



HAL
open science

Modélisation de la variabilité spatiale et temporelle des précipitations à la sub-mésoéchelle par une approche multifractale

Sébastien Verrier

► **To cite this version:**

Sébastien Verrier. Modélisation de la variabilité spatiale et temporelle des précipitations à la sub-mésoéchelle par une approche multifractale. Météorologie. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2011. Français. NNT : 2011VERS0039 . tel-00734327

HAL Id: tel-00734327

<https://theses.hal.science/tel-00734327>

Submitted on 21 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

THÈSE DE DOCTORAT

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-
QUENTIN-EN-YVELINES**

Présentée et soutenue par

Sébastien VERRIER

le 13/12/11

Titre :

**MODÉLISATION DE LA VARIABILITÉ SPATIALE ET
TEMPORELLE DES PRÉCIPITATIONS A LA
SUB-MÉSOÉCHELLE PAR UNE APPROCHE
MULTIFRACTALE**

Membres du jury :

R. DUSSÉAUX	LATMOS/UVSQ	Président
S. LOVEJOY	McGill University	Rapporteur
R. UIJLENHOET	Wageningen University	Rapporteur
Z. BARGAOU	ENIT	Examineur
J.-D. CREUTIN	LTHE	Examineur
É. PERRIER	GEODES/IRD	Examineur
L. BARTHÈS	LATMOS/UVSQ	Co-directeur de thèse
C. MALLET	LATMOS/UVSQ	Co-directeur de thèse

Thèse préparée au Laboratoire ATmosphères, Milieux, Observations Spatiales
(LATMOS/IPSL)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier tout particulièrement mes co-directeurs de thèse Laurent Barthès et Cécile Mallet pour l'encadrement et le soutien accordé tout au long de cette thèse. Ils ont su faire preuve d'une grande disponibilité et m'ont apporté de précieux conseils tout en me laissant une indépendance appréciable dans la gestion de mon travail de recherche. Leur expérience m'a été utile durant tout ce travail ainsi que dans la rédaction des articles de revue qui y sont associés. Enfin, je les remercie pour la lecture et la correction du présent manuscrit.

Je remercie également Louis de Montera, doctorant puis ATER au LATMOS, pour son aide et ses conseils avertis ainsi que pour ses travaux et son manuscrit de thèse qui m'ont fourni une base solide sur laquelle s'appuie mon travail.

Je suis très reconnaissant à Shaun Lovejoy, Professeur à l'Université de McGill, et à Remko Uijlenhoet, Professeur à l'Université de Wageningen, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la tâche de rapporteur de ma thèse. J'adresse aussi mes sincères remerciements à Richard Dusséaux, Zoubeida Bargaoui, Jean Dominique Creutin, et Edith Perrier qui ont accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier toute l'équipe SPACE du LATMOS, permanents et doctorants avec qui j'ai travaillé ces dernières années, notamment Aymeric Chazottes, Yvon Lemaître, Nicolas Viltard, Sahra Kacimi, Thomas Noel et Jean-François Rysman. Un grand merci également pour la bonne humeur régnant dans cette équipe ;-). J'en profite aussi pour remercier mes anciens collègues de Vélizy appartenant désormais à l'équipe ESTER du LATMOS.

J'exprime ma reconnaissance aux équipes de recherche ayant contribué au développement des modèles utilisés dans le cadre de ce travail et notamment aux équipes de Shaun Lovejoy et de Daniel Schertzer.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille et plus particulièrement mes parents pour leur soutien constant.

A tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail, merci.

Résumé

Les précipitations sont caractérisées par une variabilité extrême sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Elles résultent de phénomènes non linéaires qui produisent des extrêmes violents et localisés difficiles à représenter dans les modèles météorologiques. Il est alors souhaitable de pouvoir disposer de représentations stochastiques susceptibles de reproduire les propriétés statistiques des précipitations aux différentes échelles. Une famille de candidats possibles est constituée par les cascades multifractales, initialement introduites en mécanique statistique de la turbulence. Dans ce travail, nous considérons le modèle des « multifractales universelles » (Schertzer & Lovejoy, 1987), qui permet de caractériser les propriétés statistiques d'un champ d'un point de vue multi-échelle au moyen de trois paramètres fondamentaux (« universels »).

Nous avons appliqué des outils d'analyse multifractale à des jeux de données de précipitations représentatifs de la variabilité à la sub-mésoéchelle, notamment à des cartes radar de pluie et à des séries chronologiques à très haute résolution temporelle. Cette étude a permis d'identifier les gammes d'« invariance d'échelle » dans lesquelles des symétries multifractales prédominent, et d'estimer les trois paramètres universels.

Nous montrons aussi que l'application des algorithmes d'analyse à l'intérieur des événements de pluie fournit des résultats sensiblement différents de ceux généralement publiés. On a pu démontrer, par des calculs théoriques et au moyen de simulations, que les algorithmes classiques d'analyse multifractale sont très sensibles à la proportion de zéros dans les champs, ce qui est évidemment problématique pour la pluie. Une méthode d'analyse pondérée par le support d'occurrence de pluie des données a été proposée pour corriger les biais. Les valeurs des paramètres universels corrigés semblent indiquer que la pluie et les scalaires passifs présentent certaines symétries d'échelles communes aux échelles suffisamment grandes pour que l'advection turbulente domine les effets inertiels.

Enfin, on montre que l'existence de propriétés multifractales présente un grand intérêt au niveau des applications. Notamment, un algorithme de downscaling multifractal universel a été défini. Cet algorithme exploite les symétries caractérisées par les paramètres universels pour générer une variabilité statistiquement réaliste à des échelles plus fines qu'une échelle d'observation donnée. Potentiellement, cet algorithme pourrait être utilisé pour générer des séries de précipitations de résolution horaire à partir de données journalières, ou pour

augmenter la résolution de cartes de précipitations, ce qui peut donner lieu à des applications en hydrologie.

Référence :

Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.* 92 (D8), 9693–9714.

Abstract

Rainfall is characterized by an extreme variability over a wide range of space- and timescales. Underlying nonlinear phenomena produce strong and localized extremes that are poorly represented in current meteorological models. There is a need of stochastic representations that could reproduce rainfall statistics whatever the scale. Multifractal cascades, initially introduced in statistical physics of turbulence, are possible candidates. In this work, the “Universal Multifractal” model (Schertzer & Lovejoy, 1987) is considered. This model enables multiscale statistical characterization of a field by the means of three fundamental (“universal”) parameters.

Multifractal analysis tools have been applied to rainfall datasets representative of submesoscale variability, especially to weather radar measurements and to high-resolution disrometer time series. “Scaling ranges”, i.e. ranges of scales dominated by multifractal symmetries are identified and associated with specific estimated universal parameters.

It is shown that analysis algorithms applied conditionnally in the interior of the rain events provide results that differ significantly from those reported in scientific literature. By the means of theoretical calculations and of simulations, it is demonstrated that classical multifractal analysis algorithms are very sensitive to the proportion of zeros, which is obviously problematic in the case of rainfall. A new methodology of analysis has been proposed, based on the computation of weighted statistics that overweight nonzero values. Consistent parameters that are not affected by zeros are estimated and the obtained values suggest that rainfall and passive scalars share some statistical scaling symmetries at scales sufficiently large so that turbulent advection dominates inertial effects.

Finally, it is shown how the existence of multifractal properties may impact applications. In particular, a universal multifractal downscaling algorithm has been defined. This algorithm exploits scaling symmetries associated with universal parameters in order to simulate a statistically consistent and realistic variability at scales inaccessible to observation or simulation. For instance, this algorithm could be used to build hourly rainfall time series from daily ones, or even to increase the resolution of observed precipitation maps, leading to possible hydrological applications.

Reference:

Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.* 92 (D8), 9693–9714.

Table des matières

REMERCIEMENTS	5
RESUME	7
ABSTRACT	9
LISTE DES FIGURES	15
1 INTRODUCTION.....	17
1.1 CONTEXTE GENERAL : LA VARIABILITE DES PRECIPITATIONS	17
1.2 CADRE DE L'ETUDE	21
1.3 BUT DE LA THESE	22
1.4 PLAN DE LA THESE	22
2 APPLICABILITE DES MODELES FRACTALS AUX PRECIPITATIONS: JUSTIFICATION ET ETAT DE L'ART	25
2.1 SYMETRIES D'EHELLES DANS L' ATMOSPHERE	25
2.1.1 <i>L'atmosphère comme système complexe</i>	25
2.1.2 <i>Conséquences sur la modélisation numérique</i>	26
2.1.3 <i>Lois d'échelle de la turbulence et des écoulements atmosphériques</i>	28
2.1.4 <i>Lois d'échelle pour les scalaires passifs</i>	33
2.1.5 <i>La pluie suit-elle des lois de type KOC?</i>	33
2.1.6 <i>Interprétation en termes de fractals et de multifractals</i>	35
2.2 PREUVES EMPIRIQUES DES PROPRIETES DE « SCALING » DE LA PLUIE	36
2.2.1 <i>Des fractals aux multifractals</i>	36
2.2.2 <i>Multifractalité de la pluie : résultats empiriques</i>	36
2.2.3 <i>La multifractalité « universelle »</i>	38
2.3 MULTIFRACTALITE ET PLUIE : PROBLEMATIQUES A RESOUDRE	38
2.4 CONCLUSION	41
3 FRACTALS ET MULTIFRACTALS : FONDEMENTS THEORIQUES	43
3.1 INTRODUCTION.....	43
3.2 LES OBJETS FRACTALS	43
3.2.1 <i>Introduction et premiers exemples</i>	43
3.2.2 <i>Notion de dimension fractale</i>	46
3.2.3 <i>Vocabulaire : échelles et résolutions</i>	48
3.2.4 <i>Notion de co-dimension fractale</i>	49
3.2.5 <i>Exemple : dimension fractale de l'ensemble de Cantor</i>	50
3.3 PROCESSUS ET CASCADES MULTIFRACTALS	51
3.3.1 <i>Introduction</i>	51
3.3.2 <i>Les multifractals comme limites de cascades aléatoires</i>	52
3.3.3 <i>Propriétés mathématiques générales des cascades multifractales</i>	57
3.3.4 <i>Exemples de cascades multiplicatives discrètes</i>	60
3.4 CASCADES CONTINUES EN ECHELLE – UNIVERSALITE.....	61
3.4.1 <i>Nécessité d'une approche universelle</i>	61
3.4.2 <i>Cascades log - infiniment divisibles</i>	62
3.4.3 <i>Illustration : le modèle log-Poisson</i>	63
3.5 MULTIFRACTALES UNIVERSELLES (LOG-STABLES)	64
3.5.1 <i>Cascades non intégrées</i>	64
3.5.2 <i>Cascades intégrées</i>	67
3.6 LIMITATIONS D'ECHANTILLON ET DIVERGENCE DES MOMENTS	68
3.6.1 <i>Divergence de certains moments des quantités intégrées</i>	68
3.6.2 <i>Contraintes liées à la taille d'échantillon</i>	70
3.6.3 <i>Conséquences pour l'observation des valeurs extrêmes</i>	71
3.7 CONCLUSION	72
4 PROCEDURES DE SIMULATION ET D'ANALYSE DE MULTIFRACTALS UNIVERSELS	73
4.1 INTRODUCTION.....	73

4.2 SIMULATION DES MULTIFRACTALS UNIVERSELS.....	73
4.2.1 Principe général.....	73
4.2.2 Génération des variables stables.....	75
4.2.3 Implémentation des convolutions.....	77
4.2.4 Exemple de simulation.....	77
4.3 ANALYSE MULTIFRACTALE DE DONNEES.....	78
4.3.1 Aperçu d'ensemble.....	78
4.3.2 Analyse spectrale et fonction de structure du premier ordre.....	79
4.3.3 Estimation des moments empiriques.....	81
4.3.4 La technique du « Double Trace Moment » (DTM).....	88
4.4 CONCLUSION.....	89
5 ANALYSE MULTIFRACTALE DE DONNEES DE PRECIPITATIONS A HAUTE RESOLUTION SPATIALE ET TEMPORELLE	91
5.1 INTRODUCTION.....	91
5.2 PARAMETRES UNIVERSELS POUR LA PLUIE DANS LA LITTERATURE : ETAT DE L'ART	92
5.3 DONNEES.....	95
5.4 ANALYSE MULTIFRACTALE DES DONNEES DE PRECIPITATIONS.....	102
5.4.1 Les régimes d'invariance d'échelle.....	102
5.4.2 Sélection de sous-ensembles excluant les zéros de la pluie.....	107
5.4.3 Que vaut l'exposant H dans les zones de pluie ?.....	109
5.4.4 Résultats de l'analyse multifractale avec et sans zéros (cas spatial).....	113
5.4.5 Résultats de l'analyse multifractale avec et sans zéros (cas temporel).....	115
5.4.6 Correction empirique de l'effet des zéros par analyse pondérée.....	118
5.5 BILAN SUR L'EFFET DES ZEROS DE LA PLUIE ET INTERPRETATION DES PARAMETRES A ET C1 « CORRIGES »	120
5.6 INTERPRETATION EN LIEN AVEC LES SCALAIRES PASSIFS.....	123
5.6.1 Introduction.....	123
5.6.2 Proposition d'une approche basée sur KOC pour la variabilité spatiale des précipitations.....	123
5.7 CONCLUSION.....	127
6 MODELISATION ET CORRECTION DES EFFETS D'UN SUPPORT FRACTAL.....	129
6.1 INTRODUCTION.....	129
6.2 INCLUSION DES ZEROS DANS DES SIMULATIONS MULTIFRACTALES	129
6.3 SIMULATION DE L'EFFET DES ZEROS PRODUITS PAR UN MODELE A SEUIL	130
6.4 PROPRIETES SCALANTES DU SUPPORT DE LA PLUIE.....	135
6.5 MODELISATION MATHEMATIQUE DE L'EFFET DES ZEROS	137
6.5.1 Rupture de scaling pour les multifractals seuillés.....	138
6.5.2 Estimation théorique des biais liés aux zéros sur les paramètres multifractals.....	139
6.5.3 Validation des formules exprimant le biais sur les paramètres multifractals.....	142
6.6 CONCLUSION.....	145
7 APPLICATIONS : DOWNSCALING ET MODELISATION DES EXTREMES	147
7.1 INTRODUCTION.....	147
7.2 MULTIFRACTALS ET DISTRIBUTION DES TAUX PRECIPITANTS EXTREMES	147
7.2.1 Principe.....	147
7.2.2 La distribution de probabilité de la série DBS.....	148
7.2.3 Comparaison des valeurs théoriques et empiriques de q_D	150
7.3 MULTIFRACTALS ET ALGORITHMES DE DOWNSCALING	153
7.3.1 Introduction.....	153
7.3.2 Cascades multifractales et downscaling.....	154
7.3.3 Limitations des algorithmes existants.....	155
7.3.4 Algorithme de « downscaling multifractal universel ».....	157
7.4 CONCLUSION.....	162
8 CONCLUSION ET PERSPECTIVES	163
ANNEXES	167
A - RAPPELS SUR LES LOIS STABLES.....	167
A.1 Définition.....	167

<i>A.2 Fonctions caractéristiques des variables stables</i>	168
<i>A.3 Moments et fonction génératrice des moments</i>	169
<i>A.4 Autres propriétés des variables stables</i>	171
B - CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE DE CHAMPS MULTIFRACTALS « UNIVERSELS »	171
<i>B.1 Principe</i>	171
<i>B.2 Fonction de pondération</i>	172
<i>B.3 Détermination de l'amplitude du bruit stable</i>	174
RÉFÉRENCES	175
ARTICLES	185

Liste des figures

FIG. 1.1 VUES DU GARD – SEPTEMBRE 2002.....	17
FIG. 1.2 CARTE DE PRECIPITATIONS OBSERVEE PAR LES RADARS DE METEO-FRANCE A PROXIMITE DU GARD LE 9 SEPTEMBRE 2002 A 6H TU (ROUGE = PRECIPITATIONS > 360 MM/H, ORANGE = PRECIPITATIONS > 115 MM/H)	18
FIGURE 2.1 SPECTRES DE PUISSANCE DEDUITS DE LA CAMPAGNE GASP (REPRODUIT DE GAGE & NASTROM (1986))	32
FIGURE 2.2 SPECTRE DE PUISSANCE POUR LA DENSITE D’EAU LIQUIDE OBSERVEE DURANT L’EXPERIENCE HYDROP (REPRIS DE LOVEJOY & SCHERTZER, 2008).....	34
FIGURE 3.1 : CONSTRUCTION DE L’ENSEMBLE DE CANTOR.....	44
FIG. 3.2 LA COURBE DE VON KOCH	44
FIGURE 3.3 CONSTRUCTION DE LA COURBE DE PEANO	45
FIGURE 3.4 EXEMPLE DE TRAJECTOIRE D’UN MOUVEMENT BROWNIEN UNIDIMENSIONNEL	46
FIGURE 3.5 : ENSEMBLE DE CANTOR ET ESTIMATION DE LA DIMENSION.....	50
FIGURE 3.6 SEUILLAGE DE CHAMPS MULTIFRACTALS	52
FIGURE 3.7 SCHEMA DE PRINCIPE DES CASCADES MULTIPLICATIVES DISCRETES	54
FIGURE 3.8 PASSAGE DES CASCADES A ECHELLES DISCRETES AUX CASCADES A ECHELLES CONTINUES, SELON (SCHERTZER & LOVEJOY, 1997).....	55
FIGURE 3.9 ALLURE TYPIQUE D’UNE FONCTION DE CO-DIMENSION	58
FIGURE 4.1 : SCHEMA DE PRINCIPE D’UN SIMULATEUR DE CHAMPS MULTIFRACTALS	74
FIGURE 4.2 EXEMPLE DE SIMULATION D’UNE CASCADE MULTIFRACTALE UNIVERSELLE CONTINUE EN ECHELLE ..	78
FIGURE 4.3 DEGRADATION DE LA RESOLUTION D’UNE CASCADE MULTIPLICATIVE AU MOYEN D’UNE SUCCESSION D’AGREGATIONS.....	83
FIGURE 4.4 GRAPHE DES MOMENTS PRODUIT PAR L’ANALYSE MULTIFRACTALE. LA PENTE DE CHAQUE DROITE CORRESPOND A UNE VALEUR DE $K(Q)$. LES DROITES S’INTERSECTENT EN UNE ECHELLE « EXTERNE » L_{EXT}	84
FIGURE 4.5 : GRAPHE DES MOMENTS EMPIRIQUES DES CARTES SIMULEES	87
FIGURE 4.6 FONCTION D’ECHELLE DES MOMENTS EMPIRIQUE DES CARTES SIMULEES	88
FIGURE 5.1 LE RADAR RONSARD	96
FIGURE 5.2 EXEMPLE CARTE RADAR DE REFLECTIVITE (EN DBZ) FOURNIE PAR LE RONSARD	97
FIGURE 5.3 L’INSTRUMENT DBS (SPECTROPLUVIOMETRE BI-FAISCEAUX)	100
FIGURE 5.4 SCHEMA DE FONCTIONNEMENT DU DBS	101
FIG. 5.5 SPECTRE DE PUISSANCE DE LA SERIE DBS EN COORDONNEES LOGARITHMIQUES. LES PARTIES LINEAIRES CORRESPONDENT A DES REGIMES DE SCALING.....	104
FIG. 5.6 SPECTRE CLASSIQUE DES PRECIPITATIONS EN CLIMAT TEMPERE SELON LA LITTERATURE EXISTANTE. FIGURE REPRISE DE (FRAEDRICH & LARNDER, 1993).....	104
FIGURE 5.7 SPECTRE DE PUISSANCE DES 1372 CARTES DE MESURES (25 KM X 25 KM, RESOLUTION : 400 M) EFFECTUEES PAR LE RONSARD	106
FIGURE 5.8 EXEMPLE D’EVENEMENT DE PLUIE OBSERVE PAR LE DBS.....	108
FIGURE 5.9 FONCTION DE STRUCTURE D’ORDRE 1 DES 1372 CARTES RONSARD. LA LIGNE ROUGE CORRESPOND A $H = 0.2$	110
FIGURE 5.10 FONCTION DE STRUCTURE D’ORDRE 1 DES 100 CARTES RONSARD SELECTIONNEES (97% DE PLUIE). LA LIGNE ROUGE CORRESPOND A $H = 0.2$	110
FIGURE 5.11 FONCTION DE STRUCTURE D’ORDRE 1 DE LA SERIE DBS COMPLETE	111
FIGURE 5.12 FONCTION DE STRUCTURE DES EVENEMENTS DE PLUIE EXTRAITS DE LA SERIE DBS (EVENEMENTS DE 30 MIN ENVIRON, 97.5% DE PLUIE).....	111
FIGURE 5.13 MOMENTS EMPIRIQUES DES 1372 CARTES RONSARD (ORDRES $0 < Q < 2$).....	113
FIGURE 5.14 MOMENTS EMPIRIQUES DES 100 CARTES RONSARD SELECTIONNEES (97% DE PLUIE) , ORDRES $0 < Q$ < 2	114
FIGURE 5.15 MOMENTS STATISTIQUES D’ORDRES 0 A 3 DE LA SERIE DBS COMPLETE OBTENUS POUR DIVERSES RESOLUTIONS	116
FIGURE 5.16 MOMENTS EMPIRIQUES DES 52 EVENEMENTS DE PLUIE DBS POUR LES ORDRES 0 A 3, A DIVERSES RESOLUTION	117
FIGURE 5.17 FONCTION D’ECHELLE DES MOMENTS POUR LES EVENEMENTS DBS. LA COURBE EXPERIMENTALE EST EN ROUGE ET L’AJUSTEMENT EN BLEU.....	117
FIGURE 5.18 MOMENTS EMPIRIQUES DE LA SERIE DBS COMPLETE PONDERES PAR LES ZEROS	120
FIGURE 6.1 SPECTRE (EN HAUT) ET FONCTION DE STRUCTURE DU PREMIER ORDRE DES SERIES SIMULEES PAR DE MONTERA ET AL. (2009).	131

FIGURE 6.2A MOMENTS DU FLUX Φ SOUS-JACENT AUX SIMULATIONS, EN L'ABSENCE DE SEUIL.....	132
FIGURE 6.2B MOMENTS DU FLUX Φ SOUS-JACENT AUX SIMULATIONS T-FIF (SEUIL HAUT, P =10%)	133
FIGURE 6.2C MOMENTS DU FLUX Φ SOUS-JACENT AUX SIMULATIONS T-FIF (SEUIL P = 60%)	133
FIGURE 6.3 MISE EN EVIDENCE DU CARACTERE FRACTAL DU SUPPORT DE LA SERIE DBS PAR UNE VERSION PROBABILISTE DE L'ALGORITHME « BOX-COUNTING »	136
FIGURE 6.4 MOMENTS DU GRADIENT ABSOLU DES REFLECTIVITES TRMM	144
FIGURE 7.1 GRAPHE LOG-LOG DE 1-CDF DE LA SERIE DBS DE PALAISEAU (2008 - 2010) A LA RESOLUTION DE 32 MIN.....	149
FIGURE 7.2 ORDRE THEORIQUE DE DIVERGENCE DES MOMENTS	152
FIGURE 7.3 EXEMPLE DE SIMULATIONS DE CASCADES LOG-STABLES DE MEMES PARAMETRES ($A = 1.8$; $C_1 = 0.1$; $H = 0$) A ECHELLES DISCRETES (A GAUCHE) ET CONTINUES	156
FIGURE 7.4 EXEMPLE DE DOWNSCALING MULTIFRACTAL UNIVERSEL (CONTINU EN ECHELLE) SUR UNE CARTE SIMULEES	158
FIGURE 7.5 DETAIL D'UNE CARTE RECONSTITUEE PAR DOWNSCALING MULTIFRACTAL UNIVERSEL	159
FIGURE 7.6 COMPARAISON DES QUANTILES DE LA CARTE SIMULEE INITIALE 1024 X 1024 (ABSCISSE) ET DES CARTES RECONSTITUEES (ORDONNEES) (A LA RESOLUTION MAXIMALE)	161
FIGURE 7.7 MOMENTS EMPIRIQUES D'ORDRES $0 < Q < 2$, POUR LA CARTE SIMULEE (EN BLEU) ET POUR LES CARTES RECONSTITUEES (EN VERT).....	161

1 Introduction

1.1 Contexte général : la variabilité des précipitations

L'étude des précipitations concerne à la fois les domaines de la climatologie et de la météorologie. Elle s'avère primordiale en raison d'une part des forts impacts environnementaux du phénomène, en particulier les inondations et crues éclair (et, inversement, les sécheresses) dues aux précipitations extrêmes, et d'autre part parce que l'évolution des précipitations constitue un indicateur très important du changement climatique.

L'importance des menaces dues au risque de crues est considérable. 2200 inondations ont tué 176000 personnes dans le monde entre 1980 et 2005 (source : em-dat.net). En particulier, les inondations résultant de précipitations intenses (crues éclair) constituent le risque naturel le plus destructeur en France, et notamment dans les régions du pourtour méditerranéen (mais pas seulement comme le montrent les inondations catastrophiques en Vendée et en Charente-Maritime en 2010). Ainsi, plusieurs crues éclair ont tué une ou plusieurs dizaines de personnes chacune dans ces régions depuis quelques décennies, notamment à Nîmes (1988), Vaison-la-Romaine (1992), et Puisseguiers (1996), dans l'Aude (1999), le Gard (2002) (Fig. 1.1). Des événements aussi meurtriers, dont le coût matériel est également considérable (1.2 milliard d'euros pour l'inondation de 2002), résultent d'orages extrêmement violents, tel que celui de septembre 2002 observé par les radars de Météo-France (Fig. 1.2).

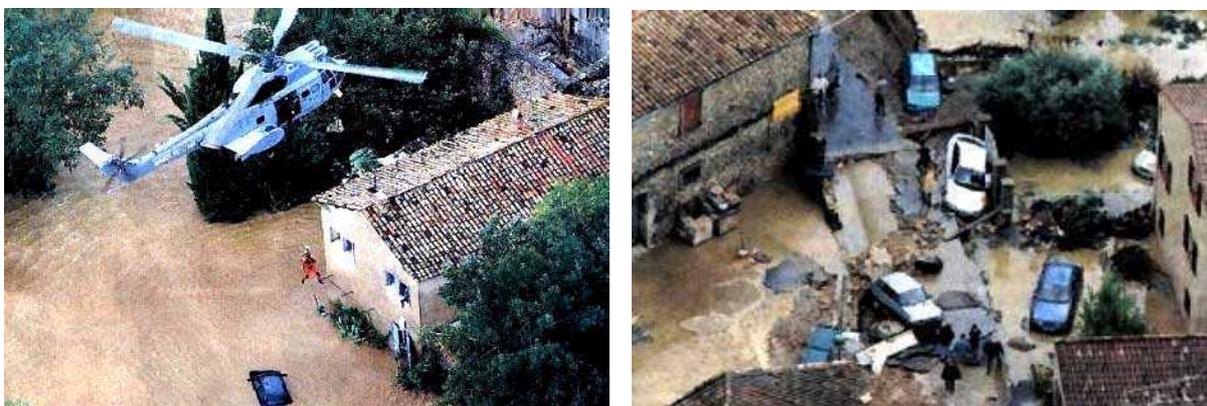


Fig. 1.1 Vues du Gard – Septembre 2002

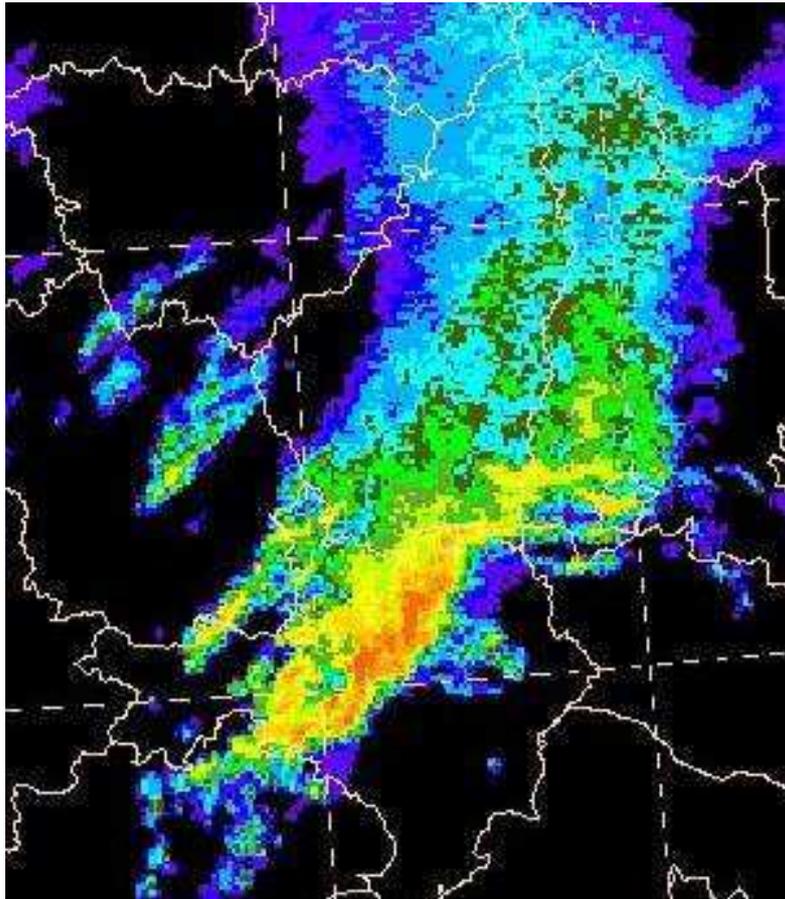


Fig. 1.2 Carte de précipitations observée par les radars de Météo-France à proximité du Gard le 9 septembre 2002 à 6h TU (rouge = précipitations > 360 mm/h, orange = précipitations > 115 mm/h)

Les événements précipitants produisant ces crues sont des systèmes convectifs de sub-mésoéchelle (< 10-20 km) voire de méso-échelle (quelques dizaines de km au moins). Il est donc nécessaire de caractériser la variabilité des précipitations à ces échelles pour mieux comprendre les phénomènes météorologiques susceptibles de causer un risque d'inondation.

D'autre part, l'évolution des précipitations à l'échelle de plusieurs décennies est étroitement liée au changement climatique. De façon générale, les modèles de prévision climatique sont en accord pour prévoir l'évolution du climat sur de très grandes échelles spatiales (continents, océans à différentes latitudes). Outre le réchauffement global, les modèles prédisent une augmentation de la fréquence de certains types de catastrophes naturelles liées aux précipitations (ouragans, crues) ainsi que de la durée des sécheresses dans certaines régions

du globe. A l'échelle régionale, des désaccords importants subsistent entre les modèles de climats, tout particulièrement pour les précipitations. Ces désaccords proviennent de la difficulté de représenter les nuages et la pluie dans des modèles numériques dont le pas de grille (10 – 100 km) excède la taille typique d'un nuage (2 km). L'étude des propriétés des précipitations à la sub-mésoéchelle est une étape préliminaire à la définition d'une paramétrisation consistante des précipitations dans les modèles de climat.

Les précipitations constituent un phénomène météorologique difficile à représenter et à simuler à l'aide des modèles de prévision actuels. Leur formation résulte d'une physique complexe faisant intervenir différents processus (turbulence, évaporation, collision, coalescence et break-up) Les précipitations peuvent être qualifiées de processus « intermittent » car l'occurrence de pluie (ou d'une autre forme de précipitation, le cas échéant) est moins fréquente que son absence. La variabilité spatiale et temporelle du phénomène est considérable et couvre de nombreuses échelles. Cette variabilité peut résulter en des événements extrêmes difficiles à modéliser voire même à observer en l'absence de radars météorologiques. Ces extrema peuvent être très intenses : un seul événement météorologique peut déverser en une journée une quantité d'eau équivalente à celle déversée durant plusieurs mois de conditions météorologiques normales. Quelques exemples, relatifs aux crues évoquées plus haut, suffisent à illustrer l'ampleur de ces valeurs extrêmes :

- le 3 octobre 1988, une inondation catastrophique a ravagé la région de Nîmes. La station de Nîmes-Courbessac a enregistré une accumulation de pluie de 263 mm la même journée, dont 228 mm en 6 h (Fabre, 1989 ; Ladoy et al., 1993). Pourtant, l'accumulation journalière moyenne du 1 au 28 septembre 1988 était de 3.9 mm à la même station ...
- cette accumulation record peut être interprétée de la façon suivante : la pluie accumulée le 3 octobre 1988 à Nîmes-Courbessac correspond à plus du tiers de l'accumulation climatologique annuelle en ce point (747 mm sur la période de 1951 à 1980).
- les orages du 8 et 9 septembre 2002 (Huet, 2003) dans le Gard ont été extrêmement violents avec des accumulations ponctuelles atteignant jusqu'à 687 mm en 24 heures. Néanmoins, ces accumulations présentaient une forte disparité spatiale, deux stations

séparées de 40 km ayant par exemple enregistré des valeurs de 635 mm et de 60 mm respectivement.

En dehors même de ces événements rares, la variabilité des précipitations impacte fortement la météorologie opérationnelle. En effet, cette variabilité résulte de processus couvrant différentes échelles en interaction. Les modèles numériques de prévision du temps, à l'instar des modèles de climat, ont une résolution limitée pour des raisons de temps de calcul. Par conséquent, ils réalisent une troncature d'échelle qui élimine entre autres les processus convectifs de sub-mésoéchelle. Les orages ne peuvent donc être prédits et localisés rigoureusement au moyen de ces modèles, et ces erreurs peuvent même impacter les échelles résolues par le modèle (bien que des « paramétrisations » tentent de corriger ce défaut). D'autre part, les performances des modèles météorologiques sont très fortement conditionnés par la précision sur la connaissance de l'état de l'atmosphère à un instant initial. Pour améliorer cette précision, des techniques d'assimilation de données sont disponibles. Néanmoins, l'assimilation des informations relatives aux précipitations reste délicate en raison du manque d'observations disponibles et d'informations relatives aux erreurs (et covariances d'erreurs) sur les observations. En particulier, une difficulté réside dans l'assimilation de mesures « ponctuelles » (obtenues au moyen de pluviomètres) dans un modèle dont le pas de grille peut atteindre voire dépasser 100 km. Les précipitations ont une grande variabilité gouvernée par une dynamique non linéaire, ce qui induit des erreurs si l'on assimile des observations à une échelle inadéquate.

Comme on le voit, la modélisation numérique fondée sur la résolution des équations de la physique n'offre pas une représentation optimale des précipitations à la méso-échelle et à la sub-mésoéchelle. Par conséquent ces modèles ne peuvent représenter explicitement les structures précipitantes de sub-mésoéchelle et notamment les orages les plus violents et les structures de convection les plus intenses, qui sont aussi les plus localisées. Il est donc nécessaire de pouvoir décrire les propriétés de la pluie à la (sub-) méso-échelle dans un cadre différent et complémentaire de la modélisation numérique du temps. Une solution possible réside dans la description de la variabilité (sub-) méso-échelle au moyen d'approches statistiques. Néanmoins, une description adéquate nécessite de pouvoir caractériser les propriétés statistiques des précipitations à plusieurs échelles voire sur un continuum d'échelles. Il est souhaitable de pouvoir adjoindre à cette description des modèles stochastiques capables de générer une forte variabilité multi-échelle ainsi que des événements

extrêmes avec une fréquence réaliste, souvent supérieure à celle des extrema produits par les lois de probabilité usuelles.

1.2 Cadre de l'étude

Le présent travail se positionne sur la thématique de la modélisation statistique des précipitations à la méso-échelle. L'étude porte à la fois sur la variabilité spatiale et temporelle de la pluie, et utilise des jeux de données originaux et haute résolution disponibles au LATMOS (Laboratoire Océan Atmosphère Observations Spatiales) et représentatifs de plusieurs climats. Plus particulièrement, nous nous intéresserons aux mesures d'un radar météorologique, le RONSARD, ayant fonctionné en 2006 au Bénin durant la mousson ouest-africaine. Nous étudierons aussi des mesures effectuées au sol à Palaiseau à l'aide d'un instrument spécifique fournissant des données à très haute résolution temporelle (inférieure à la minute).

On se propose dans cette étude de quantifier certaines propriétés statistiques de la pluie et de vérifier l'adéquation d'une représentation stochastique particulière aux propriétés empirique. Le modèle mathématique choisi relève des « cascades multiplicatives », dont le principe est basé sur la construction itérative d'un champ par une suite de modulations aléatoires de résolution croissante. Cette suite de modulations est par construction autosimilaire et fait apparaître des propriétés fractales. Plus précisément, les symétries statistiques du modèle peuvent être associées à une infinité d'objets fractals aléatoires sous-jacents: on parle de propriétés « multifractales ». Les modèles de cascades multiplicatives apparaissent comme des candidats rationnels pour la modélisation de la pluie pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ces modèles sont issus de la mécanique statistique de la turbulence et des champs passifs advectés où ils jouent un rôle important. D'autre part, il a été prouvé empiriquement que ces modèles sont adaptés à la modélisation de la variabilité de nombreux champs géophysiques (vent, nuages, polluants, topographie). Ces modèles présentent en outre l'avantage de prendre en compte explicitement les relations statistiques entre les échelles et sont susceptibles de générer des extrema très intenses.

Dans le cadre de cette thèse effectuée au LATMOS, nous étudions donc les propriétés statistiques de la pluie en nous appuyant sur les outils liés au formalisme des cascades multiplicatives et des champs « multifractals ».

1.3 But de la thèse

Les travaux présentés dans ce manuscrit visent à améliorer la connaissance des propriétés statistiques des précipitations à la méso-échelle et à la sub-mésoéchelle et à faire ressortir l'existence et la portée de symétries multifractales des processus précipitants dans ces gammes d'échelles. Ce travail a pour ambition de recenser et de caractériser les gammes d'échelles spatiales et temporelles qui vérifient des lois statistiques remarquables.

Par rapport aux résultats existants, nous souhaitons améliorer l'adéquation du modèle des cascades multifractales à la description des précipitations en analysant les données haute résolution disponibles au LATMOS, lesquelles offrent une information précieuse relative à la variabilité sub-mésoéchelle pour laquelle peu de résultats relatifs au symétries d'échelle (scaling) sont disponibles dans la littérature. Nous nous proposons aussi de prendre en compte l'intermittence du phénomène précipitant (pluie ou absence de pluie) plus explicitement dans le modèle.

Enfin, nous montrerons que l'existence de ces propriétés peut impacter des domaines plus « appliqués » : en particulier, la multifractalité peut faire émerger des comportements inattendus quant à la distribution des valeurs extrêmes de la pluie. Nous expliquerons également comment les outils de simulation de champs multifractals peuvent être appliqués à la désagrégation de champs précipitants.

1.4 Plan de la thèse

Le chapitre 2 consiste en un état de l'art non technique recensant l'évolution de l'application des modèles fractals en modélisation statistique de la turbulence et de la pluie.

Le chapitre 3 offre une présentation détaillée du formalisme théorique des multifractals utilisé dans le cadre de cette étude.

Dans le chapitre 4, nous exposons succinctement une méthodologie d'analyse de champs permettant de démontrer et de caractériser l'existence de propriétés multifractales.

Le chapitre 5 présente le résultat de l'application de ces techniques aux jeux de données disponibles au LATMOS, ainsi qu'une interprétation statistique et physique. En particulier, nous montrons que les techniques usuelles des techniques usuelles du chapitre 4 peuvent conduire à des résultats erronés lorsque les champs étudiés contiennent une très grande proportion de valeurs nulles (ce qui est le cas de la pluie). Nous proposons une nouvelle paramétrisation multifractale en considérant des événements de pluie continus non assujettis à ce phénomène.

Dans le chapitre 6, nous étudions la sensibilité des techniques du chapitre 4 aux valeurs nulles au moyen de simulations et de calculs théoriques. Entre autres, nous proposons un modèle mathématique permettant d'estimer les erreurs de paramétrisation.

Les applications de la multifractalité à la désagrégation de champs et à la représentation des valeurs extrêmes font l'objet du chapitre 7.

Le chapitre 8 présente les conclusions du travail.

2 Applicabilité des modèles fractals aux précipitations: justification et état de l'art

2.1 Symétries d'échelles dans l'atmosphère

2.1.1 L'atmosphère comme système complexe

L'évolution de l'état de l'atmosphère est caractérisée par le couplage d'un grand nombre de processus complexes couvrant une très large gamme d'échelles. De façon générale, l'atmosphère présente un certain nombre de propriétés rappelant la structure typique d'un système complexe:

- son état évolue du fait de très nombreux processus et entités en interaction.
- les équations d'évolution de ces processus contiennent des termes non linéaires
- l'hypothèse isotrope n'est pas toujours valide (ne serait-ce qu'en raison de l'action de la force de gravité et de la force de Coriolis, et des conditions aux limites)
- les processus impliqués se développent sur une vaste gamme d'échelles, s'étendant des échelles synoptiques aux échelles (sub-)millimétriques.
- le comportement de ces systèmes est chaotique, malgré la connaissance d'équations déterministes locales. Notamment, il est bien connu depuis les travaux de Lorenz (1963) que même un système d'équations différentielles simples peut définir un comportement chaotique, à cause de la forte sensibilité de son évolution aux perturbations sur les conditions initiales à petite échelle.
- les processus impliqués dans ces systèmes présentent des niveaux d'organisation hiérarchiques à différentes échelles (synoptique, méso-échelle, etc.). Il existe de plus des interactions entre les différentes échelles.

Pour caractériser la complexité du système atmosphérique, il est souhaitable d'estimer l'ordre de grandeur de son nombre de degrés de liberté (Schertzer & Lovejoy, 1991). Considérons donc une atmosphère académique de taille (en ordre de grandeur) 10000 km x 10000 km x 10 km. Dans cette atmosphère, des processus d'écoulements à très haut nombre de Reynolds vont définir des cascades turbulentes d'énergie qui vont se dissiper à des échelles inférieures au

millimètre. Nous pouvons donc considérer comme un degré de liberté chaque boîte élémentaire de volume 1 mm^3 contenue dans notre atmosphère. Le calcul du nombre de ces boîtes donne $10^{10} \times 10^{10} \times 10^7 = 10^{27}$. Soit évidemment un nombre gigantesque, supérieur même au nombre d'Avogadro qui représente pourtant déjà un ordre de grandeur de l'« infini en physique ». Le caractère chaotique de l'atmosphère apparaît à cause de ce nombre quasi-infini de degrés de liberté.

2.1.2 Conséquences sur la modélisation numérique

L'approche numérique est évidemment d'une importance fondamentale pour la prédiction de l'évolution de l'état de l'atmosphère. Cette approche nécessite entre autres de discrétiser sur une grille les équations différentielles régissant la dynamique atmosphérique. Pourtant, cette approche, ne représente pas à elle seule une résolution exhaustive du système atmosphérique, et ce pour deux raisons principales :

1. Les conditions initiales du modèle sont toujours insuffisamment connues pour effectuer une prédiction déterministe rigoureuse de l'évolution du système (qui est chaotique). C'est dans le but d'améliorer la connaissance de cette information qu'ont été développées des procédures d'assimilation de données, qui ont pour but d'inclure l'information issue des observations pour corriger l'évolution du modèle numérique. Pour une description des techniques et du vocabulaire de l'assimilation, il est possible de se référer à (Talagrand, 1997).

2. Pour des raisons de temps de calcul, la maille des grilles des modèles numériques globaux, qui est de l'ordre de quelques dizaines de km, est beaucoup plus grande que l'échelle de dissipation des cascades turbulentes (moins d'un mm). Il en résulte une inadéquation dans la représentation de la diffusion qui peut faire diverger le modèle. Des techniques de paramétrisation ont été proposées pour tenter de limiter ce défaut - cf. (Sadourny & Maynard, 1995) pour une revue concernant la diffusion horizontale. De plus, la taille forcément grossière de la maille induit une « troncature d'échelle » qui implique un filtrage passe-bas très sélectif sur les résolutions. Ce filtrage est doublement gênant car d'une part la représentation des événements météorologiques extrêmes et très localisés devient problématique, et d'autre part les effets des petites échelles sur les grandes échelles ne sont pas pris en compte. Surtout, ce filtrage réduit artificiellement le nombre de degrés de liberté,

qui peut être approximé par le nombre de mailles du modèle. Ce dernier peut être estimé, pour un modèle global possédant une résolution horizontale de Δx (kilomètres) et N_z niveaux sur la verticale, par la formule suivante :

$$N = \left(\frac{20000}{\Delta x} \right)^2 \times N_z \quad (\text{Eq. 2.1})$$

Pour les modèles de circulation générale, Δx est de l'ordre de 10 à 100 km environ et N_z est de l'ordre de 25 à 100. Par conséquent, le nombre de degrés de liberté que peut représenter le modèle est très fortement réduit : N passe de 10^{27} à $10^6 - 10^8$. Il en résulte nécessairement que le modèle ne peut reproduire toute la complexité du système et notamment certaines conséquences non triviales sur son évolution et sur à l'apparition des événements extrêmes.

Si nous prenons l'exemple du modèle numérique global - l'un des plus performants au monde à l'heure actuelle - du centre météorologique européen de Reading (ECMWF), ce modèle a une résolution de 16 km et 91 niveaux sur la verticale, ce qui donne un nombre de mailles voisin de 10^8 . Ce chiffre peut être comparé avec la taille du vecteur d'état du modèle (1.5×10^9) qui est un peu plus grand du fait que plusieurs grandeurs physiques sont considérées en chaque point. Il est à noter que si l'assimilation de données aide à déterminer des conditions initiales plus réalistes et plus précise, elle ne peut résoudre ce problème de filtrage de la complexité. En effet, la plus grande partie des observations assimilées sont satellitaires et leur nombre est d'environ 25 millions par jour en 2010 (cours O. Talagrand, LMD/ENS, 2011), ce qui est déjà considérable et pourtant très réduit en regard des ordres de grandeur représentatifs de la complexité atmosphérique.

Il est donc clair que la modélisation numérique prise isolément ne permet pas la résolution exhaustive de la dynamique et de la physique du système atmosphérique. Actuellement, il est possible d'effectuer une résolution numérique plus fine à l'échelle régionale en faisant tourner un modèle régional conditionné aux limites de son domaine par les sorties d'un modèle global basse résolution. C'est le principe du « downscaling dynamique » qui permet d'augmenter localement la résolution par emboîtement de modèles et de prendre en compte certaines contraintes particulières (relief...). Néanmoins, cette approche, couramment utilisée par les modélisateurs, peut être difficile à implémenter et coûteuse en temps de calcul. Surtout, elle ne permet pas un gain de résolution important (les modèles régionaux ne descendent pas en

dessous de ~ 10 km). D'autres procédés, souvent qualifiés de « downscaling statistique », visent à prévoir certaines propriétés statistiques à fine résolution à partir des sorties d'un modèle global à basse résolution. Des approches très diverses ont été considérées (e.g., Michelangeli, 2009) mais leur justification physique reste souvent floue. La difficulté empirique réside dans le fait que les grandeurs statistiques classiques sont très dépendantes de la résolution en géophysique (par exemple, la variance d'un champ change avec l'échelle à laquelle on la calcule). Les liens entre échelles et statistiques pourraient alors apparaître à première vue comme extrêmement difficiles à décrire. Cependant, l'étude de ces liens dans un formalisme adapté pourrait bien receler la clé d'une réduction de la complexité du système atmosphérique. Comme nous allons maintenant le voir, la dynamique atmosphérique fait émerger (au moins dans certaines gammes d'échelles) des symétries statistiques remarquables reliant les échelles entre elles.

2.1.3 Lois d'échelle de la turbulence et des écoulements atmosphériques

La dynamique des écoulements atmosphériques est régie classiquement par les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

(Eq. 2.2)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

où \vec{v} désigne le vecteur vitesse de l'écoulement, p est la pression du fluide, ρ sa masse volumique, ν sa viscosité cinématique et \vec{f} est un terme associé aux forces autres que celles dues au gradient de pression et à la diffusion.

Dans le cas général, on ne sait pas résoudre ces équations analytiquement. Le cas des écoulements atmosphériques est particulièrement complexe en raison de la gamme d'échelle très large de l'écoulement ainsi que du nombre de Reynolds associé très élevé qui caractérise un régime turbulent.

Bien que le problème des écoulements turbulents ne soit pas résolu analytiquement, on sait que les solutions doivent vérifier certaines contraintes et notamment des symétries d'échelle. Ces symétries résultent notamment de l'invariance des équations de Navier-Stokes par un opérateur de contraction (ou de dilatation) bien choisi :

$$\begin{aligned}\bar{v} &\rightarrow \lambda^H \bar{v} & \bar{x} &\rightarrow \lambda \bar{x} \\ v &\rightarrow \lambda^{1+H} v & t &\rightarrow \lambda^{1-H} t \\ \bar{f} &\rightarrow \lambda^{2H-1} \bar{f}\end{aligned}\quad (\text{Eq. 2.3})$$

où λ désigne un facteur de contraction/dilatation de l'espace (vecteur \bar{x}).

Dans le cas particulier des écoulements turbulents, ces symétries se traduisent par une phénoménologie de cascades: l'écoulement peut être vu comme une suite de tourbillons de taille décroissante assurant le transfert de l'énergie des grandes échelles vers les petites échelles jusqu'à l'échelle à laquelle se produit la dissipation. Cette phénoménologie a été décrite pour la première fois dans l'ouvrage de L. F. Richardson (1922) :

*Big whorls have little whorls
Which feed on their velocity
And little whorls have lesser whorls
And so on to viscosity
(in the molecular sense).*

Cette approche a ensuite été formalisée dans le cadre de la mécanique statistique des fluides turbulents (voir l'ouvrage de référence (Monin & Yaglom, 1972)).

En particulier, la loi de Kolmogorov (1941) est l'un des principaux résultats de cette théorie et constitue la base physique des théories statistiques multi-échelles de la turbulence. Le résultat original a été établi sous l'hypothèse d'une turbulence isotrope. Ce résultat caractérise l'existence de symétries d'échelle (ou de « propriétés d'autosimilarité ») dans une gamme d'échelle dite inertielle (« inertial range »), c'est-à-dire les échelles suffisamment petites pour n'être pas influencées par la géométrie du système à grande échelle et suffisamment grandes

pour que les forces de viscosité jouent un rôle négligeable. Dans cette gamme d'échelle, l'énergie cinétique n'est pas dissipée mais transférée vers les petites échelles par un processus de cascade autosimilaire. En faisant l'hypothèse d'un flux d'énergie homogène, Kolmogorov a montré que les incréments de vitesse suivaient une loi d'échelle :

$$\Delta v_l \stackrel{d}{=} \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 2.4})$$

où $\Delta v_l \stackrel{d}{=} |v(x+l) - v(x)|$ est supposé statistiquement indépendant du point x . On rappelle que ε (supposé homogène) est un taux de dissipation d'énergie cinétique, donc le flux (dérivée temporelle) d'un moment d'ordre 2 de la vitesse.

Cette loi exprime, à une constante multiplicative près non prise en compte ici, la dépendance des propriétés statistiques de la différence absolue de vitesse longitudinale entre deux points de l'espace, séparés d'une distance l :

La loi d'échelle (Eq. 2.4) implique entre autres un spectre d'énergie en loi puissance $-5/3$.

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{Eq. 2.5})$$

Cette équation traduit bien des propriétés d'autosimilarité spectrale (et statistique) car le rapport $E(k_1)/E(k_2)$ ne dépend que du rapport d'échelle k_1/k_2 (et non de chacun des nombres d'onde individuellement).

La loi de Kolmogorov présentée ci-dessus est dans sa version la plus ancienne, fondée sur l'hypothèse d'homogénéité du flux d'énergie ε . Cette loi a été affinée pour prendre en compte des flux d'énergie inhomogènes (Kolmogorov, 1962) :

$$\Delta v_l \stackrel{d}{=} \varepsilon_l^{1/3} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 2.6})$$

où le flux d'énergie est maintenant inhomogène, distribué par une variable aléatoire dont la loi dépend de l'échelle.

La modélisation de ε_l a nécessité le développement de nouveaux outils mathématiques, fondés en particulier sur des modèles de « cascades multiplicatives » (Novikov & Stewart, 1964 ; Yaglom, 1966 ; Mandelbrot, 1974 ; Frisch et al., 1978 ; Benzi et al., 1984, Meneveau & Sreenivasan, 1987). Une cascade multiplicative est une représentation stochastique de champs construits par une suite de « raffinages d'échelles » accompagnés de modulations multiplicatives aléatoires (la notion est présentée en détail au chapitre suivant). Comme ces modulations aléatoires ou leur composition dépendent uniquement (en loi) du rapport d'échelle, ces champs aléatoires présentent des propriétés d'autosimilarité. Il en résulte des corrections d'« intermittence » par rapport à la loi de Kolmogorov. Ces corrections affectent les exposants des lois d'échelles suivies par les quantités statistiques d'ordre différent de 1. Notamment, elles permettent d'expliquer pourquoi les exposants des lois d'échelle des

« fonctions de structure de Kolmogorov » de la vitesse, définies par $\zeta(q) \sim \frac{\log \langle \Delta v_l^q \rangle}{\log(l)}$ sont empiriquement non-linéaires en fonction de l'ordre q , contrairement aux prédictions de la théorie de Kolmogorov (1941) (soit $\zeta(q) = q/3$). Ce phénomène est connu sous le nom d'« anomalous scaling » dans la littérature de la turbulence.

Bien que l'écoulement atmosphérique soit loin évidemment de se réduire au cas de la turbulence isotrope homogène « idéale », des symétries d'échelles telles que celle exprimées par les équations (Eqs. 2.3-2.4) subsistent dans certaines gammes d'échelles. De nombreux modèles mathématiques, fondés sur des cascades d'énergie ou d'entrophie (dirigées vers les petites ou les grandes échelles) ont été proposés dans une vaste littérature. La plupart de ces approches prédisent des spectres en loi puissance $k^{-5/3}$ ou k^{-3} suivant les intervalles d'échelles. Pour des exemples de théories établies dans cet esprit, on pourra par exemple se référer aux articles, fondamentaux, de Kraichnan (1967) et Charney (1971).

La validité de tels spectres en loi puissance décroissante a pu être vérifiée empiriquement par un certain nombre de campagnes d'expérimentation depuis une trentaine d'années. A titre d'exemple, les spectres du vent et de la température potentielle des données collectées durant la campagne GASP (Global Atmospheric Sampling Program) de la NASA suivent cette loi (sauf à grande échelle où l'hypothèse d'isotropie n'est plus valable) (Nastrom & Gage, 1983 ; Gage & Nastrom, 1986).

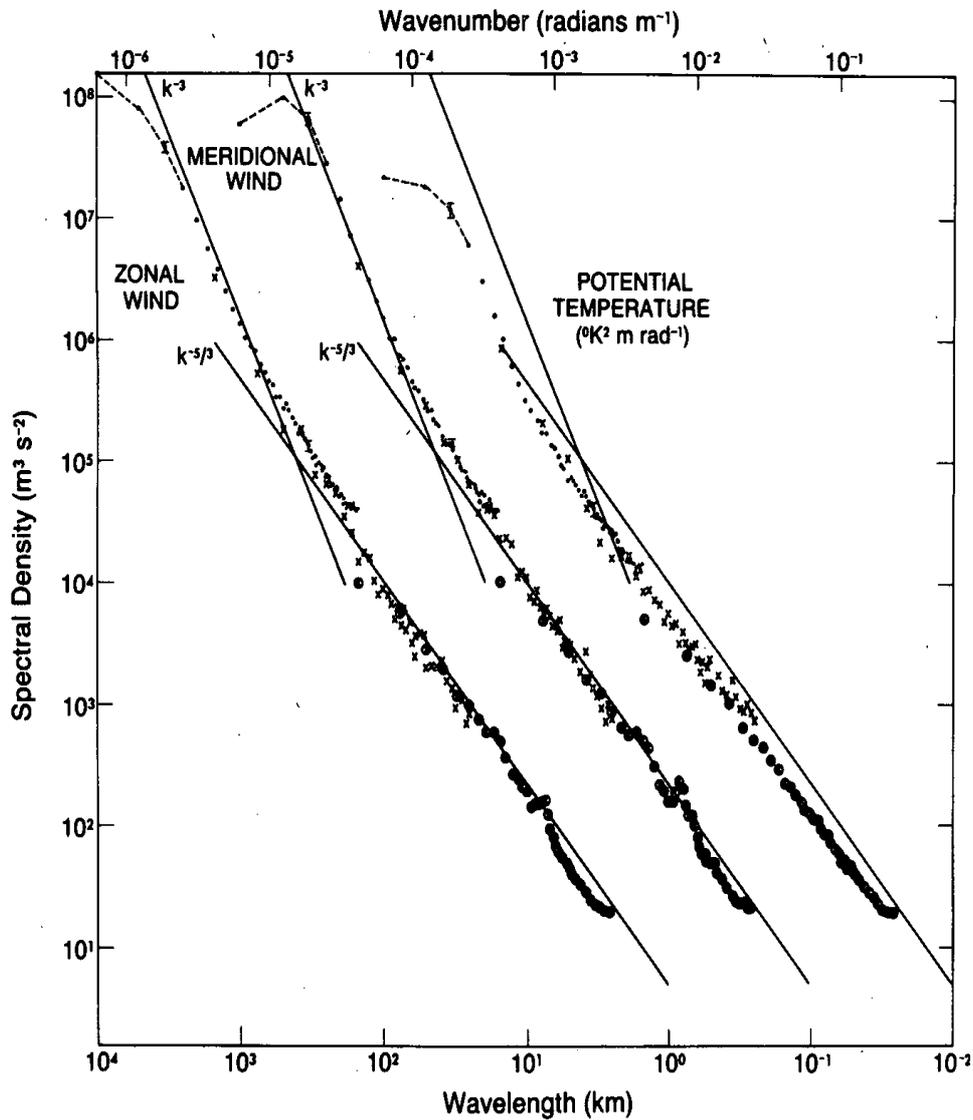


Figure 2.1 Spectres de puissance déduits de la campagne GASP (reproduit de Gage & Nastrom (1986))

Cette figure montre que les propriétés statistiques des champs de vent (et de température) sont directement conditionnées par les symétries du système turbulent considéré. Ces propriétés offrent une caractérisation à la fois simple et complète des écoulements atmosphériques : la complexité de ceux-ci, qui est due à de nombreuses interactions entre les échelles peut cacher une simplicité statistique sous-jacente si ces interactions sont similaires entre elles à rapport d'échelle fixé.

2.1.4 Lois d'échelle pour les scalaires passifs

Considérons maintenant un champ de vitesse turbulent vérifiant une loi de type Kolmogorov (avec un flux d'énergie homogène). Supposons que l'on y ait distribué initialement un traceur (scalaire) passif, c'est-à-dire un ensemble de particules supposées infiniment légères et n'agissant pas sur l'écoulement. Comment ce traceur est-il advecté par l'écoulement ? Il apparaît que les propriétés du traceur vont dépendre non seulement de l'écoulement, mais aussi des propriétés de sa concentration notée ρ . Corrsin (1951) et Obukhov (1949) ont montré que cette concentration suit également une loi d'échelle, plus compliquée en ce sens qu'elle fait intervenir un second flux transmis vers les petites échelles :

$$\Delta \rho_l^d = \chi^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 2.7})$$

où χ est un flux de variance de concentration du traceur, supposé homogène :

$$\chi = -\frac{\partial \langle \rho^2 \rangle}{\partial t} \quad (\text{Eq. 2.8})$$

En particulier, le spectre de puissance de la concentration doit vérifier une loi en $k^{-5/3}$.

Si les flux d'énergie et de variance de concentration sont supposés inhomogènes, une loi « scalante » reste valable (mais la pente spectrale peut changer légèrement) :

$$\Delta \rho_l^d = \chi_l^{1/2} \varepsilon_l^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 2.9})$$

2.1.5 La pluie suit-elle des lois de type Kolmogorov-Obukhov-Corrsin (KOC)?

En revanche, les gouttes de pluie ne peuvent pas être considérées comme des scalaires passifs. En effet, les gouttes présentent une inertie bien trop importante et sont fortement sujettes à l'influence de la force de gravitation. De plus, les gouttes interagissent entre elles par des mécanismes de collision, de coalescence et de breakup. Néanmoins, on peut s'attendre à ce que ces effets s'exercent principalement aux petites échelles. Aux grandes échelles, le taux précipitant dépend principalement de la concentration d'eau liquide et de la vitesse verticale du vent. La concentration d'eau liquide suit-elle une loi fractale à ces échelles ?

Des travaux récents (Lovejoy & Schertzer, 2008) répondent par l'affirmative à cette question. En utilisant des données 3D de positions et de masse de gouttes collectées à très petite échelle (volume de 10m^3) au cours de quelques orages (expérience HYDRON, Desaulniers-Soucy et al., 2001), ces auteurs ont montré empiriquement que la masse volumique d'eau liquide ρ était caractérisé par un spectre de type KOC en $k^{-5/3}$ pour les échelles supérieures à une échelle critique l_c de l'ordre de 50 cm. Aux échelles inférieures à l'échelle critique, le spectre est celui d'un bruit blanc (Fig. 2.2).

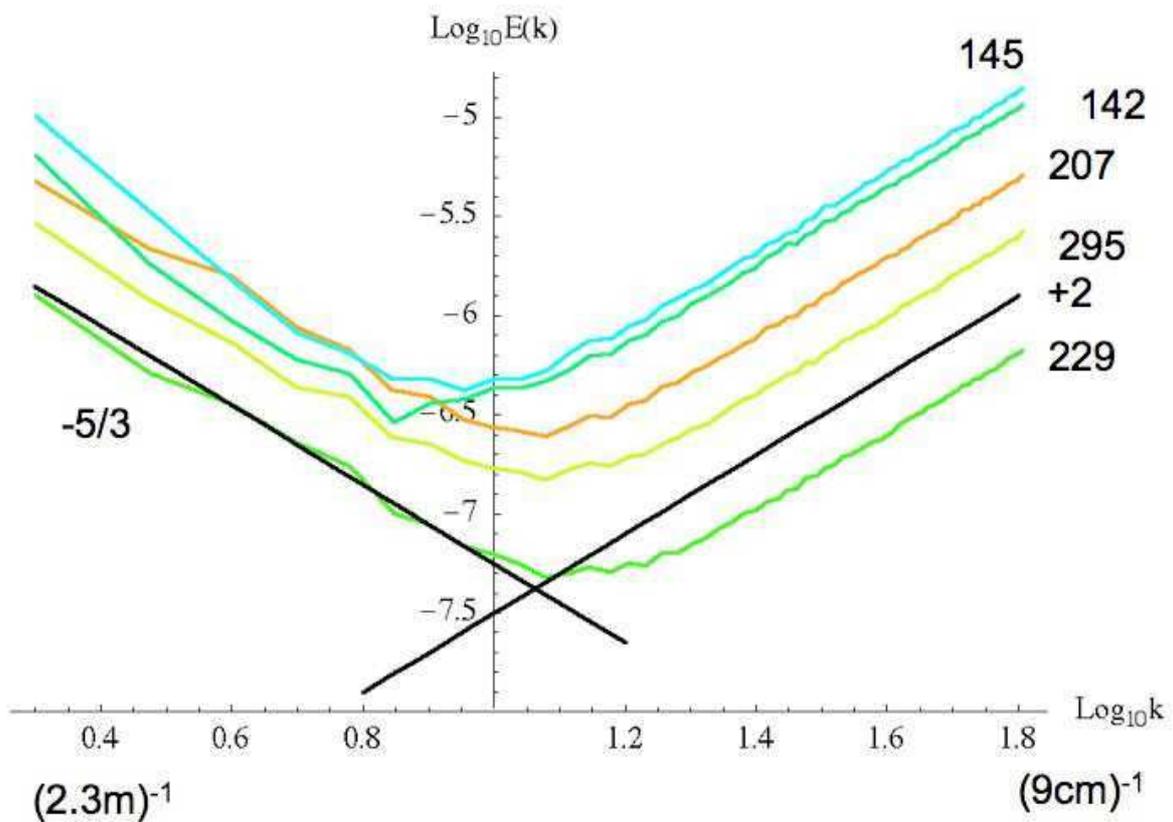


Figure 2.2 Spectre de puissance pour la densité d'eau liquide observée durant l'expérience HYDRON (repris de Lovejoy & Schertzer, 2008)

D'après Lovejoy & Schertzer (2008) (qui ont proposé un cadre théorique non développé ici), la transition observée à l'échelle l_c résulterait d'une transition séparant les échelles où la répartition des groupes de gouttes est dominée par l'advection turbulente de celles où l'inertie des gouttes est dominante (l'influence relative des deux phénomènes pouvant être quantifiée par le « nombre de Stokes ». Par conséquent, au-delà de l'échelle critique, il apparaît très

vraisemblable que les statistiques de la masse volumique dans un événement de pluie suivent des lois d'échelle.

2.1.6 Interprétation en termes de fractals et de multifractals

Les lois d'autosimilarité évoquées ci-dessus constituent une variante « statistique » de la théorie des objets fractals, décrits notamment par (Mandelbrot, 1983). Ces objets présentent génériquement des propriétés d'invariance par zoom, telles qu'une ou plusieurs portions de l'objet ressemblent (à une contraction près) à l'objet entier. Néanmoins, le cas des champs de turbulence modélisés via des « cascades multiplicatives » diffère de la géométrie fractale dans la mesure où ce sont ici de véritables champs, d'intensité variable, et non de simples ensembles géométriques, qui présentent ces symétries remarquables. La modélisation des champs aléatoires produits par des cascades multiplicatives peut alors se faire dans un cadre « multifractal » pour lequel toute une hiérarchie d'objets fractals intervient, chaque objet étant associé à un niveau d'intensité du champ. Ces outils peuvent servir à modéliser des processus et champs extrêmement variables présentant notamment des spectres d'énergie et des fonctions d'autocorrélation en loi puissance mais aussi des propriétés remarquables pour des statistiques de tout ordre. Dès la fin des années 80, les processus (mono)fractals et multifractals sont ainsi apparus comme très pertinents voire incontournables pour une représentation stochastique multi-échelle de la turbulence ainsi que le montre la revue de (Sreenivasan, 1991), et semblent également fournir un outil très performant de caractérisation de la dynamique atmosphérique (Lovejoy et al., 2008 b,c,d; Lovejoy & Schertzer, 2010). D'après un vaste ensemble de résultats empiriques, la fractalité et la multifractalité sont omniprésents en géophysique, notamment, les champs « advectés » semblent vérifier ces propriétés : température (Schmitt et al., 1996), nuages (Tessier et al., 1993), polluants (Lilley et al., 2004), ou, en océanographie, la concentration de chlorophylle (Seuront et al., 1996) .

2.2 Preuves empiriques des propriétés de « scaling » de la pluie

2.2.1 Des fractals aux multifractals

Les premiers résultats empiriques prouvant l'existence de propriétés d'invariance d'échelle pour la pluie ont été établis dans un cadre monofractal. En particulier, plusieurs études (Lovejoy, 1981 ; 1982 ; Rhys & Waldvogel, 1986) ont montré que l'aire A et le périmètre P des régions précipitantes observées par radar (et des nuages) étaient reliés par une loi de type fractale : $P \propto A^{1/D_f}$. D_f est une « dimension fractale » non entière (qui étend la relation habituelle de la géométrie « classique » $P \propto A^{1/2}$) caractérisant la structure complexe et irrégulière de ces structures d'un point de vue multi-échelle. Des modèles monofractals stochastiques de pluie ont alors été proposés (Lovejoy & Mandelbrot, 1985, Lovejoy & Schertzer, 1985) pour tenter de reproduire les caractéristiques multi-échelle de la pluie. Dans le domaine temporel, le caractère fractal et autosimilaire des processus de pluie a été suggéré par la mise en évidence de spectres d'énergie suivant des lois puissances décroissantes dans une ou plusieurs gammes d'échelles (Crane, 1990 ; Fraedrich & Lardner, 1993 ; Fabry ; 1996). Par la suite, les scientifiques ont abandonné l'hypothèse restrictive de monofractalité pour se tourner vers des modèles multifractals. Différents modèles multifractals de pluie ont été proposés dans la littérature (Schertzer & Lovejoy, 1987 ; Gupta & Waymire, 1990 ; Over & Gupta, 1996 ; Veneziano et al., 1996 ; Schmitt et al., 1998 ; Deidda et al., 1999 ; Deidda, 2000 ; Gunter & Olsson, 2001 ; Paulson & Baxter, 2007 ; Rupp et al., 2009). Ces modèles partagent un certain nombre de caractéristiques communes et sont basés sur la phénoménologie des cascades multiplicatives. Nous allons maintenant décrire rapidement quelques résultats empiriques démontrant la validité de ces approches pour la pluie.

2.2.2 Multifractalité de la pluie : résultats empiriques

De nombreuses études de données de précipitations ont confirmé la validité de l'approche multifractale pour la représentation de la variabilité spatiale et temporelle de la pluie. Les premiers résultats ont été obtenus (à méso-échelle) par l'analyse multifractale (dans le domaine spatial) de cartes radar de réflectivité ou de taux précipitant (Schertzer & Lovejoy,

1987 ; Lovejoy & Schertzer, 1990 ; Gupta & Waymire, 1990 ; 1993 ; Tessier et al., 1993) et ont été confirmés par la suite (Macor et al., 2007 ; Gires et al., 2010). La caractérisation de la variabilité spatiale a pu être affinée et étendue à des gammes d'échelles plus larges que celles accessibles à un radar sol au moyen des radars de précipitation satellitaires (Lovejoy et al., 2008 ; Sun & Barros, 2010). En particulier, Lovejoy et al. (2008) ont montré que les statistiques des réflectivités du radar du satellite TRMM obéissaient à des lois multifractales valables entre les échelles planétaires (20000 km) et la sub-mésoéchelle (~ quelques dizaines de km). Des résultats complémentaires, à des échelles spatiales plus réduites, ont été obtenus à l'aide d'autres types de mesures : lidars (Mandapaka et al., 2009) ou stéréophotographie dans un volume réduit (Lilley et al., 2006).

D'autre part, l'analyse multifractale de séries chronologiques de précipitations mesurées au moyen de pluviomètres a donné lieu à une large littérature, entre autres (Ladoy et al., 1993 ; Tessier et al., 1993 ; Svensson et al., 1996 ; Olsson & Niemczynowicz, 1996, Harris et al., 1996 ; Schmitt et al., 1998 ; de Lima & Grasman, 1999 ; Pathirana et al., 2004 ; de Montera et al., 2009) (voir aussi le tableau au début du chapitre 5). Dans le domaine temporel, la ou les gammes d'échelles où existent des propriétés multifractales se situent généralement à petite échelle (au plus quelques jours ou quelques semaines). En effet, au-delà d'une échelle allant de deux semaines à un mois, le spectre de la pluie est (presque) plat : on est alors dans un régime de « bruit météorologique » (Fraedrich & Larnder, 1993). Une telle décorrélation apparaît comme assez logique car ces échelles temporelles impliquées correspondraient à des échelles spatiales plus grandes que la demi-circonférence du globe. Au contraire, à petite échelle, le spectre de la pluie semble présenter un ou plusieurs régimes en loi puissance (Fraedrich & Lardner, 1993 ; Fabry, 1996) qui sont parfaitement compatibles avec les prédictions des modèles fractals ou multifractals.

Enfin, d'autres études complètent les précédentes en cherchant à caractériser la multifractalité de la pluie à la fois en espace et en temps notamment à partir de données radar (Pavlopoulos et al., 1998 ; Deidda et al., 1999 ; Deidda, 2000).

2.2.3 La multifractalité « universelle »

Parmi les différents modèles multifractals considérés pour la pluie, certaines représentations stochastiques bénéficient d'une justification mathématique fondée sur la continuité des échelles (Schertzer & Lovejoy, 1997). Entre autres, le modèle log-Poisson et le modèle log-beta qui vérifient ces contraintes ont été appliqués pour l'étude des précipitations (Deidda, 2000 ; Paulson & Baxter, 2007). Toutefois, c'est sans doute le modèle dit des « multifractales universelles » (Schertzer & Lovejoy, 1987 ; 1991) est celui qui a été confirmé empiriquement de la façon la plus convaincante. (cf. notamment les références Lovejoy et al. ; Tessier et al. ci-dessus). Ce modèle est dit universel car les générateurs stochastiques qui lui sont sous-jacents constituent une classe d'attracteurs parmi les différents générateurs possibles. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant. D'autre part, il est paramétré par un jeu réduit d'exposants fondamentaux (au plus 3). Enfin, un certain nombre d'évolutions intéressantes s'inscrivent assez aisément dans ce modèle. En particulier, il est possible d'inclure des effets de stratification et de rotation (Schertzer & Lovejoy, 1985) ainsi qu'une dynamique temporelle causale (Marsan et al., 1996). Notamment, cette dernière conduit à des propriétés scalantes espace-temps intéressantes pour l'étude de la prédictibilité de la pluie, en définissant sans ambiguïté la durée de vie des structures de pluie imbriquées en fonction de leur extension spatiale. Potentiellement, l'existence espace-temps pourrait même fournir un cadre permettant de définir une approche de prévision stochastique à très court terme (Macor, 2007 ; Macor et al., 2007).

2.3 Multifractalité et pluie : problématiques à résoudre

Malgré son succès, l'application de l'approche multifractale pour la pluie reste encore un sujet très ouvert tant du point de vue de la modélisation mathématique que de celui des applications. Durant mon travail bibliographique (voir notamment l'état de l'art, plus technique, au début du chapitre 5), j'ai pu remarquer que la littérature existante, bien que constituée d'un corpus déjà assez vaste, présentait encore des zones d'ombre. J'ai donc cherché à orienter mon travail de thèse de façon à pouvoir apporter des réponses ou du moins des pistes vis-à-vis des points suivants :

- Le **lien entre la physique et les propriétés multifractales** de la pluie est un point très délicat qui reste encore à clarifier. Bien qu'il paraisse très vraisemblable que les propriétés multi-échelle de la pluie soient une conséquence de celles de la turbulence qui sont caractérisées par la loi de Kolmogorov, il n'existe pas pour l'instant de formalisation mathématique rigoureuse des champs précipitants du point de vue de la physique statistique. Les travaux de Lovejoy et al. (2008) établissant l'existence de lois d'échelle pour le nombre de gouttes et la masse volumique constituent une avancée importante sur cette question, mais l'existence de lois d'échelle pour le taux précipitant (qui dépend également de la vitesse verticale des gouttes) reste à démontrer d'un point de vue théorique.
- Les paramètres multifractals de la pluie sont très différents de ceux estimés pour la turbulence. En particulier, l'un de ces paramètres (universels), noté H , est fondamentalement lié à la physique car les lois de Kolmogorov et de Corrsin-Obukhov imposent la valeur de ce paramètre : $\Delta v \propto l^H$ et $H = 1/3$. Or dans le cas de la pluie, et contrairement à celui du vent ou des polluants (qui sont des traceurs passifs), la plupart des études concluent à $H = 0$ (Lovejoy & Schertzer, 2010). Il semblerait que ce soit un résultat contradictoire car le choix d'une approche multifractale pour la pluie était fondé sur le conditionnement de ses propriétés multi-échelle par l'advection turbulente.
- Les résultats obtenus dans les études existantes sont généralement si différents dans le domaine temporel et dans le domaine spatial (Lovejoy & Schertzer, 1995) **qu'il paraît difficile de pouvoir proposer une approche unifiée de cascades multifractales spatio-temporelles**- on pourra cependant se référer à (Biaou, 2004) pour un exemple d'étude couvrant simultanément les domaines spatial et temporel.
- **La majorité des études effectuées dans le domaine temporel n'explorent pas les fines échelles**, i.e. de l'ordre de la minute ou de quelques dizaines de minutes, en raison d'une résolution instrumentale insuffisante (voir le Tableau 5.1 dans le chapitre 5 de cette thèse pour une revue détaillée). Cette limitation pourrait en outre être accentuée par le fait que les pluviomètres à auget basculant peuvent donner des résultats biaisés aux fines échelles (< 15 min) en raison même du principe de la

bascule (Habib et al., 2001). Ces limitations posent problème : ces fines échelles sont en effet intéressantes car ce sont elles qui correspondent à la variabilité interne aux événements de pluie dont la durée typique, bien que variable suivant le climat, est de l'ordre d'une heure.

- **La grande majorité des études existantes ne cherchent pas à distinguer les contributions respectives de chacun des deux aspects de la variabilité des précipitations**, à savoir leur processus d'occurrence (présence ou absence de pluie) et la variabilité des intensités à l'intérieur des événements. Cette problématique commence à focaliser l'attention des chercheurs (Molini et al., 2009 ; de Montera et al., 2009) car elle est liée au fait que les modèles multiplicatifs qui produisent des champs multifractals sont, à moins de modifications appropriées (Over & Gupta, 1996), assez mal adaptés à la construction de champs présentant une écrasante majorité de zéros, ce qui est le cas de la pluie.
- Sous certaines hypothèses, les modèles de cascades multiplicatives prédisent des queues de distribution hyperbolique de probabilité en x^{-q_D} où q_D est un exposant critique lié aux paramètres du modèle (plus de détails théoriques sont données dans le paragraphe 3.6). **Ces queues de distribution « multifractales » sont associées à un temps de retour nettement plus réduit pour les événements précipitants extrêmes comparativement au temps de retour prédits par les modèles hydrologiques opérationnels (qui présupposent des queues de distribution de type exponentielle décroissante ou équivalent)**. Si, actuellement, de telles distributions hyperboliques semblent correspondre assez bien aux observations (Hubert, 2001 ; Lovejoy et al., 2011), la valeur de l'exposant critique estimée empiriquement semble assez peu cohérente avec les paramètres multifractals de la littérature. En outre, les conditions d'observabilité du phénomène en terme de longueur minimale de série ne sont pas encore clairement établies. Nous y reviendrons au chapitre 7 du présent travail.

2.4 Conclusion

Une solution possible pour réduire la formidable complexité des processus atmosphériques consisterait à exploiter les propriétés d'invariance d'échelle résultant entre autres des symétries sous-jacentes aux équations dynamiques décrivant l'évolution de ces processus. Il est possible de construire des modèles de cascades stochastiques respectant ces symétries, ce sont les cascades multiplicatives multifractales. Ces modèles ont initialement été développés dans le cadre de la modélisation statistique de la turbulence mais ont prouvé empiriquement leur validité pour la modélisation statistique de la pluie. Néanmoins, la littérature existante repose principalement sur des jeux de données d'assez basse résolution dans le domaine temporel (> 1 h voire 1 jour) ne couvrant pas la dynamique interne des orages et des événements de pluie. D'autre part, la gestion des périodes et des zones où il ne pleut pas (qui sont les plus fréquentes) peut sembler délicate dans un formalisme multiplicatif. Enfin, la représentation des extrema dans le modèle est une question intéressante du point de vue des applications et qui mérite d'être approfondie. Un des objectifs de ce travail est d'apporter des réponses à ces questions en analysant des jeux de données de haute résolution en incluant les périodes et régions sèches puis en se focalisant sur des événements de pluie continus et des orages. La suite du travail sera organisée de la façon suivante : après des chapitres d'ordre théorique et méthodologique (chapitres 3 et 4), nous réaliserons l'analyse des données (chapitre 5), puis nous considérerons les problèmes liés au support d'occurrence de pluie via des simulations et des calculs théoriques (chapitre 6). Comme évoqué en introduction, le chapitre 7 portera sur les applications et notamment la modélisation des extrema. Nous y proposerons également un algorithme de downscaling statistique multifractal fondé sur la paramétrisation empirique obtenue au chapitre 5.

3 Fractals et multifractals : fondements théoriques

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter les notions théoriques fondamentales relatives aux objets fractals et aux champs multifractals abordés dans le cadre de notre étude. De façon générale, il existe plusieurs formalismes pour la notion de fractalité. Une introduction détaillée aux objets fractals dépasse largement le cadre de ce travail, nous proposons au lecteur de se référer à des ouvrages tels que celui de Falconer (2003). Dans ce qui suit, nous donnons seulement une définition classique de la fractalité géométrique et quelques exemples simples. Concernant la notion de multifractalité, initialement introduite par Parisi & Frisch (1985), là aussi plusieurs définitions semblables mais non équivalentes co-existent. Nous développons dans ce chapitre une définition statistique de la multifractalité en lien avec le formalisme des cascades multiplicatives stochastiques (Schertzer & Lovejoy, 1987). Ce formalisme est une variante probabiliste d'un formalisme multifractal très répandu fondé sur des considérations plus « géométriques » (Halsey et al., 1986). Il existe aussi d'autres formalismes concurrents fondés sur les propriétés de régularité locale des processus, par exemple des exposants de Hölder (Muzy et al., 1991). Ces derniers formalismes ne sont pas présentés ci-dessous car ils restent en dehors du cadre du présent travail.

3.2 Les objets fractals

3.2.1 Introduction et premiers exemples

Les mathématiciens ont été amenés à définir des ensembles géométriques dont les propriétés dépassent celles des ensembles habituels de la géométrie euclidienne. Les premiers « objets fractals » construits par les mathématiciens avaient été initialement conçus dans le but de servir de contre-exemple au sujet de propriétés mathématiques vraies uniquement dans le cas d'ensembles géométriques « réguliers ».

Par exemple, l'ensemble de Cantor (1872) est défini comme la limite de la construction itérative et déterministe suivante schématisée ci-dessous (Fig. 3.1). Cet ensemble peut être obtenu en prenant un segment, en le découpant en trois parties identiques, et en retirant celle du milieu, puis en répétant l'opération à l'infini sur les nouveaux segments :

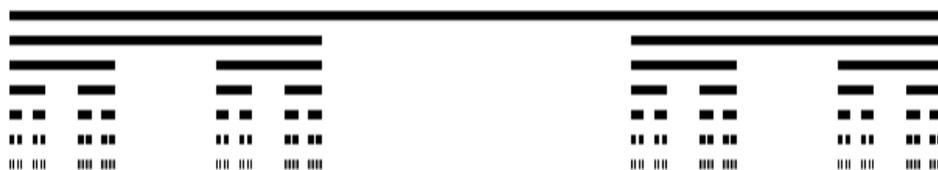


Figure 3.1 : Construction de l'ensemble de Cantor

Cet ensemble est remarquable notamment parce qu'il est à la fois non dénombrable et négligeable au sens de la mesure de Lebesgue. On observe aussi que l'ensemble est semblable à une contraction près à chacune de ses parties (on dit qu'il est « autosimilaire »).

Un second exemple, datant de 1904, est la courbe de Von Koch. Ce « flocon » est également défini par une construction itérative, déterministe et autosimilaire. Cet exemple est l'une des premières courbes rigoureusement construites de sorte à être continues en tout point et à n'admettre de tangente en aucun point. La figure ci-dessous représente une étape de construction de cet objet fractal :

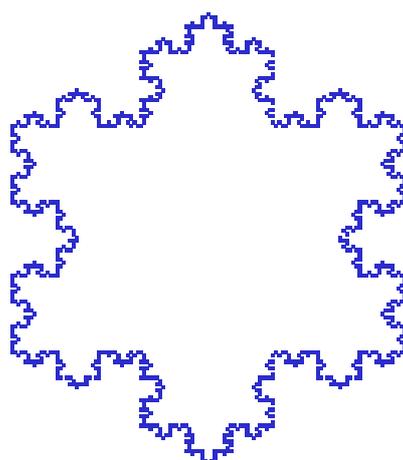


Fig. 3.2 La courbe de Von Koch

Un autre exemple d'objet fractal est la courbe de Peano, courbe unidimensionnelle passant par tous les points contenus dans un carré :

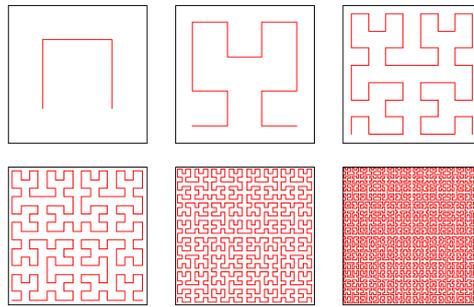


Figure 3.3 Construction de la courbe de Peano

De façon générale, on peut définir les fractales suivant plusieurs approches. La plus courante est sans doute de considérer les fractales comme des ensembles de points vérifiant tout ou partie des propriétés recensées par Falconer (2003), notamment :

- L'ensemble a des détails présents à des échelles arbitrairement grandes ou petites.
- Il est autosimilaire exactement ou statistiquement
- Il est défini via une procédure itérative infinie éventuellement stochastique
- Il est trop irrégulier pour être décrit simplement au moyen de la géométrie usuelle
- Sa dimension fractale (voir ci-dessous) est supérieure à sa dimension topologique

On peut ainsi définir des fractales déterministes ou non suivant leur procédé de construction.

Les mathématiciens se sont par la suite rendus compte que les propriétés des objets fractals n'étaient pas une exception mais plutôt une généralité, les hypothèses de la géométrie classique (différentiabilité des trajectoires, etc.) étant en fait très restrictives. Puis les physiciens ont montré que l'autosimilarité était une réalité physique omniprésente, en particulier en géophysique. L'exemple de l'étude de la topographie l'illustre bien : tout d'abord les géophysiciens ont observé que la représentation spectrale de la topographie terrestre vérifiait des propriétés multi-échelle remarquables (Vening-Meinesz, 1951). Puis, ils se sont aperçus que le périmètre des côtes de certaines régions dépendait de la résolution à

laquelle on le calculait (Richardson, 1961) et ont interprété cette dépendance en termes de fractalité (Mandelbrot, 1967).

Ces définitions peuvent s'étendre à des processus stochastiques. L'autosimilarité s'interprète alors au sens statistique. Ainsi, les trajectoires d'un mouvement brownien présentent des propriétés fractales, qui ont pour conséquence notamment leur continuité et leur non-dérivabilité (au sens de l'analyse fonctionnelle).

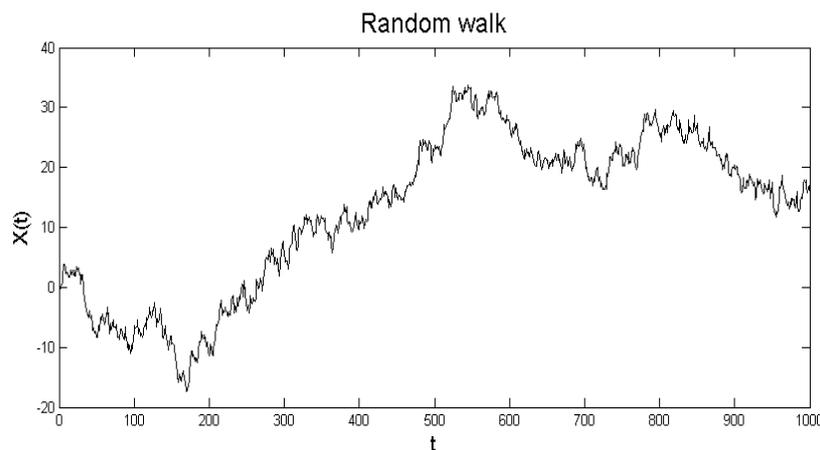


Figure 3.4 Exemple de trajectoire d'un mouvement brownien unidimensionnel

Ce dernier exemple illustre l'intérêt physique des processus aléatoires fractals, puisque les mouvements browniens sont assez ubiquitaires en physique. C'est d'ailleurs à partir d'un formalisme plus complexe dérivé de la théorie des mouvements browniens (mouvements browniens fractionnaires) qu'ont été développés les premiers modèles stochastiques fractals de topographie (voir par exemple les simulations de (Mandelbrot, 1975)).

3.2.2 Notion de dimension fractale

La dimension fractale est une grandeur destinée à étendre la notion habituelle de dimension à des ensembles plus difficiles à caractériser « topologiquement ». Ainsi, on peut concevoir intuitivement que l'ensemble de Cantor décrit ci-dessus aura une dimension strictement positive, mais inférieure à 1.

Il existe plusieurs façons de définir mathématiquement une dimension fractale. Un ensemble fractal sera caractérisé par sa dimension fractale, cette dernière pouvant dépendre de la définition choisie.

Les deux définitions les plus courantes sont les suivantes (on pourra se référer à (Falconer, 2003 ; Azizieh, 2002) pour un développement plus détaillé).

3.2.2.1 Dimension de Hausdorff

Soit un ensemble E dans \mathfrak{R}^N , notons $|E|$ son diamètre ($|E| = \sup \|x-y\|$, $x, y \in E$, en considérant la norme euclidienne de \mathfrak{R}^N).

Soit $\delta > 0$ fixé, et soit un recouvrement de E par une suite dénombrable d'ensembles S_i , $i \in I$, tels que $|S_i| \leq \delta$ pour tout i (l'ensemble de ces recouvrements étant noté $R(E, \delta)$).

Considérons la mesure :

$$M_H^d(\delta, E) = \inf_{(S_i)_{i \in I} \in R(E, \delta)} \sum_{i \in I} |S_i|^d \quad (\text{Eq. 3.1})$$

On définit alors la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle de E de la sorte :

$$M_H^d(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_H^d(\delta, E) \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Cette mesure peut être définie pour tout sous-ensemble de \mathfrak{R}^N .

Une propriété fondamentale de cette mesure est que pour tout E , il existe un réel positif D_H

$$\text{tel que } \begin{cases} \forall d < D_H, M_H^d(E) = +\infty \\ \forall d > D_H, M_H^d(E) = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.3})$$

$\dim_H(E) = D_H$ est alors appelée la dimension de Hausdorff de E , elle est définie pour tout E sous-ensemble de \mathfrak{R}^N .

3.2.2.2 Dimension de boîte (box-counting)

Soit un ensemble E dans \mathfrak{R}^N . Recouvrons E par un maillage de cubes N -dimensionnels d'arête de longueur ε , et on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimum de cubes nécessaires pour recouvrir E . La « dimension de boîte » (désignée aussi sous le nom de dimension de comptage de boîtes, ou de capacité) de E sera alors définie de la façon suivante :

$$\dim_B(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{-\ln(\varepsilon)} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

Cette définition est moins générale (car la limite ne converge pas pour certains sous-ensembles de \mathfrak{R}^N) que la précédente, mais est très utilisée en pratique du fait de sa plus grande simplicité de calcul.

3.2.3 Vocabulaire : échelles et résolutions

L'objet fractal étant généralement défini par un procédé itératif infini qui considère des échelles de plus en plus réduites, nous l'étudierons telle qu'il se présente à diverses échelles. Si l'hyperespace contenant la fractale est de dimension (géométrique) D , alors nous découperons celui-ci en λ^D cases, soit en λ intervalles le long d'une dimension d'espace. On dit alors que l'on considère la fractale à la *résolution* λ . La résolution maximale est notée Λ , c'est celle qui définit le côté d'un pixel. On définit l'*échelle*, qui est inversement proportionnelle à la résolution : la résolution à l'échelle l_n est $\lambda = \frac{L}{l_n}$. Ainsi, la résolution la plus grossière, où tout l'espace est considéré comme un seul bloc (soit $\lambda=1$), correspond à l'échelle la plus large (de valeur $l = L$ pixels), tandis que la résolution la plus fine (soit $\lambda=L$), correspond à l'échelle la plus réduite - soit un pixel ($l = 1$).

On peut alors définir la dimension fractale D_f d'un ensemble A , en accord avec la définition box-counting, via l'égalité suivante :

$$\forall \lambda, \text{Card}\{A_\lambda\} \propto \lambda^{D_f}. \quad (\text{Eq.3.5})$$

Cette dimension caractérise bien une invariance d'échelle puisque l'équation ci-dessus caractérise l'objet à *toutes* les résolutions.

Dans certains cas, et notamment pour un ensemble déduit de données expérimentales représentatives d'un processus physique quelconque, l'échelle maximale disponible par l'observation, L , n'est pas égale à l'échelle maximale du processus. Nous parlerons dans ce cas d'« échelle externe », et nous utiliserons la notation l_{ext} . Il en résulte une multiplication par une constante dans la loi (Eq. 3.5), qui ne change bien entendu ni la loi d'échelle ni la dimension fractale.

3.2.4 Notion de co-dimension fractale

Les considérations précédentes s'étendent facilement aux objets fractals aléatoires. La notion de dimension fractale D_f se définit en effet de façon statistique :

$$\forall \lambda, \langle \text{Card}\{A_\lambda\} \rangle \approx \lambda^{D_f}. \quad (\text{Eq. 3.6})$$

Ici et dans la suite, le symbole \approx désigne une égalité à des facteurs à variations lentes près.

Ci-dessus et dans toute la suite les crochets $\langle \bullet \rangle$ correspondent à une moyenne statistique.

La définition ci-dessus présente un inconvénient dans le cas d'objets ou de processus aléatoires : certains objets fractals aléatoires présentent en effet une intermittence si extrême que l'objet intersecte en moyenne moins de un pixel quelque soit la résolution. Dans ce cas la dimension fractale sera négative (dimension latente). C'est pourquoi dans le contexte des fractals aléatoires, on préfère utiliser la notion de co-dimension.

Comme le nombre de cases total à la résolution λ est de λ^D , on peut en déduire la probabilité qu'une case aléatoire à cette résolution soit dans la représentation géométrique de la fractale à la résolution λ :

$$\Pr(\text{case}_\lambda \in A_\lambda) = \frac{\text{Card}\{A_\lambda\}}{\text{Card}\{L_\lambda^D\}} \approx \frac{\lambda^{D_f}}{\lambda^D} = \lambda^{-c_f}, \quad (\text{Eq. 3.7})$$

où $C_f = D - D_f$ désigne la co-dimension fractale de l'ensemble A . Par construction, la co-dimension est toujours positive et elle est la plupart du temps inférieure à D , sauf dans le cas précédemment évoqué des « dimensions latentes ». Ce cas peut tout à fait avoir un sens physique dans un formalisme probabiliste : par exemple les événements extrêmes d'un processus géophysique pourront être localisés sur un ensemble fractal qui n'est « visible » que sur un nombre très restreint de réalisations de ce processus.

3.2.5 Exemple : dimension fractale de l'ensemble de Cantor

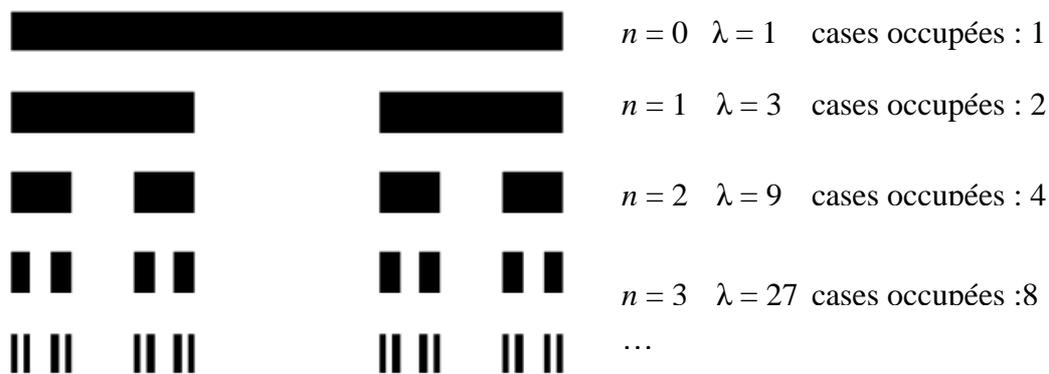


Figure 3.5 : Ensemble de Cantor et estimation de la dimension

On considère de nouveau l'ensemble triadique de Cantor. A l'étape n , le segment de base est divisé en $\lambda = 3^n$ intervalles parmi lesquels 2^n intersectent l'ensemble de Cantor.

L'égalité (3.5) s'écrit $2^n = (3^n)^{D_f} \Rightarrow D_f = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Ce résultat est évidemment cohérent avec l'équation (3.4), où l'on doit prendre $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

et $N(\varepsilon_n) = 2^n$.

3.3 Processus et cascades multifractals

3.3.1 Introduction

Tandis que la théorie des objets fractals porte en toute rigueur sur des ensembles géométriques, les mesures faites en physique, en géophysique, ou en météorologie seront quant à elles des séries ou champs valués. Si l'on souhaite analyser une série temporelle (ou un champ bi- ou multi-dimensionnel) de pluie en formalisme fractal, il va forcément falloir les « transformer » en ensemble géométrique. En d'autres termes, il faut remplacer un ensemble de valeurs numériques par un ensemble de valeurs binaires, à savoir l'appartenance ou la non-appartenance à un ensemble. Pour cela, on peut fixer un seuil et considérer comme ensemble géométrique soit les lignes de niveau associées à la valeur du seuil soit l'ensemble des points en lesquels la valeur est supérieure à ce seuil. La première solution est en usage notamment pour la caractérisation de processus monofractals tels que les mouvements browniens fractionnaires (Lavallée et al., 1993). Dans la présente étude, nous considérons la fractalité au sens de la seconde solution, c'est-à-dire l'invariance d'échelle des « ensembles d'excédence » qui seront caractérisés par au moins une dimension fractale. Or, pour la plupart des champs géophysiques, on obtiendra une dimension fractale qui dépendra du seuil (Lovejoy et al., 2007). La série ou le champ est donc caractérisé par un spectre de dimensions fractales associés aux différents niveaux du processus. Ceci nous conduit par conséquent à considérer la théorie des multifractales qui permet de prendre en compte de tels champs moyennant la vérification de certaines propriétés.

Un champ multifractal est un champ aléatoire tel qu'en le comparant (à la résolution λ) à une valeur $T_\lambda = \lambda^\gamma$, on obtient un ensemble monofractal (au sens statistique) dont la codimension dépend de γ seul. γ est nommé singularité : cet exposant définit la notion de niveau du processus (de « seuil ») de façon indépendante de l'échelle. On peut ainsi définir la fonction de codimension $c(\gamma)$ qui caractérise la multifractalité. Pour une introduction mathématique plus détaillée sur les processus multifractals et les cascades multiplicatives qui permettent de les construire, on se référera à l'article de Schertzer et al. (2002).

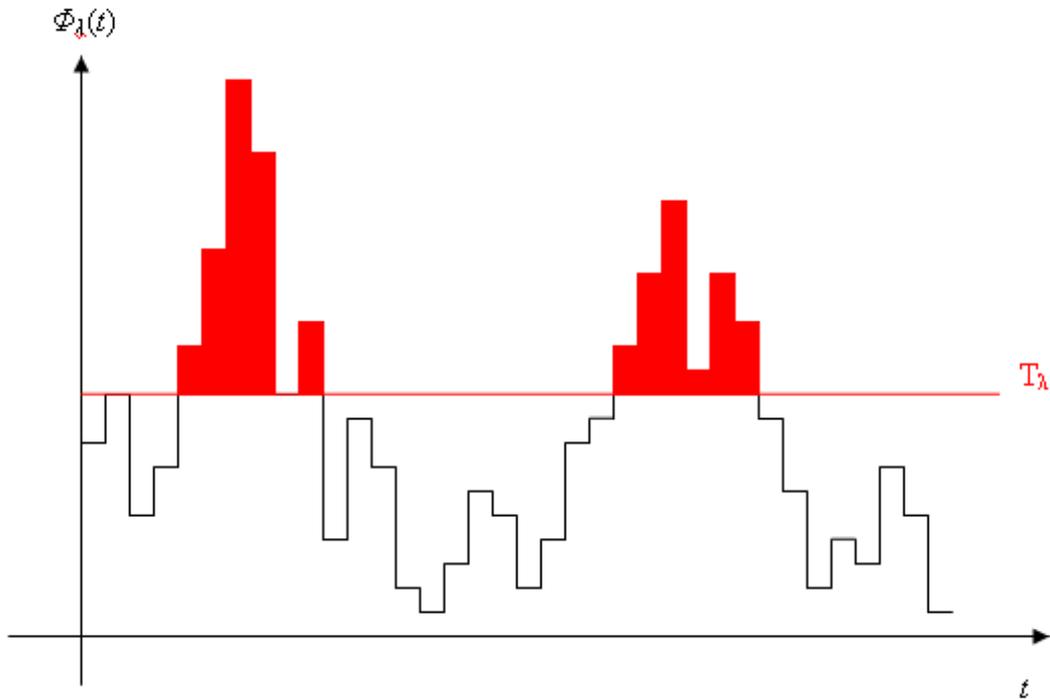


Figure 3.6 Seuillage de champs multifractals

3.3.2 Les multifractals comme limites de cascades aléatoires

Nous notons Φ_∞ un « processus » (1D ou multidimensionnel) aléatoire multifractal. Cet objet mathématique est construit par une suite d'approximations de résolution λ croissante (sur des grilles de λ^D pixels) et notée $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$. Les Φ_λ sont chacun des processus aléatoires positifs ou nuls dont les trajectoires sont des fonctions aléatoires de l'espace D-dimensionnel. On impose en outre que la distribution statistique d'un pixel X de haute résolution soit conditionnée par les valeurs de tous les pixels de plus basse résolution contenant X . On dit que $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ est une cascade. Les λ prennent soit toutes les valeurs comprises dans l'intervalle $[1, \infty[$, soit une suite discrète, de limite infinie, de valeurs de cet intervalle, soit $\lambda_n = \lambda_1^n$ où $\lambda_1 > 0$. Dans le premier cas, on dit que $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ est une cascade à échelles continues, le second cas étant celui des cascades à échelles discrètes. Pour obtenir une limite

multifractale Φ , il faut que certaines propriétés soient vérifiées. La solution générale consiste à considérer des cascades multiplicatives stationnaires (Schertzer et al., 2002).

Explicitons tout d'abord ces cascades dans le cas des échelles discrètes. Pour ces cascades, le passage d'une résolution à la résolution immédiatement supérieure se fait par une modulation multiplicative aléatoire indépendante du point de l'espace et de l'échelle. Considérons donc un pixel (ou intervalle en 1D) B_n de résolution λ_n noté et un pixel B_{n+1} de résolution λ_{n+1} . tels que $B_{n+1} \subset B_n$. La cascade est multiplicative si la propriété suivante est vérifiée (nous utilisons une notation conditionnelle pour spécifier que la valeur en B_n est supposée fixée et connue):

$$\Phi_{\lambda_{n+1}}(B_{n+1}) \Big| \Phi_{\lambda_n}(B_n) \stackrel{d}{=} \mu\varphi \times \Phi_{\lambda_n}(B_n) \quad (\text{Eq. 3.8})$$

où $\mu\varphi$ est une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles (nommée incrément multiplicatif). L'autosimilarité de la cascade multiplicative résulte directement du fait que toutes les variables aléatoires $\mu\varphi$ considérées en tous pixels et pour toute étape n de construction sont indépendantes et identiquement distribuées.

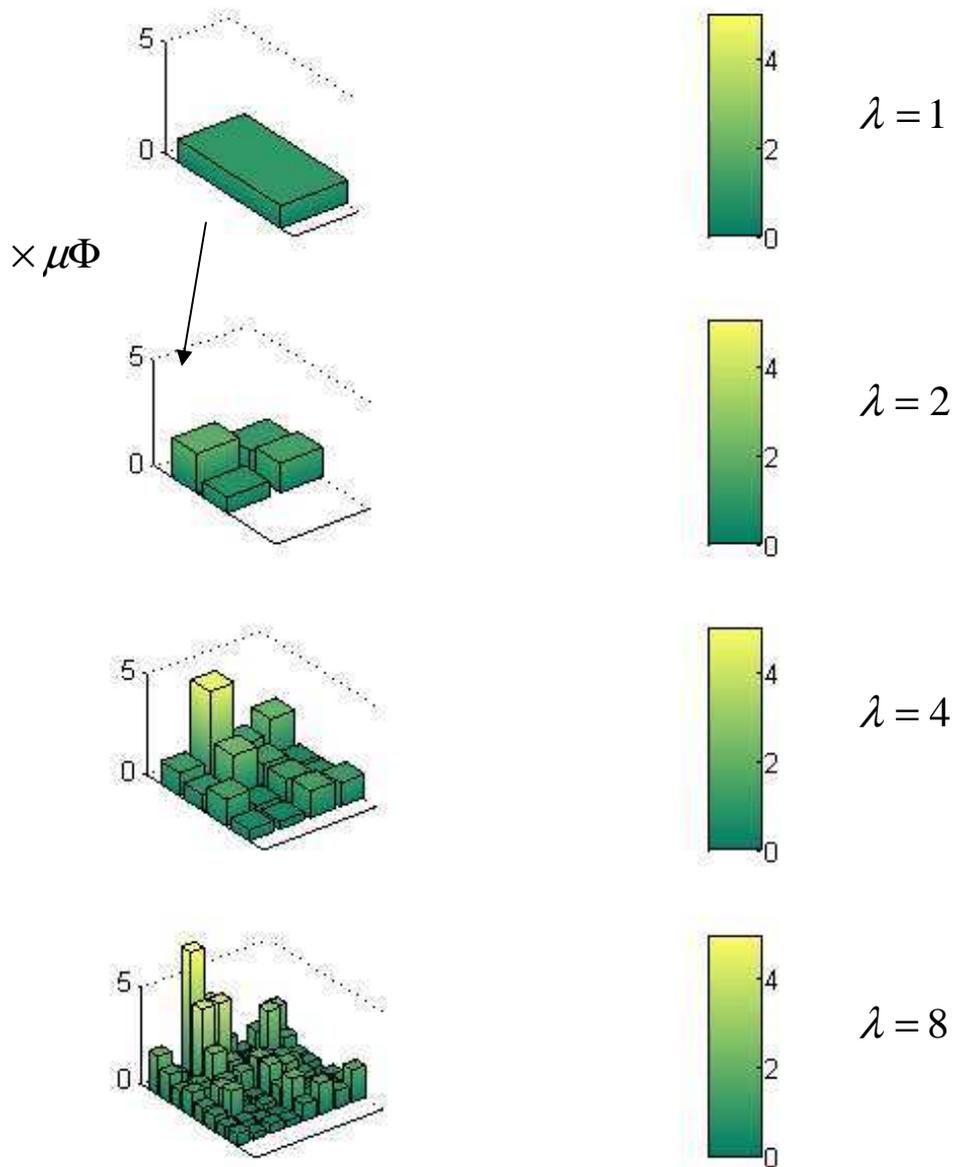


Figure 3.7 Schéma de principe des cascades multiplicatives discrètes

La construction peut se généraliser à celles de cascades multiplicatives continues en échelle. Formellement, ces cascades sont construites en considérant tout d'abord que les propriétés statistiques de $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ à deux résolutions arbitraires fixées Λ_1 et Λ_2 ($\Lambda_1 < \Lambda_2$) sont reliées par une suite de N modulations multiplicatives semblables à celles décrites par l'équation (Eq. 3.8), puis en faisant tendre N vers l'infini et le rapport $\lambda_{n+1} / \lambda_n$ vers 1 (tandis que Λ_1 et Λ_2

restent constants !). Il s'agit donc d'une « densification d'échelles » telle que schématisée sur la Fig. 3.8 ci-dessous :

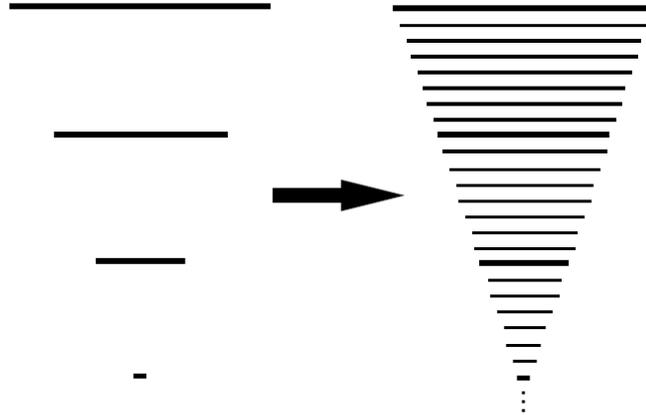


Figure 3.8 Passage des cascades à échelles discrètes aux cascades à échelles continues, selon (Schertzer & Lovejoy, 1997).

Il est nécessaire par souci de réalisme physique d'imposer une condition de non-divergence et même de conservation de la moyenne lorsque la résolution augmente. Une solution envisagée dans la littérature consiste à imposer une conservation exacte de la moyenne sur toutes les réalisations (conservation « microcanonique »). Ceci présente l'inconvénient d'imposer une dépendance entre les incréments multiplicatifs générés pour passer d'une étape de la cascade à une autre. Une condition moins restrictive (« conservation canonique », (Mandelbrot, 1974)) est d'assurer uniquement la conservation de la moyenne dans un sens statistique, tout en assurant rigoureusement l'indépendance entre les incréments multiplicatifs.:

$$\forall \lambda : \langle \Phi_\lambda \rangle = M \quad (\text{Eq. 3.9})$$

Il suffit alors de s'assurer que la moyenne (statistique) des incréments multiplicatifs soit égale à 1 :

$$\langle \mu \varphi \rangle = 1 \quad (\text{Eq. 3.10})$$

Il est à noter que si toutes les étapes de la construction de la cascade $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ donnent un résultat défini au sens des processus et champs aléatoires, il n'en est pas de même pour la limite Φ_∞ obtenue lorsque λ tend vers l'infini (d'où le guillemets mis à « processus » en début de paragraphe). On conçoit en effet que si la résolution devient extrêmement grande, le processus multiplicatif aura tendance à générer des zones de valeurs très faibles (dus à des « incréments multiplicatifs » faibles) et des pics de plus en plus intenses. A la résolution infinie, les réalisations de Φ_∞ ne seront pas définies au sens des fonctions et ressembleront à des sommes de fonctions de Dirac. Mathématiquement, Φ_∞ ne pourra être caractérisé que par ses propriétés intégrées sur des voisinages d'aire non nulle. Φ_∞ peut être donc vu comme une densité de mesure aléatoire :

$$\mu(A) = \int_A \Phi_\infty(x) d^D x \quad (\text{Eq. 3.11})$$

Il est aussi possible de définir mathématiquement Φ_∞ comme un opérateur qui transforme une mesure déterministe (la mesure de Lebesgue $\int_A d^D x$ – ou de Hausdorff si le support est fractal! - D -dimensionnelle d'un ensemble A) en une mesure aléatoire $\mu(A)$ définie comme ci-dessus.

Considérons maintenant un pixel B_λ de résolution λ , on peut estimer la valeur de la cascade sur ce pixel en y moyennant la mesure aléatoire Φ_∞ :

$$\overline{\Phi}_\lambda(B_\lambda) = \frac{\int_{B_\lambda} \Phi_\infty(x) d^D x}{\int_{B_\lambda} d^D x} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

Une caractéristique assez surprenante des cascades multiplicatives est que les variables aléatoires Φ_λ et $\overline{\Phi}_\lambda$ n'ont pas les mêmes distributions de probabilité. Plus précisément, les deux variables ont les mêmes moments statistiques jusqu'à un certain ordre où ceux de la

seconde divergent (Schertzer & Lovejoy, 1992). Il en résulte que la seconde variable aléatoire produit plus de valeurs extrêmes que la première. Cette propriété statistique est d'autant plus intéressante qu'elle est susceptible de correspondre à une réalité physique car une grandeur physique intensive à une résolution d'observation λ n'est pas le produit d'une cascade abstraite indépendante des échelles plus fines (i.e. résultant d'un filtrage idéal passe-bas sur les résolutions) mais au contraire une version moyennée d'un champ de très haute résolution (non infinie en pratique mais correspondant à l'échelle de « dissipation » de la cascade. On emploie dans la littérature anglophone l'expression « bare cascades » pour Φ_λ et « dressed cascades » pour $\bar{\Phi}_\lambda$ qui correspondent en fait aux « observations ». Si $\bar{\Phi}_\lambda$ est estimé à partir d'une cascade à (très haute) résolution finie, on parle aussi de « partially dressed cascades » (Veneziano & Furcolo, 1999). Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à la distinction « bare/dressed » (voir le paragraphe 3.5).

3.3.3 Propriétés mathématiques générales des cascades multifractales

Définissons une famille de seuils $(T_\lambda)_{\lambda \geq 1} = (\lambda^\gamma)_{\lambda \geq 1}$ de singularité γ . Pour tout λ , seuillons Φ_λ au niveau T_λ . Nous pouvons ainsi définir une famille d'ensembles $(E_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ qui constituent des approximations à diverses limites d'un même objet limite $E_\infty(\gamma)$. La cascade $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ est multifractale si et seulement si il existe un intervalle ouvert de valeurs de singularités, tel que pour n'importe laquelle de ces singularités, $E_\infty(\gamma)$ est un objet fractal de co-dimension $c(\gamma)$ dépendante de γ uniquement. La propriété fondamentale du formalisme multifractal, qui généralise l'équation (Eq. 3.7), s'écrit donc de la façon suivante :

$$\Pr(\Phi_\lambda > \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (\text{Eq. 3.13})$$

$c(\gamma)$ définit une fonction, baptisée fonction de co-dimension, qui caractérise entièrement les propriétés statistiques de tous ordres de la cascade multifractale à toutes les résolutions.

Cette fonction est croissante et convexe (Fig. 3.9). Quand γ augmente, on seuille à des valeurs très élevées et les ensembles fractals associés sont logiquement de dimension plus faible. Il est

possible de montrer que les cascades multifractales dont la moyenne est conservée statistiquement (équation (Eq. 3.9)) sont caractérisés par un unique point fixe $\gamma = \gamma_1$. Dans ce cas, la fonction de co-dimension est alors entièrement située au-dessus de la première bissectrice :

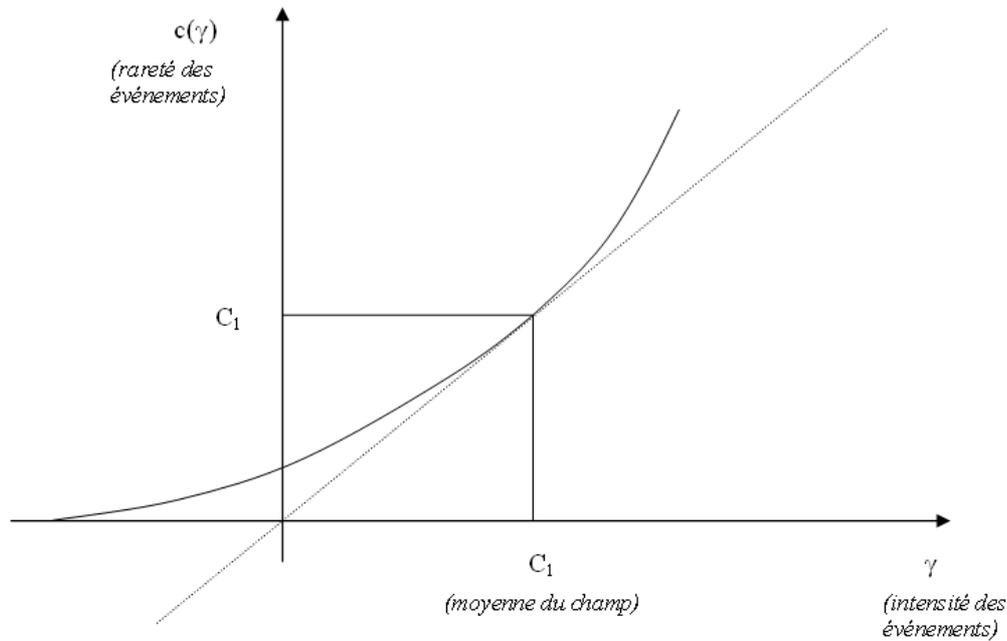


Figure 3.9 Allure typique d'une fonction de co-dimension

Pour une variable aléatoire X à valeurs positives, la densité de probabilité $p(x)$ et les moments statistiques $\langle X^q \rangle = \int_0^\infty x^q p(x) dx$ sont reliés par une transformation de Mellin. Cette relation suggère que des propriétés multi-échelle duales vont apparaître pour les moments (Parisi & Frisch, 1985).

En utilisant l'équation (Eq. 3.13), il est possible d'estimer la densité de probabilité de Φ_λ ce qui permet d'écrire pour les moments statistiques (Schertzer & Lovejoy, 2002)

$$\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \int_{-\infty}^{\infty} \log(\lambda) \lambda^{q\gamma} \lambda^{-c(\gamma)} dc(\gamma) \quad (\text{Eq. 3.14})$$

L'intégrale ci-dessus peut être évaluée lorsque la résolution est assez large : il existe en effet des techniques d'évaluation asymptotiques des intégrales d'exponentielles de fonctions. En particulier, on peut considérer la méthode de Laplace (Bender & Orszag, 1978) dont le principe (simplifié) est d'approximer asymptotiquement de l'intégrale de $\exp(f(x))$ par le produit de $\exp(\max f)$ et d'un terme constant.

Nous pouvons alors fournir l'approximation suivante pour les moments (Schertzer & Lovejoy, 2002):

$$\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \exp\left(\log(\lambda) \cdot \max_\gamma (q\gamma - c(\gamma))\right) \quad (\text{Eq. 3.15})$$

Les moments statistiques d'ordre q fixé suivent donc une dépendance en loi puissance de la résolution, i.e. une loi d'échelle :

$$\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (\text{Eq. 3.16})$$

où $K(q)$ est la « fonction d'échelle des moments ». Cette fonction caractérise, comme la fonction de co-dimension, les propriétés statistiques de la cascade multifractale à toutes les résolutions.

Sachant que la transformation de Mellin est bijective pour les variables aléatoires positives, on peut relier mutuellement $K(q)$ et $c(\gamma)$ par une transformée de Legendre :

$$c(\gamma) = \max_q \{q\gamma - K(q)\} \quad \text{et} \quad K(q) = \max_\gamma \{q\gamma - c(\gamma)\} \quad (\text{Eq. 3.17})$$

On déduit alors aisément de l'équation (Eq. 3.17) qu'il existe une correspondance bijective entre les ordres de singularité et les ordres des moments :

$$q_\gamma = c'(\gamma) \quad \text{et} \quad \gamma_q = K'(q) \quad (\text{Eq. 3.18})$$

De même que la courbe de la fonction de co-dimension, celle de la fonction d'échelle des moments est convexe. De plus on a $K(0) = 0$ (trivial) et $K(1) = 0$ (du fait de la conservation de la moyenne statistique).

Les cascades monofractales sont un cas particulier des cascades présentées ici : elles sont caractérisées par une fonction de co-dimension constante, ou, par transformation de Legendre, par une fonction $K(q)$ affine.

3.3.4 Exemples de cascades multiplicatives discrètes

3.3.4.1 Le modèle β

Ce modèle a été introduit dans la littérature de la turbulence par Frisch et al. (1978). Il s'agit d'une cascade monofractale stochastique pour laquelle les incréments multiplicatifs sont des variables aléatoires à deux valeurs : 0 et une valeur strictement supérieure à 1. Pour obtenir les valeurs des cases à l'échelle l_{n+1} en fonction de la valeur de la case de côté l_n ($l_{n+1} = \lambda_1 \times l_n$), on multiplie donc pour chacune des sous-cases cette valeur par un incrément multiplicatif, noté $\mu\varphi$, défini par la loi suivante :

$$\begin{aligned} \Pr(\mu\varphi = 0) &= 1 - \lambda_1^{-c} \\ \Pr(\mu\varphi = \lambda_1^c) &= \lambda_1^{-c} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où c désigne la codimension de la fractale construite.

3.3.4.2 Le modèle α

Ce modèle est décrit par Schertzer & Lovejoy (2002). Il s'agit d'une cascade multifractale pour laquelle les incréments multiplicatifs peuvent prendre deux valeurs non nulles, une supérieure à 1, l'autre inférieure à 1, qui impliquent que les petites structures (les pixels) ont respectivement des valeurs plus fortes et plus faibles que la grande structure qui les contient.

$$\begin{aligned}\Pr(\mu\varphi = \lambda_1^{\gamma^-}) &= 1 - \lambda_1^{-c} \\ \Pr(\mu\varphi = \lambda_1^{\gamma^+}) &= \lambda_1^{-c}\end{aligned}\tag{3.20}$$

où $\lambda_1^{\gamma^+} > 1$ et $\lambda_1^{\gamma^-} < 1$ sont les deux valeurs possibles de l'«*incrément multiplicatif*» (on remarque que le cas limite $\gamma^+ = c$ et $\gamma^- = -\infty$ correspond au modèle β).

Nous imposons que la moyenne du champ soit conservée d'une échelle à l'autre ($\langle \mu\varphi \rangle = 1$) ce que l'on peut écrire aussi :

$$\lambda_1^{\gamma^+} \lambda_1^{-c} + \lambda_1^{\gamma^-} (1 - \lambda_1^{-c}) = 1\tag{3.21}$$

Ce type de cascade constitue l'une des constructions les plus simples de champs multifractals (dans la suite nous parlerons de «*champs multifractals*» en sous-entendant «*champs dont la structure multi-échelle est définie par une cascade multifractale*»). Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'à la résolution 2, le champ peut prendre deux valeurs différentes associées aux singularités γ^+ et γ^- . Puis, par multiplications successives, d'autres singularités intermédiaires vont apparaître. Comme le champ peut prendre, à la résolution λ , les valeurs $(\lambda_1^{\gamma^+})^{n_1} (\lambda_1^{\gamma^-})^{n_2}$, où $n_1 + n_2 = n = \frac{\log(\lambda)}{\log(\lambda_1)}$, il en résulte toute une hiérarchie de singularités

discrètes en nombre fini à λ fini: $\gamma = \frac{n_1\gamma^+ + n_2\gamma^-}{n}$. De même si on fait tendre λ vers l'infini, on obtiendra une hiérarchie infinie de singularités.

Le modèle α est un exemple simple montrant comment les cascades multiplicatives présentent (au moins asymptotiquement) des propriétés multifractales.

3.4 Cascades continues en échelle – universalité

3.4.1 Nécessité d'une approche universelle

Dans le cas général, la fonction d'échelle des moments $K(q)$ n'est contrainte que par sa convexité et ses valeurs particulières en 0 et en 1 et peut prendre n'importe quelle forme

respectant ces conditions. Ceci semble constituer un inconvénient pour l'utilisation et l'interprétation de ces modèles, qui ne devraient être caractérisés par une infinité de paramètres (par exemple les statistiques pour tout ordre réel positif). Ceci traduit la généralité de l'approche des cascades qui impose a priori peu de contraintes (essentiellement la conservativité) sur les lois des incréments multiplicatifs. Au contraire, nous souhaiterions disposer de modèles « universels » paramétrés par un nombre réduit de paramètres ayant une signification physique précise. En fait, il est possible de faire apparaître ces propriétés pour les cascades à échelles continues. La raison en est que la continuité des échelles contraint fortement le choix des générateurs aléatoires, comme nous allons le voir maintenant.

3.4.2 Cascades log - infiniment divisibles

Soit $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ une cascade multiplicative multifractale supposée tout d'abord à échelles discrètes. On peut exprimer une réalisation de la cascade sur un pixel de résolution $\lambda\lambda'$ à partir de la valeur du pixel de résolution plus grossière λ' qui l'englobe en multipliant cette dernière par N tirages de la variable aléatoire $\mu\varphi$ (où $\lambda = \lambda_1^N$) :

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(B_{\lambda\lambda'}) = \left(\prod_{i=1}^N \mu\varphi_i \right) \times \Phi_{\lambda'}(B_{\lambda'}) \quad (\text{Eq. 3.22})$$

Si maintenant nous supposons que $(\Phi_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ est en fait continue en échelle, il y aura entre les deux échelles λ' et $\lambda\lambda'$ fixées une différence non plus de N mais une infinité d'incrément multiplicatifs élémentaires, chacun associé à un rapport d'échelle élémentaire tendant vers 1 (cf. Fig. 3.8 ci-dessus).

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(B_{\lambda\lambda'}) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mu\varphi_i \right) \times \Phi_{\lambda'}(B_{\lambda'}) \quad (\text{Eq. 3.23})$$

Nous pouvons alors définir un « incrément multiplicatif continu » $\mu\psi$, dépendant du rapport d'échelle:

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(B_{\lambda\lambda'}) = \mu\psi(\lambda) \times \Phi_{\lambda'}(B_{\lambda'}) \quad (\text{Eq. 3.24})$$

Or, si $\mu\psi(\lambda)$ peut être écrit comme le produit d'une infinité de variables aléatoires, cela signifie que $\log(\mu\psi(\lambda))$ admet la même distribution que la somme d'une infinité de variables aléatoires.

$$\forall \lambda \exists (X_i)_{i \geq 1} \text{ t.q. } \log[\mu\psi(\lambda)] = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \quad (\text{Eq. 3.25})$$

L'équation (Eq. 3.25) exprime en fait que $\log(\mu\psi(\lambda))$ est une variable aléatoire de distribution infiniment divisible. $\mu\psi(\lambda)$ suit donc une loi log - infiniment divisible. Il en est de même pour Φ_λ qui admet les mêmes moments que ceux de $\mu\psi(\lambda)$.

L'infinie divisibilité est une propriété caractérisant une classe plus restreinte de variables aléatoires et de lois de probabilité. Parmi celles-ci, on trouve la loi normale, les lois stables (qui sont généralisent le cas des lois normales, et dont les propriétés sont décrites dans l'Annexe A), la loi de Poisson, la loi de Poisson composée, la loi exponentielle et la loi Gamma. Dans la littérature géophysique, les lois postulées le plus fréquemment pour $\log(\mu\psi(\lambda))$ sont la loi de Poisson et les lois stables (incluant le cas gaussien), ce qui conduit aux cascades log-Poisson, et log- stables décrites ci-dessous. Potentiellement, n'importe laquelle de ces lois pourrait être utilisée mais le cas log-stable est peut-être le plus vraisemblable vu qu'il correspond au résultat d'une sorte de « théorème limite centrale multiplicatif ». Pour une discussion sur les degrés d'universalité respectifs présentés par de tels modèles, on pourra se référer à (Schertzer & Lovejoy, 1997 ; Gupta & Waymire, 1997).

3.4.3 Illustration : le modèle log-Poisson

Ce modèle a été proposé par She & Levêque (1994) et Dubrulle (1994) (voir aussi (She & Waymire, 1995)), toujours dans le contexte de la modélisation de la turbulence. Les statistiques de la cascade multifractale sont entièrement déterminées par la connaissance de deux paramètres :

$$K(q) = \gamma^+ q + c \left(\left(1 - \frac{\gamma^+}{c} \right)^q - 1 \right) \quad (\text{Eq. 3.26})$$

γ^+ est la singularité maximale de la cascade log-Poisson et c est la co-dimension associée. Comme la fonction de co-dimension d'une multifractale conservative admet un point fixe et reste au-dessus de la première bissectrice, on a $c > \gamma^+$.

Ce modèle a été appliqué avec succès à la modélisation de séries de cartes radar de précipitations par Deidda (2000), qui a estimé les paramètres moyens $c = 1.19$ et $1 - \frac{\gamma^+}{c} = 0.34$ soit $\gamma^+ = 0.78$ dans la gamme d'échelles 4 - 256 km et 15 min - 16 h. Cependant, il subsiste des incertitudes liées à la robustesse du paramètre c qui paraît dépendre fortement de la séquence (de 16 h) de cartes choisie et de l'accumulation totale sur 16 h.

Le modèle log-Poisson présente cependant l'inconvénient d'être inadapté à la modélisation de processus à singularités non bornées. Dans ce cas, l'estimation empirique du paramètre c risque de fournir une valeur arbitraire liée aux conditions météorologiques particulières à l'événement analysé. La dispersion observée par Deidda (2000) dans l'estimation de ce paramètre pourrait s'expliquer de cette façon si la pluie est effectivement un processus à singularités non bornées. Pour lever l'incertitude relative à ce dernier point, d'autres modèles seront néanmoins nécessaires.

3.5 Multifractales Universelles (log-stables)

3.5.1 Cascades non intégrées

Contrairement aux cascades log-Poisson, les cascades log-stables ne sont pas nécessairement à singularités bornées et peuvent donc représenter une gamme de variabilité plus large. De plus, ce modèle nécessite également deux paramètres qui ont une interprétation physique plus immédiate que ceux du modèle log-Poisson. Dans la présente étude, nous chercherons donc à caractériser les propriétés multifractales des précipitations avec ce modèle log-stable. C'est

d’ailleurs avec ce modèle qu’ont été menées la plupart des études existantes des propriétés de la pluie (voir la revue de Lilley et al. (2006)). Quelques études fondées sur l’hypothèse log-Poisson existent néanmoins (cf. paragraphe précédent).

Les cascades log-stables, aussi dénommées « Multifractales Universelles », ont été introduites par Schertzer & Lovejoy (1987 ; 1991). Les propriétés statistiques de ces cascades sont résumées par deux paramètres fondamentaux (dans la suite « paramètres universels » ou « exposants universels ») notés α et C_1 :

$$\left. \begin{aligned} K(q) &= \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ K(q) &= C_1 q \cdot \ln(q) & \alpha = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} c(\gamma) &= C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right) \alpha' & \alpha \neq 1 \\ c(\gamma) &= C_1 \exp\left(\frac{\gamma}{C_1} - 1\right) & \alpha = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

où α' est défini par l’équation $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

C_1 est un indicateur de l’hétérogénéité spatiale de l’ensemble aléatoire associé aux valeurs du champ proche de la moyenne. Mathématiquement, C_1 est la singularité associée à l’ordre de moment 1 (la moyenne) et aussi la co-dimension correspondant à cette singularité. C_1 est donc le point fixe de la fonction de co-dimension. Pour que le champ aléatoire n’ait pas presque sûrement une moyenne nulle, il est nécessaire d’avoir $0 \leq C_1 \leq D$.

α est un indicateur de multifractalité qui traduit la rapidité avec laquelle l'hétérogénéité spatiale qui était décrite par C_1 au voisinage de la moyenne change lorsque l'on s'éloigne des valeurs du champ moyen. α est aussi l'indice de stabilité des (log des) incréments multiplicatifs stables sous-jacents au modèle (cf. Annexe A pour des rappels concernant les lois stables). α est donc compris entre 0 (cas binaire qui donne une cascade monofractale) et 2 (cascade log-normale qui présente le plus haut degré de multifractalité).

La construction mathématique de ces cascades, déroulées à la résolution λ , repose sur l'exponentiation d'un « générateur » Γ_λ construit par convolution D -dimensionnelle d'un bruit blanc stable γ_α d'indice de stabilité α et d'un filtre scalant (en loi puissance négative de la distance) tronqué:

$$\Phi_\lambda = \frac{\exp(\Gamma_\lambda)}{\langle \exp(\Gamma_\lambda) \rangle} \quad (\text{Eq. 3.29})$$

$$\Gamma_\lambda(\vec{x}) = \sigma \int_{|\vec{x}'| \leq \lambda} \frac{\gamma_\alpha(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^\alpha} d^D \vec{x}' \quad (\text{Eq. 3.30})$$

où σ est un coefficient de proportionnalité lié au paramètre C_1 évoqué ci-dessus.

Pour une justification de la construction ci-dessus et une démonstration de ses propriétés statistiques, on pourra se référer à l'annexe B. On pourra également consulter l'annexe A au sujet des variables stables.

On distingue en fonction des valeurs de α cinq classes de multifractales universelles, correspondant à une nature précise du générateur :

- $\alpha = 2$: le générateur est un mouvement brownien fractionnaire, presque partout continu.
- $1 < \alpha < 2$: le générateur est un mouvement de Lévy fractionnaire, obtenu à partir d'une variable de Lévy d'indice α . Les singularités ne sont pas bornées, comme le

montre le calcul de $\gamma = K'(q)$. Ces singularités vont entraîner la divergence des moments d'ordre élevés du flux.

- $\alpha = 1$: le générateur est obtenu à partir d'incrémentes de type variable de Cauchy.
- $0 < \alpha < 1$: le générateur est un mouvement de Lévy fractionnaire, asymétriques et à singularités bornées par $\gamma_0 = \frac{C_1 |\alpha|}{\alpha}$. Si cette valeur est inférieure à D , alors tous les moments de Φ_λ convergent.
- $\alpha = 0^+$: Tous les moments du générateur divergent. Ce cas se ramène en fait au modèle β étudié plus haut.

3.5.2 Cascades intégrées

Schertzer & Lovejoy (1987) ont proposé une extension du modèle universel à deux paramètres décrits ci-dessous afin de pouvoir représenter des champs « non conservatifs » pour lesquels la moyenne des incréments absolus suit une loi d'échelle vis-à-vis de la puissance et la moyenne du champ n'est pas strictement conservée d'échelle en échelle. Ces champs sont obtenus par filtrage scalant d'un champ multifractal universel. Ce filtre doit avoir une représentation de Fourier en loi puissance soit $\hat{f}(k) \propto (ik)^H$ où k est un vecteur d'onde, il s'agit donc d'une intégration fractionnaire d'ordre H . Ceci définit le modèle FIF (Fractionnally Integrated Flux) à trois paramètres α, C_1 et H . Dans ce modèle, le champ FIF à résolution λ , noté R_λ est défini par :

$$R_\lambda(\bar{x}) = \int d^D \bar{x}' \frac{\Phi_\lambda(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^{D-H}} \quad (\text{Eq. 3.31})$$

et les incréments suivent une loi:

$$|\Delta R_\lambda(\Delta x)|^d = \Phi_\lambda |\Delta x|^H \quad (\text{Eq. 3.32})$$

Il est à noter que l'équation (Eq. 3.32) est formellement assez semblable à la loi de Kolmogorov des incréments de vitesses, pour laquelle $H = 1/3$ et $\Phi_\lambda = \varepsilon_\lambda^{1/3}$.

3.6 Limitations d'échantillon et divergence des moments

Dans le cas d'un champ multifractal quelconque (non nécessairement « universel »), deux limitations mathématiques vont impliquer que les lois d'échelle décrites précédemment ne sont pas valables pour des ordres de moments (très) élevés (Schertzer & Lovejoy, 1987 ; 1992 ; 1993 ; 1994). Chacune de ces limitations résulte en l'existence d'un ordre critique au-delà duquel l'estimation des moments ne peut être effectuée correctement. La première de ces limitations concerne les observables construits en moyennant une cascade multifractale à une résolution d'observation, c'est-à-dire les cascades de type « dressed » évoquées au paragraphe 3.3.2. En effet, les moments statistiques de ces cascades divergent au-delà d'un ordre noté classiquement q_D . La seconde limitation est liée à l'estimation des moments sur un échantillon contenant un nombre fini de réalisations de la cascade aléatoires. En effet, étudier un nombre fini de réalisations revient à ne parcourir qu'un sous-espace fini de l'espace des réalisations possibles, et les moments ne pourront pas être estimés correctement au-delà d'un certain ordre (noté classiquement q_s) car les moments d'ordres supérieurs sont associés à des singularités trop rares pour être « visibles » dans l'échantillon.

3.6.1 Divergence de certains moments des quantités intégrées

Comme mentionné au paragraphe 3.3.2, les cascades « dressed » $\overline{\Phi}_\lambda$ construits par intégration de Φ_∞ sur des pixels de résolution λ sont des variables aléatoires de lois différentes de celles de la cascade Φ_λ construite uniquement à partir des résolutions comprises dans l'intervalle $[1, \lambda]$. Suivant la démonstration de l'annexe de (Lavallée et al.,

1991), il est possible d'exprimer $\overline{\Phi}_\lambda$ comme le produit de Φ_λ et d'une variable aléatoire indépendante de la résolution :

$$\overline{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda \times \Pi_\infty \quad (\text{Eq. 3.33})$$

où Π_∞ est le flux total (d'une réplique) de la cascade aléatoire sur son domaine de définition

$$A \text{ (qui est aussi le « pixel » de résolution } \lambda = 1) : \Pi_\infty = \int_A \Phi_\infty d^D x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A \Phi_\lambda d^D x .$$

D'après l'équation (Eq. 3.33), il apparaît que $\overline{\Phi}_\lambda$ et Φ_λ ont les mêmes propriétés de scaling à l'exception des ordres pour lesquels le moment $\langle \Pi_\infty^q \rangle$ diverge. Schertzer & Lovejoy (1987) ont montré que les moments de Π_∞ et donc ceux de $\overline{\Phi}_\lambda$ étaient divergents à partir d'un ordre critique q_D , solution (si elle existe !) de l'équation :

$$K(q_D) = D(q_D - 1) \quad (\text{Eq. 3.34})$$

(et vérifiant la condition $q_D > 1$)

En termes de singularités, cette équation s'interprète par l'existence de singularités critiques $\gamma \geq \gamma_D$ qui sont suffisamment fortes aux très fines échelles pour ne pas être lissées par l'intégration D -dimensionnelle des échelles inférieures à l'échelle d'observation (qui est associée au terme Π_∞). La fonction de co-dimension est linéaire dans l'intervalle des singularités $\gamma \geq \gamma_D$.

L'existence d'un tel ordre critique est susceptible d'avoir une importance pour les applications du modèle. En effet, la distribution de probabilité des valeurs du champ est modifiée car l'existence de moments divergents est synonyme de queues de distributions épaisses, c'est-à-dire à décroissance hyperbolique (asymptotique) :

$$\forall \lambda \Pr(\overline{\Phi}_\lambda \geq s) \propto s^{-q_D} \quad (\text{Eq. 3.35})$$

(pour $s \gg 1$)

De telles distributions de probabilité génèrent beaucoup plus de valeurs extrêmes que des distributions plus classiques (normales, log-normales, GEV de type 1, etc.), dont la queue de distribution, plus « mince », fait typiquement intervenir des lois exponentielles décroissantes. **La mise en évidence (ou le rejet) d'un tel comportement est donc d'importance primordiale pour un grand nombre d'applications, par exemple en hydrologie.** Ainsi, les temps de retour de certains événements de pluie extrêmes pourrait être inférieur de presque un ordre de magnitude aux temps de retour prédits par les approches statistiques standard si ce phénomène intervient réellement pour les précipitations.

Dans le cas particulier de la pluie, un certain nombre d'auteurs suggèrent sur une base empirique que la relation (Eq. 3.35) serait vérifiée avec $q_D \sim 3$: voir par exemple la revue de Hubert (2005) et l'article de Macor et al. (2007).

3.6.2 Contraintes liées à la taille d'échantillon

Sur une réalisation de la cascade à la résolution λ , les valeurs observables seront nécessairement limitées par la taille réduite de l'échantillon. Rappelons ici que les singularités représentent une mesure de l'intensité des événements et que les co-dimensions associées mesurent leur rareté. Si il existe une singularité de co-dimension supérieure à D , cela signifie que en moyenne les événements de cette intensité sont présents sur moins d'un pixel quelle que soit la résolution : ces événements ne seront donc généralement pas observables sur une réalisation :

$$\Pr(\Phi_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \leq \lambda^{-D} \quad (\text{Eq.3.36})$$

Par dualité de Legendre, il existe aussi un ordre critique au-delà duquel les moments ne peuvent être estimés sans biais. En appliquant l'équation (Eq. 3.18), on montre que cet ordre est égal à :

$$q_s = c'(c^{-1}(D)) \quad (\text{Eq. 3.37})$$

En particulier, l'équation ci-dessus se simplifie dans le cas des multifractals universels sous la forme :

$$q_s = \left(\frac{D}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{Eq. 3.38})$$

Les formules s'étendent aisément au cas où plusieurs (N_s) réalisations indépendantes sont prises en compte dans l'estimation des moments : il suffit de remplacer le terme D par $D+D_s$ où D_s est une dimension additionnelle mesurant la portion d'espace probabiliste couverte par les réalisations. Le choix adéquat de cette « dimension d'échantillon » (Schertzer & Lovejoy, 1993) est tel que $D_s = \log(N_s)/\log(\lambda)$.

3.6.3 Conséquences pour l'observation des valeurs extrêmes

En pratique, les deux limitations évoquées ci-dessus sont susceptibles d'intervenir. Deux cas peuvent alors se présenter (Schertzer & Lovejoy, 2002), suivant la valeur de $\min(q_D, q_s)$.

- Si $q_s < q_D$, l'échantillon est de taille insuffisante (contient trop peu de réalisations) pour permettre l'observation des singularités critiques conduisant à la divergence des moments. Seules les limitations d'échantillons interviennent : la fonction de co-dimension empirique n'est pas définie pour $\gamma > \gamma_s$ et la fonction d'échelle des moments empirique $\bar{K}(q)$ est linéaire pour les ordres $q \geq q_s$. $\bar{K}(q)$ et sa dérivée restent continues au point $q = q_s$.
- Si $q_s > q_D$, des singularités plus grandes que γ_D sont observées. Le phénomène de divergence décrit au paragraphe 3.6.1 est effectivement observable.

En résumé, c'est le plus petit des deux ordres critiques qui va déterminer les propriétés du modèle vis-à-vis des valeurs extrêmes. Physiquement, cela veut dire que pour observer le phénomène critique de divergence des moments, il est nécessaire de travailler sur un

échantillon contenant un grand nombre de réalisations indépendantes de la cascade multifractale.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les formalismes fractals et multifractals qui seront utilisés dans le cadre de ce travail. De façon générale, la multifractalité peut résulter de cascades multiplicatives stochastiques et se manifeste par des moments statistiques en loi puissance. Les exposants de « scaling » de ces lois définissent la fonction d'échelle des moments notée $K(q)$. Cette fonction est fondamentale car elle résume toutes les propriétés statistiques du champ multifractal à toutes les résolutions. En théorie, cette fonction est assez peu contrainte (convexité), mais en pratique elle ne peut pas prendre n'importe quelle forme. En effet, des considérations de réalisme physique et notamment de continuité des échelles entraînent des contraintes mathématiques précises sur le choix des variables aléatoires intervenant dans la cascade multiplicative. Un attracteur possible est constitué par la famille des lois log-stables qui résultent en une forme analytique paramétrée de $K(q)$ à deux paramètres. En outre, il est possible de filtrer les cascades multifractales par une fonction « scalante ». Cette « intégration fractionnaire » permet d'augmenter l'autocorrélation du champ et peut être d'ordre variable. Ces considérations définissent le modèle FIF (Fractionally Integrated Flux) caractérisé par trois paramètres fondamentaux : un exposant de multifractalité noté α , un exposant d'inhomogénéité du champ moyen noté C_1 et un exposant d'intégration noté H .

Afin d'analyser les données de pluie à haute résolution disponibles au laboratoire, nous devons préalablement disposer d'une méthodologie permettant de démontrer (ou de rejeter) l'existence de propriétés multifractales sur des séries ou champs quelconques, et de calculer la fonction $K(q)$ et les paramètres universels associés. Plusieurs outils et techniques existent concurremment dans la littérature mais le principe de base reste globalement le même. Dans le chapitre suivant, nous présentons les outils retenus ainsi que des techniques de simulations de champs multifractals, connaissant les paramètres fondamentaux.

4 Procédures de simulation et d'analyse de multifractals universels

4.1 Introduction

Une des premières tâches de mon travail a consisté à développer en langage MATLAB des codes d'analyse multifractale, c'est-à-dire des programmes prenant en entrée des données et calculant un certain nombre de propriétés statistiques de sorte à pouvoir déterminer la ou les gammes d'échelles pour lesquelles des propriétés multifractales peuvent être mises en évidence, et, le cas échéant, pouvoir estimer les paramètres « universels ». En outre, j'ai aussi développé des codes de simulation de champs multifractals afin de pouvoir valider les méthodes d'analyse mises en oeuvre. J'ai développé des codes adaptés aux différents cas susceptibles d'intervenir au cours de mes travaux de recherche (temps, 2D, 2D + temps), mais aussi à les « automatiser » tout en permettant des variantes basées sur la prise en compte de différents types d'anisotropie ou de la causalité. Dans la suite du manuscrit, nous ne considérerons toutefois pas les phénomènes liés à une éventuelle anisotropie spatiale. Les procédures d'analyse et de simulation décrites ci-dessous sont relativement classiques et font l'objet d'une assez large littérature. Par conséquent, le lecteur pourra se référer aux publications citées dans les paragraphes suivants pour plus de détails quant à l'application de ces techniques.

4.2 Simulation des multifractals universels

4.2.1 Principe général

La simulation de processus et de champs multifractals universels repose sur la formalisation mathématique exposée dans le chapitre précédent et justifiée en annexe B. Le but est de pouvoir simuler des réalisations de séries ou de champs aléatoires multifractals, connaissant les trois paramètres fondamentaux α , C_1 et H du modèle Fractionnally Integrated Flux (FIF), ainsi que la taille du domaine de simulation, qui correspond à la résolution maximale. Le

simulateur doit implémenter les trois étapes exprimées par les équations (Eq. 3.28) à (Eq. 3.30) et représentées sur le schéma ci-dessous :

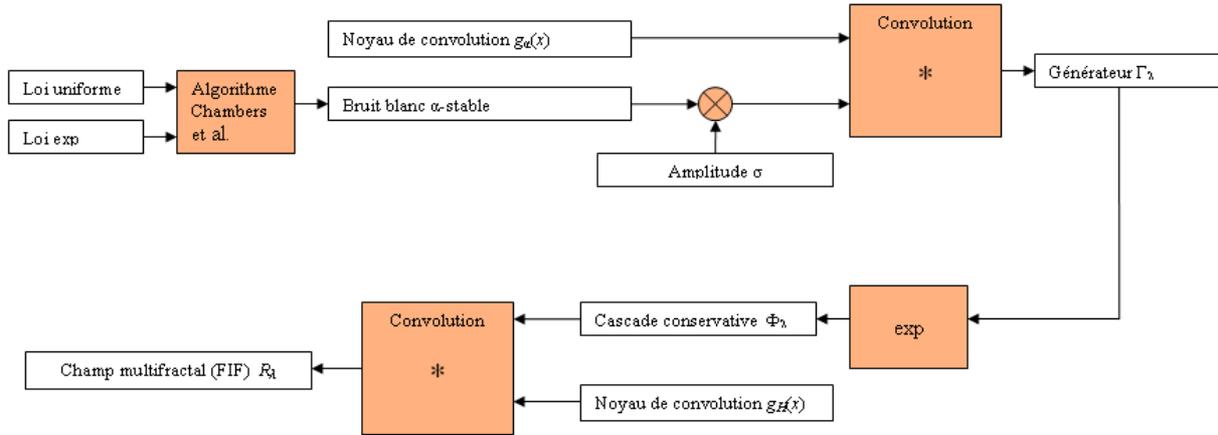


Figure 4.1 : Schéma de principe d'un simulateur de champs multifractals

Techniquement, la simulation repose sur deux convolutions et sur la génération préliminaire d'un bruit blanc stable γ_α unitaire (l'indice de stabilité α correspond au paramètre α du modèle FIF). Ce bruit doit être multiplié par un facteur d'amplitude noté σ . Pour obtenir le paramètre C_1 désiré, il est nécessaire de fixer la valeur de σ par la relation (cf. (Pecknold, 1993 ; Lovejoy & Schertzer, 2010b ; 2010c)) :

$$\sigma = \left(\frac{C_1}{|\alpha - 1|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{Eq. 4.1})$$

D'autres constantes de normalisation peuvent être introduites dans le code numérique (cf. annexe B).

Conformément aux équations mentionnées ci-dessus, la forme des noyaux de convolution (en D dimensions) est imposée dans le cas isotrope :

$$g_\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{|\vec{x}|^{\frac{D}{\alpha}}} & (|\vec{x}| \leq \lambda) \\ 0 & (|\vec{x}| > \lambda) \end{cases} \quad (\text{Eq. 4.2})$$

$$g_H(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^{D-H}} \quad (\text{Eq. 4.3})$$

Ci-dessus, $|\bullet|$ désigne la norme euclidienne usuelle, par exemple en 2D : $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En pratique, les convolutions sont effectuées sur des grilles à pas discret, on suppose donc pour simplifier que le côté d'un pixel est 1 au sens de la distance induite par cette norme.

L'extension à des champs anisotropes (Schertzer & Lovejoy, 1985) nécessite une modification adéquate des noyaux de convolution (Pecknold et al., 1993) : elle nécessite de définir une « fonction d'échelle » (scale function) notée $\vec{x} \rightarrow \|\vec{x}\|$ anisotrope et de remplacer la dimension de l'espace, D , par une valeur non entière représentative de l'anisotropie différentielle de la topologie concernée ($D \rightarrow D_{el}$). Dans tous les cas, la modification principale intervient sur la notion de distance utilisée pour décrire la topologie de l'espace. Les aspects purement stochastiques de la cascade multiplicative sous-jacente ne sont pas affectés : ce sont les mêmes incréments multiplicatifs qui sont utilisés, mais ils sont convolués sur un espace topologiquement différent.

Un cas particulier très simple est le cas « auto-affine » qui consiste en une stratification différentielle suivant les deux axes (orthogonaux) de coordonnées. Dans ce cas, un zoom d'un facteur λ sur un axe (par exemple, l'axe des abscisses) est équivalent à un zoom d'un facteur λ^{H_y} sur un autre (ici, l'axe des ordonnées). Il existe aussi des modèles auto-affines « 2D + T » où l'anisotropie intervient entre l'axe temporel et les axes (équivalents) du domaine spatial (Marsan et al., 1996 ; Biauou, 2004 ; Macor, 2007).

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudions successivement la génération du bruit blanc α -stable sous-jacent qui est la composante « stochastique » de la cascade multiplicative log-stable continue en échelle, puis l'implémentation numérique des convolutions. Nous présenterons aussi quelques exemples de séries et de cartes simulées.

4.2.2 Génération des variables stables

La construction du bruit blanc α -stable suppose de pouvoir générer un grand nombre de réalisations aléatoires et indépendantes d'une variable stable asymétrique négative extrême (soit $\beta = -1$ dans les notations du chapitre précédent) et ce pour différentes valeurs du paramètre d'échelle σ (on rappelle que les propriétés mathématiques des variables stables sont décrites dans l'annexe A). On pourrait imaginer d'utiliser les propriétés d'attracteurs des variables α -stables qui sont limites de sommes de variables de variance infinie (cf. annexe A), ce qui est à la base de la procédure de simulation proposée par Wilson et al. (1991). Cette procédure a été par la suite rejetée (cf., par exemple, Macor, 2007) du fait de sa convergence très lente. Il existe en revanche un algorithme rapide et efficace de simulation de variables α -stables extrêmes, qui ne nécessite comme ingrédients de base que de pouvoir simuler les distributions uniformes et exponentielles. Cet algorithme (Chambers et al. 1976), dont l'application à la simulation de multifractals a été proposée notamment par Pecknold et al. (1993) est basé sur les transformations (point à point) suivantes, convergeant vers une variable aléatoire α -stable « unitaire » :

$$\gamma_\alpha = \frac{\sin(\alpha(\Phi - \Phi_0))}{(\cos(\Phi))^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right]^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

(Eq. 4.4)

$$\gamma_\alpha = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \tan(\Phi) + \ln \left(\frac{\pi W \cos(\Phi)}{\pi - 2\Phi} \right) \right] \quad \text{si } \alpha = 1$$

où Φ suit une loi uniforme $U\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et W est une variable aléatoire exponentielle standard, et :

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha} \right) \quad \text{(Eq. 4.5)}$$

4.2.3 Implémentation des convolutions

Le calcul direct des convolutions (utilisant par exemple les fonctions *conv* et *conv2* de MATLAB) ne paraît pas être la solution optimale en termes de complexité et de temps de calcul, ce qui peut s'avérer gênant pour des calculs portant sur des grilles multidimensionnelles de grande taille. Dans le cadre de ce travail, on a choisi de calculer les convolutions en passant par le domaine de Fourier au moyen du « théorème de convolution ». Classiquement, ce dernier stipule que la transformée de Fourier d'un produit de convolution $f * g$ est le produit (au sens des fonctions) des transformées de Fourier de f et de g . Pour calculer un produit de convolution, il suffit donc de prendre la transformée inverse du produit (point-à-point) des transformées. Cette stratégie est intéressante car on sait calculer la transformée de Fourier (discrète) numériquement avec une grande efficacité au moyen des algorithmes de Transformées de Fourier Rapides (FFT en anglais), dont la complexité est en $O(n \log(n))$ (Cooley & Tukey, 1965). En fonction du nombre de dimensions requises dans les simulations, nous utilisons donc les fonctions *fft*, *fft2*, *fftn* de MATLAB ainsi que leurs inverses dans les programmes.

4.2.4 Exemple de simulation

La carte ci-dessous représente la simulation d'une carte multifractale universelle isotrope de taille 512 x 512 produite au moyen de l'algorithme décrit ci-dessus, avec les paramètres $\alpha = 1.7$, $C_1 = 0.1$ et $H = 0$. La carte est ici normalisée de sorte que la moyenne soit unitaire. On constate la présence de structures imbriquées d'extension et d'intensité variable. Il existe des extrêmes très forts (plus de 50 fois la valeur moyenne) et très localisés qui ne sont pas directement visibles sur la figure car on a choisi de restreindre la gamme de couleurs utilisées afin de faire mieux ressortir les structures d'amplitude modérées.

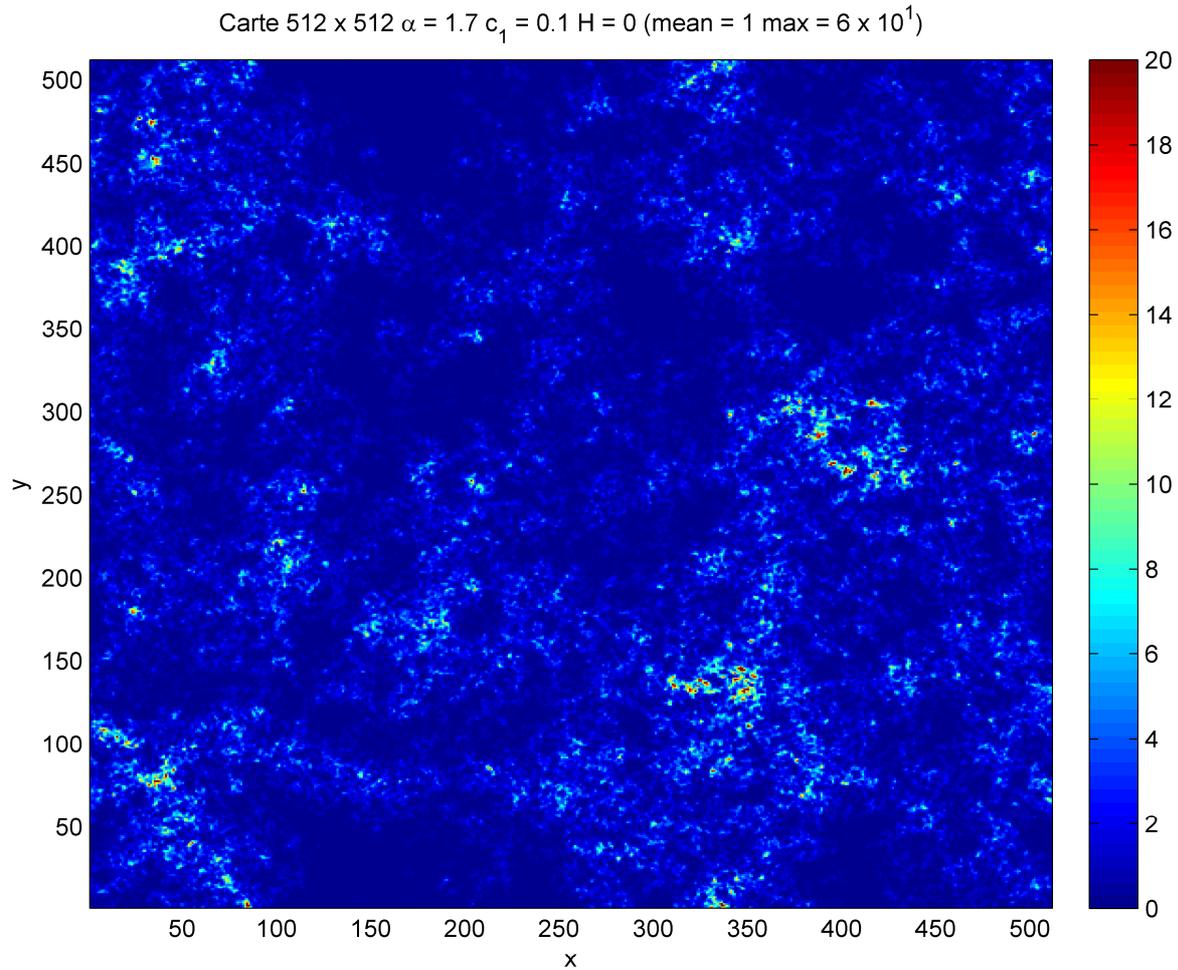


Figure 4.2 Exemple de simulation d'une cascade multifractale universelle continue en échelle

4.3 Analyse multifractale de données

4.3.1 Aperçu d'ensemble

On rappelle que l'analyse multifractale consiste à appliquer une palette d'outils à des données dans le but de démontrer l'existence de propriétés « scalantes » et multifractales dans une ou plusieurs gammes d'échelles, ainsi que les paramètres (et notamment les paramètres universels) correspondants. Plusieurs techniques d'analyse co-existent, dans la suite du travail nous nous intéressons principalement aux techniques synthétisées dans l'article de Montera et

al. (2009). on pourra aussi se référer à des travaux plus anciens (Lavallée et al., 1992 ; 1993 ; Tessier et al., 1993) présentant en détail les principes et les modalités d'une méthodologie assez semblable à celle utilisée dans le cadre de ce travail. Au sens strict, l'analyse multifractale nécessite l'estimation de propriétés statistiques à plusieurs ordres, via le calcul des moments empiriques exposé à la section 4.3.4 ou via une technique duale nommée PDMS non présentée ici (*Probability Distribution Multiple Scaling* ; Lovejoy & Schertzer, 1990 ; Lavallée et al., 1991). Néanmoins, l'application de ces techniques doit impérativement porter sur un champ résultant d'une cascade multifractale conservative (où le paramètre H vaut 0), ce qui n'est pas forcément le cas en pratique car le champ peut être une cascade intégrée et non conservative ($H > 0$). Cette difficulté apparaît en particulier pour les champs de type FIF décrits antérieurement au paragraphe 3.4.2. Au paragraphe suivant, nous décrivons succinctement les techniques utilisées pour inférer la valeur de H .

4.3.2 Analyse spectrale et fonction de structure du premier ordre

4.3.2.1 Principe

L'invariance d'échelle d'un champ implique que son spectre d'énergie E (*intégré* sur tous les angles dans un cas multi-dimensionnel) suit une loi de puissance sur une plage étendue des nombres d'onde k :

$$E(k) = k^{-\beta} \quad (4.6)$$

où k est le nombre d'onde.

Il s'ensuit que si il y a invariance d'échelle, alors le tracé en coordonnées log-log (base 2 par exemple) du spectre est une droite de pente $-\beta < 0$. D'après le théorème de Wiener-Khintchine, si le champ est une cascade conservative, alors $\beta = 1 - K(2)$. On peut étendre facilement ce résultat au cas général :

$$\beta = 1 - K(2) + 2H \quad (4.7)$$

On remarque que si on connaît $K(2)$ - qui peut être calculé a posteriori après l'estimation des paramètres fondamentaux α, C_1, H - on peut en déduire une estimation de H .

D'autre part, la fonction de structure d'ordre 1, $\log(\langle |\Delta R(\Delta \bar{x})| \rangle)$ du champ peut être exprimée en prenant la moyenne et le logarithme des deux membres de l'équation (3.31) :

$$\log_2(\langle |\Delta R(\Delta \bar{x})| \rangle) = \log_2(\langle \Phi_\lambda \rangle) + H \cdot \log_2(|\Delta \bar{x}|) \quad (4.8)$$

Comme le flux est conservatif, le premier terme du second membre de (4.8) est une constante $\ln(M)$. Il s'ensuit que le tracé de la fonction de structure en coordonnées log-log est une droite de pente H . C'est cette technique d'estimation de H que nous retiendrons ultérieurement. Il faut retenir qu'elle ne fonctionne pas en pratique si $H < 0$ (on obtient alors une fonction constante et donc une pente nulle). Cette difficulté peut toutefois être contournée en choisissant une définition différente des « fluctuations », prise cette fois-ci au sens de la théorie des ondelettes (Lovejoy et al., 2011).

4.3.2.2 Remarques sur l'utilisation de ces techniques

Les relations utilisées ci-dessus sont par définition des propriétés valables statistiquement, en moyenne, et non sur chaque réalisation. L'analyse multifractale doit inférer ces propriétés statistiques à partir des données et requiert donc un estimateur pour la moyenne statistique. En pratique, nous devons donc moyenniser les grandeurs observées sur toutes les réalisations disponibles. Par exemple, dans le cas d'un échantillon de cartes, nous estimons le spectre en calculant la densité spectrale de puissance (2D) de chaque carte puis nous moyennons sur toutes les cartes. Pour que les estimateurs soient consistants (i.e., l'estimateur converge vers la valeur « statistique » quand le nombre d'échantillons tend vers l'infini), il suffit que les réalisations soient indépendantes. Plus généralement, les régressions linéaires permettant d'obtenir β ou H à partir des formules (4.6) et (4.8) portent sur les grandeurs moyennées sur toutes les réalisations disponibles. Cette méthode est non équivalente à celle (moins performante) qui consisterait à estimer β ou H sur chaque réalisation (carte) puis à prendre la moyenne de ces estimations (Tessier et al., 1996).

En outre, il convient de garder à l'esprit que le « scaling » des fonctions de structure (notamment, d'ordre 1) et du spectre n'est pas une condition suffisante de multifractalité. Les processus monofractals, tels que les mouvements browniens fractionnaires, vérifient également des propriétés similaires.

4.3.3 Estimation des moments empiriques

4.3.3.1 Principe (cas conservatif)

Supposons que les données à analyser constituent des réalisations d'une cascade multifractale conservative Φ (i.e. $H = 0$). Afin d'étudier la validité de l'équation fondamentale (Eq. 3.16) : $\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)}$, il est nécessaire d'estimer les moments empiriques à divers ordres q et à diverses résolutions λ (en pratique $\lambda = 2^n$). La procédure classique (Tessier et al., 1993 ; de Montera et al., 2009) est la suivante :

1. Pour chaque réalisation i :
 - Partir de la $i^{\text{ème}}$ réalisation $\Phi_\Lambda^{(i)}$ (carte ou série) à la résolution maximale : il s'agit d'une grille de taille Λ^D (où, usuellement, $\Lambda = 2^n$).
 - Dégrader sa résolution à la valeur $\lambda = 2^m$ en moyennant la carte sur des carrés de $(2^{n-m})^D$ pixels sur une grille de taille λ^D (cf. Fig. 4.3). On note $\Phi_\lambda^{(i)}$ cette version basse résolution de la cascade. Il faut noter que l'agrégation de pixels est ici effectuée sur des carrés (hypothèse isotrope)
 - Elever $\Phi_\lambda^{(i)}$ à la puissance q .
 - Moyenner (spatialement ou temporellement) toutes les valeurs de $\Phi_\lambda^{(i)q}$.
 - On obtient le moment empirique de la $i^{\text{ème}}$ réalisation $\overline{\Phi_\lambda^{(i)q}}$
2. L'estimateur de $\langle \Phi_\lambda^q \rangle$ est obtenu en moyennant les $\overline{\Phi_\lambda^{(i)q}}$ sur tous les i

3. On normalise en divisant par $\langle \Phi_1 \rangle^q$ (normalisation « canonique »). Une variante de cette méthodologie consiste à normaliser entre l'étape 1 et l'étape 2 pour attribuer le même poids à toutes les réalisations (normalisation « microcanonique »).

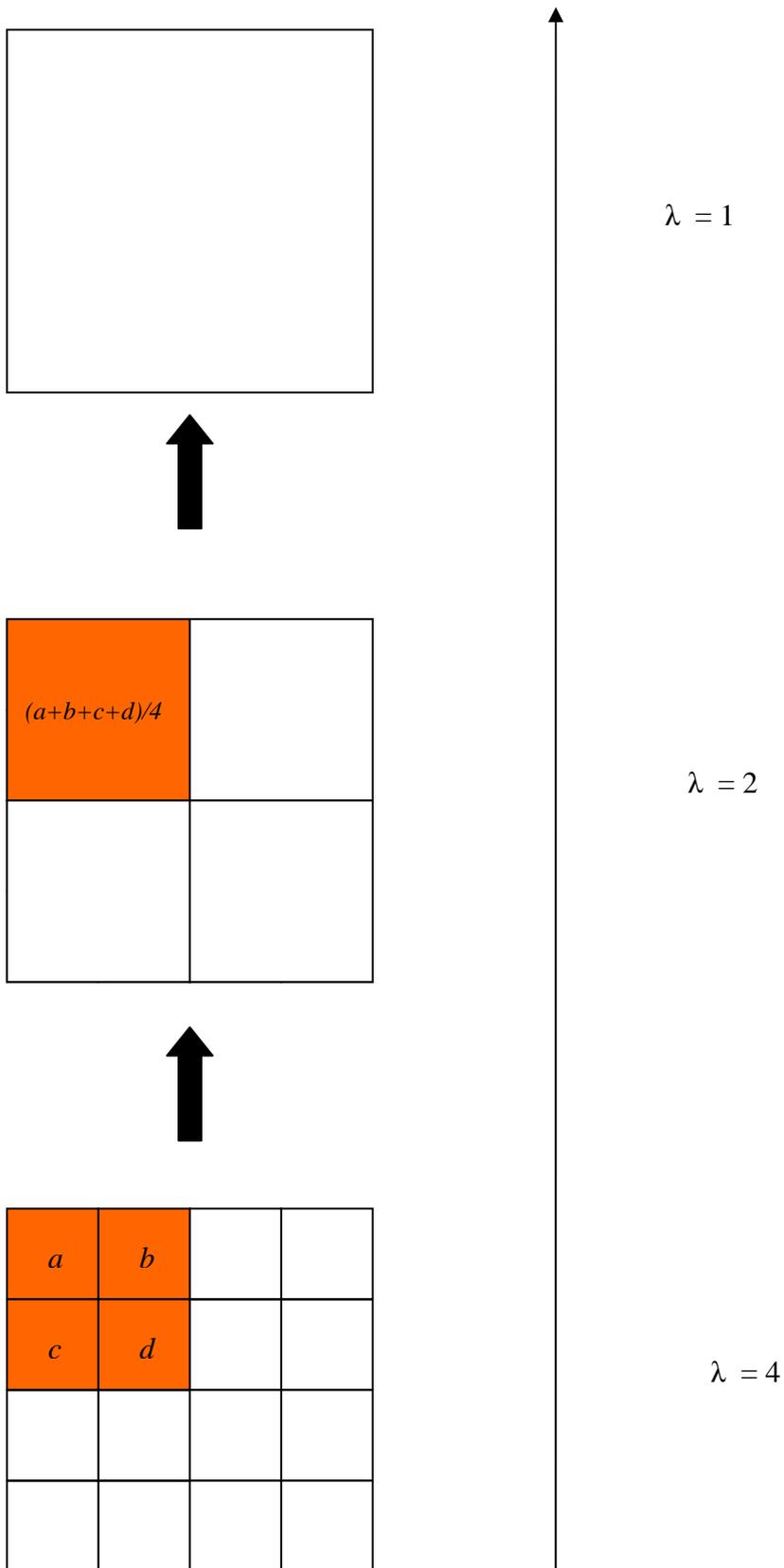


Figure 4.3 Dégradation de la résolution d'une cascade multiplicative au moyen d'une succession d'aggrégations (adapté de (Biaou, 2004))

On peut alors appliquer la procédure ci-dessus à différentes résolutions et différents ordres, puis vérifier que le graphe log-log des moments en fonction de la résolution donne bien une droite pour chaque ordre q (d'après l'équation $\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)}$). Si c'est le cas, alors la pente donne $K(q)$ pour chaque valeur de q considérée, ce qui permet d'estimer la fonction d'échelle des moments.

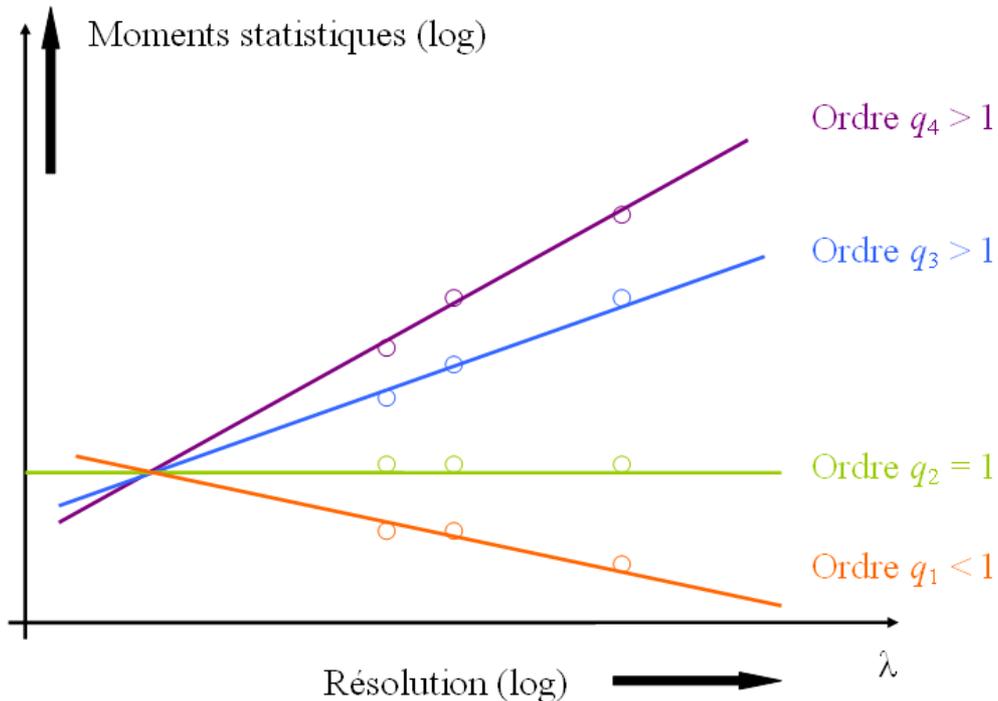


Figure 4.4 Graphe des moments produit par l'analyse multifractale. La pente de chaque droite correspond à une valeur de $K(q)$. Les droites s'intersectent en une échelle « externe » L_{ext}

Avec cette technique, nous sommes en mesure de déterminer la fonction qui résume les propriétés statistiques de tous ordres (i.e. pour différents niveau de champ), c'est-à-dire la fonction d'échelle des moments $K(q)$ de la cascade sous-jacente (cf. chapitre 3). Il est alors possible de chercher quelle fonction « universelle » $K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1}(q^\alpha - q)$ (cf. Eq. 3.27), et donc quels paramètres α et C_1 ajustent au mieux cette fonction empirique. Nous utilisons deux techniques qui fournissent des valeurs voisines :

- minimisation de l'écart au sens des moindres carrés avec une méthode de minimisation par gradient (telle que la fonction *fminsearch* de MATLAB).
- estimation numérique de $K'(1)$ et $K''(1)$ qui sont reliés simplement à α et C_1 dans le cadre du modèle universel :

$$K'(1) = C_1 \text{ et } K''(1) = C_1 \cdot \alpha \quad (\text{Eq. 4.9})$$

L'équation (2.4) n'étant valable que pour des champs conservatifs, on doit donc préalablement estimer la cascade multiplicative conservative sous-jacente lorsque le champ admet un paramètre H non nul. Rigoureusement, il faudrait faire une dérivation fractionnaire d'ordre H , mais en pratique on peut, surtout pour H voisin de 0.5, employer des approximations (voir section 4.2.2), qui présentent l'avantage de pouvoir être utilisées même quand H est inconnu.

4.3.3.2 Cas des champs « intégrés »

La méthode exposée ci-dessus ne peut pas être appliquée directement à la plupart des champs géophysiques car elle n'est valable que si le champ analysé est représentatif d'une cascade multiplicative conservative ($H = 0$). En revanche, elle ne peut pas être appliquée directement à une version « fractionnairement intégrée » de la cascade. Dans ce cas, il est indispensable d'estimer la cascade multiplicative sous-jacente, notée Φ , à partir des observations R . Mathématiquement, le problème consiste à inverser l'intégration fractionnaire et cette inversion peut être réalisée au moyen d'une dérivation fractionnaire de même ordre. En pratique, cette inversion se révèle plus problématique pour plusieurs raisons :

- l'ordre H à inverser ne peut être connu qu'approximativement dans le cas de données « réelles » ce qui induit des erreurs dans l'inversion
- la dérivation fractionnaire est délicate à implémenter numériquement, car il s'agit d'une opération de déconvolution

- le champ obtenu après inversion de l'intégration fractionnaire doit être à valeurs positives car il est censé représenter une réalisation de cascade multiplicative multifractale.

En pratique, l'inversion est réalisée par une opération plus simple qui fournit une approximation de la cascade tout en conservant ses principales propriétés statistiques. La solution la plus courante, développée par Lavallée et al. (1993) consiste à approximer la cascade à la résolution maximale Λ par la valeur absolue d'une dérivée d'ordre entier du champ. De plus, Φ doit être normalisé et se calcule donc de la façon suivante:

$$\Phi_{\Lambda} = \frac{|der R_{\Lambda}|}{\langle |der R_{\Lambda}| \rangle} \quad (\text{Eq. 4.10})$$

où *der* désigne un opérateur de différences finies.

En pratique, *der* correspond au gradient numérique dans le cas unidimensionnel, tandis que le laplacien numérique peut être utilisé dans le cas bidimensionnel :

$$der R(i, j) = R(i, j) - \frac{1}{4}(R(i, j+1) + R(i, j-1) + R(i-1, j) - R(i+1, j)) \quad (\text{Eq. 4.11})$$

On peut ensuite estimer Φ à d'autres résolutions $\lambda < \Lambda$ par moyennages successifs de Φ_{Λ} comme dans le cas d'une cascade conservative.

4.3.3.3 Le choix des ordres de moments

Au paragraphe 3.6, nous avons expliqué que l'estimation des moments d'ordre élevé était délicate en raison d'une part du caractère fini et limité des observations et d'autre part des singularités extrêmes masquées par les pixels de la grille sur laquelle est projetée le champ. Il s'ensuit qu'il est nécessaire de choisir un intervalle limité d'ordre de moments avant d'analyser le champ. Compte tenu des valeurs empiriques auxquelles interviennent habituellement ces limitations (cf., par exemple, Tessier et al., 1996), nous choisissons donc

d'appliquer la démarche d'analyse précédemment décrite pour des ordres compris entre 0 et 3. En pratique, il suffit de prendre des ordres régulièrement espacés 0 ; 0.1 ; ... ; 2.9 ; 3.0 ainsi que deux valeurs très proches de 1 pour le calcul des dérivées $K'(1)$ et $K''(1)$ qui peuvent être utilisés dans l'estimation des paramètres universels α et C_1 (cf. Eq. 4.9).

4.3.3.4 Exemple

Pour illustrer la procédure d'analyse multifractale décrite ci-dessus, on a simulé 50 cartes de tailles 512 x 512 avec les paramètres universels $\alpha = 1.7$, $C_1 = 0.1$ et $H = 0$. Nous avons alors pris ces cartes en entrée du programme d'analyse et obtenu la figure ci-dessous, pour des ordres de moments compris entre 0 et 2 :

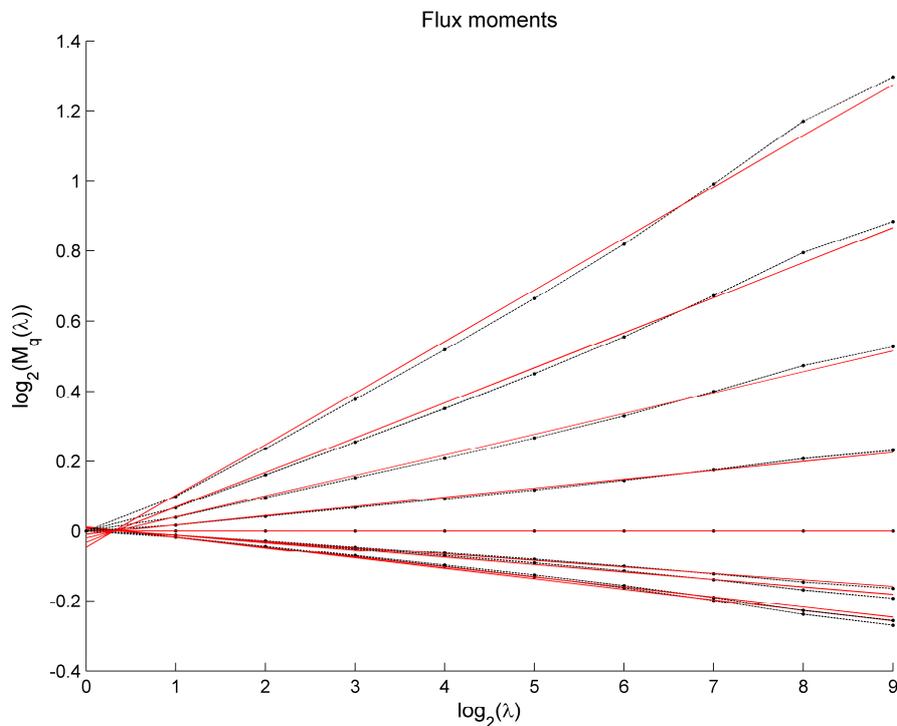


Figure 4.5 : Graphe des moments empiriques des cartes simulées

Les droites obtenues par régression linéaire admettent pour pentes les valeurs de la fonction d'échelle des moments en divers ordres. La résolution maximale n'est pas prise en compte dans la régression car cette résolution est susceptible d'être influencée par le bruit numérique lié au caractère discret des grilles sur lesquelles sont effectuées les simulations. Cependant dans le cas présent elle influencerait assez peu sur la fonction d'échelle des moments

L'ajustement de la fonction $K(q)$ par une forme universelle est optimal pour les paramètres universels $\alpha = 1.72$ et $C_1 = 0.11$, qui sont fournis à 10^{-2} près par les deux méthodes d'ajustement décrites au paragraphe 4.3.3. La fonction $K(q)$ est représentée ci-dessous, elle a bien l'allure convexe attendue :

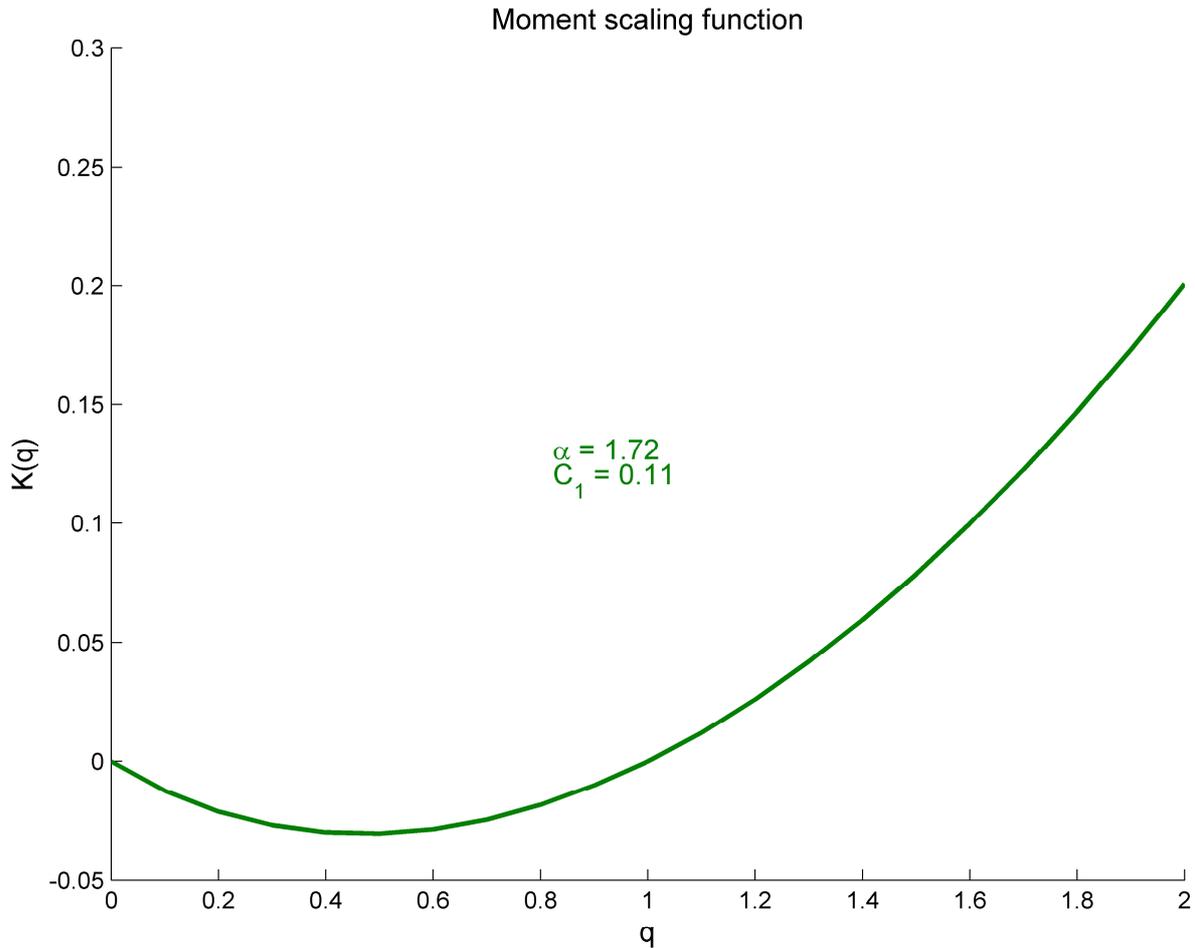


Figure 4.6 Fonction d'échelle des moments empirique des cartes simulées

4.3.4 La technique du « Double Trace Moment » (DTM)

Cette méthode (Lavallée et al., 1992 ; Veneziano & Furcolo, 1999) est une variante des techniques décrites dans le paragraphe 4.3.3. Elle consiste à appliquer ces techniques non seulement sur la cascade Φ_λ , mais aussi sur les cascades $\Phi_\lambda^{(\eta)}$ reconstruites à partir de Φ_λ^η . On a alors la propriété de « scaling » suivante :

$$\langle \Phi_{\lambda}^{(\eta)q} \rangle = \frac{\langle \Phi_{\lambda}^{\eta q} \rangle}{\langle \Phi_{\lambda}^{(\eta)} \rangle^q} \approx \lambda^{K(\eta,q)} = \lambda^{\eta^{\alpha} K(q)} \quad (\text{Eq. 4.12})$$

Pour q préalablement fixé, le tracé de $\log(K(\eta, q))$ en fonction de $\log(\eta)$ donne donc une droite de pente α . En raison des limitations liées aux moments d'ordre élevé, cette courbe peut s'aplatir vers les η forts : ces derniers ne doivent donc pas être pris en compte.

Dans la suite du travail, nous présenterons l'application des techniques des paragraphes 4.3.2 et 4.3.3 principalement, mais il faut retenir que l'étude avec la DTM a été faite dans la plupart des cas à titre de contrôle et qu'elle fournit des estimations très cohérentes avec les autres techniques. Nous avons toutefois privilégié l'estimation directe des moments qui fournit une estimation plus directe et plus précise de C_1 .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les principales techniques d'analyse mono- et multifractale et montré des exemples d'application sur des cartes simulées. Ces techniques, pour la plupart assez classiques et bien documentées dans la littérature, ont fait l'objet d'implémentations en langage MATLAB, recouvrant les différents cas susceptibles de nous intéresser (simulations de séries temporelles, de cartes, voire de champs anisotropes et définis en espace et en temps). Comme nous allons le voir au chapitre suivant, l'application de ces programmes à des données de pluie haute résolution a fourni des résultats ayant donné lieu à plusieurs publications (Verrier et al., 2010 ; 2011 ; de Montera et al., 2010). Ces codes ont été réutilisés avec succès pour l'étude de la variabilité du phytoplancton océanique (de Montera et al., 2011).

5 Analyse multifractale de données de précipitations à haute résolution spatiale et temporelle

5.1 Introduction

Au cours de mon travail de thèse, j'ai eu l'opportunité d'appliquer les codes d'analyse multifractale que j'ai développés à divers jeux de données de précipitations : cartes radar Météo France, échantillon de cartes radar fournies par l'entreprise Novimet, cartes radar issues de la campagne d'Analyse Multidisciplinaire de la Mousson Africaine (AMMA), séries provenant d'un disdromètre. Dans cette thèse, je présente mes travaux relatifs aux deux derniers jeux de données qui ont fourni les résultats les plus significatifs. Les autres jeux de données se sont révélés partiellement inadaptés vis-à-vis des objectifs de l'étude : les cartes Météo France disponibles présentaient des valeurs discrétisées sur un nombre de niveaux trop réduit, ce qui s'est révélé problématique au cours de l'analyse (notamment en raison de la différenciation nécessaire pour les données de type flux multifractal intégré). D'autre part, les cartes fournies par Novimet couvraient une extension spatiale insuffisante pour mener une étude multi-échelle. Je présente donc dans ce chapitre une synthèse des travaux fondés sur les deux jeux de données retenus. Ces travaux sont plus détaillés dans les trois articles suivants, joints en annexe :

- l'article (Verrier et al., 2010) publié dans le *Journal of Hydrology*, porte sur l'étude des cartes radar collectées en 2006 à l'occasion de la campagne AMMA.
- l'article (Verrier et al., 2011) publié dans le *Journal of Geophysical Research*, porte sur l'étude des séries chronologiques de pluie provenant d'un disdromètre du LATMOS.
- l'article (de Montera et al., 2010), publié dans *Atmospheric Research* propose une interprétation physique et phénoménologique des résultats de l'article (Verrier et al., 2010).

Ces articles proposent une investigation relative à certaines des questions identifiées au chapitre 2 quant aux points non résolus actuellement par la littérature « multifractale » de la pluie. En particulier, les deux jeux de données sont susceptibles de fournir des informations

sur la variabilité des précipitations à petite échelle (sub-mésoéchelle voire à des échelles encore inférieures). En effet, les cartes radar étudiées couvrent une gamme d'échelle allant de 100 km à 400 m. De même, la série chronologique étudiée dans l'article a une résolution inégalée (15 s) dans la littérature « multifractale ». Dans les deux premiers articles mentionnés ci-dessus, nous consacrons une part importante du travail à montrer que la prise en compte ou le rejet des périodes non pluvieuses est susceptible d'affecter très fortement les résultats produits par les procédures d'analyse multifractale. Nous étudions quantitativement cette sensibilité au moyen de simulations et de calculs théoriques, et proposons des paramètres multifractals « corrigés » par rapport à ceux de la littérature.

Nous avons signalé au chapitre 2 que le lien entre les modèles multifractals et la physique de la pluie restait à clarifier. Nous avons étudié cette question dans l'article (de Montera et al., 2010), notamment en évoquant les analogies entre les comportements observés aux échelles étudiées et la théorie statistique des scalaires passifs advectés par un champ turbulent. Nous proposons un modèle phénoménologique potentiellement applicable à d'autres champs. J'ai d'ailleurs eu l'occasion de participer à une validation d'un modèle assez similaire sur des observations de chlorophylle représentatives de la variabilité du phytoplancton marin. Ce travail fait l'objet d'un autre article (de Montera et al., 2011), non développé dans la suite mais joint en annexe.

Avant de présenter les données (paragraphe 5.3) et les résultats (paragraphe 5.4-5.5), il est tout d'abord nécessaire de faire une revue des paramètres universels estimés pour la pluie par la littérature existante, cette revue appelant plusieurs commentaires pouvant nous guider dans notre étude.

5.2 Paramètres universels pour la pluie dans la littérature : état de l'art

Depuis presque une vingtaine d'années, un certain nombre d'études ont mis en évidence des propriétés multifractales universelles pour la pluie dans les domaines spatial et temporel. Ces propriétés sont résumées dans les Tableaux 5.1 et 5.2 ci-dessous.

Référence	Résolution d'observation	Echelles « scalantes »	α	C_1	H	β
Tessier et al., 1993	1 jour	64 jours - 1 jour	0,55	0,6	-	-
Ladoy et al., 1993	1 jour	64 jours - 1 jour	0,45	0,60	0.03*	0.37
Olsson, 1995	8 min	3 jours - 8 min	0,63	0,44	0.10*	0.66
Tessier et al., 1996	1 jour	15 jours - 1 jour	0,7	0,4	-0,1	0.4
de Lima & Grasman, 1999	1 jour	128 jours - 8 jours	0,66	0,30	-0.23*	0.17
		8 jours - 1 jour	0,48	0,51	-0.11*	0.17
	15 min	10,7 jours - 15 min	0,49	0,51	-0.02	-
Pathirana et al., 2003	1 h	1 jour - 1 h	1,35	0,34	-0.05	1.02
de Montera et al., 2009	~1 min	> 1 h	0,24	0,63	0	-
		1 h - 1 min (full rain)	1,69	0,13	0.53	-
Lovejoy et al., 2011	1h (proj. 2.5° x 2°)	> 3 mois	-	-	-0.42	0.08
		(2-10) jours - 1 h	-	0.37	0.17	0.76

Tableau 5.1 - Paramètres multifractals universels estimés sur des séries temporelles pluviométriques

* Note : dans ces publications, les auteurs n'ont pas estimé explicitement H (par exemple au moyen d'une fonction de structure), mais cette estimation peut se déduire à partir de la pente spectrale β qu'ils fournissent et des paramètres multifractals. On rappelle en effet que $\beta = 1 - K(2) + 2H$.

Référence	Données	Echelles scalantes	α	C_1	H
Tessier et al., 1993	Réfectivité radar	19 km - 75 m	1.4	0.12	0.32
Tessier et al., 1993	Accumulations journalières (pluviomètres)	150 km - global	1.35	0.16	0.2
Olsson & Niemczynowicz, 1996	Accumulations journalières	5 - 50 km	1.1 - 1.6	< 0.1	~ 0
Macor, 2007	Taux précipitants (radar)	1 - 256 km	0.84	0.44	0.63
Lovejoy et al., 2008	Réfectivités radar spatial TRMM	~ 20 km - global	1.5	0.63	0

Tableau 5.2. Paramètres multifractals pour la variabilité spatiale des précipitations

Nous reviendrons en détail ultérieurement sur les résultats de ces tableaux, dans le cadre d'une comparaison avec les paramètres estimés à partir des données considérées dans la présente étude. Nous pouvons néanmoins noter plusieurs caractéristiques des résultats de la littérature :

- dans le domaine temporel, la plupart des auteurs sont à peu près d'accord sur les paramètres multifractals ($\alpha \sim 0.5$, $C_1 \sim 0.5$, $H \sim 0$) bien qu'une incertitude subsiste sur les limites de validité du régime multifractal. Dans à peu près tous les cas, le processus précipitant paraît être conservatif en raison notamment d'une pente spectrale faible.
- la quasi-totalité des études ne peuvent fournir d'information sur la variabilité interne aux événements de pluie du fait d'une résolution d'observation trop limitée
- l'étude de de Montera et al. (2009) est en fait la principale exception : elle indique l'existence d'un régime multifractal aux fines échelles (sub-horaires) avec des paramètres différents. Cette étude a été menée à partir de mesures d'un disdromètre du laboratoire, le DBS, qui fournit des mesures à très haute résolution temporelle (15 s). Ces mesures ont été obtenues entre 2000 et 2006 dans plusieurs lieux

d'expérimentation représentatifs de climats tempérés et tropicaux.. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant car des données plus récentes obtenues avec le même instrument servent de base à la présente étude. Le principal apport de la nouvelle série par rapport à celles de cet article antérieur est la couverture temporelle de la série : nous analyserons deux années de données quasi-ininterrompues, tandis que de Montera et al. ont travaillé sur des séries beaucoup plus courtes (couvrant une période de deux mois chacune).

- dans le domaine spatial, les résultats semblent à première vue cohérents entre eux pour l'estimation de α et dans une moindre mesure pour celle de C_1 . Néanmoins, ces paramètres sont très différents de ceux obtenus dans le cas temporel, sans qu'aucune explication satisfaisante n'ait été proposée à ce jour.

5.3 Données

Les codes d'analyse multifractale décrits dans le chapitre 4 ont été appliqués à des données représentatives de la variabilité des précipitations. Les données considérées ont été obtenues avec des instruments de mesure développés au LATMOS (ex-CETP), et permettent d'étudier les propriétés de la pluie dans les domaines spatial et temporel.

Le premier jeu de données est un ensemble de cartes de réflectivité déduites des mesures faites à Djougou (Bénin) par un radar du CETP, le RONSARD (Fig. 5.1), à l'occasion de la campagne d'Analyse Multidisciplinaire de la Mousson Africaine (AMMA) en 2006 (voir, par exemple, Scialom et al., 2009). Ce radar météorologique travaille en bande C et présente entre autres caractéristiques une puissance crête très élevée (250 kW) et une résolution assez fine et un seuil de détection relativement bas pour un radar (environ 12 dBZ à 12 km). Les caractéristiques du radar sont rappelées dans le tableau 1 de l'article (Verrier et al., 2010) joint en annexe. Les données de réflectivité m'ont été obligeamment fournies par N. Viltard du LATMOS. Ces données ont déjà fait l'objet de prétraitements, notamment une correction des valeurs aberrantes et des échos fixes, ainsi que de l'atténuation. Les cartes du jeu de données sont des grilles 256 x 256 en coordonnées cartésiennes déduites des mesures en coordonnées sphériques par un algorithme d'analyse objective basé sur la méthode de Cressman (1959).

Les pixels des grilles sont des carrés de côté 400 m. Le radar a été placé dans une région concernée par le passage de violents orages de mousson durant l'été. La plupart de ces orages et les cellules de convection associée se déplacent habituellement dans une direction dominante fixe. Durant la période d'étude qui s'étend de juin à septembre 2006, il a été possible d'observer plusieurs événements orageux en détail, comme le montre la figure 5.2. Dans notre étude, nous ne retenons pas les points les plus lointains du radar qui sont susceptibles de présenter des erreurs. D'autre part, la couverture des zones les plus lointaines du radar est inégale comme le montre la présence de radiales sur la carte. Par conséquent, nous restreignons la zone d'étude à un carré de taille 64 x 64 pixels centré sur le radar.



Figure 5.1 Le radar RONSARD

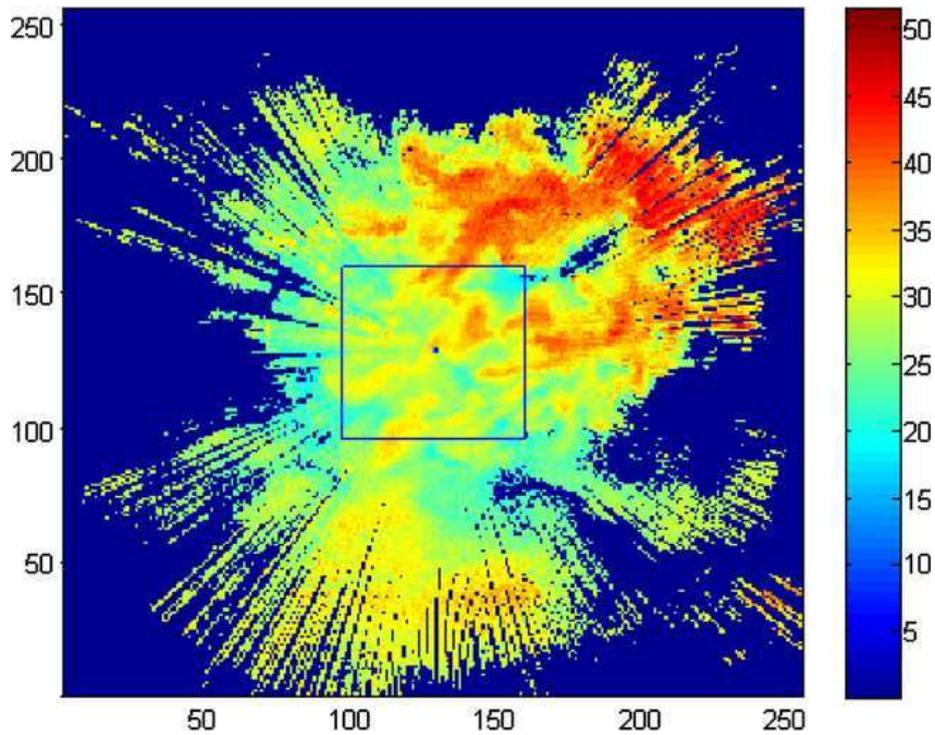


Figure 5.2 Exemple carte radar de réflectivité (en dBZ) fournie par le RONSARD (carré de 102.4 km de coté, largeur d'un pixel : 400 m)

Il est important de souligner que la mesure effectuée par le radar varie de façon non linéaire en fonction de l'intensité des précipitations. La raison en est que la réflectivité peut être vue comme la densité du carré des volumes des gouttes alors que l'intensité des précipitations est un moment du volume d'ordre 7/6 seulement. Mathématiquement, la réflectivité sur un volume est définie par :

$$Z \propto \int N(D) D^6 dD \quad (\text{Eq. 5.1})$$

où $N(D)dD$ est le nombre de gouttes dont le diamètre est compris entre D et $D+dD$ (par unité de volume).

Au contraire, le taux précipitant (ou intensité) est égal à la hauteur d'eau accumulée par unité de temps en un point au sol. Il s'agit donc de la densité du produit du volume des gouttes par leur vitesse verticale $V(D)$:

$$R \propto \int N(D)V(D)D^3 dD. \quad (\text{Eq. 5.2})$$

On doit noter qu'à cause du terme $N(D)$, la réflectivité et le taux précipitant sont des grandeurs physiques intensives, au contraire des accumulations de pluie qui sont extensives. Autrement dit, réflectivité et intensités sont moyennées, et non sommées, lorsque l'on passe à un volume plus grand.

La relation entre R et Z n'est donc pas évidente à priori et nécessite par conséquent des hypothèses sur les distributions de tailles de gouttes et sur leurs vitesses verticales. Pour ces dernières, on peut considérer la loi d'Atlas (Atlas et al., 1973) selon laquelle la vitesse verticale d'une goutte est proportionnelle à $D^{0.67}$.

Pour le terme $N(D)$, plusieurs formes existent dans la littérature. La plus courante (et la plus simple) est la loi de Marshall-Palmer (Marshall & Palmer, 1948), qui consiste en une exponentielle décroissante :

$$N(D) = N_0 \exp(-\Lambda D) \quad (\text{Eq. 5.3})$$

où N_0 et Λ sont des paramètres.

Sous ces hypothèses, on peut considérer qu'il existe une relation en loi puissance entre R et Z :

$$Z = aR^b \quad (\text{Eq. 5.4})$$

où les constantes a et b valent respectivement 1.8 et 200. De façon plus générale, la distribution de $N(D)$ est susceptible de dépendre du type de pluie (structures convectives ou stratiformes), voire même de l'événement, ce qui change les valeurs des coefficients. Ci-dessus, Z s'exprime en $\text{mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$ et R en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$.

Après discussion avec des membres de l'équipe RONSARD, les valeurs usuelles $a = 200$ et $b = 1.6$ ont été retenues. Il convient de noter qu'une relation en loi puissance telle que ci-dessus conserve l'existence de cascades multifractales mais ne conserve pas la fonction d'échelle des moments puisque la loi puissance induit un changement multiplicatif $q \rightarrow bq$ sur les ordres de moments. Par conséquent, si R est le produit d'une cascade multifractale universelle, Z l'est aussi et les deux grandeurs ont le même indice de multifractalité α . En revanche, ils n'ont pas le même C_1 (Lovejoy et al., 2008):

$$C_{1Z} = b^\alpha C_{1R} . \text{ (Eq. 5.5)}$$

Dans la section suivante, nous présenterons les résultats de l'analyse multifractale des cartes de taux précipitant obtenues en convertissant les données de Z cartésiennes 256×256 en R au moyen de la relation ci-dessus.

Le radar RONSARD nous fournit des informations sur la variabilité spatiale des précipitations. Nous ne l'utilisons pas pour caractériser la variabilité temporelle car les données disponibles ne concernaient que les périodes où un événement de pluie significatif avait été détecté dans la zone couverte par le radar. Le critère de significativité retenu étant un seuil assez haut, les données disponibles couvrent la période d'étude, c'est-à-dire l'été 2006, de façon trop intermittente pour permettre une étude de la variabilité temporelle.

Les propriétés de la pluie dans le domaine temporel ont par conséquent été étudiées au moyen d'un autre instrument du LATMOS, plus adapté à cette fin. Cet instrument est un spectropluviomètre bi-faisceaux (Figs. 5.3 et 5.4), décrit en détail par Delahaye et al. (2006). Dans la suite, nous utiliserons pour le désigner l'acronyme anglais DBS, pour Dual Beam Spectropluviometer. Cet instrument a fonctionné entre 2008 et 2010 sur le Site d'Instrumentation et de Recherche sur la Télédétection Atmosphérique (SIRTA) situé sur le campus de l'Ecole Polytechnique à Palaiseau.



Figure 5.3 L'instrument DBS (spectropluviomètre bi-faisceaux)

Le principe de mesure, dérivé d'un instrument antérieur (Optical spectropluviometer - OSP, cf. Hauser et al., 1984) est le suivant : une photodiode émet un faisceau infrarouge qui est transformé en un faisceau parallélépipédique épais de 2 mm sur la verticale au moyen d'une optique appropriée (voir Figure 5.4). Ce faisceau se propage dans la direction horizontale en fonction d'un capteur et couvre une large section horizontale. Lorsque une goutte traverse le faisceau, le signal reçu par le capteur est plus faible, et la variation de signal dépend directement du diamètre de la goutte. Le DBS présente la particularité remarquable d'avoir non pas un mais deux faisceaux parallèles, espacés de 2 mm. Cette solution présente deux avantages : tout d'abord il est plus simple de réduire le taux de fausses détections en s'assurant que la goutte intersecte les deux faisceaux l'un après l'autre (et dans le bon ordre !), et surtout en mesurant le temps écoulé entre les deux détections il est possible d'estimer directement la vitesse verticale de la goutte. Enfin, il doit être mentionné que les faisceaux du DBS couvrent chacun une surface horizontale de l'ordre de 100 cm², soit le double des surfaces couvertes par les instruments similaires existants.

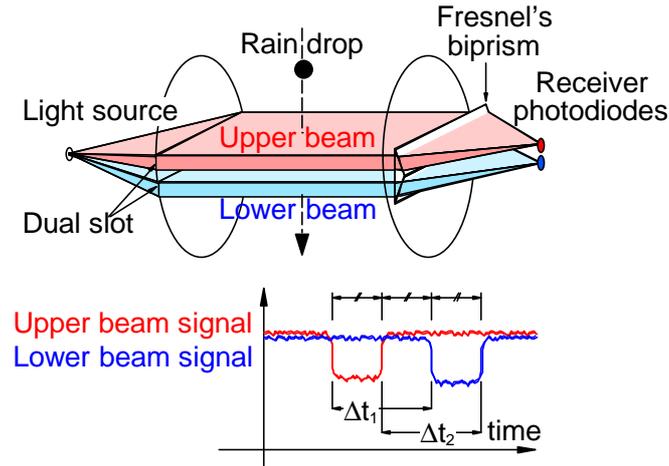


Figure 5.4 Schéma de fonctionnement du DBS

L'instrument DBS enregistre le temps d'arrivée des gouttes ainsi que leur diamètre et leur vitesse verticale. Ces informations permettent d'estimer le taux précipitant par un calcul similaire à la formule (Eq. 5.2). Néanmoins, l'instrument ne peut fournir des taux précipitants fiables si la fenêtre de moyennage temporel est trop réduite. Ainsi, l'analyse spectrale de séries DBS à 1 s met en évidence l'existence d'un aplatissement du spectre aux très fines résolutions (< 10 s), ce qui signifie qu'à ces résolutions le bruit devient dominant. Cet aplatissement est en net contraste avec le comportement « scalant » observé aux échelles immédiatement supérieures. On pourra par exemple considérer les spectres, estimés sur des données de résolution 1s, fournis dans l'étude de Montera et al. (2009).

La série considérée dans notre étude est une série ininterrompue de deux ans de taux précipitant s'étendant de Juillet 2008 à Juillet 2010. En prenant une période de deux ans, nous nous assurons que nos résultats statistiques d'ensemble ne sont pas biaisés par l'occurrence plus fréquente d'une saison donnée. Les données qui m'ont été fournies incluaient une correction des épisodes neigeux qui sont aisément distinguables par le DBS puisque les flocons ont un diamètre large et une vitesse lente. Outre des corrections manuelles pour les valeurs aberrantes et la saturation suivie du blocage abrupt de l'instrument dans quelques situations de pluie intense, j'ai appliqué un seuil à la série pour éviter de prendre en compte les erreurs (plus importantes) sur les intensités faibles. La valeur du seuil a été fixée à 0.1

mm.h⁻¹ à une résolution de 15 s. La résolution a été choisie en s'assurant que le spectre ne présente pas de plateau de bruit aux plus hautes résolutions temporelles. Cette résolution est plus fine que celle de la quasi-totalité des pluviomètres ou spectropluviomètres existants. De plus, les outils d'analyse multifractale n'ont jamais été appliqués jusqu'à ces résolutions (en revanche, Fabry (1996) a appliqué des outils d'analyse monofractale à des données de résolution encore plus fine). La seule exception est l'étude de de Montera et al. (2009) qui a analysé des séries plus courtes mesurées par le DBS quelques années antérieurement.

Il est nécessaire de noter que les deux jeux de données considérés contiennent des zéros. Les cartes radar étant enregistrées en fonction de la détection d'orages, les zéros sont soit situés en dehors de ces événements soit dus au seuil de mesure. Néanmoins, le radar RONSARD émet une puissance importante et a un seuil modéré du point de vue de la télédétection radar. Il permet d'enregistrer de larges zones de pluie lors des événements les plus forts. D'autre part, l'instrument DBS a fonctionné de façon ininterrompue pendant deux ans et observe en fait bien davantage de périodes sèches que de situations pluvieuses. Plus de 95% des points de la série (seuillée) sont en fait des zéros (cf. tableau 2 de l'article (Verrier et al., 2011)), ce qui laisse concevoir l'importance d'une prise en compte rigoureuse de l'effet de ces derniers sur les résultats d'analyse statistique. Dans la section suivante, l'étude comparée des propriétés multi-échelle des données avec et sans zéros est synthétisée à partir des résultats développés plus en détails dans les articles (Verrier et al., 2010, 2011).

5.4 Analyse multifractale des données de précipitations

5.4.1 Les régimes d'invariance d'échelle

La première étape de l'analyse consiste à identifier les différentes gammes d'invariance d'échelle des processus de pluie. En raison des rapports d'échelle couverts par les données, il est bien évident que ce sont les données DBS, pour lesquelles le rapport d'échelle est supérieur à 10⁶, qui vont fournir le plus d'informations. La Figure 5.5 représente le spectre de puissance de la série DBS, en coordonnées logarithmiques. Pour plus de clarté, le spectre a été

moyenné sur des intervalles de fréquences de même longueur en échelle logarithmique. Nous pouvons observer que le spectre est plat aux grandes échelles, supérieures à 1 semaine. Au contraire, on observe un régime de scaling aux petites échelles (de 30 minutes à 15 secondes) pour lesquels le spectre suit une loi puissance $E(\omega) \propto \omega^{-\beta}$, avec $\beta = 1.55 \pm 0.03$. Aux échelles intermédiaires, deux régimes peuvent être identifiés, s'étendant respectivement de 3 jours à 3 heures, et de 3 heures à 30 minutes. Les pentes spectrales associées sont respectivement $\beta = 0.41 \pm 0.06$ et $\beta = 1.09 \pm 0.07$.

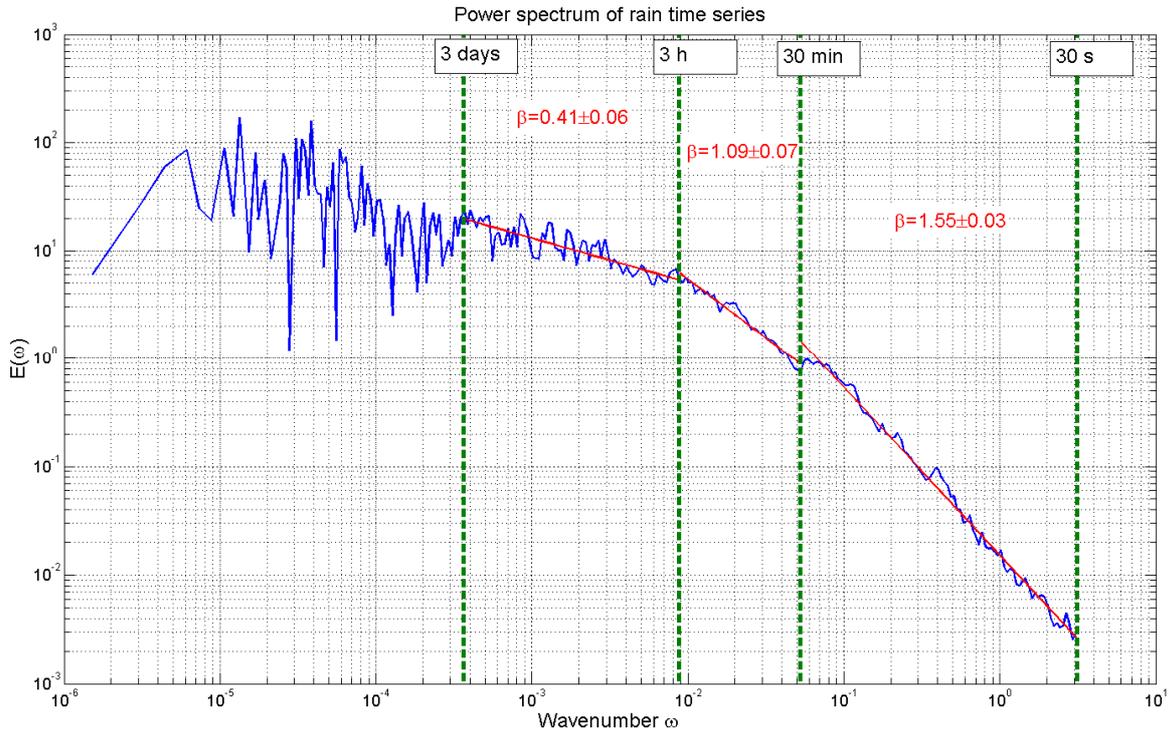


Fig. 5.5 Spectre de puissance de la série DBS en coordonnées logarithmiques. Les parties linéaires correspondent à des régimes de scaling.

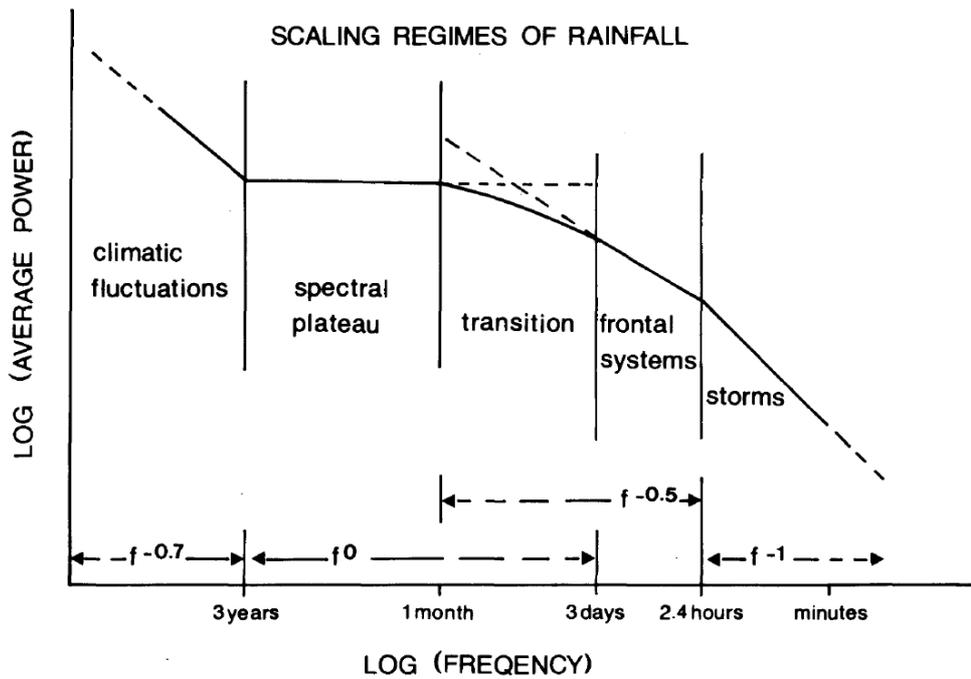


Fig. 5.6 Spectre classique des précipitations en climat tempéré selon la littérature existante. Figure reprise de (Fraedrich & Larnder, 1993)

Comme nous allons maintenant le détailler, ces résultats sont cohérents avec ceux de la littérature dans des gammes d'échelles comparables (généralement, $> 1h$). Le spectre de la Fig. 5.5 semble cohérent avec les régimes de scaling, représentés sur la Fig. 5.6, qui ont été mis en évidence par l'étude de Fraedrich & Larnder (1993), et confirmés par d'autres études (Fabry, 1996 ; Molini et al., 2009).

Comparons ces résultats à l'état de l'art existant, en commençant par les grandes échelles. L'existence d'un « plateau » spectral à des échelles supérieures à une ou plusieurs semaines correspond à un résultat bien connu de la littérature, démontré notamment par Fraedrich & Larnder (1993) et Fabry (1996). Ceci peut s'interpréter par la nécessité d'une rupture des propriétés de scaling des cascades turbulentes d'énergie sous-jacentes au-delà de l'échelle temporelle, notée ici T_{synop} , associée aux structures d'extension synoptique. La valeur exacte de cette échelle est comprise entre une semaine et un mois. Sur une base empirique, Fraedrich & Larnder (1993) ont proposé une valeur $T_{synop} = 1$ mois, tandis que Tessier et al. (1996) ont estimé une valeur de 16 jours. Enfin, Lovejoy & Schertzer (2010) ont montré par un calcul théorique que l'ordre de grandeur de cette échelle synoptique devait être de 10 jours. Ces auteurs ont cependant estimé, sur la base de données pluviométriques, une valeur empirique supérieure (42 jours). Vers les grandes échelles, le « plateau spectral » est susceptible de s'étendre jusqu'à des échelles de plusieurs années au-delà desquelles les facteurs climatiques peuvent faire apparaître un régime « scalant ». Ce dernier régime n'est pas visible sur la Figure 5.5 car les données du DBS ne couvrent pas une extension temporelle suffisante. Ceci est confirmé par les résultats de (Fraedrich & Larnder, 1993) qui ont montré, en utilisant des séries centenaires d'accumulations journalières, que le plateau spectral se terminait à des échelles de l'ordre de 3 années.

L'existence d'un régime de scaling à des échelles comprises entre quelques jours et quelques heures, associé à une pente spectrale β comprise entre 0.5 et 1 a été prouvée par (Fraedrich & Larnder, 1993) et interprétée par ces derniers comme la signature des fronts météorologiques en climat tempéré européen. Un tel régime a été observé par d'autres auteurs, en particulier Olsson (1995) et Molini et al. (2009) qui ont étudié plusieurs séries pluviométriques collectées respectivement en Suède et en Italie. Quel que soient le nombre et la position exacte des transitions, il apparaît dans tous les cas qu'à des échelles de plus de 2-3 heures, la pente spectrale soit toujours inférieure à 1. Comme mentionné dans le Tableau 5.1, la littérature conclut à des valeurs $H \leq 0$ à des échelles plus grandes supérieures à une à 2

heures. Ce résultat est cohérent avec les pentes spectrales de la Figure 5.5 (en effet, une pente spectrale $\beta < 1$ n'est possible que pour des multifractals non intégrés fractionnairement).

Le régime de petite échelle (< 30 min) est en revanche un résultat original par rapport à la plupart de ceux déjà publiés (résumés dans le Tableau 5.1). Il est caractérisé par un exposant spectral β nettement supérieur à 1 et par conséquent **indicateur d'un régime « fractionnairement intégré » à petite échelle**, ce qui n'a évidemment pas été observé dans la littérature basse résolution existante. En revanche, ce comportement non conservatif a bien été observé, avec le même instrument, par de Montera et al. (2009) aux échelles sub-horaires. La fonction de structure d'ordre 1 de la série DBS (cf. figure 4 de l'article (Verrier et al., 2011) joint en annexe) est en accord avec les résultats de de Montera et al. puisqu'elle fait apparaître une pente $H = 0.38$ à très petite échelle.

Dans le domaine spatial également, les spectres et fonctions de structures ont également été calculés pour les cartes du RONSARD (Fig. 5.7). Ils ne mettent pas en évidence de cassure nette dans la gamme d'échelles considérée, qui est de toute façon réduite (rapport d'échelle de 64). On trouve un comportement non conservatif avec un exposant spectral $\beta = 1.47$.

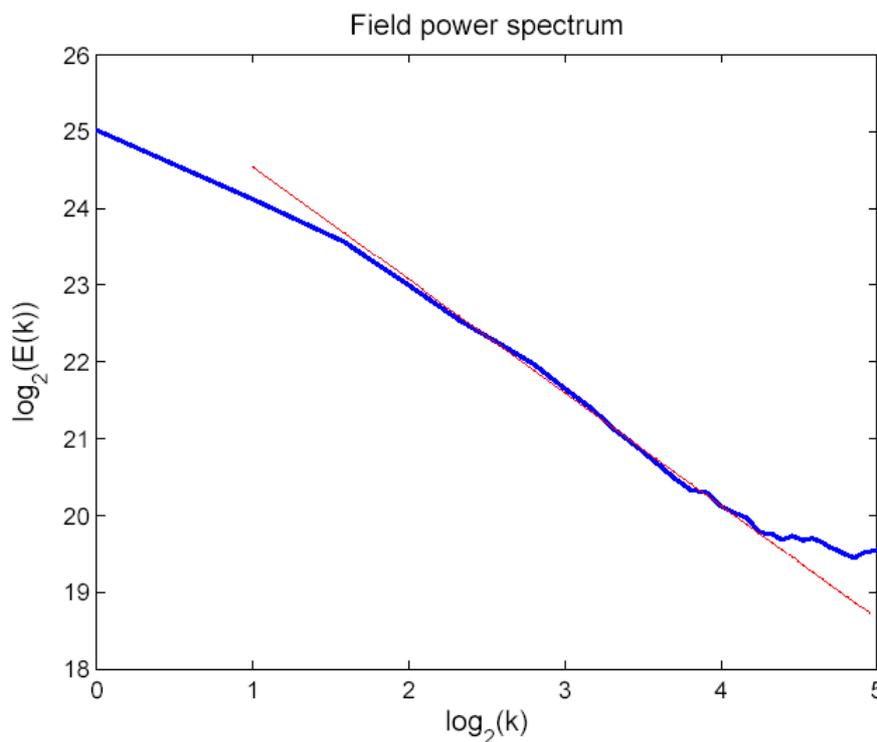


Figure 5.7 Spectre de puissance des 1372 cartes de mesures (25 km x 25 km, résolution : 400 m) effectuées par le RONSARD

Il est assez logique de trouver un comportement non conservatif à ces échelles spatiales (entre 25 km et 400 m) qui correspondent plus ou moins aux échelles temporelles sub-horaires considérées plus haut. Pour avoir un ordre de grandeur, on peut considérer que l'hypothèse de Taylor (1938) s'applique et considérer une vitesse d'advection de 20 km/h. L'échelle de 25 km correspond alors à une heure et quart, soit plus que la valeur de 30 min observée dans le cas de la série DBS. Néanmoins, on ne s'attend pas à pouvoir faire de conversion simple entre échelles spatiales et temporelles de façon à pouvoir faire une comparaison directe car les jeux de données spatial et temporel ne sont pas colocalisés (ils correspondent même à des climats différents !).

5.4.2 Sélection de sous-ensembles excluant les zéros de la pluie

Pour mettre en évidence les effets des zéros sur les résultats de l'analyse multifractale, j'ai appliqué les codes d'analyse non seulement sur les jeux de données définis au paragraphe 5.3, mais aussi à des sous-ensembles de ceux-ci. Les sous-ensembles sont choisis de façon à éliminer le plus possible de zéros tout en gardant le plus large rapport d'échelle possible. Dans le cas des cartes RONSARD, il n'y a aucune difficulté car un grand nombre de cartes étaient déjà centrées sur les orages tropicaux. Par conséquent, il a suffi de retenir les 100 cartes présentant le plus important pourcentage de valeurs au-dessus du seuil de mesure pour obtenir un ensemble de cartes présentant 97% de valeurs non nulles. Dans le cas temporel, un algorithme de sélection a en revanche du être défini. Cet algorithme parcourt séquentiellement la série complète DBS et détermine des événements de pluie mutuellement exclusifs. Ces événements doivent avoir pour durée minimale T_0 , ici fixée à un quart d'heure et contenir au moins 97.5% de taux précipitants non nuls (en fait supérieurs au seuil de mesure qui est de 0.1 mm/h). L'algorithme considère un instant de départ t . Si la portion de série commençant à t et de durée T_0 ne contient pas le pourcentage requis de valeurs non nulles on incrémente t , sinon on étend la portion considérée à une durée plus longue en prenant les valeurs suivantes tant que la condition sur la proportion de zéros est vérifiée. Lorsqu'elle ne l'est plus, on passe à un t ultérieur après avoir enregistré l'événement de pluie identifié dans un fichier (Fig. 5.8).

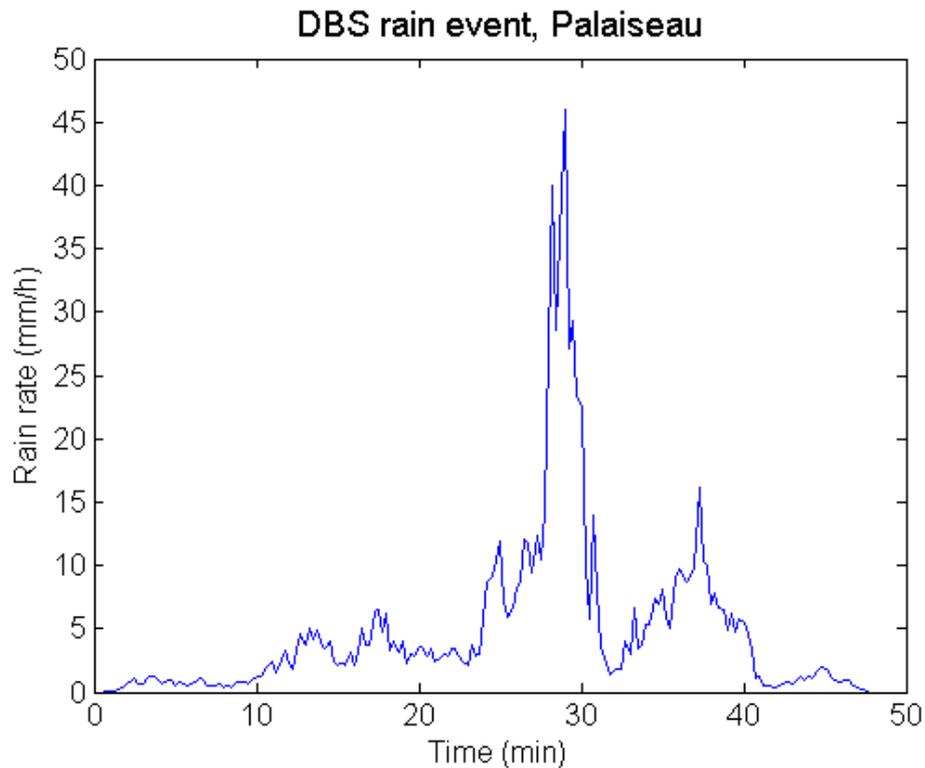


Figure 5.8 Exemple d'événement de pluie observé par le DBS

Pour faciliter l'analyse multifractale de ces sous-ensembles, il est nécessaire d'avoir des échantillons de la même taille, ce qui n'est pas le cas pour les événements de pluie extraits des données du spectropluviomètre par la procédure ci-dessus. Une sélection manuelle d'événements ou de portions d'événements parmi ceux identifiés précédemment a donc été effectuée de sorte à retenir quelques dizaines d'événements de durée constante. Cette durée est fixée a priori et doit vérifier les conditions suivantes pour faciliter l'analyse multifractale et l'interprétation des résultats :

- le nombre de points des sous-séries doit être en puissance de 2
- la durée des séries doit être cohérente par rapport aux gammes d'échelles identifiées précédemment par analyse spectrale.

Nous avons ainsi retenu 52 événements de pluie, de durée 32 minutes (soit $2^7 \times 15$ s).

5.4.3 Que vaut l'exposant H dans les zones de pluie ?

L'exposant H , s'il est non nul, rend compte d'une loi d'échelle sur les incréments du processus précipitant. Cette loi aurait alors une écriture en partie semblable à celles de Kolmogorov ou Corrsin-Obukhov et ferait intervenir un ou plusieurs flux multifractals sous-jacents. Les lois classiques de type KOC supposent un espace (isotrope et) homogène ce qui n'est pas le cas pour la pluie qui semble distribuée sur un support fractal (Hubert et Carbonnel, 1993, Lavergnat & Golé, 1998) (cf. également le paragraphe 6.1 et les références incluses). L'estimation de H à l'intérieur des zones et événements de pluie identifiés ci-dessus doit donc fournir une estimation plus correcte du point de vue de la physique. Le tracé des fonctions de structures des événements DBS et RONSARD sélectionnés est donné ci-dessous (Figs. 5.9- 5.12).

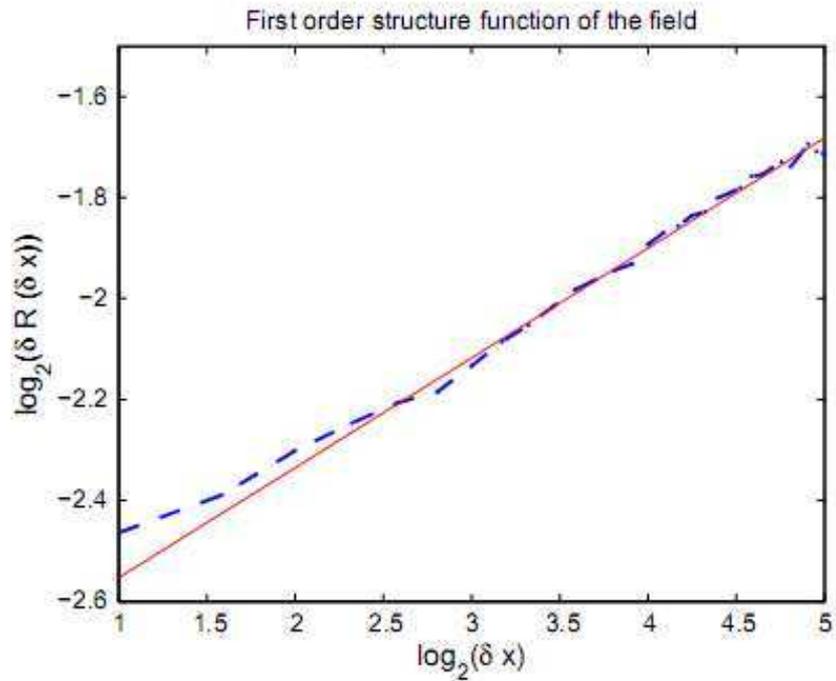


Figure 5.9 Fonction de structure d'ordre 1 des 1372 cartes RONSARD. La ligne rouge correspond à $H = 0.2$.

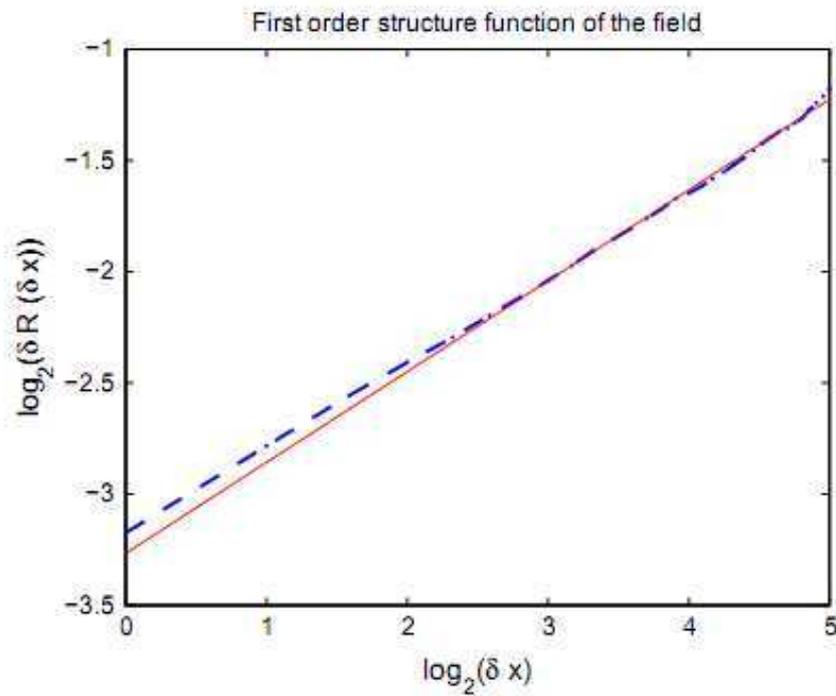


Figure 5.10 Fonction de structure d'ordre 1 des 100 cartes RONSARD sélectionnées (97% de pluie). La ligne rouge correspond à $H = 0.4$

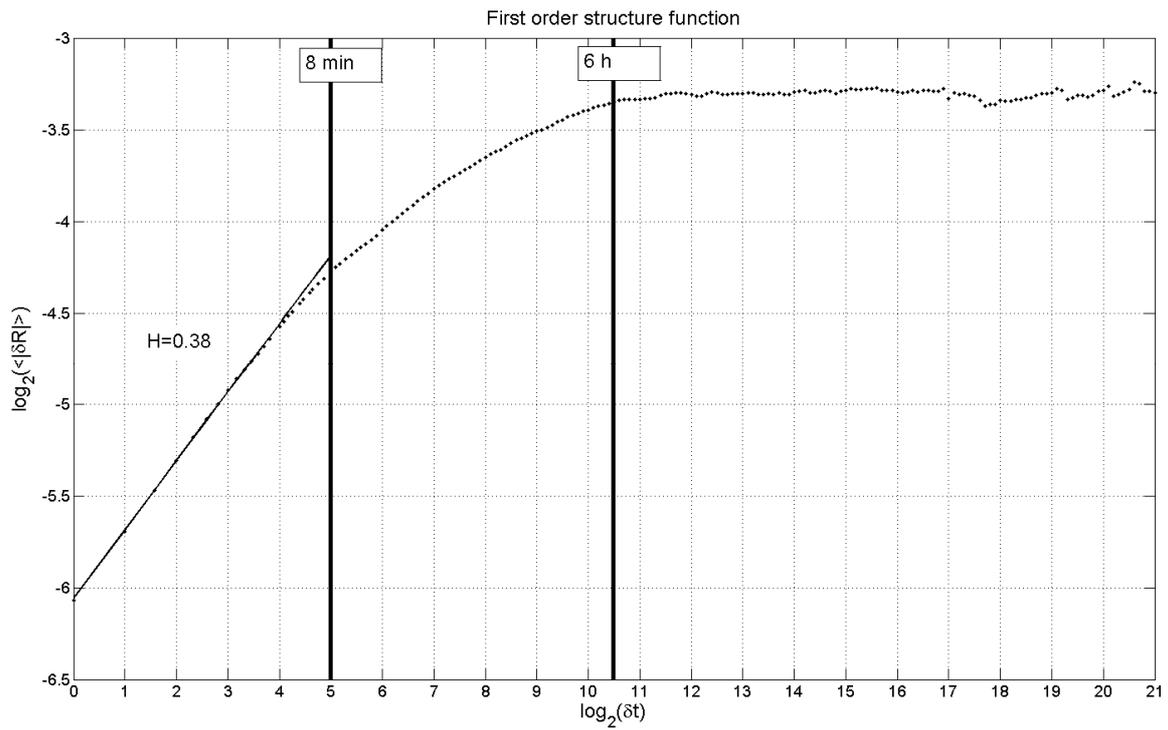


Figure 5.11 Fonction de structure d'ordre 1 de la série DBS complète

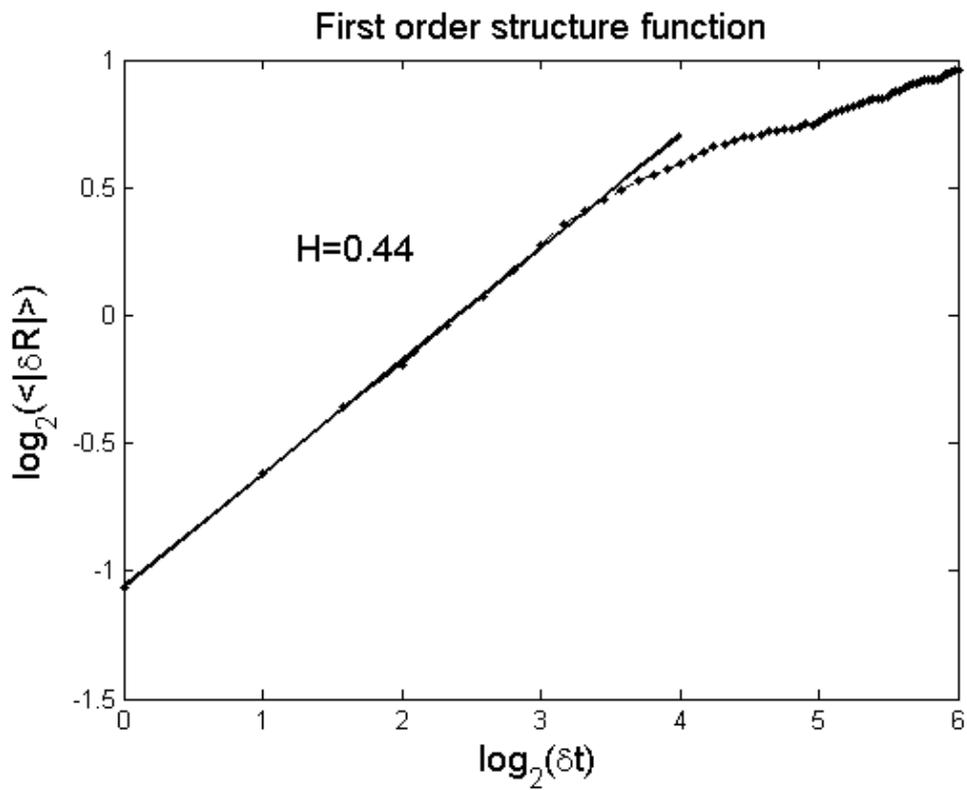


Figure 5.12 Fonction de structure des événements de pluie extraits de la série DBS (événements de 30 min environ, 97.5% de pluie)

Les résultats sont résumés dans le tableau (Tableau 5.3) suivant, qui rappelle aussi les résultats obtenus à partir du jeu de données complet avec les zéros :

Données	% zéros	H estimé
Série DBS (échelles > 6h)	95.9% à 15 s	≤ 0
Série DBS (échelles < 8 min)		0.38
Événements DBS (échelles < 16 minutes)	2.5%	0.44
Cartes RONSARD (échelles < 25 km)	60%	0.2
Cartes RONSARD sélectionnées (échelles < 25 km)	2.5%	0.4

Tableau 5.3 Paramètres H estimés par le calcul des fonctions de structure d'ordre 1 pour divers jeux de données

On observe que l'estimation de H sur des échantillons ne contenant pas de zéros donne une valeur plus élevée, proche de 0.4 aussi bien dans le domaine spatial que dans le domaine temporel. Il apparaît que la valeur trouvée en spatial est assez proche de la valeur attendue, soit $1/3$, dans le cadre de la théorie classique KOC à flux homogènes, c'est-à-dire sans prendre en compte d'éventuelles corrections d'intermittence multifractale. Nous reviendrons sur l'interprétation physique du paramètre H trouvé dans les zones de pluie au paragraphe 5.5, où nous montrerons que les valeurs trouvées sont cohérentes avec un modèle théorique basé sur des équations semblables à celles de Corrsin-Obukhov avec deux flux multifractals.

L'influence des zéros sur les résultats de l'estimation des fonctions de structure d'ordre 1 est évidente au vu du Tableau 5.3. Plus il y a de zéros, plus le H estimé est faible, et H peut même paraître égal (voire inférieur) à zéro aux grandes échelles. Cette dépendance a notamment été vérifiée par simulation dans mon article (Verrier et al., 2010) (voir aussi le chapitre 6). **La conclusion de la littérature selon laquelle les processus de pluie seraient caractérisés par $H = 0$ (ou faiblement négatif) dans le domaine temporel apparaît alors sujette à caution.** Il semble s'agir d'un simple artefact dû à la prise en compte des périodes sans pluie dans les statistiques. Au contraire, **la variabilité de la pluie à l'intérieur de son support semble bien suivre une loi localement non conservative, avec $H \sim 0.4$, donc assez analogue aux lois de Kolmogorov et Corrsin-Obukhov.** Si les zéros de la pluie peuvent ainsi conduire à des erreurs sur l'estimation d'une statistique d'ordre 1, nous pouvons penser que les statistiques des autres ordres seront aussi affectées. La dépendance des paramètres α et C_1 aux zéros de la pluie fait l'objet des paragraphes suivants.

5.4.4 Résultats de l'analyse multifractale avec et sans zéros (cas spatial)

Sachant que le champ de pluie mesuré par le RONSARD est non conservatif, nous appliquons les outils d'analyse multifractale non au champ lui-même mais à une « dérivée » du champ. Comme explicité au chapitre 4, il suffit d'estimer numériquement le laplacien absolu (au sens des différences finies) du champ à la résolution la plus fine pour obtenir une quantité Φ que l'on peut supposer conservative et moyenner de façon classique dans la procédure de dégradation de la résolution. Les détails de l'analyse multifractale des deux jeux de données RONSARD (1300 et 100 cartes) sont décrits dans l'article joint (Verrier et al., 2010). Dans les deux cas on observe un comportement multifractal des moments qui suivent bien une loi d'échelle entre les ordres 0 et 2 (Figs. 5.13-5.14)

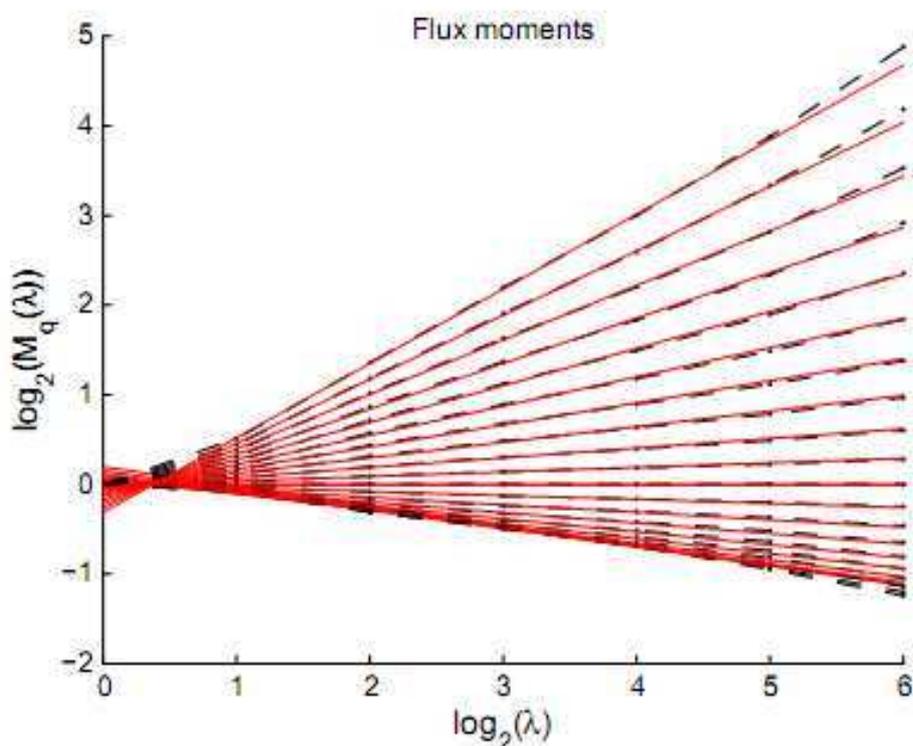


Figure 5.13 Moments empiriques des 1372 cartes RONSARD (ordres $0 < q < 2$)

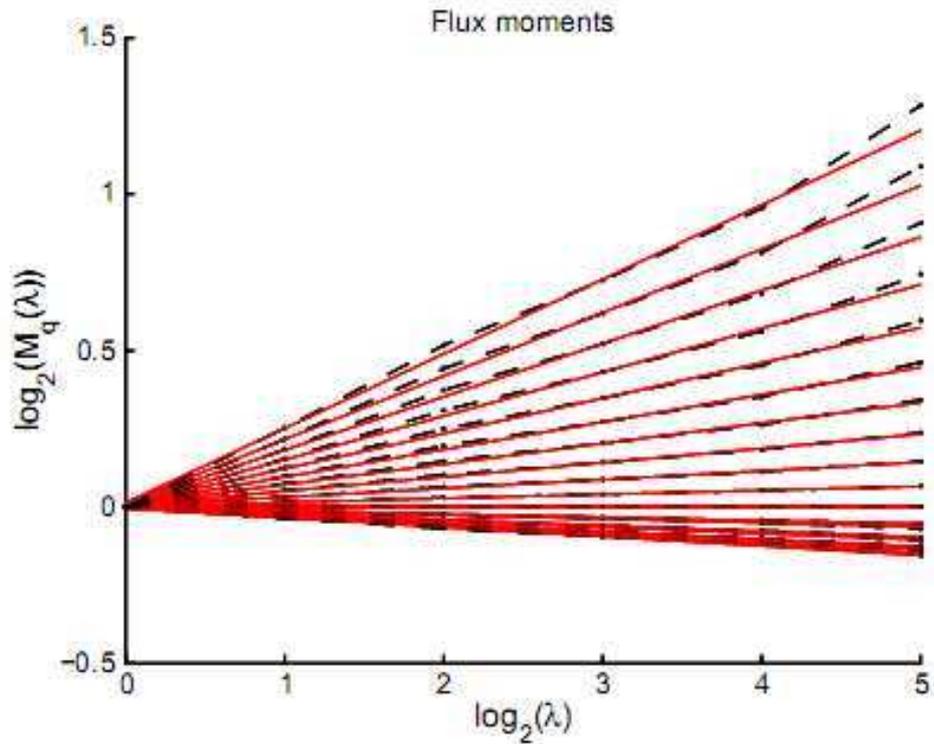


Figure 5.14 Moments empiriques des 100 cartes RONSARD sélectionnées (97% de pluie) , ordres $0 < q < 2$

Dans les deux cas, des propriétés multifractales sont observées pour les échelles comprises entre 25.6 km et 800 m et la fonction d'échelle des moments peut être décrite sous la forme universelle. L'ajustement à la forme $K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q)$ est fait en considérant les dérivées en 1, soit $K'(1) = C_1$ et $K''(1) = \alpha \cdot C_1$. En revanche, les paramètres estimés ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Ce résultat apparaît dans le Tableau 5.4 ci-dessous :

Données	% zéros	α	C_1	Echelles
1372 cartes RONSARD	60%	1.2	0.51	25.6 km – 800 m
100 cartes RONSARD	2.5%	1.8	0.12	25.6 km – 800 m

Tableau 5.4 Résultats de l'analyse multifractale des jeux de données RONSARD

Les paramètres α et C_1 estimés sont donc eux aussi très dépendants de la proportion de zéros dans les données. C_1 paraît augmenter en présence de davantage de zéros. Ceci s'explique aisément, C_1 étant un paramètre d'inhomogénéité qui, lorsqu'il est plus élevé, concentre la

variabilité contribuant à la moyenne et aux moments d'ordre supérieur dans quelques « montagnes » séparées par de vastes « plaines » de valeurs faibles. Inversement α ne peut que diminuer puisque de larges zones de valeur 0 rapprochent le champ du cas limite (monofractal) du β -modèle décrit au chapitre 2.

Il est intéressant de noter que les paramètres trouvés sont plus ou moins comparables à ceux estimés par Tessier et al. (1993) qui avait étudié des cartes *présélectionnées* provenant des mesures du radar de l'université de McGill. La présélection effectuée par Tessier et al. a sans doute contribué à exclure un grand nombre de zéros, définissant un jeu de données situé vraisemblablement dans une situation assez voisine du deuxième cas présenté dans le Tableau 5.4.

5.4.5 Résultats de l'analyse multifractale avec et sans zéros (cas temporel)

Ce paragraphe développe les résultats de l'analyse multifractale de la série DBS ainsi que des 52 événements de pluie extraits de la série. Nous avons vu précédemment que le comportement aux petites échelles était non conservatif, il est donc nécessaire d'estimer le flux conservatif sous-jacent Φ à partir d'une dérivation des données. Comme les données sont distribuées dans un espace de dimension (topologique) un, il suffit de prendre non le laplacien, mais le gradient absolu à la résolution la plus élevée (Lavallée et al., 1993 ; Tessier et al., 1993). Les moments sont calculés à divers ordres compris entre 0 et 3 pour toutes les échelles produits d'une puissance de 2 et de l'échelle d'observation. Les moments du gradient absolu de la série complète sont présentés sur la Figure 5.15, en coordonnées logarithmiques. Deux régimes d'invariance d'échelle multifractale, séparés par une cassure marquée, sont clairement visibles. Le régime de grande échelle s'étend de trois jours à trente minutes environ et les paramètres universels sont $\alpha = 0.31$ et $C_1 = 0.59$. Ces paramètres sont voisins de ceux généralement trouvés dans la littérature existante à ces échelles ($\alpha \sim 0.4 - 0.6$ et $C_1 \sim 0.4 - 0.6$, cf. Tableau 5.1). Un régime de petite échelle apparaît pour les résolutions comprises entre 16 minutes et la résolution de la série. Dans ce régime, les exposants $K(q)$ estimés semblent plus difficiles à ajuster au moyen de la forme universelle à deux paramètres, néanmoins les paramètres optimaux près de la moyenne ($q \approx 1$) sont $\alpha = 1.1$ et $C_1 = 0.17$.

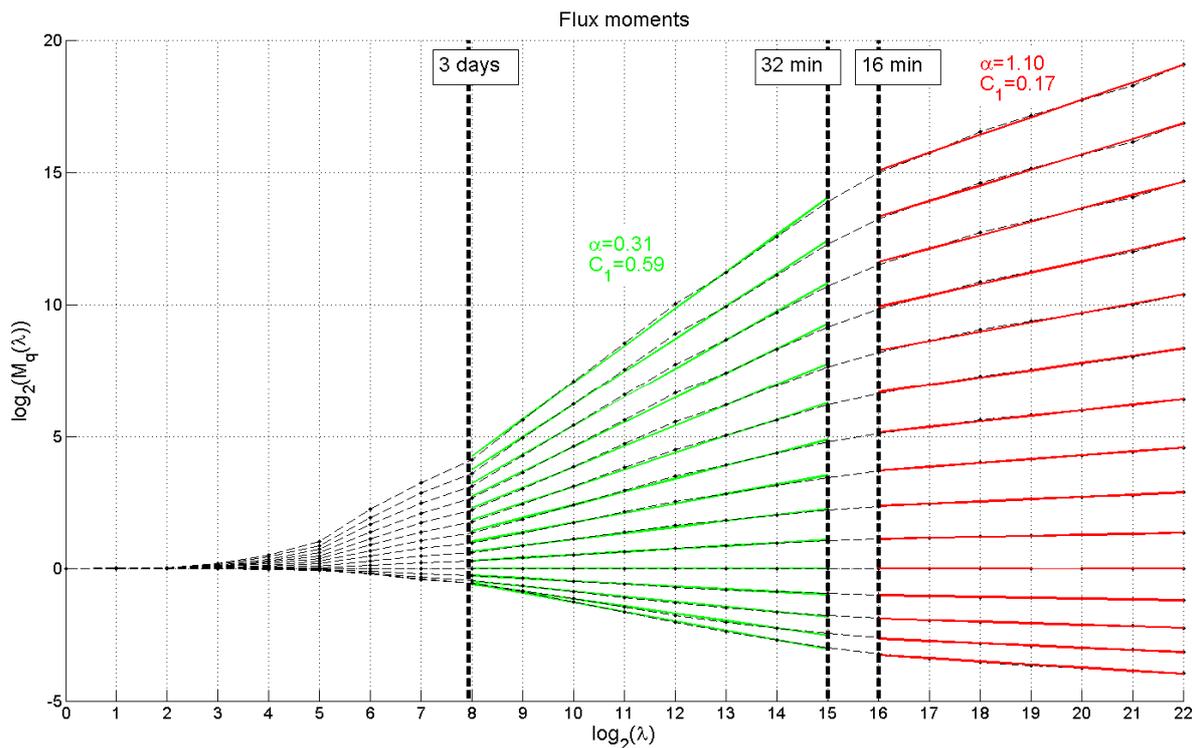


Figure 5.15 Moments statistiques d'ordres 0 à 3 de la série DBS complète obtenus pour diverses résolutions. Les parties linéaires correspondent aux régimes multifractals.

La Figure 5.16 présente les moments (moyennés sur tous les événements) des gradients absolus des événements (on rappelle que pour ceux-ci le pourcentage moyen d'occurrence de pluie est de 97.5%). Les ordres considérés sont toujours compris entre 0 et 3 et les échelles vont de 15 s à 32 min. A tous les ordres, les moments vérifient la loi puissance avec une très bonne précision et les exposants $K(q)$ peuvent être représentés par une forme universelle

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q), \text{ où } \alpha = 1.84 \text{ et } C_1 = 0.10 \text{ (cf. Figure 5.17).}$$

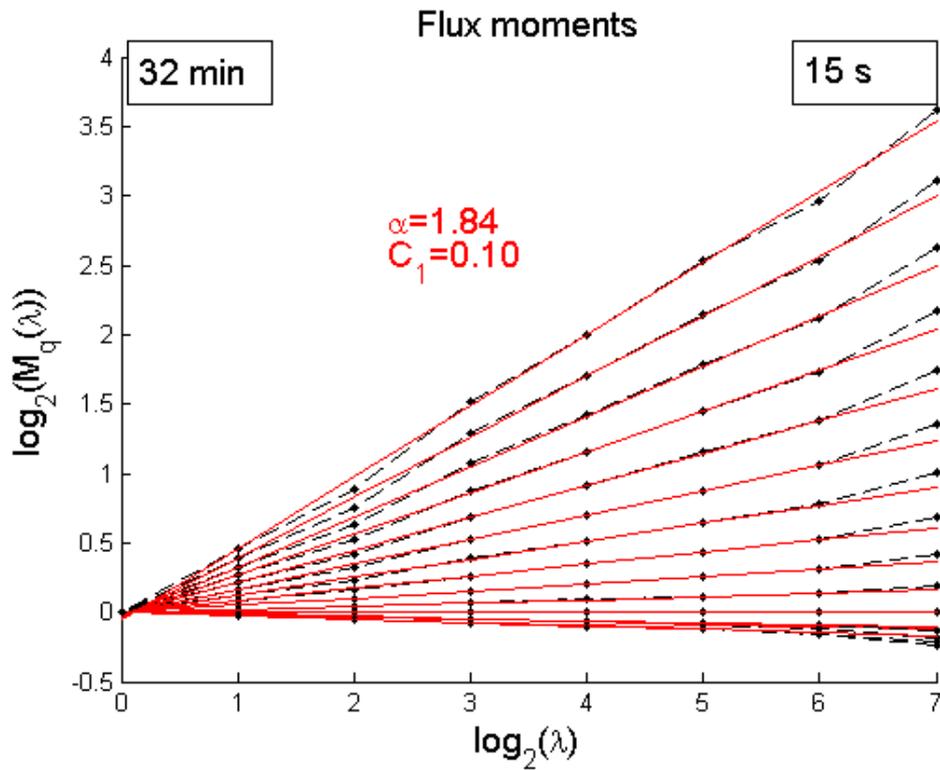


Figure 5.16 Moments empiriques des 52 événements de pluie DBS pour les ordres 0 à 3, à diverses résolutions. Un seul régime d'invariance d'échelle multifractale est observé.

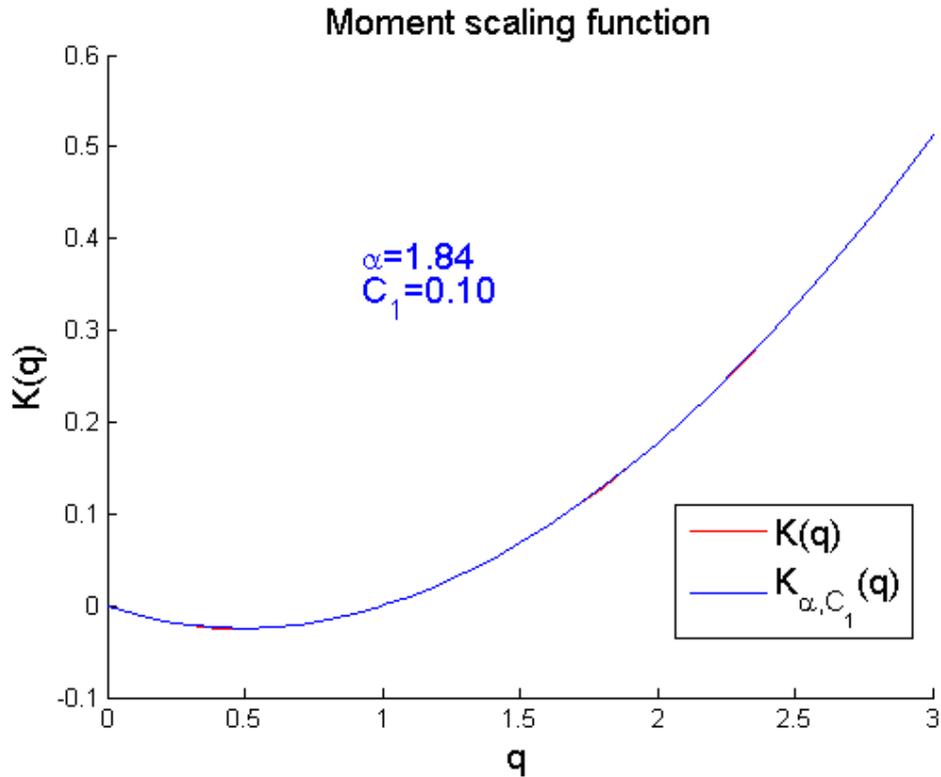


Figure 5.17 Fonction d'échelle des moments pour les événements DBS. La courbe expérimentale est en rouge et l'ajustement en bleu.

Ces valeurs sont très éloignées de celles estimées dans la quasi-totalité des travaux antérieurs, qui n'ont pas tenu compte des zéros de la pluie. La sensibilité des résultats de l'analyse multifractale aux zéros est donc très importante dans le cas temporel également, comme le prouve le Tableau 5.5 qui résume les résultats des analyses multifractales des données DBS.

Données	% zéros	Echelles	α	C_1
Série complète	95.9% à 15s	3 jours – 32 min	0.31	0.59
Série complète		16 min – 15 s	1.10	0.17
Evenements de pluie	2.5%	32 min – 15 s	1.84	0.10
Série complète (analyse pondérée)	Corrigés par pondération	1 semaine – 32 min	1.22	0.16

Tableau 5.5 Paramètres estimés par analyse multifractale des séries DBS

Les paramètres obtenus par analyse d'événements de pluie doivent être comparés avec ceux obtenus par de Montera et al. (2009) qui a analysé trente événements de pluie à des échelles sub-horaires, mesurés antérieurement par le même instrument. Les paramètres α et C_1 estimés par de Montera et al. semblaient peu dépendants du lieu, pour des valeurs de l'ordre de $\alpha = 1.7$ et $C_1 = 0.13$ qui sont assez cohérentes avec celles obtenues dans la présente étude. Nous sommes donc en mesure de confirmer les résultats obtenus par de Montera et al. quant à l'existence d'un régime multifractal spécifique à l'intérieur des événements de pluie sub-horaires, ce qui avait échappé aux autres études existantes à ce jour. L'étude des propriétés statistiques conditionnées par l'appartenance au support de pluie permet d'estimer des paramètres multifractals représentatifs de la variabilité propre de la pluie et non de son processus d'occurrence. En ce sens, les estimations faites en excluant les zéros peuvent être vues comme des paramètres corrigés. Nous y reviendrons dans le chapitre 6 où nous montrerons théoriquement et par simulation comment l'ajout des zéros, et plus précisément la construction d'un support fractal peut biaiser les résultats d'analyse multifractale de façon quantitativement similaire aux résultats présentés ci-dessus.

5.4.6 Correction empirique de l'effet des zéros par analyse pondérée

Il subsiste néanmoins une difficulté que nous allons maintenant aborder. En effet, l'étude de sections exclusivement pluvieuses est limitée par sa gamme d'échelle qui est intrinsèquement

réduite par l'extension maximale des structures météorologiques précipitantes. Aux résolutions très grossières, le processus de pluie contiendra nécessairement des zéros et les propriétés multifractales intrinsèques de la variabilité risquent de rester masquées. On peut supposer (et nous le vérifierons au chapitre 6) qu'à ces échelles le support de la pluie est fractal, par conséquent les cascades multiplicatives sous-jacentes à la pluie se développeront dans un espace de dimension non entière et leurs propriétés ne seront pas correctement reconstruites par une analyse multifractale classique (qui présuppose un espace de dimension entière). Pour avoir une caractérisation plus correcte des propriétés multifractales de la variabilité de la pluie aux échelles plus grandes que 30 minutes, nous pouvons choisir d'appliquer un algorithme modifié d'analyse multifractale en suivant un schéma initialement proposé par Gires et al. (2009). L'algorithme est construit de façon à surpondérer les valeurs non nulles de la pluie. Deux modifications principales interviennent dans cet algorithme :

(a) le processus de reconstruction du flux multifractal Φ à toutes les échelles est basé sur une procédure de moyennage qui ne prend en compte que les pixels non nuls à la résolution la plus élevée disponible,

(b) les moments à une résolution λ sont estimés par une moyenne pondérée des pixels de résolution λ reconstruits suivant (a) (cette moyenne est classiquement faite sur chaque échantillon puis moyennée sur tous les échantillons). Le poids d'un pixel de résolution λ est d'autant plus important que ce pixel contient moins de zéros à très haute résolution.

Bien évidemment, les conditions (a) et (b) sont combinées de façon à s'assurer de la conservation de la moyenne du flux reconstruit Φ .

Nous avons alors appliqué cet algorithme au gradient absolu des séries de pluie préalablement moyennées sur un pas de temps de 32 minutes (ce moyennage est nécessaire car le support est imparfaitement fractal aux échelles plus petites comme nous le verrons au paragraphe 6.1). Les moments, estimés pour des ordres allant de 0 à 3, sont présentés sur la Figure 5.18. Nous observons un régime multifractal dans la gamme d'échelles une semaine – 32 minutes avec pour paramètres $\alpha = 1.22$ et $C_1 = 0.16$. L'algorithme compense en partie l'effet des zéros puisque α et C_1 augmentent et diminuent respectivement par rapport aux valeurs trouvées à grande échelle en analyse directe (Figure 5.11). Bien que cet algorithme ne soit pas supposé fournir un résultat exact, il semble indiquer qu'une fois les zéros exclus, la transition à

l'échelle de la demi-heure entre les comportements grande et petite échelle, visible sur la Figure 5.6, doit être fortement atténuée voire disparaître. La possibilité d'un unique régime multifractal sous-jacent pour des échelles allant de la semaine à moins d'une minute ne saurait être exclue. Enfin, nous pouvons noter que les lignes de régression linéaire sur la figure 5.18 semblent s'intersecter aux alentours de $\log_2(\lambda) = 4$ soit une échelle temporelle d'un mois et demi. Cette estimation de l'« échelle externe » du processus est cohérente avec l'estimation empirique de 42 jours déduite par Lovejoy & Schertzer (2010) de l'étude de données pluviométriques.

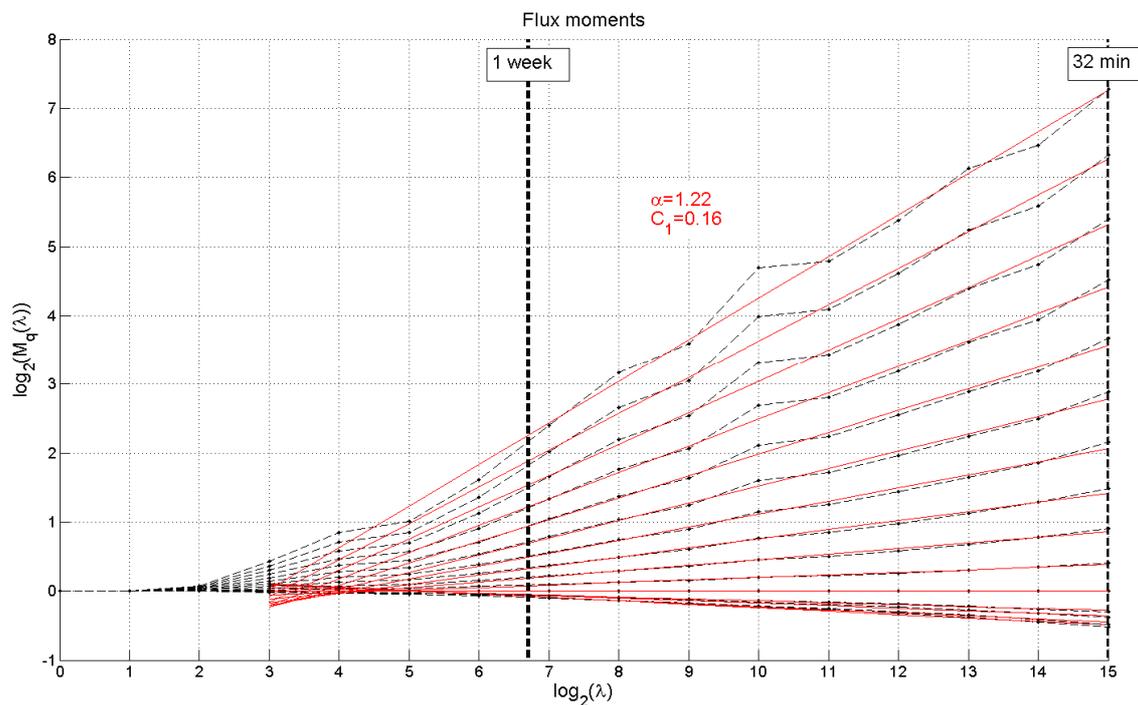


Figure 5.18 Moments empiriques de la série DBS complète pondérés par les zéros

5.5 Bilan sur l'effet des zéros de la pluie et interprétation des paramètres α et C_1 « corrigés »

Comme nous avons pu le voir, les résultats de l'analyse multifractale sont très sensibles à la proportion de zéros retenus dans les données. En excluant les zéros, nous avons pu estimer à la sub-mésoéchelle des paramètres « corrigés » représentatifs de la seule variabilité des taux

précipitants, par opposition à l'alternance entre la pluie et l'absence de pluie. Ces paramètres, en accord avec ceux obtenus suivant une approche similaire dans une étude par de Montera et al. (2009), sont remarquablement les mêmes dans des lieux et climats différents, et dans les domaines spatial et temporel. Les valeurs à retenir sont donc $\alpha = 1.8$ et $C_1 = 0.1$ environ. Si l'on considère en revanche des données avec de nombreux zéros, l'estimation des paramètres multifractals sera biaisée car d'une part le processus de reconstruction de la cascade moyennera incorrectement des zéros et des valeurs de pluie et d'autre part les moments empiriques vont inclure des zéros de grande échelle qui ne sont absolument pas représentatifs de la variabilité des précipitations à petite échelle. Le schéma multiplicatif sous-jacent au modèle multifractal ne pouvant produire ces zéros, l'analyse multifractale va alors chercher les « moins mauvais » paramètres pour les représenter. Ceci conduit nécessairement à une sous-estimation de α et à une surestimation de C_1 . Nous le vérifierons par des simulations et des calculs théoriques au chapitre 6.

Au contraire, les paramètres estimés à l'intérieur des événements de pluie présentent des propriétés qui attestent de leur consistance. Tout d'abord, ils sont déduits dans le cadre d'une cascade non conservative avec un exposant $H = 0.4$ ce qui suggère un lien avec la théorie des scalaires passifs. Comme la théorie KOC et ses variantes constituent la base physique de l'utilisation d'un modèle multifractal pour la pluie, il est rassurant de trouver un exposant H conforme aux prédictions de cette théorie (cf. aussi le paragraphe suivant). Ceci n'est pas le cas dans la littérature existante où, dans le domaine temporel en particulier, H a presque toujours été considéré égal à 0. D'autre part, l'analyse « hors zéros » fournit des paramètres α et C_1 cohérents en espace et en temps ce qui est entièrement nouveau par rapport aux résultats antérieurs qui donnaient $\alpha \approx 0.4 - 0.6$ et $C_1 = 0.4 - 0.6$ en temps et $\alpha \approx 1.4$ et $C_1 = 0.1 - 0.2$ en espace (voir aussi Tableaux 5.1 et 5.2). Cette incohérence entre la multifractalité spatiale et temporelle n'avait pas été expliquée jusqu'à présent et était ennuyeuse à plus d'un titre. En effet, aucun modèle de passage entre l'espace et le temps, de l'hypothèse de Taylor (1938) à une anisotropie spatio-temporelle « scalante » (Tessier et al., 1993) ne peut expliquer un tel changement dans les paramètres. Une incohérence forte entre les α spatial et temporel interdit a priori l'utilisation d'un modèle multifractal spatio-temporel anisotrope (par exemple, le paramètre α doit être conservé sur des sections orthogonales pour une anisotropie de type auto-affine). D'autre part, il est non physique d'avoir $\alpha > 1$ dans un cas et $\alpha < 1$ dans l'autre car le signe de $\alpha - 1$ définit si le processus est à singularités bornées

supérieurement ou non. Il paraît difficilement concevable que les valeurs extrêmes que peut produire le processus (en dehors des limitations liées intrinsèquement aux ordres de moments élevés : divergence, limitations liées à la taille des échantillons...) soient définies par deux réalités physiques différentes en espace et en temps. Au contraire, les paramètres « corrigés » semblent ouvrir la voie à une modélisation multifractale spatio-temporelle cohérente des précipitations. On peut enfin noter que l'estimation $\alpha \approx 1.8$ est indicatrice de champs et processus à singularités non bornées, ce que le modèle universel reproduit sans difficulté à l'inverse de certains de ses principaux concurrents. Notamment, le modèle log-Poisson classique (She & Levêque, 1994 ; Dubrulle, 1994) est à singularités bornées et ne peut reproduire les caractéristiques ici décrites.

Les résultats de littérature pourraient également conduire à cette question : s'il y a biais à cause des zéros, pourquoi ce biais agit-il plus dans le domaine spatial que dans le domaine temporel ? En fait, le biais est très important dans le cas temporel car les auteurs considèrent de longues séries de données avec de nombreux zéros (souvent plus de 95% des points). Au contraire, dans le cas des analyses spatiales, les auteurs ont tendance à présélectionner des cartes associées à des orages, comme le détaillent Tessier et al. (1993) qui se sont intéressés à une configuration orageuse précise. Comme ces auteurs travaillent nécessairement dans la zone couverte par le radar, leur démarche est très similaire à la démarche suivie dans notre étude. La principale exception vient de l'étude des radars spatiaux de la mission TRMM (Lovejoy et al., 2008) qui fournissent des séries de données spatiales couvrant des résolutions allant jusqu'aux échelles synoptiques. Pour ces données, les zéros représentent l'écrasante majorité des mesures, et ce d'autant plus que le seuil de détection du radar spatial est très haut (20 dBZ environ soit deux fois la moyenne des données !). Et les auteurs ont effectivement trouvé un exposant $C_1 = 0.63$ sans rapport avec les résultats de Tessier et al., ce qui est parfaitement logique puisque la proportion de zéros n'est pas du tout la même. En revanche, il est intéressant de constater que les auteurs ont observé que l'estimation de α par les méthodes classiques était soumise à un biais très important : en effet, leur estimation $K''(1) = 0.26$ les aurait conduits à $\alpha = 0.4$. Lovejoy et al. ont montré par simulations que la valeur correcte était plus vraisemblablement proche de 1.5. Ainsi, par une approche différente, ces auteurs ont obtenus des résultats assez cohérents avec les nôtres.

5.6 Interprétation en lien avec les scalaires passifs

5.6.1 Introduction

Suivant les travaux de Lovejoy & Schertzer (2008) (cf. paragraphe 2.1.5 de ce travail), il est possible d'écrire que la concentration (densité) ρ d'eau liquide suit la loi de Corrsin-Obukhov pour les échelles $l > l_c$, en fonction des flux de variance de scalaire et d'énergie :

$$\Delta\rho_l^d = \chi_l^{1/2} \varepsilon_l^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 5.6})$$

L'étude proposée par Lovejoy & Schertzer (2008) reste contrainte par une limitation importante: les auteurs n'ont pu vérifier expérimentalement leurs résultats théoriques que dans une gamme d'échelle réduite limitée par le volume considéré, soit 10 m^3 . Nous pouvons néanmoins conjecturer qu'une loi d'échelle telle que (Eq. 5.6) reste valable à des échelles beaucoup plus larges sous réserve que les processus de génération de pluie sont eux aussi « scalants » :

$$\Delta\rho_l^d = \Phi_l^{1/2} \varepsilon_l^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 5.7})$$

D'autre part, une hypothèse implicite dans les travaux de Lovejoy & Schertzer (2008) est qu'il pleuve dans tout le domaine d'étude (en effet les lois des scalaires passifs présupposent que le scalaire advecté soit présent dans tout le domaine). Autrement dit, les équations ci-dessus sont valables à l'intérieur des zones de pluie. Dans ce cas, des propriétés multifractales vont contraindre la variabilité de la densité d'eau liquide à l'intérieur des nuages. Nous allons maintenant étudier à quelles conditions des lois similaires peuvent apparaître pour le taux précipitant.

5.6.2 Proposition d'une approche basée sur KOC pour la variabilité spatiale des précipitations

Durant ma thèse, j'ai eu l'opportunité de réaliser un travail en collaboration avec L. de Montera, qui a abouti à la publication d'un article (de Montera et al., 2010) joint en annexe de cette thèse. Ce travail visait à l'interprétation phénoménologique des paramètres multifractals

obtenus au cours des études détaillées précédemment dans ce chapitre. L'idée directrice du travail était de proposer et de tester une loi statistique semblable à celle de l'équation (Eq. 5.7), mais cette fois pour le taux précipitant. Cette loi statistique caractérise le taux précipitant à l'intérieur des zones de pluie et est valable moyennant plusieurs hypothèses qui assurent le passage des concentrations d'eau liquide aux taux précipitant. Sa démonstration repose sur l'estimation de la contribution d'une classe de gouttes de diamètre D au taux précipitant :

$$R(D) \propto V(D)\rho(D) \quad (\text{Eq. 5.8})$$

où $V(D)$ est la vitesse de chute des gouttes de diamètre D .

Cette vitesse peut s'exprimer asymptotiquement comme la somme d'une vitesse de relaxation (vitesse limite, notée V_R , d'une goutte de diamètre D , mise en mouvement par l'attraction gravitationnelle terrestre et en l'absence de vent) et de la composante verticale du vent, notée w (Lovejoy et al., 2008) :

$$V(D) = V_R(D) + w \quad (\text{Eq. 5.9})$$

Dans l'article (de Montera et al., 2010), nous proposons de négliger l'influence de la vitesse verticale du vent. Cette hypothèse reste en grande partie à vérifier car les statistiques de cette vitesse sont à l'heure actuelle mal connues (il semblerait néanmoins que la propriété de conservativité de la moyenne des incréments soit vérifiée, $H_w \sim 0$). Nous montrons néanmoins qu'elle devrait être valide si les trois conditions suivantes sont vérifiées, les barres indiquant les valeurs moyennes des grandeurs : (i) $V_R \gg \bar{w}$, (ii) $V_R \gg \Delta\bar{w}$, (iii) $\Delta\rho / \rho \gg \Delta\bar{w} / V_R$. Ces conditions et leur validité sont commentées plus en détail dans l'article de Montera et al. (2010).

Nous obtenons ainsi une loi d'échelle :

$$\Delta R_l(D) = V_R(D) \Phi_l(D)^{1/2} \varepsilon_l^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 5.10})$$

qu'il est possible de sommer sur tous les diamètres. On peut en outre supposer que le flux de variance de concentration Φ est (statistiquement) indépendant des diamètres des gouttes. Par conséquent, on peut sortir le flux de l'intégrale sur les diamètres :

$$\int V_R(D)\Phi_l(D)^{1/2}dD = \Phi_l^{1/2} \int V_R(D)dD \quad (\text{Eq. 5.15})$$

où le facteur $\int V_R(D)dD$ est indépendant de l'échelle.

Sous ces hypothèses, les incréments du taux précipitant suivent une loi de type Corrsin-Obukhov dans les zones de pluie :

$$\Delta R_l^d = \text{const} \times \Phi_l^{1/2} \varepsilon_l^{-1/6} l^{1/3} \quad (\text{Eq. 5.11})$$

Le modèle de pluie ci-dessus contient deux flux multifractals sous-jacents. Le modèle phénoménologique FIF validé sur les données constitue une version simplifiée, à un flux multifractal, de ce modèle. Néanmoins nous allons maintenant voir qu'ils peuvent avoir des propriétés statistiques similaires.

Comme dans le cas des scalaires passifs, il n'est pas possible de déduire immédiatement les statistiques des incréments de la loi d'échelle, par exemple les fonctions de structure $\langle \Delta R_l^q \rangle$, car les deux flux multifractals sous-jacents à la loi, Φ et ε , ne sont pas indépendants. Schmitt et al. (1996) ont proposé une hypothèse plus réaliste qui consiste à supposer l'indépendance entre les incréments de vitesse et de concentration. On obtient alors la relation :

$$\langle \Delta R_l^q \rangle \propto l^{\zeta(q)} = l^{q/3 + K_\varepsilon(q/6) - K_\Phi(q/2)} \quad (\text{Eq. 5.12})$$

La fonction $\zeta(q)$ obtenue par cette hypothèse est différente de celle que l'on aurait trouvé en supposant l'indépendance des flux, qui aurait fait apparaître un terme (indéfini) en $K_\varepsilon(-1/3)$.

La propriété (Eq. 5.12) est vérifiée par un champ FIF de paramètres α , C_1 , et H , et de fonction d'échelle $K(q)$: on a alors $\zeta_{FIF}(q) = qH - K(q)$

En identifiant les deux expressions de $\zeta(q)$, nous obtenons :

$$qH - K(q) = q(1/3 + K_\varepsilon(1/6) - K_\Phi(1/2)) + (1/6)^{\alpha_\varepsilon} K_\varepsilon(q) - (1/2)^{\alpha_\Phi} K_\Phi(q) \quad (\text{Eq. 5.13})$$

où l'on a utilisé la propriété des fonctions d'échelles universelles :

$$K_X(aq) = a^{\alpha_X} K_X(q) + qK_X(a) \quad (\text{Eq. 5.14})$$

Ces deux expressions comportent chacune un terme monofractal (linéaire) et un terme multifractal (non linéaire et s'annulant en 1). En identifiant tout d'abord le terme monofractal, nous pouvons donc prédire la valeur de H que devrait donner l'analyse multifractale à l'intérieur des zones de pluie pour peu que l'on connaisse les exposants multifractals de la cascade conservative Φ (rappelons que ceux de ε sont déjà connus par la littérature - cf. paragraphe 5.4.1). Ces exposants ne sont pas donnés dans la littérature et nous proposons de les déduire des propriétés de la cascade conservative sous-jacente aux mesures du RONSARD. Puis, en identifiant le terme multifractal, nous constatons que l'analyse multifractale de la pluie doit donner une fonction d'échelle des moments qui est la somme des termes $(1/6)^{\alpha_\varepsilon} K_\varepsilon(q)$ et $-(1/2)^{\alpha_\Phi} K_\Phi(q)$. Faisons l'hypothèse que ce soit le second terme qui soit dominant.

Nous obtenons l'équation :

$$K(q) \approx (1/2)^{\alpha_\Phi} K_\Phi(q) \quad (\text{Eq. 5.15})$$

qui donne une approximation des paramètres de la cascade (Φ) :

$$\begin{cases} \alpha_\Phi \approx \alpha \approx 1.8 \\ C_{1\Phi} \approx 2^\alpha C_1 \approx 0.4 \end{cases} \quad (\text{Eq. 5.16})$$

Nous pouvons maintenant prédire les valeurs de l'exposant d'échelle de la fonction de structure du premier ordre:

$$H = 1/3 + K_\varepsilon(1/6) - K_\Phi(1/2) \quad (\text{Eq. 5.17})$$

soit $H \approx 0.39$ ce qui est en très bon accord avec la valeur de 0.4 estimée au paragraphe 5.3.3.

En outre, la pente spectrale attendue est :

$$\beta = 1 + \zeta(2) \approx 1.6 \quad (\text{Eq. 5.18})$$

qui est en assez bon accord avec la pente spectrale estimée sur le 100 cartes RONSARD (1.66, cf. l'article de Montera et al.).

Au final, il semblerait qu'un modèle à deux flux multifractals puisse décrire statistiquement les incréments spatiaux de pluie à l'intérieur des orages. Ce modèle est basé physiquement sur la théorie de Corrsin-Obukhov, moyennant certaines hypothèses qui restent en partie à vérifier à cause entre autres du manque d'information fiables à l'heure actuelle sur les statistiques de la composante verticale de la vitesse du vent (les mesures disponibles étant généralement fournies par des dropsondes). Il présente en outre l'avantage, comme nous l'avons vu, d'être largement compatible statistiquement avec un modèle phénoménologique plus simple de type FIF.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé les résultats que nous avons obtenu à partir de l'analyse des séries DBS et des cartes RONSARD. Ces travaux ont fait l'objet d'articles joints en annexe. Parmi les principaux résultats, nous avons mis en évidence les points suivants :

- A la sub-mésoéchelle et aux échelles immédiatement inférieures (< 1 h, < 25 km), il existe un régime multifractal qui paraît distinct du comportement statistique à plus grande échelle
- En particulier dans le domaine temporel, il existe une cassure à l'échelle de la demi-heure séparant des régimes statistiques distincts.

- Les paramètres fournis en sortie des algorithmes d'analyse multifractale sont très dépendants de la proportion de taux précipitants nuls. L'apparition d'une cassure dans le « scaling » semble procéder de la même dépendance (voir aussi le chapitre suivant).
- En analysant des zones sans zéros, par exemple l'intérieur des orages ou des événements de pluie continus, on obtient les mêmes paramètres aussi bien dans le domaine spatial que dans le domaine temporel : $\alpha \sim 1.8$, $C_1 \sim 0.1$, $H \sim 0.4$. La variabilité de la pluie interne aux événements continus apparaît suivre un régime multifractal spécifique, tandis que le support doit être modélisé séparément (cf. chapitre 6 pour une approche plus théorique)
- Les paramètres ci-dessus fournissent un résultat original et résolvent une difficulté mentionnée au chapitre 2 relative à la modélisation spatio-temporelle, qui apparaît plus aisée à partir du moment où les restrictions du processus aux domaines spatial et temporel présentent un certain nombre de propriétés communes (le même α , notamment).
- Cette dernière valeur de H , qui remet en cause l'hypothèse usuelle de conservativité des champs précipitants, est assez cohérente avec les prédictions de la théorie statistique des scalaires passifs. Ce résultat paraît ouvrir la voie à une clarification du lien entre la multifractalité empirique de la pluie et la physique. Moyennant certaines hypothèses, il est en effet possible de supposer qu'à partir d'une échelle assez grande les statistiques du taux précipitant sont semblables à celles des scalaires passifs. La confirmation expérimentale de cette hypothèse nécessiterait des statistiques précises sur la composante verticale de la vitesse du vent, statistiques dont on ne dispose pas actuellement en raison de l'absence de données fiables en quantité suffisante.
- La valeur de α est supérieure à 1 donc la cascade multifractale sous-jacente à la pluie est à singularités non bornée supérieurement. Par conséquent, des singularités extrêmes sont susceptibles d'apparaître, favorisant l'apparition de queues de distribution hyperboliques à extrêmes fréquents (cf. chapitre 2 et paragraphe 3.6). Mathématiquement, $\alpha > 1$ est une condition suffisante d'apparition de ce phénomène, crucial pour la modélisation des temps de retour des orages extrêmes

Nous avons mis en évidence empiriquement l'effet de l'inclusion des zéros de la pluie sur les paramètres multifractals estimés. Le chapitre suivant est consacré à une étude plus approfondie de ce phénomène, basée sur des simulations et des calculs théoriques.

6 Modélisation et correction des effets d'un support fractal

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'affiner l'étude de l'influence des zéros de la pluie sur l'analyse multifractale. Tout d'abord, nous vérifions par simulation que l'ajout de zéros peut être responsable de biais dans l'estimation des paramètres multifractals et possiblement de transitions critiques séparant des régimes de scaling différents. Nous montrons ensuite que le support de la série de données issue de l'instrument DBS est monofractal dans au moins une gamme d'échelle. Enfin, nous proposons une interprétation mathématique des biais observés ainsi que des formules simples permettant, sous certaines hypothèses, de prédire les paramètres biaisés en fonction des paramètres non biaisés et de la co-dimension du support.

6.2 Inclusion des zéros dans des simulations multifractales

La première possibilité revient à multiplier un champ multifractal par un support monofractal indépendant. L'approche la plus simple consisterait à prendre pour support le résultat d'une cascade de type « modèle β » (Frisch et al., 1978). Néanmoins, d'autres constructions restent possibles, l'essentiel étant d'assurer un comportement monofractal sur une gamme d'échelle considérée. Des approches alternatives ne font pas explicitement appel à un schéma de cascade. Par exemple, dans un contexte 1D temporel, Schmitt et al. (1998) ont proposé d'utiliser des processus de renouvellement alternés à deux états. Ces processus sont contraints par le choix des distributions de probabilité associées aux durées de maintien dans chaque état (précipitant ou sec). Si ces distributions sont « scalantes », alors les processus alternés seront fractals avec un spectre en loi puissance. Une classe de processus fondés sur ces propriétés a notamment été introduite par Lowen & Teich (1993). L'avantage d'une telle approche est qu'elle permet de prendre en compte les propriétés dynamiques du support et de l'alternance pluie - non pluie plus explicitement que ne le fait un modèle β . De plus, Schmitt et al. ont montré que les cascades β ne parvenaient pas à reproduire des distributions de probabilité réalistes pour la durée des événements précipitants et secs. Bernardara et al. (2007) ont également bâti un modèle de pluie composite construit comme le produit d'un support

semblable à celui proposé par Schmitt et al. et d'une variabilité estimée par filtrage d'un mouvement brownien fractionnaire. Néanmoins, ce modèle de support indépendant s'intègre plus difficilement que le modèle β dans la phénoménologie des cascades multiplicatives et sa justification physique paraît plus incertaine.

Les modèles à support indépendant présentent l'avantage d'avoir des propriétés aisément représentables d'un point de vue mathématique. En effet, le produit de deux cascades fractales présente lui aussi des propriétés fractales sur la même gamme d'échelle. Si la variabilité dans les zones de pluie est caractérisée par une fonction d'échelle des moments $K(q)$ et si le support monofractal admet une fonction d'échelle $S(q)$, alors les propriétés statistiques du champ, incluant les zéros, sont caractérisées par une fonction d'échelle $K(q) + S(q)$.

En revanche, cette hypothèse d'indépendance est difficile à justifier dans le cas de la pluie, notamment à petite échelle. En outre, l'existence d'un seuil instrumental ajoute des zéros qui ne sont évidemment pas indépendants de la variabilité. Enfin, les modèles à support indépendant paraissent difficilement applicables à des champs multifractals non conservatifs, pour lesquels l'intégration fractionnaire peut faire intervenir des constantes d'intégration.

L'option alternative aux modèles à support indépendant consiste à seuiller un champ multifractal à un niveau choisi. C'est cette solution qui est retenue dans le paragraphe suivant, en raison de sa simplicité, de son caractère « physique », et de son adaptation aisée aux champs fractionnairement intégrés.

6.3 Simulation de l'effet des zéros produits par un modèle à seuil

Une façon simple et physiquement réaliste d'ajouter des zéros à un champ multifractal consiste en effet à le comparer à un seuil et à mettre à zéro toutes les valeurs inférieures à ce seuil. Dans le cas d'un champ multifractal « intégré fractionnairement » (FIF), le réalisme physique d'une telle simulation peut néanmoins sembler douteux à cause de la modification de la composante continue réalisée par l'intégration fractionnaire. Pour résoudre cette difficulté, de Montera et al. (2009) recommandent dans ce cas précis de retrancher la valeur du seuil aux valeurs du champ qui excèdent cette dernière. Ce procédé est applicable car le décalage des valeurs d'un FIF par une constante ne modifie en rien les propriétés de scaling

du flux conservatif Φ sous-jacent car ce dernier est déduit du FIF par un opérateur de dérivation.

De Montera et al. (2009) ont ainsi défini le modèle T-FIF (« Thresholded-FIF) et en ont proposé une implémentation monodimensionnelle en prenant pour paramètres non biaisés $\alpha = 1.7$, $C_1 = 0.13$, $H = 0.53$. Les auteurs ont défini un seuil de sorte à conserver une proportion de zéros réaliste (5%) à l'échelle d'une minute (quoique cette proportion peut néanmoins dépendre des conditions géographiques et climatiques. Néanmoins, ces simulations T-FIF ont montré l'existence de rupture de scaling comme le montrent les spectres et fonctions de structure du premier ordre de leurs simulations (Fig. 6.1).

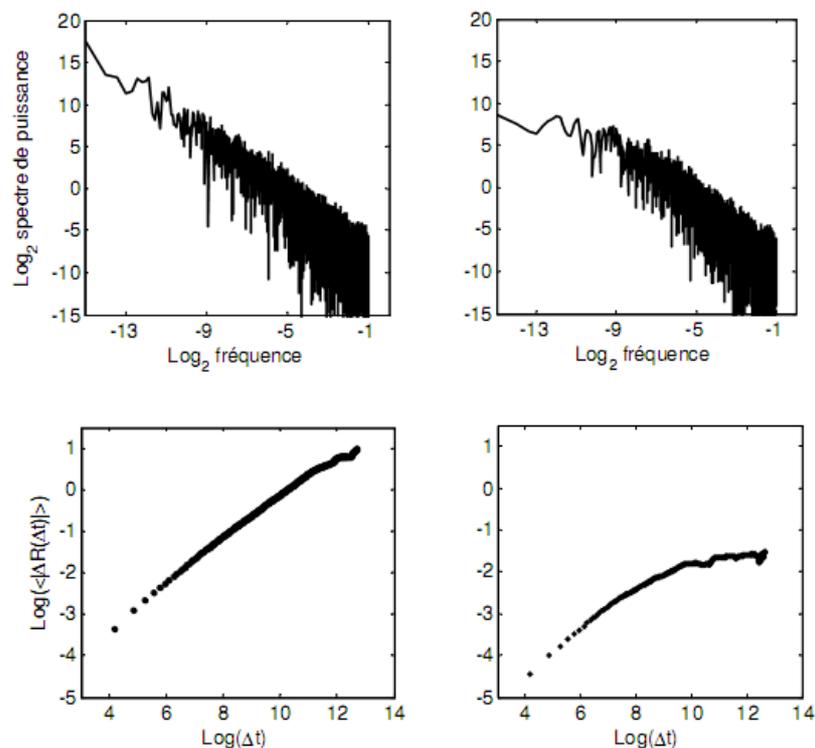


Figure 6.1 Spectre (en haut) et fonction de structure du premier ordre des séries simulées par de Montera et al. (2009). La colonne de gauche représente les propriétés des simulations non seuillées et la colonne de droite représente celles des simulations T-FIF contenant 95% de zéros.

Durant mon travail de thèse, j'ai été amené à étendre ces résultats à des simulations de cartes 2D (cf. partie 6 de l'article (Verrier et al., 2010)). Les paramètres multifractals de référence sont ceux obtenus par l'analyse des cartes radar RONSARD (paragraphe 5.3.4 de ce travail), soit $\alpha = 1.8$, $C_1 = 0.12$, $H = 0.4$. Le travail développé dans cet article a consisté à comparer les statistiques obtenues, et principalement les moments (Figs. 6.2 a-c), pour différentes valeurs de seuil en choisissant le seuil de sorte à ne garder respectivement que $P = 100\%$ (non seuillé), 60% et 10% de valeurs non nulles, toutes les autres valeurs étant annulées. Les simulations utilisées consistaient en 10 cartes de taille 256 x 256 pixels. Les moments estimés et représentés sont ceux du laplacien absolu Φ des cartes simulées pour lesquelles $H > 0$.

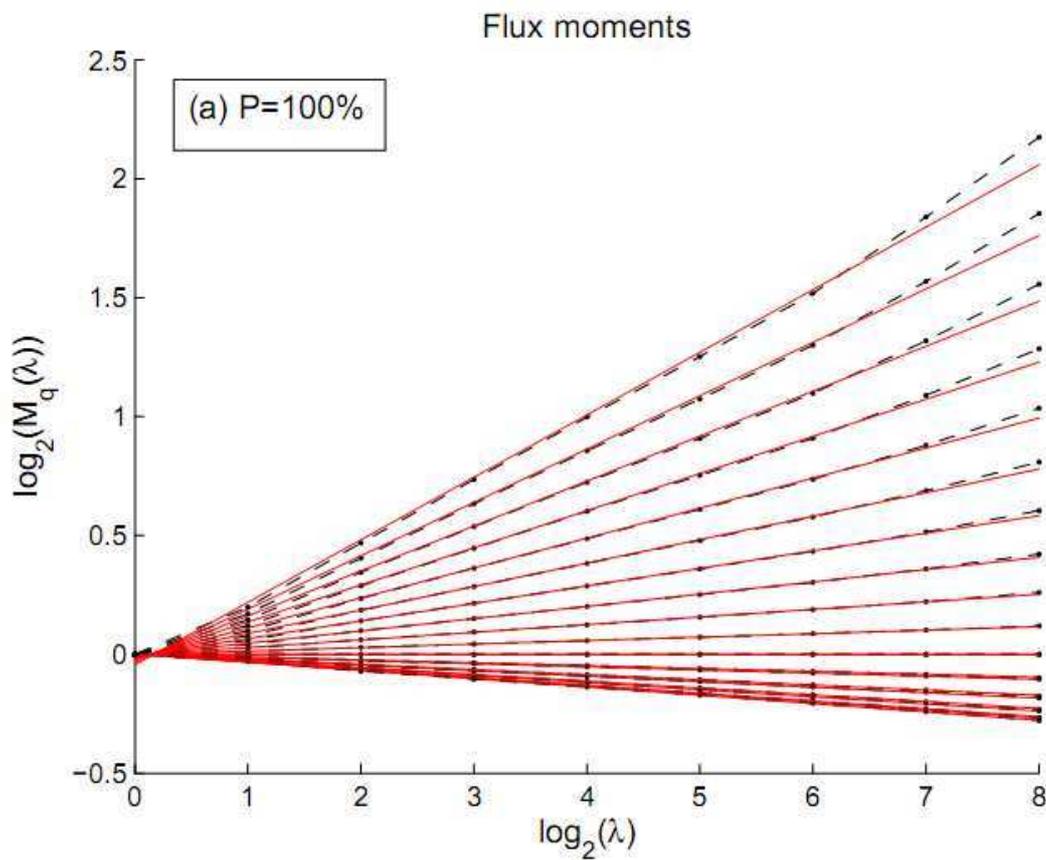


Figure 6.2a Moments du flux Φ sous-jacent aux simulations, en l'absence de seuil

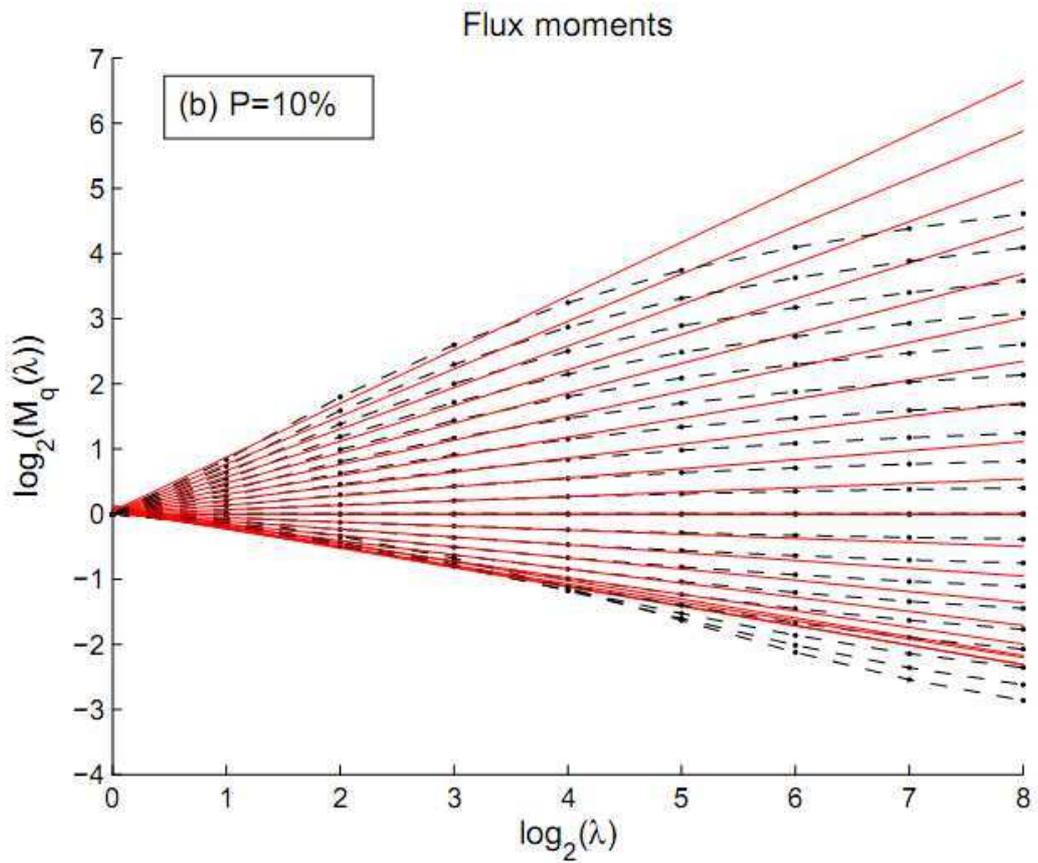


Figure 6.2b Moments du flux Φ sous-jacent aux simulations T-FIF (seuil haut, $P = 10\%$)

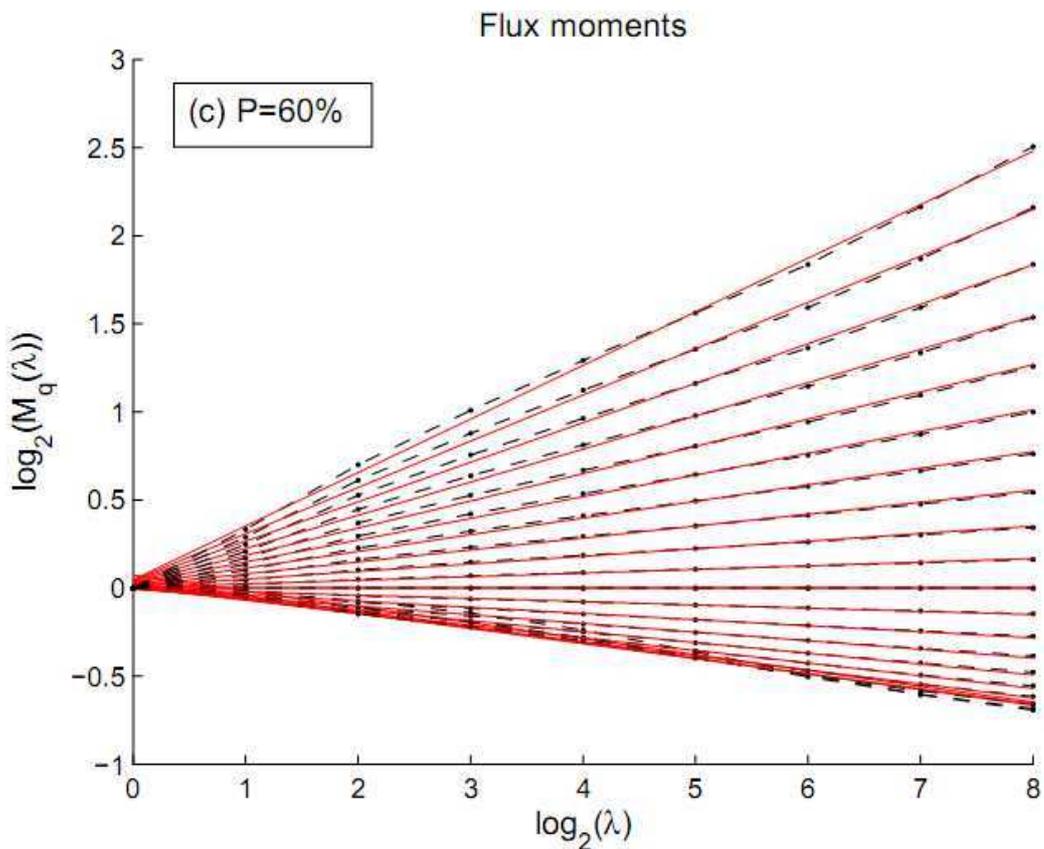


Figure 6.2c Moments du flux Φ sous-jacent aux simulations T-FIF (seuil $P = 60\%$)

La figure 6.2a confirme que le flux sous-jacent aux cartes simulées et non seuillées présente bien des propriétés multifractales sur toute la gamme d'échelle considérée. L'analyse multifractale fournit en outre des paramètres proches de ceux choisis en entrée du programme de simulation (cf. Tableau 6.1). Au contraire, dans le cas d'un T-FIF à seuil élevé (Fig. 6.2b), on observe une cassure des propriétés d'invariance d'échelle, conformément aux observations de de Montera et al. (2009). En outre, les paramètres multifractals déduits de l'ajustement de la fonction $K(q)$ aux échelles plus grandes que la cassure sont modifiés : α est largement sous-estimé $\alpha_{fit} = 0.67$ tandis que C_1 est nettement surestimé : $C_{1fit} = 0.66$.

% valeurs non nulles	α (fit)	C_1 (fit)	Scaling ?
100% (FIF)	1.73	0.14	Oui
60% (T-FIF)	1.05	0.21	Oui
10% (T-FIF)	0.67	0.66	Cassure

Tableau 6.1 Paramètres obtenus par analyse multifractale des simulations FIF/T-FIF

La figure 6.2c correspond à un cas intermédiaire pour lequel le nombre de zéros et de valeurs non nulles sont à peu près égaux à fine échelle. Dans ce cas particulier, aucune rupture n'est visible dans les propriétés d'invariance d'échelle et pourtant les paramètres obtenus par ajustement ne sont pas égaux aux paramètres de la simulation : $\alpha_{fit} = 1.05$, $C_{1fit} = 0.21$. Il existe donc dans ce cas aussi un biais sur les paramètres estimés, biais qui reste toutefois moindre que celui observé dans le cas précédent où le seuil était plus élevé.

Ce dernier cas, qui n'avait pas été mis en évidence dans l'article (de Montera et al., 2009), montre que même lorsque les zéros ne sont qu'en proportion modérée, l'estimation des paramètres multifractals au moyen des techniques habituelles n'est pas nécessairement robuste. Ceci pourrait expliquer pourquoi les paramètres trouvés par Tessier et al. (1993) à partir de cartes radar choisies dans une situation orageuse sont légèrement différents de ceux obtenus dans notre étude des cartes RONSARD (cf. paragraphe 5.3.4).

En résumé, nous avons étendu l'étude du « problème des zéros » réalisée par de Montera et al. (2009) dans un cas bidimensionnel. Nous avons confirmé les observations de ces auteurs et

montré que l'ampleur des biais observés ainsi que l'occurrence d'une cassure dans les échelles dépendaient du seuil choisi et donc de la proportion de zéros. Nous allons maintenant caractériser cette dernière d'un point de vue multi-échelle sur le jeu de données DBS.

6.4 Propriétés empiriques du support de la pluie

Si les paramètres empiriques semblent dépendre d'une proportion de zéros, il reste néanmoins à définir cette dernière de façon plus rigoureuse qu'avec un seuil ou un pourcentage. Dans un contexte multi-échelle, c'est en fait la notion de dimension fractale du processus d'occurrence de pluie qui paraît appropriée. Pour calculer cette dimension, il est souhaitable d'avoir des données couvrant une gamme d'échelle suffisante. Dans ce paragraphe, nous considérerons donc à nouveau la série de pluie DBS analysée au paragraphe 5.3, mais pas les cartes du RONSARD de résolution trop réduite.

Au sens statistique, et par analogie avec la dimension de comptage de boîtes, le support de la pluie est fractal s'il existe une valeur positive C_f telle que :

$$\Pr(R_\lambda(t) > 0) \approx \lambda^{-C_f} \quad (\text{Eq. 6.1})$$

Néanmoins, cette définition est inapplicable telle quelle car la série contient non seulement des zéros « absolus », mais aussi des zéros dus au seuil de mesure (0.1 mm/h). En raison de ce dernier (noté R_T), il n'est possible de caractériser que la seule dimension du support (ensemble des points où la série prend une valeur non nulle) de la série, soit C_f' telle que :

$$\Pr(R_\lambda(t) > R_T) \approx \lambda^{-C_f'} \quad (\text{Eq. 6.2})$$

Comme la fonction de codimension est croissante en fonction de la singularité, on a la relation :

$$C_f' \geq C_f \quad (\text{Eq. 6.3})$$

Sur la Figure 6.3 ci-dessous, nous représentons $\Pr(R_\lambda(t) > R_T)$ en fonction de la résolution λ en coordonnées logarithmiques.

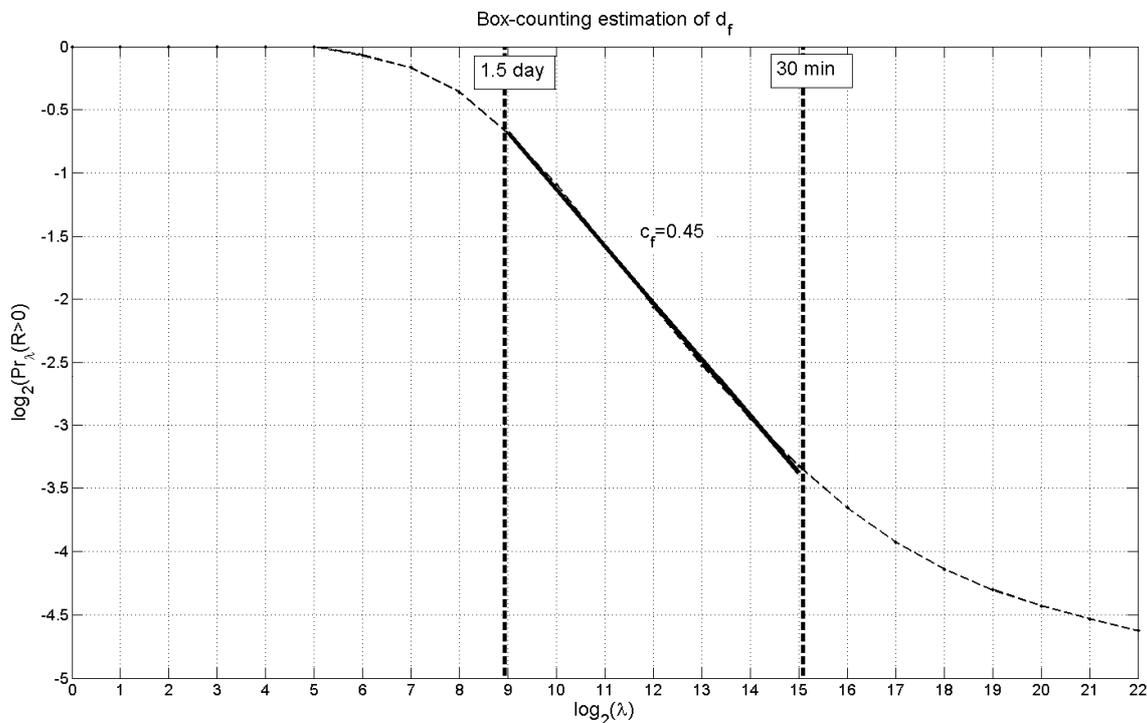


Figure 6.3 Mise en évidence du caractère fractal du support de la série DBS par une version probabiliste de l'algorithme « box-counting »

La partie linéaire du graphe correspond à un régime où la propriété monofractale (Eq. 6.2) est vérifiée. Dans cette gamme d'échelle allant de un jour et demi à 30 minutes, la co-dimension vaut $C_f' = 0.45$, ce qui signifie que le support de la série admet pour dimension 0.55. La gamme d'échelle associée à ces propriétés est remarquablement voisine de la gamme de « grande échelle » pour laquelle des propriétés multifractales avaient été mises en évidence à la section 5.3.5. Aux échelles plus grandes, la probabilité d'appartenance au support tend rapidement vers 1 et garde cette valeur au-delà de quelques semaines. Ceci s'interprète aisément : si l'on considère une période assez longue, elle contiendra nécessairement un événement de pluie donc l'intervalle associé sera inclus dans le support à très grande échelle. Par conséquent, le support a pour dimension 1 aux très grandes échelles. Aux petites échelles

(< 30 min), le support ne paraît pas fractal, et même s'il l'était dans une partie de cette gamme, la dimension serait en tous cas supérieure à 0.55.

L'existence de trois intervalles d'échelle où le comportement du support est différent a déjà été mise en évidence par Olsson et al. (1993), qui a mis en évidence, à partir de données pluviométriques collectées à Lund (Suède), des transitions aux échelles de une semaine et de 45 minutes. Dans le régime intermédiaire compris entre ces des échelles, Olsson et al. ont obtenu par un algorithme de « comptage de boîtes » une dimension fractale de 0.37. De façon similaire, Schmitt et al. (1998) ont prouvé que le support de la série d'Uccle (Belgique) était « scalant » pour les résolutions 3 jours – 10 min, avec une dimension fractale de 0.55.

Néanmoins, la comparaison des propriétés de scaling du support avec les résultats obtenus à partir de jeux de données différents reste problématique puisque ces propriétés sont fortement conditionnées par le seuil de mesure. D'autres études ont d'ailleurs trouvé des dimensions fractales plus proches de 0.8 (Hubert & Carbonnel, 1993 ; Lavergnat & Golé 1998).

6.5 Modélisation mathématique de l'effet des zéros

L'analyse multifractale des données et les simulations proposées dans la partie 5 nous ont permis de vérifier l'existence d'une sensibilité des résultats de l'analyse multifractale à la proportion de zéros. Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que le support de la pluie était fractal dans au moins une gamme d'échelle. La co-dimension du support est la quantité mathématique la plus adaptée pour quantifier la notion de « proportion de zéros » dans un contexte multi-échelle. Ainsi, nous pouvons nous attendre à ce que les résultats de l'analyse multifractale soient d'autant plus biaisés que la co-dimension du support est élevée. De plus, dans le cas des modèles à seuil, une rupture du « scaling » peut apparaître pour un seuil assez élevé. Comment ces phénomènes sont-ils conditionnés par les propriétés du support au point de vue mathématique ?

6.5.1 Rupture de scaling pour les multifractals seuillés

Pour établir une condition d'apparition, supposons tout d'abord que la variabilité d'un champ donné soit représentable dans une certaine gamme d'échelle par une cascade multifractale (supposée) conservative Φ associée à une fonction d'échelle des moments $K(q)$ et à une fonction de codimension $c(\gamma)$. Supposons maintenant que nous seuillons ce champ à la résolution λ :

$$\Phi_{T,\lambda} = \Phi_\lambda \quad \text{si } \Phi_\lambda \geq T$$

$$\Phi_{T,\lambda} = 0 \quad \text{sinon}$$

Aux résolutions plus grossières, la cascade Φ_T est obtenue par une succession de moyennages à partir de sa représentation haute résolution $\Phi_{T,\lambda}$.

La singularité associée au niveau T à la résolution λ a pour expression :

$$\gamma_T = \frac{\log\left(\frac{T}{\langle \Phi \rangle}\right)}{\log(\lambda)}.$$

Dans le cas où l'échelle d'entrée l_{ext} de la cascade n'est pas formellement associée à la résolution unité (échelle l_1), l'équation précédente reste la même à un changement de variables près : $\lambda \rightarrow \frac{\lambda l_{ext}}{l_1}$.

Cette singularité nous permet de définir une famille de seuils cohérente à toutes les résolutions jusqu'à λ . L'effet du seuillage peut alors se comprendre de la façon suivante : toutes les singularités strictement inférieures à γ_T sont éliminées et les autres restent telles quelles. Cela revient à dire que la fonction de codimension est inchangée sauf pour les singularités $\gamma < \gamma_T$ où elle est constante et admet pour valeur la codimension du support. Sachant que la fonction de codimension et la fonction d'échelle des moments sont duales par

transformation de Legendre, il est possible d'en déduire que la fonction d'échelle du champ seuillé, $K_T(q)$ est égale à $K(q)$ pour $q \geq q_T$ mais est linéaire pour $q \leq q_T$. Le champ seuillé reste donc « scalant » sur toute la gamme d'échelles considérée, mais ses exposants d'échelles sont biaisés pour les ordres de moments faibles.

Ceci étant, ces propriétés ne sont valables que si le seuil n'est pas trop élevé. Si, au contraire, le seuil est assez élevé pour que $q_T > 1$, alors la normalisation du champ va être affectée. Comme la reconstruction de la cascade Φ_T à partir de sa représentation haute résolution est faite sur une hypothèse de conservativité, on obtiendra un résultat très différent de la cascade initiale Φ et ce phénomène sera d'autant plus marqué que les étapes de reconstruction seront nombreuses. Dès lors, une rupture risque d'apparaître dans le scaling, sa condition d'apparition étant $q_T > 1$, ou, de façon duale, $\gamma_T > C_1$ et $c(\gamma_T) > C_1$.

6.5.2 Estimation théorique des biais liés aux zéros sur les paramètres multifractals

Nous avons précédemment mis en évidence tant par l'étude de simulations (paragraphe 6.3) que celle des données (chapitre 5) que les zéros pouvaient conduire à un biais dans les estimations des paramètres fournies par les techniques habituelles d'analyse multifractale. La question est désormais de savoir comment quantifier ce biais en fonction de la proportion de zéros, ou plus mathématiquement en fonction de la co-dimension fractale du support. Pour pouvoir résoudre le problème mathématiquement, nous faisons maintenant l'hypothèse simplificatrice que le support et la variabilité sont indépendants. Cette hypothèse n'est en fait pas vérifiée sur les données (ne serait-ce qu'en raison du seuil de mesure) et n'est pas valable sur les processus multifractals seuillés (recalés ou non). Néanmoins, pour ces processus, le seuil est appliqué aux très fines échelles et il est raisonnable de supposer qu'à des échelles suffisamment grandes la variabilité et le support soient moins corrélés. Si, comme sur les données DBS, il existe une transition abrupte entre deux régimes multifractals apparents et que le régime de grande échelle est en fait distribué sur un support fractal, alors les formules proposées ci-dessous doivent fournir une indication raisonnable quant aux biais sur les paramètres multifractals apparents.

Pour faciliter la résolution du problème, nous supposons aussi que la variabilité est modélisée par une cascade conservative, ce qui semble valable à des échelles de plus d'une ou quelques heures dans le cas de la pluie.

Notons alors Φ_λ la cascade représentative de la variabilité, initialement distribuée dans tout l'espace, de dimension topologique D . Supposons que le support soit une cascade monofractale notée Ξ_λ , de codimension C_f , et que le processus de pluie puisse être décrit par la cascade composée $\Phi_\lambda \times \Xi_\lambda$ adéquatement renormalisée. La moyenne D – dimensionnelle de la cascade de pluie doit en effet rester constante en changeant de résolution.

Nous devons donc avoir :

$$R_\lambda = \frac{\Phi_\lambda \times \Xi_\lambda}{\langle \Phi_\lambda \times \Xi_\lambda \rangle} \quad (\text{Eq. 6.4})$$

Notons $K(q)$ la fonction d'échelle des moments de la cascade Φ_λ normalisée et conservative. En prenant le moment statistique d'ordre q aux deux membres de l'équation (Eq. 6.4) et en utilisant l'hypothèse d'indépendance des cascades Φ_λ et Ξ_λ , on obtient :

$$\langle R_\lambda^q \rangle = \frac{\langle \Phi_\lambda^q \rangle \times \langle \Xi_\lambda^q \rangle}{\langle \Phi_\lambda \rangle^q \times \langle \Xi_\lambda \rangle^q} \quad (\text{Eq. 6.5})$$

Ainsi, R_λ suit une loi d'échelle avec une nouvelle fonction d'échelle des moments $\hat{K}(q)$:

$$\langle R_\lambda^q \rangle \propto \lambda^{\hat{K}(q)} \quad (\text{Eq. 6.6}),$$

cette fonction admettant pour expression :

$$\hat{K}(q) = K(q) + C_f(q-1) \quad (\text{Eq. 6.7})$$

Cette fonction est la somme de deux termes : le premier terme est non linéaire est associé à la cascade multifractale Φ_λ , auquel on ajoute (par hypothèse d'indépendance) un terme affine associé à la cascade monofractale Ξ_λ . Ce terme affine est la somme d'un terme constant apparaissant par définition de C_f et d'un terme linéaire représentatif de la normalisation de la cascade Ξ_λ . De façon similaire aux considérations de la section 6.3.2, ce sont les conditions de normalisation d'un champ multifractal auquel on ajoute des zéros qui vont créer le biais le plus important sur les fonctions d'échelle des moments et sur les paramètres estimés. On peut remarquer les valeurs particulières $\hat{K}(1) = 0$ qui traduit comme attendu la conservativité et $\hat{K}(0) = -C_f$ qui montre que les propriétés du support ont bien été prises en compte, l'ordre de moment 0 étant associé à la singularité limite $-\infty$).

L'équation (Eq. 6.7) fait apparaître que la fonction d'échelle des moments empirique d'un champ tel que défini ci-dessus ne pourra rigoureusement être ajustée par la forme classique à deux paramètres. Néanmoins, si l'ajustement est effectué, on obtiendra des paramètres biaisés. Supposons donc que l'ajustement soit effectué au voisinage de la moyenne, c'est-à-dire là où les moments sont estimés avec le moins d'incertitude (car les moments d'ordre faible sont affectés par les seuils de mesure et les moments d'ordre élevé par des limitations dues aux échantillons ou à la divergence). L'ajustement optimal au voisinage de la moyenne est celui pour lequel les dérivées première et seconde de la fonctions d'échelle des moments sont parfaitement déterminées par les paramètres ajustés. Par conséquent, ces derniers doivent vérifier le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \hat{K}'(1) = \hat{C}_1 \\ \hat{K}''(1) = \hat{C}_1 \cdot \hat{\alpha} \end{cases} \quad (\text{Eq. 6.8})$$

En combinant ce système d'équations avec l'équation (Eq. 6.7) on peut donc exprimer les paramètres biaisés $\hat{\alpha}$ et \hat{C}_1 , en fonction des paramètres non biaisés α et C_1 et de la codimension du support C_f . On obtient :

$$\hat{C}_1 = C_1 + C_f \quad (\text{Eq. 6.9})$$

et

$$\hat{\alpha} = \frac{C_1}{C_1 + C_f} \alpha \quad (\text{Eq. 6.10})$$

Ces formules confirment le fait observé (et décrit dans le présent chapitre) que plus un champ contient de zéros, plus le paramètre \hat{C}_1 empirique va augmenter et plus $\hat{\alpha}$ va diminuer. De même, la pente spectrale, soit $1 - \hat{K}(2)$ va diminuer :

$$\hat{\beta} = \beta - C_f \quad (\text{Eq. 6.11})$$

(avec l'hypothèse $H = 0$).

6.5.3 Validation des formules exprimant le biais sur les paramètres multifractals

Nous nous proposons maintenant de vérifier la validité des formules dans le cas du régime multifractal de « grande échelle » (3 jours à 30 min) mis en évidence au paragraphe 5.3. Rappelons que nous avons montré au paragraphe 6.1.1 que le support de la série était monofractal dans cette gamme d'échelle, avec une co-dimension $C_f' = 0.45$. Comme le support inclut à la fois les longues périodes sèches et les zéros dus au seuil, c'est cette dernière codimension qui est à prendre en compte dans les calculs. Faisons désormais l'hypothèse que la variabilité de la pluie dans son support soit multifractale avec des exposants universels uniques dans tout l'intervalle des échelles compris entre une semaine et 15 s. Les exposants à choisir seraient alors ceux précédemment estimés par l'étude des événements de pluie, soit $\alpha \approx 1.8$ et $C_1 \approx 0.1$. L'application des formules (Eq. 6.9) et (Eq. 6.10) donne pour estimation des paramètres biaisés par les zéros : $\hat{\alpha} \approx 0.3$ et $\hat{C}_1 \approx 0.55$. Ces valeurs sont en très bon accord avec les valeurs empiriques $\hat{\alpha} = 0.31$ et $\hat{C}_1 \approx 0.59$ obtenues par l'étude des propriétés multi-échelle de la série DBS à des échelles supérieures à la demi-heure (cf. Figure 5.9 et Tableau 5.5). De plus, l'exposant spectral donné par la formule (Eq.6.11), soit $\hat{\beta} \approx 1.1$ est aussi en bon accord avec la valeur empirique $\hat{\beta} = 1.09 \pm 0.06$ observée dans une partie de cette gamme de fréquences.

L'application directe des formules aux résultats de la littérature existante est difficile car la plupart des auteurs n'indiquent pas la dimension fractale du support de leurs données de pluie. Nous allons cependant considérer un exemple récent où cette valeur est fournie : il s'agit de l'étude faite par Lovejoy et al. (2008) à partir des données de réflectivité satellitaires TRMM. Ces auteurs ont estimé les moments statistiques de la réflectivité (et non de R) pour des échelles (spatiales !) comprises entre 20000 km et 4.3 km, c'est-à-dire allant des échelles synoptiques à celles de fines structures orageuses. En interprétant une figure de leur article, reprise ci-dessous (Fig. 6.4), les auteurs montrent que des propriétés multifractales existent pour les ordres de moments compris entre 0 et 3, et ce des échelles planétaires jusqu'à quelques dizaines de km. On peut remarquer sur cette figure que les échelles les plus fines semblent avoir un comportement différent, vraisemblablement dû à une cassure induite par les zéros de la pluie semblable à celle que nous avons mis en évidence sur les données DBS. Si c'est le cas, les paramètres estimés par les auteurs sont biaisés par les zéros de la pluie. Lovejoy et al. ont retenu pour C_1 une valeur de 0.63 et pour α une valeur de 1.5. Mais cette dernière estimation inclut déjà une correction implicite de l'effet des zéros (cf. paragraphe 4.4 de l'article mentionné). Au contraire, les auteurs nous indiquent la valeur empirique $K''(1)=0.26$. En divisant cette valeur par la valeur empirique $K'(1)=0.63$ utilisée dans la détermination de C_1 , les auteurs auraient trouvé $\hat{\alpha} \approx 0.4$. Ainsi, les paramètres biaisés directement déductibles de la figure 4b de l'article de Lovejoy et al. (2008) sont : $\hat{\alpha} \approx 0.4$ et $\hat{C}_1 \approx 0.63$. En outre, les auteurs déduisent de $K(0)$ la valeur de la codimension du support dans cette gamme d'échelle, soit $C_f' = 0.42$. L'application des formules (Eq. 6.9 – 6.10) donne $\alpha \approx 1.2$ et $C_1 \approx 0.2$ soit des paramètres plus proches des paramètres « corrigés » estimés à la section 5.4 de ce manuscrit et rappelés dans le bilan au paragraphe 5.5. Ici encore, on trouve un paramètre $\alpha > 1$, indicateur de champs à singularités non bornées supérieurement.

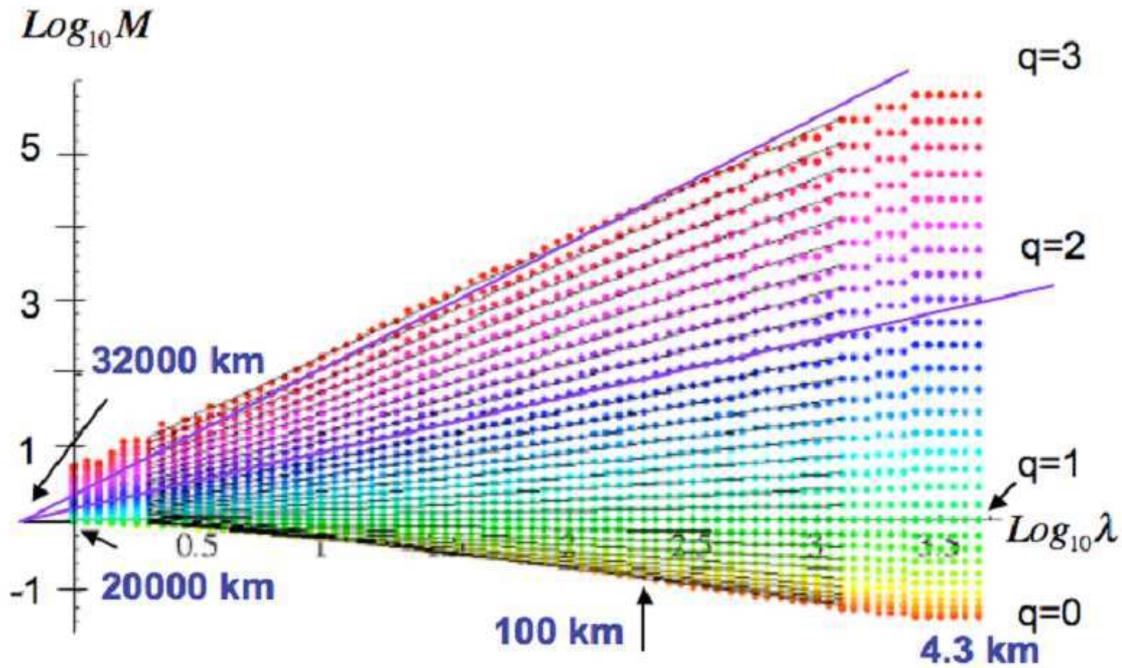


Figure 6.4 Moments du gradient absolu des réflectivités TRMM, repris de (Lovejoy et al., 2008)

Plus généralement, il apparaît que les paramètres de la littérature, notamment pour les études existantes de séries temporelles de précipitations, sont très fortement biaisés par les zéros et que les formules du paragraphe précédent seraient en mesure d'expliquer tout ou parti de ces biais. Il serait intéressant que les études futures mentionnent systématiquement la valeur de la codimension du support de la pluie et si possible des estimations de paramètres incluant une correction empirique de l'effet des zéros, par exemple en utilisant des algorithmes d'analyse pondérée si la résolution des mesure est insuffisante pour se restreindre à des zones sans zéros.

Néanmoins, il convient de garder à l'esprit que l'applicabilité des formules (Eq. 6.9 – 6.11) est limitée par l'hypothèse sous-jacente d'indépendance du support et de la variabilité propre de la pluie. De plus, l'estimation des paramètres optimaux près de la moyenne ne donne pas un résultat optimal pour les autres ordres de moments. Le biais d'estimation des paramètres universels serait en toute rigueur dépendant de l'intervalle d'ordres de moments considéré et même de la technique d'ajustement (dérivées en 1 ou minimisation directe).

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué plusieurs approches pour mettre en évidence et quantifier le « problème des zéros ». Nous avons utilisé des simulations de champs multifractals seuillés (modèle T-FIF) afin de faire apparaître comment l'analyse multifractale est affectée par la proportion de zéros. Nous avons souligné que cette dernière nécessite d'être définie en termes de (co-)dimension fractale du support du processus précipitant. Nous avons ensuite proposé une modélisation théorique simple, applicable rigoureusement dans le cas où le support est indépendant de la cascade multifractale définissant la variabilité. Cette modélisation nous offre des formules originales et simples permettant d'estimer a priori les biais sur les paramètres multifractals en fonction de la co-dimension du support. De manière générale, lorsque celle-ci augmente, l'exposant C_1 empirique augmente tandis que α va diminuer. Ce comportement est qualitativement cohérent avec les observations du chapitre 5. D'un point de vue quantitatif, les formules semblent prédire assez correctement les biais sur quelques cas pratiques mais restent difficiles à étendre de manière systématique à toute la littérature car celle-ci fournit rarement à la fois les paramètres multifractals et la co-dimension du support. D'autre part, les formules proposées sont valables sous certaines hypothèses a priori assez restrictives, principalement l'indépendance entre le support et la variabilité, dont l'impact nécessiterait une étude plus approfondie.

7 Applications : downscaling et modélisation des extrêmes

7.1 Introduction

Ce chapitre présente quelques études complémentaires menées au cours du travail de thèse et susceptibles de présenter un intérêt du point de vue des applications. Ces applications peuvent concerner un auditoire scientifique potentiellement plus large que celui de la communauté des « fractales ». Le paragraphe 7.2 ci-dessous concerne la fonction de répartition des taux précipitants et plus particulièrement les propriétés de la queue de distribution tandis que le paragraphe 7.3 propose une étude de faisabilité d'un algorithme de downscaling multifractal universel. Les résultats de ce chapitre relèvent de travaux de recherche toujours en cours et n'ont pas pour ambition de présenter une résolution complète des problèmes abordés. Néanmoins, ils permettent de dégager des axes de recherche susceptibles de rapprocher les modèles statistiques étudiés dans les chapitres précédents d'applications dans les domaines de l'hydrologie ou de la météorologie.

7.2 Multifractals et distribution des taux précipitants extrêmes

7.2.1 Principe

La fonction de répartition des valeurs d'un champ multifractal est connue à un facteur près à toute résolution par l'équation de base définissant les « co-dimensions » fractales (pour la théorie, cf. paragraphe 3.2.3) :

$$\Pr(\Phi_\lambda \geq \langle \Phi \rangle \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (\text{Eq. 7.1})$$

En outre, l'observation d'un champ multifractal induit nécessairement une forme d'agrégation spatiale ou temporelle depuis une échelle très fine. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.5, cette agrégation peut porter sur des pics sous-jacents extrêmement violents, lesquels sont responsables d'une modification de la distribution de probabilité au niveau des extrêmes à l'échelle d'agrégation. Les moments statistiques seront tous divergents à partir d'un certain ordre plus grand que 1, noté q_D . Il en résulte une queue de distribution algébrique (ou hyperbolique) :

$$\Pr(\Phi_\lambda \geq s) \approx s^{-q_D} \quad (\text{Eq. 7.2})$$

(dans ce paragraphe d'application, et par souci de simplification, nous utilisons la notation Φ pour désigner le champ multifractal « observé » contrairement aux convention du chapitre 3, plus théorique).

Les distributions algébriques présentent la particularité de générer plus de valeurs extrêmes que les autres types de distributions de probabilité utilisées en hydrologie (lois normales, log-normales, de Gumbel...) qui sont asymptotiquement négligeables devant elles.

7.2.2 La distribution de probabilité de la série DBS

Pour que la propriété traduite par l'équation (Eq. 7.2) puisse être observée, il est nécessaire de se placer à une résolution assez grande devant l'échelle de dissipation du processus car cette équation dérive d'une hypothèse d'agrégation sur une gamme d'échelle assez large. D'autre part, il est indispensable que la distribution de probabilité soit estimée sur un échantillon assez large pour obtenir une estimation consistante de la CDF. Nous allons donc chercher à vérifier cette propriété sur la série temporelle de précipitations considérée au chapitre 5 de ce travail qui couvre en effet une période de deux années complètes à haute résolution (15 secondes). Au chapitre 5, nous avons mis en évidence l'existence de deux gammes d'échelles remarquables, soit 32 minutes - 15 secondes et 3 jours - 32 minutes pour lesquelles existaient des propriétés multifractales universelles résumées au moyen d'un jeu réduit de paramètres. Nous avons également montré que les paramètres de la seconde gamme mentionnée étaient en fait biaisés par les zéros de la pluie. Il paraît donc approprié de choisir comme échelle d'agrégation 32 minutes avant de calculer la distribution de probabilité, les échelles sous-jacentes ayant des propriétés multifractales bien déterminées. Le graphe (du complémentaire) de la distribution de probabilité $\Pr(R_\lambda \geq s) = 1 - F_{\Phi_\lambda}(s)$ est représenté sur la figure 7.1 ci-dessous :

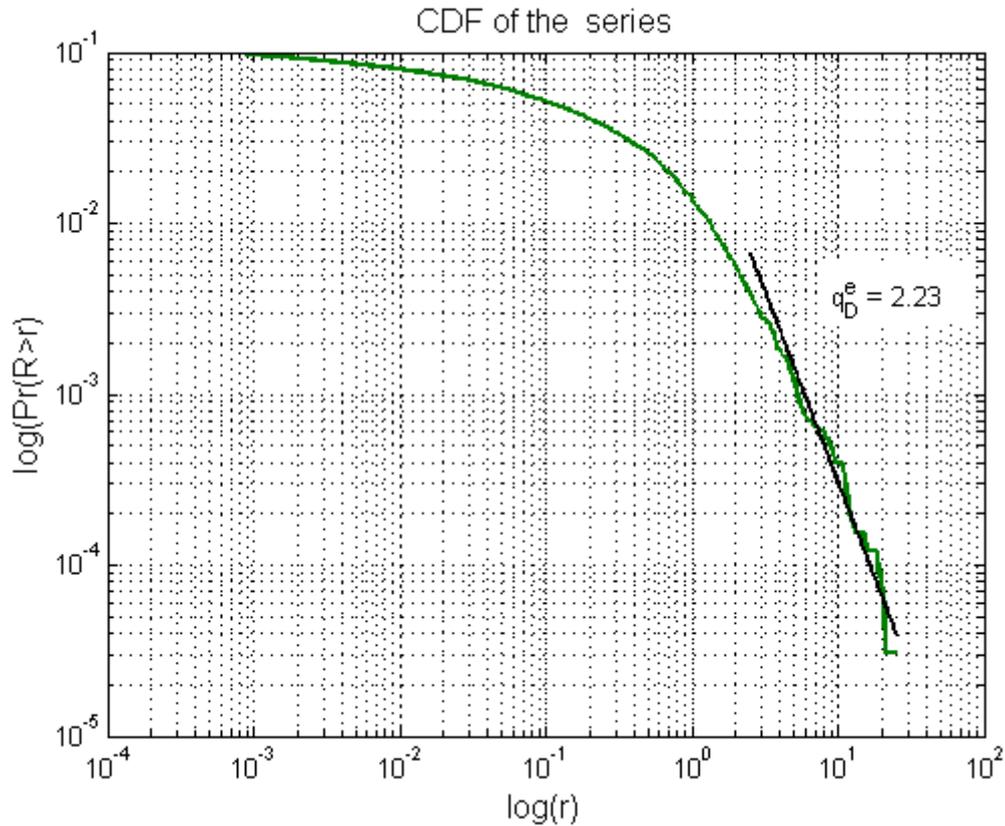


Figure 7.1 Graphe log-log de 1-CDF de la série DBS de Palaiseau (2008 - 2010) à la résolution de 32 min.

Sur le graphe de 1-CDF en coordonnées logarithmiques, la relation (Eq. 7.2) doit se traduire par une asymptote linéaire ce qui paraît en effet correspondre à la courbe ci-dessus. La régression linéaire sur la gamme 5 mm/h - 20 mm/h nous fournit l'estimation empirique $q_D^e = 2.23$.

Cet exposant est-il réellement une estimation de q_D ou s'agit-il, en raison des limitations liées à la taille de l'échantillon, d'une estimation de l'ordre associé aux limitations dues à la taille limitée de l'échantillon, noté q_s (cf. paragraphe 3.6)? Cette dernière quantité peut être estimée

à partir de la formule $q_s = \left(\frac{D + D_s}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$, en remplaçant α et C_1 par les paramètres corrigés

estimés au chapitre 5 (respectivement 1.8 et 0.1) et en prenant en compte les zéros via la dimension fractale du support ($D = 0.55$, cf. paragraphe 6.4). Pour le calcul de $D_s = \frac{\log(N)}{\log(\lambda)}$,

il faut calculer le nombre d'événements indépendants N et la gamme d'échelle couverte par chaque événement. Si l'on suppose que les événements deviennent indépendants au bout de

15 jours, on a $N \approx \frac{2 \times 365}{15}$ et λ est le rapport entre 15 jours et 32 min (soit environ 720). On obtient la valeur $D_s = 0.59$ ce qui donne $q_s = 3.87$, qui est supérieure à la pente q_D^e estimée ci-dessus. Cette dernière pourrait donc bien être la signature du phénomène de divergence critique des moments d'ordre élevé.

Dans la littérature, un certain nombre d'auteurs ont déjà conclu à l'existence de queues de distribution en loi puissance décroissante à partir de séries pluviométriques. La plupart des auteurs estiment une valeur empirique de $q_D^e \approx 3$ voire 4 (Ladoy et al., 1993 ; Fraedrich & Larnder, 1993 ; Tessier et al., 1996 ; Kiely & Ivanova, 1999 ; Hubert, 2001 ; Schertzer et al., 2010 ; Lovejoy et al., 2011). Au contraire, Olsson (1995) obtient une estimation de l'exposant critique plus proche de la nôtre $q_D^e = 2$ à partir de séries temporelles collectées à Lund en Suède. Sous réserve que les q_D^e observés ne sont pas conditionnés par les limitations liées à la taille de l'échantillon, la dispersion sur les valeurs empiriques de l'exposant critique reste à expliquer.

7.2.3 Comparaison des valeurs théoriques et empiriques de q_D

Le débat autour de la valeur de q_D ne semble néanmoins pas clos. En effet, si l'ordre critique de divergence des moments admet une expression analytique dépendant uniquement des paramètres multifractals α et C_1 et de la dimension de l'espace, cette expression ne paraît pas en mesure de fournir une estimation en accord avec les valeurs observées. En effet, q_D doit être strictement supérieur à 1 et vérifier l'équation suivante (cf. paragraphe 3.6) :

$$\frac{C_1}{\alpha - 1} (q_D^\alpha - q_D) = D(q_D - 1) \quad (\text{Eq. 7.3})$$

Des considérations géométriques simples montrent que l'ordre q_D est décroissant en fonction de α et de C_1 , et croissant en fonction de D . L'équation (Eq. 7.3) admet quelques solutions analytiques dans des cas particuliers : $\alpha = 1/2 ; 1/3 ; 2/3 ; 3/2 ; 2$ (la résolution numérique reste évidemment possible dans les autres cas). Notamment, on a les expressions suivantes :

- pour $\alpha = 2$: $q_D = \frac{D}{C_1}$ (Eq. 7.4)

- pour $\alpha = 1/2$: $q_D = \left(\frac{\frac{D}{2C_1}}{1 - \frac{D}{2C_1}} \right)^2$ si $\frac{C_1}{D} > \frac{1}{2}$; infini sinon (Eq. 7.5)

- pour $\alpha = 3/2$: $q_D = \left(\frac{\frac{D}{2C_1} + \sqrt{\left(\frac{D}{2C_1}\right)^2 + 4\frac{D}{C_1}}}{2} \right)^2$ (Eq. 7.6)

Compte tenu du sens de variation de l'ordre critique en fonction des paramètres multifractals, q_D est minoré par la solution remarquable de l'équation (Eq. 7.3) dans le cas où $\alpha = 2$, soit :

$$q_D \geq \frac{D}{C_1} \quad (\text{Eq. 7.7})$$

En pratique, les calculs montrent que q_D (et même le minorant D/C_1) peuvent prendre une valeur élevée. Tessier et al. (1993) avaient déjà noté, en reportant les paramètres estimés par l'analyse multifractale de cartes radar, que la résolution mathématique de l'équation (Eq. 7.3) fournissait des valeurs de l'ordre de plusieurs dizaines. En fait, même dans le cas de séries temporelles, cette expression donne des valeurs de $q_D \approx 8-10$, aussi bien pour les paramètres « temporels » classiques de la littérature ($\alpha \approx 0.5, C_1 \approx 0.6$) que pour les paramètres « corrigés » obtenus à l'intérieur des événements de pluie ininterrompus ($\alpha \approx 1.8, C_1 \approx 0.1$). Pour s'en convaincre, il suffit de se référer au graphe ci-dessous qui montre la valeur de q_D obtenue par résolution de l'équation (Eq. 7.3) et ce pour divers jeux de paramètres. Il n'est pas forcément surprenant que la correction sur les paramètres n'influe pas sur la valeur théorique de q_D , qui ne dépend que de la distribution des pluies extrêmes et non pas des valeurs nulles ou sous le seuil de détection. En outre, l'équation (Eq. 7.3) correspond à l'annulation de la

fonction de scaling des moments-trace qui est invariante par multiplication par un support fractal indépendant, du fait de la décomposition du terme $D(q-1) = C_f(q-1) + D_f(q-1)$.

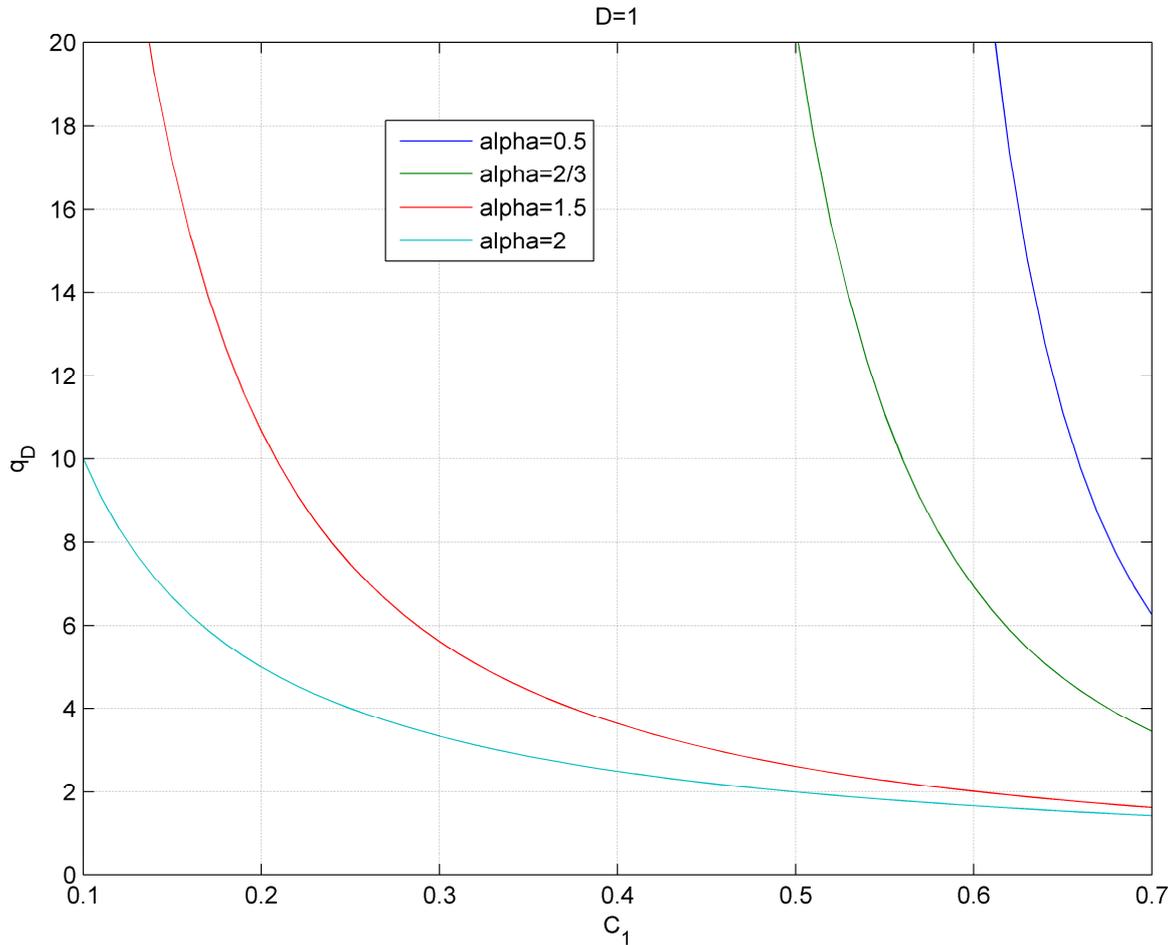


Figure 7.2 Ordre théorique de divergence des moments.

Néanmoins, il reste impossible actuellement de confirmer ou non la valeur empirique $q_D^e \approx 3$ qui rend compte non seulement des propriétés multifractales de la pluie, mais aussi de ses propriétés « particulières » à fine échelle. Des modèles de type « cascades de Poisson composées » prenant en compte ces caractéristiques prédisent d'ailleurs exactement la valeur $q_D = 3$ (Lovejoy & Schertzer, 2006).

7.3 Multifractals et algorithmes de downscaling

7.3.1 Introduction

Comme mentionné précédemment au chapitre 2, une limitation importante de la modélisation numérique de l'évolution de l'état de l'atmosphère réside dans la résolution limitée des modèles globaux (quelques dizaines voire centaines de km). Cette résolution se révèle insuffisante pour la représentation d'événements météorologiques intenses et en particulier des structures précipitantes convectives telles que les orages. Pour obtenir des informations sur ce qui se passe à l'intérieur des mailles du modèle, il faut pouvoir appliquer des méthodes de downscaling, dynamique ou statistique. On rappelle que le downscaling statistique consiste à déduire certaines propriétés statistiques à haute résolution à partir de la connaissance du champ à basse résolution. De nombreuses méthodes heuristiques existent, reposant par exemple sur la transformation d'une CDF basse résolution en CDF haute résolution, voir par exemple (Flaounas et al., 2011). De telles méthodes heuristiques sont néanmoins limitées par un certain manque de justification physique de la transformation choisie. Une telle justification ne peut résulter que d'une étude approfondie des interactions entre les échelles. Pour cette raison, un certain nombre de géophysiciens ont proposé des algorithmes de downscaling statistique respectant les contraintes de symétries d'échelle mises en évidence sur les processus et les champs étudiés. Dans le cas particulier de la pluie, ces algorithmes peuvent être de plusieurs types (Ferraris et al., 2003):

- ajout de structures précipitantes individuelles réparties de façon « scalante »
- désagrégation monofractale fondée sur l'ajout de composantes spectrales aux nombres d'onde élevés et respectant les symétries d'échelles du spectre (Rebora et al., 2006)
- désagrégation multifractale au moyen des cascades multiplicatives (cf. références au paragraphe suivant)

Ces différentes techniques présentent en outre l'intérêt de pouvoir construire aisément un grand nombre de réalisations aléatoires du processus à haute résolution à partir de les simulations ou d'observations à une résolution inférieure. Dans la suite, nous nous intéressons au procédés de downscaling basés sur des cascades multiplicatives multifractales.

7.3.2 Cascades multifractales et downscaling

Une fois que des propriétés d'invariance d'échelle multifractales ont été démontrées pour un champ donné dans une certaine gamme d'échelles, on sait que la structure de ce champ peut être représentée par une cascade multiplicative. On rappelle qu'une cascade multiplicative est une suite de modulations aléatoires i.i.d. effectuées à chaque étape d'une série de raffinements de résolution (cf. le chapitre 3, et notamment le paragraphe 3.3.2 de ce travail pour une présentation détaillée de ces cascades). Dans le cas des cascades « discrètes en échelle », on considère par exemple les résolutions $\lambda_n = 2^n$, associées à des subdivisions de l'espace en pixels de côté $l_n = 2^{-n} L$, où L est l'extension spatiale maximale du domaine considéré. La valeur du champ Φ_{n+1} à la résolution λ_{n+1} se déduit de celle (Φ_n) à la résolution λ_n par multiplication par une variable aléatoire $\mu\Phi$ appelée « incrément multiplicatif » :

$$\Phi_{n+1} = \mu\Phi \times \Phi_n \quad (\text{Eq. 7.8})$$

Il est donc possible de définir génériquement une méthode de désagrégation multifractale en partant du champ basse résolution en effectuant dessus des modulations multiplicatives aléatoires similaires (la seule hypothèse à vérifier étant que les lois statistiques choisies pour les modulations soient bien valides aux résolutions reconstituées).

Aux chapitres précédents, nous avons montré tant par le travail de bibliographie que par celui effectué sur les données disponibles au LATMOS que la pluie vérifiait des propriétés multifractales dans une ou plusieurs gammes distinctes notamment à des échelles inférieures à quelques jours. Il apparaît donc que ces propriétés permettent l'application d'algorithmes de désagrégation multifractale au downscaling de champs et de séries chronologiques de pluie.

Dans la littérature existante, plusieurs auteurs ont proposé des algorithmes de downscaling multifractal pour la pluie (Olsson et al., 1998 ; Deidda, 2000 ; Günter et al., 2001 ; Pathirana et al., 2003 ; Biaou, 2004 ; Llord et al., 2006 ; Sharma et al. 2007 ; Onof & Arnbjerg-Nielsen, 2009 ; Rupp et al., 2009) et ont prouvé que ces algorithmes présentaient des performances intéressantes comparativement à d'autres techniques (Ferraris et al., 2003). Ces algorithmes reposent sur l'utilisation de cascades multiplicatives discrètes en échelle et ont été appliqués à

la désagrégation temporelle, spatiale, et spatio-temporelle de séries et de champs précipitants. Le tableau ci-dessous offre un aperçu des cas d'étude proposés par les auteurs cités.

Référence	Données	Basse/Haute résolution	Loi de l'incrément multiplicatif	Prise en compte du support
Olsson et al. (1998)	Séries temporelles de pluviomètres	17 h / 1 h	Compositions de lois uniforme/exp	Poids spécifique dans la PDF
Deidda (2000)	Série de cartes radar	(256 km + 16h) / (4 km + 15 min)	Loi log-Poisson	-
Günter et al. (2001)	Séries temporelles de pluviomètres	32 h / 1 h	PDF empirique	Poids spécifique
Pathirana et al., 2003	Séries temporelles de pluviomètres	1 jour / 1 h	Loi log-stable	Seuil
Biaou (2004)	Sorties de GCM 2.5° / 1 mois	(243 km + 32 jours) / (1 km + 1 jour)	Loi log-stable	-
Sharma et al. (2007)	Sorties de GCM (300 km)	300 km / 2 km	Loi log-normale	Support fractal indépendant (β -modèle)
Rupp et al. (2009)	Séries temporelles de pluviomètres	1 jour / 1 h	Loi beta	Poids spécifique
Onof & Arnbjerg-Nielsen (2009)	Sorties de modèles régionaux (RCM)	1h / 5 min	Loi log-Poisson	Seuil + report des accumulations sous le seuil

Table 7.1 Synthèse de la littérature des applications d'algorithmes de downscaling multifractal à des données de précipitations

7.3.3 Limitations des algorithmes existants

On constate dans le tableau 7.1 que diverses lois statistiques ont été utilisées pour décrire l'incrément multiplicatif reliant deux résolutions voisines. Le choix de la loi statistique utilisée dans les cascades multiplicatives est délicat et peut être guidé par des considérations de réalisme physique. Au chapitre 3, nous avons souligné que le caractère discret des échelles est irréaliste et nous avons montré comment construire des cascades continues en échelle. Pour ces dernières, la distribution des incréments multiplicatifs est log- infiniment divisible, ce qui est le cas entre autre des lois log-stable, log-normale et log-Poisson. Néanmoins, de telles cascades devraient être construites sur des continuums d'échelle, c'est-à-dire en prenant un produit continu et non discret de tels incréments. De tels continuums sont obtenus aisément avec la construction des Multifractals « Universels » présentés au paragraphe 3.5. Il est évident que le caractère continu de la construction donne un degré de réalisme physique supplémentaire (Fig. 7.3).

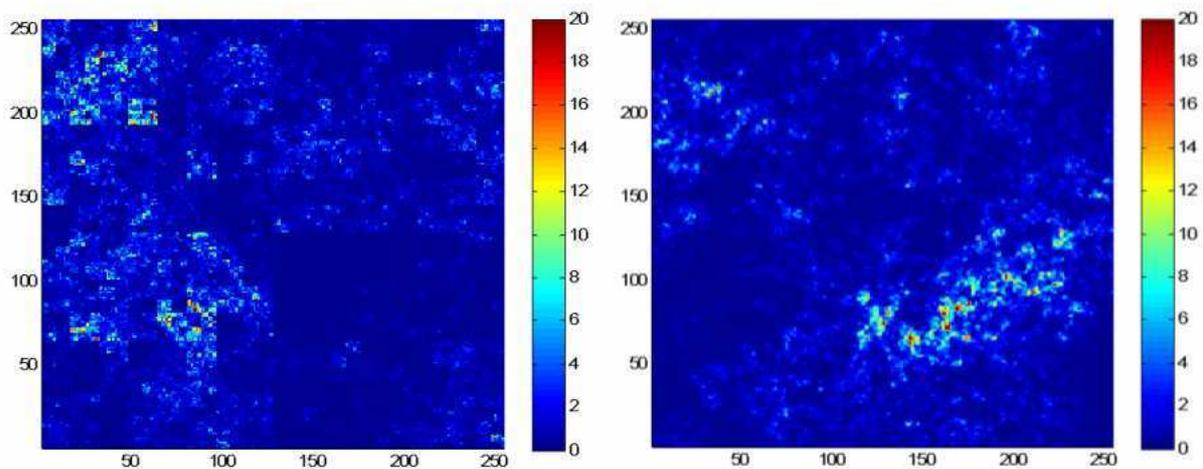


Figure 7.3 Exemple de simulations de cascades log-stables de mêmes paramètres ($\alpha = 1.8$; $C_1 = 0.1$; $H = 0$) à échelles discrètes (à gauche) et continues, c'est-à-dire multifractales universelles (à droite)

D'autre part, nous avons montré au chapitre 5 que dans le cas des processus précipitants plusieurs gammes d'échelles devaient être distinguées. Ces gammes peuvent être séparées par des transitions plus ou moins abruptes et les paramètres sont susceptibles de varier d'une gamme à l'autre. Comme nous l'avons vu aux chapitres 5 et 6, ces transitions peuvent en outre résulter de l'influence des zéros de la pluie sur les statistiques. Un algorithme de downscaling performant pour la pluie nécessite donc une modélisation suffisamment rigoureuse du support de la pluie et des seuils de mesure.

Comme le confirme les gammes d'échelles répertoriées dans le Tableau 7.1, les algorithmes de downscaling multifractal ont été principalement appliqués dans le cas de la pluie pour permettre le passage de l'échelle journalière à l'échelle horaire (et des échelles spatiales équivalentes). Ceci étant, nous avons montré au chapitre 5 que les processus précipitants admettaient des propriétés multifractales remarquables aux échelles sub-horaires. Il est donc potentiellement possible d'aller plus loin que la plupart des algorithmes existants en générant des réalisations à des échelles de l'ordre de la minute. De telles réalisations peuvent présenter un grand intérêt en hydrologie urbaine et jouer le rôle de variable d'entrée dans les modèles de prévision des crues (Onof & Arnbjerg-Nielsen, 2009). Cependant, les problèmes, non triviaux, liés à la modélisation du support interviennent de façon cruciale à ces échelles. Nous

ne sommes pas encore en mesure de pouvoir implémenter un algorithme « continu en échelle » capable de résoudre rigoureusement cette difficulté. Néanmoins, il est déjà intéressant d'étudier comment il serait possible d'appliquer un tel algorithme en l'absence de zéros. Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons à la faisabilité d'un algorithme de downscaling multifractal universel dans un cas simple, dans des zones sans zéros, et sans tenir compte du paramètre d'intégration fractionnaire (i.e. on suppose $H = 0$ pour simplifier).

7.3.4 Algorithme de « downscaling multifractal universel »

L'idée sous-jacente à cet algorithme consiste à passer par le domaine de Fourier et à « raccorder » les composantes haute et basse résolution. L'algorithme, applicable dans le cas de champs à valeurs strictement positifs, se présente comme suit :

1. Projeter le champ à dégrader (résolution λ) sur une grille de haute résolution (notée Λ). On peut procéder ici par interpolation au plus proche voisin mais d'autres techniques sont possibles. Dans un contexte différent (downscaling de textures), Chainais et al. (2010) ont proposé d'utiliser une interpolation B-spline, limitant au maximum la dégradation des propriétés spectrales.
2. Effectuer une simulation d'un champ multifractal universel suivant les principes décrits dans le chapitre 4 de ce travail. Les paramètres doivent être ceux du champ à dégrader dans la gamme où l'on doit ajouter de la variabilité.
3. Prendre le logarithme des deux champs. S'ils sont multifractals universels, le logarithme (appelé *générateur*) doit être un mouvement de Lévy fractionnaire (cf. section 3.5) monofractal et donc avoir un spectre en loi puissance décroissante.
4. Appliquer un filtre passe-bas au champ de l'étape 1. et un filtre passe-haut au champ de l'étape 2. La fréquence de coupure est fixée à la fréquence de Nyquist associée à l'échantillonnage basse résolution.
5. Additionner les deux champs obtenus à l'étape 4.
6. Prendre l'exponentielle du champ obtenu

Cet algorithme réalise en fait le downscaling du générateur plutôt que celui du champ lui-même. L'intérêt de cette implémentation est de pouvoir générer simplement un champ dégradé à valeurs positives (après exponentiation). Le générateur étant additif et non multiplicatif, il suffit d'additionner à l'étape 4. L'implémentation d'un algorithme de downscaling multiplicatif portant directement sur le champ lui-même est difficile précisément en raison des valeurs négatives qui risquent d'apparaître après des manipulations dans le domaine de Fourier. Certains auteurs préconisent dans ce cas de remplacer ces valeurs par 0 (Chainais et al., 2010).

A titre d'exemple, nous avons simulé une carte de taille 1024 x 1024 à partir d'un générateur multifractal universel de paramètres ($\alpha = 1.8$; $C_1 = 0.1$; $H = 0$). Cette carte est ensuite moyennée à la résolution 64 par agrégation de pixels. Nous avons simulé plusieurs réalisations de cartes reconstituées à la résolution originelle. La figure 7.4 présente la carte originelle, la carte moyennée et une réalisation possible. Comme le montre la figure 7.5, on ne distingue pas de discontinuités à petites échelles ce qui est une spécificité de l'algorithme présenté dans ce paragraphe. Au contraire, les algorithmes à échelles discrètes génèrent des « carrés » semblables à ceux illustrés sur la carte de gauche de la figure 7.3.

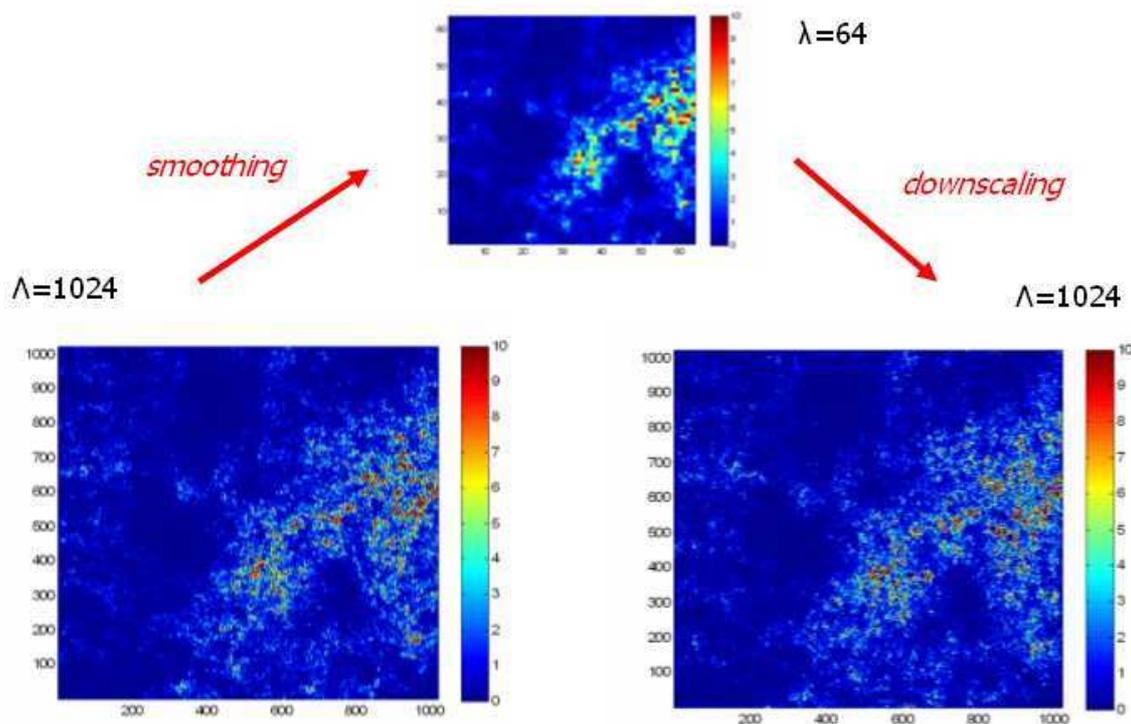


Figure 7.4 Exemple de downscaling multifractal universel (continu en échelle) sur une carte simulées

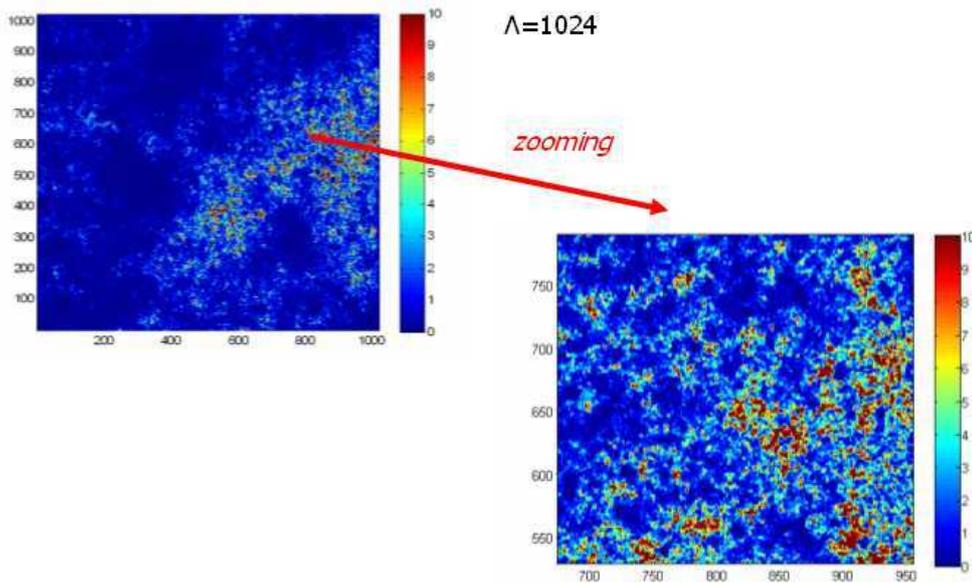


Figure 7.5 Détail d'une carte reconstituée par downscaling multifractal universel

L'algorithme présenté dans cette section présente deux défauts principaux : il désagrège le générateur et non le champ lui-même et il n'assure pas la conservation exacte des valeurs du champ par moyennage à la résolution « basse » λ . Le premier défaut ne paraît pas rhédibitoire car des algorithmes basés sur une idée similaire (désagréger le logarithme d'un champ extrêmement variable plutôt que le champ lui-même) ont déjà été appliqués avec succès dans un formalisme monofractal (Rebora et al., 2006). Concernant le second défaut, il est possible de le corriger par une renormalisation systématique des carrés associés aux pixels de la grille basse résolution (Chainais et al., 2010). Cette solution, non implémentée ici, présente cependant l'inconvénient de faire réapparaître des discontinuités dans le champ reconstitué par downscaling.

Malgré ces défauts, la distribution de probabilité des valeurs du champ à la haute résolution apparaît correctement reconstituée par l'algorithme, comme le montrent les figures 7.6 et 7.7 représentant respectivement les quantiles et les moments de cette distribution. La figure 7.6 montre que la distribution de probabilité est assez correctement reconstituée à l'échelle la plus fine, tandis que la figure 7.7 montre que les propriétés de « scaling » de divers ordres sont, comme attendu, préservées par l'algorithme. Il reste néanmoins à démontrer que les performances soient aussi satisfaisantes en désagrégeant des données réelles, lesquelles sont

susceptibles de présenter un niveau de bruit non négligeable à l'échelle d'observation pouvant conduire à une restitution inexacte à fine échelle. En outre, il est nécessaire de connaître les paramètres multifractals aux échelles plus petites que l'échelle d'observation, qui ne sont pas forcément les mêmes que ceux aux échelles plus grandes dans un cas d'étude d'ordre pratique.

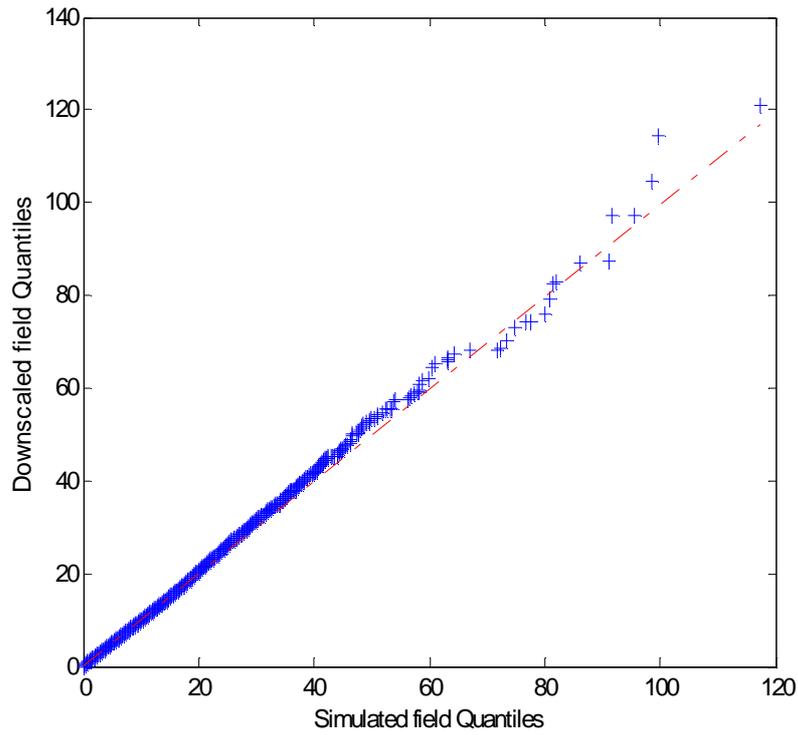


Figure 7.6 Comparaison des quantiles de la carte simulée initiale 1024×1024 (abscisse) et des cartes reconstituées (ordonnées) (à la résolution maximale).

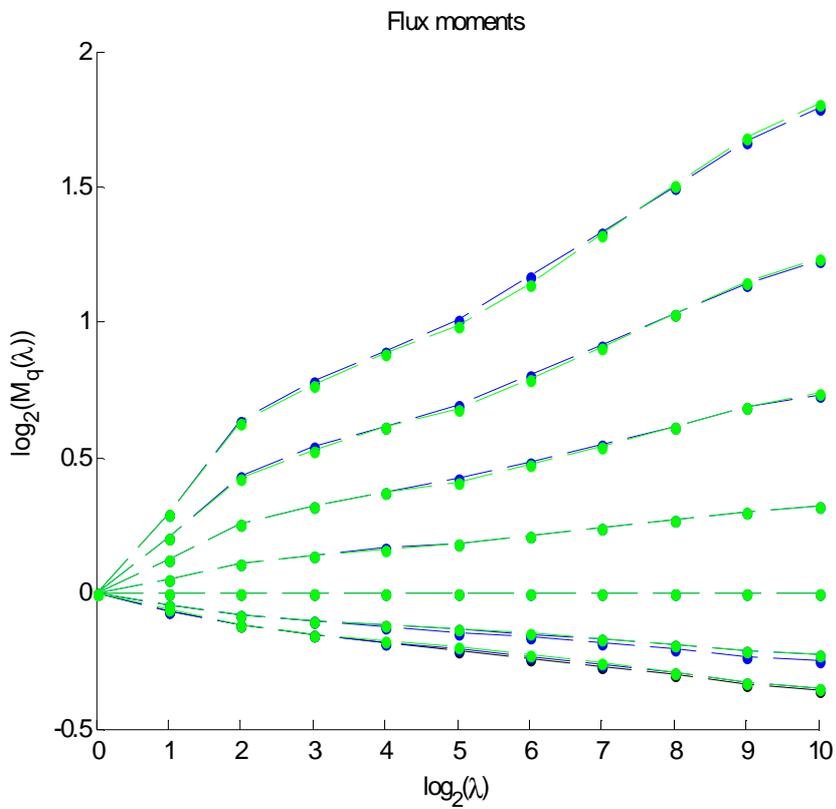


Figure 7.7 Moments empiriques d'ordres $0 < q < 2$, pour la carte simulée (en bleu) et pour les cartes reconstituées (en vert)

7.4 Conclusion

Ce chapitre visait à présenter deux applications possibles dont le cadre dérive directement des propriétés multifractales mises en évidence aux chapitres 5 et 6. La première application porte sur l'étude de la nature des queues de distribution des taux précipitants. Le formalisme multifractal prédit en effet la possibilité d'apparition de queues de distribution hyperboliques pour des séries chronologiques couvrant une extension temporelle suffisamment grande. Bien que de telles queues de distributions semblent bien être présentes dans diverses CDF empiriques proposées dans la littérature, il subsiste une incertitude quant à la valeur exacte de l'exposant de la queue hyperbolique car la théorie et l'expérience paraissent en désaccord sur cette valeur.

La seconde application est relative au « downscaling », c'est-à-dire à l'obtention d'informations sur un champ à haute résolution à partir d'observations ou de simulations à une résolution plus grossière. Les propriétés d'invariance d'échelle multifractale mises en évidence pour la pluie comme pour d'autres champs géophysiques paraissent trouver une application assez directe au downscaling statistique. De tels algorithmes pourraient être en mesure de générer autant de réalisations que souhaité à haute résolution connaissant le champ à une résolution plus basse. Le principe des cascades multiplicatives permet de générer la variabilité aux résolutions plus fines que celle des observations ou des sorties de modèle numérique. Typiquement, de telles cascades semblent en mesure de pouvoir réaliser des changements d'échelle pertinents du point de vue des applications météorologiques et hydrologiques, par exemple passer de un jour à une heure voire d'une heure à quelques minutes. Dans le cas de la pluie, il subsiste néanmoins un certain nombre de problèmes à résoudre, liés notamment à la modélisation du support d'occurrence du processus ainsi qu'à la non conservativité du phénomène précipitant.

8 Conclusion et perspectives

Le but de ce travail de thèse était d'étudier les propriétés statistiques des processus et des champs précipitants d'un point de vue multi-échelle, avec un accent mis sur les gammes d'échelles les plus intéressantes du point de vue de la météorologie, à savoir la méso-échelle et la sub-mésoéchelle. Le cadre théorique choisi était celui des modèles de cascades multiplicatives multifractales. Ces modèles ont été initialement développés par les physiciens pour décrire les statistiques de la turbulence, puis ont ensuite été appliqués à de nombreux autres champs, en particulier en géophysique (concentration d'eau liquide dans les nuages, dispersion de polluants, topographie ...). Nous avons vérifié que ces modèles pouvaient reproduire adéquatement les symétries statistiques des précipitations en appliquant des outils d'analyse multifractale à des données de précipitations à haute résolution collectées au moyen d'un radar et d'un spectropluviomètre. Ces jeux de données présentent la particularité de couvrir la mésoéchelle et la sub-mésoéchelle en temps comme en espace.

Au moyen des codes d'analyse implémentés à l'occasion de cette étude, nous avons tout d'abord identifié les gammes de « scaling » de la pluie. Nous avons montré l'existence d'un régime multifractal à la sub-mésoéchelle s'étendant de 20 km à 1 km environ en espace et de 30 min à moins d'une minute en temps. L'étude des séries chronologiques du spectropluviomètre, couvrant une durée totale de deux années, a permis de caractériser le comportement statistique à des échelles plus grandes et a permis de démontrer l'existence d'un second régime multifractal de méso-échelle pour des échelles s'étendant de 30 minutes à quelques jours. Chacune de ces gammes d'échelles peut être caractérisée au moyen de trois paramètres universels résumant les propriétés statistiques des champs dans un sens multi-échelle.

Nous avons montré, tout d'abord en analysant séparément les données complètes puis des sous-ensembles « exclusivement pluvieux » de celles-ci, puis par simulation et via des calculs théoriques, que les algorithmes (préexistants à ce travail) d'analyse multifractale pouvaient fournir des paramètres universels fortement biaisés en présence de nombreux zéros. Ce phénomène, lié au caractère multiplicatif des cascades multifractales, peut s'avérer problématique dans le cas de la pluie (en climat océanique-continentale, il pleut environ 5% du temps à l'échelle de la minute ...). Il pourrait même receler l'explication du fait que les

publications de la littérature existante ne parviennent pas à unifier les statistiques obtenues à partir de l'étude de données pluviométriques (contenant beaucoup de zéros) et de d'observations radar d'orages. Au contraire, en restreignant l'analyse à des événements de pluie ou à des régions sans zéros, on trouve les mêmes paramètres universels en temps et en espace : $\alpha = 1.8$ (indice de multifractalité fort), $C_1 = 0.1$ (co-dimension fractale des taux précipitants moyens à l'intérieur du processus d'occurrence), $H = 0.4$ (paramètre de « filtrage » passe-bas).

Ces derniers paramètres sont très voisins de ceux de la littérature relative à l'analyse multifractale de champs de « scalaires passifs » tels que les champs de polluants. D'autre part, la principale loi (démontrée mathématiquement et non empirique) de la modélisation statistique des scalaires passifs est la loi de Corrsin-Obukhov qui prédit exactement une valeur de $H = 1/3$. Nous pensons qu'il y a plus qu'une coïncidence dans la similarité entre les propriétés de la pluie et celles des scalaires passifs. Bien que les gouttes de pluie soient bien trop lourdes pour être advectées « passivement » par la turbulence, il paraît vraisemblable au vu d'avancées théoriques récentes que les deux champs puissent suivre les mêmes symétries statistiques au-delà d'une certaine échelle critique. Nous avons pu recenser les hypothèses physiques nécessaires pour exprimer les statistiques du taux précipitant dans un formalisme analogue à celui de Corrsin-Obukhov. Ce nouveau modèle théorique prédit une valeur de H voisine de 0.4, ce qui est en accord avec les statistiques des observations.

L'existence de propriétés multifractales à la (sub-) mésoéchelle traduit le fait que les précipitations ont une variabilité extrême et chaotique gouvernée par des interactions non linéaires (multiplicatives) entre les échelles. Il en résulte l'apparition de pics d'intensité considérable à très petite échelle susceptibles d'agir sur les échelles plus grandes et de faire émerger des comportements non triviaux aux échelles d'observation du phénomène. En particulier, des queues de distribution épaisses, à décroissance hyperbolique doivent apparaître dans les distributions de probabilité des accumulations horaires ou journalières de pluie. Ces queues de distribution algébriques traduisent une plus grande fréquence (et donc un temps de retour plus réduit) des événements extrêmes par rapport à celle prédite par les distributions usuelles en hydrologie (telles que la distribution de Gumbel, la distribution log-Pearson, etc.). De plus, ces queues de distribution résultent de la même dynamique non linéaire que celle qui produit les événements moyens et constituent donc une approche

physiquement justifiée au contraire d'approches fondées sur un ajustement statistique standard de quelques accumulations extrêmes au moyens de distributions a priori.

Enfin, le formalisme multifractal paraît très adapté pour des applications de downscaling statistique. L'utilisation d'une cascade multiplicative permet de générer aisément une variabilité multifractale au moyen de modulations multiplicatives à des échelles inférieures à une échelle d'observation ou de simulation donnée. Plusieurs auteurs ont proposé des algorithmes de downscaling fondés sur une division des échelles en une suite discrète. Nous avons souligné le caractère physiquement irréaliste de ces algorithmes qui génèrent artificiellement des « carrés ». Pour remédier à cet inconvénient, nous avons proposé un algorithme de downscaling continu en échelle fondé sur la théorie des multifractals universels. Néanmoins, l'application de ce dernier à la pluie reste délicate car elle nécessite une modélisation adéquate du support de la pluie, pouvant par exemple au moyen d'un effet de seuil ou d'une cascade monofractale indépendante. La poursuite de ces travaux devra donc porter sur l'intégration et la validation d'un modèle de support adapté aux applications liées au downscaling.

Ce travail a souligné la nécessité de distinguer les propriétés du processus d'occurrence de pluie de la variabilité des taux précipitants non nuls. Nous avons pu alors définir une caractérisation des propriétés multifractales au moyen de paramètres cohérents en temps et en espace. Cette paramétrisation, nouvelle par rapport à la littérature existante, se révèle intéressante car elle ouvre la voie à la simulation de champs précipitants évoluant à la fois en espace et en temps via par exemple un formalisme d'invariance d'échelle espace-temps isotrope (ou éventuellement anisotrope). Il est alors possible d'implémenter un simulateur de champs précipitants dynamiques à méso-échelle.

Les propriétés multifractales mises en évidence au cours de ce travail ont également des conséquences quant à la distribution de probabilité des événements de pluie extrêmes. En effet, la multifractalité jointe à l'agrégation d'échelle inhérente à toute observation peut faire apparaître des événements extrêmes avec une fréquence élevée comparativement à celles estimées par la plupart des lois statistiques utilisées en hydrologie. Pour les applications, il serait intéressant de pouvoir quantifier ce phénomène en termes de temps de retour des événements extrêmes de façon plus systématique qu'à présent ainsi que de l'exprimer en termes de courbes Intensité – Durée – Fréquence. Quelques travaux ont déjà étudié le passage

du formalisme multifractal aux courbes IDF mais étaient basés sur des hypothèses simplistes (gamme d'échelle unique, champs conservatifs) en regard de la phénoménologie de la pluie. Une étude plus systématique des extrema apparaît alors nécessaire, tant du point de vue théorique que de l'étude des données.

Enfin, les conclusions du travail demanderaient à être confirmées et étendues par l'application d'une démarche similaire à celle suivie dans cette étude à d'autres jeux de données (pluviomètres, radar, satellite...). Il serait intéressant de vérifier si les propriétés multifractales identifiées à l'intérieur des zones de pluie sont stationnaires en espace ou au contraire dépendantes du climat. De façon complémentaire à ce travail, on pourrait aussi s'intéresser aux propriétés de la pluie à des échelles temporelles plus grandes que l'échelle synoptique afin de caractériser la variabilité interannuelle et climatique, certains travaux récents ayant montré l'existence de propriétés de scaling d'une nature très différente (avec $H < 0$!) à ces échelles.

Le travail décrit dans ce manuscrit a présenté un grand intérêt dans sa réalisation en raison de son caractère pluridisciplinaire : il reposait sur une importante composante de modélisation, mais a aussi nécessité un travail sur les données. Enfin, il a aussi été nécessaire d'implémenter et de valider des codes d'analyse et de simulation de processus multifractals. Nous avons également souhaité rapprocher la statistique de la physique par l'analogie avec la théorie des scalaires passifs.

Annexes

A - Rappels sur les lois stables

Le succès de la loi de probabilité gaussienne dans tous les domaines de la science tient au fait que cette loi apparaît comme la limite de toute somme (adéquatement recalée et normalisée) de variables aléatoires i.i.d. de variance finie. C'est ce qu'exprime le célèbre théorème central limite :

Si (X_i) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ de variance finie σ^2 , alors

la suite de variables aléatoires (Y_n) définie par $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

Que se passe-t-il si les variables aléatoires X_i ne sont pas de variance finie ? En fait, il existe aussi une classe d'attracteurs plus large qui consiste en la une famille de variables aléatoires stables, dont le cas gaussien est un cas particulier. Il en résulte un « théorème central limite généralisé » dû à Gnedenko et Kolmogorov, dont la forme est légèrement différente, notamment parce que σ (et éventuellement μ) n'est (ne sont) pas défini(s). Les variables stables définies et décrites ci-dessous constituent une généralisation des variables de loi normales, mais elles ne sont pas nécessairement symétriques et peuvent avoir des queues de distribution lourdes.

Ci-dessous, nous rappelons la définition et les principales propriétés des variables stables. Pour plus de détails mathématiques ainsi qu'une justification des propriétés rappelées ci-dessous, on pourra se référer utilement à l'ouvrage de référence de Samorodnitsky & Taqqu (1994). Une synthèse théorique incluant quelques démonstrations peut être trouvée dans le mémoire rédigé par Azizieh (2006).

A.1 Définition

Définition:

Une variable aléatoire X est stable si elle vérifie:

$$\forall a, b \quad \exists c, d \quad aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \quad \text{où } X_1 \stackrel{d}{=} X_2 \stackrel{d}{=} X, \text{ i.i.d.} \quad (\text{Eq. A.1})$$

$a, b, c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$.

Une condition équivalente faisant intervenir n répliques de X ($X_i \stackrel{d}{=} X$) est la suivante ::

$$\forall n \geq 2, \quad \exists a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0 \quad \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} b_n X + a_n \quad (\text{Eq. A.2})$$

Les variables strictement stables correspondent au cas où $d=0$, $a_n = 0$ dans les équations précédentes.

Indice de stabilité :

Pour toute variable stable, il existe $\alpha \in]0, 2]$ tel que:

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha.$$

Avec les notations de la seconde définition (Eq. A.2), on a de même $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

α est appelé indice de stabilité ($\alpha = 2$ correspond au cas classique des lois gaussiennes). La variable est aussi dite « α -stable ».

A.2 Fonctions caractéristiques des variables stables

La définition (Eq. A.1-A.2) ne donne a priori guère d'information sur la forme de la densité de probabilité d'une variable stable. En outre, de telles densités n'ont généralement pas

d'expressions analytiques, à l'exception de quelques cas particuliers ($\alpha = 2^{-n}$ où n est un entier positif ou nul). Néanmoins, il résulte directement de la définition que les fonctions caractéristiques de X , soit $\varphi_X(q) = \langle \exp(iqX) \rangle$ doivent vérifier des équations fonctionnelles de la forme :

$$\forall a, b \quad \exists c, d \quad \varphi_X(aq) \times \varphi_X(bq) = \varphi_X(cq) \times d \quad (\text{Eq. A.3})$$

La solution générale de ces équations :

$$\alpha \neq 1: \left\langle e^{iqX} \right\rangle = e^{-\sigma^\alpha |q|^\alpha (1 - i\beta \cdot \text{sig}(q) \cdot \text{tg}(\frac{\pi}{2}\alpha)) + i\mu q} \quad (\text{Eq. A.4})$$

$$\alpha = 1: \left\langle e^{iqX} \right\rangle = e^{-\sigma |q| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sig}(q) \cdot \log(|q|)) + i\mu q}$$

dépend de trois paramètres (outre l'indice de stabilité α) :

- $\mu \in R$ est un paramètre de localisation qui dépend de la normalisation. C'est la moyenne du processus lorsque celle-ci est définie ($\alpha > 1$).
- $\sigma \in R^+$ est un paramètre d'échelle, proportionnel à l'écart-type lorsque celui-ci est défini ($\alpha = 2$).
- $\beta \in [-1, 1]$, paramètre d'asymétrie.

On note $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$.

Les lois $S_1(0, \mu, \sigma)$ et $S_{1/2}(1, \mu, \sigma)$ correspondent respectivement aux lois de Cauchy et de Lévy. Lorsque $\alpha = 2$ (cas gaussien), le paramètre d'asymétrie peut être éliminé et la distribution de probabilité est toujours symétrique.

A.3 Moments et fonction génératrice des moments

Pour $\alpha < 2$, les moments statistiques absolus divergent à partir de l'ordre α :

$$\langle |X|^q \rangle = \infty \quad \forall q \in [\alpha, \infty[.$$

La variance d'une variable stable n'est donc jamais définie en dehors du cas gaussien et la moyenne peut ne pas être définie (cas $\alpha \leq 1$). Cette divergence rend compte de l'existence de queues de distributions hyperboliques (i.e., en loi puissance décroissante). Notamment, lorsque $|\beta| \neq 1$, la densité de probabilité admet un comportement asymptotique en $|x|^{-\alpha-1}$ pour $|x| \gg 1$, à un facteur près qui n'est pas forcément le même pour $x > 0$ et $x < 0$, suivant la valeur du paramètre d'asymétrie. En revanche, lorsque $\beta = 1$ (resp. -1), la distribution de probabilité n'est asymptotiquement hyperbolique que pour $x \gg 0$ (resp. $x \ll 0$).

Il résulte de ces considérations que la fonction génératrice des moments d'une variable stable,

i.e. $\psi_X(q) = \langle \exp(qX) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{k!} \langle X^k \rangle$, n'est pas définie à l'exception du cas unique pour

lequel la distribution de probabilité de X n'admet qu'une queue hyperbolique et du côté des valeurs négatives, soit $\beta = -1$.

Dans ce cas, il est possible d'exprimer la fonction génératrice des moments au moyen de la relation $\psi_X(q) = \varphi_X(-iq)$. Moyennant un changement de variable sur le paramètre d'échelle, on obtient :

$$\psi_X(q) = \langle \exp(qX) \rangle = \exp(\theta^\alpha q^\alpha + \mu q) \quad (\text{Eq. A.5})$$

où θ est un paramètre positif.

Les variables α -stables asymétriques extrémales négatives se déduisent donc d'une même variable « unitaire » γ_α par la relation affine:

$$X = \theta.X + \mu \quad (\text{Eq. A.6})$$

et sont donc caractérisées par un paramètre d'échelle et un paramètre de position (on rappelle que le paramètre d'asymétrie est fixé égal à -1).

A.4 Autres propriétés des variables stables

- Addition : Soient $X_1 \sim S_\alpha(\beta_1, \mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim S_\alpha(\beta_2, \mu_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$ où :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad \sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$$

- Ajout d'un scalaire : Soit $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $X + a \sim S_\alpha(\beta, \mu + a, \sigma)$

- Multiplication par un scalaire : Soit $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$ et $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, alors $a.X \sim S_\alpha(\text{sig}(a).\beta, a\mu, |a|\sigma)$

- Stricte stabilité : Soit $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$, où $\alpha \neq 1$. X est strictement stable, si et seulement si, $\mu = 0$

B - Construction mathématique de champs multifractals « universels »

B.1 Principe

Nous considérons dans cet annexe une construction mathématique explicite de cascades multiplicatives log-stables continues en échelle. Le générateur de cette cascade (c'est-à-dire son logarithme) doit donc être une cascade additive de variables stables. La continuité en échelle empêche toutefois la cascade d'avoir une structure itérative dyadique de subdivisions. La distance entre deux pixels n'est pas spécifiée dans le cas continu par une telle structure dyadique, mais au contraire par une véritable fonction continue et positive. On peut donc conjecturer que le générateur du modèle universel va prendre en compte des sommes de variables aléatoires stables i.i.d., pondérées en fonction de la distance. Il s'agit donc d'effectuer une convolution entre un bruit blanc stable et une fonction de pondération w décroissante avec la distance :

$$\Gamma_\lambda(x) = \int_1^\lambda \sigma \cdot \gamma_\alpha(x') \cdot w(x - x') dx' \quad (\text{Eq. B.1})$$

Ci-dessus, nous supposons que la taille d'un pixel est unitaire. Le paramètre σ représente ici l'amplitude du bruit stable. La convolution doit en outre être faite sur un support tronqué aux échelles comprises entre celle du pixel et celle du domaine de simulation.

Il faut maintenant déterminer deux choses :

- La forme de la fonction de pondération
- La valeur du paramètre σ afin d'assurer une valeur correcte pour C_1

B.2 Fonction de pondération

Dans la suite, on note la seconde fonction caractéristique d'une variable aléatoire, au sens de Laplace:

$K_X(q) = K\{X\}(q) = \log\langle e^{qX} \rangle$, qui vérifie les propriétés:

$$K_{X_1+X_2}(q) = K_{X_1}(q) + K_{X_2}(q) \text{ et } K_{aX}(q) = K_X(aq)$$

On rappelle les propriétés du bruit stable unitaire γ_α , tel que défini au paragraphe 10.1:

$$\langle e^{q\gamma} \rangle = e^{q^\alpha}, \quad q \geq 0, \text{ et } \infty, q < 0, \alpha < 2.$$

et (Eq. B.2)

$$\langle e^{q(\sigma\gamma)} \rangle = e^{\sigma^\alpha q^\alpha}$$

L'amplitude, dans le cas d'une somme de v.a. strictement stables, est contrainte par une équation du type: $\sigma^\alpha = \sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha$.

Si η est un bruit de strictement stable, on peut donc écrire:

$\sum_j a_j \eta(j) = \left(\sum_j a_j^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \eta$, ce qui peut s'étendre au cas continu d'une fonction de pondération

(Schertzer & Lovejoy, 1991):

$$\int_B \eta(x') \gamma_\alpha(x') d^D x' = \left[\int_B \eta(x')^\alpha d^D x' \right]^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_\alpha$$

La seconde fonction caractéristique de $\int_B \eta(x') \gamma_\alpha(x') d^D x'$ est donc

$$K \left\{ \int_B \eta(x') \gamma_\alpha(x') d^D x' \right\} (q) = K_\gamma(q) \times \left(\left[\int_B \eta(x')^\alpha d^D x' \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha = q^\alpha \int_B \eta(x')^\alpha d^D x'$$

Enfin, dans le cas d'une convolution limitée un support $\Omega_\lambda = \{1 \leq |x| \leq \lambda\}$, induit par la limitation des échelles dans la simulation:

$$\Gamma_\lambda = \int_{1 < |x'| < \lambda} w(x-x') \cdot \sigma \cdot \gamma(x') d^D x' = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-x') \cdot \sigma \cdot f_\lambda(x-x') \cdot \gamma(x') d^D x', \quad \text{où } f_\lambda \text{ désigne la}$$

fonction indicatrice de $\Omega_\lambda = \{1 \leq |x| \leq \lambda\}$.

$$\Gamma_\lambda = \int_{1 < |x'| < \lambda} w(x-x') \cdot \sigma \cdot \gamma(x') d^D x' = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-x') \cdot \sigma \cdot f_\lambda(x-x') \cdot \gamma(x') d^D x'$$

$$K_{\Gamma_\lambda}(q) = \left(\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x-x')^\alpha f_\lambda(x-x') d^D x' \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha K_{\sigma\gamma}(q)$$

$$K_{\Gamma_\lambda}(q) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(x-x')^\alpha f_\lambda(x-x')^\alpha d^D x' \right] \sigma^\alpha K_\gamma(q) = \left[\int_{1 < |x'| < \lambda} w(x')^\alpha d^D x' \right] \sigma^\alpha q^\alpha$$

(en effet, l'intégrale à support infini ne dépend pas de x)

donc :

$$\left\langle e^{q\Gamma_\lambda} \right\rangle = e^{\underbrace{\sigma^\alpha q^\alpha \int_{1 < |x'| < \lambda} w(x')^\alpha d^D x'}_{\propto \log(\lambda)}}$$

De façon à assurer $K_{\Gamma_\lambda}(q) = K(q) \log(\lambda)$ (équivalente à l'équation fondamentale (Eq. 3.16) du formalisme multifractal), il suffit que l'intégrale de w^α sur le domaine donne $\log(\lambda)$. Il suffit donc de prendre $w(x) \propto |x|^{-\frac{D}{\alpha}}$ si $1 < |x| < \lambda$ et 0 sinon.

Comme l'intégrale de la fonction $|x|^{-\frac{D}{\alpha}}$ est en fait égale à $N_D \log(\lambda)$ où $N_D = \int_{|x|=1} d^D x$ est fonction de la dimension de l'espace (soit 2; 2π ; 4π dans les cas mono-, bi- et tridimensionnels isotropes), on obtient une solution « normalisée » en prenant :

$$w(x) = N_D^{-\frac{1}{\alpha}} |x|^{-\frac{D}{\alpha}} \quad (\text{Eq. B.3})$$

B.3 Détermination de l'amplitude du bruit stable

Le champ construit ci-dessus n'est pas normalisé: $\langle \Phi_\lambda \rangle = \lambda^{\sigma^\alpha}$. Si on le normalise à toutes les résolutions en le divisant par sa moyenne à la résolution correspondante, on obtient un champ $\bar{\Phi}_\lambda$ dont le générateur admet pour fonction caractéristique:

$$\bar{K}_{\Gamma_\lambda}(q) = K_{\Gamma_\lambda}(q) - q \cdot \lambda^{\sigma^\alpha} \log(\lambda) = \bar{K}(q) \log(\lambda) \quad (\text{le champ normalisé est donc multifractal})$$

où $\bar{K}(q) = \sigma^\alpha (q^\alpha - q)$ est la fonction d'échelle des moments du champ normalisé $\bar{\Phi}_\lambda$.

La relation $K'(1) = C_1$ nous donne alors la valeur de l'amplitude du bruit:

$$\sigma = \left(\frac{C_1}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{Eq. B.4})$$

Références

- Atlas D., Srivastava R. C., Sekhon R. S. (1973). Doppler radar characteristics of precipitation at vertical incidence. *Reviews of Geophys. and Space Phys.*, 11, 1-35
- Azizieh C., 2002: Modélisation de séries financières par un modèle multifractal. Mémoire pour diplôme d'actuaire. Université Libre de Bruxelles.
- Bender, C.M., and S.A. Orszag, (1978), *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mc Graw Hill, New-York, NY.
- Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. (1984), On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys.* A17, 3521-31
- Bernardara P., C. De Michele, R. Rosso (2007), A simple model of rain in time: An alternating renewal process of wet and dry states with a fractional (non-Gaussian) rain intensity, *Atmospheric Research*, 84, 291-301
- Biaou A. (2004), De la méso-échelle à la micro-échelle: désagrégation spatio-temporelle multifractale des précipitations, thèse de l'Ecole des Mines de Paris, Paris, France
- Blanchet G., Deblaere J.C. (1993). *Revue de géographie de Lyon*, 68, 129-138
- Chainais P., Koenig E., Delouille V., Hochedez J. F. (2010). Virtual super resolution of scale invariant textured images. *Journal of mathematical imaging and vision*, 39(1), 28-44, DOI: 10.1007/s10851-010-0222-6
- Charney J. (1971), Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 28, 1087-1094
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.
- Corrsin, S., 1951. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Appl. Phys.* 22, 469–473.
- Crane R. K. (1990), Space-time structure of rain rate fields, *J. Geophys. Res.*, 95, D3, 2011-2020.
- Cressman G. P. (1959), An operational objective analysis system. *Monthly Wea. Rev.*, 87, 367–374.
- de Lima M.I.P., J. Grasman (1999), Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal, *J.Hydrol.*, 220, 1-11.
- de Montera, L., L. Barthès, , C. Mallet, , P. Golé, (2009), The effect of rain- no rain intermittency on the estimation of the universal multifractals model parameters. *J. Hydrometeorol.*, 10, 493–506.

- de Montera L., S. Verrier, C. Mallet, L. Barthès (2010), A passive scalar-like model for rain applicable up to storm scale, *Atmospheric Research*, 98, 140-147
- de Montera L., M. Jouini, S. Verrier, S. Thiria, M. Crepon (2011). Multifractal analysis of oceanic chlorophyll maps remotely sensed from space, *Ocean Science*, 7, 219-229
- Deidda R., Benzi R., Siccardi F. (1999), Multifractal modeling of anomalous scaling laws in rainfall, *Wat. Resour. Res.*, 35, 1853-1867
- Deidda R. (2000), Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework, *Wat. Resour. Res.*, 36(7), 1779-1794.
- Delahaye, J.-Y., L. Barthès, P. Golé, J. Lavergnat, J. P Vinson, (2006), A dual-beam spectropluviometer concept, *J. Hydrol.*, 328, 110-120.
- Desaulniers-Soucy N., Lovejoy S., Schertzer D., (2001), The HYDROP experiment: an empirical method for the determination of the continuum limit in rain. *Atmos. Res.* 59-60, 163-197
- Dubrulle B. (1994), Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance, *Phys. Rev. Lett.*, 73, 959-962
- Fabre G. (1989) Les inondations catastrophiques de Nîmes et de sa région du lundi 3 octobre 1988. *Revue de géographie de Lyon*, 64, 224-230
- Fabry F. (1996), On the determination of scale ranges for precipitation fields, *J. Geophys. Res.*, 101, D8, 12819-12826
- Falconer, K. (2003), *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*. Second ed.. John Wiley.
- Ferraris, L., S. Gabellani, N. Rebora, and A. Provenzale (2003), A comparison of stochastic models for spatial rainfall downscaling, *Water Resour. Res.*, 39(12), 1368, doi:10.1029/2003WR002504,.
- Flaounas E., Drobinski P., Vrac M., Bastin S., Lebeaupin Brossier C. (2011), Seasonal variability and extremes of precipitation and temperature in the Mediterranean region : Evaluation of dynamical and statistical downscaling methods for the frame of HyMeX and MED-CORED. Submitted to *Climate Dynamics*.
- Fraedrich K., C. Larnder, (1993), Scaling regimes of composite rainfall time series, *Tellus*, 45, 289-298.
- Frisch, U., et al. (1978), A simple dynamical model of intermittency in fully developed turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 87, 719-724.

- Gage, K. S., and G. D. Nastrom (1986), Theoretical Interpretation of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft during GASP, *J. of the Atmos. Sci.*, 43, 729-740.
- Gires A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D., Lovejoy S. (2010), Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle méso-NH et des données radar, *Hydrological Sciences Journal*, 56, 380-396
- Gunter A., Olsson J., Calver A., Gannon B., (2001), Cascade-based disaggregation of continuous rainfall time series: the influence of climate, *Hydrol. and Earth Syst. Sci.*, 5, 145-164
- Gupta V. K., Waymire E., (1990), Multiscaling properties of spatial rainfall and river flow distributions, *J. Geophys. Res.*, 95, D3, 1999-2009
- Gupta V. K., Waymire E., (1993), A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *J. App. Meteor.*, 32, 251-267
- Gupta, V.K., Waymire, E.C., (1997), Reply. *J. Appl. Meteorol.* 36, 1304.
- Habib E., Krajewski W F., Kruger A. (2001), Sampling errors of tipping-bucket rain gauge measurements. *Journal of Hydrologic Engineering*, 6, 159-166
- Halsey T. C., M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman (1986), Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* 33, 1141.
- Harris, D., M. Menabde, A. Seed, and G. Austin (1996), Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence, *J. Geophys. Res.*, 101(D21), 26,405–26,414.
- Hubert P., J.P. Carbonnel, A. Chaouche (1989). Segmentation des séries hydropluviométriques-application à des séries de précipitations et de débits de l'Afrique de l'Ouest. *J. Hydrol.*, 110, 349-367.
- Hubert P., (2001), Multifractals as a tool to overcome scale problems in hydrology. *Hydrological Sciences Journal*, 46, 897-905
- Hubert P., (2005), La prédétermination des crues. *C. R. Géoscience*, 337, 219-227
- Huet P. (2003). Rapport Huet de l'inspection générale de l'environnement pour le retour d'expérience des crues de Septembre 2002 dans les départements du Gard, de l'Hérault, du Vaucluse, des Bouches du Rhône, de l'Ardèche et de la Drôme.
- Kiely, G., K. Ivanova, (1999), Multifractal analysis of hourly precipitation. *Phys. Chem. Earth Part B* 24, 781-786.

- Kolmogorov, A.N., (1941), Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Proc. Acad. Sci. URSS, Geophys. Sect.* 30, 299–303.
- Kolmogorov, A.N., (1962), A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.* 13, 82–85.
- Kraichnan R. H. (1967), Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Physics of Fluids*, 10, 1417-1423
- Ladoy, P., F. Schmitt, D. Schertzer, S. Lovejoy (1993), Variabilité temporelle des observations pluviométriques à Nimes, *Comptes Rendues Acad. des Sciences*, 317, 775-782.
- Lavallée, D., D. Schertzer, S. Lovejoy, (1991), On the determination of the co-dimension function. *Scaling, fractals and non-linear variability in geophysics*, D. Schertzer, S. Lovejoy eds., 99-110, Kluwer.
- Lavallée, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, F. Schmitt, (1992), On the determination of universal multifractal parameters in turbulence. *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*, Eds. K. Moffat, M. Tabor, G. Zaslavsky, p.463-478, Kluwer.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., Ladoy, P., (1993), Nonlinear variability of landscape topography: multifractal analysis and simulation. In: De Cola, L., Lam, N. (Eds.), *Fractals and Geography*. Prentice Hall, New Jersey, pp. 158–192.
- Lavergnat, J., P. Golé (1998), Stochastic raindrop time distribution model, *Journal of Applied Meteorology*, 37(8), 805-818.
- Lilley, M., S. Lovejoy, K. Strawbridge, and D. Schertzer, (2004), 23/9 dimensional anisotropic scaling of passive admixtures using lidar aerosol data, *Phys. Rev. E*, 70, 036307-1-7.
- Lilley, M., S. Lovejoy, N. Desaulniers-Soucy, D. Schertzer (2006), Multifractal large number of drops limit in rain, *J. Hydrol.*, 328, 20-37.
- Lilley, M., S. Lovejoy, K. Strawbridge, D. Schertzer, A. Radkevitch, (2008), Scaling turbulent atmospheric stratification, Part II: spatial stratification and intermittency from lidar data *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 134, 301-315.
- Llort, X.; Berenguer, M.; Franco, M.; Sánchez-Diezma, R.; Sempere-Torres, D. (2006), 3D downscaling model for radar-based precipitation fields. *Meteorologische Zeitschrift*, Volume 15, Number 5, October , pp. 505-512
- Lorenz E. (1963), Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 130-141.

- Lovejoy, S. (1981), Analysis of rain areas in terms of fractals, 20th conf. on radar meteorology, 476-484, AMS Boston
- Lovejoy, S., (1982), The area-perimeter relations for rain and cloud areas. *Science*, 216, 185-187.
- Lovejoy, S., B. Mandelbrot (1985), Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, 37A, 209-232.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, (1985), Generalized scale invariance and fractal models of rain, *Wat. Resour. Res.*, 21, 1233-1250.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, (1990), Multifractals, universality classes, satellite and radar measurements of clouds and rain, *J. Geophys. Res.*, 95, 2021-2034.
- Lovejoy, S., D. Schertzer (1995), Multifractals and Rain, in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological modelling*, edited by A. W. Kundzewicz, pp. 62-103, Cambridge press.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, (2006), Stereophotography of rain drops and compound poisson - cascade processes, *Proceedings, American Meteor. Soc. Cloud conference, Madison, July 12-14*, p. 14.4.1-14.4.19.
- Lovejoy S., Schertzer D. (2007), Scale, scaling and multifractals in geophysics: twenty years on, in *Nonlinear dynamics in geosciences*, edited by Tsonis A. and Ellsner J., Springer, pp. 311-337, doi: 10.1007/978-0-387-34918-3_18
- Lovejoy, S., Schertzer, D., (2008), Turbulence, rain drops and the $11/2$ number density law. *New J. Phys.*, 10, 075017(32pp). doi: 10.1088/1367-2630/10/7/075017.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, V. Allaire, (2008), The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation, *Atmos. Res.*, 90, 10-32, doi 10.1016/j.atmosres.2008.02.016.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, M. Lilley, K. Strawbridge, A. Radkevitch , (2008b), Scaling turbulent atmospheric stratification, Part I: turbulence and waves, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 134, 277-300.
- Lovejoy S., Schertzer D. (2010), Towards a new synthesis for atmospheric dynamics: Space-time cascades. *Atmospheric Research*, 96, 1-52.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, (2010b), On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I: spatially continuous processes, *Computers and Geoscience*, 10.1016/j.cageo.2010.04.010.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, (2010c), On the simulation of Continuous in scale universal multifractals, part II: space-time processes and finite size corrections, *Computers and Geoscience*, 10.1016/j.cageo.2010.07.001.

- Lovejoy S., Pielou E. C., Schertzer D. (2011): The global space-time cascade structure of precipitation: satellites, gridded gauges and reanalyses. *Advances in Wat. Resour.*, in press
- Lowen S. B., M. C. Teich (1993), Fractal renewal processes generate $1/f$ noise, *Phys. Rev. E* 47, 992–1001
- Macor J. L. (2007). Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellite, thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, France
- Macor J., Schertzer D., Lovejoy S., (2007), Méthodes Multifractales Appliquées à la Prévision de Pluie en Utilisant des Données Radar in *La Houille Blanche*, Num. 4 (août 2007) pp. 92.
- Mandapaka P. V., Lewandowski P. Eichinger W. E., Krajewski W. F., (2009), Multiscaling of high resolution space-time lidar-rainfall, *Nonlinear Proc. in Geophys.*, 16, 579-586
- Mandelbrot, B., (1967), How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, *Science*, 155, 636-638.
- Mandelbrot, B. (1974), Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62, 331–350.
- Mandelbrot, B., (1975), Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 72(10), 3825–3828, 1975.
- Mandelbrot, B. (1983), *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco
- Marsan, D., D. Schertzer, S. Lovejoy (1996), Causal space-time multi-fractal processes: predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101, 26333–26346.
- Marshall J. S., Palmer W. M. (1948), The distribution of raindrops with size. *J. Meteor.*, 5, 165-166.
- Maxey M. R., (1987), The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. *J. Fluid Mech.*, 174, 441-465.
- Meneveau, C., and K. R. Sreenivasan (1987), Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence, *Physical Review Letters*, 59, 1424-1427.
- Michelangeli, P.-A., M. Vrac, and H. Loukos (2009), Probabilistic downscaling approaches: Application to wind cumulative distribution functions, *Geophys. Res. Lett.*, 36, L11708, doi:10.1029/2009GL038401.

- Molini A., Katul G. G., Porporato A., (2009), Revisiting rainfall clustering and intermittency across different climatic regimes, *Wat. Resour. Res.*, 45, doi:10.1029/2008WR007352
- Monin, A.S., Yaglom, A.M., (1975),. *Statistical Fluid Mechanics*. MIT press, Boston Ma.
- Muzy J. F., Bacry E., Arneodo, (1991), Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.* 67, 3515–3518
- Nastrom, G. D., and K. S. Gage (1983), A first look at wave number spectra from GASP data, *Tellus*, 35, 383.
- Novikov, E.A., Stewart, R., (1964), Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geofiz.* 3, 408–412.
- Obukhov, A.M. (1949), Structure of the temperature field in a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R, Ser Geograf. Geofiz.* 13, 58–69.
- Obukhov, A.M. (1962), Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid. Mech.* 13, 77–81.
- Olsson, J., J. Niemczynowicz, and R. Berndtsson (1993), Fractal Analysis of High-Resolution Rainfall Time Series, *J. Geophys. Res.*, 98(D12), 23,265–23,274, doi:10.1029/93JD02658.
- Olsson, J. (1995), Limits and characteristics of the multifractal behavior of a high resolution rainfall time series, *Nonlin. Processes Geophys.*, 2, 23–29.
- Olsson J., Niemczynowicz J. (1996), Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions, *J. Hydrol.*, 187, 29-43
- Olsson J. (1998), Evaluation of a scaling cascade model for temporal rain- fall disaggregation. *Hydrology and Earth System Sciences* 2, 19-30
- Over, T. M., V. K. Gupta (1996), A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades, *J. Geophys. Res.*, 101(D21), 26319–26331
- Parisi, G., Frisch, U., (1985), A multifractal model of intermittency. In: Benzi, M., Parisi, R., Ghil, G. (Eds.), *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Amsterdam, pp. 84–88.
- Pathirana A., S. Herath , T. Yamada (2003), Estimating rainfall distributions at high temporal resolutions using a multifractal model. *Hydrology and Earth System Sciences* 7, 668-679
- Paulson K. S., Baxter P. D. (2007), Downscaling of rain gauge time series by multiplicative beta cascade, *J. Geophys. Res.*, 11 2 , D09105, doi:10.1029/2006JD007333.

- Pecknold, S., S. Lovejoy, D. Schertzer, C. Hooge, J.F. Malouin, (1993), The simulation of universal multifractals. *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*, Eds. J.M. Perchang, A. Lejeune, World Scientific, p 228-267.
- Radkevich, A., S. Lovejoy, K. Strawbridge, D. Schertzer, M. Lilley, (2008), Scaling turbulent atmospheric stratification, Part III: Space-time stratification of passive scalars from lidar data, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 134, 316-335.
- Rebora N., L. Ferraris, J. Von Hardenberg, A. Provenzale (2006), Rainfall downscaling and flood forecasting: a case study in the Mediterranean area. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 6, 611–619
- Rhys F. S., Waldvogel A. (1986), Fractal shape of hail clouds. *Phys. Rev. Lett.*, 56, 784-787.
- Richardson L.F. (1922), *Weather prediction by numerical process*, Cambridge Univ. Press.
- Richardson, L. F. (1961), The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels, *General Systems Yearbook*, 6, 139-187.
- Rupp, D. E., R. F. Keim, M. Ossiander, M. Brugnach, and J. S. Selker (2009), Time scale and intensity dependency in multiplicative cascades for temporal rainfall disaggregation, *Water Resour. Res.*, 45, W07409, doi:10.1029/2008WR007321.
- Sadourny R., and K. Maynard, (1997), Formulations of lateral diffusion in geophysical fluid dynamics models. *Numerical Methods in Atmospheric and Oceanic Modelling*, C. A. Lin, R. Laprise, and H. Ritchie, Eds., NRC Research Press, 547–556.
- Samorodnitsky, G., Taqqu M. S., (1994), *Stable non-Gaussian random processes*. New York : Chapman & Hall, 632 pp., ISBN : 0-412-05171-0.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, (1985), Generalised scale invariance in turbulent phenomena, *Physico-Chemical Hydrodynamics Journal*, 6, 623-635.
- Schertzer D., S. Lovejoy, (1985b), The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, *Turbulent Shear flow* 4, 7-33, B. Launder ed., Springer.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, (1987), Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades. *J. Geophys. Res.* 92, 9692-9714.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, (1991), Nonlinear geodynamical variability: Multiple singularities, universality and observables. *Scaling, fractals and non-linear variability in geophysics*, D. Schertzer, S. Lovejoy eds., 41-82, Kluwer.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, (1992), Hard and Soft Multifractal processes: *Physica A*, 185, 187-194.

- Schertzer, D., S. Lovejoy, D. Lavallée (1993), Generic multifractal phase transitions and self-organized criticality. *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*, Eds. J.M. Perchang, A. Lejeune, World Scientific, p 216-227.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, (1994), Multifractal Generation of Self-Organized Criticality, in *Fractals In the natural and applied sciences* Ed. M.M. Novak, Elsevier, North-Holland, 325-339.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., (1997), Universal multifractals do exist! *J. Appl. Meteorol.* 36, 1296–1303.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Hubert, P., (2002), An introduction to stochastic multifractal fields. In: Ern, A., Weiping, L. (Eds.), *Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering. Series in Contemporary Applied Mathematics*, vol. 4. Higher Education Press, Beijing, pp. 106–179.
- Schmitt, F., D. Schertzer, S. Lovejoy, G. Brunet, (1996), Universal multifractal structure of atmospheric temperature and velocity fields. *Europhysics Lett.* 34, 195-200.
- Schmitt, F., S. Vannitsem, A. Barbosa (1998), Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals, *J. Geophys. Res.*, 103, 23181–23193.
- Scialom, G., Faroux, J., Giraud, M., Ney, R., Evaristo, R., Lemaître, Y., Viltard, N., (2009), RONSARD radar: implementation of dual polarization on a C-band Doppler weather radar. *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 6, 132–136.
- Seuront, L., F. Schmitt, D. Schertzer, Y. Lagadeuc, S. Lovejoy, (1996), Multifractal Analysis of Eulerian and Lagrangian Variability of Physical and Biological Fields in the Ocean, *Non. Proc. in Geophys.* 3, 236-246.
- Sharma, D. and Das Gupta, A. and Babel, M. S. (2007), Spatial disaggregation of bias-corrected GCM precipitation for improved hydrologic simulation: Ping River Basin, Thailand. *Hydrology and Earth System Sciences* 11, 4 (2007) 1373-1390
- She Z. S., E. Levêque (1994), Universal scaling laws in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 336–339.
- She Z. S., E. Waymire (1995), Quantized Energy Cascade and Log-Poisson Statistics in Fully Developed Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 74, 262–265.
- Sreenivasan K. R. (1991), Fractals and multifractals in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23, 539-600
- Sun X., Barros A. P. (2010), An evaluation of the statistics of rainfall extremes in rain gauge observations, and satellite-based and reanalysis products using Universal Multifractals, *J. Hydrometeor.* 11, 388-404

- Svensson C., Olsson J., Berndtsson R. (1996), Multifractal properties of daily rainfall in two different climates, *Wat. Resour. Res.*, 32, 2463-2472
- Talagrand O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 75, 191-209
- Taylor G. I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1938, 164: 476-490
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., (1993), Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *J. Appl. Meteorol.* 32, 223–250.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, P. Hubert, D. Schertzer, S. Pecknold (1996), Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions, *J. Geophys. Res.*, 101, 26427–26440.
- Veneziano D., Bras R., Niemann J. D. (1996), Non-linearity and self similarity of rainfall in time and a stochastic model. *J. Geophys. Res.*, 101, D21, 26371-26392
- Veneziano, D., Furcolo, P., (1999), A modified double trace moment method of multifractal analysis. *Fractals* 7, 181–195.
- Venig-Meinesz, F. A., (1951), A remarkable feature of the Earth-s topography. *Proc. K. Ned. Akad. Wet. Ser. B Phys. Sci.* 54, 212–228.
- Verrier S., L. de Montera, L. Barthès, C. Mallet (2010), Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem, *J. Hydrol.*, 389, 111-120
- Verrier S., C. Mallet, L. Barthès, (2011), Multiscaling properties of rain in the time domain, taking into account rain support biases, *Journal of Geophysical Research- Atmospheres*, doi:10.1029/2011JD015719, in press.
- Wilson, J., S. Lovejoy, D. Schertzer, (1991), Physically based cloud modelling by scaling multiplicative cascade processes. *Scaling, fractals and non-linear variability in geophysics*, D. Schertzer, S. Lovejoy eds.,185-208, Kluwer.
- Yaglom, A.M., (1966), The influence of the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.* 2, 26–30.

Articles

1 Multiscaling properties of rain in the time domain, taking into 2 account rain support biases

3 S. Verrier,¹ C. Mallet,¹ and L. Barthès¹

4 Received 26 January 2011; revised 25 July 2011; accepted 25 July 2011; published XX Month 2011.

5 [1] A number of studies have shown that rainfall processes may be described by stochastic
6 scaling models in the time domain. However, most of the data sets have a resolution
7 that is too limited to perceive the internal structure and variability of rain events. In this
8 study, we analyze high-resolution (15 s) disdrometer time series, of total duration 2 years,
9 obtained in Palaiseau, France. Monofractal and multifractal analysis tools are applied
10 to the data set in order to investigate the scaling properties of the process, especially within
11 the framework of universal multifractals (UMs). From spectral analysis and first-order
12 structure function, it is shown that rainfall should be modeled by nonconservative
13 (integrated) processes at small scales (hourly or finer) but not at larger scales. Multifractal
14 analysis shows that two multiscaling regimes should be distinguished, i.e., ~3 days
15 to 30 min and 15 min to 15 s, with different UM parameters. The former is likely to
16 represent the interevent variability, and the latter is likely to represent the event internal
17 variability. Moreover, most data points contain zero values, which are susceptible to bias
18 multifractal analysis results. In order to assess the effect of the zeros on multifractal
19 analysis results, the UM parameters are also estimated from two variants: from
20 uninterrupted rain events (with almost no zeros) and from a modified (weighted) version
21 of analysis procedure that overweights nonzero values. The parameters are shown to
22 depend noticeably on the proportion of zeros. We propose an approach based on a scaling
23 support of the time series and derive semitheoretical formulas for the bias in the
24 parameters, which are applied in our case study. Finally, we discuss the advantages
25 and drawbacks of some models for numerical simulation of multifractal fields containing
26 a lot of zeros.

27 **Citation:** Verrier, S., C. Mallet, and L. Barthès (2011), Multiscaling properties of rain in the time domain, taking into account
28 rain support biases, *J. Geophys. Res.*, 116, XXXXXX, doi:10.1029/2011JD015719.

29 1. Introduction

30 [2] Rainfall displays a very heterogeneous behavior, in a
31 twofold way. First, wet and dry periods alternate and may
32 have variable duration. On the other hand, there is also an
33 extreme variability in the interior of rain events. Since
34 rainfall dynamics involve a wide range of time scales and
35 space scales, scaling models have been considered for a long
36 time by researchers. These models display features such as
37 power law spectra, induced by the absence of characteristic
38 scale in a given range of scales (usually coined as scaling
39 range). Such power laws are accurately displayed by rainfall
40 data sets, at least for some scaling ranges. Scaling behaviors
41 seem even to occur in most geophysical fields. However,
42 it has appeared to geophysicists that usual simple scaling
43 (monofractal) models, characterized by a single fractal
44 dimension, may represent an artificially narrow class of

processes, with a too-limited variability. In other words, 45
power spectra are useful when determining the existence of 46
one or several scaling regime(s), but since it is a second-order 47
statistic, some information about low-order or high-order 48
statistics is missed. The latter point is especially crucial when 49
considering the most rare and extreme events, the most 50
important ones for operational hydrology, civil engineering, 51
and safety policies. Then, more elaborated models have been 52
designed, in order to account for a wide set of (decreasing) 53
fractal dimensions, associated with increasingly high intensi- 54
ties. These are multifractal models, characterized by an 55
infinite spectrum of fractal dimensions. A popular route to 56
multifractality is that of stochastic multiplicative cascades, 57
first developed in the context of statistical modeling of tur- 58
bulence [Kolmogorov, 1962; Obukhov, 1962; Yaglom, 1966; 59
Mandelbrot, 1974]. In a general manner, cascade models rely 60
on three phenomenological assumptions: (1) there exists a 61
quantity (energy flux in the context of turbulence) which is 62
conserved *in average* from large to smaller scales; (2) this 63
quantity is heterogeneously transmitted to smaller scales in a 64
scale-invariant way; and (3) most of the interactions occur 65
between neighboring scales. Moreover, the cascade is said 66

¹LATMOS, CNRS/INSU, Université de Versailles Saint-Quentin-en-
Yvelines, Guyancourt, France.

67 multiplicative when its heterogeneity is built by an iterative
 68 multiplicative modulation process. This results in a multi-
 69 fractality that would need, in principle, an infinite number of
 70 parameters (i.e., an infinite set of fractal dimensions). Yet, it
 71 has been shown that under plausible assumptions, (continu-
 72 ous in scale) cascades converge toward laws that are often
 73 characterized by a small number of degrees of freedom
 74 (universality). For instance, the universal multifractal (UM)
 75 model [Schertzer and Lovejoy, 1987] (that includes the well-
 76 known special case of lognormal cascades, with $\alpha = 2$) and
 77 the log-Poisson model [She and Levêque, 1994] need only
 78 two fundamental parameters. For 25 years, scientists have
 79 performed multifractal analysis over a number of geophysical
 80 fields, leading to the conclusion that multifractality should be
 81 somewhat ubiquitous in nonlinear geophysics (for reviews,
 82 see Lovejoy and Schertzer [2007, 2010]). In particular, the
 83 multifractality of rain, first proposed by Schertzer and
 84 Lovejoy [1987], has been confirmed by a number of studies
 85 in the time and space domains (for reviews, see Lovejoy and
 86 Schertzer [1995], Lilley et al. [2006], and even in a spatio-
 87 temporal framework Marsan et al. [1996], Over and Gupta
 88 [1996], and Deidda [2000]). The multifractal structure of
 89 rainfall time series has been investigated by a number of
 90 papers, e.g., in the UM framework [Ladoy et al., 1991;
 91 Tessier et al., 1993; Hubert et al., 1993; Ladoy et al., 1993;
 92 Olsson, 1995; Harris et al., 1996; Schmitt et al., 1998; de
 93 Lima and Grasman, 1999; Pathirana et al., 2003; de Lima
 94 and de Lima, 2009; Sun and Barros, 2010; Lovejoy et al.,
 95 2011]. The main results (scaling regimes, UM parameters)
 96 of these papers are recalled in Table 1. As shown, most of
 97 the studies suffer from the limited resolution of the data
 98 (typically one day). Obviously, rain has much variability at
 99 subdaily scales, hence some singular behavior should be
 100 expected at these small time scales. Recently, de Montera
 101 et al. [2009] have performed multifractal analysis of high-
 102 resolution (<1 min) time series obtained by the means of
 103 a dual-beam spectropuviometer. They found the existence of
 104 a break in the scaling at 1 hr time scale, and of a scaling
 105 regime, in the interior of rain events, with UM parameters far
 106 from the usual large-scale ones (see Table 1). They advocated
 107 that the break at 1 hr time scale could be due to the presence
 108 of numerous zeros in the series, which would lead to biases
 109 in multifractal analysis at larger scales. It is perhaps not well
 110 known enough that the presence of these zeros may consid-
 111 erably affect the estimation of multifractal parameters, even
 112 though this has been noticed for a long time [Harris et al.,
 113 1996; Schmitt et al., 1998]; see also Fraedrich and Larnder
 114 [1993] in a monoscaling framework. Such a phenomenon
 115 may be easily retrieved by analyzing thresholded synthetic
 116 multifractal fields [Verrier et al., 2010]. Other comments on
 117 the effects of thresholds on rain spatial statistics may be found
 118 in the work of Lovejoy et al. [2008]. In the time domain, the
 119 transition at ~ 1 h may be viewed as a transition from a mul-
 120 tiscaling regime to another with different parameters (includ-
 121 ing a transition from nonconservativity to conservativity).
 122 However, the physical interpretation of the transition remains
 123 unclear but could involve a kind of threshold in the rain
 124 generation process.

125 [3] The present paper aims to extend the results obtained
 126 by de Montera et al. [2009], using another high-resolution
 127 time series covering a wide range of scales (2 years of rain
 128 intensity data at 15 resolution). The present study will dis-

129 tinguish the main scaling regimes of rainfall in the time
 130 domain in the range of scales available from the measure-
 131 ments. Different analysis procedures will be performed in
 132 order to highlight the role of the zero rain rates. Further-
 133 more, a semitheoretical explanation and formulas for the
 134 biases observed in UM parameters estimates on data sets
 135 that contain a lot of zeros will be proposed and tested.

136 [4] The study is structured as follows. In section 2, the
 137 main properties of the multifractal formalism are recalled,
 138 including UM parametrization. Section 3 provides infor-
 139 mation on the data set and the experiment. As a first step,
 140 some monoscaling analysis techniques were applied to the
 141 series in order to determine the scaling regimes; the results
 142 are presented in section 4. Then, section 5 exposes the
 143 application of classical multifractal analysis tools to the
 144 series and to rain events extracted from the series. The latter
 145 procedure aims to distinguish between rain variability in
 146 rain events and the alternation between rain and absence of
 147 rain and to characterize the scaling properties of the former.
 148 UM parameters are shown to be strongly different at large
 149 scale, compared to those estimated from (small-scale) rain
 150 events. It is suggested that at least part of the difference may
 151 be due to the zero rain rates. In section 6, some suggestions
 152 for modeling multifractal fields that have many zeros are
 153 proposed. From a model of scaling support, semitheoretical
 154 formulas are derived to quantify the bias of multifractal
 155 analysis results depending on the codimension of the support.
 156 We also review and discuss the advantages and drawbacks
 157 of existing models of support generation. It is argued that a
 158 thresholded multifractal model could be able to reproduce
 159 some of the observed features of the DBS series. Finally,
 160 we conclude in section 7.

161 2. Some Theories of Multifractals

162 2.1. Multiplicative Cascades and Multifractals

163 [5] Multiplicative cascades are defined by an iterative
 164 multiplicative construction as follows. First, distribute uni-
 165 formly a quantity at the largest scale T of the process (called
 166 external scale), i.e., over a full interval $[0, T]$. Then, divide
 167 the initial interval in λ_1 (usually, two) subintervals of equal
 168 length (or, in D dimensions, in λ_1^D subpixels or sub-
 169 hypercubes). Attribute a value on each subinterval by mul-
 170 tiplying the initial value by a random variable. Then, repeat
 171 the construction by subdividing each of the previous sub-
 172 intervals in λ_1 new subintervals and attribute a value to each
 173 of the new intervals. By iterating the process, you can build
 174 a series $\Phi_\lambda(t)$ of resolution $\lambda = \lambda_1^n$ (in the following, the
 175 resolution varies as the inverse of the interval length, which
 176 is the time scale, $\lambda = T/\Delta t$). If we impose all random vari-
 177 ables to be independent and identically distributed and dis-
 178 tributed independently of the scale, one can obtain a series
 179 (or a field) that has scale-invariant properties. Usually, the
 180 mean of the process is assumed to be statistically conserved
 181 when the resolution changes: $\forall \lambda, \langle \Phi_\lambda \rangle = M$.

182 [6] The latter equation expresses canonical conservation,
 183 which will be considered in the scope of this paper. Note
 184 that conservation can also be defined in a microcanonical
 185 way (see Mandelbrot [1974] about this distinction), i.e.,
 186 exact conservation at each step.

187 [7] Generically, scale-invariant multiplicative cascades
 188 converge toward multifractal fields [see, e.g., Schertzer

Table 1. Comparison of Universal Parameters α , C_1 , H , and Empirical Spectral Slope β , Estimated Over Various Ranges of Time Scales^a

Reference	Measurement	Range of Scales	α	C_1	H	β
<i>Tessier et al.</i> [1993]	Gauges, daily accumulations	1–64 days	0.55	0.6	-	-
<i>Ladoy et al.</i> [1993]	One gauge, daily accumulations	1–64 days	0.45	0.60	0.03 ^a	0.37
<i>Fraedrich and Larnder</i> [1993]	Rain gauges (daily and 5 min resolutions)	3 days to 2, 4 h	-	-	-	0.5
		<2, 4 h	-	-	-	1
<i>Olsson</i> [1995]	Gauges, 2 years of 8 min data	(3–11) days to 8 min	0.63	0.44	0.10 ^a	0.66
<i>Tessier et al.</i> [1996]	Gauges, daily accumulations	15 days to 1 day	0.7	0.4	-0.1	0.4
<i>de Lima and Grasman</i> [1999]	Nonrecording gauge (daily resolution)	8–128 days	0.66	0.30	-0.23 ^a	0.17
		1–8 days	0.48	0.51	-0.11 ^a	0.17
	Recording gauge (15 min resolution)	15 min to 10.7 days	0.49	0.51	-0.02	-
<i>Pathirana et al.</i> [2003]	Gauges, hourly accumulations	1 day to 1 h	1.35	0.34	-0.05	1.02
<i>Molini et al.</i> [2009]	Rain gauges, accumulations (up to 60 min)	3 days to 2 h	-	-	-	0.7
<i>de Lima and de Lima</i> [2009]	Gauges, daily records	1–16 days	0.5–0.7	0.35–0.5	-0.13	-
<i>de Montera et al.</i> [2009]	Dual-beam spectrop pluviometer	>1 h	0.24	0.63	0	-
	Dual-beam spectrop pluviometer, uninterrupted rain events	1 h to 1 min (full rain)	1.69	0.13	0.53	-
<i>Lovejoy et al.</i> [2011]	Gauges (hourly data gridded on $2.5^\circ \times 2^\circ$ pixels)	>3 months	-	-	-0.42	0.08
		(2–10) days to 1 h	-	0.37	0.17	0.76

^aThe values of H that are marked with an asterisk were *not* explicitly estimated by the cited authors yet may be deduced from the exponents α , C_1 , and β they found and from the relationship $\beta = 1 - K(2) + 2H$.

189 *et al.*, 2002]. The fundamental equation of the (codimen-
190 sion) multifractal formalism expresses the fact that for a mul-
191 tifractal field, the probability of exceedence of a threshold that
192 is power law of the resolution is also power law with exponent
193 depending on the amplitude of the family of thresholds:

$$\Pr(\Phi_\lambda > \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (1)$$

194 where Φ_λ is the (normalized, $M = 1$) series/field seen at reso-
195 lution λ and \approx indicates an equality within the limits of slowly
196 varying functions. Above, the (real) exponent γ is a scale-
197 invariant indicator of the amplitude of the resolution-depend-
198 ing family of thresholds:

$$T_\lambda = \lambda^\gamma \quad (2)$$

199 Here, γ is called singularity and characterizes the amplitude
200 of the process independently of the scale. It is associated to
201 a unique fractal codimension denoted $c(\gamma)$, which is the
202 exponent of the power law defined in (1). By varying the
203 singularity, we can describe the fractal codimensions of
204 families of thresholds of various amplitudes. Physically,
205 the higher the threshold, the more intense the events: it is
206 expected that higher singularities are associated with the
207 most rare events, with smaller fractal dimensions: $c(\gamma)$
208 increases with γ . $c(\gamma)$ defines a function, called codimension
209 function, which entirely characterizes the multifractal series/
210 field Φ_λ . Note that the trivial case $c(\gamma) = \text{const}$ corresponds
211 to monofractality. In a general manner, $c(\gamma)$ is convex, pos-
212 itive, with a fixed point C_1 imposed by the condition of
213 canonical conservation. Since the probability distributions
214 are closely related to the statistical moments, (1) is
215 equivalent [Schertzer and Lovejoy, 1987] to:

$$\langle \Phi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

216 where $\langle \bullet \rangle$ denotes the averaging operator, q is the (non-
217 necessarily integer) order of the moment, and $K(q)$ is the
218 moment scaling function. Equation (3) expresses that the
219 moments of the series, at fixed order, depend in a power law
220 way of the resolution. The high orders obviously correspond
221 to the highest values of the series and also to the highest

singularities. In fact, the analogy is closer since there is a one-
222 to-one correspondence between singularities and moment
223 orders, since the moment scaling function is the Legendre
224 transform of the codimension function [Parisi and Frisch,
225 1985]. In the same way, it may be demonstrated that $K(q)$
226 should be convex. Because of the imposed scale-by-scale
227 conservation of the mean, we have $K(1) = 0$. For a space-
228 filling field, we also have $K(0) = 0$ (more generally, $-K(0)$ is
229 the codimension of the support; see section 6.

[8] The characterization of a multifractal field needs the
231 knowledge of the moment scaling function, or equivalently
232 of the codimension function, which describe the statistics
233 at all scales.
234

2.2. Universality

[9] Because of the small number of constraints that apply
236 a priori on $K(q)$, i.e., convexity and trivial values, a great
237 variety of possible functions could be involved. The char-
238 acterization of the multifractal properties would therefore
239 need an infinite number of parameters, which is unman-
240 ageable. Various attempts to reduce the number of param-
241 eters to a limited number of physically relevant ones have
242 been proposed. In addition, such models should have some
243 attractor properties in order to be physically realistic. Such
244 properties may appear, under certain conditions, with con-
245 tinuous in-scale cascades. Obviously, the classical discrete
246 cascades (where λ is necessarily an entire power of an
247 elementary step λ_1) are not physically realistic since (1) the
248 step λ_1 has no physical justification and (2) they induce an
249 artificial clustering of the data in square-like shapes. On the
250 contrary, physically relevant cascades should be continuous
251 in scale, i.e., with $\lambda_1 \rightarrow 1$, which is equivalent to add more
252 and more (up to infinity) steps between the initially discrete
253 steps. Since continuous in-scale multiplicative cascades
254 converge by construction to log-infinitely divisible dis-
255 tributions, the possible choice of random generators has
256 been restricted, and at least some of them need few degrees
257 of freedom. Some authors have proposed log-Poisson statis-
258 tics [She and Levêque, 1994; Dubrulle, 1994; She and
259 Waymire, 1995]. On the contrary, by assuming stability of
260 the generator and suitable renormalization, Schertzer and
261 Lovejoy [1987, 1991] have proposed log-Levy statistics,
262

263 defining the UM model. Mathematical and physical argu-
 264 ments supporting this kind of (strong) universality, may be
 265 found in the work of *Schertzer and Lovejoy* [1997]; see,
 266 however, *Gupta and Waymire* [1997] for discussion about
 267 the generality of this model. Yet, this model has been
 268 applied successfully to a number of geophysical fields
 269 [*Lovejoy and Schertzer*, 2010]. UM fields have the follow-
 270 ing parametrized moment scaling function:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q). \quad (4)$$

271 [10] There are two relevant parameters: α , the index of
 272 multifractality, which is between 0 (monofractality) and 2
 273 (lognormality); and C_1 , which is the codimension giving the
 274 dominant contribution to the mean value of the field. The
 275 higher the C_1 , the more intermittent the field: then, peaks
 276 become more sparse but higher. C_1 is bounded below by 0
 277 (homogeneity) and above by the dimension of the embed-
 278 ding space, denoted D . Because of Legendre transform, $C_1 =$
 279 $c(C_1) = K'(1)$ is the fixed point of the codimension function
 280 as well as the singularity associated with the mean (moment
 281 of order 1).

282 2.3. The FIF Model

283 [11] Since most geophysical fields are nonconservative,
 284 an extension of the UM model to nonconservative fields has
 285 been proposed [*Schertzer and Lovejoy*, 1991]. This is the
 286 fractionally integrated flux (FIF) model, based on the frac-
 287 tional integration of a conservative UM. The order of inte-
 288 gration, denoted H , defines a nonconservativity parameter:
 289 it strongly constrains the smoothness of the field. The FIF
 290 model has therefore three parameters. A FIF series has
 291 stationary increments, following:

$$|R_\lambda(t + \Delta t) - R_\lambda(t)| \stackrel{d}{=} \Phi_\lambda |\Delta t|^H \quad (5)$$

292 where $|\Delta t| = \frac{T}{\lambda}$.

293 [12] The FIF model is especially useful to model scaling
 294 processes with spectral exponent greater than 1. Indeed,
 295 the power spectrum of a multifractal FIF follows a power
 296 law $E(k) \propto k^{-\beta}$ where k is the wave number and $\beta = 1 - K(2) +$
 297 $2H$ is the spectral exponent. Of course, the formula holds
 298 in the case of conservative cascades, with $H = 0$. Note
 299 that the power spectrum is a second-order statistic, hence
 300 the term $K(2)$. The determination of the parameter H may be
 301 done with the help of first-order structure function, namely,
 302 $\langle |R_\lambda(t + \Delta t) - R_\lambda(t)| \rangle = f(\Delta t) \propto |\Delta t|^H$.

303 3. The Data Set

304 [13] A dual-beam spectropluviometer (DBS) has per-
 305 formed more than 2 years of measurements in Palaiseau,
 306 near Paris, France. This instrument uses two flat parallel
 307 infrared beams of 2 mm in height, 40 mm in width and
 308 250 mm in length, hence has a 100 cm² catchment surface.
 309 The two beams help detection of small drops to be per-
 310 formed, down to 0.3 mm in diameter. Various means of
 311 reducing instrumental and physical disturbances and false
 312 detections have been used, that are presented by *Delahaye*
 313 *et al.* [2006]. The device provided diameters, fall veloci-
 314 ties and times of arrival of raindrops. From the latter, the

rain rates are estimated at 1 s resolution. Since rain typically 315
 decouples from turbulence at scales smaller than 1 m 316
 [*Lovejoy and Schertzer*, 2008], it should be expected that a 317
 scaling behavior could hold up to 1 s time scale. However, 318
 measurement limitations seem to be dominant at such small 319
 scales with this instrument, and that a larger integration 320
 time should be necessary. In this study, the rain rates were 321
 estimated over an integration time of 15 s. The validity of 322
 the latter will be justified a posteriori in section 4. In order 323
 to facilitate multifractal analysis, a 2ⁿ section has been 324
 extracted from the raw data set, covering approximately 325
 96% of the latter. Therefore, the data set consists of a 15 s 326
 rain rate time series of length 2²² points and spans almost a 327
 2 year period. After correction of some unreliable small 328
 portions of the series, a threshold of 0.1 mm h has been 329
 applied in order to wash out doubtfully low values. The 330
 main properties of the data set are summarized in Table 2. 331
 An example of rain event, measured by the DBS on 12 May 332
 2009, is shown in Figure 1. However, similar rain events 333
 represent only a small part of the total series. From Table 2, 334
 it may be noticed that most points of the series contain a 335
 (true or instrumental) zero rain rate value. The latter may 336
 impact rainfall stochastic modeling, which will be discussed 337
 in some sections below. 338

4. Some Evidence of Scaling 339

[14] This section investigates the scaling properties of the 340
 series and of its support, independently of a particular (multi) 341
 fractal model. The purpose is to determine the scaling 342
 regimes of the series from classical tools such as power 343
 spectrum and (slightly modified) box-counting algorithm. 344

4.1. Power Spectrum 345

[15] Consistently with the remarks of section 2.3, a scal- 346
 ing regime is generically associated with a power law por- 347
 tion of spectrum. The power spectrum of the DBS series, 348
 averaged over logarithmically spaced bins, is provided in 349
 Figure 2 (in log-log coordinates). At time scales greater than 350
 a few days, the spectrum is almost flat. This is coherent with 351
 the findings of most papers [see, e.g., *Ladoy et al.*, 1993; 352
Fraedrich and Larnder, 1993; *Tessier et al.*, 1996; *Lovejoy* 353
et al., 2011]. However, the very low value of the spectral 354
 slope (the so-called “spectral plateau”) at scales greater than 355
 a few days/weeks should not be misinterpreted or over- 356
 interpreted since this single information is not sufficient to 357
 reject the hypothesis of long-range dependencies [*Lovejoy* 358
et al., 2011]. 359

[16] At the higher frequencies, a scaling regime appears 360
 clearly at time scales between 30 s and 30 min time scales. 361
 In this range of scales, the spectral slope is $\beta = 1.55 \pm 0.03$ 362
 (the error bar corresponds to the 95% confidence interval). 363
 The latter value is greater than 1, which means that, in case 364
 of multifractality, a nonconservative model (such as the FIF 365
 model) should be more appropriate (see also section 4.3). 366
 There is almost no flattening at the far highest wave 367
 numbers, meaning that measurement would be affected by a 368
 very moderate level of measurement noise at the series 369
 resolution, which remains coherent with the findings of 370
de Montera et al. [2009], based on the same instrument, but 371
 from measurements obtained in different periods and places. 372
 This justifies a posteriori the choice of the resolution of the 373

t2.1 **Table 2.** Properties of the Preprocessed DBS Time Series Used in
t2.2 This Study

t2.3	Property	Value
t2.4	Date and Time (Beginning)	16 July 2008 15:00:00
t2.5	Date and time (end)	14 July 2010 16:15:45
t2.6	Resolution	15 s
t2.7	Series length	2^{22}
t2.8	Mean	0.052 mm h
t2.9	Percentage of zeros	95.9%
t2.10	Threshold	0.1 mm h

374 series explained in section 3. The time scales between
375 3 days and 30 min correspond to a slow transition from the
376 large-scale flat spectrum to the small-scale scaling regime.
377 Two indicative fits within this range of scales are shown in
378 Figure 2, illustrating that the spectral slope is smaller at
379 smaller frequencies (with slopes $\beta = 0.41 \pm 0.06$ and $1.09 \pm$
380 0.07 for 3 days to 3 h and 3 h to 30 min ranges, respec-
381 tively). The properties deduced from Figure 2 seem rather
382 coherent with some results of literature that are based on
383 high-resolution data. As reported in Table 1, a scaling break
384 at 1–5 days has been found by *Fraedrich and Larnder*
385 [1993], *Olsson* [1995], *Pathirana et al.* [2003], *Molini et al.*
386 [2009], and *Lovejoy et al.* [2011]. The spectral slopes they
387 estimated, for subdaily scales, were between 0.5 and 1. They
388 did not, however, notice any higher spectral slope at subhourly
389 scales, probably because their work was based on data at
390 coarser resolutions than ours. Opposite, *de Montera et al.*
391 [2009] have found a specific scaling regime at subhourly
392 scales, with a spectral slope greater than 1, and with a non-
393 conservativity exponent $H \sim 0.5$. These results suggest the
394 existence of a nonconservative scaling regime at the subhourly
395 scales, coherently with our findings, i.e., with the 30 min to
396 30 s scaling regime highlighted above. Similarly with the
397 results of *de Montera et al.* [2009], this scaling behavior holds
398 well up to subminute scales and would be probably mainly
399 limited by the measurement noise, at scales of several seconds.
400 [17] The small-scale estimate of β ($= 1.55 \pm 0.03$) in
401 Figure 2 needs some comments, since it is remindful (with a
402 slight but significant difference) of the classical value $5/3$
403 of the Corrsin-Obukhov law of passive scalars [*Obukhov*,
404 1949; *Corrsin*, 1951]. Even though rain is not a passive
405 scalar, it is strongly coupled with turbulence. In particular,
406 turbulence strongly accelerates the growth of small cloud
407 droplets and therefore rain initiation, by increasing the
408 mean collision rate [*Falkovich et al.*, 2002; *Xue et al.*, 2008;
409 *Wang and Grabowski*, 2009]. Furthermore, rainfall may
410 share some properties with passive scalars. Of course, indi-
411 vidual raindrops are far too heavy to behave like pas-
412 sive scalars, especially they are characterized by too large
413 Stokes numbers. However, it has been recently demonstrated
414 [*Lovejoy and Schertzer*, 2008] that patches of raindrops are
415 likely to display such a behavior above a spatial critical scale
416 l_c . In the latter paper, the authors used three-dimensional
417 raindrop stereophotography data in a 10 m^3 volume and
418 showed that the liquid water density power spectrum accu-
419 rately follows a $k^{-5/3}$ law above a critical scale l_c of the order
420 of 50 cm. A passive scalarlike model for rain has recently
421 been proposed by *de Montera et al.* [2010] under some
422 plausible physical assumptions. The authors checked the

predictions of their model up to storm scale, based on radar 423
and disdrometer data. 424

[18] In our present case study, several reasons may 425
therefore contribute to the difference between the small- 426
scale value of β in Figure 2 and the “expectable” $5/3$ value. 427
Multifractal “intermittency” corrections to the spectral slope 428
could be involved. These corrections are closely related 429
with multifractal parameters, as expressed by the equation 430
 $\beta = 1 - K(2) + 2H$ (see section 2.3). In sections 4.3 and 5.2, 431
UM and nonconservativity exponents will be estimated 432
in a similar scaling regime. The parameters will be such that 433
 $K(2) = 0.24$ and $H = 0.38$, hence $\beta = 1.52$. Still, a more 434
realistic (passive scalarlike) model of rainfall should involve 435
at least two fluxes, as proposed by *de Montera et al.* [2010]. 436
Moreover, as discussed in the following sections, the zeros 437
of rainfall may strongly affect scaling properties. Even 438
though this effect will be shown to act mainly at large scales 439
(coherently with Figure 2), it remains possible that the 440
spectral slope could be slightly shifted at smaller scales. 441

4.2. The Fractality of the Data Set Support 442

[19] In this section, we focus on the properties of the rain 443
support. The alternation of rain and absence of rain is 444
expected indeed to have some scaling properties, following 445
the results of various studies in the time domain [*Hubert* 446
et al., 1989; *Olsson et al.*, 1993; *Lavergnat and Golé*, 447
1998; *Schmitt et al.*, 1998]. In Figure 3, the probability of 448
occurrence of nonzero values is presented as a function of 449
the resolution λ , in logarithmic coordinates. It is shown that, 450
from 1.5 day time scale to 30 min time scale, the probability 451
that a point belongs to the series support follows a power 452
law of the resolution: 453

$$\Pr(R_\lambda(t) > 0) \propto \lambda^{-c_f} \quad (6)$$

where c_f is a fractal codimension, clearly that of the data set 454
support. In a classical multifractal framework, it would be 455
the codimension associated with the $-\infty$ singularity. 456

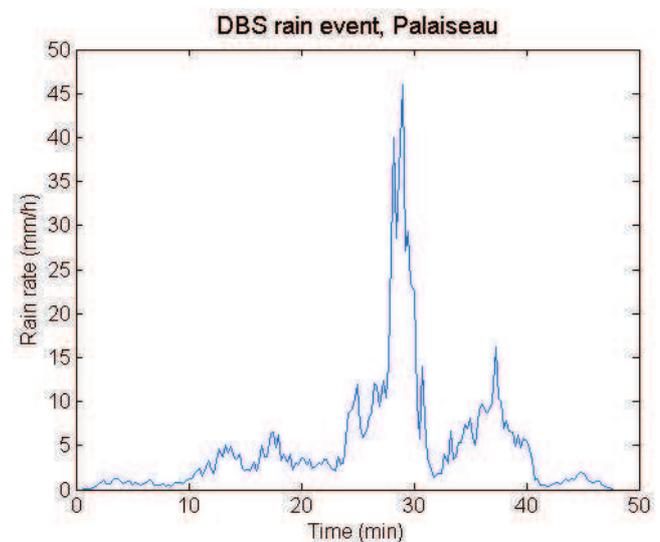


Figure 1. Rain event observed by the DBS on 12 May 457
2009, beginning at 04 h 05, in Palaiseau. 458

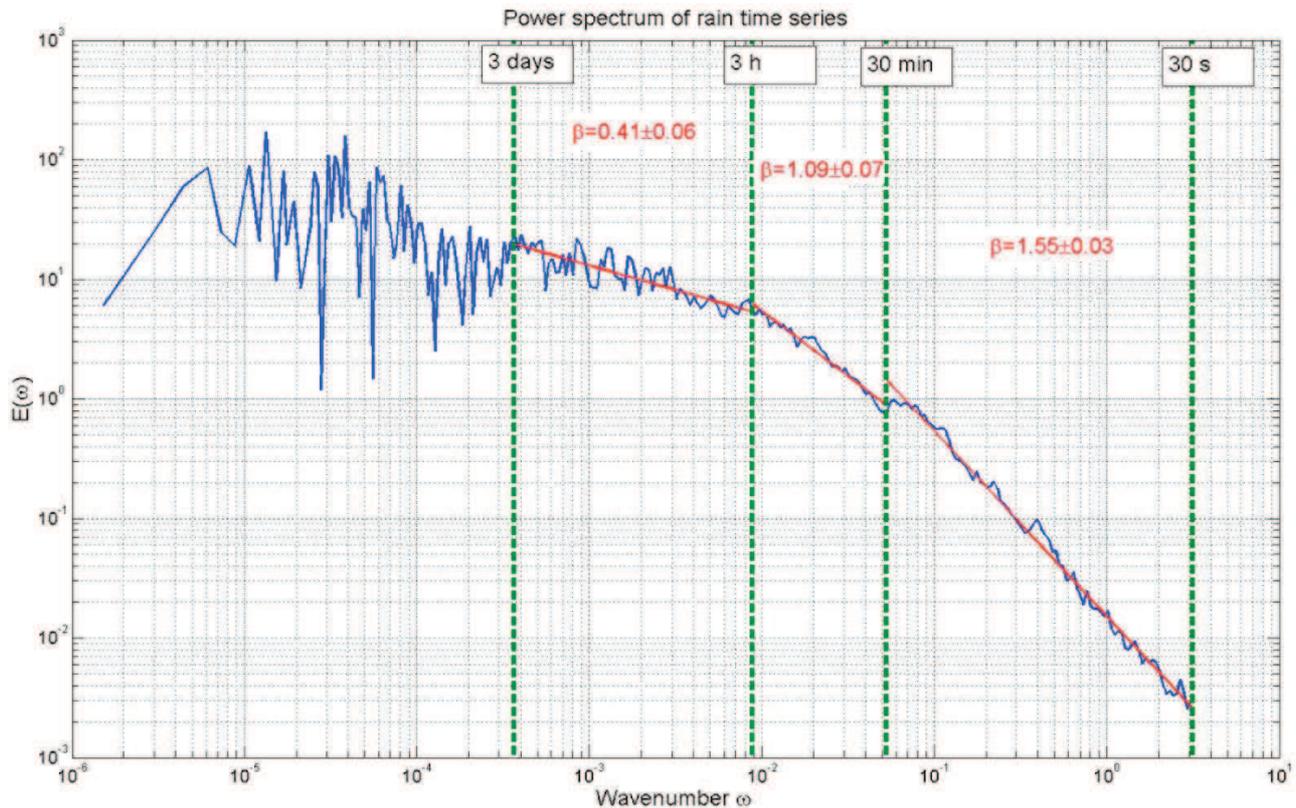


Figure 2. Power spectrum of the DBS rain rate time series and corresponding scaling regimes. Coordinates are logarithmic and wave numbers are normalized, such that the Nyquist wave number is associated with the value π .

457 [20] It should be pointed out that c_f is representative of the
 458 data set support scaling and not of the “true” rain support
 459 possible scaling. Indeed, any measurement involves a kind
 460 of measurement threshold thus true zero rain rates cannot
 461 easily be distinguished from instrumentally defined ones.
 462 This may directly impact the observed value of the fractal
 463 dimension. Nevertheless, the scaling regimes are expected to
 464 hold approximately for comparable thresholds and the esti-
 465 mated data set codimension c_f should be an upper bound of
 466 the “true” rain support codimension. In order to eliminate
 467 possibly unreliable low rain rates estimation, a threshold of
 468 0.1 mm h has been applied in the DBS series preprocessing.
 469 The latter threshold could seem a bit high, however, its
 470 choice was motivated by the necessity to remove instru-
 471 mental noise and false detections. From the fit in Figure 3,
 472 the data set codimension is estimated at 0.45, meaning that
 473 in the corresponding scaling range, the data set is embedded
 474 in a fractal support of dimension $d_f = 0.55$. To illustrate the
 475 dependence of the fractal dimensions on the threshold, it
 476 should be emphasized that a threshold of 0.01 mm h in DBS
 477 preprocessing would have shifted the codimension value to
 478 0.40. This dependence is rather strong since support codi-
 479 mensions are equivalent to 0-order statistics. However, the
 480 reference DBS data set, thresholded at 0.1 mm h, will be
 481 considered in the next sections, where higher-order statistics
 482 are of interest.

483 [21] As stated previously, the codimension of the data set
 484 support is estimated at 0.45, meaning that in the corre-
 485 sponding scaling range (1.5 days to 30 min), the data set is

embedded in a fractal support of dimension 0.55. Because 486
 of the dependence of fractal dimensions on thresholds, 487
 direct comparison with other literature results is nontrivial. 488
 However, *Schmitt et al.* [1998] found a scaling regime 489
 for their data set support that extends from 3 day to 10 min 490
 time scales. They also found a support dimension of 0.55, 491
 which is difficult to compare with our estimate because 492
 of a different measurement resolution and threshold. We 493
 should also mention the study by *Olsson et al.* [1993] who 494
 distinguish three scaling regimes separated by transitions at 495
 1 week and 45 min time scales. In the 1 week to 45 min 496
 regime, these authors estimated a fractal dimension of 0.37. 497
 Moreover, they found a pseudoscaling regime of dimension 498
 1 in the range 2 years to 1 week, which is rather coherent 499
 with Figure 3 where the probability of nonzero rain values 500
 becomes almost constant after a few days, i.e., $c_f = 0$. Such 501
 a behavior is in fact not surprising: at large scales, large 502
 time intervals ($\gg 1$ day) almost surely contain a rain event. 503
 From Figure 3, the support does not seem scaling at scales 504
 smaller than 30 min, except perhaps at the far smallest 505
 scales. The probability of occurrence of rain is greater 506
 than predicted by prolonging the power law that holds 507
 between 1.5 days and 30 min. This may be due to the fact 508
 that this range of scales is dominated by continuous rain 509
 events that do not contain zeros. However, if a scaling 510
 behavior still holds (which is not obvious in Figure 3), the 511
 support is expected to have a greater dimension. *Olsson* 512
et al. [1993] have tried to estimate fractal dimensions in 513
 the range 1–45 min, and found 0.82. 514

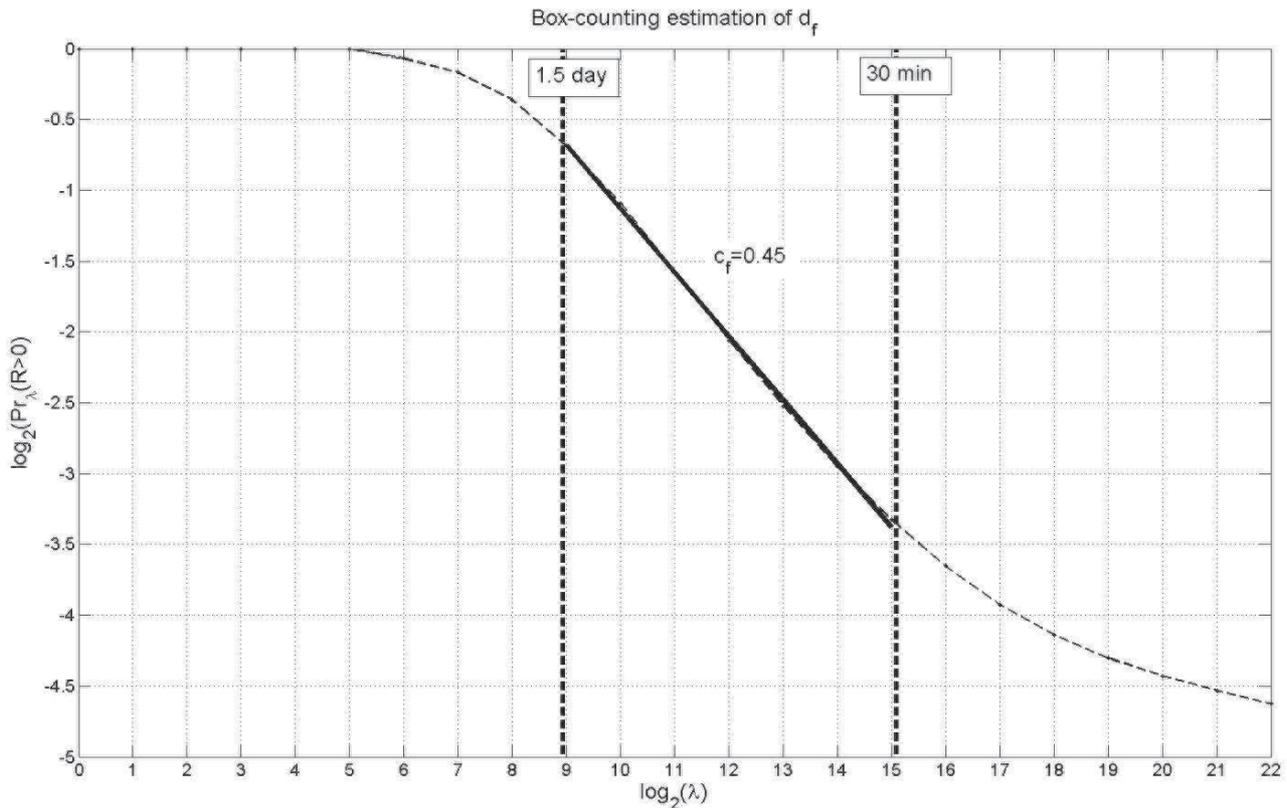


Figure 3. Probabilities of nonzero series values as a function of the resolution. The fractal codimension of series support is deduced. This algorithm could be viewed as a probabilistic variant of the classical box-counting algorithm.

515 4.3. Structure Function Analysis

516 [22] As stated in section 2.3, the nonconservativity
 517 exponent H may be estimated directly from the first-order
 518 structure function of the series. From spectral slopes, it may
 519 be conjectured that the rain process will have a non-
 520 conservativity exponent $H \leq 0$ at large scales, but $H > 0$ at
 521 scales smaller than 3 h (where $\beta > 1$). The first-order
 522 structure function of the series, $f(\Delta t) = \langle |\Delta R(\Delta t)| \rangle$ is
 523 represented in logarithmic coordinates in Figure 4, as a
 524 function of time increment. The structure function is com-
 525 pletely flat at scales greater than 6 h, meaning that at these
 526 scales conservative (or fractionally differentiated) multi-
 527 fractal fluxes should be involved, without any additional
 528 integration. In the range of scales 3 days to 3 h, this result
 529 has to be compared with the values that can be deduced
 530 from the relation $\beta = 1 - K(2) + 2H$ with $\beta = 0.41$ and
 531 (anticipating on section 5.2, see also Table 3) $K(2) = 0.65$,
 532 hence $H = 0.03$: within this range of scales, strict conser-
 533 vation seems tenable, coherently with values reported in
 534 Table 1. Nevertheless, strict conservation is unlikely to hold
 535 at larger scales (i.e., >1 week) since β and $K(2)$ diminish at
 536 very large scales (see also Figure 6) so that $H < 0$. The study
 537 of processes that have a strictly negative H exponent is a bit
 538 more involved since in this case “incremental” structure
 539 functions such as defined above cannot provide a reliable
 540 estimation of H and more sophisticated tools would be
 541 needed. Recent works [e.g., Lovejoy et al., 2011] investi-
 542 gated in detail the low-frequency scaling of rainfall based on

gauge data spanning a few decades and the authors find a 543
 large-scale estimate of H close to -0.4 . 544

[23] Considering now the smaller scales, it may be seen 545
 that at time scales between 8 min and 6 h, the curve in 546
 Figure 4 is nonlinear with a low instantaneous slope. 547
 However, at very small time scales (<8 min), the structure 548
 function is a power law with exponent $H = 0.38$. This value 549
 is not easily comparable with literature results which gen- 550
 erally do not investigate such scales. As reported in Table 1, 551
 the main exception would be the study of *de Montera et al.* 552
 [2009] based on short rain events. One should note that the 553
 estimation of H on a data set that contains many zeros may 554
 be unreliable. In the space domain, *Verrier et al.* [2010] 555
 found that H could be underestimated from such data sets. 556

[24] The transition from $H > 0$ to $H \sim 0$ at scales of a few 557
 hours seems physically relevant in terms of correlation. 558
 Indeed, at the smaller scales, the structure of almost unin- 559
 terrupted rain events presents a high degree of correlation, 560
 possibly modeled by an integrated process. Opposite, the 561
 properties of coarse scale (i.e., greater than the mean event 562
 duration) rain are in fact conditioned by rain events total 563
 accumulations, that are less intercorrelated, thus there is no 564
 need of an integrated model. 565

5. The Multiscaling Properties of the DBS Series 566

5.1. Multifractal Analysis: The Principle 567

[25] In section 5.1, a classical procedure for investigating 568
 multifractality on data is recalled. For more details about a 569

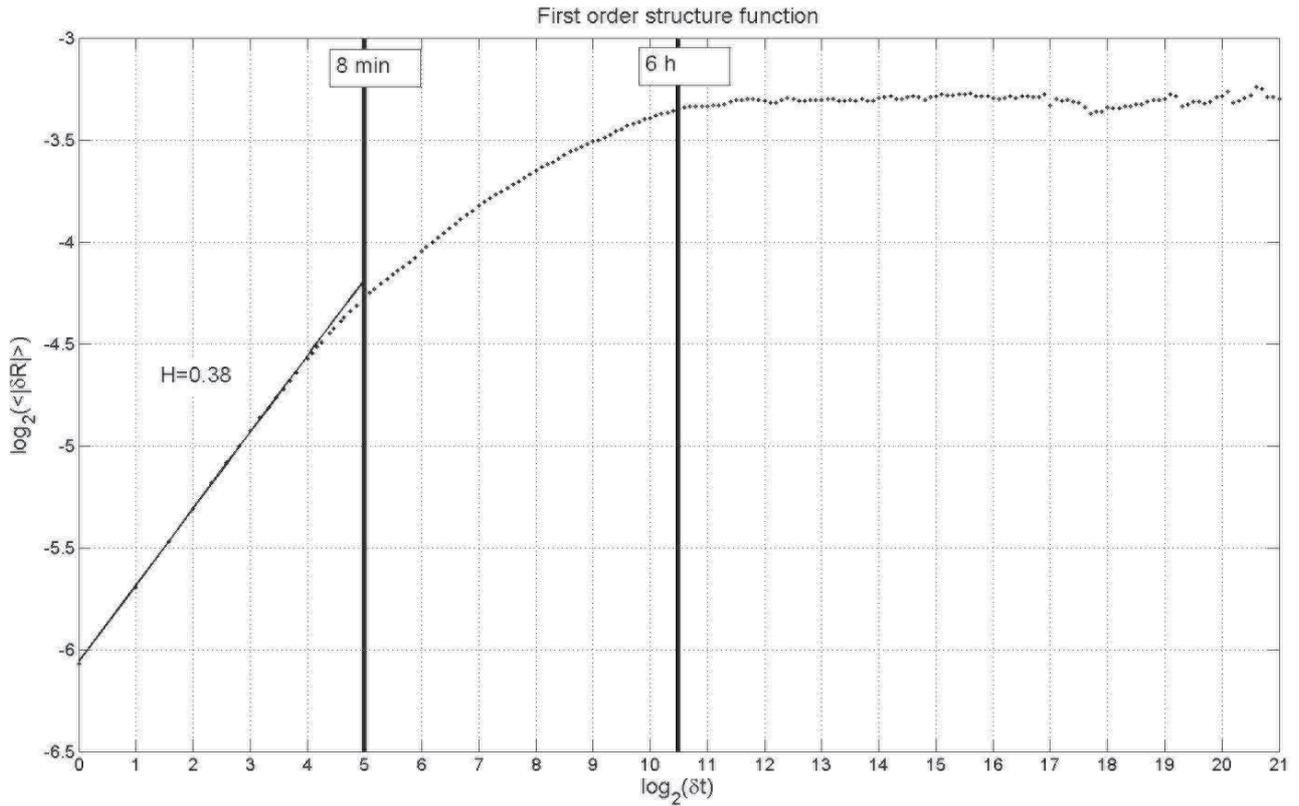


Figure 4. First-order structure function of the DBS time series. Linear regression is used to estimate the small-scale nonconservativity exponent, i.e., $H = 0.38$.

570 similar methodology, see, e.g., *Tessier et al.* [1993]. The
 571 purpose of multifractal analysis (MA) is to test whether the
 572 fundamental equation (3) of multifractality is accurately
 573 followed. The process may be decomposed in three steps:
 574 (1) estimation of the relevant conservative quantity Φ_λ from
 575 the data, at the observation resolution, denoted Λ , (2) deg-
 576 radation of the latter at coarser resolutions, Φ_λ , for $\lambda < \Lambda$,
 577 and (3) empirical estimation of the moments for all available
 578 resolutions and for various orders q . Step 1 aims to wash out
 579 any possible nonconservativity in the data, since the latter
 580 may be related to a conservative cascade by a fractional
 581 integration. If necessary, a fractional derivative of order
 582 H should be necessary to invert the latter. However, it has
 583 been shown by *Lavallée et al.* [1993] that, in practice,
 584 it suffices to take the normalized absolute gradient at the
 585 highest resolution, which is much simpler (and almost
 586 as efficient) than a rigorous fractional derivation. In all
 587 cases, Φ is normalized by its mean. In step 2, the scale is

roughened by iterative steps of factor 2: the values of coarse 588
 pixels are deduced from those at double scale by a simple 589
 average of neighboring pixels. This procedure therefore 590
 approximates the inversion of the multiplicative cascade, 591
 even though the latter is supposed to be only statistically 592
 conservative. From the estimation of Φ at various resolutions 593
 it is easy to compute the empirical moments for a 594
 given interval of orders. Since most literature results report 595
 that the statistical moments should diverge at orders greater 596
 than a critical order $q_D \approx 3$ [e.g., *Hubert et al.*, 2007], and 597
 because of sample size limitations, we restrict the study to 598
 an interval of reliable orders which is set to $[0, 3]$. The 599
 moments are then shown on a log-log graph, as a function of 600
 the resolution. The presence of straight lines for all orders is 601
 therefore the signature of step 3 and thus of multifractality. 602
 A linear fit of the line associated with q th order moment 603
 provides the value of $K(q)$: the moment scaling function 604
 may therefore be estimated and possibly fitted with its 605

t3.1 **Table 3.** Comparison of Universal Parameters α , C_1 , H , and Empirical Spectral Slope β Estimated From DBS Data and Different MA
 t3.2 Procedures

t3.3	Data Set + MA Technique	Range of Scales	α	C_1	H	β
t3.4	DBS whole time series, standard MA	3 days to 32 min	0.31	0.59	0.03 ^{a,b}	0.41 ^a
t3.5		16 min to 15 s	1.10	0.17	0.38 ^c	1.55
t3.6	DBS 32 min rain events, standard MA	32 min to 15 s	1.84	0.10	0.44	-
t3.7	DBS whole time series, weighted MA	1 week to 32 min	1.22	0.16	-	-

t3.8 ^aSpectral and nonconservativity exponents accurate from 32 min to 3–6 h only.

t3.9 ^bReporting the large-scale UM parameters and the spectral slope in the formula $\beta = 1 - K(2) + 2H$ leads to $H = 0.03$.

t3.10 ^cNonconservativity exponent accurate up to 8 min time scale.

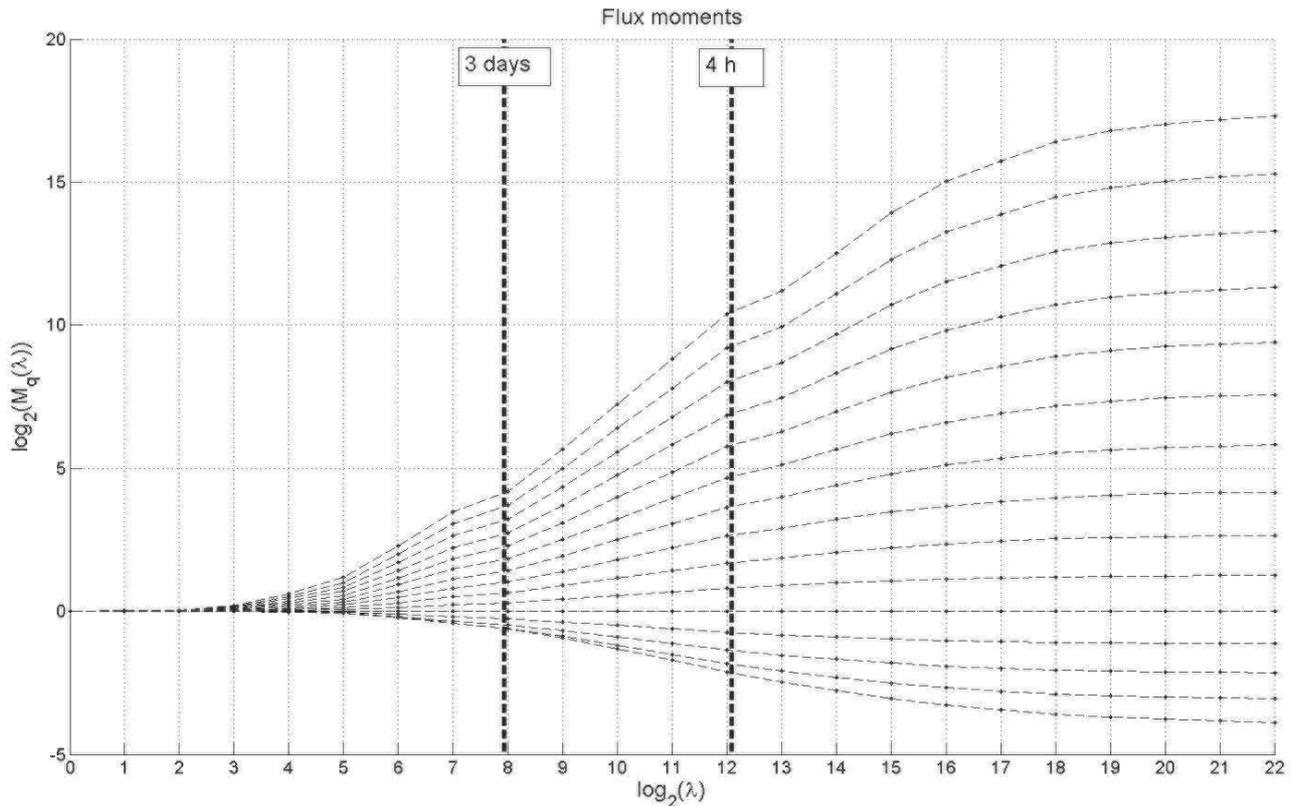


Figure 5. Empirical moments of the DBS time series as functions of the resolution, in log-log coordinates. Each curve corresponds to one specific order of moment, between 0 and 3.

606 universal forms. In the latter case, the universal exponents
607 may be estimated.

608 5.2. Multifractal Analysis of the DBS Series

609 [26] First, the possible small-scale nonconservativity is
610 not taken into account, i.e., the rain rates are considered
611 directly, without any kind of (finite) differentiation. The
612 graph of the moments of the DBS rain rate series is pre-
613 sented in Figure 5. The logarithm basis is fixed at 2 in order
614 to visualize the successive averagings. A multifractal regime
615 may be found between 3 day and 4 h time scales. On the
616 contrary, a quick view of Figure 5 could lead to think that
617 the process is not multiscaling at scales smaller than half an
618 hour. This would be surprising since the spectrum seems to
619 have good scaling in this domain. However, such a con-
620 clusion must not be drawn too quickly, since both spectrum
621 and first-order structure function (see section 4) suggest that
622 the process is not conservative at such scales, with $H > 0$.
623 Then, the results of direct MA at these small scales remain
624 questionable. Indeed, a strictly positive H parameter would
625 impact the statistics of the process: the latter is expected to
626 be smoothed, leading to attenuated moments when the res-
627 olution increases. This could explain the flattening of the
628 empirical moments curve at the largest scales. Figure 5 may
629 be usefully compared with Figure 6 which is the graph of
630 the moments deduced from the absolute gradient of the
631 series, taken at 15 s resolution. Obviously, this new defi-
632 nition of Φ impacts the small-scale statistics which obey to
633 multiscaling statistics between 16 min and 15 s time scales,
634 whereas the large-scale statistics remain scaling down to a

32 min time scale. These results enforce the distinction, 635
advocated in section 4, between a small-scale “integrated” 636
regime and a large-scale “nonintegrated” regime. Both of 637
them seem to have multifractal statistics and are separated 638
by a transition at a 32 min time scale. In the range 3 days to 639
32 min, the $K(q)$ function, represented in Figure 7, may be
fitted with UM exponents $\alpha = 0.31$ and $C_1 = 0.59$, which is 640
more or less coherent with the most common values in the 641
literature (see Table 1 for classical results and Table 3 for all 642
the UM parameters estimated in this study). On the contrary, 643
the statistics in the range 16 min to 15 s do not seem uni- 644
versal, since low, average, and high singularities cannot be 645
simultaneously represented within this model. The “best fit” 646
of $K(q)$ (not shown) near the average singularities ($q = 1$) 647
would involve spurious exponents ($\alpha = 1.10$ and $C_1 = 0.17$), 648
which cannot describe other (lower or higher) singularities. 649
Still, such small-scale statistics combine continuous rain 650
events with periods with a lot of zeros, which are qualita- 651
tively different and remain therefore dubious. In the fol- 652
lowing, we apply two procedures to investigate the scaling 653
behavior of rain while washing out the effect of the zeros. At 654
smaller scales, uninterrupted rain events may be analyzed 655
with the help of MA tools. At larger scales, a weighted MA 656
procedure, that overweights nonzero values, is applied on 657
the data. 658
659

5.3. Event Analysis 660

[27] In this paragraph, the analysis of (almost) uninter- 661
rupted rain events is presented. This analysis procedure aims 662
to characterize the variability of rain rates in the interior the 663

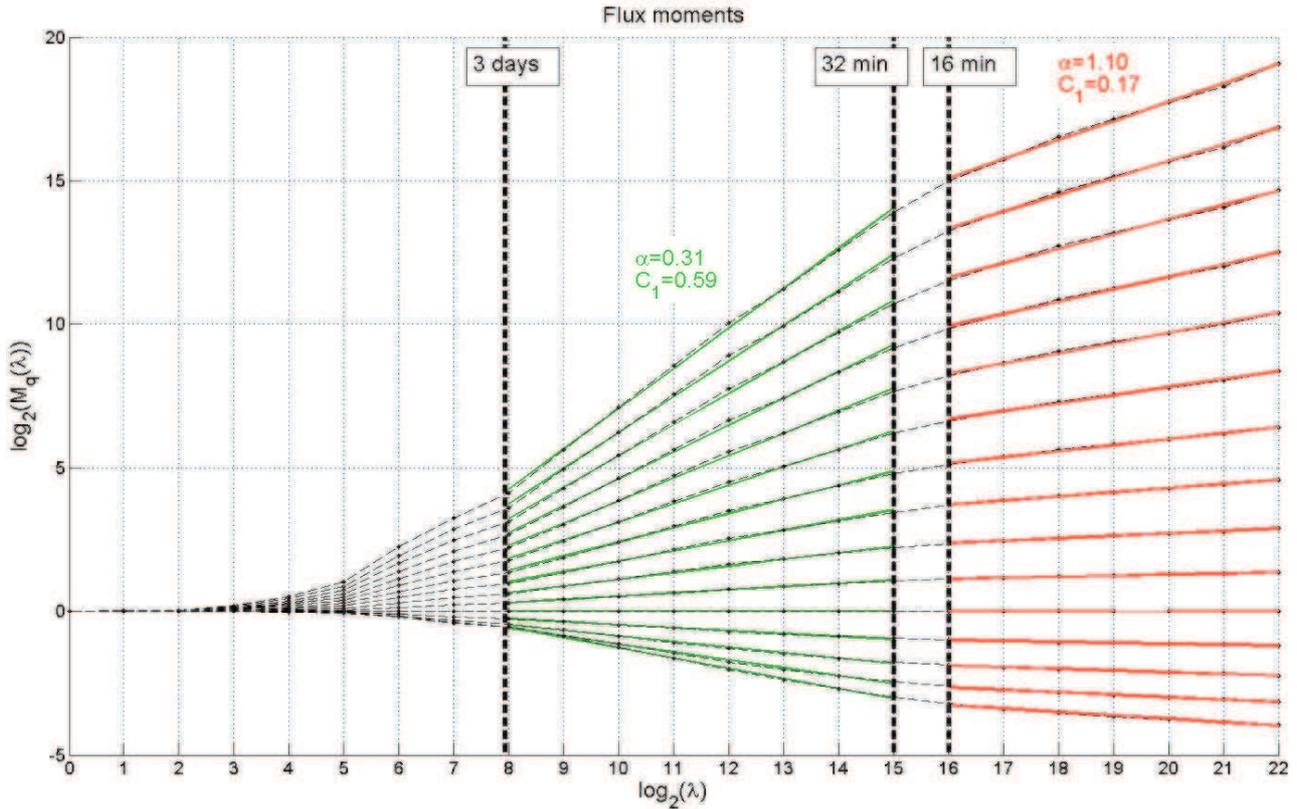


Figure 6. Empirical moments of the absolute gradients of the DBS time series. Scaling regimes are distinguished and fitted with the straight lines, each one for a specific order of moment.

664 rain events. Rain events were automatically extracted from
 665 the full DBS series by taking the greatest consecutive sec-
 666 tions that begin with a nonzero rain rate and contain at least
 667 97.5% of nonzero precipitation values. The latter condition
 668 enables automatic selection of rainy sequences but implies
 669 that the computed moments are conditional statistics in the
 670 sense that the presence of high enough singularities is a
 671 prerequisite. Among these events, a selection was performed
 672 by taking those which have a duration slightly greater than
 673 30 min. Then, all the 52 selected events were truncated in
 674 order to have a size of 2^7 points, i.e., a 32 min duration,
 675 which is close to the typical size of rain events, as shown by
 676 previous spectral analysis. This provides a new data set of
 677 rain events of the same size (i.e., a power of two in order to
 678 facilitate MA). Then, the procedure described in section 5.1,
 679 i.e., inversion of the fractional integration, upscale estima-
 680 tion of the cascade, and estimation of the moments, has been
 681 performed on each event. The obtained statistics have then
 682 been averaged on all events. It is needed to inverse the
 683 fractional integration since, confirming results of Figure 4, a
 684 nonconservative behavior (with $H > 0$) appears, as shown on
 685 the graph structure function (Figure 8). The moments are
 686 represented as a function of the resolution on Figure 9,
 687 which shows a good multifractal behavior in the range 32
 688 min to 15 s. The obtained parameters (Figure 10 and Table
 689 3), $\alpha = 1.84$, $C_1 = 0.10$, are notably different from those
 690 recalled in Table 1, and from the large-scale parameters
 691 estimated in section 5.2, which are obtained by classical
 692 analyses that include the zeros. However, such a result is

coherent with those obtained by a similar *full-rain* meth- 693
 odology. In the time domain, *de Montera et al.* [2009] 694
 estimated $\alpha = 1.7$ and $C_1 = 0.13$ on an event-by-event 695
 (small-scale) basis. Moreover, these authors also estimated 696
 the nonconservation parameter $H \sim 0.5$ on their rain events, 697

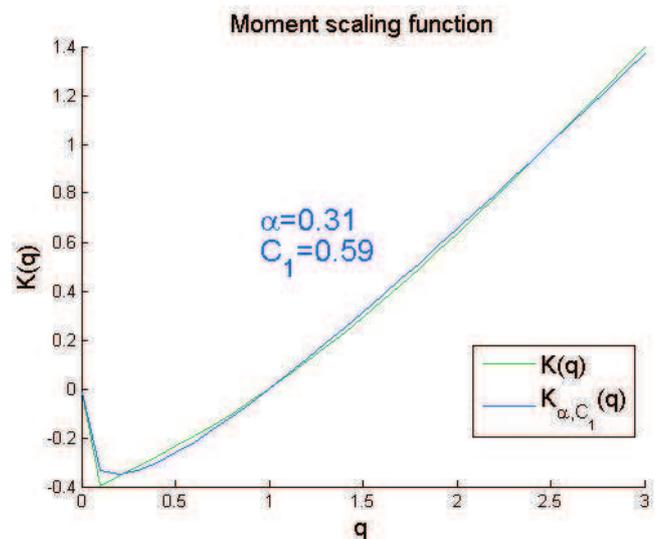


Figure 7. Estimation of empirical moment scaling functions and fit with UM moment scaling functions for the scaling regime 3 days to 32 min.

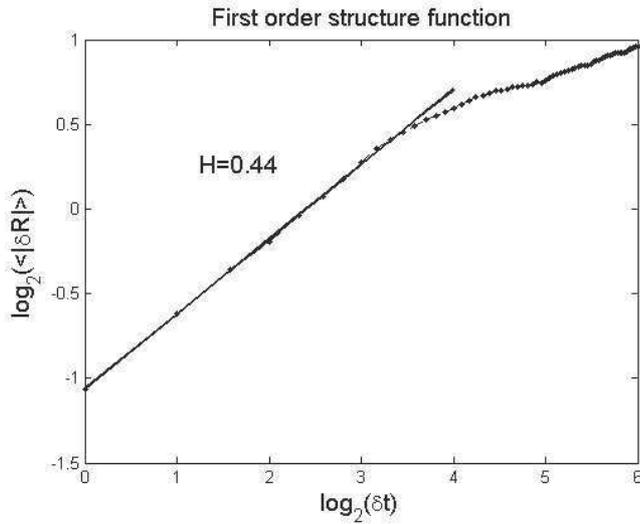


Figure 8. First-order structure function of 52 full-rain events extracted from the DBS series and small-scale fit by linear regression, giving the estimation of H .

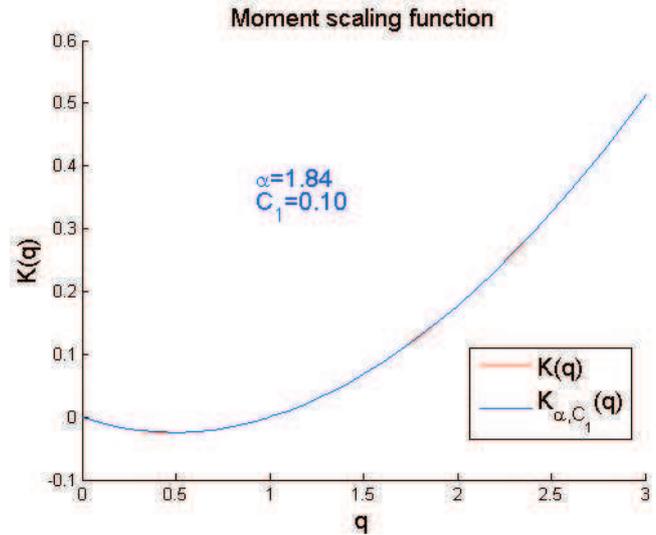


Figure 10. UM fit of empirical moment scaling function of full-rain events, deduced from the fit in Figure 9.

698 which is consistent with the value reported above. There-
699 fore, a nonconservative multifractal behavior should hold in
700 the interior of rain events.

701 [28] These remarks are likely to hold in the spatial domain
702 since Verrier *et al.* [2010] estimated $\alpha = 1.8$ and $C_1 = 0.12$
703 from radar data restricted to full-rain areas (tropical storms),
704 at resolutions between 25 km and 400 m. This should be
705 compared with usual literature parameters in the space
706 domain (see Lovejoy and Schertzer [1995] for a review) that
707 provide a smaller α (typically, 1.2–1.4) and a slightly
708 greater C_1 (0.1–0.2). It has been advocated by *de Montera*
709 *et al.* [2009] and Verrier *et al.* [2010] that most usual lit-
710 erature parameters might suffer from a bias in MA because
711 of the zeros. The more zeros in the series/fields, the greater

the bias. For instance, it may be checked that thresholded
multifractal fields will have a break and a large-scale biased
scaling regime (with $H = 0$) (see Verrier *et al.* [2010] for
simulations and the qualitative discussion in section 6.2). A
general remark on these full-rain parameters is to notice
their similarity in the space and time domains, which is not
retrieved in usual literature parameters. This may give some
kind of generality to the so-called universal parameters. Yet,
the fact that the difference between full-rain and large-scale
parameters seems smaller in space does not mean that rain is
more space filling in the space domain than in the time
domain, but should be rather interpreted as a consequence of
preprocessing strategies. Indeed, authors that work in the
time domain consider full series with a lot of zeros whereas
those who work in the space domain usually preselect maps
in order to focus on storms, thus their data contain less zeros.

[29] As suggested by recent results [*de Montera et al.*,
2009], the full-rain parameters could be somewhat indepen-
dent of the place, except perhaps the nonconservativity
parameter. On the contrary, rainfall statistics at larger time
scales are or seem dependent on local conditions [*Molini*
et al., 2009]. Since large-scale statistics are sensitive to
the zeros, there is a need to distinguish between support
and microclimatic effects. Another remark on the full-rain
parameters is their similarity with those generally used for
other atmospheric fields. In a general manner $\alpha \sim 1.8$ and
 $C_1 \sim 0.1$ define a very current set of multifractal exponents
and are likely to model, at least in the space domain, the
variability of cloud radiances, cloud liquid water concen-
tration, and perhaps horizontal wind [e.g., Lovejoy and
Schertzer, 2010].

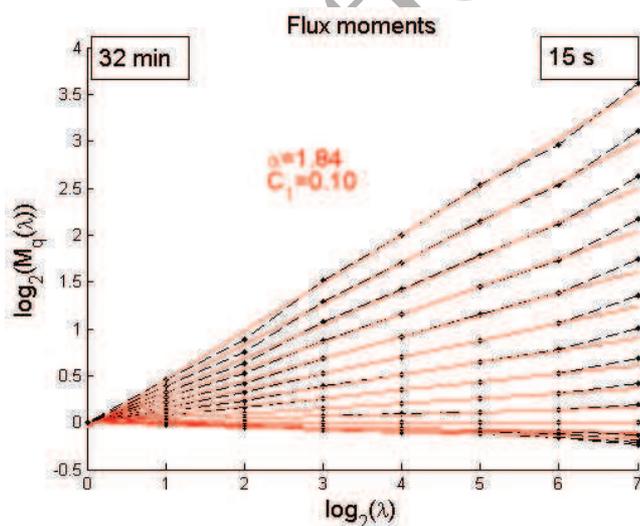


Figure 9. Empirical moments of 52 full-rain events of duration 32 min, extracted from the DBS series, in logarithmic coordinates.

5.4. Weighted MA of the Data Set

[30] We now investigate the scaling properties of nonzero
rain at larger scales. Since, as shown in section 4.2, the data
set support has a monoscaling regime between 1.5 day and
32 min time scales, rain values could be seen at these scales
as distributed over a fractal support. Because of the latter,
the scaling properties of rain are modified (some theoretical

750 considerations are proposed in section 6.1). In section 5.4,
751 the MA procedure is slightly modified in order to focus
752 on the rain variability only, by removing the effect of the
753 fractal support. We apply a weighted MA (WMA) proce-
754 dure, originally defined by *Gires et al.* [2009, 2010], in
755 order to compute the coarse scale averages and the empirical
756 moments in a way that privileges the nonzero rain values.
757 The obtained statistics should therefore be representative
758 of rain properties in the interior of its (fractal) support. The
759 procedure is based on the estimation of the statistics of the
760 density with respect to the support and differs from that of
761 section 5.1 by two main changes:

762 [31] 1. The coarse scale series are computed by averaging
763 neighboring nonzero points (if any), and

764 [32] 2. The empirical moments are computed using a
765 weighting between the points of the series. When calculat-
766 ing the moments at resolution λ , each interval (or pixel) at
767 this resolution is associated with a weight. The weights are
768 computed by estimating the ratio of the area of the support
769 that intersects the interval by the total area of rain support.
770 Since areas of rain are not well defined in the case of a fractal
771 support, they are approximated by counting the number of
772 rainy subintervals, at the highest available resolution.

773 [33] Since the fractal scaling of the support is likely to
774 break at 32 min scale (Figure 3), we average the series at
775 32 min resolution (without any specific weighting) before
776 applying WMA. From the coarse-grained series, WMA
777 provides the moments on the graph represented in Figure 11.
778 A wide scaling regime is observed from 1 week to 32 min
779 time scales. The fit lines intersect at about $\log_2(\lambda) = 4$, i.e., a
780 1.5 month time scale. This outer scale of the multifractal
781 cascade is comparable to the value of 42 days estimated by
782 *Lovejoy and Schertzer* [2010] from rain gauge data and
783 could be interpreted as the typical lifetime of synoptic
784 structures. The multifractal parameters are estimated at $\alpha =$
785 1.22 and $C_1 = 0.16$ (Figure 12). Figure 11 leads to think that,
786 when excluding the zeros, rainfall should be multifractal
787 from 32 min (average event duration) to 1 week (which is
788 not so far from synoptic-scale weather structures) time
789 scales, with corrected parameters, different from those
790 estimated in section 5.2 for similar scales. Moreover, the
791 comparison of the (small-scale) event analysis of previous
792 section 5.4 and of WMA reveals a rather limited change
793 in multifractal parameters: in both cases, C_1 is moderate and
794 $\alpha > 1$ is the indicator of processes with unbounded singu-
795 larities (on the above side).

796 6. Rain Over a Support: Consequences on 797 Multifractal Analysis and Simulation Procedures

798 6.1. Rain Over a Support: Which Interpretation?

799 [34] Section 6.1 aims to propose a way to quantify the
800 biases that occur in MA because of the zeros. Rain data sets
801 often have the property that the nonzero values are distrib-
802 uted over a fractal support, at least in some scaling range.
803 When performing direct MA, as defined in section 5.1, on a
804 rain series with a support dimension $d_f < 1$, some biases may
805 appear. Multifractal fields over a fractal support may exhibit
806 a biased empirical scaling regime when the empirical
807 moments are estimated without taking care of the zeros. The
808 presence of zeros in the series is responsible for inadequate
809 (and unphysical) averagings between zero and nonzero

values. Therefore, classical analysis tools will provide a
biased estimation, denoted $\hat{K}(q)$, of the moment scaling
function $K(q)$. To quantify this, let us first recall the notion
of trace moments (for simplicity, we restrict the theoretical
developments of section 6.1 to the case $H = 0$).

[35] At resolution λ , the series may be decomposed in
 λ intervals $]t_1, t_2[\dots]t_\lambda, t_{\lambda+1}[$. At each of these intervals,
a total accumulation $X_\lambda(i) = \int_{]t_i, t_{i+1}[} \Phi_\Lambda(t) dt$ may be defined
(the maximal resolution is Λ). Classically, the average
trace moments [*Schertzer and Lovejoy*, 1987, 2002] may
be defined:

$$\langle Tr[\Phi_\lambda^q] \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\lambda} X_\lambda(i)^q \right\rangle. \quad (7)$$

[36] For a one-dimensional process, these moments are
scaling:

$$\langle Tr[\Phi_\lambda^q] \rangle \propto \lambda^{M_1(q)} \quad (8)$$

where:

$$M_1(q) = K(q) - (q - 1). \quad (9)$$

[37] In the same way, we have for d -dimensional processes:

$$M_d(q) = K(q) - d(q - 1). \quad (10)$$

[38] Following *Schmitt et al.* [1998], it may be noticed
that the empirical trace moments involve sums and accu-
mulations only. Therefore, contrary to classical moments,
which are sensitive to inadequate averagings between rain
values and rain zeros, the moment trace scaling function
remains invariant whatever the dimension involved in MA.
By inadequately assuming that the process is one dimen-
sional, instead of d_f dimensional, a biased moment scaling
function $\hat{K}(q)$ is obtained but the trace moment scaling
function is correctly estimated. Hence, we may equal the
two expressions:

$$M_{d_f}(q) = K(q) - d_f(q - 1) = \hat{K}(q) - d(q - 1) \quad (11)$$

which provides the expression of the (biased) empirical
moment scaling function:

$$\hat{K}(q) = K(q) + c_f(q - 1) \quad (12)$$

where c_f is the fractal codimension of the rain support.
It may be noted that the condition of conservativity $\hat{K}(1) = 0$
is accurately followed. However, the fractal support has
been taken into account since $\lim_{q \rightarrow 0^+} \hat{K}(q) = -c_f$. Note that
equation (12) quantifies the multiscaling properties of a
UM field multiplied by an independent β -model mono-
fractal cascade.

[39] From equation (12), an approximation of the usual
biased parameters may be proposed. Indeed, suppose that
the universal parameters are estimated by fitting the
empirical moment scaling function with the universal two-
parameter form for moderate orders. The fit is strongly
conditioned by the behavior of the process not too far from

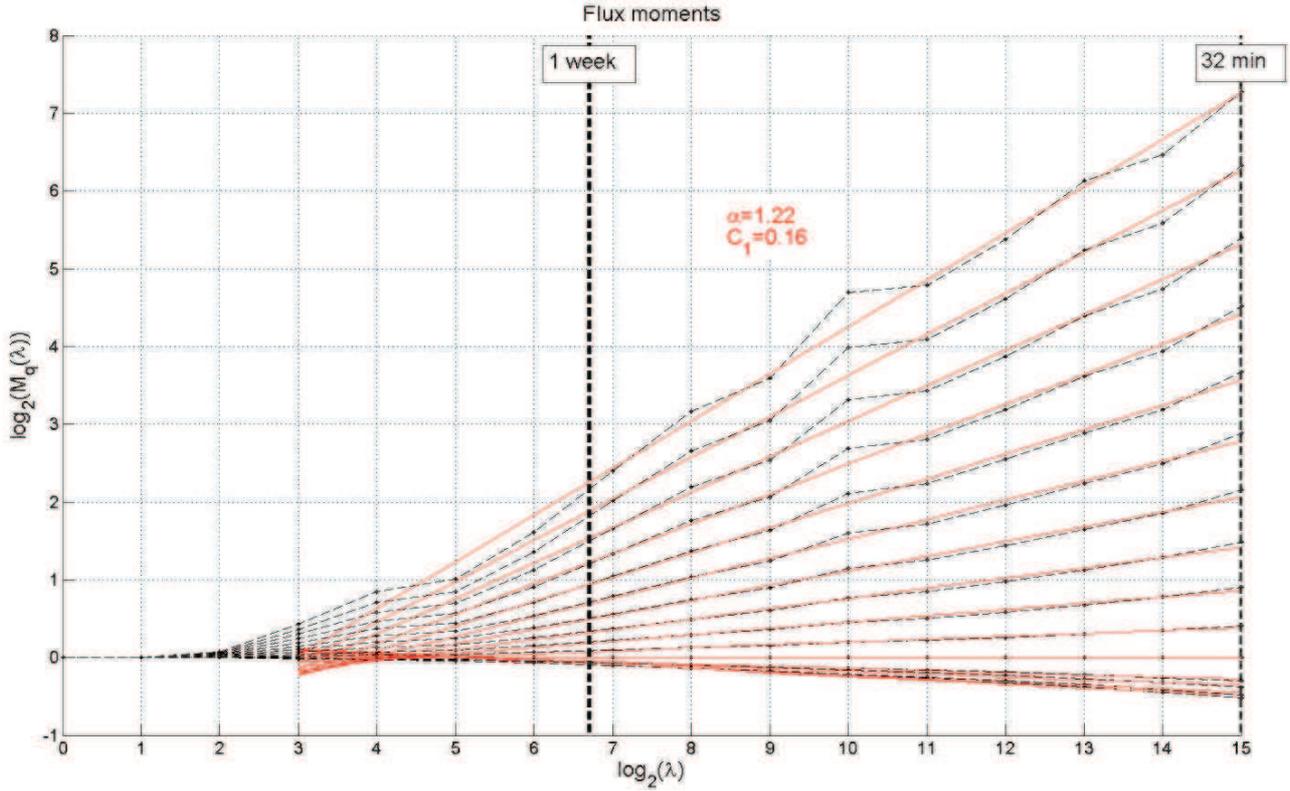


Figure 11. Weighted empirical moments of the DBS time series, as a function of the resolution, in log-log coordinates. Both the resolution degradation process and the weighting procedure are adapted in order to overweight the nonzero rain values.

849 the mean of the process ($q = 1$). Let us now consider the
 850 optimal estimation of the parameters α and C_1 , near $q = 1$.
 851 When $K(q)$ has a universal form, the parameters may be
 852 estimated by considering the derivatives in $q = 1$: $K'(1) = C_1$
 853 and $K''(1) = C_1\alpha$. However, the optimal fit, near the mean
 854 of the process, of $\hat{K}(q)$, which does not have the classical
 855 form, will provide biased parameters that should follow,
 856 with trivial notations:

$$\begin{cases} \hat{K}'(1) = \hat{C}_1 \\ \hat{K}''(1) = \hat{C}_1 \hat{\alpha} \end{cases} \quad (13)$$

857 [40] From (12) and (13), the values of biased parameters
 858 may be expressed as:

$$\hat{C}_1 = C_1 + c_f \quad (14)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha C_1}{C_1 + c_f}. \quad (15)$$

859 [41] This could explain why MA of rain fields that contain
 860 a lot of zeros provides a high value of C_1 and a rather small
 861 value of α , compared to full-rain parameters and to para-
 862 meters that describe other atmospheric processes. In the
 863 same way, the spectrum of conservative cascades should be
 864 flatter in this pseudoscaling regime:

$$\hat{\beta} = 1 - \hat{K}(2) = \beta - c_f \quad (16)$$

[42] Let us now consider the small-scale and full-rain 865
 parameters obtained in section 5.3, i.e., $\alpha = 1.8$, $C_1 = 0.1$. 866
 If we assume that these parameters in fact hold at larger 867
 scales (where the process becomes nearly conservative, 868
 $H \sim 0$), but are distributed at these scales over a fractal 869
 support which would bias direct MA, we could try to test the 870

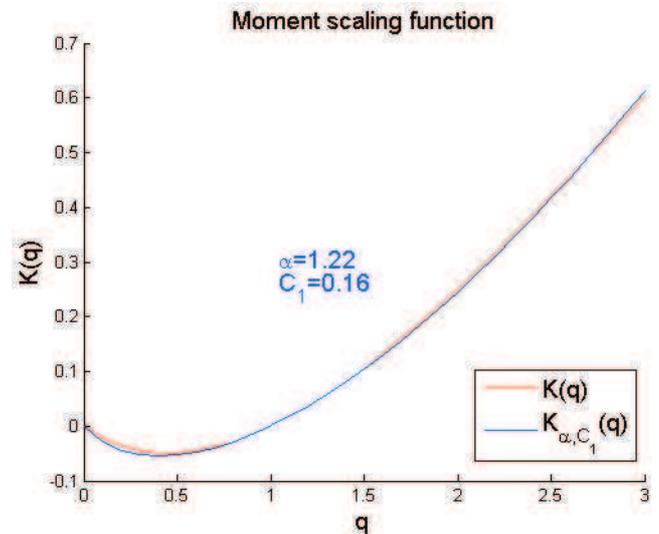


Figure 12. Best UM fit of the moment scaling function of the weighted statistics shown in Figure 11.

871 above formulas. This is equivalent to wonder which biased
 872 UM parameters would be expectable in the range of scales
 873 where the data set support has codimension 0.45, i.e., 1.5
 874 days to 30 min. By applying the above formulas, we find
 875 $\hat{C}_1 = 0.55$ and $\hat{\alpha} \approx 0.3$, which is very consistent with the
 876 large-scale parameters estimated from Figure 6 in the range
 877 3 days to 32 min. In addition, the spectral slope $\hat{\beta} \approx 1.1$ is
 878 very close to that estimated from Figure 2 in the range 3 hr
 879 to 32 min. The break observed on the power spectrum at 3 h
 880 would in fact be independent of the multifractality of the
 881 series and only result from a (progressive) transition from
 882 nonstationarity ($H \neq 0$) to stationarity ($H = 0$), coherently
 883 with the first-order structure function presented in Figure 4.
 884 [43] The model of rain over a support seems therefore
 885 pertinent to quantify some biases because of the zero rain
 886 rate effect on multifractal statistics, and to explain part
 887 (most?) of the differences between parameters of the liter-
 888 ature (Table 1) and those reported in Table 3. An apparent
 889 multifractal transition between scaling regimes such as those
 890 shown in this study could in fact hide some kind of
 891 dimensional transition. However, the applicability of the
 892 previous formulas should be nuanced since they are based a
 893 limited range of order of moments and hence of classes of
 894 variability. Moreover, realistic rain supports are coupled
 895 with the position of rain peaks which should not be dis-
 896 tributed independently of the support borders, which is not
 897 adequately represented by the model described this section.
 898 [44] Even though some properties of multifractal pro-
 899 cesses over a support may be demonstrated, the issue of the
 900 simulation of such processes is important for applications. In
 901 the section 6.2, some strategies of simulation are reviewed
 902 and their main characteristics are discussed.

903 6.2. How to Simulate Both Rain Variability 904 and Support?

905 [45] Whereas simple and efficient algorithms for simu-
 906 lating UM/FIF fields are available [Wilson et al., 1991;
 907 Pecknold et al., 1993], they are not designed for simulating
 908 fields with many zeros. To take the latter into account, we
 909 need a procedure that forces the pixels/time intervals that are
 910 outside the rain support to zero. Two main solutions have
 911 been considered in the literature: (1) multiplying the mul-
 912 tifractal field by an independent monofractal support, and,
 913 (2) applying a threshold to the synthetic UM/FIF field.
 914 [46] Solution 1 may admit some variants in the way of
 915 generating the fractal support. The most classical one [Over-
 916 and Gupta, 1996] is to consider a β -model cascade, which
 917 could possibly be adapted to continuity in scale. This model
 918 is coherent with the cascade phenomenology and has the
 919 advantage that the support dimension can be easily and
 920 precisely set to a given value. However, some authors
 921 questioned the ability of the a β -model to reproduce ade-
 922 quately the probability distributions of wet and dry
 923 sequences durations [Schmitt et al., 1998] and proposed to
 924 use alternative solutions such as scaling renewal processes
 925 [Bernardara et al., 2007], which are not considered in the
 926 following paragraphs.
 927 [47] The basic alternative between solutions 1 and 2 can
 928 be commented by comparing their properties. The indepen-
 929 dent fractal support approach suffers from a lack of corre-
 930 lation between heavy rain structures and support shapes. This
 931 approach may be not easily extendable to nonconservative

932 multifractal FIFs. Moreover, a purely monofractal support
 933 would have a zero area, which is problematic, unless build-
 934 ing a monofractal cascade up to a maximal (finite) resolu-
 935 tion. Opposite, solution 2 could appear more appealing since
 936 there is a strong coupling between rainfall variability and
 937 rainfall support. Since a threshold in rain processes could
 938 be given some physical or instrumental justification, this
 939 model could seem more physically based. However, such a
 940 model could involve subtle effects in the multiscale behavior
 941 of the processes, which have been considered in detail by
 942 the means of numerical simulations in previous papers
 943 [de Montera et al., 2009; Verrier et al., 2010]. These simu-
 944 lations demonstrated that thresholded UM/FIF have biased
 945 scaling properties and can exhibit breaks in the scaling.
 946 To see how such effects can arise, suppose for instance a
 947 conservative UM field and apply a low threshold. Then, a
 948 minimal singularity γ_T will be imposed, resulting (after
 949 Legendre transformation) in a linear $K(q)$ function for low
 950 q values ($q < q_T$). However, if the threshold is high enough
 951 so that $\gamma_T > C_1$ (or equivalently $q_T > 1$), the normalization
 952 of the field will be affected and a break will appear in the
 953 scaling. In this case, thresholding a multifractal field pro-
 954 duces a break in the scaling with a large-scale pseudoscaling
 955 regime [Verrier et al., 2010]. The large-scale (pseudo) scal-
 956 ing regime is in fact associated with a fractal support.

957 [48] As shown in section 5.2, there is strong evidence of
 958 a transition separating two multifractal regimes in the DBS
 959 data, and the results in sections 5.3, 5.4 and 6.1 have shown
 960 that more or less the same underlying multifractal param-
 961 eters could hold in both regimes, while appearing differ-
 962 ent because of support effects. It is therefore tempting to
 963 interpret this behavior as a consequence of the (unavoidable)
 964 instrumental threshold in the data. Because of this threshold,
 965 different empirical scaling regimes would appear while pos-
 966 sibly hiding a unique underlying multifractal scaling. How-
 967 ever, even in this view, the distinction between true zeros
 968 and instrumental ones remains rather an open issue. Moreover,
 969 we should not forget that the support model has also its own
 970 interest, especially because of its mathematical convenience
 971 (e.g., applicability of the equations in section 6.1). In fact,
 972 the choice of the appropriate model for rainfall simulation might
 973 be dependent on the domain of application and of the purposes
 974 of the simulation. An alternative possibility would be to
 975 combine some of these models. In fact, Figure 3 shows that the
 976 rain support is fractal from a few days to half an hour time
 977 scale and that at smaller scales, the fractality does not hold
 978 because of the lack of rain zeros in rain events. This would
 979 suggest to model separately large-scale zeros from small-
 980 scale zeros. Hence, a product of a UM/FIF and of a β -model
 981 may be sufficient to simulate rain for resolutions greater
 982 than half an hour, but simulating finer resolution series would
 983 need additional multifractal multiplicative increments with
 984 a low threshold.

985 7. Conclusion

986 [49] Even though the scaling properties of rain have been
 987 investigated in the time domain for a long time, a number of
 988 studies were based on data sets with a coarse resolution,
 989 typically daily, and did not explore (subdaily and) subhourly
 990 scales. This is a drawback since the structure and the internal
 991 variability of rain events is missed. In this study, we used a

992 disdrometer time series of higher resolution (15 s) to show
 993 that rainfall processes exhibit remarkable features at sub-
 994 daily scales. In particular, rain variability presents multi-
 995 fractal properties in separate 3 day to 32 min and 16 min to
 996 15 s scaling regimes. Since the numerous zeros present in
 997 the rainfall series were suspected to bias multifractal anal-
 998 ysis results and universal multifractal parameters estimates,
 999 we proposed to modify analysis procedures in order to
 1000 estimate more reliable parameters. First, multifractal anal-
 1001 ysis has been applied to about 50 uninterrupted rain events
 1002 of duration ~ 30 min, extracted from the data set. This leads
 1003 to corrected universal parameters, namely, $\alpha = 1.8$, $C_1 = 0.1$.
 1004 Then, a weighted multifractal analysis procedure has been
 1005 applied to the full-rain time series and highlighted the sen-
 1006 sitivity of large-scale parameters to the zeros. In order to
 1007 model and quantify the bias due to the zeros, a model of
 1008 multifractals distributed over a fractal support was designed,
 1009 and formulas for the biased universal multifractal parameters
 1010 were derived, depending on the “true” ones and the codi-
 1011 mension of the support. Since the data set support was
 1012 shown to be scaling in the same large-scale (i.e., from a few
 1013 days to half an hour) regime as above, these formulas were
 1014 applicable to our case study. The large-scale biased para-
 1015 meters were retrieved satisfactorily. Therefore, an important
 1016 correction to usual parameters reported in the literature
 1017 should be appropriate (from the biased parameters, $\alpha \sim 0.5$,
 1018 $C_1 \sim 0.5$, to corrected ones, $\alpha \sim 1.8$, $C_1 \sim 0.1$). One chal-
 1019 lenge remaining for applications involving the simulation of
 1020 realistic rainfall series would be to define a simulation
 1021 procedure that will take into account both rain variability
 1022 and rain support scaling properties, while conserving the
 1023 correct scaling regimes. The key difficulty may reside in the
 1024 characterization and interpretation of the rain zeros: how to
 1025 separate rain and absence of rain, on both physical and
 1026 instrumental approaches? which is the part of instrumental
 1027 limitations? The adaptation of existing multiplicative mod-
 1028 els to a realistic modeling of both rain values and zero rain
 1029 rates remains an outstanding challenge.

1030 References

1031 Bernardara, P., C. de Michele, and R. Rosso (2007), A simple model of rain
 1032 in time: An alternating renewal process of wet and dry states with a frac-
 1033 tional (non-Gaussian) rain intensity, *Atmos. Res.*, *84*, 291–301,
 1034 doi:10.1016/j.atmosres.2006.09.001.
 1035 Corrsin, S. (1951), On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in
 1036 an isotropic turbulence, *J. Appl. Phys.*, *22*, 469–473, doi:10.1063/
 1037 1.1699986.
 1038 Deidda, R. (2000), Rainfall downscaling in a space-time multifractal frame-
 1039 work, *Water Resour. Res.*, *36*(7), 1779–1794, doi:10.1029/2000WR900038.
 1040 Delahaye, J.-Y., L. Barthès, P. Golé, J. Lavergnat, and J. P. Vinson (2006),
 1041 A dual-beam spectroprecipitometer concept, *J. Hydrol.*, *328*, 110–120,
 1042 doi:10.1016/j.jhydrol.2005.11.048.
 1043 de Lima, M. I. P., and J. L. M. P. de Lima (2009), Investigating the multi-
 1044 fractality of point precipitation in the Madeira archipelago, *Nonlinear*
 1045 *Processes Geophys.*, *16*, 299–311, doi:10.5194/npg-16-299-2009.
 1046 de Lima, M. I. P., and J. Grasman (1999), Multifractal analysis of 15-min
 1047 and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal, *J. Hydrol.*, *220*, 1–11,
 1048 doi:10.1016/S0022-1694(99)00053-0.
 1049 de Montera, L., L. Barthès, C. Mallet, and P. Golé (2009), The effect of
 1050 rain–no rain intermittency on the estimation of the universal multifractals
 1051 model parameters, *J. Hydrometeorol.*, *10*, 493–506, doi:10.1175/
 1052 2008JHM1040.1.
 1053 de Montera, L., S. Verrier, C. Mallet, and L. Barthès (2010), A passive scalar-
 1054 like model for rain applicable up to storm scale, *Atmos. Res.*, *98*, 140–147,
 1055 doi:10.1016/j.atmosres.2010.06.012.

Dubulle, B. (1994), Intermittency in fully developed turbulence: Log-
 Poisson statistics and generalized scale covariance, *Phys. Rev. Lett.*,
 73, 959–962, doi:10.1103/PhysRevLett.73.959.
 Falkovich, G., A. Fouxon, and M. G. Stepanov (2002), Acceleration of
 rain initiation by cloud turbulence, *Nature*, *419*, 151–154, doi:10.1038/
 nature00983.
 Fraedrich, K., and C. Larnder (1993), Scaling regimes of composite rainfall
 time series, *Tellus, Ser. A*, *45*, 289–298, doi:10.1034/j.1600-0870.1993.
 t01-3-00004.x.
 Gires, A. (2009), Intercomparaison multi-échelle des précipitations du
 modèle Més0-NH avec des données radar, M.S. thesis, Ecole Natl. des
 Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, France.
 Gires, A., D. Schertzer, I. Tchiguirinskaia, and S. Lovejoy (2010), Multi-
 fractal downscaling of precipitation in climate scenarios and a mesoscale
 model, paper presented at Final Conference of the COST Action C22,
 Eur. Coop. in Sci. and Technol., Paris.
 Gupta, V. K., and E. C. Waymire (1997), Reply, *J. Appl. Meteorol.*, *36*,
 1304, doi:10.1175/1520-0450(1997)036<1304:R>2.0.CO;2.
 Harris, D., M. Menabde, A. Seed, and G. Austin (1996), Multifractal char-
 acterization of rain fields with a strong orographic influence, *J. Geophys.*
Res., *101*(D21), 26,405–26,414, doi:10.1029/96JD01656.
 Hubert, P., J. P. Carbonnel, and A. Chauouche (1989), Segmentation des
 séries hydrométéorologiques: Application à des séries de précipitations
 et de débits de l’Afrique de l’Ouest, *J. Hydrol.*, *110*, 349–367,
 doi:10.1016/0022-1694(89)90197-2.
 Hubert, P., Y. Tessier, S. Lovejoy, D. Schertzer, F. Schmitt, P. Ladoy, J. P.
 Carbonnel, S. Violette, and I. Desurosne (1993), Multifractals and
 extreme rainfall events, *Geophys. Res. Lett.*, *20*(10), 931–934, doi:10.1029/
 93GL01245.
 Hubert, P., I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, H. Bendjoudi, and S. Lovejoy
 (2007), Predetermination of floods, in *Extreme Hydrological Events:
 New Concepts for Security*, NATO Sci. Ser., IV, edited by O. F. Vasiliev
 et al., pp. 185–198, vol. 78, Springer, Berlin.
 Kolmogorov, A. N. (1962), A refinement of previous hypotheses
 concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible
 fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, *13*, 82–85, doi:10.1017/
 SLA0022112062000518.
 Ladoy, P., S. Lovejoy, and D. Schertzer (1991), Extreme fluctuations and
 intermittency in climatological temperatures and precipitation, in *Scaling,
 Fractals and Non-linear Variability in Geophysics*, edited by D. Schertzer
 and S. Lovejoy, pp. 241–250, Kluwer Acad., Dordrecht, Netherlands.
 Ladoy, P., F. Schmitt, D. Schertzer, and S. Lovejoy (1993), Variabilité tem-
 porelle multifractale des observations pluviométriques à Nîmes, *C. R.
 Acad. Sci., Ser. II*, *317*, 775–782.
 Lavergnat, J., and P. Golé (1998), A stochastic raindrop time distribution
 model, *J. Appl. Meteorol.*, *37*, 805–818, doi:10.1175/1520-0450(1998)
 037<0805:ASRTDM>2.0.CO;2.
 Lilley, M., S. Lovejoy, N. Desaulniers-Soucy, and D. Schertzer (2006),
 Multifractal large number of drops limit in rain, *J. Hydrol.*, *328*, 20–37,
 doi:10.1016/j.jhydrol.2005.11.063.
 Lovejoy, S., and D. Schertzer (1995), Multifractals and rain, in *New Uncer-
 tainty Concepts in Hydrology and Water Resources*, edited by Z. W.
 Kundzewicz, pp. 62–103, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K.
 Lovejoy, S., and D. Schertzer (2007), Scale, scaling and multifractals in
 geophysics: Twenty years on, in *Nonlinear Dynamics in Geosciences*,
 edited by A. A. Tsonis and J. Elsner, pp. 311–337, Springer, Berlin.
 Lovejoy, S., and D. Schertzer (2008), Turbulence, raindrops, and the $l^{1/2}$
 number density law, *New J. Phys.*, *10*, 075017, doi:10.1088/1367-2630/
 10/7/075017.
 Lovejoy, S., and D. Schertzer (2010), Towards a new synthesis for atmo-
 spheric dynamics: Space-time cascades, *Atmos. Res.*, *96*, 1–52, doi:1016/
 j.atmosres.2010.01.004.
 Lovejoy, S., D. Schertzer, and V. C. Allaire (2008), The remarkable wide
 range spatial scaling of TRMM precipitation, *Atmos. Res.*, *90*, 10–32,
 doi:10.1016/j.atmosres.2008.02.016.
 Lovejoy, S., J. P. Pielou, and D. Schertzer (2011), The global space-time cas-
 cade structure of precipitation: Satellites, gridded gauges and reanalyses,
Adv. Water Resour., in press.
 Mandelbrot, B. B. (1974), Intermittent turbulence in self-similar cascades:
 Divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid
 Mech.*, *62*, 331–358, doi:10.1017/S0022112074000711.
 Marsan, D., D. Schertzer, and S. Lovejoy (1996), Causal space-time multi-
 fractal processes: Predictability and forecasting of rain fields, *J. Geophys.*
Res., *101*(D21), 26,333–26,346, doi:10.1029/96JD01840.
 Molini, A., G. G. Katul, A. Porporato (2009), Revisiting rainfall clustering
 and intermittency across different climatic regimes, *Water Resour. Res.*,
 45, W11403, doi:10.1029/2008WR007352.
 Obukhov, A. M. (1949), The structure of the temperature field in a turbu-
 lent flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.*, *13*, 58–69.

- 1135 Obukhov, A. M. (1962), Some specific features of atmospheric turbulence, 1171
 1136 *J. Fluid Mech.*, *13*, 77–81, doi:10.1017/S0022112062000506. 1172
- 1137 Olsson, J. (1995), Limits and characteristics of the multifractal behaviour of 1173
 1138 a high-resolution rainfall time series, *Nonlinear Processes Geophys.*, *2*, 1174
 1139 23–29, doi:10.5194/npg-2-23-1995. 1175
- 1140 Olsson, J., J. Niemczynowicz, and R. Berndtsson (1993), Fractal analysis 1176
 1141 of high-resolution rainfall time series, *J. Geophys. Res.*, *98*(D12), 1177
 1142 23,265–23,274, doi:10.1029/93JD02658. 1178
- 1143 Over, T. M., and V. K. Gupta (1996), A space-time theory of mesoscale 1179
 1144 rainfall using random cascades, *J. Geophys. Res.*, *101*(D21), 26,319–26,331, 1180
 1145 doi:10.1029/96JD02033. 1181
- 1146 Parisi, G., and U. Frisch (1985), A multifractal model of intermittency, 1182
 1147 in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and 1183*
 1148 *Climatic Dynamics*, edited by M. Ghil et al., pp. 84–88, North-Holland, 1184
 1149 Amsterdam. 1185
- 1150 Pathirana, A., S. Herath, and T. Yamada (2003), Estimating rainfall distri- 1186
 1151 butions at high temporal resolutions using a multifractal model, *Hydrol. 1187*
 1152 *Earth Syst. Sci.*, *7*, 668–679, doi:10.5194/hess-7-668-2003. 1188
- 1153 Schertzer, D., and S. Lovejoy (1987), Physical modeling and analysis of 1189
 1154 rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, *J. Geophys. 1190*
 1155 *Res.*, *92*(D8), 9693–9714, doi:10.1029/JD092iD08p09693. 1191
- 1156 Schertzer, D., and S. Lovejoy (1991), Nonlinear geodynamical variability: 1192
 1157 Multiple singularities, universality and observables, in *Non-linear Vari- 1193*
 1158 *ability in Geophysics: Scaling and Fractals*, edited by D. Schertzer and 1194
 1159 S. Lovejoy, pp. 41–82, Kluwer Acad., Dordrecht, Netherlands. 1195
- 1160 Schertzer, D., and S. Lovejoy (1997), Universal multifractals do exist!: 1196
 1161 Comments on “A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random 1197
 1162 cascade”, *J. Appl. Meteorol.*, *36*, 1296–1303, doi:10.1175/1520-0450 1198
 1163 (1997)036<1296:UMDECO>2.0.CO;2. 1199
- 1164 Schertzer, D., S. Lovejoy, and P. Hubert (2002), An introduction to sto- 1200
 1165 chastic multifractal fields, in *Mathematical Problems in Environmental 1201*
 1166 *Science and Engineering, Ser. Contemp. Appl. Math.*, vol. 4, edited by 1202
 1167 A. Ern and L. Weiping, pp. 106–179, Higher Educ. Press, Beijing. 1203
- 1168 Schmitt, F., S. Vannitsem, and A. Barbosa (1998), Modeling of rainfall 1204
 1169 time series using two-state renewal processes and multifractals, *J. Geophys. 1205*
 1170 *Res.*, *103*(D18), 23,181–23,193, doi:10.1029/98JD02071. 1206
- She, Z.-S., and E. Levêque (1994), Universal scaling laws in fully developed 1171
 turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, *72*, 336–339, doi:10.1103/PhysRevLett. 1172
 72.336. 1173
- She, Z.-S., and E. C. Waymire (1995), Quantized energy cascade and log- 1174
 Poisson statistics in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, *74*, 1175
 262–265, doi:10.1103/PhysRevLett.74.262. 1176
- Sun, X., and A. P. Barros (2010), An evaluation of the statistics of rainfall 1177
 extremes in rain gauge observations and satellite-based and reanalysis 1178
 products using universal multifractals, *J. Hydrometeorol.*, *11*, 388–404, 1179
 doi:10.1175/2009JHM1142.1. 1180
- Tessier, Y., S. Lovejoy, and D. Schertzer (1993), Universal multifractals: 1181
 Theory and observations for rain and clouds, *J. Appl. Meteorol.*, *32*, 1182
 223–250, doi:10.1175/1520-0450(1993)032<0223:UMTAOF>2.0.CO;2. 1183
- Tessier, Y., S. Lovejoy, P. Hubert, D. Schertzer, and S. Pecknold (1996), 1184
 Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, 1185
 causal transfer functions, *J. Geophys. Res.*, *101*(D21), 26,427–26,440, 1186
 doi:10.1029/96JD01799. 1187
- Verrier, S., L. de Montera, L. Barthès, and C. Mallet (2010), Multifractal 1188
 analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero 1189
 rain-rate problem, *J. Hydrol.*, *389*, 111–120, doi:10.1016/j.jhydrol. 1190
 2010.05.035. 1191
- Wang, L.-P., and W. W. Grabowski (2009), The role of air turbulence in 1192
 warm rain initiation, *Atmos. Sci. Lett.*, *10*, 1–8, doi:10.1002/asl.210. 1193
- Xue, Y., L.-P. Wang, and W. W. Grabowski (2008), Growth of cloud dro- 1194
 plets by turbulent collision-coalescence, *J. Atmos. Sci.*, *65*, 331–356, 1195
 doi:10.1175/2007JAS2406.1. 1196
- Yaglom, A. M. (1966), The influence of the fluctuation in energy dissipa- 1197
 tion on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, *Sov. 1198*
Phys. Dokl., Engl. Transl., *2*, 26–30. 1199
- L. Barthès, C. Mallet, and S. Verrier, LATMOS, CNRS/INSU, 1200
 Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 11 blvd. d’Alembert, 1201
 F-78280 Guyancourt, France. (verrier@latmos.ipsl.fr) 1202



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Hydrology

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jhydrol

Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem

S. Verrier*, L. de Montera, L. Barthès, C. Mallet

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, CNRS/INSU, LATMOS – Laboratoire Atmosphères, Milieux, Observations Spatiales, 11 boulevard d'Alembert, 78280 Guyancourt, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 July 2009

Received in revised form 26 March 2010

Accepted 19 May 2010

This manuscript was handled by A. Bardossy, Editor-in-Chief, with the assistance of P. Chandra Nayak, Associate Editor

Keywords:

Precipitation

Multifractals

Radar data

Zero rain rates

AMMA campaign

SUMMARY

Nonlinear rain dynamics, due to strong coupling with turbulence, can be described by stochastic scale invariant (such as multifractal) models. In this study, attention is focused on the three-parameter fractionally integrated flux (FIF), based on the universal multifractal (UM) model developed by Schertzer and Lovejoy (1987). Multifractal analysis techniques were applied to experimental radar data measured during the African monsoon multidisciplinary analysis (AMMA) campaign, during the summer of 2006. The non-conservation parameter H , which has often been estimated at 0, was found to be more likely close to 0.4, meaning that rain is not a conserved cascade. Moreover, it is shown that the presence of numerous zero values in the data has an influence, which has until now been underestimated, but should in fact be accounted for. UM parameters are therefore estimated from the full dataset, and then only from maps in which almost all pixels have a non-zero value. Significant differences were found, attributed to *on-off* intermittency, and their role was checked by means of simulations. Finally, these results are compared with those previously based on time series, and collected by a co-localized disdrometer. The sets of parameters obtained in the spatial and time domains are found to be quite close to each other, contrary to most results published in the literature. This generally reported incoherency is believed to result mainly from the influence of *on-off* intermittency, whose effects are stronger for time series than for selected radar maps.

© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

When modeling the atmosphere, one needs to take into account various significant fields, such as wind, temperature, humidity or rain rate, as well as their coupling interactions. Due to its highly nonlinear and intermittent behavior, the rain rate field remains one of the most difficult to model. Phenomenological models and statistical tools are generally required. Rain is strongly coupled with atmospheric turbulence, which in the inertial range can be statistically described by scale invariant processes, due to the fundamental symmetries of the Navier–Stokes equations. These scale invariant processes do not have any characteristic scale over the scaling range. Moreover, interactions occur preferentially between neighbouring scales (localness in Fourier space), and energy fluxes may be conserved from large to small-scales. The latter three properties lead to a cascade phenomenology. To illustrate this, we recall the classical Kolmogorov and Corrsin–Obukhov scaling laws (Kolmogorov, 1941; Obukhov, 1949; Corrsin, 1951), which respectively describe longitudinal velocity (v) and passive-scalar (ρ) field

increments (denoted Δv and $\Delta \rho$). These statistical laws are based mainly on the assumption of energy flux density (ε) and scalar variance flux density (χ) conservation, as well as on dimensional considerations. Their expressions, in the case of homogeneity of the fluxes, are respectively:

$$\Delta v \approx \varepsilon^{1/3} l^{1/3}$$

$$\Delta \rho \approx \chi^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}$$

where l is the scale at which increments are considered.

The case of inhomogeneous fluxes was investigated later (Kolmogorov, 1962; Obukhov, 1962): although they have a constant average, scale-by-scale transfers may be intermittent. Scaling cascade models were then proposed in order to represent such intermittency (Novikov and Stewart, 1964; Yaglom, 1966; Mandelbrot, 1974). Turbulence (and rain) models were therefore adapted to reproduce scale invariance properties through the use of fractal geometry.

However, it was found that a single fractal dimension was insufficient to describe the whole phenomenon, such that more sophisticated models were developed in the 1980s, based on multifractal formalism. In these models, rain is described by an infinite set of

* Corresponding author.

E-mail address: verrier@latmos.ipsl.fr (S. Verrier).

fractal dimensions, each of these being associated with a singularity level.

Then, it was shown by Schertzer and Lovejoy (1987) that multifractal rain properties could be reproduced by a multiplicative cascade process. In the same paper, the authors mention the stability properties of cascade generators, and argue the existence of a class of attractors (called universal multifractals (UM)). Moreover, since geophysical processes are generally non-stationary, an additional fractional integration is needed. Such integrated cascades are referred to as fractionally integrated flux (FIF). This model is described by only three fundamental parameters (Schertzer and Lovejoy, 1991): a multifractality exponent α , an average sparsity degree C_1 , and a non-conservation parameter H .

Various studies, based on this or similar formalisms, have shown the pertinence of multifractal rain models: (Lovejoy et al., 1987; Lovejoy and Schertzer, 1990; Gupta and Waymire, 1991; Ladoy et al., 1991; Tessier et al., 1993; Hubert et al., 1993; Olsson, 1995; Olsson and Niemczynowicz, 1996; Tessier et al., 1996; Marsan et al., 1996; de Lima, 1998; Hogan and Kew, 2005; Lovejoy and Schertzer, 2006; Lovejoy et al., 2008). Typically, the parameters are estimated as ($\alpha = 0.6$, $C_1 = 0.5$, $H = 0$) in time, and ($\alpha = 1.4$, $C_1 = 0.15$, $H = 0-0.3$) in space. For a review of this topic, see Lovejoy and Schertzer (1995) and Lilley et al. (2006). However, a recent study (de Montera et al., 2009), which extends the findings of previous papers (Harris et al., 1996; Schmitt et al., 1998), has shown that the estimation method is biased due to the high number of zero values present in the data (in the following, the fluctuation of the cascade level is classically referred to as 'intermittency', whereas the alternation between rain and no-rain periods is called *on-off* intermittency). Indeed, the analysis of *uninterrupted* rain rate time series has led to significantly different parameter estimations ($\alpha = 1.7$, $C_1 = 0.13$, $H = 0.53$).

Following a similar approach, the purpose of the present study is to estimate biases provoked by *on-off* intermittency in the spatial domain, and to perform a new estimation of multifractal parameters based on radar rain maps. In particular, in order to estimate more reliable spatial parameters, we focus on rain map sub-sections in which almost all pixels have a non-zero value (called *full-rain* maps in the following). Firstly, the essential equations of the multifractal framework and the multifractal analysis are recalled (Sections 2 and 3). The experimental datasets are presented in Section 4. Then, Section 5 presents the results of the multifractal analysis performed both on classical rain maps, and on *full-rain* sub-sections. The influence of the presence of zero values is verified by numerical simulations, and the differences between the parameters are thus interpreted (Section 6). Finally, the new set of unbiased universal parameters is compared with those proposed by de Montera et al. (2009), and in other scientific publications (Section 7).

2. Properties of multifractals

In this section, the fundamental properties of fractals and multifractals are recalled. In particular, we introduce the FIF model used in the following sections.

2.1. Fractal sets and multifractal fields

The concept of fractal dimension is useful to characterize scale invariance in the context of geometric sets (for a detailed introduction, see Falconer (2003)). We define a fractal set A embedded in a space of dimension D , and of characteristic size L . By considering A on a scale defined by l , equivalent to a resolution of $\lambda = L/l$, the embedding space is divided into λ^D boxes B_λ of size l^D . Each box

may, or may not belong to the fractal set A , seen at a resolution λ (denoted A_λ). The associated probability is:

$$\Pr(B_\lambda \in A_\lambda) \approx \lambda^{-C_f} \quad (1)$$

where $C_f = D - D_f$ is the fractal co-dimension of A , and D_f is its (box-counting) fractal dimension (here and in the following, \approx indicates an equality, within the limits of slowly varying functions).

In the case of rain, the situation is more complex than in a binary set because we are interested in modeling not only its presence or absence, but also its intensity. Therefore, multifractal models must be used instead of monofractal models with a single co-dimension. In order to define a threshold independently of the resolution, the scale invariant notion of singularity γ is used. The singularity is related to the threshold T by the relation:

$$T = \lambda^\gamma \quad (2)$$

For any singularity, a family of exceedance sets may be obtained, each set being associated with a specific resolution. The fundamental equation of the multifractal formalism is then:

$$\Pr(\phi_\lambda > \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3)$$

where ϕ_λ is the field seen at resolution λ , and $c(\gamma)$ is the specific co-dimension corresponding to the set defined by the singularity γ . Due to the equivalence relation between probability distributions and statistical moments, (3) may also be written (Schertzer and Lovejoy, 1987) as:

$$\langle \phi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (4)$$

where $\langle \bullet \rangle$ is the averaging operator, q is the order of the moment, and $K(q)$ is the so-called moment scaling function which characterizes the multifractal field. In the general case, $K(q)$ is a convex function with the trivial special values $K(0) = 0$ and $K(1) = 0$. Eq. (4) means that for any given order q , the moment depends on the resolution through a simple power-law. It can be shown that there is a one-to-one correspondence between singularities and moment orders, since the moment scaling function is the Legendre transform of the co-dimension function (Parisi and Frisch, 1985). Two multifractal fields with the same moment function are equivalent, in the sense of equivalence classes, although they can be physically very different (for more details concerning the properties of the multifractal fields, see Schertzer et al. (2002)).

2.2. Multiplicative cascades

Multiplicative cascades, first developed in the framework of turbulence theory, may be used to build multifractal fields. The main idea is to start the cascade at larger scales and to derive the process at smaller scales, by successively dividing pixels into sub-pixels, and determining the value of each smaller pixel from that of the larger ones, through multiplication by i.i.d. random variables, independently of the scale. The simplest multifractal case is the α -model (Schertzer and Lovejoy, 1985) in which the random variable has two possible values, defining multiplicative weights that respectively correspond to an increasing or a decreasing pixel value. Usually, as for turbulence in which the energy flux is conserved by the nonlinear terms of the Navier–Stokes equations, the mean of the process is assumed to be conserved when the resolution changes:

$$\forall \lambda, \langle \phi_\lambda \rangle = M \quad (5)$$

In the following, we assume that ϕ_λ is a normalized conservative process, such that $M = 1$.

2.3. Universal multiscaling

Since the function K could, *a priori*, be any convex function with $K(1) = K(0) = 0$, an infinite number of parameters (i.e. the values of the function for each positive real order q) would be needed to characterize a multifractal field. Hence, an infinite number of parameters (the values of the function for each positive real order q) is needed to characterize the multifractal field. Since this is not practical, various attempts to reduce the number of parameters have been proposed. In this paper, we focus on the UM model developed by Schertzer and Lovejoy (1987, 1991), which assumes the existence of a class of stable and attractive cascade processes, which are obtained by generalizing the conservative discrete cascade construction to *suitably renormalized* continuous ones, i.e. by adding an infinite number of construction steps between any pair of resolutions. The resulting fields, referred to as universal, have a rather high degree of generality in geophysics, especially in the phenomenology of turbulence. For a mathematical and physical discussion of the construction and generality of UM fields, see Schertzer and Lovejoy (1997) – note however the generality of the UM model has been questioned and discussed (Gupta and Waymire, 1997). An UM field has an analytic moment scaling function defined by the knowledge of only two parameters (Schertzer and Lovejoy, 1987):

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \tag{6}$$

where α is the degree of multifractality, varying from 0 (monofractal case) to 2 (log-normal case). It indicates how rapidly the co-dimension varies as a function of the singularity. The parameter C_1 provides a physical characterization of the field inhomogeneity. In particular, $C_1 = 0$ corresponds to the case of a homogeneous field, and increasing values of this parameter indicate the concentration of increasingly high field values into progressively sparse peaks. Mathematically, $C_1 = K'(1)$ may be also interpreted as the singularity providing the main contribution to the mean value of the process, as well as the co-dimension of the corresponding family of exceedance sets, since $C_1 = c'(C_1)$.

2.4. The FIF model

In previous chapters, we considered only conservative fields. However, most geophysical data correspond to non-conservative fields, such that the UM model must be extended to this more general case. The H th order fractional integration of a conservative UM is a FIF (Schertzer and Lovejoy, 1991). When H is different from 0, the resulting field, noted R_λ , is neither stationary nor conserved, and H is thus called the non-conservative or non-stationarity parameter. This parameter is a type of Hurst exponent and represents the degree of smoothness of the process, increasing with the value of H . Field increments obey the following statistics:

$$|\Delta R_\lambda| \approx \phi_\lambda |\Delta \vec{x}|^H \tag{7}$$

where $\Delta R_\lambda(\vec{x}) = R_\lambda(\vec{x} + \Delta \vec{x}) - R_\lambda(\vec{x})$ and $|\Delta \vec{x}| = L/\lambda$. By raising both members of (7) to the q th power, and then taking the mean, the following expression is obtained for the q th order structure function of R :

$$\langle |\Delta R_\lambda|^q \rangle \approx \lambda^{-\zeta(q)} \tag{8}$$

where $\zeta(q) = qH - K(q)$, called the structure function exponent, extends the notion of the moment scaling exponent to non-conservative fields.

3. Multifractal analysis techniques

In this section, classical multifractal analysis techniques are presented. These techniques have been developed mainly in order to answer the following questions: (i) Does the field exhibit scale-invariant properties, and is it an integrated process? (ii) Does the field result from an underlying multiplicative cascade? (iii) What are the parameters describing the field in the UM or FIF framework?

3.1. Power spectrum and structure function

The power spectrum is useful to address question (i). In this paper, we consider the classical isotropic angle-integrated spectrum only, noted $E(k)$. In the case of a scaling process, the spectrum should follow a power-law, where β is the negative slope of $E(k)$ on a log–log graph:

$$E(k) \approx k^{-\beta} \tag{9}$$

As a consequence of the Wiener–Khinchine theorem, the theoretical β of a FIF process is related to the multifractal parameters through the following relation:

$$\beta = 1 - K(2) + 2H \tag{10}$$

H may be estimated from (10) as soon as $K(2)$ is known (see Section 3.2). Another convenient way to estimate the parameter H is to use the first order structure function. Indeed, since $K(1) = 0$, for $q = 1$, Eq. (8) simplifies and take the form:

$$\langle |\Delta R_\lambda| \rangle \approx \lambda^H \tag{11}$$

Therefore, when the first order structure function is plotted as a function of the resolution, using log–log coordinates, it should be a straight line of slope H .

3.2. Reconstitution of the underlying conservative flux

The next step of the analysis is to answer (ii). This is generally performed by verifying that the statistical moments of the process vary as a power-law of the resolution, according to Eq. (4). However, this analysis is not straightforward since most geophysical processes are not conservative, and the underlying cascade is not known *a priori*. Theoretically, it would be necessary to estimate H and differentiate the field at this order. Nevertheless, differentiating a FIF at a higher order than H , at the highest resolution λ_{\max} , provides an approximation of the underlying conservative cascade at the resolution λ_{\max} , thus enabling the UM parameters α and C_1 to be reliably estimated (Schertzer and Lovejoy, 1991; Lavallée, 1991; Tessier et al., 1993). In particular, it has been pointed out by Lovejoy and Schertzer (1995) that a finite difference Laplacian may be used in 2-D. The estimation of the conservative and normalized field ϕ_λ at the resolution λ_{\max} is therefore given by the following formula:

$$\phi_{\lambda_{\max}} = \frac{|\nabla^2(R_{\lambda_{\max}})|}{\langle |\nabla^2(R_{\lambda_{\max}})| \rangle} \tag{12}$$

where ∇^2 is the finite-difference Laplace operator. Then, ϕ_λ can be reconstructed at lower resolutions by successively averaging contiguous values. Finally, the moments of the underlying cascade can be estimated at any resolution by averaging the q th powers of ϕ_λ . If, for any given value of q , the moment follows a straight line as a function of the resolution in a log–log graph, then question (ii) can be answered affirmatively and the field can be considered to have multifractal properties. According to Eq. (4), the slope of this line is equal to $K(q)$, thus allowing the moment scaling function K to be estimated.

3.3. Moment scaling and estimation of universal parameters

The final step of the analysis is to estimate the multifractal parameters, assuming that the revealed multiplicative process converges towards a UM field, which can be described by the universal parameters (α , C_1 , H). At this point, the parameters can be estimated on an event-by-event basis and then averaged, or, alternatively, it is possible to firstly compute the averaged power spectrum and moment scaling function using all available rain maps, and then estimate the parameters. Since the latter technique provides a better approximation to the statistically correct Eq. (4), it was chosen for the analysis described in the following.

Concerning the estimation of the parameters, we used the following simple properties of the moment scaling function, which allow the exponents α and C_1 to be estimated directly:

$$K'(1) = C_1 \quad (13)$$

$$K''(1) = C_1 \cdot \alpha \quad (14)$$

where K' and K'' are respectively the first and second derivatives of $K(q)$. More sophisticated techniques are available, such as the double trace moment technique (Lavallée et al., 1993) and its modified version (Veneziano and Furcolo, 1999). However, we have run simulations to check that direct use of Eqs. (13) and (14) correctly retrieves the multifractal parameters, even in the non-stationary case, i.e. for $H > 0$. This method was therefore maintained, for reasons of simplicity.

4. Data sets

The data analyzed in this paper was recorded during the African monsoon multidisciplinary analysis campaign (AMMA) near Djougou, Benin, during the summer of 2006. Rain rate maps were estimated with the Doppler RONSARD radar, whose characteristics are described in Table 1 (for more information, see Scialom et al. (2009)). The latter highlights the high values of the emission power and antenna gain, which contribute to the decrease, to a rather low threshold, of the minimum detectable signal. The ground-based RONSARD radar is thus adapted to the requirements of the remote sensing of rain. Moreover, a significant advantage in using this dataset results from the presence of a disdrometer near to the radar: the former instrument recorded high-resolution rain series during the same period of time (see Section 5.2). The multifractal properties of these time series have already been investigated (de Montera et al., 2009) and allow a comparison to be made with the statistical properties of the radar data (see below). Reflectivity maps were covered by 256×256 pixel grids, with each pixel corresponding to a surface area of 400×400 m. Such reflectivity maps were converted into rain rates using a classical relation $Z = aR^b$, with $a = 200$ and $b = 1.6$. The period sparsely covered by this data extends from June–September 2006, with one map recorded every 7 min. The full dataset includes 1372 maps and focuses mainly on stormy events. As shown in Fig. 1, the pixels far removed from the

Table 1

Characteristics of the RONSARD radar. The detection threshold is given at a distance of 12.8 km, equivalent to 32 radar pixels on the grids used in this study.

Emission frequency	5.6 GHz
Wavelength	5.36 cm (band C)
Peak power	250 KW
Mean power	250 W
Polarization modes	H and V
Antenna diameter	400 cm
Antenna surface area	12.56 m ²
Antenna gain	44 dB (H), 43 dB (V)
Half-power lobe width (-3 dB)	0.9° in the H and V planes
Detection threshold (at $d = 12.8$ km)	12.1 dBZ

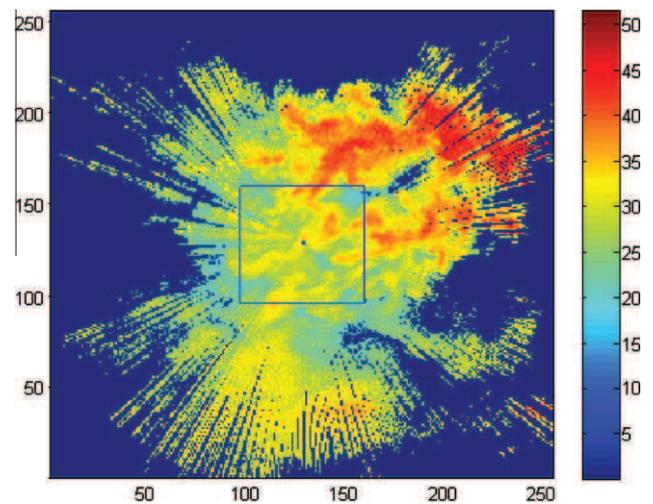


Fig. 1. Example of a raw RONSARD map (in dBZ). The square indicates the central section, selected in order to avoid noisy and/or missing data.

centre of the map often contain unreliable values. Hence, in the following, the analyses are performed on 64×64 pixel central sections, corresponding to an area of 25×25 km (Section 5.1). Although such a reduction in scaling range is unavoidable, it is not a serious drawback since we are mainly interested in the local properties of *full-rain* regions.

Since problems may arise due to the presence of zero rain rates (which represent 60% of the pixel values), multifractal analysis was also performed on a quasi *full-rain* dataset, obtained by selection of the rainiest maps of the dataset (see Section 5.2). It is important to note that such a significant *full-rain* dataset would not have been obtained by considering larger maps (e.g. covered by 128×128 pixel grids). This also justifies the previous limitation in the scaling range.

5. Rain map analysis

5.1. Full dataset analysis

Fig. 2 shows, in log–log coordinates, the power spectrum of the 1372 64×64 central rain map sub-sections extracted from the RONSARD dataset. The power spectrum is found to be scaling, with a negative slope estimated at $\beta = 1.47$. Since $\beta > 1$ and $K(2)$ is a positive quantity, according to Eq. (10), the field is not conservative and H is greater than 0. This result is coherent with the form of the first order structure function (Fig. 3), which should also be a straight line in a log–log graph as described in Section 3.1. H was estimated from Fig. 3 using Eq. (11), and was found to be equal to 0.21. As for the UM parameters, the moments of the normalized finite difference Laplacian were estimated at all accessible resolutions, for various orders $q = (0, 0.1, 0.2, \dots, 2)$ (Fig. 4). For each order, the corresponding moment varies linearly with the resolution, in a log–log graph (Fig. 4). It can be seen that the experimental moments closely verify Eq. (4), indicating that a multifractal model is well adapted. These curves were fitted by linear regression (red¹ lines on Fig. 4) and $K(q)$ was estimated. Then, the UM parameters were estimated using Eqs. (13) and (14), and found to be equal to ($\alpha = 1.25$, $C_1 = 0.51$) (cf. Table 2).

The value determined for α is close to the estimates proposed in the scientific literature: Tessier et al. (1993) found $\alpha = 1.4$ using radar data, and $\alpha = 1.35$ with a rain gauge network, and Lovejoy et al.

¹ For interpretation of color in Figs. 4, the reader is referred to the web version of this article.

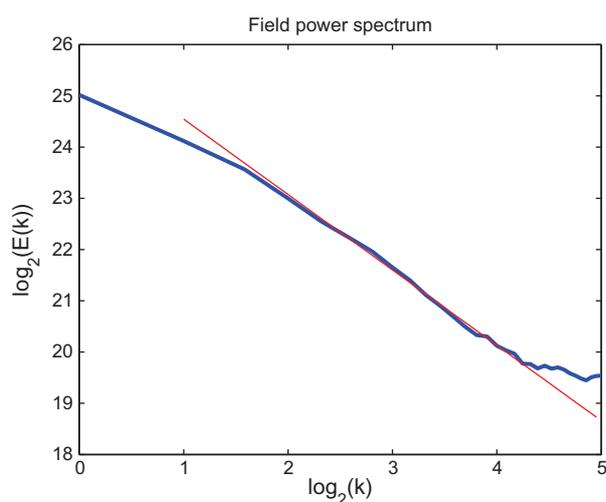


Fig. 2. Angle-integrated power spectrum of 1372 experimental rain maps, and corresponding linear regression fit. In order to make use of simple coordinate ticks, the frequencies have been normalized by dividing them by $(1/64)$ pixel $^{-1}$. The spectral slope is $\beta = 1.47$.

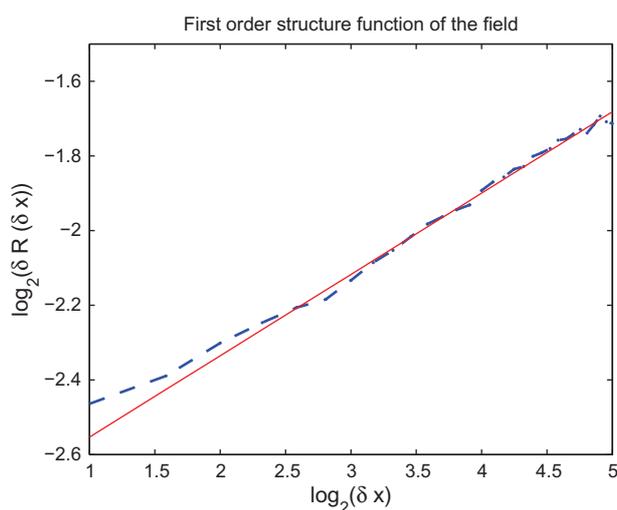


Fig. 3. First order structure function of the 1372 experimental rain maps, and linear regression used to compute the parameter: $H = 0.21$. In this figure, δx is expressed as a number of pixels.

(2008) found $\alpha = 1.5$ based on satellite TRMM reflectivities. On the other hand, the value found for C_1 is surprisingly high, especially when compared with those (0.12 and 0.16) proposed by Tessier et al. (1993). Nevertheless, it should be noted that there is no clear consensus concerning the value of C_1 (for example, Lovejoy et al. (2008) found 0.63 with TRMM reflectivities, Hubert et al. (2002) found 0.35 with a rain gauge network). A possible explanation for this variability is provided in Section 6. Concerning H , its value is found to be significantly different from that proposed in previous studies, since this parameter was generally assumed, or found, to be equal to 0, our result is however consistent with Tessier et al. (1993), who found $H = 0.32$ and $H = 0.2$, using radar reflectivities and a rain gauge network respectively.

5.2. Full-rain map analysis

During the AMMA campaign, a dual-beam spectropuviometer (DBS) (Delahaye et al., 2006) was positioned near to the RONSARD radar. This instrument provided a rain rate time series with a high

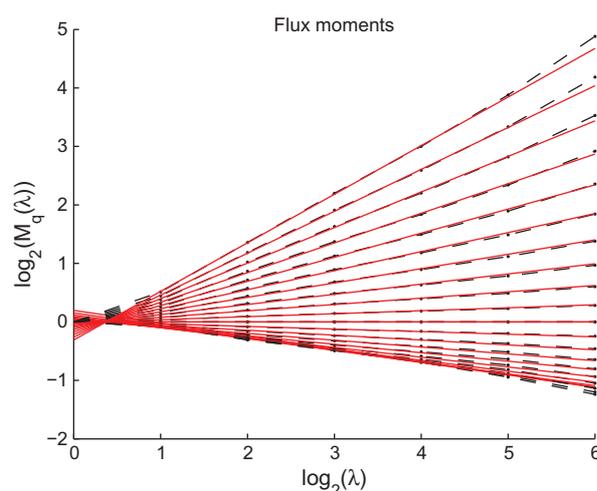


Fig. 4. Moments of the stationary fluxes computed from the 1372 experimental rain maps. Each straight line corresponds to a linear regression of the moments of fixed order q . The orders taken into consideration are $q = 0, 0.1, 0.2, \dots, 2.0$.

temporal resolution (30 s). It was therefore possible to perform multifractal analysis not only on the entire time series, but also on uninterrupted rain periods (i.e. short time series corresponding to the duration of rain events). These results have been presented by de Montera et al. (2009), and are recalled in Table 2. Although the first case led to the parameter values generally reported in the scientific literature ($\alpha = 0.6$, $C_1 = 0.5$, $H = 0$), a break in the scaling was observed at the scale of approximately one hour. The event-by-event multifractal analysis yielded very different parameters ($\alpha = 1.69$, $C_1 = 0.13$, $H = 0.62$), and did not exhibit any break in the scaling. The authors concluded that the presence of numerous zero values in the data had a significant effect on the estimation of the parameters.

In order to avoid such biases, due to the presence of zero values (the proportion of rainy pixels in the full dataset being only 40%), spatial multifractal analysis was also performed on *full-rain* maps, selected from the full set of 1372 previously analyzed maps. The resulting subset includes the 100 rainiest maps extracted from the full dataset, and has a 97.5% proportion of rainy pixels. It was decided not to select fewer maps, in order to avoid focusing on the strongest rain rates only, which could bias the lower moment orders. The first order structure function of these 100 maps is shown in Fig. 5. H is estimated at 0.4, which is close to the passive-scalar Corrsin–Obukhov 1/3 exponent (see below for discussion). The moments of the finite difference Laplacian show good log–log linearity (Fig. 6), with no scale break, except at higher resolutions. The latter effect is apparently due to measurement noise. The power-law described by Eq. (4) is well verified, and the process may therefore be considered to be multifractal. The estimated moment scaling function is shown in Fig. 7. The UM parameters were found to be ($\alpha = 1.78$, $C_1 = 0.12$) (cf. Table 2). As expected, these results are significantly different from those based on the full dataset, as shown in Section 5.1. Similarly to the results previously obtained in the time domain, α increases and C_1 decreases when *full-rain* data is considered.

6. Simulation of on-off intermittent maps

The purpose of this section is to determine, using numerical simulations, whether *on-off* intermittency can bias multifractal analysis in the case of 2-D fields. Firstly, 10 realizations of a FIF process were simulated over 256×256 pixel maps (the simulation technique is presented in Pecknold et al. (1993) and the code is

Table 2
Multifractal parameters estimated with rain data collected in Djougou, Benin. The time domain results obtained with the DBS were reported by de Montera et al. (2009).

	α	C_1	H	β	% rain	Map size/series duration
1372 Radar maps	1.25	0.51	0.21	1.47	40%	25 km × 25 km
100 Radar maps	1.78	0.12	0.40	–	97.4%	25 km × 25 km
DBS: full dataset	0.24	0.63	0.55	1.76	≈5%	2 months
DBS: 10 rain events	1.69	0.13	0.62	–	100%	≈1 h

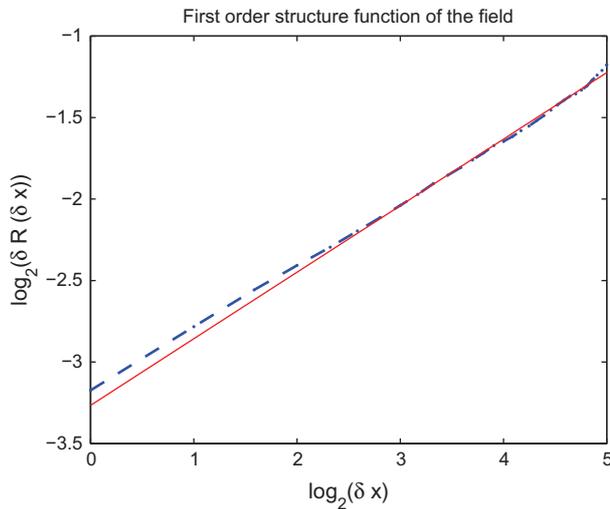


Fig. 5. First order structure function for the 100 selected *full-rain* maps, together with corresponding linear fit. H is estimated to be 0.40. The units are the same as in Fig. 3.

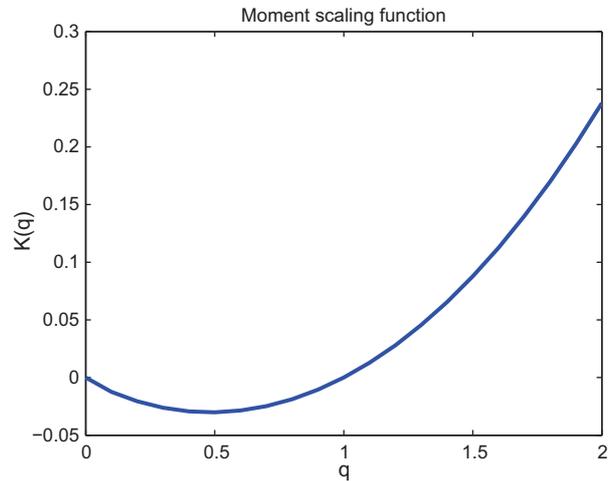


Fig. 7. Moment scaling function estimated from the 100 selected *full-rain* maps.

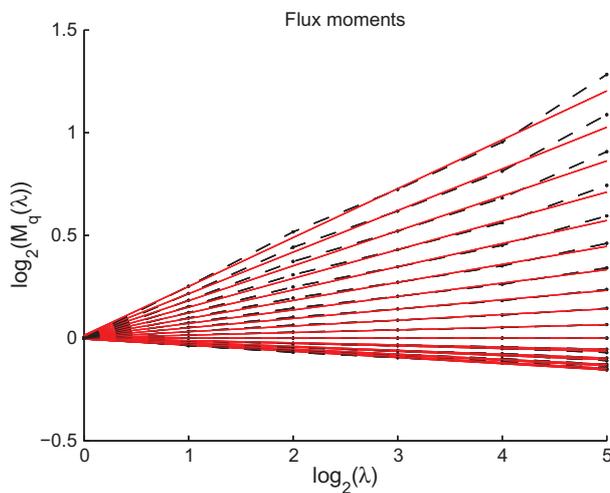


Fig. 6. Moments of the stationary fluxes computed from the 100 selected *full-rain* maps, together with corresponding linear fits.

provided in Schertzer et al. (2002). The parameters ($\alpha = 1.78$, $C_1 = 0.12$, $H = 0.4$) were chosen according to the results presented in Section 5.2. Then, the scaling and multifractal properties of these synthetic maps were verified by multifractal analysis (Fig. 8a). The fields logically exhibit the expected FIF properties and the correct parameters are found (Table 3). Secondly, in order to assess the influence of zero values, *on-off* intermittent fields are simulated by simply thresholding the synthetic fields. Values lower than the threshold are set to 0, whereas values above the threshold are shifted downwards by subtracting the threshold value. Note that this operation conserves multifractal properties in continuous

rain areas, since the shifting does not modify the finite difference Laplacian at the highest resolution, from which the cascade may be estimated at lower resolutions, by coarse-graining the field. The threshold is chosen in order to conserve $P\%$ rainy pixels in the set of synthetic maps. Two different values of P were considered, 10% and 60%. In the case where $P = 10\%$, numerous zero values are present in the dataset. The scaling of the moments is broken at higher resolutions (Fig. 8b), and the retrieved parameters estimated at lower resolutions are strongly biased (Table 3). If the proportion of rainy pixels increases ($P = 60\%$), the break in the scaling of the moments is not observed (Fig. 8c), but the UM parameters α and C_1 are still significantly biased, although less than when $P = 10\%$.

The break in the scaling corresponds to the resolution at which the number of averaging processes with zero values becomes predominant in the cascade reconstruction algorithm (de Montera et al., 2009). In other words, at a sufficiently low resolution the spectrum is characteristic of the *on-off* intermittency, rather than of the process itself. Therefore, special emphasis should be given to the interpretation of such breaks, since this may indicate that the process is not scaling, even though it actually has multifractal properties. Theoretical developments concerning such breaks may be found in (de Montera et al., 2009) in which, in the context of thresholded FIF analysis, the authors focus on the critical number n of successive averagings in the cascade reconstruction algorithm, at which the effect of the zeros becomes predominant. They show that n may be roughly estimated by the following formula: $n \approx 1/c_f$, where c_f is the co-dimension of the support of the rain process. Hence, a simple condition for the existence of a break in the scaling may be derived: it suffices for the theoretical break resolution $\lambda_{\max}/2^n$ to belong to the range of scales considered in the study. Such considerations appear to be in agreement with the previous simulations: using the box-counting method, c_f was estimated at 0.1 and 0.4 on the synthetic maps with rain percentages of respectively $P = 60\%$ and $P = 10\%$. In the former case, in which $n \approx 2.5$, a

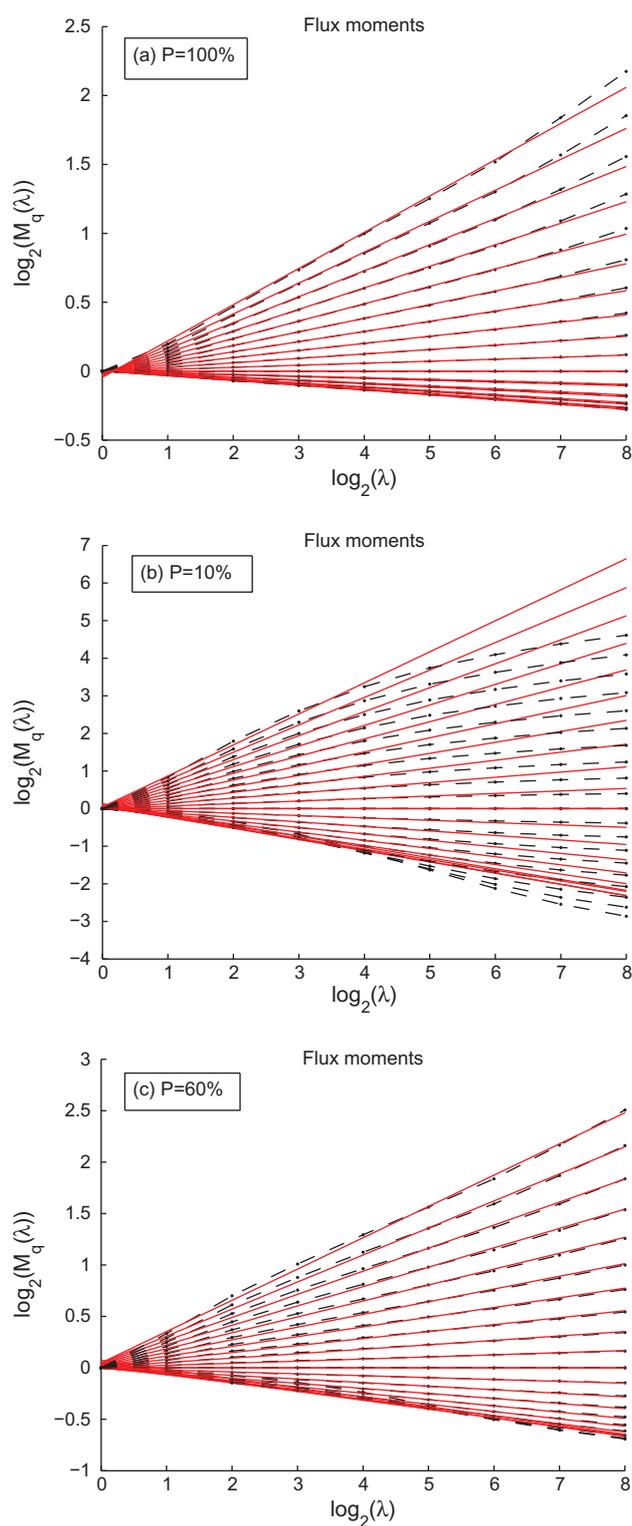


Fig. 8. Synthetic map moments and linear fits, for three rain percentages: (a) $P = 100\%$, (b) $P = 10\%$ and (c) $P = 60\%$.

break in Fig. 8b can be quite well predicted at the resolution $\lambda_{\max}/2^{2.5}$, or equivalently, in terms of the logarithmic coordinates of Fig. 8b, can be found at the abscissa given by $\log_2(\lambda) = \log_2(\lambda_{\max}) - n = 8 - n \approx 5.5$, which is not so far from the observed break position at $\log_2(\lambda_{\text{break}}) \approx 4 - 4.5$. In the latter case, $n = 1/c_f$ yields $n \approx 10$, meaning that if a break exists, it should be located at the resolution $\lambda_{\max}/2^{10}$, hence at the abscissa given by

Table 3

Multifractal parameters estimated from synthetic FIF/TFIF 256×256 maps generated with $\alpha = 1.78$, $C_1 = 0.12$, and $H = 0.4$.

	α	C_1	Scaling break	Biased parameters
$P = 100\%$	1.73	0.14	No	No
$P = 60\%$	1.05	0.21	No	Yes
$P = 10\%$	0.67	0.66	Yes	Yes

$\log_2(\lambda) = \log_2(\lambda_{\max}) - n = 8 - n \approx -2$ in Fig. 8c. Such a resolution clearly lies outside the observed scaling range, which is consistent with Fig. 8c where no obvious break was found. Such considerations were not easy to apply to the experimental data sets, which focused mainly on the rain support, due to the selection of rain events. Hence, c_f should perhaps be replaced by an apparent local co-dimension (e.g. 0 in the case of full-rain maps), which would depend on the proportion of zeros in the analyzed section.

As for the UM parameters, Table 3 shows that the bias due to the presence of zero values depends on their number - even in the absence of any visible break. The higher this number, the smaller the value of α and the greater the value of C_1 , when compared to the expected values. Consequently, the multifractal analysis tools presented in Section 3 should be used carefully, and in particular only with data that does not present any significant *on-off* intermittency. In fact, it would be interesting to develop new analysis methods that remain insensitive to this effect.

Concerning the analysis of the AMMA data, the results obtained with the scaling of the moments computed with the full dataset (Section 5.1) appear to correspond to the intermediate case, in which the proportions of zero and non-zero values are similar. No scale break is observed, but the retrieved parameters seem to be biased by the *on-off* intermittency. However, it should be noted that the properties of the synthetic dataset analyzed in this section are not exactly the same as the full dataset analyzed in Section 5.1. More precisely, the full RONSARD dataset included maps with a highly variable percentage of zero pixels, whereas the proportion of zeros in the simulations remains close to the mean proportion. This variability could be responsible for the surprisingly high value of C_1 obtained in Section 5.1, compared to that retrieved by the analysis of synthetic maps with $P = 60\%$. Nevertheless, the main conclusions of this short qualitative study remain unchanged.

7. Towards a new rain model?

7.1. Re-interpretation of previous results

As pointed out in the introduction, the following parameters are generally found in the scientific literature for rain: ($\alpha = 1.4$, $C_1 = 0.15$) in the spatial domain and ($\alpha = 0.6$, $C_1 = 0.5$) in the time domain. The latter values are significantly different from those proposed here, i.e. ($\alpha = 1.78$, $C_1 = 0.12$ for the spatial domain) in the present paper and in de Montera et al. (2009), and ($\alpha = 1.65$, $C_1 = 0.13$ in the time domain), these being based on *full-rain* radar maps and rain rate time series respectively. As shown in Section 6, *on-off* intermittency considerably biases the estimations and may be responsible for these differences. The results presented in previous studies were obtained with datasets containing a significant proportion of zeros, and therefore seem to be questionable. Moreover, the significant difference generally found between the spatial and temporal parameters, in particular the value of α which should not be affected by space-time anisotropy, remained unexplained. The problem is even more crucial, because the difference found for this particular parameter has unrealistic physical implications. Indeed, $\alpha > 1$ means that attainable singularities have a negative lower bound equal to $\gamma_0 = \frac{C_1}{1-\alpha}$ and no upper bound. On the other

hand, $\alpha < 1$ means that singularities have no lower bound and a positive upper bound, also equal to $\gamma_0 = \frac{C_1}{1-\alpha}$. In the first case, the peaks are unlimited in height, whereas in the second case there are large holes with very low values, and the peaks have a maximum attainable height. Therefore, the two cases describe completely different processes, and it appears contradictory to have $\alpha > 1$ in the spatial domain and $\alpha < 1$ in the time domain, for the same phenomenon. On the other hand, when *on-off* intermittency is taken into account, multifractal analysis retrieves more consistent parameters. In particular, with the instruments localized in the same area during the AMMA campaign, α was found to be equal to 1.78 in the spatial domain (Section 5.2), which is close to the value found in the time domain, i.e. $\alpha = 1.65$ (de Montera et al., 2009). It is worth pointing out that in the case of self-affine anisotropic space–time multifractality, α should be the same in space and in time.

Although it is clear that *on-off* intermittency biases multifractal parameters, it remains to be explained why the biases are stronger in time than in space. A realistic explanation is that the parameters typically found in scientific literature for the time domain ($\alpha = 0.6$, $C_1 = 0.5$, $H = 0$) have been obtained with data affected by stronger *on-off* intermittency than the spatial data. The reason for this is that studies in the spatial domain have in general been carried out with pre-selected rain maps, whereas temporal analyses are made using rain rate time series covering a long period of time, and therefore include significant drought periods. When taken at a 1 min time scale, such a time series typically includes only 5% of non-zero rain rates! In the spatial domain, the same situation would lead to the same consequences. This can be verified by considering, for example, the analysis of TRMM orbits presented by Lovejoy et al. (2008). Since the data is remotely sensed from space, it covers large areas and includes very few non-zero pixels (3.51%). Although the authors concluded through a bootstrap approach that α should be close to 1.5, they remarked that a naive analysis, directly setting $K''(1) = 0.26$, would have led to an unrealistic value of α . Indeed, since $K'(1) = 0.63$, they would have found $\alpha = 0.4$, which is close to the value typically found for rain rate time series, but very far from that found in the spatial domain.

We have already noted the striking similarity between the previously estimated value of H and the KOC exponent $1/3$. This is in fact not very surprising, since there is a strong link between rain and turbulence. Noticeably, from a microphysics point of view, turbulence plays a key role in the initiation of rain in clouds (see Falkovich et al. (2002)). The acceleration of particles by a turbulent flow can be statistically analyzed and physically interpreted (e.g. Bec et al., 2006) when the particles (such as cloud droplets) have small Stokes numbers. The case of raindrops is more complex, since the particles have much larger Stokes numbers. This case has been investigated by Lovejoy and Schertzer (2008) using three-dimensional raindrop data (drop positions and masses in a 10 m^3 area). These authors have shown that the liquid water density of rain accurately exhibits a ‘ $-5/3$ ’ power spectrum slope over the scaling range $l_c \approx 50 \text{ cm} < l < l_0 \approx 2.3 \text{ m}$. Above the critical scale l_c , patches of raindrops were thus found to follow the Corrsin–Obukhov law. The estimation of H in the present study (using AMMA maps) suggests that this passive scalar-like behavior could hold over a far larger scaling range. In a different paper (de Montera, L., Verrier, S., Mallet, C., Barthès, L.: A passive scalar-like model for rain applicable to the storm scale. *Submitted to Atmos. Res.*), a passive-scalar-like model of rain is discussed, based on physically plausible assumptions. In particular, it is demonstrated that if intermittency corrections are taken into account, the model predicts a first order structure function exponent equal to $H = 0.4$ instead of $1/3$, confirming the result obtained in Section 5.2.

7.2. A relevant, thresholded FIF model?

It has been shown in Section 5.2 that *full-rain* areas could be modeled by a FIF. However, the FIF model is limited because it cannot rigorously produce fields with large areas of zero values. We are therefore interested in modifying the FIF framework, in order to develop a model that could also take *on-off* intermittency into account. The most straightforward possibility, already presented in Section 6, is to use a simple threshold. This model is referred to as the thresholded FIF (TFIF), and is based on the idea that rain is only part of a large turbulent cascade that emerges above a critical threshold. The TFIF has the advantage that it jointly models the rain rate process and its *on-off* intermittency, meaning that no-rain areas are not independent from rain areas, contrary to other models which first generate the rain ‘support’ and then the rain cells. The lack of correlation between the rain rate variability and its ‘support’ is an important drawback of such alternative models, e.g. based on the product of a multifractal field and an independent fractal rain support. Moreover, it has been shown in Section 6 and by de Montera et al. (2009) that the TFIF model is able to reproduce not only the results obtained with *full-rain* data, but also the biased results when the data includes *on-off* intermittency.

It may be also noted that there are significant differences between models based on thresholding a non-stationary FIF (i.e. a TFIF) or a stationary UM. In the latter case, *on-off* intermittency is generated by suppressing the lowest singularities, thus leading to a spuriously linear $K(q)$ function for low orders. On the contrary, applying a threshold on a non-stationary FIF does not necessarily remove a complete interval of singularities since singularities cannot be associated to field levels by a one-to-one correspondence (due to the additional fractional integration). However, since there may be some correlation between the highest singularities and the highest levels of the process, a very high thresholding could possibly also lead to the removal of a set of small singularities.

The physical meaning of the thresholding performed in the TFIF model could be the critical clouds droplets concentration above which precipitation is occurring. In this case, the original full FIF process, i.e. the process that is hidden over some intervals by the thresholding, could correspond in some way to the multifractal variability of clouds droplets concentration (concerning the multifractal properties of clouds, see, e.g., Lovejoy and Schertzer, 2006), the notion of thresholded multifractals should be relevant for rain modeling. However, the definitions- central for the use of the TFIF model of the relevant physical threshold and of the scale at which the latter is considered remain an open subject of investigations.

Noticeably, let us mention a complementary model proposed by Lovejoy and Schertzer (2008), who consider the rain rate as the product of a Corrsin–Obukhov like scaling liquid water density and a scaling vertical velocity field (see Section 3.4 of their paper). These authors proposed a simple model based on thresholding the liquid water density, and view the threshold as a simplified representation of the coupling between the (scaling) raindrop number density n and the rain rate. In other words, the zero rain rate regions should correspond to those where the probability of finding a drop is very low, and this coupling could be represented with more complex compound Poisson-multifractal processes (Lovejoy and Schertzer, 2008, Section 4.3). However, the issue of the physical nature of the zero rain rates (i.e. are they due to physical thresholds or to instrumentally defined ones?) remains an open question.

8. Conclusions

Classical multifractal analysis yields biased results, when performed on fields containing a significant proportion of zero values.

In the case of rain, more reliable parameters have been obtained by analyzing *full-rain* radar rain maps only. In the framework of universal multifractal analysis, the newly found parameter estimates are ($\alpha = 1.78$, $C_1 = 0.12$). These values are close to those obtained with uninterrupted rain rate time series measured by means of a disdrometer, at the same place and during the same period. Thus, the generally reported incoherency between parameters determined in the spatial and time domains is not observed when the analysis focuses on the *interior* of storms, indicating that this problem is due to an artifact provoked by a lack of robustness in previously used techniques, when used in the presence of *on-off* intermittency. An additional argument has been provided by numerical simulations, used to assess the dependence of the biases on the proportion of zero values. The results show that the differences reported in previous studies, between spatial and time domain analyses, were mainly due to the data pre-processing procedures: rain rate time series often include long periods with no rain, whereas in general (in the spatial domain) only rain maps corresponding to periods of rain are considered, leading to a reduction in the proportion of zeros.

Concerning the non-conservation parameter H , which has often been estimated at 0, analysis of the first order structure function shows that this parameter is more likely to be equal to 0.4. These results thus confirm that rain is a non-conservative process. This means that the conservative cascade is obtained by fractionally differentiating the process, an approach which is more coherent with turbulence theory in which only differences can be statistically described.

Full-rain data analysis provides a rectification of the usual multifractal exponents of rain, at least inside full-rain structures. Although these corrected exponents describe the field over a relatively limited range of scales, such a limitation appears necessary, at least initially, in order to avoid the biases mentioned above. In order to simulate realistic fields, some means of representing the zero rain rates will also be required, in particular when one is interested in investigating larger scaling ranges. In the present study, a model based on simple thresholding of a fractionally integrated cascade has been proposed to generate *on-off* intermittency. This model correctly simulates the multifractal properties of rain, as well as the biases which arise in the presence of zero values, and is found to be more realistic than alternative propositions. Nevertheless, this model could probably benefit from further improvements, in order to define a physically and quantitatively relevant thresholding process at small-scale, and to optimise its reproduction of long-term rain statistics as well. Noticeably, an accurate characterization of the zero rain rates is needed and various approaches may be considered to define the physical (or instrumental?) thresholds.

Acknowledgements

We thank Nicolas Viltard (LATMOS) for providing the radar data. Based on a French initiative, AMMA was built by an international scientific group and is currently funded by a large number of agencies, especially from France, UK, USA and Africa. It has been the beneficiary of a major financial contribution from the European Community's Sixth Framework Research Programme. See <http://www.ammainternational.org>.

References

- Bec, J., Biferale, L., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., Lanotte, A., Musacchio, S., Toschi, F., 2006. Acceleration statistics of heavy particles in turbulence. *J. Fluid Mech.* 550, 349–358.
- Corrsin, S., 1951. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Appl. Phys.* 22, 469–473.
- de Lima, M.I.P., 1998. Multifractals and the temporal structure of rainfall. Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- de Montera, L., Barthès, L., Mallet, C., Golé, P., 2009. Rain universal multifractal parameters revisited with dual-beam spectropluviometer measurements. *J. Hydrometeorol.*, AMS 10, 493–506.
- Delahaye, J.-Y., Barthès, L., Golé, P., Lavergnat, J., Vinson, J.P., 2006. A dual-beam spectropluviometer concept. *J. Hydrol.* 328, 110–120.
- Falconer, K., 2003. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*. Second ed., John Wiley.
- Falkovich, G., Fouxon, A., Stepanov, M., 2002. Acceleration of rain initiation by cloud turbulence. *Nature* 419, 151–154.
- Gupta, V.K., Waymire, E., 1991. On lognormality and scaling spatial averages? In: Schertzer, D., Lovejoy, S. (Eds.), *Non-linear Variability in Geophysics: Scaling and Fractals*. Kluwer, pp. 175–184.
- Gupta, V.K., Waymire, E.C., 1997. Reply. *J. Appl. Meteorol.* 36, 1304.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A., Austin, G., 1996. Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence. *J. Geophys. Res.* 101, 26405–26414.
- Hogan, R.J., Kew, S.F., 2005. A 3D stochastic cloud model for investigating the radiative properties of inhomogeneous cirrus clouds. *Q.J.R. Meteorol. Soc.* 131, 2585–2608.
- Hubert, P., Tessier, Y., Ladoy, P., Lovejoy, S., Schertzer, D., Carbonnel, J.P., Violette, S., Desurogne, I., Schmitt, F., 1993. Multifractal and extreme rainfall events. *Geophys. Res. Lett.* 20 (10), 931–934.
- Hubert, P., Biaou, A., Schertzer, D., 2002. De la Méso-Echelle à la Micro-Echelle: Désagrégation/Agrégation Multifractale et Spatio-Temporelle des Précipitations. Report, Armines-EdF.
- Kolmogorov, A.N., 1941. Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Proc. Acad. Sci. URSS, Geochim. Sect.* 30, 299–303.
- Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.* 13, 82–85.
- Ladoy, P., Lovejoy, S., Schertzer, D., 2002. Extreme fluctuations and intermittency in climatological temperatures and precipitation. In: Schertzer, D., Lovejoy, S. (Eds.), *Scaling, Fractals and Non-linear Variability in Geophysics*. Kluwer, pp. 241–250.
- Lavallée, D., 1991. *Multifractal Techniques: Analysis and Simulation of Turbulent Fields*. Ph. D. Thesis, McGill University, Montréal, Canada.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability of landscape topography: multifractal analysis and simulation. In: De Cola, L., Lam, N. (Eds.), *Fractals and Geography*. Prentice Hall, New Jersey, pp. 158–192.
- Lilley, M. et al., 2006. Multifractal large number of drops limit in rain. *J. Hydrol.* 328, 20–37.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 1990. Multifractals, universality classes, satellite and radar measurements of cloud and rain. *J. Geophys. Res.* 95, 2021–2034.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 1995. Multifractals and rain. In: Kundzewicz, A.W. (Ed.), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modelling*. Cambridge press, pp. 62–103.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2006. Multifractals, cloud radiances and rain. *J. Hydrol.* 322, 58–88.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2008. Turbulence, rain drops and the 1/2 number density law. *New J. Phys.*, 10, 075017(32pp). doi: 10.1088/1367-2630/10/7/075017.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Tsonis, A.A., 1987. Functional box-counting and multiple dimensions in rain. *Science* 235, 1036–1038.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Allaire, V., 2008. The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation. *Atmos. Res.* 90, 10–32.
- Mandelbrot, B., 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.* 62, 331–350.
- Marsan, D., Schertzer, D., Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multi-fractal processes: predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.* 101, 26333–26346.
- Novikov, E.A., Stewart, R., 1964. Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geofiz.* 3, 408–412.
- Obukhov, A.M., 1949. Structure of the temperature field in a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R, Ser Geograf. Geofiz.* 13, 58–69.
- Obukhov, A.M., 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid. Mech.* 13, 77–81.
- Olsson, J., 1995. Limits and characteristics of the multifractal behavior of a high-resolution rainfall time series. *Nonlin. Processes Geophys.* 2, 23–29.
- Olsson, J., Niemczynowicz, J., 1996. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *J. Hydrol.* 187, 29–43.
- Parisi, G., Frisch, U., 1985. A multifractal model of intermittency. In: Benzi, M., Parisi, R., Ghil, G. (Eds.), *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Amsterdam, pp. 84–88.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C., Malouin, F., 1993. The simulation of universal multifractals. In: Perfdang, J.M., Lejeune, A. (Eds.), *Cellular Automata: Prospects in Astrophysical Applications*. World Scientific, pp. 228–267.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1985. Generalized scale invariance in turbulent phenomena. *Physico-Chem. Hydrodyn.* 6, 623–635.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.* 92 (D8), 9693–9714.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1991. Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables. In: Schertzer, D., Lovejoy, S. (Eds.), *Non-linear Variability in Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 41–82.

- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist! *J. Appl. Meteorol.* 36, 1296–1303.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Hubert, P., 2002. An introduction to stochastic multifractal fields. In: Ern, A., Weiping, L. (Eds.), *Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering. Series in Contemporary Applied Mathematics*, vol. 4. Higher Education Press, Beijing, pp. 106–179.
- Schmitt, F., Vannitsem, S., Barbosa, A., 1998. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *J. Geophys. Res.* 103, 23181–23193.
- Scialom, G., Faroux, J., Giraud, M., Ney, R., Evaristo, R., Lemaître, Y., Viltard, N., 2009. RONSARD radar: implementation of dual polarization on a C-band Doppler weather radar. *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 6, 132–136.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., 1993. Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *J. Appl. Meteorol.* 32, 223–250.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D., Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J. Geophys. Res.* 101, 26427–26440.
- Veneziano, D., Furcolo, P., 1999. A modified double trace moment method of multifractal analysis. *Fractals* 7, 181–195.
- Yaglom, A.M., 1966. The influence of the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.* 2, 26–30.

Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

Atmospheric Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/atmos

A passive scalar-like model for rain applicable up to storm scale

L. de Montera*, S. Verrier, C. Mallet, L. Barthès

Université Versailles Saint-Quentin en Yvelines (UVSQ), Laboratoire Atmosphères, Milieux, Observations Spatiales (LATMOS), Vélizy-Villacoublay, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 19 January 2010
 Received in revised form 7 June 2010
 Accepted 30 June 2010

Keywords:

Multifractal
 Rain
 Passive scalar
 Scaling

ABSTRACT

Analysis of the data collected during the AMMA (African Monsoon Multidisciplinary Analyses) campaign shows that rain storms typical of the African monsoon have multifractal properties, and can be modelled by fractionally integrated multiplicative cascades. The originality of the present study lies in the application of a constraint, which results in the interior only of storms being investigated, such that the multifractal analysis is not affected by the presence of numerous zero values. The model is validated in the time domain by means of disdrometer measurements, and in the spatial domain with co-localized meteorological radar rain maps. The non-conservation parameter obtained in the spatial domain is found to be consistent with the assumption that the rain rate follows a passive scalar-like scaling law up to the scale of storms, including corrections due to fluxes intermitencies. Comparison of the value of this parameter with that obtained in the temporal domain indicates the presence of a space–time anisotropy, which could be explained by turbulent advection.

© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Raindrops are heavy particles evolving in a turbulent velocity field. The rigorous treatment of this problem is still an open question, essentially because, due to their high Stokes number, it is not generally possible to simplify the equations relating the raindrop and flow velocities (see, e.g. Lovejoy and Schertzer, 2008). As a consequence, rain is generally modelled with less rigorous phenomenological models. These models are often based on the scaling properties of turbulence, and in particular on the concept of multiplicative cascades, which is well adapted to dealing with the highly intermittent behaviour of the rain rate process. Thus, numerous studies have been dedicated to the investigation of the fractal and multifractal properties of rain (e.g., Veneziano et al., 1996; Over and Gupta, 1996; Gupta and Waymire, 1991; Mazarella, 1999; Olsson, 1995; de Lima, 1998; Lovejoy and Schertzer, 2006). It is generally agreed that rain can be described in a multifractal

framework. However, some outstanding issues need further investigation. Problem I: although many experiments and analyses have been performed in the past, there is still no clear consensus concerning the values of the multifractal parameters (see de Montera et al., 2009 and the review in Lilley et al., 2006). Problem II: the multifractal parameters obtained in the spatial and temporal domains are very different, which seems to be inconsistent with the existing space–time models (see, e.g., Sect. 5.b of Tessier et al., 1993). Problem III: no significant space–time anisotropy has been found (Marsan et al., 1996; Deidda, 2000), although its presence could be expected as a result of turbulent atmospheric advection (Tessier et al., 1993) or vertical wind effects (Lovejoy et al., 2008). Problem IV: although the raindrop mass density follows a passive scalar-like law at small scales (Lovejoy and Schertzer, 2008), is this also the case at larger scales? Does the rain-generation process provoke a break in the scaling?

Problems I and II have led some authors to suspect that classical multifractal analysis techniques could be affected by the presence of numerous zero values in the data. In the following discussions, this is referred to as ‘on–off intermittency’, in order to avoid confusion with the classical use of ‘intermittency’ in the context of turbulence. This possibility

* Corresponding author. Laboratoire Atmosphères, Milieux, Observations Spatiales, 10–12 avenue de l'Europe, 78140 Vélizy-Villacoublay, France. Tel.: +33 1 39 25 48 62; fax: +33 1 39 25 49 22.

E-mail address: louis.demontera@latmos.ipsl.fr (L. de Montera).

was first investigated by Schmitt et al. (1998), and was later confirmed by de Montera et al. (2009) using high resolution rain rate time series and numerical simulations. In de Montera et al. (2009), multifractal analysis was performed on uninterrupted time series (without zero values), and the multifractal parameters were found to be significantly different from those derived from long time series (including numerous zero values), as previously proposed in the scientific literature. This result indicates that on-off intermittency could indeed be responsible for the lack of consensus concerning the multifractal parameters, since the number of zero values may vary strongly from one dataset to another. This approach was generalized to the case of 2D horizontal situations, using rain radar maps, by Verrier et al. (2010). These authors found a multifractality parameter in space, close to the new parameter obtained in time with uninterrupted rain rate time series, apparently resolving problem II. They also partly solved problem III since they observed a significant space–time anisotropy (the non-conservation parameter H was found to be different in space and time). The aim of the present paper is to further investigate the effect of on-off intermittency and to provide further insight into problems III and IV. Sections 2 and 3 briefly present the theoretical framework and the analysis techniques. Section 4 presents the experimental results and the effect of on-off intermittency on the estimation of the power spectrum slope. In Section 5, we propose a phenomenological passive scalar-like model for rain, and test it with the experimental data. Section 6 is dedicated to the interpretation of the observed space–time anisotropy.

2. Theoretical framework

The phenomenological model of turbulence is based on the symmetry of scale of the Navier–Stokes equations, and on the conservation of the energy density flux, denoted ε . Based on these properties of the fundamental equations, and on a dimensional argument, Kolmogorov (1941) derived his renowned statistical scale law for an isotropic and homogeneous turbulent flow:

$$\Delta v \approx \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \quad (1)$$

where Δv stands for the mean of the absolute values of the (longitudinal) velocity difference between two points separated by a distance l (here and in the following, \approx denotes equality within slowly varying or constant factors).

However, one must also consider the fact that conservative fluxes have no reason to be homogeneous. Although the fluxes are conserved on average, their transfer to smaller scales is intermittent. Formally, this intermittency can be modelled by a stochastic multiplicative cascade (Novikov and Stewart, 1964; Yaglom, 1966), denoted here by φ in the general case. The iterative construction of a multiplicative cascade is straightforward: (i) distribute a quantity uniformly over an interval, (ii) divide it into sub-intervals, (iii) multiply these by a random variable, to obtain the new quantity for each sub-interval, (iv) repeat steps (ii) and (iii) as many times as necessary. The important point of this process is that the distribution of the random variables (also called the multiplicative increments) does not depend on the scale, such

that it generates multifractal properties. These properties can be described by the scaling of the statistical moments of fractional order q (for more details, see Schertzer et al., 2002):

$$\langle \phi_l^q \rangle \approx \left(\frac{L}{l} \right)^{K(q)} \quad (2)$$

where ϕ_l is the flux density at scale l , L is the largest scale of the cascade and $K(q)$ is the so-called moment scaling function. Moreover, it can be shown that continuous multiplicative cascades tend towards log-infinitely divisible laws. If one makes the additional assumption that the generator verifies a self-similar renormalization property, which seems to be supported in the atmosphere (Lovejoy and Schertzer, 1995), then the generator converges more accurately towards a Lévy α -stable distribution (Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997). In this type of case, the moment scaling function takes the simple form:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q) \quad (3)$$

where α is the multifractality parameter which varies between 0 and 2, and C_1 is the intermittency parameter which varies between 0 and 1.

This outcome led Schertzer and Lovejoy (1987) to propose a phenomenological model for rain, called Fractionally Integrated Flux (FIF), which has the same form as the Kolmogorov law, with a multifractal intermittent flux verifying Eqs. (2) and (3):

$$\Delta R \approx \phi l^H \quad (4)$$

where R is the rain rate and H the so-called non-conservation parameter. The form of this relation is assumed to be equivalent in the time domain, by simply replacing the distance l by a time delay τ . Note that the correct analogy with turbulence would lead to the introduction of a flux raised to the p th power:

$$\Delta R \approx \phi^p l^H. \quad (5)$$

However, Eqs. (4) and (5) are equivalent models because the raising the flux to the p th power is equivalent to a shift of H by $K(p)$, and to a multiplication of C_1 by a factor p^α (Lavallée et al., 1993). This statement is proven by means of a few straightforward calculations in which the expressions of the exponents of the structure function are derived for both models, based on the following identity:

$$K(qp) = qK(p) + p^\alpha K(q). \quad (6)$$

3. Technical analysis

The classical method for estimating the model parameters consists in reconstructing the underlying multiplicative cascade. This cascade is obtained at the finest available scale by taking the normalized absolute rain rate differences (in 1D), or the normalized absolute finite differences Laplacian (in 2D). The cascade is then reconstructed at coarser resolutions by performing successive averages of contiguous values. The next step is to calculate the moments for various

orders and resolutions, and to plot these on a log–log graph. If the process is a conservative cascade, one should obtain straight lines whose slopes are equal to $K(q)$. A fit of function K by Eq. (3) allows α and C_1 to be derived (for more sophisticated estimation techniques, see Verrier et al., 2010). The non-conservation parameter can be obtained a posteriori by estimating the power spectrum slope β which, as a consequence of the Wiener-Khinchine theorem, is equal to:

$$\beta = 1 + 2H - K(2). \quad (7)$$

It is also possible to estimate H directly, by analyzing the structure functions whose scaling is obtained by combining Eqs. (2) and (4):

$$\langle \Delta R^q \rangle \approx l^{qH - K(q)}. \quad (8)$$

In the case where $q = 1$, since the flux is supposed to be conservative, $K(1) = 0$, and a simple relation is thus obtained:

$$\langle \Delta R \rangle \approx l^H. \quad (9)$$

It is important to emphasize the fact that the methods presented above are only valid if the process corresponds to a pure FIF, i.e., a fractionally integrated continuous α -cascade. If fractal on–off intermittency is present, as in rain rate time series (the fractal dimension of the rain ‘support’ is close to 0.8 over a wide range of scales; Lavergnat and Golé, 1998), then the process is more likely to correspond to a mix between α - and β -cascades (in the two-state β -cascade, the cells can only be ‘active’ or ‘inactive’, whereas in the α -cascade the cells can be ‘more active’ or ‘less active’, but never ‘inactive’, cf. Schertzer and Lovejoy, 1987 or Sect. 3.1 and 3.2 of Schertzer et al., 2002 for more details). In this case, the moments and the structure functions may still be scaling and multifractal parameters can be obtained with the above analysis technique (although a break in the scaling may appear if the number of zero values is very significant). However, one must be cautious and should not interpret these multifractal parameters as belonging to a pure FIF. The reason is that, since the scaling has been affected by the zero values, if one performs a simulation of a pure FIF with these parameters, the resulting process will have a texture which is significantly different to that of the original data (de Montera et al., 2009). Moreover, since the number of zero values may vary according to the dataset, one could find that the multifractal parameters do not remain constant, which could thus lead to the erroneous conclusion that cascade models are poorly adapted to such phenomena. Since mixed models of continuous α - and β -cascades are not yet available, this is the reason for which we chose to analyze only the interior of storms, where no on–off intermittency occurs, thus enabling the results to be interpreted as a pure FIF processes. Moreover, by performing numerical simulations, it was found that the slope of the power spectrum was also influenced by the number of zero values: it decreases consistently, as the percentage of zero values in the data increases. Thus, in this study, the power spectrum slope should also be estimated using uninterrupted data. Since this problem was not taken into account in our previous papers, which focused on the

scaling of moments and structure functions, new estimates of the power spectrum slopes are provided in the next section.

4. Experimental results

The measurements were carried out during the African summer monsoon of 2006, at Djougou, Benin, in the framework of the AMMA campaign. The first dataset is a rain rate time series, recorded by means of a dual-beam spectropluviometer (Delahaye et al., 2006), over a two-month period, generally averaged over 1 minute time intervals. Ten significant rain events were extracted and analyzed in de Montera et al. (2009). Their characteristics are recalled in Table 1. The second dataset includes rain rate maps estimated using the RONSARD radar coverage of the same area, over a period of 3 months (1 scan every 7 min). 100 maps, with as much as 98% rainy pixels, were selected and analyzed (the map size is 64×64 pixels, each pixel corresponding to a 400×400 m surface area, as shown in the example of Fig. 1). It was found that the moments of the underlying cascades have scaling properties over the whole available scale range (of the order of 1 min to 1 h for time series and equal to 400 m to 25 km for radar maps). Figs. 2 and 3 show respectively the first-order structure function and the scaling of the statistical moments of the rain maps from which H and $K(q)$ are estimated in the spatial domain.

The values of the FIF parameters α , C_1 and H , were reported by de Montera et al. (2009) and Verrier et al. (2010), respectively for rain rate time series and rain maps. As explained in the previous section, in these studies the power spectrum slope was estimated using data which included on–off intermittency. New estimates were thus computed, using uninterrupted data, leading to slopes significantly different from those previously determined. In the case of rain rate time series, the slope of the power spectrum was computed on an event-by-event basis and its mean value was found to be 2.07 (instead of 1.76 in de Montera et al., 2009). As for the rain maps, since they were all of the same size, the averaged power spectrum was computed directly (see Fig. 4), and its slope was found to be 1.67 (instead of 1.41 in Verrier et al., 2010). Table 2 summarizes the multifractal parameters derived from the AMMA experimental data. At this point, it must be stressed that parameter estimation depends on the scale ranges that are used to perform the fits, and is somewhat subjective. Scale

Table 1

Characteristics of the rain events extracted from the spectropluviometer data collected during the AMMA campaign.

Date	Local time	Duration in s	Resolution in s	Mean rain rate in mm/h	Maximum rain rate in mm/h
21 July 2006	21:30	4128	16	12.50	95.77
22 July 2006	10:28	2080	32	4.24	15.27
22 July 2006	12:00	4128	32	6.73	23.72
05 August 2006	14:36	2080	16	3.86	14.89
07 August 2006	13:36	4160	32	34.74	114.47
10 August 2008	15:48	4160	32	17.40	61.69
14 August 2006	15:36	2112	16	5.82	31.45
17 August 2006	15:33	16,448	64	1.05	6.57
26 August 2006	14:58	8256	16	4.63	58.81
31 August 2006	12:05	8224	16	4.68	27.01

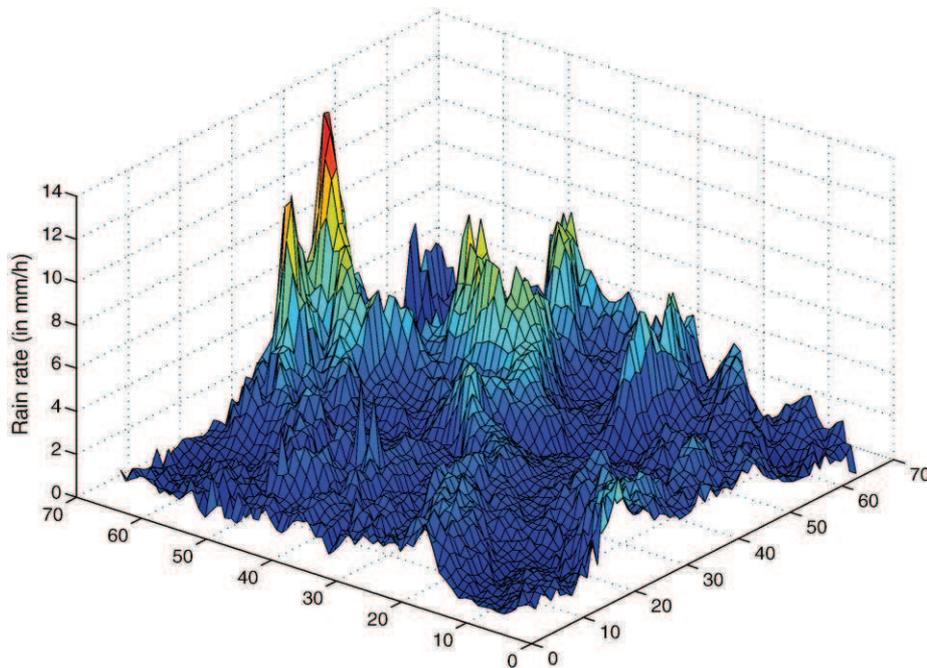


Fig. 1. Example of a rain rate map, estimated by the RONSARD radar.

ranges generally have to be limited at their lower bound because the finest scales are affected by measurement noise (or by the projection on a Cartesian grid), and at their higher bound because insufficient data is available at the largest scale to be representative. As a result, it is difficult to estimate objectively the quality of the fits. It was therefore decided not to provide the uncertainties of the multifractal parameters in Table 2 and to only show the graphs of the fits. This also means that the numerical values presented in Table 2 should be understood as first-order estimates and not as highly accurate results (in particular as regards the multifractality parameter α).

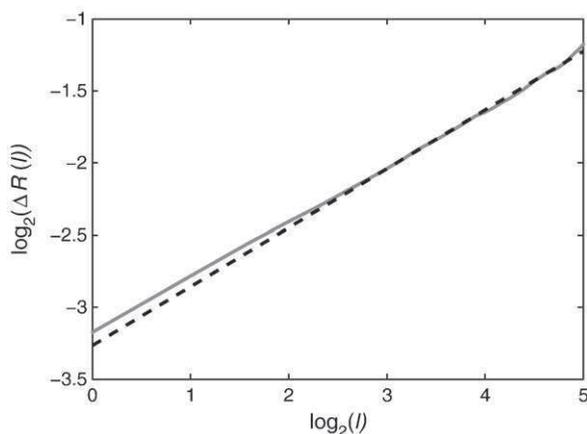


Fig. 2. First-order structure function of the 100 selected rain maps, based on values 98% of which are non-zero, compared with a linear curve of slope equal to 0.4 (from Verrier et al., 2010). The departure from the fit observed at the finest scales is attributed to the measurement noise and corresponds to the flattening of the power spectra at high frequencies (see Fig. 4).

5. A passive-scalar-like model

The equivalent of the Kolmogorov velocity law for passive scalars is the Corrsin–Obukhov law of particle concentration (Obukhov, 1949; Corrsin, 1951), denoted by C , where $\chi = -\frac{\partial C^2}{\partial t}$ is the conservative flux of scalar variance:

$$\Delta C \approx \chi^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}. \tag{10}$$

At micro scales, because of inertia and gravity, it is obvious that the passive scalar assumption is untenable for raindrops.

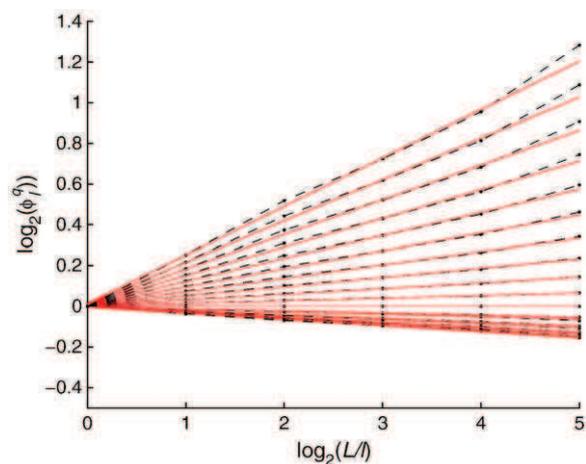


Fig. 3. Scaling of the statistical moments of the normalized absolute finite differences Laplacian of the 100 selected rain maps for the orders $q = 0, 0.1, 0.2, \dots, 2$ (from Verrier et al., 2010).

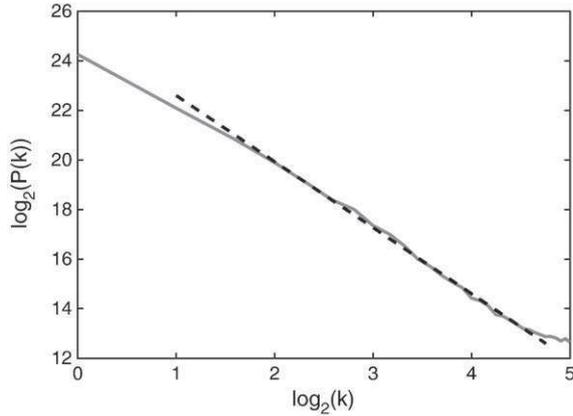


Fig. 4. Averaged angle-averaged power spectrum of the 100 selected rain maps with corresponding fit. The slope of the fit is 2.67 and is equal to $\beta_x + 1$.

However, above a critical scale, roughly equal to 1 m, [Lovejoy and Schertzer \(2008\)](#) have shown that it was acceptable to neglect these effects (except fall velocity). Indeed, they experimentally observed Corrsin–Obukhov scaling for the mass density of raindrops, from the critical scale to a few meters. At larger scales, the scaling is unlikely to hold any further, because the rain-generation process must also be taken into account. Let us however assume that this generating process also scales in such a way that it does not affect the Corrsin–Obukhov scaling. In this case, the mass density of the raindrops could be described by a passive scalar-like model up to storm scale, i.e., Corrsin–Obukhov scaling involving a conservative flux, coupled with a turbulent energy flux:

$$\Delta\rho \approx \phi^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}. \quad (11)$$

We do not intend to provide a rigorous demonstration here, but only to test this hypothesis up to storm scale.

If one considers a class of raindrops defined by a diameter between D , assumed to evolve in steady air with the same fall velocity $V_f(D)$, given for example by the Atlas law, then the contribution $dR(D)$ of this class of raindrops to the total rain rate is:

$$R(D) \approx V_f(D)\rho(D) \quad (12)$$

where $\rho(D)$ is the mass density of the raindrops with diameter D . Since Eq. (11) holds for a given class of raindrops, we obtain the statistical law:

$$\Delta R(D) \approx V_f(D)\phi(D)^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}. \quad (13)$$

Table 2
Multifractal parameters, non-conservation parameters and spectral slopes obtained by analyzing uninterrupted rain rate data only.

	α	C_1	H	β
Time series	1.65	0.13	0.62	2.07
2D maps	1.78	0.12	0.40	1.67

Now, in order to obtain an equivalent relation for the total rain rate R , it is necessary to sum Eq. (13) over all possible diameters. This step is not trivial because the calculation of the total ΔR must be performed taking into account the sign of $\Delta R(D)$ which actually does not appear in Eq. (13): this equation is only true for the mean of the absolute value of $\Delta R(D)$. However, it is possible to assume that the sign taken by $\Delta R(D)$ always corresponds to the sign taken by ΔR , whatever the value of D . The reason is that $R(D)$ is proportional to $DSD(R, D)$ (where DSD denotes the drop size distribution), which is generally a monotonically decreasing function of R , for any D . This is for example true with a classical Marshall–Palmer DSD . This finally leads to:

$$\Delta R \approx \left[\int V_f(D)\phi(D)^{1/2} dD \right] \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}. \quad (14)$$

At this stage, one simple possibility is to assume that the functions $\phi(D)$ are identical, to within a proportionality constant, since the raindrops are assumed to differ solely in terms of their diameter. One limitation of this assumption is that the critical scale depends on the diameter of the raindrops. However, in the present case the scale of observation is much larger than the critical scale. Thus, by factorizing ϕ and suppressing the remaining integral, which is now scale independent, one obtains a passive scalar-like law for the rain rate:

$$\Delta R \approx \phi^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}. \quad (15)$$

In order to obtain an analytic expression for the structure functions, [Benzi et al. \(1992\)](#) proposed assuming the fluxes to be independent. Nevertheless, [Schmitt et al. \(1996\)](#) showed this assumption to be unrealistic, and demonstrated that it was more appropriate to assume the velocity and concentration gradients to be independent. Based on this approach, they derived the following expression for the structure functions (although this expression was derived for temperature, it can be applied here to the rain rate as a consequence of Eq. (15)):

$$\langle \Delta R^q \rangle \approx l^{q/3 + K_\varepsilon(q/6) - K_\phi(q/2)}. \quad (16)$$

Note that, although Eq. (16) appears to correspond to the assumption of independent fluxes, this not confirmed, because $K_\varepsilon(-q/6) \neq -K_\varepsilon(q/6)$. In the special case where $q = 1$, by identification with Eq. (9), the following theoretical expression is obtained for H :

$$H = 1/3 + K_\varepsilon(1/6) - K_\phi(1/2). \quad (17)$$

The term $K_\varepsilon(1/6)$ depends only on turbulence and is well known. With the parameters $\alpha_\varepsilon = 1.5$ and $C_{1\varepsilon} = 0.25$ proposed in the study of [Schmitt et al. \(1996\)](#), its value is found to be -0.05 . However, the estimation of the term $K_\phi(1/2)$ is more delicate, since the multifractal parameters are not known a priori and have to be estimated. In the general case, i.e. if the value of q is not fixed, identification of Eq. (16) with Eq. (8) leads to the following structure function exponent:

$$qH - K(q) = q/3 + K_\varepsilon(q/6) - K_\phi(q/2). \quad (18)$$

By using the identity given in Eq. (6), it is possible to separate the conservative and non-conservative parts of the right-hand side of this equation:

$$qH - K(q) = q \left(\frac{1}{3} + K_\varepsilon(1/6) - K_\phi(1/2) \right) + (1/6)^{\alpha_\varepsilon} K_\varepsilon(q) - (1/2)^{\alpha_\phi} K_\phi(q). \quad (19)$$

Thus, the function K retrieved by reconstruction of the cascade with experimental data corresponds to:

$$K(q) = (1/2)^{\alpha_\phi} K_\phi(q) - (1/6)^{\alpha_\varepsilon} K_\varepsilon(q). \quad (20)$$

If the multifractal parameters of ε and ϕ are close, which may be verified a posteriori, then $K_\varepsilon \approx K_\phi$ and $(1/2)^{\alpha_\phi} \gg (1/6)^{\alpha_\varepsilon}$. Therefore, to a first-order approximation:

$$K(q) \approx (1/2)^{\alpha_\phi} K_\phi(q). \quad (21)$$

By replacing $K(q)$ and $K_\phi(q)$ by their general form, as given by the universal multifractal framework (Eq. (4)), the relationships between the parameters of K_ϕ and those of K are easily derived:

$$\begin{cases} \alpha_\phi \approx \alpha \\ C_{1\phi} \approx 2^\alpha C_1 \end{cases} \quad (22)$$

which yields $\alpha_\phi \approx 1.78$ and $C_{1\phi} \approx 0.41$, according to the parameters given in Table 2 for rain maps. Finally, $K_\phi(1/2)$ can be estimated, and is found to be equal to -0.11 . The (semi-)theoretical value of H is therefore $1/3 - 0.05 + 0.11 \approx 0.39$, which is consistent with its experimental value for rain maps (cf. Table 2). Concerning the spectral slope, its theoretical value is obtained by combining Eqs. (7) and (20):

$$\beta = 1 + 2H - (1/2)^{\alpha_\phi} K_\phi(2) + (1/6)^{\alpha_\varepsilon} K_\varepsilon(2). \quad (23)$$

This relation yields $\beta \approx 1.6$, which is in acceptable agreement with the experimental value of 1.67 given in Table 2.

Now let us briefly consider a more realistic turbulent atmosphere with a non-zero vertical wind w . In this case, the velocity fall corresponds to:

$$V_f(D) = V_R(D) + w. \quad (24)$$

where $V_R(D)$ is the relaxation speed of raindrops with diameter D . This case is difficult to investigate, because the statistics of the vertical wind are not well known (Lovejoy et al., 2008). According to these authors, the main features of the mean vertical wind are: it tends toward zero as the averaging scale increases; the slope of its spectrum is smaller than 1, which corresponds to $H=0$ according to Eq. (7). These observations give us plausible (but unproven) reasons to neglect its effect at the averaging scale considered here (400 m × 400 m). More precisely, by combining Eqs. (12) and (24), we obtain (omitting the dependence on raindrop diameter for simplicity):

$$R \approx V_R \rho + \iiint w \rho dV. \quad (25)$$

If we assume that w and ρ are not correlated, Eq. (25) simplifies to:

$$R \approx V_R \rho + \bar{w} \rho \quad (26)$$

where \bar{w} is the mean vertical wind. The rain rate difference is therefore:

$$\Delta R \approx V_R \Delta \rho + \bar{w} \Delta \rho + \Delta \bar{w} \rho + \rho \Delta \bar{w}. \quad (27)$$

Thus, by comparing the first term of the right-hand side with the others terms, three conditions must be satisfied in order to neglect the mean vertical wind effect: (i) $V_R \gg \bar{w}$, (ii) $V_R \gg \Delta \bar{w}$, (iii) $\Delta \rho / \rho \gg \Delta \bar{w} / V_R$. Since V_R does not depend on scale and since \bar{w} and $\Delta \bar{w}$ decrease with the averaging scale, conditions (i) and (ii) might be correct at the radar pixel scale, and up to storm scale. Moreover, condition (iii) could also be verified because $\Delta \rho / \rho$ increases with scale whereas $\Delta \bar{w} / V_R$ is constant with scale (because $H=0$ for the vertical wind whereas $H \approx 0.4$ for the mass density). These arguments are of course not rigorous and the mean vertical wind effect should be investigated more precisely, once well-established statistics become available.

6. Evidence of space–time anisotropy

The simplest link between spatial and temporal averages is obtained by assuming frozen turbulence (Taylor, 1938) and a relation of the form:

$$l = Vt. \quad (28)$$

Generally, V is assumed to be constant. This approach is based on the hypothesis of the existence of an energy gap in the atmosphere at the mesoscale. This gap would separate 2D turbulence, generating coherent eddies on a large scale, from 3D incoherent turbulence at a small scale (cf. Van der Hoven, 1957). In this case, there would be no space–time anisotropy and H would have the same value in space and time. However, there is still no consensus as to this ‘standard’ 2D/3D model (see, e.g., Lovejoy and Schertzer, 2010) and such an outcome is in contradiction with the experimental results presented in Table 2 (H is found to be equal to 0.4 in space, and 0.62 in time).

An alternative approach was proposed by Tessier et al. (1993) to address the problem of space–time anisotropy: if there is no energy gap, there is no large-scale velocity forcing and the advection velocity would be scale dependent:

$$V \approx l^{H_V} \quad (29)$$

In this case, the space–time transformation becomes:

$$l \approx T^{1/(1-H_V)}. \quad (30)$$

By substituting Eq. (30) into Eq. (4), a consequence of this space–time anisotropy is that:

$$H_t = \frac{H_x}{1-H_V} \quad (31)$$

where H_t is the non-conservation parameter obtained in time, and H_x is that obtained in space. This equation allows H_V to be estimated:

$$H_V = (H_t - H_x) / H_t \approx 0.35. \quad (32)$$

This value is close to 1/3, which corresponds to the Kolmogorov-like scaling proposed by Tessier et al. (1993). This result can be confirmed by comparing the spectral slopes. Marsan et al. (1996) have shown that the space–time anisotropy parameter verifies:

$$H_V = \frac{\beta_t - \beta_x}{\beta_t - 1} \quad (33)$$

where β_x and β_t are the power spectrum slopes, respectively in space and time. With the values given in Table 2, one obtains $H_V \approx 0.37$, which is also close to 1/3. This result is in contradiction with previous studies (Marsan et al., 1996; Deidda, 2000), who found $H_V \approx -0.1$. Our interpretation is that the results presented in these studies were based on data including on–off intermittency, and therefore suffered from an important bias. In particular, a comparison of the power spectra slopes would lack in physical meaning, since temporal data generally includes far more zero values than spatial data.

Recently, Lovejoy et al. (2008) and Radkevich et al. (2008) proposed another interpretation that could be in agreement with the observed space–time anisotropy. Going back to Tennekes (1975), the aforementioned authors assumed the advection to be due to a large-scale eddy. For time scales smaller than this large eddy turnover time, Eq. (28) is assumed to be valid with V constant; in this case, although no space–time anisotropy should be observed, they showed that the vertical wind could be responsible for the appearance of such an anisotropy. However, as explained in the previous section, the current limited knowledge of vertical wind statistics prevents us from testing this hypothesis correctly.

7. Conclusions

Rainstorms occurring during the African monsoon can be described statistically by fractionally integrated multiplicative cascades. The scale laws specific to this model have been validated experimentally, using high resolution rain rate time series and radar rain maps collected during the AMMA campaign.

The experimental value of the non-conservation parameter H (equal to 0.4 for rain maps) is in agreement with that predicted by assuming a phenomenological Corrsin–Obukhov law for the mass density of the raindrops. It shows that a passive scalar-like behaviour of raindrops may be valid, up to storm scale. If this result is confirmed it would indicate that, maybe due to a coupling with turbulence, the rain generating process does not affect the Corrsin–Obukhov scaling.

A comparison of the results obtained in space with those obtained in time provides evidence of the presence of space–time anisotropy. This anisotropy has been quantified and found to be consistent with the assumption of turbulent atmospheric advection, with a dependence on scale, as suggested by Tessier et al. (1993). Nevertheless, another explanation could be found in the effect of vertical winds.

Acknowledgments

We thank S. Lovejoy for helpful comments.

Based on a French initiative, the AMMA was formed by an international scientific group, and is currently funded by a large number of agencies, especially from France, UK, USA and Africa. It has been the beneficiary of a major financial contribution from the European Community's Sixth Framework Research Programme. See <http://www.ammainternational.org>.

References

- Benzi, R., Biferale, L., Parisi, G., 1992. Intermittency correction to the Obukhov–Corrsin theory of a passive scalar. *Europhys. Lett.* 18, 213–217.
- Corrsin, S., 1951. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Appl. Phys.* 22, 469–475.
- de Lima, M.I.P. (1998), *Multifractals and the temporal structure of rainfall*, Ph.D. thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- de Montera, L., Barthès, L., Mallet, C., Golé, P., 2009. The effect of rain–no rain intermittency on the estimation of the universal multifractals model parameters. *J. Hydrometeorol.* 10, 493–506.
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space–time multifractal framework. *Water Resour. Res.* 36, 1779–1794.
- Delahaye, J.-Y., Barthès, L., Golé, P., Lavergnat, J., Vinson, J.P., 2006. A dual-beam spectropluviometer concept. *J. Hydrol.* 328, 110–120.
- Gupta, V.K., Waymire, E., 1991. On lognormality and scaling spatial averages? In: Schertzer, D., Lovejoy, S. (Eds.), *Non-linear Variability in Geophysics: Scaling and Fractals*. Kluwer, pp. 175–184.
- Kolmogorov, A.N., 1941. Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Proc. Acad. Sci. URSS. Geochem. Sect.* 30, 299–303.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: de Cola, L., Lam, N. (Eds.), *Fractals in Geography*. Prentice-Hall, pp. 171–205.
- Lavergnat, J., Golé, P., 1998. A stochastic raindrop time distribution model. *J. Appl. Meteorol.* 37, 805–818.
- Lilley, M., Lovejoy, S., Desaulniers-Soucy, N., Schertzer, D., 2006. Multifractal large number of drops limit in rain. *J. Hydrol.* 328, 20–37.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 1995. Multifractals and rain. In: Kundzewicz, A.W. (Ed.), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modeling*. Cambridge Press, pp. 62–103.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2006. Multifractals, cloud radiances and rain. *J. Hydrol.* 322, 58–88.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2008. Turbulence, rain drops and the $l^{1/2}$ number density law. *New J. Phys.* 10, 75017–75049.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2010. Towards a new synthesis for atmospheric dynamics: space–time cascades. *Atmos. Res.* 96 (1), 1–52.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Lilley, M., Strawbridge, K., Radkevitch, A., 2008. Scaling turbulent atmospheric stratification, part I: turbulence and waves. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 277–300.
- Marsan, D., Schertzer, D., Lovejoy, S., 1996. Causal space–time multifractal modelling of rain. *J. Geophys. Res.* 31, 26333–26346.
- Mazzarella, A., 1999. Multifractal dynamic rainfall processes in Italy. *Theor. Appl. Climatol.* 63, 73–78.
- Novikov, E.A., Stewart, R., 1964. Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geofiz.* 3, 408–412.
- Obukhov, A., 1949. Structure of the temperature field in a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR* 13, 55–69.
- Olsson, J., 1995. Limits and characteristics of the multifractal behaviour of a high-resolution rainfall time series. *Nonlinear Processes Geophys.* 2 (1), 23–29.
- Over, T.M., Gupta, V.K., 1996. A space–time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *J. Geophys. Res.* 101, 26319–26331.
- Radkevich, A., Lovejoy, S., Strawbridge, K., Schertzer, D., Lilley, M., 2008. Scaling turbulent atmospheric stratification, part III: space–time stratification of passive scalars from lidar data. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 316–335.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987. Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades. *J. Geophys. Res.* 92, 9692–9714.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist! *J. Appl. Meteorol.* 36, 1296–1303.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Hubert, P., 2002. An introduction to stochastic multifractal fields. In: Ern et Liu Weiping, A. (Ed.), *ISFMA Symposium on Environmental Science and Engineering with related Mathematical Problems*. Higher Education Press, Beijing, pp. 106–179.

- Schmitt, F., Schertzer, D., Lovejoy, S., Brunet, G., 1996. Multifractal temperature and flux of temperature variance in fully developed turbulence. *Europhys. Lett.* 34, 195–200.
- Schmitt, F., Vannitsem, S., Barbosa, A., 1998. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *J. Geophys. Res.* 103 (D18), 23181–23193.
- Taylor, G.I., 1938. The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. London A* 164, 476–490.
- Tennekes, H., 1975. Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* 67, 561–567.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., 1993. Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *J. Appl. Meteorol.* 32, 223–250.
- Van der Hoven, I., 1957. Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from .0007 to 900 cycles per hour. *J. Meteorol.* 14, 160–164.
- Veneziano, D., Bras, R.L., Niemann, J.D., 1996. Nonlinearity and self-similarity of rainfall in time and a stochastic model. *J. Geophys. Res.* 101, 26371–26392.
- Verrier, S., de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C., 2010. Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem. *J. Hydrol.* 389 (1–2), 111–120.
- Yaglom, A.M., 1966. The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.* 2, 26–30.

Multifractal analysis of oceanic chlorophyll maps remotely sensed from space

L. de Montera¹, M. Jouini¹, S. Verrier², S. Thiria¹, and M. Crepon¹

¹Laboratoire d’Océanographie et du Climat, Expérimentation et Approches Numériques, UMR 7159, Paris, France

²Laboratoire Atmosphères, Milieux, Observations Spatiales, UMR 8190, Guyancourt, France

Received: 14 October 2010 – Published in Ocean Sci. Discuss.: 21 January 2011

Revised: 24 March 2011 – Accepted: 25 March 2011 – Published: 28 March 2011

Abstract. Phytoplankton patchiness has been investigated with multifractal analysis techniques. We analyzed oceanic chlorophyll maps, measured by the SeaWiFS orbiting sensor, which are considered to be good proxies for phytoplankton. The study area is the Senegalo-Mauritanian upwelling region, because it has a low cloud cover and high chlorophyll concentrations. Multifractal properties are observed, from the sub-mesoscale up to the mesoscale, and are found to be consistent with the Corssin-Obukhov scale law of passive scalars. This result indicates that, in this specific region and within this scale range, turbulent mixing would be the dominant effect leading to the observed variability of phytoplankton fields. Finally, it is shown that multifractal patchiness can be responsible for significant biases in the nonlinear source and sink terms involved in biogeochemical numerical models.

1 Introduction

It is sometimes argued that turbulent mixing leads to homogeneous fields. However, Kolmogorov (1941), Obukhov (1949) and Corssin (1951) have shown that, on the contrary, turbulent mixing generates highly irregular structures that are heterogeneous at all scales. Their work was based on the hypothesis of scale invariance, which means, in simple words, that eddies can be expected to occur in a similar manner at all scales. In the case where the physical quantity is the concentration of a passive tracer, these authors demonstrated that its variability exhibits fractal properties which can be described

statistically using scale laws. This result is often referred to as the theory of passive scalars.

Since the phytoplankton’s ability to swim is very limited, its displacements are mainly due to the velocity of the fluid in which it evolves. Phytoplankton patchiness is thus strongly related to turbulence. This consequence has led numerous authors to study the scale invariance properties of phytoplankton patches, and to confront experimental data with phenomenological models derived from, or inspired by, the theory of passive scalars. Early studies remained confined to second-order moments, such as the slope of the power spectrum (see, e.g., Platt, 1972), whereas more recent research takes into account the intermittent transfer of conservative quantities in scale space, such as energy and scalar variance, which give rise to multifractal statistics through cascade processes (Seuront et al., 1996a, b, 1999; Seuront and Schmitt, 2004, 2005a, b; Lovejoy et al., 2001a, b; Pottier et al., 2008).

At smaller scales, most of these studies found empirical proof for a passive scalar regime of phytoplankton patchiness, corresponding to the well-known “ $-5/3$ ” power spectrum slope of homogenous and isotropic turbulence. This purely turbulent regime appears to be limited to spatial scales smaller than a particular scale of the order of 100 m, called the “planktoscale” by Lovejoy et al. (2001b). In fact, although phytoplankton can reasonably be described as passively advected, in the sense that its retroaction on the turbulent flow is negligible, it cannot be considered to be totally passive, since it is biologically active. One important biological process is zooplankton grazing, and the “planktoscale” is currently interpreted as corresponding to the scale at which changes take place in the grazing regime. This modification of the grazing regime appears to be related to the zooplankton’s ability to swim. Contrary to phytoplankton, zooplankton is able to swim, although its speed remains limited. Therefore, there exists a scale above which its displacements



Correspondence to: S. Thiria
(sylvie.thiria@locean-ipsl.upmc.fr)

are dominated by turbulent mixing. This hypothesis is supported by the fact that the zooplankton's concentration power spectrum whitens at scales smaller than the "planktoscale" (Currie and Roff, 2006).

At scales larger than the "planktoscale", the phytoplankton patchiness description is more confused. Some authors found a power spectrum slope steeper than $-5/3$ (around -2 , Currie and Roff, 2006; Seuront et al., 1999), interpreting this result as a transition from Eulerian to Lagrangian statistics, due to the inertia of the boat carrying the instruments (cf. Seuront et al., 1996b). On the other hand, the analysis of remotely sensed phytoplankton fields from aircraft led to a smoother slope (around -1.2 , Lovejoy et al., 2001b). From a theoretical point of view, the situation is even less clear: some studies reached the conclusion that growth and trophic interactions should decrease the slope of the power spectrum (Denman and Platt, 1976; Fasham, 1978), whereas some others predict that it should increase (Steele and Henderson, 1979) or that the power spectrum has no specific regime (Horwood, 1978).

In this context, to the best of our knowledge, the large volumes of data collected by remote sensing from space, over a period of more than two decades, have almost not been exploited in order to improve scientific understanding of the multi-scaling properties of phytoplankton fields (with the noticeable exception of Nieves et al., 2007). The aim of the present study is to analyze oceanic chlorophyll maps obtained through the use of this type of sensor. The first part of the paper briefly recalls the passive scalar theory and the notion of multifractal intermittency. The second and third parts describe both the cascade model and the analysis technique. The fourth part presents the dataset and the pre-treatments. The fifth and sixth parts are dedicated to the results and their interpretation. Finally, the last part of the paper provides an example of the importance of multifractal patchiness in oceanic tracers, by assessing the biases it produces in biogeochemical numerical models.

2 Theoretical background: turbulence and multifractals

Richards (1922) described turbulence as a cascade process that transfers kinetic energy from large scales to small scales by a hierarchy of imbricated eddies. The hypothesis of scale invariance relies on phenomenology and the invariance of the Navier-Stokes equations under dilatation or contraction of the reference system (see Appendix A of Schertzer and Lovejoy, 1987). On the basis of this hypothesis, and the conservation of energy in the inertial range, Kolmogorov (1941) used dimensionality and some general assumptions, such as homogeneity and isotropy, to derive his famous statistical scale law:

$$\Delta v_l \simeq \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \quad (1)$$

In this equation, $\Delta v_l \equiv \langle |v(x+l) - v(x)| \rangle$ represents the mean shear of (longitudinal) velocity between two points separated by a distance l , and ε represents the mean density of the energy flux, which is equal to the rate of energy dissipation per unit mass. A similar scale law has been derived for the concentration C of a passive tracer (Obukhov, 1949; Corrsin, 1951):

$$\Delta C_l \simeq \varphi^{1/3} l^{1/3} \quad (2)$$

where $\varphi \equiv \chi^{3/2} \varepsilon^{-1/2}$ represents the non-linear coupling between velocity and concentration, with $\chi \equiv -\frac{\partial(\Delta C_l)^2}{\partial t}$ the mean density of the concentration variance flux (for a review concerning these early turbulent models, see, e.g., Panchev, 1971).

Landau and Lifshitz (1944) pointed out that these fluxes have no reason to be homogeneous: although they are on average conserved during the cascade process, their transfer is a priori intermittent. This remark has led the transfer process to be described by stochastic multiplicative cascades (Novikov and Stewart, 1964; Yaglom, 1966). A multiplicative cascade can be constructed by iterating the following simple procedure: (i) distribute a quantity uniformly over an interval, (ii) divide this interval into sub-intervals, (iii) multiply these by a random variable in order to obtain the new quantity for each sub-interval, (iv) repeat steps (ii) and (iii) until the smallest scale of the cascade is reached. The important point here is that the distribution of the random variables, referred to as the multiplicative weights in the following, does not depend on the level of iteration of the construction algorithm. Thus, because the latter is not dependent on scale, the resulting mathematical object has fractal and even multifractal properties. It turns out that these properties can be described by the scaling of its statistical moments, of fractional order q (for more details, see Schertzer et al., 2002):

$$\langle \varepsilon_l^q \rangle \simeq \left(\frac{L}{l} \right)^{K_\varepsilon(q)} \quad (3)$$

$$\langle \chi_l^q \rangle \simeq \left(\frac{L}{l} \right)^{K_\chi(q)} \quad (4)$$

where ε_l and χ_l are the fluxes averaged at scale l , L is the largest scale of the cascade, and $K_\varepsilon(q)$ and $K_\chi(q)$ are the so-called moment scaling functions.

In order to obtain realistic fields, the discrete cascade model described above has been generalized to continuous cascades, obtained by scale densification (Schertzer and Lovejoy, 1987). This generalization was necessary because two points separated by a given length in physical space do not always have the same distance to their closest common ancestor in the cascade (cf. Pecknold et al., 1993). An interesting property of continuous cascades is that their generators (i.e., the logarithm of the random multiplicative weights) converge towards infinitely divisible laws. However, there is still no consensus concerning the degree of convergence. Some authors proposed Poisson generators (She

and L ev eque, 1994; Dubrulle, 1994) whereas some others add an assumption of self-similar renormalization, so that the generator converges more accurately towards stable distributions (Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997). Until this question finds a definitive answer, since the notion of scale invariance is at the root of the theory, the latter assumption seems plausible, and the decision was made to use stable laws to describe the generator of the process which correspond to Gaussian distributions if the variance is finite or Levy distributions if the variance is infinite. In this type of case, the moment scaling functions take the simple form (Schertzer and Lovejoy, 1987):

$$K_\varepsilon(q) = \frac{C_{1\varepsilon}}{\alpha_\varepsilon - 1} (q^{\alpha_\varepsilon} - q) \quad (5)$$

$$K_\chi(q) = \frac{C_{1\chi}}{\alpha_\chi - 1} (q^{\alpha_\chi} - q) \quad (6)$$

where α_ε and α_χ are multifractality parameters varying between 0 and 2, and $C_{1\varepsilon}$ and $C_{1\chi}$ are intermittency parameters varying between 0 and the dimension of the embedding space, which here is equal to 2.

3 The FIF model

Concerning the chlorophyll concentration, these laws cannot be directly applied, the main reason being that biological activities may produce deviations from a purely passive scalar behaviour. Nevertheless, we expect that the variability of chlorophyll maps still presents some multifractal properties, and that it would be possible to use a cascade model similar to that presented above. We thus looked for a phenomenological model having the same form as Eq. (1), but in which the parameters are not known, i.e.:

$$\Delta\text{Chl}_l \simeq \langle \zeta^a \rangle l^H \quad (7)$$

where Chl is the chlorophyll concentration and $\Delta\text{Chl}_l \equiv \langle |\text{Chl}(x+l) - \text{Chl}(x)| \rangle$. ζ is a conserved flux and a and H are adjustable parameters. As described above, the conserved flux has to verify the basic multifractal relation:

$$\langle \zeta_l^q \rangle \simeq \left(\frac{L}{l} \right)^{K_\zeta(q)} \quad (8)$$

and it is assumed that it converges towards a log-stable law:

$$K_\zeta(q) = \frac{C_{1\zeta}}{\alpha_\zeta - 1} (q^{\alpha_\zeta} - q). \quad (9)$$

This model is described by four parameters: a , H , α_ζ and $C_{1\zeta}$. However, it is possible to reduce the number of parameters to three, since taking the a -th power of ζ in Eq. (7) is equivalent to a simple shift of H by $K_\zeta(a)$, and to the multiplication of $C_{1\zeta}$ by a factor a^{α_ζ} (Lavall e et al., 1993). The proof uses the q -th-order structure functions of chlorophyll maps defined by the average of the q -th power of

chlorophyll concentration variations, denoted by $\Delta\text{Chl}_l^q \equiv \langle |\text{Chl}(x+l) - \text{Chl}(x)|^q \rangle$. According to Eq. (7), the q -th-order structure function is equal to:

$$\Delta\text{Chl}_l^q \simeq \langle \zeta^{aq} \rangle l^{qh}. \quad (10)$$

By introducing Eq. (8), this equation simplifies to:

$$\Delta\text{Chl}_l^q \simeq l^{q(H - K_\zeta(aq))}. \quad (11)$$

Then, the term $K_\zeta(aq)$ can be decomposed into conservative and non-conservative parts using the following identity, which can be straightforwardly derived from Eq. (9):

$$K(ap) = qK(a) + a^\alpha K(q). \quad (12)$$

This operation yields:

$$\Delta\text{Chl}_l^q \simeq l^{q(H - K(a)) - a^{\alpha_\zeta} K_\zeta(q)}. \quad (13)$$

As expected, by defining:

$$\begin{cases} K'_\zeta(q) \equiv a^{\alpha_\zeta} K_\zeta(q) \\ H' \equiv H - K_\zeta(a), \end{cases} \quad (14)$$

one obtains the usual form of the structure function corresponding to the case where $a = 1$:

$$\Delta\text{Chl}_l^q \simeq l^{qH' - K'_\zeta(q)}. \quad (15)$$

In the following, we thus use a simplified form of Eq. (7) requiring only three parameters, namely, H , α_ζ and $C_{1\zeta}$:

$$\Delta\text{Chl}_l \simeq \zeta l^H \quad (16)$$

This model is called the fractionally integrated flux (FIF) and was first presented by Schertzer and Lovejoy (1987) in the framework of their study of rain fields. In this regard, it is interesting to note the similarities between marine biogeochemistry and the cycle of water in the atmosphere. Firstly, both are strongly dependent on ascending currents: these currents bring nutrients to the surface layers of the ocean and water vapour to the upper layers of the atmosphere. Then, the first phase transition to heavier particles generally occurs in thin layers in which physical conditions are appropriate: phytoplankton is produced near to the ocean's surface because it needs light to grow, whereas clouds are formed in the atmospheric layer in which water vapour condenses. The next phase transition to heavier particles occurs when phytoplankton feeds zooplankton, and when cloud droplets are incorporated into raindrops. Finally, zooplankton may die and sink (or return to a nutrient form by mineralization), whereas raindrops may fall (or return to water vapour by evaporation). Although these atmospheric and oceanic processes have very different space and time scales, with one involving biology and the other physics, the comparison is striking. The interesting point here is that, in both cases, the evolution cycle is an alternating composition of turbulent mixing and phase transition processes. This analogy leads phytoplankton patchiness to be thought of as "clouds in the sea". Besides, as will be shown below, the multifractal parameters obtained from chlorophyll maps are close to those obtained in the case of cloud or rain fields.

4 Analysis technique

The first step of the analysis consists in verifying the scale law given by Eq. (9), and in estimating its exponent H . This is generally performed by using the first-order structure function. Since the flux ζ is assumed to be conserved in scale space, whatever the scale l , $\langle \zeta_l \rangle$ is constant. Therefore, Eq. (9) reduces to:

$$\Delta \text{Chl}_l \propto l^H. \quad (17)$$

This equation allows H to be estimated using the simple expression:

$$H = \log_l(\Delta \text{Chl}_l). \quad (18)$$

The second step consists in quantifying the multifractal properties of the flux, and in estimating α_ζ and $C_{1\zeta}$. In order to do so, it is necessary to reconstruct the cascade and therefore to retrieve the flux at the finest available scale. According to Eq. (9), this requires a fractional derivative of order H . However, a simple derivation of integer order provides a good numerical approximation (Lavallée et al., 1993), such as taking the norm of the gradient of the field:

$$\zeta_{l_{\max}} \approx \sqrt{\left(\frac{d\text{Chl}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\text{Chl}}{dy}\right)^2}. \quad (19)$$

Note that, since the rest of the analysis is based on the gradient of the field, it is crucial to work with data affected by a low level of noise. Indeed, if the noise is strong, taking the gradient of the field will result in useless, noisy fields. Therefore the finest available scale does not necessarily correspond to the measurement scale: it is usually necessary to perform initial averaging of the data at a larger scale, before computing the gradient, in order to suppress the noisiest of the finest scales. The cut-off scale at which the fields have to be averaged is called the “effective measurement scale” in the following. This scale is determined by computing the power spectrum, and then estimating the wave number above which it flattens out.

Once the flux has been obtained at the “effective measurement scale”, the stochastic multiplicative cascade can be reconstructed by averaging (or “degrading”) the flux at larger scales. The statistical moments are then computed for various orders and scales in order to test Eq. (8). If the scaling of the statistical moments is verified, $K_\zeta(q)$ can be estimated. Finally, the parameters α_ζ and $C_{1\zeta}$ are obtained by determining the least squares fit to this function.

5 Dataset

Particular attention was paid to the selection of chlorophyll maps, because multifractal analysis is very sensitive to the quality of the data. As explained above, the analysis technique is based on the gradient of the field. Therefore, if the

signal is too noisy, the fluctuations due to turbulence or other processes will be hidden. Moreover, the estimation of higher-order statistical moments can easily be biased by the presence of a few unrealistic values in the data, such as isolated pixels having abnormally high chlorophyll concentrations.

Another difficulty is that areas below clouds or high aerosol concentrations cannot be observed, because the sensor cannot see the sea surface. As a consequence, chlorophyll maps remotely sensed from space present many “holes” of different sizes (the set defined by the locations of these missing data may be fractal itself, because cloud and aerosol distributions are also fractal, see respectively Lovejoy and Schertzer, 2006 and Lilley et al., 2004). We also noticed that the values around the periphery of these “holes” were not reliable, presumably because of uncertainties in the correction of the atmospheric effect. Therefore, it was chosen to study only maps which had no missing values. This type of data is of course difficult to find, because of the abundance of clouds and aerosols in the atmosphere, such that a compromise needed to be found between the size of the maps and the sample size.

In order to optimize this compromise, the study area was carefully chosen. The most appropriate area was found to be the Senegalo-Mauritanian upwelling region, because it normally has a very low cloud cover (although this does not remain true during the summer months, when the InterTropical Convergence Zone (ITCZ) moves north). Another reason is the presence of upwelling, which provides high chlorophyll concentrations far from the coast, due to peculiar oceanic conditions (Aristegui et al., 2004; Lathuilière et al., 2008). Therefore, the choice of this area reduced the measurement noise with respect to the coherent signal. Finally, the chosen location lies between 10° N–26° N and 14° E–26° E, which corresponds to the area between the Cape Verde islands and the coast of West Africa, between Mauritania and Guinea-Bissau (see Fig. 1).

The choice of product level also has to be carefully considered. Classical 8-day composite maps could not be used, because they include a non-uniform time averaging in the data, depending on the amount of missing data for each pixel. Level L3 products (daily global maps mapped to a uniform scale grid) could not be used either, firstly because of projection effects, and secondly because this product is actually derived from sub-sampling of the original data: only one pixel is kept for each square of 4×4 pixels. This reduction in the amount of data is unavoidable, because SeaWiFS is positioned in Low Earth Orbit (LEO), meaning that the time it remains within the field of view of receiver stations is too short for full datasets to be transmitted to the ground. However, full resolution chlorophyll data was transmitted for some restricted areas, including the Senegalo-Mauritanian upwelling region. This dataset is called the local unmapped level L2 product, and is suitable for use in this study. In this product, the pixel resolution is around 1 km². However, the spot size over which the data are measured varies with

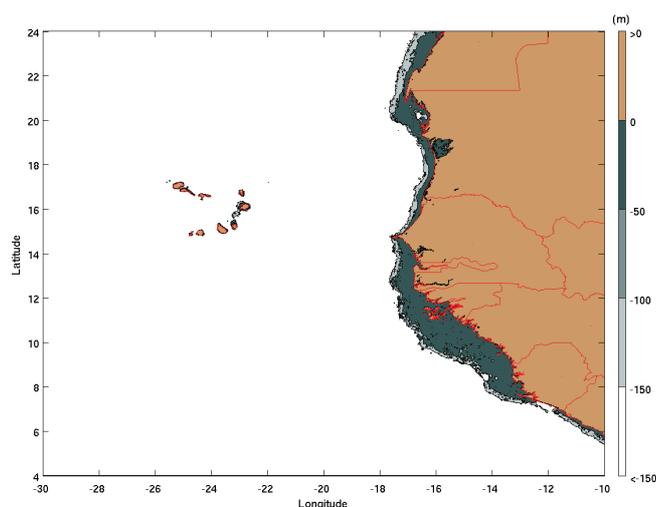


Fig. 1. Geographic map of the Senegalo-Mauritanian upwelling region.

elevation angle. Therefore, only the inner part of the scans was considered, in order to limit this effect. Note also that some authors (Lovejoy et al., 2001b) recommend using direct analysis of marine reflectivities (level L1 product) because the fields' heterogeneity may bias chlorophyll concentration retrieval algorithms. Indeed, since these algorithms are generally non-linear, it is not correct to extrapolate them directly to the measurement scale which is much larger than the scale of homogeneity. However, this problem should not affect our analysis because the retrieval of chlorophyll concentration was performed without any extrapolation in scale space (the retrieval algorithm is based on an empirical relation derived from the comparison between remotely sensed marine reflectivities and in-situ chlorophyll concentrations). Moreover, working directly with marine reflectivities is difficult because of its lack of physical interpretation. Actually, the only physical quantity that can be related to a theoretical scale law is the chlorophyll concentration Chl. For example, consider a non-linear relationship of the form $\text{Chl} = f(R)$, where R denotes a marine reflectivity. If f is non-linear, then f^{-1} is also non-linear. There is consequently no reason for the marine reflectivity $R = f^{-1}(\text{Chl})$ to verify a scaling of the form of Eq. (9) because non-linear transformations do not generally conserve first-order structure functions.

Finally, 100 maps of 128×128 pixels of 1 km^2 , with a minimum of 99.5% of available data, were extracted from SeaWiFS data over a period of one year running from July 2003 to June 2004 (a sample chlorophyll map is shown in Fig. 2). The few missing data were interpolated automatically by computing the mean of the surrounding pixels. All selected maps were checked manually. Some maps had to be rejected because of an offset affecting some parts of the field. The origin of this offset is not known. The gradient of the maps was also checked manually, in order to detect any

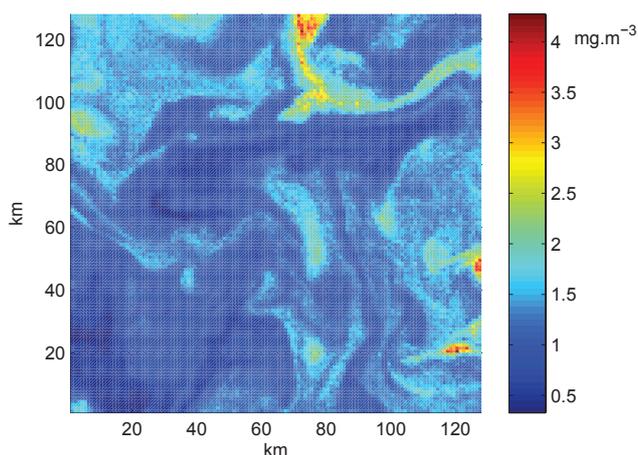


Fig. 2. Example of a 128 km^2 horizontal chlorophyll map (resolution 1 km^2) extracted from the SeaWiFS local L2 product.

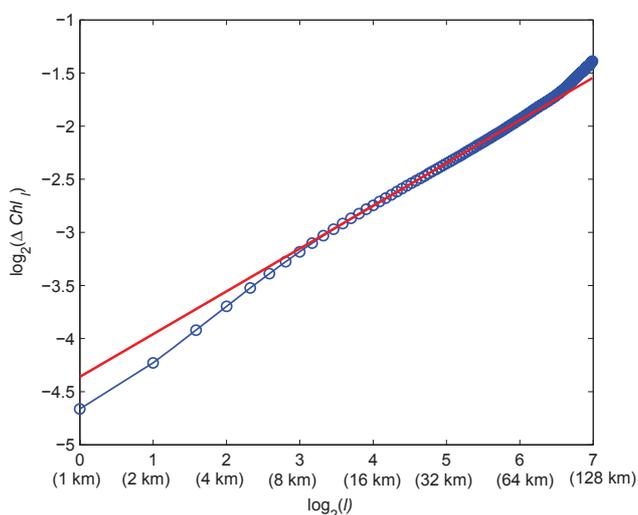


Fig. 3. First-order structure function of SeaWiFS chlorophyll maps compared with a linear curve of slope equal to 0.4. The departure from the theoretical fit observed at the finest scales is attributed to measurement noise, and corresponds to flattening of the power spectra at high wave numbers (see Fig. 4).

isolated, unrealistically high values. Each of these unrealistic pixels was corrected using the mean value of the surrounding pixels.

6 Results

Figure 3 shows the first-order structure function for the 100 SeaWiFS chlorophyll maps. The smaller scales (1–4 km) were not taken into account when determining the fit, because they present a deviation from the scaling observed throughout the remainder of the scale range (4–128 km). The cause of this deviation does not appear to be physical,

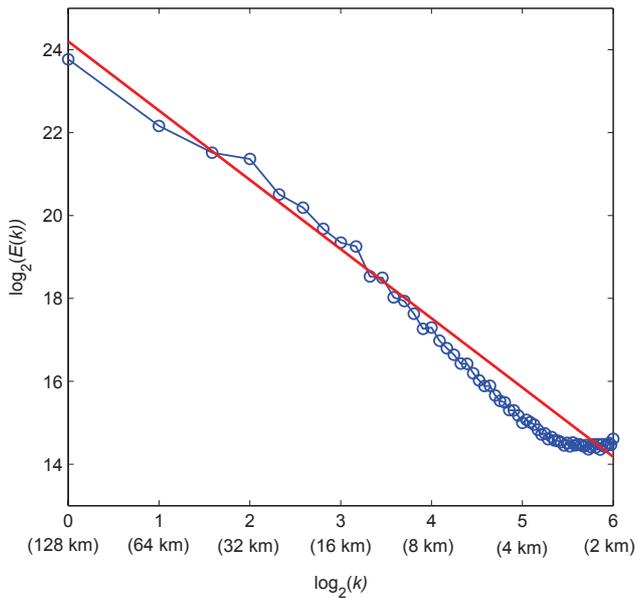


Fig. 4. Angle-integrated power spectrum of SeaWiFS chlorophyll maps compared with a linear curve of slope equal to -1.67 . The power spectrum flattens out at the fifth octave, corresponding to wavelengths smaller than 4 km.

because such a break in the scaling has never been observed in other studies (cf. Lovejoy et al., 2001b). This break was therefore associated with the scale below which the measurement noise becomes dominant, when compared with the coherent signal (here, the definition of the noise is very large: it includes not only the sensor's sensitivity, but also atmospheric corrections and retrieval algorithms errors). This hypothesis is confirmed by the power spectrum (Fig. 4), which flattens out beyond a wave number corresponding to 4 km in the physical space. Finally, over the scale range 4–128 km, the empirical first-order structure function is consistent with Eq. (17), and H is estimated to be around 0.4 (the numerical fit yields 0.402 with a standard deviation of the estimator equal to 0.005).

Since the noise has to be removed before continuing the analysis, the data were averaged over $4 \times 4 \text{ km}^2$ areas. Then, for each map, the norm of the gradient was computed and normalized in order to reconstruct the cascade. Figure 5 (left) shows the scaling of the statistical moments for various orders. This set of scale laws is found to be consistent with the basic multifractal relation given by Eq. (8). For each order q , the slope of the scale law provides an estimation of $K_\zeta(q)$. The moment scaling function retrieved by this method is shown in Fig. 6. The fit of this function according to Eq. (9) yields $C_{1\zeta} \approx 0.12$ and $\alpha_\zeta \approx 1.92$ (here, we renounced to provide the standard deviations of the estimators because they would indicate an artificially high precision; the estimation error of the whole analysis technique has been tested with simulations and is found to be around 10% for

both parameters). Note that the values of these parameters, as well as that of H , are close to those obtained for rain and clouds, which are respectively $H \approx 0.4$, $C_1 \approx 0.12$, $\alpha \approx 1.8$ (Verrier et al., 2010) and $H \approx 0.4$, $C_1 \approx 0.08$, $\alpha \approx 1.9$ (Lovejoy and Schertzer, 2006). Another possibility is to normalize the norm of the gradient in the same manner for all maps. This technique has the advantage to provide an estimation of the outer scale of the cascade by extrapolating the scale laws of the moments (see, e.g., Lovejoy and Schertzer, 2006). Although the sample used in this study is limited and may not be representative, the results are presented in Fig. 5 (right) and yield an outer scale equal to 2000 km, which could be related to the size of oceanic gyres in terms of order of magnitude.

We also tried to perform the same type of analysis using SST (Sea Surface Temperature), which is another useful, remotely sensed oceanic tracer. However, this attempt failed because the spectrum of the SST maps was found to flatten out at larger scales (around 32 km) than that of chlorophyll maps, and the available range of scales was thus insufficient. This whitening effect, which hides the small scale fluctuations, may be due to air-sea exchanges, which tend to spatially homogenize the SST. However, Nieves et al. (2007) performed a multi-scale analysis of SST data with a larger scale range (level L3 product) and found that the observed multifractal spectra was very similar to the one obtained with chlorophyll concentration data. This result provides an additional argument in favour of a link between phytoplankton patchiness and turbulent mixing at large scales, which will be developed in the next section.

The use of statistical moments is a very convenient way of estimating multifractal parameters. However, as it is not very intuitive, we propose here to demonstrate the existence of a cascade process, through the use of the more classical concept of probability density. The algorithm used in this method is the following: (i) compute the flux at the finest available scale, (ii) perform averages over 2×2 squares, (iii) compute the multiplicative weights that relate the values of the coarse-grained flux to the previous ones, (iv) plot the Probability Density Function (PDF) of the logarithm of these multiplicative weights, (v) iterate steps (ii), (iii) and (iv) until the largest scale of the cascade is reached. This method is straightforward to implement and does not require any prior assumption concerning the data. The results obtained with our selection of chlorophyll maps are given in Fig. 7. The PDF of the logarithm of the multiplicative weights does not depend on the scale at which they are derived, thus confirming the use of a scale invariant cascade model. Figure 8 shows the left tail of the total PDF, compared with a Gaussian distribution having the same mean and variance. The empirical PDF decays as a power law (producing a straight line on a log-log graphic), which is much slower than the Gaussian behaviour. This result supports the fact that the generator follows a Lévy law with infinite variance, and allows α to

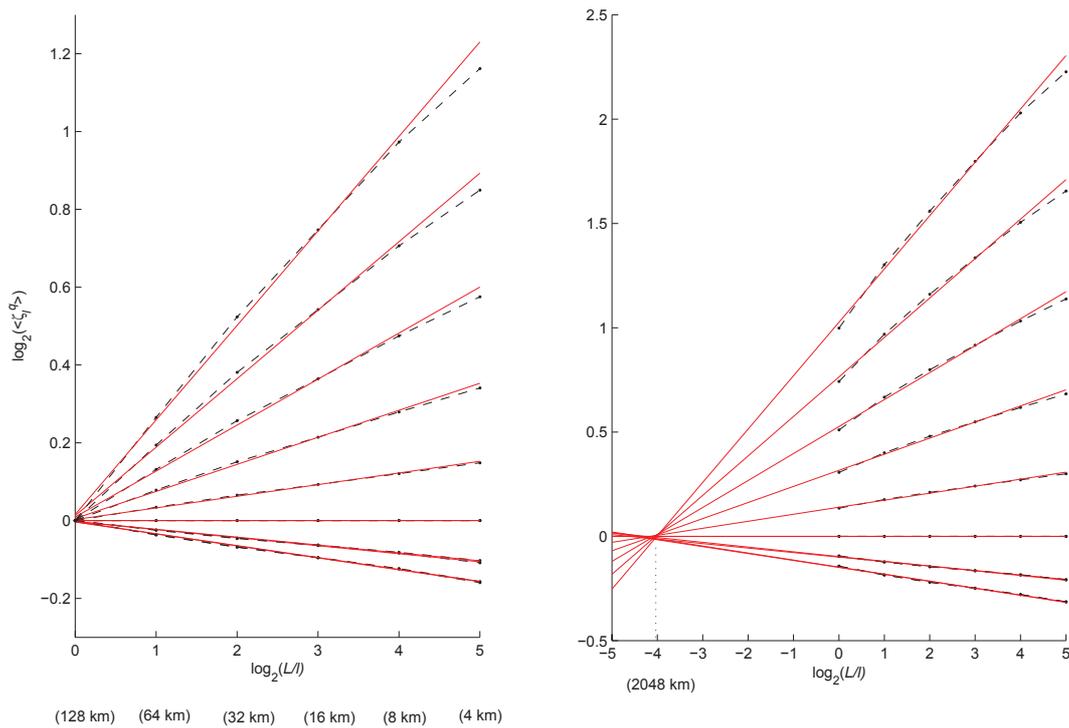


Fig. 5. Scaling of the statistical moments of the flux ζ for the orders $q = 0, 0.1, 0.2, \dots, 2$, with corresponding theoretical fits. Here, L corresponds to the largest scale of the SeaWiFS chlorophyll maps, i.e. 128 km. Left: for each map, the flux was normalized to a mean value of 1. Right: the normalization was performed with the “climatological” mean value computed over all maps, which allows estimating the outer scale of the cascade by extrapolation to larger scales.

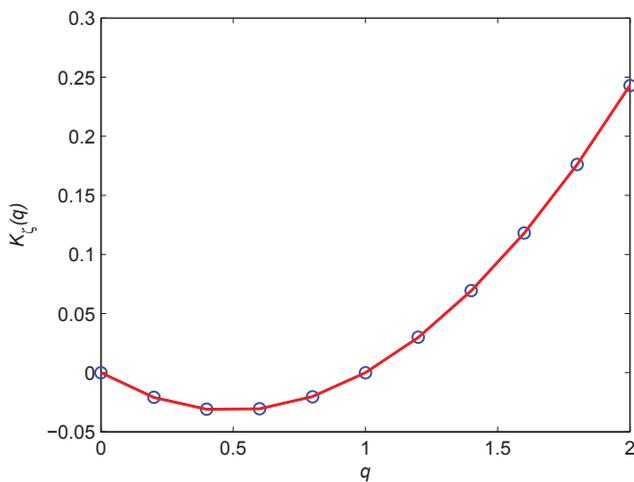


Fig. 6. Moment scaling function $K_\zeta(q)$ of the flux ζ , with theoretical fit.

be estimated using a different approach, since the theoretical slope of the asymptote this distribution is equal to $-(1+\alpha)$. The resulting value of α is found to be 1.95, which is consistent with the value previously obtained using statistical moments.

7 Interpretation

Since the parameter H was found to be close to $1/3$, it is tempting to relate it to the theory of passive scalars. This theory is based on the hypothesis of a 3-D isotropic turbulence that does not hold for our selection of chlorophyll maps, because, in the considered scale range (1–128 km), the ocean is a stratified fluid with a horizontal dimension much larger than the vertical one. However, some recent studies (e.g., Lovejoy and Schertzer, 2010) suggest that the Corrsin-Obukhov scale law may still be valid in the horizontal. Therefore, if turbulent mixing is the dominant effect, we may expect that the horizontal variability of phytoplankton fields would verify the scale law given in Eq. (2). If this is correct, then, assuming the velocity and passive scalar fluctuations to be independent, Schmitt et al. (1996) have shown that the parameter H of the FIF model (Eq. 9) should be equal to:

$$H = 1/3 + K_\epsilon(1/6) - K_\chi(1/2). \tag{20}$$

The deviation of H with respect to the value $1/3$ is due to the intermittency of the energy and scalar variance fluxes, since a conserved flux raised to a power exponent, not equal to 1, is no longer a conserved quantity. The term $K_\epsilon(1/6)$ depends only on the turbulence, and is well known; by assuming the

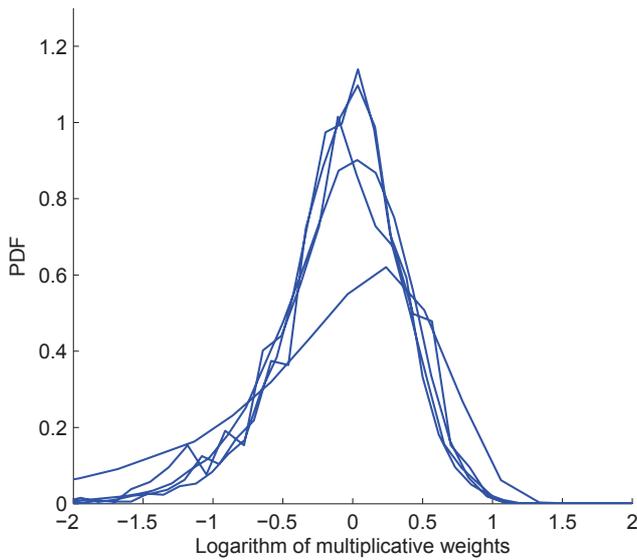


Fig. 7. PDFs of the logarithm of the multiplicative weights for each level of the cascade (corresponding to contractions of the averaging area by a factor 2^2 , from 128 km^2 until 4 km^2). The PDFs are very similar, with the exception of the function corresponding to the last scale contraction (from 8 km^2 to 4 km^2), which is flatter. This may be due to the presence of noise.

parameters $\alpha_\varepsilon = 1.5$ and $C_{1\varepsilon} = 0.25$ proposed by Schmitt et al. (1996), its value is expected to be around -0.05 . However, the estimation of the term $K_\chi(1/2)$ is more delicate, since the multifractal parameters of χ are not known a priori, and have to be estimated. One possible solution consists in using the empirical multifractal parameters obtained for ζ in the previous section, because they have a simple approximate relationship to those of χ (de Montera et al., 2010):

$$\begin{cases} \alpha_\chi \approx \alpha_\zeta \\ C_{1\chi} \approx 2^{\alpha_\zeta} C_{1\zeta}. \end{cases} \quad (21)$$

This yields $\alpha_\chi \approx 1.92$ and $C_{1\chi} \approx 0.45$, thus allowing $K_\chi(1/2)$ to be estimated at a value equal to -0.11 . The (semi-)theoretical value of H is therefore $1/3 - 0.05 + 0.11 \approx 0.39$, which is consistent with its experimental value of 0.4 obtained with the SeaWiFS chlorophyll maps.

This coherency led us to the conclusion that phytoplankton behaves like a passive scalar within the studied scale range, which includes the mesoscale and the sub-mesoscale. This does not mean that phytoplankton is a purely passive scalar, however it implies that biological activity does not affect the scale law generated by turbulent mixing. This is consistent with the previous finding of Seuront et al. (1999) and Currie and Roff (2006), who showed that biological activity affected the scaling over a limited range only, between 30 m and 500 m , which is smaller than the resolution of remotely sensed satellite data.

However, as explained in the introduction, other studies (e.g., Lovejoy et al., 2001b) found a parameter H equal

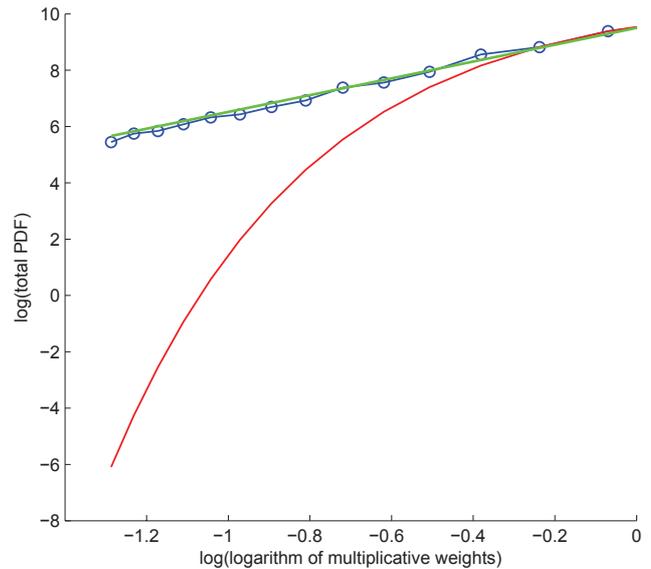


Fig. 8. Log-log graph of the left tail of the total PDF of the logarithm of multiplicative weights (blue), compared with a Gaussian having the same mean and variance (red). The PDF decays as a power law, with a slope -2.95 (green fit), corresponding to a Lévy law of index $\alpha = 1.95$. The Gaussian function decays much faster, and would therefore be inappropriate for cascade generation.

to 0.12 and concluded to a combined turbulent/growth-dominated process. Therefore, the question is still open and future studies should try to understand precisely in which particular seasons or locations this departure from the turbulent scaling is likely to occur. According to the model proposed in Lovejoy et al. (2001a), this departure should be observed in area which have a weak turbulent activity combined with a high growth rate.

8 Bias in biogeochemical numerical models

The forecasting of coupled turbulent/biogeochemical systems is currently performed by means of 3-D numerical simulations. The main shortcoming of this technique is that it necessarily implies the use of high-pass filtering in scale space (or “scale truncation”), which strongly affects the estimation of non-linear advection terms in the fluid mechanics equations. This truncation of scale space is unavoidable because of the limited power of computers. It means, for example, that a small length interval, considered as a differential element dx in the equations, has a value much larger than the scale of homogeneity in the numerical simulation (generally $10\text{--}100 \text{ km}$ for global models, whereas dissipation occurs at scales of the order of a millimeter). The impact of this drastic simplification remains unknown. Although it is generally believed that it can be compensated for, for example by increasing the viscosity (Boussinesq hypothesis), this remains

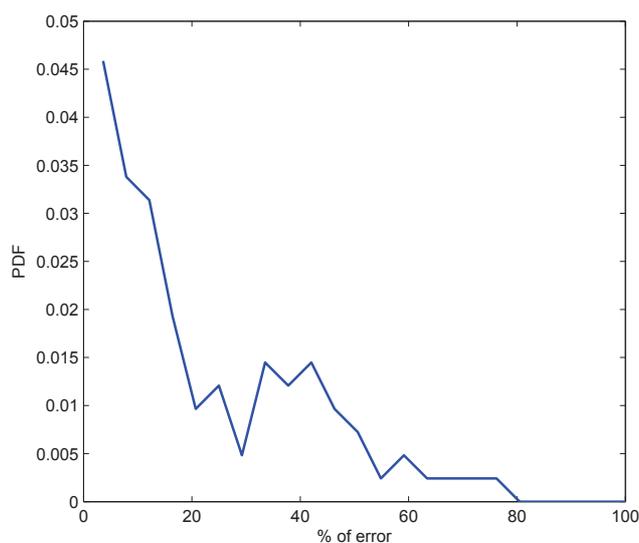


Fig. 9. Assessment of the distribution of the relative error percentage resulting from the hypothesis of homogeneity over 128 km² areas, for a quadratic source term in a biogeochemical numerical model.

to be demonstrated (for a test of the Boussinesq hypothesis, see Schmitt, 2007).

If biogeochemical processes are involved, the situation is even worse, because the estimation of these interactions is also affected by the truncation error. Moreover, the parameters of biogeochemical models are often obtained by means of laboratory experiments performed at a typical scale of one meter. Therefore, since the relations in which these parameters are involved are generally non-linear, it is not correct to use them at larger scales if the real fields are heterogeneous. It can thus be useful to assess the bias generated by the assumption of homogeneity over larger scales. For this, we consider a global numerical model operating with a 1° grid scale (roughly corresponding to the 128 km² maps analyzed in the present paper), which includes a quadratic source term of the form βC^2 , where C is the concentration of a tracer and β is a parameter assumed to be derived under stable conditions, at the scale of one meter in a laboratory. If it is assumed that the 100 SeaWiFS chlorophyll maps are realizations of the sub-grid heterogeneity of the tracer, then for each map we compute the source term at the finest available scale (which is 1 km in this case, whereas a 1 m scale would be needed!), and average these values over the whole 128 km² map. Finally, we estimate the value of this source term that would result from the hypothesis of homogeneity, by averaging the concentration over the whole 128 km² map and then computing the source term. The source term is then estimated with a relative error E equal to:

$$E = \frac{\langle \text{Chl}^2 \rangle - (\langle \text{Chl} \rangle)^2}{\langle \text{Chl}^2 \rangle}. \quad (22)$$

The PDF of the percentage of this relative error is shown in Fig. 9. Its mean value is approximately 22%, which is far from being negligible. One possible approach for reducing this error would be to derive an analytic expression for the scale dependency of the biological parameters (such as β in the example above), using the multifractal parameters of the tracer patchiness, if available.

9 Conclusions

Multifractal properties of oceanic chlorophyll maps have been investigated with remotely sensed data recorded from space. The FIF model has been validated, showing that chlorophyll maps can be modelled statistically, through the use of a fractionally integrated multiplicative cascade. In the study area, the Senegalo-Mauritanian upwelling region, the parameters of this model were found to be $H \approx 0.4$, $C_1 \approx 0.12$ and $\alpha \approx 1.92$. The estimates of the scale law exponent H is consistent with passive scalar behaviour, indicating that phytoplankton variability is dominated by turbulent mixing over the studied scale range (4–128 km), and that biological activity do not modify this scaling. This result confirms previous studies that reached this conclusion based on in-situ data. However, it cannot be generalized to other locations because it may not be correct in areas having a high growth rate combined with a weak turbulent activity.

Finally, it has been shown that, as a consequence of this multifractal patchiness, the non-linear source and sink of biogeochemical numerical models could be strongly biased. Future studies should therefore be dedicated to the use multifractal techniques to improve the accuracy of numerical simulations. This could be performed, for example, by predicting the scale dependence of the model parameters or by refining the assimilation of data measured at different scales. Although the effect of grazing was not observed in this study because of the low resolution of satellite data, the development of such techniques implies to take it into account since the scaling is modified at lower scales, in particular at scales of the order of the so-called “planktoscale”.

Acknowledgements. This study was funded by the French Centre National d’Études Spatiales (CNES).

Edited by: E. J. M. Delhez



The publication of this article is financed by CNRS-INSU.

References

- Aristegui, J., Alvarez-Salgado, X. A., Barton, E. D., Figueiras, F. G., Hernandez-Leon, S., Roy, C., and Santos, A. M. P.: Oceanography and fisheries of the Canary current/Iberian Region of the eastern North Atlantic, in: *The Sea*, Vol. 14, Chap. 23, edited by: Robinson, A. R. and Brink, K. H., John Wiley and Sons, New York, 877–931, 2004.
- Corrsin, S.: On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. Appl. Phys.*, 22, 469–475, 1951.
- Currie, W. J. S. and Roff, J. C.: Plankton are not Passive Tracers: Plankton in a Turbulent Environment, *J. Geophys. Res.*, 111, C05S07, doi:10.1029/2005JC002967, 2006.
- de Montera, L., Verrier, S., Mallet, C., and Barthès, L.: A passive scalar-like model for rain applicable up to storm scale, *Atmos. Res.*, 98(1), 140–147, 2010.
- Denman, K. L. and Platt, T.: The variance spectrum of phytoplankton in a turbulent ocean, *J. Mar. Res.*, 34, 593–601, 1976.
- Dubrule, B.: Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale-covariance, *Phys. Rev. Lett.*, 73, 959–963, 1994.
- Fasham, M. J. R.: The application of some stochastic processes to the study of plankton patchiness, in: *Spatial Pattern in Plankton Communities*, edited by: Steele, J. H., Springer, New York, 131–156, 1978.
- Horwood, J. W.: Observations on spatial heterogeneity of surface chlorophyll in one and two dimensions, *J. Mar. Biol. Assoc. UK*, 58, 487–502, 1978.
- Kolmogorov, A. N.: Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers, *Proc. Acad. Sci. URSS., Geochem. Section*, 30, 299–303, 1941.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: *Fluid mechanics*, 1st edn., Edt. MIR, Moscow, 1944.
- Lathuilière, C., Echevin, V., and Levy, M.: Seasonal and intraseasonal surface chlorophyll-a variability along the northwest African coast, *J. Geophys. Res.*, 113, C05007, doi:10.1029/2007JC004433, 2008.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., and Ladoy, P.: Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation, in: *Fractals in geography*, edited by: de Cola, L. and Lam, N., Prentice-Hall, 171–205, 1993.
- Lilley, M., Lovejoy, S., Strawbridge, K., and Schertzer, D.: 23/9 dimensional anisotropic scaling of passive admixtures using lidar aerosol data, *Phys. Rev. E*, 70, 036301–036307, 2004.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D.: Towards a new synthesis for atmospheric dynamics: space-time cascades, *Atmos. Res.*, 96(1), 1–52, 2010.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D.: Multifractals, cloud radiances and rain, *J. Hydrol.*, 322, 59–88, 2006.
- Lovejoy, S., Currie, W. J. S., Tessier, Y., Claereboudt, M. R., Roff, J. C., Bourget, E., and Schertzer, D.: Universal Multifractals and ocean patchiness: phytoplankton, physical fields and coastal heterogeneity, *J. Plankton Res.*, 23, 117–141, 2001a.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Tessier, Y., and Gaonac’h, H.: Multifractals and Resolution independent remote sensing algorithms: the example of ocean colour, *Int. J. Remote Sens.*, 22, 1191–1234, 2001b.
- Nieves, V., Llebot, C., Turiel, A., Solé, J., García-Ladona, E., Estrada, M., and Blasco, D.: Common turbulent signature in sea surface temperature and chlorophyll maps, *Geophys. Res. Lett.*, 34, L23602, doi:10.1029/2007GL030823, 2007.
- Novikov, E. A. and Stewart, R.: Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-dissipation, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geofiz.*, 3, 408–412, 1964.
- Obukhov, A.: Structure of the temperature field in a turbulent flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 13, 55–69, 1949.
- Panchev, S.: *Random Functions and Turbulence*, Pergamon Press, London, 1971.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C., and Malouin, J. F.: The simulation of universal multifractals, in: *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*, edited by: Perdag, J. M. and Lejeune, A., World Scientific, 228–267, 1993.
- Platt, T.: Local phytoplankton abundance and turbulence, *Deep-Sea Res.*, 19, 183–187, 1972.
- Pottier, C., Turiel, A., and Garçon, V.: Inferring missing data in satellite chlorophyll maps using turbulent cascading, *Remote Sens. Environ.*, 112, 4242–4260, 2008.
- Richardson, L. F.: *Weather prediction by numerical processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- Schertzer, D. and Lovejoy S.: Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades, *J. Geophys. Res.*, 92, 9692–9714, 1987.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S.: Universal Multifractals do Exist!, *J. Appl. Meteorol.*, 36, 1296–1303, 1997.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., and Hubert, P.: An Introduction to Stochastic Multifractal Fields, in: *ISFMA Symposium on Environmental Science and Engineering with related Mathematical Problems*, edited by: Ern, A. and Weiping, L., Higher Education Press, Beijing, 106–179, 2002.
- Schmitt, F., Schertzer, D., Lovejoy, S., and Brunet, G.: Multifractal temperature and flux of temperature variance in fully developed turbulence, *Europhys. Lett.*, 34, 195–200, 1996.
- Schmitt, F. G.: About Boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity, *C.R. Mecanique*, 335, 617–627, 2007.
- Seuront, L., Schmitt, F. G., Lagadeuc, Y., Schertzer, D., Lovejoy, S., and Frontier, S.: Universal Multifractal structure of phytoplankton biomass and temperature in the ocean, *Geophys. Res. Lett.*, 23, 3591–3594, 1996a.
- Seuront, L., Schmitt, F. G., Schertzer, D., Lagadeuc, Y., and Lovejoy, S.: Multifractal Analysis of Eulerian and Lagrangian Variability of Physical and Biological Fields in the Ocean, *Nonlinear Proc. Geoph.*, 3, 236–246, 1996b.
- Seuront, L., Schmitt, F. G., Lagadeuc, Y., Schertzer, D., and Lovejoy, S.: Universal Multifractal analysis as a tool to characterize multiscale intermittent patterns: example of phytoplankton distribution in turbulent coastal waters, *J. Plankton Res.*, 21, 877–922, 1999.
- Seuront, L. and Schmitt, F. G.: Eulerian and Lagrangian properties of biophysical intermittency in the ocean, *Geophys. Res. Lett.*, 31, L03306, doi:10.1029/2003GL018185, 2004.
- Seuront, L. and Schmitt, F. G.: Multiscaling statistical procedures for the exploration of biophysical couplings in intermittent turbulence; Part I. Theory, *Deep-Sea Res. Pt. II*, 52, 1308–1324, 2005a.
- Seuront, L. and Schmitt, F. G.: Multiscaling statistical procedures for the exploration of biophysical couplings in intermittent turbulence; Part II. Application, *Deep-Sea Res. Pt. II*, 52, 1325–1343, 2005b.

- Steele, J. H. and Henderson, E. W.: Spatial patterns in North Sea plankton, *Deep-Sea Res.*, 26, 955–963, 1979.
- She, Z.-S. and L ev eque, E.: Universal scaling laws in fully-developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 336–339, 1994.
- Verrier, S., de Montera, L., Barth es, L., and Mallet, C.: Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem, *J. Hydrol.*, 389(1–2), 111–120, 2010.
- Yaglom, A. M.: The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, *Sov. Phys. Dokl.*, 2, 26–30, 1966.