optimal).

Ce type de considérations nous a amenés à rechercher une formulation générale des problèmes de contrôle impulsionnel pour une classe assez large de processus de Markov et à étendre les méthodes de résolutions utilisées par A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS pour le cas des processus de diffusion.

3. La formulation des problèmes de contrôle impulsionnel :

Le principe de la formulation des problèmes de contrôle sera le suivant : partant de la donnée d'un processus de Markov sous la forme d'une famille de probabilités P_x (où x varie dans un espace d'états E) sur un espace de trajectoire Ω on définira une famille de contrôles admissibles V et pour chaque $v \in V$, on construira une famille de probabilité P_x^v sur Ω ou un espace plus grand. P_x représente l'évolution du système sans contrôle, P_x^v, l'évolution du système soumis au contrôle v. Le critère sera alors l'espérance d'une fonctionnelle de l'état et du contrôle. La définition des probabilités P_x^v sera différente suivant que l'on aura à étudier un problème avec retard déterministe, un problème "instantané", ou avec un retard aléatoire. En fait, toutes les constructions pourraient être faites à l'aide des techniques que l'on utilisera pour le cas instantané ; mais les simplifications notables du cas du retard fixe font que l'on donnera une construction particulière pour cette situation.

4. Méthodes de résolutions :

Pour chaque type de problème, on s'intéressera surtout à l'existence d'un contrôle optimal et à la caractérisation du coût optimal, permettant si possible un calcul effectif. Formellement, le principe des méthodes utilisées repose sur la programmation dynamique.

Nous allons reprendre ici l'exemple préliminaire pour donner une idée intuitive des méthodes et des résultats.

Supposons que x_t soit un processus de Markov de semi-groupe $\Phi(t)$ de générateurs infinitésimal A, et notons f(x) le coût d'entretien par unité de temps quand l'usure est x, k le coût de remplacement. Soit $v = (\tau^i)\ i \geq 1$ un contrôle, notons $y_t(v)$ l'état du système à t quand on utilise v.

Formellement, on prend comme critère

$$(1) \qquad J_x(v) = E\left[\int_0^{\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(y_s(v))ds + \sum_{i \geq 1} k\, \bar{e}^{\alpha \tau^i} | y_0 = x\right] .$$

On note

$$(2) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_v J_x(v)$$

c'est le coût optimal quand l'état initial est x.

Effectuons le raisonnement classique de la programmation dynamique. A un instant t quelconque deux décisions sont possibles, remplacer ou attendre jusqu'à $t+\delta$ $\delta > 0$. Comme le problème est homogène en temps il suffit de raisonner avec $t = 0$.

En supposant que les décisions ultérieures sont optimales, les coûts correspondants aux deux décisions possibles seront

$$c_1 = k + u(1) \quad \text{si l'on remplace,}$$
$$c_2 = E\left[\int_0^{\delta} \bar{e}^{\alpha s} f(y_s)ds + \bar{e}^{\alpha\delta} u(y_\delta) \mid y_0 = x\right] \quad \text{sinon.}$$

Comme il n'y a pas de contrôle sur $[0,\delta]$, y_s évolue comme le processus de markov x_s, avec $\Phi(s)$ comme semi groupe.
Le coût optimal vérifiera alors

$$u(x) = \min\,(c_1, c_2) \quad .$$

Soit encore

$$(3) \qquad u(x) = \min[k + u(1),\ E\int_0^{\delta} \bar{e}^{\alpha s} \Phi(s) f(x) ds + \bar{e}^{\alpha\delta}\Phi(\delta) u(x)].$$

Si l'on suppose u suffisamment régulière, on aura par les propriétés des semi groupes

$$\bar{e}^{\alpha\delta}\Phi(\delta)u(x) = u(x) + \int_0^\delta \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)[Au-\alpha u](x)ds \ ,$$

et comme $u = \min(c_1, c_2) \iff u \leq c_1,\ u \leq c_2,\ (u-c_1)(u-c_2) = 0$, l'on obtient :

$$(4) \qquad \begin{cases} -Au + \alpha u \leq f \ , \\ u(x) \leq k + u(1) \\ (-Au + \alpha u - f)(u - k - u(1)) = 0 \ . \end{cases}$$

L'équation (3) signifie en particulier qu'il sera optimal de remplacer le matériel dès que $u(x_t)$ devient égal à $k + u(1)$.

On voit que la connaissance de $u(x)$ $\forall$ x permet de déterminer un contrôle optimal : si à t $u(x_t) < k + u(1)$ on ne fait rien, si à t, $u(x_t) = k + u(1)$ on remplace le matériel.

D'autre part (3) et (4) donnent deux types de conditions pour u. Mais (3) ne fait intervenir que le semi groupe, et (4) le générateur infinitésimal. Cependant seule (4) sera (dans certain cas) susceptible d'un calcul numérique, son inconvénient étant de nécessiter une régularité importante de u. Il ne sera donc pas étonnant de constater dans les chapitres qui suivent, que l'on obtient des conditions du type (3) de façon assez générale alors que des inéquations du type (4) ne seront établies que dans des cas très particuliers.

Par ailleurs, une façon d'étudier (3), (qui est l'équation fonctionnelle de la programmation dynamique), est d'utiliser une méthode itérative du type

$$(5) \qquad u^n = \min\left(k + u^{n-1}(1),\ \int_0^\delta \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f ds + \bar{e}^{\alpha\delta}\Phi(\delta)u^n(s)\right)$$

Comme on le verra, ceci revient à considérer une suite de problèmes d'arrêt optimal qui ont été étudié depuis longtemps (cf. [33] par exemple).

L'analogue de (5) pour les inéquations (4) est l'une des méthodes introduites par A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [12] pour montrer l'existence d'une solution dans le cas des diffusions. Ces deux auteurs ont d'autre part montré le rapport existant entre les inéquations variationnelles et les problèmes d'arrêt optimal de diffusion (cf. [7] entre autres).

De la même façon, dans les cas où ceci sera possible, on cherchera d'abord à relier les problèmes d'arrêt optimal à des inéquations variationnelles de façon à pouvoir utiliser des méthodes similaires à celles de A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS pour obtenir les inéquations du problème de contrôle impulsionnel.

5. Conception de la rédaction.

Les remarques qui précèdent sont à la base de la méthode que l'on utilisera tout au long de ce travil : on étudiera une suite de problèmes d'arrêt optimal dont on cherchera à montrer la convergence vers le coût optimal u. Ces remarques motivent également l'étude des problèmes d'arrêt optimal qui constituera le premier chapitre et où l'on établira un certain nombre de résultats essentiels pour la suite. L'étude de ces problèmes sera faite pour une méthode très différente de celle de SHIRIAEV [65] (par exemple) : elle reposera sur les propriétés d'un problème approché : le problème "pénalisé" qui est l'analogue stochastique de l'équation pénalisée utilisée de façon classique pour l'étude des inéquations variationnelles (cf. J.L. LIONS [41] par exemple).

Ce premier chapitre sera l'occasion d'introduire un certain nombre d'exemples : processus semi markoviens et processus de diffusion avec sauts notamment, qui seront repris dans les chapitres ultérieurs. Pour ces exemples on étudiera en particulier les inéquations variationnelles associées aux problèmes d'arrêt optimal.

On aborde un premier type de problème de contrôle impulsionnel dans le chapitre 2. On a choisi de commencer par le cas des problèmes avec retard déterministe, quand aucune décision ne peut être prise avant l'effet de la dernière décision, car c'est le cas le plus simple à la fois pour ce qui est de la construction du "processus contrôlé" et de l'étude de la régularité du coût optimal. On traitera dans ce chapitre la situation envisagée dans les préliminaires ("remplacement de matériels") et le cas correspondant à la gestion des stocks. Il faut noter que ce dernier cas inclus de nombreuses situations qui peuvent avoir une modélisation du même type que la gestion des stocks (gestion de trésorerie, de portefeuilles, gestion de réservoirs, etc...) . Les situations du type "démarrage d'unités de production" qui donnent lieu à des systèmes d'inéquations seront traitées dans un chapitre ultérieur car elles font l'objet de techniques particulières.

Au chapitre 3, on examinera les difficultés qui apparaissent quand on autorise une décision alors que (du fait du retard), la décision précédente n'a pas encore été suivie d'effet. Il existe en effet des situations où la contrainte imposée au chapitre 2 n'est pas réaliste; prenons comme exemple la détermination des instants de démarrage et d'arrêt d'unités de production : il n'est pas raisonnable alors de supposer qu'aucune décision ne sera prise pendant la "montée en puissance" d'une unité que l'on vient de démarrer (cf. le cas des centrales thermiques [37], [38]).

Du point de vue théorique, ceci introduit quelques difficultés techniques, mais les résultats du chapitre 2 s'étendent cependant sur des cas particuliers, on montrera que ces problèmes donnent lieu à des inéquations quasi-variationnelles pour lesquelles, d'ailleurs, il n'y a pas encore de démonstration "analytique" de l'existence d'une solution. On utilisera de façon essentielle les méthodes probabilistes au chapitre 4 pour les processus de diffusion.

Le contrôle impulsionnel "instantané" fait l'objet du chapitre 5. Les méthodes utilisées se distinguent de celles du chapitre 2 sur deux points :

- pour la définition du processus contrôlé : la difficulté tenant au fait que les instants de saut décidés peuvent être "imprévisibles", alors qu'au chapitre 2, une fois la décision prise à une date τ, l'on savait que l'effet de la décision se produirait à $\tau+h$.

- pour l'étude de la régularité (continuité) du coût optimal, on utilisera l'adaptation d'un résultat de J.L. MENALDI [45] (qui sera d'ailleurs utilisé plusieurs fois dans les chapitres suivants).

Ceci dit, le schéma général de la démonstration de l'existence d'un contrôle optimal et de la caractérisation du coût optimal restera analogue à celui du chapitre 2.

La même remarque s'applique au chapitre 6 qui traitera des problèmes avec retard stochastique où la construction du processus contrôlé sera similaire à celle du cas instantané. On se restreint dans ce chapitre 6, aux processus de diffusion (sans imbrication des retards) par commodité, mais l'extension à des processus de Markov plus généraux et aux retards imbriqués peut être faite avec les méthodes des chapitres 2 et 3.

Les "problèmes donnant lieu à des systèmes d'inéquations" sont étudiés au chapitre 7. Le contrôle consiste ici à choisir un processus de Markov parmi une famille finie de tels processus. On peut ainsi modéliser le contrôle des arrêts et des démarrages d'unités de production, la famille de processus représentant par exemple les évolutions possibles de la production pour les diverses valeurs du nombre d'unités au marché. cf. [37], [38] pour l'exemple important des centrales thermiques). Du point de vue probabiliste, la position du problème est un peu plus simple que dans les cas précédents, cependant on ne saura étudier les systèmes d'inéquations quasi variationnelles correspondantes que dans quelques cas particuliers (on retrouvera ici l'un des problèmes ouverts les plus importants des IQV : la régularité des solutions).

Enfin le chapitre 8 sera consacré à l'étude de la dépendance du coût optimal d'un problème d'arrêt ou de contrôle impulsionnel par rapport à un paramètre.

Ceci nous permettra d'étudier l'approximation d'un problème de contrôle impulsionnel pour une diffusion par un problème analogue pour un processus de saut pur : l'inéquation correspondant à ce dernier est alors beaucoup plus facile à résoudre.

CONTROLE IMPULSIONNEL DES PROCESSUS DE MARKOV

Plan Général

I

PROBLEMES DE TEMPS D'ARRET OPTIMAL

Orientation.

On établit ici un certain nombre de résultats sur les problèmes de temps d'arrêt optimaux pour une classe de processus de Markov (essentiellement : Felleriens). On s'intéresse surtout à la régularité (notamment la continuité) du coût optimal et aux cas où ce dernier est solution d'une inéquation variationnelle. On étend pour cela les méthodes et les résultats de A. BENSOUSSAN , J.L. LIONS [10], [11] qui considéraient des processus continus.

I.1. HYPOTHESES, NOTATIONS, POSITION DU PROBLEME.

Soit E un espace localement compact à base dénombrable, muni de la tribu borélienne. On se donne un processus de Markov homogène, continu à droite, à valeurs dans E, noté

(1.1) $$X = (\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}, \theta_t, x_t, P_x) .$$

On supposera pour simplifier que la durée de vie est infinie.

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E, on notera

$$\tau_{\mathcal{O}} = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0\ ,\ x_s \notin \mathcal{O}) .$$

On notera d'autre part :

$\Phi(t)$ le semi groupe associé à P_x

B l'espace des fonctions mesurables bornées sur E

C l'espace des fonctions continues bornées sur E

B et C sont munis de la norme du sup qui en fait des espaces de Banach ($\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$).

On note aussi

C_o l'espace des fonctions continues, nulles à l'infini

$\tilde{B}_o = \{f \in B\ ,\ \lim_{t \downarrow 0} \Phi(t)f=f$ dans B pour la convergence faible$\}$

(c'est-à-dire $\|\Phi(t)f\|$ est borné et

$$\lim_{t \downarrow 0} (\Phi(t)f)(x) = f(x) \quad \forall\, x \in E \text{ cf [21]}).$$

$$B_o = \{f \in B\ ,\ \lim_{t \downarrow 0} \|\Phi(t)f - f\| = 0\ \}$$

$\tilde{A}$ le générateur infinitésimal faible de $\Phi(t)$ et

$\mathcal{D}_{\tilde{A}}$ son domaine dans $\tilde{B}_o$.

On posera

$$R_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha s}\Phi(s)f\, ds \qquad \text{(résolvante de } \Phi). \tag{1.2}$$

On supposera toujours (propriété de Feller)

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(t)f \in C \ , & \forall\ f \in C \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} \Phi(t)f(x) = f(x) & \forall\ f \in C \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Quand <u>E n'est pas compact</u>, on utilisera dans certain cas une hypothèse supplémentaire

(1.4) $\left\{\begin{array}{l} \Phi(t)f \in C_o \qquad \forall\ f \in C_o\ , \\ \text{E est un espace métrique dont les bornés} \\ \text{fermés sont compact~~s~~ et si d est la dis-} \\ \text{tance, alors } \forall\ T \\ \gamma_T(R) = \sup\limits_{x \in E} P_x\left[\sup\limits_{0 \leq t \leq T} d(x_t, x) > R\right] \\ \text{tend vers 0 quand } R \uparrow \infty\ . \end{array}\right.$

les hypothèses précédentes ((1.3) et $\Phi(t)\, C_c \subseteq C_o$), impliquent que X <u>est quasi continu à gauche</u>, c'est-à-dire si τ_n est une suite croissante de temps d'arrêt et $\tau_n \uparrow \tau$, alors

$$x_{\tau_n} \to x_\tau \quad P_x \text{ ps sur } \{\tau < +\infty\}\ , \quad \forall\ x \in E\ .$$

Quand E est compact (1.3) suffit ($C_o = C$), et quand E est seulement localement compact, (1.3) et $\Phi(t)\, C_c \subseteq C_c$ impliquent que

$\Phi(t)$ est faiblement continu sur C_o et donc que X est quasi continu à gauche. (cf. MEYER [48]).

Remarque I.1.1.

a) En modifiant (eventuellement) les tribus $\mathcal{F}_t$, on peut toujours se ramener au cas où $\tau_{\mathcal{O}}$ est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, $\forall \mathcal{O}$ ouvert de E. En particulier si $\Omega = D(0,\infty;E)$, et $\mathcal{F}_t$ les tribus canoniques universellement complétées on aura cette propriété (cf. [19]).

b) Le fait que l'on suppose la durée de vie infinie se traduit par

$$\Phi(t)1 = 1 \tag{1.5}$$

■

Faisons dès maintenant quelques remarques sur les hypothèses $\Phi(t)C \subseteq C$ implique en particulier

$$f \in C \Rightarrow R_\alpha f \in C , \tag{1.6}$$

et

$$\int_a^b e^{-\alpha t}\Phi(t)f \, ds \in C . \tag{1.7}$$

(cf. Dynkin [21] p. 57,58. Th. 2.4. Lemme 2.4).

On a également $f \in \tilde{B}_o \Rightarrow R_\alpha f$ est l'unique solution de

$$- \tilde{A}v + \alpha v = f \qquad v \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} . \tag{1.8}$$

(1.3) et $\Phi(t)C_o \subseteq C_o$ impliquent que $\Phi(t)$ est faiblement continu sur C_o (cf. Yosida [75] p. 233), et donc le domaine de son générateur (dans C_o) est dense dans C_o (cf. Dynkin [21]).

Le cas E compact contient le cas particulier où E est le compactifié d'un espace $\tilde{E}$ localement compact de type dénombrable. Mais il faut noter que dans ce cas C(E) est égal à l'espace des fonctions de la forme f + a où $f \in C_o(\tilde{E})$ et a est une constante. L'hypothèse (1.4) interviendra quand on voudra utiliser des fonctions continues bornées quelconques sur un espace localement compact. Elle sera vérifiée dans le cas des diffusions, ou des diffusions à saut.

<u>Le problème de temps d'arrêt optimal</u> :

Soit $\alpha > 0$, $l \in B$, $L \in B$, $\mathcal{M}$ l'ensemble des temps d'arrêt (de la famille $\mathcal{F}_t$), on pose pour $\tau \in \mathcal{M}$:

$$(1.9) \qquad J_x(\tau) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\alpha s} L(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} l(x_\tau)\right)$$

Le problème est de minimiser la fonctionnelle $J_x(\tau)$ sur $\mathcal{M}$. On pose :

$$(1.10) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau \in \mathcal{M}} J_x(\tau)$$

On va, dans les sections suivantes, étudier la continuité de u et l'existence d'un temps d'arrêt optimal. On utilisera pour cela un problème intermédiaire : le problème "pénalisé" dont les travaux de A. BENSOUSSAN J.L. LIONS ont montré l'utilité, (cf. [10], [11]).

I.2. ETUDE DU PROBLEME PENALISE.

(2.1) On note D_o un sous espace de B fermé pour la convergence faible, stable pour $\Phi(t)$, $\forall t$

On suppose donnés

(2.2)
$$\begin{cases} L \in \tilde{B}_o \cap D_o \ , \ 1 \in B \text{ tels que } \ \forall \gamma > 0 \\ R_\gamma L \in C \ , \quad (v-1)^+ \in C \cap D_o \ , \quad \forall v \in C \cap D_o . \end{cases}$$

On cherche u_ε solution du problème

(2.3) $u_\varepsilon \in D_o$, $\Phi(t)\, u_\varepsilon$ et $\Phi(t)(u_\varepsilon - 1)^+$ sont faiblement mesurables, et

(2.4)
$$u_\varepsilon = R_\alpha\left[L - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - 1)^+\right]$$

Exemple I.2.1. $L \in C$, $1 \in C$, $D_o = B$.

Exemple I.2.2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E

$$\tau_o = \text{Inf } (s \geq 0,\ x_s \notin \mathcal{O})$$

(2.5) On suppose que $\Phi(t)$, semi groupe du processus $x_{t\wedge\tau_o}$ (i.e. $\Phi(t)g(x) = E_x\, g(x_{t\wedge\tau_o}))$,

est Fellerien et

(2.6)
$$\begin{cases} \forall f \in C(\bar{\mathcal{O}}), \text{ alors} \\ v(x) = E_x \displaystyle\int_0^{\tau_o} f(x_t)\, e^{-\alpha t}\, dt \in C\,(\bar{\mathcal{O}}) \ . \end{cases}$$

Ceci n'est pas vrai en général (mais c'est vrai pour les processus de diffusion cf. [11]) on verra des exemples plus loin.

On prend dans ce cas

$$f \in C \ , \quad \Psi \in C \ , \quad \Psi \geq 0 \ \text{ sur } \mathcal{O}^c \ ,$$

(2.7) $$D_o = \{v \in B \ , \quad v = 0 \ \text{ sur } \mathcal{O}^c\} \ ,$$

(2.8) $$L = f \chi_{\mathcal{O}} \ , \quad l = \Psi \chi_{\mathcal{O}} \ .$$

On remarquera que dans ces conditions

(2.9) $$L \in \tilde{B}_o \ : \ (\text{et donc } R_\alpha L \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}) \ ,$$

en effet

$$\Phi(t) \ L(x) = E_x \ f(x_{t \wedge \tau_o}) \ \chi_{\mathcal{O}} \ (x_{t \wedge \tau_o})$$

$$x \in \mathcal{O} \Rightarrow \tau_o > 0 \quad \text{ps} \quad P_x$$

et $$x_t \to x \quad P_x \ \text{ps}$$

donc $$f(x_t) \to f(x) \quad P_x \quad \text{ps} \ .$$

et $$\chi_{t < \tau_o} \to 1 \quad P_x \quad \text{ps}$$

donc, comme $\Phi(t)L(x) = E_x \ f(x_t) \ \chi_{t < \tau_o}$ on a $\Phi(t)L(x) \to L(x)$ $x \in \mathcal{O}$, si $x \in \mathcal{O}^c$, $\Phi(t)L(x) = 0$, $\forall \ t \geq 0$, enfin $\| \Phi(t)L \| \leq \| f \|$ donc $L \in \tilde{B}_o$.

■

On donne maintenant un résultat dont la démonstration est essentiellement celle de A. BENSOUSSAN J.L. LIONS [11]. On ne rappellera que les étapes de la démonstration qui utilise exclusivement les propriétés des processus de markov felleriens.

<u>Théorème I.2.1</u> : <u>Sous les hypothèses (1.1), (1.3), (2.1); (2.2),</u>

(i) <u>le problème</u> (1.3) (1.4) <u>a une solution unique</u> u_ε

(ii) $u_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_v J_x^\varepsilon(v)$, où

<u>v est un processus adapté à</u> $\mathcal{F}_t$, <u>à valeurs dans</u> $[0,1]$, <u>et</u>

$$J_x^\varepsilon(v) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(L + \frac{1}{\varepsilon}\, v l)\, \exp(-\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} v_s\, ds)dt\ , \tag{2.10}$$

<u>de plus</u>

$u_\varepsilon(x) = J_x^\varepsilon(\hat{v}^\varepsilon)$ <u>où</u>

$\hat{v}^\varepsilon(t) = 1$ <u>si</u> $u_\varepsilon(x_t) \geq l(x_t)$,

$\hat{v}^\varepsilon(t) = 0$ <u>sinon</u>

(iii) $u_\varepsilon \in C \cap D_{\tilde{A}}$.

<u>Démonstration.</u>

<u>Démonstration de (i) et (ii).</u>

On commence par remarquer que w solution de

$$w \in D_o .\ \Phi(t)w,\ \Phi(t)(w-l)^+ \text{ faiblement mesurables,} \tag{2.11}$$

$$w = R_{\alpha+\mu}(L + \mu w - \frac{1}{\varepsilon}(w-l)^+) \tag{2.12}$$

est solution de (2.3), (2.4) $(\forall \mu > 0)$. Soit alors $g \in \tilde{B}_o \cap D_o$ tel que

$$R_{\alpha+\mu}\, g \in C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o .$$

On pose $h = R_{\alpha+\mu}\, g$ et on résout

$$(2.13)\qquad \begin{cases} w = h - \frac{1}{\varepsilon} R_{\alpha+\mu}(w-1)^+ \\ w \in C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o \end{cases}$$

En utilisant le schéma itératif

$$w_n = h - \frac{1}{\varepsilon}\int_o^{\infty} \bar{e}^{(\alpha+\mu)t}\Phi(t)\ (w_{n-1}-1)^+ \, dt$$

avec $w_o \in C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o$, on montre aisément que pour μ assez grand l'application $w_{n-1} \to w_n$ est une contraction de C dans lui même et donc a un unique point fixe w dans C. Comme de plus $w_n \to w$ dans C on a aussi $w \in D_o$ et $(w-1)^+ \in C \cap D_o$. D'où $(w_{n-1}-1)^+ \to (w-1)^+$ dans C et donc

$$\bar{e}^{(\alpha+\mu)t}\Phi(t)(w_{n-1}-1)^+ \to \bar{e}^{(\alpha+\mu)t}\Phi(t)(w-1)^+ \quad \text{dans } C$$

et la limite est faiblement mesurable (puisque $(w-1)^+ \in C$ d'où

$$R_{\alpha+\mu}(w_{n-1}-1)^+ \to R_{\alpha+\mu}(w-1)^+ \quad \text{dans } B \text{ (par exemple)}).$$

Donc on a trouvé $w \in C \cap D_o$ solution de (2.13) il reste à vérifier $w \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$.

Or $(w-1)^+ \in \tilde{B}_o \Rightarrow R_{\alpha+\mu}(w-1)^+ \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, comme $h \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ par hypothèse, le résultat est obtenu.

(2.13) définit alors une application T_μ de $\{g \in \tilde{B}_o \cap D_o\ ;\ R_{\alpha+\mu} g \in C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o\}$ dans $C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o$ par : $g \to w$ solution de (2.13) avec $h = R_{\alpha+\mu} g$.

On va démontrer que T_μ est croissante : on introduit, pour v_t processus adapté à $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans $[0,1]$:

$$(2.14)\qquad J_x^{\varepsilon,\mu}(v) = E_x\int_o^{+\infty}[g(x_t) + \frac{1}{\varepsilon}\, v_t\, 1(x_t)]\bar{e}^{(\alpha+\mu)t}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t v_s ds}\, dt$$

et on va montrer que

(2.15) $$w(x) = \inf_{v} \; J_x^{\varepsilon,\mu}(v) \;.$$

On pose $H = g - \frac{1}{\varepsilon}(w-1)^+$.

Il est facile de voir (en utilisant $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$) que w solution de (2.13) vérifie

$$w = \int_0^s \Phi(t)H \, e^{-(\alpha+\mu)t} dt + \Phi(s)w \, e^{-(\alpha+\mu)s} \quad \forall \; s \geq 0 \;.$$

Il en résulte, par application de la propriété de Markov que le processus

(2.16) $$\rho(s) = e^{-(\alpha+\mu)s} w(x_s) + \int_0^s e^{-(\alpha+\mu)t} \; H(x_t)dt$$

est une P_x-martingale.

Donc (cf. [11], ou [68] Lemme 4.1.) le processus

$$w(x_s) e^{-(\alpha+\mu)s} \; e^{-1/\varepsilon \int_0^s v_t dt} + \int_0^s [H + \frac{v}{\varepsilon}.w] \; e^{-(\alpha+\mu)t} \; e^{-1/\varepsilon \int_0^t v_r dr} \; dt$$

est également une P_x martingale. Donc

$$w(x) = E_x \left[\int_0^s [H+\frac{1}{\varepsilon}vw] \; e^{-(\alpha+\mu)t} \; e^{-1/\varepsilon \int_0^t v_r dr} \; dt \right.$$
$$\left. + \; w(x_s) \; e^{-(\alpha+\mu)s} \; e^{-1/\varepsilon \int_0^s v_t dt} \right]$$

Comme w est borné, $s \to +\infty$ donne

(2.17) $$w(x) = E_x \left[\int_0^\infty (y + \frac{1}{\varepsilon}vw - \frac{1}{\varepsilon}(w-1)^+) \; e^{-(\alpha+\mu)t} \; e^{-1/\varepsilon \int_0^t v_\sigma d\sigma} \; dt \right]$$
$$= J_x^{\varepsilon,\mu}(v) + E_x \int_0^{+\infty} [\frac{v(w-1)}{\varepsilon} - \frac{(w-1)^+}{\varepsilon}] \; e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t v_s ds} \; dt$$

Donc

$$w(x) \leq J_x^{\varepsilon,\mu}(v) .$$

D'autre part si $\hat{v}_t$ est défini par

$$\hat{v}_t = 1 \quad \text{si} \quad w(x_t) \geq l(x_t)$$

$$\hat{v}_t = 0 \quad \text{sinon} ,$$

on a $\hat{v}_t(w-l)(x_t) = (w-l)^+ (x_t)$

On voit dans (2.17) que ceci donne

$$w(x) = J_x^{\varepsilon,\mu}(\hat{v}) \quad \text{donc on a (2.15).}$$

Il est alors immediat sur (2.15) que

$$g_1 \leq g_2 \Rightarrow w_1 \leq w_2 \quad \text{donc } T_\mu \text{ est croissante.}$$

On définit maintenant

$$w_o = R_\alpha L ,$$

$$w_1 = T_\mu(L + \mu w_o) ,$$

$$w_n = T_\mu(L + \mu w_{n-1}).$$

On a $w_o = R_\alpha L = R_{\alpha+\mu}(L + \mu w_o)$ et donc $w_1 \leq w_o$ (reprendre l'équation définissant T_μ). Il en résulte que la suite w_n est décroissante.

Montrons que la suite w_n est bornée inférieurement :

Soit K_1 tel que $L \geq K_1$ et $l \geq K_1$ on peut toujours supposer $K_1 \leq 0$.

Supposons que $w_{n-1} \geq \bar{K}$ alors comme $(w-l)^+ \leq K - K_1$, $K = \frac{\|f\|}{\alpha}$, on voit que

$$w_n \geq \frac{1}{\alpha+\mu}\,[K_1 + \mu\bar{K} - \frac{1}{\varepsilon}(K-K_1)]\ .$$

Si donc on choisit

$$\bar{K} \leq \frac{1}{\alpha}\,(K_1 + \frac{1}{\varepsilon}\,K_1 - \frac{K}{\varepsilon})\ ,$$

on voit que

$$w_{n-1} \geq \bar{K} \Rightarrow w_n \geq \bar{K}\ .$$

Or $w_o \geq \frac{K_1}{\alpha} \geq \bar{K}$ donc $w_n \geq \bar{K}$ $\forall\, n$.

Il en résulte $w_n \downarrow \tilde{w}$ en tout point, $\tilde{w} \in B$, donc $L + \lambda w_{n-1} - \frac{1}{\varepsilon}(w_n-1)^+ \to L + \tilde{w} - \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{w} - 1)^+$ en tout point et dans B faiblement (et donc la limite est dans D_o). On passe alors à la limite dans B faiblement sur l'équation

$$w_n = R_{\alpha+\mu}(L + \mu w_{n-1} - \frac{1}{\varepsilon}(w_n-1)^+)\ ,$$

et on obtient que $\tilde{w}$ est solution de (2.3), (2.4).

Pour démontrer l'unicité, on remarque que comme pour (2.13) on a

$$\tilde{w}(x) = \operatorname*{Inf}_{v}\, J_x^{\varepsilon}(v)\ , \tag{2.18}$$

ou

$$J_x^{\varepsilon}(v) = J_x^{\varepsilon,o}(v) \quad \text{(défini en (2.14)) avec } g{=}L$$

En effet la cotinuité ($w \in C$) n'intervient pas dans la démonstration de (2.15).
(il suffit simplement que $\Phi(t)(u_\varepsilon-1)^+$ soit faiblement mesurable pour pouvoir définir les intégrales, or c'est le cas ici).

Démonstration de (iii) :

On introduit une famille de problèmes indicés par t :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^{t+h} = \theta_t^{-1} \mathcal{F}_h \quad , \quad \tilde{\mathcal{F}}_t = \theta_t^{-1} \mathcal{F} \, ,$$

P_{xt} la probabilité sur $\tilde{\mathcal{F}}_t$ définie par

$$E_{xt} \, \varphi_o \, \theta_t = E_x \, \varphi$$

pour toute v.a $\mathcal{F}$ mesurable bornée.

Soit v_s adapté à $(\tilde{\mathcal{F}}_t^s)_{s \geq t}$, $v_s \in [0,1]$.

On introduit

$$(2.19) \quad \begin{cases} J_{xt}^{\varepsilon}(v) = E_{xt} \displaystyle\int_t^{+\infty} (L + \frac{1}{\varepsilon} vl) \, e^{-\alpha(s-t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_t^s v_\lambda d\lambda} \, ds \\[2ex] u_\varepsilon(x,t) = \operatorname*{Inf}_v \; J_{xt}^{\varepsilon}(v) \, . \end{cases}$$

On a alors

$$(2.20) \qquad u_\varepsilon(x,t) = u_\varepsilon(x) \qquad \forall \quad t \geq 0 \, , \quad \forall \, x \in E \, ,$$

(où $u_\varepsilon(x)$ désigne maintenant l'unique solution de (2.3).(2.4))

Pour démontrer (2.20) on refait des raisonnements analogues à ce qui précède pour montrer que

$$u_\varepsilon(x_s) \, e^{-\alpha(s-t)} + \int_t^s H(x_\lambda) \, e^{-\alpha(\lambda-t)} d\lambda$$

(où $H = L - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - l)^+$) est une P_{xt} martingale d'où l'on déduit comme pour w que

$$u_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_v \, J_{xt}^{\varepsilon}(v) = u_\varepsilon(x,t) \, .$$

On définit alors pour $T > 0$, $t \leq T$

$$J^{\varepsilon,T}_{xt}(v) = E_{xt} \int_t^T (L + \frac{1}{\varepsilon} v_s 1)\, \bar{e}^{\alpha(s-t)}\, \bar{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v_\lambda d\lambda}\, ds \ ,$$

$$u^T_\varepsilon(x,t) = \operatorname*{Inf}_v J^{\varepsilon,T}_{xt}(v) \ .$$

On pose

$$(u^T_\varepsilon(t))(x) = u^T_\varepsilon(x,t) \ ,$$

$u^T_\varepsilon(t)$ est à valeurs dans B.

Alors

$$u^T_\varepsilon(t) \to u_\varepsilon \quad \text{dans B fort quand } T \to +\infty \tag{2.21}$$

$\forall$ t fixé.

On a facilement

$$|J^{\varepsilon,T}_{xt}(v) - J^{\varepsilon}_{xt}(v)| \leq (\|L\| + \frac{1}{\varepsilon}\|1\|) \int_T^\infty \bar{e}^{\alpha(s-t)} ds$$

et (2.20) donne alors le résultat (2.21).

Il suffit donc, d'après (2.21) de montrer que $u^T_\varepsilon(t) \in C$ pour obtenir $u_\varepsilon \in C$.

On va montrer que $u^T_\varepsilon(t)$ est l'unique solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} w \in C^o([o,T];C),\ w(t) \in D_o \quad \forall\, t \in [o,T], \\ w(t) = \displaystyle\int_t^T \Phi(s-t)\bar{e}^{\alpha(s-t)} L ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_t^T \Phi(s-t)\bar{e}^{\alpha(s-t)}(w(s)-1)^+ ds \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Une méthode de point fixe classique montre facilement que si

$$\int_o^t \bar{e}^{\alpha\lambda}\Phi(\lambda) L\, d\lambda \in C \ , \quad \forall \ t \leq T \ , \tag{2.23}$$

alors (2.22) a une solution unique.

On a alors $w(t) = u_\varepsilon^T(t)$ en montrant que

$$w(x_s,s)e^{-\alpha(s-t)} + \int_t^s [L - \frac{1}{\varepsilon}(w-1)^+](x_\lambda,\lambda)\, e^{-\alpha(\lambda-t)} d\lambda$$

est une P_{xt} martingale sur $[t,T]$.

Donc si (2.23) est réalisée,

$$u_\varepsilon^T(t) \in C \Rightarrow u_\varepsilon \in C$$

donc $u_\varepsilon \in C \cap D_o$, et $(u_\varepsilon - 1)^+ \in C \cap D_o$ il résulte alors de l'équation vérifiée par u_ε que $u_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, donc, sous l'hypothèse (2.23) (iii) est démontré.

On montre alors que (2.23) n'est pas restrictive : en effet en posant $\chi = R_\alpha L \in C \cap D_o \cap D_{\tilde{A}}$, et $z = u_\varepsilon - \chi$ on est amené à un problème analogue mais avec $L = 0$, et 1 remplacé par $1 - R_\alpha L$ qui vérifient les hypothèses du théorème. Donc $u_\varepsilon \in C \cap D_{\tilde{A}} \cap D_o$ dans le cas général.

∎

<u>Remarque 3.2.1.</u>

le fait que $u_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ implique également que u_ε est l'unique solution de

$$u_\varepsilon \in C \cap D_o \cap D_{\tilde{A}} ,$$

$$\tilde{A}u_\varepsilon - \alpha u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - 1)^+ + L = 0$$

∎

I.3. CARACTERISATION DU COUT OPTIMAL.

On fera ici des hypothèses légèrement différentes suivant que l'on considère un processus arrêté ou non.

Cas d'un processus non arrêté. (exemple I.2.1)

On suppose

$$(3.1) \qquad l \in C \quad .$$

Cas d'un processus arrêté. (exemple I.2.2.)

$$(3.2) \qquad \Psi \in C \quad \text{et} \quad \underline{\Psi \geq 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{O}^c} \quad , \quad l = \Psi \, \chi_{\mathcal{O}}$$

les notations seront dans ce dernier cas, celles de l'exemple I.2.2.

Théorème I.3.1. : Sous les hypothèses (1.1).(1.3).(1.4) et sous (2.1), (2.2) l'une ou l'autre des hypothèses (3.1) ou (3.2), on a $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact (et donc $u \in C$).

Démonstration.

On montre d'abord $u_\varepsilon \geq u$. u_ε vérifiant l'équation (2.4), on a, par utilisation de la propriété de markov,

$$(3.5) \qquad Y(s) = u_\varepsilon(x_s)e^{-\alpha s} + \int_0^s e^{-\alpha t} \, H(x_t)dt$$

(avec $H = L - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - l)^+$) est une martingale, continue à droite et bornée. Donc le théorème d'arrêt (cf. Neveu [50]), donne

$$E_x Y(\tau) = E_x \, Y(o) \quad , \quad \forall \quad \tau \quad \text{temps d'arrêt de } \mathcal{F}_t \quad ,$$

donc

$$(3.6) \qquad u_\varepsilon(x) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\alpha s} H(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} u_\varepsilon(x_\tau)\right) .$$

Soit alors

$$\hat{\tau}^\varepsilon = \text{Inf } (s \geq 0,\ u_\varepsilon(x_s) \geq l(x_s)),$$

ceci pour le cas non arrêté et

$$\hat{\tau}^\varepsilon = \text{Inf } (s \geq 0,\ u_\varepsilon(x_s) \geq \Psi(x_s))$$

pour le cas arrêté.

Dans les deux cas, $\hat{\tau}^\varepsilon$ est le premier instant de sortie d'un ouvert puisque u_ε et l (ou Ψ) sont continues. (3.6) pour $\hat{\tau}^\varepsilon$ donne alors puisque $u_\varepsilon(x_s) - l(x_s) < 0 \quad \forall \ s < \hat{\tau}^\varepsilon$,

$$u_\varepsilon(x) = E_x \int_0^{\hat{\tau}^\varepsilon} L(x_s) e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha\hat{\tau}^\varepsilon} u_\varepsilon(x_{\hat{\tau}^\varepsilon}) ,$$

mais $x_{\hat{\tau}^\varepsilon} \in \{x \ ; \ u_\varepsilon(x) \geq l(x)\}$

=>

$$(3.7) \qquad u_\varepsilon(x) \geq J_x(\hat{\tau}^\varepsilon) \geq u(x) .$$

(on notera que, même dans le cas non arrêté, on n'a $u_\varepsilon(x_{\hat{\tau}^\varepsilon}) = l(x_{\hat{\tau}^\varepsilon})$ que si le processus est continu).

Soit maintenant τ temps d'arrêt quelconque, on lui associe

$$\begin{cases} v_\tau(s) = 0 & s < \tau , \\ v_\tau(s) = 1 & s \geq \tau , \end{cases}$$

et on va traiter séparément (3.1) et (3.2) de façon à clarifier l'exposé.

a) <u>Cas non arrêté</u>.

Faisons d'abord l'hypothèse

(3.8) $\quad 1 \in \mathcal{D}_A$ domaine du générateur infinitésimal (fort) de Φ <u>dans</u> C_o .

donc $A1 \in C_o$.

d'où par la formule de Dynkin ([21]),

$$E_x \, e^{-\alpha\tau} \, 1(x_\tau) = 1(x) + E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} [A1 - \alpha 1](x_s) ds.$$

u(x) s'écrit donc

$$u(x) = 1(x) + \operatorname*{Inf}_\tau E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} [L + A1 - \alpha 1](x_s) ds$$

où $g = L + A1 - \alpha 1 \in C$.

Posons $\tilde{u}(x) = u(x) - 1(x)$.

De même (en effectuant la translation sur l'équation vérifiée par u_ε) on peut définir

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - 1(x)$$

et on a aussi

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_v \; E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} [g] + e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s v_\lambda d\lambda} \, ds .$$

On a bien entendu $\tilde{u}_\varepsilon \geq \tilde{u}$.

On a aussi si $\tilde{J}_x^\varepsilon(v)$ et $\tilde{J}_x(\tau)$ désignent les critères correspondant à $\tilde{u}_\varepsilon$ et $\tilde{u}$,

$$\tilde{J}_x^\varepsilon(v_\tau) - \tilde{J}_x(\tau) = E_x \int_\tau^{+\infty} e^{-\alpha s} \, e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \, g(x_s) ds$$

or

$$\left| E_x \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\alpha s}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\, g ds \right| \leq \| g \| \frac{\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1} \ ,$$

donc

$$\tilde{J}_x^{\varepsilon}(v_\tau) - \tilde{J}_x(\tau) \leq C_1\, \varepsilon \ .$$

C_1 étant indépendante de τ, ε, on a

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) \leq \tilde{u}(x) + C_1.\varepsilon \quad ,$$

ce qui avec $\tilde{u}_\varepsilon \geq \tilde{u}$ donne

$$\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{u} \text{ dans } B \quad \text{(fortement)} \ ,$$

(3.9) donc $u_\varepsilon \to u$ dans B sous l'hypothèse (3.8) .

Supposons maintenant $1 \in C_o$ seulement. Φ étant continu sur C_o, son domaine dans C_o est dense dans C_o donc on peut trouver

$$\psi^n \in \mathcal{D}_A \ , \ \psi^n \to 1 \text{ dans } C_o .$$

On définit donc

$$J_x^n(\tau) = E_x\left[\int_o^{\tau} L(x_s)\, e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha\tau}\psi^n(x_\tau)\right],$$

$$J_x^{n,\varepsilon}(v) = E_x \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^s v_\lambda d\lambda} \left[L + \frac{1}{\varepsilon} v\ \psi^n\right](x_s) ds \ ,$$

$$u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J_x^n(\tau) \ ,$$

$$u_\varepsilon^n(x) = \operatorname*{Inf}_{v} J_x^{n,\varepsilon}(v) \ .$$

Par translation on définit

$$\tilde{u}^n(x) = u^n(x) - \Psi^n(x)$$

$$\tilde{u}_\varepsilon^n(x) = u_\varepsilon^n(x) - \Psi^n(x)$$

et on a donc

(3.10) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \| u^n_\varepsilon - u^n \| = 0 \qquad \forall\, n \text{ fixé} .$$

D'autre part

$$|J^{n,\varepsilon}_x(v) - J^\varepsilon_x(v)| \leq E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s v_\lambda d\lambda} \frac{1}{\varepsilon} v \|\Psi^n - 1\|\, ds$$

(rappelons que $v_t \in [0,1]$). D'où

$$|J^{n,\varepsilon}_x(v) - J^\varepsilon_x(v)| \leq \| \Psi^n - 1 \| \quad ,$$

donc

(3.11) $$\| u^n_\varepsilon - u_\varepsilon \| \leq \| \Psi^n - 1 \| .$$

On a de même

(3.12) $$\| u^n - u \| \leq \| \Psi^n - 1 \| .$$

En rassemblant (3.10) à (3.12), on obtient,

$$\| u_\varepsilon - u \| \leq \| u_\varepsilon - u^n_\varepsilon \| + \| u^n_\varepsilon - u^n \| + \| u^n - u \| \quad ,$$

$$\| u_\varepsilon - u \| \leq 2 \| \Psi^n - 1 \| + \| u^n_\varepsilon - u^n \| \quad .$$

En passant à la limite en ε puis en n, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \| u^\varepsilon - u \| = 0 .$$

En particulier ceci démontre le théorème (dans le cas non arrêté) si E est compact.

L'hypothèse (1.4) va permettre de conclure dans les autres cas.

Soit K_n une suite de compact croissants vers E, et $\forall\, n$, h_n une fonction continue de E dans $[0,1]$, égale à 1 sur K_n, à support compact.

On prend

$$\Psi^n = h_n\, l \,,$$

alors $\Psi^n \to \overset{l}{\cancel{\Psi}}$ uniformément sur tout compact et $\|\Psi^n\| \leq \|l\|$.

Comme $\Psi^n \in C_o$, si l'on note $J^n_x(\tau)$ le critère correspondant à Ψ^n, u^n le coût optimal, ce qui précède montre que $u^n \in C$. On va montrer que u^n converge vers u uniformément sur tout compact.

Soit $K = d(x_o, R_1)$ (boule fermée de rayon R_1), soit aussi $T > 0$, $R > 0$,

$$D = \{\omega \,,\ \sup_{0 \leq t \leq T} d(x_t, x) \leq R\}$$

$$\tilde{K} = \{y \,,\ d(x_o, y) \leq R + R_1\} \,.$$

On a

$$|J^n_x(\tau) - J_x(\tau)| \leq E_x\, \chi_{\tau \leq T} |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)|\, e^{-\alpha\tau}$$

$$+ E_x\, \chi_{\tau > T} |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)|\, e^{-\alpha\tau} \,,$$

$$|J^n_x(\tau) - J_x(\tau)| \leq E_x\, \chi_{\tau \leq T} |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)|\, e^{-\alpha\tau}$$

$$+ e^{-\alpha T}\, 2\|l\| ,$$

$$|J^n_x(\tau) - J_x(\tau)| \leq I + II \,.$$

$$I = E_x\ \chi_{\tau \leq T} \cdot \chi_D \cdot |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)| \bar{e}^{\alpha\tau}$$

$$+ E_x\ \chi_{\tau \leq T}\ \chi_{\complement D} \cdot |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)| \bar{e}^{\alpha\tau} \quad ,$$

$$I = III + IV \quad ,$$

$$IV \leq 2\|\,l\,\|\ \gamma_T(R) , \quad (\text{cf. } (1.4)) \quad ,$$

$$III = E_x\ \chi_{\tau \leq T} \cdot \chi_{\left(\sup\limits_{0 \leq t \leq T} d(x_t, x) \leq R\right)} \cdot |l(x_\tau) - \Psi^n(x_\tau)| \bar{e}^{\alpha\tau} \quad ,$$

Donc,

$$III \leq \sup_{y \in \tilde{K}} |l(y) - \Psi^n(y)| \quad ,$$

et cette estimation est uniforme pour $x \in K$.

D'où

$$|J_x^n(\tau) - J_x(\tau)| \leq 2\|l\|\ \bar{e}^{\alpha T} + 2\|l\|(\bar{e}^{\alpha T} + \gamma_T(R)) + \sup_{y \in \tilde{K}} |l(y) - \Psi^n(y)|$$

d'où, comme le second membre ne dépend pas de τ, ni de $x \in K$,

$$\sup_{x \in K} |u^n(x) - u(x)| \leq 2\|l\|(\bar{e}^{\alpha T} + \gamma_T(R)) + \sup_{y \in \tilde{K}} |l(y) - \Psi^n(y)| .$$

En passant à la limite en n puis en $R \uparrow \infty$, puis $T \uparrow \infty$ on obtient le résultat.

b) Le cas arrêté - hypothèse (3.2)

On procède comme en (a) : on note $\tilde{\Phi}(t)$ le semi groupe du processus non arrêté et on rappelle que

$$l = \Psi\ \chi_{\mathcal{O}}$$

On commence par supposer $\Psi \in \mathcal{D}_A$ domaine du générateur de $\tilde{\Phi}$ dans C :
on a

$$(3.13) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{E}_x \left(\int_0^{\tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} L(x_s) ds + \chi_{\tau < \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha \tau} \Psi(x_\tau) \right),$$

si $\tilde{E}_x$ désigne l'espérance pour la mesure correspondant au processus non arrêté.

La formule de Dynkin pour $\Psi \in \mathcal{D}_A$ donne

$$\tilde{E}_x \, e^{-\alpha \tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} \Psi(x_{\tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}}) = \Psi(x) + \tilde{E}_x \int_0^{\tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} [A\Psi - \alpha \Psi](x_s) ds$$

d'où

$$\tilde{E}_x \, e^{-\alpha \tau} \Psi(x_\tau) \chi_{\tau < \tau_{\mathcal{O}}} = \Psi(x) + \tilde{E}_x \int_0^{\tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} [A\Psi - \alpha \Psi](x_s) ds$$

$$- \tilde{E}_x \, \chi_{\tau \geq \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha \tau_{\mathcal{O}}} \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}})$$

donc

$$(3.14) \qquad u(x) = \Psi(x) + \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{E}_x \left\{ \int_0^{\tau \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} [L + A\Psi - \alpha \Psi](x_s) ds \right.$$

$$\left. - \chi_{\tau \geq \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha \tau} \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) \right\}$$

On pose

$$g = L + A\Psi - \alpha \Psi$$

comme $A\Psi - \alpha \Psi \in C$, g vérifie les hypothèses du théorème I.2.1.

De plus $\Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) \geq 0$ par (3.2). De même

$$u_\varepsilon(x) = \Psi(x) + \operatorname*{Inf}_{v} \tilde{E}_x \left\{ \int_0^{\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} \, e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s v_\lambda d\lambda} [g] \, ds \right.$$

$$\left. - e^{-\alpha \tau_{\mathcal{O}}} \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) \right\}.$$

On définit comme précédemment

$$\tilde{u}(x) = u(x) - \Psi(x), \quad \tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - \Psi ,$$

et à τ on associe v_τ comme en (a).

D'ou maintenant

$$(3.15) \qquad \tilde{J}_x^\varepsilon(v_\tau) - \tilde{J}_x(\tau) = \tilde{E}_x \int_{\tau\Lambda\tau_{\mathcal{O}}}^{\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau\Lambda\tau_{\mathcal{O}})} g(x_s)ds$$

$$- e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}}\, \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) + \chi_{\tau \geq \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}}\, \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) .$$

On a

$$|\tilde{E}_x \int_{\tau\Lambda\tau_{\mathcal{O}}}^{\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau\Lambda\tau_{\mathcal{O}})} g(x_s)ds| \leq \|g\| \frac{\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1}$$

et

$$- e^{-\alpha\tau}\Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) + \chi_{\tau \geq \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}}\, \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) = - e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}}\, \Psi(x_{\tau_{\mathcal{O}}})\chi_{\tau<\tau_{\mathcal{O}}}$$

donc ceci est <u>négatif</u> d'après (3.2). D'où

$$\tilde{J}_x^\varepsilon(v_\tau) - \tilde{J}_x(\tau) \leq C.\ \varepsilon .$$

comme on a toujours $\tilde{u}_\varepsilon \geq \tilde{u}$, on termine la démonstration comme au (a) pour obtenir

$$(3.16) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \| u_\varepsilon - u \| = 0 \quad \text{si } \Psi \in \mathcal{D}_A \quad (\text{avec } (3.2))$$

Si maintenant $\Psi \in C_o$, $\Psi \geq 0$ sur $\mathcal{O}^c$.

On peut trouver $\tilde{\Psi}^n \in \mathcal{D}_A$ $\tilde{\Psi}^n \to \Psi$ dans C_o ; posant

$$\beta_n = \sup_x |\tilde{\Psi}^n(x) - \Psi(x)|$$

On a

$$\tilde{\Psi}^n + \beta_n \geq \Psi .$$

donc si l'on pose

$$\Psi^n = \tilde{\Psi}^n + \beta_n, \text{ on a une suite } \Psi^n \text{ telle que}$$

$$\Psi^n \geq 0 \text{ sur } \mathcal{O}^c$$

$$\Psi^n \in C_o$$

$$\Psi^n \in \mathcal{D}_A \quad \text{et} \quad \Psi^n \to \Psi \text{ dans } C_o$$

<u>car</u> le processus étant conservatif (cf. Remarque I.1.1)

$$\beta_n \in \mathcal{D}_A \quad (\text{et } A\beta_n = 0) .$$

On définit alors

$$u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{E}_x\left(\int_o^{\tau \wedge \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} L(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\Psi^n(x_\tau)\chi_{\tau<\tau_{\mathcal{O}}} \right)$$

et on se ramène à la situation précédente.
La fin de la démonstration s'effectue comme pour (a).

∎

<u>Corollaire I.3.1.</u>

<u>Sous les hypothèses</u> (1.1).(1.3).(2.1).(2.2)(<u>mais pas</u> (1.4)), <u>si de plus</u>

$$1 \in B_o$$

<u>alors</u> $\underline{u_\varepsilon \to u \text{ dans } B}$.

Démonstration.

On sait que $\mathcal{D}_A$ est dense dans B_o, donc en reprenant la même démonstration qu'au théorème précédent, on approche 1 par $\Psi^n \in \mathcal{D}_A$, $\Psi^n \to 1$ dans C et on obtient le corollaire.

Ce résultat est utile dans certains cas ou (1.4) est restrictive ou difficile à vérifier, et où l'on connait l'espace B_o.

■

Théorème I.3.2 : Sous les hypothèses du théorème I.3.1. u(x) est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions w vérifiant :

(3.17) $\qquad w \in C \cap D_o \quad ,$

(3.18) $\qquad w \leq 1 \quad ,$

(3.19) $\qquad w \leq \int_o^t e^{-\alpha s}\Phi(s)L\, ds + e^{-\alpha t}\Phi(t)w \ , \quad \forall\, t \geq 0 \ .$

Démonstration.

On sait déjà que $u \in C \cap D_o$ et $u \leq 1$ résulte de ce que $\tau = 0$ est admissible.

Par ailleurs u_ε vérifie

$$u_\varepsilon(x) = \int_o^t e^{-\alpha s}\Phi(s)\ [L - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - 1)^+]\ ds$$

$$+ e^{-\alpha t}\Phi(t)\ u_\varepsilon(x) \quad .$$

Donc

$$u_\varepsilon(x) \leq \int_o^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)\ L\ ds + \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)\ u_\varepsilon\ ,$$

et comme $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact on obtient (3.19).

Soit maintenant w vérifiant (3.17) à (3.19). On montre comme il a déjà été fait que (3.19) implique que

$$Y(s) = \bar{e}^{\alpha s} w(x_s) + \int_o^s \bar{e}^{\alpha t} L(x_t) dt$$

est une sous martingale, qui est continue à droite (car $w \in C$) et bornée. Le théorème d'arrêt donne alors $\forall\ \tau$ temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$:

$$E_x\ Y(\tau) \geq E_x\ Y(o)$$

soit

$$w(x) \leq E_x \int_o^\tau \bar{e}^{\alpha t} L(x_t) dt + \bar{e}^{\alpha\tau}\ l(x_\tau)$$

=>

$$w(x) \leq J_x(\tau) \quad \forall\ \tau \quad \text{d'où} \quad w \leq u\ .$$

■

<u>Théorème I.3.3</u> : <u>Sous les hypothèses du théorème I.3.1, le temps d'arrêt</u>

$$\hat{\tau} = \text{Inf}\ (s \geq 0,\ u(x_s) = l(x_s))$$

<u>est optimal : autrement dit</u>

(3.20) $$u(x) = J_x(\hat{\tau})\ .$$

<u>Démonstration.</u>

On la fera pour le cas non compact, il est facile de simplifier la démonstration pour E compact. Soit $x \in E$, et supposons d'abord $u(x) < l(x)$. Soit $\delta > 0$ tel que $u(x) < l(x) - \delta$ et $R > 0$, on pose

$$\tau_R = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0,\ \ d(x_s,x) \geq R)$$

$$\tau^\delta = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0,\ \ u(x_s) \geq l(x_s) - \delta)$$

Pour $s \in [0,\ \tau^\delta \Lambda\ \tau_R[$

$$u(x_s) - l(x_s) < -\delta \qquad P_x \text{ ps }.$$

Soit $\varepsilon_\delta > 0$ tel que,

$$\varepsilon \leq \varepsilon_\delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\substack{y \\ |y-x|\leq R}} |u_\varepsilon(y) - u(y)| \leq \frac{\delta}{2} \ .$$

Alors $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$ et $s \in [0.\tau^\delta \Lambda \tau_R[\ \Rightarrow$

$$u_\varepsilon(x_s) \leq u(x_s) + \frac{\delta}{2} \leq l(x_s) + \frac{\delta}{2} - \delta = l(x_s) - \frac{\delta}{2}$$

en particulier $u_\varepsilon(x_s) < l(x_s)$.

Donc $\hat{\tau}^\varepsilon \geq \tau^\delta \Lambda \tau_R$, (avec comme précédemment

$$\hat{\tau}^\varepsilon = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0,\ u_\varepsilon(x_s) \geq l(x_s)) \ .$$

Or on a $u_\varepsilon \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, et donc

$$u_\varepsilon = R_\alpha(\alpha u_\varepsilon - \tilde{A} u_\varepsilon) \qquad (\text{cf. Dynkin } [21] \text{ th.1.7}) \ ,$$

et par le théorème 5.1. de [21],

$$E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau^\delta \Lambda \tau_R}\, u_\varepsilon(x_{\tau^\delta \Lambda \tau_R}) - u_\varepsilon(x) =$$

$$= E_x \int_0^{\tau^\delta \Lambda \tau_R} \bar{e}^{\alpha s} [\tilde{A} u_\varepsilon - \alpha u_\varepsilon](x_s) ds \ ,$$

$$\hat{\tau}^{\varepsilon} \geq \tau^{\delta} \Lambda \tau_R \Rightarrow$$

$$(\tilde{A}u_{\varepsilon} - \alpha u_{\varepsilon})(x_s) = - L(x_s) \qquad s \in [0, \tau^{\delta} \Lambda \tau_R[\ ,$$

d'où

$$E_x \, \bar{e}^{\alpha \tau^{\delta} \Lambda \tau_R} \, u_{\varepsilon}(x_{\tau^{\delta} \Lambda \tau_R}) - u_{\varepsilon}(x) = - E_x \int_0^{\tau^{\delta} \Lambda \tau_R} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds.$$

De la convergence compacte de u_{ε} vers u, on déduit

$$E_x \, \bar{e}^{\alpha \tau^{\delta} \Lambda \tau_R} \, u(x_{\tau^{\delta} \Lambda \tau_R}) - u(x) = - E_x \int_0^{\tau^{\delta} \Lambda \tau_R} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds \ . \tag{3.21}$$

On va montrer maintenant

$$\tau^{\delta} \uparrow \hat{\tau} \qquad \text{ps } P_x \ .$$

En effet : $\tau^{\delta} \uparrow$ quand $\delta \downarrow 0$, soit donc

$$\tilde{\tau} = \lim_{\delta \downarrow 0} \tau^{\delta} \ .$$

On a $\tilde{\tau} \leq \hat{\tau}$ car $\tau^{\delta} \leq \hat{\tau} \quad \forall \ \delta$.

De plus x_t est quasi continu à gauche donc

$$x_{\tau^{\delta}} \to x_{\tilde{\tau}} \quad P_x \quad \text{ps} \quad \text{sur } \{\tilde{\tau} < + \infty\} \ ,$$

or $u(x_{\tau^{\delta}}) \geq l(x_{\tau^{\delta}}) - \delta$

donc

$$u(x_{\tilde{\tau}}) \geq l(x_{\tilde{\tau}}) \quad (\text{donc} =) \quad \text{sur } \{\hat{\tau} < + \infty\}$$

donc $\tilde{\tau} \geq \hat{\tau}$ sur $\{\tilde{\tau} < + \infty\}$

donc $\tilde{\tau} = \hat{\tau}$ sur $\{\tilde{\tau} < + \infty\}$.

De plus

$$\tilde{\tau} \leq \hat{\tau}, \text{ donc } \tilde{\tau} = +\infty \Rightarrow \hat{\tau} = +\infty ,$$

finalement $\quad \tilde{\tau} = \hat{\tau} \quad P_x \quad$ ps .

Alors en utilisant la quasi continuité à gauche et $u \in C$ dans (3.21), on a

$$u(x_{\tau^\delta \wedge \tau_R}) \to u(x_{\hat{\tau} \wedge \tau_R}) \quad P_x . \quad \text{ps sur } \{\hat{\tau} \wedge \tau_R < \infty\}$$

et la présence du terme $e^{-\alpha\tau^\delta \wedge \tau_R}$ permet d'écrire dans tous les cas

$$(3.22) \qquad E_x\, e^{-\alpha\hat{\tau}\wedge\tau_R}\, u(x_{\hat{\tau}\wedge\tau_R}) - u(x) = - E_x \int_0^{\hat{\tau}\wedge\tau_R} e^{-\alpha s} L(x_s) ds$$

De même $\tau_R \uparrow \infty$ donne

$$E_x\, e^{-\alpha\hat{\tau}}\, u(x_{\hat{\tau}}) - u(x) = - E_x \int_0^{\hat{\tau}} e^{-\alpha s} L(x_s) ds .$$

Comme $u(x_{\hat{\tau}}) = l(x_{\hat{\tau}}) \quad P_x \quad$ ps sur $\{\hat{\tau} < \infty\}$

on a bien $\qquad u(x) = J_x(\hat{\tau})$.

Si maintenant $u(x) = l(x)$, on a $\hat{\tau} = 0$ et donc

$$u(x) = J_x(\hat{\tau}) .$$

■

Corollaire I.3.3.

Sous les hypothèses du théorème précédent

$$\hat{\tau}^\varepsilon \uparrow \hat{\tau} \qquad P_x \quad \text{ps} ,$$

La démonstration est identique à celle de A.BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11].

■

Corollaire I.3.4.

Sous les hypothèses (1.1).(1.3) si de plus, X *est quasi continu à gauche et* $1 \in B_o$, *alors les conclusions des théorèmes I.3.2 et I.3.3 sont encore vraies.*

Démonstration.

On utilise le corollaire I.3.1. L'analyse des démonstrations des théorèmes I.3.2 et I.3.3 montre facilement que les propriétés qui interviennent sont seulement $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact, u_ε, u continues, et X quasi continu à gauche.

∎

Remarque I.3.2.

On peut aussi considérer une variante du problème d'arrêt optimal comme dans [11] :

Soit F un ouvert de E, on pose le problème

$$\text{(3.22)} \qquad \text{Minimiser } J_x(\tau) = E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds$$

sur les temps d'arrêt τ tels que

$$\text{(3.23)} \qquad x_\tau \notin F .$$

Montrons que, dans certains cas, ce problème entre dans la théorie générale.

Posons :

$$\Psi(x) = \begin{cases} E_x \displaystyle\int_0^{\tau^o} e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds & \text{sur } F^c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\tau^o = \text{Inf}\ (s \geq 0,\ x_s \notin F)$.

Alors si l'on pose

$$(3.24) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\{\tau | x_\tau \notin F\}} J_x(\tau) \quad ,$$

$$(3.25) \qquad w(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{J}_x(\tau) \quad ,$$

$$(3.26) \qquad \tilde{J}_x(\tau) = E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau} \Psi(x_\tau) \quad ,$$

alors $u(x) = w(x)$, comme on va le démontrer ;

Donc dans le cas où $\Psi \in C_b^o(E)$ ([1]), on sera ramené à un problème déjà traité.

Supposons τ tel que $x_\tau \notin F$, τ est admissible pour w

$$\tilde{J}_x(\tau) = E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau} \Psi(x_\tau)$$

$$x_\tau \notin F \quad \text{et} \quad \Psi(x) = 0 \quad \text{sur } F^c \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{J}_x(\tau) = J_x(\tau) \ .$$

Soit maintenant τ temps d'arrêt quelconque

$$E_x \, e^{-\alpha\tau} \Psi(x_\tau) = E_x \, e^{-\alpha\tau} \, E_{x_\tau} \int_0^{\tau^o} e^{-\alpha s} f(x_s) ds$$

Si l'on pose $\tilde{\tau}^o = \tau + \tau^o \circ \theta_\tau$, on a

$$E_x \, e^{-\alpha\tau} \Psi(x_\tau) = E_x \int_\tau^{\tilde{\tau}^o} e^{-\alpha s} f(x_s) ds$$

(par la propriété de Markov forte)

$$\Rightarrow \qquad \tilde{J}_x(\tau) = E_x \int_0^{\tilde{\tau}^o} e^{-\alpha s} f(x_s) ds$$

or $x_{\tilde{\tau}^o} \notin F$ donc $\tilde{\tau}^o$ est admissible pour u, donc

$$u \leq w \ . \qquad \text{D'où le résultat.}$$

([1]) On notera parfois C_b^o l'espace des fonctions continues bornées.

Un temps d'arrêt optimal pour (3.25) est

$$\hat{\tau} = \text{Inf } (s \geq 0 \text{ , } w(x_s) = \Psi(x_s))$$

et ce temps d'arrêt donne un temps d'arrêt optimal pour (3.22). à savoir

$$\tau = \hat{\tau} + \tau^o {}_o \theta_{\hat{\tau}}$$

puisque l'on a bien

$$x_\tau \notin F$$

et

$$J_x(\tau) = \tilde{J}_x(\hat{\tau}) = w(x) = u(x) \text{ .}$$

On peut donner des exemples où <u>Ψ est continue</u> :

(i) diffusion non dégénérée à coefficients continus (cf. aussi BENSOUSSAN - LIONS [11]).

(ii) diffusion avec terme poissonnien avec des hypothèses convenables (F régulier, hypothèses du §.1.7 sur les coefficients).

(iii) Processus semi-markovien avec F de la forme

$$E_1 \times [0,\bar{y}[\quad (\text{cf. } \S. \text{ I.5.}) \text{ .}$$

<u>Remarque I.3.3</u>.

Sauf la continuité du coût optimal, le type de caractérisation du théorème I.3.2 est bien connu cf. GRIGELIONIS-SHIRIAEV [33], SHIRIAEV [65] et sa bibliographie. On peut aussi dire que si

$$u_o(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\alpha s} L(x_s) ds$$

alors

$$u_o(x) - u(x)$$

est la plus petite majorante excessive de $u_o(x) - l(x)$, (cf. [65]).

L'approche par le problème pénalisé (introduite sous la forme probabiliste par A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11]), a l'intérêt (entre autres) de permettre de faire le lien avec les équations et inéquations aux dérivées partielles comme on le verra sur les exemples.

Les problèmes d'arrêt optimal connaissent encore des développements dans la littérature récente. Sans prétendre être exhaustif on peut citer, pour les cas markoviens, ENGELBERT [78], [79], BISMUT [17], MERTENS [46]; et pour des processus généraux (non nécessairement markoviens), FAKEEV [80], SKALI [64]. Enfin, l'étude des inéquations variationnelles ou des problèmes de frontière libre associés aux problèmes d'arrêt optimal fait également l'objet de très nombreux travaux dont on trouvera une bibliographie complète dans [11].

I.4. PROBLEME EN HORIZON FINI.

On considère maintenant le problème suivant (sans hypothèse précise , pour l'instant) :

minimiser, par rapport à, τ temps d'arrêt, $t \leq \tau \leq T$

$$J_{xt}(\tau) = E_{xt} \int_t^{T \wedge \tau} f(x_s, s) ds + \chi_{\tau < T} \Psi(x_\tau, \tau)$$

où E_{xt} signifie que l'on dispose d'une probabilité P_{xt} avec $P_{xt}(x_t = x) = 1$.

Pour étudier ce type de problème, on va se ramener au cadre des paragraphes précédents pour le processus (t, x_t) arrêté quand $t \geq T$.

Précisons tout cela :

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}_t, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\theta}_t, \tilde{x}_t, \tilde{P}_{\tilde{x}})$ un processus de Markov homogène à valeurs dans E (localement compact à base dénombrable).

On note $\tilde{\Phi}(t)$ le semi groupe correspondant.

On définit :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \tilde{\Omega} \times R^+ \quad , \quad \mathfrak{F}_t = \tilde{\mathfrak{F}}_t \otimes B_{R^+} \\ \theta_t(\tilde{\omega}, s) = (\tilde{\theta}_t \tilde{\omega}, s+t) \\ P_{xt} = P_x \otimes \varepsilon_t \qquad (\varepsilon_t \text{ masse 1 en t}) \\ y_t(\tilde{\omega}, s) = (\tilde{x}_t(\tilde{\omega}), s+t) \end{array} \right.$$

(On peut d'ailleurs effectuer cette construction quand $\tilde{x}_t$ est un processus <u>non homogène</u> : on se ramène ainsi au cas homogène. cf. MAYER [44]).

On pose également :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \mathcal{O} = E \times [0,T[\\ \tau_o = \operatorname{Inf}(t \geq 0 \quad y_t \notin \mathcal{O}) \; . \end{cases}$$

On a $\tau_o(\tilde{\omega},s) = T - s$.

Le semi groupe de y_t est

$$(\Phi(t)f)\;(x,s) = \tilde{\Phi}(t)f(x,s+t) \quad ,$$

le semi groupe de $y_{t_\Lambda \tau_o}$ est alors

$$(4.3)\qquad \Phi(t)f(x,s) = \tilde{\Phi}(t_\Lambda(T-s))f(x,(s+t)_\Lambda T)$$

$$0 \leq s \leq T \quad .$$

On suppose alors

(4.4) $\Phi(t)$ défini par (4.3) est fellerien .

On note C l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\bar{\mathcal{O}} = E \times [0,T]$, B l'ensemble des fonctions mesurables bornées sur $\bar{\mathcal{O}}$, $D_o = \{f \in B,\ f(x,T) = 0 \quad x \in E\}$.

(4.5) On donne $f \in C$, $\Psi \in C$,

$\Psi(x,T) \geq 0$ et on pose

$$(4.6)\qquad L = f\chi_{\mathcal{O}} \;,\quad l = \Psi\chi_{\mathcal{O}} \;.$$

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate des théorèmes I.3.2 - I.3.3.

Théorème I.4.1 : Sous les hypothèses (4.4),(4.5) la fonction

(4.7) $$u(x,s) = \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{E}_x \left\{ \int_0^{\tau_\Lambda (T-s)} f(\tilde{x}_t, s+t)dt + \chi_{\tau < T-s} \Psi(\tilde{x}_\tau, s+\tau) \right\}$$

où l'inf est pris sur les temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{F}}_t$, est l'élément maximum de l'ensemble des w vérifiant

(4.8) $$\begin{cases} w \leq \Psi \\ w(x,s) \leq \tilde{\Phi}(t) w(x,s+t) + \displaystyle\int_0^t \tilde{\Phi}(\sigma) f(x,s+\sigma)d\sigma , \\ \qquad 0 \leq t \leq T - s , \\ w \in C \cap D_o . \end{cases}$$

De plus

(4.9) $$\hat{\tau}_s = \operatorname{Inf}(t \geq 0,\ u(\tilde{x}_t, s+t) = \Psi(\tilde{x}_t, s+t) \wedge (T-s))$$

est optimal $(u(x,s) = J_{xs}(\hat{\tau}_s)$ si $J_{xs}(\tau)$ est l'espérance intervenant dans (4.7)).

Remarque I.4.1.

(i) On remarquera que (4.7) peut s'écrire

$$\operatorname*{Inf}_{\tau} E_{sx} \int_s^{\tau_\Lambda T} f(x_t, t)dt + \Psi(x_\tau, \tau) \chi_{\tau < T}$$

avec P_{xs} probabilité sur $G_s = \tilde{\theta}_s^{-1}\mathfrak{F}$ définie par $E_{xt} \varphi_o \tilde{\theta}_t = \tilde{E}_x \varphi$ $\forall\ \varphi \in \mathfrak{F}$, bornée et τ temps d'arrêt de la famille

$$G_s^{s+t} = \tilde{\theta}_s^{-1}\ \tilde{\mathfrak{F}}_t \qquad t \geq 0$$

(ii) l'hypothèse (4.4) est vérifiée dès que $\tilde{\Phi}$ est fellerien quand E est compact.
On verra des cas (exemple des processus semi markoviens) où (4.4) est vérifié avec E non compact.

■

I.5. EXEMPLE 1 : PROCESSUS SEMI-MARKOVIENS.

I.5.1. Définitions et propriétés.

De manière heuristique un processus semi-markovien x_t est un processus de saut tel que, si l'on note $y_t = t - \sup(s < t, x_s \neq x_t)$ (age du dernier saut avant t), alors (x_t, y_t) est un processus de markov fort.

On se restreindra ici à une classe de processus semi-markoviens qui sont assez réguliers.

Soit $E_1 = Z$ (pour simplifier un peu), muni de la topologie discrète et de la tribu borélienne associée. On note Ω l'ensemble des couples de fonctions $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ de R^+ dans $E_1 \times R^+ = E$ telles qu' il existe

$$t_o = 0 < t_1 < t_2 \dots < t^n \uparrow +\infty ,$$

avec

$$\omega_1(t) = \xi_i \quad t \in [t_i, t_{i+1}[\quad i \geq 0 , \ \xi_i \in E_1$$

$$\omega_2(t) = \begin{cases} t - t_i & t \in [t_i, t_{i+1}[\quad i \geq \\ \alpha + t & t \in [0, t_1[\quad \alpha \in R^+ \end{cases}$$

On pose $x_t(\omega) = \omega_1(t)$, $y_t(\omega) = \omega_2(t)$

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{x_s, y_s \ s \leq t\}, \ (\theta_t\omega)(s) = \omega(t+s) \quad s \geq 0 .$$

On donne alors $\lambda : E_1 \times R^+ \to R^+$

(5.1) $\qquad 0 \leq \lambda(x,y) \leq M , \quad y \to \lambda(x,y)$ continue

et une probabilité de transition $q(x,y;\Gamma)$ de E dans E_1 avec

(5.2) $\left|\begin{array}{l} y \to \int_{E_1} q(x,y,dz)\varphi(z) \text{ est continue } \forall x \in E_1 \\ \forall \varphi \text{ mesurable bornée sur } E_1 . \end{array}\right.$

On a alors les propriétés suivantes

(5.3) On pose $V_o = \text{Inf } (s \geq 0,\ x_s \neq x_o)$
c'est un $\mathcal{F}_t$ - temps d'arrêt (cf. [35]).

(5.4) à (λ,q) correspond un processus de markov à valeur dans E, noté

$$X = (\Omega,\ \mathcal{F}_t,\ \theta_t,\ (x_t,y_t),\ P_{xy})$$

avec

(5.5) $$P_{xo}(V_o \leq y) = 1 - \exp(-\int_o^y \lambda(x,\sigma)d\sigma)$$

(5.6) $$P_{xo}(V_o \leq y,\ x_{V_o} \ \Gamma) = \int_o^y \lambda(x,\sigma)\exp(-\int_o^v \lambda(\ ,\sigma)d\sigma)q(x,v,\Gamma)dv$$

(cf. [71], [31] et pour des cas plus généraux JACOD [35]).

(5.7) le processus X est Fellerien (cf. [71]).

On note $\Phi(t)$ le semi groupe du processus X, la propriété suivante est une conséquence du caractère fortement marko [illegible] !
$\forall f \in B$

(5.8) $$\Phi(t)f(x,y) = \exp(-\int_y^{y+t} \lambda(x,\sigma)d\sigma)f(x,y+t$$
$$+ \int_o^t \lambda(x,y+v)\exp(-\int_y^{y+v}\lambda(x,\sigma)d\sigma)\int_{E_1} q(x,y+v,dz)\Phi(t-v)f(z,o)dv$$

D'autre part le générateur infinitésimal faible de X à pour expression, $\forall f \in C$, telle que $\frac{\partial f}{\partial y} \in C$

(5.9) $$\tilde{A}f = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda(x,y)\left[\int_{E_1} q(x,y,dz)f(z,o)-f(x,y)\right]$$

(en fait on peut préciser un peu plus, il suffit, pour que $f \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, que f soit continue à droite en y, de dérivée à droite (en y) continue à droite).

On vérifie aisément (en utilisant (5.8) par exemple) que si f est <u>uniformément continue</u> bornée, alors $f \in B_o$.

(5.10) le processus X est quasi continu à gauche en effet en prenant

$$f(x',y') = \chi_{U^c_\varepsilon}(x',y') ,$$

où U_ε est une boule ouverte de rayon ε centrée en (x,y), dans (5.8)

On obtient, si $P(t,x,y,\Gamma) \quad P_{xy}((x_t,y_t) \in \Gamma)$,

$$P(t,(x,y),U^c_\varepsilon) \leq \chi_{U^c_\varepsilon}(x,y+t) + c.t \qquad (^1)$$

ε étant fixé > 0, pour t assez petit on a donc

$$P(t,(x,y),U^c_\varepsilon) \leq c.t$$

donc manifestement

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{(x,y)\in K} P(t,(x,y),U^c_\varepsilon) = 0 .$$

---

(1) Comme E_1 est muni de la métrique discrète, dès que $\varepsilon < 1$, on a $x \notin U^c_\varepsilon$

pour tout compact K de E .

Ceci (cf. DYNKIN [21]; p) implique que le processus X est quasi continu à gauche.

On a donc ici un processus de Markov homogène vérifiant (1.3), quasi continu à gauche. De plus B_o contient les fonctions uniformément continues (1).

Donc, compte tenu du corollaire I.3.4, les théorèmes I.3.2 et I.3.3 sont applicables avec 1 uniformément continue.

Remarque I.5.1.

Un autre exemple est constitué par les processus de Markov de saut pur : pour un espace d'états dénombrables, c'est un cas particulier des processus semi markoviens précédents.

∎

---

(1) Avec la topologie discrète sur E_1, f uniformément continue signifiera

$$\sup_{x \in E_1} \sup_{\substack{y',y'' \\ |y'-y''| \leq \delta}} |f(x,y')-f(x,y'')| \to 0 \text{ quand } \delta \to 0.$$

I.5.2. Processus semi markovien arrêté.

Soit $\bar{y} > 0$, on pose $\mathcal{O} = E_1 \times [0,\bar{y}[$ et

(5.11) $$\tau_o = \operatorname{Inf} (t \geq 0 \quad y_t \geq \bar{y}) ,$$

dont on peut montrer que c'est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt. On notera, et ceci est fondamental, que τ_o ne peut pas être un instant de saut car $y_{\tau_o}(\omega) = \bar{y}$ pour tout ω (donc $y_{\tau_o}(\omega) > 0$) alors que si $x_t \neq x_{t-}$ on a $y_t = 0$.

On va montrer d'abord que le processus $(x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o})$ vérifie les hypothèses du Théorème I.2.1 en particulier la propriété de Feller. Puis on verra que le coût optimal du problème d'arrêt est solution d'une inéquation variationnelle.

On notera que $(x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o})$ est un processus à valeur dans $\bar{\mathcal{O}}$.

Lemme I.5.1.

Soit $\Phi(t)$ le semi groupe du processus $(x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o})$, (sous les hypothèses (5.1), (5.2)),

(5.12) $$\Phi(t)f(x,y) = E_{xy}\, f(x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o}) ,$$

(i) Ce semi groupe est fellerien.

(ii) $g(x,y) = E_{xy} \int_0^{\tau_o} e^{-\alpha s} f(x_s,y_s)ds \in C^o(\bar{\mathcal{O}}) \cap \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ si $f \in C^o(\bar{\mathcal{O}})$.

Démonstration.

On notera souvent $z_t = (x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o})$. Soit $y \in \mathcal{O}$, $h > 0$ tel que $(x,y+h) \in \mathcal{O}$, $f \in C^o(\bar{\mathcal{O}})$, ν désignant le premier instant de saut de x_t, on a :

$$\Phi(t+h)f(x,y) = E_{xy}\,\chi_{\tau_0\Lambda\nu > h}\,\Phi(t)f(x,y+h)$$

$$+ E_{xy}\,\chi_{\tau_0\Lambda\nu \leq h}\,f(z_{t+h}) .$$

Posons $\rho(h) = E_{xy}\,\chi_{\tau_0\Lambda\nu > h}$.

On a

$$\lim_{h\downarrow 0} \rho(h) = 1 \quad (\text{car } \tau > 0,\ \nu > 0\ P_{xy}\ \text{ps},\ y < \bar{y}),$$

d'ou

$$\Phi(t)f(x,y+h) = \frac{1}{\rho(h)}\left[\Phi(t+h)f(x,y) - Y_h\right] ,$$

où

$$Y_h = E_{xy}\,\chi_{\tau_0\Lambda\nu \leq h}\,f(z_{t+h}) .$$

On a

$$\lim_{h\downarrow 0} Y_h = 0 \quad , \quad \text{donc}$$

(5.13) $$|\Phi(t)f(x,y+h) - \Phi(t)f(x,y)| \leq E_{xy}|f(z_{t+h})-f(z_t)|+\varepsilon_h$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \varepsilon_h = 0 .$$

De la continuité à droite de z_t et de la continuité de f on déduit $f(z_{t+h}) \to f(z_t)$ quand $h \to 0$ donc le second membre de (5.13) tend vers 0.

On procède de même dans l'autre sens : soit $t > 0$, $h > 0$, $t-h > 0$

$$\Phi(t)f(x,y-h) = E_{x,y-h}\chi_{\tau_0\Lambda\nu > h}\,E_{z_h}\,f(z_{t-h})$$

$$+ E_{x,y-h}\chi_{\nu\Lambda\tau_0 \leq h}\,f(z_t),$$

d'où

(5.14) $$\Phi(t)f(x,y-h) = \rho(h)\Phi(t-h)f(x,y) + Y_h$$

avec $\lim\limits_{h\downarrow 0} \rho(h) = 1$

et

$$|Y_h| \leq \| f\| \, E_{x,y-h} \, \chi_{\tau_0 \wedge \nu \leq h}$$

mais

$$y < y_o \Rightarrow \tau_o > h \qquad P_{x,y-h} \ \text{ps.}$$

donc

$$|Y_h| \leq \| f\| \, E_{x,y-h} \, \chi_{\nu \leq h} \, ,$$

$$|Y_h| \leq \| f\| \quad [1 - \exp(-\int_{y-h}^{y} \lambda(x,\sigma)d\sigma)]$$

$\Rightarrow \qquad \lim\limits_{h\downarrow 0} |Y_h| = 0$,

de (5.14) on déduit donc :

$$|\Phi(t)f(x,y-h)-\Phi(t)f(x,y)| \leq |\Phi(t-h)f(x,y)-\Phi(t)f(x,y)| + \varepsilon_h$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \varepsilon_h = 0 \, .$$

Posons

$$X = |\Phi(t-h)f(x,y)-\Phi(t)f(x,y)| \, ,$$

on a

$$X = E_{xy}|f(x_t,y_t)-f(x_{t-h},y_{t-h})|\chi_{\tau_o > t}$$

$$+ E_{xy}|f(x_{\tau_o},y_{\tau_o})-f(x_{t-h},y_{t-h})|\chi_{t-h < \tau_o < t}$$

mais $y_{\tau_o} = \bar{y}$

et

$$(x_{t-h},y_{t-h}) = (x_{\tau_o} \, , \bar{y} - h)$$

sur $(t-h < \tau_o < t)$, donc

$$X = E_{xy}|f(x_t,y_t)-f(x_{t-h},y_{t-h})|\chi_{\tau_o > t}$$

$$+ E_{xy}|f(x_{\tau_o},y_o)-f(x_{\tau_o},\bar{y} - h)|\chi_{t-h < \tau_o < t}$$

La quasi continuité à gauche de (x_t, y_t) montre que le premier terme tend vers 0 quand $h \downarrow 0$, et le second terme tend vers 0 par la continuité de f donc $\lim\limits_{h \downarrow 0} X = 0$ et on a démontré ainsi la continuité de $\Phi(t)f(x,y)$ en $(x,y) \in \mathcal{O}$.

Si maintenant $y = \bar{y}$ $((x,y) \in \partial\,\mathcal{O})$:

On a

$$E_{x,y-h} f(z_t) = E_{x,\bar{y}-h}\, \chi_{\tau_0 \geq h}\, \chi_{\nu > h}\, E_{z_h} f(z_{t-h}) + Y_h$$

de plus $\tau_0 \geq h$ $P_{x,\bar{y}-h}$ ps.

et $z_h = (x,\bar{y})$ sur $\{\nu > h\}$ $P_{x\bar{y}-h}$ ps.

donc

$$E_{x,\bar{y}-h} f(z_t) = f(x,\bar{y})\, E_{x,\bar{y}-h}\, \chi_{\nu > h} + Y_h$$

d'où comme précédemment

$$\Phi(t)f(x,\bar{y}-h) \to \Phi(t)f(x,\bar{y}) .$$

Démonstration de (ii).

Soit $f \in C^0(\bar{\mathcal{O}})$, on a $L = f\chi_{\mathcal{O}} \in \tilde{B}_0$ (cf. (2.9)) donc $R_\alpha L \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ et $R_\alpha L$ est l'unique solution de

$$\alpha v - \tilde{A}v = f\chi_{\mathcal{O}}, \quad v \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} \tag{5.15}$$

De plus $v(x,\bar{y}) = 0$ (ou $v(x,y) = 0$ $y \geq \bar{y}$)

Etudions alors l'équation

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{\partial w}{\partial y} + (\lambda+\alpha)w - \lambda Q w = f \quad (x,y) \in \mathcal{O} , \\ & w(x,\bar{y}) = 0 . \end{aligned}\right. \tag{5.16}$$

où

$$(5.17) \qquad Qw(x,y) = \int_{E_1} q(x,y,dz)w(z,o) \,.$$

On va démontrer que (5.16) a une solution unique

$$w \in C_b^o(\bar{\mathcal{O}}), \quad \frac{\partial w}{\partial y} \in C_b^o(\bar{\mathcal{O}}).$$

(bien entendu, la topologie discrète sur E_1 implique que la régularité précédente n'est utile qu'en y).

Pour cela on montre que l'application φ de $C_b^o(\bar{\mathcal{O}})$ dans lui-même, définie par $\varphi(v) = w \iff$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial w}{\partial y} + (\lambda+\alpha)w = f + \lambda Qv \\[2ex] w(x,\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

est une contraction. En effet soit $V = v_1-v_2$, $W = w_1-w_2$, $w_i=\varphi(v_i)$. On a

$$-\frac{\partial W}{\partial y} + (\lambda+\alpha)W = \lambda QV \quad , \quad W(x,\bar{y}) = 0$$

Alors, de $\| QV\| \leq \| V\|$ et de

$$W(x,y) = e^{\int_0^y \lambda(x,\sigma)d\sigma} e^{\alpha y} \int_y^{\bar{y}} e^{-\int_0^s \lambda(x,\sigma)d\sigma} e^{-\alpha s} \lambda QV \, ds$$

$$W(x,y) = \int_y^{\bar{y}} e^{-\int_y^s \lambda(x,\sigma)d\sigma} e^{-\alpha(s-y)} \lambda(x,s)QV(x,s)ds$$

on déduit

$$|W(x,y)| \leq \int_y^{\bar{y}} e^{-\int_y^s \lambda(x,\sigma)d\sigma} e^{-\alpha(s-y)}(\lambda(x,s)+\alpha)\| V\| \, ds$$

$\Rightarrow$

$$|W(x,y)| \leq \| V\| \left[1 - e^{-\alpha\bar{y}} e^{-M\bar{y}} \right]$$

(où M est la borne supérieure de λ cf. (5.1)).

d'ou le résultat : donc φ un point fixe w unique dans $C_b^o(\bar{\mathcal{O}})$ et on a manifestement $\frac{\partial w}{\partial y} \in C_b^o(\bar{\mathcal{O}})$. D'autre part il est clair que $w \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ et donc on a

$$\alpha w - \tilde{A}w = f\,\chi_{\mathcal{O}} \quad , \quad w \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$$

soit $w = R_\alpha L$ ce qui termine la démonstration.

∎

Les résultats du §. I.3 sont alors applicables au processus $(x_{t\Lambda\tau_o}, y_{t\Lambda\tau_o})$ avec

$$(5.18)\quad \begin{cases} \mathcal{O} = E_1 \times [0,\bar{y}[\quad , \quad E = \bar{\mathcal{O}} \,, \\ D_o = \{v \in B \,,\ v(x,\bar{y}) = 0\} \\ L = f\chi_{\mathcal{O}} \quad f \in C_b^o(\bar{\mathcal{O}}) \\ l = \Psi\chi_{\mathcal{O}} \quad \Psi \in C_b^o(\bar{\mathcal{O}}) \ \underline{\text{uniformément continue}} \,, \\ \qquad \Psi(x,\bar{y}) \geq 0 \,. \end{cases}$$

(On vérifie que $(v-l)^+ \in C \cap D_o$ si $v \in C \cap D_o$).

Avec les hypothèses (5.18) le problème d'arrêt optimal s'écrit :

$$(5.19)\quad \begin{cases} J_{xy}(\tau) = E_{xy} \displaystyle\int_o^{\tau\Lambda\tau_o} e^{-\alpha s} f(x_s,y_s)ds + e^{-\alpha\tau}\Psi(x_\tau,y_\tau)\chi_{\tau < \tau_o} \\ u(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J_{xy}(\tau) \end{cases}$$

Résumons les résultats que l'on déduit du §. I.3 et des lemmes précédents :

<u>Théorème I.5.1</u> : <u>Sous les hypothèses du lemme I.5.1 et les hypothèses (5.18),</u> $u(x,y)$ <u>défini par (5.19) est solution maximum du problème</u> :

$$u \in C \cap D_o \ ,$$

$$u \leq 1 \ ,$$

$$u \leq \bar{e}^{\alpha h}\Phi(h)u + \int_o^h \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)1ds \quad , \quad \forall\, h \geq 0 \ .$$

<u>De plus le temps d'arrêt</u>

$$\hat{\tau} = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0,\ u(x_s,y_s) = 1(x_s,y_s))$$

<u>est optimal.</u>

∎

On va maintenant démontrer que dans certains cas u est solution d'une inéquation variationnelle.

On introduit les notations suivantes :

(5.20) $$C^1 = \{v \in C,\ \frac{\partial v}{\partial y} \in C\}$$

(5.21) $$J^{\varepsilon}_{xy}(v) = E_{xy}\int_o^{\tau_o}[f + \frac{1}{\varepsilon}\, v\Psi]\ \bar{e}^{\alpha s}\ \bar{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_o^s v_t dt}\ ds$$

où v est un processus adapté à $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans $[0,1]$

(5.22) $$u_{\varepsilon}(x,y) = \underset{v}{\mathrm{Inf}}\ J^{\varepsilon}_{xy}(v) \ .$$

<u>Lemme I.5.2.</u>

<u>Sous les hypothèses du théorème I.5.1</u> u_ε <u>est solution du problème</u>

$$(5.23)\qquad \begin{cases} w \in C^1 \\ -\dfrac{\partial w}{\partial y} + (\lambda+\alpha)w + \dfrac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+ - \lambda Q w = f \\ w(x,\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Démonstration :

Pour μ assez grand, considérons la suite d'équations

$$(5.24)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u^n}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u^n + \dfrac{1}{\varepsilon}(u^n-\Psi)^+ + \mu u^n - \lambda Q u^n = f+\mu u^{n-1} \\ u^n(x,\bar{y}) = 0 \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

avec u^o solution de

$$(5.25)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u^o}{\partial y} + (\alpha+\lambda)\, u^o - \lambda Q u^o = f \\ u^o(x,\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

(5.24) a une solution unique dans C^1 : en effet considérons l'application $W \to V$ définie par

$$(5.26)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial y} + (\alpha+\lambda+\mu)V = g + \lambda Q W - \dfrac{1}{\varepsilon}(W-\Psi)^+ \\ V\,(x,\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

pour $g \in C$.

Cette application est une contraction de C dans lui même pour μ convenablement choisi.

En effet si

$$-\frac{\partial V^i}{\partial y} + (\alpha+\lambda+\mu)V^i = \lambda Q W^i - \frac{1}{\varepsilon}(W^i-\Psi)^+$$

$$V^i(x,\bar{y}) = 0 \qquad i=1,2$$

$$V = V^1 - V^2 \quad , \quad W = W^1 - W^2$$

On a

$$V(x,y) = \exp[(\alpha+\mu)y + \int_o^y \lambda d\sigma] \int_y^{\bar{y}} \bar{e}^{(\alpha+\mu)\eta - \int_o^\eta \lambda d\sigma}$$

$$[\lambda Q W - \frac{1}{\varepsilon}[(W^1-\Psi)^+ - (W^2-\Psi)^+]\, d\eta$$

=>

$$|V(x,y)| \leq \exp(\ldots) \int_y^{\bar{y}} \bar{e}^{(\alpha+\mu)\eta - \int_o^\eta \lambda d\sigma} [\lambda + \frac{1}{\varepsilon}] \| W \| \, d\eta$$

et $0 \leq \lambda \leq M$ donne

$$\| V \| \leq \frac{\bar{e}^{My_o}(M+\frac{1}{\varepsilon})}{\alpha+\mu} \| W \| \, .$$

Donc pour μ assez grand $\| V \| < \| W \|$. L'application définie par (5.26) a donc un point fixe unique qui est dans C^1 et on vérifie facilement que pour $g = f + \mu u^{n-1}$ on a

$$u^n = R_{\alpha+\mu}[L + \mu u^{n-1} - \frac{1}{\varepsilon}(u^n - 1)^+]$$

où $R_{\alpha+\mu}$ est le résolvant du semi groupe du processus $(x_{t\wedge\tau_o}, y_{t\wedge\tau_o})$.

Comme au théorème I.2.1, on a $u^n \downarrow u_\varepsilon$ ou u_ε est défini par (5.12).

D'autre part, on a

$$u^n(x,y) + \int_y^{\bar{y}} (\alpha+\lambda+\mu)u^n d\eta + \int_y^{\bar{y}} \frac{1}{\varepsilon}(u^n-\Psi)^+ d\eta$$

$$- \int_y^{\bar{y}} \lambda Q u^n d\eta = \int_y^{\bar{y}} (f + \mu\Psi^{n-1})d\eta$$

en utilisant $u^n(x,y) \downarrow u_\varepsilon(x,y) \quad \forall \; x,y \in \bar{\mathcal{O}}$, on a

$$u_\varepsilon(x,y) + \int_y^{\bar{y}} (\alpha+\lambda+\mu)u_\varepsilon d\eta + \int_y^{\bar{y}} (\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon-\Psi)^+ - \lambda Q u_\varepsilon) d\eta$$

$$= \int_y^{\bar{y}} (f+\mu u_\varepsilon) d\eta$$

or u_ε est continue en y, on peut donc dériver cette dernière expression, d'où :

$$- \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u_\varepsilon - \lambda Q u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon-\Psi)^+ = f$$

$$u_\varepsilon(x,\bar{y}) = 0$$

et $u_\varepsilon \in C^1$, l'unicité est fournie par l'interprétation (5.22).

■

On suppose maintenant que E_1 est muni d'une mesure m telle que

(5.27) $\qquad m(E) < +\infty$

et on pose

$$L^2(\mathcal{O}) = L^2(E_1 \times [0,\bar{y}[, \; B_E \otimes B_{[0,\bar{y}[}, \; m \otimes dy) .$$

Théorème I.5.2 : Sous les hypothèses du théorème I.5.1. avec (5.27) et si de plus

(5.28) $\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \in L^2(\mathcal{O})$,

<u>la fonction</u> $u(x,y)$ <u>est solution unique de l'inéquation variationnelle</u> :

$$(5.29) \quad \begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u - \lambda Qu \leq f\,, \quad (\text{pp. en } y)\,, \\ u \leq \Psi\,, \\ u \in L^2(\mathcal{O})\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathcal{O})\,,\ u(x,\bar{y}) = 0 \\ \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u - \lambda Qu - f\right)(u-\Psi) = 0\,, \quad (\text{pp en } y) \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> :

On sait déjà que $u_\varepsilon \to u$ dans C, on cherche maintenant une estimation de $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}$.

On pose $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \Psi$, v_ε vérifie (dans $L^2(\mathcal{O})$)

$$(5.30) \qquad -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} + (\alpha+\lambda)v_\varepsilon - \lambda Q v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(v_\varepsilon)^+ = g$$

avec

$$g = f + \frac{\partial \Psi}{\partial y} - (\alpha+\lambda)\Psi - \lambda Q\Psi$$

On multiplie (5.30) par $-\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}$ (dans $L^2(\mathcal{O})$) :

$$(5.31) \qquad \left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(v_\varepsilon^+\,,\ -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right) = \left(g_\varepsilon\,,\ -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right)$$

où

$$g_\varepsilon = g + \lambda Q v_\varepsilon - (\alpha+\lambda)\, v_\varepsilon$$

et g_ε est borné dans $L^2(\mathcal{O})$ uniformément par rapport à ε.

D'autre part

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(v_\varepsilon^+,\ -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[(v_\varepsilon^+(o))^2 - (v_\varepsilon^+)^2(\bar{y})\right]$$

mais $v_\varepsilon(x,\bar{y}) = -\Psi(x,\bar{y}) \leq 0$ donc

$$\frac{1}{\varepsilon}(v_\varepsilon^+, -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}) \geq 0 ,$$

d'où (5.31) donne

$$\left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2}^2 \leq |g_\varepsilon|_{L^2} \cdot \left|\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2} ,$$

donc $\left|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2}$ est borné et il en est donc de même de $\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2}$.

On peut maintenant passer à la limite dans (5.23).

Posons

$$Au_\varepsilon = -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u_\varepsilon - \lambda Q u_\varepsilon$$

alors $u_\varepsilon \to u$ dans C et $L^2(\mathcal{O})$ fort, $Au_\varepsilon \to Au$ dans L^2 faible.

Soit $v \in L^2$, $v \leq \Psi$, comme $(v-\Psi)^+ = 0$, on a

$$(Au_\varepsilon - f, v-u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}((v-\Psi)^+ - (u_\varepsilon-\Psi)^+, v-u_\varepsilon) \geq 0$$

car $v \to (v-\Psi)^+$ est monotone, d'ou quand $\varepsilon \to 0$

(5.32) $$(Au - f , v-u) \geq 0 \qquad \forall \; v \leq \Psi \quad v \in L^2(\mathcal{O})$$

et on sait déjà que $u \leq \Psi$.

De plus (5.32) => $Au - f \leq 0$ (prendre $v = u-\theta$, $\theta \geq 0$ dans (5.32)). Donc on a

$$(Au-f)(\Psi-u) \leq 0 \qquad \text{pp en } y, \ \forall\, x \in E_1 ,$$

ce qui comparé à (5.32) avec $v = \Psi$ donne

$$(Au-f)(\Psi-u) = 0 \qquad \text{pp en } y , \ \forall\, x \in E_1 .$$

Démontrons l'unicité :

On commence par remarquer que l'on peut supposer $f = f_o$ = constante positive. Car si on note φ la solution de

$$A\varphi = - f + f_o$$

$$\varphi(x,\bar{y}) = 0$$

et que u est solution de l'IV, alors $\tilde{u} = u + \varphi$ vérifie

$$(A\tilde{u}, \tilde{v}-\tilde{u}) = (Au,\tilde{v}-\tilde{u}) + (A\varphi,\tilde{v}-\tilde{u}),$$

$$\geq (f_o,\tilde{v}-\tilde{u}) \quad , \qquad \forall\, \tilde{v} \leq \tilde{\Psi} = \Psi + \varphi ,$$

et $\tilde{\Psi}$ vérifie les hypothèses du théorème.

On obtient donc une IV analogue. D'autre part on remarque que pour la nouvelle inéquation, il suffit de démontrer l'unicité dans l'ensemble des solutions positives : soit en effet deux solutions bornées dont l'une n'est pas ≥ 0 :

On pose $\quad z = \min\{\mathrm{Inf}\ u_1, \inf u_2\} \leq 0$

on a

$$(A(u_i-z),v-z - (u_i-z)) = (Au_i, v-u_i)$$

$$\geq (f_o, v-z - (u_i-z))$$

donc en posant $\tilde{u}_i = u_i-z \quad \tilde{\Psi} = \Psi-z \geq \Psi$, on a à comparer deux solutions positives.

Soit donc u_1 et u_2 deux solutions positives, bornées, de l'IV avec f constante positive.

Soit γ le plus grand réel $\gamma \in [0,1]$ et tel que

$$\gamma u_1 \leq u_2$$

On veut montrer que $\gamma = 1$. Le résultat d'unicité en résultera par symétrie. Supposons donc $\gamma < 1$. Soit alors β tel que

$$\gamma < \beta < 1 \qquad \beta f_o + \lambda_o \beta u_1 \leq f_o + \lambda_o u_2$$

($\lambda_o > 0$ quelconque mais fixé dans la suite).

Un tel β existe en effet il suffit de prendre β tel que

$$\beta f_o + \lambda_o \beta u_1 \leq f_o + \lambda_o \gamma u_1 \ (\leq f_o + \lambda_o u_2)$$

i.e.

$$f_o(1-\beta) \geq (\beta-\gamma)\lambda_o \ \sup u_1 \ ,$$

ou encore

$$\beta[\lambda_o \ \sup u_1 + f_o] \leq f_o + \lambda_o \gamma \ \sup u_1 \ .$$

Maintenant βu_1 vérifie

$$(A(\beta u_1), \beta v - \beta u_1) + \lambda_o(\beta u_1, \beta v - \beta u_1) \geq (\beta f_o + \lambda_o \beta u_1, \beta v - \beta u_1),$$

$$\forall \ \beta v \leq \beta \Psi \ .$$

Comme u_2 vérifie

$$(Au_2, v-u_2) + \lambda_o(u_2, v-u_2) \geq (f_o + \lambda_o u_2, v-u_2) \ ,$$

$$\forall \ v \leq \Psi$$

$$(5.33) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Or } \beta\Psi \leq \Psi \ \text{ et } \ \beta f_o + \lambda_o \beta u_1 \leq f_o + \lambda_o u_2 \\ \Rightarrow u_2 \geq \beta u_1 \ , \ \text{(comme on va le voir)} \ , \end{array} \right.$$

ce qui contredit que γ soit le plus grand réel dans $[0,1]$ vérifiant cette inégalité, donc $\gamma = 1$ et par symétrie le résultat s'en déduit.

Il reste donc simplement à vérifier le théorème de comparaison des IV avec $A + \lambda_o I$ comme opérateur. Démontrons donc ce point ;

On rappelle que

$$Au = -\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u - \lambda Qu$$

et on pose

$$\tilde{A} = A + \lambda_o I$$

Soit $f_1 \geq f_2$, $\Psi_1 \geq \Psi_2$ (vérifiant les hypothèses de l'énoncé)

$$(3.34) \qquad (\tilde{A}u_1, v-u_1) \geq (f_1, v-u_1) \quad v, u_1 \leq \Psi_1$$

$$(3.35) \qquad (\tilde{A}u_2, v-u_2) \geq (f_2, v-u_2) \quad v, u_2 \leq \Psi_2$$

Pour λ_o assez grand, la solution de

$$(3.36) \qquad (\tilde{A}u, v-u) \geq (f, v-u) \quad v, u \leq \Psi$$

est unique ($u \in L^2(\mathcal{O})$, $\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathcal{O})$) car en posant $w = u_1 - u_2$ étant deux solutions on a

$$-\int_0^{\bar{y}} (\frac{\partial w}{\partial y} + w)dy + \int_0^{\bar{y}} (\lambda+\alpha+\lambda_o)w^2 dy - \int_0^{\bar{y}} \lambda Qw, w dy \geq$$

$$\frac{1}{2}|w(o)|^2 + (\alpha+\lambda_o)\int_0^{\bar{y}} |w|^2 dy - \int_0^{\bar{y}} \lambda Qw, w dy$$

$$+ \lambda_{min} \int_0^{\bar{y}} |w|^2 dy$$

ou $\lambda_{min} = \text{Inf } \lambda(x,y)$, et grâce à (5.27),

$$\left|\int_0^{\bar{y}} \lambda(Qw,w)\,dy\right| \leq \frac{1}{2}\,|w(o)|^2 + c\int_0^{\bar{y}} |w|^2 dy$$

où C dépend de $\sup\limits_{x,y} \lambda$ et de $\overline{y_x}$.

En prenant $\lambda_o \geq C$, on a donc

$$(\tilde{A}w,w) \geq \alpha \int_0^{\bar{y}} |w|^2 dy \,. \tag{5.37}$$

On prend alors $v = u_1$ dans (3.35) puis $v = u_2$, d'où par addition

$$(\tilde{A}(u_2-u_1),u_1-u_2) \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$(\tilde{A}(u_1-u_2),u_1-u_2) \leq 0$$

donc avec (5.37) on a $w = 0$.

Le résultat d'unicité précédent donne alors immédiatement le théorème de comparaison puisque les deux solutions u_1 et u_2 de (5.34) et (5.35) respectivement s'interprètent comme étant

$$u_1(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_{xy} \int_0^{\tau\Lambda\tau_o} e^{-(\alpha+\lambda_o)s} f_1 ds + \chi_{\tau<\tau_o} e^{-(\alpha+\lambda_o)\tau}\Psi_1$$

et

$$u_2(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_{xy} \int_0^{\tau\Lambda\tau_o} e^{-(\alpha+\lambda_o)s} f_2 ds + \chi_{\tau<\tau_o} e^{-(\alpha+\lambda_o)\tau}\Psi_2$$

il est alors clair que $f_1 \geq f_2$ et $\Psi_1 \geq \Psi_2 \Rightarrow u_1 \geq u_2$.

■

<u>Remarque I.5.2.</u>

(5.37) permet également de donner une démonstration de $u_1 \geq u_2$ sans utiliser l'interprétation stochastique : prenons en effet

$$v = u_2 - (u_1 - u_2)^- = u_1 \Lambda u_2 \leq \Psi_2 \quad \text{dans (5.35)}$$

$$v = u_1 + (u_1 - u_2)^- = u_1 V u_2 \leq \Psi_1 \quad \text{dans (5.34)}$$

en posant $w = u_1 - u_2$ on obtient

$$(\tilde{A}w, w^-) \geq (f_1 - f_2, w^-) \geq 0$$

or

$$(\tilde{A}w, w^-) = (\tilde{A}w^+, w^-) - (\tilde{A}w^-, w^-)$$

et on trouve

$$\frac{1}{2}|w^-(o)|^2 - (\alpha + \lambda_o) \int_o^{\bar{y}} |w^-|^2 dy - \int_o^{\bar{y}} \lambda |w^-|^2 dy$$

$$+ \int_o^{\bar{y}} \lambda Q w^- . w^- dy - \int_o^{\bar{y}} \lambda Q w^+ . w^- dy \geq 0 \; ,$$

comme précédemment on a

$$\int_o^{\bar{y}} \lambda Q w^+ . w^- dy \leq \frac{1}{2}|w^-(o)|^2 + C \int_o^{\bar{y}} |w^-|^2 dy$$

donc pour λ_o assez grand on obtient

$$- \int_o^{\bar{y}} |w^-|^2 dy \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w^- = 0 \, .$$

On peut également donner une démonstration analytique de la continuité de u par des méthodes analogues à celles de [11] chapitre III.

■

<u>Remarque I.5.3.</u>

Si on ne suppose plus $\frac{\partial \Psi}{\partial y} \in L^2(\mathcal{O})$ mais seulement Ψ continue bornée, $\Psi(x, \bar{y}) \geq 0$, on peut obtenir que u est solution de la formulation faible suivante :

$$\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda+\alpha)u - \lambda Qu,\ v-u\right) + \frac{1}{2}|v(\bar{y})|^2 \geq (f, v-u)$$

$$u,\ v \leq \Psi$$

$$u \in C\ ,\quad v \in L^2\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2\ .$$

Mais on n'a plus de résultat d'unicité et on ne sait pas démontrer non plus que u (borne inférieure du problème d'arrêt) est solution maximum.

■

I.5.3. Problème avec horizon fini.

On reprend les hypothèses du §. I.5.1 et les définitions du §. I.4.

On note $z_t^1(\omega,s) = (x_t(u), y_t(\omega), s+t)$ (qui est à valeur dans $E_1 \times R^+ \times R^+$).

On considérera ici le processus z_t^1 arrêté à

$$\tau_o = \text{Inf}\ (t \geq 0,\ z_t^1 \notin E_1 \times [0,\bar{y}[\times [0,T[).$$

On définit donc le semi groupe

$$\Phi(t)f(x,y,s) = E_{xy}\ f(z^1_{t_\Lambda \tau_o})\ . \tag{5.38}$$

Les hypothèses seront celles du §. I.5.2, on s'intéressera surtout ici à l'inéquation variationnelle associée au problème du temps d'arrêt optimal pour le processus $z^1_{t_\Lambda \tau_o} = z_t$.

On suppose donnés

$$\left\{\begin{array}{ll} f \text{ continue sur} & E = E_1 \times [0,\bar{y}] \times [0,T] \\ \Psi \quad \text{"} \quad \text{sur} & E,\ \ \Psi(x,\bar{y},t) \geq 0\ ,\ \Psi(x,y,T) \geq 0. \end{array}\right. \tag{3.39}$$

On rappelle que l'on suppose E_1 dénombrable et muni d'une mesure m telle que $m(E_1) < +\infty$, ainsi que (5.27).

On notera dans la suite

$$L^2(E) = L^2(E_1 \times]0,\bar{y}[\times [0,T], dm \otimes dy \otimes dt) .$$

Compte tenu du §. I.4. on définit donc

$$(5.40) \qquad J_{xys}(\tau) = E_{xy}\left\{ \int_0^{\tau_0 \wedge \tau} f(x_t,y_t,s+t)dt + \chi_{\tau<\tau_0} \Psi(x_\tau,y_\tau,s+\tau) \right\}$$

$$(5.41) \qquad u(x,y,s) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J_{xys}(\tau) .$$

$$(5.42) \qquad u_\varepsilon(x,y,s) = \operatorname*{Inf}_{v} E_{xy}\left\{ \int_0^{\tau_0} [f+\tfrac{1}{\varepsilon}v\Psi] e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t v_\theta d\theta} dt \right\}$$

Lemme I.5.5.

Sous les hypothèses du théorème I.5.2 et (5.39), u_ε est l'unique solution de

$$(5.43) \qquad \begin{cases} -(\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}) + \lambda\, u_\varepsilon - \lambda Q u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f , \\ u_\varepsilon(x,\bar{y},t) = u_\varepsilon(x,y,T) = 0 , \\ u_\varepsilon \in C^0(E), \ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \in L^2(E) . \end{cases}$$

Démonstration.

Il suffit en fait de démontrer que (5.43) a une solution appartenant au domaine du processus z_t^1. On peut démontrer aisément que z_t^1 est un processus de Feller. (Reprendre par exemple la démonstration de STONE [71]).

D'autre part, notons $\Phi(t)\varphi(x,y,s) = E_{xy}\varphi(x_t,y_t,s+t)$, ν_1 le premier instant de saut de x_t, ν_2 le second.

On a

$$\Phi(t)\varphi(x,y,s) = E_{xy}\ \chi_{\nu_1>t}\ \varphi(x,y+t,s+t)$$

$$+ E_{xy}\ \chi_{\nu_1\leq t}\ \varphi(x_t,y_t,s+t)\,.$$

On utilise alors la propriété de Markov forte pour le second terme et le fait que

$$P_{xy}(\nu_2 \leq t) = o(t)$$

pour obtenir

$$\tilde{\Phi}(t)\varphi(x,y,s) = \exp\left(-\int_y^{y+t}\lambda(x,\sigma)d\sigma\right)\varphi(x,y+t,s+t)$$

$$+\int_o^t \lambda(x,y,\sigma)\exp\left(-\int_y^{y+\sigma}\lambda(x,\theta)d\theta\right)\int_{E_1} q(x,y+\sigma,dz)\varphi(z,t-\sigma,s+t)d\sigma$$

$$+ o(t)$$

Il est alors facile de voir que si

$$(5.44)\quad \begin{cases} g_{xys}(t)\ :\ t \to \varphi(x,y+t),s+t) \text{ est continuement dif-} \\ \text{férentiable à dérivée bornée, et si} \\ \dfrac{d}{dt}\, g_{xys}\Big|_{t=0} \text{ est continue par rapport à } (y,s) \end{cases}$$

alors φ appartient au domaine du générateur infinitésimal faible de Φ.

Considérons maintenant le problème

$$(5.45)\quad \begin{cases} -\ L\tilde{\varphi} + \lambda\tilde{\varphi} - \lambda Q\tilde{\varphi} = f - \frac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+ \\ \tilde{\varphi}(x,\bar{y},t) = \tilde{\varphi}(x,y,T) = 0 \end{cases}$$

$w \in C^o(E)$.

On pose $\tilde{\varphi} = e^{-\alpha t}\varphi$ avec α assez grand, d'où

$$(5.46)\qquad \begin{cases} -L\varphi + \lambda\varphi + \alpha\varphi - \lambda Q\varphi = e^{\alpha t}[f - \frac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+] \quad g \\ \varphi(x,\bar{y},t) = \varphi(x,y,T) = 0 \ . \end{cases}$$

(5.46) a une solution unique continue bornée, avec $L\varphi \in L^2(E)$.

Pour démontrer ce point on utilise un schéma itératif et une méthode de caractéristiques :

Soit γ_{ys} la caractéristique (pour $L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$) passant par (y,s), c'est-à-dire la droite

$$\{(y+t,s+t) \in [0,\bar{y}] \times [0,T] \ , \ t \geq 0\}$$

On note

$$t_\gamma = \max\{t \geq 0 | (y+t,s+t) \in [0,\bar{y}] \times [0,T]\} \ .$$

Pour résoudre (5.46) on définit pour $\tilde{w} \in C^0(E)$

$$(5.47)\qquad \begin{cases} -L\varphi + \lambda\varphi + \lambda\varphi = \lambda Q\tilde{w} + g \\ \varphi(x,\bar{y},t) = \varphi(x,y,T) = 0 \end{cases}$$

(5.47) a une solution unique φ continue bornée (la continuité résulte du raccordement des conditions initiales et aux limites), avec de plus $L\varphi \in L^2(E)$.

De plus cette solution peut être calculée explicitement sur toute caractéristique (cf. D. LEROY [39]) : en particulier si on définit

$$(5.48)\qquad \begin{cases} -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\gamma_{ys} + (\lambda+\alpha)\ \varphi_{\gamma_{ys}} = [\lambda Q\tilde{w} + g]_{\gamma_{ys}} \\ \varphi_{\gamma_{ys}}(t_\gamma) = 0 \end{cases}$$

on a

$$\varphi(x,y,s) = \varphi_{\gamma_{ys}}(o) .$$

Il est clair que φ vérifie alors (5.44). On définit alors les itérées

$$(5.49) \quad \begin{cases} - L\varphi^{k+1} + (\lambda+\alpha)\, \varphi^{k+1} = \lambda Q\varphi^{k} + g \\ \varphi^{k+1}(x,\bar{y},t) = \varphi^{k+1}(x,y,T) = 0 \end{cases}$$

ceci définit une suite $\varphi^k \in C^o(E)$, $L\varphi^k \in L^2(E)$, et de plus en utilisant l'expression de la solution de (5.48) on obtient

$$|\varphi^{k+1}(x,y,s) - \varphi^{k}(x,y,s)| \leq \frac{C}{\alpha}.\sup|\varphi^{k}-\varphi^{k-1}| .$$

Donc l'application $\varphi^k \to \varphi^{k+1}$ sera une contraction dans $C^o(E)$ pour α assez grand, et aura donc un point fixe unique φ_w dans $C^o(E)$ avec de plus

$$\varphi^k \to \varphi_w \quad \text{dans} \quad C^o(E) .$$

Comme $\lambda Q\varphi^k + g$ est borné dans $L^2(E)$, en multipliant (5.49) par $- L\varphi^{k+1}$, on obtient

$$(5.50) \qquad |L\varphi^{k+1}|_{L^2(E)} \leq \text{constante}$$

et donc

$$L\varphi^k \to L\varphi \quad \text{dans } L^2(E) \text{ faible.}$$

On peut alors passer à la limite dans (5.49), ce qui montre que (5.46) a une solution φ continue, $L\varphi \in L^2(E)$, ou ce qui est équivalent, que (5.48) a une solution $\tilde{\varphi}$ continue, $L\tilde{\varphi} \in L^2(E)$.

Mais d'autre part, en écrivant (5.48) sur les caractéristiques, on vérifie également que $\tilde{\varphi}$ a les propriétés (5.44).

Donc que $\tilde{\varphi}$ est dans le domaine du générateur de $\tilde{\Phi}$. La formule de Dynkin donne alors

$$(5.51) \qquad \tilde{\varphi}(x,y,s) = E_{xy}\left(\int_0^{\tau_0}[f - \frac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+](x_t,y_t,s+t)dt\right)$$

et donc (5.45) a une solution unique telle que $\tilde{\varphi} \in C^0(E)$, $L\tilde{\varphi} \in L^2(E)$. On définit une nouvelle suite $\tilde{\varphi}^k$ par

$$(5.52) \qquad \tilde{\varphi}^{k+1} = E_{xys}\int_0^{\tau_0}[f - \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\varphi}^k-\Psi)^+]dt$$

comme $\tau_0 \leq T-s$, on a

$$|\tilde{\varphi}^{k+1}-\tilde{\varphi}^k|(x,y,s) \leq \int_s^T C_\varepsilon . \sup_{x,y}\{|\tilde{\varphi}^k-\tilde{\varphi}^{k-1}|(x,y,t)\}dt$$

ce qui permet d'obtenir de façon classique que l'application $w \to \tilde{\varphi}$ définie par (5.51) a une itérée contractante donc un point fixe unique dans $C^0(E)$ (car $w \in C^0(E) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^0(E)$ comme on l'a vu précédemment).

Donc $\tilde{\varphi}^k \to \varphi$ solution unique de

$$(5.53) \qquad \varphi(x,y,s) = E_{xy}\int_0^{\tau_0}[f - \frac{1}{\varepsilon}(\varphi-\Psi)^+](x_t,y_t,s+t)dt$$

mais les résultats du §. I.2. théorème I.2.1 montre que

$$(5.54) \qquad \varphi(x,y,s) = u_\varepsilon(x,y,s)$$

il ne reste plus qu'à montrer que φ est solution de (5.43). Pour cela on cherche une estimation de $L\tilde{\varphi}^k$, or $\tilde{\varphi}^k$ est solution unique de

$$\left|\begin{array}{l} -L\tilde{\varphi}^k + \lambda\tilde{\varphi}^k - \lambda Q\tilde{\varphi}^k = f - \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\varphi}^{k-1}-\Psi)^+ \\ \tilde{\varphi}^k(x,\bar{y},t) = \tilde{\varphi}^k(x,y,T) = 0 \end{array}\right.$$

En multipliant par $-L\tilde{\varphi}^k$, on a

$$|L\tilde{\varphi}^k|^2_{L^2(E)} = (g^k, -L\tilde{\varphi}^k)$$

où $g^k = f - \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\varphi}^{k-1}-\Psi)^+ + \lambda Q\tilde{\varphi}^k - \lambda\tilde{\varphi}^k$ est borné dans $L^2(E)$, donc

$$|L\tilde{\varphi}^k|_{L^2(E)} \leq \text{constante}$$

ce qui implique $L\tilde{\varphi}^k \to L\varphi$ dans $L^2(E)$ faible et φ est donc solution de (5.43).

Enfin, toute solution de (5.43) vérifie

$$-L\varphi + \lambda\varphi = g$$

$$\varphi(x,\bar{y},t) = \varphi(x,y,T) = 0$$

avec $g \in C^0(E)$, donc peut s'écrire comme précédemment sur les caractéristiques et on a ainsi que φ appartient au domaine du générateur de $\tilde{\Phi}$. L'interprétation stochastique donne alors l'unicité. (On pourrait démontrer "analytiquement" l'unicité).

■

<u>Théorème I.5.3</u> : <u>Sous les hypothèses du théorème I.5.2 et (5.34), si de plus</u>

(5.55) $\qquad L\Psi \in L^2(E)$,

<u>alors</u> $u(x,y,s)$ <u>est l'unique solution de l'inéquation variationnelle</u> :

$$(5.56)\quad \begin{cases} -\,Lu + \lambda u - \lambda Qu \leq f \\ u \leq \Psi \\ (-Lu + \lambda u - Qu - f)(u - \Psi) = 0 \\ u(x,\bar{y},t) = u(x,y,T) = 0 \\ u \in C^{o}(E)\ ,\quad Lu \in L^{2}(E) \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>.

La démonstration est identique à celle du théorème I.5.2 car l'hypothèse (5.55) permet d'effectuer une translation sur u_ε et d'obtenir une estimation de $|Lu_\varepsilon|_{L^2(E)}$.

La démonstration de l'unicité est également la même. La remarque I.5.2 est toujours valable.

∎

I.6. EXEMPLE DE PROCESSUS INTERVENANT DANS LES FILES D'ATTENTE.

On ne fera ici que mentionner quelques exemples, les démonstrations sont tout à fait analogues au cas semi markovien.

I.6.1. File d'attente M/G/1/N.

On note M/G/1 la file d'attente à 1 serveur qui possède les caractéristiques suivantes :

- le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre λ ,
- les durées de services sont des variables aléatoires indépendantes de même distribution $G(y)$ $y \in R^+$, et indépendantes du processus d'arrivée ,
- on supposera que G a une densité continue bornée $G'(y)$ et on pose

$$\mu(y) = \frac{G'(y)}{1-G(y)} .$$

Il est bien connu que si N_t désigne le nombre de "clients" dans le système, Y_t le temps écoulé depuis le dernier début de service si $N_t \neq 0$, $Y_t = 0$ si $N_t = 0$, alors le processus (N_t, Y_t) est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal est donné par

$$(6.2) \qquad Ag(n,y) = \chi_{n>0}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \mu(y)(g(n-1,0) - g(n,y))\right) + \lambda(g(n+1,y) - g(n,y)).$$

On notera l'analogie avec le générateur d'un processus semi markovien, cependant N_t n'est pas un processus semi markovien (mais il peut être construit comme interaction d'un processus de Markov (les arrivées) et d'un processus semi markovien, cf. [31]).

D'autre part il est clair que (N_t, Y_t) est encore un processus de Markov si le taux d'arrivée est fonction de N_t, c'est à dire (un peu formellement)

$$P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1 \ / \ N_s \ s \leq t) = \lambda(N_t)\Delta t + o(\Delta t)$$

En particulier on peut considérer le cas $M/G/1/N$ ou la capacité du système est limité à N unités, ce qui correspond à $\lambda(n) = \lambda . \chi_{n<N}$.

Enfin pour $\bar{y} > 0$ donné on pourra considérer

$$\tau_o = \text{Inf } (s \geq 0, \ \ Y_s \geq \bar{y})$$

et étudier le processus $(N_{t\Lambda\tau_o}, Y_{t\Lambda\tau_o})$.

On démontre, exactement comme dans le cas semi-markovien que (N_t, Y_t), ou $(N_{t\Lambda\tau_o}, Y_{t\Lambda\tau_o})$, (pour $M/G/1$ ou $M/G/1/N$) vérifient les hypothèses du théorème I.3.3., I.3.4. dont on peut alors utiliser les résultats.

De même les résultats des théorèmes I.5.2 ou I.5.3 s'étendent aux cas présents, seule la forme de l'opérateur est légèrement modifiée.

Donnons simplement l'énoncé du résultat analogue au théorème I.5.2.
On pose $E_1 = N$, les autres notations et hypothèses sont celles de (5.18).

<u>Théorème I.5.4</u> : <u>Sous les hypothèses (5.18), (5.27) (5.28) et (6.1)</u>, u(n,y) <u>(définie comme en (5.19)) est l'unique solution de l'inéquation</u> :

$$\begin{cases} - Au + \alpha u \leq f \quad , \\ u \leq \Psi \ , \\ (- Au + \alpha u - f)(u - \Psi) = 0 \quad , \\ u(x,\bar{y}) = 0 \ , \\ u \in C^{o}(\bar{\mathcal{O}}), \ \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^{2}(\mathcal{O}) \ . \end{cases}$$

■

I.6.2. Autres exemples de files d'attente.

(a) le cas M/M/1 (durées de service exponentielles) est un cas particulier de processus de Markov de saut donc de processus (x_t, y_t) où x_t est semi markovien, il n'y a pas de difficulté pour appliquer les résultats du §. I.3 ni pour obtenir une I.V.

(b) Cas M/G/1, processus du "temps virtuel d'attente". Le processus "temps virtuel d'attente" est défini par

$$W_t = [W_n + \sigma_n - (t-t_n)]^{+} \qquad t \in [t_n, t_{n+1}[$$

$$W_{n+1} = [W_n + \sigma_n - t_n]^{+} \quad .$$

où $(t_n)_{n\geq 1}$ sont les dates d'arrivées, et σ_n les durées de service. On montre aisément que c'est un processus de Markov qui vérifie les hypothèses du §. I.3. PRABHU [51] a posé un problème d'arrêt optimal pour ce processus. Les méthodes des paragraphes précédents s'appliquent ici et on peut justifier complètement les résultats de [51].

On remarquera cependant que, en pratique, W_t n'est pas observable (sauf si les durées de services sont déterministes) ce qui enlève beaucoup d'intérêt à ce processus.

(c) <u>File d'attente GI/G/1</u>.

C'est le cas où les intervalles entre les arrivées sont des variables aléatoires, équidistribuées et indépendantes. Sous les hypothèses du type (6.2) sur les distributions de ces variables, on démontre comme pour le cas semi markovien que le processus (N_t, Z_t, Y_t) est un processus de Markov vérifiant les hypothèses du §. I.3 , si Z_t est l'âge de la dernière arrivée, et si Y_t est défini comme pour le cas M/G/1.

La partie différentielle du générateur est alors $\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ et on peut obtenir une I.V comme dans le cas semi markovien évolutif où l'opérateur différentiel est analogue.

I.7. PROCESSUS ASSOCIES A UN "GENERATEUR DE LEVY".

On appelle ainsi (par référence à STROOCK [67]) un processus de markov à valeurs dans R^d, dont le générateur infinitésimal a pour expression.

(7.1) $$Ag(x) = A_1 g(x) + \int_{R^d\{o\}} (g(x+y)-g(x)- \frac{(y,\nabla g(x))}{1+|y|^2} \; M(x,dy)$$

ou A_1 est un opérateur elliptique du second ordre à coefficients continus et $M(x,.)$ une mesure, ≥ 0, σ finie sur $R^d-\{o\}$.

Sous des hypothèses très générales, STROOCK a étendu les résultats de STROOCK-VARADHAN [67] à ce type d'opérateur.
Dans ce paragraphe, on montrera brièvement que les résultats de [67] permettent d'appliquer les théorèmes I.3.2, I.3.3 et sous des hypothèses beaucoup plus restrictives on verra que le coût optimal peut être caractérisé par une IV.

I.7.1. Application des résultats du §. I.3.

On suppose

(7.2) $$a_{ij}(t,x) : R^+ \times R^d \to R \text{ continu }, \quad i,j = 1,d ,$$
$$a_{ij} = a_{ji} ,$$
$$\sum_{ij} a_{ij}\, \xi^i\, \xi^j \geq \gamma|\xi|^2 , \quad \forall\, \xi_j \in R^2 .$$

(7.3) $$b_i : R^+ \times R^d \to R \quad \text{continu borné } i=1,d .$$

(7.4) $$A_{1t} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

(7.5) $M(t,x;\Gamma)$ est telle que

(i) $M(t,x,\cdot)$ est une mesure ≥ 0, σ finie, sur $R^d-\{o\}$

(ii) $\int_\Gamma \frac{y}{1+|y|^2} M(t,x,dy)$ est continu borné (par rapport à x) de R^d dans R^d, $\forall\ \Gamma \in B\ (R^d-\{o\})$.

(7.6)
$$\Omega = D(o,\infty;R^d)\ ,\ x_t(\omega) = \omega_t$$
$$\mathcal{F}_s^t = \sigma(x_\theta,\ s \leq \theta \leq t)\ ,\ \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s^\infty\ .$$

Le résultat suivant est démontré dans [67]

<u>Théorème I.7.1</u> : <u>Avec les hypothèses et notations (7.2) à (7.6), il existe une probabilité unique</u> P_{sx}, <u>sur</u> $\mathcal{F}_s$ <u>telle que</u>, $\forall\ \varphi \in C_b^{1,2}[[s,\infty[\ \times R^d]$,

$$\varphi(t,x_t) - \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + A_\theta\right) \varphi(\theta,x_\theta)d\theta$$

<u>est une</u> P_{sx} <u>martingale, de plus</u> $(\Omega,\mathcal{F}_t^s,x_t,P_{sx})$ <u>est un processus de markov fortement Fellerien</u>. [1]

(On pourra également trouver des résultats de ce type dans [40]).

Il résulte également de [40], que

(7.7)
$$P_{sx}\left[\sup_{s \leq t \leq T} |X_t-X_s| > R\right] \leq C_T\left[e^{-\beta R} + \frac{1}{R}\right]$$

Pour vérifier que $E_{sx}g(x_t)$ est nulle à l'infini si g a cette propriété,

---

([1]) g mesurable bornée =>

$$s,x \to E_{sx}g(x_t) \text{ est continue } (t \geq s).$$

comme on sait déjà que $E_{sx}g(t,x_t)$ est continue $\forall$ g continue (et même mesurable bornée), il suffit de vérifier que $E_{sx}g(x_t)$, est une fonction nulle à l'infini ($|x| \to \infty$) quand g est à support compact. Soit g à support dans $|y| \leq R$, $\|g\| \leq 1$,

$$E_{sx}g(x_t) \leq P_{sx}[|x_t| \leq R]$$

$$\leq P_{sx}[|x_t - x_o| \geq \frac{|x|}{2}] \text{ si } |x| \geq 2R$$

et en utilisant (7.7)

$$E_{sx}g(x_t) \leq c_T[e^{-\beta\frac{|x|}{2}} + \frac{2}{|x|}]$$

d'où le résultat.

On pourrait par ailleurs démontrer que B_o contient ici les fonctions uniformément continue, donc que si l'on prend l uniformément continue bornée, on peut utiliser le corollaire I.3.4. Les propriétés précédentes permettent de passer au cas l continue bornée seulement.

I.7.2. Inéquations variationnelles.

I.7.2.1. Cas Régulier [Cas "non variationnel"].

On fait l'hypothèse supplémentaire

$$(7.8) \quad \begin{cases} M(t,x;R^d-\{o\}) \text{ est bornée sur } [0,T] \times R^d. \\ \text{et } \forall g \in C_b^o([o,T] \times R^d) , \\ \int_{R^d-\{o\}} g(t,x+y)M(t,x;dy) \text{ est continue sur } [0,T] \times R^d \end{cases}$$

On notera $Q =]0,T[\times R^d$, $E = [0,T] \times R^d$.

Lemme I.7.1.

Sous les hypothèses (7.2) à (7.5) et si on note

$$\mathcal{O}_R = \{x \subset R^d /, |x| < R\} ,$$

$$\tau_R = \mathrm{Inf}\ (t \geq s / x_t \notin \mathcal{O}_R), \text{ alors}$$

$$\forall \varphi \in C_b^o(E), \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A_t\varphi \in L^p(0,T;L^p_{loc}(R^d)), \ p > \frac{d}{2} + 1 ,$$

on a

$$(7.9) \qquad E_{sx}\varphi(T\Lambda\tau_R, X_{T\Lambda\tau_R}) - \varphi(s,x) = E_{sx}\int_s^{T\Lambda\tau_R} (\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A_t\varphi)(t,x_t)dt .$$

Démonstration.

On démontre d'abord que pour $p > \frac{d}{2} + 1$, on a si $\varphi \in L^p[0,T;L^p_{loc}(R^d)]$

$$(7.10) \qquad |E_{sx}\int_s^{T\Lambda\tau_R} \varphi(t,x_t)dt \ | \leq C_T.|\varphi|_{L^p(0,T;L^p(\mathcal{O}_R))}$$

Il suffit de le démontrer pour $\varphi \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathcal{O}_R)$ or il est démontré dans [67] que

$$|E_{sx}\int_s^T \varphi(t,x_t)dt| \leq c_T|\varphi|_{L^p(Q)} = c_T|\varphi|_{L^p(0,T;L^p(\mathcal{O}_R))}$$

Comme il suffit de démontrer (7.10) pour $\varphi \geq 0$, et que

$$E_{sx}\int_s^{T\Lambda\tau_R} \varphi(t,x_t)dt \leq E_{sx}\int_s^T \varphi(t,x_t)dt,$$

il est clair que l'on a (7.10).

Alors (7.9) étant vraie pour $\varphi \in C_b^{1,2}(E)$, On prend $\varphi^k \in C_b^{1,2}(\bar{Q})$ telle que

$$\varphi^k \to \varphi \quad \text{dans} \quad C_b^o(E)$$

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + A_t \varphi^k \to \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \quad \text{dans} \quad L^p(0,T;L^p_{loc}(R^d))$$

et l'estimation (7.10) permet de conclure.

■

Soit alors

(7.11) $\qquad \Psi,\ f \in C_b^o(E)$.

<u>Théorème I.7.2 :</u> <u>Sous les hypothèses (7.2) à (7.5), (7.8), (7.11) l'équation</u>

(7.12) $$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - A_t\, u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f \\ u_\varepsilon(T,x) = 0 \end{cases}$$

a une solution unique $u_\varepsilon \in L^p(0,T;W^{2,p,\gamma}(R^d))$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d)), \quad u_\varepsilon \in C_b^o(E) .$$

<u>Démonstration.</u>

On pose

$$\tilde{b}_i(t,x) = b_i(t,x) - \int_{R^d - \{o\}} \frac{y_i}{1+|y|^2}\, M(t,x;dy)$$

$$a_o(t,x) = M(t,x;R^d - \{o\})$$

et on note $\tilde{P}_{sx}$ la solution du problème de martingale $(a,\tilde{b})$ (c'est un processus de diffusion).

On note également

$$(7.13) \qquad Kg(t,x) = \int_{R^d-\{o\}} g(x+y)M(t,x,dy)$$

Considérons alors pour $v \in C_b^o(E)$ l'équation parabolique

$$(7.14) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial w}{\partial t} - \tilde{A}w + a_o w = f + Kv - \frac{1}{\varepsilon}(v-\Psi)^+ \\ w(T,x) = 0 \end{cases}$$

où

$$\tilde{A} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

comme $v \in C_b^o(E) \Rightarrow Kv \in C_b^o(E)$, ε étant fixé, le second membre de (7.14) est dans $C_b^o(E)$.

D'autre part il est connu que (7.14) a une solution unique

$$w \in L^p(0,T;W^{2,p,\gamma}(R^d)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d)) ,$$

(ou $W^{2,p,\gamma}$ est l'espace de Sobolev $W^{2,p}$ construit avec

$$L^{p,\gamma}(R^d) = \{\varphi : \varphi\, e^{-\gamma|x|} \in L^p(R^d)\}, \ \gamma > 0 \ )$$

et aussi $w \in C_b^o(E)$.

On sait aussi que dans ces conditions

$$(7.15) \qquad w(t,x) = \tilde{E}_{tx} \int_t^T [f + Kv - \frac{1}{\varepsilon}(v-\Psi)^+](s,x_s) e^{-\int_t^s a_o d\sigma} ds$$

On définit ainsi une application Π de $v \to w = \Pi v$ de $C_b^o(E)$ dans lui-même : si on note

$$\varphi_i^n = \Pi^n v_i \quad i = 1,2 \ , \quad v = v_1 - v_2 \ , \ w^n = \varphi_1^n - \varphi_2^n \ ,$$

on a

$$|w^n(t,x)| \leq \tilde{E}_{tx} \int_t^T k_\varepsilon \, \|w^{n-1}(s)\| \, ds,$$

et de façon classique

$$|w^n(t,x)| \leq k_\varepsilon^n \, \frac{(T-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \|v\|_{C_b^o(E)}$$

Donc, pour n assez grand Π^n est une contraction et donc Π a un point fixe unique vérifiant donc

$$w(t,x) = \tilde{E}_{tx} \int_t^T [f + Kw - \frac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+] e^{-\int_t^s a_o d\sigma} \, ds \tag{7.16}$$

mais (7.16) implique à son tour que w est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial w}{\partial t} - \tilde{A}w + a_o w = f + Kw - \dfrac{1}{\varepsilon}(w-\Psi)^+ \\ \\ w(T,x) = 0 \end{array} \right. \tag{7.17}$$

ce qui se réécrit exactement comme (7.12) compte tenu de la définition de $\tilde{b}_i$, a_o.

L'unicité résulte de l'interprétation stochastique et de l'unicité de la solution de (7.16).

■

Corollaire I.7.2.

Sous les hypothèses du théorème I.7.2 l'unique solution de (7.12) est donnée par

$$u_\varepsilon(t,x) = \operatorname*{Inf}_v E_{tx} \int_t^T e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v \, d\sigma} [f + \frac{1}{\varepsilon} v\Psi] \, ds \tag{7.18}$$

où l'inf est pris sur les processus adaptés à $(\mathcal{F}_t^s,\ s \geq t)$, à valeurs dans $[0,1]$.

La démonstration s'effectue comme dans [11] puisque l'on dispose de la formule de Ito pour des fonctions $W^{1,2,p}_{loc}(Q)$.

■

Théorème I.7.3 : Sous les hypothèses (7.2) à (7.5), (7.8),(7.11) et si de plus

$$\Psi \in L^p(0,T;W^{2,p,\gamma}(R^d)),\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \in L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d)) \tag{7.19}$$

alors

$$u(t,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_{tx}\left(\int_t^{T\wedge\tau} f(s,x_s)ds + \chi_{\tau<T}\Psi(\tau,x_\tau)\right) \tag{7.20}$$

est solution unique de l'inéquation

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{\partial u}{\partial t} - A_t u \leq f \ , \\ & u \leq \Psi \ , \\ & (\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - f)(u-\Psi) = 0 \ , \\ & u(T,x) = 0 \ , \\ & u \in L^p(0,T;W^{2,p,\gamma}(R^d)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d)) \ . \end{aligned}\right. \tag{7.21}$$

Démonstration.

On va se ramener à un problème analogue avec l'équation parabolique $(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}) + a_o$; en effet, les résultats du §. 2.3 donnent $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact donc, avec les hypothèses (7.12) ; $Ku_\varepsilon \to Ku$ ponctuellement et aussi dans $L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d))$ fort.

Donc, on ramène le passage à la limite sur (7.12) au même problème sur l'équation

$$(7.22)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \tilde{A}u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ + a_o u_\varepsilon = f_\varepsilon \\ u_\varepsilon(T,x) = 0 \end{cases}$$

où $f_\varepsilon = f + Ku_\varepsilon$ converge vers $f + Ku$ dans $L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d))$ fort.

On peut alors refaire les calculs de A. BENSOUSSAN - A. FRIEDMAN dans [6] pour obtenir que

$$(7.23)\quad \begin{cases} u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^p(0,T;W^{2,p,\gamma}(R^d)) \text{ faible} \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \to \dfrac{\partial u}{\partial t} \text{ dans } L^p(0,T;L^{p,\gamma}(R^d)) \text{ faible} \end{cases}$$

(et aussi $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact).
On notera que ceci utilise naturellement l'hypothèse (7.19).
(7.23) permet alors de passer à la limite dans (7.22) et l'unicité résulte de l'interprétation stochastique.

∎

<u>Remarque I.7.1.</u>

En fait dans ce qui précède, on peut se contenter de $f \in L^\infty(Q)$.

∎

I.7.2.2. Cas non régulier.

On abandonne ici l'hypothèse (7.19) mais on fait une hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij} de façon à avoir une formulation variationnelle.

On suppose

$$|a_{ij}(t,x) - a_{ij}(t,x')| \leq c.|x-x'| \quad \forall\ t,x,x',i,j. \tag{7.24}$$

On pose $V = W^{1,2,\gamma}(R^d)$, et on introduit la forme bilinéaire sur V

$$\begin{aligned} a_t(u,v) = & \int_{R^d} \sum_{ij} a_{ij}(t,x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}.m_\gamma\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}.m_\gamma\right)dx \\ & + \sum_{ij} \int_{R^d} \left(\tilde{b}_j - 2\gamma \frac{x_i}{|x|} a_{ij}\right)\left(m_\gamma.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(m_\gamma v)dx \\ & + \int_{R^d} a_o(m_\gamma u)(m_\gamma v)dx , \end{aligned} \tag{7.25}$$

avec $m_\gamma(x) = \bar{e}^{\gamma|x|}$.

Il existe alors $\lambda > 0$, $\mu > 0$ tels que

$$a_t(u,v) + \lambda|u|^2_{L^{2,\gamma}} \geq \mu\| u\|^2_V \qquad \forall \quad u \in V . \tag{2.26}$$

Le résultat du théorème I.7.2 est encore valble ici (car il n'utilisait pas (7.19)). On obtient

<u>Théorème I.7.4</u> : <u>Sous les hypothèses (7.2) à (7.5), (7.8) (7.11),</u> u(t,x) <u>(définie par (7.20)) est solution de l'inéquation</u> :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_o^T \left(- \frac{\partial v}{\partial t},v-u\right)dt + \int_o^T a_t(u,v-u)dt - \int_o^T (Ku,v-u)dt \\ & \qquad\qquad + \frac{1}{2}|v(T)|^2 \geq \int_o^T (f,v-u)dt \\ & \forall\, v \leq \Psi,\ v \in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V') , \\ & u \leq \Psi ,\quad u \in L^2(0,T;V). \end{aligned} \right. \tag{7.27}$$

Démonstration.

Compte tenu de $u_\varepsilon \to u$ uniformément sur tout compact dans $C_b^o(E)$ et donc $Ku_\varepsilon \to Ku$ uniformément sur tout compact dans $C_b^o(E)$, donc dans $L^2(O,T;L^{2,\gamma})$ fort, on montre de façon classique que (cf. [41])

$$\| u_\varepsilon \|_{L^2(O,T;V)} \leq \text{constante} ,$$

et donc $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(O,T;V)$ faible.

Le reste de la démonstration s'effectue comme dans LIONS [41].

■

Théorème I.7.5 : Sous les hypothèses du théorème I.7.4. et si de plus

$$(7.28) \quad \begin{cases} M(t,x,dy) = q(t,y)dy \\ q \geq 0 \text{ continue, bornée} \end{cases}$$

alors u est solution maximum de (7.27).

Démonstration.

Grâce à l'hypothèse (7.28) et à (7.8), on peut utiliser le résultat suivant de A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11]. Si on note, pour $u \in V$

$$Bu(t,x) = \int \Big(u(x+y)-u(x) - \frac{(y,\nabla u(x))}{1+|y|^2}\Big)\, M(t,dy)$$

alors

$$\left\{\begin{array}{l}(Bv,v)_{L^2,\gamma(R^d)} \leq 0 \quad \forall \ v \in V \\ (Bv^+,v^-) \geq 0 \\ \text{et} \\ (Bu,v) \text{ est une forme bilinéaire continue sur} \\ V \times V\end{array}\right.$$

le théorème résulte alors de MIGNOT - PUEL [49] .

■

I.7.3. Le cas du processus arrêté.

On va voir que, bien que l'on n'ait pas démontré que le processus arrêté est fellerien, le problème pénalisé permet de traiter quand même le problème d'arrêt optimal.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné régulier de R^d

$$\tau_{\mathcal{O}} = \text{Inf } (s \geq 0,\ x_s \notin \mathcal{O})$$

et on pose comme précédemment

$$(7.29) \qquad \left\{\begin{array}{l} u(t,x) = \underset{\tau}{\text{Inf}}\ E_{tx}\left(\displaystyle\int_t^{T\wedge\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}} f(s,x_s)ds + \chi_{\tau<T\wedge\tau_{\mathcal{O}}}\Psi(\tau,x_\tau)\right), \\ \text{et} \\ u_\varepsilon(t,x) = \underset{v}{\text{Inf}}\ E_{tx}\left(\displaystyle\int_t^{T\wedge\tau_{\mathcal{O}}} [f + \frac{1}{\varepsilon}v\Psi]\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v_\sigma d\sigma} ds\right). \end{array}\right.$$

On prend

$$(7.30) \qquad \left\{\begin{array}{l} f \in C^0([0,T] \times \bar{\mathcal{O}}) \ , \ \Psi \in C^0[0,T] \times \bar{\mathcal{O}}) \ , \\ \\ \Psi \geq 0 \ \text{ sur } \ \partial\mathcal{O} \ . \end{array}\right.$$

Lemme I.7.2.

Sous les hypothèses (7.2) à (7.5), (7.8), (7.30) u_ε est solution unique de l'équation

$$(7.31)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - A_t u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f \\ u_\varepsilon(t,x) = 0 \qquad x \in \partial\mathcal{O} \\ u_\varepsilon(T,x) = 0 \end{cases}$$

$$u_\varepsilon \in L^p(0,T;W^{2,p}(\mathcal{O})),\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^p(0,T;L^p(\mathcal{O})),\ u_\varepsilon \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\mathcal{O})).$$

Démonstration.

Précisons d'abord que pour définir

$$Ku_\varepsilon = \int_{R^d-\{0\}} u_\varepsilon(x+y)M(t,x,dy)\ ,$$

on suppose u_ε prolongée par 0 en dehors $\mathcal{O}$; la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution de (7.31) est alors identique à la démonstration du théorème I.7.2. L'application de la formule de Ito entre t et $T\wedge\tau_{\mathcal{O}}$ permet alors d'obtenir que cette solution est donnée par (7.30).

Il résulte de la régularité de u_ε que $u_\varepsilon \in C_b^0(\bar{Q})$, $\bar{Q} = [0,T] \times \bar{\mathcal{O}}$.

D'autre part sous les hypothèses du Lemme I.7.2, on peut appliquer les résultats du §. I.3 et donc $u_\varepsilon \to u$ dans $C^0(\bar{Q})$; u étant nulle sur $\partial\mathcal{O}$, on la prolonge par 0 en dehors de $\mathcal{O}$, et on peut aussi définir Ku.

Une démonstration similaire à celle du théorème I.7.4 donne le résultat suivant :

Théorème I.7.6 : Sous les hypothèses du lemme I.7.2, u est solution de l'inéquation variationnelle

$$(7.32)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T(-\frac{\partial v}{\partial t},v-u)dt+\int_0^T a_t(u,v-u)dt-\int_0^T(Ku,v-u)dt \\ \displaystyle\qquad\qquad +\frac{1}{2}|v(T)|^2\geq\int_0^T(f,v-u)dt \\ \forall\ v\leq\Psi\quad v\in L^2(0,T;V)\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;V')\ , \\ u\leq\Psi\quad u\in L^2(0,T;V)\ . \end{array}\right.$$

∎

De plus, on peut alors montrer en utilisant les résultats de [49] que u est solution maximum de cette inéquation.

Théorème I.7.7. : Sous les hypothèses du théorème I.7.6, si de plus $M(t,x,dy)=q(t,y)dy$ avec $q(t,y)$ continue par rapport à t,x, $q(t,y)\geq 0$) u est solution maximum de l'inéquation (7.32).

Démonstration.

Il est démontré dans [11] le résultat suivant, si l'on note

$$Bu(t,x)=\int[u(t,x+y)-u-t,x)-\langle y,\nabla u(t,x)\rangle]q(t,y)dy$$

alors B est un opérateur linéaire continu de $L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O}))$ dans $L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$. De plus sous les hypothèses du théorème I.7.5 on a

$$\begin{array}{ll} (Bv^+,v^-)\geq 0 & \\ & \forall\ v\in H_0^1(\mathcal{O}) \\ (Bv,v)\leq 0 & \end{array}$$

Et on est ainsi ramené au problème résolu par MIGNOT - PUEL [49].

∎

Remarque I.7.2.

(a) Ce qui précède montre que le seul résultat nouveau est l'interprétation de la solution maximum de l'inéquation variationnelle car le fait que $u_\varepsilon \to \tilde{u}$ solution maximum de l'IV est démontré sans référence à l'interprétation probabiliste dans [11].

(b) Le cas stationnaire, avec $\Psi \in W^{2,p,\gamma}(R^d)$ peut également être traité comme précédemment avec quelques modifications dans la démonstration de (7.12) où l'on peut procéder exactement comme dans BENSOUSSAN - LIONS [11].

∎

Remarque I.7.3.

On peut utiliser le même type de méthode pour montrer que le problème de jeu avec temps d'arrêt

$$u(t,x) = \underset{\tau^1}{\mathrm{Inf}}\ \underset{\tau^2}{\mathrm{Sup}}\ E_{tx}\left(\int_t^{T\wedge\tau_1\tau_2} f(s,x_s)ds + \chi_{\tau^1 < T\wedge\tau^2}\Psi_1(\tau_1,x_{\tau^1}) + \chi_{\tau^1 \geq T\wedge\tau^2}\Psi_2(\tau_2,x_{\tau^2})\right)$$

a une solution, et obtenir une inéquation variationnelle à double obstacle.

Mais, ceci utilise de façon essentielle les équations aux dérivées partielles. (cf. [11] pour le cas des diffusions sans sauts). L'analogue des résultats du §. I.3 pour le problème de jeu n'est pas connu.

∎

Remarque I.7.4.

Par les mêmes méthodes on peut étudier les intéractions entre les divers processus qui ont été examinés précédemment et qui conduiront également à des inéquations variationnelles.

∎

II

CONTROLE IMPULSIONNEL AVEC RETARD

1er Cas : Retards non imbriqués

Orientation.

On étudiera ici un premier type de problèmes de contrôle impulsionnel pour des processus de Markov. On commence par le cas où la décision prise à τ n'est réalisée qu'en $\tau+h$, h fixé > 0. On fera l'essentiel de l'exposé sur un problème type où la décision porte sur l'état ξ qui devra être réalisé au bout d'un temps h. Ceci modélise en particulier les problèmes de remplacement de matériel si l'état est un indicateur d'usure du matériel (supposé évoluer de façon markovienne) et si l'on peut remplacer, de façon onéreuse, le matériel en fonction par un autre du même type .

On a choisi de commencer par les problèmes avec retard (sans imbrication), car, peut être paradoxalement, il se formule et se résout de façon beaucoup plus simple que le cas où la décision a un effet instantané.

On verra au Chapitre VII, les mêmes méthodes appliquées à des problèmes faisant intervenir plusieurs processus de Markov.

Comme dans le cas des problèmes d'arrêt optimal, on fera intervenir des hypothèses particulières quand l'espace d'état n'est pas compact. Sans que l'on puisse prétendre que le cadre utilisé ici est le plus général possible, il couvre un très grand nombre d'applications.

I.1. NOTATIONS - HYPOTHESES - POSITION DU PROBLEME.

Soit E un espace LCBD muni de sa tribu borélienne. On note $\Omega = D(0,\infty;E)$ espace des fonctions continues à droites, limitées à gauches, de R^+ dans E.

On note $x_t(\omega) = \omega(t)$, $\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s)$, $\sigma \geq 0$, $\mathcal{F}_t^o = \sigma\{x_s \quad s \leq t\}$, $\mathcal{F}^o = \mathcal{F}_\infty^o$, et $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}$ les complétées universelles de $\mathcal{F}_t^o$, $\mathcal{F}^o$.

On suppose donné

(1.1) $$X = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \theta_t, x_t, P_x)$$

un processus de Markov homogène dont on note $\Phi(t)$ le semi groupe.

On suppose

(1.2) $$\Phi(t)\, f \in C \qquad \forall\ f \in C \qquad t > 0$$

(1.3) $$\Phi(t)\, f(x) \to f(x) \quad \text{quand} \quad t \downarrow 0, \quad \forall\ f \in C$$

$$\Phi(t)1 = 1 \ ,$$

Quand E n'est pas compact, on fera une hypothèse supplémentaire soit (1.4), soit (1.5) [1]

(1.4)

- $\Phi(t)\, f \in C_c$, $\forall\ f \in C_o$
- E est un espace métrique dont les fermés bornés sont compacts et

$$\gamma_T(R) = \sup_{x \in E} P_x[\sup_{0 \leq t \leq T} d(x_t, x) > R]$$

tend vers 0 quand $R \uparrow \infty$, ($\forall$ T fixé).

---

[1] Bien entendu tout ceci est inutile quand E est discret dénombrable.

(1.5) | . X est quasi continu à gauche et
. B_o contient les fonctions uniformément continues.

Autrement dit, on voudra pouvoir utiliser les résultats du Chapitre I, notamment les Théorèmes I.3.2, I.3.3. et le corollaire I.3.4.

On se donne d'autre part

(1.6) un nombre $h > 0$ (le retard),

(1.7) $f \in C$, $f \geq 0$,

(1.8) $c \in C_b^o(E \times E)$ avec $c(x,\xi) \geq 0$, $\forall\ (x,\xi) \in E \times E$

(1.9) U un compact de E,
et α une constante > 0, (taux d'actualisation).

On définit $\mathcal{V}$ ensemble des contrôles admissibles par

(1.10) $v \in \mathcal{V} \iff v = (\tau^i,\xi^i)\ i \geq 1$

où $(\tau^i,\ i \geq 1)$ est une suite de temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$ telle que

(1.11) $\tau^{i+1} \geq \tau^i + h\ ,\ i \geq 1$,

(1.12) et ξ^i est une v.a à valeur dans U, $\mathcal{F}_{\tau^i}$-mesurable.

Le lemme suivant permet de définir le critère $J_x(v)$.

<u>Lemme II.1.1.</u>

<u>Sous les hypothèses (1.1) à (1.3), si</u> P <u>est une probabilité sur</u> $(\Omega,\mathcal{F})$, τ <u>un</u> $\mathcal{F}_t$ <u>temps d'arrêt,</u> ξ <u>une v.a (à valeurs dans</u> E), $\mathcal{F}_\tau$ <u>mesurable, alors il existe une probabilité</u> $\tilde{P}_x$ <u>sur</u> $(\Omega,\mathcal{F})$ <u>telle</u>

que, si $\tau_h \stackrel{\text{def}}{=\!=} \tau + h$

(1.13) $\qquad \tilde{P}(A) = P(A) \ \forall A \in \mathfrak{F}_{(\tau+h)-}$,

(1.14) $\qquad \tilde{P}(A \cap \theta_{\tau_h}^{-1} B) = E(\chi_A . P_\xi(B))$,

$\qquad \forall B \in \mathfrak{F}$, $\forall A \in \mathfrak{F}_{(\tau+h)-}$ $A \subseteq \{\tau < +\infty\}$.

De plus, $\forall \varphi$ mesurable bornée sur E

(1.15) $\qquad \tilde{E}[\chi_{\tau<+\infty} \varphi(x_{\tau+t+s}).H] = \tilde{E}[\chi_{\tau<+\infty} H.\Phi(s)\ \varphi(x_{\tau+t})]$

$\qquad \forall$ H v.a bornée, $\mathfrak{F}_{\tau+t}$ mesurable.

La démonstration de ce lemme technique est faite en Annexe 1.

■

On notera que (1.15) signifie que $y_t = x_{\tau+t}$, $t \geq 0$ est un processus de Markov relativement à la famille $\mathfrak{F}_{\tau+t}$ qui a le même semi-groupe que X.

On pourrait montrer que $\tilde{P}$ est définie de façon unique par (1.13), (1.14) mais ceci n'est pas nécessaire car la démonstration du lemme est constructive et détermine de façon unique une probabilité $\tilde{P}$ vérifiant les propriétés désirées.

Dans la suite, on n'utilisera θ_τ que pour $\omega \in \Omega_\tau = \{\tau<+\infty\}$, si $\mathfrak{F}/\Omega_\tau$ est la tribu $\mathfrak{F}$ restreinte à Ω_τ, θ_τ est une application mesurable de $(\Omega_\tau, \mathfrak{F}/\Omega_\tau)$ dans $(\Omega,\mathfrak{F})$.

En fait ces distinctions ($\tau(\omega)$ fini ou non) sont uniquement techniques, dans la suite les variables aléatoires que l'on considère sont en général nulles sur $\{\tau = +\infty\}$ et il n'y a donc pas de difficulté sur cet ensemble.

On peut alors définir <u>le processus contrôlé</u> en associant à $v \in \mathcal{V}$ une suite de probabilités sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ par (x étant donné)

$$P_x^o = P_x$$

$$(1.16) \qquad \begin{cases} P_x^1 = P_x^o \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{(\tau^1+h)-} \, , \\ P_x^1(A \cap \theta^{-1}_{\tau_h^1} B) = E_x^o[\chi_A . P_{\xi^1}(B)] \, , \end{cases}$$

$$\forall \; A \in \mathfrak{F}_{(\tau^1+h)-} \; , \; B \in \mathfrak{F} \, ,$$

$$\vdots$$

$$(1.17) \qquad \begin{cases} P_x^n = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{(\tau^n+h)-} \, , \\ P_x^n(A \cap \theta^{-1}_{\tau_h^n} B) = E_x^{n-1}[\chi_A . P_{\xi^n}(B)] \, . \end{cases}$$

Comme (1.11) $\Rightarrow \tau^n(\omega) \uparrow +\infty \quad \forall\, \omega$, il existe une probabilité P_x^v sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ telle que

$$(1.18) \qquad P_x^v = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{(\tau^n+h)-} \, .$$

On définit alors <u>le critère</u>

$$(1.19) \qquad J_x(v) = E_x^v\left\{\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i\geq 1} e^{-\alpha\tau^1} c(x_{\tau^i},\xi^i)\right\}$$

(où E_x^v est l'éspérance par rapport à P_x^v).

Le problème est alors de minimiser $J_x(v)$ sur $\mathcal{V}$.

On pose

$$u(x) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}} J_x(v) \tag{1.20}$$

Remarque II.1.1.

(i) Comme il est vérifié en Annexe 1, on peut vérifier que dans le lemme II.1., on a sur $\{\tau_h < +\infty\}$ $x_{\tau_h} = \xi$ $\tilde{P}_x$ ps. , le problème ci-dessus correspond donc bien au "remplacement de $x_{\tau_h|}$ as ξ.

On a d'ailleurs par (1.14)

$$\tilde{E}_x[\chi_A . \varphi(x_{\tau_h})] = \tilde{E}_x[\chi_A . \varphi(\xi)]$$

$$\forall A \in \mathfrak{F}_{\tau_h -} \text{ , (car } P_x(x_o = x) = 1).$$

(ii) Il est clair que $\tau^n \geq (n-1)h \quad \forall n \geq 1$.
Donc $\mathfrak{F}_{\tau^n -} \supset \mathfrak{F}_{(n-1)h}$ et $\mathfrak{F}_{\tau^n -}$ est donc une suite croissante de sous tribus de $\mathfrak{F}$ telle que $\sigma(\bigcup_n \mathfrak{F}_{\tau^n -}) = \mathfrak{F}$.

(iii) On pourrait simplifier quelques un des énoncés en considérant le processus à valeur dans $E' = E \cup \{\delta\}$, δ point à l'infini de E et en convenant que $x_\infty(\omega) = \delta$, $\theta_\infty \omega = \omega_\delta$ trajectoire valant δ partout sur R^+, ce qui permet de définir θ_τ comme application de Ω dans Ω , $\mathfrak{F}_\tau$ mesurable et de supprimer la distinction $\{\tau < +\infty\}$ et $\{\tau = +\infty\}$.

Cependant l'utilisation de cet état fictif introduit des complications ailleurs (dans la construction du processus contrôlé il faut envisager la "renaissance" du processus ie. des trajectoires valant δ avant τ^1 et revenant dans E après). De plus du point de vue "physique" il n'y a pas de raison de distinguer un état particulier : même dans les problèmes de remplacement de matériel (où l'on a aussi coutume de parler de durée de vie), on peut toujours considérer l'état "hors d'usage" comme un état quelconque mais absorbant.

∎

II.2. CARACTERISATION DU COUT OPTIMAL.

La méthode utilisée ci-dessous, adaptée de [11], consiste à approcher u par une suite de problèmes de temps d'arrêt optimal. On remarquera que ce schéma itératif est simplement l'analogue stochastique du schéma introduit par A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [12] pour démontrer l'existence d'une solution des IQV

On pose

$$(2.1) \qquad \Psi(x) = \int_0^h e^{-\alpha s}\, \Phi(s) f \, ds \,,$$

c'est une fonction appartenant à C (cf. [21]).

On pose également si $w \in B$

$$(2.2) \qquad Mw(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(x,\xi) + e^{-\alpha h}\, w(\xi)] + \Psi(x).$$

On définit alors

$$(2.3) \qquad u_o(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(x_s) ds = R_\alpha f(x)$$

(où, comme d'habitude R_α est la résolvante de Φ)

$$(2.4) \qquad u_n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \left(\int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau} Mu_{n-1}(x_\tau) \right)$$

où l'infimum est pris sur les temps d'arrêts de $\mathcal{F}_t$.

<u>Lemme II.2.1.</u>

<u>Sous les hypothèses (1.1) à (1.4), (1.6) à (1.9),</u> (u_n) $n \geq 0$ <u>vérifie</u> :

(i) $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_o \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$, $\forall n$.

(ii) $u_n \in C$

Démonstration.

On posera dans la suite

$$J_x^n(\tau) = E_x\left(\int_o^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu_{n-1}(x_\tau)\right). \tag{2.5}$$

Pour démontrer (i), on a $u_1(x) \leq J_x^1(+\infty) = u_o(x)$. Supposant alors $u_{n-1} \leq u_{n-2}$, alors $Mu_{n-1} \leq Mu_{n-2}$, donc

$$J_x^n(\tau) \leq J_x^{n-1}(\tau) \quad \forall \tau \Rightarrow u_n \leq u_{n-1} \quad \forall n .$$

Enfin, $u_o \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$ et $u_n \geq 0$, $\forall n$,

est immédiat.

Pour démontrer (ii) on utilise les résultats du §. I.3. (les hypothèses sur le processus et les données étant manifestement vérifiées). Il suffit de voir que $u_o \in C$ résulte du caractère fellerien de $\Phi(t)$; puis supposant $u_{n-1} \in C$, on a

$$c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi) \in C_b^o(E \times U)$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi)] \in C$$

et comme $\Psi \in C$, $Mu_{n-1} \in C$, donc $u_n \in C$.

∎

On aura besoin dans la suite d'un résultat supplémentaire :

Soit

$$(2.6)\qquad \begin{cases} F \in C \\ w(x) = \underset{\tau}{\operatorname{Inf}}\; E_x\left(\int_o^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s ds + \bar{e}^{\alpha\tau} F(x_\tau) \right). \end{cases}$$

Soit d'autre part, $\hat{\tau}$ le temps d'arrêt

$$(2.7)\qquad \hat{\tau} = \operatorname{Inf}\ (s \geq 0 \quad w(x_s) = F(x_s))$$

et ν un temps d'arrêt quelconque, ξ une v.a à valeurs dans E, $\mathfrak{F}_\nu$ mesurable.

On pose

$$(2.8)\qquad \nu_h = \nu + h \quad , \quad \tilde{\tau} = \nu_h + \hat{\tau}_o\ \theta_{\nu_h}.$$

Soit $\tilde{P}$ une probabilité sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ telle que (cf. Lemme II.1.1), si P est une probabilité donnée sur $(\Omega,\mathfrak{F})$

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \tilde{P} = P \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{\nu_{\bar{h}}} \\ \tilde{P}(A \cap \theta_{\nu_h}^{-1} B) = E(\chi_A . P_\xi(B)) \\ \forall\ A \in \mathfrak{F}_{\bar{\nu_h}} \quad , \quad A \subset \{\nu < +\infty\} \ , \quad \forall \ B \in \mathfrak{F}. \end{cases}$$

<u>Lemme II.2.2.</u>

<u>Sous les hypothèses (1.1) à (1.4), (1.6) à (1.9) et (2.6) à (2.9) on a</u>

$$(2.10)\qquad \bar{e}^{\alpha\nu_h} w(\xi) = \tilde{E}\left[\int_{\nu_h}^{\tilde{\tau}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}} F(x_{\tilde{\tau}}) | \mathfrak{F}_{\nu_{\bar{h}}} \right]$$

<u>et</u> $\forall\ \tau$ <u>temps d'arrêt de</u> $\mathfrak{F}_t$, $\tau \geq \nu_h$

$$(2.11)\qquad \bar{e}^{\alpha\nu_h} w(\xi) \leq \tilde{E}\left[\int_{\nu_h}^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} F(x_\tau) | \mathfrak{F}_{\nu_{\bar{h}}} \right] \text{ P p.s .}$$

Démonstration.

Notons Y le second membre de (2.10), on a

$$Y = \tilde{E}\,(Z_o\ \theta_{\nu_h} \mid \mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}})\ \bar{e}^{\alpha\nu_h}$$

où

$$Z = \int_o^{\hat{\tau}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) + \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}}\ F(x_{\hat{\tau}})$$

Donc, d'après le lemme II.1.1.

$$Y = \bar{e}^{\alpha\nu_h}\ E_\xi(Z) \quad \text{P ps.}$$

Donc par définition de w, et comme $\hat{\tau}$ est le temps d'arrêt optimal associé (cf. I.3), on a

$$Y = w(\xi)\ \bar{e}^{\alpha\nu_h}\ .$$

Démontrons maintenant (2.11). On sait que w vérifie les inégalités

(2.12) $$w \leq F\ ,$$

(2.13) $$w(x) \leq \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)\ w(x) + \int_o^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s) f(x) ds \qquad \forall\ t \geq 0\ ,$$

donc que (cf. aussi les raisonnements de I.3)

$$\bar{e}^{\alpha s} w(x_s) + \int_o^s \bar{e}^{\alpha t}\quad f(x_t)dt$$

est une sous martingale pour P_x et la famille $\mathcal{F}_t$.

Montrons alors que

(2.14) $$Y(s) = \bar{e}^{\alpha(\nu_h+s)} w(x_{\nu_h+s}) + \int_o^{\nu_h+s} \bar{e}^{\alpha t} f(x_t)dt$$

est une sous martingale pour $\tilde{P}$, relativement à $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\nu_h+t}$.

Pour cela il suffit de démontrer que $\forall$ H $\mathcal{F}_{\nu_h+t}$ mesurable, positive, et $\forall$ $s \geq 0$,

$$\tilde{E}\,[H.Y(t+s)] \geq \tilde{E}(H.Y(t)). \tag{2.15}$$

Ce qui revient à montrer

$$\tilde{E}[H.(e^{-\alpha(\nu_h+s+t)}w(x_{\nu_h+s+t}) + \int_{\nu_h+t}^{\nu_h+t+s} e^{-\alpha\lambda}f(x_\lambda)d\lambda)] \geq \tilde{E}[H\ e^{-\alpha(\nu_h+t)}w(x_{\nu_h+t})]\ . \tag{2.16}$$

Or le premier membre de (2.16) s'écrit

$$\tilde{E}[H.e^{-\alpha(\nu_h+t)}(e^{-\alpha s}w(x_s)_o\ \theta_{\nu_h+t})] + \tilde{E}[He^{-\alpha(\nu_h+t)}\int_o^s e^{-\alpha\lambda}(f(x_\lambda)_o\theta_{\nu_h+t})d\lambda] = I + II \tag{2.17}$$

Et d'après (1.15)

$$I = \tilde{E}[H.e^{-\alpha(\nu_h+t)}e^{-\alpha s}\Phi(s)w(x_{\nu_h+t})]\ ,$$

et

$$II = \tilde{E}[He^{-\alpha(\nu_h+t)}\int_o^s e^{-\alpha\lambda}\Phi(\lambda)f(x_{\nu_h+t})d\lambda]\ .$$

Alors (2.16) résulte de (2.13).

Donc (2.14) définit une sous martingale pour $(\tilde{P},\mathcal{G}_t)$. Si τ' est un t.a quelconque de $\mathcal{G}_t$, on a donc

$$\tilde{E}(Y(\tau)|\mathcal{G}_o) \geq Y(o) \quad \tilde{P}\ \text{ps.},$$

i.e.

$$e^{-\alpha\nu_h}w(x_{\nu_h}) \leq \tilde{E}\{e^{-\alpha(\nu_h+\tau')}w(x_{\nu_h+\tau'}) + \int_{\nu_h}^{\nu_h+\tau'} e^{-\alpha s}f(x_s)ds|\mathcal{F}_{\nu_h}\} \quad \tilde{P}\ \text{ ps.}$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}}$, et en tenant compte de (2.12), il vient

$$\tilde{E}(\bar{e}^{\alpha\nu_h} w(x_{\nu_h}) | \mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}}) \leq \tilde{E}\{\bar{e}^{\alpha(\nu_h+\tau')} \overset{W}{\cancel{f}}(x_{\nu_h+\tau'}) + \int_{\nu_h}^{\nu_h+\tau'} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds | \mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}}\}$$

or

$$\tilde{E}(\bar{e}^{\alpha\nu_h} w(x_{\nu_h}) | \mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}}) = \bar{e}^{\alpha\nu_h} w(\xi) \quad \tilde{P} \text{ ps.}$$

(Ceci d'après (1.14), la présence du terme $\bar{e}^{\alpha\nu_h}$ permettant d'écrire cette égalité même si $\nu_h(\omega) = +\infty$).

Donc

$$\bar{e}^{\alpha\nu_h} w(\xi) \leq \tilde{E}[\bar{e}^{\alpha(\nu_h+\tau')} \overset{W}{\cancel{f}}(x_{\nu_h+\tau'}) + \int_{\nu_h}^{\nu_h+\tau'} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds \mid \mathcal{F}_{\nu_{\bar{h}}}] \tag{2.18}$$

mais si τ est un t.a quelconque de $\mathcal{F}_t$, $t \geq \nu_h$, alors $\tau' = \tau - \nu_h$ est un t.a de $\mathcal{G}_t$: en effet $\{\tau' \leq t\} = \{\tau - \nu_h \leq t\} = \{\tau \leq \nu_h + t\} \in \mathcal{F}_{\nu_h+t}$ (cf. BLUMENTHAL - GETOOR [18] p.33).
Donc (2.18) démontre (2.11).

∎

Revenons à l'étude de la suite (u_n) $n \geq 0$.

<u>Lemme II.2.3.</u>

<u>Sous les hypothèses du lemme II.2.1 on a</u> $u_n \geq u$, $\forall n$.

<u>Démonstration.</u>

C'est évident pour $n = 0$. On pose pour $n > 0$ quelconque

$$\tau_n^1 = \text{Inf } (s \geq 0,\ u_n(x_s) = Mu_{n-1}(x_s))$$

d'après le §. I.3 on a

$$(2.19) \qquad u_n(x) = E_x^o\left(\int_o^{\tau_n^1} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}\, Mu_{n-1}(x_{\tau_n^1})\right)$$

De plus $u_{n-1} \in C$, c est continue sur $E \times U$, U compact donc il existe $\hat{\xi}_n(x)$ mesurable réalisant l'inf de

$$\xi \to c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi) \quad \text{sur } U .$$

On pose

$$\xi_n^1 = \left| \begin{array}{ll} \hat{\xi}_n(x_{\tau_h^1}) & \text{sur } \{\tau_n^1 < +\infty\} \\ \xi_o \in U \text{ arbitraire sur } \{\tau_n^1 = +\infty\} . & \end{array} \right.$$

On notera que ceci définit bien une v.a $\mathcal{F}_{\tau_n^1}$ mesurable car

$$\{\xi_n^1 \in \Gamma\} = \{\hat{\xi}_n(x_{\tau_n^1}) \in \Gamma\} \cap \{\tau_n^1 < +\infty\}$$

$$+ \{\xi_o \in \Gamma\} \cap \{\tau_n^1 = +\infty\} = A_1 + A_2$$

$A_2 \in \mathcal{F}_{\tau_n^1}$, car τ_n^1 est $\mathcal{F}_{\tau_n^1}$ mesurable, et

$$A_1 = \bigcup_{h \in N} (\{\hat{\xi}_n(x_{\tau_n^1}) \in \Gamma\} \cap \{\tau_n^1 < k\})$$

et

$$\{\hat{\xi}_n(x_{\tau_n^1}) \in \Gamma\} \cap \{\tau_n^1 < k\} = \{\hat{\xi}_n(x_{\tau_n^1 \Lambda k}) \in \Gamma\} \cap \{\tau_n^1 < k\}$$

appartient à $\mathcal{F}_{\tau_n^1 \Lambda k} \subset \mathcal{F}_{\tau_n^1} \quad \forall\, k$

donc $A_1 \in \mathcal{F}_{\tau_n^1}$ également.

d'où

$$(2.20) \qquad u_n(x) = E_x^o \left\{ \int_o^{\tau_n^1} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha \tau_n^1} \left[\Psi(x_{\tau_n^1}) + c(x_{\tau_n^1}, \xi_n^1) + u_{n-1}(\xi_n^1)\, \bar{e}^{\alpha h} \right] \right\} .$$

On pose alors

$$\tilde{\tau}_n^2 = \text{Inf } (s \geq 0,\ u_{n-1}(x_s) = Mu_{n-2}(x_s))$$

et

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_n^2 = \left| \begin{array}{ll} \tau_n^1 + h + \tilde{\tau}_n^2 \circ \theta_{\tau_n^1+h} & \text{sur } \{\tau_n^1 < +\infty\} \\ +\infty & \text{sur } \{\tau_n^1 = +\infty\} \end{array} \right. \\ \\ \xi_n^2 = \left| \begin{array}{ll} \hat{\xi}_n^2(x_{\tau_n^2}) & \text{sur } \{\tau_n^2 < +\infty\} \\ \xi_o & \text{sur } \{\tau_n^2 = +\infty\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $\hat{\xi}_n^2(x)$ réalise l'inf de

$$\xi \to c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-2}(\xi) \ ,\ \hat{\xi}^2 \text{ (et mesurable).}$$

τ_n^2 est bien un temps d'arrêt car

$$\tau_n^2 = \chi_{\tau_n^1 < +\infty} (\tau_n^1 + h + \tilde{\tau}_n^2 \circ \theta_{\tau_n^1+h}) + (\infty) . \chi_{\tau_n^1 = +\infty}$$

le second terme est une variable alétaoire $\mathfrak{F}$ mesurable et le premier s'écrit

$$\lim_{h \uparrow \infty} \beta_k$$

où β_k est la suite croissante

$$\beta_k = \chi_{\tau_n^1 < k} (\tau_n^1 + h + \tilde{\tau}_n^2 \circ \theta_{\tau_n^1+h})$$

$$= \chi_{\tau_n^1 < k} (\tau_n^1 \wedge k + h + \tilde{\tau}_n^2 \circ \theta_{\tau_n^1 \wedge k + h})$$

qui est bien une variable aléatoire ($\mathcal{F}$ mesurable) car $\tau_n^1 \wedge k+h+\tilde{\tau}_n^2 \circ \theta_{\tau_n^1 \wedge k+h}$ est un temps d'arrêt (cf. [19]).

Donc τ_n^2 est $\mathcal{F}$-mesurable, il reste donc à montrer que $\{\tau_n^2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall\ t < +\infty$

Or

$$
\begin{aligned}
\{\tau_n^2 \leq t\} &= \{\tau_n^1 < +\infty\} \cap \{\tau_n^1+h+\tilde{\tau}_n^2 \circ\theta_{\tau_n^1+h} \leq t\} \\
&= \{\tau_n^1 \leq t\} \cap \{\tau_n^1+h+\tilde{\tau}_n^2 \circ\theta_{\tau_n^1+h} \leq t\} \\
&= \{\tau_n^1 \leq t\} \cap \{\tau_n^1 \wedge t+h+\tilde{\tau}_n^2 \circ\theta_{\tau_n^1 \wedge t+h} \leq t\}
\end{aligned}
$$

donc $\{\tau_n^2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ car $\tau_n^1 \wedge t + h + \tilde{\tau}_n^2 \circ\theta_{\tau_n^1 \wedge t+h}$ est un temps d'arrêt.

On définit maintenant

$$P_x^1 = P_x^o \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-}$$

$$P_x^1\ (A \cap \theta^{-1}_{\tau_n^1+h} N) = E_x^o(\chi_A \cdot P_{\xi_n^1}(B))$$

$$\forall\ A \in \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-},\ A \subset \{\tau_n^1 < +\infty\},\quad B \in \mathcal{F}$$

et le lemme II.2.2 donne alors

$$\bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(\xi_n^1) = E_x^1 \left\{ \int_{\tau_n^1+h}^{\tau_n^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\ \tau_n^2}\ Mu_{n-2}(x_{\tau_n^2}) \mid \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-} \right\}$$

Comme de plus, (par la propriété de Markov forte),

$$\bar{e}^{\alpha\tau_n^1} \psi(x_{\tau_n^1}) = E_x \left\{ \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds | \mathcal{F}_{\tau_n^1} \right\},$$

u_n devient, compte tenu de (2.21)

$$(2.22) \qquad u_n(x) = E_x^1\left\{\int_o^{\tau_n^2} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau_n^1}\, c(x_{\tau_n^1}, \xi_n^1)\right.$$

$$\left. + e^{-\alpha\tau_n^2}[\Psi(x_{\tau_n^2}) + c(x_{\tau_n^2}, \xi_n^2) + e^{-\alpha h} u_{n-2}(\xi_n^2)]\right\}$$

En itérant on obtient facilement

$$(2.23) \qquad u_n(x) = E^{n-1}\left\{\int_o^{\tau_n^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s) + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha\tau_n^i} c(x_{\tau_n^i}, \xi_n^i)\right.$$

$$\left. + e^{-\alpha(\tau_n^n+h)} u_o(\xi_n^n)\right\} \quad ,$$

où

$$\tau_n^{i+1} = \tau_n^i + h + \tilde{\tau}_n^{i+1} \circ \theta_{\tau_n^i+h} \quad ,$$

$$\tilde{\tau}_n^{i+1} = \text{Inf } (s \geq 0,\ u_{n-i}(x_s) = Mu_{n-i-1}(x_s)),$$

ξ_n^{i+1} réalisant l'inf de

$$c(x_{\tau_n^{i+1}}, \xi) + e^{-\alpha h} u_{n-i-1}(\xi) \; ,$$

P_x^{i+1} étant définie comme en (1.17).

Or

$$E_x^{n-1} e^{-\alpha(\tau_n^n+h)} u_o(\xi_n^n) = E_x^{n-1} e^{-\alpha(\tau_n^n+h)} E_{\xi_n^n} \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds$$

et en définissant P_x^n comme en (1.17),

$$e^{-\alpha(\tau_n^n+h)} E_{\xi_n^n} \int_o^{\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds = E_x^n \left\{\left(\int_o^{\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds\right)_o \theta_{\tau_n^n+h} \,\middle|\, \mathcal{F}_{(\tau_n^n+h)^-}\ e^{-\alpha(\tau_n^n+h)}\right\}$$

$$= E_x^n \left\{\int_{\tau_n^n+h}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_{(\tau_n^n+h)^-}\right\}$$

(2.23) devient donc

$$(2.24) \qquad u_n(x) = E_x^n\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha\tau_n^i} c(x_{\tau_n^i},\xi_n^i)\right)$$

$$= J_x(v_n)$$

si v_n est le contrôle admissible défini par

$$v_n = (\tau^i,\xi^i) \; i \geq 1 \; ,$$

$$\tau^i = \tau_n^i \quad i \leq n \; ,$$

$$\tau^i = +\infty \quad i \geq n+1 \; ,$$

$$\xi^i = \xi_n^i \quad i \leq n \; ,$$

$$\xi^i \text{ quelconque pour } i \geq n+1 \; .$$

Donc $u_n(x) \geq u(x)$.

■

<u>Lemme II.2.4.</u>

<u>Sous les hypothèses du lemme II.2.1.</u>

$$u_n(x) \downarrow u(x)$$

<u>en tout point $x \in E$.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit $v = (\tau^i,\xi^i)_{i \geq 1}$ un contrôle admissible quelconque on a naturellement

$$(2.25) \qquad u_n(x) \leq E_x^o\left(\int_0^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau^1}[\Psi(x_{\tau^1}) + e^{-\alpha h} u_{n-1}(\xi^1) + c(x_{\tau^1},\xi^1)]\right)$$

et en utilisant (2.12) ,

$$(2.26)\qquad u_{n-1}(\xi^1)\bar{e}^{\alpha(\tau^1+h)} \le E_x^1\Big[\int_{\tau^1+h}^{\tau^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau^2} Mu_{n-2}(x_{\tau^2}) \,|\, \mathcal{F}_{(\tau^1+h)^-}\Big]$$

de plus

$$(2.27)\qquad Mu_{n-2}(x_{\tau^2}) \le \Psi(x_{\tau^2}) + c(x_{\tau^2},\xi^2) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-2}(\xi^2)$$

(2.27), (2.26) dans (2.25) donnent

$$(2.28)\qquad u_n(x) \le E_x^1\Big\{\int_0^{\tau^2+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau^1} c(x_{\tau^1},\xi^1) + \bar{e}^{\alpha\tau^2} c(x_{\tau^2},\xi^2) + \bar{e}^{\alpha(\tau^2+h)} u_{n-2}(\xi^2)\Big\} .$$

En itérant le raisonnement précédent, on a

$$u_n(x) \le E_x^{n-1} \int_0^{\tau^n+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i=1}^{n} \bar{e}^{\alpha\tau^i} c(x_{\tau^i},\xi^i) + \bar{e}^{\alpha(\tau^n+h)} u_o(\xi^n) ,$$

=>

$$u_n(x) \le J_x(v) + E_x^{n-1}\, \bar{e}^{\alpha(\tau^n+h)} u_o(\xi^n) ,$$

u_o étant bornée et $\tau^n \uparrow +\infty$ quand $n \uparrow +\infty$, on a

$$\lim_{n\uparrow\infty} u_n(x) \le J_x(v) \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}$$

=>

$$\lim_{n\uparrow\infty} u_n(x) \le u(x) .$$

Avec le lemme II.2.3. on a le résultat.

■

Lemme II.2.5.

Sous les hypothèses du lemme II.2.1

(i) $u \in C$, $\underline{u_n \to u \text{ dans } C}$

(ii) <u>u est l'unique solution de l'équation</u>

$$(2.29) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu(x_\tau)\right).$$

<u>Démonstration</u>.

On va montrer que l'application $u_n \to u_{n+1}$ est une contraction.

Posons $\forall n$

$$J_x^n(\tau) = E_x\left(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu_{n-1}(x_\tau)\right)$$

On a

$$|J_x^n(\tau) - J_x^{n-1}(\tau)| = |E_x\, e^{-\alpha\tau}(Mu_{n-1}(x_\tau) - Mu_{n-2}(x_\tau))|$$

mais

$$Mu_{n-1}(x) = \Psi(x) + \inf_{\xi \in U} [c(x,\xi), e^{-\alpha h} u_{n-1}(\xi)]$$

$\Rightarrow$

$$(2.30) \qquad \| Mu_{n-1} - Mu_{n-2} \| \le e^{-\alpha h} \| u_{n-1} - u_{n-2} \|$$

En effet si on pose $K = \| u_{n-1} - u_{n-2} \| e^{-\alpha h}$, on a

$$c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u_{n-2}(\xi) - K \le c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u_{n-1}(\xi)$$

$$\le c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u_{n-2}(\xi) + K$$

$\forall x, \xi \Rightarrow (2.30)$.

D'où $\forall \tau$

$$(2.31) \qquad |J_x^n(\tau) - J_x^{n-1}(\tau)| \le e^{-\alpha h} \| u_{n-1} - u_{n-2} \|$$

=>

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \bar{e}^{\alpha h} \| u_{n-1} - u_{n-2} \|$$

Donc u_n converge dans C vers l'unique point fixe de l'application $u_{n-1} \to u_n$ définie par (2.4). Autrement dit $u_n \to \tilde{u}$ dans C, $\tilde{u}$ étant solution unique de (2.29). Mais comme $u_n(x) \to u(x)$, on a $\tilde{u} = u$ et le lemme est démontré.

∎

<u>Théorème II.2.1</u>

<u>Sous les hypothèses du lemme II.2.1, u est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions vérifiant</u>

(2.32) $\qquad w \leq Mw$,

(2.33) $\qquad w \leq \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)w + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f\, ds$, $\forall\, t \geq 0$,

(2.34) $\qquad w \in C$.

<u>Démonstration.</u>

u est solution de (2.32) à (2.34) d'après le lemme II.2.5. Soit w une autre solution (2.33) implique que

$$Y(s) = \bar{e}^{\alpha s} w(x_s) + \int_0^s \bar{e}^{\alpha t} f(x_t) dt$$

est une sous martingale (relativement à P_x, $\mathcal{F}_t$), qui, comme $w \in C$ est continue à droite et borné.

Le théorème d'arrêt donne alors $\forall\, \tau$ temps d'arrêt

$$w(x) \leq E_x\left(\int_0^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_\sigma) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} w(x_\tau) \right)$$

$$\leq E_x\left(\int_0^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mw(x_\tau) \right)$$

d'après (2.32). Donc

$$w(x) \leq u_o(x) \quad (\text{en prenant } \tau = +\infty)$$

$$\Rightarrow \qquad Mw \leq Mu_o \Rightarrow w \leq u_1 \qquad \text{etc...}$$

finalement $w \leq u_n \quad \forall\, n \Rightarrow w \leq u$.

∎

Théorème II.2.2.

Sous les hypothèses du lemme II.2.1, il existe un contrôle optimal pour le problème (1.20).
Si on note

$$\hat{\tau} = \text{Inf } (s \geq 0,\ u(x_s) = Mu(x_s))$$

$\hat{\xi}(x)$ un élément réalisant l'inf de

$$\xi \to c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u(\xi) \quad \text{sur } U ,$$

tel que $x \to \hat{\xi}(x)$ est mesurable, alors le contrôle optimal est donné par

$$\hat{\tau}^1 = \hat{\tau}$$

$$(2.35)\qquad \begin{cases} \hat{\tau}^{i+1} = \hat{\tau}^i + h + \hat{\tau}_o\ \theta_{\hat{\tau}^i+h} & \text{sur } \{\hat{\tau} < +\infty\} \\ \hat{\tau}^{i+1} = +\infty & \text{sur } \{\hat{\tau} = +\infty\} \end{cases}$$

$$(2.36)\qquad \begin{cases} \hat{\xi}^i = \hat{\xi}(x_{\hat{\tau}^i}) & \text{sur } \{\hat{\tau} < +\infty\} \\ \hat{\xi}^i = \xi_o \in U \quad \text{arbitraire} & \text{sur } \{\hat{\tau} = +\infty\} \end{cases}$$

Démonstration.

$\hat{\xi}(x)$ (mesurable) existe car u et c sont continues et U est compact.

D'après le lemme II.2.5, u est borne inférieure d'un problème d'arrêt optimal qui d'après I.3 admet $\hat{\tau}$ comme contrôle optimal, donc

$$(2.37)\qquad u(x) = E_x^o\left(\int_o^{\hat{\tau}^1} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^1} Mu(x_{\hat{\tau}^1})\right)$$

$$(P_x^o = P_x)$$

De plus, la définition de $\hat{\xi}^1$ donne

$$\bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^1} Mu(x_{\hat{\tau}^1}) = [\Psi(x_{\hat{\tau}^1}) + c(x_{\hat{\tau}^1}, \hat{\xi}^1) + \bar{e}^{\alpha h} u(\hat{\xi}^1)]\bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^1}$$

Donc

$$(2.38)\qquad u(x) = E_x^o\left[\int_o^{\hat{\tau}^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^1} c(x_{\hat{\tau}^1}, \hat{\xi}^1) + \bar{e}^{\alpha(\hat{\tau}^1+h)} u(\hat{\xi}^1)\right] .$$

En appliquant le lemme II.2.2 on a maintenant

$$(2.39)\qquad \bar{e}^{\alpha(\hat{\tau}^1+h)} u(\hat{\xi}^1) = E_x^1\left(\int_{\hat{\tau}^1+h}^{\hat{\tau}^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^2} Mu(x_{\hat{\tau}^2}) | \mathcal{F}_{(\hat{\tau}^1+h)^-}\right)$$

où P_x^1 est définie comme en (1.17) (avec $\hat{\tau}^1$ et $\hat{\xi}^1$).

Une récurrence immédiate donne alors, $\forall\ i \geq 1$

$$(2.40)\qquad u(x) = E_x^{i-1}\left(\int_o^{\hat{\tau}^i+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{i} c(x_{\hat{\tau}^j}, \hat{\xi}^j)\bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^j} + \bar{e}^{\alpha(\hat{\tau}^i+h)} u(\hat{\xi}^i)\right)$$

et comme u est bornée, et que $\hat{\tau}^i \uparrow +\infty$, $i \uparrow \infty$, on a

$$(2.41)\qquad u(x) = J_x(\hat{v})$$

ce qui démontre le théorème.

∎

Remarque II.2.1.

On peut définir

(2.42) $$u_1(x,\rho,\xi) = \int_\rho^h e^{-\alpha(s-\rho)}\Phi(s-\rho)f(x)ds + e^{-\alpha(h-\rho)}u(\xi)$$

pour $\rho \in [0,h]$.

On peut démontrer que $\rho \to u_1(x,\rho,\xi)$ est différentiable et que x, et continue sur $E \times [0,h] \times U$.
De plus, soit w solution de

(2.43) $$\tilde{A}w - \alpha w + f = 0$$

i.e $$w(x) = R_\alpha f(x) \in C \cap \mathcal{D}_{\tilde{A}} \quad .$$

On a aussi pour ξ fixé $u(\xi) \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ (car c'est une constante).

Si l'on pose $u_1 = \tilde{u}_1 + w$ et que l'on considère l'équation

(2.44) $$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\rho} + \tilde{A}\varphi - \alpha\varphi = 0 \ , \\ \varphi(h) = u(\xi) - w \qquad \text{pour } \xi \text{ fixé} \ . \end{cases}$$

Comme $\varphi(h) \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, (2.44) a une solution unique qui est

$$\varphi(\rho) = \Phi(h-\rho)(u(\xi)-w)\, e^{-\alpha(h-\rho)}$$

on peut encore écrire que u_1 est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{du_1}{d\rho} + Au_1 - \alpha u_1 + f = 0 \\ u_1(x,h,\xi) = u(\xi) \end{array} \right.$$

on a alors

$$Mu(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(x,\xi) + u_1(x,0,\xi)] \ .$$

■

Donnons maintenant un cas d'utilisation de l'hypothèse (1.5).

Théorème II.2.3.

Sous les hypothèses (1.1) à (1.3), (1.5), (1.6) à (1.9) (mais pas (1.4)) et si de plus

c est uniformément continue ,

$f \in B_o$.

Alors les résultats des théorèmes II.2.1. et II.2.2. sont valides.

Démonstration.

L'examen des démonstrations des théorèmes II.2.1 et II.2.2 fait ressortir qu'ils sont valables dès que l'on dispose d'un lemme analogue au lemme II.2.1. Montrons que sous les hypothèses précédentes l'on peut utiliser le corollaire I.3.4 pour les problèmes approchés.

$$f \in B_o \Rightarrow \int_o^h \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f\, ds \in B_o \quad .$$

En effet

$$\int_o^h \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f\, ds = R_\alpha f - \int_h^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)f ds$$

$$= R_\alpha f - \bar{e}^{\alpha h}\Phi(h)(R_\alpha f) \ .$$

B_o étant invariant par Φ, $R_\alpha f$ appartenant à B_o , $\int_o^h \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s)fds \in B_o$.

Alors u^o continue, c uniformément continue, donne $\underset{\xi\in U}{\mathrm{Inf}}\ c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h}u(\xi)$ est uniformément continue, donc $Mu^o \in B_o$, donc u^1 est continu (corollaire I.3.4). On continue ainsi par récurrence et les démonstrations des théorèmes II.2.1 et II.2.2 s'en suivent.

∎

Remarque II.2.2. Variantes :

(a) On peut considérer le problème précédent avec un coût différent suivant que l'on est entre τ^i et τ^i+h ou entre τ^i+h et τ^{i+1}.

On se donne alors f_o et f_1 continues bornées sur E, ≥ 0 et on définit le critère par

$$J_x(v) = E_x^v \Big\{ \sum_{i\geq 1} \int_{\tau^i}^{\tau^i+h} f_1(x_s) e^{-\alpha s} ds + \sum_{i\geq 1} \int_{\tau^i+h}^{\tau^{i+1}} e^{-\alpha s} f_o(x_s) ds$$

$$+ \int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f_o(x_s) ds + \sum_{i\geq 1} e^{-\alpha\tau^i} c(x_{\tau^i}, \xi^i) \Big\}$$

(b) Il peut être intéressant de supposer que le retard dépend de la décision ξ par exemple $0 < h_1 \leq h(\xi) \leq h_2 \quad \forall \xi \in E$. Sous des hypothèses convenables (exemple : $h(\xi)$ continue sur U) les résultats précédent s'appliquent sans difficulté. L'opérateur Mu est légèrement modifié

$$Mu(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi\in U}\Big[c(x,\xi) + E_x \int_o^{h(\xi)} e^{-\alpha s} f(x_s) ds$$

$$+ e^{-\alpha h(\xi)} u(\xi) \Big] .$$

∎

II.3. PROBLEMES DE CONTROLE "ARRETE".

On va ici considérer les cas le problème de contrôle est arrêté quand certaines conditions sont vérifiées.

On peut envisager par exemple d'arrêter de contrôler le processus quand celui ci sort d'un ensemble $\mathcal{O}$.

Il faut remarquer tout de suite que le problème traité au §. II.2. peut être étudié pour un processus arrêté à la sortie de $\mathcal{O}$, mais sans que pour cela on arrête de contrôler le système. Simplement l'état restera figé tant qu'une décision ne le ramènera pas à l'intérieur de $\mathcal{O}$: dans ce cas les résultats du §. II.3 n'ont pas besoin d'être modifiés.

On va ici envisager un cas particulier où l'on arrête le contrôle quand x_t sort de $\mathcal{O}$ ouvert de E, si cet instant de sortie n'est pas entre τ^i et τ^i+h où $(\tau^i, i \geq 1)$ est la suite des instants de décision. Le cas où le contrôle cesse dès que x_t sort de $\mathcal{O}$ sans autre condition, nécessite une construction plus complexe qui relève des méthodes qui seront utilisées pour les problèmes sans retard.

II.3.1. Hypothèses - notations - position du problème.

Ω étant défini comme en II.1, on se donne un processus de Markov

$$\tilde{X} = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \theta_t, x_t, \tilde{P}_x)$$

vérifiant les hypothèses du §. II.1.

On notera $\mathcal{O}$ un ouvert de E

$$\tau_{\mathcal{O}} = \operatorname{Inf} (s \geq 0, x_s \notin \mathcal{O}),$$

et on supposera construit sur $(\Omega,\mathcal{F})$ le processus obtenu à partir de $\tilde{X}$ par arrêt à la sortie de $\mathcal{O}$. On note X ce processus :

(3.1) $$X = (\Omega,\ \mathcal{F}_t,\ \mathcal{F},\ \theta_t,\ x_t,\ P_x)$$

(i.e. $P_x(x_t \in \Gamma) = \tilde{P}_x\ (x_{t \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \in \Gamma))$

et on note $\Phi(t)$ son semi groupe.

On supposera

(3.2) $\Phi(t)$ vérifie les propriétés (1.2), (1.3), (1.4).

Comme on l'a déjà vu pour les problèmes d'arrêt ceci est une hypothèse restrictive qui ne permet pas de traiter le cas plus général où le processus non arrêté est fellerien.

On se donne

(3.3) $$f \in C\ ,\ \ f \geq 0\ ,\ \ L = f\ \chi_{\mathcal{O}}$$

(3.4) $c(x,\xi) \geq k > 0$, continue bornée sur $E \times U$

On supposera de plus que f est telle que

(3.5) $$E_x \int_0^h e^{-\alpha s} L(x_s) ds \in C\ .$$

(ceci est possible, par exemple si f est continue et nulle sur $\partial\mathcal{O}$, $\Phi(t)$ fellerien assure que (3.5) est vérifiée).

<u>Les contrôles admissibles</u> sont définis comme au §. II.1.

On va définir le <u>processus contrôlé</u> de la manière suivante

à $\tilde{v} \in \mathcal{V}$, $\tilde{v} = (\tilde{\tau}^i, \xi^i)_{i \geq 1}$, on associe

$v = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ par :

$$\tau^1_{\mathcal{O}} = \tau_{\mathcal{O}}$$

$$(3.6) \quad \tau^1 = \begin{cases} \tilde{\tau}^1 & \text{si } \tilde{\tau}^1 < \tau^1_{\mathcal{O}} \\ + \infty & \text{si } \tilde{\tau}^1 \geq \tau^1_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

(c'est bien un t.a de $\mathfrak{F}_t$, car

$$\{\tau^1 \leq t\} = \{\tilde{\tau}^1 \leq t\} \cap \{\tilde{\tau} < \tau^1_{\mathcal{O}}\} \quad \forall\ t < + \infty$$

$\Rightarrow$ $\{\tau^1 \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ puisque $\{\tilde{\tau}^1 < \tau^1_{\mathcal{O}}\} \in \mathfrak{F}_{\tilde{\tau}^1}$;

d'autre part $\{\tau^1 = + \infty\} = \{\tilde{\tau}^1 \geq \tau^1_{\mathcal{O}}\} \in \mathfrak{F})$.

On pose aussi

$$(3.7) \quad \tau^2_{\mathcal{O}} = \begin{cases} \tau^1 + h + \tau^1_{\mathcal{O}} \circ \theta_{\tau^1+h} & \text{sur } \{\tau^1 < + \infty\} \\ + \infty & \text{sur } \{\tau^1 = + \infty\} \end{cases}$$

puis

$$(3.8) \quad \tau^2 = \begin{cases} \tilde{\tau}^2 & \text{si } \tilde{\tau}^2 < \tau^2_{\mathcal{O}} \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

etc... On a encore $\tau^{i+1} \geq \tau^i + h \quad (\forall\ \omega)$.

On construit maintenant, à partir de $v = (\tau^i, \xi^i)_{\ i \geq 1}$

$$P^o_x = P_x$$

$$(3.9) \quad \begin{cases} P^1_x = P^o_x \quad \text{sur } \mathfrak{F}_{(\tau^1+h)^-} \\ P^1_x\ (A \cap \theta^{-1}_{\tau^1+h}\ B) = E^o_x\ (\chi_A .\ P_{\xi^1}(B)) , \end{cases}$$

$$\forall A \in \mathfrak{F}_{(\tau^1+h)^-} , \quad A \subset \{\tau^1 < +\infty\}, \quad \forall B \in \mathfrak{F}$$

comme au lemme II.1.1. et ainsi de suite.

On pose alors

(3.10) $$P_x^{\tilde{v}} = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{(\tau^n+h)^-} .$$

Enfin <u>le critère</u> sera défini par

(3.11) $$J_x(\tilde{v}) = E_x^{\tilde{v}} \left\{ \int_o^\infty \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds + \sum_{i \geq 1} c(x_{\tau^i}, \xi^i) \bar{e}^{\alpha\tau^i} \right\}$$

et

(3.12) $$u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tilde{v} \in \mathcal{V}} J_x(\tilde{v}) .$$

II.3.2. Caractérisation du coût optimal.

On ne mentionnera que les modifications à apporter aux résultats du §. II.2. Les démonstrations sont similaires.

On introduit les fonctions

(3.13) $$u_o(x) = E_x \int_o^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds = R_\alpha L$$

(si R_α est la résolvante de $\Phi(t)$).

(3.14) $$u_n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \left(\int_o^\tau \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} \chi_{\mathcal{O}} M u_{n-1}(x_\tau) \right)$$

où

(3.15) $$M u_{n-1}(x) = E_x \int_o^h \bar{e}^{\alpha s} L(x_s) ds + \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi)]$$

(On rappelle que E_x est l'espérance par rapport à P_x qui sont les mesures correspondant au processus arrêté).

Remarque II.3.1.

En fonction du processus non arrêté u_n s'écrit aussi

$$(3.16) \qquad u_n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} \tilde{E}_x\left(\int_0^{\tau\Lambda\tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau}\chi_{\tau<\tau_{\mathcal{O}}} Mu_{n-1}(x_\tau)\right).$$

∎

Lemme II.3.1.

Sous les hypothèses (3.1) à (3.5)

(i) $\quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_o \leq \frac{1}{\alpha}\| f \|$,

(ii) $\quad u_n \in C \cap D_o \quad$ où $D_o = \{\varphi \in B \; ; \; \varphi=0 \text{ sur } \mathcal{O}^c\}$,

(iii) $\quad u_n(x) \downarrow u(x)$ en tout point $x \in E$,

(iv) $\quad u$ est solution unique de l'équation

$$(3.17) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left(\int_0^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau}\chi_{\mathcal{O}} Mu(x_\tau)\right).$$

Démonstration.

(i) est immédiat, (ii) résulte des propriétés des problèmes de temps d'arrêt optimal (cf. §. I.3), démontrons (iii) :
On pose

$$(3.18) \qquad \tilde{\tau}_n^1 = \operatorname{Inf} (s \geq 0 \quad u_n(x_s) = Mu(x_s))$$

c'est le temps d'arrêt optimal pour u_n i.e.

$$(3.19) \qquad u_n(x) = E_x\left(\int_0^{\tilde{\tau}_n^1} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1}\chi_{\mathcal{O}} Mu_{n-1}(x_{\tilde{\tau}_n^1})\right).$$

Soit d'autre part $\hat{\xi}_n(x)$ réalisant l'infimum de $\xi \to c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi)$ sur U tel que $x \to \hat{\xi}_n(x)$ soit mesurable, et posons

$$\xi_n^1 = \hat{\xi}_n(x_{\tilde{\tau}_n^1}) , \tag{3.20}$$

(même lorsque ce ne sera pas mentionné explicitement il sera entendu que (3.20) signifie $\xi_n^1 = \hat{\xi}_n(x_{\tilde{\tau}_n^1})$ sur $\{\tau_n^1 < +\infty\}$ et $\xi_n^1 = \xi_o \in U$ arbitraire sur $\{\tilde{\tau}_n^1 = +\infty\}$.

On a de plus, P_x ps.

$$\bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1} \chi_{\mathcal{O}} M u_{n-1}(x_{\tilde{\tau}_n^1}) = \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1} E_{x_{\tilde{\tau}_n^1}}\left(\int_o^h \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds\right) + \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1}(c(x_{\tilde{\tau}_n^1},\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi_n^1))\chi_{\mathcal{O}}(x_{\tilde{\tau}_n^1}) \tag{3.21}$$

(le premier terme du second membre est nul si $x_{\tilde{\tau}_n^1} \notin \mathcal{O}$).

D'autre part, par la propriété de Markov forte,

$$\bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1} E_{x_{\tilde{\tau}_n^1}}\left(\int_o^h \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds\right) = E_x\left(\int_{\tilde{\tau}_n^1}^{\tilde{\tau}_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds \,|\, \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_n^1}\right) \tag{3.22}$$

P_x ps.

Donc,

$$u_n(x) = E_x\left\{\int_o^{\tilde{\tau}_n^1+h} L(x_s)\bar{e}^{\alpha s}ds + \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1}\{c(x_{\tilde{\tau}_n^1},\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi_n^1)\}\, \chi_{\mathcal{O}}(x_{\tilde{\tau}_n^1})\right\} \tag{3.23}$$

On pose maintenant

$$\tau_n^1 = \begin{cases} \tilde{\tau}_n^1 & \text{si } \tilde{\tau}_n^1 < \tau_{\mathcal{O}}^1 = \tau_{\mathcal{O}} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$(3.24)\qquad E_x \int_0^{\tilde{\tau}_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds = E_x \int_0^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds$$

et

$$(3.25)\qquad E_x\, \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1}(c(x_{\tilde{\tau}_n^1},\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi_n^1))\chi_{\mathcal{O}}(x_{\tilde{\tau}_n^1})$$

$$= E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}[c(x_{\tau_n^1},\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi_n^1)]$$

puisque le second membre s'écrit

$$E_x\, \chi_{\tilde{\tau}_n^1 < \tau_{\mathcal{O}}}\, \bar{e}^{\alpha\tilde{\tau}_n^1}(c(x_{\tilde{\tau}_n^1},\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha h} u_{n-1}(\xi_n^1)) .$$

Finalement, en rassemblant (3.19) à (3.25) on a

$$u_n(x) = E_x\Bigg(\int_0^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}\, c(x_{\tau_n^1},\xi^1)$$

$$+ \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(\xi_n^1)\Bigg) .$$

On définit alors

$$P_x^o = P_x$$

$$P_x^1 \quad \text{comme en } (3.9) ,$$

et on est ramené à la situation du §. II.2 car le lemme II.2.2 s'étend sans difficulté; on obtient ainsi $u_n \geq u$, la démonstration de $\operatorname{Lim} u_n(x) \leq u(x)\quad \forall\, x$ s'effectue comme au lemme II.2.4 avec des modifications similaires à celles qui viennent d'être faites.

Enfin on montre exactement comme au Lemme II.2.5 que $u_n \to \tilde{u}$ dans C, $\tilde{u}$ unique solution de (3.17) et comme $u_n(x) \downarrow u(x)$, $\tilde{u} = u$.

■

Théorème II.3.1.

Sous les hypothèses du lemme II.3.1., u est solution maximum du système

$$
(3.26)\qquad \begin{cases} u \leq Mu\,, \\ u \leq e^{-\alpha t}\Phi(t) + \displaystyle\int_0^t e^{-\alpha s}\Phi(s)L\,ds \quad \forall\, t \geq 0, \\ u \in C \cap D_0\,. \end{cases}
$$

De plus il existe un contrôle optimal donné par

$$
(3.27)\qquad \hat{\tau} = \mathrm{Inf}\,(s \geq 0,\ u(x_s) = Mu(x_s))
$$

$$
\hat{\tau}^1 = \hat{\tau}
$$

$$
(3.28)\qquad \hat{\tau}^{i+1} = \left| \begin{array}{ll} \hat{\tau}^i + h + \hat{\tau}^1 \circ \theta_{\hat{\tau}^i + h} & \text{sur } \{\hat{\tau}^1 < +\infty\} \\ +\infty & \text{sur } \{\hat{\tau}^1 = +\infty\} \end{array} \right.
$$

(3.29) $\hat{\xi}^i = \hat{\xi}(x_{\hat{\tau}^i})$ où $\hat{\xi}(\cdot)$ est une application mesurable telle que $\hat{\xi}(x)$ réalise le minimum de $\xi \to c(x,\xi) + e^{-\alpha h}u(\xi)$ sur U.

Démonstration.

La démonstration de la première partie de l'énoncé s'effectue comme au Théorème II.2.1.

Pour démontrer que le contrôle défini par (3.27), (3.28), (3.29) est optimal, on lui associe

$$
(3.30)\qquad \tau^1 = \left| \begin{array}{ll} \hat{\tau}^1 & \text{si } \hat{\tau}^1 < \tau^1_{\mathcal{O}} = \tau_{\mathcal{O}} \\ +\infty & \text{sinon} \end{array} \right.
$$

$$\tau^{i+1} = \begin{cases} \tau^i + h + \tau^1 \circ \theta_{\tau^i + h} & \text{sur } \{\tau^1 < +\infty\} \\ +\infty & \text{sur } \{\tau^1 = +\infty\} \end{cases}$$

Et comme au lemme II.3.1, on utilise le fait que $\hat{\tau}^1$ est optimal pour le problème d'arrêt défini par (3.17) pour obtenir

$$u(x) = E_x \int_0^{\tau^1} L(x_s)\, \bar{e}^{\alpha s} ds + \bar{e}^{\alpha\tau^1} \chi_{\mathcal{O}} Mu(x_{\tau^1}),$$

En utilisant le lemme II.2.2. on termine la démonstration comme au théorème II.2.2.

On va montrer, de plus, que $\tau^1 = \hat{\tau}^1$ ps P_x autrement dit que ou bien $\hat{\tau}^1 < \tau_{\mathcal{O}}$ ou bien $\hat{\tau}^1 = +\infty$.
En effet si $s \geq \tau_{\mathcal{O}}$, on a

$$Mu(x_s) = E_{x_s} \int_0^h \bar{e}^{\alpha t} L(x_t) dt$$

$$+ \operatorname*{Inf}_{\xi} [c(x_s,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u(\xi)]$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\xi} [c(x_s,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u(\xi)] \quad P_x \quad \text{ps.}$$

Car $s \geq \tau_{\mathcal{O}} \Rightarrow x_s = x_{\tau_{\mathcal{O}}}$, P_x ps et L est nulle en dehors de $\mathcal{O}$.
Autrement dit

$$Mu(x_s) = Mu(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) \quad P_x \quad \text{ps},$$

ceci implique que si $\hat{\tau}^1 \geq \tau_{\mathcal{O}}$ alors on a nécessairement

$$\hat{\tau}^1 = \tau_{\mathcal{O}} \quad \text{ou alors} \quad \hat{\tau}^1 = +\infty$$

suivant que $\quad u(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) = Mu(x_{\tau_{\mathcal{O}}})$

ou que $\quad u(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) < Mu(x_{\tau_{\mathcal{O}}})$.

Mais on a $\quad u(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) = 0$

et $\qquad c(x_{\tau_{\mathcal{O}}},\xi) \geq k > 0 \quad \forall\ \xi$,

donc $\qquad u(x_{\tau_{\mathcal{O}}}) < Mu(x_{\tau_{\mathcal{O}}})$

ce qui implique

$$\hat{\tau}^1 \geq \tau_{\mathcal{O}} \Rightarrow \hat{\tau}^1 = +\infty \text{ donc } \hat{\tau}^1 = \tau^1 \quad P_x \text{ ps.}$$

■

Remarque II.3.1.

Si l'on voulait traiter le problème de contrôle arrêté dès que x_t sort de $\mathcal{O}$ sans autre restriction (i.e y compris si $\tau_{\mathcal{O}} \in [\tau^i,\tau^i+h[$). On vérifie formellement qu'il faudrait poser

$$Mu(x) = E_x \int_0^h \bar{e}^{\alpha s} L(x_s)ds + \operatorname*{Inf}_{\xi\in U} [c(x,\xi) + E_x\, \bar{e}^{\alpha h}\, \chi_{h<\tau_{\mathcal{O}}} u(\xi)]$$

Or $E_x\, \chi_{h<\tau_{\mathcal{O}}}$ n'est pas continu en général. Par contre c'est vrai pour un processus de Markov <u>continu</u> et <u>fortement Fellerien</u> cf. DYNKIN [21] Vol2.

■

II.4. PROBLEME DU TYPE "GESTION DE STOCK".

On va étudier comme précédemment, un problème un peu différent de celui du §. II.1. On va supposer que la décision porte sur les quantités qui seront ajoutées à l'état $x_{(\tau+h)^-}$: c'est en particulier la situation dans un problème de gestion de stock où le niveau du stock est un processus de Markov, et où l'on cherche les dates et les quantités à commander pour remplir le stock. (cf. [12]).

II.4.1. Hypothèses - position du problème.

Les notations et hypothèses seront celles du §. II.1 pour le processus de Markov à savoir (1.1) à (1.4).

(4.1) avec $E = R^d$ ou Z^d (éventuellement une combinaison des deux $R^{d_1} \times Z^{d_2}$ par exemple).
On notera E^+ les éléments de E dont toutes les composantes sont positives.

On définit les contrôles admissibles par

$$v \in \mathcal{V} \iff v = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}, \tag{4.2}$$

où (τ^i) est une suite de temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, avec

$$\tau^{i+1} \geq \tau^i + h \quad i \geq 1 \tag{4.3}$$

(4.4) et ξ^i est une v.a à valeurs dans U compact de E^+, $\mathcal{F}_{\tau^i}$ mesurable $(\forall\, i)$.

On construit le processus contrôlé en associant à $v \in \mathcal{V}$ la suite de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$P_x^o = P_x$$

$$(4.5)\qquad \begin{cases} P_x^1 = P_x^o \text{ sur } \mathcal{F}_{(\tau^1+h)-} \\ P_x^1[A \cap \theta_{\tau_h^1}^{-1} B] = E_x^o(\chi_A . E_{x_{\tau_h^{1-}}+\xi^1}(B)) \end{cases}$$

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_{\tau_h^{1-}},\ A \subseteq \{\tau^1 < +\infty\}\ ,\ B \in \mathcal{F}\ .$$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$$(4.6)\qquad \begin{cases} P_x^n = P_x^{n-1} \text{ sur } \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}} \\ P_x^n(A \cap \theta_{\tau_h^n}^{-1} B) = E_x^{n-1}(\chi_A . E_{x_{\tau_h^{n-}}+\xi^n}(B)) \end{cases}$$

$$\forall\, a \in \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}},\ A \subseteq \{\tau^n < +\infty\},\ B \in \mathcal{F}\ .$$

Il convient de noter que ,

$$\chi_{\{\tau_h^n < +\infty\}} . x_{\tau_h^{n-}} \text{ est une v.a } \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}} \text{ mesurable.}$$

Donc la construction précédente est un cas particulier de celle du §. II.1.

En notant P_x^v la probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ définie par

$$P_x^v = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}}\ .$$

On définit <u>le critère</u> par

$$(4.7)\qquad J_x(v) = E_x^v\left\{\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i\geq 1} e^{-\alpha\tau^i} c(x_{\tau^i},\xi^i)\right\}\ ,$$

et on pose

$$(4.8)\qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}} J_x(v)\ .$$

On va étudier ce problème avec les méthodes du §. II.2.

II.4.2. Caractérisation du coût optimal.

On introduit les fonctions

$$(4.9) \qquad u_o(x) = E_x \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds \;,$$

$$(4.10) \qquad u_n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \left(\int_o^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds + e^{-\alpha\tau} Mu_{n-1}(x_\tau) \right) ,$$

où

$$(4.11) \qquad Mu_{n-1}(x) = E_x \int_o^h e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds + \operatorname*{Inf}_{\xi\in U} \left[c(x,\xi) + e^{-\alpha h} E_x(u_{n-1}(x_h+\xi)) \right] .$$

On aura besoin ensuite de la propriété suivante

Lemme II.4.1.

Sous les hypothèses (1.1) à (1.3) du §. II.1.

$$(4.12) \qquad w \in C \;\Rightarrow\; E_x\, w(x_h+\xi) \in C_b^o(E \times U).$$

Démonstration.

Soit $x_n \to x$, $\xi_n \to \xi$, respectivement dans E et U. La propriété de Feller implique en particulier que

(4.13) $\quad P(x_n,h,\cdot)$ converge étroitement vers $P(x,h,\cdot)$ dans l'espace des mesures bornées sur E.

De plus $w \in C \Rightarrow$

$$(4.14) \qquad w(x+\xi_n) \to w(x+\xi)$$

uniformément sur tout compact de E quand $\xi_n \to \xi$.

Posons en effet

$$\varphi_n(x) = w(x+\xi_n) \ , \ \varphi(x) = w(x+\xi)$$

Soit K un compact de E et soit $\tilde{K}$ le compact de E suivant

$$\{y \mid y = x + \xi \ , \quad x \in K, \ \xi \in U\} \ , \tag{4.15}$$

w étant uniformément continue sur $\tilde{K}$, on note

$$\rho_{\tilde{K}}(\delta) = \sup_{\substack{x',x'' \in \tilde{K} \\ |x'-x''| \leq \delta}} |w(x') - w(x'')| \ . \tag{4.16}$$

On a alors

$$\sup_{x\in\tilde{K}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \rho_{\tilde{K}}(|\xi^n-\xi|) \tag{4.17}$$

Donc quand $n \uparrow \infty$, $\varphi_n \to \varphi$ uniformément sur tout compact. Il en résulte que (cf. [15] par exemple)

$$\int_E P(x_n,h,dy) \ \varphi_n(y) \text{ converge vers}$$

$$\int_E P(x,h,dy) \ \varphi(y)$$

autrement dit $\quad (x,\xi) \to E_x \ w(x_h+\xi) \in C_b^o(E \times U)$.

■

On revient à l'étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

Lemme II.4.2.

Sous les hypothèses (1.1) à (1.9), (4.1) à (4.4), (4.12) on a

(i) $\qquad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_o \leq \dfrac{\|f\|}{\alpha}$.

(ii) $u_n \in C$

(iii) $u_n(x) \downarrow u(x)$

(iv) u est solution unique de l'équation

$$u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left(\int_{\phi}^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu(x_\tau)\right). \tag{4.18}$$

Démonstration.

(i) se démontre comme d'habitude. (ii) est une conséquence des résultats du §. I.3 puisque l'on a (4.12). (4.18) a alors une solution unique dans C par application du théorème de point fixe de Banach comme en II.2 (et $u_n \to \tilde{u}$ solution de (4.18)). Seule la démonstration de (iii) doit être légèrement adaptée.

Montrons simplement $u_n(x) \geq u(x)$ puisque l'inverse est obtenue par des raisonnements analogues. On note

$$\tau_n^1 = \operatorname{Inf}\,(s \geq 0 \quad u_n(x_s) = Mu_n(x_s))$$

=>

$$u_n(x) = E_x\left(\int_o^{\tau_n^1} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} Mu_{n-1}(x_{\tau_n^1})\right) \tag{4.19}$$

Soit $\hat{\xi}_n^1(x)$ une fonction mesurable réalisant l'inf de

$$\xi \to c(x,\xi) + E_x\, u_{n-1}(x_h+\xi)\, \bar{e}^{\alpha h} \quad \text{sur } U\,,$$

On pose

$$\xi_n^1 = \hat{\xi}_n^1\,(x_{\tau_n^1})$$

d'où

$$\bar{e}^{\alpha\tau_n^1} Mu_{n-1}(x_{\tau_n^1}) = (E_{x_{\tau_n^1}} \int_o^h \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds)\bar{e}^{\alpha\tau_n^1} + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} c(x_{\tau_n^1}, \xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} E_{x_{\tau_n^1}} u_{n-1}(x_h+\xi_n^1) \tag{4.20}$$

(noter que $E_{x_{\tau_n^1}} u_{n-1}(x_n+\xi_n^1)$ signifie

$$E_{x_{\tau_n^1}(\omega)} u_{n-1}(x_h + \xi_n^1(\omega))$$
$$= \int_\Omega P_{x_{\tau_n^1}(\omega)}(d\omega') \, u_{n-1}(x_h(\omega') + \xi_n^1(\omega))).$$

La seule chose à démontrer pour se ramener au cas du §. II.2. est que

$$E_x \, e^{-\alpha(\tau_n^1+h)} E_{x_{\tau_n^1}} u_{n-1}(x_h+\xi_n^1) \tag{4.21}$$
$$= E_x \, e^{-\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(x_{(\tau_n^1+h)^-} + \xi_n^1) \; .$$

Or par la propriété de Markov forte on a

$$E_x \, e^{-\alpha(\tau_n^1+h)} E_{x_{\tau_n^1}} u_{n-1}(x_h+\xi_n^1) \tag{4.22}$$
$$= E_x \, e^{-\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(x_{\tau_n^1+h} + \xi_n^1)$$

ceci est en fait une extension de la propriété de Markov (cf. MEYER [48] p. 45, th. 21).

Mais d'autre part, x_t est quasi continu à gauche par hypothèse et, $k \geq 1$

$$\beta_k = \tau_n^1 + h - \frac{h}{k}$$

est une suite croissante de temps d'arrêt, telle que

$$\lim_{k\uparrow+\infty} \beta_k = \tau_n^1+h$$

La quasi continuité à gauche $\Rightarrow$

$$x_{\beta_k} \to x_{\tau_n^1+h} \; , \quad \text{ps. } P_x \quad \text{sur } \{\tau_n^1 < +\infty\}$$

Mais on a aussi

$$x_{\beta_k}(\omega) \to x_{(\tau_n^1+h)^-}(\omega)$$

pour tout $\omega \in \{\tau_n^1 < +\infty\}$, donc

$$x_{(\tau_n^1+h)} = x_{(\tau_n^1+h)^-} \quad P_x \text{ ps} \quad \text{sur } \{\tau_n^1 < +\infty\}$$

=>

$$E_x \, \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(x_{\tau_n^1+h} + \xi_n^1)$$

$$= E_x \, \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(x_{(\tau_n^1+h)^-} + \xi)$$

on obtient ainsi

$$u_n(x) = E_x \Big[\int_o^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} c(x_{\tau_n^1}, \xi_n^1)$$

$$+ \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_{n-1}(x_{(\tau_n^1+h)^-} + \xi_n^1) \Big]$$

On continue la démonstration comme au §. II.2, en utilisant en particulier le lemme II.2.2 qui est encore valable ici (puisque $x_{(\tau_n^1+h)^-} + \xi_n^1$ est une v.a $\mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-}$ mesurable).

∎

De façon identique au §. II.2 on démontre

<u>Théorème II.4.1.</u>

<u>Sous les hypothèses du lemme II.4.2 u est solution maximum du système</u>

$$\begin{cases} u \le Mu \\ u \le \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)\, u + \int_o^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s) f \, ds \quad \forall\, t \ge 0 \\ u \in C \end{cases}$$

De plus il existe un contrôle optimal donné par

$$\hat{\tau} = \text{Inf } (s \geq 0 \text{ , } u(x_s) = Mu(x_s))$$

$\hat{\xi}(x)$ fonction mesurable telle que $\hat{\xi}(x)$ réalise le minimum de

$$\xi \to c(x,\xi) + e^{-\alpha h} E_x u(x_h+\xi)$$

$$\hat{\tau}^1 = \hat{\tau} \text{ , } \quad \hat{\tau}^{i+1} = \hat{\tau}^i + h + \hat{\tau}^1 \circ \theta_{\hat{\tau}^i+h} \text{ ,}$$

$$\hat{\xi}^i = \hat{\xi}(x_{\hat{\tau}^i})$$

(avec les conventions usuelles sur $\{\hat{\tau} = +\infty\}$).

∎

II.5. APPLICATION AUX PROCESSUS SEMI-MARKOVIENS.

Les hypothèses sont celles du §. I.3.1. I.5.2. On considèrera le cas du processus arrêté à la sortie de $E_1 \times [0,\bar{y}[$ i.e.

$$\tau_{\mathcal{O}} = \text{Inf } (s \geq 0 \text{ , } y_s \geq \bar{y}) \quad , \quad y_o > 0 \text{ donné ,}$$

et on prend pour exemple le problème du §. II.3 avec $E = E_1 \times [0,\bar{y}]$
On supposera E_1 fini [1]

On se donne

(5.1) $\qquad f \in B \text{ , } \quad f \geq 0, \quad y \to f(x,y) \text{ continue } \quad \forall x \in E_1 \text{ ,}$

(5.2) $\qquad c(x,\xi) \text{ sur } E_1 \times E_1 \quad c(x,\xi) \geq k > 0 \text{ ,}$

(5.3) $\qquad U = \{(x,0), \ x \in E_1\} \text{ ,}$

avec les notations du §. II.3 on a

(5.4) $$Mu(x,y) = E_{xy} \int_0^{h \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f(x_s,y_s) ds$$

$$+ \inf_{\xi \in E_1} \left[c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u(\xi,0)\right] .$$

Lemme II.5.1.

Sous les hypothèses du §. I.5.2. et (5.1)

$$y \to \Psi(x,y) = E_{xy} \int_0^{h \Lambda \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f(x_s,y_s) ds$$

est lipschitzienne.

Démonstration.

Soit $\quad 0 < y < \bar{y} \quad , \delta > 0 \text{ , } \quad y + \delta < \bar{y} \text{ .}$

---

[1] Le processus arrêté est alors à valeurs dans un compact, d'après ce qui a été dit en I.5.1.

On note $\nu = \mathrm{Inf}\ (s \geq 0,\ x_s \neq x_o)$, alors

$$(5.5) \qquad \Psi(x,y) = E_{xy} \int_o^{\delta \wedge h \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f ds + E_{xy} \int_{\delta \wedge h \wedge \tau_{\mathcal{O}}}^{h \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f ds$$

$$= I + II$$

de plus

$$(5.6) \qquad II = E_{xy}\ \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} > \delta} \int_\delta^{h \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f ds + E_{xy}\ \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} \leq \delta} \int_{\delta \wedge h \wedge \tau_{\mathcal{O}}}^{h \wedge \tau_{\mathcal{O}}}$$

$$= II_1 + II_2$$

alors

$$II_1 = E_{xy} \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} > \delta} \bar{e}^{\alpha\delta} \left(\int_o^{\tau_{\mathcal{O}} \wedge (h-\delta)} \bar{e}^{\alpha s} f\ ds \right) \circ \theta_\delta$$

$$II_1 = E_{xy} \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} > \delta} \bar{e}^{\alpha\delta}\ E_{x_\delta y_\delta} \left(\int_o^{\tau_{\mathcal{O}} \wedge (h-\delta)} \bar{e}^{\alpha s}\ f\ ds \right)$$

$$II_1 = E_{xy} \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} > \delta} \bar{e}^{\alpha\delta}\ E_{xy+\delta} \left[\int_o^{\tau_{\mathcal{O}} \wedge (h-\delta)} \bar{e}^{\alpha s}\ f\ ds \right]$$

car sur $\nu > \delta \quad y_\delta = y + \delta \quad P_{xy}$ ps.

$$(5.7) \qquad II_1 = E_{xy} \chi_{\nu \wedge \tau_{\mathcal{O}} > \delta} \bar{e}^{\alpha\delta} \left[\Psi(x,y+\delta) - E_{xy+\delta} \left(\int_{(h-\delta) \wedge \tau_{\mathcal{O}}}^{h \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f ds \right) \right]$$

D'autre part, on a $\tau_{\mathcal{O}} \geq \bar{y}-y \quad P_{xy}$ ps.

Prenons donc

$$(5.8) \qquad \delta < \bar{y} - y$$

Alors

$$(5.9) \qquad II_2 = E_{xy}\ \chi_{\nu \leq \delta} \int_\delta^{h \wedge \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s}\ f\ ds$$

On rassemble (5.6) à (5.9) dans (5.5) pour obtenir

(5.10) $$|\Psi(x,y)-\Psi(x,y+\delta)| \le |I| + |II_2|$$

$$+ (1 - E_{xy}\, \chi_{\nu_\Lambda \tau_{\mathcal{O}} > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta})\, \|\Psi\|$$

$$+ E_{xy}\, \chi_{\nu_\Lambda \tau_{\mathcal{O}} > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta}\, E_{xy+\delta} \left(\int_{(h-\delta)_\Lambda \tau_{\mathcal{O}}}^{h_\Lambda \tau_{\mathcal{O}}} \bar{e}^{\alpha s} f\, ds \right).$$

Or

(5.11) $$|I| \le c_1\, \delta$$

$$|II_2| \le h\, \|f\|\, P_{xy}(\nu \le \delta)\ .$$

$$|II_2| \le h\, \|f\| \left[1 - \exp\left(-\int_y^{y+\delta} \lambda(x,\sigma)d\sigma\right)\right]$$

(5.12) $$|II_2| \le c_2\, \delta \qquad (\lambda \le M)$$

$$(1 - E_{xy}\, \chi_{\nu_\Lambda \tau_{\mathcal{O}} > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta}) = 1 - E_{xy}\, \chi_{\nu > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta}$$

(par (5.8)), =>

$$(1 - E_{xy}\, \chi_{\nu_\Lambda \tau_{\mathcal{O}} > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta}) \le 1 - \bar{e}^{\alpha\delta} \exp\left(-\int_y^{y+\delta} \lambda(x,\sigma)d\sigma\right)$$

=>

(5.13) $$(1 - E_{xy}\, \chi_{\nu_\Lambda \tau_{\mathcal{O}} > \delta}\, \bar{e}^{\alpha\delta}) \le c_3\, \delta$$

enfin le dernier terme de (5.10) est majoré par $c_4\delta$.
D'ou (5.10) devient

(5.14) $$|\Psi(x,y) - \Psi(x,y+\delta)| \le c_5 \delta$$

où c_5 est indépendant de x,y, ceci étant valable si

$$y\ ,\ y+\delta \in [0,\bar{y}[$$

On cherche une estimation dans l'autre sens.

Soit $\delta > 0$, $y-\delta \geq 0$. On a

$$E_{xy-\delta} \int_0^{h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f ds = E_{xy-\delta} \int_0^{\delta\wedge h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f(x_s,y_s) ds + E_{xy-\delta} \int_{\delta\wedge\tau_{\mathcal{O}}\wedge h}^{h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f ds$$

$$= I + II$$

$$II = E_{xy-\delta}\, \chi_{\nu>\delta} \int_\delta^{h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f ds + E_{xy-\delta}\, \chi_{\nu\leq\delta} \int_\delta^{h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f ds$$

car $P_{xy-\delta}$ ps. $\quad \tau_{\mathcal{O}} \geq \bar{y} - y + \delta > \delta$

d'où

$$II = II_1 + II_2$$

$$II_1 = E_{xy-\delta}\, e^{-\alpha\delta} \chi_{\nu>\delta} \Big(E_{xy} \int_0^{\tau_{\mathcal{O}}\wedge(h-\delta)} e^{-\alpha s} f ds \Big)$$

$$II_1 = E_{xy-\delta}\, e^{-\alpha\delta} \chi_{\nu>\delta} \Big[\Psi(x,y) - E_{xy} \int_{\tau_{\mathcal{O}}\wedge(h-\delta)}^{h\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f ds \Big]$$

=>

(5.15) $$|II_1 - \Psi(x,y)| \leq (1 - E_{xy-\delta} e^{-\alpha\delta} \chi_{\nu>\delta}) \|\Psi\| + c_1.\delta$$

(5.16) $$|I| \leq c_2.\delta$$

(5.17) $$|II_2| \leq c_3.\delta$$

=>

$$|\Psi(x,y-\delta) - \Psi(x,y)| \leq c_4\delta + (1 - E_{xy-\delta} e^{-\alpha s} \chi_{\nu>\delta}) \|\Psi\|$$

$$|\Psi(x,y-\delta) - \Psi(x,y)| \leq c'\delta \;, \quad c' \text{ indépendant de } x,y$$

en prenant $k = c_5 \vee c'$ on a donc

$$|\Psi(x,y) - \Psi(x,y')| \leq k|y-y'|$$

$$\forall\, y,\, y' \in [0,\bar{y}] .$$

■

Corollaire :

$\Psi(x,y)$ admet une dérivée presque partout sur $(0,y_0)$ et

$$\sup_x \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{L^\infty(0,\bar{y})} \leq k .$$

∎

L'hypothèse (3.5) est alors évidemment vérifiée.

Mais on a plus ici puisque $c(x,\xi) + \bar{e}^{\alpha h} u(\xi)$ est indépendant de y, on a que

(5.18) $\qquad \frac{\partial}{\partial y} Mu(x,y)$ existe presque partout et est bornée sur E.

Alors il résulte du théorème I.5.2. et du lemme II.3.1 que l'on a

Théorème II.5.1.

Sous les hypothèses du §. I.5.2, avec (5.1), (5.2), (5.3), u est solution unique de l'inéquation :

$$(5.19) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u - \lambda Qu \leq f \\ u \leq Mu \\ (-\dfrac{\partial u}{\partial y} + (\alpha+\lambda)u - \lambda Qu - f)(u - Mu) = 0 \end{cases}$$

$$(5.20) \qquad u(x,\bar{y}) = 0$$

$$(5.21) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,\cdot) \in L^2(o,\bar{y}) \qquad \forall\, x \quad , u \in C$$

((5.19) étant écrit pp. en y).

Démonstration.

D'après le lemme II.3.1, u est solution unique de

(5.22) $$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = \underset{\tau}{\mathrm{Inf}}\; E_{xy} \int_0^{\tau \wedge \tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha s} f(x_s, y_s)\,ds + e^{-\alpha\tau} \chi_{\tau < \tau_{\mathcal{O}}} Mu(x_\tau, y_\tau) \\ \\ u \in C \end{array} \right.$$

et d'après (5.18) Mu a une dérivée en y qui est dans $L^\infty(0,\bar{y})$, donc, u étant en particulier borne inférieure d'un problème d'arrêt optimal avec Mu comme obstacle, le théorème I.5.2 montre que u est solution de (5.19) à (5.21). L'unicité résulte alors de l'unicité de la solution de (5.22).

■

Remarque II.5.1.

Compte tenu de ce que l'on a vu au §. I.5.1 sur les processus semi markoviens, B_0 contient les fonctions uniformément continues, et est quasi continu à gauche; de plus le lemme II.5.1, montre que (cf. 5.14) Ψ est uniformément continue, donc, on peut aussi considérer le cas semi markovien à espace d'états dénombrables, si c et f sont uniformément continues. (cf. Théorème II.2.3).

■

II.6. APPLICATIONS AUX DIFFUSIONS A SAUTS.

On reprend le processus défini au §. I.7.1 mais on prendra ici les coefficients indépendants du temps pour traiter le cas stationnaire. i.e. $E = R^d$.

(6.1) On fait donc les hypothèses (7.2) à (7.6), (7.8) et (7.24) des §. I.7.1. I.7.2 ,

et on se donne

(6.2)
$f \geq 0$, f continue bornée sur E
$c(x,\xi) \geq 0$, continue bornée sur $E \times U$
où U est un compact donné de R^d .

On vérifie sans peine, compte tenu de ce qui a été dit au §. I.7 que les hypothèses du §. II.1 sont satisfaites et on peut donc appliquer les résultats du §. II.2. On va s'intéresser à l'IQV que l'on peut obtenir.

Théorème II.6.1.

Sous les hypothèses (6.1) (6.2), u est solution unique de l'IQV

$$(6.3) \quad \left|\begin{array}{l} a(u,v-u) - (Ku,v-u) + \alpha(u,v-u) \geq (f,v-u) \\ \forall\ v \leq Mu \\ v \in H^{1,\gamma}(R^d) \\ u \leq Mu\ ,\quad u \in H^{1,\gamma}(R^d) = V \end{array}\right.$$

ou a et K sont définis en (7.25) et (7.13) du §. I.7 et où les produits scalaires sont pris dans $L^{2,\gamma}(R^d)$.

<u>Démonstration.</u>

Elle sera très simple car l'existence et l'unicité d'une solution de (6.3) résulte de BENSOUSSAN - LIONS [11] puisque sous les hypothèses faites ici

$$\tilde{a}(u,v) = a(u,v) - (Ku,v)$$

est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et que il existe $\lambda > 0$, $\beta > 0$

$$\tilde{a}(w,w) + \lambda |w|^2 \geq \beta . \|w\|_V^2$$

et que

$$\tilde{a}(w^+,w^-) \leq 0 \qquad \text{(cf. I.7.3)}$$

Il reste simplement à montrer que u est solution. Pour cela on utilise le fait que u_n est solution unique de l'IV :

$$(6.4) \qquad \begin{cases} a(u_n,v-u_n) - (Ku_n,v-u_n) + \alpha(u_n,v-u_n) \geq (f,v-u_n) \\ u_n \ , \quad v \leq Mu_{n-1} \\ u_n \ , \ v \in V \end{cases}$$

de plus $u_n \to u$ dans C donc dans $L^{2,\gamma}(R^d)$ fort et comme on peut prendre v=0 dans (6.4), on a

$$a(u_n,u_n) - (Ku_n,u_n) + \alpha(u_n,u_n) + \lambda|u_n|^2 \leq$$

$$(f,u_n) + \lambda|u_n|^2$$

=>

$$\beta \| u_n\|_V^2 \leq \frac{1}{2}|f|^2 + c.|u_n|^2 \leq \text{constante}$$

Donc $u_n \to u$ dans V faible.

Comme $Ku_n \to Ku$ dans $L^{2,\gamma}$ fort, le passage à la limite dans (6.4) est immédiat.

∎

<u>Remarque II.6.1.</u>

On peut également obtenir un théorème du type précédent pour le problème de gestion de stock.

■

ANNEXE 1

Lemme A.1.

Soit $\Omega = D(o,\infty,E)$

$\mathcal{F}_t^o$, $\mathcal{F}^o = \mathcal{F}_\infty$ les tribus canoniques

θ_t les translations

$\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}$ les complétées universelles de $\mathcal{F}_t^o$, $\mathcal{F}^o$

τ un temps d'arrêt $\mathcal{F}_t$

$\tau_h = \tau + h$

$(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \theta_t, x_t, P_x)$ un processus de markov fellerien de durée de vie infinie, ξ une v.a à valeurs dans E, $\mathcal{F}_\tau$, mesurable.
Alors,

(i) il existe une mesure $\tilde{P}_x$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que

(1) $$\tilde{P}_x(A) = P_x(A) \quad A \in \mathcal{F}_{(\tau+h)^-}$$

(2) $$\tilde{P}_x(\theta_{\tau_h}^{-1}B) = P_\xi(B) \quad \forall\, B \in \mathcal{F}$$

$\tilde{P}_x$ ps. sur $\{\tau < +\infty\}$

(ii) le processus $y_t = x_{\tau_h+t}$ est fortement markovien par rapport à $g_t = \mathcal{F}_{\tau_h+t}$, pour la mesure $\tilde{P}_x$
ou encore $\forall$ f mesurable bornée

(3) $$\tilde{E}_x(f(x_{\tau_h+t+s})Z\,\chi_{\tau<+\infty}) = \tilde{E}_x[Z\,\chi_{\tau<\infty}(P_s f)(x_{\tau_h+t})$$

$\forall$ Z $\mathcal{F}_{\tau_h+t}$ mesurable et bornée.

Démonstration.

On pose $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\tau_h^-} \otimes \mathcal{F}$.

On considère la mesure Q sur $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\mathfrak{F}}$ définie par

$$(4) \qquad \int_{\tilde{\Omega}} f(\omega,\omega)\ Q(d\omega,d\omega') = \int f(\omega,\omega')\ P_x(d\omega) P_{\xi(\omega)}(d\omega')$$

$\forall$ f mesurable bornée sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}})$.

On définit $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ par

$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_t(\omega) \quad \text{si } t < \tau(\omega) + h$$

$$= x_{t-\tau_h(\omega)}(\omega') \quad \text{si } t \geq \tau(\omega) + h$$

(si $\tau(\omega) = +\infty \quad x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_t(\omega) \quad \forall\ t \geq 0$).

<u>1ère étape - mesurabilité de φ</u> de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}) \to (\Omega,\mathfrak{F}^0)$

Soit $D = \{\omega,\ x_t(\omega) \in \Gamma\} \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(E)$

$$\varphi^{-1}(D) = \{(\omega,\omega'),\ x_t(\varphi(\omega,\omega')) \in D\}$$

$$= \{(\omega,\omega'),\ t < \tau(\omega)+h\ ,\ \ x_t(\omega) \in \Gamma\}$$

$$\cup \{(\omega,\omega') t \geq \tau(\omega)+h\ ,\ \ x_{t-\tau_h(\omega)}(\omega') \in \Gamma\}$$

le premier terme s'écrit $C_1 \times \Omega$ avec $C_1 \in \mathfrak{F}_{\tau_h^-}$ donc apparient à $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Pour le second il suffit de montrer que

$$(\omega,\omega') \to \Psi(\omega,\omega') = 1_{\{t \geq \tau(\omega)+h\}} x_{t-\tau_h(\omega)}(\omega')$$

est $\mathfrak{F}_{\tau_h^-} \otimes \mathfrak{F}$ mesurable.

On pose $\quad s(\omega) = t - \tau_h(\omega)$

$$s^+(\omega) = (t-\tau_h(\omega))^+$$

donc, $\qquad \Psi(\omega,\omega') = 1_{\{t \geq \tau_h(\omega)\}}\ x_{s^+(\omega)}(\omega')$

en vertu de la continuité à droite

$$(t',\omega') \to x_{t'}(\omega') \text{ est mesurable}$$

$$(\text{de } (R^+ \times \Omega, \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}) \to E, \mathcal{B}(E))$$

et $\qquad \omega \to s^+(\omega)$ est $\mathcal{F}_{\tau_h^-}$ mesurable

$$\omega \to 1_{\{t \geq \tau_h(\omega)\}} \text{ est } \mathcal{F}_{\tau_h^-} \text{ mesurable}$$

en composant les applications mesurables

$$(\omega,\omega') \to (\omega, s^+(\omega),\omega') \to 1_{\{t \geq \tau_h(\omega)\}} x_{s^+(\omega)}(\omega')$$

on a le résultat.

Donc si $\tilde{\mathcal{F}}'$ est la complétée universelle de $\tilde{\mathcal{F}}$ on a φ mesurable de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}') \to (\Omega, \mathcal{F})$.

<u>2ème étape</u> : $\tau_h(\varphi(\omega,\omega')) = \tau_h(\omega)$

(pour h=0 ce n'est pas vrai en général; prendre l'exemple de τ instant de sortie d'un ouvert et instant de saut pour ω avec $\omega'(\tau(\omega))$ appartenant à l'ouvert; on aura $\tau(\varphi(\omega,\omega')) > \tau(\omega)$).

Il s'agit de démontrer que pour w et ω fixés

$$\tau_h(w) = \tau_h(\omega) \quad \text{si } w(t) = \omega(t) \quad \forall\, t < \tau_h(\omega)$$

soit encore $\qquad \tau(w) = \tau(\omega) \quad$ si $\quad w(t) = \omega(t) \quad \forall\, t < \tau_h(\omega)$

supposons

$$\tau(w) > \tau(\omega)$$

ceci équivaut à

$$\tau(w) + \varepsilon > \tau(\omega)+\varepsilon \qquad 0 < \varepsilon < h$$

posons

$$\tau_\varepsilon(\omega') = \tau(\omega') + \varepsilon \qquad (\forall\, \omega') \text{ et}$$

$$t = \tau_\varepsilon(\omega)$$

Soit $\qquad D=\{\omega',\ \tau_\varepsilon(\omega')\leq t\}$

On a $\qquad D\in \mathfrak{F}_t$

et $\omega\in D$ mais $w\notin D$ or,

$$\omega\in D\in \mathfrak{F}_t \iff a_t\,\omega\in D$$

où $a_t\omega$ est la trajectoire arrêtée à t, or,

$$a_t\omega = a_t w \quad \text{donc} \quad a_t w\in D \Rightarrow w\in D\text{:contradiction.}$$

On refait de même avec le cas $\tau_\varepsilon(w) < \tau_\varepsilon(\omega)$.

On pose

$$t = \tau_\varepsilon(w)$$

$$t < \tau_\varepsilon(\omega) < \tau_h(\omega) \Rightarrow a_t w = a_t\omega$$

$$D = \{\omega',\ \tau_\varepsilon(\omega')\leq t\} \in \mathfrak{F}_t$$

$$w\in D \quad \text{mais} \quad \omega\notin D$$

mais $a_t w = a_t\omega \Rightarrow \omega\in D$ d'où contradiction.

<u>3ème étape</u> :

On définit $\tilde{P}_x$ comme limage de Q par φ (Q ayant été préalablement étendue à $(\Omega,\mathfrak{F}')$.). Vérifions maintenant que

$$\tilde{P}_x(A) = P_x(A) \qquad A\in \mathfrak{F}_{\tau_h^-}$$

$\mathfrak{F}_{\tau_h^-}$ est engendrée par $\{B = A\cap\{\tau_h > t\},\ A\in\mathfrak{F}_t,\ t\in R^+$.

Montrons la relation pour $A\cap\{\tau_h > t\}$ $A\in\mathfrak{F}_t^o$ et d'abord avec $A = \{x_s\in\Gamma\}$ $s\leq t$

$$B = \{x_s\in\Gamma\}\cap\{\tau_h > t\} \quad s\leq t$$

$$\varphi^{-1}(B) = \{(\omega,\omega');\ x_s(\varphi(\omega,\omega')) \in \Gamma,\ \tau_h(\omega) > t\ s\}$$

$$= \{(\omega,\omega'),\ x_s(\omega) \in \Gamma,\ \tau_h(\omega) > t\}$$

$$= B \times \Omega \quad \text{avec } B \in \mathcal{F}_{\tau_h^-}$$

donc pour B de la forme précédente

$$\tilde{P}_x(B) = P_x(B)$$

comme $\tilde{P}_x$, P_x sont des probabilités, on a cette égalité pour B de la forme

$$A \cap \{\tau_h > t\} \qquad \forall\ A \in \mathcal{F}_t^o$$

puisque $\mathcal{F}_t^o$ est engendrée par les ensembles de la forme $\{x_{t_1} \in \Gamma_1,\dots,x_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $t_i \leq t$. Ensuite, si $A \in \mathcal{F}_t$, $\exists$ A',A" $A' \subset A \subset A''$ et $P_x(A) = P_x(A') = P_x(A'')$

$$B = A \cap \{\tau_h > t\},\ B',\ B'' \text{ de même, on a}$$

$$\varphi^{-1}(B') \subset \varphi^{-1}(B) \subset \varphi^{-1}(B'')$$

et

$$\tilde{P}_x(B') = Q\ (\varphi^{-1}(B')) = P_x(B')$$

$$\tilde{P}_x(B'') = P_x(B'')$$

$$P_x(B') \leq \tilde{P}_x(B) \leq P_x(B'')$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } P_x(B') = P_x(B'') \\ \qquad\qquad = P_x(B) \end{array}\right| \Rightarrow \tilde{P}_x(B) = P_x(B)\ .$$

Soit maintenant

$$B = \{\omega,\ x_t(\omega) \in \Gamma\}$$

$$C = \chi_{\tau<+\infty}\theta_{\tau_h}^{-1}B = \{\omega;\ \tau(\omega) < +\infty,\ x_{\tau_h(\omega)+t} \in \Gamma\}$$

$$\varphi^{-1}(C) = \{(\omega,\omega'),\ \tau(\omega) < \infty,\ x_t(\omega') \in \Gamma\}$$
$$= \{\omega,\ \tau(\omega) < \infty\} \times \{\omega',\ x_t(\omega') \in \Gamma\}$$
$$= C_1 \times C_2 \qquad C_1 \in \mathfrak{F}_{\tau_h^-},\ C_2 \in \mathfrak{F}^o$$

Donc

$$\tilde{P}_x(\chi_{\tau<\infty}\ \theta^{-1}_{\tau_h}B) = E_x\ \chi_{\tau<\infty}\ E_\xi(B)$$

Donc on aura cette relation $\forall\ B \in \mathfrak{F}^o$
puis comme d'habitude $\forall\ B \in \mathfrak{F}$.

On a maintenant pour $A \in \mathfrak{F}_{\tau_h^-}$, $B \in \mathfrak{F}$, $A \subset \{\tau < \infty\}$

$$\tilde{P}_x(A \cap \theta^{-1}_{\tau_h}B) = \tilde{P}_x(\varphi^{-1}(A \cap \theta^{-1}_{\tau_h}B))$$
$$= \tilde{P}_x(\varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(\theta^{-1}_{\tau_h}B))$$
$$= \tilde{P}_x((A \times \Omega) \cap (\Omega \times B))$$
$$= \tilde{P}_x(A \times B) = E_x(1_A . P_\xi(B))$$

Démonstration de (ii) : Propriété de Markov

On note a_t l'opérateur d'arrêt, a_{τ_h+t} et une application mesurable de $(\Omega,\mathfrak{F}_{\tau_h+t}) \to (\Omega,\mathfrak{F})$ on a aussi $\mathfrak{F}_{\tau_h+t} = a^{-1}_{\tau_h+t}(\mathfrak{F})$ (cf. [19]).

On veut montrer

$$\text{(5)} \qquad \tilde{E}_x[\chi_{\tau<\infty}.H.\varphi(x_{\tau_h+t+s})] = \tilde{E}_s\ [\chi_{\tau<\infty}.H(\Phi(s)\varphi)(x_{\tau_h+t})]$$

$$\forall\ H\ \ \mathfrak{F}_{\tau_h+t}\ \text{ mesurable, bornée.}$$

i.e. $\forall\ H = Z_o\ a_{\tau_h+t}$ où Z décrit l'ensemble des v.a bornées sur $(\Omega,\mathfrak{F})$.

Supposons que l'on sache vérifier (5) pour

$$H = M_o \, a_{\tau_h+t} \quad \text{où } M \text{ est de la forme}$$

$$(6) \qquad M = \prod_{i=1}^{n} \int_0^\infty \bar{e}^{p_i s} \, f_i(x_s) ds$$

avec $f_i \in C$, $p_i > 0$.

On aurait alors (5) pour tout $H = M \circ a_{\tau_h+t}$ avec

$$(7) \qquad M = \prod_{i=1}^{n} \int_0^\infty \varphi_i(t) \, f_i(x_t) \, dt$$

($f_i \in C$, φ_i continues à support compact dans R^+), et comme toute v.a. de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x_{t_i}) \qquad (f_i \in C)$$

est limite, pour la convergence simple bornée ([1]), de v.a. de la forme (7), on obtiendrait (5) pour

$$H = M \circ a_{\tau_h+t} \quad \text{et} \quad M = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_{t_i})$$

Mais alors par le théorème des classes monotones on aura (5) pour

$$H = M \circ a_{\tau_h+t} \quad \text{et } M \text{ v.a. bornée, } \mathcal{F}^o \text{ mesurable.}$$

En encadrant M $\mathcal{F}$ mesurable par M' et M'' $\mathcal{F}^o$ mesurables bornées telles que $\{M' \neq M''\}$ ait une probabilité (P_x) nulle on obtient le résultat.

Donc il suffit de démontrer la propriété (5) pour

$$H = M \circ a_{\tau_h+t}$$

et

$$M = \prod_{i=1}^{n} \int_0^\infty \bar{e}^{p_i s} \, f_i(x_s) ds, \quad f_i \in C \, , \quad p_i > 0 \, .$$

([1]) cf. BLUMENTHAL-GETOOR [18] p. 171-172 ou MEYER [48] p. 112.

Soit encore, puisque

$$\left(\int_0^{\infty} \bar{e}^{p_i s} f_i(x_s)ds\right) \circ a_{\tau_h+t} = \int_0^{\infty} \bar{e}^{p_i s} f_i(x_{s\wedge\tau_h+t})ds$$

$$= \int_0^{\tau_h+t} \bar{e}^{p_i s} f_i(x_{s\wedge\tau_h+t})ds + \int_{\tau_h+t}^{+\infty} \bar{e}^{p_i s} f_i(x_{s\wedge\tau_h+t})ds$$

$$= \int_0^{\tau_h+t} \bar{e}^{p_i s} f_i(x_s)ds + \bar{e}^{p_i(\tau_h+t)} c_i \; f_i(x_{\tau_h+t})$$

il suffit de vérifier (5) avec

$$\text{(8)} \qquad H = \left(\int_0^{\tau_h+t} \bar{e}^{p_i s} f_1(x_s)ds\right) \; \bar{e}^{q(\tau_h+t)} \; g(x_{\tau_h+t})$$

où $f_1, g \in C$, $p, q > 0$

car (7) s'exprime sous forme de somme de produits de termes du type (8).

De plus (8) s'écrit

$$\text{(9)} \qquad H = \left(\int_0^{\tau_h} \bar{e}^{ps} f_i(x_s)ds + \int_{\tau_h}^{\tau_h+t} \bar{e}^{ps} f_i(x_s)ds\right) \bar{e}^{a(\tau_h+t)} g(x_{\tau_h+t})$$

$$= \left(\int_0^{\tau_h} \bar{e}^{ps} f_i(x_s)ds\right) \bar{e}^{q(\tau_h+t)} g(x_{\tau_h+t})$$

$$+ \left(\int_0^{t} \bar{e}^{ps} f_1(x_{\tau_h+s})ds\right) \bar{e}^{p\tau_h} \bar{e}^{q(\tau_h+t)} g(x_{\tau_h+t})$$

$$= H_1 \; g(x_{\tau_h+t}) + H_2$$

où H_1 est $\mathcal{F}_{\tau_{\bar{h}}}$ mesurable .

Alors (5) pour H donné par (9) devient

$$\text{(10)} \qquad E_x[\chi_{\tau<+\infty} H.\varphi(x_{\tau_h+t+s})]$$

$$= \tilde{E}_x[\chi_{\tau<+\infty} H_1 . g(x_{\tau_h+t}) \varphi(x_{\tau_h+t+s})]$$

$$+ \tilde{E}_x[\chi_{\tau<\infty} H_2 \; \varphi(x_{\tau_h+t+s})] = I + II$$

Comme H_1 est $\mathcal{F}_{\tau_h^-}$ mesurable, utilisant la definition de $\tilde{P}_x$ il vient

$$I = E_x[\chi_{\tau<+\infty} H_1 \; E_\xi(g(x_t).\varphi(x_{t+s}))] ,$$

or $\forall\, y \in E$

$$E_y(g(x_t)\varphi(x_{t+s})) = E_y[g(x_t)\Phi(s)\varphi(x_t)]$$

=>

$$I = E_x[\chi_{\tau<\infty} H_1 \; E_\xi(g(x_t)\Phi(s)\varphi(x_t))]$$

(11) $$I = \tilde{E}_x[\chi_{\tau<+\infty} H_1 \; g(x_{\tau_h+t}).\Phi(s)\varphi(x_{\tau_h+t})]$$

par utilisation (en sens inverse) de la définition de $\tilde{P}_x$.

De même

$$II = E_x \; \chi_{\tau<\infty} \; e^{-p\tau_h - q(\tau_h+t)} \; E_\xi\left[\left(\int_o^t e^{-p\lambda} f_1(x_\lambda)d\lambda\right) g(x_t)\varphi(x_{t+s})\right]$$

$$= E_x\chi_{\tau<\infty} e^{-p\tau_h - q(\tau_h+t)} E_\xi\left[\left(\int_o^t e^{-p\lambda} f_1 d\lambda\right) g(x_t)\Phi(s)\varphi(x_t)\right]$$

(12) $$II = E_x(H_2\Phi(s)\varphi(x_{\tau_h+t})\chi_{\tau<+\infty})$$

en rassemblant (12) et (11) dans (10) on a (5) quand H est de la forme (9). Comme il a été vu, ceci donne le résultat.

Vérifions enfin que $x_{\tau_h} = \xi \;\; \tilde{P}_x$ ps. sur $\{\tau < +\infty\}$. On a $\forall\, f_i \in B$, $i=1,2$

$$\tilde{E}_x \; \chi_{\tau<\infty} \; f_1(x_{\tau_h}) \; f_2(\xi) = \tilde{E}_x f_2(\xi)\chi_{\tau<\infty} \; \tilde{E}_x[f_1(x_{\tau_h})|\mathcal{F}_{\tau_h^-}]$$

$$= \tilde{E}_x f_2(\xi)\chi_{\tau<\infty} \; E_\xi \; f_1(x_o)$$

$$= \tilde{E}_x f_2(\xi) \; f_1(\xi) \; \chi_{\tau<\infty}$$

ce qui démontre le résultat (cf. MEYER [47]).

III

CONTROLE IMPULSIONNEL

AVEC RETARDS IMBRIQUES.

III.1. POSITION DU PROBLEME.

On reprend ici le problème défini au §.1 en autorisant maintenant une décision au plus entre τ^i et τ^i+h.

Sauf mention explicite du contraire, les notations et hypothèses seront celles du §. II.1. Autrement dit, $\Omega = D(0,\infty,E)$, $\mathcal{F}_t^o$ sont les tribus canoniques, $\mathcal{F}_t$ leurs complétées universelles, x_t les applications coordonnées. On suppose donné un processus de Markov

(1.1) $\left\{\begin{array}{l} X = (\Omega,\mathcal{F}_t,\theta_t,x_t,P_x) \text{ à valeur dans } E \\ \\ \text{dont le semi groupe vérifie les hypothèses} \\ (1.1) \text{ à } (1.5) \text{ du §. II.1.} \end{array}\right.$

De façon intuitive, il y a trois types de situations possibles à un instant quelconque t. :
notons $t-\rho$ le dernier instant de décision antérieur à t.

1ère situation :

$\rho > h$: l'état à t est alors caractérisé par x_t seul.

2ème situation :

$0 < \rho < h$: soit ξ la décision prise à $t-\rho$, la situation à t est alors caractérisée par (x_t, ρ, ξ). Pour être admissible, un contrôle $v = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ devra vérifier $\tau^2 \geq t+h-\rho$.

3ème situation :

il y a eu deux décisions avant t, en $t-\rho_1$, $t-\rho_2$, avec $0 < \rho_1 < \rho_2 < h$. Aucune décision n'est autorisée avant $t+h-\rho_1$. Le coût optimal ultérieur s'exprime donc en fonction du coût optimal correspondant à la situation 2.

On définit donc $\mathcal{V}$ comme l'ensemble des suites

(1.2) $$\mathcal{V} = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$$

où (τ^i) $i \geq 1$, est une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\tau^{i+1} \geq \tau^{i-1}+h$, $i \geq 2$, et où ξ^i est $\mathcal{F}_{\tau^i}$ mesurable, à valeur dans U compact de E.

Pour $\rho \in [0,h]$, on définit également $\mathcal{V}_\rho$ comme l'ensemble des suites.
$v \in \mathcal{V}$, telles que, si $v = (\tau^i, \xi^i)_{i \geq 1}$,

(1.3) $$\tau^2 \geq h-\rho$$

A $v \in \mathcal{V}$ et $x \in E$ on associe la suite de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$P_x^o = P_x$$

(1.4) $$\begin{cases} P_x^1 = P_x^o \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{\tau_h^{1-}}, \text{ ou } \tau_h^1 = \tau^1+h \\ P_x^1(A \cap \theta^{-1}_{\tau_h^1} B) = E_x^o(\chi_A . P_{\xi^1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{F}, \\ \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_h^1}, \ A \subseteq \{\tau^1 < +\infty\} \end{cases}$$

... etc comme au §. II.

On note également P_x^v la probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que

$$P_x^v = P_x^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}}$$

ce qui permet de définir sur $\mathcal{V}$ le critère

$$J_x(v) = E_x^v\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i\geq 1} e^{-\alpha\tau^i} c(x_{\tau^i},\xi^i)\right) \tag{1.5}$$

On associe de même, à $x \in E$, $\xi \in U$, $\rho \in [o,h]$, $v \in \mathcal{V}_\rho$, la suite

$$P_x^o = P_x$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_x^1 = P_x^o \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{\tau_h^{o-}} \quad \text{où} \quad \tau^o = -\rho,\ \tau_h^o = h-\rho\ , \\ P_x^1(A \cap \theta_{\tau_h^o}^{-1}B) = E_x^o(\chi_A . P_\xi(B)) \quad \forall\ B \in \mathcal{F}\ , \quad A \in \mathcal{F}_{\tau_h^{o-}} \end{array}\right. \tag{1.6}$$

...

$$\left\{\begin{array}{l} P_x^n(A) = P_x^{n-1}(A) \quad \forall\ A \in \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}} \\ P_x^n(A \cap \theta_{\tau_h^n}^{-1}B) = E_x^{n-1}(\chi_A . P_{\xi^n}(B)) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

$$\forall\ A \in \mathcal{F}_{\tau_h^{n-}},\ A \subseteq \{\tau^n < +\infty\},\quad B \in \mathcal{F}\ ,$$

et on note $P_{x\rho\xi}^v$ la probabilité telle que

$$P_{x\rho\xi}^v = P^{n-1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{\tau_h^{n-\xi}}$$

(si $\rho=h$, on pose $P_x^1 = P_\xi$ et le reste des définitions est inchangé).

Ceci permet d'associer à $v \in \mathcal{V}_\rho$

$$J_{x\rho\xi}(v) = E^{v}_{x\rho\xi}\left\{\int_{o}^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)\,ds + \sum_{i\geq 1} \bar{e}^{\alpha\tau^{i}} c(x_{\tau^{i}},\xi^{i})\right\} . \tag{1.8}$$

On pose pour la suite

$$u_o(x) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}} J_x(v) \tag{1.9}$$

$$u_1(x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_\rho} J_{x\rho\xi}(v) \tag{1.10}$$

On rappelle que l'on suppose comme au §. II que

$$f \geq 0 \quad , \quad f \in C \tag{1.11}$$

et on supposera, pour simplifier un peu, que

(1.12) $c(x,\xi)$ ne dépend que de ξ, i.e.

$c \geq 0 \quad , \quad c \in C^{o}(U)$.

III.2. CARACTERISATION DU COUT OPTIMAL.

On utilise la même méthode qu'au §. II en prenant des problèmes approchés convenables.

On pose

$$(2.1) \qquad u_o^o(x) = E_x \int_o^\infty \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \quad ,$$

$$(2.2) \qquad u_1^o(x,\rho,\xi) = E_x \int_o^{h-\rho} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha(h-\rho)} u_o^o(\xi) \; ,$$

et

$$(2.3) \qquad u_o^n(x) = \operatorname*{Inf}_\tau E_x \left(\int_o^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau} M_o u_1^{n-1}(x_\tau) \right) ,$$

où

$$(2.4) \qquad M_o u_1^{n-1}(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [\; c(\xi) \; + u_1^{n-1}(x,0,\xi)] \; ,$$

$$(2.5) \qquad u_1^n(x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_\tau E_x \left\{ \int_o^{\tau_\Lambda(h-\rho)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$+ \; \bar{e}^{\alpha\tau} \chi_{\tau < h-\rho} \; M_1 u_1^{n-1}(x_\tau,\rho+\tau,\xi)$$

$$\left. + \; \bar{e}^{\alpha(h-\rho)} \chi_{\tau \geq h-\rho} \; u_o^n(\xi) \right\} \; ,$$

où

$$(2.6) \qquad M_1 u_1^{n-1}(x,r,\xi) = \Psi(x,r) + \operatorname*{Inf}_{\xi'} [\; c(\xi') \; + \bar{e}^{\alpha(h-r)} u_1^{n-1}(\xi,h-r,\xi')] \; ,$$

et

$$\Psi(x,r) = E_x \int_o^{h-r} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \; .$$

On commence par étudier le problème d'arrêt optimal correspondant à u_1^n .

Lemme III.2.1.

On suppose $u_1^{n-1} \in C_b^o(E \times [o,h] \times U)$ et $u_o^n \in C$, alors

(i) $\quad u_1^n \in C_b^o(E \times [o,h] \times U)$

(ii) $\quad \hat{\tau} = \mathrm{Inf}\ (s \in [o,h-\rho],\ u_1^n(x_s,\rho+s,\xi) = M_1 u_1^{n-1}(-))$
est optimal pour le problème u_1^n, i.e.

$$u_1^n(x,\rho,\xi) = E_x \left\{ \int_o^{\hat{\tau}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}} \chi_{\hat{\tau}<h-\rho} M_1 u^{n-1}(x_{\hat{\tau}},\rho+\hat{\tau},\xi) + \bar{e}^{\alpha(h-\rho)} \chi_{\hat{\tau} \geq h-\rho}\ u_o^n(\xi) \right\}$$

Démonstration.

On a facilement $u_1^{n-1} \in C_b^o\ (E \times [o,h] \times U)$ donc $M_1 u_1^{n-1} \in C_b^o(E \times [o,h] \times U)$ car on effectue une minimisation sur $\xi' \in U$ compact. On adapte alors les démonstration du chapitre I en montrant que l'équation

$$u_\varepsilon(t) = \chi(t) - \int_o^{h-t} \bar{e}^{\alpha s} \Phi(s)\ \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(s) - \tilde{\Psi}(s))^+\ ds$$

où

$$\chi(t) = \int_o^{h-t} \bar{e}^{\alpha s} \Phi(s) f\ ds + \bar{e}^{\alpha(h-t)} u_o^n(\xi)$$

$$\tilde{\Psi}(t) = M u_1^{n-1}(x,\rho+s,\xi)$$

a une solution unique $u_\varepsilon \in C^o([o,h];\ C_b^o(E \times U))$. On montre, de même qu'au §. I.2 que u_ε est la borne inférieure d'un problème de contrôle, et que $u_\varepsilon \to u_1^n$ uniformément sur $E \times [o,h] \times U$. La démonstration de l'optimalité de $\hat{\tau}$ s'effectue également comme au §. I.3.

Lemme III.2.2.

Sous les hypothèses (1.1), les fonctions u_1^n, u_o^n vérifient

$$0 \leq u_i^n \leq u_i^{n-1} \leq u_i^o \quad i = 1, 0 ,$$

$$u_1^n \in C_b^o(E \times [o,h] \times U) ,$$

$$u_o^n \in C_b^o(E) \quad .$$

Démonstration.

$u_i^o \geq 0$ est immédiat, $u_i^n \geq 0$ en découle par récurrence. $u_o^1 \leq u_o^o$ puisque l'on peut prendre $\tau = + \infty$ pour le problème de temps optimal associé, d'où, en prenant aussi $\tau = + \infty$,

$$u_1^1 \leq u_1^o ,$$

ce qui implique

$$M_o u_1^1 \leq M_o u_1^o$$

donc

$$u_o^2 \leq u_o^1$$

et ainsi de suite.

$u_o^o \in C_b^o(E)$, car $u_o^o = R_\alpha f$ et Φ est fellerien. $u_1^o \in C_b^o(E \times [o,h] \times U)$ est également immédiat.

Ensuite $u_o^1 \in C_b^o(E)$ est une conséquence des résultats du Chapitre I puisque $M_o u_1^o$ est continue bornée, et u_1^n, u_o^n continues bornées s'obtiennent par récurrence, en utilisant le lemme III.2.1 pour u_1^n .

∎

Lemme III.2.3.

Sous les hypothèses (1.1) on a

$$u_i^n \geq u_i \qquad i = 0,1 .$$

Démonstration.

Soit

$$\tau_n^1 = \text{Inf}(s \geq 0 \quad u_o^n(x_s) \geq M_o u_1^{n-1}(x_s))$$

τ_n^1 est optimal pour le problème d'arrêt associé à u_o^n, d'où

$$u_o^n(x) = E_x \int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha \tau_n^1} M_o u_1^{n-1}(x_{\tau_n^1})$$

D'autre part, on peut trouver $\hat{\xi}_o^1(x)$, minimisant $c(\xi) + u_1^{n-1}(x,o,\xi)$ sur U, tel que $x \to \hat{\xi}_o^1(x)$ soit mesurable. On pose alors

$$\xi_n^1 = \hat{\xi}_o^1(x_{\tau_n^1}) \quad \text{d'où}$$

$$u_o^n(x) = E_x \int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + [c(\xi_n^1) + u_1^{n-1}(x_{\tau_n^1}, o, \xi_n^1)] e^{-\alpha \tau_n^1} . \tag{2.7}$$

D'autre part

$$\hat{\tau}^2 = \text{Inf } (s \in [o,h];\ u_1^{n-1}(x_{\tau_n^1+s}, s, \xi_n^1) \geq M_1 u_1^{n-2}(x_{\tau_n^1+s}, s, \xi_n^1))$$

est optimal pour le problème d'arrêt associé à u_1^{n-1} et commençant à τ_n^1, d'où (cf. Lemme II.2.2).

$$\begin{aligned} u_1^{n-1}(x_{\tau^1}, 0, \xi_n^1) = E_x \Bigg[& \int_{\tau_n^1}^{\tau_n^1 + \hat{\tau}^2 \wedge h} e^{-\alpha(s-\tau_n^1)} f(x_s) ds \\ & + e^{-\alpha \hat{\tau}^2} \chi_{\hat{\tau}^2 \geq h}\ M_1 u_1^{n-2}(x_{\tau_n^1+\hat{\tau}^2}, \hat{\tau}^2, \xi_n^1) \\ & + e^{-\alpha h}\ \chi_{\hat{\tau}^2 \geq h}\ u_o^{n-1}(\xi_n^1) \mid \mathcal{F}_{\tau_n^1} \Bigg] \end{aligned} \tag{2.8}$$

P_x ps. sur $\{\tau_n^1 < + \infty\}$.

Soit $\hat{\xi}_1^2(\xi,s)$ minimisant

$$\xi' \to c(\xi') + \bar{e}^{\alpha(h-s)} u_1^{n-2}(\xi_n^1, h-s, \xi')$$

On pose

$$\hat{\xi}^2 = \hat{\xi}_1^2(\xi_n^1, \hat{\tau}^2)$$

d'où

$$M_1 u^{n-2}(x_{\tau_n^1+\hat{\tau}^2}, \hat{\tau}, \xi_n^1) \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}^2} \chi_{\hat{\tau}^2 < h} =$$

$$\chi_{\hat{\tau}^2<h} \; E_x \left\{ \int_{\hat{\tau}^2}^{h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_{\hat{\tau}_n^s+s}) ds + c(\hat{\xi}^2) \right.$$

$$\left. + u_1^{n-2}(\xi_n^1, h-\hat{\tau}^2, \hat{\xi}^2) \bar{e}^{\alpha h} \mid \mathcal{F}_{\tau_n^1+\hat{\tau}^2} \right\}$$

(2.7) devient alors

$$(2.9) \qquad u_o^n(x) = E_x \left\{ \int_o^{(\tau_n^1+\hat{\tau}^2)\wedge(\tau_n^1+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} c(\xi_n^1) \right.$$

$$+ \chi_{\hat{\tau}^2<h} [\bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+\hat{\tau}^2)} c(\hat{\xi}^2) + \int_{\tau_n^1+\hat{\tau}^2}^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds$$

$$+ u_1^{n-2}(\xi_n^1, h-\hat{\tau}^2, \hat{\xi}^2) \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)}]$$

$$\left. + \chi_{\hat{\tau}^2 \geq h} \; \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_o^{n-1}(\xi_n^1) \right\} .$$

On pose mainteant

$$\tau_n^2 = (\tau_n^1 + \hat{\tau}^2)\chi_{\hat{\tau}^2<h} + \hat{\tau}_n^2 \;\; \chi_{\hat{\tau}^2 \geq h}$$

où

$$\hat{\tau}_n^2 = \mathrm{Inf}(s \geq \tau_n^1+h, \; u_o^{n-1}(x_s) \geq M_o \; u_1^{n-2}(x_s))$$

et si $\hat{\xi}_o^2(x)$ minimise $c(\xi) + u_1^{n-2}(x,o,\xi)$, on pose

$$\xi_n^2 = \hat{\xi}_n^2 \chi_{\hat{\tau}^2<h} + \hat{\xi}_o^2(x_{\tau_n^2}) \chi_{\hat{\tau}^2 \geq h} \text{ . }^{(1)}$$

On peut vérifer que τ_n^2 et ξ_n^2 satisfont les propriétés des contrôles admissibles.

On remarquera que

$$\chi_{\hat{\tau}^2<h}(h-\hat{\tau}^2) = \chi_{\hat{\tau}^2<h}(\tau_n^1+h-\tau_n^2)$$

et que

$$\{\hat{\tau}^2 < h\} = \{\tau_n^2 < \tau_n^1+h\}.$$

On construit maintenant

$$P_x^1 = P_x \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-}$$

$$P_x^1(\theta^{-1}_{\tau_n^1+h} A \mid \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-}) = P_{\xi_n^1}(A)$$

$$\forall\, A \in \mathcal{F},\ P_x \text{ ps. sur } \{\tau_n^1 < +\infty\}.$$

On a par des raisonnements déjà utilisés

$$u_o^{n-1}(\xi_n^1) = E_x^1 \left\{ \int_{\tau_n^1+h}^{\tau^2} e^{-\alpha(s-\tau_n^1-h)} f(x_s)ds \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha(\hat{\tau}_n^2-\tau_n^1-h)} M_o u_1^{n-2}(x_{\hat{\tau}_n^2}) | \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-} \right\}$$

(ps. sur $\{\tau_n^1 < +\infty\}$),

et en comparant avec les définitions de τ_n^2, ξ_n^2, on voit que

---

(1) Ceci sera dans la suite, <u>la notation</u> de

$$\xi_n^2 = \hat{\xi}_n^2 \text{ sur } \{\hat{\tau}^2 < h\}$$

$$\xi_n^2 = \hat{\xi}_o^2(x_{\tau_n^2}) \text{ sur } \{\hat{\tau}^2 \geq h\} \text{ .}$$

(2.10)
$$\bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} \chi_{\tau_n^2 \geq \tau_n^1+h} \; u_o^{n-1}(\xi_n^1) =$$
$$\chi_{\tau_n^2 \geq \tau_n^1+h} \; E_x^1 \left\{ \int_{\tau_n^1+h}^{\tau_n^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \right.$$
$$\left. + \bar{e}^{\alpha\tau_n^2}[c(\xi_n^2) + u_1^{n-2}(x_{\tau_n^2}, o, \xi_n^2)] \mid \mathcal{F}_{(\tau_n^1+h)^-} \right\}$$

et par conséquent, (2.9) s'écrit,

(2.11)
$$u_o^n(x) = E_x^1 \left\{ \int_o^{\tau_n^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} c(\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha\tau_n^2} c(\xi_n^2) \right.$$
$$+ \chi_{\tau_n^2 < \tau_n^1+h} \left[\int_{\tau_n^2}^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u_1^{n-2}(\xi_n^1, h-\hat{\tau}^2, \xi_n^2) \right]$$
$$\left. + \chi_{\tau_n^2 \geq \tau_n^1+h} \; \bar{e}^{\alpha\tau_n^2} \; u_1^{n-2}(x_{\tau_n^2}, 0, \xi_n^2) \right\}$$

Supposons alors

(2.12)
$$u_o^n(x) = E_x^{k-1} \left\{ \int_o^{\tau_n^k} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i=1}^{k} \bar{e}^{\alpha\tau_n^j} c(\xi_n^j) \right.$$
$$+ \chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h} \left[\int_{\tau_n^k}^{\tau_n^{k-1}+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \right.$$
$$\left. \bar{e}^{\alpha(\tau_n^{k-1}+h)} u_1^{k-1}(\xi_n^{k-1}, \tau_n^{k-1}+h-\tau_n^k, \xi_n^k) \right]$$
$$\left. + \chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h} \; \bar{e}^{\alpha\tau_n^k} \; u_1^{n-k}(x_{\tau_n^k}, 0, \xi_n^k) \right\}$$

où τ_n^j, ξ_n^j sont définis de manière analogue à τ_n^2, ξ_n^2 (cf. aussi la définition de τ_n^{k+1}, ci dessous).

On définit maintenant

(2.13)
$$t_n^{k+1,1} = \mathrm{Inf}(s \in [(\tau_n^{k-1}+h) \vee \tau_n^k, \; \tau_n^k+h],$$
$$u_1^{n-k}(x_s, s - \tau_n^k, \xi_n^k) \geq M_1 \; u_1^{n-k}(\ldots)) \quad (^1)$$

(1) les pointillés signifiant que les arguments sont les mêmes qu'au premier membre de l'inégalité.

(2.14) $$t_n^{k+1,2} = \mathrm{Inf}(s \geq t_n^k+h,\ u_o^{n-k}(x_s) \geq M_o u_1^{n-k-1}(x_s))$$

et

(2.15) $$\tau_n^{k+1} = t_n^{k+1,1}\chi_{t_n^{k+1,1} < \tau_n^k+h} + t_n^{k+1,2}\chi_{t_n^{k+1,1} \geq \tau_n^k+h}$$

(2.16) $$\xi_n^{k+1} = \hat{\xi}_1^{k+1}(\xi_n^k,\tau_n^{k+1}-\tau_n^k)\chi_{\tau_n^{k+1}<\tau_n^k+h}$$

$$+ \hat{\xi}_o^{k+1}(x_{\tau_n^{k+1}})\ \chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h}$$

où $\hat{\xi}_1^{k+1}$, $\hat{\xi}_o^{k+1}$, réalisent le minimum dans $M_1\ u_1^{n-k-1}$ et $M_o u_1^{n-k-1}$ respectivement.

Posons alcrs

$$\hat{t} = (\tau_n^{k-1}+h) \vee \tau_n^k$$

$$\hat{\tau} = \mathrm{Inf}(s \in [\hat{t},\hat{t}+h],\ u_1^{n-k}(x_s,s-\hat{t},\xi_n^k) \geq M_1 u_1^{n-k-1}) .$$

Comme au lemme II.2.2, on a

(2.17) $$\bar{e}^{\alpha\hat{t}} u_1^{n-k}(x_{\hat{t}},0,\xi_n^k) = E^{k-1}\left\{ \int_{\hat{t}}^{\hat{\tau}\wedge(\hat{t}+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$+ \chi_{\hat{\tau} < \hat{t}+h}\ \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}}\ M_1 u_1^{n-k-1}$$

$$\left. + \chi_{\hat{\tau} \geq \hat{t}+h}\ \bar{e}^{\alpha(\hat{t}+h)} u_o^{n-k}(\xi_n^k) | \mathcal{F}_{\hat{t}} \right\} ,$$

et comme $\chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h}$ est $\mathcal{F}_{\hat{t}}$ mesurable ,

(2.18) $$\chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h}\ \bar{e}^{\alpha\tau_n^k}\ u_1^{n-k}(x_{\tau_n^k},0,\xi_n^k) =$$

$$\chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h} . E^{k-1}\left\{ \int_{\tau_n^h}^{\hat{\tau}\wedge(\tau_n^k+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$\left. + \chi_{\hat{\tau}<\tau_n^k+h} \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}} M_1 u^{n-k-1} + \chi_{\hat{\tau}\geq\tau_n^k+h} \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_o^{n-k}(\xi_n^k) | \mathcal{F}_{\hat{t}} \right\}$$

On remarque que $\chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h} \cdot \hat{\tau} = \chi_{\tau_n^k \geq \tau_n^{k-1}+h} \cdot t_n^{k+1,1}$.

On applique le même traitement à

$$u_1^{n-k}(\xi_n^{k-1}, \tau_n^{k-1}+h-\tau_n^k, \xi_n^k)$$

en posant ,

$$\beta = \mathrm{Inf}(s \in [\tau_n^{k-1}+h, t_n^{k+1}+h]; u_1^{n-k}(\xi_n^{k-1}, s-t_n^{k,1}, \xi_n^k) \geq M_1 u_1^{n-k-1})$$

(où $t_n^{k,1}$ est défini comme en (2.13)),

On a

$$\text{(2.19)} \qquad \bar{e}^{\alpha(\tau_n^{k-1}+h)} u_1^{n-k}(\xi_n^{k-1}, \tau_n^{k-1}+h-t_n^{k,1}, \xi_n^k) =$$

$$E^{k-1}\left\{\int_{\tau_n^{k-1}+h}^{\beta\Lambda(t_n^{k,1}+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \chi_{\beta < t_n^{k,1}+h}\, \bar{e}^{\alpha\beta} M_1 u_1^{n-k-1}\right.$$

$$\left. + \chi_{\beta \geq t_n^{k,1}+h}\, \bar{e}^{\alpha(t_n^{k,1}+h)} u^{n-k}(\xi_n^k) | \mathcal{F}_{(\tau_n^{k-1}+h)^-}\right\} .$$

Comme $\chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h}\, \tau_n^k = \chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h} \cdot t_n^{k,1}$, on a

$$\text{(2.20)} \qquad \chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h}\, \bar{e}^{\alpha(\tau_n^{k-1}+h)} u_1^{n-k}(\xi_n^{k-1}, \tau_n^{k-1}+h-\tau_n^k, \xi_n^k) =$$

$$\chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h}\, E^{k-1}\left\{\int_{\tau_n^{k-1}+h}^{\beta\Lambda(\tau_n^k+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \chi_{\beta < \tau_n^k+h}\, \bar{e}^{\alpha\beta} M_1 u_1^{n-k-1}\right.$$

$$\left. + \chi_{\beta \geq \tau_n^k+h}\, \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_o^{n-k}(\xi_n^k) | \mathcal{F}_{(\tau_n^{k-1}+h)^-}\right\} .$$

De plus $\chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h} \cdot \beta = \chi_{\tau_n^k < \tau_n^{k-1}+h} \cdot t_n^{k+1,1}$

on exprime aussi $M_1\ u_1^{n-k-1}$ comme précédemment , i.e.

$$(2.21)\qquad \chi_{\beta<t_n^{k,1}+h}\, \bar{e}^{\alpha\beta} M_1 u_1^{n-k-1} = \chi_{\beta<t_n^{k,1}+h} [E^{k-1}\left\{\int_\beta^{t_n^{k,1}+h} \bar{e}^{\alpha s} f ds \,|\, \mathfrak{F}_\beta\right\}$$

$$+ \bar{e}^{\alpha\beta} c(\xi_n^{k+1}) + \bar{e}^{\alpha(t_n^{k,1}+h)} u_1^{n-k-1}(\xi_n^k, t_n^{k,1}+h-\beta, \xi_n^{k+1})],$$

de même

$$(2.22)\qquad \chi_{\hat{\tau}<\tau_n^k+h}\, \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}} M_1 u_1^{n-k-1} = \chi_{\hat{\tau}<\tau_n^k+h} [E^{k-1}\left\{\int_{\hat{\tau}}^{\tau_n^k+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds \,|\, \mathfrak{F}_{\hat{\tau}}\right\}$$

$$+ \bar{e}^{\alpha\hat{\tau}} c(\xi_n^{k+1}) + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_1^{n-k-1}(\xi_n^k, \tau_n^k+h-\hat{\tau}, \xi_n^{k+1})] \;.$$

En rassemblant (2.18) à (2.22) dans (2.12), les termes intégraux se regroupent et l'on obtient

$$(2.23)\qquad u_o^n(x) = E^{k-1}\left\{\int_o^{\tau_n^k} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \int_{\tau_n^k}^{\tau_n^{k+1}\wedge(\tau_n^k+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \bar{e}^{\alpha\tau_n^j} c(\xi_n^j) + \chi_{\tau_n^{k+1}<\tau_n^k+h}\left[\int_{\tau_n^{k+1}}^{\tau_n^k+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds\right.$$

$$\left. + \bar{e}^{\alpha\tau_n^{k+1}} c(\xi_n^{k+1}) + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_1^{n-k-1}(\xi_n^k, \tau_n^k+h-\tau_n^{k+1}, \xi_n^{k+1})\right]$$

$$\left. + \chi_{\tau_n^{k+1}\geq\tau_n^k+h}\, \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_o^{n-k}(\xi_n^k)\right\} \;.$$

On construit alors

$$P^k = P^{k-1} \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{(\tau_n^k+h)^-} \;,$$

$$P^k(\theta^{-1}_{(\tau_n^k+h)} A \,|\, \mathfrak{F}_{(\tau_n^k+h)^-}) = P_{\xi_n^k}(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F}$$

$$P^{k-1} \quad \text{ps. sur} \quad \{\tau_n^k < +\infty\} \;,$$

et, comme précédemment

$$(2.24) \qquad u_o^{n-k}(\xi_n^k)\bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} = E^k\left\{\int_{\tau_n^k+h}^{t_n^{k+1,2}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$\left. + \bar{e}^{\alpha t_n^{k+1,2}} M_o\, u_1^{n-k-1}(x_{t_n^{k+1,2}}) \mid \mathcal{F}_{(\tau_n^k+h)^-}\right\}$$

En reportant ceci dans (2.23), compte tenu de

$$\chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h} \cdot t_n^{k+1,2} = \chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h} \cdot \tau_n^{k+1} \quad ,$$

on obtient, puisque

$$\int_{\tau_n^k}^{\tau_n^{k+1} \wedge (\tau_n^k+h)} + \chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h} \cdot \int_{\tau_n^k+h}^{\tau_n^{k+1}}$$

$$= \chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h} \cdot \left(\int_{\tau_n^k}^{\tau_n^k+h} + \int_{\tau_n^k+h}^{\tau_n^{k+1}}\right) + \chi_{\tau_n^{k+1} < \tau_n^k+h} \cdot \int_{\tau_n^k}^{\tau_n^{k+1}}$$

$$= \int_{\tau_n^k}^{\tau_n^{k+1}} \quad ,$$

$$(2.25) \qquad u_o^n(x) = E^k\left\{\int_o^{\tau_n^{k+1}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{k+1} \bar{e}^{\alpha \tau_n^j} c(\xi_n^j)\right.$$

$$\chi_{\tau_n^{k+1} < \tau_n^k+h}\left[\int_{\tau_n^{k+1}}^{\tau_n^k+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^k+h)} u_1^{n-k-1}(\xi_n^k, \tau_n^k+h-\tau_n^{k+1}, \xi_n^{k+1})\right]$$

$$\left. + \chi_{\tau_n^{k+1} \geq \tau_n^k+h}\, \bar{e}^{\alpha \tau_n^{k+1}} u_1^{n-k-1}(x_{\tau_n^{k+1}}, 0, \xi_n^{k+1})\right\} .$$

Donc on a la formule (2.12) $\forall n$.

En prenant $k = n-1$ et en utilisant successivement

$$\bar{e}^{\alpha(\tau_n^{n-1}+h)}\chi_{\tau_n^n<\tau_n^{n-1}+h}\, u_1^o(\xi_n^{n-1},\tau_n^{n-1}+h-\tau_n^n,\xi_n^n) =$$

$$\chi_{\tau_n^n<\tau_n^{n-1}+h}\, E^{n-1}\left\{\int_{\tau_n^{n-1}+h}^{\tau_n^n+h}\bar{e}^{\alpha s}f(x_s)ds+\bar{e}^{\alpha(\tau_n^n+h)}u_o^o(\xi_n^n)|\mathcal{F}_{(\tau_n^{n-1}+h)^-}\right\}$$

et

$$\chi_{\tau_n^n \geq \tau_n^{n-1}+h}\, \bar{e}^{\alpha\tau_n^n}\, u_1^o(x_{\tau_n^n},0,\xi_n^n) =$$

$$\chi_{\tau_n^n \geq \tau_n^{n-1}+h}\, E^{n-1}\left\{\int_{\tau_n^n}^{\tau_n^n+h}\bar{e}^{\alpha s}f(x_s)ds+\bar{e}^{\alpha(\tau_n^n+h)}u_o^o(\xi_n^n)|\mathcal{F}_{\tau_n^n}\right\}$$

On a

$$u_o^n(x) = E^{n-1}\left\{\int_0^{\tau_n^n+h}\bar{e}^{\alpha s}f(x_s)ds + \sum_{j=1}^n \bar{e}^{\alpha\tau_n^j}c(\xi_n^j)\right\}$$

$$+ \bar{e}^{\alpha(\tau_n^n+h)}\, u_o^o(\xi_n^n)$$

Puis définissant P^n comme précédemment, on a

$$u_o^o(\xi_n^n)\bar{e}^{\alpha(\tau_n^n+h)} = E^n\left\{\int_{\tau_n^n+h}^{+\infty}\bar{e}^{\alpha s}f(x_s)ds|\mathcal{F}_{(\tau_n^n+h)^-}\right\}$$

=>

$$u_o^n(x) = E^n\left\{\int_o^{+\infty}\bar{e}^{\alpha s}f(x_s)ds + \sum_{j=1}^n \bar{e}^{\alpha\tau_n^j}\, c(\xi_n^j)\right\}$$

Donc $u_o^n(x) = J_x(v^n)$ si v^n est le contrôle (admissible), donné par :

$$\tau_1^i = \left|\begin{array}{ll}\tau_n^i & i \leq n \\ +\infty & i > n\end{array}\right.$$

$$\xi^i = \left|\begin{array}{ll}\xi_n^i & i \leq n \\ \text{constante arbitraire (dans U) si } i > n & \end{array}\right.$$

Donc $u_o^n(x) \geq u_o(x)$. La démonstration est similaire pour u_1^n.

■

<u>Lemme III.2.4.</u> $u_i^n \searrow u_i$ en tout point, $i = 0,1$.

<u>Démonstration.</u>

Elle est analogue à celle du lemme III.2.3., les égalités étant remplacées par des inégalités : Soit v un contrôle quelconque, $v = (\tau^i, \xi^i)$ $i \geq 1$. De la définition de u_o^n, on a nécessairement

$$u_o^n(x) \leq E_x\left(\int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau^1} c(\xi^1) + e^{-\alpha\tau^1} u_1^{n-1}(x_{\tau^1}, 0, \xi^1)\right)$$

On a aussi, comme au lemme II.2.2,

$$u_1^{n-1}(x_{\tau^1}, 0, \xi^1) \leq E_x\left\{\int_{\tau^1}^{(\tau^1+h)\wedge\tau^2} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau^2} \chi_{\tau^2 < \tau^1+h} M_1 u_1^{n-2} + e^{-\alpha(\tau^1+h)} \chi_{\tau^2 \geq \tau^1+h} u_o^{n-1}(\xi^1) \middle| \mathcal{F}_{\tau^1}\right\}$$

En procédant par résurrence comme au lemme III.2.3, on arrive a

$$u_o^n(x) \leq E^{n-1}\left[\int_o^{\tau^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha\tau^j} c(\xi^j) + e^{-\alpha(\tau^n+h)} u_o^o(\xi^n)\right] \tag{2.26}$$

=>

$$u_o^n(x) \leq J_x(v) + E^{n-1}\, e^{-\alpha(\tau^n+h)}\, u_o^o(\xi^n).$$

Comme $\tau^n \uparrow +\infty$ et que u_o^o est bornée, on a

$$\lim_{n\uparrow\infty} u_o^n(x) \leq J_x(v) \,,$$

et comme v est arbitraire

$$\lim_{n\uparrow\infty} u_o^n(x) \leq u_o(x) \,.$$

Ceci, joint au lemme précédent, donne le résultat.

∎

Corollaire III.2.4.

Sous les hypothèses (1.1)

$$u_o^n(x) = \operatorname*{Inf}_{u\in\mathcal{V}^n} J_x(v) ,$$

$$u_1^n(x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_\rho^n} J_{x\rho\xi}(v) ,$$

où

$$\mathcal{V}^n = \{v \in \mathcal{V} |\ v=(\tau^i,\xi^i)_{\ i\geq 1} ,\ \tau^i=+\infty \quad i \geq n+1\} ,$$

$$\mathcal{V}_\rho^n = \{v \in \mathcal{V} |\ v=(\tau^i,\xi^i)_{\ i\geq 1} ,\ \tau^i=+\infty \quad i \geq n+1\} .$$

Démonstration.

On a vu au lemme III.2.3 qu'il existe $v^n \in \mathcal{V}^n$ tel que $u_o^n(x) = J_x(v^n)$. D'autre part on a vu en (2.26)

$$(2.27) \qquad u_o^n(x) \leq E^{n-1} \left\{ \int_0^{\tau^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^i) + e^{-\alpha(\tau^n+h)} u_o^o(\xi^n) \right\}$$

pour tout contrôle $v = (\tau^i,\xi^i)$ $i \geq 1$ appartenant à $\mathcal{V}$; or seuls les n premiers temps d'arrêt de v interviennent au second membre et donc (2.27) se réécrit, en tenant compte de la définition de u_o^o et de P^n

$$u_o^n(x) \leq E^n \left\{ \int_0^{\tau^n+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \int_{\tau^n+h}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{i=1}^n e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^i) \right\} .$$

Donc

$$u_o^n(x) \leq J_x(v) \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}^n .$$

la démonstration est identique pour $u_1(x,\rho,\xi)$.

Lemme III.2.5.

Sous les hypothèses (3.1), $u_i^n \to u_i$ uniformément, $i=0,1$.

Démonstration. [1]

Comme on l'a vu

$$0 \le u_o^n(x) - u_o(x) \le u_o^n(x) - \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}} J_x(v)$$

i.e

$$0 \le u_o^n(x) - u_o(x) \le \sup_{v\in\mathcal{V}} (u_o^n(x) - J_x(v)).$$

Mais $\forall\, v \in \mathcal{V}$, $\forall\, v^n \in \mathcal{V}^n$

$$u_o^n(x) - J_x(v) \le J_x(v^n) - J_x(v) .$$

A tout $v \in \mathcal{V}$ on associe $v|_n \in \mathcal{V}^n$ en conservant les n premiers temps d'arrêt, et en prenant $\tau^i = +\infty \ \forall\, i \ge n+1$.

i.e.

$$v = (\tau^i,\xi^i)_{i\ge 1} \in \mathcal{V}$$

et

$$v|_n = (\tau^1,\xi^1,\dots,\tau^n,\xi^n,+\infty,\xi^{n+1},+\infty,\ \dots)$$

on a encore, $\forall\, v \in \mathcal{V}$

$$u_o^n(x) - J_x(v) \le J_x(v|_n) - J_x(v)$$

d'où

$$0 \le u_o^n(x) - u_o(x) \le \sup_{v\in\mathcal{V}}(J_x(v|_n) - J_x(v)). \tag{2.28}$$

Considérons alors

$$Y = J_x(v|_n) - J_x(v) .$$

---

(1) l'idée de ce type de démonstration, qui est fréquemment utilisé dans la suite, est dûe à J.L. MENALDI cf. [45].

Comme $v_{|n}$ et v coïncident sur les n premiers temps d'arrêt, $P^{v|n}$ et P^{v} coïncident sur $\mathcal{F}_{(\tau^n+h)^-}$, d'où

$$Y = E^{v|n} \int_{\tau^n+h}^{+\infty} f(x_s) e^{-\alpha s} ds$$

$$- E^{v}\left[\int_{\tau^n+h}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + \sum_{i \geq n+1} e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^i)\right]$$

mais le second terme du second membre est ≥ 0, donc

$$Y \leq E^{v|n} \int_{\tau^n+h}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s) ds \quad . \tag{2.29}$$

Soit alors $T > 0$ arbitraire, et notons P le second membre de (2.29)

$$Z = E^{v|n} \int_{\tau^n+h}^{T_v(\tau^n+h)} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + \int_{T_v(\tau^n+h)}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s) ds$$

=>

$$Z \leq E^{v|n} \int_{\tau^n+h}^{T_v(\tau^n+h)} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha T} \|f\|$$

de plus

$$E^{v|n} \int_{\tau^n+h}^{(\tau^n+h)_v T} e^{-\alpha s} f(x_s) ds \leq \|f\| \, E^{v|n}[\chi_{(\tau^n+h) < T}] \, .$$

D'autre part si $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$, on a, par définition des contrôles admissibles ,

$$\tau^n+h \geq [\tfrac{n}{2}].h \qquad (\forall\, \omega).$$

Donc pour T fixé et n assez grand $([\frac{n}{2}] > \frac{T}{h})$, on a

$$E^{v|n}[\chi_{\tau^n+h < T}] = 0 \qquad \underline{\forall \; v \in \mathcal{V}} \, .$$

d'où, en revenant à (2.28), et en prenant n tel que $[\frac{n}{2}] > \frac{T}{h}$, on a

$$0 \leq u_o^n(x) - u_o(x) \leq \bar{e}^{\alpha T} \|f\|$$

=>

$$\lim_{n\uparrow\infty} \|u_o^n - u_o\| \leq \bar{e}^{\alpha T} \|f\| \quad \forall\, T$$

en passant à la limite $T\uparrow\infty$ on a le résultat.
(Bien entendu, la démonstration est analogue pour u_1^n).

∎

Théorème III.2.1.

Sous les hypothèses du lemme III.2.5., (u_o,u_1) est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions (w_o,w_1) vérifiant

$$(w_o,w_1) \in C_b^o(E) \times C_b^o(E \times [o,h] \times U),$$

$$(2.30) \qquad \begin{cases} w_o(x) \leq M_o\, w_1(x)\,, \\ w_o(x) \leq \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t)\, w_o(x) + \int_o^t \bar{e}^{\alpha s}\Phi(s) f\, ds \quad \forall\, t \geq 0\,, \end{cases}$$

$$(2.31) \qquad \begin{cases} w_1(x,\rho,\xi) \leq M_1\, w_1(x,\rho,\xi)\,, \\ w_1(x,\rho,\xi) \leq \int_\rho^{\rho+t} \bar{e}^{\alpha(s-\rho)}\Phi(s-\rho) f(x) ds + \bar{e}^{\alpha t}\Phi(t) w_1(x,\rho+t,\xi), \end{cases}$$

$$\forall\, \rho,\ t\ ,\ \rho \leq h\ ,\ \rho+t \leq h\ ,$$

$$(2.32) \qquad w_1(x,h,\xi) = w_o(\xi)\ .$$

Démonstration.

La convergence uniforme de u_i^n vers u_i $i=0,1$, implique celle de $M_o u_1^n$ vers $M_o u_1$ et de $M_1 u_1^n$ vers $M_1 u_1$.

On passe alors facilement à la limite dans les définitions de u_o^n et u_1^n pour obtenir que (u_o,u_1) est solution du système :

$$(2.33)\qquad \begin{cases} u_o(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left\{\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} M_o u_1(x_\tau)\right\} \\ u_1(x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left\{\int_0^{\tau\Lambda(h-\rho)} e^{-\alpha s} f(x_s)ds \right. \\ \qquad + e^{-\alpha\tau} \chi_{\tau<h-\rho} M_1 u_1 \\ \qquad \left. + e^{-\alpha(h-\rho)} \chi_{\tau \geq h-\rho}\, u_o(\xi)\right\} \end{cases}$$

(on peut d'ailleurs montrer que (u_o,u_1) en est la solution maximum).

Comme ceci montre que u_o et u_1 sont les bornes inférieures de problèmes d'arrêt optimal , on obtient que (u_o,u_1) est solution de (2.30); (2.31); d'après les résultats sur les problèmes d'arrêt optimal, (2.32) est également vérifié sur (2.33).

Reste à montrer que c'est la solution maximum. Soit (w_o,w_1) une autre solution, d'après (2.30), (2.31) et la continuité de (w_o,w_1),

$$(2.34)\qquad \begin{cases} z_o(s) = e^{-\alpha s} w_o(x_s) + \int_0^s e^{-\alpha t} f(x_t)dt \\ z_1(s) = e^{-\alpha s} w_1(x_s,\rho+s,\xi) + \int_0^s e^{-\alpha t} f(x_t)dt \end{cases}$$

sont des martingales, bornées, et continues à droite. Le théorème d'arrêt donne, pour tout temps d'arrêt τ

$$w_o(x) \leq E_x \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} w_o(x_\tau)$$

$$w_o(x) \leq E_x \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} M_o w_1(x_\tau)$$

de même

$$w_1(x,\rho,\xi) \leq E_x\left\{\int_0^{\tau\Lambda(h-\rho)} e^{-\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha\tau\Lambda(h-\rho)} w_1(x_{\tau\Lambda(h-\rho)}, \rho+\tau\Lambda(h-\rho),\xi)\right\}$$

en utilisant $w_1 \leq M_1 w_1$ et (2.32) , on a

$$w_1(x,\rho,\xi) \leq E_x\left\{\int_0^{\tau_\Lambda(h-\rho)} e^{-\alpha s}f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\chi_{\tau<h-\rho}M_1 w_1 \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha(h-\rho)}\chi_{\tau \geq h-\rho}\, w_o(\xi)\right\}.$$

Donc en reprenant la démonstration du lemme II.2.5.

$$w_o \leq u_o^n, \quad w_1 \leq u_1^n \quad \forall\, n, \text{ donc}$$

$$w_o \leq u_o \text{ et } w_1 \leq u_1.$$

■

Remarque II.2.1.

Dans le cas des diffusions (ou des diffusions avec un terme poissonnien) on peut faire une démonstration directe de la continuité de u_o et u_1 (cf. [9], [58]).

■

Théorème III.2.2.

Sous les hypothèses du theorème III.2.1, il existe un contrôle optimal, i.e., il existe $\hat{v}_o$, $\hat{v}_1$ admissibles, tels que

$$u_o(x) = J_x(\hat{v}_o), \quad u_1(x,\rho,\xi) = J_{x\rho\xi}(\hat{v}_1).$$

Démonstration.

On va utiliser (2.30), (2.31). On définit

$$\tau^1 = \mathrm{Inf}(s \geq 0,\ u_o(x_s) \geq M_o u_1(x_s)), \tag{2.35}$$

c'est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, car u_o, $M_o u_1$ sont continues, donc τ^1 est le premier instant de sortie d'un ouvert, pour un processus continu à droite cf. [19]. par exemple.

Soit alors $\hat{\xi}_o(x)$ minimisant $c(\xi) + u_1(x,o,\xi)$ sur U, tel que $x \to \hat{\xi}_o(x)$ soit mesurable (ce qui existe parce que u_1 est continue, et U compact). On pose alors

(2.36) $$\xi^1 = \hat{\xi}_o(x_{\tau^1}) \quad .$$

τ^1 est optimal pour le problème d'arrêt correspondant à (2.30), i.e

$$u_o(x) = E_x \int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau^1} M_o u_1(x_{\tau^1}) \ ,$$

et

(2.37) $$u_o(x) = E_x \int_o^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau^1} [c(\xi^1)+u_1(x_{\tau^1},o,\xi^1)].$$

On définit ensuite

$$t^{2,1} = \mathrm{Inf}(s \in [o,h],\ u_2(x_{\tau^1+s},s,\xi^1) \geq M_1 u_1)$$

(ou encore, $t^{2,1} = \tilde{t}^2 \circ \theta_{\tau^1}$ où

$$\tilde{t}^2 = \mathrm{Inf}(s \in [o,h],\ u_1(x_s,s,\hat{\xi}_o(x_o)) \geq M_1 u_1(x_s,s,\hat{\xi}_o(x_o))),$$

et

$$t^{2,2} = \tau^1 + h + \tau^1 \circ \theta_{\tau^1+h} \quad .$$

(où il est entendu , comme θ_{τ^1+h} n'a été défini que pour $\{\tau^1 < +\infty\}$, que ceci signifie

$$t^{2,2} = \tau^1 + h + \tau^1 \circ \theta_{\tau^1+h} \quad \text{sur } \{\tau^1 < +\infty\}$$

$$= +\infty \quad \text{sur } \{\tau^1 = +\infty\} \ ) \ .$$

Enfin

(2.38) $$\tau^2 = (t^{2,1}+\tau^1)\ \chi_{t^{2,1}<h} + t^{2,2}\ \chi_{t^{2,1}\geq h} \quad .$$

En raisonnant comme au lemme III.2.3. on a

$$(2.39) \qquad \bar{e}^{\alpha\tau^1} u_1(x_{\tau^1},0,\xi^1) = E_x \Big\{ \int_{\tau^1}^{(\tau^1+t^{2,1})\Lambda(\tau^1+h)} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds$$

$$+ \bar{e}^{\alpha(\tau^1+t^{2,1})} M_1 u_1(x_{\tau^1+t^{2,1}}, t^{2,1},\xi^1)\, \chi_{t^{2,1}<h}$$

$$+ \bar{e}^{\alpha(\tau^1+h)} \chi_{t^{2,1}\geq h}\, u_o(\xi^1) | \mathcal{F}_{\tau^1} \Big\}$$

et

$$(2.40) \qquad \bar{e}^{\alpha(\tau^1+h)} u_o(\xi^1) = E_x^1 \Big\{ \int_{\tau^1+h}^{t^{2,2}} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) + \bar{e}^{\alpha t^{2,2}} M_o u_1(x_{t^{2,2}}) | \mathcal{F}_{(\tau^1+h)^-} \Big\}$$

On prend ensuite $\hat{\xi}_1(\rho,\xi)$ minimisant (en ξ') $c(\xi')+\bar{e}^{\alpha(h-\rho)} u_1(\xi, h-\rho\ ,\xi')$ et on pose

$$(2.41) \qquad \xi^2 = \hat{\xi}_1(t^{2,1},\xi^1)\, \chi_{t^{2,1}<h} + \hat{\xi}_o(x_{t^{2,2}})\, \chi_{t^{2,1}\geq h}$$

en remarquant de plus que

$$\{t^{2,1} < h\} = \{\tau^2 < \tau^1+h\},\ (2.39) \text{ à } (2.41)$$

donnent

$$(2.42) \qquad u_o(x) = E_x^1 \Big\{ \int_o^{\tau^2} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau^1} c(\xi^1) + \bar{e}^{\alpha\tau^2} c(\xi^2)$$

$$+ \chi_{\tau^2<\tau^1+h} \int_{\tau^2}^{\tau^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s)ds + \bar{e}^{\alpha(\tau^1+h)} u_1(\xi^1,\tau^1+h-\tau^2,\xi^2)$$

$$+ \chi_{\tau^2 \geq \tau^1+h}\, \bar{e}^{\alpha\tau^2}\, u_1(x_{\tau^2},0,\xi^2) \Big\} \ ..$$

La suite de la démonstration est identique à celle du lemme III.2.3 en posant

$$t^{k+1,1} = \mathrm{Inf}(s \in [(\tau^{k-1}+h)_v \tau^k,\ \tau^k+h]$$

$$u_1(x_s, s-\tau^k,\xi^k) = M_1 u_1(x_s, s-\tau^k,\xi^k)),$$

$$t^{k+1,2} = \mathrm{Inf}(s \geq \tau^k+h,\ u_o(x_s) = M_o u_1(x_s)),$$

et

$$(2.43)\qquad \begin{cases} \tau^{k+1} = t^{k+1,1}\ \chi_{t^{k+1,1}<\tau^k+h} + t^{k+1,2}\ \chi_{t^{k+1,1}\geq \tau^k+h}\ , \\ \xi^{k+1} = \hat{\xi}_1(\tau^{k+1},\tau^k,\xi^k)\ \chi_{\tau^{k+1}<\tau^k+h} \\ \qquad\qquad + \hat{\xi}_o(x_{\tau^{k+1}})\ \chi_{\tau^{k+1}\geq \tau^k+h}\ , \end{cases}$$

et

$$P^k = P^{k-1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_{(\tau^k+h)^-}\ ,$$

$$P^k(\theta^{-1}_{\tau^k+h} A \mid \mathcal{F}_{(\tau^k+h)^-}) = P_{\xi^k}(A)\ ,$$

$$\forall A \in \mathcal{F}\ ,\quad P^{k-1}\ \text{ps. sur}\ \{\tau^k < +\infty\}\ .$$

On obtient

$$u_o(x) = E^k_x \Big\{ \int_o^{\tau^{k+1}} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{k+1} e^{-\alpha\tau^j}\ c(\xi^j)$$

$$+ \chi_{\tau^{k+1}<\tau^k+h} \Big[\int_{\tau^{k+1}}^{\tau^k+h} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha(\tau^k+h)} u_1(\xi^k,\tau^k+h-\tau^{k+1},\xi^{k+1}) \Big]$$

$$+ \chi_{\tau^{k+1}\geq\tau^k+h}\ e^{-\alpha\tau^{k+1}}\ u_1(x_{\tau^{k+1}},0,\xi^{k+1}) \Big\}.$$

Comme u_1 est borné et que $\tau^h \uparrow \infty$, on a

$$u_o(x) = \operatorname*{Lim}_{k\uparrow+\infty}\ E^k \Big\{ \int_o^{\tau^{k+1}} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + \sum_{j=1}^{k+1} e^{-\alpha\tau^j} c(\xi^j) \Big\}$$

$$= J_x(\hat{v}_o)$$

si $\hat{v}_o$ est défini de proche en proche par (2.43).

Le raisonnement est identique pour $u_1(x,\rho,\xi)$.

■

<u>Remarque III.2.2.</u>

(i) On peut bien entendu imaginer d'autoriser N décisions entre τ^i et τ^i+h (N au plus) les mêmes techniques seraient applicables en définissant convenablement $(u_o,u_1,\dots,u_N)$.

(ii) Du point de vue probabiliste (existence d'un contrôle optimal) les exemples du chapitre I ou II pourraient être repris ici.
En fait on considèrera surtout le cas des diffusions dans le chapitre suivant.

(iii) On traite comme au §. II.4, les problèmes du type "stock".

■

IV

CONTROLE IMPULSIONNEL AVEC RETARDS IMBRIQUES

LE CAS DE DIFFUSION

Orientation.

On s'intéresse ici au problème du chapitre III dans le cas d'un processus de diffusion défini par une équation d'Ito, et pour un exemple du type gestion de stock. L'utilisation des équations différentielles stochastiques permet des simplifications notables dans la construction du processus contrôlé, mais l'étude des problèmes approchés est identique à celle faite dans le cas général et on ne refera donc pas ici les démonstrations du type de celles du lemme III.2.3.

Toutefois le fait de travailler avec des diffusions permet de caractériser les coûts optimaux comme solution maximum d'un système d'I.Q.V : autrement dit on a un résultat analogue à celui de BENSOUSSAN LIONS [9], [11] pour le cas instantané.

Il faut remarquer que dans le cas évolutif (horizon fini), le nombre des instants de décision étant borné, une famille finie d'inéquations variationnelles suffit à caractériser le coût optimal ceci n'est plus vrai dans le cas stationnaire puisque le nombre d'instants de décision n'est jamais borné.

L'essentiel des résultats exposés ici avait été annoncé dans [56].

IV.1. NOTATIONS - HYPOTHESES - POSITION DU PROBLEME.

Pour fixer les idées, on utilisera le langage de la gestion de stock : autrement dit, l'état sera le niveau de stock, τ^i un instant de commande (pour réapprovisionner le stock), ξ^i la quantité commandée, h le retard de livraison.

On ne refera pas ici l'analyse des différentes situations possibles, on définira directement la famille de problèmes de contrôle à étudier.

Définition de l'état et des contrôles admissibles.

On se donne des fonctions g, σ , telles que

(1.1) g (resp. σ) est continue bornée de $[0,T] \times R^d \to R^d$ (resp. $\mathcal{L}(R^d,R^d)$).

(1.2)
$$|g(t,x) - g(t,x')| \leq c_1 |x - x'|_{R^d}$$
$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')| \leq c_1 |x - x'|_{R^d}$$

On se donne $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{F}_t$ une famille croissante de sous σ algèbres de $\mathcal{F}$, w_s un processus de Wiener standard par rapport à $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans R^d.

On note $\mathcal{V}_t$ l'ensemble des suites

$$v = (\tau^i,\xi^i) \quad i \geq 1 ,$$

ou τ^i est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, avec

(1.3) $$t \leq \tau^i \leq \tau^{i+1} \quad , \quad \forall\, i ,$$

et ξ^i une variable aléatoire, $\mathcal{F}_{\tau^i}$ mesurable, à valeurs dans $U = \bar{\mathcal{O}}$ ou $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de $(R^d)^+$ [1] .

---

[1] Ceci est pour fixer les idées et faciliter les notations dans les I.Q.V. On pourrait prendre pour U un compact quelconque.

On note $\mathcal{V}_t^o$ l'ensemble

$$\mathcal{V}_t^o = \{v | v \in \mathcal{V}_t \ , \ \tau^{i+1} \geq \tau^{i-1}+h \quad \text{sur} \ \{\tau^{i+1} < T\} \quad \forall\, i \geq 2\} \ , \tag{1.4}$$

A tout $v \in \mathcal{V}_t^o$, on associe $y_{tx}(s,v)$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dy_{tx}(s) = g(y)ds + \sigma(y)dw_s + \sum_{i\geq 1} \xi^i \delta(s-\tau^i-h)ds \quad s > t \\ \\ y_{tx}(t) = x \ . \end{cases} \tag{1.5}$$

On définit également, pour $\rho \in [0,h]$, $\xi \in U$

$$\mathcal{V}_{t\rho}^1 = \{v \in \mathcal{V}_t^o \mid \tau^2 \geq t+h-\rho\} \ . \tag{1.6}$$

On posera

$$\begin{cases} \tau^o = t-\rho \\ \xi^o = \xi \\ \tau_{t\rho} = t+h-\rho \end{cases} \tag{1.7}$$

à, x,ρ,ξ et $v \in \mathcal{V}_{t\rho}^1$, on fait correspondre $y_{tx\rho\xi}(s,v)$ solution de l'équation

$$\begin{cases} dy_{tx\rho\xi}(s) = g(y)ds + \sigma(y)dw_s + \sum_{i\geq 0} \xi^i \delta(s-\tau^i-h)ds \\ s > t \\ y_{tx\rho\xi}(t) = x \ . \end{cases} \tag{1.8}$$

<u>Définition du critère.</u>

On donne

$$\begin{cases} f \geq 0 \quad \text{continue, bornée sur } [0,T] \times R^d \\ \\ c(t,\xi) \geq 0 \quad \text{continue sur } [0,T] \times U \end{cases} \tag{1.9}$$

et à $v \in \mathcal{V}_t^o$ on associe

$$(1.10) \qquad J_{tx}(v) = E\left\{\int_t^T f(s,y_{tx}(s,v))ds + \sum_{i\geq 1} c(\tau^i,\xi^i)\chi_{\tau^i<T}\right\},$$

à $v \in \mathcal{V}_{t\rho}^1$ on associe

$$(1.11) \qquad J_{tx\rho\xi}(v) = E\left\{\int_t^T f(s,y_{tx\rho\xi}(s,v))ds + \sum_{i\geq 1} c(\tau^i,\xi^i)\chi_{\tau^i<T}\right\}.$$

On note également

$$(1.12) \qquad u_o(t,x) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_t^o} J_{tx}(v),$$

$$(1.13) \qquad u_1(t,x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_{t\rho}^1} J_{tx\rho\xi}(v).$$

Remarque IV.1.1.

On prend ici les diffusions définies par des équations d'ITO. Il faut noter que les résultats probabilistes (existence d'un contrôle optimal, continuité des coûts) sont encore valables pour des diffusions "faibles" (i.e. au sens de Stroock - Varadhan [68], [69]) par application des résultats du Chapitre III.

■

IV.2. PROBLEMES APPROCHES.

On introduit comme au chapitre précédent la suite de problèmes d'arrêt optimal

$$(2.1)\qquad u_o^o(t,x) = E\int_t^T f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds \ ,$$

$$(2.2)\qquad u_1^o(t,x,\rho,\xi) = E\left\{\int_t^{T\wedge\tau_{t\rho}} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds + u_o^o(\tau_{t\rho}\wedge T,\bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho}\wedge T)+\xi)\right\} ,$$

$$(2.3)\qquad u_o^n(t,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E\left\{\int_t^{\tau\wedge T} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds + \chi_{\tau<T}\, M_o u_1^{n-1}(\tau,\bar{y}_{tx}(\tau))\right\} ,$$

où

$$(2.4)\qquad M_c u_1^{n-1}(t,x) = \operatorname*{Inf}_{\xi\in U}\left[c(t,\xi) + u_1^{n-1}(t,x,0,\xi)\right]$$

$$(2.5)\qquad u_1^n(t,x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E\left\{\int_t^{T\wedge\tau_{t\rho}} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds + \chi_{\tau<\tau_{t\rho}\wedge T}\, M_1 u^{n-1}(\tau,\bar{y}_{tx}(\tau),z_{t\rho}(\tau),\xi) + \chi_{\tau\geq\tau_{t\rho}\wedge T}\, u_o^n(\tau_{t\rho}\wedge T,\ \bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho}\wedge T)+\xi)\right\},$$

et

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \tau_{t\rho} = t+h-\rho \quad , \quad \rho\in[o,h] \ , \\ z_{t\rho}(s) = \rho+s-t \ , \end{cases}$$

$$(2.7)\qquad M_1 u_1^{n-1}(t,x,\rho,\xi) = E\left\{\int_t^{(t+h-\rho)\wedge T} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds\right\} + \operatorname*{Inf}_{\xi'\in U}\left[c(t,\xi')+u_1^{n-1}(\tau_{t\rho}\wedge T,\bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho}\wedge T)+\xi,\tau_{t\rho}\wedge T-t,\xi')\right]$$

Dans toutes ces définitions, on a noté $\bar{y}_{tx}(s)$ la solution de l'équation sans contrôle, i.e.

$$(2.8)\qquad \begin{cases} d\bar{y}_{tx}(s) = g(\bar{y})ds + \sigma(y)dw_s\,, & s > t\,, \\ \bar{y}_{tx}(t) = x & . \end{cases}$$

On ne refera pas ici les démonstrations du chapitre III concernant l'étude des problèmes approchés. On résume les résultats dans le lemme suivant :

Lemme IV.2.1.

Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4)

(i) $\quad 0 \leq u_i^{n+1} \leq u_i^n \leq u_o^o \leq \|f\|\,T \;,\; i=0,1\;,$

(ii) $\left| \begin{array}{l} u_o^n \in C_b^o([o,T] \times R^d)\;, \\ u_i^n \in C_b^o([o,T] \times R^d \times [o,h] \times U)\;, \end{array}\right.$

(iii) $\left| \begin{array}{l} u_o^n \searrow u_o \quad \text{en tout point de } [o,T] \times R^d\;, \\ u_1^n \searrow u_1 \quad \text{en tout point de } [o,T] \times R^d \times [o,h] \times U\;. \end{array}\right.$

∎

On a encore ici, comme au chapitre III,

Lemme IV.2.2.

$$\forall\, n \geq 2[\tfrac{T}{n}]+1\;,\; u_i^n = u_i \quad i=0,1\;.$$

Démonstration.

Comme au chapitre précédent, (Corollaire III.2.4), on a

$$(2.9)\qquad u_o^n(t,x) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}_t^{o,n}} J_{tx}(v)\;,$$

où

$$\mathcal{V}_t^{o,n} = \{v \in \mathcal{V}_t^o,\ v=(\tau^i,\xi^i)i\geq 1,\ \tau^i = +\infty, i>n\},$$

et

$$(2.10) \qquad u_1^n(t,x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_{t\rho}^{1,n}} J_{tx\rho\xi}(v)$$

où $\mathcal{V}_{t\rho}^{1,n}$ est défini de façon analogue à $\mathcal{V}_t^{o,n}$ et en procédant comme au chapitre III, on obtient ainsi facilement

$$(2.11) \qquad 0 \leq u_o^n(t,x) - u_o(t,x) \leq \sup_{v\in\mathcal{V}_t^o} E \int_{(\tau^n+h)}^T f(y(s))ds$$

où $y_{tx}(s)$ correspond au contrôle $v_{|n}$ déduit de v quelconque (dans $\mathcal{V}_t^o$) en ne conservant que les n premiers temps d'arrêt,

<u>mais</u>

$\tau^n \geq ([\frac{n}{2}] - 1)h$ si $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$ et donc pour n assez grand (par exemple $2[\frac{T}{h}] + 1$), $\tau^n+h > T$.

Donc, comme (2.11) implique

$$0 \leq u_o^n(t,x) - u_o(t,x) \leq \|f\|.\ E\ \chi_{\tau^n+h\ <\ T}$$

on a donc

$$u_o^n(t,x) = u_o(t,x) \quad \text{pour } n \geq 2[\frac{T}{h}]+1 \ ,$$

de même pour u_1^n et u_1 (et donc évidemment on a la convergence uniforme !).

Il apparait donc qu'une famille finie de problèmes d'arrêt optimal suffit à caractériser le coût optimal. (le résultat n'est plus vrai dans le cas stationnaire). Il est cependant intéressant d'effectuer "le passage à la limite" pour montrer que l'on peut obtenir une caractérisation ne faisant intervenir que u_o et u_1. C'est ce qui sera fait dans la suite. Donnons d'abord le corollaire suivant :

Corollaire IV.2.2.

Sous les hypothèses du lemme IV.2.1, il existe un contrôle optimal pour le problème (1.12), (1.13).

La démonstration est analogue à celle du théorème III.2.2. On donnera simplement ici la construction d'un contrôle optimal. Soit y^1 solution de

$$(2.12)\qquad \begin{cases} dy^1 = g(y^1)ds + \sigma(y^1)dw_s\,, \quad s > t\,, \\ y^1(t) = x\,. \end{cases}$$

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \tau^1 = \mathrm{Inf}(s \geq t,\ s \leq T,\ u_o(s,y^1(s)) = M_o(s,y^1(s))), \\ \xi^1 = \hat{\xi}_o(\tau^1, y^1(\tau^1)), \end{cases}$$

où $\hat{\xi}_o(t,x)$ réalise le minimum de $c(t,\xi) + u_1(t,x,0,\xi)$ et est mesurable.

On note aussi $\hat{\xi}_1(t,x,\rho,\xi)$ un élément réalisant le minimum de

$$\xi' \to c(t,\xi') + Eu_1(\tau_{t\rho}{}_\Lambda T, \bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho}{}_\Lambda T)+\xi, h-\rho, \xi')$$

et est mesurable en t,x,ρ,ξ.

On note ensuite

$$t^{2,1} = \mathrm{Inf}(s \in [\tau^1, (\tau^1+h)_\Lambda T],\ u_1(s,y^1(s),z^1(s),\xi^1) = M_1\ u_1)$$

où

$$z^1(s) = s - \tau^1$$

et on définit y^2 par

$$dy^2(s) = g(y^2)ds + \sigma(y^2)dw_s \quad s > t_h^1 = (\tau^1+h)_\Lambda T$$

$$y^2(t_h^1) = y^1(t_h^1) + \xi^1$$

$$t^{2,2} = \text{Inf}\ (s \in [t_h^1, T],\ u_o(s, y^2(s)) = M_o\ u_1)\ ,$$

$$(2.14)\quad \begin{cases} \tau^2 = t^{2,1}\ \chi_{t^{2,1} < t_h^1} + t^{2,2}\ \chi_{t^{2,1} \geq t_h^1}\ , \\ \xi^2 = \hat{\xi}_1(\tau^2, y^1(\tau^2), z^1(\tau^2), \xi^1)\ \chi_{\tau^2 < t_h^1} \\ \qquad + \hat{\xi}_o(\tau^2, y^2(\tau^2))\ \chi_{\tau^2 \geq t_h^1}\ , \end{cases}$$

puis de proche en proche,

$$z^k(s) = s - \tau^k \quad s \geq \tau^k\ ,$$

$$y^{k+1}(t_h^k) = y^k(t_h^k) + \xi^k\ ,$$

$$t_h^k = (\tau^k + h) \wedge T\ ,$$

$$dy^{k+1}(s) = g(y^{k+1})ds + \sigma(y^{k+1})dw_s \quad s > t_h^k\ ,$$

$$t^{k+1,1} = \text{Inf}\ (s \in [t_h^{k-1} \vee \tau^k,\ t_h^k]\ ,$$

$$u_1(s, y^k(s), z^k(s), \xi^k) = M_1\ u_1)\ ,$$

$$t^{k+1,2} = \text{Inf}(s \in [t_h^k, T],\ u_o(s, y^{k+1}(s)) = M_o u_1)\ ,$$

$$\tau^{k+1} = t_1^{k+1,1}\ \chi_{t^{k+1,1} < t_h^k} + t^{k+1,2}\ \chi_{t^{k+1,1} \geq t_h^k}\ ,$$

$$\xi^{k+1} = \hat{\xi}_1(\tau^{k+1}, y^k(\tau^{k+1}), z^k(\tau^{k+1}), \xi^k)\ \chi_{\tau^{k+1} < t_h^k}$$

$$+ \hat{\xi}_o(\tau^{k+1}, y^{k+1}(\tau^{k+1}))\ \chi_{\tau^{k+1} \geq t_h^k}\ .$$

∎

IV.3. INEQUATIONS VARIATIONNELLES ASSOCIEES A u_1^n .

IV.3.1. Problème modèle : "cas homogène".

(3.1) | Soit Ψ continue bornée sur $[o,T] \times R^d \times [o,h]$ telle que $\Psi(t,x,h) \geq 0$.

On introduit

$$J_{tx\rho}(\tau) = E\int_t^{\tau\Lambda T\Lambda\tau_{t\rho}} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds + \chi_{\tau<T\Lambda\tau_{t\rho}}\Psi(\tau,\bar{y}_{tx}(\tau),z_{t\rho}(\tau)) \tag{3.2}$$

et

$$u(t,x,\rho) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J_{tx\rho}(\tau) . \tag{3.3}$$

On utilisera (cf. [9]), le problème pénalisé

$$J^{\varepsilon}_{tx\rho}(v) = E\int_t^{\tau_{t\rho}\Lambda T}(f + \frac{1}{\varepsilon}v\Psi)\bar{e}^{1/\varepsilon\int_t^s v(\lambda)d\lambda}ds \tag{3.4}$$

où v est un processus adapté, à valeurs dans $[0,1]$, et

$$u_{\varepsilon}(t,x,\rho) = \operatorname*{Inf}_{v} J^{\varepsilon}_{tx\rho}(v) . \tag{3.5}$$

On aura besoin des notations suivante :

(3.6)

$$\left| \begin{aligned} a_{ij}(t,x) &= \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x) \\ a_i\ (t,x) &= (\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} - g_i)(t,x) \end{aligned} \right.$$

$$A = -\sum_{ij=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\left| \begin{aligned} H_1 &= \{\varphi | \varphi\, \bar{e}^{\gamma|x|} \in L^2(R^d \times]o,h[)\} \\ V_1 &= \{\varphi | \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in H_1 \ , \quad i=1,d\} \end{aligned} \right.$$

$$(3.7) \qquad a_1(u,w) = \sum_{ij} \int_{R^d\times]o,h[} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} e^{-2\gamma|x|} dx d\rho$$

$$+ \sum_{ij} \int_{R^d\times]o,h[} (a_j - 2\gamma \frac{x_i}{|x|} a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} w\, e^{-2\gamma|x|} dx d\rho$$

On pose aussi pour $v \in L^2(]o,T[, H_1)$, tel que $Lv \in L^2(o,T;H_1)$,

$$Lv \in L^2(o,T;H_1)$$

$$|v(h)|^2 = \int_o^T \int_{R^d} |v(t,x,h)|^2 e^{-2\gamma|x|} dx dt$$

On fera ici l'hypothèse supplémentaire, (qui n'est pas nécessaire pour l'étude des problèmes approchés au lemme IV.2.1.).

$$(3.8) \qquad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha_1 |\xi|^2 \quad , \quad \forall\, \xi \in R^d \quad .$$

Ceci permet, comme on traite un problème évolutif, de se ramener toujours au cas où

$$(3.8)' \qquad a_1(w,w) \geq \alpha_2 \| w\|^2_{V_1} \qquad \forall\, w \in V_1 \ .$$

Théorème IV.3.1.

Sous les hypothèses (1.1),(1.2),(1.9) et (3.1), u (définie par (3.3)) est solution maximum de l'inéquation variationnelle

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_o^T (-Lv,v-u)dt + \int_o^T a_1(u,v-u)dt + \frac{1}{2}|v(T)|^2 \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{1}{2}|v(h)|^2 \geq \int_o^T (f,v-u) \quad , \\ \forall\, v \leq \Psi \ , \\ v \in L^2(o;T;V_1),\ Lv \in L^2(o,T;H_1), \\ u \leq \Psi \ , \\ u \in L^2(O,T;V_1) \ . \end{cases}$$

De plus u est continue.

Démonstration.

En considérant $z_{t\rho}$ comme un processus de diffusion dégénéré, on peut appliquer les résultats du chapitre I (cf. aussi [11]) et on a donc

$$u,\ u_\varepsilon \in C_b^o([o,T] \times R^d \times [o,h]),\ u_\varepsilon \to u$$

uniformément sur tout compact et en décroissant quand $\varepsilon \downarrow 0$

$$(3.10) \qquad \hat{\tau} = \mathrm{Inf}(s \in [t,T_\Lambda \tau_{t\rho}],\ u(s,y_{tx}(s),z_{t\rho}(s)) = \Psi(s,y_{tx}(s),z_{t\rho}(s))$$

est optimal.

Ceci étant rappelé, on introduit un problème régularisé en définissant

$$(3.11) \qquad \begin{cases} dz^\eta_{t\rho}(s) = ds + \eta\, d\nu_s \\ z^\eta_{t\rho}(t) = \rho \end{cases}$$

ou ν_s est un wiener scalaire, indépendant de w_s, et on pose

$$(3.12) \qquad \tau^\eta_{t\rho} = \mathrm{Inf}.(s \in [t,T],\ z^\eta_{t\rho}(s) \notin]o,h[).$$

Le problème pénalisé régularisé sera défini par

$$(3.13) \qquad J^{\varepsilon\eta}_{tx\rho}(v) = E\left\{\int_t^{\tau^\eta_{t\rho}\Lambda T}(f+\frac{1}{\varepsilon}v\Psi)(s,y_{tx}(s),z_{t\rho}(s))e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v(\lambda)d\lambda}\right\}$$

pour v processus adapté à $\mathcal{F}_t$, à valeurs dans $[o,1]$, et

$$(3.14) \qquad u^\eta_\varepsilon(t,x,\rho) = \mathop{\mathrm{Inf}}_{v} J^{\varepsilon\eta}_{tx\rho}(v)\ .$$

Les résultats de BENSOUSSAN & LIONS [11], donnent: u^η_ε est l'unique solution de

$$
(3.15)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_\varepsilon^\eta}{\partial t} - \dfrac{\partial u_\varepsilon^\eta}{\partial \rho} - \dfrac{\eta^2}{2}\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^\eta}{\partial \rho^2} + A u_\varepsilon^\eta + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon^\eta - \Psi)^+ = f , \\ u_\varepsilon^\eta(t,x,o) = u_\varepsilon^\eta(t,x,h) = 0 , \\ u_\varepsilon^\eta(T,x,\rho) = 0 , \end{cases}
$$

$$
(3.16)\quad u_\varepsilon^\eta, \frac{\partial u_\varepsilon^\eta}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 u_\varepsilon^\eta}{\partial \rho^2}, \frac{\partial u_\varepsilon^\eta}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u_\varepsilon^\eta}{\partial x_i \partial x_j} \in L^{p.\gamma} .
$$

ou $L^{p,\gamma}$ est l'espace L^p, sur $[o,T] \times R^d \times [o,h]$ avec un poids $e^{-\gamma|x|}$ en x.

On va démontrer maintenant :

<u>Lemme IV.3.1</u>.

<u>Sous les hypothèses du théorème IV.3.1</u>.

(i) $u_\varepsilon^\eta \to u_\varepsilon$ <u>en tout point de</u> $[o,T] \times R^d \times]o,h]$

(ii) $u_\varepsilon^\eta \to u_\varepsilon$ <u>dans</u> $L^2(0,T;V_1)$ <u>faible et</u> u_ε <u>est l'unique solution de l'équation</u>

$$
(3.17)\quad \begin{cases} - L u_\varepsilon + A u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f , \\ u_\varepsilon(t,x,h) = 0 , \\ u_\varepsilon(T,x,\rho) = 0 , \\ u_\varepsilon \in L^2(0,T;V_1), \ L u_\varepsilon \in L^2(0,T,H_1) . \end{cases}
$$

<u>Démonstration du lemme IV.3.1</u>.

Il est démontré dans BENSOUSSAN - LIONS [13], que

$$
(3.18)\quad \tau_{t\rho}^\eta \to \tau_{t\rho} \quad \text{ps.} \quad \forall \rho \in]o,h] \quad \forall t \in [o,T]
$$

Cette convergence étant naturellement uniforme par rapport à v puisque $z_{t\rho}^\eta$ et $z_{t\rho}$ ne dépendent pas du contrôle v.

On a de plus

$$(3.19) \qquad E \sup_{t\leq s\leq T} |z^{\eta}_{t\rho}(s) - z_{t\rho}(s)|^2 \leq C.\eta^2$$

C indépendante de t, ($t \in [o,T]$), ρ.

On a

$$|J^{\varepsilon\eta}_{tx\rho}(u)-J^{\varepsilon}_{tx\rho}(v)| \leq E\int_t^{T\Lambda\tau^{\eta}_{t\rho}\Lambda\tau_{t\rho}} \frac{1}{\varepsilon}v|\Psi(z^{\eta}_{t\rho}(s))-\Psi(z_{t\rho})|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v d\lambda} ds$$

$$+ E\int_{T\Lambda\tau^{\eta}_{t\rho}\Lambda\tau_{t\rho}}^{\tau^{\eta}_{t\rho}\Lambda T} |f+\frac{1}{\varepsilon}v\Psi|(z^{\eta}_{t\rho})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v(\lambda)d\lambda} ds$$

$$+ E\int_{T\Lambda\tau^{\eta}_{t\rho}\Lambda\tau_{t\rho}}^{\tau_{t\rho}\Lambda T} |f+\frac{1}{\varepsilon}v\Psi|(z_{t\rho})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s v(\lambda)d\lambda} ds.$$

En utilisant (3.19) on a

$$P(\sup_{t\leq s\leq T} |z^{\eta}_{t\rho}(s) - z_{t\rho}(s)| \geq \delta) \leq \frac{C\eta^2}{\delta^2} .$$

On prend $\delta = \eta^{\frac{1}{2}}$, et on utilise le fait que $\Psi(t,x,\rho)$ est uniformément continue sur tout compact, et de plus

$$P(\sup_{t\leq s\leq T} |y_{tx}(s) - x|)\leq \frac{C'}{R^2} ,$$

d'où, en désignant par $\beta_R(\delta)$ le module de continuité de Ψ sur $[o,T] \times \{x', |x'-x| \leq R\} \times [o,h]$ on a

$$|J^{\varepsilon\eta}_{tx\rho}(v)-J^{\varepsilon}_{tx\rho}(v)| \leq C_1\{\beta_R(\eta^{\frac{1}{2}})+\eta+\frac{C'}{R^2}\}$$

$$+ C_2\, E|\tau^{\eta}_{t\rho} - \tau_{t\rho}| .$$

Cette estimation étant uniforme en v, on a la même inégalité pour $|u^{\eta}_{\varepsilon}-u_{\varepsilon}|$, on fait alors tendre η vers 0 puis $R \nearrow +\infty$ pour obtenir (i) du lemme.

Pour démontrer (ii) on multiplie (3.15) par u_ε^η pour obtenir

$$(3.20)\qquad \begin{cases} |u_\varepsilon^\eta|_{L^\infty(0,T;H_1)} \leq \text{constante} \ , \\ \dfrac{\eta^2}{2}\left|\dfrac{\partial u_\varepsilon^\eta}{\partial\rho}\right|^2_{L^2(0,T;H)} + \alpha\| u_\varepsilon^\eta\|^2_{L^2(0,T;V_1)} \leq \text{constante} \ . \end{cases}$$

Donc, compte tenu de (i), et par passage à une sous suite

$$u_\varepsilon^\eta \to u_\varepsilon \text{ dans } L^2(0,T;V_1) \text{ faible quand } \varepsilon \downarrow 0$$

et (i) donne aussi $u_\varepsilon^\eta \to u_\varepsilon$ dans $L^2(0,T;H_1)$ fort.

En passant à la limite sur (3.15) on obtient sans difficulté

$$(3.21)\qquad - Lu_\varepsilon + Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f$$

au sens des distributions.

Ce qui donne d'ailleurs

$$Lu_\varepsilon \in L^2(0,T;V_1').$$

Comme (i) donne

$$u_\varepsilon(t,x,h) = 0 \ ,$$

$$u_\varepsilon(T) = 0 \ ,$$

on obtient que u_ε est solution du problème

$$(3.22)\qquad \left| \begin{array}{l} - Lu_\varepsilon + Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f \ , \\ u_\varepsilon(t,x,h) = 0 \ , \ u_\varepsilon(T,x,\rho) = 0 \ , \\ u_\varepsilon \in L^2(0,T;V_1) \ , \ \ Lu_\varepsilon \in L^2(0,T;V_1') \ . \end{array} \right.$$

dont on vérifie directement qu'il a une solution unique (cf. LIONS [41]).

Cette solution vérifie de plus

$$Lu_\varepsilon \in L^2(0,T;H_1).$$

Vérifions brièvement ce point quand

$$A\varphi = -\sigma^2\Delta\varphi + \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

(pour simplifier les calculs).

On multiplie l'équation (3.22) par $- Lu_\varepsilon$

$$|Lu_\varepsilon|^2 + \sum_i \int_{t\times\rho}\iint \sigma^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(-Lu_\varepsilon)e^{-2\gamma|x|}dxd\rho dt$$

$$+ \sum_i \iiint \beta_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(-Lu_\varepsilon)e^{-2\gamma|x|}dxd\rho dt$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon-\Psi)^+, - Lu_\varepsilon) = (f,-Lu_\varepsilon) ,$$

avec $\beta_i = a_i - 2\gamma\frac{x_i}{|x|}\sigma^2$ (cf. (3.7)).

Examinons le second terme, qui se divise en deux

$$x_1 = \sum_i \int_{t\times\rho} \sigma^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right) e^{-2\gamma|x|}dxd\rho dt ,$$

$$x_1 = \sum_i \int_{t\times\rho} \sigma^2\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2\right) e^{-2\gamma|x|}dxd\rho dt$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma^2\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{t=T} + \frac{1}{2}\sigma^2\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{t=0} = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{t=0} ,$$

$\Rightarrow$ $x_1 \geq 0$.

$$x_2 = \sum_i \int_{t\times\rho} \sigma^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho}\right) e^{-2\gamma|x|}dxd\rho dt ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\sigma^2\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{\rho=h} + \frac{1}{2}\sigma^2\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{\rho=0} = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^2_{\rho=0}$$

$\Rightarrow$ $x_2 \geq 0$.

d'ou

$$|Lu_\varepsilon|^2 \leq (\varphi_\varepsilon \, , -Lu_\varepsilon)$$

où

$$\varphi_\varepsilon = -\sum_i \beta_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ + f \in L^2(0,T;H_1),$$

puisque $u_\varepsilon \in L^2(0,T;V_1)$, d'où

$$|Lu_\varepsilon|_{L^2(0,T;H_1)} \leq |\varphi_\varepsilon|_{L^2(0,T,H_1)} .$$

Bien entendu, le calcul précédent est quelque peu formel mais peut être justifié (longuement) en obtenant ces estimations sur les approximations de Galerkin de u_ε .

∎

<u>Démonstration du théorème IV.3.1.</u> (suite).

Soit $w_o \leq \Psi$, $w_o \in L^2(0,T;V_1)$, $Lw_o \in L^2(0,T;H_1)$,

$$\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - w_o \, ,$$
$$\tilde{\Psi} = \Psi - w_o \geq 0 \, .$$

On a

$$(3.23) \qquad \left|\begin{array}{l} -L\tilde{u}_\varepsilon + A\tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\Psi})^+ = \tilde{f}, \\ \tilde{u}_\varepsilon(t,x,h) = -w_o(t,x,h) \, , \\ \tilde{u}_\varepsilon(T,x,\rho) = -w_o(T,x,\rho) \, , \\ \tilde{f} = f + Lw_o - Aw_o \in L^2(0,T;V_1'). \end{array}\right.$$

On multiplie (3.23) par $\tilde{u}_\varepsilon$, et on utilise le fait que

$$(\frac{1}{\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\Psi})^+, \tilde{u}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}((\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\Psi})^+ \, , \tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\Psi}) + \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\Psi}, (\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{\Psi})^+) \geq 0$$

car $\tilde{\Psi} \geq 0$.

On obtient alors, en utilisant (3.8)',

(3.24) $\qquad u_\varepsilon$ borné dans $L^2(0,T;V_1)$.

Soit alors

$$v \leq \Psi \ , \ v \in L^2(0,T;V_1), \ Lv \in L^2(0,T;H_1),$$

on a

$$\int_0^T (L(u_\varepsilon - v), v-u_\varepsilon)dt + \int_0^T (-Lv, v-u_\varepsilon)dt$$
$$+ \int_0^T a_1(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon)dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ((u_\varepsilon - \Psi)^+, v-u_\varepsilon)dt$$
$$= \int_0^T (f, v-u_\varepsilon)dt$$

Comme $u_\varepsilon \to u$ uniformément, sur tout compact, on a $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(0,T;V_1)$ (par (3.24)), on obtient alors de façon classique les inéquations du théorème.

Montrons que u est solution maximum (ceci ne sera d'ailleurs pas utilisé ensuite, car on refera la démonstration pour les I.Q.V).

On sait déjà que $u_\varepsilon \geq u$, et $u_\varepsilon \downarrow$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. Soit w une solution quelconque de l'I.V. On reprend la méthode de MIGNOT - PUEL [49].

On pose $z = w - u_\varepsilon$ on a

$$\int_0^T (-Lv, v-z)dt + \int_0^T a_1(z, v-z)dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\beta(u_\varepsilon), v-z)dt$$
$$+ \frac{1}{2}|v(T)|^2 + \frac{1}{2}|v(h)|^2 \geq 0$$

$\forall\, v \leq \Psi - u_\varepsilon$, $v \in L^2(0,T;V_1)$, $Lv \in L^2(0,T,H_1)$.

On pose $v = v_0 - \mu\theta$, où

(3.25)
$$\begin{cases} v_0 \leq \Psi - u_\varepsilon, \ v_0 \in L^2(0,T;V_1), \ Lv_0 \in L^2(0,T;H_1), \\ \theta \geq 0, \ L\theta \in L^2(0,T;H_1), \ \theta \in L^2(0,T;V_1), \\ \theta_{t=0} = \theta|_{\rho=0} = 0 \quad . \end{cases}$$

En prenant $v = v_o - \mu\theta$, et en faisant tendre $\mu \uparrow +\infty$, on a

$$\int_o^T (L\theta, z)dt + \int_o^T a_1(z,\theta) - \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon),\theta)dt \leq 0 \quad ({}^1). \tag{3.26}$$

On prend alors $\theta = \theta_\eta$ défini par

$$\begin{cases} \eta\, L\theta_\eta + \theta_\eta = z^+, \\ \theta_\eta\Big|_{t=0} = \theta_\eta\Big|_{\rho=0} = 0 , \end{cases} \tag{3.27}$$

θ_η vérifie (3.25) et

$$\theta_\eta \to z^+ \text{ dans } L^2(0,T;V_1) \text{ faible},$$

d'où

$$\int_o^T a_1(z^+,z^+)dt \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon),z^+)dt$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon) - \beta(w),\ z^+)dt ,$$

car $\beta(w) = 0$, soit

$$\int_o^T a_1(z^+,z^+)dt \leq 0 \quad \text{donc } z^+ = 0 .$$

∎

IV.3.2. Problème "non homogène".

On aura dans la suite à considérer le problème modèle précédent avec un coût non nul au bord $\rho=h$.

(1) on a noté $\beta(u_\varepsilon) = (u_\varepsilon - \Psi)^+$.

On reprend les hypothèses du §. IV.3.1 avec de plus la donnée de

(3.28) $\qquad \bar{u}(t,x)$ continue bornée sur $[0,T] \times R^d$, ≥ 0 [1]

telle que

(3.29) $\qquad \Psi(t,x,h) \geq \bar{u}(t,x),$

(3.30) $\qquad \bar{u}(T,x) = 0 .$

Le problème à étudier est alors de minimiser

(3.31)
$$J_{tx\rho}(\tau) = E\left\{\int_t^{\tau\Lambda\tau_{t\rho}\Lambda T} f(s,\bar{y}_{tx}(s))ds + \chi_{\tau<\tau_{t\rho}\Lambda T}\,\Psi(\tau,\bar{y}_{tx}(\tau),z_{t\rho}(\tau))\right.$$
$$\left. + \chi_{\tau \geq \tau_{t\rho}\Lambda T}\,\bar{u}(T_\Lambda\tau_{t\rho},\bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho}\Lambda T))\right\} .$$

et on pose

(3.32)
$$u(t,x,\rho) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J_{tx\rho}(\tau) .$$

Comme le cas d'un coût au bord seulement continu n'a pas été traité, on montrera ici comment on se ramène au cas homogène.

<u>Lemme IV.3.2.</u>

<u>Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.9) (3.1), (3.28) à (3.30), le temps d'arrêt</u>

(3.33)
$$\hat{\tau} = \operatorname{Inf}(s \in [t,\tau_{t\rho}\Lambda T],\ u(s,\bar{y}_{tx}(s),z_{t\rho}(s)) = \Psi(s,\bar{y}_{tx}(s),z_{t\rho}(s)))$$

<u>est optimal pour le problème (3.32).</u>

---

[1] Ceci n'a rien d'essentiel.

<u>De plus</u> u_ε <u>converge vers u uniformément sur tout compact.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit $\bar{u}^m$ une suite de fonctions de $C_b^{1,2}([o,T] \times R^d)$, telles que

$$\bar{u}^m \leq \bar{u} \quad , \quad \| \bar{u}^m \|_{C_b^o} \leq c_1$$

et $\bar{u}^m \to \bar{u}$ uniformément sur tout compact.

On note

$$(3.34) \qquad J^m_{tx\rho}(\tau) = E \int_t^{\tau \wedge \tau_{t\rho} \wedge T} f(\bar{y}_{tx}(s))ds + \chi_{\tau < \tau_{t\rho} \wedge T} \Psi(\tau, \bar{y}_{tx}(\tau), z_{t\rho}(\tau))$$

$$+ \chi_{\tau \geq \tau_{t\rho} \wedge T} \; \bar{u}^m(\tau_{t\rho} \wedge T, \bar{y}_{tx}(\tau_{t\rho} \wedge T)) \; .$$

On a encore $\Psi(t,x,h) \geq \bar{u}^m(t,x)$.

Soit

$$(3.35) \qquad u^m(t,x,\rho) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J^m_{tx\rho}(\tau)$$

et u^m_ε le coût optimal du problème pénalisé correspondant.

Posons

$$D = \{\omega ; \sup_{s \leq t \leq T} |y_{sx}(t) - x| > R\} \; .$$

On a $P(D) \leq \frac{c_T}{R^2}$ uniformément en s, x.

Soit $x \in K$ compact, et

$$\tilde{K} = \{ y = x + z \quad x \in K \quad |z| \leq R\} \; .$$

On en déduit facilement

$$(3.36) \qquad |J^m_{tx\rho}(\tau) - J_{tx\rho}(\tau)| \leq \| \bar{u}^m - \bar{u} \|_{\tilde{K}} + \frac{C_T}{R^2} (c_1 + \| \bar{u} \|)$$

$$\forall \; (t,x,\rho) \in [o,T] \times K \times [o,h]$$

(Si l'on note

$$\|\bar{u}^m-\bar{u}\|_{\tilde{K}} = \sup_{t,x \in [o,T]\times\tilde{K}} |\bar{u}^m(t,x) - \bar{u}(t,x)|).$$

Il en résulte

(3.37) $$\|u^m-u\|_{[o,T]\times K\times[o,h]} \leq \|\bar{u}^m-\bar{u}\|_{\tilde{K}} + \frac{c_T}{R^2}(c_1+\|\bar{u}\|),$$

de même

(3.38) $$\|u^m_\varepsilon-u_\varepsilon\|_{[o,T]\times K\times[o,h]} \leq \|\bar{u}^m-\bar{u}\|_{\tilde{K}} + \frac{c_T}{R^2}(c_1+\|\bar{u}\|).$$

Par ailleurs, la régularité de $\bar{u}^m$ permet d'écrire

$$E\,\bar{u}^m(\tau_\Lambda T_\Lambda \tau_{t\rho}, \bar{y}_{tx}(\tau_\Lambda \tau_{t\rho}\Lambda T)) = \bar{u}^m(t,x)$$
$$+ E\int_t^{\tau_\Lambda \tau_{t\rho}\Lambda T}\left(\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial t} - A\bar{u}^m\right)ds .$$

On pose $$g^m = -\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial t} + A\bar{u}^m .$$

On a $g^m \in C^o_b([o,T]\times R^d)$ et $J^m_{tx\rho}(\tau)$ s'écrit

(3.39) $$J^m_{tx\rho}(\tau) = \bar{u}^m(t,x) + E\int_t^{\tau_\Lambda \tau_{t\rho}\Lambda T}(f-g^m)ds+\chi_{\tau<\tau_{t\rho}\Lambda T}(\Psi-\bar{u}^m).$$

Si l'on pose $\hat{\Psi}^m = \Psi-\bar{u}^m$, $f^m = f-g^m$, on est dans le cadre du §. IV.3.1 ($\Psi-\bar{u}^m \geq 0$ en $\rho = h$).

On a donc en particulier

(3.40) $u^m_\varepsilon \to u^m$ uniformément sur tout compact quand $\varepsilon \searrow 0$.

En rassemblant (3.36),(3.37),(3.38) on a, si

$$\|u_\varepsilon-u\|_K = \sup_{t,x,\rho \in [o,T]\times K\times[o,h]} |u_\varepsilon(t,x,\rho)-u(t,x,\rho)|,$$

$$\| u_\varepsilon - u \|_K \leq \| u_\varepsilon - u_\varepsilon^m \|_K + \| u_\varepsilon^m - u^m \|_K + \| u^m - u \|_K$$

d'où

$$\| u_\varepsilon - u \|_K \leq 2 [\| \bar{u}^m - \bar{u} \|_{\tilde{K}} + \frac{C_T}{R^2} (c_1 + \| \bar{u} \|)] + \| u_\varepsilon^m - u^m \|_K . \tag{3.41}$$

En passant à la limite en ε puis en m, puis en $R \uparrow \infty$, on obtient le résultat :

$$u_\varepsilon \to u \text{ uniformément sur tout compact.}$$

(De plus u_ε est déjà continue comme limite de u_ε^m). On a alors tout ce qu'il faut pour démontrer l'optimalité de $\hat{\tau}$ comme au § IV.3.1.

■

Théorème IV.3.2.

Sous les hypothèses (1.1),(1.2), (1.9), (3.2), (3.8), (3.28) à (3.30), u est solution maximum de l'inéquation variationnelle,

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T (Lv, v-u)dt + \int_0^T a_1(u, v-u)dt + \frac{1}{2} |v(T)|^2 \\ & \qquad + \frac{1}{2} |v(h) - \bar{u}|^2 \geq \int_0^T (f, v-u)dt , \\ & \forall v \leq \Psi , \\ & v \in L^2(0,T;V_1), \quad Lv \in L^2(0,T;H_1) , \\ & u \leq \Psi , \\ & u \in L^2(0,T;V_1) . \end{aligned} \right. \tag{3.42}$$

De plus u est continue.

Démonstration.

La régularité de $\bar{u}^m$ permettant d'effectuer une translation, les résultats du §. IV.3.1. donnent

$$(3.43)\qquad \begin{cases} -Lu_\varepsilon^m + Au_\varepsilon^m + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon^m - \Psi)^+ = f, \\ u_\varepsilon^m(t,x,h) = \bar{u}^m(t,x), \\ u_\varepsilon^m(T,x,\rho) = \bar{u}^m(T,x). \end{cases}$$

En procédant comme au Théorème IV.3.1, on obtient

$$(3.44)\qquad \| u_\varepsilon^m \|_{L^2(0,T;V_1)} \le C_1 \text{ indépendant de m, } \varepsilon$$

et

$$(3.45).\qquad |Lu_\varepsilon^m|_{L^2(0,T;H_1)} \le c_2 \text{ indépendant de m } (\varepsilon \text{ fixé}).$$

On peut alors passer à la limite dans (3.43) par rapport à m pour obtenir

$$(3.46)\qquad \begin{cases} -Lu_\varepsilon + Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Psi)^+ = f, \\ u_\varepsilon(t,x,h) = \bar{u}(t,x), \\ u_\varepsilon(T,x,\rho) = 0. \end{cases}$$

En réalisant (3.44), on passe à la limite en ε dans (3.46) comme au théorème IV.3.1.

La démonstration de la maximalité s'effectue également comme au §. IV.3.1.

■

Remarque IV.3.1.

On remarquera que l'hypothèse (3.8) n'intervient que pour les inéquations, jamais pour l'existence d'un temps d'arrêt optimal ou pour la continuité du coût optimal.

■

Remarque IV.3.2.

Dans u_1^n interviendra la variable ξ mais ce n'est qu'un paramètre dans les problèmes approchés et à quelques modifications de notations près les résultats de cette section s'appliquent à u_1^n.

■

IV.4. INEQUATIONS QUASI VARIATIONNELLES.

On introduit maintenant quelques notations

$$H = \{v \mid v\, e^{-\gamma|x|} \in L^2(R^d)\} \;, \quad \gamma > 0 ,$$

$$V = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H,\ i = 1, d\} \;.$$

Pour u, v $\in$ V, on définit

$$a_o(u,v) = \sum_{ij} \int_{R^d} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} e^{-2\gamma|x|} dx$$

$$+ \sum_{ij} \int_{R^d} (a_j - 2\gamma \frac{x_i}{|x|} a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, e^{-2\gamma|x|} dx$$

ou a_{ij}, a_j sont définis en (3.6),

$$H_1 = \{v \mid v\, e^{-\gamma|x|} \in L^2(R^d \times]o,h[\times \mathcal{O})\},$$

(ou $\mathcal{O}$ est l'ouvert borné servant à définir $U = \bar{\mathcal{O}}$).

$$V_1 = \{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H_1 \;, i=1,d\} \;.$$

Pour u, v $\in V_1$, on définit également comme au §. IV.3.1,

$$a_1(u,v) = \sum_{ij} \int_{R^d \times]o,h[\times \mathcal{O}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} e^{-2\gamma|x|} dx d\rho d\xi$$

$$+ \sum_{ij} \int (a_j - 2\gamma \frac{x_i}{|x|} a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, e^{-2\gamma|x|} dx d\rho d\xi \;.$$

On utilisera ici l'hypothèse déjà vue au §. IV.3.1.

$$(4.1) \qquad \sum_{ij} a_{ij}(t,x)\, \zeta^i \zeta^j \geq \alpha_1 |\zeta|^2 \;, \; \forall\, \zeta \in R^d \;.$$

qui permet de supposer toujours

$$(4.2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_o(u,u) \geq \alpha_2 \| u\|_V^2 \;, \quad \forall\, u \in V \;, \\ a_1(u,u) \geq \alpha_3 \| u\|_{V_1}^2 \;, \quad \forall\, u \in V_1 \;. \end{array} \right.$$

Les résultats de BENSOUSSAN - LIONS [9], [11], et ceux du §. IV.3 donnent le lemme suivant :

Lemme IV.4.1.

Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.9), (4.1), u_o^n, u_1^n sont solutions (maximum) des inéquations suivantes :

$$(4.3)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_o^T (-\frac{\partial v}{\partial t}, v-u_o^n)dt + \int_o^T a_o(u_o^n, v-u_o^n)dt + \tfrac{1}{2}|v(T)|^2 \\ \displaystyle\qquad\qquad \geq \int_o^T (f, v-u_o^n)dt \quad , \\ v \leq M_o\, u_1^{n-1} \quad , \\ v \in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \quad , \\ u_o^n \leq M_o\, u_1^{n-1} \quad , \\ u_o^n \in L^2(0,T;V) . \end{array}\right.$$

$$(4.4)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_o^T (-Lv, v-u_1^n)dt + \int_o^T a_1(u_1^n, v-u_1^n)dt + \tfrac{1}{2}|v(T)|^2 \\ \displaystyle\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}|v(h) - u_o^n(x+\xi)|^2 \geq \int_o^T (f, v-u_1^n)dt \quad , \\ v \leq M_1\, u_1^{n-1} , \\ v \in L^2(0,T;V_1),\ \ Lv \in L^2(0,T;H_1) , \\ u_1^n \leq M_1\, u_1^{n-1} \quad , \\ u_1^n \in L^2(0,T;V_1) \cap C_b^o([o,T] \times R^d \times [o,h] \times U) , \end{array}\right.$$

où l'on a noté

$$|v(h)-u_o^n(x+\xi)|^2 = \int_{]o,T[\times R^d \times \mathcal{O}} |v(t,x,h,\xi)-u_o^n(t,x+\xi)|^2 dt dx d\xi .$$

Démonstration.

(4.3) résulte d'une part de la continuité de $M_o u_1^{n-1}$, et d'autre part des résultats de BENSOUSSAN - LIONS [11]. (4.4) résulte du §. IV.3.2.

Il reste cependant à vérifier que

$$u_o^n(t,x+\xi) \leq M_1 \ u_1^{n-1}(t,x,h,\xi)$$

or on a $\qquad \tau_{th} = t \quad \Rightarrow$

$$M_1 u_1^{n-1}(t,x,h,\xi) = \operatorname*{Inf}_{\xi' \in U} [c(t,\xi')+u_1^{n-1}(t,x+\xi,0,\xi')]$$

et

$$u_o^n(t,x+\xi) \leq \operatorname*{Inf}_{\xi' \in U} [c(t,\xi')+u_1^{n-1}(t,x+\xi,0,\xi')]$$

par définition de $M_o \ u_1^{n-1}(t,x)$, donc on a bien la propriété désirée.

■

Théorème IV.4.1

Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.9), (5.1) , (u_o,u_1) est solution maximum du système

$$(4.5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T (-\frac{\partial v}{\partial t}, v-u_o)dt+\int_0^T a_o(u_o, v-u_o)dt+\tfrac{1}{2}|v(T)|^2 \\ \qquad\qquad\qquad \geq \displaystyle\int_0^T (f, v-u_o)dt\,, \\ v \leq M_o u_1\,, \\ v \in L^2(0,T;V),\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V')\,, \\ u_o \leq M_o u_1\,, \\ u_o \in L^2(0,T;V)\,. \end{cases}$$

$$(4.6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T (-Lv, v-u_1)dt+\int_0^T a_1(u_1, v-u_1)dt+\tfrac{1}{2}|v(T)|^2 \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}|v(h)-u_o(x+\xi)|^2 \geq \displaystyle\int_0^T (f, v-u_1)dt\,, \\ v \leq M_1 u_1\,, \\ v \in L^2(0,T;V_1),\quad Lv \in L^2(0,T;H_1)\,, \\ u_1 \leq M_1 u_1\,, \\ u_1 \in L^2(0,T;V_1)\ \cap C_b^o([o,T] \times R^d \times [o,h] \times \bar{\mathcal{O}})\,. \end{cases}$$

Démonstration.

Comme $(u_o^n, u_1^n) = (u_o, u_1)$ à partir d'un rang $N = 2[\frac{T}{h}]+1$, il est clair que $u_o \in L^2(0,T;V)$, $u_1 \in L^2(0,T;V_1)$ et que (u_o, u_1) est solution du système (4.5),(4.6). Il ne reste plus qu'à montrer que (u_o, u_1) est solution maximum.

(Mentionnons ici que dans le cas stationnaire, où la convergence n'a plus lieu en un nombre fini d'itérations, on passe à la limite sans difficulté dans V et V_1 à partir des estimations obtenues en prenant $v=0$ dans les inéquations vérifiées par (u_o^n, u_1^n), et en utilisant leur convergence uniforme vers (u_o, u_1) dans le terme de trace).

Pour montrer que (u_o, u_1) est solution maximum on prend (w_o, w_1) solution quelconque de (4.5), (4.6). On note $u_{\varepsilon o}^n$,

($u^n_{\varepsilon 1}$ resp.) la solution du problème pénalisé associé à u^n_o (resp. u^n_1), i.e. pour $n \geq 1$

$$(4.7)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u^n_{\varepsilon o}}{\partial t} + Au^n_{\varepsilon o} + \dfrac{1}{\varepsilon}(u^n_{\varepsilon o} - M_o u_1^{n-1})^+ = f, \\ u^n_{\varepsilon o}(T) = 0 . \end{cases}$$

$$(4.8)\qquad \begin{cases} -Lu^n_{\varepsilon 1} + Au^n_{\varepsilon 1} + \dfrac{1}{\varepsilon}(u^n_{\varepsilon 1} - Mu_1^{n-1})^+ = f, \\ u^n_{\varepsilon 1}(t,x,h,\xi) = u^n_o(t,x+\xi), \\ u^n_{\varepsilon 1}(T) = 0, \end{cases}$$

et pour n=0 on définit

$$(4.9)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u^o_o}{\partial t} + Au^o_o = f, \\ u^o_o(T) = 0, \end{cases}$$

$$(4.10)\qquad \begin{cases} -Lu^o_1 + Au^o_1 = f, \\ u^o_1(t,x,h,\xi) = u^o_o(t,x+\xi), \\ u^o_1(T,x,\rho,\xi) = 0 . \end{cases}$$

On montre d'abord $u^o_o \geq w_o$. On pose $z = w_o - u^o_o$ et on obtient

$$-\int_o^T (\frac{\partial w}{\partial t}, w-z)dt + \int_o^T a_o(z,w-z)dt + \tfrac{1}{2}|w(T)|^2 \geq 0,$$

$$(4.11)\qquad w \leq M_o w_1 - u^o_o , \; w \in L^2(0,T;V), \; w' \in L^2(0,T;V').$$

On prend maintenant v_o vérifiant (4.11) et

$$(4.12)\qquad \theta \geq 0 , \; \theta \in L^2(0,T;V) , \; \theta' \in L^2(0,T;V'), \; \theta(o) = 0,$$

et

$$w = v_o - \mu\theta,\ \mu > 0\ ,$$

donne

$$-\mu\left\{\int_o^T\left(\frac{\partial\theta}{\partial t},z\right)dt + \int_o^T a_o(z,\theta)dt\right\} + \tfrac{1}{2}|v_o(o)|^2 .$$

$$+\int_o^T\left(\frac{\partial v_o}{\partial t},z\right)dt + \int_o^T a_o(z,v_o-z)dt \geq 0\ ,$$

quand $\mu \to +\infty$ on obtient

$$\int_o^T\left(\frac{\partial\theta}{\partial t},z\right)dt + \int_o^T a_o(z,\theta)dt \leq 0\ , \tag{4.13}$$

On introduit θ_η tel que

$$\eta\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t} + \theta_\eta = z^+\ ,\quad \theta_\eta(o) = 0\ . \tag{4.14}$$

On a

$\theta_\eta \to z^+$ dans $L^2(0,T;V)$ faible et θ_η vérifie (5.12), d'autre part

$$\int_o^T\left(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z\right)dt = -\frac{1}{\eta}\int_o^T((z^+ - \theta_\eta),z^-)dt$$

$$+\int_o^T(\theta'_{\eta'} + \eta\theta'_\eta + \theta_\eta)dt$$

$$= \frac{1}{\eta}\int_o^T(\theta_\eta,z^-)dt + \eta\int_o^T|\theta'_\eta|^2\,dt$$

$$+\int_o^T\left(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}\ ,\ \theta_\eta\right)dt$$

dont le dernier terme s'écrit

$$\int_o^T\left(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}\ ,\theta_\eta\right)dt = \tfrac{1}{2}|\theta_\eta(T)|^2 - \tfrac{1}{2}|\theta_\eta(o)|^2 = \tfrac{1}{2}|\theta_\eta(T)|^2$$

finalement

$$\int_o^T\left(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}\ ,z\right)dt \geq 0\ .$$

Ce qui donne dans (4.13)

$$\int_0^T a_0(z,\theta_\eta)dt \leq 0$$

puis quand $\eta \to 0$

$$\int_0^T a_0(z^+,z^+)dt \leq 0 \quad \Rightarrow \quad z^+ = 0 \ .$$

On montre maintenant $u_1^o \geq w_1$.

Posant $\qquad z = w_1 - u_1^o$

$$\tilde{z}(h) = w_o(t,x+\xi) - u_o^o(t,x+\xi)$$

on remarque que $\tilde{z}(h) \leq 0$.

Comme précédemment, on a

$$-\int_0^T (Lw,w-z)dt + \int_0^T a_1(z,w-z)dt + \tfrac{1}{2}|w(T)|^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}|w(h) - \tilde{z}(h)|^2 \geq 0$$

(4.15) $\qquad w \leq M_1 w_1 - u_1^o,\ w \in L^2(0,T;V_1),\ Lw \in L^2(0,T;H_1)$.

On introduit $w = v_o - \mu\theta$, où v_o vérifie (4.15), et

(4.16) $$\left\{\begin{array}{l} \theta \geq 0,\ \theta \in L^2(0,T;V_1),\quad L\theta \in L^2(0,T;H_1)\ , \\ \\ \theta\Big|_{t=0} = \theta\Big|_{\rho=0} = 0\ , \end{array}\right.$$

ce qui donne quand $\mu \uparrow +\infty$

(4.17) $$\int_0^T (L\theta,z)dt + \int_0^T a_1(z,\theta)dt - (\theta,\tilde{z})_{\rho=h} \leq 0\ .$$

Comme $\theta \geq 0$ et $\tilde{z}(h) \geq 0$, on a

(4.18) $$\int_0^T (L\theta,z)dt + \int_0^T a_1(z,\theta)dt \leq 0\ .$$

On introduit maintenant θ_η solution de

$$(4.19)\qquad \begin{cases} \eta L\theta_\eta + \theta_\eta = z^+ \\ \theta_\eta\big|_{t=0} = \theta_\eta\big|_{\rho=0} = 0 \end{cases}$$

On a $\theta_\eta \to z^+$ dans $L^2(0,T;V_1)$ faible, et θ_η vérifie (4.16).
De plus

$$\int_0^T (L\theta_\eta, z)dt = \frac{1}{\eta}\int_0^T (\theta_\eta, z^-)dt + \int_0^T |L\theta_\eta|^2 dt + \int_0^T (L\theta_\eta, \theta_\eta)dt ,$$

et

$$\int_0^T (L\theta_\eta, \theta_\eta)dt = \tfrac{1}{2}|\theta_\eta|^2(T) + \tfrac{1}{2}|\theta_\eta|^2(h) .$$

Donc

$$\int_0^T (L\theta_\eta, z)dt \geq 0,$$

ce qui implique

$$\int_0^T a_1(z, \theta_\eta)dt \leq 0,$$

et quand $\eta \to 0$

$$\int_0^T a_1(z^+, z^+)dt \leq 0 \implies z^+ = 0 .$$

Supposons maintenant $u_1^{n-1} \geq w_1$, $u_o^{n-1} \geq w_o$, et démontrons que $u_{\varepsilon o}^n \geq w_o$ (cf.(4.7)).

On obtient comme précédemment si

$$z = w_o - u_{\varepsilon o}^n$$

$$\theta \geq 0,\ \theta(o) = 0,\ \theta \in L^2(0,T;V),\ \theta' \in L^2(0,T;V')$$

$$\int_0^T (\frac{\partial\theta}{\partial t}, z)dt + \int_0^T a_o(z,\theta)dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ((u_{\varepsilon o}^n - M_o u_1^{n-1})^+, \theta)dt \leq 0$$

En prenant $\theta = \theta_\eta$ solution de (4.14), on a après passage à la limite $\eta \to 0$,

$$\int_0^T a_0(z^+,z^+)dt \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ((u^n_{\varepsilon 0}-M_0u_1^{n-1})^+,z^+)dt$$

et comme $u_1^{n-1} \geq w_1$, $M_0u_1^{n-1} \geq M_0w_1 \geq w_0$

=>

$$\frac{1}{\varepsilon}((u^n_{\varepsilon 0}-M_0u_1^{n-1})^+ - (w_0-M_0u_1^{n-1})^+,z^+) \leq 0 \ .$$

où $(w_0-M_0u_1^{n-1})^+ = 0$.

Donc

$$\int_0^T a_0(z^+,z^+)dt \leq 0 \quad \Rightarrow \quad z^+ = 0 \ .$$

=>

$u^n_{\varepsilon 0} \geq w_0$; en passant à la limite en ε on obtient $u^n_0 \geq w_0$,

On démontre de même $u^n_{\varepsilon 1} \geq w_1$

d'où $u^n_1 \geq w_1$. La récurrence donne donc

$$u^n_0 \geq w_0 \quad , \quad u^n_1 \geq w_1 \qquad \forall\ n$$

En passant à la limite, $n \uparrow \infty$, on obtient le résultat.

■

<u>Remarque IV.4.1.</u>

Le résultat précédent est une démonstration de l'existence d'une solution de système (4.5), (4.6) qui semble difficile à aborder directement en particulier du fait que M_0u_1 fait intervenir la trace en $\rho=0$, donc que la régularité $L^2(0,T;V)$ est insuffisante. C'est pourquoi on <u>doit</u> formuler les inéquations avec $u_1 \in C^0_b$ (où une régularité suffisante pour donner un sens à la trace). La situation est ici très différente du cas instantané.

■

Remarque IV.4.2.

Les résultats du théorème IV.4.1 montrent que $u_1(t,x,h,\xi) = u_o(t,x+\xi)$ ce qui n'est pas une conséquence du théorème IV.4.1 (sauf si l'on savait démontrer une régularité supplémentaire par rapport à ρ).

■

Remarque IV.4.3.

On peut également faire une démonstration directe de la continuité de (u_o,u_1), comme dans le cas instantané. cf. [58].

■

IV.5. CAS STATIONNAIRE.

On ne fera que mentionner l'analogue du résultat du §. précédent.

Les hypothèses sont celles de IV.1. avec maintenant des données y, σ, f, c indépendantes du temps et un taux d'actualisation $\alpha > 0$.

$$u_o(x) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}^o} E\left(\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(y_x(s))ds + \sum_{i \geq 1} e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^i)\right) \tag{5.1}$$

$$u_1(x,\rho,\xi) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}^1_\rho} E\left(\int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(y_{x\rho\xi}(s))ds + \sum_{i \geq 1} e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^i)\right) \tag{5.2}$$

D'après les résultats du chapitre III, on a l'existence d'un contrôle optimal et la continuité de (u_o, u_1).

Les méthodes des §. IV.3, IV.4 s'étendent ici et on obtient le résultat suivant ; en notant

$$M_o u_1(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(\xi) + u_1(x,0,\xi)] \tag{5.3}$$

$$M_1 u_1(x,\rho,\xi) = E\int_o^{h-\rho} e^{-\alpha s} f(\bar{y}_x(s))ds \tag{5.4}$$

$$+ \operatorname*{Inf}_{\xi' \in U} [c(\xi') + [e^{-\alpha(h-\rho)} u_1(\bar{y}_x(h-\rho)+\xi, h-\rho, \xi')] .$$

Théorème IV.5.1.

Sous les hypothèses du §. IV.1 (avec des données indépendantes du temps), (u_o, u_1) est solution maximum du système d'IQV.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_o(u_o, v-u_o) + \alpha(u_o, v-u_o) \geq (f, v-u_o), \\ v \leq M_o u_1, \\ v \in V, \\ u_o \in V, \\ u_o \leq M_o u_1 . \end{array} \right. \tag{5.5}$$

$$
(5.6)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^h \left(-\frac{\partial v}{\partial \rho}, v-u_1\right)d\rho + \int_0^h a_1(u_1, v-u_1)d\rho \\
\displaystyle\qquad + \alpha \int_0^h (u_1, v-u_1)d\rho + \tfrac{1}{2}|v(h)-u_0(x+\xi)|^2 \\
\displaystyle\qquad \geq \int_0^h (f, v-u_1)d\rho , \\
v \in L^2(0,h;V_1) , \quad \dfrac{\partial v}{\partial \rho} \in L^2(0,h;V_1') , \\
v \leq M_1 u_1 , \\
u_1 \in L^2(0,h;V_1) \cap C_b^0(R^d \times [0,h] \times U), \\
u_1 \leq M_1 u_1 ,
\end{array}
\right.
$$

où $V_1 = \{\varphi \mid \varphi : R^d \times U \to R,\ \varphi\, e^{-\gamma|x|},\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, e^{-\gamma|x|} \in L^2(R^d \times \mathcal{O})\}$.

■

Remarque IV.5.1.

On verra, dans le cas du retard aléatoire, un cas plus simple que le retard déterministe : c'est la situation où le retard est exponentiellement distribué. La variable ρ n'intervient plus dans ce cas et on peut obtenir l'unicité dans le problème stationnaire.

■

IV.6. AUTRES PROBLEMES.

On peut obtenir des résultats analogues aux précédents pour le cas d'un nombre <u>fini</u> fixé de décisions possibles entre τ^i et τ^i+h, et aussi pour les problèmes du type "remplacement" (comme au chapitre III). De même, les problèmes du type "démarrage de machines" (cf. le problème de démarrage de centrales thermiques, LEGUAY [37]), donnent lieu à des résultats similaires (c'était d'ailleurs la motivation première des problèmes avec "retards imbriqués").

Pour ce dernier type de problème, on verra d'ailleurs dans le cas instantané ou avec retard, des résultats plus généraux au chapitre VII.

Enfin, on montre sans difficulté supplémentaire le même type de résultat pour les diffusions comportant un terme de saut avec les hypothèses du §. I.7 (si l'on veut traiter le cas de solution forte, on peut le faire, exactement comme dans ce chapitre, avec des équations comportant un terme poissonnien cf. GIHMAN - SKOROHOD [32]).

■

V

CONTROLE IMPULSIONNEL INSTANTANE

On reprend ici l'exemple du Chapitre II section I.1 et les données seront les mêmes avec maintenant $h=0$. Malheureusement ceci va provoquer quelques difficultés techniques supplémentaires dans la construction du processus : elles sont dues au fait que les instants de saut (correspondant au contrôle) ne sont plus prévisibles en général.

Cependant on aboutit à des résultats aussi complets que dans le cas du retard grâce à une adaptation de la méthode de MENALDI [45] pour obtenir la convergence uniforme des solutions approchées u^n vers le coût optimal. Signalons aussi que la construction du processus contrôlé telle qu'elle est faite ici sera réutilisée pour le cas d'un retard alélatoire (puisque là non plus les instants de saut correspondant au contrôle ne seront pas prévisibles).

On démontrera également la convergence des problèmes avec retard vers le problème instantané.

V.I. NOTATIONS - HYPOTHESES - POSITION DU PROBLEME.

On rappelle que l'on se donne

(1.1) $\left\{ \begin{array}{l} X = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_1, \theta_t, x_t, P_x) \text{ processus de Markov sur } \Omega = D(o,\infty;E), \text{ E localement compact à base dénombrable, } \mathcal{F}_t \text{ tribus universellement complétées des tribus canoniques, et on suppose que X vérifie les hypothèses (1.2) à (1.5) de I.1.} \end{array} \right.$

D'autre part, on donne

(1.2) $\left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \quad \text{continue bornée sur E,} \\ c(x,\xi) \geq k > 0 \text{ défini sur } E \times U, \text{ U compact de E, continue bornée.} \end{array} \right.$

On ne peut pas refaire ici la construction du processus contrôlé comme au chapitre II ou III, (la difficulté est que l'on ne saurait pas montrer que $\tau(\varphi(\omega,\omega')) = \tau(\omega)$ dans la démonstration du Lemme II.2.1. cf. Annexe 1).

On note

(1.3) $\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \Omega \times \Omega \;, \;\dots,\; \Omega_n = (\Omega)^{n+1} \\ \mathcal{F}_t^1 = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t \;, \;\dots\; \mathcal{F}_t^n = (\mathcal{F}_t)^{\otimes(n+1)} \end{array} \right.$

et si $[\omega]_n$ désigne un élément de Ω_n,

(1.4) $$[\omega]_n = (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1}), \quad \omega_i \in \Omega \;,$$

on définit

(1.5) $$(\theta_{n,t}[\omega]_n)(s) = (\theta_t\,\omega_1(s),\dots,\theta_t\,\omega_{n+1}(s)),$$

et on note

(1.6) $$x_t^n([\omega]_n) = [x_t(\omega_1),\dots,x_t(\omega_{n+1})] = (\omega_1(t),\dots,\omega_{n+1}(t)).$$

On définit alors les <u>contrôles admissibles</u> :
on dira que v est un contrôle admissible ($v \in \mathcal{V}$), si $v = (\tau^i,\xi^i)$ $i \geq 1$ est une suite de temps d'arrêt et de variables aléatoires telles que

(1.7) τ^i est un temps d'arrêt par rapport à $\mathcal{F}_t^{i-1}$ $i \geq 1$ (en convenant de poser $\mathcal{F}_t^o = \mathcal{F}_t$), $\tau^{i+1} \geq \tau^i$, $\forall$ i ,

(1.8) ξ^i est une v.a. à valeurs dans U, $\mathcal{F}_{\tau^i}^{i-1}$ mesurable.

Le processus associé à $v \in \mathcal{V}$ sera défini comme suit.
Pour $y \in E$, on définit

(1.9) $$\varphi_y \in \Omega \ , \quad \varphi_y(t) = y \ , \quad \forall\ t \geq 0 \ ,$$

et on note

(1.10) ε_{φ_y} probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ concentrée sur φ_y .

Si $v = (\tau^i,\xi^i,\ i \geq 1)$, on pose

(1.11) $$\Pi_{\omega_1}^o = \begin{cases} \varepsilon_{\varphi_{x_{\tau^1(\omega_1)}}} \otimes P_{\xi^1(\omega_1)} & \text{si } \tau^1(\omega_1) < +\infty \\ P_x & \text{si } \tau^1(\omega_1) = +\infty . \end{cases}$$

On note également

(1.12) $$\mathcal{G}_{\tau^1} = \sigma\{\mathcal{F}_{\tau^1-}^1,\ \mathcal{F}_{\tau^1}^o \otimes \{\phi,\Omega\}\ \}$$

c'est une sous tribu de $\mathcal{F}_{\tau^1}^1$.

Compte tenu de la définition de ξ^1, τ^1, $\Pi^o_{\omega_1}(B).\chi_{\tau^1(\omega_1)<+\infty}$ est $(\Omega_t, \mathcal{G}_{\tau^1})$ mesurable $\forall B \in \mathcal{F}^1$.

On démontre alors en Annexe 2 que l'on peut construire une probabilité P^1_x sur $(\Omega_1, \mathcal{F}^1)$ vérifiant

$$(1.13) \qquad \begin{cases} P^1_x = P_x \otimes \varepsilon_{\varphi_y} \quad \text{sur } \mathcal{G}_{\tau^1} . \\ E^1_x[\chi_{\tau^1<+\infty} H.\ Z_o\theta_{1,\tau^1}] = E^1_x[\chi_{\tau^1<+\infty} H.E^{\Pi^o_{\omega_1}}(Z)] \end{cases}$$

$\forall$ H. $\mathcal{G}_{\tau^1}$ mesurable, Z $\mathcal{F}^1$ mesurable.

(où encore

$$P^1_x(\theta^{-1}_{1,\tau^1} B/\mathcal{G}_{\tau^1}) = (\varepsilon_{\varphi_{x_{\tau^1}}} \otimes P_{\xi^1})\ (B)$$

$$P_x \otimes \varepsilon_{\varphi_y} \quad \text{ps. sur } \{\tau^1 < +\infty\} \quad \forall B \in \mathcal{F}^1).$$

De plus on montre que le processus

$$(1.14) \qquad x_{\tau^1(\omega_1)+t}(\omega_2) \quad t \geq 0 \text{ adapté à } \mathcal{F}^1_{\tau^1+t} \text{ est}$$

$$\text{markovien (par rapport à } \mathcal{F}^1_{\tau^1+t},\ P^1_x),$$

et possède le même semi groupe que X (donc est fellerien).

On définit ensuite de proche en proche

$$(1.15) \qquad \mathcal{G}_{\tau^n} = \sigma\{\mathcal{F}^n_{\tau^{n-}},\ \mathcal{F}^{n-1}_{\tau^n} \otimes \{\phi,\Omega\}\ \}$$

$$(1.16) \qquad \begin{cases} P^n_x = P^{n-1}_x \otimes \varepsilon_{\varphi_y} \quad \text{sur } \mathcal{G}_{\tau^n} \\ P^n_x(\theta^{-1}_{n,\tau^n}B|\mathcal{G}_{\tau^n}) = \varepsilon_{\varphi_{x^1_{\tau^n}(\omega_1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{\varphi_{x^n_{\tau^n}(\omega_n)}} \otimes P_{\xi^n([\omega]_{n-1})}(B). \end{cases}$$

où

$$[\omega]_{n-1} = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega_{n-1} \ , \quad B \in \mathfrak{F} \ ,$$

et où la second égalité a lieu ps. pour $P_x^{n-1} \otimes \varepsilon_{\varphi_y}$ sur $\{\tau^n < +\infty\}$.

On remarquera que ps.pour P_x^{n-1}, $x^i_{\tau^n}(\omega_i) = x^i_{\tau^i}(\omega_i)$ $i=1, n-1$.

Dans ce qui précède, le choix de $y \in E$ est arbitraire. Intuitivement la construction s'interprète de la façon suivante :

> de 0 à τ^1 on s'intéresse à $x_t(\omega_1) = x^1_t(\omega_1)$,
> à τ^1 on "arrête" $x^1_t(\omega_1)$ et on s'intéresse à
> $x^2_{\tau^1(\omega_1)+t}(\omega_2)$, $t \geq 0$ et ainsi de suite,

chaque partie du processus contrôlé étant définie sur une nouvelle copie de l'espace de probabilité initial.

On pose, pour $\omega = (\omega_1,\omega_2\dots) \in \Omega^N$,

$$y_t(\omega) = x^{k+1}_t(\omega_{k+1}) \quad \text{si } t \in [\tau^k,\tau^{k+1}[\tag{1.17}$$

en convenant que $\tau^o = 0$.

On peut alors définir <u>le critère</u> : posant $P^o_x = P_x$

$$J^N_x(v) = E^N_x \left\{ \int_o^{\tau^{N+1}} e^{-\alpha t} f(y_t)dt + \sum_{n=1}^{N+1} c(x^n_{\tau^n},\xi^n)\, e^{-\alpha\tau^n} \right\} , \tag{1.18}$$

et on pose

$$J_x(v) = \lim_{N\to+\infty} J^N_x(v) \ , \tag{1.19}$$

(eventuellement $+\infty$, car $J^N_x(v) \uparrow$ quand $N \uparrow$) et

$$u(x) = \inf_{v\in\mathcal{V}} J_x(v) \ . \tag{1.20}$$

V.2. CARACTERISATION DU COUT OPTIMAL.

La technique est la même que celle du §. II.2. avec quelques différences de notations dues à la construction du processus contrôlé.

On définit la suite de fonctions

(2.1) $$u^o(x) = E_x \int_o^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds = R_\alpha f$$

ou R_α est la résolvante de $\Phi(t)$.

(2.2) $$u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \int_o^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} M u^{n-1}(x_\tau) \ , \ n \geq 1$$

où

(2.3) $$M u^{n-1}(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(x,\xi) + u^{n-1}(\xi)]$$

Ces différents problèmes d'arrêt sont tous formulés sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Lemme V.2.1.

Sous les hypothèses (1.1), (1.2),

(i) $0 \leq u^{n+1} \leq u^n \leq u^o \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$,

(ii) $u^n \in C \quad \forall n$.

Démonstration.

elle est identique à celle du Lemme II.2.1., en utilisant les résultats sur les problèmes d'arrêt optimal.

∎

Lemme V.2.2.

Sous les hypothèses (1.1), (1.2), $u^n \geq u$.

Démonstration.

Soit $\tau_n^1 = \mathrm{Inf}(s \geq 0,\ u^n(x_s) = Mu^{n-1}(x_s))$, c'est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, qui est optimal pour u^n

$$u^n(x) = E_x\left(\int_0^{\tau_n^1} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau_n^1} Mu^{n-1}(x_{\tau_n^1})\right) . \tag{2.4}$$

On note $\hat{\xi}_n(x)$ un élément réalisant le minimum de $c(x,\xi) + u^{n-1}(\xi)$ sur U, mesurable en x, et on pose

$$\xi_n^1 = \hat{\xi}_n(x_{\tau_n^1}) . \tag{2.5}$$

D'où

$$u^n(x) = E_x\left\{\int_0^{\tau_n^1} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau_n^1} c(x_{\tau_n^1},\xi_n^1) + e^{-\alpha\tau_n^1} u^{n-1}(\xi_n^1)\right\} . \tag{2.6}$$

On introduit alors $\Omega_1 = \Omega \times \Omega$, $\mathcal{F}_t^1 = (\mathcal{F}_t)^{\otimes 2}$, etc, comme en (1.3), et pour y quelconque, mais fixé dans la suite, $y \in E$. On construit

$$\left\{\begin{array}{l} P_x^1 = P_x \otimes \varepsilon_{\varphi_y} \quad \text{sur} \quad \mathcal{G}_{\tau_n^1} \quad (\text{cf. } (1.12)). \\ P_x^1(\theta_{1,\tau_n^1}^{-1} B | \mathcal{G}_{\tau_n^1}) = (\varepsilon_{\varphi_{x_{\tau_n^1}}} \otimes P_{\xi_n^1})\ (B) \end{array}\right. \tag{2.7}$$

P_x^1 ps. sur $\{\tau_n^1 < +\infty\}$, $\forall\ B \in \mathcal{F}^1$.

On pose alors

$$\tilde{\tau}^2 = \mathrm{Inf}(t \geq 0,\ u^{n-1}(x_t) = Mu^{n-2}(x_t)) \tag{2.8}$$

et

$$\tau_n^2(\omega_1,\omega_2) = \tau_n^1(\omega_1) + \tilde{\tau}^2(\omega_2) \circ \theta_{1,\tau_n^1(\omega_1)} . \tag{2.9}$$

Comme on peut toujours considérer

$$\tau_n^1(\omega_1,\omega_2) = \tau_n^1(\omega_1)$$
$$\tilde{\tau}^2(\omega_1,\omega_2) = \tilde{\tau}^2(\omega_2) ,$$

comme deux temps d'arrêt définis sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_t^1)$, on peut utiliser les résultats de COURREGE - PRIOURET [19], et donc τ_n^2 est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t^1$. Alors, de la même façon qu'au lemme II.2.2 on a, (parce que $\tilde{\tau}^2$ est optimal pour le problème d'arrêt u^{n-1}),

$$u^{n-1}(\xi_n^1)\, e^{-\alpha\tau_n^1} = E_x^1\left\{\int_{\tau_n^1}^{\tau_n^2} e^{-\alpha s} f(x_s^2)ds + e^{-\alpha\tau_n^2} Mu^{n-2} | \mathcal{G}_{\tau_n^1}\right\}. \tag{2.10}$$

On obtient aisni par récurrence, comme au lemme II.2.3

$$u^n(x) = E_x^k\left\{\int_0^{\tau_n^{k+1}} e^{-\alpha s} f(y_s)ds + \sum_{j=1}^{k+1} c(x^j_{\tau_n^j}, \xi_n^i) e^{-\alpha\tau_n^i} + e^{-\alpha\tau_n^{k+1}} u^{n-k-1}(\xi_n^{k+1})\right\}, \tag{2.11}$$

où

$$\tau_n^{i+1} = \mathrm{Inf}(s \geq \tau_n^i \,,\; u^{n-i}(x_s^{i+1}(\omega_{i+1})) = Mu^{n-i-1}) \,,$$

$$y_s = x_s^{i+1}(\omega_{i+1}) \qquad s \in [\tau_n^i, \tau_n^{i+1}[\,.$$

On prend $k = n-1$, et on remarque que

$$e^{-\alpha\tau_n^n}\, u^o(\xi_n^r) = E_x^n\left[\int_{\tau_n^n}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s^{n+1}(\omega_{n+1}))ds | \mathcal{G}_{\tau_n^n}\right].$$

En effet le dernier terme s'écrit

$$X = E^n[Z_o\, \theta_{n,\tau_n^n} \cdot e^{-\alpha\tau_n^n} | \mathcal{G}_{\tau_n^n}]$$

où

$$Z = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma^{n+1}(\omega_{n+1}))\, d\sigma \,.$$

On utilise la définition de P_x^n, pour obtenir

$$X = E^{\Pi_\omega^n}(Z)$$

où

$$\Pi_\omega^n = \varepsilon_{\varphi_{x^1_{\tau_n^n(\omega_1)}}} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{\varphi_{x^r_{\tau_n^n(\omega_n)}}} \otimes P_{\xi_n^n(\omega)}$$

avec $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$, et donc, comme Z ne dépend que de φ_{n+1}, ceci se réduit à

$$X = E^{P_{\xi_n^n(\omega)}}(Z) = u^o(\xi_n^n).$$

d'où

$$u^n(x) = J_x(v_n) \tag{2.12}$$

où

$$v_n = ((\tau_n^1, \tau_n^2, \dots, \tau_n^n, +\infty), \xi_n^1, \xi_n^2 \dots, \xi_n^n, \xi^{n+1} \dots) \tag{2.13}$$

avec ξ^i constante quelconque pour $i \geq n+1$ et v_n est admissible donc

$$u^n(x) \geq u(x) \quad .$$

■

Lemme V.2.3.

Sous les hypothèses du lemme V.2.1, $u^n(x) \searrow u(x)$ quand $n \to +\infty$, $\forall\, x \in E$.

Démonstration.

Soit $v = (\tau^i, \xi^i)$ $i \geq 1$ un contrôle admissible quelconque : on rappelle que τ^i est un temps d'arrêt de la famille $\mathcal{F}_t^{i-1} = (\mathcal{F}_t)^{\otimes i}$ et que ξ^i est $\mathcal{F}_{\tau^i}^{i-1}$ - mesurable.

De la définition de u^n on a

$$u^n(x) \leq E_x \int_0^{\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau^1}[c(x_{\tau^1}, \xi^1) + u^{n-1}(\xi^1)] \tag{2.12}$$

d'où le résultat en utilisant le lemme V.2.2.

Lemme V.2.4.

Sous les hypothèses du Lemme V.2.1, $u^n \to u$ uniformément et même $\| u^n - u \| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

Démonstration.

Notons pour $n \in N$

$$\mathcal{V}^n = \{v \in \mathcal{V} \mid v=(\tau^i,\xi^i)_{i\geq 1},\ \tau^i = +\infty\ ,\ \forall\ i > n\}$$

Il résulte alors de (2.12), (2.13), (2.14) que

$$u^n(x) = \underset{v\in\mathcal{V}^n}{\mathrm{Inf}}\ J_x(v) \tag{2.15}$$

et donc

$$0 \leq u^n(x) - u(x) \leq \sup_{v\in\mathcal{V}}\ [J_x(v_1)-J_x(v)],\ \forall\ v_1 \in \mathcal{V}^n. \tag{2.16}$$

Soit alors pour $v = (\tau^i,\xi^i)_{i\geq 1}$, $v \in \mathcal{V}$, le contrôle $v_{|n} \in \mathcal{V}^n$ défini par

$$v_{|n} = (\tau^1,\xi^1,\ldots,\tau^n,\xi^n,\ +\infty,\ \xi^{n+1},\ +\infty,\ldots), \tag{2.17}$$

$$0 \leq u^n(x)-u(x) \leq \sup_{v\in\tilde{\mathcal{V}}} [J_x\ (v_{|n}) - J_x(v)] \tag{2.18}$$

où l'on note $\tilde{\mathcal{V}} = \{v \in \mathcal{V} \mid J_x(v) < +\infty\ \ \forall\ x \in E\}$ (on ne perd rien en se restreignant à ces contrôles).

Si l'on note $P_x^{j,n}$, P^j les mesures construites à partir de $v_{|n}$ et v respectivement, on a bien entendu, $P_x^{j,n} = P^j\ \ \forall\ j \leq n$, donc

$$J_x(v_{|n}) - J_x(v) = E_x^n \int_{\tau^n}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(\tilde{y}_s)ds$$

$$- \underset{\substack{m\uparrow\infty \\ m\geq n}}{\mathrm{Lim}}\ E^m \left\{\int_{\tau^n}^{\tau^{m+1}} e^{-\alpha s} f(y_s)ds + \sum_{j=n+1}^{m+1} c(x_{\tau^j}^j,\xi^j)e^{-\alpha\tau^j}\right\},$$

=>

$$J_x(v_{|n}) - J_x(v) \leq\ E_x^n \int_{\tau^n}^{+\infty} e^{-\alpha s} f(\tilde{y}_s)ds\ . \tag{2.19}$$

Notons Z le second membre

(2.20) $$Z = E_x^n\left(\int_{\tau^n}^{\tau^n \vee T} \bar{e}^{\alpha s} f(\tilde{y}_s)ds + \int_{\tau^n \vee T}^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(\tilde{y}_s)ds\right), \ \forall\, T\ ,$$

(ici $\tilde{y}_s$ désigne x_s^{n+1}, y_s le processus défini en (1.17)). De (2.20) on a

$$Z \leq E_x^n \int_{\tau^n}^{\tau^n \vee T} \bar{e}^{\alpha s} f(\tilde{y}_s)ds + \bar{e}^{\alpha T} \| f \| .$$

Soit

(2.21) $$Z \leq \| f \| \,.\, E_x^n(\chi_{\tau^n < T}) + \bar{e}^{\alpha T} \| f \| \ .$$

Mais d'autre part, on peut sans perte de généralité se restreindre aux contrôles v tels que

$$J_x(v) \leq \ c_1 = \text{constante indépendante de v et x}\ ,$$

(par exemple $\frac{\| f \|}{\alpha}$).

Ce qui implique

$$\lim_{n \uparrow \infty} E_x^n(\sum_{i=1}^{n+1} c(\xi^i)\ \bar{e}^{\alpha \tau^i}) \leq c_1$$

ou

(2.22) $$\lim_{n \uparrow \infty} E_x^n \sum_{i=1}^{n+1} \bar{e}^{\alpha \tau^i} \ \leq \frac{c_1}{k}$$

(en rappelant que $c(x,\xi) \geq k > 0$) .

On pose

$$N_T^m(v) = \max(1 \leq m\, ,\ \tau^1 < T)$$

de (2.22) on déduit

$$\lim_{m \uparrow \infty} E^m \sum_{i=1}^{m+1} \bar{e}^{\alpha \tau^i} \ \chi_{\tau^i < T} \leq \frac{c_1}{k} \ .$$

Soit

$$\bar{e}^{\alpha T} \lim_{m \uparrow \infty} \ E^m \sum_{i=1}^{m+1} \ \chi_{\tau^i < T} \leq \frac{c_1}{k}$$

où encore

$$(2.23) \qquad \bar{e}^{\alpha T} \lim_{m\uparrow\infty} E^m N_T^{m+1}(v) \le \frac{c_1}{k} .$$

D'autre part

$$\chi_{\tau^n<T} \le \chi_{N_T^{m+1}(v) \ge n} \qquad \forall\, m \ge n ,$$

donc

$$n\, \chi_{\tau^n<T} \le \chi_{(N_T^{m+1}(v) \ge n)} \cdot N_T^{m+1}(v) , \quad \forall\, m \ge n ,$$

d'où

$$n\, \chi_{\tau^n<T} \le N_T^{m+1}(v) \qquad \forall\; m \ge n ,$$

donc comme $E^m \chi_{\tau^n<T} = E^n \chi_{\tau^n<T} \quad m \ge n$

$$(2.24) \qquad n\, E^n \chi_{\tau^n<T} \le E^m N_T^{m+1}(v)$$

(2.23) et (2.24) donnent

$$(2.25) \qquad E^n \chi_{\tau^n<T} \le \frac{c_1}{k} \cdot \frac{1}{n} \; e^{\alpha T}$$

(2.21) devient donc

$$Z \le \|f\| \frac{c_1}{k} \cdot \frac{1}{n} \; \overset{+}{e}^{\alpha T} + \bar{e}^{\alpha T} \|f\|$$

Donc (2.19) donne

$$J_x(v|_n) - J_x(v) \le \frac{c_2}{n} e^{\alpha T} + \bar{e}^{\alpha T} \|f\|$$

d'où

$$0 \le u^n(x) - u(x) \le \frac{c_2}{n} e^{\alpha T} + \bar{e}^{\alpha T} \|f\| \qquad (^1) .$$

On passe à la limite en n d'abord, puis $T \uparrow \infty$ pour obtenir le résultat.

■

---

(1) d'où $0 \le u^n - u \le \frac{c}{\sqrt{n}}$ si l'on prend T minimisant le second membre.

<u>Théorème V.2.1. : Sous les hypothèses du lemme V.2.1. u est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions w vérifiant</u>

$$(2.25)\qquad \begin{cases} w(x) \leq Mw(x) \\ w(x) \leq e^{-\alpha t}\Phi(t)w(x) + \int_0^t e^{-\alpha s}\Phi(s)f(x)ds \qquad \forall\ t \geq 0 \\ w \in C_b^o(E) \end{cases}$$

<u>De plus il existe un contrôle optimal.</u>

<u>Démonstration.</u>

On démontre d'abord que u est solution maximum de l'équation

$$(2.26)\qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left(\int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s)ds + Mu(x_\tau)\ e^{-\alpha\tau}\right)$$

exactement comme au lemme II.

La suite de la démonstration est identique à celle du Théorème II.2.1.

Ensuite, on démontre, en reprenant la démonstration du Lemme V.2.2., que le contrôle suivant est optimal

$$(2.27)\qquad \begin{aligned} &\hat\tau^1 = \text{Inf } (s \geq 0,\ u(x_s) = Mu(x_s)) \\ &\hat\xi^1 = \hat\xi(x_{\hat\tau^1}) \text{ où } \hat\xi(x) \text{ réalise le minimum de } c(x,\xi)+u(\xi), \\ &\text{et est mesurable en } x. \end{aligned}$$

$$(2.28)\qquad \begin{aligned} &\hat\tau^2(\omega_1,\omega_2) = \hat\tau^1(\omega_1) + \hat\tau^2(\omega_2) \circ \theta_{1,\hat\tau^1(\omega_1)} \\ &\hat\xi^2 = \hat\xi\ (x^2_{\hat\tau^2})\ . \end{aligned}$$

et ainsi de suite ...

$$(2.29)\qquad \begin{cases} \hat\tau^n(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n) = \hat\tau^{n-1}(\omega_1,\dots,\omega_{n-1}) \\ \qquad\qquad + \hat\tau^1(\omega_n) \circ \theta_{n,\hat\tau^{n-1}(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})} \\ \hat\xi^n = \hat\xi(x^n_{\hat\tau^n}) \end{cases}$$

On va maintenant démontrer que quand $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ générateur infinitésimal de Φ (faible), alors u est solution unqiue d'une IQV. Il est cependant très rare que $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, mais on verra un exemple simple dans la section suivante.

<u>Théorème V.2.2.: Sous les hypothèses du Théorème V.2.1., si de plus</u> $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, <u>alors u est solution unique de l'IQV</u> :

$$\left.\begin{array}{ll} (2.30) & \tilde{A}u - \alpha u + f \geq 0 \\ (2.31) & u \leq Mu \\ (2.32) & (\tilde{A}u - \alpha u + f)(u - Mu) = 0 \end{array}\right\} \text{ en tout point de } E$$

$$(2.33) \qquad u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} \cap C_b^o(E) \ .$$

<u>Démonstration.</u>

(2.31) est déjà vérifé. De plus $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}} \Rightarrow$

$$E_x \, \bar{e}^{\alpha t} \, u(x_t) = u(x) + E_x \int_o^t (\tilde{A}u - \alpha u)(x_s) \bar{e}^{\alpha s} \, ds,$$

par (2.25) on a

$$\int_o^t \Phi(s) \bar{e}^{\alpha s} \, [\tilde{A}u - \alpha u + f] ds \geq 0 \ ,$$

donc

$$(2.34) \qquad \frac{1}{t} \int_o^t \Phi(s) \bar{e}^{\alpha s} [\tilde{A}u - \alpha u + f] ds \geq 0$$

comme $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ et $f \in C$, si on pose

$$\varphi = \tilde{A}u - \alpha u + f \ ,$$

on a $\qquad \lim\limits_{t \downarrow 0} \Phi(t)\varphi(x) = \varphi(x) \qquad \forall \, x \in E$.

Quand $t \searrow 0$, (2.24) donne

$$\frac{1}{t} \int_o^t \Phi(s) \bar{e}^{\alpha s} \varphi \, ds \to \varphi(x) \quad \text{dans B faiblement}$$

(cf. Dynkin [21] p. 37). D'où (2.30).

D'autre part, u est le coût optimal d'un problème d'arrêt (cf. (2.26)) donc si

$$\mathcal{O} = \{x,\ u(x) < Mu(x)\}\ ,$$

$\mathcal{O}$ est un ouvert de E, et en posant

$$\hat{\tau} = \mathrm{Inf}(s \geq 0,\ u(x_s) = Mu(x_s)),$$

on a
$$u(x) = E_x\left(\int_0^{\hat{\tau}} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\hat{\tau}}\ u(x_{\hat{\tau}})\right).$$

Comme $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, ceci s'écrit

$$E_x \int_0^{\hat{\tau}} e^{-\alpha s}\varphi(x_s)ds = 0, \quad \text{soit encore}$$

$$E_x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}(\varphi.\chi_{\mathcal{O}})(x_{s \wedge \hat{\tau}})ds = 0\ .$$

Autrement dit,

(2.35) $$\tilde{R}_\alpha\ \Psi = 0$$

si $\tilde{R}_\alpha$ est la résolvante du processus arrêté à $\hat{\tau}$, et si

$$\Psi = (\tilde{A}u - \alpha u + f).\chi_{\mathcal{O}} = \varphi\ .\ \chi_{\mathcal{O}}$$

Or $\Psi \geq 0$ => (cf. [21])

(2.36) $$\tilde{R}_\alpha\ \Psi \geq \Psi$$

D'autre part, démontrons que

(2.37) $\tilde{\Phi}(t)\ \Psi(x) \to \Psi(x)$ $\forall$ x, si $\tilde{\Phi}$ est le semi-groupe du procesaus arrêté.

On a $\quad \Phi(t)\varphi(x) \to \varphi(x) \quad t \to 0, \quad \forall x \in E$

car $u \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, alors $\varphi.\chi_{\mathcal{O}}$ vérifie la même propriété pour $\tilde{\Phi}(t)$: on distingue

$$x \in \mathcal{O}^c \quad \text{alors } \tilde{\Phi}(t)\,\Psi = 0 \quad \forall t \quad \text{car } \hat{\tau}=0 \text{ ps. } P_x$$

$$x \in \mathcal{O} \quad \text{alors } \hat{\tau} > 0 \quad P_x \text{ ps (cf. DYNKIN [21] p.116)},$$

et

$$E_x \varphi(x_{t \wedge \hat{\tau}})\, \chi_{\mathcal{O}}(x_{t \wedge \hat{\tau}}) = E_x\, \varphi(x_{t \wedge \hat{\tau}})\, \chi_{t < \hat{\tau}}$$

Donc

$$|E_x\, \varphi(x_{t \wedge \hat{\tau}})\, \chi_{t<\hat{\tau}} - \varphi(x)| \leq$$

$$E_x(1-\chi_{t<\hat{\tau}}).|\varphi(x_t)| + |E_x\, \varphi(x_t) - \varphi(x)|$$

Le second terme tend vers 0 quand $t \downarrow 0$. Le premier est inférieur à $\|g\|$. $E_x(1-\chi_{t<\hat{\tau}})$ et tend donc vers 0 car $\hat{\tau} > 0$ P_x ps.

Donc si $x \in \mathcal{O}$, $\tilde{\Phi}(t)\,\Psi(x) \to \Psi(x) = \varphi(x)$. (2.27) est donc démontré.

Alors (2.36), (2.37) implique que Ψ est une fonction excessive pour $\tilde{\Phi}(t)$, et (2.35) implique que Ψ est nulle sauf sur un ensemble de potentiel nul, donc Ψ est nulle partout (cf. BLUMENTHAL - GETOOR [18], p. 80).

Donc $\tilde{A}u - \alpha u + f = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}$ et comme $u = Mu$ sur $\mathcal{O}^c$, on a bien (2.30).

L'unicité résulte de l'interprétation stochastique de toute solution w de (2.30) à (2.33), on montre en effet facilement que $w(x) = \operatorname{Inf}_{v \in \mathcal{V}} J_x(v) = u(x)$.

Dans [54], ou [55], on partait de l'hypothèse "il existe une solution régulière au système (2.30), (2.32)", pour démontrer l'existence d'un contrôle optimal, le coût optimal étant alors cette solution. Mais cette approche est insuffisante en général car dans de nombreux cas on ne sait pas démontrer suffisamment de régularité. ∎

V.3. APPLICATIONS.

V.3.1. Processus de sauts markoviens.

On reprend l'exemple de III.3. et les mêmes hypothèses. Comme on prend la topologie discrète sur E, le problème de la continuité ne se pose plus. (et U compact devient U fini).

De plus u étant mesurable borné appartient au domaine du générateur infinitésimal de $\Phi(t)$. Donc les théorèmes V.2.1. et V.2.2. s'appliquent ici avec

$$\tilde{A}\varphi(x) = \lambda(x)\left[\int q(x,dy)\varphi(y) - \varphi(x)\right]. \tag{3.1}$$

V.3.2. Applications aux exemples du chapitre I.

Sauf pour les diffusions, ou aucune restriction supplémentaire sur $c(x,\xi)$ n'est nécessaire, on ne saura obtenir des résultats complets que dans le cas de l'hypothèse (2.19), et pour ce cas assez simple, on peut obtenir des IQV pour tous les exemples du Chapitre I. Les résultats sont entièrement analogues à la modification de M près.

Signalons que dans le cadre d'hypothèses du §. IV.6 (diffusions avec un terme poissonnien), on peut démontrer comme dans BENSOUSSAN - LIONS [11], la continuité du coût optimal et obtenir des résultats similaires à ceux de [11].

Enfin on pourrait (comme d'ailleurs au Chapitre II) obtenir une IQV dans le cas des diffusions réfléchies (formulation faible cf. STROOCK - VARADHAN [69]), en utilisant les résultats de AGMON - DOUGLIS - NIREMBERG [1] sur les équations elliptiques a coefficients continus.

Bien entendu, la construction faite ici, est sans intérêt pour les diffusions "fortes" (du type équation d'Ito).
Enfin on peut également traiter les problèmes du type stock comme au §. II.4.

V.4. CONVERGENCE DES PROBLEMES AVEC RETARDS VERS LE PROBLEME INSTANTANE.

Considérons le problème défini au §. V.1 et, avec les mêmes données $\Phi(t)$, f, c, U, α le problème du §. II.1 avec un retard h, notons $u_h(x)$ le coût optimal pour ce dernie problème, $u(x)$ restant le coût optimal du problème instantané. On a le

Théorème V.4.1: Sous les hypothèses du §. V.1, on a $u_h \to u$ uniformément (d'ailleurs en décroissant).

Démonstration. Bien que l'on ait démontré au Chapitre II la convergence $u_h^n \to u_h$ uniformément, par une autre méthode, on aura besoin ici d'un résultat plus précis.

De fait, on a, $\forall\, T > 0$

$$\| u_h - u_h^n \| \leq c_1 \frac{e^{\alpha T}}{n} + c_2\, e^{-\alpha T} \tag{4.1}$$

c_1, c_2 indépendant de n et de h.

En fait c'est exactement le même type de démonstration que celle du lemme V.2.4. De plus évaluons $\| u_h^n - u^n \|$

$$u_h^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x\left(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds + e^{-\alpha\tau} M_h u_h^{n-1}(x_\tau) \right)$$

si

$$M_h u_h^{n-1}(x) = E_x \int_0^h e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds$$

$$+ \operatorname*{Inf}_{\xi\in U} \left(c(x,\xi) + e^{-\alpha h} u_h^{n-1}(\xi)\right).$$

$$u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x \int_0^T e^{-\alpha s} f(x_s)\,ds + e^{-\alpha\tau} M u^{n-1}(x_\tau)$$

(avec les notations de ce chapitre).

Donc

$$u_h^o = u^o = R_\alpha f \leq \frac{\| f \|}{\alpha}$$

$$|u_h^1(x) - u^1(x)| \leq \| M_h u_h^o - M u^o \|$$

$$\leq \left[\frac{1-e^{-\alpha h}}{\alpha}\right] \| f \| + (1-e^{-\alpha h}) \| u^o \|$$

i.e.

$$\| u_h^1 - u^1 \| \leq 2\left(\frac{1-e^{-\alpha h}}{\alpha}\right)\| f \| \leq 2h \| f \|$$

on a facilement en général

$$(4.2) \qquad \| u_h^n - u^n \| \leq 2nh \| f \|$$

Alors

$$\| u_h - u \| \leq \| u_h - u_h^n \| + \| u_h^n - u^n \| + \| u^n - u \|$$

$$(4.3) \qquad \| u_h - u \| \leq 2nh \| f \| + 2\left(\frac{C_1}{n} \; e^{\alpha T} + e^{-\alpha T} \; c_2\right)$$

Donc quand $h \searrow 0$, puis $n \uparrow \infty$, puis $T \uparrow \infty$, on obtient

$$\lim_{h \downarrow 0} \| u_h - u \| = 0$$

On pourrait construire le processus contrôlé avec retard sur le même espace mesurable $(\Omega^N, \mathfrak{F}^N)$ que le processus du cas instantané; il serait alors évident que $u_h \geq u \quad \forall\, h \geq 0$ puisque tout contrôle admissible dans u_h est admissible pour u.

<u>De même</u>, dans les problèmes de retard imbriqués, si l'on note $u_{k,h}$ le coût optimal du problème avec au plus k décisions autorisées entre τ^i et τ^i+h pour tout instant de désicion τ^i, alors on a de façon évidente

$$u_h \geq u_{k,h} \geq u \qquad \forall\, k,h$$

et donc un corollaire immédiat du théorème précédent est que, $\forall \; k \geq 0$

$$u_{k,h} \to u \quad \underline{\text{uniformément.}}$$

$$h \to 0$$

Dans le cas de diffusion on peut donner une démonstration analytique de $u_h \to u$ dans $V = H^{1,\gamma}(R^d)$ (dans les cas déjà vus au chapitre IV) on récupère la convergence uniforme grâce à la continuité de u_h et de u, et à la décroissance de u_h.

ANNEXE 2

Rappel des notations.

On pose $\Omega_1 = \Omega \times \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}_t^1 = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t \;,\quad \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}_\infty^1 \\[2mm] \theta_{1,t}\ \omega = (\theta_t\ \omega_1,\ \theta_t\ \omega_2) \\ y_t(\omega) = (x_t^1(\omega_1),\ x_t^2(\omega_2)). \end{array}\right.$$

[Bien entendu $x_t^1(\omega_1) = \omega_1(t)$, $x_t^2(\omega_2) = \omega_2(t)$, x_t^1 et x_t^2 ne servent qu'à distinguer la copie de Ω qui est considérée).

On note φ_y la trajectoire $\varphi_y(t) = y \quad \forall\ t \geq 0$. x et y seront dans la suite fixés une fois pour toutes.

On pose

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} P^o = P_x \otimes \varepsilon_{\varphi_y} \\[2mm] \tau \text{ est un temps d'arrêt de } \mathcal{F}_t \;, \\[2mm] \xi \text{ une v.a. } \mathcal{F}_\tau \text{ mesurable, à valeurs dans } E \;, \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \Pi_{\omega_1}^o = \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon_{\varphi_{x_\tau^1(\omega_1)}} \otimes P_{\xi(\omega_1)} & \omega_1 \in \{\tau < +\infty\} \;, \\[4mm] P^o & \omega_1 \in \{\tau = +\infty\} \;, \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \mathcal{G}_\tau = \sigma\{\mathcal{F}_{\tau^-}^1 \;,\ \mathcal{F}_\tau \otimes \{\Phi, \Omega\}\} \;.$$

$\mathcal{G}_\tau$ est une tribu intermédiaire entre $\mathcal{F}_\tau^1$ et $\mathcal{F}_{\tau^-}^1$, et $\omega_1 \to \Pi_{\omega_1}^o(B)$ est $\mathcal{G}_\tau$ mesurable $\quad \forall\ B \in \mathcal{F}^1$.

Lemme A.2. Il existe une probabilité P^1 sur $(\Omega_1, \mathcal{F}^1)$, égale à P^o sur $\mathcal{G}_\tau$, et telle que

(5) $$P^1(\theta^{-1}_{1,t}\, A \mid \mathcal{G}_\tau) = \Pi^o_{\omega_1}\ (A)$$

$$P^o \ \text{ ps sur } \{\tau < +\infty\}\ ,\quad A \in \mathcal{F}^1 .$$

De plus

(6) $Y_t = x^2_{\tau+t}$ $t \geq 0$ est fortement markovien par rapport à $(\mathcal{F}_{\tau+t},\ t \geq 0)$ pour P^1.

Démonstration.

On pose $\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_1$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\tau^1} \otimes \mathcal{F}^1$ et on définit une probabilité $\tilde{P}$ sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$ par

(7) $$\int_{\tilde{\Omega}} f(\omega,\omega')P^o(d\omega)\ \Pi^o_{\omega_1}(d\omega') = \int_{\tilde{\Omega}} f(\omega,\omega')\ \tilde{P}(d\omega,d\omega')$$

où $\omega = (\omega_1,\omega_2) \in \Omega_1$, $\omega' = (\omega_1',\omega_2')$.

(En fait dans (3), quand $\tau(\omega^1) = +\infty$, on peut prendre une probabilité quelconque sur $(\Omega,\mathcal{F})$: il est clair que si $\tau(\omega^1) = +\infty$, le recollement n'aura pas d'intérêt pour le problème de contrôle).

$\tilde{P}$ est concentré sur le sous ensemble de $\Omega_1 \times \Omega_1$

(8) $$J = \{(\omega,\omega');\tau(\omega_1)<+\infty;\ x^1_{\tau(\omega_1)}(\omega_1) = x^1_o(\omega_1')\} \cup \{(\omega,\omega');\tau(\omega_1)=+\infty\}$$

On définit une application $\varphi(\omega,\omega')$ de J dans Ω_1 par

$$\varphi(\omega,\omega') = (w_1,w_2) = w \in \Omega_1$$

$$\begin{cases} x^1_t(w_1) = x^1_t(\omega_1) & \text{si } t \leq \tau(\omega_1) \\ x^1_t(w_1) = x^1_{t-\tau(\omega_1)}(\omega_1') & t \geq \tau(\omega_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2_t(w_2) = x^2_t(\omega_2) & t < \tau(\omega_1) \\ x^2_t(w_2) = x^2_{t-\tau(\omega_1)}(\omega_2') & t \geq \tau(\omega_1) \end{cases}$$

si $\tau(\omega_1) < +\infty$

$$\varphi(\omega,\omega') = (\omega,\omega') \quad \text{si} \quad \tau(\omega_1) = +\infty .$$

On vérifie que J est dans $\mathcal{G}_\tau \otimes \mathcal{F}^1$ et que φ est mesurable de $(J,\tilde{\mathcal{F}}/J)$ dans $(\Omega_1, \mathcal{F}^o \otimes \mathcal{F}^o)$ où $\mathcal{F}^o$ est la tribu canonique (non complétée) de Ω.

J est dans $\mathcal{G}_{\tau^1} \otimes \mathcal{F}^1$ car

$$(\omega,\omega') \to Y(\omega,\omega') = x^1_{\tau(\omega_1)}(\omega_1) - x^1_o(\omega'_1)$$

est une combinaison linéaire de v.a. $\mathcal{G}_\tau \otimes \mathcal{F}^1$ mesurables.

Dans la suite on fait les démonstrations avec τ borné, il est facile de voir que le cas où $\{\tau^1=+\infty\} \neq \phi$ se traite sans difficulté.

Pour montrer que φ est mesurable de $(J,\tilde{\mathcal{F}}/J)$ dans $(\Omega_1,\mathcal{F}^o \otimes \mathcal{F}^o)$; il suffit de vérifier que, pour

$$B = \{y_{t^1}(\omega) \in \Gamma_1,\dots,y_{t^n} \in \Gamma_n\}$$

$0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, on a $\varphi^{-1}(B) \in \tilde{\mathcal{F}}/J$.

On le fera pour $A = \{y_t(\omega_1,\omega_2) \in \Gamma\}$.

On commence par montrer (cf. Annexe 1) que

$$\tau(\varphi(\omega,\omega')) = \tau(\omega) = \tau(\omega_1)$$

Par hypothèse sur τ, (ne dépend que de la première composante), $\tau(\varphi(\omega,\omega')) = \tau(w_1,w_2) = \tau(w_1)$.

Reste à montrer que si $w_1(t) = \omega_1(t)\ \ \forall\, t \leq \tau(\omega_1)$ alors $\tau(w_1) = \tau(\omega_1)$.

On sait que (cf. [19]) $Z \in \mathcal{F}_t$ si et seulement si $Z \in \mathcal{F}$ et $Z = Z_o a_t$ où a_t est l'opérateur d'arrêt.

Soit $A \in \mathcal{F}_t$, $\omega \in A \Leftrightarrow a_t\omega \in A$. Supposons $\tau(w_1) > \tau(\omega_1)$, on pose $t = \tau(\omega_1)$ et $A = \{\omega;\ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On a $\omega_1 \in A$ et $w_1 \notin A$. Mais $\omega_1 \in A \Rightarrow a_t\omega_1 \in A$ et comme $a_t\omega_1 = a_t w_1$ on a $a_t w_1 \in A$ d'où contradiction car ceci implique $w_1 \in A$. On fait de même pour $\tau(w_1) < \tau(\omega_1)$.

Maintenant

$$\varphi^{-1}(A) = \{(\omega,\omega'),\ y_t(\varphi(\omega,\omega')) \in \Gamma\}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(A) = &\{(\omega,\omega'),\ y_t(\varphi) \in \Gamma,\ t < \tau(\omega_1)\}\\ &+ \{(\omega,\omega'),\ y_t(\varphi) \in \Gamma,\ t = \tau(\omega_1)\}\\ &+ \{(\omega,\omega'),\ y_t(\varphi) \in \Gamma,\ t > \tau(\omega_1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(A) = &\{(\omega,\omega'),\ (x_t^1(\omega_1),\ x_t^2(\omega_2)) \in \Gamma,\ t < \tau(\omega_1)\}\\ &+ \{(\omega,\omega'),\ (x^1_{\tau(\omega_1)}(\omega_1),\ x_o^2(\omega_2')) \in \Gamma,\ t = \tau(\omega_1)\}\\ &+ \{(\omega,\omega'),\ (x^1_{t-\tau(\omega_1)}(\omega_1'),\ x^2_{t-\tau(\omega_1)}(\omega_2')) \in \Gamma\ ,\\ &\quad t > \tau(\omega_2)\}\\ &= A_1 + A_2 + A_3\end{aligned}$$

On a $A_1 = A_1' \times \Omega_1$ et $A_1' \in \mathcal{F}^1_{\tau^-}$ donc $A_1 \in \mathcal{G}_\tau \otimes \mathcal{F}^1$.

Pour A_2,

$$\begin{aligned}&\omega_1 \to x^1_{\tau(\omega_1)}(\omega_1) \quad \text{est } \mathcal{F}_\tau \text{ mesurable}\\ &\omega_2' \to x_o^2(\omega_2') \quad \text{est } \mathcal{F}^1 \text{ mesurable}\\ &\omega_1 \to \chi_{\{t=\tau(\omega_1)\}} \quad \text{est } \mathcal{F}_\tau \text{ mesurable}\end{aligned}$$

donc

$$\chi_{A_1} = \chi_{\{t=\tau\}} \cdot \chi_{\{(x_t^1(\omega_1),x_o^2(\omega_2')) \in \Gamma\}}$$

est $\tilde{\mathcal{F}}_\tau \otimes \mathcal{F}^1$, si $\tilde{\mathcal{F}}_\tau = \mathcal{F}_\tau \otimes \{\phi,\Omega\}$. Comme $\tilde{\mathcal{F}}_\tau \subset \mathcal{G}_\tau$, $A_2 \in \mathcal{G}_\tau \otimes \mathcal{F}^1$.

Pour A_3 on montre que, $\forall$ f fonction numérique bornée définie et mesurable sur E, on a

$$(\omega,\omega') \to \Psi(\omega,\omega') = \chi_{\{t>\tau(\omega)\}}\ f(y_{t-\tau(\omega)}(\omega'))$$

$\mathcal{F}^1_{\tau^-} \otimes \mathcal{F}^1$ mesurable, ceci s'effectue exactement comme à l'Annexe 1.

On définit alors P^1_x comme l'image de $\tilde{P}$ par φ ce qui définit une mesure de probabilité sur $(\Omega_1, \mathfrak{F}^o \otimes \mathfrak{F}^o)$.

Alors $\mathfrak{F} = \{A \subset \Omega$, tel que il existe $A' \in \mathfrak{F}^o$, $A'' \in \mathfrak{F}^o$, avec

$A' \subset A \subset A''$, et $P(A' - A'') = 0 \quad \forall$ P probabilité

sur $\mathfrak{F}^o\}$.

Donc si $A \in \mathfrak{F}$ et $\in \mathfrak{F}$, on pose

$$P^1(A\times B) = P^1(A'\times B') = P^1(A''\times B'') \tag{10}$$

(On a en effet $P^1(A'\times B') = P^1(A''\times B'')$ car

$$\begin{aligned} P^1(A''\times B'') &= P^1[(A'+(A''-A'))\times(B'+(B''-B'))] \\ &= P^1(A'\times B') + P^1[(A''-A')\times B'] + P^1[A'\times(B''-B')] \\ &+ P^1[(A''-A')\times(B''-B')] \end{aligned}$$

et

$$P^1[(A''-A')\times B'] \leq P^1[(A''-A')\times\Omega] = 0$$

car $P^1(\Gamma \times \Omega)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$, de même pour les autres termes).

P^1 étant σ-additive sur $\mathfrak{F}^o \otimes \mathfrak{F}^o$, (10) permet de montrer que P^1 est σ-additive sur la classe des ensembles $A\times B$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, donc que P^1 se prolonge en une probabilité sur $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}$.

La fin de la démonstration est analogue à celle de l'Annexe 1.

■

VI

CONTROLE IMPULSIONNEL AVEC

RETARD ALEATOIRE

Orientation.

On ne traitera ici que le problème stationnaire pour un processus de diffusion mais la méthode est générale. On va voir que pour définir le processus contrôlé on est amené à définir un processus résultant de l'interaction de la diffusion avec un processus semi markovien (très simple) qui "naît" à l'instant d'une décision et "disparaît" à l'instant de la livraison (pour utiliser le langage du problème de stock). On se restreindra d'autre part au cas des retards non imbriqués c'est à dire qu'aucune décision n'est autorisée tant que la décision précédente n'a pas été réalisée. On peut sans difficulté supplémentaire, autre que des complications d'écriture, traiter le cas des retards imbriqués. Pour bien montrer comment intervient le retard aléatoire on commence par donner une formulation heuristique du problème et les inéquations qui en résultent.

VI.1. FORMULATION HEURISTIQUE.

Les données.

Pour fixer les idées, on utilisera la terminologie des problèmes de stock.

L'état du stock non contrôlé est régi par une équation différentielle stochastique (homogène en temps) :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} dy_x(t) = g(y_x)dt + \sigma(y_x)dw_t & t \geq 0 \\ y_x(o) = x \end{cases}$$

avec w_t wiener standard à valeurs dans R^d.

A chaque commande ξ, on paye immédiatement un coût

$$(1.2) \qquad c(\xi) \geq k > 0 \ .$$

La livraison est effectuée avec un retard aléatoire de loi donnée

$$(1.3) \qquad G(\rho) = 1 - \exp(-\int_o^\rho \lambda(s)ds) \qquad \rho \in R^+$$

(cette forme ne restreint que la régularité de la distribution du retard), avec

$$(1.4) \qquad 0 \leq \lambda(s) \leq M \ .$$

(1.5) On suppose qu'aucune décision n'est prise entre une commande et la livraison correspondante.

(1.6) Les retards de livraison sont des variables aléatoires indépendantes entre elles, et indépendantes de w_t, de même loi G. donnée par (1.3).

On se donne un coût de sotckage

$$(1.7) \qquad f(x) \geq 0.$$

On note comme d'habitude

$$A = \sum_{ij=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $a_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)_{ij}\ (x)$.

Si l'on note $(t^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ un contrôle impulsionnel, (1.5) implique

$$t^{i+1} \geq t^i + \tau^i$$

si τ^i est le délai de livraison correspondant à ξ^i.

L'évolution du stock contrôlé pourrait donc s'écrire

$$dy_x(t) = g(y_x)dt + \sigma(y_x)dw_t + \sum_{i \geq 1} \xi^i \delta(t - t^i - \tau^i)dt$$

si aucune livraison n'est attendue à $t=0$.

Utilisation formelle de programmation dynamique :

On a deux situations possibles à un instant t quelconque

a) la dernière commande passée a été livrée
b) on attend une livraison ξ^1 correspondant à la commande passée à $t-\rho$.

Soit t^i les instants de commande, τ^i les retards de livraison.
L'évolution du stock partant de x en 0 sera donnée par

$$(1.8) \qquad dy_x^o(s) = g\ ds + \sigma\ dw_s + \sum_{i \geq 1} \xi^i\ \delta(s - t^i - \tau^i)\ ds$$

dans la situation a), et dans la situation b) on aura

$$dy^1_{x\rho\xi}(s) = g\ ds + \sigma\ dw_s + \sum_{i \geq 1} \xi^i\ \delta(s - t^i - \tau^i)\ ds$$
$$+ \xi\ \delta\ (s - (\tau^o - \rho))\ ds$$

si τ^o est le retard de livraison correspondant à la commande passée à la date $-\rho$, on note $u_o(x)$ le coût optimal sur $(0, +\infty)$ sachant qu'en 0 le stock est x et que la dernière commande passée a été livrée, $u_1(x, \rho, \xi)$ le coût optimal sachant que l'on est dans la situation b) en $t=0$ et que la quantité ξ a été commandée à $t=-\rho$.

Evolution de u_o :

Si l'on passe une commande ξ à $t=0$ et que les décisions sont prises de façon optimale ensuite, le coût correspondant est

$$I_1 = c(\xi) + u_1(x,0,\xi)$$

car on passe de la situation a) à la situation b) avec $\rho=0$.

Si l'on ne fait rien sur $[o,h]$ et que les décisions sont prises de façon optimale après h le coût s'écrit

$$I_2 = E\int_o^h \bar{e}^{\alpha s} f(y_x^o(s))ds + u_o(y_x^o(h))\, \bar{e}^{\alpha h}$$

d'où

$$u_o(x) = \min\,(I_1,I_2)$$

en utilisant la formule de ITO, on obtient

$$(1.9)\qquad \begin{cases} -Au_o + \alpha u_o - f \leq 0 \\ u_o(x) \leq \operatorname*{Inf}_{\xi\geq 0}\ [c(\xi) + u_1(x,0,\xi)] = Mu_1 \\ (-Au_o + \alpha u_o - f)(u_o - Mu_1) = 0 \end{cases}$$

Evolution de u_1 :

On ne peut pas commander avant la livraison de la quantité ξ. commandée à $t=-\rho$. Soit τ le retard correspondant à cette livraison. Soit $h > 0$ donné, on a soit $\tau-\rho \leq h$ soit $\tau-\rho > h$, et comme τ est indépendant de la demande

$$u_1(x,\rho,\xi) = E\left\{\int_o^h \bar{e}^{\alpha s} f(y_x^1(s))ds\right\}$$

$$+ E\{1_{\tau-\rho>h}\ u_1(y_x^1(h),\ \rho+h,\xi)\}$$

$$+ E\int_o^h \lambda(\rho+s)\ \exp\left(-\int_\rho^{\rho+s}\lambda(\rho+r)dr\right)u_o(y^o_{y^1(s)+\xi}(h-s))ds$$

Le second terme s'écrit

$$\frac{1 - G(\rho+h)}{1 - G(\rho)} \; E \, u_1 \; (\tilde{y}_x(h) \; , \; \rho+h, \; \xi)$$

où $\tilde{y}_x(s)$ est la diffusion sans saut. En appliquant la formule de ITO à ce terme et en passant à la limite quand $h \to 0$ on obtient

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - Au_1 + \alpha u_1 + \lambda(\rho)[u_1(x,\rho,\xi) - u_o(x+\xi)] - f = 0 \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.

L'état du stock entre deux instants de commande est décrit par une diffusion perturbée par un processus de saut qui "naît" quand on passe une commande et "disparaît" à l'arrivée de la livraison.

Le calcul formel qui a été fait revient à dire que (y_s, ρ_s, ξ_s) défini par

$$\left.\begin{array}{l} \rho_s = \rho+s \\ \xi_s = \xi \end{array}\right\} \quad s \in [o, \tau-\rho[$$

y_s diffusion avec un seul saut en $\tau-\rho$

$\xi_s = 0$ (par exemple)

$\rho_s = s-(\tau-\rho)$ (par exemple) pour $s \geq \tau-\rho$

est un processus de Markov.

■

VI.2. CONSTRUCTION DU PROCESSUS CONTROLE.

On construit d'abord un espace de trajectoires servant à décrire le processus (y_s, ρ_s, ξ_s) de la remarque 1.1. Le processus correspondant à un contrôle sera formé de recollements de tels processus.

VI.2.1. Hypothèses et notations.

On note $\Omega^1 = D(o,\infty;R^d)$ l'espace des fonctions continues à droite, limitées à gauche,

$$x_t(\omega^1) = \omega^1(t) \qquad \omega^1 \in \Omega^1$$

$$\mathcal{F}_t^1 = \sigma\{x_s,\ s \leq t\},\ \theta_t^1 \text{ les translations,}$$

$$\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}_\infty^1$$

(2.1) $\left\{\begin{array}{l}\text{On donne sur } (\Omega^1,\mathcal{F}^1) \text{ une diffusion } P_x^1 \\ \text{construite à partir de coefficients} \\ (g,\sigma) \text{ uniformément lipschitziens, bornés.}\end{array}\right.$

(2.2) $$\sum_{ij} \sigma\,\sigma^*_{ij}\, \mathcal{J}_i\, \mathcal{J}_j \geq \gamma|\mathcal{J}|^2\ ,\quad \forall\, \mathcal{J} \in R^d$$

(i.e. la solution unique du problème de martingale associé à (g,σ) l'hypothèse sur σ n'interviendra que pour les inéquations quasi-variationnelles).

D'autre part, on note Ω^2, l'ensemble des couples de fonctions

(2.3) $\left\{\begin{array}{l}\omega^2 = (\omega_2', \omega_2'') \text{ de } R^+ \to R^+ \times E \\ \text{où } E = U \cup \{\delta\} \\ \underline{U \text{ compact de } (R^d)^+},\quad \underline{\delta \in \{R^d - (R^d)^+\}}\end{array}\right.$

telles qu'il existe

$$0 < t^1 < t^2 \ldots < t^n \to +\infty$$

avec

$$\omega_2''(t) = \xi^i \quad t \in [t^i, t^{i+1}[\ .\ \xi_i \in E\ ,$$

$$\omega_2'(t) = t - t_i \quad t \in [t^i, t^{i+1}[$$

On note

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \rho_t(\omega_2) = \omega_2'(t) \\ \xi_t(\omega_2) = \omega_2''(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_t^2 = \sigma\{\rho_s, \xi_s \quad s \leq t\} .$$

On donne de plus

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \lambda(\rho) \text{ fonction continue de } R^+ \to R^+ \\ \text{et} \\ 0 \leq \lambda(\rho) \leq M \end{cases}$$

On pose

$$(2.6) \qquad \begin{cases} \gamma(\rho,\xi) = \begin{cases} \lambda(\rho) & \xi \in U \\ 0 & \xi = \delta \end{cases} \\ c(\rho,\xi,\Gamma) = 1_\Gamma(\delta) \quad \forall\, \Gamma \in \mathcal{B}_E \text{ (tribu borélienne de E)} \end{cases}$$

à partir de (γ, c) on peut construire un processus de Markov $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, P^2_{\rho\xi})$ (cf. GIHMAN - SKOROHOOD [31], et aussi [35], [71], ξ_t est un processus semi-markovien) et on a, si T_t est le semi groupe du processus (ρ_t, ξ_t)

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} (T_t\varphi)(\rho,\xi) &= \exp\left(-\int_\rho^{\rho+t} \gamma(s,\xi)ds\right)\varphi(\rho+t,\xi) \\ &+ \int_0^t \gamma(\rho+v,\xi)\exp\left(-\int_\rho^{\rho+v}\gamma(s,\xi)ds\right)\int_E c(\rho+v,\xi,dz)T_{t-v}\varphi(o,z)dv \end{aligned}$$

$\forall\, \varphi$ mesurable bornée sur $R^+ \times E$.

On pose maintenant

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \tilde{\Omega} = \Omega^1 \times \Omega^2 \\ \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^1 \otimes \mathcal{F}_t^2 \quad \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_\infty , \ \tilde{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2) \\ Q_{x\rho\xi} = P_x^1 \otimes P_{\rho\xi}^2 \end{cases}$$

On note

(2.9) τ le premier instant de saut de ξ_t (c'est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t^2$ donc de $\tilde{\mathcal{F}}_t$)

et on note

$$(2.10) \qquad \mathcal{G}_\tau = \sigma\{\tilde{\mathfrak{F}}_{\tau-},\ \{\emptyset, \Omega^1\} \otimes \mathfrak{F}^2_\tau\}$$

On montre alors:

Lemme 2.1. Il existe une probabilité (unique) $P_{x\rho\xi}$ sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}})$ telle que

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{x\rho\xi}(A) = Q_{x\rho\xi}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{G}_\tau \\ P_{x\rho\xi}(\tilde{\theta}^{-1}_\tau\ A|\mathcal{G}_\tau) = Q_{x_{\tau-}+\xi,\rho_\tau,\xi_\tau}(A) \\ \qquad\qquad \forall A \in \tilde{\mathfrak{F}},\ \xi \in U,\ \text{ps. } Q_{x\rho\xi} \\ P_{x\rho\delta}(A) = Q_{x\rho\delta}(A) \qquad \forall A \in \tilde{\mathfrak{F}} \end{array} \right.$$

(on remarque que $\rho_\tau = 0$, $\xi_\tau = \delta$ ps. $Q_{x\rho\xi}$).

La démonstration est faite en annexe 2 c'est une conséquence de ce que l'on a fait pour le contrôle impulsionnel instantané.

∎

On montre également

Lemme 2.2. $P_{x\rho\xi}$ étant la mesure définie au lemme 1.1, et avec l'hypothèse (2.5). On a

(i) le processus $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}}_t,\mathfrak{F},\tilde{\theta}_t,(x_t,\rho_t,\xi_t),P_{x\rho\xi})$ est un processus de Markov fellerien.

(ii) P_t désignant le semi groupe correspondant à $P_{x\rho\xi}$, Π_t le semi groupe correspondant à la diffusion P^1_x, on a pour toute fonction φ mesurable bornée sur $R^d \times R^+ \times E$

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_t\varphi(x,\rho,\delta) = \Pi_t\ \varphi\ (x,\rho+t,\delta) \\ P_t\varphi(x,\rho,\xi) = \exp(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda(s)ds)\Pi_t\varphi(x,\rho+t,\xi) \\ + \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_\rho^{\rho+v} \lambda(s)ds)\int_{R^d}\Pi(x,v,dz)P_{t-v}\varphi(z+\xi,0,\delta)\ (^*) \end{array} \right.$$

(*) $\Pi(x,t,dz)$ est la probabilité de transition correspondant à Π_t.

(iii) <u>enfin pour toute fonction</u>, $\varphi(x,\rho,\xi)$ <u>telle que</u> $\varphi(\cdot,\cdot,\xi) \in C_b^{2,1}(R^d \times R^+)$, <u>bornée sur</u> $R^d \times R^+ \times E$. <u>Le générateur infinitésimal faible de</u> P_t <u>a pour expression</u>

$$(2.13) \qquad \begin{cases} (A_1\varphi)(x,\rho,\xi) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \lambda(\rho)[\varphi(x+\xi,0,\delta)-\varphi(x,\rho,\xi)] \\ \qquad\qquad + A\varphi \qquad \xi \in U \\ (A_1\varphi)(x,\rho,\delta) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho} + A\varphi \qquad \xi = \delta \end{cases}$$

où A est le générateur de la diffusion P_x^1 . (<u>cf. Annexe 3 pour la démonstration</u>.

■

Le (iii) ne sera pas utilisé par la suite, mais il montre que l'on a bien construit le processus (x_t,ρ_t,ξ_t) utilisé formellement au §. VI.1.

<u>Remarque 2.1.</u> Pour la mesure $P_{x\rho\delta}$, x_t est une diffusion (sans saut), et pour $P_{x\rho\xi}$, $(\xi \neq \delta)$, $x_{\tau+t}$ est une diffusion également.

■

VI.2.2. Contrôles admissibles, processus contrôlé, critère.

On dispose maintenant d'un processus de Markov $P_{x\rho\xi}$ sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}})$ dont la première composante représente l'état du stock et les deux autres l'information utile sur l'éventuelle commande non livrée.

On va effectuer une construction du processus contrôlé analogue à celle du cas instantané. On ne sait pas utiliser la construction plus simple du cas retard déterministe car les instants de recollements ne sont pas prévisibles.

On commence par prendre $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}$ complétées universelles de $\tilde{\mathfrak{F}}_t$, $\tilde{\mathfrak{F}}$, et dans la suite, $(\Omega,\mathfrak{F})$ désignera $(\tilde{\Omega},\mathfrak{F})$, on notera

$$(2.14) \qquad z_t(\omega) = \omega(t) \quad \text{pour } \omega \in \Omega$$

donc $z_t(\omega) = (x_t, \rho_t, \xi_t)(\omega) = (\omega_1(t), \omega_2'(t), \omega_2''(t))$.

<u>On définit</u> :

$$(2.15) \quad \begin{cases} W^k = (\Omega)^k \\ \mathcal{B}_t^k = (\mathcal{F}_t)^{\otimes k} \end{cases}$$

On note $[w]_k$ les éléments de W^k et

$$(2.17) \quad \begin{cases} [w]_k = (w_1, \dots, w_k) \\ w_i = (\omega_i^1, \omega_i^2) \\ z_t^i([w]_k) = (x_t(\omega_i^1), \rho_t(\omega_i^2), \xi_t(\omega_i^2)). \\ \text{On notera aussi} \\ W = W^N \quad , \quad \mathcal{B}_t = (\mathcal{F}_t)^{\otimes N} \ . \end{cases}$$

<u>Contrôles admissibles</u> :

$$(2.18) \qquad v = (t^1, \xi^1, t^2, \xi^2, \dots)$$

avec

(2.19) $\quad t^i$ est un temps d'arrêt de la famille $\mathcal{B}_t^i$

(2.20) $\quad \xi^i$ est une v.a $\mathcal{B}_{t^i}^i$ mesurable, <u>à valeurs dans U</u>. (*)

(2.21) $\quad$ et si τ^i est le premier instant de saut de $\xi_t(\omega_{i+1}^2)$ après t^i, on impose

$$t^{i+1} \geq \tau^i + t^i \qquad \forall\, i$$

(Bien entendu ici, t^i est considéré comme temps d'arrêt de $\mathcal{B}_t^{i+1}$ ce qui est loisible).

On note $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des contrôles admissibles.

(*) le point δ n'a été ajouté que pour des raisons techniques de définition du processus ξ_t.

Processus contrôlé :

Soit v un contrôle admissible. On pose, x étant fixé une fois pour toutes,

$$(2.22) \qquad \tilde{P}^1_x = P_{x,0,\delta}$$

et, z étant un élément quelconque de $R^d \times R^+ \times E$, on pose

$$(2.23) \qquad \left| \begin{array}{l} \varphi_z \text{ élément de } \Omega \text{ défini par} \\ \varphi_z(t) = (x,\rho+t,\xi) \text{ si } z = (x,\rho,\xi) \end{array} \right.$$

ε_{φ_z} la masse 1 sur la trajectoir φ_z. On définit alors

$$(2.24) \qquad \mathcal{G}_{t^1} = \sigma\{\mathcal{B}^2_{t^1-},\mathcal{B}^1_{t^1} \otimes \{\emptyset,\Omega\}\} \subset \mathcal{B}^2_{t^1}$$

$$(2.25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}^2_x = \tilde{P}^1_x \otimes \varepsilon_{\varphi_z} \quad \text{sur} \quad \mathcal{G}_{t^1} \\ \tilde{P}^2_x(\theta^{-1}_{2t^1} A | \mathcal{G}_{t^1}) = (\varepsilon_{\varphi_{z^1_{t^1}}} \otimes P_{x^1_{t^1},0,\xi^1})(A) \\ \qquad \tilde{P}^2 \text{ ps.} \quad \forall A \in \mathcal{B}^2 \end{array} \right.$$

On a vu au §. V (cf. Annexe 2) que ceci permet de définir une probabilité $\tilde{P}^2_x$ sur $(W^2,\mathcal{B}^2)$ et que le processus $z^2_{t^1+1}$ est un processus de Markov par rapport à $\mathcal{B}^2_{t^1+s}$ $s \geq 0$, de semi groupe P_t (i.e. le même que celui de $P_{x\rho\xi}$).

On définit ensuite de proche en proche

$$\mathcal{G}_{t^k} = \sigma\{\mathcal{B}^{k+1}_{t^k-},\ \mathcal{B}^k_{t^k} \otimes \{\emptyset,\Omega\}\} \subset \mathcal{B}^{k+1}_{t^k}.$$

$\tilde{P}^k_x$ étant défini sur $\mathcal{B}^k$

$$(2.26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}^{k+1}_x = \tilde{P}^k_x \otimes \varepsilon_{\varphi_z} \quad \text{sur} \quad \mathcal{G}_{t^k} \\ \tilde{P}^{k+1}_x(\theta^{-1}_{k+1,t^k} A | \mathcal{G}_{t^k}) = \varepsilon_{(\varphi_{z^1_{t^k}},\dots,\varphi_{z^k_{t^k}})} \otimes P_{x^k_{t^k},0,\xi^k}(A) \\ \qquad \forall \ A \in \mathcal{B}^{k+1} \end{array} \right.$$

où $\varepsilon_{(\varphi_{z^1},\dots,\varphi_{z^k})}$ est la masse 1 sur l'élément $(\varphi_{z^1},\dots,\varphi_{z^k})$ de W^k.

Ceci définit une probabilité sur $(W^{k+1},\mathcal{B}^{k+1})$ (grâce au résultat de l'Annexe 2, car c'est le même raisonnement que pour $\tilde{P}_x^2$ avec $W^k \times W$ au lieu de $W \times W$).

On notera encore, pour N quelconque $k \leq N$, $\tilde{P}^k_{x\rho\xi}$ la probabilité

$$\tilde{P}^k_{x\rho\xi} \otimes (\varepsilon_{\varphi_z})^{\otimes(N-k)} \quad \text{sur} \quad (W^N,\mathcal{B}^N). \tag{2.27}$$

Enfin pour $t^o = 0$ on définit le processus contrôlé

$$y_t = x_t^k\,([w]_k) \quad t \in [t^{k+1},t^k[, \quad k \geq 1 \tag{2.28}$$

(rappelons que x_t^k est la première composante du $z_t^k([w]_k)$).

On est alors en mesure de définir le critère : on se donne

$$\begin{cases} f \text{ continue bornée de } R^d \text{ dans } R^+ \\ c \text{ continue de } U \text{ dans } R^+,\ c(\xi) \geq k > 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

et on pose

$$J_x(v) = \lim_{N\uparrow\infty} \tilde{E}_x^N \left\{ \int_0^{t^N} e^{-\alpha s} f(y_s)\,ds + \sum_{i=1}^N e^{-\alpha t^i}\ c(\xi^i) \right\} \tag{2.30}$$

en fait

$$\tilde{P}_x^N(t^N<T) \leq \tilde{P}_x^N(\tau^1+\dots+\tau^{N-1} < T)$$

où les τ^i sont des v.a indépendantes, équidistribuées

$$\tilde{P}_x^N(\tau^1+\dots+\tau^{N-1} < T) \leq (1 - e^{-\lambda_{max}T})^{N-1}$$

$$\to 0 \text{ quand } N \to \infty \quad \forall\, T \text{ fini}$$

autrement dit le critère <u>est fini pour tout contrôle admissible</u>.

On notera

$$u(x) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_x(v)\ . \tag{2.31}$$

<u>Remarque 2.2.</u>

Le critère n'a été défini que dans le cas où l'on a la situation (a) du §. 1. Ceci parceque le coût optimal dans la situation (b) s'exprime directement en fonction de u_o puisque aucune décision n'est prise entre une commande et sa livraison.

∎

VI.3. CARACTERISATION DU COUT OPTIMAL.

On désignera ici par $\Omega^1 = D(0,\infty;R^d)$, $\mathcal{F}_t^1$ les tribus canoniques, x_t les applications coordonnées, P_x^1 étant la diffusion donnée au §. VI.2.

On définit

$$u^o(x) = E_x^1 \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(x_s) ds \ , \tag{3.1}$$

$$u^n(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^1 \left\{ \int_o^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\tau} M u^{n-1}(x_\tau) \right\} \quad , \quad n \geq 1, \tag{3.2}$$

avec

$$M\varphi(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} \left[c(\xi) + \int_o^{+\infty} \beta(\sigma) d\sigma E_x^1 \left\{ \int_o^{\sigma} e^{-\alpha s} f(x_s) ds + e^{-\alpha\sigma} \varphi(x_\sigma + \xi) \right\} \right] , \tag{3.3}$$

et avec

$$\beta(\sigma) = \lambda(\sigma) \exp \left(- \int_o^{\sigma} \lambda(r) dr\right) .$$

<u>Lemme 3.1.</u> <u>Sous les hypothèses (2.1), (2.2), (2.5), (2.29),</u>
<u>On a</u>

(i) $\quad \dfrac{\|f\|}{\alpha} \geq u^n \geq 0$,

(ii) $\quad u^n \geq u^{n+1} \quad \forall n$

(iii) $\quad u^n \in C_b^o(R^d)$

<u>Démonstration</u> : $u^n \geq 0$ est immédiat par récurrence puisque f et c sont ≥ 0. $u^1(x) \leq u^o(x) \quad \forall x$ car on peut prendre $\tau = +\infty$ dans le problème de temps d'arrêt correspondant à u^1.

$\Rightarrow \quad Mu^1 \leq Mu^o \Rightarrow u^2 \leq u^1 \qquad$ etc...

d'où $\quad u^n \geq u^{n+1} \quad \forall n$.
de plus $\quad u^o(x) \leq \dfrac{\|f\|}{\alpha}$.

Pour montrer (iii) on commence par montrer que si $\varphi \in C_b^o(R^d)$, alors $M\varphi \in C_b^o(R^d)$.

Posons

$$\Psi_s(x,\xi) = E^1_x \ \varphi(x_s+\xi) \ .$$

Comme la diffusion considérée correspond à des coefficients lipschitziens, on peut prendre une représentation forte et écrire, sur un espace de probabilité convenable

$$\Psi_s(x,\xi) = E \ \varphi(y_x(s) + \xi)$$

où

$$dy_x(s) = g(y_x)ds + \sigma(y_x) \ dw_s \ , \quad y_x(o) = x$$

w_t étant un processus de wiener standard.

Montrons que $\forall$ s fixé $\Psi_s(x,\xi)$ est continue en x et ξ.

(3.4) $$|\Psi_s(x,\xi) - \Psi_s(x',\xi')| \leq E|\varphi(y_x(s)+\xi) - \varphi(y_{x'}(s)+\xi')| \ .$$

On a

(3.5) $$P(|y_x(s) - y_{x'}(s)| \geq \delta) \leq c_s . \frac{|x-x'|^2}{\delta^2} \ .$$

Soit $\delta_o > 0$ donné, et pour $0 < \delta^3 < \delta_o^2$ prenons (1)

$$|x-x'|^2 + |\xi-\xi'|^2 \leq \delta^3 \ ,$$

pour $R > 0$, on définit :

$$K_x = \{z = y+\xi' | \ |y-x| \leq R+\delta_o, \ \ \xi' \in U\}$$

c'est un compact de R^d, et donc φ est uniformément continue sur ce compact.

D'autre part on sait que

(3.6) $$P(|y_x(s)-x| \geq R) \leq \frac{c_s}{R^2} \ .$$

On décompose (3.4)

(3.7) $$\begin{aligned} |\Psi_s(x,\xi)-\Psi_s(x',\xi')| \leq \ & E\chi_{|y_x(s)-y_{x'}(s)|\leq\delta} \, \chi_{|y_x(s)-x|\leq R} . |\varphi-\varphi'| \\ & + P(|y_x(s)-y_{x'}(s)|\geq\delta). \ 2\|\varphi\| \\ & + P(|y_x(s)-x|\geq R). \ 4\|\varphi\| \end{aligned}$$

---

(1) δ n'a ici rien à voir avec la notation (2.6).

si $|\varphi-\varphi'| = |\varphi(y_x(s)+\xi) - \varphi(y_{x'}(s)+\xi')|$.
Comme $|y_{x'}(s)-x| \leq |y_{x'}(s)-y_x(s)| + |y_x(s)-x|$, sur l'ensemble $\{\omega, |y_x(s)-y_{x'}(s)| \leq \delta,\ |y_x(s)-x| \leq R\}$ on a

$$y_x(s)+\xi \in K_x \text{ et } y_{x'}(s)+\xi' \in K_x ,$$

donc si
$$R_\varphi(\eta) = \sup_{\substack{x',x'' \in K_x \\ |x-x'| \leq \eta}} |\varphi(x')-\varphi(x'')|$$

le premier terme du second membre de (3.7) est inférieur à

$$R_\varphi(\delta+\delta^{3/2})$$

$$|\Psi_s(x,\xi)-\Psi_s(x',\xi')| \leq R_\varphi(\delta+\delta^{3/2}) + 2\|\varphi\|.C_s.\delta + \frac{C_s}{R^2} \tag{3.8}$$

En passant à la limite $\delta \downarrow 0$, puis $R \uparrow \infty$ on obtient que Ψ_s est continue. L'application du théorème de Lebesgue montre alors la continuité de

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s}\, \beta(s)ds\ \Psi_s(x,\xi) . \tag{3.9}$$

D'autre part $E_x^1 f(x_s)$ est continue en x car le processus est fellerien, $\int_0^s E_x^1 f(x_\sigma)d\sigma$ est continu en (x,s) et donc

$$c(\xi) + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}\beta(x)ds\left(\int_0^s E_x^1 f(x_r)dr + E_x^1\varphi(x_s+\xi)\right) \tag{3.10}$$

est continue bornée sur $R^d \times U$.
Comme on minimise sur U compact il en résulte que $M\varphi(x)$ est continue bornée, alors la continuité de u^n résulte des propriétés des problèmes d'arrêt optimal.

■

<u>Lemme 3.2.</u> <u>Sous les hypothèses du Lemme 3.1</u>

$$\underline{u^n(x) \geq u(x) \quad \text{en tout point.}} \tag{3.11}$$

<u>Démonstration.</u> On va réutiliser ici la construction faite au §.VI.2. On note $(W^1,\mathcal{B}^1) = (\Omega,\mathcal{F})$ (cf. (2.14), (2.16)).

Soit

$$(3.12)\qquad t_n^1(\omega^1) = \operatorname{Inf}(s \geq 0 \;\; u^n(x_s^1(\omega^1)) \geq M_1 u^{n-1}(x_s^1(\omega^1)))$$

t_n^1 est un temps d'arrêt de $\mathcal{B}_t^1$ et c'est le temps d'arrêt optimal pour le problème u^n. Si de plus

$$(3.13)\qquad \xi_n^1 \text{ minimise } \xi \to c(\xi) + \int_0^\infty \beta(\sigma)d\sigma \left\{ E^1_{x^1_{t_n^1}} \left[\int_0^\sigma \bar{e}^{\alpha r} f(x_r^1)dr + \bar{e}^{\alpha\sigma} u^{n-1}(x_\sigma^1+\xi) \right] \right\},$$

on a en notant $\tilde{P}_x^1 = P_x^1 \otimes P_{\rho o}^2$ et en définissant

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{P}_x^2 = \tilde{P}_x^1 \otimes \varepsilon_{\varphi_z} \quad \text{sur } \mathcal{G}_{t_n^1} \\ \tilde{P}_x^q(\theta_2^{-1}{}_{t_n^1} A \mid \mathcal{G}_{t_n^1}) = (\varepsilon_{\varphi_{z_{t_n^1}^1}} \otimes P_{x^1_{t_n^1}, 0, \xi_n^1})\,(A)\,. \end{array}\right.$$

On voit que

$$M_1 u^{n-1}(x^1_{t_n^1}(w^1)) = \tilde{E}_x^2 \left[\int_{t_n^1}^{t_n^1+\tau^1} \bar{e}^{\alpha(s-t_n^1)} f(x_s^2(w_2))ds + c(\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha\tau^1} u^{n-1}(x^2_{t_n^1+\tau^1}) \mid \mathcal{B}_{t_n^1} \right]$$

où il est entendu que

$$\tau^1 = \tau^1(w^2),$$
$$t_n^1 = t_n^1(w^1),$$
$$\xi^1 = \xi^1(w^1)$$

avec $\tau^1(w^1)$ premier instant de saut de $\xi_t^2(w^2)$ après $t_n^1(w^1)$. (noter que par définition de $P_{x^1_{t_n^1}, o\, \xi_n^1}$ on a

$$x^2_{t_n^1+\tau^1} = x^2_{(t_n^1+\tau^1)^-} + \xi_n^1 \quad \text{ps. }).$$

D'où

$$(3.14)\qquad u^n(x) = \tilde{E}_x^1\left[\int_0^{t_n^1} e^{-\alpha s} f(x_s^1)ds + e^{-\alpha t_n^1}\, c(\xi_n^1)\right] + \tilde{E}_x^2\left[\int_{t_n^1}^{t_n^1+\tau^1} e^{-\alpha s} f(x_s^2)ds + e^{-\alpha(t_n^1+\tau^1)} u^{n-1}(x^2_{t_n^1+\tau^1})\right]$$

D'autre part

$$(3.15)\qquad u^{n-1}(x^2_{t_n^1+\tau^1}) = \tilde{E}^2\left[\int_{t_n^1+\tau^1}^{t_n^2} e^{-\alpha(s-t_n^1-\tau^1)} f(x_s^2)ds + e^{-\alpha t_n^2}\, M_1\ u^{n-2}(x^2_{t_n^2})\ \Big|\mathcal{B}_{t_n^1+\tau^1}\right]$$

où $t_n^2 = \mathrm{Inf}(s \geq t_n^1+\tau^1\ ;\ u^{n-1}(x_s^2) \geq M_1 u^{n-2}(x_s^2))$ (où x_s^2 n'est que la composante diffusion).

Ceci résultant comme d'habitude des résultats sur les temps d'arrêt optimaux.

On obtient

$$(3.16)\qquad \begin{aligned} u^n(x) = {} & \tilde{E}_x^1\left(\int_0^{t_n^1} e^{-\alpha s} f(x_s^1)ds + e^{-\alpha t_n^1}\, c(\xi_n^1)\right) \\ & + \tilde{E}_x^2\left(\int_{t_n^1}^{t_n^2} e^{-\alpha s} f(x_s^2)ds + e^{-\alpha t_n^2}\, c(\xi_n^2)\right) \\ & + \tilde{E}_x^3\left(\int_{t_n^2}^{t_n^2+\tau^2} e^{-\alpha s} f(x_s^3)ds + e^{-\alpha(t_n^2+\tau^2)} u^{n-2}(x^3_{t_n^3+\tau^2})\right) \end{aligned}$$

et ainsi de suite d'où

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{E}_x^i\left[\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} e^{-\alpha s} f(x_s^i)ds + e^{-\alpha t_n^i}\, c(\xi_n^i)\right] + \tilde{E}_x^n\left[\int_{t_n^n}^{t_n^n+\tau^n} e^{-\alpha s} f(x_s^n)ds + e^{-\alpha(t_n^n+\tau^n)} u^o(x^n_{t_n^n+\tau^n})\right]$$

or

$$u^o(x^n_{t_n^n+\tau^n}) = \tilde{E}_x^n\left[\int_{t_n^n+\tau^n}^{+\infty} e^{-\alpha(s-t_n^n-\tau^n)} f(x_s^n)ds\,|\mathcal{B}_{t_n^n+\tau^n}\right]$$

=>

$$u^n(s) = J_x(v^n)$$

ou v^n est un contrôle admissible qui peut être décrit comme suit

Si l'on note $[w]_i = (w^1, w^2, \ldots, w^i)$ un élément de W^i

$$w^i = (\omega_1^i, \omega_2^i) \qquad \begin{array}{l} \omega_1^i \in \Omega^1 \\ \omega_2^i \in \Omega^2 \end{array}$$

ω_i^1 correspond à la composante diffusion

ω_i^2 correspond à la composante semi markovienne

$$(3.17) \qquad t_r^1(w^1) = \operatorname{Inf}(s \geq 0 \quad u^n(x_s^1(\omega_1^1)) \geq M_1 u^{n-1})$$

$$\tilde{t}^2(\omega) = \operatorname{Inf}(s \geq 0 \quad u^{n-1}(x_s(\omega)) \geq M_1 u^{n-2}(x_s(\omega)))$$

$$(3.18) \qquad t_n^2(w^1, w^2) = t_n^1(w_1) + \tau^1(w^1, w^2) + \tilde{t}^2(\omega_1^2) \circ \theta_{t_n^1(w^1) + \tau^1(w^1, w^2)}$$

...

$$(3.19) \qquad t_n^k(w^1, \ldots, w^k) = t_n^{k-1}(w_1, \ldots, w^{k-1}) + \tau^{k-1}(w^1, \ldots, w^k)$$

$$+ \tilde{t}^k(\omega_1^k) \circ \theta_{t_n^{k-1}(w^1 \ldots w^{k-1}) + \tau^{k-1}(w^1 \ldots, w^k)}$$

où à chaque fois $\tau^{k-1}(w^1, \ldots, w^k)$ est le premier instant de saut de $\xi_s^k(w^k)$ après $t^{k-1}(w^1, \ldots, w^{k-1})$; donc

$$u^n(x) \geq u(x).$$

■

<u>Lemme 3.3.</u> | <u>Sous les hypothèses du lemme 3.1,</u>
<u>$u^n(x) \to u(x) \quad \forall x$</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit $v = (t^i, \xi^i)_{i \geq 1}$ un contrôle admissible. On peut toujours considérer que u^n est la borne inférieure d'un problème de temps optimal posé sur $(\Omega, \mathcal{F})$ au lieu de $(\Omega^1, \mathcal{F}^1)$, vue la définition de $\tilde{P}_x^1$.

=>

$$(3.20) \qquad u^n(x) \leq \tilde{E}_x^1 \left(\int_0^{t^1} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s^1) ds + \bar{e}^{\alpha t^1} M_1 u^{n-1}(x_{t^1}^1) \right)$$

de même

$$(3.21) \qquad M_1 u^{n-1}(x^1_{t^1}) \leq \tilde{E}^2_x \left\{ \int_{t^1}^{t^1+\tau^1} e^{-\alpha(s-t^1)} f(x^2_s) + c(\xi^1) + e^{-\alpha\tau^1} u^{n-1}(x^2_{t^1+\tau^1}) | \mathcal{B}_{t^1} \right\}$$

car $x^2_{t^1+\tau^1} = x^2_{(t^1+\tau^1)-} + \xi^1 \quad \tilde{P}^2_x$ ps (et dans $M_1 u^{n-1}$ on prend l'infinimum en ξ), en refaisant le raisonnement du lemme 3.2 on obtient maintenant

$$(3.21) \qquad u^n(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{E}^i_x \left(\int_{t^{i-1}}^{t^i} e^{-\alpha s} f(x^i_s) ds + c(\xi^i) e^{-\alpha t^i} \right) + \tilde{E}^n_x \left[\int_{t^n}^{t^n+\tau^n} e^{-\alpha s} f(x^n_s) + e^{-\alpha(t^n,\tau^n)} u^o(x^n_{t^n+\tau^n}) \right]$$

Comme on a vu que

$$\tilde{P}^n_x \ (t^n < T) \to 0 \qquad \forall \ T \text{ fini}$$

le dernier terme tend vers 0 quand $n \to + \infty$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x) \leq J_x(v)$$

Comme v est arbitraire. On obtient avec le lemme 3.3.,

$$u^n(x) \to u(x) \qquad \forall \ x \ .$$

∎

<u>Lemme 3.4.</u> <u>Sous les hypothèses du lemme 3.2.</u>

$$u^n \to u \quad \text{dans} \quad C^o_b(R^d)$$

<u>Démonstration.</u>

On va montrer que

$$(3.22) \qquad \| u^n - u^{n-1} \| \leq k \| u^{n-1} - u^{n-2} \|$$

pour $0 < k < 1$.

Ceci montrera que $u^n \to \tilde{u}$ dans $C_b^o(E)$. La convergence simple du lemme 3.4 donnera alors $\tilde{u} = u$.

Montrons (3.22) : notons J_x^n et J_x^{n-1} les espérances intervenant dans u^n et u^{n-1}. On a

$$|J_x^n(\tau)-J_x^{n-1}(\tau)| \le E_x \, \bar{e}^{\alpha\tau} |M_1 u^{n-1} - M_1 u^{n-2}| ,$$

$$\le \int_0^\infty \beta(\sigma)\bar{e}^{\alpha\sigma} \| u^{n-1} - u^{n-2} \| \, d\sigma ,$$

avec $\beta(\sigma) = \lambda(\sigma) \exp\left(-\int_0^\sigma \lambda(r)dr\right)$

$$\int_0^\infty \beta(\sigma)\bar{e}^{\alpha\sigma} d\sigma = \left[\bar{e}^{\alpha\sigma} \left(-e^{-\int_0^\sigma \lambda(r)dr}\right) \right]_0^\infty$$

$$- \alpha \int_0^\infty \bar{e}^{\alpha\sigma} \, e^{-\int_0^\sigma \lambda(r)dr} \, d\sigma ,$$

$0 \le \lambda(r) \le M$

$$e^{-\int_0^\sigma \lambda(r)dr} \ge \bar{e}^{M\sigma} ,$$

$$\alpha \int_0^\infty \bar{e}^{\alpha\sigma} \, e^{-\int_0^\sigma \lambda(r)dr} \, d\sigma \ge \alpha \int_0^\infty \bar{e}^{(\alpha+M)\sigma} d\sigma ,$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+M} ,$$

=>

$$\int_0^\infty \beta(\sigma)\bar{e}^{\alpha\sigma} d\sigma \le 1 - \frac{\alpha}{\alpha+M} = \frac{M}{\alpha+M} < 1 ,$$

d'où le résultat.

■

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses du lemme 3.1, u est l'unique solution de l'équation

$$(3.24) \qquad u(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^1 \left\{ \int_0^\tau \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu(x_\tau) \right\} .$$

(P_x^1 désignant la diffusion pure cf. le début du §. VI.3).

Démonstration.

Avec les notations du lemme 3.4, si $\tilde{u}(x)$ désigne

$$\operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^1 \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu(x_\tau)$$

et si

$$I_x(\tau) = E_x^1 \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\, Mu(x_\tau)$$

On a

$$\| I_x(\tau) - J_x^n(\tau)\| \leq \| u^n - u\|$$

=>

$$\| u^n - \tilde{u}\| \to 0 \text{ quand } n \uparrow \infty \,.$$

donc $\tilde{u} = u$.

■

Théorème 3.2.

Sous les hypothèses du lemme 3.1. Il existe un contrôle optimal au problème (2.31).

La démonstration est identique à celle du lemme 3.2. On note $\hat{\xi}(x)$ un élément réalisant le minimum de

$$\xi \to c(\xi) + \int_0^{\infty} -\beta(\sigma)d\sigma \; \{E_x\left(\int_0^{\sigma} e^{-\alpha s} f(x_s)ds \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha\sigma} u(x_\sigma + \xi)\right) \}$$

$t^1 = \operatorname{Inf}(s \geq 0 \quad u(x_s^1) \geq Mu(x_s^1))$

$\xi^1 = \hat{\xi}(x_{t^1}^1)$

$t^2 = \operatorname{Inf}(s \geq t^1 + \tau^1 \quad u(x_s^2) \geq Mu(x_s^2))$

où τ^1 est le premier instant de saut de ξ_t^2 etc... et on vérifie comme au lemme 3.2 que

$$u(x) = J_x(\hat{v})$$

$\hat{v} = (t^i, \xi^i) \quad i \geq 1$.

■

On note

$$H = \{\varphi | \varphi\, e^{-\gamma|x|} \in L^2(R^d)\} \;.\quad \gamma > 0$$

$$V = \{\varphi | \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in H \qquad i=1,d\}$$

$$a(u,v) = \sum_{ij} \int_{R^d} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} e^{-2\gamma|x|} dx$$

$$+ \sum_{ij} \int_{R^d} (a_j - 2\gamma \frac{x_i}{|x|} \cdot a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} . v\, e^{-2\gamma|x|} dx.$$

$$+ \alpha \int_{R^d} uv\, e^{-2\gamma|x|} dx$$

avec $a_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)_{ij}$, $a_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} - g_i$.

<u>Théorème 3.3.</u>

<u>Sous les hypothèses du Lemme 3.1., u est solution unique de l'IQV</u> ,

$$\left\{\begin{array}{l} a(u,v-u) \geq (f,v-u) \\ v \leq Mu \\ v \in V \\ u \leq Mu \\ u \in V \end{array}\right.$$

<u>Démonstration</u>.

Il résulte des travaux de A.BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11], que u^n est solution <u>unique</u> de l'IV

$$\left\{\begin{array}{l} a(u^n,v-u^n) \geq (f,v-u^n) \\ u^n \leq Mu^{n-1} \\ v \leq Mu^{n-1} \\ u^n,\ v \in V \end{array}\right.$$

de plus il résulte de la démonstration de A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11], que

$$\| u^n \|_V \leq \text{constante}$$

donc que (par passage à une sous suite encore notée u^n)

$$u^n \to \tilde{u} \quad \text{dans } V \text{ faible}$$

or $$u^n \to u \quad \text{dans } H \text{ fort} \quad (\text{car dans } C_b^o(R^d))$$

Donc $u^n \to u$ dans V faible (et toute la suite converge).
Comme $u^n \geq u \Rightarrow Mu^{n-1} \geq Mu$ en prenant $v \in V \quad v \leq Mu$ on a

$$a(u,v) - (f,v-u^n) \geq a(u^n,u^n)$$

$\Rightarrow$

$$a(u,v) - (f,v-u) \geq \operatorname*{Lim\,Inf}_{u \to \infty} a(u^n,u^n) \geq a(u,u)$$

d'où le résultat car $u \leq Mu$ résulte des théorèmes précédents.
L'unicité se démontre comme dans Laetsch puisque le résultat d'unicité de la solution de l'IV et son interprétation stochastique donne le résultat de comparaison dont on a besoin.

∎

VI.4. <u>GENERALISATIONS</u>.

- <u>Cas non homogène</u> : en considérant le processus (t,x_t) le problème se résout de la même façon. On obtient seulement u comme solution maximum d'une <u>IQV faible</u>.

- <u>Autres processus de Markov</u> : dans le cas des processus de Markov fellerien vérifiant les hypothèses du cas retard déterministe (cf. Chap. II), on peut traiter les problèmes de remplacement optimal comme précédemment : les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 sont les mêmes.

Bien entendu, on obtient une IQV que dans certains cas particuliers (ce sera pour les processus semi markoviens par exemple).

ANNEXE 3

Démonstration du lemme VI.1.2.

On commencera par démontrer que

$$(1) \qquad (P_t f)(x,\rho,\xi) = \int P_{x\rho\xi}(d\omega) f(z_t(\omega))$$

où $z_t = (y_t, \rho_t, \xi_t)$, se met sous la forme

$$(2) \qquad (P_t f)(x,\rho,\xi) = \exp\left(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda(\alpha)d\alpha\right)\Pi_t f(x,\rho+t,\xi)$$

$$+ \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp\left(-\int_\rho^{\rho+v} \lambda(\alpha)d\alpha\right)dv \int_{R^n} \Pi(x,v,dy)P_{t-v}f(y+\xi,0,0)$$

on montrera alors que ceci est un semi groupe comme $P_{x\rho\xi}$ est un noyau markovien (au sens de Meyer [47]) ceci donnera la propriété de Markov. On montre ensuite la propriété de Feller qui donnera la propriété forte de Markov (Feller + continu à droite => Markov fort cf. [21], [48]).

(a) Démonstration de (2).

On suppose donc $\xi \neq 0$

$$(P_t f)(x,\rho,\xi) = E_{x\rho\xi}[f(z_t)]$$

$$(3) \qquad = E_{x\rho\xi}[f(z_t)1_{\tau>t}] + E_{x\rho\xi}[f(z_t)1_{\tau \leq t}]$$

$$= \qquad I \qquad + \qquad II$$

$f(z_t)1_{\tau>t}$ est $\mathcal{F}_{\tau^-}$ mesurable donc

$$I = E^{Q}_{x\rho\xi}\left[f(z_t).1_{\tau>t}\right]$$

qui d'après la définition de $Q_{x\rho\xi}$ est égal à

$$I = \exp\left(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda(\alpha)d\alpha\right) \int_{R^n} \Pi(x,t,dz)f(z,\rho+t,\xi)$$

(Remarquer que pour $Q_{x\rho\xi}$ y_t et (ρ_t,ξ_t) sont indépendants)

Soit encore

$$I = \exp(-\int_{\rho}^{\rho+t} \lambda(\alpha)d\alpha)\ \Pi_t f(x,\rho+t,\xi)\ .$$

D'autre part

$$II = E_{x\rho\xi}\ [1_{\tau \leq t}\ E_{x\rho\xi}[f(z_t)|\mathcal{F}_{\tau-}]]$$

$$= E_{x\rho\xi}\ [1_{\{\tau \leq t\}}(\omega)\ E^{Q}_{y_{\tau-}+\xi_{\tau-},0,0}[f(z_{t-\tau(\omega)}(.))]]$$

or (pour $t \geq \tau(\omega)$)

$$E^{Q}_{y_{\tau-}+\xi_{\tau-}(\omega),0,0}[f(z_{t-\tau(\omega)}(.))] = \Pi_t f(y_{\tau-}+\xi_{\tau-}(\omega),t-\tau(\omega),0)$$

de plus

$$P_{x\rho\xi}[\tau \leq t\quad y_{\tau-} \in \Gamma] = Q_{x\rho\xi}[\tau \leq t\quad y_{\tau} \in \Gamma]$$

$$= \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_{\rho}^{\rho+v} \lambda(\alpha)d\alpha)dv\ \Pi(x,v,\Gamma)$$

d'où

$$II = \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_{\rho}^{\rho+v} \lambda(\alpha)d\alpha)dv\int_{R^n} \Pi(x,v,dz)\Pi_t f(z+\xi,t-v,0)$$

d'où (2).

(b) P_t est un semi groupe.

On veut vérifier $P_t\ P_s\ f(z) = P_{t+s}f(z)$ (4)

$$(P_s f)(\bar{x},\bar{\rho},\bar{\xi}) = \exp(-\int_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}+s} \lambda(\alpha)d\alpha)(\Pi_s f)(\bar{x},\bar{\rho}+s,\bar{\xi})$$

$$+ \int_0^s \lambda(\bar{\rho}+v)\exp(-\int_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}+v} \lambda(\alpha)d\alpha)\int\Pi(\bar{x},v,dx')\Pi(x'+\bar{\xi},s-v,dx'')f(x'',s-v,0)$$

$$(P_t(P_s f))(x,\rho,\xi) = \exp(-\int_{\rho}^{\rho+t} \lambda(\alpha)d\alpha)\int\Pi(x,t,dx')(P_s f)(x',\rho+t,\xi)$$

$$+ \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_{\rho}^{\rho+v} \lambda(\alpha)d\alpha)\int\Pi(x,v,dx')\Pi(x'+\xi,t-v,dy)(P_s f)(y,t-v,0)$$

$$= I + II$$

$$I = \exp[-\int_\rho^{\rho+t}]\int \Pi(x,t,dx')\{\exp(-\int_{\rho+t}^{\rho+t+s}\lambda(\alpha)d\alpha)\Pi_s f(x',\rho+t+s,\xi)$$

$$+\int_o^s \lambda(\rho+t+v)\exp(-\int_{\rho+v}^{\rho+t+v}\lambda\ )\int \Pi(x',v,dx'')\Pi(x''+\xi,s-v,dy)f(y,s-v,0)\}$$

$$= I_1 + I_2$$

et $$I_1 = \exp(-\int_\rho^{\rho+t+s}\lambda(\alpha)d\alpha)\Pi_{t+s}f(x,\rho+t+s,\xi)$$

<u>d'autre part</u>, compte tenu de $(P_s f)(y,t-v,0) = \Pi_s f(y,t+s-v,0)$, on a

$$II = \int_o^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_\rho^{\rho+v}\lambda(\alpha)d\alpha)\int \Pi(x,v,dx')\Pi(x'+\xi,t+s-v,dy)$$
$$f(y,t+s-v,0)$$

dans I_2 on pose $v+t = u$ =>

$$I_2 = \int_t^{t+s}\lambda(\rho+u)\exp(-\int_\rho^{\rho+u})\int \Pi(x,u,dx'')\Pi(x''+\xi,s+t-u,dy)$$
$$f(y,t+s-u,0)$$

=>

$$I_2 + II = \int_o^{t+s}\lambda(\rho+u)\exp(-\int_\rho^{\rho+u})\int \Pi(x,u,dx'')\Pi(x''+\xi,s+t-u,dy)$$
$$f(y,t+s-u,0)$$

=>

$$(P_t[P_s f])(x,\rho,\xi) = \exp(-\int_\rho^{\rho+t+s})\Pi_{t+s}f(x,\rho+t+s,\xi)$$

$$+\int_o^{t+s}\lambda(\rho+v)\exp(-\int_\rho^{\rho+v}\lambda(\alpha)d\alpha)\int \Pi(x,v,dx')\Pi(x'+\xi,t+s-v,dy)$$
$$f(y,t+s-u,0)$$

$$= (P_{t+s}f)\ (x,\rho,\xi)$$

d'où (4).

<u>(c) Propriété de Feller.</u>

Soit $E = R^n \times R^+ \times R^{n+}$, $R^n \times R^+$ est muni de la topologie ordinaire, R^{n+} de la <u>topologie discrète</u>.

On veut montrer que $\forall$ f continue bornée sur E

(5) $$P_t f(x) \to f(x) \quad t \to 0 \qquad \forall x$$

et

(6) $P_t f$ est continue bornée sur E

(cf. Meyer [48]. Chapitre XIII).

Démonstration de (5).

Rappellons que pour $\xi \neq 0$

(7) $$P_t f(x,\rho,\xi) = \exp(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda)\, \Pi_t f(x,\rho+t,\xi)$$
$$- \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_\rho^{\rho+t})dv \int_{R^n} \Pi(x,v,dy)\Pi_{t-v} f(y+\xi,t-v,0)$$

(8) $$P_t f(x,\rho,0) = \Pi_t f(x,\rho+t,0)$$

le second terme de (7) s'écrit

$$\int_0^t \varphi(v,x,\xi)d\xi \quad \text{avec } \varphi \text{ borné donc}$$

ce terme $\to 0$ quand $t \to 0$

pour le premier terme de (7), il suffit de montrer que

$$\Pi_t f(x,\rho+t,\xi) \to f(x,\rho,\xi) \quad t \to 0$$

or

$$\Pi_t f(x,\rho,\xi) = E_{x\rho\xi}[f(y_t,\rho_t,\xi) \quad \tau > t\ ]$$

($\xi \neq 0$), or

$\tau > 0$ ps. pour la mesure $P_{x\rho\xi}$ et y_t, ρ_t continu à droite, comme f est continue en x, ρ on a le résultat cherché.

Démonstration de (6).

On le fait pour $\xi \neq 0$ (c'est évident pour $\xi = 0$) il suffit de montrer que

$$P_t f(\bar{x},\bar{\rho},\xi) \to P_t f(x,\rho,\xi) \quad \text{quand } \bar{x},\ \bar{\rho} \to x,\ \rho$$

On pose

$$I = P_t f(x,\rho,\xi) - P_t f(\bar{x},\bar{\rho},\xi)$$

On a

$$I = I_1 + I_2$$

où

$$I_1 = \alpha(\rho)[\Pi_t f(x,\rho+t,\xi) - \Pi_t f(\bar{x},\bar{\rho}+t,\xi)]$$

$$+ [\alpha(\rho)-\alpha(\bar{\rho})]\Pi_t f(\bar{x},\bar{\rho}+t,\xi)$$

où $\alpha(\rho) = \exp(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda(s)ds)$ et

$$I_2 = \gamma(\rho)[\int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_0^{\rho+v}\lambda)\varphi_v(x) - \int_0^t \lambda(\bar{\rho}+v)\exp(-\int_0^{\bar{\rho}+v}\lambda)\varphi_v(x)]$$

$$+ [\gamma(\rho)-\gamma(\bar{\rho})].\int_0^t \lambda(\bar{\rho}+v)\exp(-\int_0^{\bar{\rho}+v}\lambda)\ \varphi_v(\bar{x})$$

où $\gamma(\rho) = \exp[\int_0^\rho \lambda(s)ds]$, $\varphi_v(x) = \int_{R^n} \Pi(x,v,dy)\Pi_{t-v} f(y+\xi,t-v,0)$,

$$|[\alpha(\rho)-\alpha(\bar{\rho})]\ \Pi_t f(\bar{x},\bar{\rho}+t,\xi)| \to 0$$

car α continu et $\Pi_t f$ borné, le premier terme de I_1 devient

$$II_1 = \alpha(\rho)[\Pi_t f(x,\rho+t,\xi) - \Pi_t f(\bar{x},\rho+t,\xi)]$$

$$+ \alpha(\rho)[\Pi_t f(\bar{x},\rho+t,\xi) - \Pi_t f(\bar{x},\bar{\rho}+t,\xi)]$$

dont le premier terme tend vers 0 car Π_t est fellerien, le second terme s'écrit

$$\alpha(\rho)\int_{R^n} dz\ p(\bar{x},t,z)\ [f\ (z,\rho+t,\xi) - f(z,\bar{\rho}+t,\xi)]$$

$$p(\bar{x},t,z) \to p(x,t,z) \quad \forall\ z \quad (t > 0)$$

$$f(z,\bar{\rho}+t,\xi) - f(z,\rho-t,\xi) \to 0 \quad \forall\ z$$

par le théorème de Lebesgue l'intégrale $\to 0$ ($p(\bar{x},t,z)$ est <u>borné</u> uniformément en z pour $t > 0$);

le second terme de I_2 tend vers 0 car γ est continu et multiplié par un facteur borné.

Le premier terme de I_2 s'écrit III + IV avec

$$III = \gamma(\rho) \int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_0^{\rho+v})dv[\varphi_v(x)-\varphi_v(\bar{x})]$$

pour lequel on applique Lebesgue ($\varphi_v(x)$ est continu) , et de même pour

$$IV = \gamma(\rho) \int_0^t [\lambda(\rho+v)\exp(-\int_0^{\rho+v} \lambda(s)ds)-\lambda(\bar{\rho}+v)\exp(-\int_0^{\bar{\rho}+v})]\varphi_v(\bar{x})dv$$

donc

(d) Générateur infinitésimal (faible) de P_t

On peut montrer que pour toute fonction $f(x,\rho,\xi)$ mesurable bornée, telle que $f(\cdot,\cdot,\xi) \in C_b^{n,1}(R^n \times R^+)$ pour tout ξ fixé,

$$\lim_{t\to 0} (\frac{P_t f-f}{f})(x,\rho,\xi)$$

existe et définit une fonction mesurable bornée

$$\sup_{x,\rho,\xi} \left|\frac{P_t f-f}{t}\right| \leq C \quad \text{(indépendante de t)}$$

on a alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t f-f}{t} = Af$$

où A est le générateur infinitésimal faible du semi groupe S_t (cf. Dynkin [21] p. 36).

Effectuons le calcul pour $\xi \neq 0$

$$\frac{P_t f-f}{t}(x,\rho,\xi) = \frac{1}{t}[\exp(-\int_\rho^{\rho+t} \lambda)\Pi_t f(x,\rho+t,\xi)-f(x,\rho,\xi)]$$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(\rho+v)\exp(-\int_\rho^{\rho+v}\lambda)dv\int_{R^n} \Pi(x,v,dy)\Pi_{t-v} f(y+\xi,t-v,0)$$

$$= I + II$$

$$I = \frac{1}{t}\exp\left(-\int_\rho^{\rho+t}\lambda\right)[\Pi_t f(x,\rho+t,\xi)(f(x,\rho,\xi)]$$
$$+\frac{1}{t}\left(\exp\left(-\int_\rho^{\rho+t}\lambda\right)-1\right)f(x,\rho,\xi) \;=\; I_1 + I_2$$

On a
$$\Pi_t f(x,\rho+t,\xi) = f(x,\rho,\xi) + \int_o^t \Pi_s\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}+Af\right)(x,\rho+s,\xi)ds$$

où A est le générateur de la diffusion Π_t car ceci est la formule de Ito appliquée à

$$\varphi(x,t) = f(x,\rho+t,\xi) \qquad (\xi \text{ fixé})$$

comme
$$\exp\left(-\int_\rho^{\rho+t}\lambda(s)ds\right) \to 1 \;,$$

On a
$$I_1 \to \left(\frac{\partial f}{\partial\rho} + Af\right)(x,\rho,\xi) \;.$$

D'autre part
$$\exp - \int_\rho^{\rho+t}\lambda(s)ds = 1 - t\,\lambda(\rho+\theta t)\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\theta t}\lambda(s)ds\right) \;,$$

$0 < \theta < 1$,

d'où $I_2 \to -\lambda(\rho)f(x,\rho,\xi)$ ($\lambda(\rho)$ continu borné).

Enfin II s'écrit
$$II = \frac{1}{t}\int_o^t \Psi(t,v)dv$$

où $\Psi(t,v)$ est une fonction continue bornée et $\Psi(0,0)=\lambda(\rho)f(x+\xi,0,0)$
$\Rightarrow$
$$II \to \Psi(0,0) = \lambda(\rho)f(x+\xi,0,0).$$

Enfin grâce au fait que f est borné, Π_t fellerien et λ borné, on a faiblement $\frac{P_t f-f}{t}$ borné; (il y aurait une difficulté quand le retard est $\leq \tau$, (τ fixé), avec une probabilité 1, dans ce cas $\lambda(\rho) \to \infty$ quand $\rho \to \tau$).

VII

PROBLEMES DONNANT LIEU

A DES SYSTEMES D'INEQUATIONS

Préliminaires.

Commençons par un exemple illustrant ce type de problèmes : soit un système de production comportant m machines identiques tel que , quand j machines produisent, la production résultante x_t évolue comme un processus de Markov X^j. On suppose que la production coute $f(j;x)$ quand j machines sont en marche, et le passage de j à j' machines coute $c(j,j')$(coût d'arrêt ou de dématrage suivant que $j' < j$ ou $j' > j$). On cherche alors les meilleurs dates de décisions et le nombre de machines à faire fonctionner à ces dates de façon à minimiser un coût global tenant compte de f et c. Ce type de problème a été étudié par A.BENSOUSSAN - J.L. LIONS dans le cas où X^j est un processus de diffusion; un problème analogue a été étudié par LEGUAY [37], pour la gestion d'un parc de centrales thermiques (production d'électricité) et on trouvera dans [55], une application au contrôle du nombre de serveurs dans une file d'attente. ZABCYCK [76], [77] donne une formulation de ce problème dans le cas instantané pour des processus de Markov standard, mais sans démontrer semble-t-il l'existence d'un contrôle optimal.

VII.1. HYPOTHESES - NOTATIONS - POSITION DU PROBLEME.

On note toujours $\Omega = D(0,\infty,E)$, comme au §. II.1
$\mathcal{F}_t$ est encore la complétée universelle de la tribu canonique $\sigma\{x_s, s \leq t\}$. On suppose donnée, une famille finie de processus de Markov

(1.1) $X^j = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \theta_t, x_t, P_x^j)$, $j \in \{0,1,\ldots,M\}$ vérifiant les hypothèses (1.2) à (1.5) de II.1 en notant $\Phi^j(t)$ les semi groupes correspondant.

On pose $U = \{0,1,2,\ldots,M\}$.
On suppose donnés :

(1.2) $f(j,x)$ sur $U \times E$, ≥ 0, bornée, continue par rapport à x
$c(j,j') \geq k > 0$ sur $U \times U$.

On formulera ici deux problèmes : avec et sans retard.
On note

(1.3) $\mathcal{V}_0$ l'ensemble des suites $v = \{\tau^i, \xi^i\}_{i \geq 1}$ de temps d'arrêt τ^i (par rapport à $\mathcal{F}_t$), $\tau^{i+1} \geq \tau^i$, et de variables aléatoires ξ^i, à valeurs dans U et $\mathcal{F}_{\tau^i}$ mesurables.

On note aussi, pour $h > 0$ donné, $\mathcal{V}_h$ l'ensemble

$$(1.4) \qquad \mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{V}_0 \mid \tau^{i+1} \geq \tau^i + h \ , \ \forall i \geq 1\}.$$

α étant un réel > 0 donné, on utilisera le lemme suivant pour définit l'état du système correspondant à un contrôle.

<u>Lemme VII.1.1.</u> <u>Soit τ un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$, ξ une v.a $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans U, $x \in E$, $j \in U$ donnés, alors il existe P^1 probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que</u>

$$(1.5)\qquad \begin{cases} P^1 = P^j_x \quad \text{sur } \mathfrak{F}_\tau \\ E^1(\{\tau < +\infty\}.H.Z \circ \theta_\tau) = E^j_x\,\{\chi_{\tau < +\infty}\, H.E^{\xi}_{x_\tau}(Z)\} \end{cases}$$

$\forall$ H v.a à valeurs dans R, $\mathfrak{F}_\tau$ mesurable
$\forall$ Z v.a à valeurs dans R, $\mathfrak{F}$ mesurable.

Démonstration.

On en donne les grandes lignes, car elle est analogue (en plus simple) aux démonstrations des annexes 1 et 2. On pose $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega$, $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_\tau \otimes \mathfrak{F}$ et on définit $\tilde{P}$ sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}})$ par

$$\int_{\tilde{\Omega}} g(\omega,\omega')\tilde{P}(d\omega,d\omega') = \int_{\tilde{\Omega}} g(\omega,\omega')P^j_x(d\omega).P^{\xi(\omega)}_{x_\tau(\omega)}(d\omega')\chi_{\tau < +\infty}(\omega)$$
$$+ \int_{\tilde{\Omega}} g(\omega,\omega')\ \chi_{(\tau=+\infty)}(\omega)P^j_x(d\omega)P^j_x(d\omega')\ ,$$

$(\chi_{\tau<+\infty}(\omega).P^{\xi(\omega)}_{x_\tau(\omega)}(d\omega') + \chi_{\tau=+\infty}(\omega)\ P^j_x$

est une probabilité de transition de $(\Omega,\mathfrak{F}_\tau)$ dans $(\Omega,\mathfrak{F})$).
On définit un sous ensemble de $\tilde{\Omega}$ par

$$J = \{(\omega,\omega'),\quad \tau(\omega) < +\infty\ ;\ x_\tau(\omega) = x_0(\omega')\} \cup \{\tau = +\infty\}$$

c'est un élément de $\tilde{\mathfrak{F}}$, et $\tilde{P}$ est concentrée sur J. On définit ensuite une application de $J \to \Omega$ notée $\varphi(\omega,\omega')$ et donnée par

$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_t(\omega) \qquad t \leq \tau(\omega)$$
$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_{t-\tau(\omega)}(\omega') \qquad t > \tau(\omega)$$

si $\tau(\omega) < +\infty$, et si $\tau(\omega) = +\infty$

$$x_t(\varphi(\omega,\omega')) = x_t(\omega) \qquad t \geq 0\ .$$

On vérifie que cette application est mesurable de $(J,\tilde{\mathfrak{F}}_{|J})$ dans $(\Omega,\mathfrak{F}^0)$. On définit alors P^1 comme image de $\tilde{P}$ par φ puis on étend P^1 à $(\Omega,\mathfrak{F})$. La vérification des propriétés (1.5) s'effectue comme à l'annexe 1.

On démontre également, comme au lemme II.1.1, que $x_{\tau+t}$ $t \geq 0$ possède la propriété de Markov pour la famille $(\mathcal{F}_{\tau+t},\ t \geq 0)$, et la probabilité P^1.

∎

Bien entendu le lemme précédent est le même si P^j_x est remplacé par une probabilité quelconque sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

On définit alors le <u>problème sans retard</u>.

<u>Pb. 0</u> : à $v \in \mathcal{V}_o$, $j \in U$, $x \in E$, on associe la suite de probabilité $\bar{P}^n_{jx}$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$, (on omet j,x ensuite),

$$\bar{P}^o = P^j_x$$

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \bar{P}^1 = \bar{P}^o \text{ sur } \mathcal{F}_{\tau^1} \\ \bar{P}^1(A \cap \theta^{-1}_{\tau^1} B) = \bar{E}^o(\chi_A . P^{\xi^1}_{x_{\tau^1}}(B)) \end{cases}$$

$\forall\, A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \subset \{\tau^1 < +\infty\}$, $\forall\, B \in \mathcal{F}$.

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \bar{P}^2 = \bar{P}^1 \text{ sur } \mathcal{F}_{\tau^2} \\ \bar{P}^2(A \cap \theta^{-1}_{\tau^2} B) = \bar{E}^1(\chi_A . P^{\xi^2}_{x_{\tau^2}}(B)) \end{cases}$$

$\forall\, A \in \mathcal{F}_{\tau^2}$, $A \subset \{\tau^2 < +\infty\}$, $\forall\, B \in \mathcal{F}$.

etc...

On définit un critère approché

$$(1.8)\qquad J^N_{jx}(v) = \bar{E}^{N-1}_{jx} \int_0^{\tau^N} \bar{e}^{\alpha s} f(v_s,x_s)ds + \sum_{i=1}^{N} \bar{e}^{\alpha\tau^i}\ c(\xi^{i-1},\xi^i)$$

où

$$(1.9)\qquad \begin{cases} v_s = \xi^{i-1} & s \in [\tau^{i-1},\tau^i[\quad i \geq 2 \ , \\ v_s = j & s \in [0,\tau^1[\ . \end{cases}$$

Puis

$$J_{jx}(v) = \lim_{N \to \infty} J^N_{jx}(v) \tag{1.10}$$

($J^N_{jx}(v)$ est croissant en N, car f et c sont positifs, donc éventuellement ceci est égal à $+\infty$).

On remarquera que tout contrôle tel que $J_{jx}(v) < +\infty$ est tel que

$$\bar{E}^{N-1}_{jx}(e^{-\alpha\tau^N}) \to 0 \quad , \quad \text{quand } N \uparrow \infty$$

ou encore

$$\bar{P}^{N-1}_{jx}(\tau^N < T) \to 0 \text{ , quand } N \uparrow \infty .$$

$\forall$ T fini. On pourrait donc, quand $J_{jx}(v) < +\infty$, construire une probabilité sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ égale à $\bar{P}^{N-1}$ sur $\mathfrak{F}_{\tau^N}$. Mais ceci n'est pas indispensable dans la suite.

On définit enfin

$$u(j,x) = \inf_{v \in \mathcal{V}_o} J_{jx}(v) \tag{1.11}$$

Le problème avec retard sera défini de façon analogue .

<u>Pb. h</u> : Pour $v \in \mathcal{V}_h$, $j \in U$, $x \in E$, on définit

$$\bar{P}^o = P^j_x$$

$$\begin{cases} \bar{P}^1 = \bar{P}^o \quad \text{sur } \mathfrak{F}_{\tau^1+h} \\ \bar{P}^1(A \cap \theta^{-1}_{\tau^1+h} B) = \bar{E}^o(\chi_A . P^{\xi^1}_{x_{\tau^1+h}}(B)) \end{cases} \tag{1.12}$$

$\forall A \in \mathfrak{F}_{\tau^1+h}$, $A \subset \{\tau^1 < +\infty\}$, $\forall B \in \mathfrak{F}$

etc...

Puis

$$J^n_{jx}(v) = E^{N-1}_{jx}\left\{\int_o^{\tau^N+h} e^{-\alpha s} f(v_s,x_s)ds + \sum_{i=1}^N e^{-\alpha\tau^i} c(\xi^{i-1},\xi^i)\right\} \tag{1.13}$$

où

$$\begin{cases} v_s = \xi^{i-1} & s \in [\tau^{i-1}+h, \tau^i+h[\text{ ,} \\ v_s = j & s \in [o, \tau^1+h[\text{ .} \end{cases} \tag{1.14}$$

(1.15) $$J_{jx}(v) = \operatorname*{Lim}_{N\nearrow\infty} J^N_{jx}(v)$$

(1.16) $$u(j,x) = \operatorname*{Inf}_{v\in\mathcal{V}_h} J^N_{jx}(v)$$

mais ici on a toujours $\tau^N \uparrow +\infty$ $(\forall\ \omega)$, donc on peut toujours définir P^v_{jx} sur $(\Omega,\mathcal{F})$ par $P^v_{jx} = P^{N-1}_{jx}$ (sur $\mathcal{F}_{(\tau^N+h)}$ cf. également §. II).

Ceci posé on réutilisera les techniques du chapitre II pour le cas Pb. h. On fera les démonstrations dans ce cas puis dans le cas instantané. Le fait que $j \in U$ fini amène quelques simplifications par rapport aux problèmes du chapitre V.

VII.2. ETUDE DU PROBLEME AVEC RETARD.

On définit

(2.1) $$u^o(j,x) = E_x^j \int_o^{+\infty} e^{-\alpha s} f(j,x_s)ds = R_\alpha^j f$$

si R_α^j est la résolvante du semi groupe $\Phi^j(t)$.

(2.2) $$u^n(j,x) = \operatorname*{Inf}_\tau E_x^j \left\{ \int_o^\tau e^{-\alpha s} f(j,x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu^{n-1}(j,x_\tau) \right\}$$

où

(2.3) $$Mu^{n-1}(j,x) = E_x^j \int_o^h e^{-\alpha s} f(j,x_s)ds$$
$$+ \operatorname*{Inf}_{j' \in U} [c(j,j') + e^{-\alpha h} E_x^j u^{n-1}(j',x_h)]$$

et où l'infimum dans (2.2) est pris sur les temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$. On remarque que u^{n-1} étant donnée sur $U \times E$, j est un paramètre dans (2.2). (i.e on a un problème de temps d'arrêt optimal pour chaque $j \in U$).

Lemme VII.2.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2) (1.4) et les notations (1.12) à (1.16) on a

(i) $$0 \leq u^{n+1}(j,x) \leq u^n(j,x) \leq u^o(j,x) \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$$
$$\forall\ j \in U,\ n \in E\ ,\quad n \geq 1.$$

(ii) $$u^n(j,\cdot) \in C_b^o(E) \quad \forall\ j \in U,\ \ \forall\ n \geq 0\ .$$

(iii) $$u^n(j,x) \geq u(j,x) \quad \forall\ (j,x) \in U \times E\ .$$

Démonstration.

(i) est immédiat, (ii) se démontre sans difficultés par récurrence en utilisant les résultats sur les temps d'arrêt optimaux en remarquant que $u^{n-1}(j,\cdot) \in C_b^o(E)$ implique $Mu^{n-1}(j,\cdot) \in C_b^o(E)$ $\forall\ j \in U$.

Donnons quelques détails pour la démonstration de (iii).
On définit

$$\tau_n^1 = \operatorname{Inf}\,(s \geq 0,\ u^n(j,x_s) = Mu^{n-1}(j,x_s)). \tag{2.4}$$

D'après les résultats sur les temps d'arrêt optimaux, on a

$$u^n(j,x) = E_x^j\left\{\int_0^{\tau_n^1} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1} Mu^{n-1}(j,x_{\tau_n^1})\right\}. \tag{2.5}$$

On note $\hat{\xi}_n(j,x)$ un élément de U réalisant le minimum de $j' \to c(j,j') + \bar{e}^{\alpha h} E_x^j(u^{n-1}(j',x_h))$ et on pose

$$\begin{cases} \xi_n^1 = \hat{\xi}_n(j,x_{\tau_n^1}) & \text{sur } \{\tau_n^1 < +\infty\} \\ \xi_n^1 = j & \text{sur } \{\tau_n^1 = +\infty\} \end{cases} \tag{2.6}$$

d'où

$$\begin{aligned} u^n(j,x) = E_x^j\Big\{&\int_0^{\tau_n^1} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds \\ &+ \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}\, E_{x_{\tau_n^1}}^j\left(\int_0^h \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds\right) \\ &+ \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}\, c(j,\xi_n^1) + \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} E_{x_{\tau_n^1}}^j\,(u^{n-1}(\xi_n^1,x_h))\Big\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ce qui, compte tenu de la propriété de Markov forte, donne

$$\begin{aligned} u^n(j,x) = E_x^j\Big\{&\int_0^{\tau_n^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^1}\, c(j,\xi_n^1) \\ &+ \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)}\, u^{n-1}(\xi_n^1,x_{\tau_n^1+h})\Big\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

On démontre comme au lemme II.2.2., que si

$$\tau^{2,j} = \operatorname{Inf}\,(s \geq 0,\ u^{n-1}(j,x_s) = Mu^{n-2}(j,x_s)) \tag{2.8}$$

et

$$\tau_n^{2,j} = (\tau_n^1+h) + \tau^{2,j} \circ \theta_{\tau_n^1+h}, \tag{2.9}$$

alors

$$(2.10)\qquad \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u^{n-1}(j',x_{\tau_n^1+h}) = \bar{E}_{jx}^1 \left\{ \int_{\tau_n^1+h}^{\tau_n^{2,j'}} \bar{e}^{\alpha s} f(j',x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^{2,j'}} Mu^{n-2}(j',x_{\tau_n^{2,j}}) \mid \mathcal{F}_{\tau_n^1+h} \right\}$$

alors on pose

$$\tau^{2,n} = \sum_{j'=0}^{M} \chi_{\xi_n^1=j'} \cdot \tau_n^{2,j'}$$

et on a clairement en multipliant (2.10) par $\chi_{\xi_n^1=j'}$ et en sommant

$$(2.11)\qquad \bar{e}^{\alpha(\tau_n^1+h)} u^{n-1}(\xi_n^1,x_{\tau_n^1+h}) = \bar{E}_{jx}^1 \left\{ \int_{\tau_n^1+h}^{\tau_n^2} \bar{e}^{\alpha s} f(\xi_n^1,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau_n^2} Mu^{n-2}(\xi_n^1,x_{\tau_n^2}) \mid \mathcal{F}_{\tau_n^1+h} \right\}$$

(car $\chi_{\xi_n^1=j'}$ est $\mathcal{F}_{\tau_n^1+h}$ mesurable), naturellement $\bar{P}_{jx}^1$ est définie comme en (1.12).

La suite de la démonstration s'effectue comme au lemme II.2.3.

■

<u>Lemme VII.2.2.</u> <u>$u^n(j,x) \searrow u(j,x)$ en tout point.</u>

<u>Démonstration.</u>

Si v est un contrôle quelconque dans $\mathcal{V}_h$, on a immédiatement

$$u^n(j,x) \leq E_x^j \left(\int_0^{\tau^1} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau^1} Mu^{n-1}(j,x_{\tau^1}) \right)$$

ou encore

$$(2.12)\qquad u^n(j,x) \leq E_x^j \left\{ \int_0^{\tau^1+h} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau^1} c(j,\xi^1) + \bar{e}^{\alpha(\tau^1+h)} u^{n-1}(\xi^1,x_{\tau^1+h}) \right\}.$$

On a alors, comme au lemme II.2.2.

$$(2.13) \qquad u^{n-1}(j',x_{\tau^1+h})e^{-\alpha(\tau^1+h)} \leq \bar{E}^1_{jx}\left\{\int_{\tau^1+h}^{\tau^2} e^{-\alpha s} f(j',x_s)ds + e^{-\alpha\tau^2} Mu^{n-2}(j',x_{\tau^2}) \mid \mathcal{F}_{\tau^1+h}\right\}$$

et en multipliant (2.13) par $\chi_{\xi^1=j'}$ et en sommant de $j'=0$ à M, on obtient

$$(2.14) \qquad u^{n-1}(\xi^1,x_{\tau^1+h})e^{-\alpha(\tau^1+h)} \leq \bar{E}^1_{jx}\left\{\int_{\tau^1+h}^{\tau^2} e^{-\alpha s} f(\xi^1,x_s)ds + e^{-\alpha\tau^2} Mu^{n-2}(\xi^1,x_{\tau^2}) \mid \mathcal{F}_{\tau^1+h}\right\}.$$

En procédant comme au lemme II.2.4, on a

$$\lim_{n\uparrow\infty} u^n(j,x) \leq J_{jx}(v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}_h$$

d'où le résultat (avec le lemme précédent).

■

<u>Lemme VII.2.3.</u> <u>$u^n \to u$ uniformément</u> (donc $u \in C^o_b(U \times E)$).

<u>Démonstration.</u>

$\|\,.\,\|$ désignant la norme du sup en x, j, on a facilement

$$\|u^n - u^{n-1}\| \leq \|Mu^{n-1} - Mu^{n-2}\|$$

$$\leq e^{-\alpha h}\|u^{n-1} - u^{n-2}\|$$

donc u^n converge dans $C^o_b(U \times E)$ et d'après le lemme précédent, la limite est u.

■

Les lemmes précédents et des raisonnements identiques à ceux du §. II.2 donnent le théorème suivant :

<u>Théorème VII.2.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4)</u> ,

(i) <u>u est solution unique de l'équation</u>

$$u(j,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^j \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(j,x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu(j,x_\tau) \right\} \tag{2.15}$$

(ii) <u>u est solution maximum du système</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} w(j,\cdot) \in C_b^o(E), \quad j \in U \\ w(j,x) \leq Mw(j,x) \\ w(j,x) \leq e^{-\alpha t}\Phi^j(t)w(j,x) + \int_0^t e^{-\alpha s}\Phi^j(s)f(j,x)ds \end{array} \right. \tag{2.16}$$

$$t \geq 0$$

(iii) <u>il existe une solution au problème Pb. h.</u>

Donnons simplement la construction d'un contrôle optimal.

On définit

$$\tau^1 = \operatorname{Inf}\,(s \geq 0,\ u(j,x_s) = Mu(j,x_s))$$

et on pose $\hat{\xi}(j,x)$ élément réalisant le minimum de

$$j' \to c(j,j') + e^{-\alpha h} E_x^j(u(j',x_h)).$$

$\xi^1 = \hat{\xi}(j,x_{\tau^1})$, (avec là encore, la convention ξ^1 arbitraire sur $\{\tau^1 = +\infty\}$).

Puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^n = \operatorname{Inf}(\ s \geq \tau^{n-1}+h,\ u(\xi^{n-1},x_s) = Mu(\xi^{n-1},x_s)) \\ \xi^n = \hat{\xi}(\xi^{n-1},x_{\tau^n}) \end{array} \right. \tag{2.17}$$

pour $n \geq 1$.

■

VII.3. ETUDE DU PROBLEME SANS RETARD.

On définit

$$(3.1)\qquad u^o(j,x) = E_x^j \int_o^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds$$

$$(3.2)\qquad u^n(j,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^j\left(\int_o^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(j,x_s)ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu^{n-1}(j,x_\tau)\right)$$

où

$$(3.3)\qquad Mu^{n-1}(j,x) = \min_{j'\in U} \left(c(j,j') + u^{n-1}(j',x)\right).$$

De façon identique aux lemmes VII.2.1., VII.2.2 on démontre le lemme suivant :

Lemme VII.3.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4), et avec les notations (1.6) à (1.10), on a

(i) $\quad 0 \leq u^{n+1} \leq u^n \leq u^o \leq \dfrac{\|f\|}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \sup\limits_{j,x} |f(j,x)|, \forall\, n,$

(ii) $\quad u^n(j,\cdot) \in C_b^o(E), \quad \forall\, j \in U, \quad \forall\, n \geq 0$

(iii) $\quad u^n(j,x) \searrow u(j,x)$ en tout point.

∎

Il est d'ailleurs (là encore) important de remarquer que pour démontrer $u^n(j,x) \searrow u(j,x)$, on utilise la formule

$$(3.4)\qquad u^n(j,x) \leq \bar{E}_{jx}^{n-1}\left\{\int_o^{\tau^n} \bar{e}^{\alpha s} f(v_s,x_s)ds + \sum_{j=1}^{n} c(\xi^{j-1},\xi^j)\bar{e}^{\alpha\tau^j}\right\}$$
$$+ \bar{E}_{jx}^{n-1}\ \bar{c}^{\alpha\tau^n}\ u^o(\xi^n, x_{\tau^n})$$

si $v = (\tau^j,\xi^j)_{j\geq 1}$ est un contrôle admissible quelconque tel que $J_{jx}(v) < +\infty$.

En utilisant la définition de $\bar{E}_{jx}^n$, de u^o, et en notant $\mathcal{V}^n$ le sous ensemble de $\mathcal{V}$ défini par

(3.5) $$\mathcal{V}^n = \{v \in \mathcal{V} \mid v = (\tau^i,\xi^i)_{i \geq 1}, \ \tau^j = +\infty \quad j > n\}$$

on a facilement que, <u>pour tout n</u>

(3.6) $$u^n(j,x) \leq J_{jx}(v) \quad \forall\, v \in \mathcal{V}^n$$

et

(3.7) $$u^n(j,x) = J_{jx}(v^n)$$

si v^n est le contrôle défini par

$$\tau_n^1 = \mathrm{Inf}(s \geq 0,\ u^n(j,x_s) = Mu^{n-1}(j,x_s))$$

$$\tau_n^2 = \mathrm{Inf}(s \geq \tau_n^1 \quad u^{n-1}(\xi_n^1,x_s) = Mu^{n-2}(\xi_n^1,x_s))$$

.....

et

$$\xi_n^1 = \hat{\xi}_n(j,x_{\tau_n^1})$$

$\hat{\xi}(j,x)$ minimisant $j' \to c(j,j') + u(j',x)$.

En conclusion

(3.8) $$u^n(j,x) = \operatorname*{Inf}_{v \in \mathcal{V}^n} J_{jx}(v)$$

Comme dans le cas instantané du §. V, ceci est fondamental pour obtenir :

<u>Lemme VII.3.2.</u> <u>Sous les hypothèses du lemme VII.3.1, $u^n \to u$ uniformément.</u>

<u>Démonstration.</u>

On a

$$0 \leq u^n(j,x) - u(j,x) = \operatorname*{Sup}_{v \in \mathcal{V}} [u^n(j,x) - J_{jx}(v)]$$

notons $v^n(v)$ le contrôle ($\in \mathcal{V}^n$) obtenu en prenant les n premiers t.a de $v \in \mathcal{V}$ (quelconque) et en prenant $\tau^j = +\infty$ si $j > n$, donc à $v \in \mathcal{V}$ $v = (\tau^i,\xi^i)\ i \geq 1$, on associe $v^n(v) = (\tau^1,\xi^1,\ldots,\tau^n,\xi^n,+\infty..)$ alors $u^n(j,x) \leq J_{jx}(v^n(v))$, $\forall\, v \in \mathcal{V}$,

donc

$$(3.9) \qquad 0 \leq (u^n(j,x) - u(j,x)) \leq \sup_{v \in \mathcal{V}} [J_{jx}(v^n(v)) - J_{jx}(v)] \,.$$

Mais il est clair que les probabilités correspondant à $v^n(v)$ et v sont identiques sur $\mathcal{F}_{\tau^n}$, en conséquence, on peut écrire

$$J_{jx}(v^n(v)) - J_{jx}(v) = \bar{E}^{n-1}_{jx}(\bar{e}^{\alpha\tau^n} u^o(\xi^n, x_{\tau^n}))$$

$$- \lim_{\substack{m \uparrow \infty \\ m \geq n}} E^{m-1}_{jx}\left(\int_{\tau^n}^{\tau^m} \bar{e}^{\alpha s} f(v_s, x_s) ds + \sum_{i=n+1}^{m} c(\xi^{i-1}, \xi^i) \bar{e}^{\alpha\tau^i}\right),$$

le second terme <u>est positif</u> donc

$$J_{jx}(v^n(v)) - J_{jx}(v) \leq \bar{E}^{n-1}_{jx}(\bar{e}^{\alpha\tau^n} u^o(\xi^n, x_{\tau^n})) \,.$$

Soit encore

$$(3.10) \qquad J_{jx}(v^n(v)) - J_{jx}(v) \leq \bar{E}^n_{jx}\left[\int_{\tau^n}^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(\xi^n, x_s) ds\right] .$$

Maintenant on recherche à estimer le second membre. Pour cela on prend T (assez grand dans la suite). Posons

$$X = \bar{E}^n_{jx}\left(\int_{\tau^n}^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(\xi^n, v_s) ds\right) ,$$

$$X = \bar{E}^n_{jx} \int_{\tau^n}^{T_v \tau^n} \bar{e}^{\alpha s} f \, ds + \bar{E}^n_{jx} \int_{T_v \tau^n}^{+\infty} \bar{e}^{\alpha s} f \, ds ,$$

donc

$$(3.11) \qquad S \leq \bar{E}^n_{jx} \int_{\tau^n}^{T_v \tau^n} \bar{e}^{\alpha s} f \, ds + \bar{e}^{\alpha T} \frac{\| f \|}{\alpha} \,.$$

Posons

$$(3.12) \qquad Y = \bar{E}^n_{jx} \int_{\tau^n}^{T_v \tau^n} \bar{e}^{\alpha s} f \, ds = \bar{E}^n_{jx} \, \chi_{\tau^n < T} \int_{\tau^n}^{T} \bar{e}^{\alpha s} f \, ds$$

de plus

$$\chi_{\tau^n < T} = \chi_{N_T(v) \geq n}$$

si $N_T(v) = \max\,(j;\ \tau^j < T)$ pour $v \in \mathcal{V}$, donc

$$(3.13) \qquad Y \leq \frac{\|f\|}{\alpha}\ \bar{E}^n_{jx}\ (\chi_{N_T(v) \geq n}) \ .$$

Mais on peut, sans restreindre la généralité restreindre $\mathcal{V}$ aux contrôles $v \in \mathcal{V}$ tels que

$$J_{jx}(v) \leq \frac{\|f\|}{\alpha} \qquad \text{(par exemple)} \ .$$

On note ceci

$$J_{jx}(v) \leq c_1 \ .$$

Dans ces conditions on aura

$$\lim_{k \uparrow \infty}\ \bar{E}^{k-1}_{jx} \sum_{i=1}^{k} \bar{e}^{\alpha\tau^i}\ c(\xi^{i-1},\xi^i) \leq c_1$$

i.e.

$$\lim_{k \uparrow \infty}\ \bar{E}^{k-1}_{jx}\ \Big(\sum_{i=1}^{k} \bar{e}^{\alpha\tau^i}\ c(\xi^{i-1},\xi^i)\chi_{\tau^i<T}\Big)$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{k} \bar{e}^{\alpha\tau^i}\ c(\xi^{i-1},\xi^i)\chi_{\tau^i \geq T}\Big) \leq c_1 \ ,$$

et si $c(\xi^{i-1},\xi^i) \geq c_o > 0$ on aura

$$(3.14) \qquad \lim_{k \uparrow \infty}\ c_o\ \bar{e}^{\alpha T}\ \bar{E}^{k-1}_{jx} \sum_{i=1}^{k} \chi_{\tau^i<T} \leq c_1$$

or

$$\bar{E}^{k-1}_{jx} \sum_{i=1}^{k} \chi_{\tau^i<T} = \bar{E}^{k-1}_{jx}\ N^k_T(v)$$

si $N^k_T(v) = \max(l \leq k\ ;\ \tau^l < T)$, il est clair que $\lim\limits_{k \nearrow \infty} \nearrow N^k_T(v) = N_T(v)$.

D'autre part, pour v tel que $J_{jx}(v) \leq c_1$, on peut noter P^v_{jx} la probabilité sur $(\Omega,\mathfrak{F})$ telle que

$$P^v_{jx} = \bar{P}^{n-1}_{jx} \qquad \text{sur} \quad \mathfrak{F}_{\tau^n}$$

(ce qui est possible parce que $\bar{P}^{n-1}_{jx}(\tau^n < t) \to 0 \quad \forall\, t \in R^+$ si $J_{jx}(v) \leq c_1$); alors (3.14) devient

$$(3.15) \qquad E^v_{jx}\ N_T(v) \leq e^{\alpha T} .\ c_2$$

où c_2 est indépendante de T, j, x, n $\Rightarrow$

$$E^{v}_{jx}\ \chi_{N_T(v)\geq n}\ .\ n \leq E^{v}_{jx}\ N_T(v) \leq e^{\alpha T}\ c_2$$

$$E^{v}_{jx}\ \chi_{N_T(v)\geq n} \leq \frac{1}{n}\ c_2\ e^{\alpha T} \tag{3.16}$$

mais $\chi_{N_T(v)\geq n}$ est $\mathcal{F}_{\tau^n}$ mesurable puisque $\chi_{N_T(v)\geq n} = \chi_{\tau^n<T}$
donc

$$E^{v}_{jx}\ \chi_{N_T(v)\geq n} = \bar{E}^{n-1}_{jx}\ \ \chi_{N_T(v)\geq n}$$

et donc on a

$$Y \leq \frac{c_2 e^{\alpha T}}{n} \tag{3.17}$$

finalement : (3.11) devient

$$X \leq \frac{c_2 e^{\alpha T}}{n} + e^{-\alpha T}\ \frac{\|f\|}{\alpha}\ . \tag{3.18}$$

L'estimation étant indépendante de $v \in \mathcal{V}$, si $J_{jx}(v) \leq c_1 = \frac{\|f\|}{\alpha}$, on a, par (3.9)

$$0 \leq u^n(j,x) - u(j,x) \leq \frac{c_2 e^{\alpha T}}{n} + e^{-\alpha T}\ \frac{\|f\|}{\alpha} \tag{3.19}$$

donc en passant à la limite en n d'abord puis $T \uparrow \infty$, on obtient le résultat.

■

Théorème VII.3.1.

Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.4) et avec les notations (1.6) à (1.10)

(i) u est solution maximum de l'équation

$$u(j,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau}\ E^{j}_{x}\left\{\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(j,x_s)ds + e^{-\alpha\tau} Mu(j,x_\tau)\right\} \tag{3.20}$$

(ii) u est l'élément maximum de l'ensemble des fonctions w vérifiant

$$w(j,\cdot) \in C \quad \forall j \in U$$
$$w(j,x) \leq Mw(j,x)$$
$$w(j,x) \leq \bar{e}^{\alpha t}\, \Phi^j(t)\, w(j,x) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s}\, \Phi^j(t)\, f\, ds.$$

(iii) <u>il existe un contrôle optimal pour le Pb.o.</u>

<u>Démonstration.</u>

Compte tenu du lemme précédent la démonstration est identique à celle du théorème VII.2.1. Un contrôle optimal est défini de la façon suivante

$$\tau^1 = \mathrm{Inf}(s \geq 0 \quad u(j,x_s) = Mu(j,x_s))$$
$$\xi^1 = \hat{\xi}(j,x_{\tau^1})$$

où $\hat{\xi}(j,x)$ réalise le minimum de

$$j' \to c(j,j') + u(j',x) \ ,$$

et est mesurable, puis

$$\tau^n = \mathrm{Inf}\ (s \geq \tau^{n-1} \quad u(\xi^{n-1},x_s) = Mu(\xi^{n-1},x_s))$$
$$\xi^n = \hat{\xi}(\xi^{n-1},x_{\tau^n})$$

(pour voir que τ^n est un temps d'arrêt si τ^{n-1} l'est on remarque que $\tau^n = \tau^{n-1} + \tilde{\tau}^n$ avec $\tilde{\tau}^n$ premier instant (≥ 0) où le processus $(\xi^{n-1},x_{\tau^{n-1}+t})$ adapté à $\mathcal{F}_{\tau^{n-1}+t}$, sort de l'ouvert $\{u < Mu\} \subset U \times E$, or c'est un processus continu à droite, donc $\tilde{\tau}^n$ est un t.a. par rapport à $\mathcal{F}_{\tau^{n-1}+t}$, donc $\tau^{n-1}+\tilde{\tau}^n$ est un t.a par rapport à $\mathcal{F}_t$.

∎

<u>Remarque VII.3.1.</u> <u>Le cas "arrêté"</u>

On doit faire quelques modifications quand on veut traiter le cas d'un problème "arrêté à la sortie d'un ouvert $\mathcal{O}$". Les mesures P_x^j correspondent alors aux processus arrêtés à la sortie de $\mathcal{O}$ et

$$u^n(j,x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^{j} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f \chi_{\mathcal{O}}(x_s) ds \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha\tau} \chi_{\mathcal{O}} \, Mu^{n-1}(j, x_\tau) \right\} .$$

Dans la démonstration du lemme VII.3.1 , v^n est défini alors par

$$(\tilde{\tau}_n^i = \tau_n^i \wedge \nu^i, \ \xi_n^i = \hat{\xi}_n(\xi_n^{i-1}, x_{\tilde{\tau}_n^i}), \ i \geq 1)$$

où $\nu^1 = \operatorname{Inf}(s \geq 0, \ x_s \notin \mathcal{O})$; $\nu^n = \nu^{n-1} + \nu^1 \circ \theta_{\nu^{n-1}}$.

Et on utilise les mêmes techniques qu'au Chapitre II, §. 3.

■

VII.4. VARIANTES.

On aurait pu considérer le problème du §. VII.1 dans le cadre du chapitre V. pour le processus $z_t = (y_t, x_t)$ où y_t est l'indice du processus de markov considéré à t. Ce qui revient à dire que l'on considère les probabilité P_{yx} sur $\Omega_1 \times \Omega$, Ω_1 étant l'espace des fonctions en escaliers continues à droite limitées à gauche à valeurs dans U, avec

$$P_{yx} = \sum_{j=1}^{N} \chi_{y=j} \cdot P_x^j \cdot$$

Mais quand l'état x est "conservé" aux instants τ on a vu qu'il était possible de construire le processus contrôlé de façon plus simple que ce qui a été fait dans le cas instantané général.

Ceci dit on peut imaginer des problèmes où à chaque instant de décision on choisit $j \in U$ et ξ nouvel état, auquel cas on utilisera nécessairement le processus z_t précédent dans la formulation du chapitre V (et du chapitre II quand il y a un retard).

VII.5. EXEMPLE.

On reprend le cas semi markovien du §. I.5.2 dans un exemple très simple :

E_1 est un ensemble fini (pour simplifier),
$\mathrm{card}\, E_1 = N$,
$E = E_1 \times [0,\bar{y}]$ où $\bar{y} > 0$ est donné.

On donne pour $i = 0,1$

(5.1) $$\left| \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_i(x,y) \leq M \,, \quad y \to \lambda_i(x,y) \text{ continue de} \\ \qquad\qquad E_1 \times R^+ \text{ dans } R^+ \,, \end{array} \right.$$

(5.2) $$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(x,y,\Gamma) \text{ probabilité de transition de } E \text{ dans } E_1 \\ \text{telle que } y \to q(x,y,\Gamma) \text{ soit continue,} \end{array} \right.$$

(5.3) $$\left\{ \begin{array}{l} f_i(x,y) \quad i = 0,1 \quad \text{vérifiant (1.2) et} \\ c(i,j) = 1 \quad i,\ j = 0,\ 1. \end{array} \right.$$

Formellement on écrit les inéquations quasi variationnelles du problème considéré au §. VII.1 sous la forme suivante

(5.4) $$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial u_i}{\partial y} + (\lambda_i+\alpha)u_i - \lambda_i\, Q_i\, u_i \leq f_i \\ u_i(x,y) \leq 1 + u_{1-i}\,(x,y) \\ (-\dfrac{\partial u_i}{\partial y} + (\lambda_i+\alpha)u_i - \lambda_i\, Q_i\, u_i - f_i)(u_i - 1 - u_{1-i}) = 0 \\ u_i(x,\bar{y}) = 0 \,, \quad i = 0,\ 1 \quad , \end{array} \right.$$

et

(5.5) $$Q_i\, u_i(x,y) = \int_{E_1} q_i(x,y,dz)\, u_i(z,o)$$

Comme on l'a vu au §. I.5.2, les hyptohèses (5.1), (5.2) permettent d'utiliser les résultats du chapitre I §. 3 sur les problèmes d'arrêt optimal; on va démontrer le théorème suivant

Théorème VII.5.1.

Sous les hypothèses (5.1) à (5.3), il existe une solution unique (u_o, u_1) de (5.4) :

$$u_i \in C_b^o(E)\ ,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y} \in [L^2(]0,\bar{y}[)]^N\ . \tag{5.6}$$

Démonstration.

Il est entendu que les inéquations (5.4) sont écrite p.p. en y. On va utiliser le problème pénalisé correspondant à (5.4)

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial y} + (\lambda_i+\alpha)u_i^\varepsilon - \lambda_i\ Q_i\ u_i^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\ (u_i^\varepsilon-1-u_{1-i}^\varepsilon)^+ = f_i \\ u_i^\varepsilon(x,\bar{y}) = 0 \qquad , \quad i = 0,1 \end{array}\right. \tag{5.7}$$

On démontre comme au §. I.5.2, lemme I.5.2 que ce système a une solution unique

$$u_i^\varepsilon \in C^o(E),\ \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial y} \in C^o(E)\ . \tag{5.8}$$

On va chercher une estimation dans L^2 de

$$\frac{1}{\varepsilon}\ \beta_i^+ = \frac{1}{\varepsilon}(u_i^\varepsilon - 1 - u_{1-i}^\varepsilon)^+\ .$$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y}(u_o^\varepsilon-u_1^\varepsilon) + (\lambda_o+\alpha)u_o^\varepsilon - (\lambda_1+\alpha)u_1^\varepsilon & \\ - \lambda_o\ Q_o\ u_o^\varepsilon + \lambda_1\ Q_1\ u_1^\varepsilon & \\ + \frac{1}{\varepsilon}(u_o^\varepsilon-1-u_1^\varepsilon)^+ - \frac{1}{\varepsilon}(u_1^\varepsilon-1-u_o^\varepsilon)^+ &= f_o - f_1\ . \end{aligned}$$

Soit encore

$$-\frac{\partial}{\partial y}\beta_o + \frac{1}{\varepsilon}\ \beta_o^+ - \frac{1}{\varepsilon}\ \beta_1^+ = f_o - f_1 - g_\varepsilon\ , \tag{5.9}$$

où $\quad g_\varepsilon = (\lambda_o+\alpha)u_o^\varepsilon - (\lambda_1+\alpha)u_1^\varepsilon - \lambda_o Q_o u_o^\varepsilon + \lambda_1 Q_1 u_1^\varepsilon$.

Or on a sans difficulté

(5.10) $$0 \leq u_i^\varepsilon \leq \bar{u}_i$$

si $\bar{u}_i$ est la solution (unique) de

(5.11) $$\begin{cases} -\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} + (\lambda_i+\alpha)\bar{u}_i - \lambda_i Q_i \bar{u}_i = f_i \\ \bar{u}_i(x,\bar{y}) = 0 \\ \bar{u}_i \in C^o(E), \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} \in C^o(E), \quad i = 0,1 \end{cases}$$

D'autre part, comme on l'a vu au §. I.5.2 (lemme I.5.1), $\| \bar{u}_i \| \leq \dfrac{\| f_i \|}{\alpha}$. Donc

(5.12) $$\| u_i^\varepsilon \| \leq \frac{\| f_i \|}{\alpha} .$$

En conséquence,

(5.13) $$\| g_\varepsilon \| \leq \text{constante indépendante de } \varepsilon \text{ (et de x).}$$

Multiplions (5.9) par $\frac{1}{\varepsilon}\beta_o^+$ (à x fixé), on obtient

(5.14) $$-\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}(\beta_o^+)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(\beta_o^+)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\beta_o^+\beta_1^+ = (f_o-f_1-g_\varepsilon).\frac{1}{\varepsilon}\beta_o^+ .$$

On remarque alors que $\beta_o^+\beta_1^+ = 0$, donc en intégrant en y l'égalité (5.14), compte tenu de $(\beta_o^+)^2 \,|_{y=\bar{y}} = 0$, on a

$$\frac{1}{2\varepsilon}(\beta_o^+)^2|_{y=0} + \frac{1}{\varepsilon^2}|\beta_o^+|^2_{L^2} \leq c.\| f_o-f_1-g_\varepsilon \|.|\frac{1}{\varepsilon}\beta_o^+|_{L^2} .$$

De (5.13), (5.12) on déduit donc

(5.13) $$\frac{1}{\varepsilon}|\beta_o^+|_{L^2} \leq \text{constante indépendante de } \varepsilon \text{ (et de x).}$$

On reprend alors (5.7) pour i > 0, et on multiplie par $-\dfrac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}$ dans L^2, d'où

$$\left|\frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}\right|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon}\,(\beta_o^+, -\frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}) = (\tilde{f}_{\varepsilon 1} - \frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y})$$

où $\tilde{f}_\varepsilon = \lambda_o Q_o u_o^\varepsilon - (\lambda_o+\alpha)\, u_o^\varepsilon$. Donc

$$(5.16)\qquad \left|\frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}\right|^2_{L^2} \leq (\frac{1}{\varepsilon}|\beta_o^+|_{L^2} + |\tilde{f}_\varepsilon|_{L^2}).\left|\frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2}$$

(5.13) et (5.12) impliquent alors

$$(5.17)\qquad \left|\frac{\partial u_o^\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2} \leq \text{constante indépendante de } \varepsilon.$$

On obtiendrait de même

$$(5.18)\qquad \left|\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial y}\right|_{L^2} \leq \text{constante .}$$

Alors en extrayant une suite $\varepsilon_n \to 0$, on a

$$(5.19)\qquad u_i^{\varepsilon n} \to u_i \quad \text{uniformément sur E ,}$$

car (5.18) est uniforme en x, et comme fonction de y, les $u_i^{\varepsilon n}$ forment une famille équicontinue par (5.17), (5.18). Donc (5.19) résulte du théorème d'Ascoli.

De plus

$$(5.20)\qquad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial y} \to \frac{\partial u_i}{\partial y} \quad L^2 \text{ faible .}$$

On passe donc à la limite dans (5.7) pour obtenir les inéquations (5.5) avec les techniques utilisées au §. I.5.2 Th. I.5.2, par exemple. L'unicité se démontre comme dans le cas de LAETSCH [36] (cf. aussi la démonstration faite au §. I.5.2. Th. I.5.2.).

■

<u>Corollaire VII.5.1.</u>

(u_o,u_1) <u>solution de (5.5) est le coût optimal du problème (1.11) (pour les processus semi markoviens définis au début de ce paragraphe).</u>

Démonstration.

On peut considérer u_o comme solution de l'inéquation variationnelle d'obstacle $\Psi_o = 1 + u_1 \in C^o(E)$. De plus, $\frac{\partial \Psi_o}{\partial y} \in L^2$.
On sait alors que u_o est la borne inférieure du coût du problème d'arrêt optimal suivant

$$u_o(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\tau} J^o_{xy}(\tau)$$
$$J^o_{xy}(\tau) = E^o_{xy}\left[\int_o^{\tau\Lambda\tau_o} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\chi_{\tau<\tau_o}\Psi_o(x_\tau,y_\tau)\right]$$

si P^o_{xy} correspond au processus semi markovien de coefficients (λ_o,q_o) [ces résultats ont été établis au §. I.5.2].

On a donc pour $i = 0,1$,

$$u_i(x,y) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E^i_{xy}\left(\int_o^{\tau\Lambda\tau_o} e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\chi_{\tau<\tau_o} M_i u_{1-i}\right) \tag{5.21}$$

où $M_i u_{1-i} = 1 + u_{1-i}$.

En utilisant les techniques du §. VII.3, on sait alors démontrer que u_i est bien le coût optimal du problème (1.11).

■

Remarque VII.5.1.

Pour le problème analogue au précédent dans le cas des diffusions, cf. A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11]. On a dans ce cas particulier des résultats de régularité bien supérieurs à ceux des "problèmes de stock".

■

VIII

ETUDE DE LA DEPENDANCE PAR RAPPORT A UN PARAMETRE

DES PROBLEMES DE TEMPS D'ARRET ET DE CONTROLE IMPULSIONNEL

APPLICATION A L'APPROXIMATION.

Orientations.

L'objet de ce chapitre est de donner quelques résultats de continuité du coût optimal des problèmes d'arrêt ou de contrôle impulsionnel, par rapport à un paramètre intervenant soit dans le semi groupe soit dans les données. On étudiera comme application essentielle, l'approximation d'un problème de contrôle impulsionnel pour une diffusion, par un problème de contrôle impulsionnel pour un processus de Markov de saut pur.

On prendra ici le cas du problème de contrôle du type "stock" sans retard. On peut obtenir des résultats analogues pour les cas avec retard.

VIII.1. HYPOTHESES - NOTATIONS - POSITION DU PROBLEME.

On reprend, pour les données, les hypothèses et notations du chapitre I (sauf mention explicite du contraire).

(1.1) E est un espace métrique où les boules fermées sont compactes.

On introduira les notations suivantes,

$$(1.2)\quad \begin{cases} \cdot\quad \varphi^n \to \varphi \text{ dans } C_K \text{ signifiera} \\ \varphi^n \in C,\ \varphi \in C,\ \varphi^n \to \varphi \text{ uniformément sur tout compact de } E. \\ \cdot\quad \| \varphi^n - \varphi \|_K = \sup\limits_{x \in K} |\varphi^n(x) - \varphi(x)| \end{cases}$$

On suppose donné pour $\lambda > 0$,

(1.3) une famille de semi groupes Fellériens sur E (cf. I.1. (1.3)), $\Phi^\lambda(t)$, dont on note $X^\lambda = (\Omega,\ \mathcal{F},\ \theta_t, x_t, P_x^\lambda)$ une réalisation canonique ([1]) avec de plus l'hypothèse (1.4) de I.1.

On donne de plus

(1.4) $\Phi(t)$ semi groupe markovien vérifiant (1.3),

$$(1.5)\quad \begin{cases} \text{et on suppose que} \\ \text{si } \varphi^\lambda \to \varphi \text{ dans } C_K \text{ quand } \lambda \to 0 \text{, alors} \\ \Phi^\lambda(t)\varphi^\lambda \to \Phi(t)\varphi \text{ dans } C_K \quad \forall\, t \in R^+ . \end{cases}$$

Bien entendu on verra des exemples où cette hypothèse fondamentale est vérifiée.

([1]) $\Omega = D(0,\infty;E)$, $\mathcal{F}_t$ les tribus canoniques universellement complétées.

VIII.2. PROBLEME D'ARRET OPTIMAL.

On donne

(2.1) $\qquad f \in C\,, \qquad \Psi \in C\,,$

et on définit, pour tout temps d'arrêt τ de $\mathcal{F}_t$

$$(2.2)\quad \begin{cases} J_x^\lambda(\tau) = E_x^\lambda \int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\Psi(x_\tau)\,, \\ J_x(\tau) = E_x \int_0^\tau e^{-\alpha s} f(x_s)ds + e^{-\alpha\tau}\Psi(x_\tau), \end{cases}$$

$$(2.3)\quad \begin{cases} u^\lambda(x) = \operatorname{Inf}_\tau J_x^\lambda(\tau), \\ u(x) = \operatorname{Inf}_\tau J_x(\tau)\,. \end{cases}$$

Pour un premier résultat, on fait l'hypothèse supplémentaire

$$(2.4)\quad \begin{cases} \text{Si } \Psi \in \mathcal{D}_A \text{ domaine du générateur de } \Phi(t) \\ \text{alors } \|A_\lambda \Psi\|_B \text{ est borné uniformément en } \lambda. \end{cases}$$

Théorème VIII.2.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.3), (1.4), (1.5), (2.1) et (2.4) :

$$u^\lambda \to u \quad \text{dans } C_K\,.$$

Démonstration : On partira du problème pénalisé : on note $u^{\lambda,\varepsilon}$ l'unique solution de l'équation :

$$(2.5)\qquad u^{\lambda,\varepsilon}(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s}\Phi^\lambda(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u^{\lambda,\varepsilon}-\Psi)^+]ds,$$

et on démontre d'abord le

Lemme VIII.2.1 : Sous les hypothèses du théorème VIII.2.1.

$$u^{\lambda,\varepsilon} \to u^\varepsilon \quad \text{dans } C_K\,.$$

Démonstration du Lemme VIII.2.1.

On sait que $u^{\lambda,\varepsilon} \in C$ et $u^{\varepsilon} \in C$. On sait de plus que si $u_T^{\lambda,\varepsilon}(t,x)$ désigne l'unique solution de l'équation

$$(2.6) \qquad u_T^{\lambda,\varepsilon}(t,x) = \int_t^T \bar{e}^{\alpha(s-t)} \Phi^{\lambda}(s-t)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_T^{\lambda,\varepsilon}(s)-\Psi)^+]ds$$

alors $u_T^{\lambda,\varepsilon} \in C^o([o,T];C)$ et $\forall$ t fixé (cf. I. 2)

$$(2.7) \qquad \| u_T^{\lambda,\varepsilon}(t) - u^{\lambda,\varepsilon}\|_C \leq \bar{e}^{\alpha(T-t)} \cdot \frac{1}{\alpha} [\| f\|_C + \| \Psi\|_C].$$

Donc

$$u_T^{\lambda,\varepsilon}(t) \to u^{\lambda,\varepsilon} \quad \text{uniformément en } x,\lambda,\varepsilon \text{ quand } T \nearrow \infty$$

D'autre part $u_T^{\lambda,\varepsilon}$ est l'unique point fixe de l'application Π^{λ} de $C^o([0,T];C)$ dans lui même définie par

$$w = \Pi^{\lambda} v$$

$$w(t) = \int_t^T \bar{e}^{\alpha(s-t)} \Phi^{\lambda}(s-t)[f - \frac{1}{\varepsilon}(v(s)-\Psi)^+]ds .$$

Donc si $v^o \in C$ et si

$$v_{\lambda}^n = \Pi^{\lambda} v_{\lambda}^{n-1} ,$$

on a

$$u_T^{\lambda,\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} v^o + \sum_{j=1}^{n} (v_{\lambda}^j - v_{\lambda}^{j-1}) ,$$

et

$$\| v_{\lambda}^{j-1} - v_{\lambda}^{j-1}\| \leq c_{\varepsilon} \frac{T^{j-1}}{(j-1)!} \| v_o - \Pi^{\lambda} v_o\| ,$$

d'où

$$(2.8) \qquad \| u_T^{\lambda,\varepsilon} - v_{\lambda}^n\| \leq C_{\varepsilon,T} \cdot k_n$$

avec $k_n \searrow 0$ quand $n \nearrow \infty$, <u>uniformément en λ</u>.

Démontrons maintenant que

$$(2.9) \qquad v_{\lambda}^n(t) \to v^n(t) \quad \text{dans } C_K \text{ quand } \lambda \searrow 0.$$

c'est immédiat pour n=1 d'après (1.5).

D'autre part cette même hypothèse implique que si $v_\lambda^{n-1}(t) \to v^{n-1}(t)$ dans C_K,

$$\Phi^\lambda(s-t)\,[f - \frac{1}{\varepsilon}(v_\lambda^{n-1}(s) - \Psi)^+]$$

$$\Phi(s-t)\,[f - \frac{1}{\varepsilon}(v^{n-1}(s) - \Psi)^+] \quad \text{dans } C_K ,$$

donc

$$v_\lambda^n(t) \to v^n(t) \quad \text{dans } C_K ,$$

ce qui établit (2.9) par récurrence.

Alors en rassemblant (2.7), (2.8), (2.9), on obtient pour tout compact K de E,

$$\| u^{\lambda,\varepsilon} - u^\varepsilon\|_K \leq \| u^{\lambda,\varepsilon} - u_T^{\lambda,\varepsilon}\| + \| u_T^{\lambda,\varepsilon}(t) - v_\lambda^n(t)\|$$

$$+ \| v_\lambda^n(t) - v^n(t)\|_K + \| v^n(t) - u_T^\varepsilon(t)\|$$

$$+ \| u_T^\varepsilon(t) - u^\varepsilon\|$$

En passant à la limite successivement sur $\lambda \searrow 0$, $n \to \infty$, $T \to \infty$, on obtient le lemme.

■

<u>Suite de la démonstration du théorème VIII.2.1.</u>

Soit K compact de E, on a

$$\| u^\lambda - u\|_K \leq \| u^\lambda - u^{\lambda,\varepsilon}\|_K + \| u^{\lambda,\varepsilon} - u^\varepsilon\|_K + \| u^\varepsilon - u\|_K$$

Supposons d'abord $\Psi \in \mathcal{D}_A$, alors

$$\| u^{\lambda,\varepsilon} - u\| \leq c_\lambda . \varepsilon , \quad c_\lambda = \| f + A_\lambda \Psi - \alpha\Psi\|$$

(cf. I.2.). D'après (2.5) ceci est borné uniformément en λ.
D'autre part les résultats du chapitre I. §. 3 impliquent

$\| u^{\varepsilon} - u\| \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ (car $\Psi \in \mathcal{D}_A$). Donc en passant à la limite $\lambda \searrow 0$ puis $\varepsilon \searrow 0$ on démontre le théorème quand $\Psi \in \mathcal{D}_A$. Si maintenant $\Psi \in C$, on régularise Ψ sur $\Psi^n \in \mathcal{D}_A$, $\Psi^n \to \Psi$ dans C_K, $\| \Psi^n\| \leq c_1$ (cf. §. I.3).

En notant $u^{\lambda,n}$, u^n les coûts optimaux correspondants, l'on obtient, par des raisonnements analogues à ceux du théorème I.3.1.

$$\| u^{\lambda,n} - u^{\lambda}\|_K \leq \| \Psi^n - \Psi\|_{\tilde{K}} + \gamma_T(R)(c_1+\| \Psi\|) + (c_1 + \| \Psi\|) \, e^{-\alpha T}$$

où $K = \{ d(x_o,x) \leq R_1 \}$; $\tilde{K} = \{d(x_o,y) \leq R_1 + R\}$ et $\gamma_T(R)$ est la fonction intervenant dans l'hypothèse (1.4) de §. I.1.
De même

$$\| u^n-u\|_K \leq \| \Psi^n-\Psi\|_{\tilde{K}} + \gamma_T(R)(c_1+\|\Psi\|)+ e^{-\alpha T}(c_1+\| \Psi\|)$$

et comme

$$\| u^{\lambda}-u\|_K \leq \| u^{\lambda}-u^{\lambda,n}\|_K + \| u^{\lambda,n}-u^n\|_K + \| u^n-u\|_K$$

en passant à la limite successivement $\lambda \searrow 0$, $n \uparrow \infty$, $R \uparrow \infty$, $T \uparrow \infty$. On obtient le résultat.

■

<u>Remarque VIII.2.1.</u>

On peut faire des démonstrations <u>directes</u> pour les diffusions <u>fortes</u> (éventuellement avec un terme poissonnien sous des hypothèses convenables) cf. par exemple, A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11].

■

Quand on veut faire dépendre f et Ψ de λ, plusieurs types de résultats sont possibles.

Donnons un premier type de résultat sans démonstration (elle serait du même genre que celle du théorème précédent).

On suppose que quand $\lambda \to 0$

$$(2.10)\quad \begin{cases} f^\lambda \to f \quad \text{dans } C \\ \Psi^\lambda \to \Psi \quad \text{dans } C \\ \Phi^\lambda(t)g \to \Phi(t)g \quad \text{dans } C \quad \forall\, y \in C \\ \mathcal{D}_{A_\lambda} \subset \mathcal{D}_A \quad \forall\, \lambda \end{cases}$$

On note u^λ le coût optimal associé à Φ^λ, f^λ, Ψ^λ, on démontre alors.

<u>Théorème VIII.2.2.</u> <u>Sous les hypothèses (1.1), (1.3), (1.4) et (2.10)</u>

$$\underline{u^\lambda \to u \quad \text{dans } C \quad \text{quand } \lambda \to 0 .}$$

■

Ce type de résultat est cependant insuffisant pour les problèmes d'approximation (on ne sait pas démontrer, sauf si E est compact que $\Phi^\lambda(t)g \to \Phi(t)g$ uniformément sur E).

Moyennant une hypothèse supplémentaire on va démontrer le résultat utile pour l'approximation des problèmes de contrôle impulsionnel.

On suppose $E = R^n$ (1)

$$(2.11)\quad \begin{cases} \Psi^\lambda \to \Psi \quad \text{dans } C_K \,, \quad \Psi^\lambda \,,\ \Psi \geq 0, \ \|\Psi^\lambda\| \leq c_o \\ f \in C \quad (^2) \end{cases}$$

---

(1) Ceci pour simplifier, mais ce n'est pas essentiel.

(2) On pourrait refaire les démonstration qui vont suivre avec $f^\lambda \to f$ dans C_K .

$$(2.12)\quad \begin{cases} P_x^\lambda\left[\sup\limits_{0\le t\le T}|x_t-x|>R\right]\le \dfrac{C_T.T}{R^2} \\ \underline{\text{uniformément en } x \text{ et } \lambda}. \end{cases}$$

L'hypothèse Ψ^λ, $\Psi \ge 0$ simplifie un peu les démonstrations mais n'est pas essentielle. Elle sera vérifiée dans le cas du contrôle impulsionnel.

<u>Théorème VIII.2.3.</u> <u>Sous les hypothèses (1.1), (1.3), (1.4), (1.5) (2.11) et (2.12)</u>

$$\underline{u^\lambda \to u \text{ dans } C_K}.$$

<u>Démonstration.</u> On vérifie facilement que le lemme VIII.2.1 est encore valable quand $\Psi^\lambda \to \Psi$ dans C_K grâce à l'hypothèse (1.5) et au fait que (2.7) fournit une estimation indépendante de λ puisque $\|\Psi^\lambda\| \le c_o$ indépendante de λ.
On va chercher une estimation de

$$\sup_{x\in K}|u^{\lambda,\varepsilon}(x) - u^\lambda(x)| \ , \ K \text{ compact de } E,$$

en reprenant le type de démonstration fait dans A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11].

On note $J_x^{\lambda,\varepsilon}(v)$ le critère correspondant à $u^{\lambda,\varepsilon}(x)$
$J_x^\lambda(\tau)$ le critère correspondant à $u^\lambda(x)$.

A tout temps d'arrêt τ, on associe

$$v_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<\tau , \\ 1 & \text{si } t\ge\tau . \end{cases}$$

On sait que (cf. Ch. I §.3)

$$u^{\lambda,\varepsilon}(x) \ge u^\lambda(x) .$$

On évalue

$$Y = J_x^{\lambda,\varepsilon}(v_\tau) - J_x^\lambda(\tau) .$$

Soit $h > 0$, on a

$$Y = E_x \int_\tau^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} [f+\frac{1}{\varepsilon}\,\Psi^\lambda] ds - E_x e^{-\alpha\tau}\Psi^\lambda(x_\tau)$$

$$= E_x \int_\tau^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} f(x_s) ds + E_x \int_{\tau+h}^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon}\Psi^\lambda(x_s) ds$$

$$+ E_x\left(\int_\tau^{\tau+h} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon}\Psi^\lambda(x_s) ds - e^{-\alpha\tau}\Psi^\lambda(x_\tau)\right)$$

$$= Y_1 + Y_2 + Y_3 \, .$$

(2.13) $$|Y_1| \leq \varepsilon . \| f \| \, .$$

(2.14) $$|Y_2| \leq e^{-\frac{h}{\varepsilon}} \|\Psi^\lambda\| \leq c_1 \, e^{-h/\varepsilon} \quad \text{uniformément a } x,\ \lambda,\ \tau$$

$$Y_3 = E_x \int_\tau^{\tau+h} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon}[\Psi^\lambda(x_s) - \Psi^\lambda(x_\tau)] ds$$

$$+ E_x \, \Psi^\lambda(x_\tau)\left[\int_\tau^{\tau+h} e^{-\alpha s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon} ds . \; e^{-\alpha\tau}\right].$$

$$Y_3 = Y_3' + Y_3'' \, ,$$

$$Y_3'' = E_x \left[\frac{1}{\varepsilon\alpha+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}h}\right) e^{-\alpha\tau} - e^{-\alpha\tau}\right] \Psi^\lambda(x_\tau) \, ,$$

donc

(2.15) $$Y_3'' \leq 0 \quad \text{car on a supposé } \Psi^\lambda \geq 0 \quad \forall \lambda \, .$$

et

(2.16) $$|Y_3'| \leq E_x \, e^{-\alpha\tau} \sup_{\tau \leq s \leq \tau+h} |\Psi^\lambda(x_s) - \Psi^\lambda(x_\tau)| \, .$$

On cherche maintenant une estimation de (2.16). Par la propriété de Markov forte

$$|Y_3'| \leq E_x \, e^{-\alpha\tau} \, E_{x_\tau} \sup_{0 \leq s \leq h} |\Psi^\lambda(x_s) - \Psi^\lambda(x_0)|$$

Soit T arbitraire > 0 :

$$|Y_3'| \leq E_x \, \{e^{-\alpha\tau} \chi_{\tau \leq T} \, E_{x_\tau} \sup_{0 \leq s \leq h} |\ldots| + e^{-\alpha\tau} \chi_{\tau > T} E_{x_\tau} |\ldots|\}$$

$$\leq I + II$$

$$(2.17) \qquad II \leq \bar{e}^{\alpha T}\, 2\|\Psi^\lambda\| \leq c_2\, \bar{e}^{\alpha T} \qquad (\forall\, x,\lambda,\tau)\ .$$

On introduit pour R quelconque

$$A = \{\omega,\ \sup_{0 \leq t \leq T} |\, x_t - x\,| \geq R\}$$

$$I = E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau} \chi_{\tau \leq T}\, \chi_A\, E_{x_\tau}\ \sup|\ldots|$$

$$+ E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau}\, \chi_{\tau\leq T}\, \chi_{\bar{A}}\, E_{x_\tau}\ \sup|\ldots| = III + IV$$

$$(2.18) \qquad III \leq c_3 \frac{T}{R^2} \qquad (\forall\, \lambda, x, \tau) \qquad (\text{cf. } (2.12)).$$

On a aussi

$$P_x^\lambda(\sup_{0 \leq s \leq h} |\, x_s - x\,| > \delta) \leq \frac{c_4 h}{\delta^2} \qquad \forall\, \lambda, x.$$

On introduit donc

$$B = \{\omega,\ \sup_{0 \leq s \leq h} |\, x_s - x(0)\,| \leq \delta\}$$

$$III = E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau}\, \chi_{\tau\leq T}\cdot\chi_A\, E_{x_\tau}\, \chi_B \sup_{0\leq s \leq h} |\Psi^\lambda(x_s) - \Psi^\lambda(x_o)|$$

$$+ E_x\, \bar{e}^{\alpha\tau}\, \chi_{\tau\leq T}\ \chi_A\ .\ E_{x_\tau}\, \chi_{\bar{B}} \sup_{0\leq s\leq h} |\ldots|\ .$$

$$= V + VI\ .$$

$$(2.19) \qquad VI \leq \frac{c_5 h}{\delta^2} \qquad (\text{uniformément en } \lambda, x, \tau).$$

Soit maintenant $\delta_o > 0$ fixé dans la suite, $\delta_o > \delta > 0$ et K compact de E.

$\forall\, \omega \in A$, $x_\tau \in K_R = \{y = z + z' \quad z' \in K,\ |z| \leq R\}$ donc $\forall\, x \in K$, $\forall\, \omega \in A$, $x_\tau \in K_R$ compact.

Soit d'autre part K_{R,δ_o} le compact

$$K_{R,\delta_o} = \{y = z_1 + z_2\ ;\ z_1 \in K_R\ .\ |z_2| \leq \delta_o\}$$

On a $\Psi^\lambda \to \Psi$ uniformément sur K_{R,δ_o} et Ψ^λ est uniformément continue sur K_{R,δ_o} , ainsi que Ψ.

On pose

$$\rho_\Psi(\delta) = \sup_{\substack{x',x'' \in K_{R,\delta_o} \\ |x'-x''| \leq \delta}} |\Psi(x')-\Psi(x'')|$$

$$\beta_{R,\delta_o}(\lambda) = \sup_{y \in K_{R,\delta_o}} |\Psi^\lambda(y)-\Psi(y)|$$

alors

$$\sup_{\substack{x',x'' \in K_{R,\delta_o} \\ |x'-x''| \leq \delta}} |\Psi^\lambda(x')-\Psi^\lambda(x'')| \leq \rho_4(\delta) + 2\beta_{R,\delta_o}(\lambda) . \tag{2.20}$$

Alors V devient

$$V \leq \sup_{\substack{x',x'' \in K_{R,\delta_o} \\ |x'-x''| \leq \delta}} |\Psi^\lambda(x')-\Psi^\lambda(x'')| ,$$

$$V \leq \rho_\Psi(\delta) + 2\beta_{R,\delta_o}(\lambda) . \tag{2.21}$$

On rassemble (2.13) à (2.21) pour obtenir

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |u^{\lambda,\varepsilon}(x) - u^\lambda(x)| &\leq \varepsilon\| f\| + c_1 e^{-h/\varepsilon} + c_2 e^{-\alpha T} \\ &+ c_3 \frac{T}{R^2} + \frac{c_5 h}{\delta^2} + \rho_\Psi(\delta) + 2\beta_{R,\delta_o}(\lambda) \quad . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |u^\lambda-u|(x) \leq & \sup_{x\in K} |u^\lambda(x)-u^{\lambda,\varepsilon}(x)| \\ & + \sup_{x\in K} |u^{\lambda,\varepsilon}(x)-u^\varepsilon(x)| \\ & + \| u^\varepsilon-u\|_K \end{aligned}$$

=> compte tenu du lemme 2.1 et de (2.2)

$$\lim_{\lambda \to 0} \left[\sup_{x \in K} |u^{\lambda}(x) - u(x)| \right] \leq \varepsilon \| f \| + c_1 e^{-h/\varepsilon} + c_2 e^{-\alpha T}$$

$$+ c_3 \frac{T}{R^2} + c_5 \frac{h}{\delta^2} + \rho_{\Psi}(\delta) + \| u^{\varepsilon} - u \|_K$$

en passant à la limite successivement :

$\varepsilon \searrow 0$

$h \searrow 0$

$\delta \searrow 0$

$R \nearrow \infty$

$T \nearrow \infty$

On obtient le résultat désiré.

■

Remarque 2.2.

L'hypothèse (2.5) est donc inutile quand on fait l'hypothèse (2.11), (2.12).

■

VIII.3. PROBLEME DE CONTROLE IMPULSIONNEL.

Les hypothèses sont celles de VIII.1 pour les semi-groupes et on fera également l'hypothèse (2.12).
On se donne de plus

$$(3.1)\qquad \begin{cases} U \text{ compact de } E \\ f \geq 0,\ f \in C \\ c \in C^{o}(U) \quad c(\xi) \geq k > 0 \qquad \forall\, \xi \in U . \end{cases}$$

On pose

$$(3.2)\qquad M\varphi(x) = \operatorname*{Inf}_{\xi \in U} [c(\xi) + \varphi(x+\xi)] \ ,$$

et l'on considère pour $\lambda > 0$, u^{λ} solution maximum du système

$$(3.3)\qquad \begin{cases} u^{\lambda} \leq Mu^{\lambda} \\ u^{\lambda}(x) \leq \bar{e}^{\alpha t}\Phi^{\lambda}(t)\ u^{\lambda}(x) + \int_{o}^{t} \bar{e}^{\alpha s}\Phi^{\lambda}(s) f\, ds \\ u^{\lambda} \in C \end{cases}$$

et u solution maximum du même système avec $\Phi(t)$ au lieu de $\Phi^{\lambda}(t)$. Il résulte de la théorie du contrôle impulsionnel (cf. Chapitre V) que u^{λ}, u existent et sont les coûts optimaux de problèmes de contrôle impulsionnel pour lesquels l'on dispose des résultats suivants : u^{λ} est également solution unique de l'équation

$$(3.4)\qquad u^{\lambda}(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^{\lambda}\left(\int_{o}^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu^{\lambda}(x_{\tau})\right) .$$

u^{λ} est limite uniforme des fonctions

$$(3.5)\qquad u^{\lambda,n}(x) = \operatorname*{Inf}_{\tau} E_x^{\lambda}\left(\int_{o}^{\tau} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds + \bar{e}^{\alpha\tau} Mu^{\lambda,n-1}(x_{\tau})\right)$$

avec

$$(3.6)\qquad u^{\lambda,o}(x) = E_x^{\lambda} \int_{o}^{\infty} \bar{e}^{\alpha s} f(x_s) ds .$$

De plus, on a l'estimation de Menaldi [45] (cf. V)

$$(3.7) \qquad \| u^{\lambda,n} - u^{\lambda} \|_C \leq C . \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et ceci est uniforme en λ.

On a bien entendu l'analogue de (3.5), (3.7) pour u.

Théorème VIII.3.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.3), (1.4), (1.5), (2.12) et (3.1), on a

$$u^{\lambda} \to u \quad \text{dans } C_K \text{ , quand } \lambda \to 0 \text{ .}$$

Démonstration.

1ère étape. $\forall n \quad u^{\lambda,n} \to u^n$ dans C_K, quand $\lambda \searrow 0$. On a $u^{\lambda,o} = u^o$. Le théorème VIII.2.3 donne alors, compte tenu de (3.5) $u^{\lambda,1} \to u^1$, dans C_K quand $\lambda \to 0$. Ceci implique $Mu^{\lambda,1} \to Mu^1$ dans C_K, en effet, si l'on pose

$$\tilde{K} = \{y = x+z, \quad x \in K \text{ , } \quad z \in U\} \text{ ,}$$

$\tilde{K}$ est compact, $u^{\lambda,1} \to u^1$ uniformément sur $\tilde{K}$, donc

$$u^1(x+\xi) + c(\xi) - \varepsilon_\lambda \leq c(\xi) + u^{\lambda,1}(x+\xi) \leq u^1(x+\xi)$$

$$+ c(\xi) + \varepsilon_\lambda$$

avec $\varepsilon_\lambda = \sup_{x \in \tilde{K}} |u^{\lambda,1}(y) - u^1(y)|$.

Donc

$$\sup_{x \in \tilde{K}} | Mu^{\lambda,1}(x) - Mu^1(x)| \leq \varepsilon_\lambda$$

On en déduit que (cf. Théorème VIII.2.3), [1] $u^{\lambda,2} \to u^2$, dans C_K, la récurrence est alors immédiate.

---

[1] Ceci n'a pas été précisé, mais on a

$$0 \leq u^{\lambda,n}(x) \leq \frac{\| f \|}{\alpha} \qquad \forall \lambda,n$$

donc on a bien toutes les hypothèses qu'il faut pour appliquer le théorème VIII.2.3.

<u>2ème étape.</u> : Soit K compact, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} |u^\lambda(x) - u(x)| &\leq \| u^\lambda(x) - u^{\lambda,n}(x)\|_C \\ &+ \sup_{x\in K} |u^{\lambda,n}(x) - u^n(x)| \\ &+ \| u^n - u\|_C \\ &\leq \frac{2c}{\sqrt{n}} + \sup_{x\in K} |u^{\lambda,n}(x) - u^n(x)|.\end{aligned}$$

En passant à la limite $\lambda \searrow 0$ puis $n \nearrow \infty$, on obtient le théorème.

∎

VIII.4. EXEMPLE.

VIII.4.1. Préliminaires.

On va considérer l'exemple de l'approximation d'un processus de diffusion par un processus de saut pur. Prenons pour simplifier $E = R$, soit également

$$(4.1) \qquad a(x) \in C_b^0(R), \quad a(x) \geq \beta > 0 ,$$

et considérons le générateur

$$(4.2) \qquad A = \frac{1}{2} a(x) \frac{d^2}{dx^2} .$$

Une approximation en différence finie de Au peut être

$$(4.3) \qquad A_h u(x) = \frac{a(x)}{2} \left[\frac{u(x+h)+u(x-h)-2u(x)}{h^2}\right]$$

qui s'écrit aussi

$$A_h u(x) = \frac{a(x)}{h^2} \left[\frac{1}{2} u(x+h) + \frac{1}{2} u(x-h) - u(x) \right]$$

qui est de la forme

$$q(x)\left(\int_{E_h} \Pi(x,dy)\, u(y) - u(x)\right)$$

avec $M \geq q(x) \geq 0$, $\Pi(x,dy)$ probabilité de transition de E_h dans E_h . [1]

Pour résoudre l'I.V

$$(4.4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{a(x)}{2} \Delta u + \alpha u \leq f \\ u \leq \Psi \\ (-\dfrac{a}{2} \Delta u + \alpha u - f)(u - \Psi) = 0 \end{cases}$$

On résoudra en fait (par exemple)

---

[1] $E_h = R$ ici.

$$(4.5)\quad \begin{cases} - A_h\, \tilde{u}_h(ih) + \alpha\tilde{u}_h(ih) \leq f(ih) \,, \\ \tilde{u}_h(ih) \leq \Psi(ih) \quad , i \in Z \,, \end{cases}$$

produit = 0 .

Ce qui revient à ne résoudre

$$(4.6)\quad \begin{cases} - A_h\, u_h + \alpha u_h \leq f \,, \\ u_h \leq \Psi \quad , \quad x \in R \,, \\ (-A_h\, u_h + a u_h - f)(u_h - \Psi) = 0 \quad , \end{cases}$$

qu'aux points $x = ih$.

On va dans la suite étudier les propriétés de convergence du processus associé à A_h et on en déduira une convergence de u_h vers u d'où il sera possible de déduire celle de $\tilde{u}_h$ vers u.

VIII.4.2. Vérification des hypothèses.

On notera $\Phi^h(t)$ le semi groupe associé à A_h, $\Phi(t)$ celui associé à A.

Lemme VIII.4.1. Sous les hypothèses (4.1), (4.3), $\Phi^h(t)$ est Fellerien.

Il s'agit bien entendu d'une propriété de Feller pour la topologie naturelle de R et non pour la topologie discrète pour laquelle c'est trivial.

On note comme en VIII.1 par

$$X^h = (\Omega, \mathfrak{F}, \theta_t, x_t, P_x^h)$$

la réalisation canonique de $\Phi^h(t)$ sur $\Omega = D(0, \infty, E)$.
On a de façon classique pour les processus de sauts si u
$u(t,x) = \Phi^h(t)f(x)$, $f \in B$ $\quad t \in [0,T]$,

$$(4.7) \qquad u(t,x) = \exp(-\frac{a(x)}{h^2}t)f(x) + \int_0^t \frac{a(x)}{h^2} e^{-\frac{a(x)s}{h^2}} \int_E \Pi_h(x,dy)u(t-s,y)ds$$

où $\int_E \Pi_h(x,dy)\varphi(y) = \frac{1}{2}(\varphi(x+h)+\varphi(x-h))$.

On montre sans difficulté (car a est borné) que pour $f \in C$, (4.7) a une unique qolution dans $C^o([0,T];\ C)$.

Donc $\Phi^h(t)$ est Fellerien quand E est muni de sa topologie "naturelle". La quasi continuité à gauche est également facile à voir puisque si τ est le premier instant de saut de X^h,

$$(4.8) \qquad P_x^h(\tau \leq t) = 1 - \exp(-\frac{a(x)}{h^2}t)$$

a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

■

<u>Lemme VIII.4.2.</u> <u>Sous les hypothèses du Lemme VIII.4.1., on a</u> (vérification de (2.12)).

$$(4.9) \qquad P_x^h[\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)-x| > R] \leq \frac{c_T.T}{R^2} \qquad \forall\ h > 0,\ \forall\ x \in E$$

On sait que, $\forall$ f mesurable bornée,

$$f(x_t)-f(x)-\int_0^t A_h f(x_s)ds \quad \text{est un } P_x^h \text{ martingale locale}$$

(c'est une martingale sur tout intervalle fini).

Pour n quelconque, prenons

$$(4.10) \qquad f(y) = -n \vee (y \wedge n) - x$$

définissons

$$\tau_n = \text{Inf}\ (s \geq 0 \quad |x_s| \geq n)$$

On a comme f est bornée

$$f(x_{t\wedge\tau_n})-f(x)-\int_0^{t\wedge\tau_n} A_h f(x_s)ds$$

est une P_x^h martingale locale. Mais un calcul simple donne

$$A_h f = 0$$

et comme $f(x_{t\wedge\tau_n})-f(x) = x_{t\wedge\tau_n} - x$, on en déduit que $x_{t\wedge\tau_n}-x$ est une P_x^h martingale locale.

Soit donc T_m une suite croissante de t.a, $T_n \uparrow \infty$, tels que $x_{t\wedge\tau_n\wedge T_m}-x$ est une martingale.

On calcule sans difficulté

$$E_x^h[x_{t\wedge\tau_n\wedge T_m}-x]^2 = E_x^h \int_0^{t\wedge\tau_n\wedge T_m} A_h f^2(x_s)ds$$

(f donnée par (4.10)), donc

$$(x_{t\wedge\tau_n\wedge T_m}-x)^2 = M_t + t\wedge\tau_n\wedge T_m$$

où M_t est une martingale nulle en 0. Les inégalités de Doob donnent alors

$$E_x^h[\sup_{0\le t\le T} |x_{t\wedge\tau_n\wedge T_m}-x|^2] \le 2 \sup_{0\le t\le T} E_x^h|x_{t\wedge\tau_n\wedge T_m}-x|^2$$
$$\le 2\, E_x^h\, T\wedge\tau_n\wedge T_m .$$

D'où

$$E_x^h[\sup_{0\le t\le T\wedge\tau_n\wedge T_m} |x_t-x|^2] \le 2\, E_x^h\, T\wedge\tau_n\wedge T_m$$

et comme $\tau_n \uparrow \infty$, $Tm \uparrow \infty$, on a

$$E_x^h[\sup_{0\le t\le T} |x_t-x|^2] \le 2\, T$$

d'où (4.9).

Vérification de (1.5).

Lemme VIII.4.3. $\{P_x^h, h > 0, x \in K\}$, où K est un compact arbitraire, est étroitement relativement compacte.

On utilisera pour cela le critère de compacité donné par Lepeltier - Marchal [40], à savoir

(4.11) $\forall\ \varepsilon, T, \exists\ \eta$ tel que

$$P_x^h[\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t| > \eta] \leq \varepsilon$$

$$\forall\ h > 0, \quad \forall\ x \in K .$$

(4.12) $\forall\ \varepsilon, \forall\ \eta, \exists\ \delta$ tel que

$$P_x^h[\sup_{s,t \leq \delta} |x_t - x_s| > \eta] \leq \varepsilon$$

$$\forall\ h > 0 , \quad \forall\ x \in K .$$

(4.13) $\forall\ \varepsilon, T, \eta, \exists\ \sigma$ tel que

$$P_x^h[\sup_{\sigma \leq s < t < T} |x_s - x_t| > \eta] \leq \varepsilon$$

$$\forall\ h > 0, x \in K$$

(4.14) $\forall\ \varepsilon, T, \eta , \exists\ \delta$ tel que

$$P_x^h[\sup_{\substack{t_1 \leq t_2 \leq T \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \min\{|x_t - x_{t_1}|, |x_t - x_{t_2}|\} > \eta\} \leq \varepsilon$$

$$\forall\ h > 0 , \quad x \in K .$$

. Vérifions (4.11)

$$P_x^h[\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t| \geq \eta] \leq P_x^h(\sup_{0 \leq s \leq T} |x_s - x| \geq \eta - |x|)$$

pour tout $K = \{x \mid |x| \leq R\}$, on aura par (4.9)

$$P_x^h[\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t| > \eta] \leq \frac{2T}{(\eta - R)^2} \leq \varepsilon$$

pour η assez grand.

. Vérifions (4.12).

Soit d'abord τ un t.a borné. Posons

$$Z = \sup_{0 \leq s \leq T} |x_s - x_o| .$$

Par la propriété de Markov forte, on a

$$P_x^h(\sup_{0 \leq s \leq T} |x_\tau - x_{\tau+s}| > \eta] = E_x^h(P^h_{x_\tau}(Z > \eta))$$

donc

$$(4.15) \qquad P_x^h(\sup_{0 \leq s \leq T} |x_\tau - x_{\tau+s}| > \eta) \leq \frac{2T}{\eta^2}$$

$$\forall\, h > 0 , \quad \forall\, x \in E .$$

En prenant $T = \delta$ assez petit on a (4.12).

. Vérifions (4.13). On a

$$|x_t - x_s| \leq |x_t - x_{T-\delta}| + |x_{T-\delta} - x_s| ,$$

donc

$$P_x^h[\sup_{T-\delta \leq s < t < T} |x_s - x_t| > \eta] \leq 2P_x^h[\sup_{T-\delta \leq s \leq T} |x_s - x_{T-h}| > \frac{\eta}{2}]$$

On applique alors (4.15) avec δ assez petit.

. Vérifions (4.14).

On définit la suite de temps d'arrêt

$$\tau_o = 0,\ \tau_n = \mathrm{Inf}(t > \tau_{n-1} \,|\, |x_t - x_{\tau_{n-1}}| > \frac{\eta}{2})$$

(+ ∞ si l'ensemble est vide).

On a $\tau_n \uparrow$ strictement sur $\{\tau_n < +\infty\}$. Si

$$\sup_{\substack{t_1 < t_2 \leq T \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} \ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \min\{|x_t - x_{t_1}|, |x_t - x_{t_2}|\} > \eta$$

alors il existe $t \in \,]t_1, t_2[$ tel que

$$|x_t - x_{t_1}| > \eta \quad \text{et} \quad |x_t - x_{t_2}| > \eta \, .$$

Supposons $T_n > t_1 > T_{n-1}$, alors

$$\eta \leq |x_t - x_{t_1}| \leq |x_{t_1} - x_{\tau_{n-1}}| + |x_{\tau_{n-1}} - x_t| \leq \frac{\eta}{2} + |x_{\tau_{n-1}} - x_t| \, .$$

Donc $t_1 < \tau_n \leq t$ et $t < \tau_{n+1} \leq t_2$ (de même).

Donc $\forall \omega$, $\exists$ n tel que

$$|\tau_n(\omega) - \tau_{n-1}(\omega)| < \delta \quad .$$

Posons

$$\delta_\eta^T = \mathrm{Inf}(\tau_n - \tau_{n-1} | \ \tau_{n-1} < T) \, .$$

La propriété sera démontrée si $\forall$ T on trouve δ tel que

$$P_x^h[\delta_\eta^T < \delta] \leq \varepsilon \qquad \forall h > 0 \, , \ \forall x \in K$$

(en effet, ce qui précède montre que l'événement

$$B = \{ \sup_{\substack{t_1 < t_2 \leq T \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} \ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \min\{|x_t - x_{t_1}|, |x_t - x_{t_2}|\} > \eta \}$$

est inclus dans $\{\delta_\eta^T < \delta\}$).

Or

$$P_x^h[\delta_\eta^T < \delta] = P_x^h\{\mathrm{Inf}_n \ (\tau_n - \tau_{n-1} | \tau_{n-1} < T) < \delta\}$$

$$\leq \mathrm{Inf}_n \ P_x^h[\tau_n - \tau_{n-1} < \delta \, , \ \tau_{n-1} < T]$$

$$\leq \mathrm{Inf}_n \ P_x^h[\sup_{0 \leq s \leq \delta} |x_{\tau_{n-1}+s} - x_{\tau_{n-1}}| > \frac{\eta}{2}, \ \tau_{n-1} < T\}$$

$$\leq \mathrm{Inf}_n \ P_x^h[\sup_{0 \leq s \leq \delta} |x_{\tau_{n-1} \wedge T + s} - x_{\tau_{n-1} \wedge T}| > \frac{\eta}{2} \ ]$$

comme les $\tau_{n-1} \wedge T$ sont bornés par T, on applique (4.15) et on obtient le résultat.

■

Ceci termine une première étape de la vérification (1.5).

Etape 2. Soit $(h_n, x_n) \to (h, x)$

$$h_n,\ h > 0\ ,\quad x_n\ ,\ x \in K\ ,$$

alors tout point limite de $\{P_{x_n}^{h_n}\}$ est égal à P_x^h.

Soit une sous suite, encore notée $P_{x_n}^{h_n}$, convergeant étroitement vers P, $\forall f \in C$ on a

$$E_{x_n}^{h_n} f(x_o) = f(x_n)$$

Comme $\omega \to x(o,\omega)$ est continue, f continue, on a

$$E^P f(x_o) = f(x) \qquad \forall\ f \in C$$

(4.16) $$\Rightarrow P(x_o = x) = 1.$$

Montrons maintenant que $\forall f \in C$

(4.17) $$f(x_t) - f(x) - \int_o^t A_h f(x_s) ds$$

est une P martingale.

Pour cela, il suffit de démontrer que $\forall f \in C$, $\forall \varphi$ continue sur Ω, $\mathcal{F}_s$ mesurable,

(4.18) $$E_{x_n}^{h_n} \{[f(x_t)-f(x_s)-\int_s^t A_{h_n} f(x_r)dr]\varphi\}$$

converge vers

(4.19) $$E^P\{[f(x_t)-f(x_s)-\int_s^t A_h f(x_r)dr]\varphi\}$$

$\forall$ s,t en dehors de $T_P \subset R^+$ tel que T_P est dénombrable, et $\forall t \notin T_P$, $\omega \to x(t,\omega)$ est P ps continue. (Ceci existe cf. [40], [15]).

Comme par le choix de s, t, $\varphi f(x_t)$, $\varphi f(x_s)$ sont continues en ω, on a la convergence des premiers termes de (4.18).

D'autre part $\beta_n(x) = f(x+h_n)$ converge uniformément sur tout compact vers $f(x+h)$, donc on passe à la limite dans le terme en $A_{h_n} f$.

On déduit de ceci que (4.19) est nulle $\forall$ s, t $\notin T_P$. Comme T_P est dense dans R^+, pour s, t quelconque on prendra $t^n \searrow t$, $s^n \searrow s$, φ continue $\mathfrak{F}_s$ mesurable donc $\mathfrak{F}_{s^n}$ mesurable. Donc,

$$E^P[\varphi[f(x_{t^n}) - f(x_{s_n}) - \int_{s_n}^{t_n} A_h f(x_r)dr]] = 0$$

et de la continuité à droite de x_t, on déduit que (4.19) est nulle $\forall$ t, s.

Il suffit maintenant de démontrer que le problème de martingale suivant a une solution unique

"Trouver P probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ telle que

$\forall f \in B$,

$f(x_t) - f(x) - \int_o^t A_h f(x_s)ds$ est une P martingale (locale)

$P(x_o = x) = 1$ "

Or ceci est facile car l'existence résulte des constructions classiques d'un processus de markov associé à A_h, et pour démontrer l'unicité, soit $\tau = \mathrm{Inf}(s \geq 0,\ x_s \neq x_o)$, on prend $f(y) = 1 - \chi_{\{x\}}(y)$, on a

$$E^P f(x_{t\wedge\tau}) = P(\tau \leq t) = E^P \int_o^{t\wedge\tau} A_h f(x_s)ds$$

$$= \int_o^t \frac{a(x)}{h^2} E^P \chi_{s<\tau}\, ds$$

$$= \int_o^t \frac{a(x)}{h^2} P[\tau > s]\, ds$$

$$\Rightarrow \qquad P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\frac{a(x)}{h^2} t}.$$

D'autre part $\forall$ f mesurable bornée on obtient

$$E^P f(x_\tau) = \frac{1}{2}[f(x+h)+f(x-h)]$$

On en déduit facilement que deux éventuelles solutions du problème de martingale coïncident alors sur $\mathcal{F}_\tau$; elles coïncident alors sur $\mathcal{F}$ par un raisonnement analogue à celui de Priouret [53] par exemple. Ceci termine <u>l'étape 2.</u>

<u>Etape 3.</u> Soit $(h_n, x_n) \to (0,x)$, x_n, $x \in K$, $h_n \searrow$, alors tout point limite de la suite $P^{h_n}_{x_n}$ est égal à P_x (diffusion associée à A). Soit $P^{h_n}_{x_n}$ une sous suite convergeant vers P.

On vérifie comme précédemment que

$$P(x(o) = x) = 1 \ .$$

Vérifions que $P(C(0,\infty,R)) = 1$. On utilise pour cela le critère de Billingsley [15] : $\forall\ \varepsilon$, $\forall\ \eta$, $\exists\ h_o$, δ tels que

$$P^{h_n}_{x_n}[\sup_t \sup_{\substack{t \le s_1 \le t+\delta \\ s_2}} |x(s_1)-x(s_2)| \ge \varepsilon] \le \eta \qquad (4.20)$$

$$\forall\ n \ge n_o \ .$$

Soit N_δ le nombre de saut de x_t sur $[t, t+\delta]$.
On a

$$\sup_{t \le s_1 \le s_2 \le t+\delta} |x(s_1)-x(s_2)| \le N_\delta . h_n \quad P^{h_n}_{x_n} \text{ ps.}$$

Comme $a(x) \le M$; On a

$$P^{h_n}_{x_n}[N_\delta = k] \le \frac{1}{k!} \left(\frac{\delta M}{h_n^2}\right)^k e^{-M\delta/h_n^2} \ .$$

d'où

$$P^{h_n}_{x_n}[N_\delta \ge \frac{\varepsilon}{h_n}] \le \sum_{k \ge 1+\frac{\varepsilon}{h_n}}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\delta M}{h_n^2}\right)^k e^{-M\delta/h_n^2}$$

$$\le \left[\frac{\delta}{h_n^2}\right]^{(1+\frac{\varepsilon}{h_n})} \ .$$

On prend alors n_o tel que $(\frac{1}{2})^{1+\frac{\varepsilon}{h_{n_o}}} \leq \eta$; puis $\delta = \frac{h_{n_o}^2}{2}$,
(4.20) est alors vérifée.

Alors soit $f \in C_b^2(E)$, φ continue en ω, $\mathcal{F}_t$ mesurable, on a

$$A_{h_n} f(x) = \frac{a(x)}{2} \Delta f(x) + \varepsilon_h(x)$$

avec $\varepsilon_h(x) \to 0$ uniformément sur tout compact, comme $\varphi.[f(x_s)-f(x_t)]$ est P ps. continue en ω (puisque $P(x(0,\infty;R)) = 1$, on montre que

$$E_{x_n}^{h_n} \{\varphi[f(x_s) - f(x_t) - \int_t^s A_{h_n} f(x_r)dr]\}$$

converge vers

$$E^P[\varphi\{f(x_s) - f(x_t) - \int_t^s Af(x_r)dr\}] \ ,$$

donc que P est l'unique solution du problème de martingale associé à $(x, \frac{a(x)}{2} \Delta)$.

<u>Etape 4.</u> On a démontré que sur $[0,h_o] \times K$ ($\forall h_o > 0$, $\forall$ K compact), si $(h_n,x_n) \to (h,x)$ alors $P_{x_n}^{h_n} \to P_x^h$ étroitement (avec $P_x^o = P_x$).
Donc si f est P_x^h ps continue,

$$\varphi(h_n,x_n) = \int_\Omega P_{x_n}^{h_n}(d\omega)f(\omega) \to \varphi(h,x) = \int_\Omega P_x^h(d\omega)f(\omega).$$

En particulier si f est P_x^h ps continue $\forall$ $(h,x) \in [0,h_o] \times K$,

$$\varphi(h,x) = \int P_x^h(d\omega)f(\omega) \text{ est continue sur } [0,h_o] \times K \ .$$

Donc φ est uniformément continue. Donc

$$\varphi(h,\cdot) \to \int_\Omega P_x(d\omega)f(\omega) \text{ uniformément sur K quand } h \to 0.$$

Or, pour g continue bornée sur E, $\omega \to g(x(t,\omega))$ est P_x^h ps continue $\forall$ h,x puisque, la loi des instants de sauts étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

$$P_x^h(x_t \neq x_{t-}) = \sum_{n \geq 0} P_x^h(\tau_n=t) = 0$$

(si τ_n est le $n^{\text{ième}}$ instant de saut).

Donc finalement quand $h \to 0$, $\Phi^h(t)g \to \Phi(t)g$ uniformément sur tout compact, ($\forall$ t fixé).

Supposons maintenant

$$g^{h_n} \to g \text{ dans } C_K \,, \quad h_n \to 0 \,.$$

il résulte de ce qui précède que la famille des probabilités de transition $\{P^{h_n}(x,t,\cdot),\ x \in K\}$ est étroitement compacte. Donc $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, K_\varepsilon$ compact de E, tel que

$$P^{h_n}(x,t,K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\, n \,, \quad \forall\, x \in K \,.$$

D'où

$$\begin{aligned} X = |\Phi^{h_n}(t)g^{h_n}(x) - \Phi(t)g(x)| &\leq |\Phi^{h_n}(t)g^{h_n}(x) - \Phi^{h_n}(t)g(x)| \\ &\quad + |\Phi^{h_n}(t)g(x) - \Phi(t)g(x)| \\ &\leq \left|\int_{K_\varepsilon} P^{h_n}(x,t,dy)(g^{h_n}(y)-g(y))\right| \\ &\quad + \left|\int_{\complement K_\varepsilon} P^{h_n}(x,t,dy)(g^{h_n}-g)\right| \\ &\quad + |\Phi^{h_n}(t)g - \Phi(t)g| . \end{aligned}$$

D'où

$$X \leq \| g^{h_n}-g\|_{K_\varepsilon} + \varepsilon.c. + \| \Phi^{h_n}g - \Phi(t)g\|_K$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\Phi^{h_n}(t)g^{h_n}(x)-\Phi(t)g(x)| \leq \| g^{h_n}-g\|_{K_\varepsilon} + \varepsilon.c \\ + \| \Phi^{h_n}g - \Phi(t)g\|_K \,. \end{aligned}$$

Donc quand $n \uparrow \infty$ puis $\varepsilon \to 0$ on obtient que $\Phi^{h_n}(t)g^{h_n} \to \Phi(t)g$ uniformément sur tout compact : ce qui termine la démonstration de (1.5).

Conclusion.

Les théorèmes VIII.2.3 et VIII.3.1 s'appliquent au cas particulier considéré ici, si u_h désigne le coût optimal d'un problème d'arrêt ou de contrôle impulsionnel pour $\Phi^h(t)$, u le coût optimal du même problème pour la diffusion on aura donc

$$u_h \to u \text{ uniformément sur tout compact,}$$

sous les hypothèses de ces théorèmes.

On peut se passer de la condition $a(x) \geq \beta > 0$ si on prend $a(x) \in C_b^2 \quad a(x) \geq 0$. (ce qui est essentiel et l'unicité de la solution du problème de martingale associé à A).

Approximation de $u_h(x)$ par $u_h(ih)$.

En pratique on ne calcule que

$$u_h(ih) \qquad i \in Z \quad .$$

Posons

$$\tilde{u}_h(x) = u_h(ih) \quad \text{si } x \in [ih,(i+1)h[\ .$$

Soit encore

$$\tilde{u}_h(x) = u_h([\tfrac{x}{h}]h) \quad \text{si } [\tfrac{x}{h}] = i \quad \text{sur } x \in [ih,(i+1)h[.$$

Lemme VIII.4.4. Sous les hypothèses du Lemme VIII.4.1.

$$\tilde{u}_h \to u \quad \text{dans } C_K \ .$$

Démonstration.

Soit K compact de R, $x \in K$, on a

$$|\tilde{u}_h(x)-u(x)| \leq |\tilde{u}_h(x)-u_h(x)| + |u_h(x)-u(x)|$$

$$\leq |u_h([\tfrac{x}{h}]h)-u_h(x)| + |u_h(x)-u(x)|$$

Or si $\tilde{K}$ est un compact fixé, $x', x'' \in \tilde{K}$

$$|u_h(x')-u_h(x'')| \leq |u_h(x')-u(x')| + |u(x')-u(x'')|$$
$$+ |u(x'')-u_h(x'')| .$$

De la continuité uniforme de u sur $\tilde{K}$ et de la convergence uniforme de u_h vers u sur $\tilde{K}$, on a

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{x',x'' \in \tilde{K} \\ |x'-x''| \leq \delta}} |u_h(x')-u_h(x'')| \leq 2 \, \| u_h-u\|_{\tilde{K}} + \rho_{u,\tilde{K}}(\delta)$$

Si $\rho_{u,\tilde{K}}(\delta)$ est le module de continuité de u sur $\tilde{K}$. En prenant $\tilde{K}$ assez grand, contenant K, on a

$$\operatorname*{Sup}_{x\in K} |\tilde{u}_h(x)-u(x)| \leq 2\| u_h-u\|_{\tilde{K}} + \rho_{u,\tilde{K}}(h) + \| u_h-u\|_{\tilde{K}}$$

Donc $\tilde{u}_h \to u$ uniformément sur tout compact.

∎

VIII.4.2. Généralisations.

- Opérateurs elliptiques.

Donnons simplement la discrétisation à utiliser quand

$$(4.21) \qquad \begin{aligned} & a = \operatorname{diag}(a_{ii},\dots,a_{dd}), \quad E = R^d \\ & a_{ii} \in C_b^o(R^d) \quad a_{ii} \geq \beta > 0 \quad \forall\, i,x . \end{aligned}$$

On prend de plus les coefficients de dérive

$$(4.22) \qquad b_i \in C_b^o(R^d)$$

$$A = \sum_i a_{ii} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(4.23) \qquad A_h u = \frac{Q_h}{h^2}\Big[\frac{u(x+e_i h)}{Q_h} \begin{Bmatrix} h|b_i|+a_{ii} \\ a_{ii} \end{Bmatrix} + \frac{u(x-e_i h)}{Q_h} \begin{Bmatrix} a_{ii} \\ h|b_i|+a_{ii} \end{Bmatrix}$$
$$- u(x)\Big]$$

$$Q_h = 2 \sum a_{ii} + h \sum |b_i|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h|b_i|+a_{ii} \\ a_{ii} \end{array} \right\} = (h|b_i|+a_{ii})\, \chi_{b_i \geq 0} + a_{ii}\, \chi_{b_i \leq 0} \,.$$

On peut refaire les mêmes calculs qu'au §. VIII.4.2 pour vérifier les hypothèses des théorèmes VIII.2.8 et VIII.3.1.

On pourrait également prendre un opérateur elliptique avec $a_{ij} \neq 0$, $a \geq \beta I > 0.$, continue mais les formules de discrétisation se compliquent ; il n'y a pas de difficulté mathématique supplémentaire.

Evidemment on peut remplacer les hypothèses a continu strictement elliptique, par a semi définie positive, appartenant à $C_b^2(R^d)$.

∎

CONCLUSION

On a obtenu ici des résultats d'existence de contrôles optimaux et de caractérisation du coût optimal pour le contrôle impulsionnel d'une classe assez large de processus de markov, ainsi que, dans la mesure du possible, les inéquations quasi variationnelles correspondantes.

Cependant, il est bien clair que de nombreux problèmes importants n'ont pas été abordés.

Des résultats très partiels sont cependant disponibles dans beaucoup de cas mais un travail considérable reste à faire.

Sans que la liste soit exhaustive, on peut mentionner

- les problèmes ergodiques : il s'agit d'utiliser des critères du type

$$J_x(v) = \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T E_x^v f(x_s) ds + \sum_{i \geq 1} c(\xi^i) \chi_{\tau^i < T} \right).$$

Pour les diffusions, un certain nombre de cas sont étudiés dans LASRY [36] (b). Pour des processus de markov de saut pur, qui sont un exemple assez simple, un cas particulier est traité dans FAYOLLE - ROBIN [24]. Il faut remarquer que tous les résultats disponibles concernent des cas où l'on sait obtenir une régularité de la solution de l'IQV qui permet l'application d'une formule d'ITO.

- les problèmes où le contrôle est à la fois "continu" et impulsionnel (cf. [14] pour le cas de diffusions)

- les problèmes en "information imparfaite", soit parceque seule une partie de l'état est observable, soit parceque l'observation de l'état est brevetée, soit encore parceque l'état n'est pas observé en permanence. L'analogue du "théorème de séparation" existe cependant pour les problèmes d'arrêt optimal cf. A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS [11]). Pour le contrôle impulsionnel, ANDERSON - FRIEDMAN [3] [4] et ROBIN [63] traitent des cas particuliers.

- les problèmes de jeux (cf. [11] pour le cas des diffusions).

- les problèmes avec contraintes (qui s'apparentent aux problèmes multicritères qui, eux aussi sont totalement ouverts) : par exemple le but est de minimiser un critèe analogue à ceux utilisés dans ce travail, soit $J_x(v)$, sous la contrainte

$$H_x(v) \leq K$$

où $H_x(v)$ est une fonctionnelle analogue à $J_x(v)$.

- tous les problèmes précédents peuvent être étudiés dans un cadre markovien, mais également (comme d'ailleurs les problèmes traités dans ce travail), pour des processus non markoviens. Il s'agit là d'un degré d'abstraction supplémentaire mais il est clair que les conditions d'optimalités (à obtenir) ne donneront lieu à des méthodes numériques que lorsque l'on se ramène à un cas markovien.

REFERENCES

La liste qui suit est loin d'être complète, une bibliographie plus détaillée pourra être trouvée dans Shiriaev [65] pour les problèmes d'arrêt optimaux et dans Bensoussan - Lions [11] pour les travaux plus récents sur les problèmes d'arrêt et pour le contrôle impulsionnel.

[1] S. Agmon - A. Douglas - L. Niremberg , Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations.
Communication in Pure and Appl. Math, Vol XII, 623-727, 1959.

[2] M. Alam - V.V.S. Sarma , Optimal maintenance and replacement via semi markov decision model.
Int. J. on Systems Sc. 1975, Vol 6, n° 9, 809-818.

[3] R.F. Anderson - A. Friedman , A quality control problem and quasi variational inequalities.
J. Rat. Mech. Analysis, à paraître.

[4] R.F. Anderson - A. Friedman, Multi dimensional quality control problems and quasi variational inequalities.
à paraître. (T.A.M.S).

[5] R.F. Anderson , A. Friedman, Quality control for markov chains and free boundary problems.
à paraître.

[6] A. Bensoussan - A. Friedman , Differential games with stopping times and variational inequalities.
J. of Functional Analysis 1974. Vol 16, n° 3, 305-352.

[7] A. Bensoussan - J.L. Lions , Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles paraboliques.
Applicable Analysis 3, 1973, 267-294.

[8] A. Bensoussan - J.L. Lions , Sur les inéquations variationnelles.
C.R.A.S 1975 , T. 280 , 989-996.

[9] A. Bensoussan - J.L. Lions , Temps d'arrêt et contrôle impulsionnel : Inéquations variationnelles et quasi variationnelles d'évolution.
Université Paris IX, Cahier de Math. de la Décision, 1975, n° 7523.

[10] A. Bensoussan - J.L. Licns , Variational inequalities and stopping times.
Symposium on Calculus of Varaitions and Control Theory.
Madison, sept. 1975.

[11] A. Bensoussan - J.L. Lions , Temps d'arrêt et contrôle impulsionnel.
Livre à paraître (Hermann) Paris, 1977.

[12] A. Bensoussan - J.L. Lions , Nouvelles méthodes en contrôle impulsionnel.
J. of Applied Math. and Opt. , 1974, Vol 1, n° 4, 289-312.

[13] A. Bensoussan - J.L. Lions , Inéquations variationnelles et perturbations singulières.
Colloque IRIA, Juin 1974, Lecture Notes in Economics and Mathematical systems, n° 107, Springer Verlag, 1975.

[14] A. Bensoussan - J.L. Lions , Impulse and continuous control : method of non linear quasi variational inequalities. Moscou, Steklov Institute, 1974.

[15] P. Billingsley , Convergence of Probability measures. J. Wiley, 1975.

[16] M. Bismut , Contrôle de processus de sauts. C.R.A.S, T. 281, 1975, série A, 767-770.

[17] M. Bismut , Le problème de l'arrêt optimal. C.R.A.S, T. 281, 1975, série A, 989-992.

[18] R.M. Blumenthal - R.K. Getoor , Markov Processes and potential theory. Academic Press, 1968.

[19] P. Courrege - R. Priouret , Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire. Recollement de processus de Markov. Public. Instit. Statist. Univ. Paris, 14, 1965, 245 et 599.

[20] C. Dellacherie - P.A. Meyer , Probabilité et Potentiel. Hermann 1976, Vol 1.

[21] E. Dynkin , Markov processes. Tome 1 et 2, Springer Verlag 1965.

[22] E. Dynkin , Theory of Markov Processes. Programm Press 1960.

[23] E. Dynkin , Arrêt optimal des processus de Markov. Doklady Acad. , n° 150, 2, 1963, 238-240.

[24] G. Fayolle - M. Robin , Optimum queueing policies for multi processors computers. Preprints of Modelling and Performance evaluation of computer systems, North Holland, 1976.

[25] M. Goursat - G. Maarek , Nouvelle approche des problèmes de gestion de stocks.
Rapport Laboria n° 148, 1976.

[26] M. Goursat - S. Maurin , Méthodes de résolution des I.Q.V.
Colloque IRIA, Juin 1974, Lecture Notes in Economics and Math. Systems n° 107, Springer Verlag 1975.

[27] M. Goursat - J.P. Quadrat , Analyse numérique d'inéquation variationnelle associée à des problèmes d'arrêt optimal.
Rapport Laboria 154, 1976.

[28] M. Goursat - J.P. Quadrat , Analyse numérique d'inéquations quasi variationnelles elliptiques associées à des problèmes de contrôle impulsionnel.
Rapport Laboria n° 186, 1976.

[29] M. Goursat - J. Szpirglas , Application du Contrôle impulsionnel à un problème de maintenance.
2ème Congrès National de Fiabilité, 1974.

[30] M. Goursat - J. Szpirglas , Quelques problèmes de maintenance optimale d'une centrale téléphonique.
Annales de Telecom. , 1976.

[31] I.I. Gihman - A.V. Skorohod , Theory of stochastic processes.
Vol. 2, Springer Verlag, 1975.

[32] I.I. Gihman - A.V. Skorohod , Stochastic differential equations.
Springer Verlag , 1970.

[33] B.I. Grigelionis - A.Shiriaev , On the Stefan Problem and optimal stopping rules for Markov Processes.
Theor. of Proba. and Appl. 11, 1966, 541-558.

[34] H. Kushner , Math. Programming studies, 1977.

[35] J. Jacod , Semi groupes et mesures invariantes pour les processus semi merkoviens à espace d'état quelconque.
Ann. Inst. H. Poincaré, Section B, Vol. IX, n° 1, 1973, 77-112.

[36] T. Laetsch , A uniqueness result for elliptic quasi variational inequalites, J. Of Funct. Anal. 1975, 18, 286-287.

[37] C. Leguay , Application du contrôle impulsionnel à un problème de gestion optimale d'énergie.
Thèse Docteur Ingénieur, Paris IX, 1975.

[38] C. Leguay , Management science, à paraître.

[39] D. Leroy , Application du contrôle optimal à un problème d'échange thermique.
Thèse de 3ème cycle 1973, Paris.

[40] J.P. Lepeltier - B. Marchal , Problème de Martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur integro - différentiel.
Ann. I. H. P. Vol. XII, n° 1, 1976, 43-103.

[41] J.L. Lions , Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires.
Dunod Paris 1969.

[42] J.L. Lions , Cours au Collège de France 1973/1974
1974/1975.

[43] P. Mandl , On the Control of a Wiener process by a limited number of switching.
Th. of Proba. and Appl. XII. 1, 1967, 68-76.

[44] C. Mayer , Processus de Markov non homogènes et espace - temps.
Ann. Inst. Henri Poincaré IV n° 3, 1968, 165-177.

[45] J.L. Menaldi , Thèse à paraître.

[46] J.F. Mertens , Strongly supermedian functions and optimal stopping.
Z. f W. 26, 1973, 119-139.

[47] P.A. Meyer , Probabilités et Potentiels.
Hermann, Paris 1966.

[48] P.A. Meyer , Processus de Markov.
Springer Verlag, Lectures notes in Math. n° 26, 1967.

[49] F. Mignot - J.P. Puel , Solutions maximum d'inéquations variationnelles d'évolution et inéquations quasi variationnelles paraboliques.
C.R.A.S,T. 280, 1975, série A, 259-262.

[50] J. Neveu , Bases mathématiques du calcul de probabilités.
Gauthiers - Villars, 1968.

[51] U. Prabhu , Stochastic control of queueing system.
Naval Research quarterly, 1974, 21, n° 3, 411-418.

[52] U. Prabhu - S. Stidham , Optimal control of queueing systems.
in Mathematical methods in queueing theory. Lectures Notes in Economics and Math. Systems n° 98, Springer Verlag 1974.

[53] R. Priouret , Problèmes de martingales.
Ecole d'été de Probabilité de St Flour 1973.
Lectures Notes in Math. n° 390, Springer Verlag 1974.

[54] M. Robin , Contrôle optimal de file d'attente.
Rapport Laboria n° 117, 1975.

[55] M. Robin , Some optimal control problem for queueing systems.
Symposium on Stochastic Systems, Lexington 1975,
Math. Program,studies, 1976, Vol 6.

[56] M. Robin , Contrôle impulsionnel avec retard pour les processus de diffusion.
C.R.A.S. T. 282, Série A, 1976, 463-466.

[57] M. Robin , Sur le contrôle impulsionnel des processus markovien et semi markovien.
C.R.A.S T. 282, série A, 1976, 631-634.

[58] M. Robin , Contrôle impulsionnel avec retard pour les processus de diffusion.
Colloque France URSS 1976, à paraître (Dunod).

[59] M. Robin., Impulsive control with time lag.
Joint automatic control conference, Purdue University,
La Fayette 1976.

[60] M. Robin , Impulsive control for a semi markov processes.
IEEE Conference on Decision and Control, December 1975.

[61] M. Robin , Contrôle impulsionnel des processus de Markov.
Annales de l'Université de Clermont (à paraître).

[62] M. Robin , Optimal maintenance for semi-markov deterioration models.
AICQ symposium Venise, Sept 1975.

[63] M. Robin , Optimal Maintenance and inspection.
A paraître (accepté par le 8e IFIP Symposium Optimization).

[64] B. Skalli , Existence et caractérisation des solutions du problème d'arrêt optimal dans le cadre de la théorie générale des processus.
Thèse 3ème Cycle Paris VI, 1976.

[65] A.N. Shiriaev , Sequential statistical Analysis.
AMS Pub. Providence 1973.

[66] A.V. Skorohod , Studies in the theory of random processes.
Addison Wesley, 1965.

[67] D. Stroock , Diffusion processes with Levy generator.
Z.W.f.G 32, 1975, 209-244.

[68] D. Stroock - S. Varadhan , Diffusion processes corresponding to Degenerate Elliptic operators.
Comm. in Pure and Appl. Math, 1972, 25, pp. 651-713.

[69] D. Stroock - S. Varadhan , Diffusion processes with boundary conditions.
Comm. in Pure and Appl. Math., 1971, XXIV, 147-225.

[70] L. Stone , On the distribution of the supremum functional for semi markov processes.
Ann. of Stat. 1969, Vol. 40, n° 3, 844-853.

[71] L. Stone , Necessary and sufficient condition for optimal control of semi markov jumps processes.
SIAM J. Control Vol 11, n° 2, Mai 1973 , pp. 187-201.

[72] T. Tobias , The optimal assation of diffusion processes and parabolic variational inequalities.
Differential equations, Janvier 1973, pp. 534-538.

[73] H.W. Taylor , Optimal replacement under additive dommage and other failure models.
Naval Research Quarterly, 1975, 1-18.

[74] P. Van Moerbecke , On optimal stopping and free boundary problems.
Arch. Rat. Mech.

[75] . Yosida , Functional Analysis.
Springer Verlag 1966.

[76] J. Zabcyck , Optimal control by means of switching.
Studies Math. XLV. 1973, 161-171.

[77] J. Zabcyck , Stochastic control with at most a denumerable number of corrections.
In lectures Notes in Computer Science, 5è Conference on Optimization Techniques, Vol 3 et 4, Springer Verlag 1973.

[78] H.J. Engelbert , On optimal stopping rules for markov processes with continuous time.
Th. of Proba. and Appl. XIX n° 2, 1974, 278-296.

[79] H.J. Engelbert , On the theory of optimal stopping rules for Markov processes.
Th. of Proba. and Appl. XVIII n° 2, 1973, 304-311.

[80] A.G. Fakeev , Optimal stopping rules for stochastic processes with continuous parameter.
Th. of Proba. and Applic. 1970, 324-331.