



HAL
open science

Transformation de Aluthge et vecteurs extrémaux

Jérôme Verliat

► **To cite this version:**

Jérôme Verliat. Transformation de Aluthge et vecteurs extrémaux. Mathématiques générales [math.GM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. Français. NNT: 2010LYO10304. tel-00733771

HAL Id: tel-00733771

<https://theses.hal.science/tel-00733771>

Submitted on 19 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 304-2010

Année 2010

Université Claude Bernard - Lyon 1

THÈSE DE DOCTORAT

(Arrêté du 7 août 2006)

Spécialité Mathématiques

Présentée par
Jérôme VERLIAT

Transformation de Aluthge et vecteurs extrémaux

*Thèse soutenue publiquement le 21 décembre 2010
devant le jury composé de*

Directeur

M. le Prof. Gilles CASSIER

Université de Lyon 1

Rapporteurs

M. le Prof. Mostafa MBEKHTA

Université de Lille 1

M. le Prof. Alfonso MONTES RODRÍGUEZ

Université de Séville

Examineurs

M. le Prof. Thierry FACK

Université de Lyon 1

M. le Prof. Nicolae SUCIU

Université de Timisoara

Résumé de la thèse

Cette thèse s'articule autour de deux thèmes : une transformation de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ introduite par Aluthge et la méthode d'Ansari-Enflo.

La première partie fait l'objet de l'étude de la transformation de Aluthge qui a eu un impact important ces dernières années en théorie des opérateurs. Des résultats optimaux sur la stabilité d'un certain nombre de classes d'opérateurs, telles que la classe des isométries partielles et les classes associées au comportement asymptotique d'un opérateur, sont fournis. Nous étudions également l'évolution d'invariants operatoriels, tels que le polynôme minimal, la fonction minimum, l'ascende et la descente, sous l'action de la transformation ; nous comparons plus précisément les suites des noyaux et images relatives aux itérés d'un opérateur et de sa transformée de Aluthge.

La deuxième partie est l'occasion d'étudier la théorie d'Ansari-Enflo, qui a permis de gros progrès pour le problème du sous-espace hyper-invariant. Nous développons plus particulièrement la notion fondatrice de la méthode, celle de vecteur extrémal. La localisation et une nouvelle caractérisation de ces vecteurs sont données. Leur régularité et leur robustesse, au regard de différents paramètres, sont éprouvées.

Enfin, nous comparons les vecteurs extrémaux d'un shift à poids et ceux associés à sa transformée de Aluthge. Cette étude aboutit à la construction d'une suite de vecteurs extrémaux associés aux itérés de la transformation de Aluthge, pour laquelle certaines propriétés sont mises en évidence.

Mots-clés

Transformation de Aluthge, méthode d'Ansari-Enflo, vecteur extrémal, vecteur minimal, shift à poids, isométrie partielle, co-isométrie, opérateur stable, $\mathcal{C}_{0,\cdot}$, opérateur à composante asymptotique non nulle, $\mathcal{C}_{1,\cdot}$, ascende, descente, polynôme minimal, fonction minimum, pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Aluthge Transform and Extremal Vectors

Thesis Summary

This thesis is based on two topics : a transformation of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ introduced by Aluthge and the Ansari-Enflo method.

In the first part, we study the Aluthge transformation which really had an impact on operator theory in the past ten years. Some optimal results about stability for several operators classes, such as isometries class and classes of operators defined by their asymptotic behaviour, are given. We also study changes generated by Aluthge transform about some usual tools in operator theory like minimum polynomial, minimum function, ascent and descent ; precisely, we compare iterated kernels and iterated ranges sequences related to an operator and to its Aluthge transform.

The second part is devoted to the study of the Ansari-Enflo theory, which allowed to make progress in the hyper-invariant subspace problem. We develop the notion of extremal vectors which is the fundamental point of the theory. We clarify their spatial localization and a new characterisation for these vectors is given. Regularity and robustness with regard to different parameters are tried and tested.

Finally, we compare extremal vectors associated with weighted shifts and the one corresponding to their Aluthge transform. This study leads to build a sequence of extremal vectors associated with the iterated Aluthge transform, for which we highlight several properties.

Keywords

Aluthge transform, Ansari-Enflo method, extremal vector, minimal vector, weighted shift, partial isometry, co-isometry, stable operator, $\mathcal{C}_{0,\cdot}$, asymptotically non-vanishing, $\mathcal{C}_{1,\cdot}$, ascent, descent, minimal polynomial, minimum function, Moore-Penrose pseudo-inverse.

Remerciements

Ce travail de thèse doit beaucoup à toutes les personnes qui m'ont entouré au fil de ces dernières années. Je tiens à leur exprimer ici mes plus sincères remerciements.

Bien entendu, ma reconnaissance va particulièrement à mon directeur de thèse, Gilles Cassier, qui a su me lancer dans un domaine passionnant. Il n'a jamais ménagé son temps ni ses efforts pour m'aider. Ses suggestions, son enseignement, sa confiance, son exigence et sa disponibilité m'ont vraiment permis de m'épanouir scientifiquement pendant ces années.

Je voudrais exprimer mes remerciements à mon rapporteur Mostafa Mbekhta pour la vérification des preuves, pour les nouvelles suggestions et les nouvelles perspectives qu'il a apportées concernant notamment le paragraphe 3.3.

Je souhaite également remercier Alfonso Montes Rodríguez pour avoir accepté d'être rapporteur, pour la qualité de sa relecture et le contrôle des résultats figurant dans la thèse.

Ma gratitude va également à Thierry Fack et Nicolae Suciuc qui me font l'honneur de faire partie de mon jury de soutenance.

Un grand merci d'autre part à tous les mathématiciens, collègues et amis doctorants avec qui j'ai eu des discussions intéressantes ces dernières années ; ainsi qu'aux membres du laboratoire de mathématiques de Lyon 1 pour leur accueil.

Je remercie enfin du fond du coeur mes parents, mes amis, ainsi que Carole Baritoux. Ils m'ont tous largement soutenu tout au long des diverses épreuves, ils m'ont toujours poussé en avant. Un remerciement

particulier va à ceux qui, parmi eux, ont accepté de consacrer un peu de leur temps à corriger l'orthographe de ce mémoire.

Table des matières

1	Introduction	11
2	Préliminaires	19
2.1	Transformation de Aluthge	19
2.1.1	Décomposition polaire	19
2.1.2	Deux égalités d'entrelacement	20
2.2	Présentation de la méthode d'Ansari-Enflo	21
2.2.1	Définition et notations	21
2.2.2	Quelques applications au problème du sous-espace hyper-invariant	23
3	Transformation de Aluthge et classes d'opérateurs	27
3.1	La classe des isométries partielles	28
3.1.1	Transformée de Aluthge d'une isométrie partielle	28
3.1.2	Un cas particulier : des isométries partielles sur les espaces de Hardy	29
3.2	Le polynôme minimal sous l'action de Δ	32
3.2.1	Polynômes minimaux de T et de $\Delta(T)$	33
3.2.2	Fonction minimum de T et celle de $\Delta(T)$	36
3.3	Stabilité de l'ascente et de la descente	39
3.3.1	Stabilité de l'ascente	39
3.3.2	Étude de la descente	42
3.4	Stabilité des classes \mathcal{C}_0 , et \mathcal{C}_1 ,	45
3.4.1	Étude des co-isométries	45
3.4.2	Le cas des contractions	47

3.4.3	Le cas d'égalité $S_T = S_{\Delta(T)}$	48
3.4.4	Le cas des opérateurs à puissances bornées	53
4	Propriétés des vecteurs extrémaux	57
4.1	Localisation des vecteurs extrémaux	57
4.1.1	Quelques remarques	57
4.1.2	Caractérisation équationnelle des vecteurs extrémaux	59
4.1.2.1	Précisions d'ordre géométrique	59
4.1.2.2	Caractérisation des vecteurs extrémaux	62
4.1.3	Lieu de la minimisation	64
4.2	Régularité en ε	67
4.2.1	Analyticité des applications $\varepsilon \mapsto c_{x,\varepsilon}$ et $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$	67
4.2.2	Lien avec le pseudo-inverse de Moore-Penrose	68
4.2.3	Comportement lorsque ε tend vers $\ x\ $	71
4.2.4	Étude de l'application $\varepsilon \mapsto \ y_{x,\varepsilon}\ $	73
4.3	Régularité en x	75
4.3.1	Étude de l'application $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$	75
4.3.1.1	Continuité globale	75
4.3.1.2	Étude directionnelle	77
4.3.2	Étude de l'application $x \mapsto c_{x,\varepsilon}$	82
5	Évolution des vecteurs minimaux sous l'influence de la transformation de Aluthge	85
5.1	Transformée de Aluthge d'un shift à poids	85
5.1.1	Quelques caractéristiques des shifts à poids bilatéraux	86
5.1.2	Calcul de $\Delta(W_\alpha)$	87
5.2	Vecteurs extrémaux d'un shift à poids	89
5.3	Vecteurs extrémaux et itération de la transformation de Aluthge	93

Notations

Le but de cette partie est d'indiquer clairement la signification des notations que l'on utilisera dans cette thèse. Le lecteur pourra ainsi facilement s'y référer en cas de doute concernant une notation.

► Ensembles classiques :

- \mathbb{N}, \mathbb{Z} Ensemble des entiers naturels / relatifs ;
- \mathbb{R}, \mathbb{C} Ensemble des nombres réels / complexes ;
- \mathbb{D} Disque unité ouvert de \mathbb{C} , *i.e.* $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$;
- \mathbb{T} Tore de \mathbb{C} , *i.e.* $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$;
- $A(\mathbb{D})$ Algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, analytiques sur \mathbb{D} ;
- \mathcal{H} Désigne un espace de Hilbert complexe ;
- $\text{Vect}(\mathcal{F})$ Sous-espace vectoriel engendré par une famille \mathcal{F} de vecteurs ;
- $\mathcal{B}(x, r[$ Boule ouverte de centre x et de rayon r ;
- $\mathcal{B}(x, r]$ Boule fermée de centre x et de rayon r ;
- $\partial\mathcal{B}(x, r)$ Sphère de centre x et de rayon r .

► Principaux objets associés d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

- $\langle x|y \rangle$ Désigne le produit scalaire des vecteurs x et y ;
- $[x|y]$ Partie réelle de $\langle x|y \rangle$;
- $\|\cdot\|$ Désigne, sans distinction, la norme $\|x\|$ d'un vecteur x de \mathcal{H} ou la norme $\|T\|$ d'un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- $\sigma(T)$ Désigne le spectre de T ;
- $r(T)$ Désigne le rayon spectral de T ;
- $y_{T,x,\varepsilon}$ Désigne le vecteur extrémal associé à un triplet (T, x, ε) , défini dans la section 2.2.1 ;
- $c_{T,x,\varepsilon}$ Désigne le coefficient de colinéarité (cf. section 2.2.1).

- Opérateurs agissant sur un espace de Hilbert :
- $P_{\mathcal{K}}$ Désigne, lorsque \mathcal{K} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} , la projection orthogonale de \mathcal{H} sur \mathcal{K} ;
- $a \otimes b$ Désigne, lorsque $a, b \in \mathcal{H}$, le produit tensoriel de a par b , défini par $\forall x \in \mathcal{H}, a \otimes b(x) = \langle b|x \rangle a$;
- S_T Désigne, lorsque $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la limite de la suite $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- S_n Désigne le shift sur un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (cf. p. 28) ;
- S_u Désigne le shift sur $E_u = H^2 \ominus uH^2$ où H^2 est l'espace de Hardy classique et u une fonction intérieure (cf. p. 31) ;
- $\Delta(T)$ Transformation de Aluthge d'un opérateur T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (p.12) ;
- $\Delta_\lambda(T)$ Transformation de Aluthge généralisée d'un opérateur T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (p.12).
- Classes d'opérateurs :
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{H} ;
- \mathcal{C}_0 Ensemble des contractions de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, *i.e.* des opérateurs vérifiant $\|T\| \leq 1$;
- $\mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$ Ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ polynomialement bornés et absolument continus ;
- $\mathcal{C}_{0,}$ Ensemble des opérateurs T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant $S_T = 0$, également caractérisé par : $\forall x \in \mathcal{H}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x\| = 0$;
- $\mathcal{C}_{1,}$ Ensemble des opérateurs T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dont l'application S_T est injective.
- Polynômes et fonctions associés à un opérateur :
- X Désigne l'application identité sur \mathbb{C} ;
- m_T Désigne, lorsqu'il est défini et notamment si \mathcal{H} est de dimension finie, le polynôme minimal associé à l'opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- \tilde{m}_T Désigne, lorsque m_T est défini et possède 0 comme racine d'ordre $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $\frac{m_T}{X^n}$;
- ω_T Désigne la fonction minimale associée à un opérateur T de $\mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$;
- $\tilde{\omega}_T$ Est défini, si ω_T existe, par la factorisation $\omega_T : z \mapsto z^n \tilde{\omega}_T$ avec $\tilde{\omega}_T(0) \neq 0$;

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs, c'est-à-dire l'étude des endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé. Ce dernier sera noté \mathcal{H} dans toute notre étude ; il sera supposé muni d'une structure d'espace de Hilbert complexe et séparable, sauf dans quelques remarques très précises où l'hypothèse concernant \mathcal{H} sera alors explicitée. Et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désignera l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis sur \mathcal{H} .

La plupart des recherches actuelles concerne l'étude de certaines classes d'opérateurs ; on peut citer en particulier les classes d'opérateurs normaux (ce sont les opérateurs $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $T^*T = TT^*$), quasi-normaux ($T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $T^*TT = TT^*T$), sous-normaux (opérateurs possédant une extension normale), hypo-normaux (opérateurs T tels que $T^*T \geq TT^*$) et paranormaux ($T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$). La structure des opérateurs normaux est bien connue ; de nombreuses propriétés pour les opérateurs quasi-normaux (cf. [15]) et sous-normaux (cf. [16]) ont déjà été obtenues ; par contre la classe des opérateurs hypo-normaux reste encore difficile à appréhender.

Son étude a connu un essor particulier depuis une vingtaine d'années, suite aux travaux d'Ariyadasa Aluthge. En effet, celui-ci a introduit, dans son travail [1] sur les opérateurs hyponormaux en 1990, une nouvelle transformation agissant sur cet espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: on l'appelle

transformation de Aluthge. Elle possède des propriétés remarquables et, de fait, elle est étudiée et utilisée dans de nombreux articles. L'objectif de mon travail est d'étudier cet objet sous divers angles d'observation.

On définit la transformation de Aluthge d'un opérateur T à partir de sa décomposition polaire (cf. 2.1) : si $T = U|T|$ est la décomposition polaire d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on appelle *transformation de Aluthge* de T l'opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, noté $\Delta(T)$, défini par

$$\Delta(T) = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}.$$

La transformation Δ ainsi définie est donc une application de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On pourra trouver dans le chapitre 2 quelques préliminaires, utiles pour la lecture de la thèse, concernant la décomposition polaire et la transformation de Aluthge.

Plus généralement, on peut définir de manière analogue la transformation de Aluthge généralisée d'un opérateur T , de décomposition polaire $T = U|T|$. Pour tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$, on appelle λ -transformation de Aluthge de T l'opérateur

$$\Delta_\lambda(T) = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}.$$

Cette généralisation recouvre, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, la définition de la transformation de Aluthge et, pour $\lambda = 1$, la définition de la transformation de Duggal (cf. [32]).

Les propriétés spectrales de la transformation de Aluthge montrent que celle-ci est un outil pertinent dans l'étude de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On peut signaler dans une première approche le résultat bien connu suivant, dont on trouvera une démonstration dans [43] : le spectre est un invariant de la transformation de Aluthge, et c'est même un invariant de la transformation de Aluthge généralisée Δ_λ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Trois auteurs, I.B. Jung, E. Ko et C. Pearcy, ont étudié des questions connexes à ce résultat. Ils ont notamment précisé l'égalité spectrale (cf. [39]) en prouvant que les spectres d'approximation σ_{ap} , ponctuel σ_p , essentiel σ_e , essentiel gauche σ_{le} , et essentiel droit σ_{re} sont tous

des invariants de la transformation de Aluthge Δ . Plus précisément, on a par exemple, pour tout opérateur T ,

$$\sigma_{ap}(\Delta(T)) = \sigma_{ap}(T) \quad \text{et} \quad \sigma_{ap}(\Delta(T)^* \setminus \{0\}) = \sigma_{ap}(T^* \setminus \{0\}).$$

Et ces deux égalités sont encore valables pour chacun des spectres définis ci-dessus.

Dans [41], ces trois mêmes auteurs ont également montré que les sous-espaces propres associés aux éventuelles valeurs propres de T et de $\Delta(T)$ ont même dimension. Nous verrons dans cette thèse un résultat analogue pour les sous-espaces caractéristiques.

Ces trois mêmes auteurs se sont intéressés également à la transformation de Aluthge en tant que fonction de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dans lui-même. Ils ont notamment prouvé que Δ est continue en norme en tout point d'image dense, et continue en tout point pour la topologie faible (cf. [8] pour une extension du résultat à la transformation généralisée). Avec l'aide de C. Foias, ils ont montré (cf. [32]) qu'elle est complètement contractive. Plus précisément, pour tout opérateur T , et toute fonction f holomorphe sur un voisinage de $\sigma(T)$, on a

$$\|f(\Delta(T))\| \leq \|f(T)\|.$$

Cette inégalité est également valable si l'on remplace la transformation de Aluthge par son homologue généralisée Δ_λ , selon [8]. T. Ando a précisé ce résultat en montrant (cf [3]) que l'inégalité $\|\Delta(T) - \alpha I\| \leq \|T - \alpha I\|$ est satisfaite pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. G. Ji, Y. Pang et Z. Li ont également étudié la fonction Δ au travers de son image. Ils ont notamment prouvé (cf. [38]) que celle-ci est dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour la topologie forte, et fermée ou dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour la topologie de la norme. D'autres inégalités opératoriennes faisant intervenir la transformation de Aluthge ont été établies : citons par exemple [21] et [17].

Le comportement de la transformation de Aluthge vis-à-vis de l'image numérique a beaucoup été étudié. Rappelons que l'image numérique $W(T)$ d'un opérateur T est l'ensemble convexe (théorème de Toeplitz-Hausdorff, [35]) défini par

$$W(T) = \{\langle Tx|x \rangle \mid x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}.$$

T. Yamazaki a prouvé (cf. [59]) que l'égalité $\overline{W(\Delta(T))} \subset \overline{W(T)}$ est vérifiée pour tout opérateur T possédant une décomposition polaire $T = U|T|$ telle que U est unitaire. Par la suite, P.Y. Wu a obtenu le résultat dans le cas général (cf. [57]). Il faut attendre C. Foias, I.B. Jung, E. Ko et C. Pearcy pour obtenir le résultat général suivant (cf. [32])

$$\overline{W(f(\Delta(T)))} \subset \overline{W(f(T))}$$

pour toute fonction f holomorphe au voisinage de $\sigma(T)$. Ce résultat a été étendu pour l'image numérique généralisée par M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo et T. Yamazaki dans [48] et [36], pour l'image numérique essentielle par G. Ji, Z. Li et N. Liu dans [37], et précisé pour le cas des matrices carrées de taille 2 par D.E.V. Rose et I.M. Spitkovsky dans [49].

Une autre caractérisation remarquable, faisant intervenir la transformation de Aluthge, concerne les matrices convexoïdes. On dit qu'une matrice est convexoïde si son image numérique est l'enveloppe convexe de son spectre. Une matrice normale est convexoïde, mais la réciproque est fautive. T. Ando a établi (cf [3]) le résultat suivant : une matrice T est convexoïde si et seulement si $W(T) = W(\Delta(T))$.

On rappelle que le rayon numérique $w(T)$ d'un opérateur T est défini comme la borne supérieure des valeurs absolues des éléments de $W(T)$, c'est-à-dire

$$w(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in W(T)\}.$$

On peut déjà remarquer que l'inclusion concernant $\overline{W(\Delta(T))}$ et $\overline{W(T)}$ nous permet d'écrire $w(\Delta(T)) \leq w(T)$. Par ailleurs, on sait depuis longtemps que $\max(r(T), \frac{1}{2}\|T\|) \leq w(T) \leq \|T\|$. T. Yamazaki a obtenu une inégalité plus fine à l'aide de la transformation de Aluthge (cf. [60]) :

$$w(T) \leq \frac{1}{2} (\|T\| + w(\Delta(T))).$$

Le comportement de la transformation de Aluthge vis-à-vis de certaines classes d'opérateurs, autres que les classes définies au tout début

de l'introduction, est également un domaine étudié dans de nombreux articles.

J. Antezana, P. Massey et D. Stojanoff ont prouvé dans [8] que la classe des idéaux de Schatten est stable par la transformation généralisée Δ_λ . Ils ont également donné des estimations sur la norme de la transformation de Aluthge d'un opérateur T appartenant à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt dans [8]. On peut également citer la caractérisation des opérateurs dont la transformée généralisée est une contraction, obtenue dans [20].

L'objet du chapitre 3 de cette thèse est d'étudier le comportement de la transformation de Aluthge vis-à-vis des classes des isométries, des co-isométries, et du comportement asymptotique des itérés d'un opérateur.

Les points fixes de la transformation de Aluthge sont les opérateurs quasi-normaux. En effet, un opérateur $T = U|T|$ vérifie $\Delta(T) = T$ si, et seulement si, $|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} = T = U|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}$, ce qui équivaut à $|T|^{\frac{1}{2}}U = U|T|^{\frac{1}{2}}$ puisque l'espace initial de U est $\overline{\text{Im } |T|} = \overline{\text{Im } |T|^{\frac{1}{2}}}$. Il est alors aisé de voir que T est un point fixe de Δ si, et seulement si, $|T|$ et U commutent, c'est-à-dire si, et seulement si, T est quasi-normal. Lorsque l'espace \mathcal{H} sur lequel agit l'opérateur T est de dimension finie, l'ensemble des points fixes est restreint à l'ensemble des opérateurs normaux.

On définit également, pour tout opérateur T de décomposition polaire $T = U|T|$, la suite $(\Delta^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $\Delta^0(T) = T$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\Delta^{n+1}(T) = \Delta(\Delta^n(T)).$$

Cette suite est appelée la suite des itérés de la transformation de Aluthge. On trouve aussi la dénomination suite de Aluthge. Nous utiliserons indifféremment les deux titres dans cette thèse.

Cette suite est beaucoup étudiée de par la richesse des résultats obtenus et des conjectures avancées, que ce soit pour un espace \mathcal{H} de dimension finie ou infinie. En effet, d'une part des propriétés marquantes ont été établies ; et d'autre part, cette suite semble avoir un effet de

régularisation de l'opérateur par rapport à certaines caractéristiques, comme les sous-espaces invariants.

Un résultat qui dévoile l'intérêt que peut avoir cette transformation est celui de T. Ando, qui a obtenu (cf [3]) l'écriture de l'enveloppe convexe du spectre de T comme l'intersection de l'adhérence des images numériques de la suite des itérés de la transformation de Aluthge :

$$\text{conv}(\sigma(T)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{W(\Delta^n(T))}.$$

Dans l'hypothèse où \mathcal{H} est de dimension finie, T. Yamazaki a démontré (cf. [58]) la formule suivante,

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta^n(T)\|.$$

Elle permet d'obtenir le calcul du rayon spectral d'un opérateur T à partir de la suite des normes des itérés de la transformation de Aluthge. T.Y. Tam a étendu le résultat (cf. [54]) pour la transformation généralisée de Aluthge, en supposant T inversible.

La question de la convergence a été ces dernières années un point de recherche particulièrement productif. Tout d'abord, T. Ando et T. Yamazaki ont étudié le cas particulier des matrices carrées de taille 2. Ils ont montré que la suite des itérés de la transformation de Aluthge dans ce cas converge vers un opérateur normal. Ce résultat a été précisé dans [53] en effectuant des hypothèses plus précises sur la matrice.

Dans le cas plus général des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$, des méthodes issues de la théorie des groupes ont permis à J. Antezana, E. Pujals et D. Stojanoff d'obtenir de nouveaux résultats de convergence. Ils ont notamment montré que la suite de Aluthge associée à une matrice diagonalisable converge ([9], [10]), puis par des techniques issues de l'étude des variétés Riemanniennes, ils ont obtenu le résultat dans le cas général des matrices carrées ([11]).

Dans le prolongement de la question de la convergence de la suite des itérés de la transformation de Aluthge en dimension finie, D. E. Rose et I. M. Spitkovsky ont étudié la stabilisation de ladite suite (cf.

[49]). Ils ont notamment prouvé que si celle-ci était constante à partir d'un certain rang, alors cette stabilisation se produit après au plus $n-1$ pas.

En dimension infinie, la situation est loin d'être claire. Il a été conjecturé par I. B. Jung, E. Ko et C. Pearcy ([39]) que la suite devait converger vers un opérateur quasi-normal R (c'est-à-dire tel que l'isométrie de la décomposition polaire de R commute avec le module de R). Ce résultat est mis en défaut par M. Chō, I. B. Jung et W. Y. Lee dans leur article [27] : les auteurs ont en effet réussi à exhiber deux exemples d'opérateurs, de type shift à poids bilatéral (c'est-à-dire défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$), pour lesquelles la suite des itérés de la transformation de Aluthge ne converge pas vers un opérateur quasi-normal pour la topologie faible ou la topologie issue de la norme. La conjecture de la convergence a été, de fait, déplacée à la classe des opérateurs hyponormaux (ou plus généralement p -hyponormaux), vis-à-vis de la topologie forte.

Cette transformation se révèle aussi très intéressante en ce qui concerne le problème du sous-espace invariant. D'une part parce que la classe des opérateurs normaux tient une place particulière tant du point de vue de la transformation de Aluthge (comme nous l'avons évoqué précédemment) que du point de vue du problème du sous-espace invariant (on peut montrer à l'aide du calcul fonctionnel introduit par Von Neumann qu'un opérateur normal possède de nombreux sous-espaces invariants). D'autre part parce qu'on sait, grâce à [39], qu'un opérateur possède un sous-espace invariant non trivial si, et seulement si, sa transformation de Aluthge en possède un. Par contre, leurs treillis de sous-espaces invariants peuvent ne pas être isomorphes.

Les mêmes résultats tiennent encore pour l'existence d'un sous-espace hyper-invariant. En introduisant une toute nouvelle méthode, Per Enflo (cf. [30]), aidé par la suite de Shamim Ansari (cf. [7]), a pu obtenir de nouveaux résultats sur ce problème du sous-espace hyper-invariant.

Le principe initial de cette méthode découle de l'envie, pour un opérateur T à image dense, de pallier au défaut de surjectivité de T . Pour ce faire, les deux auteurs considèrent un vecteur particulier x et

sélectionnent, parmi les vecteurs appartenant à une boule centrée en x , un unique vecteur qu'ils qualifient d'extrémal. Une définition plus précise est proposée dans les préliminaires.

Cette méthode s'est en fait révélée particulièrement riche à propos du problème du sous-espace hyper-invariant. Pour certaines classes d'opérateurs, en observant ces vecteurs extrémaux associés aux puissances de l'opérateur, S. Ansari et P. Enflo ont réussi à fabriquer un sous-espace hyper-invariant pour l'opérateur. Suite à ces innovations, C. Foïas, I.B. Jung, E. Ko et C. Pearcy ont approfondi ce dernier aspect de la méthode ([40], [33], [34]). Sur le même sujet, on pourra également consulter les travaux de I. Chalendar, A. Flattot et J. R. Partington ([25], [26], [24]), de G. Androulakis ([6]) ou encore de V. G. Troitsky ([55]).

Après une brève présentation de la méthode d'Ansari-Enflo et de quelques applications dans le chapitre 2, nous reviendrons, dans le chapitre 4, sur ces vecteurs extrémaux.

L'angle d'étude qui sera alors choisi est beaucoup plus centré sur les vecteurs extrémaux eux-mêmes. Une clarification de la situation concernant ces vecteurs devrait en effet permettre de mieux les appréhender, en particulier dans les applications précédemment citées. Dans un premier temps, nous préciserons la localisation et fournirons une nouvelle caractérisation permettant le calcul pratique de ces vecteurs. Et une deuxième partie sera l'occasion d'une étude de la régularité des vecteurs extrémaux au regard des différents paramètres.

Les propriétés de la transformation de Aluthge, et les progrès apportés par la méthode d'Ansari-Enflo sur le problème du sous-espace hyper-invariant, nous ont conduit à relier les deux sujets. L'objet du chapitre 5 sera une étude comparative des vecteurs extrémaux associés à T et à $\Delta(T)$, puis plus généralement ceux associés à la suite des itérés de la transformation de Aluthge. Nous étudierons à ce titre les exemples fondamentaux d'opérateurs que sont les shifts à poids.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Transformation de Aluthge

2.1.1 Décomposition polaire

Effectuons tout d'abord un bref rappel sur la décomposition polaire d'un opérateur. Lorsque T est un opérateur linéaire borné sur \mathcal{H} , T^*T est un opérateur positif donc il possède une unique racine carrée positive, que l'on note $|T|$. Cet opérateur est appelé *module* de T . On définit alors la décomposition polaire de T de la manière suivante :

Lemme 2.1. *Pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, il existe une isométrie partielle U , d'espace initial $(\ker T)^\perp = \overline{\text{Im } |T|}$ et d'espace final $\overline{\text{Im } T}$, telle que*

$$T = U|T|.$$

Cette décomposition est appelée décomposition polaire de T .

De plus, si T s'écrit $T = VP$ où P est un opérateur positif et V une isométrie partielle vérifiant $\ker V = \ker P$, alors $P = |T|$ et $V = U$.

Et on note également que $\overline{\text{Im } |T|^{\frac{1}{2}}} = \overline{\text{Im } |T|} = \overline{\text{Im } T^}$.*

On renvoie à [28] pour une démonstration de ce lemme.

2.1.2 Deux égalités d'entrelacement

On peut observer deux égalités démontrées dans [32], concernant la transformation de Aluthge : si T est un opérateur agissant sur \mathcal{H} , et si f est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\sigma(T)$, alors on a d'une part

$$f(\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}f(T),$$

et d'autre part

$$U|T|^{\frac{1}{2}}f(\Delta(T)) = f(T)U|T|^{\frac{1}{2}}.$$

On peut obtenir des égalités du même type concernant la transformation de Aluthge généralisée, définie en introduction.

Lemme 2.2. *Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors on a les égalités*

$$f(\Delta(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda f(T)$$

et

$$U|T|^{1-\lambda}f(\Delta(T)) = f(T)U|T|^{1-\lambda}.$$

Démonstration. On a $\Delta_\lambda(T)|T|^\lambda = |T|^\lambda T$. On en déduit que pour tout entier naturel k , $(\Delta_\lambda(T))^k|T|^\lambda = |T|^\lambda T^k$, donc pour tout polynôme P à coefficients complexes, $P(\Delta_\lambda(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda P(T)$. Si, de plus, le polynôme ne s'annule pas sur $\sigma(T)$, alors $P(T)$ et $P(\Delta_\lambda(T))$ sont inversibles et $P(\Delta_\lambda(T))^{-1}|T|^\lambda = |T|^\lambda P(T)^{-1}$. On en déduit que l'égalité $F(\Delta_\lambda(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda F(T)$ est valable pour toute fraction rationnelle F dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\sigma(T)$. Le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford (cf. [28]) permet de conclure que pour toute fonction f holomorphe sur $\sigma(T)$,

$$f(\Delta(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda f(T).$$

On montre $U|T|^{1-\lambda}f(\Delta(T)) = f(T)U|T|^{1-\lambda}$ de manière analogue. \square

2.2 Présentation de la méthode d'Ansari-Enflo

Le but de ce paragraphe est de présenter brièvement une méthode récemment introduite par S. Ansari et P. Enflo dans [7]. Cette méthode consiste à isoler certains vecteurs dans un premier temps, dits extrémaux (ou encore minimaux), puis à utiliser leur particularité pour l'existence de sous-espaces hyper-invariants pour certaines classes d'opérateurs.

Nous allons, dans la troisième partie de cette thèse, développer plus précisément certaines propriétés de ces vecteurs extrémaux, notamment à propos de leur localisation et de leur régularité. Pour plus de clarté, nous présentons ici la première partie de la méthode, en nous appuyant sur [7] et [56].

2.2.1 Définition et notations

Étant donné un opérateur borné T d'un espace de Hilbert, dont l'image est dense mais qui n'est cependant pas surjectif, il est très naturel de chercher à mesurer le défaut de surjectivité. C'est cette idée qui donne le point de départ de la construction des vecteurs extrémaux.

Si on considère un vecteur x , on sait qu'une boule centrée en ce vecteur et de rayon arbitrairement petit contiendra toujours des vecteurs de l'image de T . On va alors isoler un vecteur particulier, que l'on appellera vecteur minimal. Précisons justement cette unicité par le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dont l'image est dense. Soient un vecteur non nul x de \mathcal{H} , et un réel $0 < \varepsilon < \|x\|$. Alors il existe un unique vecteur y de norme minimale vérifiant*

$$\|Ty - x\| \leq \varepsilon.$$

Le caractère minimal de la norme de y s'exprime grâce à l'égalité

$$\|y\| = \inf \{ \|z\|; \|Tz - x\| \leq \varepsilon \}.$$

Démonstration. On pose $\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H}; \|Tz - x\| \leq \varepsilon\}$. C'est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de \mathcal{H} . En effet, le fait que T soit à image dense assure que l'ensemble est non-vide. Par ailleurs on peut remarquer que

$$T^{-1}(\mathcal{B}(x, \varepsilon)) = \{z \in \mathcal{H}; \|Tz - x\| \leq \varepsilon\} = \mathcal{F}$$

est donc aussi un ensemble fermé, puisque T est une application continue. Enfin, si z_1 et z_2 sont deux vecteurs de \mathcal{F} et si $t \in [0; 1]$, alors

$$\begin{aligned} \|T(tz_1 + (1-t)z_2) - x\| &= \|t(Tz_1 - x) + (1-t)(Tz_2 - x)\| \\ &\leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que \mathcal{F} est convexe. Ainsi, le théorème de projection sur un sous-ensemble convexe fermé non-vide dans un espace de Hilbert assure l'existence et l'unicité de y , clairement non nul. \square

Définition 2.4. *Un tel vecteur y est appelé vecteur extrémal (ou encore vecteur minimal) associé à (T, x, ε) .*

Notations 2.5. *Le vecteur extrémal associé à un opérateur T à image dense, un vecteur $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et un réel $\varepsilon \in]0; \|x\|$ est noté $y_{T,x,\varepsilon}$. Dans la mesure où cela ne prête pas à confusion et selon le caractère que l'on souhaitera étudier, on pourra le noter $y_{x,\varepsilon}$ ou même plus simplement y_x ou y_ε .*

Il va nous être très utile par la suite de préciser le lieu de minimisation. Commençons par la remarque suivante.

Remarque 2.6. *La minimisation ne se fait que sur la sphère de centre x et de rayon ε . Autrement dit, étant donné un triplet (T, x, ε) vérifiant les conditions du lemme 2.3, le vecteur minimal $y_{T,x,\varepsilon}$ vérifie en fait l'égalité*

$$\|Ty_{T,x,\varepsilon} - x\| = \varepsilon.$$

Démonstration. Par l'absurde, si $\|Ty_{x,\varepsilon} - x\| < \varepsilon$, alors d'une part on peut poser $\alpha = \varepsilon - \|Ty_{x,\varepsilon} - x\| > 0$, et d'autre part il existe un

réel $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}(y_{x,\varepsilon}, \delta] \subset \mathcal{F}$. En effet, tout vecteur z de $\mathcal{B}(y_{x,\varepsilon}, \delta]$ vérifie : $\|Tz - x\| \leq \|T(z - y_{x,\varepsilon})\| + \|Ty_{x,\varepsilon} - x\| \leq \|T\|\delta + \varepsilon - \alpha \leq \varepsilon$ pour un choix licite de $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \frac{\alpha}{\|T\|}$. Par suite, $(1 - \frac{\delta}{2})y_{x,\varepsilon}$ a une norme plus petite que $y_{x,\varepsilon}$ ce qui contredit la minimalité de $y_{x,\varepsilon}$. \square

Cette étude se poursuivra dans le chapitre 4 dont l'objectif est, d'une part, de préciser la localisation des vecteurs extrémaux, et d'autre part, d'étudier le comportement des vecteurs minimaux lorsque l'on fait varier les paramètres x et ε .

2.2.2 Quelques applications au problème du sous-espace hyper-invariant

Nous présentons brièvement dans cette section quelques applications de la méthode présentée au paragraphe précédent. S. Ansari et P. Enflo l'ont introduite dans le but de fournir de nouveaux résultats sur le problème du sous-espace hyper-invariant. Ils ont obtenu des résultats originaux dans ce sens et par la suite de nombreux auteurs ont repris et étendu ces idées.

Rappelons la définition de sous-espace hyper-invariant.

Définition 2.7. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- On appelle commutant de T l'ensemble noté $\{T\}'$ des opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui commutent avec T .
- Un sous-espace vectoriel \mathcal{F} est dit hyper-invariant pour T lorsque tout opérateur de $\{T\}'$ stabilise \mathcal{F} . On note $H\text{Lat}(T)$ l'ensemble des sous-espaces hyper-invariants pour T .

Le point de départ de cette étude du problème du sous-espace invariant est la construction d'une suite un peu mystérieuse, introduite dans [7] et obtenue à l'aide des vecteurs extrémaux associés aux puissances successives d'un opérateur quasinilpotent.

Lemme 2.8. Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, à image dense, et quasinilpotent. Soient x un vecteur non nul de \mathcal{H} et $0 < \varepsilon < \|x\|$. Soit enfin

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des vecteurs minimaux associés à (T^n, x, ε) . Alors on peut en extraire une sous-suite $(y_{n_k})_k$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|y_{n_k}\|}{\|y_{n_k+1}\|} = 0.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que 0 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $(\frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|})$. Comme pour tout entier n , $\frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|} > 0$, cela revient à supposer qu'il existe un réel $t > 0$ minorant cette suite, et on peut même supposer que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|} = t.$$

Alors on écrit $\|y_0\| \geq t\|y_1\| \geq \dots \geq t^n\|y_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, par définition des vecteurs extrémaux, $\varepsilon = \|y_0 - x\| = \|T^n y_n - x\|$. Par suite, la minimalité de $\|y_0\|$ conduit à $\|T^n y_n\| \geq \|y_0\|$, donc

$$t^n\|y_n\| \leq \|y_0\| \leq \|T^n y_n\| \leq \|T^n\| \cdot \|y_n\|$$

et $\|T^n\| \geq t^n$, d'où $r(T) \geq t > 0$ ce qui contredit le fait que le spectre de l'opérateur quasinilpotent T soit restreint à 0. \square

On peut alors prouver le théorème séquentiel suivant.

Théorème 2.9. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur quasinilpotent non-nul. Soit aussi B un opérateur arbitraire dans le commutant $\{T\}'$ de T , tel que $BT \neq 0$. Alors il existe deux suites $(s_k)_k$ et $(t_k)_k$ de vecteurs de \mathcal{H} , qui convergent respectivement pour la topologie faible vers deux vecteurs non-nuls s et t , avec $Bs \neq 0$, et une suite $(\beta_k)_k$ de nombres positifs convergeant vers 0, telles que, pour toute suite $(C_k)_k$ d'éléments de la boule unité de $\{T\}'$, on ait*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\langle C_k s_k | t_k \rangle| \leq \beta_k.$$

Ce résultat permet de retrouver le théorème suivant, dû à V. Lomonosov (cf. [45]) et démontré à l'aide de techniques complètement différentes et plus lourdes que celle que nous présentons. La version

que l'on propose est inspirée de [40], papier dans lequel les auteurs ont eu l'idée fructueuse de mêler les techniques d'Enflo sur les vecteurs extrémaux, et les méthodes de Lomonosov sur les opérateurs compacts.

Théorème 2.10. *On considère un opérateur T quasinilpotent non nul. On suppose que $\{T\}'$ possède la propriété de Pearcy-Salinas, c'est-à-dire qu'il existe :*

- *une suite $(D_h)_h$, d'opérateurs de $\{T\}'$ qui converge faiblement vers un opérateur non nul C (commutant avec T) ;*
- *une suite $(K_h)_h$ d'opérateurs compacts pour laquelle la limite de $\|D_h - K_h\|$ soit nulle lorsque h tend vers $+\infty$.*

Alors l'opérateur T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial, ce qui s'écrit aussi

$$\text{Hlat}(T) \neq \{\{0\}, \mathcal{H}\}.$$

En particulier, on obtient facilement un résultat bien connu, toujours dû à V. Lomonosov (cf. [44]) :

Corollaire 2.11. *Tout opérateur compact non nul admet un sous-espace hyper-invariant non trivial.*

Donnons pour finir la conséquence suivante, qui établit une réduction du problème du sous-espace hyper-invariant pour les opérateurs quasinilpotents. On renvoie à [33] et [34] pour une preuve.

Théorème 2.12. *Pour prouver que tout opérateur quasinilpotent non nul admet un sous-espace hyper-invariant non trivial, il suffit de le faire pour toute quasi-affinité quasinilpotente, vérifiant la propriété suivante :*

*$\sqrt{T^*T}$ possède un sous-espace réduisant de dimension infinie \mathcal{E} , tel que $T^*T|_{\mathcal{E}}$ soit compact.*

Chapitre 3

Transformation de Aluthge et classes d'opérateurs

Nous avons rappelé en introduction que certains opérateurs, tels que les opérateurs normaux et quasi-normaux, avaient un comportement singulier sous l'influence de la transformation de Aluthge. Toujours dans cet esprit, et afin de mieux comprendre et appréhender cette transformation, nous allons, à travers ce chapitre, observer le comportement de différentes classes d'opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous l'action de la transformation de Aluthge.

Ces travaux sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier, et ont conduit, pour une large part, à la publication de l'article [23].

Dans une première section, nous étudierons la transformée de Aluthge d'une isométrie partielle. On développera ensuite la stabilité du polynôme minimal, de l'ascende et de la descente, plus généralement de la suite des itérés des noyaux et des images d'un opérateur, sous l'action de cette transformation. Enfin, on terminera par l'analyse de la stabilité des classes $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ et $\mathcal{C}_{1,\cdot}$.

Dans tout ce chapitre, pour tout sous-espace vectoriel \mathcal{K} de \mathcal{H} , on désigne par $P_{\mathcal{K}}$ la projection orthogonale sur \mathcal{K} .

3.1 La classe des isométries partielles

3.1.1 Transformée de Aluthge d'une isométrie partielle

Proposition 3.1. *Soit T une isométrie partielle de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors sa transformée de Aluthge est donnée par l'égalité*

$$\Delta(T) = T^*T^2.$$

Démonstration. On constate que $|T|^2 = T^*T = P_{\text{Im}T^*}$ puisque, comme T est une isométrie partielle, $\text{Im}T^*$ est fermée. Donc $|T|^{\frac{1}{2}} = P_{\text{Im}T^*}$. Soit $x \in \mathcal{H}$. Décomposons le vecteur $x = x_1 + x_2$ en accord avec la somme directe $\ker T \oplus \text{Im}T^*$. Selon le lemme 2.1, on obtient successivement $Tx = Tx_2 = TP_{\text{Im}T^*}x$. Par conséquent, il vient $U_{|\text{Im}T^*} = T_{|\text{Im}T^*}$ et $\ker U = \ker T$. Finalement, $U = T$, et

$$\Delta(T) = P_{\text{Im}T^*}TP_{\text{Im}T^*} = P_{\text{Im}T^*}T = T^*T^2,$$

puisque $\text{Im}T^* = (\ker T)^\perp$. □

Exemple 3.2. On désigne par S_n l'opérateur shift sur l'espace \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}^*$), défini sur la base canonique $(e_1; \dots; e_n)$ de \mathbb{C}^n par

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, S_n(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad S_n(e_n) = 0.$$

S_n est une isométrie partielle dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^n est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'image de S_n^* est isomorphe à \mathbb{C}^{n-1} , et de ce fait $\Delta(S_n)$ est unitairement équivalent à $S_{n-1} \oplus 0_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. En particulier, pour tout entier naturel non nul k :

- si $k \leq n - 2$, le polynôme minimal de $\Delta^k(S_n)$ est X^{n-k} ;
- si $k \geq n - 1$, le polynôme minimal de $\Delta^k(S_n)$ est le polynôme nul.

Démonstration. Le polynôme minimal associé à S_n est clairement X^{n-1} . On désigne par $(e_k)_{k \in [0; n-1]}$ la base canonique de \mathbb{C}^n . On remarque que $S_n^* S_n = P_F$ où l'on a posé $F = \text{Vect}(e_k; k \in [0; n-2])$. Cela permet d'écrire la matrice par blocs de $\Delta(S_n)$ (par rapport aux sous-espaces vectoriels F et $\text{Vect}(e_{n-1})$, supplémentaires dans \mathbb{C}^n) :

$$\Delta(S_n) = P_F S_n = \begin{pmatrix} S_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal associé à $\Delta(S_n)$ correspond au polynôme minimal associé à S_{n-1} c'est-à-dire X^{n-2} .

Par récurrence immédiate, on constate qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{C}^n tels que la matrice par blocs relativement à ces deux sous-espaces est

$$\begin{pmatrix} S_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

pour tout $k \in [0; n-2]$, et elle est identiquement nulle si $k \geq n-1$. D'où le résultat. \square

3.1.2 Un cas particulier : des isométries partielles sur les espaces de Hardy

Nous considérons dans ce paragraphe le shift sur un autre espace de Hilbert : l'espace de Hardy H^2 sur le tore \mathbb{T} . Pour clarifier les résultats que nous allons donner, nous commençons par une brève introduction de cet espace de Hardy ; les espaces H^p et particulièrement H^2 possèdent des propriétés remarquables, et nous renvoyons à [50] et [47] pour plus de détails.

Le disque unité ouvert de \mathbb{C} est noté classiquement \mathbb{D} , et le tore (c'est-à-dire l'ensemble des complexes de module 1) \mathbb{T} . La mesure m

désigne la mesure de Lebesgue normalisée ($m(\mathbb{T}) = 1$) sur \mathbb{T} . H^∞ désigne usuellement l'espace des fonctions holomorphes et bornées sur \mathbb{D} . L'espace H^2 est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} telles que

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dm(t) < \infty.$$

On peut adopter un autre point de vue, plus pratique, sur cet espace, grâce à la correspondance suivante. À chaque fonction f de H^∞ correspond une fonction f^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ définie presque partout sur \mathbb{T} par

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it});$$

cette nouvelle fonction f^* appartient à $L^2(\mathbb{T})$ et vérifie $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$. Alors l'espace précédent peut être vu (théorème de Katznelson) de la manière suivante :

$$H^2 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}); \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \widehat{f}(n) = 0 \right\},$$

où $\widehat{f}(n)$ désigne le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f , c'est-à-dire

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dm(t).$$

C'est la définition que l'on adopte dans ce paragraphe. Muni du produit scalaire usuel, défini par $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dm(t)$, H^2 est un espace de Hilbert; et nous noterons $\|\cdot\|$ la norme induite.

Définition 3.3. Une fonction u de H^∞ est dite intérieure lorsque

$$|u^*| = 1.$$

Donnons à présent les notations particulières relatives au shift sur H^2 que nous allons étudier.

Notations 3.4. Pour toute fonction intérieure u de H^2 :

- on pose $E_u = H^2 \ominus uH^2$;

- on définit le shift S_u sur E_u en posant

$$\forall f \in E_u, \quad S_u(f) = P_{E_u}(Xf)$$

où X désigne la fonction identité sur \mathbb{C} , définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $X(z) = z$;

- si u s'annule en 0, on notera u_1 la fonction associée à u définie par

$$u_1 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} \\ z \longmapsto \frac{u(z)}{z} .$$

Nous pouvons à présent caractériser parmi les shifts S_u associés aux différentes fonctions intérieures u , ceux qui sont des isométries partielles.

Proposition 3.5. *Pour toute fonction intérieure u de H^2 , on a l'équivalence*

$$S_u \text{ est une isométrie partielle} \iff 0 \text{ est un zéro de } u.$$

Démonstration. Soient u une fonction intérieure. Étant donnée une fonction $f \in E_u$, on obtient successivement les égalités

$$\begin{aligned} S_u S_u^*(f) &= P_{E_u} \left(X \frac{f(X) - f(0)}{X} \right) \\ &= P_{E_u} (f - f(0) \mathbf{1}) \\ &= f - f(0) P_{E_u} \mathbf{1} \\ &= f - \langle f | P_{E_u} \mathbf{1} \rangle P_{E_u} \mathbf{1} \\ &= (\text{Id}_{E_u} - P_{E_u} \mathbf{1} \otimes P_{E_u} \mathbf{1})(f) \end{aligned}$$

ce qui se traduit par l'égalité opératorielle $S_u S_u^* = \text{Id}_{E_u} - P_{E_u} \mathbf{1} \otimes P_{E_u} \mathbf{1}$. On l'écrit alors

$$0 \leq S_u S_u^* = \text{Id}_{E_u} - \|P_{E_u} \mathbf{1}\|^2 \frac{P_{E_u} \mathbf{1}}{\|P_{E_u} \mathbf{1}\|} \otimes \frac{P_{E_u} \mathbf{1}}{\|P_{E_u} \mathbf{1}\|}.$$

On constate donc que le spectre de $S_u S_u^*$ est égal à $\{1, 1 - \|P_{E_u} \mathbf{1}\|^2\}$. Finalement, $S_u S_u^*$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|P_{E_u} \mathbf{1}\| = 1$, soit $\mathbf{1} \in E_u$, c'est-à-dire si, et seulement si, la fonction $\mathbf{1}$ est orthogonale à l'espace uH^2 , ce qui équivaut à $u(0) = 0$. \square

Nous pouvons alors appliquer le résultat présenté au paragraphe précédent. La proposition suivante a pour objet de préciser le calcul afin de fournir des contre-exemples pour les sections à venir.

Proposition 3.6. *Soit u une fonction intérieure telle que $u(0) = 0$. Alors la transformée de Aluthge de S_u est*

$$\Delta(S_u) = S_u - S^*u \otimes S^{*2}u.$$

Démonstration. Comme $u(0) = 0$, selon la proposition précédente, S_u est une isométrie partielle. Par conséquent,

$$S_u S_u^* = P_{\text{Im } S_u} \quad \text{et} \quad S_u^* S_u = P_{\text{Im } S_u^*} = \text{Id} - P_{\ker S_u}.$$

Identifions $\ker(S_u)$. Soit $f \in E_u$ telle que $S_u(f) = 0 = P_{E_u}(zf)$. Si $z \in \mathbb{T}$, on a donc $zf(z) = u(z)g(z) = zu_1(z)g(z)$, ce qui entraîne que $f(z) = u_1(z)g(z)$. Or $f \in E_u$, donc

$$\forall h \in H^2, \quad 0 = \langle u_1 g | X u_1 h \rangle = \langle g | X h \rangle = \langle S^* g | h \rangle.$$

On en déduit que $S^*g = 0$, donc il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $g = \alpha$, soit $f = \alpha u_1$. Ainsi $\ker(S_u)$ est la droite vectorielle engendrée par $u_1 = S^*u$. De fait, $\forall f \in E_u$, $P_{\ker(S_u)}(f) = \langle S^*u | f \rangle S^*u$ soit $P_{\ker(S_u)} = S^*u \otimes S^*u$. Enfin $S_u^* S_u = \text{Id} - S^*u \otimes S^*u$ et, en vertu de la proposition 3.1, on a bien $\Delta(S_u) = S_u - S^*u \otimes S^{*2}u$. \square

3.2 Évolution du polynôme minimal sous l'action de la transformation de Aluthge

Le but de cette partie est de comparer le polynôme minimal d'un opérateur T , agissant sur un espace vectoriel de dimension finie \mathcal{H} , et celui de sa transformée de Aluthge $\Delta(T)$. On obtient, dans le cas général, un lien fort entre ces deux objets dans le premier paragraphe. On verra ensuite une généralisation dans le cas de la dimension infinie, avec la notion de fonction minimum.

3.2.1 Polynômes minimaux d'un opérateur et de sa transformée de Aluthge

La notation m_T désigne, pour tout endomorphisme T d'un espace vectoriel de dimension finie \mathcal{H} , le polynôme minimal de T ; de plus, lorsque 0 est racine d'ordre n de m_T , on note \tilde{m}_T le polynôme $\frac{m_T}{X^n}$ (avec la convention : si 0 n'est pas racine de T , on pose $\tilde{m}_T = m_T$).

Proposition 3.7. *Soient \mathcal{H} un espace vectoriel de dimension finie, et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. On écrit, avec les notations précédentes, $m_T = X^n \tilde{m}_T$ et $m_{\Delta(T)} = X^\nu \tilde{m}_{\Delta(T)}$ avec $(n, \nu) \in \mathbb{N}^2$.*

Alors $m_{\Delta(T)}$ divise m_T . Plus précisément, on obtient les relations

$$\nu \in \{n-1, n\} \quad \text{et} \quad \tilde{m}_T = \tilde{m}_{\Delta(T)}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $m_{\Delta(T)}$ divise m_T , et pour cela, vérifions que tout polynôme qui annule T , annule également $\Delta(T)$. Soit donc P un polynôme annulant T .

Selon le lemme 2.2, on a clairement $P(\Delta(T)) P_{\frac{1}{\text{Im}|T|^{\frac{1}{2}}}} = 0$.

Montrons que $P(\Delta(T)) = 0$ sur $(\overline{\text{Im}|T|^{\frac{1}{2}}})^\perp$. Or selon le lemme 2.1, $(\overline{\text{Im}|T|^{\frac{1}{2}}})^\perp = (\overline{\text{Im}T^*})^\perp = \ker T$. Soit donc x un vecteur de \mathcal{H} tel que $Tx = 0$: alors $\Delta(T)x = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$. Ainsi $P(\Delta(T))x = P(0)x$. Or $0 \in \sigma(T)$, donc $P(0) = 0$. De fait, P annule $\Delta(T)$. À ce stade, on sait que $\nu \leq n$, et $\tilde{m}_{\Delta(T)}$ divise \tilde{m}_T .

Grâce au lemme 2.2, on sait que

$$0 = m_{\Delta(T)}(\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}m_{\Delta(T)}(\Delta(T)) = |T|^{\frac{1}{2}}T^\nu \tilde{m}_{\Delta(T)}(\Delta(T)).$$

Par conséquent, on obtient les inclusions

$$\text{Im}(\tilde{m}_{\Delta(T)}(\Delta(T))) \subset \ker(|T|^{\frac{1}{2}}T^\nu) \subset \ker(T^{\nu+1}),$$

ce qui entraîne que $T^{\nu+1}\tilde{m}_{\Delta(T)}(\Delta(T)) = 0$. On en déduit que $X^n \tilde{m}_T$ divise $X^{\nu+1}\tilde{m}_{\Delta(T)}$. Or \tilde{m}_T et $X^{\nu+1}$ sont premiers entre eux, donc \tilde{m}_T divise $\tilde{m}_{\Delta(T)}$, et clairement $n \leq \nu + 1$. \square

Ce résultat est optimal, comme le montre l'exemple suivant, basé sur la section précédente.

Exemple 3.8. Nous reprenons ici les notations et les calculs faits à la section précédente; on se place ainsi dans l'espace de Hilbert H^2 , et on considère maintenant un produit de Blaschke fini b , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} b : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ z &\longmapsto \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - \omega_j}{1 - \overline{\omega_j}z} \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{T}$, et $\{\omega_i | 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{D}$. On conserve les notations E_b et b_1 . On suppose par ailleurs que 0 est un zéro de b , de sorte que S_b est une isométrie partielle, et, pour simplifier les calculs, on suppose que les autres zéros de b sont simples.

Étudions le polynôme minimal de $\Delta(S_b)$. On constate que

$$(\Delta(S_b))^2 = (S_b - S^*b \otimes S^{*2}b)(S_b - S^*b \otimes S^{*2}b) = S_b^2 - S^*b \otimes S^{*3}b,$$

et par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta(S_b))^n = S_b^2 - S^*b \otimes (S^*)^{n+1}b.$$

Par suite, on démontre que, pour tout polynôme P à coefficients complexes,

$$P(\Delta(S_b)) = P(S_b) - S^*b \otimes (P(S_b)^* - \overline{P(0)} \text{Id}_{E_b})b,$$

en écrivant P comme une somme de monômes. Ceci se généralise au cas où P est un élément de l'algèbre du disque unité $\mathbb{A}(\mathbb{D})$.

Par ailleurs, on sait que le numérateur de b est le polynôme minimal de S_b , donc $b(S_b) = 0$ et par conséquent $b(\Delta(S_b)) = 0$. Voyons si $b_1(\Delta(S_b)) = 0$: si $p = 1$, comme 0 est une valeur propre de S_b , c'est également le cas pour $\Delta(S_b)$, ainsi le monôme $X : z \mapsto z$ divise le polynôme minimal de $\Delta(S_b)$, ce qui entraîne $b_1(\Delta(S_b)) \neq 0$. Supposons donc $p \geq 2$: on a

$$b_1(\Delta(S_b)) = b_1(S_b) - S^*b \otimes b_1(S_b)^*S^*b.$$

L'opérateur $b_1(S_b)$ est de rang 1 car $S_b^* b_1(S_b^*) = 0$, donc on obtient l'inclusion $\text{Im } b_1(S_b^*) \subset \ker S_b^* = \mathbb{C}\mathbf{1}$. On peut écrire $b_1(S_b^*) = \mathbf{1} \otimes \varphi$, ou encore $b_1(S_b) = \varphi \otimes \mathbf{1}$. Explicitons φ :

- si $1 \leq j \leq n - p$, on a d'une part $b_1(S_b)^* e_{\alpha_j} = \overline{b_1(\alpha_j)} e_{\alpha_j} = 0$ et d'autre part, il vient $b_1(S_b)^* e_{\alpha_j} = \langle e_{\alpha_j} | \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} = \overline{\varphi(\alpha_j)} \mathbf{1}$. Donc

$$\varphi(\alpha_j) = 0.$$

- si $0 \leq k \leq p - 2$, en posant, pour $z \in \mathbb{T}$, $\tilde{b}_1(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n-p} \frac{z - \omega_j}{1 - \bar{\omega}_j z}$, on a d'une part $\forall z \in \mathbb{T}$, $b_1(S_b)^* z^k = \tilde{b}_1(S_b)^* (S_b^*)^{p-1} (z^k) = 0$; et d'autre part, on obtient $\forall z \in \mathbb{T}$, $b_1(S_b)^* z^k = \langle z^k | \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} = \overline{\varphi^{(k)}(0)} \mathbf{1}$. Donc

$$\varphi(X^k) = 0.$$

- et le même calcul montre que $\varphi(X^{p-1})$ est constant. Notons c la valeur de cette constante de sorte que

$$\varphi(X^{p-1}) = c.$$

Il est clair que les deux derniers points ne sont valables que pour $p \geq 2$, ce qui est le cas ici. On obtient alors

$$\forall z \in \mathbb{T}, \quad \varphi(z) = \lambda c z^{p-1} \prod_{j=1}^{n-p} \frac{z - \omega_j}{1 - \bar{\omega}_j z} = c b_1(z).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} b_1(\Delta(S_b)) &= b_1(S_b) - S^* b \otimes b_1(S_b)^* S^* b \\ &= c b_1 \otimes \mathbf{1} - b_1 \otimes (\bar{c}(\mathbf{1} \otimes b_1) S^* b) \\ &= c b_1 \otimes \mathbf{1} - b_1 \otimes \bar{c} \mathbf{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le polynôme minimal de $\Delta(S_b)$ est le polynôme unitaire associé au numérateur de b_1 , tandis que celui de S_b est associé au numérateur de $b = X b_1$.

On souhaite à présent généraliser le résultat précédent. Faisons tout d'abord la remarque suivante :

Remarque 3.9. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert quelconque, et T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. S'il existe une fonction non nulle f , holomorphe sur un voisinage de $\sigma(T)$, alors T est également annulé par un polynôme. Par conséquent, on peut définir le polynôme minimal pour cet opérateur; avec le calcul fonctionnel de Riesz, la situation est donc tout à fait similaire et le résultat 3.7 tient encore.*

3.2.2 Généralisation : fonction minimum d'un opérateur et celle de sa transformée de Aluthge

Afin de généraliser le résultat au cas de la dimension infinie d'une manière plus satisfaisante, nous avons besoin d'un calcul fonctionnel plus élaboré qui permette de prolonger la notion de polynôme minimal. Cela nous a conduit à considérer les opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ polynomialement bornés et absolument continus. On note à cet effet $\mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$ l'ensemble de ces opérateurs.

On rappelle que la classe \mathcal{C}_0 , introduite par B. Sz-Nagy et C. Foias, est la classe des contractions complètement non unitaires T pour lesquelles il existe une fonction $u \in H^\infty$ non identiquement nulle telle que $u(T) = 0$. De plus, cette dernière fonction u peut toujours être choisie de sorte qu'elle soit intérieure.

Cette partie de l'ensemble des contractions peut naturellement être étendue aux opérateurs polynomialement bornés : cette nouvelle classe sera notée $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$ par la suite ; et on peut alors introduire la notion de fonction minimum d'un opérateur de $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$.

Définition 3.10. *Soit $T \in \mathcal{C}_0$. On appelle fonction minimum de T la fonction intérieure u vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- (i) $u(T) = 0$;
- (ii) si v est une fonction intérieure telle que $v(T) = 0$, alors u divise v .

Une telle fonction existe toujours pour tout opérateur T de classe \mathcal{C}_0 , et est définie à un facteur près, de module 1. Nous renvoyons à [52] pour des preuves de ces résultats et plus de précisions sur cette notion.

À l'aide de cet outil, nous allons obtenir un résultat généralisant la proposition 3.7. Présentons tout d'abord la propriété de stabilité suivante concernant la transformation de Aluthge Δ , vue comme une application de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dans lui-même.

Lemme 3.11. *Si T est un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ polynomialement borné et absolument continu, alors il en est de même de $\Delta(T)$.*

Démonstration. Rappelons que tout opérateur polynomialement borné possède un calcul fonctionnel sur $\mathbb{A}(\mathbb{D})$, et que le dual de l'algèbre $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ est $(L^1/H_0^1) \oplus \mathcal{M}_{\text{sing}}(\mathbb{T})$; ainsi, pour tout opérateur polynomialement borné T et tout couple de vecteurs (x, y) , il existe une fonction $h_{x,y} \in L^1$ et une mesure σ absolument singulière telles que, pour toute fonction $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$,

$$\langle P(T)x|y \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{it})h_{x,y}(e^{it}) dm(e^{it}) + \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\sigma(e^{it})$$

où m désigne la mesure de Lebesgue.

Soit alors T un opérateur polynomialement borné et absolument continu. La mesure σ précédente est nulle; notons, pour tout couple (x, y) de vecteurs, $\mu_{x,y} = h_{x,y}dm$ un représentant de la mesure associée à T et (x, y) .

Le lemme 2.2 permet d'affirmer que $\Delta(T)$ est polynomialement borné. On peut donc définir de même $\nu_{x,y}$ un représentant de la mesure associée à $\Delta(T)$ et (x, y) . Il nous reste alors à prouver que $\Delta(T)$ est absolument continu : il nous suffit pour cela de montrer que la partie singulière $\nu_{x,y}^{\text{sing}}$ est nulle.

Soit alors $(x, y) \in \mathcal{H}^2$: l'écriture $\mathcal{H} = \ker(T) \oplus \overline{\text{Im } |T|}$ nous permet de décomposer x de manière unique sous la forme $x = u \oplus v$, avec $u \in \ker(T)$ et $v \in \overline{\text{Im } |T|}$.

Supposons dans un premier temps $v \in \text{Im } |T|$: il existe $a \in \mathcal{H}$ tel que $v = |T|^{\frac{1}{2}}a$. Alors

$$\langle P(\Delta(T))x|y \rangle = \langle P(\Delta(T))u|y \rangle + \langle P(\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}}a|y \rangle.$$

Comme $u \in \ker(T)$, $u \in \ker(\Delta(T))$ et $\langle P(\Delta(T))u|y \rangle = P(0)\langle u|y \rangle$. On peut appliquer le lemme 2.2 sur le dernier terme, de sorte que $\langle P(\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}}a|y \rangle = \langle |T|^{\frac{1}{2}}P(T)a|y \rangle = \langle P(T)a||T|^{\frac{1}{2}}y \rangle$. On obtient ainsi

$$\langle P(\Delta(T))x|y \rangle = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) \left[\langle u|y \rangle + h_{a,|T|^{\frac{1}{2}}y}(e^{i\theta}) \right] dm(\theta).$$

Notons γ la mesure $\left[\nu_{u \oplus |T|^{\frac{1}{2}}a,y} - \left(\langle u|y \rangle + h_{a,|T|^{\frac{1}{2}}y}(e^{i\theta}) \right) dm \right]$. La précédente égalité nous permet d'affirmer que les coefficients de Fourier de γ sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{\gamma}(n) = 0.$$

Le théorème de Hoffman (cf. [42]) s'applique et entraîne que γ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On en déduit que la partie singulière $\nu_{u \oplus |T|^{\frac{1}{2}}a,y}^{sing}$ est nulle.

Le cas général où $v \in \overline{\text{Im } |T|}$ se déduit du cas précédent par passage à la limite. En conclusion $\nu_{x,y}^{sing}$ est nulle, si bien que $\Delta(T)$ est absolument continue. \square

Nous pouvons désormais proposer le résultat suivant, qui établit un lien entre la fonction minimum d'un opérateur et celle de sa transformée de Aluthge.

Proposition 3.12. *Soit $T \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$.*

Alors l'opérateur $\Delta(T)$ appartient également à $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{PB}_{abs}(\mathcal{H})$. Et la fonction minimum de $\Delta(T)$ divise celle de T .

Démonstration. Soit $h \in H^\infty$ telle que $h(T) = 0$. Fixons $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq r < 1$. On a toujours $h(r\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}h(rT)$. Chacun des deux termes converge faiblement quand r tend vers 1, et en passant à la limite dans l'égalité précédente, on a

$$h(\Delta(T))|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}h(T) = 0.$$

On obtient donc $h(\Delta(T))|_{\overline{\text{Im } |T|}} = 0$ en vertu du lemme 2.1. Il suffit maintenant de montrer que $h(\Delta(T))|_{\ker(T)} = 0$.

Soit $u \in \ker(T) \setminus \{0\}$. Alors $u \in \ker(\Delta(T))$ et $0 = h(T)u = h(0)u$.

D'où $h(0) = 0$, et avec les notations de la section précédente, on a $h(z) = zh_1(z)$. On en déduit enfin les égalités

$$h(\Delta(T))u = h_1(\Delta(T))\Delta(T)u = 0,$$

et on achève ainsi la démonstration. \square

3.3 Stabilité de l'ascente et de la descente d'un opérateur

3.3.1 Stabilité de l'ascente

Nous allons dans cette section nous intéresser à l'étude de la suite numérique classique et décroissante $(a_p(T))_{p \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p(T) = \dim \frac{\ker(T^{p+1})}{\ker(T^p)}.$$

On rappelle que l'ascente d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'élément $a(T)$ de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$a(T) = \inf \{p \geq 0; \ker(T^p) = \ker(T^{p+1})\}.$$

On renvoie à [46] pour plus de détails. On va essentiellement s'intéresser à la comparaison, pour un opérateur T donné, de la suite $(a_p(T))$ associée à cet opérateur et de celle de sa transformée de Aluthge, $(a_p(\Delta(T)))$. Dans un premier temps, on compare $(a_p(T - \alpha I))$ et $(a_p(\Delta(T) - \alpha I))$ dans le cas où α est non nul.

Théorème 3.13. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on a*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \dim \frac{\ker(T - \alpha I)^{p+1}}{\ker(T - \alpha I)^p} = \dim \frac{\ker(\Delta(T) - \alpha I)^{p+1}}{\ker(\Delta(T) - \alpha I)^p},$$

c'est-à-dire $(a_p(T - \alpha I)) = (a_p(\Delta(T) - \alpha I))$. En particulier, l'ascente de $T - \alpha I$ et celle de $\Delta(T) - \alpha I$ coïncident.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le cas $p = 0$ est immédiat : nous renvoyons à [40] pour une preuve de l'égalité

$$\dim(\ker(T - \alpha I)) = \dim(\ker(\Delta(T) - \alpha I)).$$

Supposons donc que $p \geq 1$ dans la suite de la démonstration. Notons $R = U|T|^{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{N}_T^{(p)} = \ker(T - \alpha I)^p$. D'après le lemme 2.2, pour tout polynôme P , on a $RP(\Delta(T)) = P(T)R$, si bien que si $x \in \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$, on a $Rx \in E_T^{(p+1)}$. De fait, la restriction $R : \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)} \rightarrow \mathcal{N}_T^{(p+1)}$ est bien définie et on peut considérer l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)} & \longrightarrow & \mathcal{N}_T^{(p+1)} / \mathcal{N}_T^{(p)} \\ x & \longmapsto & [Rx] \end{array}$$

où l'on note $[Rx]$ pour désigner la classe du vecteur $Rx \in \mathcal{N}_T^{(p+1)}$ modulo $\mathcal{N}_T^{(p)}$. Étant donné $x \in \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p)}$, on obtient $Rx = U|T|^{\frac{1}{2}}x \in \mathcal{N}_T^{(p)}$ par application de l'égalité du lemme 2.2 : par conséquent l'application f se factorise en \tilde{f} selon le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N}_T^{(p+1)} / \mathcal{N}_T^{(p)} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)} / \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p)} & & \end{array}$$

Soit alors $x \in \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$ tel que $Rx \in \mathcal{N}_T^{(p)}$. Montrons que $x \in \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p)}$, c'est-à-dire que le vecteur $y = (\Delta(T) - \alpha I)^p x$ est nul. D'une part, $(\Delta(T) - \alpha I)^{p+1} x = 0$, soit $(\Delta(T) - \alpha I)y = 0$; d'autre part,

$$0 = (T - \alpha I)^p Rx = R(\Delta(T) - \alpha I)^p x = Ry$$

donc $\Delta(T)y = 0$. Ainsi $\alpha y = 0$ et comme $\alpha \neq 0$, $y = 0$: l'application \tilde{f} est donc bien injective.

On résout ensuite l'équation $y = [Rx]$ d'inconnue x . Étant donné un vecteur $y \in \mathcal{N}_T^{(p+1)}$, on cherche donc $x \in \mathcal{N}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$ tel que $Rx - y \in \mathcal{N}_T^{(p)}$.

Posons $x = \frac{1}{\alpha}|T|^{\frac{1}{2}}y$. On vérifie d'une part que, comme $(T - \alpha I)^{p+1}y = 0$, l'on a

$$0 = \frac{1}{\alpha}|T|^{\frac{1}{2}}(T - \alpha I)^{p+1}y = (\Delta(T) - \alpha I)^{p+1}\left(\frac{1}{\alpha}|T|^{\frac{1}{2}}y\right);$$

et d'autre part

$$(T - \alpha I)^p(Rx - y) = (T - \alpha I)^p\left(\frac{1}{\alpha}Ty - y\right) = \frac{1}{\alpha}(T - \alpha I)^{p+1}y = 0,$$

donc $Rx - y \in \mathcal{N}_T^{(p)}$. On en déduit que \tilde{f} est surjective, et donc bijective, d'où la conclusion. \square

Dans le cas où $\alpha = 0$, le résultat précédent est mis en défaut, comme le montre l'exemple 3.16. Cependant on conserve tout de même une inégalité entre $(a_p(T))$ et $(a_p(\Delta(T)))$.

Théorème 3.14. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. On a*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \dim \frac{\ker T^{p+1}}{\ker T^p} \geq \dim \frac{\ker \Delta(T)^{p+1}}{\ker \Delta(T)^p}.$$

Remarque 3.15. *Ce résultat vient contrarier le préjugé que l'on aurait pu avoir en considérant l'inégalité $\dim(\ker T) \leq \dim(\ker \Delta(T))$ obtenue par I. B. Jung, E. Ko et C. Pearcy dans le papier [40].*

Démonstration. On construit l'application \tilde{f} précédente : il s'agit alors de prouver son injectivité. Soit $x \in \ker(\Delta(T)^{p+1})$ tel que $Rx \in \ker(T^p)$. On a $T^p Rx = 0 = R\Delta(T)^p x$, donc en posant $y = \Delta(T)^p x$, on a $Ry = 0$. Ainsi

$$|T|^{\frac{1}{2}}y \in \ker U = \ker T = \ker |T|^{\frac{1}{2}},$$

donc $|T|y = 0$. De fait, $y \in \ker |T| = \ker |T|^{\frac{1}{2}}$. Par ailleurs, comme $p \geq 1$, $y \in \overline{\text{Im } |T|^{\frac{1}{2}}}$.

En conclusion, $y \in \ker |T|^{\frac{1}{2}} \cap \overline{\text{Im } |T|^{\frac{1}{2}}} = \{0\}$, et \tilde{f} est injective. \square

Exemple 3.16. En reprenant l'exemple 3.2, on constate que l'isométrie partielle S_n vérifie l'égalité dans la proposition précédente pour tous les entiers naturels p (y compris 0), sauf lorsque $p = n - 1$:

$$\dim \frac{\ker S_n^n}{\ker S_n^{n-1}} = 1 > 0 = \dim \frac{\ker \Delta(S_n)^n}{\ker \Delta(S_n)^{n-1}}.$$

Et en particulier les ascents sont différentes :

$$a(S_n) = n > n - 1 = a(\Delta(S_n)).$$

Remarque 3.17. *En dimension finie, le polynôme minimal de T s'écrit*

$$\omega_T(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(T)} (z - \lambda)^{a(T - \lambda I)}.$$

On retrouve ainsi, grâce au résultat précédent, le fait que le polynôme minimal de $\Delta(T)$ divise celui de T .

3.3.2 Étude de la descente

Nous allons dans cette section nous intéresser à l'étude de la suite numérique classique, décroissante, $(d_p(T))_{p \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad d_p(T) = \dim \frac{\operatorname{Im}(T^p)}{\operatorname{Im}(T^{p+1})}.$$

On rappelle que la descente d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'élément $d(T)$ de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$d(T) = \inf \{p \geq 0; \operatorname{Im}(T^p) = \operatorname{Im}(T^{p+1})\}.$$

Dans ce paragraphe, on étudie les comportements respectifs des suites $(d_p(T - \alpha I))_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(d_p(\Delta(T) - \alpha I))_{p \in \mathbb{N}^*}$. On obtient le résultat suivant.

Théorème 3.18. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Alors on a*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \dim \frac{\operatorname{Im}(T - \alpha I)^p}{\operatorname{Im}(T - \alpha I)^{p+1}} \leq \dim \frac{\operatorname{Im}(\Delta(T) - \alpha I)^p}{\operatorname{Im}(\Delta(T) - \alpha I)^{p+1}},$$

et dès que $\Delta(T) - \alpha I$ est à image fermée, cette inégalité est une égalité. On en déduit en particulier que la descente de $T - \alpha I$ est inférieure ou égale celle de $\Delta(T) - \alpha I$, et que celles-ci coïncident lorsque $\Delta(T) - \alpha I$ est à image fermée.

Démonstration. Le lemme 2.2 permet de montrer aisément que l'application suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{R}_T^{(p)} &\longrightarrow \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p)} / \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)} \\ y &\longmapsto [|T|^{\frac{1}{2}}y] \end{aligned}$$

où $[|T|^{\frac{1}{2}}y]$ désigne la classe du vecteur $|T|^{\frac{1}{2}}y \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p)}$ modulo $\mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$.

Montrons que $\ker(g) = \mathcal{R}_T^{(p+1)}$: soit donc $y \in \ker(g)$. On sait que $|T|^{\frac{1}{2}}y \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$, ce qui signifie que l'on dispose d'un vecteur $x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} |T|^{\frac{1}{2}}y &= [\Delta(T) - \alpha I]^{p+1}x \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k \alpha^k \Delta(T)^{p+1-k} x \\ &= (-1)^{p+1} \alpha^{p+1} x + \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k \alpha^k \Delta(T)^{p+1-k} x. \end{aligned}$$

Comme $\alpha \neq 0$, on constate que $x \in \text{Im}(|T|^{\frac{1}{2}})$ donc il existe un vecteur $a \in \mathcal{H}$ tel que $x = |T|^{\frac{1}{2}}a$. Alors, d'après le lemme 2.2,

$$|T|^{\frac{1}{2}}y = [\Delta(T) - \alpha I]^{p+1} |T|^{\frac{1}{2}}a = |T|^{\frac{1}{2}} [T - \alpha I]^{p+1} a.$$

De fait $y - [T - \alpha I]^{p+1} a \in \ker(|T|^{\frac{1}{2}}) = \ker(T) \subset \mathcal{R}_T^{(p+1)}$: comme $[T - \alpha I]^{p+1} a \in \mathcal{R}_T^{(p+1)}$ est immédiat, il suit $y \in \mathcal{R}_T^{(p+1)}$. Finalement $\ker(g) \subset \mathcal{R}_T^{(p+1)}$ et l'inclusion réciproque est immédiate.

Dès lors, g se factorise en une injection \tilde{g} de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_T^{(p)} & \xrightarrow{g} & \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p)} / \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)} \\ \downarrow q & \nearrow \tilde{g} & \\ \mathcal{R}_T^{(p)} / \mathcal{R}_T^{(p+1)} & & \end{array}$$

Comme \tilde{g} est injective, l'inégalité est prouvée.

Supposons à présent que $\text{Im}(\Delta(T) - \alpha I)$ est fermé, et montrons qu'alors \tilde{g} est surjective. Soit $z \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p)}$: on cherche $y \in \mathcal{R}_T^{(p)}$ tel que $|T|^{\frac{1}{2}}y - z \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$. Comme $z \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p)}$, il existe un vecteur $x \in \mathcal{H}$ tel que $z = [\Delta(T) - \alpha I]^p x$. Comme $\text{Im}(\Delta(T) - \alpha I)$ est fermé, on a $\mathcal{H} = \text{Im}(\Delta(T) - \alpha I) \oplus \ker(\Delta(T)^* - \bar{\alpha}I)$. On peut alors décomposer $x = (\Delta(T) - \alpha I)x_0 + x_1$ avec $x_0 \in \mathcal{H}$ et $x_1 \in \ker(\Delta(T)^* - \bar{\alpha}I)$. Comme $(\Delta(T)^* - \bar{\alpha}I)x_1 = 0$, on a $x_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}}\Delta(T)^*x_1 \in \text{Im}(|T|^{\frac{1}{2}})$. Donc il existe un vecteur x_2 tel que $x_1 = |T|^{\frac{1}{2}}x_2$. On en déduit que

$$x = (\Delta(T) - \alpha I)x_0 + |T|^{\frac{1}{2}}x_2.$$

On pose alors $x' = [T - \alpha I]^p x_2$. On peut écrire

$$\begin{aligned} z - |T|^{\frac{1}{2}}x' &= [\Delta(T) - \alpha I]^p (x - |T|^{\frac{1}{2}}x_2) \\ &= [\Delta(T) - \alpha I]^{p+1}x_0 \end{aligned}$$

ainsi $z - |T|^{\frac{1}{2}}x' \in \mathcal{R}_{\Delta(T)}^{(p+1)}$ et $y = x'$ convient. Donc \tilde{g} est surjective. En conclusion, \tilde{g} est bijective ce qui permet d'établir l'égalité souhaitée dans le cas où l'image de $\Delta(T) - \alpha I$ est fermée. \square

Exemple 3.19. L'opérateur S_n introduit à l'exemple 3.2 fournit un exemple d'opérateur agissant sur un espace de dimension finie mettant en défaut le résultat précédent si l'on choisit $\alpha = 0$:

$$\dim \frac{\text{Im } S_n^{n-1}}{\text{Im } S_n^n} = 1 > 0 = \dim \frac{\text{Im } \Delta(S_n)^{n-1}}{\text{Im } \Delta(S_n)^n}.$$

Remarque 3.20. Dans le cas de la dimension finie, on peut montrer que si T est injectif, le théorème précédent pour $\alpha = 0$ reste vrai. En effet, on peut prouver que la factorisation précédente reste encore valable et le résultat découle de l'égalité $|T|^{\frac{1}{2}} \text{Im}(T^p) = \text{Im}(\Delta(T)^p)$.

On s'intéresse, pour terminer le paragraphe, au spectre de la descente et au spectre de la descente essentielle d'un opérateur. On rappelle que pour un opérateur T , le spectre de la descente, noté $\sigma_{\text{des}}(T)$,

est l'ensemble des nombres complexes α pour lesquels $d(T - \alpha I)$ est fini. On renvoie à [14] pour de plus amples détails, et à [13] et [12] pour le spectre de la descente essentielle, noté $\sigma_{des}^e(T)$.

On peut obtenir facilement, grâce au théorème 3.18, le corollaire suivant. Celui-ci fournit un nouveau résultat sur la stabilité des différents spectres, sous l'action de la transformation de Aluthge ; on pourra notamment le mettre en parallèle avec les résultats cités en introduction.

Corollaire 3.21. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors on a les inclusions suivantes*

$$\sigma_{des}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_{des}(\Delta(T)) \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \sigma_{des}^e(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_{des}^e(\Delta(T)) \setminus \{0\}.$$

3.4 Stabilité des classes $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ et $\mathcal{C}_{1,\cdot}$.

Rappelons qu'un opérateur à puissances bornées T agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est dit de classe $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ (resp. de classe $\mathcal{C}_{1,\cdot}$) lorsque, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n x = 0$ (resp. lorsque, pour tout $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, la suite $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0). Selon [52], une contraction T peut toujours s'écrire sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_{0,\cdot} & * \\ 0 & T_{1,\cdot} \end{pmatrix}$$

où $T_{0,\cdot}$ (resp. $T_{1,\cdot}$) est une contraction de classe $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ (resp. de classe $\mathcal{C}_{1,\cdot}$). Cette triangularisation se généralise aisément pour le cas des opérateurs à puissances bornées.

3.4.1 Étude des co-isométries

On s'intéresse dans ce paragraphe aux co-isométries, c'est-à-dire aux opérateurs V tels que V^* est une isométrie. Pour de tels opérateurs, on peut remarquer que $VV^* = I$, et que V^*V est une projection.

Proposition 3.22. *Soit V une co-isométrie. Alors pour tout entier naturel n ,*

$$\Delta^n(V) = V^{*n}V^{n+1}.$$

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. C'est immédiat pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n(V) = V^{*n}V^{n+1}$. En observant l'égalité

$$|\Delta^n(V)|^2 = V^{*n+1}V^nV^{*n}V^{n+1} = V^{*n+1}V^{n+1},$$

on constate que $|\Delta^n(V)|^2$ est une projection, que l'on note P_{n+1} . Comme $\ker V^{n+1} = \ker P_{n+1}$, on obtient la décomposition polaire de $\Delta^n(V)$ sous la forme : $\Delta^n(V) = \Delta^n(V)P_{n+1}$. On en déduit

$$\Delta^{n+1}(V) = P_{n+1}\Delta^n(V)P_{n+1} = V^{*n+1}V^{n+2}.$$

D'où le résultat. \square

En utilisant la décomposition de Wold, la partie $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ de V correspond à sa partie purement co-isométrique et la partie $\mathcal{C}_{1,\cdot}$ de V à sa partie unitaire. Le résultat suivant montre que l'on peut récupérer la partie unitaire de V par itération de la transformation de Aluthge sur V .

Théorème 3.23. *Soit V une co-isométrie.*

Alors $(\Delta^n(V))$ converge fortement vers la partie unitaire de V .

Démonstration. Grâce à la décomposition de Nagy-Foias (cf. [52]), on peut décomposer $V = U + W$ selon la somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_{cnu}$, où l'on a noté \mathcal{H}_u (resp. \mathcal{H}_{cnu}) le sous-espace réduisant associé à la partie unitaire (resp. complètement non unitaire) de V . Alors

$$V^{*n}V^n = I_{\mathcal{H}_u} \oplus W^{*n}W^n \quad \text{et} \quad I = V^nV^{*n} = I_{\mathcal{H}_u} \oplus W^nW^{*n}.$$

Or $W^{*n}W^n = Q_n$ est un projecteur, et $W^nW^{*n} = I_{\mathcal{H}_{cnu}}$. Par ailleurs, l'inégalité $Q_{n+1} \leq Q_n$ entraîne que $(Q_n)_n$ est une suite fortement décroissante d'opérateurs positifs, donc elle converge vers un opérateur Q qui est encore un projecteur. Vérifions maintenant que $\text{Im } Q = \{0\}$. Si $x \in \text{Im } Q$, alors

$$\|x\|^2 = \|Qx\|^2 = \langle Qx|x \rangle = \langle W^{*n}QW^n x|x \rangle = \langle QW^{*n}W^n x|x \rangle$$

car $W^*QW = Q$ donc $QW = WQ$ et de fait $W^*Q = QW^*$. Par suite

$$\|x\|^2 = \langle W^{*n}W^n x|Qx \rangle = \langle W^{*n}W^n x|x \rangle = \|W^n x\|^2.$$

Ainsi x appartient à la partie unitaire de W , qui est $\{0\}$. \square

3.4.2 Le cas des contractions

Dans tout ce paragraphe, T désignera une contraction de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Rappelons brièvement que la classe $\mathcal{C}_{0,}$ est l'ensemble des opérateurs T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que l'opérateur $S_T = \lim T^{*n}T^n$ est nul, ce qui peut être caractérisé également par : $\forall x \in \mathcal{H}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x\| = 0$. Et la classe $\mathcal{C}_{1,}$ est l'ensemble des opérateurs T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dont l'application S_T est injective.

Cet opérateur S_T associé à T a de nombreuses applications ; il permet par exemple d'obtenir des résultats concernant l'existence de sous-espaces invariants et hyper-invariants pour un opérateur T (cf. [19]).

Lemme 3.24. *Si T est une contraction de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors on obtient les égalités*

$$S_{\Delta(T)} = |T|^{\frac{1}{2}} U^* S_T U |T|^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

et

$$S_T = |T|^{\frac{1}{2}} S_{\Delta(T)} |T|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $\|T\| \leq 1$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \Delta(T)^{*n} \Delta(T)^n &= |T|^{\frac{1}{2}} U^* T^{*n-1} |T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} T^{n-1} U |T|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|T\| |T|^{\frac{1}{2}} U^* T^{*n-1} T^{n-1} U |T|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc on peut écrire $S_{\Delta(T)} \leq |T|^{\frac{1}{2}} U^* S_T U |T|^{\frac{1}{2}}$; d'autre part, on effectue, de manière analogue, le calcul

$$\begin{aligned} T^{*n} T^n &= |T|^{\frac{1}{2}} \Delta(T)^{*n-1} |T|^{\frac{1}{2}} U^* U |T|^{\frac{1}{2}} \Delta(T)^{n-1} |T|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|T\| |T|^{\frac{1}{2}} \Delta(T)^{*n-1} \Delta(T)^{n-1} |T|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $S_T \leq |T|^{\frac{1}{2}} S_{\Delta(T)} |T|^{\frac{1}{2}}$. En combinant ces deux résultats, on obtient l'encadrement

$$S_T \leq |T|^{\frac{1}{2}} S_{\Delta(T)} |T|^{\frac{1}{2}} \leq |T| U^* S_T U |T| = T^* S_T T = S_T$$

ce qui prouve la formule (3.2) ; puis l'encadrement

$$\begin{aligned} S_{\Delta(T)} \leq |T|^{\frac{1}{2}} U^* S_T U |T|^{\frac{1}{2}} &\leq |T|^{\frac{1}{2}} U^* |T|^{\frac{1}{2}} S_{\Delta(T)} |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}} \\ &= \Delta(T)^* S_{\Delta(T)} \Delta(T) \\ &= S_{\Delta(T)}, \end{aligned}$$

ce qui établit la formule (3.1). \square

Proposition 3.25. *Soit T une contraction de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors $T \in \mathcal{C}_{0,\cdot}$ (resp. $T \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$) si et seulement si $\Delta(T) \in \mathcal{C}_{0,\cdot}$ (resp. $\Delta(T) \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$).*

Démonstration. Le résultat sur $\mathcal{C}_{0,\cdot}$ est immédiat. Procédons par double implication pour prouver l'équivalence concernant $\mathcal{C}_{1,\cdot}$.

Soit $T \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$. S_T est injectif, donc il en est de même pour $|T|$ et $|T|^{\frac{1}{2}}$. Soit alors $x \in \mathcal{H}$ tel que $S_{\Delta(T)}x = 0$. L'égalité (3.1) entraîne les suivantes : $\sqrt{S_T}U|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$, puis $U|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$. Selon le lemme 2.1, on a donc $|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$, soit $x = 0$. Par conséquent, $S_{\Delta(T)}$ est injectif et $\Delta(T)$ est de classe $\mathcal{C}_{1,\cdot}$.

Réciproquement, supposons $\Delta(T) \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$. Considérons un vecteur x de \mathcal{H} vérifiant $S_Tx = 0$. En raisonnant de la même manière que précédemment, on utilise l'égalité (3.2) pour obtenir $\sqrt{S_{\Delta(T)}}|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$, ce qui entraîne $|T|^{\frac{1}{2}}x = 0$. En composant par $|T|^{\frac{1}{2}}U$, on a

$$\Delta(T)x = 0.$$

Comme $S_{\Delta(T)}$ est injectif, il en est de même pour $\Delta(T)$: de fait, il vient $x = 0$, ce qui signifie que S_T est injectif, ou encore $T \in \mathcal{C}_{1,\cdot}$. \square

3.4.3 Le cas d'égalité $S_T = S_{\Delta(T)}$

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux contractions vérifiant l'égalité $S_T = S_{\Delta(T)}$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.26. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une contraction.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $S_{\Delta(T)} = S_T$;
- ii) T s'écrit sous la forme $T = A + B$ où (A, B) est un couple d'opérateurs agissant sur \mathcal{H} vérifiant les trois points suivants :
 - A est de classe $\mathcal{C}_{0,\cdot}$;
 - B est une isométrie partielle ;
 - $BA = BA^* = A^*B = 0$.

De plus, on peut choisir B de telle sorte que la compression sur son support initial $\mathbb{P}_{(\ker T)^\perp} B \mathbb{P}_{(\ker T)^\perp}$ soit injective.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $S_{\Delta(T)} = S_T$, et montrons alors la décomposition *ii*). En combinant les deux égalités du lemme 3.24, on peut écrire $|T|^{\frac{1}{2}} U^* S_T U |T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}} S_T |T|^{\frac{1}{2}}$, si bien que

$$|T|^{\frac{1}{2}} (S_T - U^* S_T U) |T|^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.3)$$

Montrons que l'opérateur auto-adjoint $J = S_T - U^* S_T U$ est nul.

Supposons dans un premier temps que T soit injectif. Dans ce cas, $|T|$ est un opérateur à image dense (cf lemme 2.1), donc selon l'égalité précédente, pour tout vecteur $x \in \mathcal{H}$, $\langle Jx|x \rangle = 0$. Par conséquent, l'image numérique de J est réduite au vecteur nul : il vient successivement $\sigma(J) = \{0\}$, $r(J) = 0$, et comme J est auto-adjoint, $\|J\| = r(J) = 0$. On en déduit $J = 0$.

Pour traiter le cas général, considérons deux vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$, que l'on décompose en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, selon la somme directe $\mathcal{H} = \ker T \oplus \overline{\text{Im } |T|}$. Alors

$$\langle Jx|y \rangle = \langle Jx_1|y \rangle + \langle Jx_2|y_1 \rangle + \langle Jx_2|y_2 \rangle.$$

Comme $x_1 \in \ker T$, $S_T x_1 = 0$ et $U x_1 = 0$, donc $\langle Jx_1|y \rangle = 0$. De la même manière, $\langle Jx_2|y_1 \rangle = \langle x_2|Jy_1 \rangle = 0$. Montrons que $\langle Jx_2|y_2 \rangle = 0$: l'égalité (3.3) permet de montrer que la restriction de J à $\overline{\text{Im } |T|}$ est nulle ; par densité, il est alors clair que la restriction de J à $\overline{\text{Im } |T|}$ est nulle d'où $\langle Jx_2|y_2 \rangle = 0$. Il s'ensuit $J = 0$.

Finalement, on a bien prouvé $S_T - U^* S_T U = 0$.

Décomposons à présent l'opérateur T selon la somme directe (orthogonale) $\mathcal{H} = \ker S_T \oplus \overline{\text{Im } S_T}$:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & R_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout entier naturel n , $T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & R_n \\ 0 & T_2^n \end{pmatrix}$ où la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par son terme initial R_1 et la relation de récurrence, valable

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_{n+1} = T_1^n R_1 + R_n T_2$. On peut alors construire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur

$$T^{*n} T^n = \begin{pmatrix} T_1^{*n} T_1^n & T_1^{*n} R_n \\ R_n^* T_1^n & R_n^* R_n + T_2^{*n} T_2^n \end{pmatrix}.$$

On sait que la suite $(T^{*n} T^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $S_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où S est un certain opérateur injectif, que l'on va préciser. On sait que $(T_1^{*n} R_n)$ et $(R_n^* T_1^n)$ convergent fortement vers 0, et $(R_n^* R_n + T_2^{*n} T_2^n)$ converge fortement vers S . Comme S_{T_2} est une contraction, $(T_2^{*n} T_2^n)$ converge fortement vers S_{T_2} . Dès lors, $(R_n^* R_n)$ converge fortement vers un opérateur, que l'on va noter R . Écrivons

$$R_{n+1}^* R_{n+1} = R_1^* T_1^{*n} T_1^n R_1 + T_2^* R_n T_1^n R_1 + R_1^* T_1^{*n} R_n T_2 + T_2^* R_n^* R_n T_2.$$

Il est clair que les trois premiers termes du membre de droite convergent fortement vers 0. On peut donc constater que $R_n^* R_n$ est un T_2 -Toeplitz (cf. [18] pour une définition et des propriétés associées), si bien que R l'est également, et finalement il en est de même pour S . Ensuite, comme T est une contraction et que $R_n^* R_n$ est auto-adjoint, on remarque que

$$T_2^{*n} T_2^n \leq R_n^* R_n + T_2^{*n} T_2^n \leq I.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a $S_{T_2} \leq S \leq I$. Puis, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$T_2^{*m} S_{T_2} T_2^m \leq T_2^{*m} S T_2^m \leq T_2^{*m} T_2^m.$$

En prenant la limite dans cet encadrement lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient $S = S_{T_2}$ du fait que S et S_{T_2} sont des T_2 -Toeplitz.

Écrivons la matrice de $|T|$ adaptée à la somme directe (orthogonale) $\mathcal{H} = \ker S_T \oplus \overline{\text{Im } S_T}$. Pour cela, constatons que S_T et $|T|$ commutent : en effet, les égalités

$$|T|^{\frac{1}{2}} S_T^2 = |T|^{\frac{1}{2}} S_T |T|^{\frac{1}{2}} S_T |T|^{\frac{1}{2}} = S_T^2 |T|^{\frac{1}{2}}$$

impliquent successivement $|T|^{\frac{1}{2}}S_T = S_T|T|^{\frac{1}{2}}$ et $|T|S_T = S_T|T|$. De fait, la matrice de $|T|$ relative à la somme directe précédente est diagonale, et $T_1R_1^* = 0$: $|T| = \begin{pmatrix} |T_1| & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$ avec $L = \sqrt{R_1^*R_1 + T_2^*T_2}$.

Or $S_T = |T|^{\frac{1}{2}}S_T|T|^{\frac{1}{2}} = S_T|T|$ donc $S_T(I - |T|) = 0$, et a fortiori $S_{T_2}(I - L) = 0$. Comme S_{T_2} est injectif, $L = I$, donc $|T| = \begin{pmatrix} |T_1| & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et $R_1^*R_1 + T_2^*T_2 = I$. Maintenant, on peut écrire

$$T = A + B \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & R_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur A est de classe \mathcal{C}_0 . Un simple calcul permet d'établir $B^*B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ si bien que B est une isométrie partielle. Et on vérifie également l'annulation de BA , BA^* et A^*B .

Étudions la réciproque. En décomposant A et B selon la somme directe $\mathcal{H} = \ker B \oplus \text{Im } B^*$, on a

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

On forme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^{*n}T^n = \begin{pmatrix} A_1^{*n}A_1^n & A_1^{*n}Y_n \\ Y_n^*A_1^n & Y_n^*Y_n + B_2^{*n}B_2^n \end{pmatrix}$, où la suite (Y_n) est définie par son premier terme Y_1 et la relation de récurrence $Y_{n+1} = A_1^n Y_1 + Y_n B_2$. On sait que $(T^{*n}T^n)$ converge fortement vers un opérateur de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. De même que précédemment, on montrerait que Y est un B_2 -Toeplitz, puis que $Y = S_{B_2}$. Alors $S_T = 0 \oplus S_{B_2}$, donc

$$S_{\Delta(T)} = |T|^{\frac{1}{2}}S_T|T|^{\frac{1}{2}} = 0 \oplus IS_{B_2}I = S_T.$$

En conclusion, l'équivalence est démontrée.

La condition supplémentaire sur B signifie que l'on peut choisir B_2 injectif. \square

Corollaire 3.27. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une contraction à image dense dans \mathcal{H} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $S_{\Delta(T)} = S_T$;
- ii) *il existe un opérateur A de classe $\mathcal{C}_{0,}$ agissant sur sous-espace \mathcal{H}_1 de \mathcal{H} , et un opérateur B unitaire agissant sur un sous-espace \mathcal{H}_2 de \mathcal{H} , tels que*

$$T = A \oplus B$$

relativement à la somme directe (orthogonale) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la proposition i) entraîne ii). Supposons donc $S_{\Delta(T)} = S_T$. Selon le théorème 3.26, on peut décomposer $T = A + B$ où A et B vérifient la condition ii), et on écrit les matrices de A et B adaptées à la somme directe (orthogonale) $\mathcal{H} = \ker(B) \oplus \text{Im}(B^*)$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Selon le théorème 3.26, on peut supposer que $P_{(\ker T)^\perp} B P_{(\ker T)^\perp}$ injectif. Considérons un vecteur b de $\text{Im } B^*$, et posons $y = B_2 B_2^* b - b$ et $x = Y_1 B_2^* b$. Rappelons que $A_1^* Y_1 = 0$ et $Y_1^* Y_1 + B_2^* B_2 = I_2$. Alors on a

$$A_1^* x = 0 \quad \text{et} \quad Y_1^* x + B_2^* y = 0.$$

Comme $\ker T^* = \{0\}$, il vient $x = y = 0$. De fait $Y_1 B_2^* b = 0$ et $Y_1 B_2^* = 0$. Or B_2^* est à image dense, donc $Y_1 = 0$. Finalement, B_2 est unitaire comme isométrie à image dense. \square

Ce dernier résultat permet d'obtenir directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.28. *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une isométrie partielle, alors*

$$S_{\Delta(T)} = S_T.$$

3.4.4 Le cas des opérateurs à puissances bornées

Nous utilisons ici des notions introduites dans [18] particulièrement adaptées à la suite $(T^{*n}T^n)_n$. L'idée est d'utiliser certains opérateurs associés asymptotiquement à cette suite, et qui ont des propriétés intéressantes pour notre étude. Commençons par une présentation succincte de ces opérateurs.

Pour cela, nous introduisons rapidement la notion de limite de Banach. Nous rappelons qu'une limite de Banach \mathcal{L} est une forme linéaire sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites bornées définies sur \mathbb{N} , vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- (i) $\|\mathcal{L}\| = 1$;
- (ii) si x est une suite convergente, alors $\mathcal{L}(x)$ est la limite de x ;
- (iii) si x est une suite bornée positive, alors $\mathcal{L}(x) \geq 0$;
- (iv) soit $x \in \ell^\infty$, et notons x' la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x'_n = x_{n+1}$. Alors $\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x)$.

C'est donc une extension, au sens du théorème de Hahn-Banach, de l'application limite définie sur le sous-ensemble de ℓ^∞ formé des suites convergentes. Le lecteur pourra trouver une preuve de l'existence d'une telle application et d'autres détails dans [28].

Notons en outre que l'assertion (iii) précédente est une conséquence des deux points (i) et (ii), et n'a donc pas à être vérifiée dans la pratique. En effet, considérons une suite positive $x \in \ell^\infty$ et posons y la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \|x\|_\infty - x_n$. Par positivité de x , on a $\|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. La linéarité de \mathcal{L} et le point (i) entraînent

$$\mathcal{L}(\|x\|) - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y) \leq \|y\| \leq \|x\|.$$

Or, selon le point (ii), $\mathcal{L}(\|x\|) = \|x\|$. On en conclut que $\mathcal{L}(x) \geq 0$, c'est-à-dire que le point (iii) est vérifié.

On fixe à présent, et pour toute la suite du paragraphe, une limite de Banach \mathcal{L} . On définit alors l'application E_T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dans lui-même associée à un opérateur T de la manière suivante :

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \langle E_T(X)x|y \rangle = \mathcal{L}\langle T^{*n}XT^n x|y \rangle.$$

L'opérateur $E_T(I)$ correspond donc à la limite de Banach de $T^{*n}T^n$.

Développons quelques propriétés de E_T dont nous aurons besoin par la suite. Dès que S et T sont deux opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a l'inégalité suivante (dont on peut trouver une preuve dans [18])

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad |\langle E_S(|T|)x|y \rangle| \leq \sqrt{\langle E_S(I)x|x \rangle} \sqrt{\langle E_S(|T|^2)y|y \rangle}, \quad (3.4)$$

qui permet d'obtenir les deux lemmes suivants.

Lemme 3.29. *Soit T un opérateur à puissances bornées de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Alors on a

$$E_T(|T|) \leq E_T(I).$$

Démonstration. Soit $x, y \in \mathcal{H}$: on peut écrire

$$|\langle E_T(|T|)x|y \rangle| = |\langle E_T(I|T|)x|y \rangle| \leq \sqrt{\langle E_T(I)x|x \rangle} \sqrt{\langle E_T(|T|^2)y|y \rangle}.$$

Or $E_T(|T|^2) = E_T(T^*T) = E_T(I)$, donc $\langle E_T(|T|)x|x \rangle \leq \langle E_T(I)x|x \rangle$ et l'inégalité est démontrée. \square

Lemme 3.30. *Pour tout opérateur T de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ à puissances bornées, on a les égalités*

$$E_T(I) = |T|^{\frac{1}{2}} E_{\Delta(T)}(|T|)|T|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad E_{\Delta(T)}(|T|) = |T|^{\frac{1}{2}} U^* E_T(I) U |T|^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. En écrivant

$$T^{*n}T^n = |T|^{\frac{1}{2}} \Delta(T)^{*n-1} |T|^{\frac{1}{2}} U^* U |T|^{\frac{1}{2}} \Delta(T) (T)^{n-1} |T|^{\frac{1}{2}},$$

on voit que $E_T(I) = |T|^{\frac{1}{2}} E_{\Delta(T)}(|T|^{\frac{1}{2}} U^* U |T|^{\frac{1}{2}}) |T|^{\frac{1}{2}}$. Or $U^* U = P_{\overline{\text{Im}|T|}}$, donc la première égalité est vérifiée. La formule

$$\Delta(T)^{*n} |T| \Delta(T)^n = |T|^{\frac{1}{2}} U^* (T^{*n} T^n) U |T|^{\frac{1}{2}}$$

implique directement la seconde égalité. \square

Grâce à ces deux résultats, on peut facilement obtenir la stabilité des classes $\mathcal{C}_{0,}$ et $\mathcal{C}_{1,}$ pour les opérateurs à puissances bornées, par une méthode différente.

Théorème 3.31. *Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ à puissances bornées. Alors $T \in \mathcal{C}_0$, (resp. $T \in \mathcal{C}_1$.) si, et seulement si, $\Delta(T) \in \mathcal{C}_0$, (resp. $\Delta(T) \in \mathcal{C}_1$.)*

Pour terminer, étudions la suite $(E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}))_{n \in \mathbb{N}}$. Nous noterons F la mesure spectrale associée à $|T|$.

Proposition 3.32. *Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ à puissances bornées. Alors la suite $(E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus, pour tout $r \in]0; 1[$, on a*

$$E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n} F(]r, \|T\|])).$$

Démonstration. Commençons par démontrer la croissance de la suite. Il suffit pour cela de prouver, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{\Delta(T)}(I) \leq E_{\Delta(T)}(|T|) \leq E_{\Delta(T)}(|T|^2) \leq \dots \leq E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}).$$

Initialisation : écrivons $\Delta(T)^{*n} \Delta(T)^n = |T|^{\frac{1}{2}} U^* T^{*n-1} |T| T^{n-1} U |T|^{\frac{1}{2}}$. Grâce au lemme 3.29, on constate que

$$E_{\Delta(T)}(I) = |T|^{\frac{1}{2}} U^* E_T(|T|) U |T|^{\frac{1}{2}} \leq |T|^{\frac{1}{2}} U^* E_T(I) U |T|^{\frac{1}{2}},$$

et en vertu du lemme 3.30, on obtient $E_{\Delta(T)}(I) \leq E_{\Delta(T)}(|T|)$. La propriété est donc fondée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$E_{\Delta(T)}(I) \leq E_{\Delta(T)}(|T|) \leq E_{\Delta(T)}(|T|^2) \leq \dots \leq E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}).$$

Alors, selon (3.4),

$$\begin{aligned} \langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) x | x \rangle &\leq \sqrt{\langle E_{\Delta(T)}(I) x | x \rangle} \sqrt{\langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^{n+1}}) x | x \rangle} \\ &\leq \sqrt{\langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) x | x \rangle} \sqrt{\langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^{n+1}}) x | x \rangle}. \end{aligned}$$

Si $\langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) x | x \rangle \neq 0$, il vient

$$\langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) x | x \rangle \leq \langle E_{\Delta(T)}(|T|^{2^{n+1}}) x | x \rangle.$$

Sinon, l'inégalité est encore vérifiée. On en conclut que la propriété est héréditaire et la récurrence est prouvée.

Montrons maintenant la seconde partie de la proposition. Considérons $r \in]0; 1[$, et notons $P = F([0, r])$ et $Q = I - P = F(]r, \|T\|])$. Alors $|T| \leq rP + |T|Q$. En utilisant le calcul fonctionnel associé à l'opérateur positif $|T|$, on voit que

$$\begin{aligned} \langle |T|^{2^n} x | x \rangle &= \int_0^{\|T\|} t^{2^n} dF_{x,x}(t) \\ &= \int t^{2^n} \mathbb{1}_{[0,r]} dF_{x,x}(t) + \int t^{2^n} \mathbb{1}_{]r,\|T\|]} dF_{x,x}(t) \\ &\leq \langle (r^{2^n} P + |T|^{2^n} Q) x | x \rangle \end{aligned}$$

donc $E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) \leq r^{2^n} E_{\Delta(T)}(P) + E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n} Q)$. Comme $0 < r < 1$, $(r^{2^n} E_{\Delta(T)}(P))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0; et $(E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n} Q))_{n \in \mathbb{N}}$ converge également car $Q|T|^{2^n} = Q^2|T|^{2^n} = Q|T|^{2^n}Q$. Ainsi la proposition est démontrée. \square

Remarque 3.33. Dans le cas où T est une contraction, l'inégalité

$$E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}) \leq E_{\Delta(T)}(I)$$

nous permet d'affirmer que la suite $(E_{\Delta(T)}(|T|^{2^n}))_n$ est stationnaire.

Chapitre 4

Propriétés des vecteurs extrémaux

Ce chapitre traite de la théorie d'Ansari-Enflo, présentée en introduction. L'objectif est, dans un premier temps, de préciser la localisation des vecteurs extrémaux, et dans un deuxième temps, de mesurer l'influence, sur ces vecteurs, des deux paramètres x et ε (les notations utilisées sont celles du préliminaire 2.2.1).

Le travail présenté dans ce chapitre a fait en partie l'objet de l'article [56]. Certains progrès ont cependant été faits et les notations ont été modifiées de manière s'adapter au mieux aux aspects de la théorie d'Ansari-Enflo. Le paragraphe 4.2 a été récemment étoffé ; enfin, une nouvelle caractérisation des vecteurs extrémaux, particulièrement utile pour les calculs pratiques du chapitre 5, est présentée dans le paragraphe 4.1.2. Toutes ces évolutions font l'objet de l'article [22], réalisé en collaboration avec le Professeur Gilles Cassier.

4.1 Localisation des vecteurs extrémaux

4.1.1 Quelques remarques

Faisons tout d'abord quelques observations sur des quantifications de $y_{T,x,\varepsilon}$ dans des cas particuliers élémentaires.

L'unicité des vecteurs extrémaux permet d'affirmer que les applications $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$ et $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$ sont bien définies. Ainsi, lorsque l'opérateur est inversible, il s'avère que le vecteur extrémal $y_{x,\varepsilon}$ est borné devant la norme de x et devant ε .

Remarque 4.1. *Supposons que T soit inversible. On obtient facilement la majoration*

$$\|y_{T,x,\varepsilon}\| \leq \|T^{-1}\|(\|x\| + \varepsilon).$$

Justification. En effet, avec les mêmes notations que dans la preuve du lemme 2.3, il vient

$$\mathcal{F} = \{T^{-1}z; \|z - x\| \leq \varepsilon\} = T^{-1}(\mathcal{B}(x, \varepsilon)) \subset \mathcal{B}(0, \|T^{-1}\|(\|x\| + \varepsilon))$$

et le résultat en découle. \square

Cette remarque est à relier avec le paragraphe 4.1.3, qui étudie la position géométrique des vecteurs minimaux, ainsi que les sections 4.2 et 4.3 qui concernent les régularités des deux applications précédentes.

Revenons au cas général. Dans l'hypothèse où l'opérateur T est à image dense, il est forcément non nul, et des raisonnements similaires à ceux précédemment exposés conduisent à la minoration suivante.

Remarque 4.2. *Si T est un opérateur à image dense, on obtient l'inégalité*

$$\|y_{T,x,\varepsilon}\| \geq \frac{\|x\| - \varepsilon}{\|T\|}.$$

Justification. L'égalité $\|x - Ty_{x,\varepsilon}\| = \varepsilon$ entraîne

$$\|x\| \leq \|Ty_{x,\varepsilon}\| + \varepsilon \leq \|T\|\|y_{x,\varepsilon}\| + \varepsilon,$$

et la condition $\|T\| \neq 0$ permet de conclure. \square

On pourra confronter cette remarque avec le lemme 2.8.

4.1.2 Caractérisation équationnelle des vecteurs extrémaux

4.1.2.1 Précisions d'ordre géométrique

Ici, nous présentons un résultat élémentaire de théorie des espaces de Hilbert complexes, qui nous permettra facilement de préciser géométriquement le sous-ensemble sur lequel se passe la minimisation. L'idée est de considérer \mathcal{H} comme un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire $[\cdot|\cdot] = \operatorname{Re}\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Lemme 4.3. *Soient u, v deux vecteurs non nuls de \mathcal{H} , tels que pour tout $z \in \mathcal{H}$, on ait : $[u|z] < 0 \implies [v|z] \geq 0$. Alors, il existe un réel strictement négatif r tel que*

$$v = ru.$$

Démonstration. Il est assez simple de concevoir ce lemme géométriquement. Identifions d'abord les vecteurs z satisfaisant $[u|z] < 0$. Le signe de la partie réelle du produit scalaire de deux vecteurs détermine si l'angle formé est aigu ou obtus. Ainsi ces vecteurs z sont ceux appartenant au demi-espace délimité par l'hyperplan orthogonal à $\operatorname{Vect}(u)$, que l'on note \mathcal{D} .

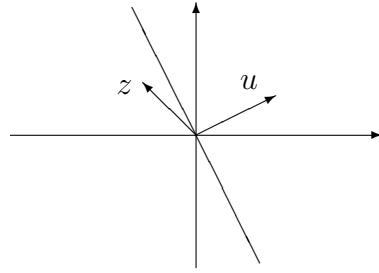


FIGURE 4.1 – Le cas de la dimension 2

Finalement, si on pose $F = \{v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}; [u|z] < 0 \implies [v|z] \geq 0\}$, alors on l'écrit : $F = \{v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}; \forall z \in \mathcal{D}, [v|z] \geq 0\} = \mathbb{R}_-u$. \square

En prenant la norme de chaque membre de l'égalité du lemme précédent, on obtient la valeur de r : $r = -\frac{\|v\|}{\|u\|}$. Cependant ceci n'est pas très satisfaisant, puisque l'on ne peut pas obtenir de borne fixe pour r , il est dépendant totalement des deux paramètres, u et v . Dans cette optique, on constate la variante suivante :

Remarque 4.4. Soit $\rho > 0$. Soient u, v deux vecteurs non nuls de \mathcal{H} , tels que pour tout $z \in \mathcal{H}$, on ait : $[u|z] < -\rho \implies [v|z] \geq \rho$. Alors, il existe un réel strictement négatif r tel que $v = ru$. En outre, on obtient

$$\frac{1}{|r|} < \frac{\|u\|}{\rho}.$$

Justification. L'existence de r est évidente avec le lemme précédent. De plus, avec ces hypothèses plus précises, on voit que \mathcal{D} est un demi-espace délimité par un hyperplan affine orthogonal à $\text{Vect}(u)$ passant par $-\rho u$. Ainsi $\|v\| > \rho$, et en injectant dans la formule que l'on a vu précédemment : $r = -\frac{\|v\|}{\|u\|} < -\frac{\rho}{\|u\|} < 0$. L'inégalité suit. \square

Nous allons alors appliquer ce lemme pour obtenir une propriété de colinéarité des vecteurs extrémaux. Les notations sont celles du lemme 2.3.

Lemme 4.5. Soient $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $0 < \varepsilon < \|x\|$. Il existe un unique réel strictement positif c tel que

$$T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) = -cy_{x,\varepsilon}.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe deux tels réels strictement positifs c et c' : on en déduit $(c - c')y_{x,\varepsilon} = 0$ et comme $y_{x,\varepsilon} \neq 0$, on a $c = c'$ ce qui prouve l'unicité.

Pour démontrer l'existence d'un tel réel, il suffit de montrer que les vecteurs $u = T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x)$ et $v = y_{x,\varepsilon}$ satisfont les hypothèses du lemme 4.3 : en effet, avec les notations du lemme, $c = -\frac{1}{r}$ convient alors. Supposons que z soit un vecteur de \mathcal{H} tel que

$$[u|z] = [T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x)|z] = [Ty_{x,\varepsilon} - x|Tz] < 0.$$

Pour tout réel t positif, on observe que l'on a

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \|(Ty_{x,\varepsilon} - x) + tTz\|^2 \\ &= \|Ty_{x,\varepsilon} - x\|^2 + 2t[Ty_{x,\varepsilon} - x|Tz] + t^2\|Tz\|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

et $\psi'(0) = 2[Ty_{x,\varepsilon} - x|Tz] < 0$, donc ψ est décroissante sur $[0; \eta]$ pour un certain $\eta > 0$, ce qui s'écrit

$$\|T(y_{x,\varepsilon} + tz) - x\|^2 = \psi(t) \leq \psi(0) = \|Ty_{x,\varepsilon} - x\|^2 = \varepsilon^2$$

pour tout $t \in [0; \eta]$. Par minimalité de $y_{x,\varepsilon}$, il vient

$$\forall t \in [0; \eta], \quad \|y_{x,\varepsilon}\|^2 \leq \|y_{x,\varepsilon} + tz\|^2 = \|y_{x,\varepsilon}\|^2 + 2t[y_{x,\varepsilon}|z] + t^2\|z\|^2$$

si bien que $\varphi(t) = \|y_{x,\varepsilon} + tz\|^2$ définit une fonction croissante sur $[0; \eta]$, ce qui entraîne $\varphi'(0) \geq 0$, c'est-à-dire $[y_{x,\varepsilon}|z] \geq 0$. \square

Définition 4.6. Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0; \|x\|$. Le nombre c précédent (qui est déterminé de manière unique lorsque T , x et ε sont ainsi fixés) sera appelé le coefficient de colinéarité associé au vecteur minimal $y_{T,x,\varepsilon}$.

Notations 4.7. Le réel c du lemme 4.5 dépend du triplet (T, x, ε) . À l'instar des notations (2.5) utilisées pour les vecteurs extrémaux, nous utiliserons les notations $c_{T,x,\varepsilon}$, $c_{x,\varepsilon}$, c_x ou encore c_ε selon le point de vue que nous choisirons.

La notation c précédente n'est pas en accord avec les diverses notations existantes. On peut en particulier mentionner que ce nombre c correspond au réel strictement négatif δ_ε du théorème 1 dans [7]), et au réel strictement négatif r du lemme 2.3 dans [40]. Ce changement traduit une volonté de manipuler des nombres positifs plutôt que négatifs dans les calculs, notamment ceux de la section 5.2.

L'intérêt du lemme précédent est de transférer, au moins partiellement dans un premier temps, un problème d'optimisation à une équation vectorielle. En effet, la connaissance du vecteur extrémal attaché à un triplet (T, x, ε) est, selon ce lemme, assujettie à celle du coefficient de colinéarité associé. Plus précisément, on peut remarquer que $y_{T,x,\varepsilon}$ est fonction de $c_{T,x,\varepsilon}$:

Remarque 4.8. Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0; \|x\|$. Alors

$$y_{T,x,\varepsilon} = (T^*T + c_{T,x,\varepsilon}I)^{-1}T^*x.$$

Démonstration. Selon le lemme 4.5, le réel $c_{x,\varepsilon}$ vérifie

$$(T^*T + c_{x,\varepsilon}I)y_{x,\varepsilon} = T^*x.$$

Comme $c_{x,\varepsilon} > 0$, on a $T^*T + c_{x,\varepsilon}I \geq c_{x,\varepsilon}I > 0$, donc $T^*T + c_{x,\varepsilon}I$ est inversible. Le résultat s'en déduit immédiatement. \square

4.1.2.2 Caractérisation des vecteurs extrémaux

Une des difficultés principales que l'on rencontre lorsque l'on souhaite calculer concrètement le vecteur extrémal associé à un triplet (T, x, ε) donné, est d'appréhender la minimalisation de la norme du vecteur. Il est en effet naturel, pour trouver $y_{T,x,\varepsilon}$, de commencer par résoudre l'équation $\|Ty - x\| = \varepsilon$ et ensuite de sélectionner le vecteur solution de norme minimale. Cette procédure s'apparente à un problème d'optimisation avec contrainte, en général difficile à résoudre.

Le lemme précédent apporte une amélioration dans ce processus, puisqu'il nous donne une nouvelle condition à vérifier. On peut donc chercher dans un premier temps les vecteurs vérifiant les deux relations : $\|Ty - x\| = \varepsilon$ et $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$; $T^*(Ty - x) = -cy$. Une fois cette présélection effectuée, on possède a priori un certain nombre de vecteurs susceptibles d'être le vecteur $y_{T,x,\varepsilon}$. Il faut alors procéder à un dernier tri à l'aide de la condition de minimalité.

En fait, cette dernière phase est inutile. Le théorème suivant montre en effet que la première étape est suffisante, c'est-à-dire que les deux relations précédentes fournissent à coup sûr un unique vecteur, qui est le vecteur $y_{T,x,\varepsilon}$. Plutôt que de vérifier la condition de minimalité, on est donc ramené à résoudre un système d'équations, ce qui fait de cette caractérisation un outil précieux dans la pratique.

Théorème 4.9. Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0; \|x\|]$. Le couple $(y_{T,x,\varepsilon}, c_{T,x,\varepsilon})$ est l'unique couple (y, c) de $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \|Ty - x\| = \varepsilon ; \\ (T^*T + cI)y = T^*x. \end{cases}$$

On peut adopter un point de vue différent sur ce résultat. En effet, en mixant la remarque précédente et ce dernier théorème, on constate que $c_{T,x,\varepsilon}$ est entièrement déterminé par la relation

$$\|(T(T^*T + cI)^{-1}T^* - I)x\| = \varepsilon.$$

Ensuite, on peut aisément calculer le vecteur minimal associé à (T, x, ε) , selon la même remarque (4.8). C'est dans cette optique que la preuve ci-dessous a été rédigée. On a jugé cependant plus pratique l'énoncé du théorème tel qu'il est proposé, puisqu'il ne requiert pas de manière concrète le calcul de l'inverse d'un opérateur.

Démonstration. Notons, pour tout réel c strictement positif,

$$T_c = T(T^*T + cI)^{-1}T^* - I.$$

L'opérateur T_c est bien défini, en utilisant le même argument qu'à la remarque précédente. Simplifions tout d'abord l'écriture de T_c . Pour tout $c > 0$, on a $T_c = \frac{1}{c}T(I + \frac{1}{c}T^*T)^{-1}T^* - I$. Dès que $c > \|T\|^2$, $0 < \frac{\|T^*T\|}{c} < 1$ donc le développement en série entière s'applique et permet d'effectuer le calcul sommatoire suivant :

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{c}T\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{c^k} (T^*T)^k\right)T^* - I \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} T(T^*T)^k T^*\right) - I \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{c^{k+1}} (TT^*)^{k+1}\right) - I \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{c^k} (TT^*)^k\right) - I, \end{aligned}$$

la dernière ligne découlant d'un changement d'indice. On reconnaît alors le développement en série de $-c(TT^* + cI)^{-1}$, qui coïncide donc avec T_c dès que $c > 1$. Par suite, l'unicité du prolongement analytique entraîne

$$\forall c > 0, \quad T_c = -c(TT^* + cI)^{-1}.$$

Posons $\mathcal{F} = \{c > 0 ; \|T_c x\| = \varepsilon\}$. Remarquons, comme nous l'avons fait juste après l'énoncé du théorème, qu'il suffit de montrer que \mathcal{F} est réduit à $\{c_{T,x,\varepsilon}\}$ pour prouver le résultat.

L'égalité $Ty_{T,x,\varepsilon} - x = T_c x$ et la remarque 2.6 entraînent que $c_{T,x,\varepsilon} \in \mathcal{F}$. Considérons la fonction F définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall c > 0, \quad F(c) = \|T_c x\|^2$. On écrit, pour tout $c > 0$,

$$\begin{aligned} F(c) &= c^2 \|(TT^* + cI)^{-1}x\|^2 \\ &= c^2 \langle (TT^* + cI)^{-1}x | (TT^* + cI)^{-1}x \rangle \\ &= c^2 \langle (TT^* + cI)^{-2}x | x \rangle \end{aligned}$$

car $(TT^* + cI)$ est positif, donc $(TT^* + cI)^{-1}$ l'est également. Par ailleurs, l'opérateur TT^* est positif, donc possède un calcul fonctionnel : en notant $E_{x,x}$ la mesure spectrale associée à TT^* et la paire (x, x) , on peut alors écrire, pour tout $c > 0$,

$$F(c) = c^2 \int_0^{\|T\|^2} \frac{1}{(t+c)^2} dE_{x,x}(t) = \int_0^{\|T\|^2} \frac{c^2}{(t+c)^2} dE_{x,x}(t).$$

Le paramètre t étant fixé positif, la fonction $f : c \mapsto \frac{c^2}{(t+c)^2}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall c > 0, f'(c) = \frac{2tc}{(t+c)^3} > 0$: la fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit que la fonction F est aussi strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , donc injective. Ainsi \mathcal{F} contient au plus un point. En conclusion, \mathcal{F} est réduit au seul point $c_{T,x,\varepsilon}$, et le résultat est prouvé. \square

4.1.3 Lieu de la minimisation

La minimisation de $y_{T,x,\varepsilon}$ se fait, nous l'avons vu dans les préliminaires, sur la sphère $\partial\mathcal{B}(x, \varepsilon)$, c'est-à-dire que nous cherchons le vecteur y de norme minimale satisfaisant à $\|Ty - x\| = \varepsilon$.

En fait, la minimisation ne se fait que sur une partie de cette sphère : l'objet de la proposition suivante est de tenter de l'identifier. Le résultat présenté dans [56] a été amélioré de sorte que la version ci-dessous détermine cet ensemble avec un peu plus de précision.

Proposition 4.10. *Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0; \|x\|$. Le vecteur $y_{T,x,\varepsilon}$ est le vecteur de norme minimale tel que $Ty_{T,x,\varepsilon}$ appartient à la portion de sphère*

$$\mathcal{V}_{x,\varepsilon} = \partial\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap \mathcal{B}(0, \sqrt{\|x\|^2 - \varepsilon^2}).$$

Démonstration. L'égalité $T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) = -cy_{x,\varepsilon}$ avec $c > 0$, due au lemme 4.5, entraîne

$$[Ty_{x,\varepsilon} - x | Ty_{x,\varepsilon}] = [T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) | y_{x,\varepsilon}] = -c\|y_{x,\varepsilon}\|^2 < 0,$$

ce qui signifie que l'angle formé par les vecteurs $Ty_{x,\varepsilon} - x$ et $Ty_{x,\varepsilon}$ est strictement obtu. Pour une meilleur compréhension, nous proposons la figure suivante.

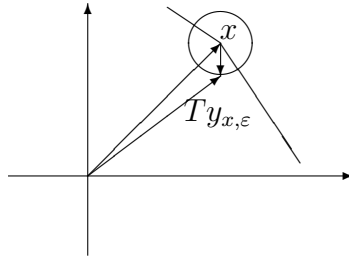


FIGURE 4.2 – La situation en dimension 2

Soit \mathcal{E} le sous-ensemble de \mathcal{H} contenant l'origine et délimité par les demi-droites (exclues) représentées sur le schéma. Tout vecteur y , tel que Ty ne se situe pas dans \mathcal{E} , ne convient pas : en effet, pour un tel vecteur, l'angle formé par les vecteurs $Ty - x$ et Ty est aigu au sens large. Les vecteurs appartenant à $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ n'ont donc pas à être pris en compte dans la recherche de $y_{x,\varepsilon}$.

Étendons la définition de \mathcal{E} dans le cas général. Désignons par \mathcal{C} le demi-cône dont les droites passent par x et sont orthogonales aux droites tangentes au cercle de centre x et de rayon ε . Il partage l'espace \mathcal{H} en deux ouverts, dont l'un contient 0 : on le note \mathcal{C}_1 . Alors l'ensemble \mathcal{E} est constitué des vecteurs dont l'image par T appartient à \mathcal{C}_1 .

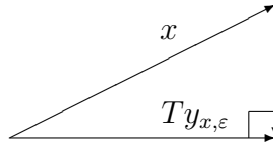


FIGURE 4.3 – Représentation graphique des points d'intersection

Ce schéma, proposé dans le cas où \mathcal{H} est de dimension 2, permet de constater que ces points d'intersection ont une norme égale à

$$\sqrt{\|x\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Dans le cas général, le raisonnement subsiste puisque le seul argument utilisé est l'orthogonalité. \square

Dans les sections suivantes, nous allons tenter de dégager quelques propriétés des applications $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$, $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$. Notamment, nous nous attacherons à l'étude des régularités de ces fonctions : nous allons montrer que la première est analytique, et nous nous pencherons ensuite sur la seconde, où nous obtiendrons divers résultats.

Nous l'avons mentionné en introduction, l'espace ambiant est un espace de Hilbert. Il est à noter que les techniques utilisées précédemment sont typiquement issues de cette structure, notamment l'utilisation du produit scalaire et l'interprétation du produit scalaire d'espace pré-hilbertien réel, qui ont été faites dans les différents lemmes. Dans ces sections encore, le caractère hilbertien est au coeur des démonstrations.

4.2 Régularité en ε

Étant donné un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ à image dense et un vecteur $x \in \mathcal{H}$ non nul, on souhaite étudier dans ce paragraphe l'évolution des vecteurs minimaux associés à (T, x, ε) en fonction du paramètre réel $\varepsilon \in]0; \|x\|]$.

L'étude concerne les variations selon ce seul paramètre ε : afin de simplifier les notations, on notera dans ce paragraphe y_ε et c_ε pour désigner respectivement $y_{x,\varepsilon}$ et $c_{x,\varepsilon}$. On pourra consulter la notation 2.5 et la définition 4.6 pour un rappel de ces notions.

Le point de départ de cette section est la relation présentée dans le lemme 4.5. Cette égalité exprime un lien fort entre le vecteur $y_{x,\varepsilon}$ et le nombre $c_{x,\varepsilon}$ (ainsi que T et x). Par conséquent, les régularités de ces deux objets au regard du paramètre ε vont être liées : tout résultat concernant la régularité de l'un va pouvoir être répercuté sur l'autre. Dès lors, il semble important de mener une étude conjointe des régularités de ces deux quantités. Nous allons assez largement opter pour cette stratégie dans cette section.

4.2.1 Analyticité des applications $\varepsilon \mapsto c_{x,\varepsilon}$ et $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$

Sur le thème de la régularité du vecteur $y_{x,\varepsilon}$ par rapport aux paramètres x et ε , la première étude a été menée par Ansari et Enflo dans [7] : ils ont prouvé l'analyticité de l'application $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$.

Ici, nous commençons par étudier la dépendance du paramètre $c_{x,\varepsilon}$, introduit dans la définition 4.6, par rapport aux données x et ε .

Proposition 4.11. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $\overline{\text{Im}(T)} = \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \|x\|$, c_ε désigne le réel strictement positif de la définition 4.6.*

L'application $\varepsilon \mapsto c_\varepsilon$ est analytique sur $]0; \|x\|]$.

Démonstration. Étudier l'analyticité de $\varepsilon \mapsto c_\varepsilon$ revient à étudier l'analyticité de sa fonction réciproque $c_\varepsilon \mapsto \varepsilon$; celle-ci est bien définie par l'unicité de y_ε . Or, selon la remarque 4.8, on a

$$\varepsilon^2 = \|Ty_\varepsilon - x\|^2 = \|T(T^*T + c_\varepsilon I)^{-1}T^*x - x\|^2,$$

ce qui entraîne l'analyticité de $c_\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$, qui est par ailleurs injective, donc $c_\varepsilon \mapsto \varepsilon$ est analytique. Ainsi le lemme est prouvé. \square

Fort de cette proposition, on obtient aisément le résultat suivant, dû à Ansari et Enflo ([7]) :

Proposition 4.12. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $\overline{\text{Im}(T)} = \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. La fonction $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon$ est analytique sur $]0; \|x\|$.*

Démonstration. Ce résultat se déduit directement de la proposition 4.11 et de la remarque 4.8. \square

La propriété suivante va être utile dans le paragraphe suivant ; nous l'obtenons grâce à une preuve élémentaire.

Remarque 4.13. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.*

Alors la fonction $\varepsilon \mapsto \|y_\varepsilon\|$ est décroissante sur $]0; \|x\|$.

Démonstration. Si $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < \|x\|$, on a $\|Ty_{\varepsilon_1} - x\| = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, donc par minimalité de la norme du vecteur y_{ε_2} , on a effectivement $\|y_{\varepsilon_2}\| \leq \|y_{\varepsilon_1}\|$. \square

Nous allons observer, dans les deux paragraphes suivants, le comportement asymptotique de $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$ au voisinage de 0 et de $\|x\|$; et nous nous intéresserons de manière plus approfondie à l'application $\varepsilon \mapsto \|y_{x,\varepsilon}\|$ au paragraphe 4.2.4.

4.2.2 Lien avec le pseudo-inverse de Moore-Penrose

La méthode d'Ansari-Enflo permet d'obtenir des résultats forts quant aux problèmes du sous-espace invariant et du sous-espace hyperinvariant. Cependant, le but initial de l'introduction des vecteurs minimaux, comme nous l'avons rappelé en préliminaires, est de mesurer le défaut de surjectivité d'un opérateur à image dense.

Il serait donc intéressant de tester si cette mesure est cohérente, au sens suivant : T et x étant fixés comme précédemment, quel est le comportement de $y_{x,\varepsilon}$ lorsque ε tend vers 0 ? On testera le cas particulièrement fructueux où $x \notin \text{Im}(T)$; mais on va également étudier le cas

où $x \in \text{Im}(T)$ ce qui nous permettra de savoir si les vecteurs minimaux sont de bons outils pour pallier au défaut de bijectivité de T .

Proposition 4.14. *Soient T un opérateur à image dense et x un vecteur non nul de \mathcal{H} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $x \in \text{Im}(T)$;
- (ii) y_ε converge faiblement dans \mathcal{H} lorsque ε tend vers 0 ;
- (iii) y_ε converge en norme vers l'unique antécédent de x par T appartenant à $\ker(T)^\perp$, lorsque ε tend vers 0.

De plus, si $x \notin \text{Im}(T)$, alors $\|y_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$; en particulier, $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon$ diverge lorsque ε tend vers 0.

Démonstration. Prouvons que (i) entraîne (iii). Soit $x \in \text{Im}(T)$. Remarquons qu'il existe un unique $a \in \ker(T)^\perp$ tel que $Ta = x$: en effet, supposons par l'absurde qu'il existe deux tels vecteurs a_1 et a_2 , alors $T(a_1 - a_2) = 0_E$ donc $a_1 - a_2 \in \ker(T)$ ce qui est contradictoire.

On a $\|Ta - x\| = 0 \leq \varepsilon$, donc par minimalité de y_ε , il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|y_\varepsilon\| \leq \|a\|. \quad (4.1)$$

Supposons par l'absurde que $\|y_\varepsilon - a\|$ ne tende pas vers 0 lorsque ε tend vers 0. C'est donc qu'il existe un réel $\rho > 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 telle que $\|y_{\varepsilon_n} - a\| \geq \rho$.

Selon (4.1), la suite $(y_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varepsilon_{\varphi(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un vecteur $b \in \mathcal{H}$ vérifiant $\|b\| \leq \|a\|$. Or

$$\|a\| = \inf\{\|z\| ; z \in \mathcal{H} \text{ et } Tz = x\}.$$

En effet, si un vecteur z vérifie $Tz = x$, en posant $z = z_1 + z_2$ avec $(z_1, z_2) \in \ker(T) \times \ker(T)^\perp$, on a $z_2 = a$ et $\|z\| \geq \|z_2\|$. On en déduit que $\|b\| = \|a\|$. Enfin, comme $\{z ; Tz = x\}$ est un convexe fermé, la borne inférieure de $\{\|z\| ; Tz = x\}$ est atteinte en un unique vecteur de \mathcal{H} : c'est donc que $a = b$.

La remarque 4.13 nous permet d'affirmer que $(\|y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\|)$ est croissante,

majorée par $\|a\|$, donc elle converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell \leq \|a\|$. Le même raisonnement que précédemment nous permet d'écrire $\ell = \|a\|$. En conclusion, on observe :

$$\|y_{\varepsilon_{\varphi(n)}} - a\|^2 = \|a\|^2 + \|y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\|^2 - 2[a|y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi y_ε converge en norme vers l'unique antécédent de x par T appartenant à $\ker(T)^\perp$, lorsque ε tend vers 0.

Pour établir les équivalences, il nous reste à montrer que (ii) implique (i). Supposons que y_ε converge faiblement vers un certain vecteur a lorsque ε tend vers 0. Alors Ty_ε converge faiblement vers Ta . Or l'inégalité $\|Ty_\varepsilon - x\| \leq \varepsilon$ permet aussi d'écrire que Ty_ε tend vers x . Donc $x = Ta$ appartient bien à l'image de T .

Étudions le cas où $x \notin \text{Im}(T)$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\|y_{\varepsilon_n}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\|y_{\varepsilon_{\varphi(n)}}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un certain vecteur, que l'on nomme z . Par conséquent $Ty_{\varepsilon_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tz$. Or $Ty_{\varepsilon_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, donc $Tz = x$ et $x \in \text{Im}(T)$, ce qui est absurde. C'est donc que $\|y_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$. \square

Ce dernier résultat permet de calculer la limite de c_ε lorsque ε tend vers 0.

Corollaire 4.15. *Soient T un opérateur à image dense et $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Pour tout $\varepsilon \in]0; \|x\|$, c_ε désigne le réel strictement positif introduit dans la définition 4.6. Alors on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon = 0.$$

Démonstration. Comme $Ty_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} x$, en utilisant le lemme 4.5, on a

$$c_\varepsilon y_\varepsilon = T^*(x - Ty_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T^*(0) = 0.$$

A fortiori, on peut écrire $c_\varepsilon \|y_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, puis $c_\varepsilon = \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{\|y_\varepsilon\|} \right)$. Utilisons la proposition 4.14, et pour cela distinguons les deux cas suivants.

Si $x_0 \notin \text{Im}(T)$, on a $\|y_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$ donc $\frac{1}{\|y_\varepsilon\|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et $c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Si $x_0 \in \text{Im}(T)$: la fonction $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon$ converge vers un vecteur non nul, donc l'application $\varepsilon \mapsto \frac{1}{\|y_\varepsilon\|}$ est bornée. On en déduit $c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. \square

4.2.3 Comportement lorsque ε tend vers $\|x\|$

Étant donné un opérateur à image dense T , un vecteur x non nul et un réel $\varepsilon \in]0; \|x\|$, on désigne encore par y_ε (respectivement c_ε) le vecteur minimal (respectivement le coefficient de colinéarité) associé au triplet (T, x, ε) . Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenu le comportement des fonctions $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon$ et $\varepsilon \mapsto c_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0. De manière symétrique, nous présentons à présent le comportement de ces deux fonctions lorsque ε tend vers $\|x\|$.

Proposition 4.16. *Soient T un opérateur à image dense et x un vecteur non nul. Pour tout $\varepsilon \in]0; \|x\|$, c_ε désigne le réel strictement positif introduit dans la définition 4.6. Alors, lorsque ε tend vers $\|x\|$, on a les deux assertions suivantes :*

- y_ε converge fortement vers le vecteur nul ;
- c_ε tend vers $+\infty$.

Démonstration. Commençons par prouver que y_ε converge faiblement vers 0 lorsque ε tend vers $\|x\|$.

Selon la proposition 4.10, pour tout $\varepsilon \in]0; \|x\|$, on a $Ty_\varepsilon \in \mathcal{V}_{x,\varepsilon}$ donc

$$\|Ty_\varepsilon\| < \sqrt{\|x\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Selon le théorème des gendarmes, $\|Ty_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \|x\|} 0$, donc Ty_ε converge fortement vers 0 lorsque ε tend vers $\|x\|$. De plus, $\varepsilon \mapsto \|y_\varepsilon\|$ est décroissante et minorée par 0, ce qui entraîne que $\|y_\varepsilon\|$ converge quand ε tend vers $\|x\|$, et a fortiori, y_ε est bornée lorsque ε est au voisinage de $\|x\|$. Par conséquent, on peut construire une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $\|x\|$ et telle que $(y_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ soit faiblement convergente vers un certain vecteur b de \mathcal{H} .

On en déduit que Ty_{ε_k} converge faiblement vers Tb . Or, Ty_ε converge

fortement vers 0 lorsque ε tend vers $\|x\|$, donc Ty_{ε_k} converge fortement vers 0, ce qui implique $Tb = 0$, c'est-à-dire $b \in \ker(T)$.

Par ailleurs, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad y_{\varepsilon_k} \in (\ker T)^\perp.$$

En effet, pour tout entier naturel k , on décompose y_{ε_k} selon la somme directe $\mathcal{H} = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$:

$$y_{\varepsilon_k} = y'_{\varepsilon_k} + y''_{\varepsilon_k} \quad \text{avec } (y'_{\varepsilon_k}, y''_{\varepsilon_k}) \in (\ker T) \times (\ker T)^\perp.$$

Alors $Ty_{\varepsilon_k} = Ty''_{\varepsilon_k}$, donc $\|Ty''_{\varepsilon_k} - x\| = \varepsilon$. Par ailleurs, on a clairement $\|y''_{\varepsilon_k}\| \leq \|y_{\varepsilon_k}\|$. L'unicité du vecteur minimal y_{ε_k} nous permet alors d'affirmer que $y''_{\varepsilon_k} = y_{\varepsilon_k}$, c'est-à-dire que $y_{\varepsilon_k} \in (\ker T)^\perp$.

Le sous-espace vectoriel $(\ker T)^\perp$ étant fermé, la limite faible b de la suite (y_{ε_k}) appartient à $(\ker T)^\perp$. Ainsi

$$b \in \ker T \cap (\ker T)^\perp = \{0\}.$$

L'unicité de cette valeur d'adhérence permet de dire que y_ε converge faiblement vers le vecteur nul lorsque ε tend vers $\|x\|$.

Montrons à présent que c_ε tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers $\|x\|$. Par l'absurde, supposons que c_ε ne tende pas vers $+\infty$. Alors il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de limite $\|x\|$ telle que (c_{ε_k}) soit bornée. Quitte à extraire une sous-suite de $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que (c_{ε_k}) est convergente; notons c sa limite. D'une part, $(T^*T + c_{\varepsilon_k}I)$ converge dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vers $T^*T + cI$. D'autre part, selon la proposition précédente, (y_{ε_k}) converge faiblement vers 0.

Par ailleurs, le théorème 4.9 nous permet de remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (T^*T + c_{\varepsilon_k}I)y_{\varepsilon_k} = T^*x.$$

En prenant la limite faible dans cette dernière égalité, on observe donc que $T^*x = 0$, c'est-à-dire que $x \in \ker(T^*)$. Or

$$\ker(T^*) \subset \overline{\ker(T^*)} = (\operatorname{Im} T)^\perp = (\overline{\operatorname{Im} T})^\perp = \{0\},$$

donc $x = 0$, ce qui est absurde. C'est donc que $c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \|x\|} +\infty$.

Selon la remarque 4.8, $y_\varepsilon = (T^*T + c_\varepsilon I)^{-1}T^*x$. Comme $c_\varepsilon \rightarrow +\infty$, $(T^*T + c_\varepsilon I)^{-1}$ converge dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vers l'application nulle. On en déduit que y_ε converge fortement vers 0, ce qui achève la preuve. \square

4.2.4 Étude de l'application $\varepsilon \mapsto \|y_{x,\varepsilon}\|$

P. Enflo et T. Høim ont approfondi l'étude de la régularité de la fonction $\varepsilon \mapsto y_{x,\varepsilon}$ en s'intéressant à l'application N définie comme suit.

Notations 4.17. *Pour tout opérateur T à image dense et tout vecteur non nul x , on note N l'application définie sur $]0; \|x\|$ par*

$$\forall \varepsilon \in]0; \|x\|[, \quad N(\varepsilon) = \|y_\varepsilon\|.$$

Les deux auteurs précédents ont notamment obtenu le théorème suivant (cf. [31]).

Théorème 4.18. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $\overline{\text{Im } T} = \mathcal{H}$, et $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. La fonction N de la notation 4.17 est convexe et dérivable sur $]0; \|x\|$; sa dérivée s'exprime sous la forme*

$$\forall \varepsilon \in]0; \|x\|[, \quad N'(\varepsilon) = \frac{\|y_\varepsilon\|}{\cos(\theta_\varepsilon) \|Ty_\varepsilon\|},$$

où θ_ε désigne l'angle entre les vecteurs $Ty_\varepsilon - x$ et Ty_ε ; et

$$\forall \varepsilon \in]0; \|x\|[, \quad N(\varepsilon)N'(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{c_\varepsilon}.$$

Par une approche différente et élémentaire, nous avons déjà prouvé que N est décroissante sur $]0; \|x\|$ (4.13).

Pour conclure la section concernant l'évolution des vecteurs extrémaux en fonction du paramètre ε , nous allons présenter les deux seules situations envisageables concernant l'application N .

Proposition 4.19. *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ à image dense, et $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Alors la fonction N , introduite dans la notation 4.17, est convexe, strictement décroissante et dérivable sur $]0; \|x\|$.*

Elle est donc également bijective de $]0; \|x\|$ dans $]0; r[$ où :

- $r = +\infty$ si $x \notin \text{Im}(T)$;
- r est la norme de l'unique antécédent de x par T appartenant à $\ker(T)^\perp$ si $x \in \text{Im}(T)$.

Démonstration. La convexité et la décroissance ont été obtenues précédemment, de même que la valeur de r . La stricte décroissance et la continuité s'en déduisent. Ces deux derniers arguments et les propositions 4.14 et 4.16 permettent de prouver la bijectivité de $]0; \|x\|$ dans $]0; r[$. \square

Pour résumer, le graphe de la fonction N est donc de l'un des deux types suivants.

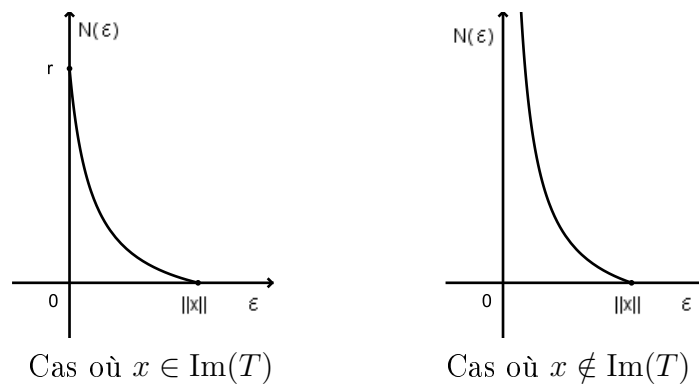


FIGURE 4.4 – Deux situations pour la courbe représentative de N

Remarque 4.20. Dans toute la thèse, l'espace vectoriel \mathcal{H} considéré est supposé de Hilbert. Cependant, un certain nombre de propriétés énoncées dans ce paragraphe sont encore valables si l'on suppose seulement que \mathcal{H} est de Banach. Citons ainsi les propriétés qui ont été obtenues par des preuves de nature banachique.

Si \mathcal{H} est un espace de Banach, si T est un opérateur à image dense agissant sur \mathcal{H} et si x est un vecteur non nul, alors la fonction N (notation 4.17) est décroissante, convexe et continue sur $]0; \|x\|$.

Démonstration. La preuve de la décroissance donnée dans cette thèse (remarque 4.13) est de nature Banachique. Il en est de même de la preuve de la convexité présentée dans [31]. La continuité sur l'ouvert $]0; \|x\|$ s'en déduit immédiatement. \square

Cette remarque est très intéressante, dans la mesure où la continuité de N va être un outil central pour la section suivante (4.3), dans laquelle nous établissons des propriétés de régularité concernant la fonction $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$.

Notons tout de même que dans le cas Hilbertien, l'analyticité de $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon$ fournit un autre argument permettant d'établir la continuité de N .

4.3 Régularité en x

4.3.1 Étude de l'application $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$

4.3.1.1 Continuité globale

Penchons-nous d'abord sur la continuité de l'application annoncée, composée avec la norme hilbertienne.

Proposition 4.21. *Soient T un opérateur à image dense, et $\varepsilon > 0$. Alors l'application $x \mapsto \|y_{x,\varepsilon}\|$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{H} \setminus \mathcal{B}(0, \varepsilon]$.*

Démonstration. Soit $\mu > 0$. L'application $\varepsilon \mapsto \|y_{x,\varepsilon}\|$ est continue selon la remarque 4.20. De fait, il existe un réel ν tel que $0 < \nu < \varepsilon$, vérifiant

$$\forall \eta \in [\varepsilon - \nu; \varepsilon + \nu], \quad \left| \|y_{x,\eta}\| - \|y_{x,\varepsilon}\| \right| < \mu.$$

En particulier, on a donc

$$\|y_{x,\varepsilon-\nu}\| \leq \|y_{x,\varepsilon}\| + \mu \quad \text{et} \quad \|y_{x,\varepsilon+\nu}\| \geq \|y_{x,\varepsilon}\| - \mu.$$

Soit $x' \in \mathcal{B}(x, \nu)$: alors, par application de l'inégalité triangulaire, on a $\mathcal{B}(x, \varepsilon - \nu) \subset \mathcal{B}(x', \varepsilon) \subset \mathcal{B}(x, \varepsilon + \nu)$. Par suite, la définition des vecteurs minimaux permet d'écrire $\|y_{x,\varepsilon+\nu}\| \leq \|y_{x',\varepsilon}\| \leq \|y_{x,\varepsilon-\nu}\|$. Ainsi, tout vecteur x' de la boule $\mathcal{B}(x, \nu)$ satisfait à

$$\|y_{x,\varepsilon}\| - \mu \leq \|y_{x',\varepsilon}\| \leq \|y_{x,\varepsilon}\| + \mu$$

ce qui démontre la continuité de l'application cherchée. \square

Remarque 4.22. *Cette proposition est à relier avec la remarque 4.20 : elle est encore valable si l'on suppose seulement que \mathcal{H} est un espace de Banach.*

Grâce à cette propriété, nous allons voir comment obtenir la continuité globale en x . La démonstration utilise en effet la continuité de l'application $x \mapsto \|y_x\|$, le théorème de Pythagore, ainsi que le théorème des fermés emboîtés. Seule l'utilisation du théorème de Pythagore à la fin de la preuve donne une nature Hilbertienne au résultat suivant.

Théorème 4.23. *Soient T un opérateur à image dense, et $\varepsilon > 0$. Alors l'application $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$ est continue en tout point de l'ouvert $\mathcal{H} \setminus \mathcal{B}(0, \varepsilon]$.*

Démonstration. Étudions la continuité au point $x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{B}(0, \varepsilon]$. Soit donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans \mathcal{H} vers x . Cette convergence entraîne l'existence d'un rang N tel que $\forall n \geq N, \|x_n\| > \varepsilon$. On peut donc considérer $y = y_{x,\varepsilon}$ et, pour tout $n \geq N, y_n = y_{x_n,\varepsilon}$. Il s'agit alors de prouver que la suite $(y_n)_{n \geq N}$ converge vers y .

Remarquons d'abord que, pour tout $M \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \forall \nu > 0, \quad \exists N_\nu \geq M ; \\ \forall n \geq N_\nu, \quad y_n \in \{z \in \mathcal{H}; \|Tz - x\| \leq \varepsilon + \nu\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En effet, si $\nu > 0$, il existe un entier $N_\nu \geq M$ tel que pour tout $n \geq N_\nu, \|x_n - x\| \leq \nu$ donc selon l'inégalité triangulaire $\|Ty_n - x\| \leq \varepsilon + \nu$.

De cette manière, on dispose en particulier d'un entier $N_1 \geq N$ en choisissant $\nu = 1$ dans (4.2). Notons $\eta_{N_1} = 1$. On dispose ensuite d'un entier $N_{1/2}$ que l'on peut choisir supérieur ou égal à N_1 en choisissant $\nu = \frac{1}{2}$ dans (4.2). Notons, pour tout $n \in [N_1 + 1; N_{1/2} - 1] \cap \mathbb{N}$, $\eta_n = 1$ et $\eta_{N_{1/2}} = \frac{1}{2}$. En considérant des entiers $N_{1/n}$ vérifiant (4.2) pour $\nu = \frac{1}{n}$, on construit par récurrence une suite décroissante $(\eta_n)_{n \geq N_1}$ de réels strictement positifs, qui converge vers 0, et telle que pour tout $n \geq N_1$ et tout $k \geq n$, on ait $y_k \in \{z \in \mathcal{H}; \|Tz - x\| \leq \varepsilon + \eta_n\}$.

Posons alors, pour tout $n \geq N_1$,

$$F_n = \left\{ z \in \mathcal{H}; \|Tz - x\| \leq \varepsilon + \eta_n \text{ et } \|z\| \leq \sup_{k \geq n} \{\|y_k\|, \|y\|\} \right\}.$$

Cet ensemble est convexe fermé, et contient y_n et y . Grâce au théorème de Pythagore, son diamètre est majoré par le réel

$$2\sqrt{\sup_{k \geq n} \{\|y_k\|, \|y\|\}^2 - \|y_{x, \varepsilon + \eta_n}\|^2}.$$

Les ensembles F_n constituent donc une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. C'est donc que leur intersection est réduite à y , ce qui force la suite (y_n) à converger vers y . \square

4.3.1.2 Étude directionnelle

Maintenant, nous allons obtenir divers résultats sur l'application précédente, en utilisant des directions particulières, pour ε et x fixés. On se limite à une étude directionnelle car la démonstration est basée sur l'argument de la proposition 4.10, à savoir le fait que la minimisation se situe sur une portion de sphère et non la boule toute entière.

Voyons donc, dans un premier temps, ce résultat global, dans une seule direction bien particulière, la direction x :

Proposition 4.24. *Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, et $0 < \varepsilon < \|x\|$. Alors la fonction*

$$\left] \frac{\varepsilon}{\|x\|}; +\infty \right[\begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|y_{tx, \varepsilon}\| \end{array}$$

est croissante.

Démonstration. Nous allons étudier la fonction $t \mapsto \|y_{(1+t)x, \varepsilon}\|$ par soucis de simplicité. La proposition 4.10 montre que le vecteur minimal associé à (T, x, ε) est le résultat d'une minimisation de la norme des vecteurs dont l'image par T appartient à l'ensemble $\mathcal{V}_{x, \varepsilon}$, défini dans la proposition 4.10. On peut alors remarquer que

$$\mathcal{V}_{(1+t)x, \varepsilon} \subset \mathcal{B}(x, \varepsilon]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit, par exemple pour t appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2}\right]$. En effet, si $x' \in \mathcal{V}_{(1+t)x, \varepsilon}$, on a les deux conditions

$$\|(1+t)x - x'\| = \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x'\|^2 \leq (1+t)^2 \|x\|^2 - \varepsilon^2.$$

Écrivons $x' = (1+t)x + k$ pour $k \in \mathcal{H}$. On peut alors développer : $\|x'\|^2 = (1+t)^2 \|x\|^2 + 2(1+t)[x|k] + \varepsilon^2 \leq (1+t)^2 \|x\|^2 - \varepsilon^2$, pour obtenir

$$\varepsilon^2 + (1+t)[x|k] \leq 0.$$

Par ailleurs $x' - x = tx + k$, donc l'inégalité $\|x' - x\| \leq \varepsilon$ équivaut à $t\|x\|^2 + 2[x|k] \leq 0$. Or $t\|x\|^2 + 2[x|k] \leq t\|x\|^2 - 2\frac{\varepsilon^2}{1+t}$, donc il suffit de trouver les réels strictement positifs t tels que le dernier nombre soit négatif, c'est-à-dire

$$(1+t)t\|x\|^2 - 2\varepsilon^2 \leq 0.$$

Une étude de ce polynôme du second degré montre qu'il possède deux racines, l'une négative, et l'autre positive, égale à

$$\frac{\sqrt{\|x\|^2 + 8\varepsilon^2}}{2\|x\|} - \frac{1}{2}.$$

Il reste à voir que la borne annoncée précédemment est inférieure à cette dernière. Or, comme $\varepsilon < \|x\|$, on a bien

$$\frac{\sqrt{\|x\|^2 + 8\varepsilon^2}}{2\|x\|} - \frac{1}{2} = \frac{4\varepsilon^2}{\|x\|(\sqrt{\|x\|^2 + 8\varepsilon^2} + \|x\|)} \geq \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2}.$$

Enfin, par minimalité du vecteur $y_{x, \varepsilon}$, il vient $\|y_{x, \varepsilon}\| \leq \|y_{(1+t)x, \varepsilon}\|$, et l'application est croissante sur $\left[0, \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2}\right]$. On applique le même raisonnement avec $x_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\|x\|^2}\right)x$ à la place de x pour obtenir la croissance de $t \mapsto \|y_{(1+t)x_1, \varepsilon}\|$ sur $\left[0, \frac{\varepsilon^2}{\|x_1\|^2}\right]$. En réitérant, on obtient la croissance de toute fonction $t \mapsto \|y_{(1+t)x_n, \varepsilon}\|$ sur $\left[0, \frac{\varepsilon^2}{\|x_n\|^2}\right]$, où la suite $(x_n)_n$ est définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\|x_n\|^2}\right)x_n$ pour tout entier naturel n .

FIGURE 4.5 – Représentation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur la droite des réels

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+1}\| = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\|x_n\|^2}\right)\|x_n\| = \|x_n\| + \frac{\varepsilon^2}{\|x_n\|}$. La suite $(\|x_n\|)_n$ est donc croissante. Or, la fonction $f : u \mapsto u + \frac{\varepsilon^2}{u}$ n'a pas de point fixe, de fait la suite $(\|x_n\|)_n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On conclut donc par la croissance de la fonction $t \mapsto \|y_{(1+t)x,\varepsilon}\|$ sur $[0; +\infty[$, et en changeant x (on le prend dans la même direction, mais de norme aussi proche de ε que l'on veut), on obtient bien la croissance sur $\left] \frac{\varepsilon}{\|x\|} - 1; +\infty \right[$, ce qui équivaut à la croissance de la fonction $t \mapsto \|y_{tx,\varepsilon}\|$ sur $\left] \frac{\varepsilon}{\|x\|}, +\infty \right[$. \square

Cette proposition ne peut pas être généralisée à toutes les directions, comme le prouve le contre-exemple suivant.

Exemple 4.25. Avec les notations précédentes, on pose $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $T = \text{Id}_{\mathbb{C}^2}$, $x = (2; -2)$ et $\varepsilon = 1$.

Alors la fonction $t \mapsto \|y_{x+th,\varepsilon}\|$, dans la direction $h = (0; 2)$, est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Justification. En effet, par définition, le vecteur $y_{x+th,\varepsilon}$ appartient à $T^{-1}(\partial\mathcal{B}(x+th,\varepsilon))$ donc il est solution de l'équation $\|Ty - x - th\|_2 = \varepsilon$. En posant $y = (\lambda; \mu)$, on obtient $(\lambda - 2)^2 + (\mu + 2 - 2t)^2 = 1$, qui est l'équation du cercle \mathcal{C} de centre $C = (2; 2t - 2)$ et de rayon 1. Ainsi

$$\|y_{x+th,\varepsilon}\| = d(O, \mathcal{C}) = OC - r = 2\sqrt{(t-1)^2 + 1} - 1$$

où d désigne la distance entre deux points de \mathbb{C}^2 . Une simple étude de la fonction $t \mapsto 2\sqrt{(t-1)^2 + 1} - 1$ permet de conclure. \square

Dans un deuxième temps, nous proposons divers remarques et compléments. Du point de vue directionnel, on s'intéresse à l'application $x \mapsto y_x$ dans toute une gamme de directions, contenues dans un cône que l'on va exhiber.

Proposition 4.26. *Soient T un opérateur à image dense, x un vecteur non nul, et ε un réel appartenant à $]0; \|x\|$. Fixons $\rho \in]0; \varepsilon$. Alors, pour tout vecteur h appartenant à l'ensemble*

$$\mathcal{C} = \{h \in \mathcal{H}; h - x \in \mathcal{B}(0, \rho)\},$$

on a les inégalités

$$\|y_{x,\varepsilon}\| \leq \left\| y_{x, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2\|x\|^2}} \right\| \leq \|y_{x+th,\varepsilon}\| \leq \|y_{x,\varepsilon-t\|x\|}\|$$

pour tout réel strictement positif t suffisamment petit.

Démonstration. Considérons un vecteur h de \mathcal{C} , et posons $u = h - x$. Pour commencer, nous pouvons remarquer les inclusions

$$\mathcal{B}(x, \varepsilon - t\|x\|) \subset \mathcal{B}(x + th, \varepsilon]$$

et

$$\mathcal{V}_{x+th,\varepsilon} \subset \mathcal{B}\left(x, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2\|x\|^2}\right] \subset \mathcal{B}(x, \varepsilon]$$

pour tout réel strictement positif t suffisamment petit. La première et la dernière sont claires. Il nous suffit donc de démontrer l'inclusion $\mathcal{V}_{x+th,\varepsilon} \subset \mathcal{B}\left(x, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2\|x\|^2}\right]$.

Soit donc x' un élément de $\mathcal{V}_{x+th,\varepsilon}$, que l'on écrit $x' = x + th + k$, avec $k \in \mathcal{H}$. L'appartenance de x' à $\mathcal{V}_{x+th,\varepsilon}$ se traduit par le système d'inéquations

$$\begin{cases} \|k\| = \|x' - (x + th)\| = \varepsilon \\ \|x'\|^2 \leq \|x + th\|^2 - \varepsilon^2 \end{cases} .$$

En développant x' , la dernière inégalité devient $\varepsilon^2 + [x|k] + t[h|k] \leq 0$. L'écriture $h = x + u$ permet de reformuler l'inégalité précédente pour obtenir $\varepsilon^2 + (1+t)[x|k] + t[u|k] \leq 0$. On en déduit finalement la majoration de $[x|k]$ suivante

$$[x|k] \leq -\frac{1}{1+t}(\varepsilon^2 + t[u|k]). \quad (4.3)$$

On cherche un réel t' strictement positif tel que pour tout $t \in [0; t']$, le vecteur $x' = x + th + k$ appartienne à $\mathcal{B}\left(x, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2\|x\|^2}\right]$. Cela revient

à trouver un réel t' strictement positif tel que pour tout $t \in [0; t']$, $\|th + k\|^2 \leq \varepsilon^2 - t^2\|x\|^2$, c'est-à-dire $t(\|h\|^2 + \|x\|^2) + 2[h|k] \leq 0$, ce qui s'écrit encore, puisque $h = x + u$,

$$t(2\|x\|^2 + \|u\|^2) + 2[x|k] + 2[u|k] \leq 0.$$

Selon l'inégalité (4.3), on voit que

$$\begin{aligned} & t(2\|x\|^2 + \|u\|^2) + 2[x|k] + 2[u|k] \\ & \leq t(2\|x\|^2 + \|u\|^2) - \frac{2}{1+t}(\varepsilon^2 + t[u|k]) + 2[u|k], \end{aligned}$$

ainsi il suffit de trouver $t' > 0$ tel que pour tout $t \in [0; t']$, le second membre soit négatif ou nul, c'est-à-dire $t^2 + t + 2\frac{[u|k]}{2\|x\|^2 + \|u\|^2} \leq 0$. Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|[u|k]| \leq \|u\|\|k\| = \varepsilon\|u\|$. Par conséquent, il suffit de trouver $t' > 0$ tel que pour tout $t \in [0; t']$, on ait

$$t^2 + t + 2\varepsilon\varphi(\|u\|) \leq 0 \tag{4.4}$$

où l'on a noté φ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \varphi(r) = \frac{r - \varepsilon}{2\|x\|^2 + r^2}.$$

Cette application est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall r \in \mathbb{R}$, $\varphi'(r) = \frac{2\|x\|^2 - r^2 + 2r\varepsilon}{(2\|x\|^2 + r^2)^2}$. φ' possède deux zéros dont un seul est positif : il s'agit du nombre $r_1 = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2\|x\|^2}$. Comme φ' est positive sur $[0; r_1]$, φ est croissante sur ce segment et en particulier sur $[0; \rho]$. Comme $\varphi(\rho) < 0$, on peut trouver $t' > 0$ tel que tout $t \in [0; t']$ vérifie l'équation (4.4) dans le cas où $\|u\| = \rho$. Par croissance de φ , cette valeur de t' convient pour tout vecteur u tel que $\|u\| < \rho$. L'inclusion

$$\mathcal{V}_{x+th, \varepsilon} \subset \mathcal{B}\left(x, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2\|x\|^2}\right]$$

est donc prouvée pour tout réel positif t suffisamment petit.

Par conséquent, en mêlant les inclusions données en début de preuve et la définition des vecteurs minimaux, nous obtenons effectivement les inégalités souhaitées. \square

Au regard de la proposition 4.26, une des prochaines étapes dans l'étude de la régularité de l'application $x \mapsto y_{x,\varepsilon}$ serait d'obtenir des résultats quant à la différentiabilité de l'application $x \mapsto y_x$, en observant par exemple la différentiabilité dans un certain nombre de directions.

Remarque 4.27. *Dans la seule direction x , on peut déduire facilement l'analyticité de $t \mapsto y_{T,(1+t)x,\varepsilon}$ de celle de $\varepsilon \mapsto y_{T,x,\varepsilon}$, mais celle-ci ne permet cependant pas de déduire la croissance de l'application, qui a été démontrée en proposition 4.24.*

4.3.2 Étude de l'application $x \mapsto c_{x,\varepsilon}$

Comme première application du théorème de continuité de $x \mapsto y_x$ (théorème 4.23), nous obtenons la continuité de l'application $x \mapsto c_{x,\varepsilon}$ (cf. définition 4.6).

Lemme 4.28. *Soient T un opérateur à image dense, $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0; \|x\|$. Notons $c_{x,\varepsilon}$ le réel introduit dans la définition 4.6. Alors*

$$c_{x,\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon \|T\|^2}{\|x\| - \varepsilon}.$$

Démonstration. Selon le lemme 4.5, $c_{x,\varepsilon}$ vérifie $T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) = -c_{x,\varepsilon}y_{x,\varepsilon}$. Il vient $\langle T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) | T^*Ty_{x,\varepsilon} \rangle = -c_{x,\varepsilon} \langle y_{x,\varepsilon} | T^*Ty_{x,\varepsilon} \rangle = -c_{x,\varepsilon} \|Ty_{x,\varepsilon}\|^2$, d'où l'on déduit l'égalité

$$c_{x,\varepsilon} = \frac{|\langle T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) | T^*Ty_{x,\varepsilon} \rangle|}{\|Ty_{x,\varepsilon}\|^2}.$$

Or, selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x) | T^*Ty_{x,\varepsilon} \rangle| &\leq \|T^*(Ty_{x,\varepsilon} - x)\| \|T^*Ty_{x,\varepsilon}\| \\ &\leq \|T^*\| \|Ty_{x,\varepsilon} - x\| \|T^*\| \|Ty_{x,\varepsilon}\| \\ &\leq \varepsilon \|T\|^2 \|Ty_{x,\varepsilon}\|. \end{aligned}$$

Comme $y_{x,\varepsilon} \in \mathcal{V}_{x,\varepsilon}$, on a $\|Ty_{x,\varepsilon}\|^2 \geq (\|x\| - \varepsilon)^2$ ce qui entraîne l'inégalité $\frac{1}{\|Ty_{x,\varepsilon}\|} \leq \frac{1}{\|x\| - \varepsilon}$. On en déduit $c_{x,\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon \|T\|^2}{\|Ty_{x,\varepsilon}\|} \leq \frac{\varepsilon \|T\|^2}{\|x\| - \varepsilon}$. \square

Proposition 4.29. *Soient T un opérateur à image dense, et $\varepsilon > 0$. Alors l'application $x \mapsto c_{x,\varepsilon}$ est continue en tout point de l'ouvert $\mathcal{H} \setminus \mathcal{B}(0, \varepsilon]$.*

Démonstration. Nous proposons une preuve séquentielle. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs non nuls de \mathcal{H} qui converge vers un vecteur x non nul. Soit $\rho \in]0; \|x\| - \varepsilon[$. On sait donc qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, \|x_n\| - \varepsilon \geq \rho$. On peut donc définir, à partir de ce rang N , le coefficient de corrélation $c_n = c_{x_n, \varepsilon}$ et le vecteur minimal $y_n = y_{x_n, \varepsilon}$ (resp. $c = c_{x, \varepsilon}$ et $y = y_{x, \varepsilon}$) associés à x_n et ε (resp. à x et ε). Montrons que $(c_n)_{n \geq N}$ converge vers c .

Selon le lemme précédent, on a : $\forall n \geq N, 0 < c_n \leq \frac{\varepsilon \|T\|^2}{\|x_n\| - \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon \|T\|^2}{\rho}$.

Ainsi $(c_n)_{n \geq N}$ est bornée.

Soit c' une valeur d'adhérence de la suite $(c_n)_{n \geq N}$. Il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $c_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c'$. De plus, selon le théorème de continuité 4.23, on sait que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$.

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité

$$(T^*T + c_{\varphi(n)}I)y_{\varphi(n)} = T^*x_{\varphi(n)}$$

provenant du théorème 4.9, on obtient $(T^*T + c'I)y = T^*x$. Par unicité de la solution du système d'équations

$$\begin{cases} \|Ty - x\| = \varepsilon ; \\ (T^*T + cI)y = T^*x. \end{cases}$$

on a $(c', y) = (c, y)$ et en particulier $c' = c$.

Par unicité de la valeur d'adhérence de la suite bornée $(c_n)_{n \geq N}$, on en déduit que $(c_n)_{n \geq N}$ converge vers c ce qui termine la preuve. \square

Chapitre 5

Évolution des vecteurs minimaux sous l'influence de la transformation de Aluthge

Nous avons évoqué, dans le chapitre préliminaire, l'une des motivations principales de S. Ansari et P. Enflo : obtenir des résultats concernant le problème du sous-espace invariant et celui du sous-espace hyper-invariant. Nous avons notamment observé une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant d'obtenir de nouveaux résultats dans ce domaine.

Dans ce chapitre, nous avons tenté de comparer, sur des exemples, les vecteurs extrémaux associés à un opérateur et ceux de sa transformée de Aluthge. Cela nous a conduit à introduire une suite qui peut s'apparenter à la suite (y_n) précédente ; nous apportons ici des résultats sur son comportement.

5.1 Transformée de Aluthge d'un shift à poids

Un premier exemple d'opérateur T , permettant de comparer les vecteurs extrémaux de T et de $\Delta(T)$, serait le shift (ou son adjoint) défini sur l'espace de Hilbert ℓ^2 , c'est-à-dire l'ensemble des suites (x_n)

telles que la série $\sum |x_n|^2$ soit convergente. Cependant, la méthode d'Ansari-Enflo s'applique aux seuls opérateurs non surjectifs à image dense. Or, ni le shift unilatéral, agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$, ni son adjoint ne vérifient cette condition; et leurs homologues bilatéraux, définis sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, possèdent le même défaut.

Par contre, les shifts à poids bilatéraux fournissent des exemples de tels opérateurs. Ce sont donc ces opérateurs que nous avons choisis comme exemples élémentaires pour débiter l'étude comparative des vecteurs extrémaux associés à un opérateur T et ceux associés à l'opérateur $\Delta(T)$.

5.1.1 Quelques caractéristiques des shifts à poids bilatéraux

Commençons par rappeler la définition de shift à poids. Les sources principales pour les résultats généraux concernant ce sujet sont [51], [47] et [29].

Introduisons une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. On pourra par exemple et sans perte de généralité, supposer que (e_n) est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n est la suite $(e_{n,m})_{m \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad e_{n,m} = \delta_{n,m},$$

où $\delta_{n,m}$ désigne le symbole de Kronecker.

Le vocabulaire « poids » renvoie dans ce contexte à une suite fixée, dont le rôle est d'attribuer des coefficients aux vecteurs de la base précédente.

Définition 5.1. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un poids, c'est-à-dire une suite de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. On appelle shift à poids α sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'opérateur W_α défini sur la base (e_n) par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad W_\alpha e_n = \alpha_n e_{n+1}.$$

Tout shift à poids $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est unitairement équivalent au shift à poids $(|\alpha_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$. En effet, il suffit de considérer une nouvelle base orthonormée $(\varepsilon_n) = (\xi_n e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$, au lieu de (e_n) , telle que la

définition de W_α se traduit par $\forall n \in \mathbb{Z}, W_\alpha \varepsilon_n = |\alpha_n| \varepsilon_n$. On peut donc supposer à partir de maintenant que α est une suite de nombres réels positifs.

Afin d'étudier les vecteurs extrémaux d'un tel opérateur, nous cherchons les conditions sur α qui font de W_α un opérateur injectif, à image dense, et quasinilpotent.

Remarque 5.2. *Soient α un poids et W_α le shift à poids associé. Alors on a les propriétés suivantes.*

1. *Si α ne s'annule jamais, W_α est un opérateur injectif à image dense.*
2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|W_\alpha^k\| = \sup_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha_p \cdots \alpha_{p+k-1}|$.*
3. *Le rayon spectral de W_α est $r(W_\alpha) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha_p \cdots \alpha_{p+k-1}|^{\frac{1}{k}}$, ce qui entraîne en particulier que W_α est quasinilpotent si et seulement si*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha_p \cdots \alpha_{p+k-1}|^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Démonstration. 1. Si α ne s'annule jamais, W_α est clairement injectif.
 2. Une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ permet d'écrire que $W_\alpha^k e_n = \alpha_n \cdots \alpha_{n+k-1} e_{n+k-1}$. Ainsi $W_\alpha^k = S^k D$ où S est le shift usuel et D l'opérateur diagonal défini par $D e_n = \alpha_n \cdots \alpha_{n+k-1} e_n$. Alors on a $\|W_\alpha^k\| = \|D\|$ ce qui permet aisément de conclure.
 3. L'égalité annoncée provient directement de l'application du théorème de I. M. Gelfand (cf. [28]) en utilisant le point 2. L'équivalence est alors immédiate puisqu'un opérateur T est quasinilpotent si, et seulement si, $r(T) = \{0\}$. \square

Dorénavant, le poids $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ désignera donc une suite bornée de nombres réels strictement positifs définie sur \mathbb{Z} , et W_α le shift associé.

5.1.2 Calcul de $\Delta(W_\alpha)$

Dans ce paragraphe, on propose le calcul de la transformée de Aluthge d'un shift à poids W_α . On obtient en particulier que l'opérateur

$\Delta(W_\alpha)$ est encore un shift à poids, ce qui va nous permettre d'entamer, dans la suite de ce chapitre, une étude comparative concrète des vecteurs extrémaux associés à W_α et $\Delta(W_\alpha)$.

Notations 5.3. Si $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, on note D_α l'opérateur diagonal associé à la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et à α , c'est-à-dire l'opérateur défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad D_\alpha e_n = \alpha_n e_n.$$

Proposition 5.4. Soit α un poids. La décomposition polaire du shift à poids W_α s'écrit

$$W_\alpha = S D_\alpha$$

où S est le shift bilatéral usuel sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. L'adjoint W_α^* est défini sur la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad W_\alpha^* e_n = \alpha_{n-1} e_{n-1}.$$

Ce résultat découle en effet des égalités

$$\langle W_\alpha^* e_n | e_p \rangle = \langle e_n | W_\alpha e_p \rangle = \langle e_n | \alpha_p e_{p+1} \rangle = \alpha_p \delta_{n,p+1} = \alpha_{n-1} \delta_{p,n-1},$$

valables pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$. Il suit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $W_\alpha^* W_\alpha e_n = \alpha_n W_\alpha^* e_{n+1} = \alpha_n^2 e_n$, donc le module de W_α est donné par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |W_\alpha| e_n = \alpha_n e_n = D_\alpha e_n.$$

Comme S est une isométrie partielle, l'écriture $W_\alpha = S D_\alpha$ fournit la décomposition polaire de W_α . \square

Corollaire 5.5. W_α est compact si seulement si $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Démonstration. Il suffit de constater que W_α est compact si seulement si D_α l'est, et le résultat s'en déduit aisément (cf. [28]). \square

Le résultat suivant propose le calcul plus général de la transformée généralisée de Aluthge de W_α .

Proposition 5.6. *Soit $\alpha \in \ell^\infty$. Pour tout $\lambda \in [0; 1]$, on a*

$$\Delta_\lambda(W_\alpha) = W_\beta$$

où β est définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $\beta_n = \alpha_n^{1-\lambda} \alpha_{n+1}^\lambda$.

Démonstration. Le calcul de $\Delta_\lambda(W_\alpha)$ se déduit de la décomposition polaire précédemment obtenue, en effectuant le calcul sur les vecteurs de la base canonique :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_\lambda(W_\alpha)e_n &= D_\alpha^\lambda S D_\alpha^{1-\lambda} e_n \\ &= \alpha_n^{1-\lambda} D_\alpha^\lambda S e_n \\ &= \alpha_n^{1-\lambda} D_\alpha^\lambda e_{n+1} \\ &= \alpha_n^{1-\lambda} \alpha_{n+1}^\lambda e_{n+1}. \end{aligned}$$

En conclusion, $\Delta(W_\alpha)$ et W_β coïncident sur les vecteurs d'une base : ils sont donc égaux. \square

À partir de ce résultat, il est aisé de proposer le calcul pour les itérés de la transformation de Aluthge appliquée à un shift à poids. Ce sont clairement tous des shifts à poids. Plus précisément, on obtient le résultat suivant par récurrence :

Proposition 5.7. *Soit $\alpha \in \ell^\infty$. L'opérateur $\Delta^n(W_\alpha)$ est le shift de poids $\alpha^{(n)}$ défini par*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_k^{(n)} = \left(\prod_{p=0}^{n-1} \alpha_{k+p}^{(p)} \right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

5.2 Vecteurs extrémaux associés à un shift à poids

Dans ce paragraphe, on propose le calcul implicite du vecteur extrémal associé à W_α et un vecteur $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Proposition 5.8. *Soient α un poids et W_α le shift à poids associé. Soit $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ une suite non nulle. Alors pour tout $\varepsilon \in]0; \|x\|$, le vecteur extrémal associé à $(W_\alpha, x, \varepsilon)$ est*

$$y_{W_\alpha, x, \varepsilon} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_{k-1} x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c} e_{k-1}$$

où c est l'unique solution positive de l'équation d'inconnue t

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{t^2 |x_k|^2}{(\alpha_{k-1}^2 + t)^2} = \varepsilon^2. \quad (5.1)$$

Démonstration. Par souci de clareté, nous commençons par considérer une suite $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ à support fini, disons inclus dans $[-n; n] \cap \mathbb{Z}$ pour un certain entier naturel n . On peut donc écrire $x = \sum_{k=-n}^n x_k e_k$.

On applique le théorème 4.9 : on est donc amené à résoudre le système d'équations, d'inconnues $(y, c) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$,

$$(W_\alpha^* W_\alpha + cI)y = W_\alpha^* x; \quad (5.2)$$

$$\|W_\alpha y - x\| = \varepsilon. \quad (5.3)$$

Décomposons a priori le vecteur y sur la base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} : y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e_k$.

Comme $\forall k \in \mathbb{Z}, (W_\alpha^* W_\alpha + cI)(e_k) = (\alpha_k^2 + c)e_k$, on a

$$(5.2) \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k (\alpha_k^2 + c) e_k = \sum_{k=-n-1}^{n-1} x_{k+1} \alpha_k e_k.$$

On en déduit que pour tout entier k de $[-n; n] : y_{k-1} = \frac{\alpha_{k-1} x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c}$. D'où l'écriture

$$y = \sum_{k=-n}^n \frac{\alpha_{k-1} x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c} e_{k-1}.$$

On traduit ensuite la relation (5.3). On a $W_\alpha y = \sum_{k=-n}^n \frac{\alpha_{k-1}^2 x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c} e_k$ puis $W_\alpha y - x = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_{k-1}^2 + c} - 1 \right) x_k e_k$ d'où

$$(5.3) \iff \sum_{k=-n}^n \left(\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_{k-1}^2 + c} - 1 \right)^2 |x_k|^2 = \varepsilon^2 \iff (5.1).$$

Par unicité du couple $(y, c) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^*$ solution de (5.2) et (5.3), on en déduit que $y_{W_\alpha, x, \varepsilon} = \sum_{k=-n}^n \frac{\alpha_{k-1}^2 x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c} e_{k-1}$ où c est l'unique solution de (5.1). Le résultat est donc prouvé dans le cas où le support de x est fini.

On va maintenant en déduire, à l'aide de résultats de continuité démontrés au chapitre 4, la proposition dans le cas général. Soit donc une suite $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ non nulle à support quelconque. On définit la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{Z})$ en posant, pour tout entier naturel n ,

$$x^{(n)} = \sum_{k=-n}^n x_k e_k.$$

Le terme de rang n , $x^{(n)}$, est simplement la troncature de x relativement au support $[-n; n]$. La suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est une suite d'éléments non nuls à partir d'un certain rang N_1 , à supports finis, qui converge vers x . Cette convergence entraîne l'existence d'un rang N_2 tel que $\forall n \geq N_2, \|x^{(n)}\| > \varepsilon$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On peut alors considérer $y = y_{x, \varepsilon}$ et $c = c_{x, \varepsilon}$, et pour tout $n \geq N$, $y^{(n)} = y_{x^{(n)}, \varepsilon}$ et $c^{(n)} = c_{x^{(n)}, \varepsilon}$. Le résultat obtenu dans le cas où le support est fini permet d'écrire

$$y^{(n)} = \sum_{k=-n}^n \frac{\alpha_{k-1}^2 x_k^{(n)}}{\alpha_{k-1}^2 + c} e_{k-1}$$

où $c^{(n)}$ est l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{k=-n}^n \frac{(c^{(n)})^2 |x_k^{(n)}|^2}{(\alpha_{k-1}^2 + c^{(n)})^2} = \varepsilon^2.$$

Or selon le théorème 4.23 on a $y^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$, et selon la proposition 4.29 on a $c^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$, d'où le résultat en passant à la limite dans les deux égalités précédentes. \square

La proposition précédente donne un calcul pratique et précis des vecteurs extrémaux pour les shifts à poids. Cependant, il reste implicite et il serait souhaitable de préciser explicitement le coefficient c . Cela paraît compliqué dans le cas général, mais le résultat implicite permet de d'obtenir le calcul explicite dans certains cas particuliers, notamment lorsque x est à support fini.

Remarque 5.9. W_α désigne encore le shift à poids $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

1. Si $x = x_k e_k$ et $0 < \varepsilon < |x_k|$, alors le vecteur minimal associé à $(W_\alpha, x, \varepsilon)$ est

$$y_{W_\alpha, x, \varepsilon} = \frac{x_k}{|x_k|} \frac{|x_k| - \varepsilon}{\alpha_{k-1}} e_{k-1}.$$

En effet, on sait que $y = \frac{\alpha_{k-1} x_k}{\alpha_{k-1}^2 + c}$ où c vérifie (5.1). Or (5.1) équivaut à $\frac{c^2 |x_k|^2}{(\alpha_{k-1}^2 + c)^2} = \varepsilon^2$, ou encore à $\frac{c|x_k|}{\alpha_{k-1}^2 + c} = \varepsilon^2$, d'où le calcul.

2. Soit I est un ensemble fini d'entiers de cardinal p . Supposons qu'il existe un couple $(a, \alpha) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $x = a \sum_{k \in I} e_k$ et $\forall k \in I, \alpha_{k-1} = \alpha$. Considérons enfin $0 < \varepsilon < |a| \sqrt{p}$. Alors le vecteur minimal associé à $(W_\alpha, x, \varepsilon)$ est

$$y_{W_\alpha, x, \varepsilon} = \sum_{k \in I} \frac{a}{|a|} \frac{|a| \sqrt{p} - \varepsilon}{\alpha \sqrt{p}} e_{k-1}.$$

Exemple 5.10. Chacun des deux calculs présentés dans la remarque précédente permet de retrouver le vecteur minimal associé à W_α et $x = e_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), utilisé dans [25] :

$$y_{W_\alpha, e_k, \varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon}{\alpha_{k-1}} e_{k-1}.$$

5.3 Évolution des vecteurs extrémaux après itération de la transformation de Aluthge

Fixons un poids α formé de nombres positifs, un vecteur non nul $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et un réel $\varepsilon \in]0; \|x\|]$. Dans toute cette section, nous noterons $y_0 = y_{W_\alpha, x, \varepsilon}$, $c_0 = c_{W_\alpha, x, \varepsilon}$, $y_1 = y_{\Delta(W_\alpha), x, \varepsilon}$, $c_1 = c_{\Delta(W_\alpha), x, \varepsilon}$ et plus généralement

$$y_n = y_{\Delta^n(W_\alpha), x, \varepsilon} \quad \text{et} \quad c_n = c_{\Delta^n(W_\alpha), x, \varepsilon}.$$

La proposition 5.8 s'applique au calcul des vecteurs extrémaux associés à $\Delta^n(W_\alpha)$ puisque nous avons vu précédemment que ce dernier est encore un shift à poids. Avec les notations de la proposition 5.7, on peut dire plus exactement que

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_{k-1}^{(n)} x_k}{[\alpha_{k-1}^{(n)}]^2 + c_n} e_{k-1}$$

où c_n est l'unique solution positive de l'équation d'inconnue t

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{t^2 |x_k|^2}{([\alpha_{k-1}^{(n)}]^2 + t)^2} = \varepsilon^2.$$

Nous définissons également, pour simplifier les notations dans les calculs qui vont suivre, la fonction F_n définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall t > 0, \quad F_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{t^2 |x_k|^2}{([\alpha_{k-1}^{(n)}]^2 + t)^2} - \varepsilon^2.$$

Nous allons donner quelques résultats concernant la monotonie éventuelle et la convergence des suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en faisant des hypothèses diverses soit sur la suite α , soit sur la suite $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 5.11. *Supposons que la suite α soit croissante. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. la suite $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une certaine suite β de $\ell^2(\mathbb{Z})$;

Notons $y = y_{W_\beta, x, \varepsilon}$ et $c = c_{W_\beta, x, \varepsilon}$.

2. la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers c .
3. la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers y .

Démonstration. Comme α est croissante, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$[\alpha_{k-1}^{(1)}]^2 = \alpha_{k-1} \alpha_k \geq \alpha_{k-1}^2 = [\alpha_{k-1}^{(0)}]^2.$$

Par suite, $F_1 \leq F_0$. Or ces deux applications sont continues strictement croissantes de $]0; +\infty[$ dans $] -\varepsilon^2; \|x\|^2 - \varepsilon^2[$, donc l'unique zéro strictement positif de F_1 est plus grand que celui de F_0 , c'est-à-dire $c_1 \geq c_0$. De plus, $[\alpha_{k-1}^{(1)}]^2 = \alpha_{k-1} \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \alpha_k = [\alpha_k^{(1)}]^2$ donc $\alpha^{(1)}$ est encore une suite croissante. En utilisant le même procédé, on obtient que $c_2 \geq c_1$. Par récurrence immédiate, on prouve que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et que chacune des suites $\alpha^{(n)}$ l'est également.

Par ailleurs, α est une suite bornée, disons par M . Alors pour tout entier naturel n , $\alpha^{(n)}$ est également bornée par M . La suite $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ bornée par la suite constante égale à M . De fait, elle converge vers une suite β , et le point 1 est prouvé.

On peut remarquer que

$$\|W_{\alpha^{(n)}}\| = \sup_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^{(n)} \leq \sup_{p \in \mathbb{Z}} \beta_p = \|W_\beta\|.$$

On en déduit, par application du lemme 4.28, les inégalités

$$c_n \leq \frac{\varepsilon \|W_{\alpha^{(n)}}\|^2}{\|x\| - \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon \|W_\beta\|^2}{\|x\| - \varepsilon}$$

pour tout entier naturel n . Ainsi la suite (c_n) est majorée, donc elle converge.

Montrons à présent que la suite d'opérateurs $(W_{\alpha^{(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ est fortement convergente vers W_β . Considérons pour cela un vecteur $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et

un réel δ strictement positif. On sait qu'il existe une suite à support fini x^δ telle que $\|x - x^\delta\| \leq \frac{\delta}{3\|W_\beta\|}$. Notons $x^\delta = \sum_{k=-p}^p x_k^\delta e_k$. On a

$$\|W_{\alpha^{(n)}}x^\delta - W_\beta x^\delta\| = \sum_{k=-p}^p |\alpha_k^{(n)} - \beta_k|^2 |x_k^\delta|^2.$$

Le nombre de termes composant la somme est fini et indépendant de n , donc $\|W_{\alpha^{(n)}}x^\delta - W_\beta x^\delta\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$, $\|W_{\alpha^{(n)}}x^\delta - W_\beta x^\delta\| \leq \frac{\delta}{3}$. Alors

$$\begin{aligned} & \|W_{\alpha^{(n)}}x - W_\beta x\| \\ & \leq \|W_{\alpha^{(n)}}x - W_{\alpha^{(n)}}x^\delta\| + \|W_{\alpha^{(n)}}x^\delta - W_\beta x^\delta\| + \|W_\beta x^\delta - W_\beta x\| \\ & \leq \|W_{\alpha^{(n)}}\| \frac{\delta}{3\|W_\beta\|} + \frac{\delta}{3} + \|W_\beta\| \frac{\delta}{3\|W_\beta\|} \\ & \leq \delta. \end{aligned}$$

On en déduit que $(W_{\alpha^{(n)}})$ converge fortement vers W_β .

On a vu que (c_n) est convergente. Or $(\alpha_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc $(W_{\alpha^{(n)}}^* W_{\alpha^{(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, de même que $(W_{\alpha^{(n)}}^* W_{\alpha^{(n)}} + c_n I)_{n \in \mathbb{N}}$. Ensuite, l'égalité

$$y_n = (W_{\alpha^{(n)}}^* W_{\alpha^{(n)}} + c_n I)^{-1} W_{\alpha^{(n)}}^* x$$

issue de la remarque 4.8 entraîne, grâce à la convergence forte précédente, que la suite (y_n) est également convergente.

Notons c' et y' les limites respectives de (c_n) et (y_n) . On a, pour tout entier naturel n , $(W_{\alpha^{(n)}}^* W_{\alpha^{(n)}} + c_n I)y_n = W_{\alpha^{(n)}}^* x$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a $(W_\beta^* W_\beta + c' I)y' = W_\beta x$. On sait d'autre part que, pour tout entier naturel n , $\|W_{\alpha^{(n)}}y_n - x\| = \varepsilon$. Donc on a aussi $\|W_\beta y' - x\| = \varepsilon$. Le théorème 4.9 permet de conclure que $(y', c') = (y, c)$ et les points 2 et 3 sont démontrés. \square

Proposition 5.12. *Supposons que la suite $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente pour la norme infinie vers une suite β de réels strictement positifs. Alors $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $c = c_{W_\beta, x, \varepsilon}$ et $y = y_{W_\beta, x, \varepsilon}$.*

Notons, avant de proposer une preuve pour ce résultat, que l'hypothèse de convergence est assez naturelle, de même que la stricte positivité de la suite limite dont la finalité est que la théorie d'Ansari-Enflo s'applique.

Démonstration. Notons F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{t^2 |x_k|^2}{(\beta_{k-1}^2 + t)^2} - \varepsilon^2.$$

Pour tout $(n, k, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$g_{n,k}(t) = \frac{t^2 |x_k|^2}{([\alpha_{k-1}^{(n)}]^2 + t)^2} - \frac{t^2 |x_k|^2}{(\beta_{k-1}^2 + t)^2}.$$

Il est clair que la suite $(g_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. Par ailleurs, la suite β est la limite au sens de la norme infinie d'une suite de suites bornées : elle est donc elle-même bornée, disons par un réel positif b' . Cette convergence, au sens de la norme infinie, entraîne en particulier l'existence d'un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, la suite $\alpha^{(n)}$ est bornée par $b = b' + 1$.

Montrons que la suite (F_n) converge uniformément localement vers F . Soient $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < t_1 < t_2$, et $\varepsilon > 0$. On sait, par convergence de $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, qu'il existe un entier naturel N tel que $\|\alpha^{(n)} - \beta\|_\infty \leq \frac{\varepsilon t_1^2}{2\|x\|^2 \beta(\beta^2 + 2t_2)}$. Considérons donc $n \geq N$. Pour tout $t \in [t_1; t_2]$, on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |g_{n,k}(t)| &= \frac{t^2 |x_k|^2 |\beta_{k-1}^4 - [\alpha_{k-1}^{(n)}]^4 + 2t\beta_{k-1}^2 - 2t[\alpha_{k-1}^{(n)}]^2|}{|[\alpha_{k-1}^{(n)}]^2 + t|^2 |\beta_{k-1}^2 + t|^2} \\ &\leq \frac{2|x_k|^2 \beta(\beta^2 + 2t)}{t^2} |\alpha_{k-1}^{(n)} - \beta_{k-1}| \\ &\leq \frac{2|x_k|^2 \beta(\beta^2 + 2t)}{t^2} \|\alpha^{(n)} - \beta\|_\infty \\ &\leq \frac{2|x_k|^2 \beta(\beta^2 + 2t_2)}{t_1^2} \|\alpha^{(n)} - \beta\|_\infty \end{aligned}$$

donc on en déduit

$$\begin{aligned}
 |F_n(t) - F(t)| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_{n,k}(t)| \\
 &\leq \frac{2\beta(\beta^2 + 2t_2)}{t_1^2} \|\alpha^{(n)} - \beta\|_\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \\
 &\leq \frac{2\beta(\beta^2 + 2t_2)\|x\|_2}{t_1^2} \|\alpha^{(n)} - \beta\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall t \in [t_1; t_2]$, $|F_n(t) - F(t)| \leq \varepsilon$: cela signifie que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[t_1; t_2]$, donc sur tout compact de \mathbb{R}_+^* , vers F .

On en déduit que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers c' ; en raisonnant par l'absurde, on peut montrer que $c' \neq 0$. De fait, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également, disons vers y' . Par passages à la limite dans $(W_{\alpha^{(n)}}^* W_{\alpha^{(n)}} + c_n I)y_n = W_{\alpha^{(n)}} x$ et $\|W_{\alpha^{(n)}} y_n - x\| = \varepsilon$, on constate que (c', y') vérifie

$$\begin{cases} (W_\beta^* W_\beta + c' I)y' = W_\beta x \\ \|W_\beta y' - x\| = \varepsilon \end{cases}$$

Le théorème 4.9 permet de conclure que $(y', c') = (y, c)$ et la proposition est démontrée. \square

Bibliographie

- [1] A. Aluthge, *On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integral Equations and Operator Theory, **13** (1990), 307-315.
- [2] A. Aluthge, *On the Spectrum of Invertible Semi-hyponormal Operators*, Integral Equations and Operator Theory, **59** No. 3 (2007), 299-307.
- [3] T. Ando, *Aluthge Transforms and the Convex Hull of the Eigenvalues of a Matrix*, Linear and Multilinear Algebra, **52** No. 3-4 (2004), 281-292.
- [4] T. Ando, *Aluthge Transform and the Convex Hull of the Spectrum of a Hilbert Space Operator*, Op. Theory Adv. and Appl., **160** (2005), 21-39.
- [5] T. Ando and T. Yamazaki, *The Iterated Aluthge Transforms of a 2-by-2 Matrix converge*, Linear Algebra and Applications, **375** (2003), 299-309.
- [6] G. Androulakis, *A Note on the Method of Minimal Vectors*, Trends in Banach spaces and operator theory, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence R.I., **321** (2003), 29-36.
- [7] S. Ansari, P. Enflo, *Extremal Vectors and Invariant Subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 539-558.
- [8] J. Antezana, P. Massey, D. Stojanoff, *λ -Aluthge Transform and Schatten Ideals*, Linear Algebra and its Applications, **405** (2005), 177-199.

- [9] J. Antezana, E. R. Pujals, D. Stojanoff, *Convergence of the Iterated Aluthge Transform Sequence for Diagonalisable Matrices*, Adv. Math., **216** No. 1 (2007), 255-278.
- [10] J. Antezana, E. R. Pujals, D. Stojanoff, *Convergence of the Iterated Aluthge Transform Sequence for Diagonalisable Matrices (II)*, Integral Equations and Operator Theory, **62** No. 4 (2008), 465-488.
- [11] J. Antezana, E. R. Pujals, D. Stojanoff, *Iterated Aluthge Transforms : A Brief Survey*, Revista de la Unión Matemática Argentina, **49** No. 1 (2008), 29-41.
- [12] O. Bel Hadj Fredj, *Essential Descent Spectrum and Commuting Compact Perturbations*, Extracta Mathematicae, **21** No. 3 (2006), 261-271.
- [13] O. Bel Hadj Fredj, M. Burgos, M. Oudghiri, *Ascent Spectrum and Essential Ascent Spectrum*, Studia Math., **187** No. 1 (2008), 59-73.
- [14] M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta, M. Oudghiri, *The Descent Spectrum and Perturbations*, J. Operator Theory, **53** No. 1 (2005), 49-89.
- [15] A. Brown, *On a Class of Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 723-728.
- [16] S. Brown, *Some Invariant Subspaces for Subnormal Operators*, Integral Equations and Operator Theory, **1** (1978), 310-333.
- [17] G. Cassier, *Dilation Operator Radius and Applications*, preprint.
- [18] G. Cassier, *Generalized Toeplitz Operators, Restrictions to Invariant Subspaces and Similarity Problems*, J. Operator Theory, **53** No. 1 (2005), 49-89.
- [19] G. Cassier, T. Fack, *Contractions in von Neumann Algebras*, J. Funct. Analysis, **135** (1996), 1-42.
- [20] G. Cassier, L. Suciu, *Mapping Theorems and Similarity to Contractions for Classes of A-contractions*, Hot Topics in Op. Theory, Theta (2008), 39-58.
- [21] G. Cassier, N. Suciu, *Inégalités de von Neumann pondérées*, Proceedings of the 9th National Conference of The Romanian Mathematical Society, Lugoj (2005), 81-93.

-
- [22] G. Cassier, J. Verliat, *New Properties for Extremal Vectors and Applications to Aluthge Transform*, en préparation.
- [23] G. Cassier, J. Verliat, *Stability for some Operator Classes by Aluthge Transform*, Operator Theory Live (2010), 51-67.
- [24] I. Chalendar, A. Flattot, J. R. Partington, *The Method of Minimal Vectors Applied to Weighted Composition Operators*, Op. Theory Adv. and Appl., **171** (2006), 89-105.
- [25] I. Chalendar, J. R. Partington, *Constrained Approximation and Invariant Subspaces*, J. Math. Anal. Appl., **280** (2003), 176-187.
- [26] I. Chalendar, J. R. Partington, *Variations on Lomonosov's Theorem via the Technique of Minimal Vectors*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 603-617.
- [27] M. Chō, I. B. Jung, W. Y. Lee, *On Aluthge Transforms of p -hyponormal Operators*, Integral Equations and Operator Theory, **53** (2005), 321-329.
- [28] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, 1990.
- [29] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence R.I., 2000.
- [30] P. Enflo, *Extremal Vectors for a Class of Linear Operators*, Functional Analysis and Economic Theory (Samos 1996), Springer-Verlag (1998), 61-64.
- [31] P. Enflo, T. Høim, *Some Results on Extremal Vectors and Invariant Subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** No. 2 (2002), 379-387.
- [32] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *Complete Contractivity of Maps Associated with the Aluthge and Duggal Transforms*, Pacific J. Math., **209** No. 2 (2003), 249-259.
- [33] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *On Quasinilpotent Operators (II)*, J. Austr. Math. Soc., **77** (2004), 349-356.
- [34] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *On Quasinilpotent Operators (III)*, J. Operator Theory, **54** (2005), 401-414.

- [35] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book, Second Edition*, Springer-Verlag, 1991.
- [36] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki, *On Generalized Numerical Range of the Aluthge Transformation*, *Linear Algebra and its Applications*, **370** (2003), 147-161.
- [37] G. Ji, Z. Li and N. Liu, *Essential Numerical Range and Maximal Numerical Range of the Aluthge Transform*, *Linear and Multilinear Algebra*, **55** No. 4 (2007), 315-322.
- [38] G. Ji, Z. Li and Y. Pang, *On the Range of the Aluthge Transform*, *Integral Equations and Operator Theory*, **57** No. 2 (2007), 209-215.
- [39] I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *Aluthge Transforms of Operators*, *Integral Equations and Operator Theory*, **13** (2000), 437-448.
- [40] I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *On Quasinilpotent Operators*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** No. 7 (2003), 2221-2227.
- [41] I. B. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *Spectral Pictures of Aluthge Transforms of Operators*, *Integral Equations and Operator Theory*, **40** (2001), 52-60.
- [42] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall Inc., 1962.
- [43] T. Huruya, *A Note on p -Hyponormal Operators*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** No. 12 (1997), 3617-3624.
- [44] V. Lomonosov, *On Invariant Subspaces of Families of Operators Commuting with a Completely Continuous Operator*, (in Russian), *Funkcional Anal. i Prilozen*, **7** (1973), 55-56.
- [45] V. Lomonosov, *An Extension of Burnside's Theorem to Infinite Dimensional Spaces*, *Israel J. Math.* **75** (1991), 329-339.
- [46] M. Mbekhta, *Ascente, descente et spectre essentiel quasi-Fredholm*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **46** (1997), 175-196.
- [47] N. K. Nikolskii, *Treatise on the Shift Operator*, Springer-Verlag, 1986.
- [48] K. Okubo, *On Weakly Unitarily invariant norm and the Aluthge Transformation*, *Linear Algebra and Applications*, **371** (2003), 369-375.

-
- [49] D.E.V. Rose, I.M. Spitkovsky, *On the Stabilization of the Aluthge Sequence*, Int. Journal of Information and Syst. Sci., **4** No. 1 (2008), 178-189.
- [50] W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe*, 3^e édition, Dunod, Paris, 1998.
- [51] A.L. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory*, Topics in operator theory, Math. Surveys, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., **13** (1974), 49-128.
- [52] B. Sz-Nagy, C. Foias, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North Holland, Amsterdam, 1970.
- [53] T. Takasaki, *Basic Indexes and Aluthge Transformation for 2 by 2 matrices*, Math. Inequal. Appl., **11** No. 4 (2008), 615-628.
- [54] T.Y. Tam, *λ -Aluthge Iteration and Spectral Radius*, Integral Equations and Operator Theory, **60** (2008), 591-596.
- [55] V. G. Troitsky, *Minimal Vectors in Arbitrary Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 1177-1180.
- [56] J. Verliat, *Regularity Problem for Extremal Vectors*, Extracta Mathematicae, **22** No. 1 (2007), 35-43.
- [57] P.Y. Wu, *Numerical Range of Aluthge Transform of Operator*, Linear Algebra and Applications, **357** (2002), 295-298.
- [58] T. Yamazaki, *An Expression of Spectral Radius via Aluthge Transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** No. 4 (2001), 1131-1137.
- [59] T. Yamazaki, *On Numerical Range of the Aluthge Transformation*, Linear Algebra and Applications, **341** (2002), 111-117.
- [60] T. Yamazaki, *On Upper and Lower Bounds for the Numerical Radius and an Equality Condition*, Studia Math., **178** No. 1 (2007), 83-89.