Contributions à la théorie des modèles positive.

Mohammed Belkasmi

Numéro d'ordre : 019-2012 Année 2012

Université Claude Bernard - Lyon 1

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par
Mohammed Belkasmi

Contributions à la théorie des modèles positive

Directeur
Tuna Altinel Université Claude Bernard Lyon 1

Rapporteurs
John Baldwin University of Illinois-Chicago
Andrés Villaveces Universidad Nacional de Colombia-Bogota

Jury
Tuna Altinel Université Claude Bernard Lyon 1
Itaï Ben Yaacov Université Claude Bernard Lyon 1
Françoise Delon CNRS, Université Paris 7
Martin Hils Université Paris Diderot Paris 7
Françoise Point FNRS, Université de Mons- Belgique
Ivan Tomasic University of London - Angleterre
Frank Wagner Université Claude Bernard Lyon 1

à mes parents
mes frères, soeurs, et ma tante
et toute ma famille.

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Tuna Altınel, pour sa patience, son encouragement et ses qualités scientifiques et pédagogiques qui m'ont permis de réaliser mes premiers pas dans cette adorable spécialité. Son oeil critique m'a été trés précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je tiens à remercier Bruno Poizat et Itaï Ben Yaacov, leurs travaux et résultats ont eu une contribution trés importante dans mon travail. Je les remercie également pour leurs précieux consiels et suggestions qui ont enrichi constamment mon esprit scientifique et critique.

Je remercie vivement Andrés Villaveces et John Baldwin pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie aussi pour leurs patiences, critiques et suggestions, et pour l'intérêt qu'ils ont donné à mon travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux membres du jury T. Altınel, I. Ben Yaacov F. Delon, F. Point, I. Tomasic et F. Wagner de m'honorer de leur présence, et pour leurs remarques et suggestions constructives. Je remercie vivement l'équipe de travail Algébre Géométrie Logique et tous mes amis thésards particulièrement aux thésards du bureau 111 B de l'institut Camille Jordan pour les agréables moments qu'on a passés ensemble. J'ai une pensée particulière à H. Alkanjo et M. Karaki pour leurs aides dans la préparation de ma soutenance.

J'exprime mon amour et ma reconnaissance à mes parents et ma gratitude à ma famille et mes amis.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La première étude systématique de la théorie des modèles positive était faite par Ben Yaacov dans son travail sur les cats "compact abstract theories", [1]. L'approche plus directe que nous poursuivons était introduite par Ben Yaacov et Poizat dans [3]. Le cadre général de la théorie des modèles y est fixé en s'inspirant des études faites sur les théories incomplètes, plus exactement *h-universelles*.

La plus ancienne trace de l'étude des théories non nécessairement complètes mais inductives par le biais de leurs modèles existentiellement clos remonte aux travaux d'Abraham Robinson. Le premier précurseur moderne de la Logique positive est [15] de Shelah où sont étudiées les notions générales de la théorie des modèles usuelle dans le cas d'une théorie utilisant un ensemble restreint de formules du premier ordre. Plus tard, Hrushovski a introduit dans [6] les théories de Robinson. Dans [11] Pillay à etudié la simplicité des théories h-universelles dans les domaines universelles de celles-ci.

Dans ce travail on suit la ligne générale de Ben Yaacov et Poizat en étudiant les théories dont la classe des modèles est inductive, autrement dit les théories *h-inductives*. Comme dans l'étude des théories de Robinson, la classe des existentiellement clos est centrale dans l'étude des phénomènes positifs. Les types positifs sont définis comme étant les familles de formules positives satisfaites par les uples dans les *existentiellement clos positifs*. Dans ses travaux antérieurs [1], [2], Ben Yaacov caractérise une théorie et ses compagnes par les espaces de types positifs, alors que le cadre de la logique positive défini dans [3] permet une étude plus vaste et plus riche car il permet l'étude sur d'autres classes de modèles de la théorie autre que les existentiellement clos positivfs. L'exemple typique de cette richesse est la caractérisation de la séparation topologique des espaces de types par l'amalgamation dans la classe des modèles de la compagne h-inductive maximale de la théorie (l'enveloppe de Kaiser). Un autre exemple est l'étude de l'élimination des quanteurs, et les théories de Robinson positives (chapitre 2). Les resultats obtenus dans [1], [2] restent vraies dans la théorie des modèles positive.

Comme la plupart des phénomènes dans la théorie des modèles positive sont étudiés dans des classes restreintes de modèles de la théorie, le grand absent est la compacité sur la classe étudié sauf dans le cas où la classe est élémentaire. Ainsi dans l'étude de la stabilité et la simplicité, on ne peut pas montrer l'existence de cohéritiers d'un type. Ce problème donne son aspect particulier à la définition de la déviation dans [11], définition que nous adoptons dans cette thèse.

Dans le reste de cette introduction, on donne une description rapide des chapitres suivants. La ligne d'étude fixée est celle de [3], [14], [13]. On répondra à des questions posées dans ces travaux et étudiera des phénomènes propres à la théorie des modèles positive.

Contrairement à l'etude des chats [1], un thème majeur de la théorie des modèles positive est l'amalgamation. C'est un outil crucial dans la caractérisation de plusieurs phénomènes, auquel on a consacré le chapitre 2 où on expose l'amalgamation sous ses diverses formes, à travers un éventail varié d'applications. Notamment, c'est dans ce chapitre-là que sont caractérisées les bases d'amalgamations afin de pouvoir vérifier si la classe de modèles en question contient des structures et morphismes amalgamables. L'élimination des quanteurs y est caractérisée par l'amalgamation dans la classe des modèles faiblement existentiellement clos, et les théories de Robinson positives par l'amalgamation dans la classe des modèles *h-maximaux*. Ensuite, on introduit une technique d'amalgamation qui nous permet d'étudier la préservation de la séparation entre les extensions élémentaires positives.

Les techniques d'amalgamation sont indispensables pour étudier la complétude positive des théories h-inductives. Celle-ci est définie dans [3] par la propriété de jocp (propriété de la continuation commune). L'étude de la relation déterminée par la propriéte jocp entre les modèles positivement existentiellement clos d'une théorie h-inductive arbitraire nous permet de voir clairement la nature des complétions minimales de la théorie en question. Comme dans la théorie des modèles usuelle, cette notion de complétude est essentielle pour un cadre d'étude des notions de stabilité et de simplicité positives.

Dans son étude de la simplicité dans la catégorie des existentiellement clos d'une théorie universelle [11], Pillay a motivé la question d'une notion de stabilité qui est compatible avec sa notion de simplicité. Dans [2], Ben Yaacov étudie la stabilité sur les chats qu'il caractérise par le comptage des types, le rang de Shelah fini et la type-définissabilité des types. Dans la chapitre 3, on reprendra la stabilité de Ben Yaacov dans notre contexte positif. On y montre que les théories bornées sont stables et obtient une autre caractérisation de la stabilité par une *propriété d'ordre proprement positive* dans le cas d'une *théorie non bornée.* L'outil crucial dans ce travail est un théorème de Shelah dans [17] principalement combinatoire, qui compense l'insuffisance susmentionnée du théorème de compacité. Cette technique sera de nouveau utilisée dans plusieurs endroits comme une alternative au théorème de compacité en passant par le théorème de Ramsey. On conclut le troisième chapitre en adaptant un autre théorème de Shelah dans l'étude de la stabilité dans les classes élémentaires abstraites. Il s'agit de compter les *fils spéciaux*. Notons que ce chapitre contient des comparaisons concretes, par le biais de divers exemples, des stabilités usuelle et positive.

Chapitre 2

Théorie des modèles positive : fondements

C'est dans ce chapitre que nous mettrons ensemble les outils dont nous aurons besoin dans cette thèse. Il ne s'agira pas juste d'une liste de définitions et de faits déjà connus. Au fur et à mesure qu'on développera les thèmes fondamentaux de la théorie des modèles positive, on introduira certaines nouvelles notions et on obtiendra les premiers résultats sous-jacents à l'étude dans les chapitres suivants.

Nous puisons nos inspirations majoritairement dans les travaux de Ben Yaacov et Poizat ([1], [3], [14]) qui nous fournissent aussi une grande partie des notions et résultats de base. Comme nous le ferons à diverses occasions, il convient de souligner que, sauf mention contraire, toutes les notions modèle-théoriques de cette thèse doivent être considérées dans le contexte positif.

2.1 Logique positive, notions générales

La logique positive est une branche de la logique du premier ordre dont la spécificité est la non utilisation de la négation. Le premier impact de cette restriction est la réduction de l'ensemble des formules du premier ordre à l'ensemble des formules positives qu'on obtient à partir des formules atomiques en utilisant que les opérateurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\exists$. Une formule positive se met donc sous la forme $\exists \bar{y} f(\bar{x}, \bar{y})$, où $f(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule libre positive. En particulier, sauf pour certains types d'énoncés qui seront introduits ci-dessous, l'utilisation des quanteurs universels est interdite. Nous ajoutons, un symbole spécial $\perp$ dénotant l'antilogie.

On retiendra les notations $\models$ et $\vdash$ pour noter la satisfaction et le fait d'être conséquence respectivement. Parfois, afin de faciliter la lecture, nous utiliserons la notation $A \models \neg\varphi(\bar{a})$ pour remplacer $A \not\models \varphi(\bar{a})$ dans le cas d'une formule positive $\varphi(\bar{x})$ et d'un uple $\bar{a}$ extrait de la structure A.

Dans le reste de cette section, nous rappellerons certaines définitions et notions de la logique positive. Pour plus de détails, [3] est une source suffisamment complète.

Comme dans la logique du premier ordre, un énoncé est une formule sans variables libres. Un énoncé est dit h-universel s'il est la négation d'un énoncé positif ; il est donc de la forme $\neg(\exists \bar{x}) f(\bar{x})$, soit encore $(\forall \bar{x}) \neg f(\bar{x})$, où $f(\bar{x})$ est libre et positive. La conjonction de deux énoncés h-universels est équivalente à un énoncé h-universel. De même, la disjonction de deux énoncés h-universels est h-universelle.

Un énoncé est dit h-inductif simple s'il s'écrit sous la forme

$$(\forall \bar{x})[(\exists \bar{y}) f(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (\exists \bar{z}) g(\bar{x}, \bar{z})] \ ,$$

où f et g sont libres (sans quanteurs) et positives. Sous forme prénexe il devient

$$(\forall \bar{u})(\exists \bar{v})(\neg\varphi(\bar{u}) \vee \psi(\bar{u}, \bar{v})) \ ,$$

où φ et ψ sont libres et positives. Par conséquent, la disjonction de deux énoncés h-inductifs simples l'est aussi. Un énoncé h-inductif est la conjonction d'un nombre fini d'énoncés h-inductifs simples ; ces énoncés forment une famille close par disjonction et conjonction.

Une théorie est dite h-inductive si elle est formée d'énoncés h-inductifs. Dans le cas particulier où ces énoncés sont tous h-universels, la théorie est dite h-universelle. Les théories h-inductives forment le cadre de travail de la logique positive.

Soient M et N deux structures dans un langage L. Une application h de M dans N est un homomorphisme si pour tout uple $\bar{m}$ extrait de M, toute L-formule atomique ϕ, $M \models \phi(\bar{m})$ implique $N \models \phi(h(\bar{m}))$. Dans ce cas, la structure N est dite une continuation de M. Un plongement est un homomorphisme h, tel que $\bar{m}$ et $h(\bar{m})$ satisfont les mêmes formules atomiques positives ; l'homomorphisme h est dit une immersion si $\bar{m}$ et $h(\bar{m})$ satisfont exactement les mêmes formules positives dans M et N respectivement.

2.2 Modèles positivement existentiellement clos

La notion de modèle positivement existentiellement clos (notée pec ci-après) est fondamentale à la théorie des modèles positive :

Définition 2.1 *Un élément M d'une classe C de L-structures est dit positivement existentiellement clos (pec) dans C si tout homomorphisme de M dans un élément de C est une immersion.*

Dans toute la suite on utilesera le mot pec pour dire un modèle positivement existentiellement clos. Le fait suivant sera utilisé sans mention en conjonction avec le fait 2.8 pour conclure que tout modèle d'une théorie h-inductive se continue en un modèle pec de cette théorie.

Fait 2.2 ([3] Théorème 1) *Dans une classe inductive, tout élément se continue dans pec de la classe.*

Définition 2.3 ([3]) *Deux théories h-inductives sont dites compagnes si elles ont les mêmes conséquences h-universelles.*

Le compagnonage des modèles se caractérise en utilisant la notion de modèle positivement existentiellement clos :

Fait 2.4 ([3] lemme 7) *Deux théories h-inductives sont compagnes si et seulement si elles ont les mêmes pec.*

L'étude dans [3] des théories h-inductives ainsi que le fait 2.8 ci-dessus montrent qu'une théorie h-inductive T a une compagne maximale Tk , qui est la théorie h-inductive de ses pec ; les compagnes de T sont les théories h-inductives comprises entre sa compagne minimale Tu formée de ses conséquences h-universelles et sa compagne maximale Tk . La théorie Tk est appelée enveloppe de Kaiser de T. En présence des paramètres provenant d'un ensemble A, on notera $Tu(A)$ et $Tk(A)$. Pour parler d'une telle théorie en présence des paramètres, on utilesera la notion $L(A)$ où L est le langage de base augmentéen ajoutent un symbole de constante pour chaque élément de A.

Définition 2.5 *Un plongement d'une structure M dans une structure N est dit une immersion sous-élémentaire si N est un modèle de $Tk(M)$, où les symboles de constantes qui nomment les éléments de M sont interprétés par leurs images dans N par rapport à l'immersion sous-élémentaire en question.*

Une théorie h-inductive T est dite modèle-complète si tous ses modèles sont des pec, en d'autres termes, si la classe des pec est axiomatisée par l'enveloppe de Kaiser de T. Un exemple de théorie modèle-complète est celle des corps algébriquement clos d'une caractéristique fixée dans le langage usuel des corps. Bien évidemment, il s'agit de "langage usuel" dans la syntaxe positive.

Fait 2.6 ([3] lemme 5) *Soient T une théorie h-inductive, et Tu l'ensemble de ses conséquences h-universelles, alors une structure se continue en un modèle de T si et seulement c'est un modèle de Tu .*

De ce fait, on déduit que toute structure qui se continue dans un pec de T est modèle de Tu.

Exemples 2.7 - Soient $L = \{=\}$ et T la théorie h-inductive de l'égalité. La théorie T admet un seul pec qui est le modèle $A = \{a\}$. En effet supposons que B est un autre pec de T, alors l'application f qui envoie tout les éléments

de B vers a est un L-homomorphisme qui n'est pas une immersion puisqu'il n'est pas injectif. Donc B ne peut pas être un pec.
- Soit $L = \{R\}$, avec R un prédicat relationnel, et soit T la théorie h-inductive qui dit que R est une relation d'équivalence. Alors T a un seul modèle pec qui est le modèle à une seule classe d'equivalence avec un seul élément.
- Soit L le langage avec deux prédicats relationnels P, Q, et soit T la théorie h-universelle $\neg\exists x, y\, P(x) \wedge Q(y)$. Les pec de T sont exactement les deux modèles $A = \{a\}$, avec $A \models P(a)$, et $B = \{b\}$, avec $B \models Q(b)$.
- Soit T la théorie h-inductive des corps de caractéristique p dans le langage $L = (+, -, ., ^{-1}, 0, 1)$. Un modèle A de T est pec si et seulement si il est algébriquement clos. Donc sa théorie de Kaiser est la théorie des corps algébriquement clos.

Comme en général toute structure qui se continue en un modèle T est un modèle de Tu (voir fait 2.6), alors tout anneau qui se continue dans un pec de la théorie des corps de caractéristique p est un modèle de la théorie h-universelle des corps de caractéristique p. En particulier $\mathbb{Z}$. Comme deux théories de corps de caractéristiques distinctes ont des classes de pec distincts, alors la théorie h-universelle doit déterminer la caractéristisque.

Avant de continuer, on rappelle la définition d'un système inductif de structure telle que celle-ci était donnée dans [3] (p. 1144). Soit Γ une famille de L-structures A_i , indexé par un ensemble totalement ordonné I. Pour tout couple $i \leq j$ de I donnons un homomorphisme h_{ji} de A_i dans Aj en supposant que pour chaque $i \in I$, h_{ii} est l'application identité de A_i, et que si $i \leq j \leq k$, $h_{kj} \circ h_{ji} = h_{ki}$. On définit sur la réunion disjointe S des A_i une relation d'équivalence R comme suit : a dans A_i est équivalent à b dans A_j s'il existe $k \geq max(i, j)$ tel que $h_{ki}(a) = h_{kj}(b)$. La limite inductive A des structures A_i est définie sur l'ensemble B/R. Une L-formule atomique φ est satisfaite par un uple dans A si elle y est satisfaite par les représentants de ce uple dans le même A_i.

Une classe de structures est dite inductive si elle est close par rapport à la limite inductive telle que celle-ci est définie dans le paragraphe précédent. Il est facile de vérifier que la classe des modèles d'une théorie h-inductive est inductive. D'après le théorème 23 de [3], c'est en fait une caractérisation :

Fait 2.8 ([3] Théorème 23) *La classe des modèles d'une théorie est inductive si et seulement si celle-ci est axiomatisée h-inductivement.*

La conclusion suivante servira dans diverses constructions moyennant les limites inductives.

Fait 2.9 ([3] lemme 12) *La classe des modèles pec d'une théorie h-inductive T est inductive.*

Un résultat récent sur les structures pec était démontré par Almaz Kungozhin :

Fait 2.10 ([8]) *Soient L un langage relationnel, et T une théorie h-universelle finiment axiomatisable. Alors la classe des pec de T est élémentaire.*

Une autre classe de structures d'une théorie h-inductive est la classe des modèles h-maximaux, notion introduite dans [8]. Dans le chapitre suivant on étudiera en détail cette classe de structures.

Définition 2.11 ([8]) *Soit T une théorie h-inductive. Un modèle A de T est dit h-maximal si et seulement si tout homomorphisme de A dans un modèle de T est un plongement.*

2.3 Compacité positive

La logique positive a son théorème de compacité. Nous nous référerons au théorème suivant comme "compacité positive".

Fait 2.12 ([3] corollaire 4) *Une théorie h-inductive est consistante pourvu que chacun de ses sous-ensembles finis le soit.*

La plupart des phénomènes de la théorie des modèles positive (élimination des quanteurs, stabilité, simplicité,$\cdots$) sont étudiés dans certaines classes de la théorie (classe des modèles existentiellement clos, classe des modèles maximaux, classe h-inductives, $\cdots$). Cette restriction des modèles où l'étude est éffectuée met en défaut le théorème de compacité positive (sauf si la classe étudiée est élémentaire) car on ne peut pas définir la classe d'étude par une famille d'énnoncés h-inductifs, autrement le modèle fournit par le théorème de compacité positif n'est pas dans la classe d'étude.

2.4 Espaces de types

Comme dans toute étude modèle-théorique, la notion de type est primordiale en théorie des modèles positive. Le contexte positif contraint les types à consister des formules positives et nécessite une définition plus subtile qui est la suivante :

Définition 2.13 ([3], [13]) *Soit T une théorie h-inductive dans un langage L. Un n-type est un ensemble maximal de formules positives en n variables, qui est consistant avec T ou avec une de ses compagnes.*

Un n-type à paramètres dans M est un ensemble maximal de formules positives en n variables, à paramètres dans M, qui est consistant avec $T(M)$, ou de façon équivalente, avec $Tk(M)$.

Il est important de souligner qu'on peut aussi définir un type positif comme l'ensemble des formules positives satisfaites par un élément dans un pec d'une théorie h-inductive. Ceci permet de caractériser les pec par la maximalité des ensembles de formules positives réalisées par des uplets formés par leurs éléments :

Fait 2.14 ([3]) *Un modèle A de T est un pec si et seulement si pour tout uple $\bar{a}$ de A, l'ensemble des formules positives satisfaites par $\bar{a}$ dans A, est un type.*

De ce fait, on déduit que si A est un pec, et que $\bar{a}$ est extrait de A tel que $A \models \neg\varphi(\bar{a})$, avec φ une formule positive, alors il existe ψ une formule positive telle que $A \models \psi(\bar{a})$, et $T \vdash \neg\exists x\varphi(x) \wedge \psi(x)$.

On commence par une notion technique introduite dans [5] (Section 8.5).

Définition 2.15 *Soient T une théorie h-inductive et φ une formule positive. On appelle résultante de φ, qu'on note $Res_T(\varphi)$, l'ensemble des formules positives ψ telles que $T \vdash \neg\exists x\varphi(x) \wedge \psi(x)$.*

Remarque : Si pour une formule positive φ on a $Res_T(\varphi) = \emptyset$, alors l'énoncé h-inductive $\forall x\varphi(x)$ est satisfait par la théorie da kaiser $Tk(T)$ de T.

En suivant la réflexion du paragraphe précédent, pour un modèle A d'une théorie h-inductive T et $\bar{a} \in A$, notons $F_A(\bar{a})$ l'ensemble des L-formules positives satisfaites par $\bar{a}$ dans A. Ainsi si A n'est pas un modèle pec, $F_A(\bar{a})$ n'est pas nécessairement un type (ensemble maximal consistant de formules).

La notation usuelle pour les types sera retenue dans le contexte positif. On note $S_n(T)$ (resp. $S_n(M)$) l'espace des n-types de la théorie T (resp. de la théorie $T(M)$ avec paramètres dans M). Un n-type de $S_n(T)$ (resp. de $S_n(M)$) a une réalisation dans un pec de T (resp. dans une extension élémentaire de M, notion qui sera introduite dans la section suivante).

On définit sur $S_n(A)$ une topologie dont la base des fermés est l'ensemble des F_f où f parcourt l'ensemble des formules positives et

$$F_f = \{p \in S_n(A) | p \vdash f\}$$

L'espace des types (positifs) est quasi-compact d'après le fait 2.12, mais pas nécessairement séparé. Dans [13] Poizat a étudié des conséquences du manque de séparation. Dans la section 3.3, on étudie ce problème de manière systématique.

2.5 Extensions élémentaires positives

La notion d'extension élémentaire positive en logique positive a été introduite et étudiée dans [14] :

Définition 2.16 ([14]) *Une continuation N de M est une extension élémentaire positive de M, notée $M \preceq_+ N$, si N est un pec de la classe des modèles de la théorie h-universelle $Tu(M)$ de M dans le langage $L(M)$.*

Dans toute la suite nous utiliserons l'expression extension élémentaire au sens positif.

Dans [14], Poizat donne la caractérisation suivante des extensions élémentaires en logique positive.

Fait 2.17 ([14] lemme 1) *Une continuation N de M en est une extension élémentaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
1. M est immergé dans N.
2. Pour tout $\bar{b}$ de N et toute L-formule existentielle positive $f(\bar{x})$ non satisfaite par $\bar{b}$ dans N, il existe une formule existentielle positive $g(\bar{x}, \bar{a})$, à paramètres $\bar{a}$ dans M, qui est satisfaite par $\bar{b}$, et qui est contradictoire avec $f(\bar{x})$: l'énoncé $\neg(\exists \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{a}))$, fait partie de la théorie universelle $Tu(M)$, avec $f(\bar{x}, \bar{y})$ et $g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{a})$ des formules libres.

Lemme 2.18 *Soient T une théorie h-inductive, A et B deux pecs de T telles que A se continue dans B, alors B est une extension élémentaire positive de A.*

Preuve. Montrons que B est un pec de $Tu(A)$ la théorie h-universelle de A. Pour cela on montre que tout homomorphisme de B dans un modèle de $Tu(A)$ est une immersion.

Comme tout modèle de $Tu(A)$ est un modèle de Tu, la compagne h-universelle de T, et que B est un pec de Tu, on déduit que tout homomorphisme de B dans un modèle de $Tu(A)$ est une immersion. Ce qui implique que B est un pec de $Tu(A)$. $\square$

Lemme 2.19 *Soient T une théorie h-inductive, A un pec de T et B une extension élémentaire positive de A, alors B est un pec de T.*

Preuve. Soit M un modèle T et f un homomorphisme de B dans M. Pour montrer que B est un pec de T il suffit de montrer de f est une immersion. Soient i l'application canonique de A dans B, $\varphi(\bar{x})$ une formule positive et $\bar{b}$ un uple de B. Supposons que $M \models \varphi(f(\bar{b}))$ et $B \models \neg\varphi(\bar{b})$. Comme B est un pec de $Tu(A)$, par la caractérisation des extensions élémentaires positives, il existe $\psi(\bar{x})$ une formule positive à paramètres dans A telle que

1. $B \models \psi(\bar{b})$,
2. $\psi \in Res_{Tu(A)}(\varphi)$

Par (1) et le fait que f est un homomorphisme, on déduit que $M \models \psi(f(\bar{b}))$. D'autre part, comme A est un pec de T et M est modèle de T, l'homomorphisme $f \circ i$ de A dans M est une immersion, ce qui implique que M est un modèle de $Tu(A)$.

Ainsi M est un modèle de $Tu(A)$ qui satisfait à la fois $\varphi(f(\bar{b}))$ et $\psi(f(\bar{b}))$, une contradiction. Par conséquent, $B \models \varphi(\bar{b})$, et il s'ensuit que f est une immersion. $\square$

Contrairement à la théorie des modèles usuelle l'ensemble les extensions élémentaires positives d'une structure ou les pecs d'une théorie h-inductive peuvent être bornés. Dans la suite en étudiera certaines prorpriétés de ces théories, dites les théories h-inductives bornées.

Définition 2.20 *Une théorie h-inductive est dite non bornée si elle a des modèles pecs de cardinal arbitrairement large. Une L-structure A est dite non bornée si $Tk(A)$ est non bornée dans le langage $L(A)$.*

Remarque : Une structure est non bornée si et seulement si elle a des extensions élémentaires positives de cardinal arbitrairement large.

Nous donnons des exemples de théories pour illustrer la propriété d'être bornée.

Exemples 2.21

1. Dans le langage $L = \{=\}$, la théorie h-inductive de l'égalité est bornée. Le seul modèle pec est le singleton comme c'était expliqué dans l'exemple 2.7.
2. Toute théorie T h-inductive, modèle-complète dans un langage infini est non bornée. En effet comme la classe des pec est élémentaire. D'après le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant de la théorie des modèles avec négation, pour tout cardinal λ il existe un pec de la théorie de cardinal λ. Ainsi T est non bornée.
3. Une théorie h-inductive dans un langage infini dont les h-maximaux forment une classe élémentaire est non bornée. Toujours par Löwenheim-Skolem avec négation, pour tout λ il existe un h-maximal A de cardinal λ qu'on peut le plonger dans un pec B. Comme les plongements sont injectifs, on déduit que $|B| \geq \lambda$, ce qui implique que T est non bornée.
4. Si A est une L-structure telle que $Tk(A)$ définit positivement uniformément la formule $x \neq y$, alors A est une structure non bornée.
5. On fixe le langage $L = \{\leq\}$. La structure $(\mathbb{Q}, \leq)$, où $\leq$ est la relation d'ordre usuelle des rationnels, est bornée dans le langage $L(\mathbb{Q})$, où $L(\mathbb{Q})$ est le langage obtenu après avoir ajouté à L un symbole de constante pour chaque rationnel. En effet, l'extension élémentaire maximale est l'ensemble de nombres réels muni de la relation d'ordre usuelle avec un point à $+\infty$ et un autre à $-\infty$. Remarquons que la structure $(\mathbb{Q}, <)$ n'est pas bornée parce que l'inégalité y est positivement définie.
6. Toute théorie dont le nombre des pec est dénombrable est une théorie bornée.

Nous aurons fréquemment besoin du lemme suivant qui est la forme positive du théorème de Löwenheim-Skolem descendant. C'est une version légèrement modifiée du lemme 11 de [3].

Lemme 2.22 *Soient T une théorie h-inductive, A un modèle de T, et B un sous ensemble de A. Alors il existe $B^\star$ un modèle de T, de cardinal $\leq max\{|B|, |L|\}$ qui contient B, et qui s'immerge dans A.*

Preuve. C'est la même preuve que celle du lemme 11 de [3] quitte à remarquer que la structure $B^\star$ obtenue à la fin de la construction dans la preuve de [3] est modèle de T. En effet, supposons que

$$T \vdash \forall \bar{x}[\exists \bar{y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \to \exists \bar{z}\psi(\bar{x}, \bar{z})] \ .$$

Si $B^\star \models \exists \bar{y}\varphi(\bar{a}, \bar{y})$, avec $\bar{a} \in B^\star$, alors $A \models \exists \bar{y}\varphi(\bar{a}, \bar{y})$, et $A \models \exists \bar{z}\psi(\bar{a}, \bar{z})$. Vu la construction de $B^\star$ on déduit que $B^\star \models \exists \bar{z}\psi(\bar{a}, \bar{z})$. Ainsi, $B^\star \models T$. $\Box$

Lemme 2.23 *Soit T une théorie h-inductive non bornée, alors pour tout cardinal $\lambda \geq \mid L \mid$, il existe un pec de cardinal λ.*

Preuve. Comme la théorie T est non bornée, alors il existe un pec B de taille $\gamma \geq \lambda$. Soit A une partie de B de taille λ. D'après le lemme 2.22, il existe A' une sous structure de cardinal $\leq max(\lambda, |L|)$ qui est immergée dans B et qui contient A. Comme B est pec, A' est aussi un pec de T. $\Box$

Comme la plupart des études en théorie des modèles positive sont faites dans la classe des pecs d'une théorie h-inductive ou dans une classe d'extensions d'une structure, le théorème de compacité est d'usage limité. En effet, le modèle témoin de consistance de l'ensemble d'énoncés, fourni par ce théorème n'est pas nécessairement pec. Le même phénomène est observé dans l'étude des classes élémentaires positives. Dans le cadre d'une théorie h-inductive, la classe des pec est en fait une classe élémentaire abstraite au sens de Shelah. C'est ce que nous vérifierons dans la suite.

Définition 2.24 ([18]) *Soit L un langage du premier ordre, et Γ une classe de L-structures munie d'une relation binaire $\prec$. On dit que $(\Gamma, \prec)$ est une classe élémentaire abstraite si elle vérifie les propriétés suivantes :*
N1- La classe Γ est close par isomorphismes.
N2- $\prec$ est une relation d'ordre partiel, close par isomorphismes, et $A \prec B$ implique $A \subset B$.
N3- Si α un ordinal, et $\{A_t : t < \alpha\}$ une $\prec$-chaîne continue alors :
1- $\bigcup_{t<\alpha} A_t \in \Gamma$;
2- pour tout $j < \alpha$, $A_j \prec \bigcup_{t<\alpha} A_t$;
3- si pour tout $t < \alpha$ on a $A_t \prec A \in \Gamma$, alors $\bigcup_{t<\alpha} A_t \prec A$.
N4- si $A, B, C \in \Gamma$, $A \prec C$, $B \prec C$ et $A \subset B$, alors $A \prec B$.
N5- Il existe un nombre de Löwenheim-Skolem $LS(\Gamma)$, tel que si $A \subset B \in \Gamma$ alors il existe $A' \in \Gamma$ tel que $A \subset A' \prec B$ et $\mid A' \mid \leq \mid A \mid + LS(\Gamma)$.

Soient T une théorie h-inductive, Γ la classe de ses pec, et $A, B \in \Gamma$. On définit la relation binaire par $A \prec B$ si et seulement si A s'immerge dans B. Il est facile de vérifier que :

Proposition 2.25 *Soit T une théorie h-inductive dans un langage L, alors la classe de ses pec munie de la relation $\prec$ est une classe élémentaire abstraite.*

Preuve. On vérifie les propriétés N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 de la définition 2.24.

Propriété N_1 : Soit B une L-structure isomorphe à un pec de de la théorie T. Alors d'une part B est un modèle de T, d'autre part il est bien connu (le lemme 10 de [3]) que tout modèle de T qui s'immerge dans un pec de T est un pec de T. Ainsi, B appartient à la classe des pec de T.

Propriété N_2 : Soient A, B deux pec de T tels que A s'immerge dans B, alors B est une extension élémentaire positive de A (lemme 2.18) ce qui nous permet de supposer que $A \subset B$.

Propriété N_3 : Soient α un ordinal limite et $\{A_t : t < \alpha\}$ une $\prec$-chaîne continue de pec de T. Par le fait que la classe des pec de T est inductive (fait 2.9) et que $\bigcup_{t<\alpha} A_t$ est la limite inductive de la chaîne $\{A_t : t < \alpha\}$, les trois points de la propriété de N_3 de la définition 2.24 découlent directement.

Propriété N_4 : Soient A, B, C trois pec de T tels que $A \prec C$, $B \prec C$ et $A \subset B$. Le fait que A se plonge dans B et que A, B sont des pec, implique que B est une extension élémentaire positive de A (lemme 2.18).

Propriété N_5 : Elle découle directement du lemme 2.22 et du lemme 2.18.
□

2.6 Extensions universelles.

La notion d'extension universelle est réminiscente d'objets universels en théorie des catégories. Dans notre contexte, la limite inductive d'extensions universelles généralise la notion de saturation, comme cela se fait dans l'étude des classes élémentaires abstraites (définition 2.24).

Dans cette section on étudie certaines propriétés de cette notion que nous reprendrons dans le chapitre suivant.

Définition 2.26 *Soient A, B deux modèles d'une théorie h-inductive T, et h un homomorphisme de A dans B. On dit que (B, h) est une extension universelle de A, si pour tout modèle C de T de cardinal $\leq |A|$ où A se continue par un homomorphisme f, il existe un homomorphisme g de C dans B tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Remarque :
Soient (B, h) est une extension universelle de A, et g un homomorphisme de B dans un modèle C de T. Alors $(C, g \circ h)$ est aussi une extension universelle de A. En particulier, A admet une extension universelle (B_e, h'), avec B_e un pec de T.

Définition 2.27 *Soient T une théorie h-inductive et α un ordinal. Une chaîne universelle de longueur α de T est une famille inductive de modèles $\{A_i : i < \alpha\}$ (resp. $\{A_i : i \leq \alpha\}$ si α est successeur) de T avec une famille d'homomorphismes $\{f_{ij} : i \leq j < \alpha\}$ (resp. $\{f_{ij} : i \leq j < \alpha\}$ si α est successeur) telle que pour tout ordinal $\beta < \alpha$, $(A_{\beta+1}, f_{\beta,\beta+1})$ est une extension universelle de A_β et que si $\beta \leq \alpha$ est un ordinal limite alors A_β est la limite inductive des A_i avec $i < \beta$, $f_{i\beta}$ étant défini comme l'application canonique de A_i dans A_β.*

Lemme 2.28 *Soit $\{A_i; f_{ij} : i \leq j < \alpha\}$ une chaîne universelle de la théorie h-inductive T. on suppose que pour tout $i \leq \alpha$ ordinal limite, A_i est un pec de T. Dans ce cas, si $j \leq i$, l'application h_{ji}, qui par construction des limites inductives est l'application canonique de A_j vers A_i, alors (A_i, h_{ji}) est une extension universelle de A_j.*

Preuve. Soit A_i un membre de la chaîne universelle avec i limite. Montrons que A_i est pec un de T. Comme A_i est limite inductive de modèles de T, A_i est un modèle de T (fait 2.8). Maintenant soit f un homomorphisme de A_i dans un modèle B de T. Supposons que $B \models \varphi(f(\bar{a}))$, où φ est une formule positive et $\bar{a}$ un uple de A_i. Alors il existe $\beta < i$ tel que $\bar{a} \in A_\beta$ et $\bar{a} = f_{\beta,i}(\bar{a})$.

Par le lemme 2.22, il existe B', modèle de T engendré par $f \circ f_{\beta,i}(A_\beta)$ de cardinal $\leq |A_\beta|$ tel que $B' \models \varphi(f \circ f_{\beta,i}(\bar{a}))$. Comme $(A_{\beta+1}, f_{\beta,\beta+1})$ est une extension universelle de A_β, il existe h un homomorphisme de B' dans $A_{\beta+1}$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_\beta \arrow[r, "f_{\beta,i}"] \arrow[drr, "f_{\beta,\beta+1}"'] & A \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, "i_d"] \arrow[d, "h"] & B \\
 & & A_{\beta+1} \arrow[ul, "f_{\beta+1,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $B' \models \varphi(f(f_{\beta,i}(\bar{a})))$ et que $h \circ f \circ f_{\beta,i} = f_{\beta,\beta+1}$, on conclut que $A_{\beta+1} \models \varphi(f_{\beta,\beta+1}(\bar{a}))$. Par définition de la limite inductive, $f_{\beta+1,i} \circ f_{\beta,\beta+1} = f_{\beta,i}$, d' où $A \models \varphi(\bar{a})$, ce qui implique que f est une immersion. Ainsi A est un pec de T.

Montrons maintenant que pour tout $\beta < i$, $(A_i, f_{\beta,i})$ est une extension universelle de A_β. Soient C un modèle de T, g un homomorphisme de A_β

vers C, et $|C| \leq |A_\beta|$. Comme $(A_{\beta+1}, f_{\beta,\beta+1})$ est une extension universelle de A_β, il existe f et h tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] & A_{\beta+1} \arrow[d, "h"] \\
A_\beta \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_{\beta,\beta+1}"] \arrow[r, "f_{\beta,i}"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

$f_{\beta,i} = h \circ f_{\beta,\beta+1} = h \circ f \circ g$. La commutativité du diagramme prouve le résultat recherché. $\square$

2.7 Outils combinatoires et suites indiscernables

Dans cette section, on va rappeler le théorème de Erdös-Rado qui sera utilisé à plusieurs endroits de cette thèse. La première application de ce théorème sera la vérification de l'existence des suites indiscernables dans le cadre positif.

Définition 2.29 *Pour tout cardinal λ et ordinal i, on définit par induction sur i un cardinal noté $\beth_i(\lambda)$ comme suit :*

$$\beth_0(\lambda) = \lambda\ , \quad \beth_{i+1}(\lambda) = 2^{\beth(\lambda)} \text{ et } \beth_\delta(\lambda) = \bigcup_{i<\delta} \beth_i(\lambda) \text{ pour } \delta \text{ un ordinal limite.}$$

Soient X un ensemble ordonné par une relation d'ordre $\preceq$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $[X]^k$ l'ensemble $\{(x_1, \cdots, x_k) | x_i \preceq x_j \quad \text{si et seulement si} \quad i \leq j\}$. Soient λ, μ et δ des cardinaux et $k \in \mathbb{N}$. On écrit $\lambda \longrightarrow (\mu)^k_\delta$ pour dire que si X est un ensemble linéairement ordonné, de cardinal λ et $f : [X]^k \longrightarrow \delta$, alors il existe Y un sous-ensemble de X de cardinal μ tel que f est constante sur $[Y]^k$.

Théorème 2.30 (Erdös-Rado) *Soit λ un cardinal infini et $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\beth_k(\lambda)^+ \longrightarrow (\lambda^+)^{k+1}_\lambda\ .$$

Une première application de ce théorème est la vérification de l'existence des suites indiscernables, qui seront étudiées au dernier chapitre. Dans le reste de cette section, on reprend en détail une preuve donnée par Ben Yaacov.

Définition 2.31 *Soit T une théorie h-inductive M un pec de T et A un sous ensemble de M. Une suite $(\bar{a}_i | i < \lambda)$ de M est dite A-indiscernable si pour tout $k < \lambda$ et $(\bar{a}_{i_j} | j < k)$ une sous-suite de $(\bar{a}_i | i < \lambda)$ telle que $i_m < i_n$ pour tous $m < n < k$, on a*

$$tp((\bar{a}_i | i < k) / A) = tp((\bar{a}_{i_j} | j < k) / A)$$

Définition 2.32 ([3]) *Soit T une théorie h-inductive, si tous modèles A et B de T ont une continuation commune, on dit que T a la proriété de jocp.*

Dans ce qui suit, on vérifie l'existence des suites indiscernables, qui seront étudiées au dernier chapitre. On reprend la preuve donnée dans [2] en détail.

Lemme 2.33 ([2]) *Soient T une théorie h-inductive non bornée, $\lambda > |S_k(T)|$ et $\mu = \beth_{\lambda^+}$, et soit M un pec de T, tel que $|M| \geq \mu$. Alors pour toute suite $(\bar{a}_i|i < \mu)$ de k-uples de M, il existe une suite $(p_i|i < \omega)$ de types qui vérifient les trois propriétées suivantes :*

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \in S_{n\times k}$.
- $\forall m \leq n$ *on a* $p_n(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{n-1}) \models p_m(\bar{x}_{i_0}, \cdots, \bar{x}_{i_{m-1}})$.
- $\forall n < \omega$ *il existe* $i_0 < \cdots < i_{n-1} < \mu$ *pour laquelle*

$$tp(\bar{a}_{i_0}, \cdots, \bar{a}_{i_{n-1}}) = p_n$$

Preuve. Le but de la preuve est la construction par induction d'une suite p_n de $n \times k$-types, telles que pour tous $n \in \mathbb{N}$ on a les deux propriétés suivantes :
1- Pour tous $i_0 < \cdots < i_{m-1} < n$, on a $p_n(\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{n-1}) \models p_m(\bar{x}_{i_0}, \cdots, \bar{x}_{i_{m-1}})$.
2- Pour tous $\alpha < \mu$ il existe $I \subset \mu$, avec $|I| = \alpha$ t el que tous n éléments ordonnées de a_I satisfont p_n.

Pour p_0 on prend le 0-type de la théorie T réalisé dans M. Par induction supposons qu'on a p_n et montrons l'existence de p_{n+1}. Soit S l'ensemble des $(n+1)\times k$-types qui satisfont la condition (1), S n'est pas vide en effet soient $\{f_i|i \in K\}$, où K est un ensemble finie, et f_i des formules positives telles que $p_n \vdash f_i$. Posons $\bar{y}_j = (\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_{n-1})$, montrons que Γ la famille de formules positives suivante est consistante :

$$f_i(\bar{y}_j), \quad i \in K \quad j \in \{0, \cdots, n-1\}$$

Par hypothèse d'induction il existe une suite $(\bar{c}_i|i < \omega)$ de la suite $(\bar{a}_i|i < \mu)$ qui vérifié la condition (2) pour p_n. Alors chaque $n+1$ éléments ordonnés de cette suite réalisent Γ.

Maintenant montrons qu'il existe un élément de S qui vérifier la condition (2). Par absurde supposons que pour chaque élément $q \in S$ on trouve un ordinal α_q qui contredit la condition (2). Comme $|S| \leq \lambda < \lambda^+$, alors $\beta = \lambda + sup\{\alpha_q, q \in S\} < \mu$. Ceci nous permet de dire que si $q \in S$ et $\forall I \subset \mu$ tel que $|I| = \beta$, alors il existe un $n+1$-uple extrait de a_I qui ne satisfont pas tous q. Maintenant comme $\mu = \beth_{\lambda^+}$ et $\beta < \mu$ alors il existe $\delta < \lambda^+$ tel que $\beta < \beth_\delta$. Soit $\gamma = \beth_{\delta+n+1}$, d'une part $\gamma < \mu$, d'autre part $\gamma \geq \beth_n(\beta)^+$. Par induction il existe $I \subset \mu$, $|I| = \gamma$ une sous suite a_I de $(a_i|i < \mu)$ qui réalise la condition (2) pour p_n. Par le théorème d'Erdös-Rado on a

$$\beth_n(\beta)^+ \longrightarrow (\beta^+)^{n+1}_\beta \; .$$

En d'autres termes, il existe $J \subset I$, tel que $|J| = \beta^+$ et une sous suite a_J de $(\bar{a}_i|i < \mu)$ telle que tous les $(n+1) \times k$-uples ordonnés ont le même type, contradiction. □

Le corollaire suivant est une adaptation à notre situation du lemme 3.1 de [11].

Corollaire 2.34 *Soient T une théorie h-inductive, non bornée avec jocp , $\lambda > |S_k(T)|$ et $\mu = \beth_{\lambda^+}$. Soit M un pec de T, tel que $|M| \geq \mu$. Alors pour toute suite $(\bar{a}_i | i < \mu)$ de k-uples, il existe $M^\star$ un modèle pec de T de même cardinal que M et où M s'immerge, et une suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ indiscernable de $M^\star$, telle que pour toute $n < \omega$ il existe $i_0 < \cdots < i_{n-1} < \mu$ pour laquelle*

$$tp(\bar{a}_{i_0}, \cdots, \bar{a}_{i_{n-1}}) = tp(\bar{b}_0, \cdots, \bar{b}_{n-1})$$

Preuve. D'après le lemme 2.33 il existe une suite de types p_n qui vérifient les trois propriétés du lemme 2.33. Soient p le type limite de la suite p_n, et M_1 un modèle pec T où p est réalisé par la suite indiscernable $(\bar{b}_i | i < \omega)$ qui est indiscernable. Par le fait que la théorie T a la jocp, il existe N un modèle existentiellement clos de T où M et M_1 s'immergent. On prend pour $M^\star$ une sous-structure de N qui contient M et la suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ et qui s'immerge dans N, donc $M^\star$ est un pec de T qui vérifie les propriétées voulues. □

Chapitre 3

Techniques d'amalgamation et leurs applications

Un thème majeur de cette thèse est l'importance de la présence d'une forme d'amalgamation dans une classe de structures. C'est dans ce chapitre que nous abordons les techniques d'amalgamations proprement dites. L'efficacité de cette notion sera illustrée par trois applications fondamentales : l'étude de la topologie des espaces de types, élimination des quanteurs et complétions minimales des théories h-inductives.

La forme la plus simple et la plus générale d'amalgamation est celle dite asymétrique (lemme 8 [3]). Elle est vraie dans la classe de toutes les structures d'un langage fixé . En raison de sa généralité, elle jouera un rôle fondamental dans la description des complétions d'une théorie h-inductive arbitraire.

L'amalgamation asymétrique perd de son efficacité quand on impose des restrictions aux classes de structures étudiées. En général, elle ne peut assurer que l'amalgame appartiendra à la classe. Une forme restrictive mais efficace d'amalgamation consiste à étudier les modèles de l'enveloppe de Kaiser d'une théorie h-inductive. Cette approche est utilisée dans [3] pour caractériser la séparation des espaces de types. En suivant cette ligne de réflexion, nous montrerons que la propriété de séparation d'une structure est équivalente à celle de ses extensions élémentaires. L'outil principal de ce résultat sera un lemme d'amalgamation Kaiserienne qui, par ailleurs, décline les limites de cette méthode.

Une autre restriction concerne les théories éliminant les quanteurs. Dans notre cas, celles-ci seront les théories de Robinson dont les modèles, dits h-maximaux, jouent un rôle similaire aux pecs d'une théorie h-inductive. La théorie h-inductive de ces modèles jouit d'une maximalité réminiscente de celle de son enveloppe de Kaiser qui permet de les amalgamer. Une étude plus fine sera possible quitte à se restreindre à une sous-classe de h-maximaux celle des modèles faiblement pec.

On finira le chapitre en abordant un thème fréquemment utilisé mans sans précision de détails sur les questions d'existence. Il s'agit de la notion de domaine universel qui fournit un terrain d'étude des théories complètes. Nous utiliserons les techniques d'amalgamation Kaiserienne pour aboutir à une construction générale.

3.1 Bases d'amalgamation

Dans la première section de ce chapitre consacré à l'étude des amalgamations, on commence par étudier une classe de modèles d'une théorie h-inductive qui se distingue par le fait d'être une base d'amalgamation (définition 3.1). On donnera des caractérisations des éléments de cette classe : la première caractérisation est par une forme de maximalité de l'ensemble des formules positives satisfaites par chaque uple de la structure, et la deuxième caractérisation par la possibilité d'avoir une extension universelle.

Définition 3.1 *Soit T une théorie h-inductive. Un modèle A de T est dit une base d'amalgamation, si pour tous B, C modèles de T, où A se continue par des homomorphismes f et g, il existe D un modèle de T, et f', g' des homomorphismes tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

On dit que la théorie T a la propriété d'amalgamation si tous les modèles de T sont des bases d'amalgamation.

Rappelons que pour une structure A, $F_A(\bar{a})$ est l'ensemble des formules positives satisfaites par $\bar{a}$ dans A (chapitre 1, section 1.3).

Lemme 3.2 *Soient T une théorie h-inductive, et A un modèle de T. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1- A est une base d'amalgamation.
2- Pour tout $\bar{a} \in A$, il existe un type de $S(T)$ qui contient $F_A(\bar{a})$ et un seul.

Preuve. $(1 \Rightarrow 2)$ Soit $\bar{a} \in A$, supposons qu'il existe $p \neq q$ deux types de $S(T)$ qui contiennent $F_A(\bar{a})$.

Nous montrons d'abord que comme $p \vdash F_A(\bar{a})$, il existe B un pec de T, et f un homomorphisme de A dans B qui envoie $\bar{a}$ vers $\bar{b}$ une réalisation de p. Pour ce faire, il suffit de montrer que la famille $\Gamma = T \cup Diag^+(A) \cup p(\bar{a})$ est consistante. Soit A' un modèle de T qui réalise p par $\bar{a}'$ et soit $\varphi(\bar{a}, \bar{m}) \in Diag^+(A)$, alors $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in F_A(\bar{a})$, donc $p \vdash \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ ainsi il existe $\bar{c}'$ dans A' tel que $A' \models \varphi(\bar{a}', \bar{c}')$, d'où la consistance de la famille Γ. Soit B' un modèle de Γ et soit B un pec de T où B' se continue. Alors A se continue dans B, et $\bar{b}$ l'image de $\bar{a}$ dans B réalise p.

De la même manière il existe C un pec de T et g un homomorphisme g de A dans C qui envoie $\bar{a}$ vers $\bar{c}$ une réalisation de q. Comme A a la propriété d'amalgamation, il existe D un modèle de T tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

Donc $f'(\bar{b}) = g'(\bar{c})$, ainsi $p = q$, d'où la contradiction.

$(2 \Rightarrow 1)$ Soient

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

avec A modèle de T tel que pour tout n-uple $\bar{a} \in A$, il existe un seul type de $S_n(A)$ qui contient $F_A(\bar{a})$. Soient B, C des pec de T, et f, g des homomorphismes comme dans ce schéma. Supposons qu'on ne peut pas amalgamer f et g. Ceci veut dire qu'il existe $\bar{a} \in A$ tel que $F_B(f(\bar{a}))$ et $F_C(g(\bar{a}))$ (qui sont des types car B et C sont des pec de T) sont contradictoires, ce qui contredit l'hypothèse 2. □

Théorème 3.3 *Soit A un modèle d'une théorie h-inductive T. Alors A admet une extension universelle si et seulement si A est une base d'amalgamation.*

Preuve. Supposons que A a une extension universelle (B, h), et montrons que A est une base d'amalgamation.

Soient $A_i \models T$, $i = 1, 2$ des continuations de A par des homomorphismes f_i. Pour vérifier l'amalgamation, il suffit de montrer que la famille Γ suivante est consistante

$$T \cup Diag^+(A_1) \cup Diag^+(A_2),$$

en interprétant les paramètres de A par les mêmes symboles dans A_1 et A_2.

On fixe un fragment $T \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec Γ_i un fragment fini de $Diag^+(A_i)$ pour $i = 1, 2$. Soit $\bar{a}_i$ l'uple de paramètres de A_i qui apparait dans Γ_i. Par le lemme 2.22 il existe B_i un modèle de $T \cup \Gamma_i$, qui contient $A \cup \{\bar{a}_i\}$, et qui a le même cardinal que A. On note g_i l'homomorphisme de A dans B_i défini par $g_i(a) = f_i(a)$ pour tout $a \in A$. Alors par définition de l'extension universelle on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[d, "h_1"] \\ A \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "h"'] \arrow[dr, "g_2"'] & B \\ & B_2 \arrow[u, "h_2"'] \end{tikzcd}$$

Ceci implique que B est un modèle du fragment $T \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Par le théorème de compacité positive. On déduit que Γ est consistante, ce qui vérifie l'existence de l'amalgamation recherchée.

Pour vérifier l'autre sens supposons que A est une base d'amalgamation et montrons qu'elle admet une extension universelle. Soit Δ la famille de tous les couples (M, f) avec M un modèle de T de cardinal $\leq |A|$, tel que A se continue dans M par l'homomorphisme f. Par l'axiome du choix, on peut supposer Δ bien ordonné dont le type d'ordre sera noté α.

On construira une famille inductive $\{A_\beta : \beta \leq \alpha\}$ de modèles de T dont la famille cohérente d'homomorphismes sera $\{h_{i,j} : i \leq j \leq \alpha\}$, les homomorphismes étant indexés par les ordinaux inférieurs à α. Le dernier membre de cette suite, A_α, sera l'extension universelle recherchée.

Pour amorcer la construction on pose $A_0 = A$, et $h_{0,0}$ est défini comme l'application identité. Comme A est une base d'amalgamation, il existe A_1, modèle de T, et deux homomorphismes $h_{0,1}$ et g_0 de A_0 vers A_1 et de M_0 vers A_1 respectivement tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_{0,0}"] \arrow[d, "f_0"'] & A_0 \arrow[d, "h_{0,1}"] \\ M_0 \arrow[r, "g_0"'] & A_1 \end{tikzcd}$$

Pour l'étape de récurrence, on suppose construite la famille $\{A_\beta : \beta < \gamma \leq \alpha\}$ avec les homomorphismes correspondants. Si γ est un successeur de la forme $\beta + 1$, il existe A_γ, modèle de T, $h_{\beta,\beta+1}$ et g_β homomorphismes, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_{0,\beta}"] \arrow[d, "f_\beta"'] & A_\beta \arrow[d, "h_{\beta,\beta+1}"] \\ M_\beta \arrow[r, "g_\beta"'] & A_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

Pour tout $i \leq \beta$, on pose $h_{i,\beta+1} = h_{\beta,\beta+1} \circ h_{i,\beta}$. La cohérence des homomorphismes déjà construits par récurrence montre que la nouvelle famille est aussi cohérente. En d'autres termes, on continue à avoir une famille inductive de modèles de T.

Si γ est un ordinal limite, alors on définit A_γ comme la limite inductive de la famille inductive déjà construite. Quant aux nouveaux homomorphismes, pour tout $i < \gamma$, $h_{i,\gamma}$ est l'application naturelle de A_i vers A_γ. La nouvelle famille de modèles et d'homomorphismes est aussi inductive.

La construction finit quand α est atteint. Par construction, soit A_α est construit comme à l'étape de récurrence pour les ordinaux successeurs parce que α est successeur, soit A_α est la limite inductive de la famille $\{A_i : i < \alpha\}$ parce que α est limite.

Pour finir la preuve, on montre que $(A_\alpha, h_{0,\alpha})$ est une extension universelle de A. Soit M un modèle de T de cardinal $\leq |A|$ tel que A se continue dans M par un homomorphisme f. D'après la définition de la famille Δ, il existe $\beta \leq \alpha$, tel que $(M, f) = (M_\beta, f_\beta)$. Si $\beta = \alpha$, alors l'application identité de A_α vers A_α fait la tâche. Sinon, $\beta < \alpha$, et par construction, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_{0,\beta}"] \arrow[d, "f_\beta"'] & A_\beta \arrow[d, "h_{\beta,\beta+1}"] & \\ M_\beta \arrow[r, "g_\beta"'] & A_{\beta+1} \arrow[r, "h_{\beta+1,\alpha}"'] & A_\alpha \end{tikzcd}$$

les égalités $h_{0,\alpha} = h_{\beta+1,\alpha} \circ h_{\beta,\beta+1} \circ h_{0,\beta} = h_{\beta+1,\alpha} \circ g_\beta \circ f_\beta$ qui en découlent vérifient la conclusion recherchée. $\square$

Remarque : Comme la contruction de l'extension universelle est faite en amalgamant tous les continuation A, on déduit que la taille de l'extension universelle est au plus $2^{|A|}$.

3.2 Amalgamations Kaiseriennes

Dans les travaux antérieurs sur la théorie des modèles positive, l'existence des amalgamations est fréquemment liée aux théories h-universelles. Pour ce qui suit, il sera nécessaire d'étendre le cadre aux enveloppes de Kaiser. Pour commencer, on obtient une version légèrement améliorée de l'amalgamation dite asymétrique démontrée dans le lemme 8 de [3] :

Lemme 3.4 ([3] lemme 8) *Soient A, B, C, des L-structures, g une immersion de A dans B et h un homomorphisme de A dans C , alors il existe D, un modèle de $Tk(C)$, un homomorphisme g' de B dans D, et une immersion h' de C dans D tels que $g' \circ g = h' \circ h$.*

Preuve. Nommons les éléments de A dans B et C par les mêmes symboles. La preuve consiste à montrer que l'ensemble d'énoncés

$$Tk(C) \cup diag^+(B)$$

est consistant. En effet, si $f(\bar{a}, \bar{b})$ est dans le diagramme positif de B avec $\bar{a}$ et $\bar{b}$ extraits de A et de B respectivement, alors $A \models \exists \bar{y} f(\bar{a}, \bar{y})$ puisque A s'immerge dans B. Ainsi, on peut interpréter $\bar{b}$ par un élément de A. La formule obtenue appartient à $Tk(C)$. $\square$

Ce lemme a le corollaire suivant qui est mentionné dans [3] sous une forme différente.

Corollaire 3.5 *Les pec sont des bases d'amalgamations.*

On déduit le lien suivant avec les extensions universelles.

Corollaire 3.6 *Tout pec A_e d'une théorie h-inductive admet une extension universelle (B_e, i), où B_e est un pec et i une immersion de A_e dans B_e.*

Preuve. Comme tout pec est une base d'amalgamation, le corollaire découle du théorème 3.3. $\square$

Le lemme suivant et son corollaire sont fondamentaux pour la section 4.

Lemme 3.7 *Soient A une L-structure, B un modèle de $Tk(A)$ et C une L-structure dans laquelle A s'immerge. Alors il existe D un modèle de $Tk(C)$, et deux immersions φ, ψ, telles que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

Preuve. Nommons les éléments de A dans B et C par les mêmes symboles. On note $L^\star$ le langage ainsi élargi. La preuve du théorème revient à montrer la consistance de la famille des $L^\star$-énoncés h-inductifs

$$\Gamma = Tk(C) \cup Tu(B) \cup diag^+(B).$$

Soit $F = \{\chi, f(\bar{\beta}, \bar{b}), \neg\exists \bar{y} g(\bar{y}, \bar{b})\}$ un fragment fini de Γ, avec $\chi \in Tk(C)$, $f(\bar{\beta}, \bar{b}) \in diag^+(B)$ et $\neg\exists \bar{y} g(\bar{y}, \bar{b}) \in Tu(B)$.

Comme $B \models \neg\exists \bar{y} g(\bar{y}, \bar{b})$, et $B \models \exists \bar{x} f(\bar{x}, \bar{b})$, on déduit que l'énoncé h-inductif

$$\forall \bar{z}[\exists \bar{x} f(\bar{x}, \bar{z}) \to \exists \bar{y} g(\bar{y}, \bar{z})]$$

n'appartient pas à $Tk(B)$, donc non plus à $Tk(A)$. Ceci implique qu'on peut trouver $\bar{a} \in A$ tel que $A \models \neg\exists \bar{y} g(\bar{y}, \bar{a})$, et $A \models \exists \bar{x} f(\bar{x}, \bar{a})$, d'où la possibilité d'interpréter nos deux énoncés dans A, par suite dans C, et donc la consistance de F. $\square$

Corollaire 3.8 *Soient A une L-structure, B un modèle de $Tk(A)$. Alors tout modèle de $Tk(A)$ s'immerge dans un modèle de $Tk(B)$, et tout modèle de $Tk(B)$ s'immerge dans un modèle de $Tk(A)$.*

Remarque : La condition sur la théorie de Kaiser est essentielle dans l'amalgamation Kaiserienne car en général on ne peut pas amalgamer les immersions. Un exemple simple, signalé par Ben Yaacov, pour illustrer cette situation est la théorie h-universelle T dans le langage a trois prédicats relationnels P, Q, R tels que $T \models \neg\exists x, yQ(x) \wedge R(y)$. Soient $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\}$ trois modèles de T tels que $A \models P(a)$, $B \models P(a) \wedge Q(b)$ et $C \models P(a) \wedge R(c)$. Alors A s'immerge dans B et C mais on ne peut pas amalgamer B et C par des immersions dans un modèle de la théorie T.

Dans le reste de ce chapitre, en étudie quelques application des techniques d'amagamations dans la caractérisation de certains phénomènes propres a la théorie des modeles positive.

3.3 Topologie des espaces de types

Cette section est consacrée à l'étude des propriétés topologiques des espaces de types positifs ainsi que leurs liens avec des théories compagnes de d'une théorie h-inductive T. Le théorème principal, qui repond à une question de Poizat, concerne la séparation dans les espaces de types. Sa preuve dépend fortement des techniques d'amalgamation développées jusqu'ici.

Définition 3.9 ([13]) *Une théorie h-inductive T (resp. une structure M), est dite séparée si et seulement si pour tout entier naturel n l'espace de types $S_n(T)$ (resp. $S_n(M)$) est séparé (la propriété Hausdorff).*

Une telle définition serait inutile si la négation était dans le langage. Or l'exclusion de la négation, qui rend la topologie de S_n plus proche de la topologie de Zariski en géométrie algébrique, fournit rapidement des exemples de théories h-inductives dont les espaces de types ne sont pas séparés (voir l'exemple aprés le lemme 3.10).

Une question naturelle est le lien entre les propriétés de séparation d'une théorie h-inductive et celles de ses modèles. Ceci nécessite d'étudier la préservation de la séparation par passage aux extensions et sous-structures élémentaires. Une conclusion affirmative de préservation pour le passage aux extensions élémentaires est obtenue dans [13]. Le résultat principal de cette section donne une réponse affirmative pour le passage aux sous-structures élémentaires.

Lemme 3.10 *Soient T une théorie h-inductive et $S_n(T)$ son espace des n-types. Alors $S_n(T)$ est séparé si et seulement si pour tous $p, q \in S_n(T)$ distincts il existe deux formules positives f, g, telles que $p \vdash f$, $q \vdash g$, et $Res_T(f) \cap Res_T(g) = \emptyset$.*

Preuve. Soient O_f et O_g les deux ouverts élémentaires de $S_n(T)$ définies repectivement par f et g. Rappelons que O_f est le complémentaire du fermé F_f défini par la formule positive f (section 2.4). La présence d'un type r dans l'intersection $O_f \cap O_g$ équivaut à dire qu'il existe $\varphi \in Res_T(f)$ et $\psi \in Res_T(g)$ tels que $r \vdash \psi \wedge \varphi$. Ainsi on a

$$O_f \cap O_g = \emptyset \Leftrightarrow Res_T(f) \cap Res_T(g) = \emptyset.$$

□

Avant de continuer, utilisons ce lemme pour illustrer un exemple de théorie non séparée dont une version légèrement différente était donnée à la fin de [3]. Soit $L = \{R_i : i < \omega\}$ un langage relationnel. Soit T une théorie h-inductive qui assure que pour tout $i < \omega$, $Res_T(R_i)$ contient tous les $R_j, j \neq i$ sauf un nombre fini. Alors par le lemme 3.10, on déduit que T n'est pas séparée.

Dans [3], est démontrée la caractérisation suivante de la séparabilité :

Fait 3.11 ([3] Théorème 20) *Les espaces de types d'une théorie h-inductive T sont séparés si et seulement si on peut amalgamer les homomorphismes entre les modèles de son enveloppe de Kaiser Tk. En d'autres termes pour tous modèles M_1, M_2, M_3 de Tk, tels que M_1 se continue respectivement dans M_2 pas un homomorphisme f et dans M_3 par un homomorphisme g, alors il existe M_3 un modèle de Tk et s, h deux homomorphismes tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M_2 \arrow[d, "s"] \\ M_3 \arrow[r, "h"'] & M_3 \end{tikzcd}$$

Les corollaires suivants offrent des exemples de théories h-inductives séparées.

Corollaire 3.12 *Toute théorie T h-inductive, modèle-complète est séparée.*

Preuve. Comme T est modèle-complète, par définition la classe des pec de T est élémentaire et axiomatisée par sa théorie de Kaiser Tk. Par conséquent, tout modèle de Tk est un pec. Par le Corollaire 3.5 les modèles de Tk sont des bases d'amalgamations. Ainsi si A_1, A_2, A_3 sont trois modèles de Tk tels que A_1 se continue dans A_2 et A_3 par des immersions (car A_1 est un pec), alors il existe B un modèle de T tel que le diagramme suivante est commutatif

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & A_2 \arrow[d, "h_1"] \\ A_3 \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Ensuite on continue B dans un pec de T qui est en particulier un modèle de Tk, ce qui implique l'amalgamation des modèles de Tk et par suite la séparation en utilisant le fait 3.11. □

L'implication inverse est fausse en général. Ce sera illustré par un exemple à la fin de cette section.

Corollaire 3.13 *Une théorie h-inductive qui a la propriété d'amalgamation est séparée.*

Preuve. Soient A_1, A_2, A_3 sont trois modèles de Tk tels que A_1 se continue dans A_2 et A_3 par des homomorphismes f_1, f_2. Comme $T \subset Tk$ et T a la propriété d'amalgamation, il existe $B \models T$ et h_1, h_2 deux homomorphismes tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_2 \arrow[d, "h_1"] \\ A_3 \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Ensuite on continue B dans un pec de T. Or B est un modèle de Tk d'après le fait 2.4. La séparation de T en découle. □

Corollaire 3.14 *Soient L un langage relationnel et T une théorie h-universelle finiment axiomatisable, alors T est séparée.*

Preuve. Par le fait 2.10, Tk est modèle-complète. La conclusion suit du corollaire 3.12. □

On utilise ce corollaire pour vérifier qu'un exemple dans [8] est une théorie séparée. Soit L le langage qui contient un seul prédicat relationel R et soit T la théorie h-universelle $\{\neg\exists xy\ R(x,y) \wedge R(y,x)\}$. D'après le corollaire 3.14, T est séparée.

Maintenant, on aborde la question de préservation de la séparation. Dans [13], Poizat a fait la remarque suivante :

Fait 3.15 ([13]) *Une extension élémentaire N d'une structure séparée M est séparée.*

L'inverse de cette remarque y était laissée comme question ouverte. Le théorème 3.16 donne une réponse affirmative à cette question. L'amalgamation dans les classes de modèles des enveloppes de Kaiser (le lemme 3.7 et le corollaire 3.8) sera l'outil majeur de la preuve.

Théorème 3.16 *Une restriction élémentaire d'une structure séparée est séparée.*

Preuve. Le point principal de la preuve du théorème 3.16 est de se ramener de $Tk(M)$ à $Tk(N)$ pour pouvoir utiliser la propriété d'amalgamation, le fait 3.11.

Soient M_1, M_2, M_3 trois modèles de $Tk(M)$, φ_2 (resp. φ_3) un homomorphisme de M_1 dans M_2 (resp. de M_1 dans M_3). Par le corollaire 3.8, il existe N_1, modèle de $Tk(N)$, tel que M_1 et N s'immergent dans N_1 et que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & M_1 \arrow[d, "i_1"] \\ N \arrow[r, "i"'] & N_1 \end{tikzcd}$$

Comme M_1 s'immerge dans N_1, en appliquant l'amalgamation asymétrique, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_1"'] & M_2 \arrow[d, "i_2"] \\ N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_2"'] & M' \end{tikzcd}$$

avec M' un modèle de $Tk(M_2)$, et par conséquent un modèle de $Tk(M)$. On schématise la construction faite jusque là par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_1"] & M_2 \arrow[d, "i_2"] \\ N \arrow[r, "i"'] & N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_2"'] & M' \end{tikzcd}$$

Sur ce diagramme, on remarque que l'application ${\varphi'}_2 \circ i$ définie de N dans M' est une immersion car N est pec de $Tk(M)$ et $M' \models Tk(M)$, ce qui implique que M' est un modèle de $Tu(N)$. Ceci nous permet de continuer M' dans N_2 un modèle pec de $Tu(N)$ (fait 1 [3]), qui est aussi modèle de $Tk(N)$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_1"] & M_2 \arrow[d, "i_2"] \arrow[dr, "f_2 \circ i_2"] & \\ N \arrow[r, "i"'] & N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_2"'] & M' \arrow[r, "f_2"'] & N_2 \end{tikzcd}$$

On refait la même contruction pour M_3. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & M_1 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "i_1"] & M_3 \arrow[d, "i_3"] \arrow[dr, "f_3 \circ i_3"] & \\
N \arrow[r, "i"'] & N_1 \arrow[r, "\varphi'_3"'] & M'' \arrow[r, "f_3"'] & N_3
\end{tikzcd}$$

où M'' est un modèle de $Tk(M)$, N_3 un modèle de $Tk(N)$ et f_3 un homomorphisme. On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& M_2 \arrow[r, "f_2 \circ i_2"] & N_2 \\
M_1 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\varphi_3"'] & N_1 \arrow[ur, "f_2 \circ \varphi'_2"] \arrow[dr, "f_3 \circ \varphi'_3"] & \\
& M_3 \arrow[r, "f_3 \circ i_3"'] & N_3
\end{tikzcd}$$

Ensuite, par amalgamation des modèles de $Tk(N)$ (le fait 3.11) on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "f_2 \circ \varphi_2'"] \arrow[d, "f_3 \circ \varphi_3'"'] & N_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
N_3 \arrow[r, "\psi_3"'] & N'
\end{tikzcd}$$

où N' est un modèle de $Tk(N)$, donc aussi de $Tk(M)$. Il s'ensuit de cela que

$$\psi_2 \circ f_2 \circ \varphi_2' \circ i_1 = \psi_3 \circ f_3 \circ \varphi_3' \circ i_1 \ .$$

Ceci implique

$$\psi_2 \circ f_2 \circ i_2 \circ \varphi_2 = \psi_3 \circ f_3 \circ i_3 \circ \varphi_3$$

On schématise cette construction par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& M_2 \arrow[r, "f_2 \circ i_2"] & N_2 \arrow[dr, "\psi_2"] & \\
M_1 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\varphi_3"'] & N_1 \arrow[ur, "f_2 \circ \varphi'_2"] \arrow[dr, "f_3 \circ \varphi'_3"] & & N' \\
& M_3 \arrow[r, "f_3 \circ i_3"'] & N_3 \arrow[ur, "\psi_3"'] &
\end{tikzcd}$$

et on a le diagramme commutatif d'amalgamation suivant dans la classe des modèles de $Tk(M)$:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & M_2 \arrow[d, "\psi_2 \circ f_2 \circ i_2"] \\ M_3 \arrow[r, "\psi_3 \circ f_3 \circ i_3"'] & N' \end{tikzcd}$$

Le théorème suit du fait 3.11. $\square$

On finit cette section en donnant un exemple qui montre que la topologie des espaces de types est trop faible pour déterminer toutes les propriétés d'une théorie h-inductive. Il s'agit d'une théorie séparée dont la classe des pec n'est pas élémentaire. Par conséquent, la théorie en question n'est pas modèle-complète, ce qui montre en particulier que l'implication inverse du corollaire 3.12 est fausse.

Exemple 3.17 Soit L le langage relationnel $\{P_i, R_i : i < \omega\}$, où les prédicats P_i, R_i sont uniares. Soit T la théorie h-universelle

$$\{\neg\exists x P_i(x) \wedge P_j(x), \forall x P_i(x) \vee R_i(x), \neg\exists x P_i(x) \wedge R_i(x) \mid i \neq j,\, i, j < \omega\}.$$

Tout pec A de T a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $i < \omega$ les énoncés h-inductifs $\forall x, y P_i(x) \wedge P_i(y) \to x = y$ appartiennent à Tk, car sinon on peut continuer A par un homomorphisme dans un modèle de T, qui envoie x et y sur la même image, ce qui l'empêcherait d'être une immersion. Ceci contredirait que A est un pec.
2. Pour tout $i < \omega$, $A \models \exists x P_i(x)$. En effet, si A satisfait l'énoncé h-universel $\neg\exists x P_i(x)$, alors l'application définie de A dans $A \cup \{b\}$ où b réalise la formule $P_i(x)$ est un homomorphisme et pas immersion. Ceci implique que A n'est pas un pec. Ainsi on déduit que pour tout $i < \omega$, $A \models \exists x P_i(x)$. En particulier, A est nécessairement infini.
3. A satisfait la famille d'enoncés h-inductifs suivante :
$\{\neg\exists x P_i(x) \wedge P_j(x); \forall x P_i(x) \vee R_i(x); \neg\exists x P_i(x) \wedge R_i(x) \mid i \neq j, i, j < \omega\} \cup \{\exists x P_i(x); \exists x R_i(x); \forall xy P_i(x) \wedge P_i(y) \to x = y | i < \omega\}$.

Il existe exactement deux modèles pecs de T qui sont la structure $A = \{a_i | \, i < \omega\}$ et la structure $B = A \cup \{x\}$ telles que pour tout $i, j < \omega$ et $i \neq j$ on a $A, B \models P_i(a_i) \wedge R_j(a_i)$, et $B \models R_i(x)$.

Il découle du théorème de Löwenheim-Skolem classique que la classe des pec n'est pas élémentaire. En effet, si la classe des pecs était élémentaire, alors pour tout cardinal $\lambda \geq \aleph_0$ il existerait un pec de cardinal λ. Cependant la classe des pecs ne contient que deux éléments.

Montrons que la théorie T est séparée. Rappelons que la théorie de Kaiser Tk associée à T contient la famille des énoncés h-inductifs du point (3) ci-dessus. Ce qui implique que tout modèle de Tk est de la forme $\{a_i;\, i < \omega\} \cup C$

avec C un ensemble de points éventuellement vide qui ne satisfont aucun P_i et qui satisfont chaque R_i pour $i < \omega$. Par conséquent l'amalgamation dans les modèles de Tk est réalisée par la compression des points de C comme suit : Soient M_1, M_2, M_3 des modèles de Tk et f_2 (resp. f_3) un homomorphisme de M_1 dans M_2 (resp. de M_1 dans M_3). $M_1, M_2, M_3 \models Tk$, il existe B_1, B_2, B_3) des ensembles tels que $M_i = \{a_i | i < \omega\} \cup B_i$, l'homomorphisme f_i fixe $\{a_i | i < \omega\}$ point par point et $f_i(B_1) = B_i$ pour $(i = 2, 3)$. Pour amalgamer on prend $N = \{a_i | i < \omega\} \cup \{x\}$ et pour $(i = 2, 3)$, g_i l'application de M_i dans N qui fixe $\{a_i | i < \omega\}$ point par point et envoie B_i vers x. Alors N est un modèle de Tk, les $g_i(i = 2, 3)$ sont des homomorphismes, et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M_2 \arrow[d, "g_2"] \\ M_3 \arrow[r, "g_3"'] & N \end{tikzcd}$$

Ainsi T est une théorie bornée séparée dont la classe des pec n'est pas élémentaire.

3.4 Théories de Robinson positives et élimination des quanteurs

Dans cette section, nous discuterons de l'élimination des quanteurs dans le contexte positif. La détermination des types positifs par leurs fragments sans quanteurs jouera une rôle important. Plus généralement, la "densité" des formules libres dans l'ensemble des formules positives satisfaites par un élément d'un modèle d'une théorie h-inductive caractérise la notion générale d'élimination (voir la définition 3.27).

Les caractérisations de l'élimination des quanteurs varient suivant les classes de modèles et les théories compagnes en question. Dans le cas où l'étude est effectuée dans la classe des pecs, on parle d'une théorie de Robinson positive, notion dont des précurseurs sont dans [6] et [1] (voir en particulier les lemmes 3.22 et 3.24 ci-dessous). Dans le cas général, une étude similaire est faite sur tous les modèles d'une théorie h-inductive (la définition 3.27) et la caractérisation finale pour les théories h-universelles est obtenue dans le théorème 3.30.

Par définition, un plongement est une équivalence de types libres. Ainsi, dans le cas d'une théorie qui accorde plus de poids à ses formules libres, il est naturel que les plongements ressemblent davantage aux immersions. Cet aspect de l'élimination est décrit par la notion d'un modèle h-maximal (la définition 2.11) et celle d'un modèle faiblement pec (la définition 3.26).

Dans [1], une étude similaire à celle de cette section était faite. Notre approche offre une alternative moyennant la notion de modèle h-maximal, et propose une généralisation aux théories h-inductives arbitraires.

Lemme 3.18 *La classe des modèles h-maximaux d'une théorie h-inductive est inductive.*

Preuve. Soient T une théorie h-inductive, α un ordinal limite et $\{M_i; f_{ij} \mid i \geq j, i, j < \alpha\}$ une famille inductive de modèles h-maximaux de T dont on note M la limite inductive.

Montrons que M est h-maximal. Etant la limite inductive de modèles de T, M est un modèle de T (le fait 2.8). Soient $N \models T$, et f un homomorphisme de M dans N. Pour tout $\bar{m} \in M$, il existe $i < \alpha$ tel que $\bar{m} \in M_i$. Soit h_i l'homomorphisme canonique de M_i dans M, supposons que $N \models \varphi(f(\bar{m}))$, où φ est une formule positive libre. Comme M_i est h-maximal, l'homomorphisme $f \circ h_i$ est un plongement. Or φ est une formule libre, par conséquent $M_i \models \varphi(\bar{m})$, et $M \models \varphi(\bar{m})$. Ainsi f est un plongement. $\square$

Notons Tm la théorie h-inductive des h-maximaux de la théorie T. On remarque que $Tu \subset Tm \subset Tk$.

Corollaire 3.19 *Soit T une théorie h-inductive. La classe des h-maximaux est élémentaire si et seulement si elle est axiomatisée par la théorie Tm.*

Preuve. Notons T' la théorie qui axiomatise les modèles h-maximaux de T. Alors, $M \models T'$ si et seulement si M est h-maximal, et donc $M \models Tm$. Ainsi, $T' \vdash Tm$. Dans l'autre direction, d'après le fait 2.8 et le lemme 3.18, T' est une théorie h-inductive. Comme Tm est l'ensemble des énoncés h-inductifs vrais dans tous les h-maximaux de T, $Tm \vdash T'$. $\square$

Soient A une structure, et $\bar{a} \in A$, on note par $tpsq(\bar{a})$ l'ensemble des formules positives libres satisfaites par $\bar{a}$ dans A.

Définition 3.20 *Soit T une théorie h-inductive, on dit que T est de Robinson positive si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :*
pour tous modèles pec A, B de T, si pour $\bar{a} \in A$ et $\bar{b} \in B$ $tpsq(\bar{a}) \subset tpsq(\bar{b})$, alors $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$.

Remarques :
1- Cette définition est équivalente à dire que dans les pec d'une théorie de Robinson positive, les types sont entièrement déterminés par leurs parties sans quanteurs.
2- Une théorie h-inductive est de Robinson positive si et seulement si elle a une compagne qui est de Robinson positive.

Exemple 3.21 La théorie des corps de caractéristique fixée dans le langage usuel des corps est une théorie de Robinson positive parce que sa compagne h-inductive maximale a pour modèles les corps algébriquement clos de même caractéristique.

Lemme 3.22 *Une théorie h-inductive T est de Robinson positive, si et seulement si pour toute formule positive φ, $Res_T(\varphi)$ est équivalente modulo T à un ensemble de formules positives libres. En d'autres termes $Res_T(\varphi)$ est réduite à un ensemble de formules libres positives.*

Preuve. Supposons que T est de Robinson positive. Soient A un pec de T, $\bar{a} \in A$. Supposons que $A \models \neg\varphi(\bar{a})$, cela implique que $\varphi(x)$ n'appartient pas au type de $\bar{a}$. Montrons que $T \cup tpsq(\bar{a}) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ est inconsistante. Sinon, il existe un pec B et $\bar{b} \in B$ tel que $B \models \varphi(\bar{b})$ et $tpsq(\bar{a}) \subset tp(b)$. Comme T est de Robinson positive alors $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$, une contradiction. Par conséquent, il existe un fragment fini $\psi(\bar{x})$ de $tpsq(\bar{a})$, tel que $T \vdash \neg\exists\bar{x}\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x})$.

Pour l'autre sens, supposons que pour toute formule positive φ, Res_φ est équivalente modulo T à un ensemble de formules libres positives. Soient A et B deux pec de T, $\bar{a} \in A$ et $\bar{b} \in B$ tels que $tpsq(\bar{a}) \subset tpsq(\bar{b})$. Soit φ une formule positive telle que $A \models \neg\varphi(\bar{a})$, alors par hypothèse il existe $\psi(\bar{x})$ une formule positive libre telle que $A \models \psi(\bar{a})$ et $T \vdash \neg\exists\bar{x}\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x})$. Comme $tpsq(\bar{a}) \subset tpsq(\bar{b})$, donc $B \models \psi(\bar{b})$ ce qui implique que $B \models \neg\varphi(\bar{b})$. D'où $tp(\bar{b}) \subset tp(\bar{a})$. Par la maximalité des types positifs on déduit que $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$. $\square$

Corollaire 3.23 *Soient T une théorie de Robinson positive et A un modèle de T. Alors A est h-maximal si et seulement si il vérifie la propriété suivante : Pour toute formule libre positive $\varphi(\bar{x})$ et $\bar{a} \in A$, $A \models \neg\varphi(\bar{a})$ si et seulement si il existe une formule positive libre $\psi(\bar{x})$ telle que $A \models \psi(\bar{a})$ et $T \vdash \neg\exists\bar{x}\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x})$.* $\square$

Preuve. Soient A un h-maximal, et B un pec où A se plonge. Supposons que $A \models \neg\varphi(\bar{a})$, donc $B \models \neg\varphi(\bar{a})$. Comme B est pec, par le lemme 3.22, il existe $\psi(\bar{x})$ une formule positive libre telle que $T \vdash \neg\exists\bar{x}\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x})$ et $B \models \psi(\bar{a})$, ce qui implique que $A \models \psi(\bar{a})$. Inversement tout modèle de T qui vérifie cette propriété est un h-maximal. $\square$

Lemme 3.24 *Soit T une théorie de Robinson positive. Alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*
1- Tout modèle de T qui se plonge dans un pec de T est h-maximal.
2- Les h-maximaux de T s'amalgament.
En plus si la théorie T est h-universelle, et les propriétés (1) et (2) sont satisfaites. Alors T est de Robinson positive.

Avant d'aborder la preuve, remarquons qu'il découle de la conclusion (2) que les modèles h-maximaux d'une théorie de Robinson sont des bases d'amalgamation.

Preuve. Soient A, B, C trois modèles de T tels que A se plonge dans B par un plongement i et se continue dans C par un homomorphisme f, et que B est un pec. Soit Ce un pec de T où C se continue par l'homomorphisme j :

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \\ & C \arrow[r, "j"'] & Ce \end{tikzcd}$$

Pour tout $\bar{a}$ extrait de A, on a $tpsq(\bar{a}) = tpsq(i(\bar{a}))$, et $tpsq(\bar{a}) \subset tpsq(f(\bar{a})) \subset tpsq(j \circ f(\bar{a}))$. Comme T est de Robinson positive, que B et Ce des pec de T et que $tpsq(i(\bar{a})) \subset tpsq(j \circ f(\bar{a}))$, $tpsq(i(\bar{a})) = tpsq(j \circ f(\bar{a}))$. Ainsi $tpsq(\bar{a}) = tpsq(f(\bar{a}))$, ce qui implique que f est un plongement.

Montrons qu'on a amalgamation des h-maximaux. Soient A, B, C trois h-maximaux de T, tels que A se plonge par i dans B et par j dans C, et soient Be, et Ce des pec de T tels que B se continue dans Be, et C se continue dans Ce, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "f"] & Be \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \\ & C \arrow[r, "g"'] & Ce \end{tikzcd}$$

Pour tout $\bar{a} \in A$, $tpsq(\bar{a}) = tpsq(f \circ i(\bar{a})) = tpsq(g \circ j(\bar{a}))$, donc $\bar{a}$ a le même type p dans Be et Ce.

Montrons par compacité positive que $T \cup D^+(Be) \cup D^+(Ce)$ est consistant. Soient $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) \in D^+(Be)$ et $\psi(\bar{a}, \bar{c}) \in D^+(Ce)$, avec $\bar{a}$ le uplet de paramètres provenant de A et p le type de $\bar{a}$ dans Be (qui est égal aussi au type de $\bar{a}$ dans Ce, car la théorie est de Robinson). Alors $\exists y \varphi(x, y)$ et $\exists z \psi(x, z)$ appartiennent à p. Par conséquent il existe $\bar{c}' \in Ce$ tel que $\varphi(\bar{a}, \bar{c}') \wedge \psi(\bar{a}, \bar{c}) \in D^+(Ce)$, d'où la consistance. Par suite, $T \cup D^+(Be) \cup D^+(Ce)$ a un modèle D qu'on peut continuer dans un h-maximal de T, (il suffit de prendre un pec). L'amalgamation des h-maximaux s'ensuit.

Maintenant supposons que T est h-universelle, et que les propriétés (1) et (2) sont satisfaites. On montrera que T est de Robinson positive. Soient A un pec de T, $\bar{a}, \bar{b} \in A$, tels que $tpsq(\bar{a}) \subset tpsq(\bar{b})$. Soit $< \bar{a} >$ la sous structure de A engendrée par $\bar{a}$. Comme T est h-universelle, $< \bar{a} > \models T$. Comme l'inclusion de $\langle \bar{a} \rangle$ dans A est un plongement, $< \bar{a} >$ est un h-maximal de T par la propriété (1). Ainsi l'homomorphisme f défini de $< \bar{a} >$ dans A, qui envoie $\bar{a}$ vers $\bar{b}$ est un plongement. Par l'amalgamation des h-maximaux de T (la propriété (2)), il existe B qu'on peut choisir pec tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} <\bar{a}> \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Donc $h(\bar{a}) = g(\bar{b})$. Comme g, h sont des immersions on déduit que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. $\square$

Remarque : Si tout modèle de T qui se plonge dans un pec est un h-maximal, alors tout modèle de T qui se plonge dans un h-maximal est un h-maximal.

Corollaire 3.25 *Si T est une théorie de Robinson positive, telle que la classe des h-maximaux est élémentaire, alors T est séparée.*

Preuve. Comme T est de Robinson positive, on a amalgamation des h-maximaux par la propriété (2) du lemme 3.24. Comme la classe des h-maximaux est élémentaire, elle est axiomatisée par la théorie h-inductive Tm (le corollaire 3.19). Maintenant soient M_1, M_2, M_3 des modèles de Tk tels que M_1 se continue dans M_2 et M_3 par f et g respectivement. Comme $Tm \subset Tk$, ils sont des h-maximaux. Par suite il existe $N \models Tm$, et M un pec de T où N se continue, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M_2 \arrow[d] & \\ M_3 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Comme $M \models Tk$, la séparation de la théorie T découle du fait 3.11. $\square$

Dans le reste de la section, on étendra la discussion précédente à tous les modèles d'une théorie h-inductive. La notion de pec faible (la définition 3.26) et la propriété EQ (la définition 3.27) seront clés aux raisonnements.

Définition 3.26 *Soit T une théorie h-inductive. Un modèle A de T est dit pec faible, si et seulement si tout plongement de A dans un modèle de T est une immersion.*

On raffine d'abord une notation déjà introduite. Pour une théorie h-inductive T, un modèle M de T, et $\bar{a} \in M$ on notera $f_M(\bar{a})$ l'ensemble des formules positives libres satisfaites par $\bar{a}$ dans M, et $F_M(\bar{a})$ l'ensemble des formules positives satisfaites par $\bar{a}$ dans M.

Définition 3.27 *On dit qu'une théorie h-inductive a la propriété EQ, si elle vérifie la propriété suivante :*
Pour tous modèles A, B de T, $\bar{a} \in A$ et $\bar{b} \in B$, $f_A(\bar{a}) = f_B(\bar{b})$ si et seulement si $F_A(\bar{a}) = F_B(\bar{b})$

La propriété EQ nous permettra de caractériser l'élimination des quanteurs dans les théories h-universelles. On commence par un lemme général :

Lemme 3.28 *Si une théorie T h-inductive a la propriété EQ, alors tout plongement entre des modèles de T est une immersion. En particulier, tout modèle de T est un pec faible.*

Preuve. Supposons que T a la propriété EQ. Soient A, B deux modèles de T, i un plongement de A dans B, et $\bar{a} \in A$. Alors, $\bar{a}$ et $i(\bar{a})$ satisfont les mêmes formules libres positives. Ils satisfont les mêmes formules positives puisque T a la propriété EQ. Par suite i est une immersion. Ainsi tout modèle de T est un pec faible. $\square$

Corollaire 3.29 *Si T est une théorie ayant la propriété EQ, alors tout h-maximal de T est un pec.*

Théorème 3.30 *Soit T une théorie h-universelle, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1- T a la propriété EQ.
2- Tout modèle de T est un pec faible.
3- Toute formule positive est équivalente modulo T à une formule libre positive.

Preuve. $(1 \Rightarrow 2)$ C'est le lemme 3.28.

$(2 \Rightarrow 1)$ Soient $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$ tels que $f_A(\bar{a}) = f_B(\bar{b})$, $< \bar{a} >$ la sous-structure de A engendrée par $\bar{a}$. Comme T est h-universelle, $< \bar{a} >$ est modèle de T. Elle se plonge dans A par l'application inclusion que nous noterons i et dans B par le plongement qui envoie $\bar{a}$ vers $\bar{b}$ que nous noterons j. Par l'hypothèse (2) les plongements i, j sont des immersions. Par l'amalgamation asymétrique (le lemme 3.4), il existe un modèle D de T, f une immersion et g un homomorphisme tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} < \bar{a} > \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Si $B \models \exists y \varphi(\bar{b}, \bar{y})$, où $\bar{b} = j(\bar{a})$, alors $B \models \exists \bar{y} \varphi(j(\bar{a}), \bar{y})$, et $D \models \exists \bar{y} \varphi(g \circ j(\bar{a}), \bar{y})$. Comme f est une immersion, $A \models \exists \bar{y} \varphi(a, \bar{y})$, d'où $F_B(\bar{b}) \subset F_A(\bar{a})$.

Pour montrer $F_A(\bar{a}) \subset F_B(\bar{b})$ on refait le même raisonement sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} <\bar{a}> \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

cette fois-ci, avec g une immersion.

($3 \Rightarrow 2$) Supposons que (3) est vrai. Alors tout plongement est une immersion, donc tout modèle de T est un pec faible.

L'idée de la preuve de ($1 \Rightarrow 3$) se trouve dans [5] (le lemme 8.4.8).

($1 \Rightarrow 3$) Soient φ une formule positive, Δ l'ensemble des formules positives libres ψ telles que $T \vdash \varphi \to \psi$. Montrons que $T \cup \Delta(\bar{x}) \vdash \varphi(\bar{x})$ dans le langage $L \cup \{\bar{x}\}$. Soit B un modèle de $T \cup \Delta(\bar{x})$. Soit Γ l'ensemble des formules positives libres χ dans Γ telles que $B \models \neg\chi(\bar{x})$ et soit T' la théorie $T \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup \{\neg\chi(\bar{x}) \mid \chi \in \Gamma\}$.

Supposons que T' n'est pas consistante, alors il existe une formule libre positive χ dans Γ telle que $T \vdash \varphi(\bar{x}) \to \chi(\bar{x})$. Par la définition de Δ, on a $\chi \in \Delta$. Comme $B \models \neg\chi(\bar{x})$, on a une contradiction avec le fait que B est un modèle de Δ. Ainsi T' est consistante.

Soient A un modèle de T', C la sous-structure de A engendrée par les constantes du langage $L \cup \{\bar{x}\}$. Donc C se plonge dans A, et comme T est h-universelle, $C \models T$. D'après le lemme 3.28, le plongement est une immersion.

D'autre part l'application j définie de C dans B qui envoie chaque constante de L sur lui même, et qui envoie $\bar{x}$ sur $\bar{x}$ est un homomorphisme. En effet, supposons $C \models \alpha(\bar{x}, \bar{a})$, et $B \models \neg\alpha(\bar{x}, \bar{a})$, avec $\bar{x}, \bar{a}$ des constantes du langage $L \cup \{\bar{x}\}$, et α une formule positive libre. Le fait que $B \models \neg\alpha(\bar{x}, \bar{a})$ implique que $\alpha(\bar{x}, \bar{a}) \in \Gamma$. Par suite $C \models \neg\alpha(\bar{x}, \bar{a})$, contradiction. Ainsi j est un homomorphisme. On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "im"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

avec im une immersion et j un homomorphisme. Comme $A \vdash \varphi(\bar{x})$, $C \vdash \varphi(\bar{x})$, et par suite $B \vdash \varphi(\bar{x})$. Ainsi, $T \cup \Delta(\bar{x}) \vdash \varphi(\bar{x})$.

La conclusion du paragraphe précédent et la compacité positive impliquent qu'il existe $\psi \in \Delta$ telle que $T \vdash \psi \to \varphi$. Par la définition de Δ, on obtient $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. □

Corollaire 3.31 *Si T est une théorie h-universelle ayant la propriété EQ, alors T est de Robinson positive.*

Preuve. Comme T a la propriété EQ, le lemme 3.28 montre que tout plongement entre modèles de T est une immersion. Par suite, tout modèle A de T qui se plonge dans un pec de T est un pec, donc un h-maximal.

D'après le corollaire 3.29, tout modèle h-maximal de T est pec. L'amalgamation des h-maximaux découle du corollaire 3.5.

La conclusion du corollaire suit du lemme 3.24. □

3.5 Théories complètes

Dans [3] Ben Yaacov et Poizat ont introduit la notion de théorie complète comme étant la théorie h-universelle d'une structure et montré que pour une théorie h-universelle cette notion est équivalente à la propriété de la continuation commune définie ci-dessous. Dans cette section nous étudions les complétions minimales d'une théorie h-inductive moyennant une relation d'équivalence définie sur la classe des pec de la théorie. Les complétions minimales ont déjà fait le sujet d'une étude dans [1] où l'outil principal est l'espace des types d'une théorie h-inductive.

Définition 3.32 *Une théorie h-inductive T est dite complète si et seulement si elle a la propriété de continuation commune (jocp) :*
pour tous A, B modèles de T il existe $C \models T$ où A et B se continuent.

Le lemme suivant donne un exemple de théorie h-inductive complète simple et particulier au contexte positif.

Lemme 3.33 *Une théorie h-inductive qui a un seul pec est complète.*

Preuve. On sait que tout modèle de T se continue dans un pec. Comme il existe un seul pec alors tous les modèles de T se continuent dans celui-ci. □

Fait 3.34 ([3]) *Une théorie h-inductive T dans un langage L est complète si et seulement si elle est la L-théorie h-inductive d'une structure.*

Fait 3.35 ([3]) *Une théorie h-inductive est complète si et seulement si elle a une compagne complète.*

Le corollaire suivant est un exemple algébrique de théorie complète, qui nous servira dans le chapitre suivant.

Corollaire 3.36 *La théorie h-inductive des corps de caractéristique fixée dans le langage usuel des corps est complète.*

Preuve. Par le fait 3.35 il suffit de montrer que les corps algébriquement clos de même caractéristique ont la propriété de jocp. Soient p un nombre premier ou 0, C_p le plus petit corps algébriquement clos de caractéristique p et K un corps algébriquement clos de carartéristique p. L'application naturelle de C_p dans K est une immersion parce que c'est un homomorphisme de corps et C_p est algébriquement clos (pec de la théorie). Ainsi, si K_1 et K_2 sont deux corps de caractéristique p, par le fait que C_p s'immerge dans K_1 et K_2, par amalgamation asymétrique, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_p \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] \\
K_2 \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

avec K un corps de caractéristique p. Ainsi la classe des corps algébriquement clos de caractéristique p a la propriété jocp. $\square$

Nous introduirons, une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences caractérisent les complétions minimales (définition 3.42) d'une théorie h-inductive.

Soient T une théorie h-inductive, A_e, B_e des pecs de T. Soit $\Re$ la relation binaire définie sur la classe des pecs de T par : $A_e \Re B_e$ si et seulement si il existe $C \models T$ où A_e et B_e se continuent.

Lemme 3.37 *La relation $\Re$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. Il est facile de voir que $\Re$ est réflexive et symétrique. Il reste donc à vérifier qu'elle est transitive. Soient A_e, B_e, C_e des pecs de T tels que $A_e \Re B_e$ et $B_e \Re C_e$, alors on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A_e \arrow[d] & B_e \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & C_e \arrow[d] \\
D_1 & & D_2
\end{tikzcd}$$

avec D_1 et D_2 des modèles de T, f et g deux morphismes. Comme B_e est un pec, f et g sont des immersions. Par amalgamation asymétrique on obtient

$$\begin{tikzcd}
A_e \arrow[d] & B_e \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & C_e \arrow[d] \\
D_1 \arrow[dr] & & D_2 \arrow[dl] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

avec $D \models T$, d'où $A \Re C$, par suite $\Re$ est une relation d'équivalence. $\square$

Soit $\mathcal{E}$ une classe d'équivalence modulo $\Re$. Soit $\Gamma_{\mathcal{E}}$ la sous-classe de modèles de T définie par :

$$\Gamma_{\mathcal{E}} = \{A \models T| \quad A \text{ a une continuation dans } \mathcal{E}\}$$

Lemme 3.38 *Les membres de $\mathcal{E}$ ont la même théorie h-universelle.*

Preuve. Soient Ae et Be dans $\mathcal{E}$. Par définition, il existe un modèle C de T dans lequel Ae et Be s'immergent (ils sont des pecs T). Ainsi, si $Be \models \neg\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$, alors $C \models \neg\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$, de même pour Ae. Ceci montre que Ae et Be ont la même théorie h-universelle. □

Notons par $Tu(\mathcal{E})$ la théorie h-universelle de la classe $\mathcal{E}$ donnée par le lemme précédent.
Remarque : Deux pec de T ont la même classe modulo $\Re$ si et seulement si ils ont la même théorie h-universelle.

Lemme 3.39 *La classe $\Gamma_{\mathcal{E}}$ est axiomatisée par la théorie h-inductive $T_{\mathcal{E}} = T \cup Tu(\mathcal{E})$.*

Preuve. Dans un premier temps nous montrerons que tout modèle de $T_{\mathcal{E}}$ appartient à $\Gamma_{\mathcal{E}}$. Soient A un modèle de $T_{\mathcal{E}}$ et Be dans $\mathcal{E}$. Alors l'ensemble $T'_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}} \cup \mathrm{Diag}^+(A) \cup \mathrm{Diag}^+(Be)$ est consistant. Pour toute formule $\exists\bar{x}\phi(\bar{x},\bar{a}) \in \mathrm{Diag}^+(A)$, $\neg\exists\bar{x}\bar{y}\phi(\bar{x},\bar{y})$ n'appartient pas à $Tu(\mathcal{E})$ car $A \models T_{\mathcal{E}}$. Par ailleurs, comme Be est dans $\mathcal{E}$, $Tu(\mathcal{E})$ est la théorie h-universelle de Be par le lemme 3.38. Alors il existe $\bar{b} \in Be$ tel que $Be \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x},\bar{b})$. Donc, $T'_{\mathcal{E}}$ est consistante, ce qui implique que A et Be ont une continuation commune C qui se continue dans un pec Ce de T. Ainsi $Be\Re Ce$, et $Ce \in \mathcal{E}$, entraînant que $A \in \Gamma_{\mathcal{E}}$.

Pour l'autre implication, si A est un modèle de T qui appartient à $\Gamma_{\mathcal{E}}$, alors il existe $Ae \in \mathcal{E}$ une continuation de A, ce qui implique que $A \models T_{\mathcal{E}}$. Ainsi on conclut que $\Gamma_{\mathcal{E}}$ est une classe élémentaire axiomatisée par $T_{\mathcal{E}}$. □

Corollaire 3.40 *La théorie $T_{\mathcal{E}}$ du lemme 3.39 est complète.*

Preuve. Soient A et B deux modèles de $T_{\mathcal{E}}$. Par le lemme 3.39, A, $B \in \Gamma_{\mathcal{E}}$. Par définition de $\Gamma_{\mathcal{E}}$, il existe deux pecs Ae et Be de T dans $\mathcal{E}$ qui sont des continuations de A et B respectivement. Par la définition de $\mathcal{E}$, Ae et Be ont une continuation commune dans $\mathcal{E}$, ce qui montre que $T_{\mathcal{E}}$ est complète. □

Corollaire 3.41 *La classe $\Gamma_{\mathcal{E}}$ est inductive.*

Preuve. La conclusion découle directement du fait 2.8 et le lemme 3.39. □

Définition 3.42 *Soit T une théorie h-inductive. Une théorie h-inductive T' est dite complétion minimale de T si :*

- *T' est complète, et $T \subset T'$,*

– *T' a un pec qui est aussi un pec de T.*
et T' qui est minimale par rapport à ces conditions.

Lemme 3.43 *Soient T et T' deux théories h-inductives sur le même langage L, telles que $T \subset T'$ et T' est complète. Si T et T' ont un pec commun, alors tout pec de T' est un pec de T.*

Preuve. Soient A un pec commun au deux théories T et T', et B un pec de T'. Montrons que B est un pec de T. Comme T' est complète, A et B se continuent dans un modèle C de T', qu'on continue dans un pec D de T car $T \subset T'$. Du fait que A et D sont des pec de T, et que A se continue dans D, par le lemme 2.18 on déduit que D est une extension élémentaire positive de A. Donc $D \models Tk(A)$, et comme $A \models T'$ alors $D \models T'$. Ainsi B s'immerge dans D qui est un pec de T ce qui implique que B est un pec de T. $\square$

Corollaire 3.44 *La théorie h-inductive $T_{\mathcal{E}}$ est une complétion minimale de T. Par ailleurs, il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence modulo $\Re$ et les complétions minimales T.*

Preuve. Nous commençons par vérifier la première assertion. Par le corollaire 3.40, $T_{\mathcal{E}}$ est complète. Ses modèles pec sont dans $\mathcal{E}$, et ils sont aussi des pec de T. Comme $T_{\mathcal{E}}$ est la classe minimale qui vérifie ces conditions, elle est une complétion minimale de T.

Maintenant, nous montrons la deuxième assertion. Nous définissons d'abord la correspondance recherchée. Nous associons à chaque classe $\mathcal{E}$ de $\Re$ la théorie h-inductive $T_{\mathcal{E}}$. C'est une application surjective par définition des complétions minimales d'une théorie h-inductive (Definition 3.42).

Dans la suite nous vérifions l'injectivité de la correspondance. L'étape principale de la preuve consiste à montrer que les pecs de $\Gamma_{\mathcal{E}}$ sont exactement les membres de $\mathcal{E}$. Par définition, tout élément de $\mathcal{E}$ est un pec de T, donc un pec de $\Gamma_{\mathcal{E}}$. Pour l'autre inclusion, soit A un pec de $\Gamma_{\mathcal{E}}$ alors il se continue dans B un pec de T par un homomorphisme f. Comme A est un pec de $\Gamma_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E} \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$, l'homomorphisme f est une immersion. Ainsi A s'immerge dans un pec de T, ce qui implique que A est un pec de T. L'injectivité de la correspendance en découle rapidement. En effet, si $T_{\mathcal{E}_1} = T_{\mathcal{E}_2}$, alors $\Gamma_{\mathcal{E}_1} = \Gamma_{\mathcal{E}_2}$, ainsi $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. $\square$

3.6 Domaines universels

Un domaine universel, de façon similaire aux modèles monstres en théorie des modèles usuelle, est une structure suffisamment homogène et saturée. Dans cette section, nous montrerons l'existence des λ-domaines universels dans le contexte positif en passant par les chaînes universelles (la définition 2.27).

Définition 3.45 ([11]) *Soient T une théorie h-inductive, et λ un cardinal. Un modèle M de T est dit un λ-domaine universel s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *λ-universel : tout type partiel $p(\bar{x})$ avec paramètres dans une partie A de M de cardinal $< \lambda$, et finiment satisfaisable dans M, est réalisé dans M.*
2. *λ-homogène : pour tous A, B des modèles de T qui s'immergent dans M et de cardinal $< \lambda$, et f un isomorphisme entre A et B (ie une bijection telle que f et f^{-1} sont des immersions). Alors il existe un automorphisme de M qui prolonge f.*

Le fait suivant nous montre que dans un λ-domaine universel la λ-homogénéité est équivalente à la propriété suivante : toute paire d'uples de longueur strictement inférieure à λ et de même type se correspondent par automorphisme du domaine universel.

Fait 3.46 ([3]) *Soient M un λ-domaine universel et $\bar{a}$, $\bar{b}$ des uples de longueur strictement inférieure à λ et de même type. Alors il existe un automorphisme f de M tel que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Remarque : Il s'ensuit de la définition 3.45 que les domaines universels sont pec.

Exemple 3.47 Soit T une théorie h-inductive bornée et complète, alors le pec maximal de théorie T est un domaine universel en son cardinal.

Le théorème suivant donne la construction d'un λ-domaine universel comme celui-ci était défini ci-dessus. La raisonnement utilise les extensions universelles (la définition 2.26) auxquelles on aboutit en construisant une chaîne universelle de modèles pec de longueur ω. Cette longueur nous permet d'adopter une notation simplifée en réduisant la famille inductive nécessaire pour la construction à une chaîne.

Théorème 3.48 *Soit T une théorie h-inductive, complète, non bornée. Soit $\{A_i, h_i | i < \omega\}$ une chaîne universelle telle que $cf(|A_0|) > max(\aleph_0, |L|)$ et que pour tout $i < \omega$, A_i est un pec de T. Soit A la limite inductive de la chaîne universelle, et on pose $\lambda = |A|$. Alors A est un $cf(\lambda)$-domaine universel.*

Preuve. D'abord nous allons montrer que A est $cf(\lambda)$-universel. Soit B une partie de A de cardinal $< cf(\lambda)$, et π une famille de formules positives finiment satisfaisable dans A. Alors il existe C un modèle de T où A se continue par un homomorphisme f et qui réalise π par un uple $\bar{c}$. Par définition de la cofinalité, il existe $m < \omega$ tel que $B \subset A_m$. Soient g la restriction de f à A_m et $C^\star$ le plus petit modèle de T qui contient $g(A_m) \cup \{\bar{c}\}$ de cardinal $\leq |A_m|$

et qui s'immerge dans C. Par conséquent, il existe h un homomorphisme de $C^\star$ vers A tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & C^\star \arrow[d, "h"] \\ A_m \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "i"'] & A \end{tikzcd}$$

Alors $h(\bar{c})$ est une réalisation de π dans A.

Maintenant montrons que A est $cf(\lambda)$-homogène. Soient C_1 et C_2 deux modèles de T inclus dans A par immersion, de cardinal $< cf(\lambda)$ et qui sont isomorphes. Par la définition de la cofinalité, il existe $m < \omega$ tel que $C_i \subset A_m$. Alors par le lemme 3.7, il existe D un modèle de T et f, g des immersions tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "is"] \arrow[d, "im"'] & C_2 \arrow[d, "g"] \\ A_m \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Remarquons qu'on peut remplacer D dans le diagramme par $B_0 = f(A_m)$ sans perte de généralité. Ainsi on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "is"] \arrow[d, "im"'] & C_2 \arrow[d, "im"] \\ A_m \arrow[r, "f_0"'] & B_0 \end{tikzcd}$$

Maintenant A_m et B_0 sont isomorphes, on répète le même raisonnement et on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "is"] \arrow[d, "im"'] & C_2 \arrow[d, "im"] \\ A_m \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "h_m"] & B_0 \arrow[d, "g_0"] \\ A_{m+1} \arrow[r, "f_1"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

Donc A_{m+1} et B_1 sont isomorphes et (B_1, g_0) est une extension universelle de B_0. Ainsi on définit une deuxième chaîne universelle $\{B_i, g_i | \beta \leq i < \omega\}$, isomorphe à la chaîne $\{A_i, h_i | m \leq i < \omega\}$. Soit B la limite de cette chaîne. et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "is"] \arrow[d, "im"'] & C_2 \arrow[d, "im"] \\
A_m \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "h_m"] & B_0 \arrow[d, "g_0"] \\
A_{m+1} \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, dotted] & B_1 \arrow[d, dotted] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Alors l'application f est un isomorphisme de A dans B qui prolonge l'isomorphisme entre C_1 et C_2.

Montrons que $A = B$. D'abord rappelons que si $\{C'_k, f_{kl} | k < l < \omega\}$ est une sous-suite inductive extraite de la suite inductive $\{C_i, f_{ij} | i < j < \omega\}$, alors les deux suites ont la même limite inductive. En se basant sur cette propriété et en construisant une suite inductive qui alterne deux suites extraites respectivement des chaînes $\{A_i, h_i | m \leq i < \omega\}$ et $\{B_i, g_i | i < \omega\}$, on montrera que $A = B$. Reprenons le diagramme commutatif construit dans l'étape précédente

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "is"] \arrow[d, "im"'] & C_2 \arrow[d, "im"] \\
A_m \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "h_m"'] \arrow[dr, "k_1"'] & B_0 \arrow[d, "g_0"] \\
A_{m+1} \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "h_{m+1}"'] & B_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[dl, "k_2"] \\
A_{m+2} \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "h_{m+2}"'] \arrow[dr, "k_3"'] & B_2 \arrow[d, "g_2"] \\
A_{m+3} \arrow[r, "f_3"'] \arrow[d, dotted] & B_3 \arrow[d, dotted] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

avec $k_1 = g_0 \circ f_0$, $k_2 = f_2^{-1} \circ g_1 = h_{m+1} \circ f_1^{-1}$ et $k_3 = g_2 \circ f_2$. Soit la suite inductive

$$A_m \xrightarrow{k_1} B_1 \xrightarrow{k_2} A_{m+2} \xrightarrow{k_3} B_3 \dashrightarrow$$

Alors on a $k_2 \circ k_1 = h_{m+1} \circ h_m$ et $k_3 \circ k_2 = g_2 \circ g_1$. Ainsi la suite inductive construite est une alternation des deux sous-suites inductives extraites respectivement de $\{A_i, hi|m \leq i < \omega\}$ et $\{B_i, g_i|i < \omega\}$. Par suite on déduit que les limites de ces deux suites, qui sont respectivement A et B, sont égales. $\square$

Corollaire 3.49 *Soit T une théorie h-inductive complète et non bornée, alors pour tout cardinal $\alpha > max(\aleph_0, |L|)$ il existe un λ-domaine universel de T avec λ un cardinal supérieur à α.*

Preuve. Soient $\alpha > max(\aleph_0, |L|)$ et β un cardinal tel que $cf(\beta) > \alpha$. Comme la théorie T est non bornée, il existe A_0 un pec de cardinal supérieur à λ. D'après le théorème 3.3, il existe (A_1, h_1) une extension universelle de A_0, avec A_1 un pec de cardinal $\leq 2^{|A_0|}$. En répétant le même raisonnement, on construit une chaîne universelle $\{A_i, h_i|i < \alpha\}$ où α est un ordinal limite. D'après le théorème 3.48, la limite inductive A de la chaîne universelle construite est $cf(|A|)-$domaine universelle. $\square$

Chapitre 4

Autour de la stabilité positive

A la fin de son article sur la simplicité dans la catégorie des modèles existentiellement clos d'une théorie inductive [11], Pillay a posé la question de définir une notion de stabilité compatible avec la notion de simplicité proposée dans [11].

Dans ses travaux sur les théories compactes abstraites, dits chats, Ben Yaacov a défini la stabilité dans le contexte des espaces des types existentiels positifs par le comptage (définition 4.7), et l'a caractérisé par la type-définissabilité des types (définition 4.24) et la finitude du rang de Shelah introduit positivement. Pour le reste, Ben Yaacov renvoie aux travaux de Shelah ([15]). Ce qui est absent de cette étude est la caractérisation de la stabilité positive par une propriété d'ordre.

Dans ce chapitre, nous adoptons les définitions et les résultats de Ben Yaacov dans [2], et nous poursuivons le travail dans le cadre positif. L'une des nouveautés est une notion d'ordre définissable. Sans surprise, la différence fondamentale par rapport à la théorie des modèles usuelle est l'absence de la négation, indispensable pour ordonner un ensemble définissablement. Nous proposons une définition de la propriété de l'ordre en utilisant des paires de formules contradictoires (définition 4.10). Cette approximation positive à la négation caractérise la stabilité. Une adaptation positive d'un théorème de Shelah (théorème 4.21) s'avère crucial dans le cas des théories non bornées.

Suite aux caractérisations, nous étudions des conséquences de la stabilité positive et comparons les stabilités positive et usuelle par le biais d'un exemple d'une structure M dont la théorie h-inductive $Tk(M)$ est stable positivement, alors que sa théorie $Th(M)$ est instable au sens de la théorie des modèles usuelle.

L'étude de la stabilité positive est réservée aux pec des théories h-inductives complètes, ce qui met en défaut le théorème de compacité positif (fait 2.12). En effet, ce théorème n'est utile que quand la classe des pec est élémentaire. Ceci nous contraint à utiliser des techniques de la combinatoire des cardinaux, ce qui nous permet de ne pas sortir de la classe des pec. Soulignons que l'absence de notre travail des caractérisations, pourtant naturelles, de la stabilité par les (co)héritiers est liée à ce problème.

D'autres particularités du contexte positif sont abordées dans la dernière section de ce chapitre. Nous y étudierons l'existence et le comptage des fils spéciaux d'un type, et nous proposerons un encadrement topologique de la type-définition dq_φ (définition 4.24) associée à une paire de formule positive φ et de type q, en adaptant le lemme 2.2 [10].

4.1 Rang de Shelah positif

Dans cette section on reprend la définition du rang de Shelah positif comme il a été donné dans [2]. On en étudie les caractérisations dans le cadre positif en reproduisant ceux qui existent dans [15].

Définition 4.1 *Soient T une théorie h-inductive, A un sous-ensemble d'un modèle de T, et $\Gamma(\bar{x}, A)$ une famille de formules positives à paramètres dans A. On dit que Γ est un type partiel si la théorie h-inductive $\Gamma(\bar{x}, A) \cup T$ dans le langage $L \cup \{\bar{x} \cup \{a|a \in A\}$ est consistante. Autrement si il existe B un modèle de T, et $\bar{b}$ un uple de B tel que $B \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ pour toute formule $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ de Γ.*

Définition 4.2 *Soit $p(\bar{x})$ un type partiel (éventuellement à paramètres dans un ensemble A), $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L-formule positive, et $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in Res_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$. Le rang de Shelah de p, par rapport au couple (φ, ψ), qu'on note $R(p, \varphi, \psi)$, est défini par induction comme suit :*

1. *$R(p, \varphi, \psi) \geq 0$ si est seulement si p est consistant,*
2. *Si β est un ordinal limite, $R(p, \varphi, \psi) \geq \beta$ si et seulement si pour tout $\alpha < \beta$, $R(p, \varphi, \psi) \geq \alpha$*
3. *$R(p, \varphi, \psi) \geq \alpha + 1$ si et seulement si il existe $\bar{b}$ tel que*

$$\begin{cases} R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{b})\}, \varphi, \psi) \geq \alpha \\ R(p(\bar{x}) \cup \{\psi(\bar{x}, \bar{b})\}, \varphi, \psi) \geq \alpha. \end{cases}$$

Lemme 4.3 *Soient $p(\bar{x})$ un type partiel, $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive (où $\bar{x}$ est un m-uple et $\bar{y}$ un n-uple), et soit $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0(\bar{x}, \bar{y}))$. Alors $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq n$ si et seulement si il existe une famille de n-uples $\{a_\eta : \eta \in^{n\geq} 2\}$ tels que :*

1. *Pour tout $\eta \in^{n>} 2$ on a $a_{\eta\,\hat{}\,0} = a_{\eta\,\hat{}\,1}$, et $\bar{a}_0 = \bar{a}_1$*
2. *Pour tout $\eta \in^{n} 2$, la famille de formules positives*

$$p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, a_{\eta|l})| \quad l < n\}$$

est consistante.

Preuve. Par induction, supposons que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq n+1$. Par définition du rang 4.2 il existe $\bar{b}$ telle que

$$\begin{cases} R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi_0(x, \bar{b})\}, \varphi_0, \varphi_1) \geq n \\ R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi_1(x, \bar{b})\}, \varphi_0, \varphi_1) \geq n. \end{cases}$$

Par hypothèse d'induction, il existe $(c_\eta | \, \eta \in {}^{n\geq}2)$ et $(d_\eta | \, \eta \in {}^{n\geq}2)$ deux suites de n-uples qui vérifiant la propriété (1) et telles que pour tout $\eta \in^n 2$

$$(\star) \begin{cases} p(x) \cup \{\varphi_0(\bar{x}, \bar{b})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, \bar{c}_{\eta\restriction l}) | \quad l < n\} \text{ est consistante} \\ p(x) \cup \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, \bar{d}_{\eta\restriction l}) | \quad l < n\} \text{ est consistante.} \end{cases}$$

Soit $\{\bar{b}_\rho | \, \rho \in {}^{n+1\geq}2\}$ la famille définie comme suit : pour tout $\rho \in {}^{n+1\geq}2$, soit $\eta = \rho \restriction \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{cases} \bar{b}_\rho = \bar{b}\hat{\ }\bar{c}_\eta & \text{si} \quad \rho(0) = 0 \\ \bar{b}_\rho = \bar{b}\hat{\ }\bar{d}_\eta & \text{si} \quad \rho(0) = 1. \end{cases}$$

D'après $(\star)$ pour tout $\rho \in {}^{n+1}2$, la famille $p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\rho(l)}(\bar{x}, \bar{b}_{\rho\restriction l}) | \quad l < n+1\}$ est consistante. La propriété (1) est évidente par la construction de la famille.

L'autre direction est évidente. □

Remarque : Pour tout paire $p(\bar{x}), q(\bar{x})$ de types partiels tels que $p \vdash q$ et pour tout couple de formule (φ, ψ) qui vérifie les conditions de la définition 4.2 on a $R(p, \varphi, \psi) \leq R(q, \varphi, \psi)$.

Corollaire 4.4 *Soient p un type partiel, $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ une L-formule positive avec $l(\bar{x}) = n, l(\bar{y}) = m$ et $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$. Supposons que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$ alors pour tout ordinal μ la famille*

$$\Gamma = p(\bar{x}_\eta) \cup \{\varphi_{\eta(\alpha)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta\restriction\alpha}) \mid \quad \eta \in^\mu 2, \, \alpha < \mu\} \cup \{\bar{y}_{\eta\hat{\ }0} = \bar{y}_{\eta\hat{\ }1} \mid \eta \in {}^{\mu>}2\} \cup \{\bar{a}_0 = \bar{a}_1\}$$

est consistante, avec x_η un n-uple et y_η un m-uple.

Preuve. Un fragment fini Σ de Γ est la donnée de $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \mu$, et $\eta_1, \cdots, \eta_m$ de ${}^\mu 2$ tels que

$$\Sigma = \{\varphi_{\eta_i(\alpha_j)}(\bar{x}_{\eta_i}, \bar{y}_{\eta_i\restriction\alpha_j}), \, \bar{y}_{\eta_i\hat{\ }0} = \bar{y}_{\eta_i\hat{\ }1} \mid 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m\}$$

Comme $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq m.n$, par le lemme 4.3 il existe une famille $\{\bar{a}_\eta, \bar{b}_\eta | \, \eta \in {}^{nm\geq}2\}$ tels que :

1. pour tout $\eta \in^{nm>} 2$ on a $\bar{b}_{\eta\hat{\ }0} = \bar{b}_{\eta\hat{\ }1}$,
2. pour tout $\eta \in {}^{nm}2$, la famille de formules positives

$$p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, b_{\eta\restriction l}), \quad l < nm\}$$

   est réalisé par $\bar{a}_\eta$.

En interprétant les y_{η_i} par les éléments de $\bar{b}_\eta$, et les x_{η_j} par la réalisation $\bar{a}_\eta$ avec η dans ${}^{m.n\geq}2$, on obtient la consistance du fragment fini Σ, et par suite la consistance de Γ. □

Corollaire 4.5 *Soient $p(\bar{x})$ un type partiel (eventuellement avec paramètres), $\varphi_0(\bar{x},\bar{y})$ une formule positive et $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$, supposons que $R(p,\varphi_0,\varphi_1) = n$ alors il existe ψ telle que $p \vdash \psi$ et $R(\psi,\varphi_0,\varphi_1) = n$*

Preuve. Par l'absurde supposons que pour toute formule positive ψ telle que $p \vdash \psi$, on a $R(\psi,\varphi_0,\varphi_1) \geq n+1$. Alors $\Gamma_\psi = \{\psi(\bar{x}_\eta) \wedge \varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta\restriction l}) | \quad \eta \in {}^{n+1}2,\ l \leq n+1\} \cup \{\bar{y}_{\eta\hat{}0} = \bar{y}_{\eta\hat{}1} \mid \eta \in {}^{n>}2\}$ est consistante, ce qui implique la consistance de $\Gamma = p(\bar{x}_\eta) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta\restriction l}) \mid \quad \eta \in {}^{n+1}2,\ l \leq n+1\} \cup \{\bar{y}_{\eta\hat{}0} = \bar{y}_{\eta\hat{}1} \mid \eta \in {}^{n>}2\}$. Ainsi par le lemme 4.3 on déduit que $R(p,\varphi_0,\varphi_1) \geq n+1$, contradiction. Par conséquent il existe ψ dans p telle que $R(\psi,\varphi_0,\varphi_1) \leq n$. $\square$

Corollaire 4.6 *Soient $\psi(\bar{x},\bar{z})$ et $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ deux L-formules positives, et $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$, et soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples (dans un pec de T) qui ont le même type. Pour tout entier naturel n, si $R(\psi(\bar{x},\bar{a}),\varphi_0,\varphi_1) \geq n$ alors $R(\psi(\bar{x},\bar{b}),\varphi_0,\varphi_1) \geq n$.*

Preuve. Supposons que $R(\psi(\bar{x},\bar{a}),\varphi_0,\varphi_1) \geq n$. D'après le lemme 4.3

$$\{\psi(\bar{x}_\eta,\bar{a})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta,\bar{y}_{\eta\restriction l}) | l \leq n, \eta \in {}^{n}2\} \cup \{\bar{y}_{\eta\hat{}0} = \bar{y}_{\eta\hat{}1} | \eta \in {}^{n>}2\}$$

est consistante, par conséquent la formule positive

$$\exists_{l\leq n}\bar{x}_\eta\bar{y}_{\eta\restriction l}(\psi(\bar{x}_\eta;\bar{z}) \wedge \bigwedge_{l\leq n}\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta,\bar{y}_{\eta\restriction l}) \wedge \bigwedge_{\eta\in {}^{n>}2}\bar{y}_{\eta\hat{}0} = \bar{y}_{\eta\hat{}1})$$

est dans le type de $\bar{a}$. Par suite elle appartient aussi au type de $\bar{b}$, ce qui implique par le lemme 4.3 que $R(\psi(\bar{x},\bar{b}),\varphi_0,\varphi_1) \geq n$. $\square$

4.2 Stabilité positive

Notre définition de la stabilité positive suit celle naturelle qui fait intervenir le comptage des types. Soulignons quand-même que, la notion de type positif n'ayant un sens que dans les pec d'une théorie h-inductive, nous nous restreindrons à cette classe de modèles. En partant des travaux de Ben Yaacov dans [2], on réussit à obtenir des caractérisations de cette notion bien connues en théorie des modèles usuelle. Il faut souligner quand même que la caractérisation par la présence d'un ensemble infini et ordonné positivement nécessite des études séparées pour les théories bornées et non bornées. Ceci est lié à l'utilisation des techniques combinatoires, en particulier le théorème d'Erdös-Rado (théorème 2.30).

Définition 4.7 *Soient T une théorie h-inductive complète, et λ un cardinal. On dit que T est λ-stable si pour tout pec A de T de cardinal $\lambda \geq |L|$ on a :*

$$| S(A) | \leq \lambda$$

La théorie T est dite stable si elle est λ-stable pour un certain λ.
Une structure M est dite stable si la théorie $Tk(M)$ est stable.

Notre premier exemple d'une théorie stable provient d'une classe de structures particulières à la théorie des modèles positive : les structures bornées. et on commence par étudier la stabilité positive. Nous remercions Poizat pour cette suggestion.

Lemme 4.8 *Toute théorie h-inductive complète bornée est stable.*

Preuve. Comme T est une théorie bornée, le cardinal

$$\lambda = max\{|M| \mid M \text{ un pec de } T\}$$

existe. Nous vérifions que T est $\lambda-$stable. Sinon, il existe M un pec de T de cardinal λ tel que $|S(M)| > \lambda$, ce qui implique l'existence d'une extension élémentaire positive N de M qui est aussi un pec de T (lemme 2.19) et qui réalise tous les types de $S(M)$. Ainsi M est un pec de T de cardinal $> \lambda$, une contradiction. □

Un exemple de théorie h-inductive complète stable non bornée est celui de la théorie des corps de caractéristique fixée dans le langage usuel des corps. D'après le corollaire 3.36, cette théorie est complète positivement. Ses pec sont les corps algébriquement clos de même caractéristique. Vu que la théorie de cette classe est complète et stable au sens de la théorie des modèles usuelle, on déduit la stabilité positive en appliquant directement la définition 4.7. Ainsi, la théorie des corps de caractéristique fixée est stable positivement.

Précisons que cette théorie n'est même pas complète dans la logique usuelle. Par conséquent, il n'est même pas possible de parler de sa stabilité dans la logique usuelle. Nous reviendrons sur la comparaison des stabilités dans la logique positive et la logique usuelle dans la section 4.5.

Lemme 4.9 *Soient T une théorie h-inductive complète, et (φ_0, φ_1) un couple de formules positives telles que $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$ et $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$. Alors pour aucun cardinal λ, T n'est λ-stable.*

Preuve. Soient λ un cardinal infini, et $\mu = min\{\mu | 2^\mu > \lambda\}$, alors $\sum_{\alpha<\mu} 2^\alpha \leq \lambda$. Par le corollaire 4.4 la famille

$$\Gamma = \{\varphi_{\eta(\alpha)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta\restriction\alpha}) \mid \quad \eta \in {}^\mu 2,\, \alpha < \mu\} \cup \{\bar{y}_0 = \bar{y}_1\}$$

est consistante avec $\bar{x}_\eta$ un n-uple, et $\bar{y}_\eta$ un μ-uple.

Soient $B = \{b_\eta | \ \eta \in {}^{\mu>}2\}$ et $A = \{\bar{a}_\eta | \ \eta \in {}^\mu 2\}$ un couple qui réalise Γ. Par définition de μ, on a $| \ A \ | \leq \lambda$. Maintenant montrons que si $\eta \neq \nu \in {}^\mu 2$, alors $tp(\bar{a}_\eta / A) \neq tp(\bar{a}_\nu / A)$. En effet soit $\rho = \eta \wedge \nu$, en d'autres termes, il existe $\beta < \alpha$ tels que $\rho \in {}^\beta 2$ et $\eta_{\restriction\beta} = \nu_{\restriction\beta} = \rho$ et $\eta(\beta + 1) \neq \nu(\beta + 1)$, tel que

$\rho\hat{}0 = \eta_{\restriction\beta+1}$, $\rho\hat{}1 = \nu_{\restriction\beta+1}$ et $\rho \in {}^{\gamma}2$. Donc par définition de Γ, A et B, on a $D \models \varphi_0(\bar{x}_\eta, \bar{b}_{\eta\restriction\gamma+1})$, et $D \models \varphi_1(\bar{x}_\nu, \bar{b}_{\nu\restriction\gamma+1})$, comme $\bar{b}_{\eta\restriction\gamma+1} = \bar{b}_{\nu\restriction\gamma+1}$, (lemme 4.3). Alors $tp(\bar{a}_\eta / B) \neq tp(\bar{a}_\nu / B)$. Par suite on déduit que $|S(B)| \geq |{}^{\mu}2| > \lambda$, alors que $|B| \leq \lambda$, d'où la non λ-stabilité de T. $\square$

4.3 Propriété de l'ordre positive et stabilité.

Dans cette section on propose une notion d'ordre propre à la théorie des modèles positive : on définit l'ordre avec deux formules positives contradictoires. Cette notion d'ordre nous permettra comme dans la théorie des modèles usuelle de caractériser l'instabilité positive. La caractérisation se fera suivant deux chemins bien différents selon la nature de la théorie en question. Si la théorie est bornée, les lemmes 4.8 et 4.13 permettent de conclure rapidement grâce au caractère très particulier des théories bornées.

Dans le cas où la théorie est non bornée, le raisonnement est nettement plus compliqué. D'abord, on démontre que la propriété de l'ordre positive implique la non finitude du rang de Shelah (lemme 4.16). Ensuite on reprend le théorème 2.10 de [17] dans le cadre positif qui nous pemettra de conclure (corollaire 4.22).

Définition 4.10 *Soit T une théorie h-inductive dans un langage L. On dit qu'une L-formule positive $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (avec $l(\bar{x}) = l(\bar{y}) = n$) définit un ordre, si il existe $\psi \in Res_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, et une suite $(\bar{a}_i| \quad i < \omega)$ de n-uples distincts dans un modèle de T tels que*

$$\begin{cases} \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & si\ i < j \\ \psi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & si\ j < i. \end{cases}$$

On dit que le couple (φ, ψ) ordonne la suite $(\bar{a}_i | i < \omega)$.

La théorie T a la propriété de l'ordre, si il existe une formule positive dans le langage de T, qui définit un ordre sur un modèle de T.

Dans le reste, sauf mention contraire, nous utiliserons l'appellation “propriété de l'ordre” au lieu de “propriété de l'ordre positive”.

Lemme 4.11 *Soient T une théorie h-inductive, $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ un couple de formules positives (éventuellement $l(\bar{x}) \neq l(\bar{y})$) telles que $\psi \in Res_T(\varphi)$ et qu'il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid \quad i, j < \omega\}$ une suite d'uples dans un modèle de T telle que*

$$\begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & si\ i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & si\ i > j. \end{cases}$$

Alors T a la propriété de l'ordre.

Preuve. Supposons qu'il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid \quad i, j < \omega\}$ une suite d'uples dans un modèle de T telle que

$$\begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Soit θ la formule positive définie par $\theta((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}')) \equiv \varphi(\bar{x}, \bar{y}')$, alors la formule θ' définie par $\theta'((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}')) \equiv \psi(\bar{x}, \bar{y}')$ est contradictoire avec θ, en d'autres termes, $\theta' \in Res_T(\theta)$, et le couple de formules positives (θ, θ') ordonne la suite $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \mid \quad i < \omega\}$. $\square$

Lemme 4.12 *Soit T une théorie h-inductive sans la propriété de l'ordre. Alors pour tout couple de formules positives $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$, avec $\psi \in Res_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, il existe un entier naturel N (qui dépend du couple de formules) tel que pour tout modèle M de T, il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j \leq N\}$ dans M tel que :*

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & si\ i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & si\ i > j. \end{cases}$$

Preuve. Par l'absurde supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j \leq N\}$ dans un modèle de T tel que :

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Alors par compacité positive il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j < \omega\}$ tel que :

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Par le lemme 4.11, T a la propriété de l'ordre, contradiction. $\square$

Lemme 4.13 *Si T est une théorie h-inductive bornée, alors il n'a pas la propriété de l'ordre.*

Preuve. Supposons que T a la propriété de l'ordre. Alors, il existe A un pec de T et $(\bar{a}_i | \, i < \omega)$ une suite extraite de A ordonnée par un couple de formules (φ, ψ) tel que $\psi \in Res_T(\varphi)$. Ceci implique que la famille d'énoncés h-inductifs suivante est consistante :

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) | i < j < \omega\} \ .$$

Par le théorème de compacité positive, on déduit que pour tout cardinal λ la famille d'énoncés suivante est consistante

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) | i < j < \lambda\} \ .$$

Soient B un modèle de cette famille d'énoncés et $(\bar{b}_i|\, i < \lambda)$ une suite extraite de B ordonnée par le couple (φ, ψ). Soit B_e un pec de T où B se continue par un homomorphisme f. Comme la suite $(\bar{b}_i|\, i < \lambda)$ est ordonnée par (φ, ψ) et que $\psi \in Res_T(\varphi)$, on déduit que pour tout $i, j < \lambda$,

$$f(\bar{b}_i) = f(\bar{b}_j) \Rightarrow \bar{b}_i = \bar{b}_j \ .$$

Ainsi, B_e est un pec de T de cardinal au moins λ. Ceci contredit que T est bornée. □

Définition 4.14 *On appelle l'entier N du corollaire 4.12 le nombre d'alternance du couple $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$, par rapport à T.*

Lemme 4.15 *Soit T une théorie h-inductive non bornée. Une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ définit un ordre si et seulement si, pour tout ordinal α, il existe une suite $(\bar{a}_i : i < \alpha)$ dans un pec A de T qui vérifie :*

$$A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \quad \textit{si et seulement si} \quad i < j.$$

Preuve. On suppose d'abord que la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ définit un ordre. Alors il existe une formule positive $\psi \in Res_T(\varphi)$ telle que la famille suivante est consistante

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) | i < j < \omega\} \ .$$

Par compacité positive on déduit que pour tout ordinal α la famille suivante est consistante

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) | i < j < \alpha\}$$

Soient A un modèle de cette famille d'énoncés inductifs et $(\bar{a}_i | i < \alpha)$ une suite extraite de A ordonnée par le couple de formules (φ, ψ). Soit A_e un pec de T où A se continue. Comme $\psi \in Res_T(\varphi)$, l'image de $(\bar{a}_i | i < \alpha)$ dans A_e est de taille α et elle est ordonnée par le même couple de formules.

Maitenant montrons l'autre sens. Soient $\lambda = |Res_T(\varphi)|$ et $\alpha = \beth^+(\lambda)$, A un pec de T de cardinal $\geq \alpha$ et $(\bar{a}_i | i < \alpha)$ une suite de A tels que

$$A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \quad \text{si et seulement si} \quad i < j < \alpha.$$

À tout couple (i, j), on associe la formule positive $\psi_{ij} \in Res_T(\varphi)$ telle que $A \models \psi_{ij}(\bar{a}_{max(i,j)}, \bar{a}_{min(i,j)})$. Soit f l'application qui envoie $\{i, j\}$ vers ψ_{ij}. Par le théorème d'Erdös-Rado (théorème 2.30), il existe $\psi \in Res_T(\varphi)$ et $(\bar{a}_i | i < \lambda)$ une suite extraite de la suite $(\bar{a}_i | i < \alpha)$ telle que

$$\begin{cases} A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \psi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ainsi le couple (φ, ψ) ordonne la suite $(\bar{a}_i; i < \lambda)$. □

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 2.14 [9] au contexte positif. Il affirme que avoir la propriété de l'ordre implique que le rang est infini.

Lemme 4.16 *Soient T une théorie h-inductive et complète. (φ_0, φ_1) un couple de formules contradictoires qui ordonne une suite dans un modèle de T. Alors $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$.*

Preuve. Soit $(\bar{a}_i | i < \omega)$ une suite d'un modèle A de T. Soient $n \in \mathbb{N}$ et ψ une formule positive telles que $A \models \psi(\bar{a}_i)$, pour tout $i < 2^n$. Alors nous affirmons que $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \geq n$. En effet par induction, supposons le résultat vrai pour n. Montrons qu'il est vrai pour $n+1$. Supposons que $A \models \psi(\bar{a}_i)$ pour tout $i < n+1$ et

$$\begin{cases} i < j \Rightarrow A \models \varphi_0(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \\ i > j \Rightarrow A \models \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j). \end{cases}$$

Alors la formule $\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_0(\bar{a}_{2^n}, \bar{x})$ est réalisé par tous les $(\bar{a}_i | \, 2^n < i \leq 2^{n+1})$, et de même la formule $\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_1(\bar{a}_{2^n}, \bar{x})$ est réalisée par tous les $(\bar{a}_i : 0 \leq i < 2^n)$. Par hypothèse d'induction on obtient que :

$$\begin{cases} R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_0(\bar{a}_{2^n}, \bar{x}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n \\ R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_1(\bar{a}_{2^n}, \bar{x}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n. \end{cases}$$

Ainsi par définition du rang on a $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \geq n+1$.

Comme pour tout $i < \omega$, la formule $\bar{x} = \bar{x}$ est réalisé par tous les $\bar{a}_i$, donc $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \leq n$ pour tout n, et par suite $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$. □

Dans le reste de cette section, on montrera l'équivalence entre l'instabilité et la propriété de l'ordre positive, pour cela on commence par rappeler et introduire les outils dont on aura besoin.

Définition 4.17 *Soit T une théorie h-inductive. Soient B un pec de T, A une partie de B, et φ une L-formule positive. On note $S^m_\varphi(A)$ l'ensemble des m-types de $S(A)$ qui représentent la formule φ, en d'autres termes $p \in S^m(A)$ tel que $p \vdash \varphi$.*

Soit $\bar{a} \in A$, on note par $tp_\varphi(\bar{a}/B)$ la famille des formules positives $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ telles que $\bar{b} \in B$ et $A \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

Une théorie h-inductive complète et non bornée est dite φ-instable s'il existe A un pec de T tel que $\mid S_\varphi(A) \mid > \mid A \mid$.

Définition 4.18 *Soient T une théorie h-inductive, A un pec de T, ψ, φ deux L-formules positives $p \in S_n(A)$, et $B \subset A$. On dit que le type p est (ψ, φ)-sindé sur B s'il existe $\bar{a}, \bar{c}$ deux uples de A tels que*

1. *$tp_\psi(\bar{a}/B) = tp_\psi(\bar{c}/B)$;*
2. *$p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ et $p \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{c})$*

Lemme 4.19 *Soit T une théorie h-inductive instable, alors il existe φ, une L-formule positive φ telle que la théorie T est φ-instable.*

Preuve. Comme T n'est pas stable, par le lemme 4.8 on déduit que pour tout cardinal $\lambda \geq max(|L|; \aleph_0)$ il existe A un pec de T et $n \in \mathbb{N}$ tel que $|A| = \lambda$ et $|S_n(A)| > |A|$. Soit f une application de $S_n(A)$ dans l'ensemble des formules positives qui à chaque n-type p associe une L-formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ avec $\bar{a} \in A$.

Comme $|S_n(A)| \geq |L|^+$ on déduit qu'il existe Σ une partie de $S_n(A)$ de taille $> |A|$, et φ une formule positive telles que $f(\Sigma) = \varphi$. Ainsi on obtient le résultat

$$|S_\varphi(A)| > |A|.$$

□

Corollaire 4.20 *Une théorie h-inductive T complète est instable si et seulement si il existe une formule positive φ telle que T soit φ-instable.*

Le théorème suivant est la version positive du théorème 2.10 de [17]. C'est l'outil principal pour montrer que l'instabilité implique la propriété de l'ordre. Comme l'étude de la stabilité positive se fait dans la classe des pec d'une théorie h-inductive complète, le théorème de compacité positive est inefficace. En effet, ce théorème ne permet pas de contrôler le modèle dans lequel vit les réalisations d'un ensemble d'énoncés h-inductifs consistant avec la théorie. Par conséquent, dans le cas où la théorie n'est pas bornée, nous sommes contraints à utiliser les techniques de la combinatoire des cardinaux. La preuve du théorème suivant est une illustration de cet usage.

Théorème 4.21 ([17], théorème 2.10) *Soient T une théorie h-inductive complète, φ une L-formule positive, et A un pec de T. Supposons que $|S_\varphi(A)| > \sum_{0 \leq \mu < \lambda} |A|^\mu + 2^{2^\mu}$, où λ est un cardinal tel que $\lambda \longrightarrow (\chi)^2_2$ et χ un cardinal. Alors il existe θ une formule positive et $(\bar{d}_i | i < \chi)$ une suite dans un pec A de T, telle que $A \models \theta(\bar{d}_i, \bar{d}_j)$ si et seulement si $i < j$.*

Preuve. Soient A un pec de T et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L-formule positive (avec $l(\bar{x}) = m, l(\bar{y}) = n$) tels que $| S_\varphi(A) |>| A |= \kappa$ où $\kappa = \sum_{0 \leq \mu < \lambda} | A |^\mu + 2^{2^\mu}$. Soit $(c^i | i < \kappa^+)$ une suite de réalisations des types de $S_\varphi(A)$ dans un pec assez large. Posons $\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x})$. Définissons par induction sur $\alpha \leq \lambda$ une suite croissante de pec A_α tels que

- $A_0 = A$,
- Pour β limite, $A_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} A_\alpha$

Pour definir $A_{\alpha+1}$ on procède comme suit : pour tout $p \in S^m_\varphi(A_\alpha) \cup S^n_\psi(A_\alpha)$ et $B \subset A_\alpha$ tel que $|B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$, $A_{\alpha+1}$ est le pec engendré par les réalisations $p \restriction B$ (le lemme 2.22).

Montrons que $|A_\alpha| \leq |A|^{|\alpha+1|}$, par induction sur $\alpha < \lambda$. Supposons le résultat vrai pour α, et montrons qu'il est vrai pour $\beta = \alpha+1$. En effet comme $|S^m_\varphi(B) \cup S^n_\psi(B)| \leq 2^{|B|}$ et le nombre de choix d'ensembles de cardinal $\leq |\alpha| + \aleph_0$ de A_α est inférieur à $|A_\alpha|^{|\alpha|+\aleph_0}$, on déduit que $|A_\beta| \leq |A_\alpha|^{|\alpha|+\aleph_0}.2^{|\alpha|+\aleph_0}$. Par hypothèse d'induction, $|A_{\alpha+1}| \leq |A|^{|\alpha+1|.(|\alpha|+\aleph_0)}.2^{|\alpha|+\aleph_0}$ Ainsi $|A_\beta| \leq |A|^{|\beta+1|}$. De même on remarque que $|A_\lambda| \leq \kappa$.

Maintenant montrons la proposition suivante :

(Λ) Il existe $i < \kappa^+$ tel que pour tous $\alpha < \lambda$ et $B \subset A_\alpha; |B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$, $tp(c^i \diagup A_{\alpha+1})$ est (ψ, φ)-sindé sur B.

Preuve de (Λ) : Par l'absurde, supposons que pour tout $i < \kappa^+$ il existe $\alpha_i < \lambda$, $B_i \subset A_{\alpha_i}$ de cardinal $< |\alpha_i|^+ + \aleph_0$ tels que $tp(c^i \diagup A_{\alpha_i+1})$ n'est pas (ψ, φ)-scindé sur B_i.

Comme à tout $i < \kappa^+$ on associe un ordinal $\alpha_i < \lambda \leq \kappa$ et que $cf(\kappa^+) = \kappa^+$, on déduit qu'il existe un sous-ensemble Γ de la famille $(c^i | i < \kappa^+)$ de cardinal κ^+ tel que pour tout $c^i \in \Gamma$, $\alpha_i = \alpha < \lambda$.

De même comme le nombre des parties B de A_α telles que $|B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$ est au plus κ, alors il existe B et $\Gamma' \subset \Gamma$ de cardinal κ^+ tel que pour tout $c^i \in \Gamma'$, $tp(c^i \diagup A_{\alpha+1})$ n'est pas (ψ, φ)-scindé sur B.

Dans la suite B et α sont ceux trouvés dans les paragraphes précédents.

Soit $\mu = |B|^m \leq |\alpha| + \aleph_0 \leq \lambda$, par définition de $|A_{\alpha+1}|$ il existe $C \subset A_{\alpha+1}$ qui réalise tous les types de $S^m_\psi(B)$, donc $|C| \leq 2^{|\mu|}$, par suite $|S^n_\varphi(C)| \leq 2^{|C|} \leq 2^{2^\mu} \leq \kappa$. Par le même raisonnement que précedemment il existe $p \in S^n_\varphi(C)$ et $\Gamma'' \subset \Gamma'$ de cardinal κ^+ tels que pour tout $c^i \in \Gamma''$ $tp_\varphi(c^i \diagup C) = p$.

Dans toute la suite les c^i choisis sont dans Γ''.

Comme $tp_\varphi(c^0 \diagup A) \neq tp_\varphi(c^1 \diagup A)$ il existe $\bar{a} \in A$ tel que

$$(\star) \begin{cases} tp_\varphi(c^0 \diagup A) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \\ tp_\varphi(c^1 \diagup A) \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}). \end{cases}$$

Par définition de C il existe $\bar{a}' \in C$ tel que $tp_\psi(\bar{a} \diagup B) = tp_\psi(\bar{a}' \diagup B)$. Comme pour tout $i < \kappa^+$, $tp(c^i \diagup A_{\alpha+1})$ ne (ψ, φ)-split pas sur B, en particulier pour $i = 0, 1$, et que $tp_\psi(\bar{a} \diagup B) = tp_\psi(\bar{a}' \diagup B)$, pour $i = 0, 1$ on a

$$(\Lambda\Lambda) \quad tp(c^i \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \text{ si et seulement si } tp(c^i \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$$

du fait que $tp(c^0 \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ on obtient que $tp(c^0 \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$. Comme pour tout c^i dans Γ'' $tp(c^i \diagup C) = p$ alors $tp(c^0 \diagup C) = tp(c^1 \diagup C)$, et comme $tp(c^0 \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$ alors $tp(c^1 \diagup C) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$, ce qui implique $tp(c^1 \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$. Ainsi par $(\Lambda\Lambda)$ on obtient $tp(c^1 \diagup A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$, ce qui contredit $(\star)$. Ainsi on a démontré (Λ).

Dans toute la suite posons $A^\star$ la limite inductive de la suite A_α où $\alpha \leq \lambda$

Maintenant par induction sur $\alpha < \lambda$ on définit une suite de $(\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha, \bar{c}_\alpha) \in A_{2\alpha+2}$ comme suit. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $(\bar{a}_\beta, \bar{b}_\beta, \bar{c}_\beta)$ sont définies.

Soit $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \bar{a}_\beta\hat{}\bar{b}_\beta\hat{}\bar{c}_\beta$. D'après ($\Lambda$) le type $tp(c^i/A_{2\alpha+1})$ est (ψ,φ)-split sur B_α. Alors il existe $\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha \in A_{2\alpha+1}$ tels que $tp_\psi(\bar{a}_\alpha, B_\alpha) = tp_\psi(\bar{b}_\alpha, B_\alpha)$ et

$$\begin{cases} tp(c^i/A_{2\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) \\ tp(c^i/A_{2\alpha+1}) \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{b}_\alpha). \end{cases}$$

On prend $c_\alpha \in A_{2\alpha+2}$ qui par définition de $A_{2\alpha+2}$ réalise $tp(c^i/B_\alpha \cup \{\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha\})$. Ainsi on a $A^\star \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\alpha)$ et $A^\star \models \neg\varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\alpha)$. On remarque que pour tous $\alpha \leq \beta < \lambda$ on a

$$(*)\begin{cases} A^\star \models \varphi(\bar{c}_\beta, \bar{a}_\alpha) \\ A^\star \models \neg\varphi(\bar{c}_\beta, \bar{b}_\alpha). \end{cases}$$

Soit f l'application coloriage de λ définie par : pour tous $\alpha, \beta < \lambda$

$$f(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad A^\star \models \varphi(\bar{c}_{min(\alpha,\beta)}, \bar{a}_{max(\alpha,\beta)}) \\ \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme par hypothèse on a $\lambda \longrightarrow (\chi)^2_2$ alors il existe $H \subset \lambda$ de taille χ telle que $f \restriction H^2$ est constante. Supposons que $f(H^2) = 1$ si $\alpha, \beta \in H$, alors d'après l'hypothèse $f(H^2) = 1$ et $(*)$, on a $A^\star \models \neg\varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$. Maintenant si $f(H^2) = 0$, alors pour tous $\alpha < \beta < \lambda$ on a $A^\star \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\beta)$, comme $\bar{a}_\alpha$ et $\bar{b}_\alpha$ ont le même type sur B_α et $\bar{c}_\beta \in B_\alpha$ alors on a pour tous $\alpha < \beta < \lambda$, $A^\star \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\beta)$. Ainsi et d'après $(*)$ on deduit que dans le cas où $f(H^2) = 0$

$$A^\star \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\beta) \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha < \beta$$

Par conséquent la formule positive θ définie par $\theta((\bar{x},\bar{x}'),(\bar{y},\bar{y}')) \equiv \varphi(\bar{x},\bar{y}')$ ordonne la suite $(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\alpha)$, où $\alpha, \beta \in H$. □

Corollaire 4.22 *Si T est une théorie h-inductive complète non bornée et instable, alors elle a la propriété de l'ordre.*

Preuve. Pour pouvoir appliquer le théorème 4.21 et comme T est instable on prend $\lambda \to (\chi)^2_2$, avec $\chi = \beth^+(T)$, et $\lambda = (2^{\beth^+(T)})^+$.

Il existe A un pec de T de cardinal $\kappa = 2^{2^\lambda}$, et φ une formule positive tels que $|S_\varphi(A)| > |A| = \kappa$ et $\kappa = \sum_{0\leq\mu<\lambda} | A |^\mu + 2^{2^\mu}$.

Ainsi par le théorème 4.21, il existe $\theta(\bar{x},\bar{y})$ une formule positive et $(\bar{a}_\alpha, \alpha < \beth^+(T))$ une suite ordonnée par θ. Donc pour tout $\beta < \alpha < \beth^+(T)$, $\models \neg\theta(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta)$ donc il existe $\theta_{\alpha,\beta}$ une formule positive dans la résultante de θ telle que $\models \theta_{\alpha,\beta}(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta)$. Soit l'application coloriage f de $\beth^+(T))$ définie comme suit : Pour tous $\alpha, \beta < \beth^+(T)$, $f(\{\alpha,\beta\}) = \theta_{max(\alpha,\beta),min(\alpha,\beta)}$ comme le cardinal de la résultante est inférieur à $|T|$ ou $(|L|)$, alors par le théorème de Erdös-Rado il existe une suite de taille infinie et θ' telle que pour tout $\{\alpha,\beta\}$ de la nouvelle suite on a $f(\{\alpha,\beta\}) = \theta'$. Ainsi le couple (θ,θ') définit l'ordre cherché. □

Corollaire 4.23 *Soit T une théorie h-inductive complète. Alors T est stable si et seulement si elle n a pas la propriété de l'ordre.*

Preuve. La preuve se divise en deux cas, suivant si T est bornée ou non.

Supposons d'abord que T est non bornée. Si T a la propriété de l'ordre, par le lemme 4.16 il existe un couple de formules contradictoires (φ_0, φ_1) telles que $R(x = x, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$, ce qui implique par le lemme 4.9 que T est instable. L'autre direction découle directement du corollaire 4.22.

Dans le cas où la théorie est bornée la conclusion découle des lemmes 4.8 et 4.13. □

4.4 Autres caractérisations

Dans [2] Ben Yaacov a étudié et caractérisé la stabilité positive par la finitude du rang de Shelah et la type-définissabilité des types (définition 4.24). Dans le fait 4.25, on rappelle les caractérisations données par Ben Yaacov, avec leurs démonstrations.

Définition 4.24 ([2]) *Soient $p(\bar{x}) \in S(A)$ un type à paramètres dans un pec A de T et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive. On dit que $p(\bar{x})$ est φ-définissable si il existe $q_\varphi(\bar{y})$ un type partiel avec paramètres dans A qui contient au plus $|T|$ L-formules, tel que*

$$p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \quad \textit{si et seulemement si} \quad A \models q_\varphi(\bar{b})$$

On note aussi le type partiel q_φ par $dp(\varphi)$ Un type p est dit définissable si il est φ-définissable pour toute formule positive φ.

Fait 4.25 ([2]) *Soit T une théorie h-inductive, complète. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute formule positive φ et pour tout $\psi \in Res_T(\varphi)$, $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi, \psi) < \omega$.*
2. *Pour tout pec A de T, tous les types de $S(A)$ sont définissables.*
3. *Pour tout pec A, $|S(A)| \leq (|A| + |T|)^{|T|}$.*
4. *Il existe un cardinal λ tel que T est λ-stable.*

Preuve. ($1 \implies 2$) Soient $p(\bar{x}) \in S(A)$, $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ soit $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$. Par l'hypothèse (1) il existe $n_{\varphi_1} \in \mathbb{N}$ tel que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) = n_\varphi$. D'après le corollaire 4.5 il existe χ_{φ_1} une formule positive telle que $p \vdash \chi_{\varphi_1}$ et $R(p, \varphi_0, \varphi_1) = R(\chi_{\varphi_1}, \varphi_0, \varphi_1)$.

Soit $F_{\varphi_1}(\bar{y})$ la formule positive définit par :

$$F_{\varphi_1}(\bar{y}) \equiv \bigwedge_{\eta \in {}^n 2, l \leq n} \exists \bar{x}_\eta \bar{y}_\eta (\chi_{\varphi_1}(\bar{x}_\eta) \wedge \varphi_0(\bar{x}_\eta, \bar{y}) \wedge \varphi_{\eta(l)}(x_\eta, y_{\eta \restriction l}) \wedge \bigwedge_{\eta \in {}^{n>} 2} \bar{y}_{\eta^\frown 0} = \bar{y}_{\eta^\frown 1})$$

où l'entier naturel n_φ dépend de la formule φ_1. Alors pour tout $\bar{a} \in A$ et $A \models F_{\varphi_1}(\bar{a})$ on a $R(\chi_{\varphi_1} \wedge \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n_\varphi$.

Soit $q(\bar{y})$ l'ensemble des formules F_ψ où ψ parcourt $Res_T(\varphi_0)$.

Supposons que $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{b})$ c'est évident que $q(\bar{b})$ car pour toute $\psi \in Res_T(\varphi_0)$, $R(\chi_\psi \wedge \varphi_0(\bar{x}, \bar{b}), \varphi_0, \psi) = R(p, \varphi_0, \psi)$, ce qui nous permet de déduire que $\models F_\psi(\bar{b})$. Maintenant si p ne contient pas la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ alors il existe $\psi \in Res_T(\varphi)$ telle que $p \vdash \psi(\bar{x}, \bar{b})$. Donc $R(\chi_\psi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b}), \varphi, \psi) = R(p, \varphi_0, \psi)$ ce qui implique que $R(\chi_\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}), \varphi, \psi) < R(p, \varphi_0, \psi)$ sinon on aura $R(\chi_\psi(\bar{x}), \varphi, \psi) \geq R(p, \varphi_0, \psi) + 1$. Ainsi $A \models \neg F_\psi(\bar{b})$, par suite q n'est pas réalisé par $\bar{b}$. D'autre part, par définition le type $q(y)$ a au plus $|T|$ formules positives.

($2 \Longrightarrow 3$) Sous l'hypothèse de la définissabilité et la nature de la définissabilité, c'est évident que le nombre de possibilités pour définir un type sur un pec A est inférieur à $(|A| + |T|)^{|T|}$

($3 \Longrightarrow 4$) Pour tout cardinal λ tel que $\lambda = (\lambda + |T|)^{|T|}$, T est λ-stable.

($4 \Longrightarrow 1$) Lemme 4.9. □

Lemme 4.26 *Soit T une théorie h-inductive complète et stable, soit A un pec de T. Alors la théorie $Tk(A)$ et ses compagnes sont stables.*

Preuve. Soit B un pec de la théorie complète $Tk(A)$, par le lemme 2.19 le modèle B est aussi un pec de T. D'après le fait 4.25 on a $|S(B)| \leq (|B| + |T|)^{|T|}$, ce qui nous permet de conclure que la théorie $Tk(A)$ est stable (fait 4.25). □

4.5 Une comparaison entre les stabilités positive et usuelle.

Dans cette section nous étudions un exemple d'une structure qui est stable positivement et qui ne l'est pas au sens de la théorie des modèles usuelle.

Soient $M_1 = (\mathbb{Q}, \leq)$ dans le langage $L_1 = \{c_q \ (q \in \mathbb{Q}), \leq\}$. Pour des raisons explicitées dans l'exemple 2.21, la structure M_1 est bornée, par suite elle est stable (lemme 4.8). Remarquons aussi qu'elle est instable au sens de la théorie des modèles usuelle puisqu'on peut ordonner un ensemble infini. Soient M_2 un pec d'une théorie h-inductive complète non bornée et positivement stable (Par exemple la théorie des corps de caractéristique fixée), et L_2 le langage de le théorie de M_2 augmenté en ajoutant un symbole de constante pour chaque élément de M_2.

Soit $L^\star$ la réunion de L_1 et L_2 à laquelle nous ajoutons deux symboles relationnels m_1, m_2. Soit T la théorie h-inductive formée par $Tk(M_1) \cup Tk(M_2)$ et l'ensemble des énonces h-inductifs

$$\{\neg \exists x m_1(x) \wedge m_2(x), \forall x m_1(x) \vee m_2(x)\}$$

$$\cup \; \{m_1(a) : a \in M_1\} \; \cup \; \{m_2(b) : b \in M_2\}.$$

Une $L^\star$-formule positive est une combinaison booléenne de formules de la forme $(\varphi(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \wedge (\psi(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ et $(\varphi'(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \vee (\psi'(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ où φ, φ' des L_1-formules et ψ, ψ' des L_2-formules positives et pour $i = 1, 2$, $m_i(\bar{z}) \equiv \bigwedge_{z_j \in \bar{z}} m_i(z_j)$. Dans la suite nous notons la formule $(\varphi(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \wedge (\psi(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ par $(\varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{y}))$ et la formule $(\varphi'(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \vee (\psi'(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ par $(\varphi'(\bar{x}) \vee \psi'(\bar{y}))$.

Les modèles de la théorie T sont de la forme $N_1 \cup N_2$ avec $N_1 \models Tk(M_1)$ et $N_2 \models Tk(M_2)$ et $N_1 \cup N_2 \models \varphi(\bar{n}_1) \wedge \psi(\bar{n}_2)$ si et seulement si $N_1 \models \varphi(\bar{n}_1)$ et $N_2 \models \psi(\bar{n}_2)$, et $N_1 \cup N_2 \models \varphi(\bar{n}_1) \vee \psi(\bar{n}_2)$ si et seulement si $N_1 \models \varphi(\bar{n}_1)$ ou $N_2 \models \psi(\bar{n}_2)$. Ceci nous permet de déduire qu'une application de $N_1 \cup N_2$ dans un modèle de T est un homomorphisme si et seulement si les restrictions de f sur N_1 et N_2 sont des homomorphismes.

Lemme 4.27 *Soit $N = N_1 \cup N_2$ un modèle de T, alors N est un pec de T si et seulement si N_1 et N_2 sont respectivement des pec de $Tk(M_1)$ et $Tk(M_2)$*

Preuve. Soit $N = N_1 \cup N_2$ avec N_1 un pec de $Tk(M_1)$ et N_2 un pec de $Tk(M_2)$, et soit f un homomorphisme de N dans modèle $M = N'_1 \cup N'_2$ de T. Supposons que $M \models \varphi(f(\bar{n}_1)) \wedge \psi(f(\bar{n}_2))$, avec $\bar{n}_1 \in N_1$ et $\bar{n}_2 \in N_2$. Comme N_1 et N_2 sont des pec, les restrictions de f à N_1 et N_2 sont des immersions. Ainsi $N \models \varphi(\bar{n}_1) \wedge \psi(\bar{n}_2)$. Ce qui implique que f est une immersion et par suite N est un pec de T.

Inversement supposons que N est un pec de T. Pour $i = 1, 2$, soit f_i un homomorphisme de N_i dans N'_i un modèle de $Tk(M_i)$ alors $f = f_1 \cup f_2$ est un homomorphisme de N dans $N' = N'_1 \cup N'_2$. Comme N est un pec de T on déduit que f est une immersion ce qui implique que f_1 et f_2 sont des immersions. Ainsi N_1 est un pec de $Tk(M_1)$ et N_2 un pec de $Tk(M_2)$.□

Lemme 4.28 *La théorie T est complète et non bornée.*

Preuve. En effet, comme la théorie $Tk(M_2)$ n'est pas bornée, pour tout cardinal α il existe N_2 un pec de $Tk(M_2)$ de cardinal $\geq \alpha$. Ainsi $M_1 \cup N_2$ est un pec de T est de cardinal $\geq \alpha$, ce qui implique que T est non bornée. □

Proposition 4.29 *La théorie T est positivement stable.*

Preuve. Supposons que la théorie T est instable. D'après le corollaire 4.23 il existe $N = N_1 \cup N_2$ un pec de T, et une suite $(\bar{n}_i,\, i < \omega)$ de N ordonnée par un couple de formules positives (φ, ψ) avec $\psi \in Res_T(\varphi)$.

Tout élément $\bar{n}_i$ est de la forme $(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ où $\bar{a}_i \in N_1$ et $\bar{b}_i \in N_2$, et la formule positive φ vérifie

$$\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)(C)\varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$$

respectivement

$$\psi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \psi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)(C)\psi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$$

avec φ_i (resp ψ_i) des formules positives dans le langage de la théorie $Tk(M_i)$ pour $i = 1, 2$ et $C \in \{\wedge, \vee\}$.

Supposons que $C = \vee$, alors $\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \vee \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$, et $\psi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \psi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \wedge \psi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$ avec $\psi_i \in Res_T(\varphi_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme d'une part, on peut extraire de la suite de départ une sous suite $((\bar{a}_i, \bar{b}_i), i < \omega)$ telle que pour tous $i < j$ on a soit $N_1 \models \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ soit $N_2 \models \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$. Et d'autre part, on a pour tout $i < j$, $N_1 \models \psi_1(\bar{a}_j, \bar{a}_i)$ et $N_2 \models \psi_2(\bar{b}_j, \bar{b}_i)$. On aboutit alors à l'une des deux conclusions suivantes : soit on ordonne positivement définissablement un ensemble infini de N_1 ; soit on ordonne positivement définissablement un ensemble infini de N_2. Chaque possibilité mène à une contradiction car on sait que M_1 et M_2 sont positivement stables.

On refait le même raisonement dans le cas ou $C = \wedge$ c'est à dire

$$\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \wedge \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)\ .$$

Ainsi on déduit que la théorie T est positivement stable. □

On remarque que la théorie $Th(M_1 \cup M_2)$ dans le cadre de la théorie des modèles usuelle est instable puisque la structure M_1 s'ordonne définissablement.

4.6 Conséquences de la stabilité

Dans la première partie de cette section on étudie l'existence, le nombre des extensions et des restrictions spéciales d'un types dans une théorie h-inductive stable.

Dans la deuxième partie on propose un encadrement topoloqigue de la type-définissabilité (définition 4.24) donné dans la caractérisation de la stabilité (fait 4.25).

Définition 4.30 *Soient T une théorie h-inductive, B un pec de T de cardinal $\geq \lambda$, et $p \in S(B)$. On dit que p est λ-spécial, si et seulement si il existe, $A \subset B$, de cardinal au plus λ qui vérifie la propriété suivante :*
Pour tous $\bar{a}, \bar{b}$, des uples de B, tels que $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$, et toute formule positive φ

$$p \vdash \varphi(x, \bar{a}) \Leftrightarrow p \vdash \varphi(x, \bar{b}).$$

Dans ce cas on dit que p est λ-spécial sur A.
On dit que p est A-spécial, si il est $|A|$-spécial sur A.

Lemme 4.31 *Soient T une théorie h-inductive, M, N et P trois pec de T tels que $M \subset N \subset P$ et N réalise tous les types de $S(M)$. Soit $p \in S_n(N)$ qui est M-spécial, alors il existe un unique un fils $q \in S_n(P)$ de p qui est M-spécial.*

Preuve. Soit Γ l'ensemble des formules positives, $\varphi(\bar{x}, \bar{d})$ avec $\bar{d} \in P$, telles qu'il existe $\bar{a} \in N$ de même type sur M que $\bar{d}$ (ie $tp(\bar{d}/M) = tp(\bar{a}/M)$) et que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Montrons que Γ est un type de $S_n(P)$. Pour cela on va montrer que $\Gamma \cup Tu(P)$ est consistant, ensuite on montrera que Γ est une famille maximale de formules positives.

$\Gamma \cup Tu(P)$ est consistant : En effet un fragment fini Σ de cette famille est de la forme $\{\neg\exists\bar{y}\varphi(\bar{y}, \bar{d}, \bar{m}), \psi(\bar{x}, \bar{d}, \bar{m})\}$, avec φ, ψ des formules positives, $\bar{d} \in P$, $\bar{m} \in M$, $\neg\exists\bar{y}\varphi(\bar{y}, \bar{d}, \bar{m}) \in Tu(P)$, et $\psi(\bar{x}, \bar{d}, \bar{m}) \in \Gamma$. Soit r le type de $\bar{d}$ sur M. Comme N satisfait tous les types à paramètres dans M, il existe $\bar{n} \in N$ qui réalise r. Ainsi si on interprète $\bar{d}$ par $\bar{n}$, alors il existe $\bar{a} \in N$ tel que $N \models \psi(\bar{a}, \bar{n}, \bar{m})$ et $N \vdash \neg\exists\varphi(\bar{y}, \bar{n}, \bar{m})$. Ainsi N réalise Σ. D'où la consistance de $\Gamma \cup Tu(P)$.

Montrons la maximalité de Γ. Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{d})$ une formule positive, avec $\bar{d} \in P$, qui n'appartient pas à Γ. Soit $\bar{n} \in N$ un uple qui a le même type sur M que $\bar{d}$. Par définition de Γ, on déduit que $p \vdash \neg\varphi(\bar{x}, \bar{n})$, ce qui implique l'existence d'une formule positive $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in Res_{Tu(M)}(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ à paramètres dans M telle que $p \vdash \psi(\bar{x}, \bar{n})$. Par définition de Γ on déduit que $\psi(\bar{x}, \bar{d}) \in \Gamma$, d'où la maximalité de Γ. Par conséquence Γ est un fils M-spécial de p.

D'autre part, on remarque que si Γ' est un autre fils M-spécial de p, alors il contient par définition Γ, et comme Γ est maximal on a égalité. $\square$

Lemme 4.32 *Soit T une théorie h-inductive complète non bornée et λ-stable. Soient M, N deux pec de T tels que $|M| \leq \lambda$ et N réalise tous les types de $S(M)$, alors*

$$|\{p \in S(N)| \quad p \text{ est } M\text{-spécial } \}| \leq \lambda$$

Preuve. Comme T est λ-stable, $|M| \leq \lambda$ et que N réalise tous les types de $S(M)$, il existe $N^\star$ un pec de T de cardinal λ qui réalise tous les types de $S(M)$ et tel que $M \subset N^\star \subset N$.

Soit $p \in S(N)$ un type M-spécial, alors $q = p \restriction N^\star$ est M-spécial, et d'après le lemme 4.31, p est l'unique fils de p qui est M-spécial. Comme $|N^\star| \leq \lambda$, on déduit que

$$|\{p \in S(N)| \quad p \text{ est } M\text{-spécial } \}| \leq \lambda$$

$\square$

Dans [16] Shelah introduit une notion de la stabilité dans les cas qui s'adapte au contexte positif et permet d'obtenir des conditions nécessaires. Le théorème suivant est un exemple dont la démonstration que nous proposons n'utilise que des notions qui sont propre é la théorie des modèles positives

Théorème 4.33 *Soient T une théorie h-inductive μ-stable, M un pec de T et $p \in S(M)$. Il existe N un pec de T de cardinal $\leq \mu$ tel que $N \prec_+ M$, et p est N-spécial.*

Preuve. Soit χ le cardinal défini par

$$\chi = min\{\alpha \mid 2^\alpha > \mu, \alpha \leq \mu\}$$

Supposons que p n'est N-spécial pour aucun pec $N \subset M$ de cardinal $\leq \mu$. Par induction on construit une suite $(M_\alpha, N_{i\alpha}; i = 1,2; \alpha \leq \chi)$ telle que pour tout $\alpha \leq \chi$ et $i = 1,2$ on a :

- $M_\alpha, N_{i\alpha}$ sont des pec de T inclus dans M,
- $max(|M_\alpha|, |N_{i\alpha}|) \leq \mu$,
- $M_\alpha \subset N_{i\alpha} \subset M_{\alpha+1}$

Posons M_0 un pec de T de cardinal au plus μ et qui est inclus dans M. Comme par hypothèse p n'est pas M_0-spécial, ils existent $\bar{a}_i$, $i = 1,2$ deux uples de M qui ont le même type sur M_0 et tels que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_1)$ et $p \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_2)$. Supposons que la suite est construite jusqu'au α, par amalgamation soit $M_{\alpha+1}$ l'amalgamé des $N_{i\alpha}; i = 1,2$ sur la base M_α et qui est de cardinal $\leq \mu$. (ie le diagramme commutatif suivant est donné par l'amalgamation des pec)

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "h_\rho"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & N_{1\alpha} \arrow[d, "im"] \\ M_{2\alpha} \arrow[r, "\bar{h}_\rho"'] & P_\alpha \end{tikzcd}$$

Comme p n'est pas $M_{\alpha+1}$-spécial, il existe $\bar{a}_{i,\alpha+1}; i = 1,2$ des uples de M tels que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{1,\alpha+1})$ et $p \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{2,\alpha+1})$. Soit $N_{i,\alpha+1}$ le pec de T engendré par $M_{\alpha+1} \cup \{\bar{a}_{i\alpha+1}\}$ (le lemme 2.22), pour $i = 1,2$. Ainsi on a construit la suite $(M_\alpha, N_{i,\alpha}; i = 1,2; \alpha \leq \chi)$

A partir de la suite $(M_\alpha; N_{i\alpha}; \alpha \leq \chi, i = 1,2)$ on va construire une deuxième suite $(M^\star_\alpha, h_\rho, \alpha \leq \chi, \rho \in^\alpha 2)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \leq \chi$, $M^\star_\alpha$ est un pec de T de cardinal $\leq \mu$,
- $\alpha \leq \beta \Longrightarrow M^\star_\alpha \prec_+ M^\star_\beta$,
- pour tout ordinal limite $\alpha \leq \chi$, $M^\star_\alpha = \bigcup_{\gamma \leq \alpha} M^\star_\gamma$,
- pour tout $\rho \in^\alpha 2$, $h_\rho : M_\alpha \longrightarrow M^\star_\alpha$ est un homomorphisme (immersion),
- $\alpha < \beta \leq \chi$ et $\rho \in^\beta 2 \Longrightarrow h_{\rho|\alpha} \subseteq h_\rho$,
- si $\beta = \alpha + 1$ et $\rho \in^\beta 2 \Longrightarrow h_{\rho\hat{\ }0}(N_{1\alpha}) = h_{\rho\hat{\ }1}(N_{2\alpha})$

La construction de la suite $(M_\alpha; N_{i\alpha}; \alpha \leq \chi, i = 1,2)$ est faite par induction comme suit : Posons $M^\star_0 = M_0$ et $h_0 = id_{M_0}$. Supposons que la suite est contruite jusqu'au α.

Soit $\rho \in^\alpha 2$, et h_ρ l'homomorphisme (immersion) de M_α dans $M^\star_\alpha$. Par l'amalgamation asymétrique on a le digramme commutatif suivant avec i_α

l'application inclusion et P_α un pec de T de cardinal au plus μ

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{h_\rho} & M^\star_\alpha \\ {\scriptstyle i_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle im} \\ M_{\alpha+1} & \xrightarrow[\bar{h}_\rho]{} & P_\alpha \end{array}$$

Posons $h_{\rho^\frown 1} = \bar{h}_\rho$. Soit f_α l'homomorphisme qui fixe M_α point par point et qui envoie $\bar{a}_{1\alpha}$ vers $\bar{a}_{2\alpha}$, donc on a $f_\alpha(N_{1\alpha}) = N_{2\alpha}$. Par amalgamation asymétrique on peut trouver Q_α un pec de cardinal au plus μ et g_α un homomorphisme (une immersion) de $M_{\alpha+1}$ dans Q_α tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} N_{1\alpha} & \xrightarrow{\bar{h}_\rho \circ f_\alpha} & N_{2\alpha} \\ {\scriptstyle i_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle im} \\ M_{\alpha+1} & \xrightarrow[g_\alpha]{} & Q_\alpha \end{array}$$

Posons $h_{\rho^\frown 0} = g_\alpha$, alors on a

$$h_{\rho^\frown 0}(N_{1\alpha}) = h_{\rho^\frown 1} \circ f_\alpha(N_{1\alpha}) = h_{\rho^\frown 1}(N_{2\alpha})$$

On définit $M^\star_{\alpha+1}$ comme étant l'amalgamé de tous les $h_{\rho^\frown 0}(M_\beta)$, $h_{\rho^\frown 1}(M_\beta)$ (où ρ parcours l'ensemble ${}^\alpha 2$) sur la base $M_{\alpha+1}$, on a $|M^\star_{\alpha+1}| \leq \chi$.

Pour tout ordinal limite α soit :

$$M^\star_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M^\star_\alpha \quad \text{et pour tout} \quad \rho \in^\beta 2, \quad h_\rho = \bigcup_{\alpha<\beta} h_{\rho\restriction\alpha}$$

Une telle construction nous permet de déduire que pour tout $\alpha \leq \chi$, $M^\star_\alpha \prec_+ M^\star_{\alpha+1}$. En effet par construction on a

$$M^\star_\beta =< h_{\rho^\frown 0}(M_\beta) \cup h_{\rho^\frown 1}(M_\beta) \mid \quad \rho \in^\alpha 2 >$$

et

$$M^\star_\alpha =< h_\rho(M_\alpha) \cup h_\rho(M_\alpha) \mid \quad \rho \in^\alpha 2 >$$

Comme $h_{\rho^\frown i\restriction\alpha} = h_\rho$, pour $i = 0, 1$ et $M_\alpha \prec_+ M_\beta$, alors $M^\star_\alpha \prec_+ M^\star_\beta$ Rappelons que $|M^\star_\chi| \leq \chi$ car χ est un cardinal et par suite c'est un ordinal limite, par contruction $M^\star_\chi$ est la limite inductive d'une famille de pec tous de cardinal inférieur ou égale à μ.

Soit $h_\rho \in^\chi 2$, par amalgamation asymétrique il existe H_ρ une immersion de M dans un pec N_ρ de T telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_\chi & \xrightarrow{h_\rho} & M^\star_\chi \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle im} \\ M & \xrightarrow[H_\rho]{} & N_\rho \end{array}$$

Maintenant sous l'hypothèse de la non μ-spécialité de p on montrera que la théorie T est nécessairement non μ-stable. Soient $\eta, \nu \in^{\chi} 2$ et H_η, H_ν définit comme précédemment, et soient

$$\begin{cases} p_\eta = H_\eta(p)_{\restriction M^\star_\chi} \\ p_\nu = H_\nu(p)_{\restriction M^\star_\chi}. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\eta \neq \nu \in^{\chi} 2 \Longrightarrow p_\eta \neq p_\nu$$

En effet posons $\sigma = \eta \wedge \nu$ (l'intersection des deux suites) de longueur γ (ie $\sigma \in^{\gamma} 2$ telle que $h_{\sigma\hat{}0} \subseteq h_\eta$ et $h_{\sigma\hat{}1} \subseteq h_\nu$). Par hypothèse de non μ-spécialité de p il existe $\bar{a} \in N_{1\sigma} \subset M_\chi$ et φ une formule positive tels que

$$(*) \begin{cases} p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \\ p \nvdash \varphi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a})). \end{cases}$$

Donc $p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, h_{\sigma\hat{}0}(\bar{a}))$, par construction on a $h_{\sigma\hat{}0} = \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma$, ainsi $p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a}))$

D'autre part comme $p \nvdash \varphi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a}))$ il existe une formule positive $\psi \in Res_T(\varphi)$ telle que $p \vdash \psi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a}))$, et par le fait que $h_{\sigma\hat{}1} = \bar{h}_{\sigma\restriction M_{\sigma+1}} = H_{\nu\restriction M_{\sigma+1}}$ on déduit que $p_\nu \vdash \psi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a}))$ Par conséquent

$$\begin{cases} p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a})) \\ p_\nu \vdash \psi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a})). \end{cases}$$

Ainsi $p_\eta \neq p_\nu$ car les deux formules φ et ψ sont contradictoires, ce qui contredit la μ-stabilité de T. $\square$

Dans le reste de cette section on propose un encadrement topologique du type q_φ (le type-définition) associé à une formule positive φ. Le théorème 4.34 nous donne cet encadrement, aucours de ce théorème on a adapté positivement une technologie donnée dans le lemme 2.2 [10] pour arriver à encadrer le fermé F défini par le type partiel q_φ.

Rappelons que si $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, A un pec de T et $\bar{a}$ un uple de A. On note par $F_{\varphi(\bar{x},\bar{a})}$ (resp $O_{\varphi(\bar{x},\bar{a})}$) le fermé (resp l'ouvert) défini par $\{p \in S(A); p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$ (resp $\{p \in S(A); p \nvdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$). De même si q est un type partiel a paramètre dans A, on note F_q par le fermé $\cup\{F_f; q \vdash f\}$

Théorème 4.34 *Soient T une théorie h-inductive non bornée et stable , A un pec de T, et $p \in S_n(A)$. Alors pour toute formule positive $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, le fermé $F_{dp(\varphi)}$ associé au type $dp(\varphi)$ vérifie*

$$\bigcap_{\psi \in Res_T(\varphi)} F_{\Phi^0_\psi(y)} \subset F_{dp(\varphi)} \subset \bigcap_{\psi \in Res_T(\varphi)} O_{\Phi^1_\psi(\bar{y})}$$

où

$$\Phi^0_\psi(\bar{y}) = \bigvee_{w\subset\{0,\cdots,2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i\in w} \varphi_0(\bar{c}_i,\bar{y}) \quad ,$$

$$\Phi^1_\psi(\bar{y}) = \bigvee_{w\subset\{0,\cdots,2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i\in w} \psi(\bar{c}_i,\bar{y})$$

et les $\bar{c}_i$ des uplés de A dependent de ψ

Preuve. Posons $\varphi_0 = \varphi$, soit $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$ telle qu'il existe $\bar{d}, \bar{e} \in A$ qui vérifient $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{d})$ et $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{e})$. Comme par hypothèse la théorie T est stable alors elle n'a pas la propriété de l'ordre, par le lemme 4.12 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

– 1 : Il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \mid \quad i \leq N\}$ dans A tel que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

– 2 : Il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{b}_i) \mid \quad i \leq N\}$ dans A tel que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{b}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{b}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

La première étape de cette preuve consiste en la construction de trois suites :
$\{K(i), \bar{a}^s_{i+1} | K(i)$ est une famille de parties de $\{0, \cdots, i\}, s \in K(i)$ et $\bar{a}^s_{i+1} \in A\}$
$\{L(i), \bar{b}^t_{i+1} | L(i)$ est une famille de parties de $\{0, \cdots, i\}, t \in L(i)$ et $\bar{b}^t_{i+1} \in A\}$
$(\bar{c}_i, 0 \leq i < \omega)$ une suite de A telle que pour tout $i < \omega$

$$(*) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{j+1}, \bar{a}^s_{i+1}) & \forall i \leq j, s \in K(i) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{j+1}, \bar{b}^t_{i+1}) & \forall i \leq j, t \in L(i) \end{cases} .$$

La construction des trois suites est faite par induction comme suit : Choisissons $\bar{c}_0$ arbitrairement dans A et posons $K(-1) = L(-1) = \emptyset$. Par hypothèse, supposons qu'on a $(\bar{c}_0, \cdots, \bar{c}_n)$, $\{K(i), \bar{a}^s_{i+1} | i \leq n-1, s \in K(i)\}$, $\{L(i), \bar{b}^t_{i+1} | i \leq n-1, t \in L(i)\}$. On définit $K(n), L(n), \bar{c}_{n+1}, \bar{a}^s_{n+1}, \bar{b}^t_{n+1}, s \in K(n), t \in L(n)$ de la manière suivante :
$K(n) = \{w \subset \{0, \ldots, n\} |$ il existe $\bar{a} \in A$ tel que pour tout $i \in w$ $A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a})$, et $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a})\}$ Pour chaque $w \in K(n)$ on prend $\bar{a}^w_{n+1}$ un élément de A qui témoigne de l'existence de l'élément $\bar{a}$ dans la definition de $w \in K(n)$ (ie $A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a}^w_{n+1}), \forall i \in w$ et $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}^w_{n+1})$.

De la même manière soit
$L(n) = \{w \subset \{0, \ldots, n\} \mid$ il existe $\bar{b} \in A$ tel que pour tout $i \in w$ $A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{b})$ et $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{b})\}$ Pour chaque $w \in L(n)$ on prend pour $\bar{b}^w_{n+1}$ un élément de A qui témoigne de cela.

Maintenant pour définir $\bar{c}_{n+1}$ on procède comme suit : Soit

$$B_n = \{\bar{a}^s_{i+1} \mid i \leq n, s \in K(i)\} \cup \{\bar{b}^t_{i+1} \mid i \leq n, t \in L(i)\}.$$

Par définition

$$\begin{cases} \forall s \in K(i), \text{ et } j \in s : & A \models \varphi_0(\bar{c}_j, \bar{a}^s_{i+1}) \quad \text{et} \quad p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}^s_{i+1}) \\ \forall t \in L(i), \text{ et } k \in t : & A \models \varphi_1(\bar{c}_k, \bar{b}^t_{i+1}) \quad \text{et } p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{b}^t_{i+1}). \end{cases}$$

Alors la famille finie Γ_n définie par $\Gamma_n = \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}^s_{i+1}) : i \leq n, s \in K(i)\} \cup \{\varphi_0(\bar{x}, \bar{b}^t_{i+1}) : i \leq n,\ t \in L(i)\} \subset p$. Soit $\bar{c}_{n+1}$ une réalisation de Γ_n dans A. Alors on a

$$(**) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{n+1}, \bar{a}^s_{i+1}) & \forall i \leq n, s \in K(i) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{n+1}, \bar{b}^t_{i+1}) & \forall i \leq n, t \in L(i). \end{cases}$$

La deuxième étape de la preuve du théorème consiste à montrer les deux propriétés (a) et (b)

a- Soient $\{i_0 < i_1 < \ldots < i_n < \omega\}$ et $\bar{a} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{a}) & \forall 0 \leq k \leq n \\ p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{\bar{d}_i : i = 1, \cdots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(I) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) & \forall k < r \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) & \forall k > r. \end{cases}$$

En effet comme $i_0 \in L(i_0)$, on prend $\bar{d}_1 = \bar{b}^{i_0}_{i_0+1}$, alors $A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_0}, \bar{d}_0)$. D'après $(*)$ on a :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_0}, \bar{d}_1) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_1) & \forall k = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Maintenant soit $0 < k < n$ par hypothèses de (a) on a

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_p}, \bar{a}) & \forall p \leq k \\ p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}) \end{cases}$$

Par définition de $L(i_k)$ on a $t = \{i_0, \cdots, i_k\} \in L(i_k)$. Posons $\bar{d}_{k+1} = \bar{b}^t_{i_k+1}$ ainsi

$$A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_p}, \bar{d}_{k+1}) \quad p = 0, \cdots, k$$

Et par $(*)$

$$A \models \varphi_0(c_{i_p}, d_{k+1}) \quad \forall p \geq k+1$$

D'où la construction de la suite $\{\bar{d}_i : i = 1, \cdots, n\}$ d'éléments de A.

b- Soit $\{i_0 < i_1 < \ldots < i_n < \omega\}$ et $\bar{b} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{b}) & \forall 0 \leq k \leq n \\ D \models \varphi_1(\bar{c}^\star, \bar{b}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{e_i : i = 1, \cdots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(II) \begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k < r \\ A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k > r. \end{cases}$$

La démonstration de (b) est la même que celle de (a). Dans ce qui suit on va conclure la preuve du théorème.

Soit W un sous ensemble de $N+1$ élément de $\{0, 1, \cdots, 2N+1\}$. Supposons qu'il existe $\bar{a} \in A$ tel que $A \models \bigwedge_{i \in W} \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{a})$. Alors d'après $(2) + I$ on déduit que $p \models \neg\varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$.

De même d'après s'il existe $\bar{a} \in A$ tel que $A \models \bigwedge_{i \in W} \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a})$. Par $(1)+II$ on déduit que $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a})$.

Maintenant pour toute formule positive $\psi \in Res_T\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ on définit un couple de formules positives $(\Phi^0_\psi, \Phi^1_\psi)$ telles que

$$\begin{cases} \Phi^0_\psi(\bar{y}) = \bigvee_{w \subset \{0, \cdots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{y}) \\ \Phi^1_\psi(\bar{y}) = \bigvee_{w \subset \{0, \cdots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \psi(\bar{c}_i, \bar{y}). \end{cases}$$

Avec N_ψ est le nombre d'alternance du couple (φ, ψ) donné par le lemme 4.12 (rappelons aussi que les $\bar{c}_i; i < \omega$ dépendent de ψ). Posons

$$\begin{cases} P_{\varphi_0}(\bar{y}) = \{\Phi^0_\psi(\bar{y}) \mid \psi \in Res_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})\}. \\ Q_{\varphi_0}(\bar{y}) = \{\Phi^1_\psi(\bar{y}) \mid \psi \in Res_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})\} \end{cases}$$

On remarque que pour tout $\bar{a} \in A$ si $P_{\varphi_0}(\bar{a})$ alors $p \models \neg\psi(\bar{x}, \bar{a})$ pour toute ψ dans $Res_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})$ donc $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$.
De même si $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$, d'après $(a) + (2)$ on déduit que que pour toute formule $\psi \in Res_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})$ on a $A \models \neg\Phi^0_\psi(a)$ autrement a ne réalise aucune formule de $Q_{\varphi_0}(y)$.

L'encadrement recherché en découle. $\square$

Chapitre 5

Questions

L'étude des différents thèmes de la théorie des modèles positive dans cette thèse nous relève des questions. Nous listerons dans ce chapitre final certaines d'entre elles et exprimerons nos réflexions. Les questions ouvertes sur la théorie des modèles positive qu'on pourrait envisager d'aborder prioritairement avec un espoir raisonnable de trouver une solution se divisent en deux catégories naturelles, celles qui relèvent du domaine de la théorie abstraite et celles qui concernent les interactions avec les autres domaines des mathématiques.

Dans l'immédiat, suivant l'esprit de cette thèse, nous envisageons d'approfondir l'étude des questions sur la théorie abstraite. Nous listerons les grandes questions que les résultats principaux de cette thèse motivent. Elles concernent la topologie des espaces de types, les effets du manque de compacité, les généralisations de la stabilité positive et la nature des classes des modèles pec des théories h-inductives.

Topologie

Lors de l'étude de la topologie des espaces de types d'une structure on a montré que la séparation des espaces de types se conserve par passage aux extensions et aux restrictions élémentaires (théorème 3.16). La question qui découle immédiatement de cette étude est la suivante :

Est ce que les immersions, voire les immersions sous-élémentaires, conservent la séparation ?

Contrairement au théorème 3.16, quand on ne travaille pas avec des extensions élémentaires, on n'aboutit pas à une conclusion immédiate sur la préservation de la séparation par les immersions ni par les immersions sous-élémentaires, moyennant les techniques du théorème 3.16. Montrons cette difficulté en reprenant le raisonnement fait dans le cas où on travaille avec des extensions élémentaires pour mettre en évidence la différence qui existe entre les deux cas.

Soient M, N deux L-structures telles que $N \models Tk(M)$ et que M est séparée. Soient N_1, N_2, N_3 des modèles de $Tk(N)$ tels que N_1 se continue dans N_2 (resp. N_3) par un homomorphisme f_2 (resp. f_3). Comme les trois modèles N_1, N_2, N_3 sont aussi des modèles de $Tk(M)$ et que M est séparée, il existe $M' \models Tk(M)$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_2"'] & N_2 \arrow[d, "g"] \\ N_3 \arrow[r, "g'"'] & M' \end{tikzcd}$$

Contrairement au cas où N est une extension élémentaire positive de M, on ne peut pas affirmer que M' est un modèle de $Tu(N)$. De même, dans le cas où N est une structure séparée, pour des raisons semblables on ne peut pas reproduire la preuve du théorème 3.16.

Héritiers

Dans la théorie des modèles positive, on ne possède pas une notion d'héritier comme dans le cas de la théorie des modèles usuelle. En effet, le théorème de compacité positive nous permet de trouver un type partiel qui vérifie la propriété d'héritier dans un modèle de T qui n'est pas nécessairement pec. L'intérêt de cette notion dans l'étude de la stabilité et de la simplicité motive l'étude de l'existence et les conditions d'existence des héritiers et des cohéritiers, ou des notions qui peuvent jouer le même rôle dans le contexte positif.

Une des idées qu'on a essayé d'exploiter au cours de cette thèse au sujet des héritiers-cohéritiers est l'adaptation positive d'une notion qui peut jouer le role d'héritier et de cohéritier dans le cadre de la théorie des modèles positive. Cette notion est une forme d'amalgamation dite amalgamation héritier-cohéritier introduite par Hodges dans ([5], théorème 6.4.3), dont la version positive est la suivante :

Soient T une théorie h-inductive et A, B, C trois modèles de T tels $B, C \models Tk(A)$. Alors il existe D un modèle de T tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

avec f, g des homomorphismes, et tel que pour toute formule positive $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ et pour tous $\bar{b} \in B$ et $\bar{c} \in C$, si $D \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$ alors il existe $\bar{a} \in A$ tel que $B \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$.

Le blocage de ce raisonnement provient du fait qu'on ne peut pas prendre D un modèle pec. Or, il est nécessaire de se situer dans un modèle pec pour pouvoir parler des types sans ambiguïté.

Théories positivement dépendantes

Une théorie h-inductive complète T dans un langage L est dite indépendante s'il existe un couple de formules positives $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ tel que $\psi \in Res_T(\varphi)$ et $T \vdash \Sigma_n$ pour tout $n < \omega$ où Σ_n est l'enoncé h-inductif

$$\exists \bar{x}_0 \cdots \exists \bar{x}_{n-1} \exists \bar{y}_\emptyset \cdots \exists \bar{y}_w \cdots \exists \bar{y}_{2^n} \bigwedge_{i \in w} \varphi(\bar{x}_i, \bar{y}_w) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \psi(\bar{x}_i, \bar{y}_w).$$

avec w parcourt l'ensemble des parties de $\{0, \cdots, n-1\}$

Suite à notre étude de la stabilité et de la simplicité on propose d'étudier les propriétés de cette notion d'indépendance positive ainsi que son lien avec la stabilité et la simplicité positives.

Structures équimorphes

Dans un preprint, Poizat nous a suggéré certaines questions sur la théorie des modèles positive. Une de ces questions concerne les homomorphismes locaux qu'on peut définir comme suit. Deux structures A, B sont dites

- localement homomorphes/ isomorphes si pour toute partie finie A' de A (resp. B' de B) il existe un homomorphisme/plongement local de A' dans B (resp. de B' dans A) ;
- localement équimorphes si pour toute restriction finie A' de A (resp. B' de B) il existe un isomorphisme local s de A' dans B (resp. s' de B' dans A) tels que pour tout entier naturel n et toute restriction C de B engendrée par $s(A')$ et par au plus n éléments de B (resp. toute restriction D de A engendrée par $s'(B')$ et par au plus n éléments de A), il existe un homomorphime de C dans A qui prolonge l'inverse de s (resp. de D dans B qui prolonge l'inverse de s').

Dans son preprint Poizat a étudié les relations d'être localement équimorphe et homomorphe, et il a montré que dans le cas d'un langage relationnel fini, deux structures sont localement homomorphes (resp. localement équimorphes) si et seulement si elles satisfont les mêmes énoncés h-universels (resp. h-inductifs). Ensuite il a posé la question sur la possibilité de généraliser ces resultats au cas d'un langage infini.

Une autre question qui se pose est la suivante. Dans le cas d'une théorie h-inductive T telle que pour tout modèle A de T il existe B un pec de T tel que A et B sont localement homomorphes/isomorphes (resp. localement équimorphes), qu'est ce qu'on peut conclure sur la nature de de la théorie T ainsi que sur les natures des classes des pecs et des h-maximaux ? Est ce que T est modèle-complète ? Séparée ? Est ce que la classe des h-maximaux est élémentaire ?

La première remarque est que toute théorie modèle-complète vérifie cette propriété. En effet, comme tout modèle de T est un pec, alors tout modèle de T est localement homomorphe/isomorphe/équimorphes à lui même.

Bibliographie

[1] Itaï Ben Yaacov. *Positive model theory and compact abstract theories. Journal of Mathematical Logic*, vol. 3, No. 1 (2003), 85–118

[2] Itaï Ben Yaacov. *Simplicity in compact abstract theories. Journal of Mathematical Logic*, vol. 3, No 2 (2003), 163–191

[3] Itaï Ben Yaacov, Bruno Poizat. *Fondements de la logique positive. Journal of Symbolic Logic*, 72, 4, 1141–1162, 2007.

[4] Steven Buechler. *Essential stability theory . Springer*, 1996.

[5] Wilfrid Hodges. *Model theory. CUP*, 1993.

[6] Ehud Hrushovski Simplicity and the Lascar group. *prepublication.* 1997

[7] Byunghan Kim. *Forking in simple unstable theories . Journal of the London Mathematical Society.*,1989, no. 2, 257–267.

[8] Almaz Kungozhin Existentially closed and maximal models in positive logic. *prepublication.* 2011

[9] Anand Pillay. *An Introduction to Stability Theory. Oxford Science Publications*, 1983.

[10] Anand Pillay. *Geometric Stability Theory. Oxford Science Publications*, 1996.

[11] Anand Pillay Forking in the category of existentially closed structures *Quaderni di Matematica,6, Université de Naples.*

[12] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles. Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah*, 1985.

[13] Bruno Poizat. *Quelques effets pervers de la positivité. Preprint*, 2008.

[14] Bruno Poizat. *Univers Positifs. Journal of Symbolic Logic*, 71, 3, 969–976, 2006.

[15] Saharon Shelah. *The lazy model-theoretician's guide to stability. Logique et Analyse, vol. 71-72, 241-308*, 1975.

[16] Saharon Shelah. *Categoricity of abstract classes with amalgamation. Annals of Pure and Applied Logic, 98(1-3), pages 141âĂŞ187*, 1999.

[17] Saharon Shelah Classification Theory and the number of non-isomorphic models *North-Holland. Studies in logic and foundations of mathematic, volume 92*, 1990.

[18] Saharon Shelah Classification Theory for Elementary Abstract Classes *Mathematical Logic and Foundations.*, 2009.

[19] Saharon Shelah Simple unstable theories *Annals of mathematical logic. 19 (1980) 177-203.*

[20] Thomas Jech, Karel Hrbacek. *Introduction to set theory. CRC Press. Pure and applied mathematics*, 1999.

[21] Frank Olaf Wagner. *Simple theories. Mathematics and its applications, v. 503* , 2000.