



HAL
open science

Conditionnement de processus markoviens

Jean-Louis J. L. Marchand

► **To cite this version:**

Jean-Louis J. L. Marchand. Conditionnement de processus markoviens. Probabilités [math.PR].
Université Rennes 1, 2012. Français. NNT : 2012REN1S048 . tel-00733301

HAL Id: tel-00733301

<https://theses.hal.science/tel-00733301>

Submitted on 18 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Jean-Louis MARCHAND

préparée à l'IRMAR - UMR CNRS 6625

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
Université de Rennes 1

**Conditionnement de
processus markoviens**

**Thèse soutenue à Rennes
le 25 juin 2012**

devant le jury composé de :

Fabien CAMPILLO,
Directeur de recherche INRIA / rapporteur

Samuel HERRMANN
Professeur, Université de Bourgogne / rapporteur

Peter IMKELLER
Professeur, Humboldt Universität zu Berlin / président du jury

Ying HU
Professeur, Université Rennes 1 / examinateur

Bernard DELYON
Professeur, Université Rennes 1/ directeur de thèse

Remerciements

Un grand merci à mon directeur de thèse, Bernard Delyon, pour ces quatre années passées à travailler ensemble. Il est toujours resté disponible et patient, malgré les différentes charges administratives qu'il a pu endosser.

En second lieu, je tiens à remercier mes rapporteurs, Fabien Campillo et Samuel Herrmann, pour l'intérêt porté à mes travaux ainsi qu'aux nombreux conseils qu'ils ont pu me prodiguer. Je remercie également Peter Imkeller et Ying Hu qui ont pris part au jury.

Une pensée pour les équipes de Processus stochastiques et de Statistiques, à tous leurs membres, anciens et nouveaux, que j'ai côtoyés, en tant qu'élève ou collègue. Ils m'ont donné goût à la théorie des probabilités dès la Licence, ils sont toujours restés disponibles depuis, pour répondre à mes questions, pour me conseiller.

Je remercie aussi les membres d'autres équipes, voire d'autres laboratoires avec qui j'ai pu échanger. Plus particulièrement, les gens de l'IRISA avec qui j'ai travaillé, ainsi que tous les chercheurs et étudiants que j'ai côtoyés pendant ma période berlinoise.

Bien sûr, pas d'équipe sans staff, je remercie sincèrement toutes les secrétaires, tous les bibliothécaires qui nous simplifient grandement la vie.

Enfin, je remercie mes proches, familles et amis, pour leur soutien. Celui-ci m'a permis de progresser, de garder le moral. Une pensée toute particulière pour Sophie, qui partage ma vie depuis deux ans maintenant.

Table des matières

Introduction	i
1 Différentes représentations du pont brownien	3
1.1 L'approche élémentaire	3
1.2 Le grossissement de filtration	4
1.3 Le pont, processus markovien	7
1.4 Le pont, solution d'une EDS	9
1.5 Discussion	10
2 Conditionnement de diffusions	11
2.1 Processus linéaires gaussiens et parents proches	13
2.1.1 Un exemple, avec calcul de dérive	13
2.1.2 Résultats	16
2.2 Conditionnement par rapport à la valeur finale	18
2.2.1 Résultat exact	18
2.2.2 Résultat par absolue continuité	20
2.3 Conditionnement partiel	22
2.3.1 Résultat exact	22
2.3.2 Résultat par absolue continuité	25
2.3.3 Simulations	53
3 Application	59
3.1 Modèle Général	59
3.2 Un exemple	65
3.3 Schéma discret	68
3.4 Retour à l'exemple	71
3.5 Simulations	71
4 Conditionnement de processus ponctuels	77
4.1 Real point processes	77
4.1.1 General results	77
4.1.2 Case of the deterministic intensity	79
4.1.3 Girsanov's theorem	81

4.1.4	Case of a deterministic finite discrete associated measure	82
4.2	Jump Markov processes on a finite set of states	84
4.2.1	Result	84
4.2.2	Simulation	86
A	Annexe	91
A.1	Densités de transition d'un processus de Markov	91
A.2	Equivalence de lois et conditionnements	92
A.3	Formule d'Itô-Wentzell	93

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la loi conditionnelle de processus stochastiques en temps continu connaissant un certain type d'informations sur sa trajectoire.

Que ce soit en statistiques ou en théorie des probabilités, l'estimation de données manquantes revient de manière persistante. On retrouve ce problème par exemple dans l'imputation de données, on pense alors à l'estimation paramétrique à l'aide d'un algorithme EM (pour *Expectation-Maximization*, cf. [DLR77]) où l'on simule les données manquantes à chaque fois à l'aide du paramètre estimé à l'étape précédente. De même, la théorie du filtrage cherche à estimer la loi conditionnelle de ces données sachant les observations.

Pour un processus stochastique, le problème peut se traduire par la reconstruction d'une trajectoire disposant d'informations sur ses valeurs à certains temps déterministes. La donnée manquante est alors la trajectoire complète. Pour revenir au filtrage, celui-ci cherche à calculer de manière explicite (comme dans le cas du filtrage de Kalman) ou d'approcher (filtrage particulière) la distribution conditionnelle du processus par rapport aux observations obtenues. La plupart du temps, ces techniques réalisent une estimation point par point, ce qui ne donne pas une bonne estimation de la trajectoire, on parle alors d'inconsistance temporelle. Notre approche cherche à simuler directement les trajectoires conditionnelles. Hélas, cela se révèle généralement impossible, c'est pourquoi nous proposons une méthode relevant de l'échantillonnage préférentiel. Pour ce faire, nous allons mettre en place des résultats d'équivalence de lois.

Concentrons-nous sur les diffusions. Cette classe de processus stochastiques apparaît dans de nombreux champs d'application : en mécanique, en météorologie, en finances *etc.* Pour une diffusion x , définie comme la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS), nous considérons des observations du type $L_k x_{T_k} = v_k$ avec $k = 1, \dots, N$, où L_k est une matrice rectangulaire et T_k est un temps d'observation déterministe. Ceci traduit un manque d'information sur la variable x_{T_k} . On peut très bien imaginer la dynamique d'un mobile dont on observe seulement la position par exemple. On cherche donc à reconstruire le processus x à l'aide de ces observations. Plus exactement, nous cherchons à décrire la loi conditionnelle $\mathcal{L}(x | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N})$ à l'aide d'autres solutions d'EDS. Notre cahier des charges

- déterminer l'EDS vérifiée par la loi conditionnelle,
- une méthode pour simuler facilement la loi conditionnelle
- des applications pour utiliser cette méthode,
- l'extension des résultats à d'autres types de processus,

Conditionnement de diffusions

Les principaux résultats présentés dans ce manuscrit portent sur cette classe de processus stochastiques. Une diffusion est un processus markovien à trajectoires continues, il est défini par une EDS. Considérons donc le processus n -dimensionnel x , solution forte sur $[0, T]$ de l'EDS suivante

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u, \quad (1)$$

où b , σ et u sont déterministes et w est un mouvement brownien de dimension n . Le caractère markovien apparaît naturellement vu que les coefficients ne dépendent que de la position courante. Notre objectif est d'obtenir la loi conditionnelle de x connaissant des valeurs prises par des combinaisons linéaires de coordonnées à certains instants. La Proposition 2.0.1 p.11 nous assure le fait que le processus conditionné est encore markovien. On cherche à montrer que celui-ci est de plus une diffusion, et bien sûr à décrire les paramètres de l'EDS associée.

Afin de familiariser le lecteur aux différents outils intervenant, un premier chapitre est consacré au pont brownien, qui est le processus suivant la loi d'un mouvement brownien conditionné par sa valeur au temps 1. Ce chapitre introductif expose les différentes caractérisations du pont brownien en fonction de celles du mouvement brownien. Ces axes d'étude sont ceux utilisés dans le cadre général des processus markoviens, même si leur traitement est plus simple dans le cas du mouvement brownien.

Pour rechercher la loi conditionnelle, il paraît alors naturel de s'intéresser au problème de martingale associé en ajoutant à la tribu initiale \mathcal{F}_0^w , toute l'information $\sigma((L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N})$ générée par les variables observables, (\mathcal{F}_t^w) étant la filtration naturelle du mouvement brownien w . Ceci fait appel à une théorie plus générale, celle du grossissement de filtration. Nous verrons que dans certaines situations, nous serons en mesure de donner l'EDS vérifiée par le processus conditionnel. Cependant, dans la majorité des cas, ce résultat reste principalement théorique, au sens où dans la dérive de l'EDS conditionnelle apparaissent des densités de transition, le plus souvent inconnues, du processus initial x . Il est donc, en pratique, quasiment impossible de simuler des trajectoires directement. Pour pallier ce défaut, une alternative consiste à introduire un processus auxiliaire, solution d'une EDS facile à simuler (par un schéma d'Euler) dont la loi est équivalente à celle désirée.

Grossissement de filtration

Avant de développer la théorie générale, on peut s'intéresser à un papier de T.J.Lyons & W.A.Zheng [LZ90], dans lequel ils établissent, dans le cas homogène, un résultat de conditionnement du processus x par rapport à sa valeur terminale en $T = 1$. Ils introduisent le processus y , solution sur $[0, 1]$ de l'équation suivante

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dw_t + \sigma(y_t)\sigma(y_t)^* \nabla_x \log p_{1-t}(x, v)|_{x=y_t} dt, \quad y_0 = u, \quad (2)$$

où $p_s(x, y)$ est la densité de transition du processus x , c'est à dire la densité de la loi de x_s sachant $x_0 = x$. Sous des conditions articulées autour de l'uniforme ellipticité de $\sigma\sigma^*$,

c'est à dire que cette fonction satisfait uniformément $\lambda^{-1}I_n < \sigma\sigma^* < \lambda I_n$ ($\lambda > 0$) au sens des matrices symétriques, le processus y suit la distribution conditionnelle de x sachant $x_1 = v$. Pour le démontrer, ils réécrivent le problème de martingale, mais en travaillant directement sur les densités de transition, sans grossir la filtration par l'information générée par x_1 . Cependant, dans des cas plus généraux, cette approche peut ne pas aboutir, car elle nécessite une intuition du terme additionnel dans la dérive.

La théorie de grossissement de filtration caractérise le candidat de manière claire. Les deux livres [Jeu80] et [JY85] en présentent les résultats fondamentaux. Le but originel de cette théorie est de trouver des conditions suffisantes pour lesquelles les semi-martingales d'une filtration donnée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sont encore des semi-martingales pour une filtration plus grande $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ au sens où $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, pour tout t positif. Comme évoqué précédemment, nous allons grossir la filtration naturelle du mouvement brownien (\mathcal{F}_t^w) avec la tribu générée par les observations $Y_1 = (L_1 x_{T_1}, \dots, L_N x_{T_N})$

$$\mathcal{G}_t = \cap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(Y_1)). \quad (3)$$

Ceci est appelé grossissement initial, car il s'intéresse uniquement à la filtration (\mathcal{G}_t) défini comme la plus petite filtration continue à droite contenant (\mathcal{F}_t) et l'information $\sigma(Y_1)$ en tout temps. Il a été étudié par, entre autres, J.Jacod [Jac85], M.Yor [JY85] et T.Jeulin [Jeu80] ou plus tard par H.Föllmer & P.Imkeller [FI93] pour ne citer qu'eux. Sous certaines hypothèses concernant la distribution conditionnelle $\mathcal{L}(Y_1 | \mathcal{F}_t)$, des résultats donnent la décomposition canonique d'une (\mathcal{F}_t) -semi-martingale continue en tant que (\mathcal{G}_t) -semi-martingale. Ceci permet de déduire une extension du résultat de Lyons & Zheng pour le même type de conditionnement ($x_T = v$) mais pour des coefficients inhomogènes. Le processus conditionnel est alors donné par

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \sigma_t(y_t)\sigma_t(y_t)^* \nabla_x \log p_{t,T}(x, v)|_{x=y_t} dt, \quad y_0 = u, \quad (4)$$

où $p_{s,t}(x, y)$ est la densité de x_t sachant que $x_s = x$.

Dans le cadre du Théorème 2.3.4 p.24, le conditionnement est plus lâche. On doit alors faire des hypothèses sur chacune des distributions $\mathcal{L}(Y_k | \mathcal{F}_t)$, où $Y_k = (L_k x_{T_k}, \dots, L_N x_{T_N})$ et $t \in]T_{k-1}, T_k[$. Ceci vient du fait, que localement, on ne tient compte que des conditionnements futurs. L'étude sur $[0, T]$ est ramené à une étude sur chaque intervalle $[T_{k-1}, T_k[$ (par convention $T_0 = 0$). On obtient alors la décomposition canonique du processus x en tant que (\mathcal{G}_t) -semi-martingale exprimée à l'aide d'un (\mathcal{G}_t) -mouvement brownien β sur $[0, T]$ indépendant de $Y_1 \in \mathcal{G}_0$ donné par le Lemme 2.3.3

$$\beta_t = w_t - \sum_{k=1}^N \int_{T_{k-1} \wedge t}^{T_k \wedge t} \sigma(x_s)^* \nabla_x \log q_s^{(k)}(x, Y_k)|_{x=x_s} ds, \quad (5)$$

où $q_s^{(k)}(x, y_k)$ est la densité de Y_k sachant $x_s = x$.

Remarquons tout de même, que si les coefficients b et σ sont $C_b^{1,2}$ et que, de plus, la fonction $\sigma\sigma^*$ est uniformément elliptique, les estimées d'Aronson (*cf.* Annexe) permettent de vérifier les conditions requises. Ces estimées donnent un encadrement des densités de transition par des noyaux gaussiens. Le processus conditionné y vérifie alors

$$\begin{aligned} dy_t &= b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \sigma_t(y_t)\sigma_t(y_t)^* \sum_{k=1}^N \nabla_x \log q_t^{(k)}(x, v_k) \Big|_{x=y_t} \mathbf{1}_{[T_{k-1}, T_k)}(t)dt, \\ y_0 &= x_0. \end{aligned}$$

(6)

Approche par absolue continuité

Bien que disposant de l'équation exacte vérifiée par le processus conditionnel, le terme additionnel - fonction des dérivées du logarithme des densités de transition - n'est que très rarement explicite. Une simulation directe de cette équation se révèle presque irréalisable. Nous n'avons pas cherché à développer des méthodes ou algorithmes dans ce sens. Une autre approche introduite par B.Delyon et Y.Hu [DH06] consiste à contourner le problème en définissant un processus auxiliaire dont la loi se trouve être équivalente à la loi ciblée.

Ce processus auxiliaire y est donné comme la solution d'une EDS où le terme de dérive qui nous dérangeait jusqu'alors est remplacé par la dérive du pont brownien

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \frac{v - y_t}{T - t}dt, \quad y_0 = u. \quad (7)$$

Ce terme suffit à contraindre les trajectoires à converger presque sûrement vers l'observation. Les auteurs choisissent alors un cadre d'hypothèses, leur garantissant, entre autres, les estimées d'Aronson, ils montrent ainsi, que pour toute fonction mesurable positive f

$$\mathbb{E}[f(x)|x_T = v] = \mathbb{E}[f(y)D(y)], \quad (8)$$

où la densité D est connue. Le fait qu'il ne travaille qu'avec un seul conditionnement se justifie par la propriété de Markov. Par contre, pour un conditionnement partiel, au sens où l'on observe seulement des combinaisons linéaires de coordonnées $Y_1 = (v_1, \dots, v_N)$, on se retrouve *a priori* obligé de considérer tous les conditionnements simultanément.

Cependant, le Théorème 2.3.9 p.31 va quelque peu remettre en question cette intuition. Cette étude fait l'objet d'un article en cours de soumission [Mar11]. Finalement ce qui importe est l'action des termes correcteurs dans un voisinage à gauche des temps d'observation, ce qui va nous permettre de les traiter presque séparément. C'est ce qui motive, par ailleurs, le choix du processus auxiliaire y

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \sum_{k=1}^N \sigma_t(y_t)\beta_t^k(y_t) \frac{v_k - y_t}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}dt, \quad y_0 = u, \quad (9)$$

avec pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et $[0, T]$

$$\beta_t^k(z) = \sigma_t(z)^* L_k^* (L_k \sigma_t(z) \sigma_t(z) L_k^*)^{-1} \quad (10)$$

et où les $\delta_k > 0$ sont choisis de telle sorte que deux corrections ne se chevauchent pas. On montre par ailleurs que le processus vérifie les bonnes convergences presque sûres vers les observations. Sous des hypothèses proches de celles faites pour le Théorème 2.3.4 sur les lois conditionnelles $\mathcal{L}(Y_k | \mathcal{F}_t)$, on a pour toute fonction continue bornée

$$\mathbb{E}[f(x) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] = \mathbb{E}[f(y) D(y)], \quad (11)$$

où la densité D est connue, et s'apparente à une densité de Girsanov

$$\begin{aligned} D(y) = & C \prod_{k=1}^N \eta_k(y_{T_k}) \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_k - \delta_k}^k(y_{T_k - \delta_k})(L_k y_{T_k - \delta_k} - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right. \\ & + \int_{T_k - \delta_k}^{T_k} - \frac{(L_k y_s - v_k)^* A_s^k(y_s) L_k b_s(y_s) ds}{T_k - s} - \frac{(L_k y_s - v_k)^* d(A_s^k(y_s))(L_k y_s - v_k)}{2(T_k - s)} \\ & \left. + \int_{T_k - \delta_k}^{T_k} - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d \langle A^k(y)_{i,j}, (L_k y - v_k)_i (L_k y - v_k)_j \rangle_s}{2(T_k - s)} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

où $0 < C < +\infty$ est la constante de normalisation et avec pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et $[0, T]$

$$A_t^k(z) = (L_k \sigma_t(z) \sigma_t(z)^* L_k^*)^{-1} \quad \text{et} \quad \eta_k(z) = \sqrt{\det(A_{T_k}^k(z))}. \quad (13)$$

Pour exploiter un tel résultat, il suffit d'appliquer une méthode de Monte-Carlo en simulant des échantillons y^i , $i = 1, \dots, M$ et la loi des grands nombres nous donne une estimation du terme de droite dans l'équation ci-dessus, ainsi

$$\mathbb{E}[f(x) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] \approx \frac{\sum_{i=1}^M f(y^i) D(y^i)}{\sum_{i=1}^M D(y^i)}. \quad (14)$$

La démonstration du théorème est construite autour d'une transformation de Girsanov. Afin d'être en mesure de l'utiliser, on s'affranchit des singularités en stoppant la correction à une distance ε des temps d'observation. Ceci définit une EDS dépendant de ε , dont la solution est une approximation y^ε du candidat y . Ainsi pour toute fonction continue bornée f

$$\mathbb{E}[f(x) G_\varepsilon(x)] = \mathbb{E}[f(y^\varepsilon) H_\varepsilon(y^\varepsilon)]$$

où $G_\varepsilon/H_\varepsilon$ est la densité de Girsanov. Le découpage permet d'isoler le facteur G_ε qui est une approximation de l'unité et va alors garantir la convergence du membre de gauche vers l'espérance conditionnelle. Le traitement du membre de droite est autrement plus complexe; la partie la plus délicate résidant dans la démonstration de l'uniforme intégrabilité des $H_\varepsilon(y^\varepsilon)$.

Application du résultat par absolue continuité

Afin d'illustrer ce résultat, Étienne Mémin et Anne Cuzol, deux chercheurs de l'INRIA ont proposé d'appliquer cette méthode à un modèle d'écoulement fluide. On cherche ainsi à reconstruire le champ des vitesses en exploitant des images satellites d'une zone géographique donnée. Pour résoudre ce problème, les gens utilisent, en général, le filtrage particulaire, ou toute autre méthode s'en inspirant.

La théorie du filtrage particulaire est une méthode dynamique basée sur le choix d'une loi *a priori* pour le champ de vecteurs, celle-ci sera corrigée récursivement en fonction des nouvelles données observées. La distribution conditionnelle est alors estimée à l'aide d'une moyenne pondérée des positions de particules. Celles-ci sont propagées à chaque étape à l'aide de la loi *a priori* et de l'état estimé à l'étape précédente. Les poids sont calculés à chaque étape, la logique étant qu'un fort poids implique une forte vraisemblance et inversement. Il existe différentes variantes (on pourra consulter [PMCG10] pour une introduction aux méthodes les plus classiques) afin d'améliorer cette estimation, mais hélas, le nombre de particules nécessaires reste toujours un problème, surtout, comme ici, en grande dimension. Pour se donner une idée de la dimension qui nous intéresse ici, pour chaque pixel de la caméra, le vecteur vitesse est estimé en fonction de la luminance en ce pixel, ce qui nous donne 4 variables par pixel, si maintenant on considère une résolution raisonnable de 128×128 , quel nombre de particules doit-on utiliser pour espérer reconstruire la distribution conditionnelle définie sur un espace de dimension 65536 ? On peut mentionner un article, [SBBA08], dans lequel les auteurs mettent en évidence par simulation, pourtant dans un cas gaussien simple, que le nombre de particules nécessaires évolue de manière exponentielle en fonction de la dimension. Le phénomène sous-jacent s'observe en pratique : seules quelques particules prennent tout le poids.

Le Théorème 2.3.9 permet la simulation directe de trajectoires conditionnelles et les poids des particules sont alors calculées à l'aide de la densité. On devrait ainsi éviter ce problème de particules ineptes. Mais pour pouvoir utiliser ce résultat, il faut au préalable, mettre en place un modèle qui rentre dans les hypothèses. Celui-ci a été construit comme une version bruitée de la formulation lagrangienne des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles dans le cas d'un fluide incompressible

$$\begin{aligned}
 dX_t^z &= V_t(X_t^z)dt + \Sigma_t(X_t^z)d\mathbf{W}_t, \\
 dV_t(X_t^z) &= -\frac{1}{\rho}\nabla P_t(X_t^z)dt + \nu\Delta V_t(X_t^z)dt, \\
 dI_t(X_t^z) &= 0, \\
 \operatorname{div}(V_t(x)) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

La différence flagrante avec le modèle déterministe réside dans le terme de perturba-

tion dans la dynamique des particules. Ceci implique, entre autres choses, qu'à x fixé les processus $V_t(x)$ et $I_t(x)$ sont des semi-martingales. Ainsi $V_t(X_t^z)$ n'est plus la vitesse de la particule partie de z , ce n'est même pas la vitesse moyenne. Le choix de la perturbation peut se justifier par des erreurs de discrétisation du problème, des erreurs de mesures. Ce qu'il faut remarquer également, c'est que ce modèle ne répond pas *a priori* aux lois de la physique, c'est principalement une méthode d'estimation.

On montre alors que l'on peut déterminer un système équivalent pour le rotationnel de V . Ce système sera plus simple, plus manipulable notamment car le terme de pression ∇P disparaît. On effectue ensuite une discrétisation des opérateurs différentiels à l'aide de la grille de pixels pour retomber sur une EDS. Des simulations ont, par ailleurs, été réalisées.

Conditionnement de processus ponctuels markoviens

Dans un article [JY79] où ils mettent également en place le pont brownien à l'aide d'un grossissement de filtration, T.Jeulin et M.Yor obtiennent l'expression du pont poissonnien par la même méthode. On sait qu'un processus réel est entièrement caractérisé par sa mesure associée (cf. [BJ77]). Dans le cas où elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on parle alors d'intensité stochastique. Le résultat de Jeulin & Yor s'étend directement au cas d'une intensité déterministe. On démontre (Corollaire 4.1.12 p.81) que le processus conditionnel N^v qui suit la loi $\mathcal{L}(N|N_T = v)$ admet sur $[0, T]$ l'intensité stochastique

$$\lambda_t^v = \frac{\lambda_t}{\int_t^T \lambda_s ds} (v - N_{t-}^v) \quad (16)$$

Ainsi grâce à un théorème de changement de mesure à la Girsanov, on peut montrer un résultat (Corollaire 4.1.14 p.82) d'absolue continuité lorsque l'intensité est stochastique. Prenons deux processus ponctuels réels N et N' , d'intensités respectives λ et λ' , où λ est déterministe. Sous certaines conditions supplémentaires entre les deux intensités, on a alors

$$\mathbb{E}[f(N')|N'_T = v] = \mathbb{E}[f(N^v)D(N^v)], \quad (17)$$

où le processus ponctuel N^v est le processus ponctuel donné précédemment.

Pour les processus de Markov à saut, on se restreint aux espaces d'états finis. Dans l'optique d'une simulation directe du processus conditionnel, on recherche la loi des intersauts. Il suffit de déterminer le semi-groupe associé. Pour cela, on calcule les lois de transition du processus conditionnel en fonction des densités de transition du processus originel. Quelque part, on adopte l'approche de Lyons & Zheng dans leur article mentionné plus haut [LZ90]. Ainsi, si X est un processus de Markov à sauts de générateur (L_t) . Le processus conditionnel \tilde{X} suivant la loi $\mathcal{L}(X|X_T = v)$ admet sur l'ensemble $F(S)$ des fonctions sur l'espace

d'états S le générateur suivant

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{L}_t : F(S) &\rightarrow F(S) \\ f &\mapsto \frac{L_t(f p_{t,T}(\cdot, v)) - f L_t p_{t,T}(\cdot, v)}{p_{t,T}(\cdot, v)}, \end{aligned}} \quad (18)$$

où pour tout x, y dans l'espace d'états S et tout $0 \leq s \leq t$

$$p_{s,t}(x, y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x). \quad (19)$$

Perspectives

Diffusions

Dans le cadre des diffusions, deux approches du conditionnement partiel sont abordées. Un premier axe d'étude consiste à obtenir l'EDS vérifiée par la loi conditionnelle, et un second à mettre en place une méthode de simulation conditionnelle. Dans le premier cas on suppose vérifiée l'Hypothèse 2.3.1, et dans le second l'Hypothèse 2.3.5. Ces deux cadres sont très proches, ils portent sur les propriétés des lois du type

$$\mathcal{L}(L_k x_{T_k}, \dots, L_N x_{T_N} | \mathcal{F}_t),$$

pour $t \in (T_{k-1}, T_k)$. On souligne, par ailleurs, l'éventualité que l'Hypothèse 2.3.5 pourrait être réduite. En effet, il semble plausible que certaines assertions pourraient être directement déduites de l'hypothèse d'uniforme ellipticité des fonctions $L_k \sigma \sigma^* L_k^*$

$$\lambda^{-1} I_{m_k} < L_k \sigma \sigma^* L_k^* < \lambda I_{m_k}. \quad (20)$$

En plus de simplifier ce dernier cadre, l'uniforme ellipticité de ces blocs pourraient également permettre de vérifier l'Hypothèse 2.3.1. A la lumière de l'article [DM10] de F.Delarue et S.Menozzi, il est envisageable, au moins dans certains cas, de mettre en place des estimées type Aronson sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité de certains blocs. De telles estimées nous suffiraient pour conclure.

Bien sûr, il serait également naturel de considérer d'autres types de conditionnement. Par exemple, si on observe des variables du type $f_k(x_{T_k})$, le Théorème 2.3.4 reste vrai, à quelques hypothèses supplémentaires près sur les fonctions f_k . Il serait alors intéressant de mettre en place la simulation conditionnelle correspondante.

Application

Une application avec des données réelles est bien sûr l'objectif à terme de ce travail. Avant cela, il faut valider l'approche, évaluer les performances de l'algorithme sur des

modèles jouets pour le comparer aux méthodes existantes. Il y a certainement quelques améliorations à apporter à l'algorithme, notamment en ce qui concerne le calcul des matrices inverses.

Pour améliorer les simulations, on peut jouer par exemple sur le choix de la dérive. En effet, le Théorème 2.3.13 nous laisse une certaine liberté dans le choix de la dérive du pont, qui ne doit plus être nécessairement celle du processus initial que l'on cherche à reconstruire. On pourrait imaginer une dérive additionnelle qui guiderait encore plus les trajectoires pour ainsi récupérer des meilleures réalisations de meilleurs poids.

On peut envisager également une méthode hybride avec du filtrage type Kalman d'ensemble. En effet, la simulation conditionnelle permettrait une meilleure estimation dans l'étape de prédiction.

Processus ponctuels et autres

Seulement des conditionnements totaux ont été considérés dans les études de processus ponctuels réels et processus de Markov à sauts. L'extension naturelle consiste à regarder ce que l'on est en mesure de mettre en place pour les processus ponctuels marqués en général. On pourrait alors s'intéresser à des conditionnements partiels. Une fois ce type de conditionnement mis en place, on pourrait facilement imaginer étendre le résultat à des processus de Lévy ou encore à des diffusions dont les coefficients sont pilotés par une chaîne de Markov sur un espace d'états fini. Ceci consisterait alors en un jeu entre les classes de processus déjà étudiées.

Plan de la thèse

Comme indiqué précédemment, ce manuscrit ouvre sur un premier chapitre portant sur le pont brownien. Le pont brownien est le processus dont la loi est celle d'un mouvement brownien conditionné par sa valeur en un temps T ici choisi égal à 1. Cette partie présente, à travers les différentes caractérisations du mouvement brownien, les représentations correspondantes que l'on a du pont brownien. Ces différents axes d'étude restent valables dans des cadres plus généraux de processus markoviens. D'où la volonté de présenter ces résultats dans le cas simple du mouvement brownien, afin d'introduire les outils qui nous serviront par la suite.

Le deuxième chapitre porte sur les diffusions. Il contient les deux principaux résultats obtenus au cours de cette thèse. Ceux-ci ont été présentés précédemment et répondent à deux questions, le premier (Théorème 2.3.4 p.24), théorique, donne l'EDS associée au processus conditionnel, le second (Théorème 2.3.9 p.31), pratique, fournit une méthode de simulation conditionnelle *via* un résultat d'équivalence de lois. Afin d'illustrer ce dernier, des simulations ont été réalisées sur un exemple simple en deux dimensions.

Ce troisième chapitre consiste également à utiliser le résultat de simulation conditionnelle mais sur un modèle plus concret : la reconstruction d'écoulements fluides, utile à l'étude de mouvements océaniques, en météorologie, *etc.* Ceci a nécessité la construction

d'un nouveau modèle stochastique pour se placer sous les hypothèses du Théorème 2.3.9. Ce travail a été réalisé conjointement avec Étienne Mémin et Anne Cuzol, chercheurs à l'INRIA.

Le quatrième et dernier chapitre présente d'autres résultats du même type pour des classes de processus ponctuels markoviens. Le conditionnement considéré consiste en la valeur prise par le processus en un temps final.

Enfin, une annexe donne des résultats généraux utilisés çà et là. Notamment, on rappelle certaines propriétés des densités de transition des diffusions, essentielles pour justifier nos différents cadres d'hypothèses.

Certaines parties sont rédigées en anglais, car elles ont été originellement écrites comme telles. Toute la section portant sur le Théorème 2.3.9 ayant fait l'objet d'une soumission, on retrouve à quelques arrangements près, le corps de l'article soumis. Tout le dernier chapitre portant sur les processus ponctuels est également rédigé en anglais.

Notations générales

- L'espace des matrices de dimension $n \times d$ à coefficients dans \mathbb{R} sera noté $\mathbb{R}^{n \times d}$,
- La matrice identité de dimension n sera notée I_n ,
- Pour toute matrice M , sa transposée sera notée M^* ,
- Par $\mathcal{L}(X)$ on désignera la loi de X ,
- La tribu engendrée par une variable aléatoire X sera notée $\sigma(X)$,
- Par $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ on désignera la filtration de référence. Pour la filtration naturelle d'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, on notera $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$

Chapitre 1

Différentes représentations du pont brownien

Nous allons présenter ici, les différentes approches que l'on peut avoir pour traiter le problème du conditionnement du mouvement brownien par ses valeurs aux bords. Ce chapitre consiste, sur un exemple simple, à présenter les techniques qui seront utilisées par la suite. Le choix se justifie également par le fait qu'historiquement, les travaux sur le pont brownien ont fourni la base des travaux sur le conditionnement pour des processus plus généraux. Nous essaierons de discuter les avantages et inconvénients des approches considérées. Les preuves seront données, pour initier aux arguments qui nous serviront plus tard.

Rappelons le principe du pont brownien : on recherche la loi du mouvement brownien conditionné par le fait qu'au temps 1, il doit être nul. On désire décrire la loi conditionnelle $\mathcal{L}(w|w_1 = 0)$ où w est un mouvement brownien réel ($w_0 = 0$).

1.1 L'approche élémentaire

Le mouvement brownien est un processus gaussien. On rappelle alors un résultat de conditionnement de variables gaussiennes

Proposition 1.1.1. *Soient X et Y deux variables gaussiennes, respectivement dans \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n , telles que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien respectivement d'espérance et de matrice de covariance*

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q_X & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_Y \end{pmatrix}.$$

Si Q_Y , la matrice de covariance de Y , est inversible, la loi conditionnelle de X par rapport à $Y = y$ est donnée par la loi du vecteur gaussien

$$Z = X - Q_{XY}Q_Y^{-1}(Y - y). \tag{1.1}$$

La variable Z admet respectivement pour espérance et matrice de covariance

$$M = \bar{X} - Q_{XY}Q_Y^{-1}(\bar{Y} - y) \text{ et } Q_Z = Q_X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Q_{YX}.$$

Remarque 1.1.2. *Ce résultat, classique, très utilisé en statistiques par exemple, apparaîtra ultérieurement, dans d'autres sections qui traiteront des processus gaussiens.*

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$X = (X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Y) + Q_{XY}Q_Y^{-1}Y. \quad (1.2)$$

Le premier terme est indépendant de Y

$$\mathbb{E}[(X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Y)^*Y] = Q_{XY} - Q_{XY}Q_Y^{-1}Q_Y = 0. \quad (1.3)$$

□

Retournons au mouvement brownien, pour tout temps $t \in [0, 1]$, on peut ainsi obtenir $\mathcal{L}(w_t|w_1 = 0)$. Cette loi est donnée par celle de la variable

$$y_t = w_t - tw_1. \quad (1.4)$$

L'énorme inconvénient de ce résultat tient dans le fait que le processus y n'est pas adapté. En effet, le processus dépend pour tout temps $t \in [0, 1]$, de la valeur de w_1 . On pourrait grossir la filtration, en incluant en tout temps, l'information générée par w_1 . Mais alors, on se heurte à un second problème : le processus w n'est plus un mouvement brownien pour cette filtration grossie.

Remarque 1.1.3. *En utilisant la covariance du mouvement brownien, on peut montrer que le processus y peut s'écrire sur $[0, 1]$ à l'aide d'un mouvement brownien changé de temps*

$$y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-t)w_{\frac{t}{1-t}}. \quad (1.5)$$

En effet, si $0 \leq s < t < 1$,

$$\mathbb{E}[(1-t)w_{\frac{t}{1-t}}] = \mathbb{E}[y_t] = 0,$$

$$\mathbb{E}[(1-s)w_{\frac{s}{1-s}}(1-t)w_{\frac{t}{1-t}}] = (1-t)s = \mathbb{E}[y_s y_t].$$

1.2 Le grossissement de filtration

Nous allons montrer ici comment la théorie des grossissements de filtration s'applique dans le cas du pont brownien. Considérons un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, où la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = (\mathcal{F}_t^w)_{t \geq 0}$ est celle naturelle d'un mouvement brownien w considéré. On introduit la filtration grossie continue à droite $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ définie pour tout t par

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(w_1)).$$

Le but est de mettre en évidence un mouvement brownien pour la filtration grossie qui nous permette d'exprimer le pont sans calcul anticipatif, *i.e.* sans faire apparaître la variable w_1 . En effet, on a apporté dans la section précédente une représentation possible du pont brownien

$$y_t = w_t - tw_1, \quad (1.6)$$

mais on ne reconnaît pas directement une (\mathcal{G}_t) -semi-martingale. Cette nouvelle approche nous fournira donc une autre représentation du pont avec une structure claire.

On notera les travaux sur les grossissements de manière plus générale de Thierry Jeulin, Marc Yor *et alii* (*cf.* [JY85], [Jeu80]), ainsi que de Hans Föllmer et Peter Imkeller (*cf.* [FI93]) pour ne citer qu'eux. Pour ce qui est du point qui nous intéresse ici, on se penchera principalement sur l'article [JY79] de Thierry Jeulin et Marc Yor.

Le théorème qu'ils démontrent est le suivant

Théorème 1.2.1. *Le processus $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ défini par*

$$\beta_t = w_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{w_1 - w_s}{1-s} ds, \quad (1.7)$$

est un (\mathcal{G}_t) -mouvement brownien standard. En conséquence, le processus (w_t) est une (\mathcal{G}_t) -semi-martingale. De plus, le processus (β_t) est indépendant de $\sigma(w_1) \subset \mathcal{G}_0$.

Corollaire 1.2.2. *Le processus $(y_t)_{0 \leq t < 1}$ défini par l'équation (1.4) est lié au (\mathcal{G}_t) -mouvement brownien standard $\beta = (\beta_t)_{0 \leq t < 1}$ par la formule*

$$y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{1-s}. \quad (1.8)$$

En conséquence, les deux processus (y_t) et (β_t) ont même filtration naturelle.

Remarque 1.2.3.

1. *Ces résultats peuvent être démontrés directement en terme de processus gaussiens. Il suffit de calculer les moyennes et covariances. Mais la démonstration suivante a le mérite d'être constructive. Ce qui est important si on veut utiliser ce type d'approche pour des processus non gaussiens.*
2. *On se retrouve alors avec une formule de changement de temps pour le brownien, en effet à l'aide des équations (1.5) et (1.8), on obtient l'égalité en loi*

$$w_{\frac{t}{1-t}} = \int_0^t d\left(w_{\frac{s}{1-s}}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^t \frac{dw_s}{1-s}.$$

Démonstration du théorème. L'intégrale de Riemann $\int_0^{t \wedge 1} \frac{w_1 - w_s}{1-s} ds$ est absolument convergente, car

$$\mathbb{E} \int_0^1 \frac{|w_1 - w_s|}{1-s} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}}.$$

Montrons que $\beta_t = w_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{w_1 - w_s}{1-s} ds$ est une (\mathcal{G}_t) -martingale.

On se restreint sans perte de généralité à l'intervalle de temps $[0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on introduit une filtration auxiliaire (\mathcal{G}'_t) définie par

$$\mathcal{G}'_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(w_1) = \mathcal{F}_t \vee \sigma(w_1 - w_t).$$

Pour tout $0 \leq s < t \leq 1$, la tribu \mathcal{F}_s étant indépendante du processus $(w_{s+h} - w_s)_{h \geq 0}$, on a

$$\mathbb{E}[w_t - w_s | \mathcal{G}'_s] = \mathbb{E}[w_t - w_s | w_1 - w_s] = \frac{t-s}{1-s}(w_1 - w_s),$$

la dernière égalité étant obtenue par la Propriété (1.1.1) sur le conditionnement de vecteurs gaussiens. Sachant que $\mathcal{G}_s = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{G}'_{s+\varepsilon}$, soit donc g_s une variable \mathcal{G}_s mesurable, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[(w_t - w_{s+\varepsilon})g_s] = \frac{t-s-\varepsilon}{1-s-\varepsilon} \mathbb{E}[(w_1 - w_{s+\varepsilon})g_s],$$

un passage à la limite dans \mathbb{L}^1 entraîne

$$\mathbb{E}[w_t - w_s | \mathcal{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}(w_1 - w_s).$$

Ceci implique que le processus (β_t) est une (\mathcal{G}_t) -martingale. En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\beta_t - \beta_s | \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[w_t - w_s | \mathcal{G}_s] - \int_s^t \frac{\mathbb{E}[w_1 - w_u | \mathcal{G}_s]}{1-u} du \\ &= \frac{t-s}{1-s}(w_1 - w_s) - \int_s^t \frac{\mathbb{E}[w_1 - w_u | \mathcal{G}_s]}{1-u} du. \end{aligned}$$

Pour traiter l'intégrale, on montre que l'intégrande est indépendant de u

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[w_1 - w_u | \mathcal{G}_s]}{1-u} &= \frac{\mathbb{E}[w_1 - w_s | \mathcal{G}_s]}{1-u} + \frac{\mathbb{E}[w_s - w_u | \mathcal{G}_s]}{1-u} \\ &= \frac{w_1 - w_s}{1-u} - \frac{(u-s)(w_1 - w_s)}{(1-u)(1-s)} = \frac{w_1 - w_s}{1-s}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}[\beta_t - \beta_s | \mathcal{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}(w_1 - w_s) - \int_s^t \frac{w_1 - w_s}{1-s} du = 0.$$

De l'approximation des variations quadratiques par des sommes de carrés d'accroissements, on obtient

$$\langle \beta \rangle_t^{\mathcal{G}} = \langle w \rangle_t^{\mathcal{F}} = t,$$

l'exposant est là pour rappeler la filtration à partir de laquelle le calcul est effectué. On utilise alors le théorème de Lévy pour conclure que la martingale (β_t) est un (\mathcal{G}_t) -mouvement brownien. \square

L'avantage de cette approche réside dans la construction d'un mouvement brownien β pour la filtration grossie qui est alors indépendant de w_1 . L'expression de β nous fournit ainsi une représentation du pont brownien adaptée par rapport à la filtration grossie. Nous verrons que cette approche est encore possible dans le cadre du conditionnement de solution d'une équation différentielle stochastique (EDS). Dans ce cas-là, le brownien mis en évidence, permettra d'écrire l'EDS vérifiée par le processus conditionné.

1.3 Le pont, processus markovien

Le mouvement brownien est un processus de Markov, ainsi le pont l'est également. On peut donc étudier le conditionnement à travers les densités de transition. En effet, si $(p_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ et $(\tilde{p}_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ sont respectivement les familles de densités de transition du mouvement et du pont browniens, alors pour tout $0 \leq s < t \leq 1$, et tout couple (x, y) de réels

$$\tilde{p}_{s,t}(x, y) = \frac{p_{s,t}(x, y)p_{t,1}(y, 0)}{p_{s,1}(x, 0)}.$$

Après le temps 1, le pont devient un mouvement brownien initialisé à 0 en 1. Or les densités de transition du mouvement brownien sont gaussiennes

$$p_{s,t}(x, y) = \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}.$$

Ainsi, pour tout $0 \leq s < t < 1$, et tout couple (x, y) de réels, les densités de transition du pont brownien sont données par

$$\tilde{p}_{s,t}(x, y) = \sqrt{\frac{1-s}{2\pi(1-t)(t-s)}} \exp\left\{\frac{x^2}{2(1-s)} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)} - \frac{y^2}{2(1-t)}\right\} \quad (1.9)$$

Remarque 1.3.1. *Au passage, il est bon de remarquer que le pont n'est pas un processus homogène, et donc ses densités de transition ne peuvent s'écrire comme celles du mouvement brownien $p_{s,t} = p_{t-s}$. Ainsi le générateur infinitésimal du pont dépendra du temps.*

Intéressons-nous alors au générateur du pont brownien. On rappelle que celui du mouvement brownien est donné pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par le couple (L, D_I) défini par

$$D_I = \{f \in C_b^o(I, \mathbb{R}) : f'' \in C_b^o(I, \mathbb{R})\},$$

$$\forall f \in D_I, \quad Lf = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f.$$

ceci se montre, par exemple, en utilisant les équations de Kolmogorov, liant le semi-groupe associé au mouvement brownien et le générateur. Pour le semi-groupe $(P_{s,t})_{s,t}$, lorsque les dérivées partielles existent, le générateur $(L_t)_t$ est donné par

$$\begin{aligned} \partial_t P_{s,t} &= P_{s,t} L_t, \\ \partial_s P_{s,t} &= -L_s P_{s,t}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Notons $(P_t)_t$ le semi-groupe d'un mouvement brownien w , et $(\tilde{P}_{s,t})_{s,t}$ celui du pont, auquel on associera également le générateur $(\tilde{L}_t)_t$ que l'on cherche à déterminer. Soit une fonction $f \in D_I$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{s,t}f(x) &= \mathbb{E}[f(w_t)|w_s = x, w_1 = 0] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\tilde{p}_{s,t}(x, y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g_{s,t}(x, y)p_{s,t}(x, y)dy,\end{aligned}$$

où

$$g_{s,t}(x, y) = \frac{p_{t,1}(y, 0)}{p_{s,1}(x, 0)},$$

est la densité de la loi conditionnelle. Remarquons que

$$\begin{aligned}\partial_t g_{s,t}(x, y) &= -Lg_{s,t}(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} g_{s,t}(x, y), \\ \frac{d}{dy} g_{s,t}(x, y) &= -\frac{y}{1-t} g_{s,t}(x, y).\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{P}_{s,t}f(x) &= \partial_t P_{s,t}(fg_{s,t}(x, \cdot))(x) \\ &= \frac{1}{2} P_{s,t} \left[\frac{d^2}{dy^2} (f(y)g_{s,t}(x, y)) - f(y) \frac{d^2}{dy^2} g_{s,t}(x, y) \right] (x) \\ &= P_{s,t} \left[g_{s,t}(x, y) \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} f(y) - \frac{y}{1-t} \frac{d}{dy} f(y) \right) \right] (x) \\ &= \tilde{P}_{s,t} \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} f(y) - \frac{y}{1-t} \frac{d}{dy} f(y) \right] (x).\end{aligned}$$

Ainsi, par identification, le générateur du pont brownien est

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{L}_t : \tilde{D}_I \rightarrow \tilde{D}_I \\ f \mapsto \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f - \frac{y}{1-t} \frac{d}{dx} f \end{array}} \quad (1.11)$$

où $\tilde{D}_I = \{f \in C_b^o(I, \mathbb{R}) : f', f'' \in C_b^o(I, \mathbb{R})\}$.

Encore ici, à l'instar de la section précédente, la représentation donnée du pont brownien ne semble pas la plus naturelle, ni la plus manipulable. Cependant, pour des processus markoviens à sauts, c'est bien le générateur qui permettra de définir le processus conditionné. Dans l'optique d'une simulation, le générateur apportera également la loi des temps de sauts.

1.4 Le pont, solution d'une EDS

Le pont a été donné sous plusieurs formulations explicites. L'intérêt de l'exprimer comme solution d'une équation implicite, est de permettre d'entrevoir les solutions qui se proposent pour une possible généralisation à des familles d'équations différentielles stochastiques.

Dans leur article [JY79], Thierry Jeulin et Marc Yor, relient leur Théorème 1.2.1 à un résultat de Vigirdas Mackevicius dans l'article [Mac80]. En effet, si on considère l'équation (1.8), on aboutit au fait que la loi d'un mouvement brownien standard w conditionnée par $w_1 = x$ est donnée par celle du processus

$$\left(tx + (1-t) \int_0^t \frac{d\tilde{w}_s}{1-s} \right)_{0 \leq t \leq 1},$$

où \tilde{w} est un mouvement brownien réel.

On vérifie alors, en posant $x = 0$, que la loi du pont brownien est donnée par celle de la solution y sur $[0, 1]$ de l'équation

$$\boxed{dy_t = d\tilde{w}_t - \frac{y_t}{1-t} dt, \quad y_0 = 0.} \tag{1.12}$$

Pour cela il suffit d'appliquer la formule d'Itô

$$d \left(\frac{y_t}{1-t} \right) = \frac{dy_t}{1-t} + \frac{y_t}{(1-t)^2} dt = \frac{d\tilde{w}_t}{1-t}.$$

On retrouve logiquement le même générateur que le pont brownien donné par l'équation (1.11).

Une autre façon de voir que la loi de y , solution de l'équation (1.12) est celle d'un pont brownien, est d'utiliser le calcul stochastique pour des processus linéaires gaussiens (cf. [Kle05] p.132).

1.5 Discussion

On rappelle ici, tous les représentations du pont brownien présentées

Type d'approche	Expression du résultat
Variable gaussienne	$\forall t \in [0, 1], \quad y_t = w_t - tw_1 \quad (1.4)$
Grossissement de filtration	$\forall t \in [0, 1], \quad y_t = (1 - t) \int_0^t \frac{dw_s}{1-s} \quad (1.8)$
Générateur	$\forall t \in [0, 1], \quad L_t f = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f + \frac{\dot{\cdot}}{1-t} \frac{d}{dx} f \quad (1.11)$
EDS	$\forall t \in [0, 1], \quad dy_t = -\frac{y_t}{1-t} dt + dw_t, \quad y_0 = 0 \quad (1.12)$

La première Équation (1.4), on l'a vu, présente un problème de taille, en effet ce processus est non-adapté, ce qui limite l'intérêt de l'expression pourtant obtenue à l'aide d'un résultat élémentaire. De plus, même un grossissement de filtration ne résout pas directement ce défaut, car alors, le processus w présent dans l'expression (1.4) n'est plus un mouvement brownien pour la filtration grossie ($\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F} \vee \sigma(w_1))$). On a pu cependant obtenir une expression du pont dans cette nouvelle filtration en exhibant un mouvement brownien qui y est adapté, l'équation (1.7) se simplifie alors lorsque l'on fixe la valeur $w_1 = 0$ (1.8). Cette dernière expression a le mérite d'être totalement explicite et finalement dans le cas du conditionnement brownien semble bien plus exploitable que l'équation implicite (1.12) sous forme d'EDS. Cette seconde fournira cependant un point de départ naturel pour le conditionnement de processus définis *via* une EDS. Le générateur, lui, répondra aux problèmes discrets par exemple, car dans ce cas, cela constitue l'approche la plus naturelle si on veut éviter le calcul anticipatif, c'est-à-dire une expression où une variable du futur apparaît.

Chapitre 2

Conditionnement de diffusions

Lors de la discussion sur les différentes approches du pont brownien, son expression sous forme d'EDS a été présentée comme un outil de base pour un travail plus général sur les EDS. Nous n'allons ici étudier qu'un seul type de telles équations. Il sera défini comme suit : sur $[0, T]$, considérons l'équation suivante en dimension n

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u, \quad (2.1)$$

où w est un mouvement brownien n -dimensionnel, b et σ sont des fonctions déterministes que l'on supposera au moins $C^{1,2}$ par la suite. Par une fonction $C^{1,2}$, on entend une fonction C^1 en temps et C^2 en espace. Les valeurs $u \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathbb{R}$ sont déterministes. Le point qui nous intéresse dans ce chapitre est le conditionnement de cette diffusion par rapport à des observations partielles. Le processus vit dans un espace de dimension n , une observation partielle consistera en une projection sur un sous-espace de plus petite dimension. En d'autres termes, on se donne une suite de temps déterministes $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T$, ainsi que des matrices $(L_k)_{1 \leq k \leq N}$ respectivement dans $\mathbb{R}^{m_k \times n}$ avec $m_k \leq n$. On cherche alors à récupérer la loi conditionnelle

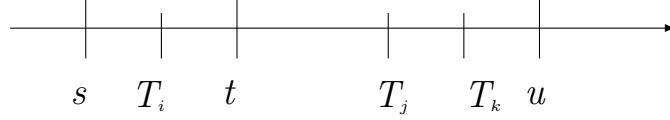
$$\mathcal{L}(x | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}),$$

où les v_k sont des valeurs déterministes. On pose par convention $T_0 = 0$.

En premier lieu, nous allons énoncer une propriété qui garantit qu'un processus de Markov conditionné de la sorte conserve ce caractère.

Proposition 2.0.1. *Le processus, dont la loi est donnée par le conditionnement d'un processus de Markov par des observations partielles, est encore un processus de Markov.*

Démonstration.



Le processus conditionné est markovien si et seulement si pour tout triplet (s, t, u) de réels positifs tels que $s \leq t \leq u$, et pour toutes fonctions positives f_s et g_u respectivement $\sigma(x_s)$ -mesurable et $\sigma(x_u)$ -mesurable,

$$\mathbb{E}[f_s g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N}] = \mathbb{E}[f_s | x_t, (L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N}] \mathbb{E}[g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N}] \quad p.s..$$

Du fait que x est markovien, ceci équivaut à

$$\mathbb{E}[f_s g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N}] = \mathbb{E}[f_s | x_t, (L_k x_{T_k})_{T_k < t}] \mathbb{E}[g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{T_k \geq t}] \quad p.s..$$

On se donne trois fonctions positives $\varphi_t \in \sigma(x_t)$, $\psi_1 \in \sigma_1 \triangleq \sigma((L_k x_{T_k})_{T_k < t})$ et $\psi_2 \in \sigma_2 \triangleq \sigma((L_k x_{T_k})_{T_k \geq t})$. On cherche alors à exprimer l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_s g_u \varphi_t \psi_1 \psi_2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f_s g_u \varphi_t \psi_1 \psi_2 | x_t, x_u, \sigma_1, \sigma_2]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f_s | x_t, x_u, \sigma_1, \sigma_2] g_u \varphi_t \psi_1 \psi_2] \\ \text{or } x \text{ est markovien, d'où} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f_s | x_t, \sigma_1] g_u \varphi_t \psi_1 \psi_2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[f_s | x_t, \sigma_1] g_u \varphi_t \psi_1 \psi_2 | x_t, \sigma_1, \sigma_2]] \\ \text{et par la propriété de Markov, ceci s'écrit encore} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f_s | x_t, \sigma_1] \mathbb{E}[g_u | x_t, \sigma_2] \varphi_t \psi_1 \psi_2]. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}[f_s g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{1 \leq k \leq N}] = \mathbb{E}[f_s | x_t, (L_k x_{T_k})_{T_k < t}] \mathbb{E}[g_u | x_t, (L_k x_{T_k})_{T_k \geq t}] \quad p.s..$$

□

Ainsi, on conserve la propriété de Markov même si le conditionnement ne porte pas sur la totalité de la valeur du processus à chaque temps T_k . Cependant ce type de conditionnement nécessite de considérer toutes les observations à la fois, et on verra que ceci amène de nouvelles difficultés non-négligeables.

Le chapitre s'ouvrira sur les processus linéaires gaussiens, car, on l'a vu, à l'aide de la Propriété 1.1.1, il est possible d'exprimer le processus conditionné. On verra dans quelles mesures ce résultat nous permettra d'obtenir un résultat légèrement plus général. S'ensuivra alors le fond du problème que l'on traitera en deux étapes : la première rappellera les résultats existants lorsque l'on se limite à un conditionnement dans le cas d'une observation totale de la valeur du processus aux temps T_k , c'est-à-dire que $L_k = I_n$. Ici on pourra sans perte de généralité considérer un unique temps d'observation T . Ce qui ne sera pas le cas pour les résultats plus généraux de la deuxième partie où l'observation n'est que partielle.

2.1 Processus linéaires gaussiens et parents proches

Le processus gaussien est quelque peu idéal. Il se caractérise simplement à l'aide des moyenne et covariance, les densités de transition sont explicites, beaucoup de choses deviennent alors calculables, *etc.* Dans cette section, la clé de voûte réside dans la Propriété 1.1.1 p.3 qui donne de manière totalement explicite les moyenne et covariance conditionnelles. Dans l'exemple qui suit, nous calculons à la main, la dérive du processus gaussien conditionnel. Puis nous verrons qu'il est possible de caractériser le processus conditionnel à l'aide de ses moyenne et covariance. Ceci nous mène alors à un résultat de conditionnement plus général à l'aide d'une transformation de Girsanov. En effet, si une diffusion admet une matrice de diffusion homogène en espace, on peut s'affranchir de la dérive et ainsi retomber sur une loi gaussienne.

2.1.1 Un exemple, avec calcul de dérive

En premier lieu, nous étudions un cas simple, en cherchant à calculer directement la dérive du processus conditionnel correspondant. On se propose d'effectuer le calcul de la dérive d'un mouvement brownien 2-dimensionnel conditionné par des combinaisons linéaires de coordonnées. Pour obtenir la dérive, nous allons utiliser le fait que

$$B_t(y_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[y_{t+h} - y_t | y_t]}{h}.$$

Pour cela, on se donne deux temps d'observation $S < T$. Les conditionnements sont donnés par deux vecteurs $a_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a_T = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque. On pose $\tau = 1 + a^2$ et $q = S(\tau T - S)$. On dispose également des matrices de covariance

$$R_{tT} = \begin{pmatrix} t \wedge S & t \wedge T \\ 0 & a(t \wedge T) \end{pmatrix}, \quad R_{TT} = \begin{pmatrix} S & S \\ S & \tau T \end{pmatrix}.$$

Cette étude sera divisée en trois parties correspondant aux trois cas possibles pour un temps t , suivant son positionnement par rapport aux deux temps S et T .

Cas $t < S$

On cherche à expliciter l'espérance conditionnelle suivante

$$\mathbb{E}[y_{t+h} - y_t | y_t].$$

Le processus y correspond en loi à un mouvement brownien 2-dimensionnel w conditionné par $a_S^* w_S = c_S$ et $a_T^* w_T = c_T$, où c_S et c_T sont deux réels, par la suite on notera c le vecteur $\begin{pmatrix} c_S \\ c_T \end{pmatrix}$. Pour obtenir la loi de y on se sert de la formule de projection de variables gaussiennes (cf. Proposition 1.1.1)

$$y_t = w_t - R_{tT} R_{TT}^{-1} W_T - c),$$

où

$$W_T = \begin{pmatrix} w_S^1 \\ w_T^1 + a w_T^2 \end{pmatrix}.$$

On notera m_t l'espérance de y_t et C_{st} la covariance de y_s avec y_t . On a

$$m_t = R_{tT} R_{TT}^{-1} c, \quad C_{st} = (s \wedge t) Id - R_{sT} R_{TT}^{-1} R_{Tt}.$$

Toujours à l'aide de la formule de projection, on écrit

$$\mathbb{E}[y_{t+h} - y_t | y_t] = m_{t+h} - y_t + \mathbb{E}[y_{t+h} - m_{t+h} | y_t] = m_{t+h} - y_t + C_{(t+h)t} C_{tt}^{-1} (y_t - m_t).$$

Après calcul, on obtient

$$C_{tt} = t Id - \frac{t^2}{q} \begin{pmatrix} \tau T - S & 0 \\ 0 & a^2 S \end{pmatrix}, \quad C_{(t+h)t} = t Id - \frac{t(t+h)}{q} \begin{pmatrix} \tau T - S & 0 \\ 0 & a^2 S \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[y_{t+h} - y_t | y_t] = m_{t+h} - y_t + \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{S-t} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{ha^2}{\tau T - S - ta^2} \end{pmatrix} (y_t - m_t).$$

Afin de simplifier on remplace m_t par son expression, et finalement

$$\mathbb{E}[y_{t+h} - y_t | y_t] = -h \begin{pmatrix} \frac{1}{S-t} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{\tau T - S - ta^2} \end{pmatrix} (y_t - \begin{pmatrix} a_S^* \\ a_T^* \end{pmatrix}^{-1} c).$$

On en déduit la dérive du processus conditionnel y

$$B_t(y_t) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{S-t} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{\tau T - S - ta^2} \end{pmatrix} (y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} c),$$

que l'on peut réécrire

$$B_t(y_t) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{S-t} & 0 \\ -\frac{1}{\tau T - S - ta^2} & \frac{1}{\tau T - S - ta^2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_S^* \\ a_T^* \end{pmatrix} y_t - c \right).$$

Cas $S < t < T$

En suivant le même raisonnement, on obtient après calcul

$$B_t(y_t) = -\frac{1}{\tau(T-t)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \left(y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} c \right),$$

que l'on peut écrire également

$$B_t(y_t) = -\frac{1}{\tau(T-t)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_S^* \\ a_T^* \end{pmatrix} y_t - c \right).$$

Cas $t > T$

Toujours de la même façon, il se trouve que dans ce cas, vu que la matrice R_{tT} ne dépend pas de t , on se retrouve avec une dérive nulle. Ce résultat était prévisible, sachant que l'on travaille ici avec un processus de Markov, il semble logique *a priori* de se dire que les conditionnements n'influent pas sur le comportement du processus après T .

Simulation

Afin d'illustrer ce calcul, une simulation du modèle a été réalisée. Pour cela on a fixé $S = 4$, $T = 9$, $a = 5$ et $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La simulation a été effectuée suivant un schéma d'Euler de pas 10^{-4} . On a choisi, pour des raisons évidentes, de représenter les trajectoires des variables observables $a_S^* y$ (en rouge) et $a_T^* y$ (en bleu). Les points de passages $(S, c_S) = (4, 1)$ et $(T, c_T) = (9, 1)$ ont été repérés par le symbole \oplus .

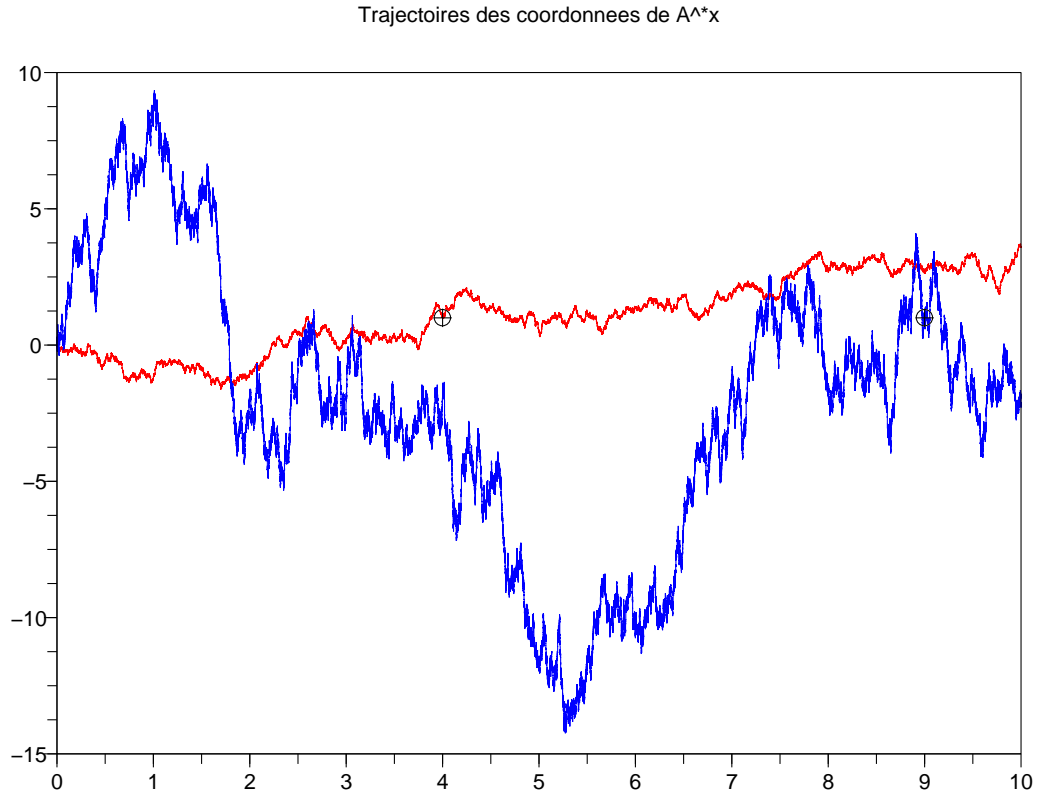


FIGURE 2.1 – Exemple avec $S = 4, T = 9, c_S = c_T = 1, a = 5$, le pas de discrétisation du schéma d'Euler est de 10^{-4}

2.1.2 Résultats

Le calcul précédent apparaît rapidement laborieux. De plus, nous n'utilisons pas pleinement la caractérisation des processus gaussiens. Nous nous proposons alors de mettre en place une méthode basée sur la recherche des moyennes et covariances du processus conditionnel.

On considère les processus x et ξ solutions respectives des systèmes n -dimensionnels suivants

$$dx_t = (\sigma_t h_t(x_t) + D_t x_t + b_t) dt + \sigma_t dw_t, \quad x_0 = u, \quad (2.2)$$

$$d\xi_t = (D_t \xi_t + b_t) dt + \sigma_t dw_t, \quad \xi_0 = u. \quad (2.3)$$

Les quantités D, σ et b sont déterministes et uniquement fonctions du temps t *a contrario* le vecteur h est fonction de la position également. Toutes ces applications sont mesurables et localement bornées. On introduit également pour s et t positifs la matrice de covariance

R_{st} des vecteurs ξ_s et ξ_t . C'est à dire que

$$(R_{st})_{i,j} = Cov(\xi_s^i, \xi_t^j) = \mathbb{E}[\xi_s^i \xi_t^j] - \mathbb{E}[\xi_s^i] \mathbb{E}[\xi_t^j].$$

On rappelle un résultat énoncé dans [KS91] (p.354) sur la covariance R_{st} ,

$$R_{st} = P_s \left[\int_0^{s \wedge t} P_u^{-1} \sigma_u \sigma_u^* (P_u^{-1})^* du \right] P_t^*,$$

où

$$\frac{dP_t}{dt} = D_t P_t, \quad P_0 = I_n.$$

On introduit de nouvelles matrices

$$\begin{aligned} \xi_T^o &= \begin{pmatrix} L_1 \xi_{T_1} \\ \vdots \\ L_N \xi_{T_N} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \\ R_{tT}^o &= (R_{tT_1} L_1 \quad \dots \quad R_{tT_N} L_N), \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} L_1 R_{T_1 T_1} L_1^* & \dots & L_1 R_{T_1 T_N} L_N^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_N R_{T_N T_1} L_1^* & \dots & L_N R_{T_N T_N} L_N^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le résultat est le suivant

Théorème 2.1.1. *La distribution du processus p_t donnée par*

$$p_t = \xi_t - R_{tT}^o \Gamma^{-1} (\xi_T^o - v)$$

est celle du processus ξ conditionné par $\xi_T^o = v$ (avec comme convention $\frac{1}{0} = 0$). On a de plus pour toute fonction mesurable positive f

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[f(x) | (L_k x_{T_k} = v_i)_{1 \leq k \leq N}] \\ &= C \mathbb{E}[f(p) \exp\{ \int_0^T h_t^*(p_t) (\sigma_t^{-1} dp_t - \sigma_t^{-1} (D_t p_t + b_t) dt) - \frac{1}{2} \|h_t(p_t)\|^2 dt \}]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Démonstration. Il suffit de réadapter directement la démonstration proposée dans [DH06]. Le 1^{er} résultat vient du fait que la loi de ξ conditionnée est encore une loi gaussienne que l'on connaît (cf. Propriété 1.1.1). Pour obtenir le résultat d'absolue continuité, on utilise une transformation de Girsanov (cf. [KS91] p.190). On conclut alors à l'aide du Lemme A.2.1 donné en annexe. \square

2.2 Conditionnement par rapport à la valeur finale

On retourne désormais au cadre plus général, l'EDS (2.1) en dimension n

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u.$$

On suppose de plus, vérifiée

Hypothèse 2.2.1. *Les fonctions b et σ sont $C^{1,2}$ à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^n et $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ces deux fonctions ainsi que leurs dérivées sont bornées, de plus, σ vérifie la condition d'uniforme ellipticité*

$$\lambda I_n < a < \Lambda I_n,$$

où $a = \sigma\sigma^*$ et $\lambda, \Lambda > 0$ sont deux constantes.

Remarque 2.2.2. *Ces hypothèses impliquent les estimées d'Aronson (cf. Théorème A.1.1) des densités de transition $p_{s,t}(x, y)$ du processus x . On dispose alors d'un encadrement des ces densités par des noyaux gaussiens.*

On ne prend en compte ici que des conditionnements totaux. Ce qui nous ramène à l'étude de la loi $\mathcal{L}(x|x_T = v)$, sans perte de généralité et ceci grâce à la propriété de Markov. La section précédente sur les processus gaussiens a permis d'exprimer, *via* le théorème de Girsanov, le conditionnement de processus dont l'équation variait d'une dérive inhomogène en espace et en temps. Finalement cela mérite discussion. En effet suivant l'objectif que l'on se fixe, un résultat par absolue continuité peut être suffisant voire plus efficace. Si on cherche à simuler selon la loi conditionnelle, il peut être plus simple de passer par un processus auxiliaire facile à simuler plutôt que de vouloir simuler la loi exacte. Ceci se justifiera *a posteriori* une fois les deux principaux résultats énoncés.

2.2.1 Résultat exact

Nous allons présenter ici le résultat qui permet de récupérer la loi exacte du processus conditionné. Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser la théorie des grossissements de filtration, plus précisément le Théorème 2.1 p.20 dans le chapitre [Jac85] écrit par Jean Jacod dans le livre [JY85].

Une autre approche, que l'on retrouve par exemple dans [LZ90] dans le cas homogène, consiste à partir de la solution de l'EDS (2.5) pour aboutir à l'égalité en loi recherchée. L'avantage du grossissement est de faire apparaître naturellement le terme de correction dans la dérive de l'EDS (2.5). Ce qui fournira un cadre plus général, qui s'avérera utile dans le cas des conditionnements partiels. Considérons une variable aléatoire L à valeurs dans un espace (E, \mathcal{E}) et la filtration grossie

$$\mathcal{G}_t^L = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^w \vee \sigma(L)).$$

Notons $Q_t(dz)$ une version régulière de la loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t^w .

Hypothèse 2.2.3. *Il existe une mesure positive σ -finie η sur (E, \mathcal{E}) telle que pour tout $t > 0$ et tout $\omega \in \Omega$*

$$Q_t(\omega, \cdot) \ll \eta(\cdot).$$

Sous cette hypothèse

Lemme 2.2.4. *Il existe une fonction positive $\hat{\mathcal{F}}_t = \cap_{s < t} (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_s^w)$ -mesurable $(\omega, t, z) \mapsto q_t^z(\omega)$, à trajectoires càdlàg, telle que*

1. *pour tout $z \in E$, q^z est une \mathcal{F}_t^w -martingale, et si $T^z = \inf\{t : q_{t-}^z = 0\}$, on a $q^z > 0$ et $q_-^z > 0$ sur $[0, T^z[$ et $q^z = 0$ sur $[T^z, +\infty[$,*
2. *pour tout t , la mesure $\eta(dz)q_t^z(\omega)$ sur E est une version de $Q_t(\omega, dz)$.*

Le résultat est le suivant

Théorème 2.2.5 (Jacod, 1985). *Supposons l'Hypothèse 2.2.3 vérifiée, et que q^z est la version des densités construite par le lemme précédent.*

Soit M une (\mathcal{F}_t^w) -martingale locale continue. Il existe une fonction $(\omega, t, z) \mapsto k_t^z(\omega)$ prévisible relativement à la filtration $\hat{\mathcal{F}}_t = \cap_{s < t} (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_s^w)$, telle que

$$\langle q^z, M \rangle_t = \int_0^t k_s^z q_{s-}^z d\langle M \rangle_s.$$

De plus, pour toute fonction k vérifiant ces propriétés, on a

1. *presque sûrement, pour tout t positif*

$$\int_0^t |k_s^L| d\langle M \rangle_s < +\infty,$$

2. *le processus suivant est une (\mathcal{G}_t^L) -martingale*

$$M_t - \int_0^t k_s^L d\langle M \rangle_s.$$

Dans le cas qui nous intéresse, nous cherchons à appliquer ce dernier résultat afin de déterminer l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus conditionnel. De la même façon que pour le pont brownien, l'approche consiste à exhiber la décomposition canonique du mouvement brownien w dans la filtration grossie par la variable $L = x_T$, et ainsi établir celle de la diffusion x . Il restera alors à fixer la valeur $x_T = v$ pour obtenir l'équation recherchée.

Corollaire 2.2.6. *Sous l'Hypothèse 2.2.1, la loi conditionnelle de x sachant $x_T = v$ est donnée par la loi du processus y solution de*

$$\boxed{dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \sigma_t(y_t)\sigma_t(y_t)^* \nabla_x \log p_{t,T}(x, v) \Big|_{x=y_t} dt, \quad y_0 = u} \quad (2.5)$$

Démonstration. Dans le cas $L = x_T$, on peut expliciter la mesure Q_t à l'aide des densités de transition de x . Si $p_{s,t}(z, \cdot)$ est la densité de x_t sachant $x_s = z$, on peut écrire

$$Q_t(dz) = p_{t,T}(x_t, z)dz$$

quantité strictement positive et continue en temps, grâce au Théorème A.1.1. C'est donc la bonne version des densités. Il suffit de poser

$$k_t^z = \nabla_x \log p_{t,T}(x, z)|_{x=x_t} = \frac{\nabla p_{t,T}(x, z)|_{x=x_t}}{p_{t,T}(x, z)|_{x=x_t}} \stackrel{Not}{=} \nabla \log p_{t,T}(x_t, z).$$

Si on remarque

$$dp_{t,T}(x_t, v) = (\nabla_x p_{t,T}(x, v)|_{x=x_t})^* [b_t dt + \sigma_t dw_t] + \sum_{i,j} \frac{a(x_t)_t^{i,j}}{2} \partial_{i,j} p_{t,T}(x_t, v) dt,$$

où $a = \sigma \sigma^*$. On vérifie que

$$d\langle q^z, M \rangle_t = (k_t^z q_t^z) d\langle M \rangle_t.$$

Le Théorème A.1.1 nous permet d'affirmer alors que cette fonction k correspond au cadre du Théorème 2.2.5. Ainsi, en raisonnant coordonnée par coordonnée, ce dernier théorème nous dit que pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\beta_t^k = w_t^k - \int_0^t [\sigma_s(x_s)^* \nabla \log p_{s,T}(x_s, x_T)]_k ds$$

est une $(\mathcal{G}_t^{x_T})$ -martingale. Or

$$\langle \beta^k, \beta^j \rangle_t = \langle w^k, w^j \rangle_t = \delta_{kj}$$

Ainsi, le processus β est un $(\mathcal{G}_t^{x_T})$ -mouvement brownien sur $[0, T]$ indépendant de $\sigma(x_T) \subset \mathcal{G}_0$. On se retrouve ainsi avec une expression de x en tant que (\mathcal{G}_t) -processus

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)d\beta_t + a_t(x_t)\nabla \log p_{t,T}(x_t, x_T)dt$$

ainsi $x = F(\beta, x_T)$ où F est bi-mesurable (les solutions pouvant être construites à l'aide de la méthode de Picard). On conclut donc en utilisant l'indépendance de β avec x_T pour obtenir le résultat voulu. \square

2.2.2 Résultat par absolue continuité

Comme on l'a déjà laissé entendre, l'aspect simulation nous intéresse. Or dans la majorité des cas, les densités de transition n'ont pas de forme explicite, ce qui nous pose un problème vu le terme de dérive en gradient du logarithme. Il est naturel d'essayer de trouver malgré tout une façon de simuler cette loi ciblée.

Dans le cas d'une observation totale, *i.e.* $x_T = v$, Bernard Delyon et Ying Hu [DH06] ont apporté une réponse, en faisant intervenir une loi absolument continue par rapport à la loi conditionnelle recherchée. Cette idée avait déjà été proposée par J.M.C. Clark [Cla90] dans le cas d'un mouvement brownien avec dérive (*i.e.* $\sigma \equiv I_n$). La lecture des deux articles montre que supposer une matrice de dispersion plus générale engendre quelques difficultés. Cette loi auxiliaire a le bon goût d'être facilement simulable à l'aide, par exemple, d'un schéma d'Euler. Si un processus y suit cette loi auxiliaire, le résultat qui est présenté ici est de la forme

$$\mathbb{E}[f(x)|x_T = v] = \mathbb{E}[f(y)G(y)]$$

pour des fonctions continues positives, où G est la densité. En termes de simulations, on effectue un tirage de N variables y^i suivant la loi auxiliaire, par exemple, à l'aide d'un schéma d'Euler. Ensuite on évalue la densité en chacune des trajectoires obtenues, ainsi par la loi des grands nombres

$$\mathbb{E}[f(x)|x_T = v] \simeq \frac{1}{\sum_{i=1}^N G(y^i)} \sum_{i=1}^N f(y^i)G(y^i) \quad (2.6)$$

Pour ce qui est du choix de la loi auxiliaire, ils ont introduit l'EDS en dimension n suivante sur $[0, T)$

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t - \frac{y_t - v}{T - t}dt, \quad y_0 = u. \quad (2.7)$$

On sait que dans le cas du mouvement brownien ($b \equiv 0, \sigma \equiv I_n$) cette loi est exactement celle du processus conditionné. En fait le terme correctif $-\frac{y_t - v}{T - t}$, aussi naïf peut-il paraître, est en quelque sorte une approximation raisonnable au voisinage à gauche de T du terme de dérive en $\nabla \log p_{t,T}$, qui apparaissait dans le résultat exact.

Le résultat est le suivant

Théorème 2.2.7 (Delyon & Hu, 2006). *Sous l'Hypothèse 2.2.1, l'équation (2.7) admet une unique solution sur $[0, T]$ avec $y_T = v$. De plus, pour toute fonction mesurable positive f*

$$\mathbb{E}[f(x)|x_T = v] = C \mathbb{E}[f(y) \exp\left\{-\int_0^T \frac{2\tilde{y}_t^* A_t(y_t) b_t(y_t) dt + \tilde{y}_t^* (dA_t(y_t)) \tilde{y}_t + \sum_{i,j} d\langle A^{i,j} y, \tilde{y}^i \tilde{y}^j \rangle_t}{2(T-t)}\right\}] \quad (2.8)$$

où $A_t(z) = (\sigma_t(z)\sigma_t(z)^*)^{-1}$, $\tilde{y}_t = y_t - v$ et $C > 0$ est une constante.

La première remarque à faire porte sur l'inutilité, en pratique, de la connaissance de la constante C dans le cadre de la simulation. En effet, si on l'on suit le schéma induit par l'équation (2.6), cette valeur n'apparaît pas.

On discutera de la possibilité de choisir une dérive b non-bornée dans la partie suivante plus générale.

2.3 Conditionnement partiel

2.3.1 Résultat exact

On l'a vu dans le cas d'une observation totale, le processus conditionné peut être obtenu à l'aide de l'équation (2.5). Le but ici est d'établir l'équation correspondante dans le cas d'observations partielles. Pour cela, nous allons nous pencher sur la démonstration du Théorème 2.2.5 qui repose essentiellement sur le calcul effectif du (\mathcal{G}_t) -compensateur d'une (\mathcal{F}_t) -semi-martingale. On retrouvera finalement un résultat très proche de ce que Fabrice Baudoin [Bau02] a pu obtenir à la différence près, que dans notre cas il faut raisonner étape par étape et recoller ensuite les morceaux, à cause du type de conditionnement considéré.

On introduit en premier lieu, la filtration grossie définie par

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\sigma(Y_1) \vee \mathcal{F}_{t+\varepsilon}),$$

où $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^w)$ est la filtration naturelle associée au mouvement brownien w et pour tout $j = 1, \dots, N$, la variable Y_j est définie par $Y_j = (L_k x_{T_k})_{j \leq k \leq N}$ où x est solution de l'équation (2.1)

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u.$$

Pour tout $1 \leq k \leq N$, on appelle

$$I_k = [T_{k-1}, T_k),$$

l'intervalle ouvert défini par deux temps d'observation successifs. Nous allons maintenant définir le cadre de cette étude

Hypothèse 2.3.1. *La fonction σ est bornée. Pour tout $t \in I_j$, la loi $\mathcal{L}(Y_j | \mathcal{F}_t)$ admet une densité $q_t^{(j)}(x_t, y_j)$, presque sûrement continue en temps, vérifiant pour tout $y_j \in \prod_{k=j}^N \mathbb{R}^{m_k}$*

$$q_t^{(j)}(x_t, y_j) > 0. \quad (2.9)$$

De plus, la fonction $x \mapsto q_t^{(j)}(x, y_j)$ est dérivable et pour tout $1 \leq \ell \leq n$, la dérivée partielle par rapport à la $\ell^{\text{ième}}$ coordonnée de x vérifie

$$\left| \partial_\ell q_t^{(j)}(x, y_j) \right| \leq \Lambda. \quad (2.10)$$

pour un certain $\Lambda > 0$.

Remarque 2.3.2. *Il est important de noter ici, que sous l'Hypothèse 2.2.1 ces conditions sont vérifiées. En effet dans ce cas-là, on peut donner une expression de ces densités à l'aide des densités de transition du processus x*

$$q_t^{(j)}(x, y_j) = \int p_{t, T_j}(x_t, \xi_j) d(L_j \xi_j) \prod_{k>j} p_{T_{k-1}, T_k}(\xi_{k-1}, \xi_k) d(L_k \xi_k). \quad (2.11)$$

Les estimées d'Aronson (cf. Théorème A.1.1) nous garantissent alors de rentrer dans le cadre précédent.

Lemme 2.3.3. *Le processus β , défini sur $[0, T]$ par*

$$\beta_t = w_t - \sum_{k=1}^N \int_{T_{k-1} \wedge t}^{T_k \wedge t} \sigma(x_s)^* \nabla \log q_s^{(k)}(x_s, L_k x_{T_k}, \dots, L_N x_{T_N}) ds, \quad (2.12)$$

est un (\mathcal{G}_t) -mouvement brownien indépendant de $(L_1 x_{T_1}, \dots, L_N x_{T_N})$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons construire les (\mathcal{G}_t) -mouvements browniens correspondant aux n coordonnées conditionnées du mouvement brownien initial w qui génère le processus x . On cherche donc à obtenir pour tout $1 \leq j \leq N$ et tout $1 \leq i \leq n$, les compensateurs respectifs de $w_{I_j}^i$ dans la filtration grossie.

Soient $s, t \in I_j$, avec $s < t$, et $1 \leq i \leq n$. On considère Z_s une variable positive \mathcal{F}_s mesurable, et f_j une fonction positive mesurable relativement à $\sigma(Y_j) = \sigma((L_k x_{T_k})_{j \leq k \leq N})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [Z_s (w_t^i - w_s^i) f_j(Y_j)] \\ &= \mathbb{E} \left[Z_s w_t^i \int q_t^{(j)}(x_t, y_j) f_j(y_j) dy_j \right] - \mathbb{E} \left[Z_s w_s^i \int q_s^{(j)}(x_s, y_j) f_j(y_j) dy_j \right] \\ &= \int \mathbb{E} \left[Z_s \left(w_t^i q_t^{(j)}(x_t, y_j) - w_s^i q_s^{(j)}(x_s, y_j) \right) \right] f_j(y_j) dy_j. \end{aligned}$$

Or le processus $(w_t^i q_t^{(j)}(x_t, y_j) - \langle w, q^{(j)}(x, y) \rangle_t)_t$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale. D'où

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [Z_s (w_t^i - w_s^i) f_j(Y_j)] \\ &= \int \mathbb{E} [Z_s \langle w^i, q^{(j)}(x, y) \rangle_t - \langle w^i, q^{(j)}(x, y) \rangle_s] f_j(y_j) dy_j \end{aligned}$$

De plus, un calcul d'Itô nous donne

$$d \langle w^i, q^{(j)}(x, y) \rangle_t = \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell q_t^{(j)}(x, y)|_{x=x_t} \sigma(x_t)_{\ell i} dt,$$

où ∂_ℓ est la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^ℓ . Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_s (w_t^i - w_s^i) f_j(Y_j)] &= \int \mathbb{E} [Z_s \int_s^t \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell q_u^{(j)}(x_u, y_j) \sigma(x_u)_{\ell i} du] f_j(y_j) dy_j \\ &= \int \mathbb{E} [Z_s \int_s^t \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial_\ell q_u^{(j)}(x_u, y_j)}{q_u^{(j)}(x_u, y_j)} \sigma(x_u)_{\ell i} du] q_s^{(j)}(x_s, y_j) f_j(y_j) dy_j \\ &= \mathbb{E} \left[Z_s \left\{ \int_s^t \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell \log q_u^{(j)}(x_u, Y_j) \sigma(x_u)_{\ell i} du \right\} f_j(Y_j) \right]. \end{aligned}$$

Or, la fonction $t \mapsto q_t^{(j)}(x_t, y_j)$ est continue presque sûrement et strictement positive, il existe alors une variable aléatoire $C(\omega)$ strictement positive telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$q_t^{(j)}(x, y_j) \geq C(\omega) > 0.$$

Ainsi

$$|\partial_\ell \log q_u^{(j)}(x_u, Y_j) \sigma(x_u)_{\ell i}| \leq \frac{\Lambda}{C(\omega)},$$

qui est intégrable au voisinage de T_j . Ainsi pour tout $1 \leq i \leq n$, le processus, défini sur I_j par

$$\beta_t^i = (\beta_{T_{j-1}}^i - w_{T_{j-1}}) + w_t^i - \int_{T_{j-1}}^t \sum_{\ell=1}^n \partial_\ell \log q_s^{(j)}(x_s, Y_j) \sigma(x_s)_{\ell i} ds$$

est une $(\mathcal{G}_t)_{t \in I_j}$ -martingale. Un calcul rapide de crochets nous amène au fait que le processus défini sur I_j ,

$$\beta_t = \begin{pmatrix} \beta_t^1 \\ \vdots \\ \beta_t^n \end{pmatrix} = (\beta_{T_{j-1}} - w_{T_{j-1}}) + w_t - \int_{T_{j-1}}^t \sigma(x_s)^* \nabla \log q_s^{(j)}(x_s, Y_j) ds,$$

est un $(\mathcal{G}_t)_{t \in I_j}$ -mouvement brownien de dimension n , indépendant de la variable $Y_j = (L_j x_{T_j}, \dots, L_N x_{T_N}) \in \mathcal{G}_0$. De plus, ce processus étant presque sûrement continu sur $[0, T]$, alors

$$\beta_t = w_t - \sum_{k=1}^N \int_{T_{k-1} \wedge t}^{T_k \wedge t} \sigma(x_s)^* \nabla \log q_s^{(j)}(x_s, Y_j) ds$$

est un $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ -mouvement brownien. □

Théorème 2.3.4. *Sous l'Hypothèse 2.3.1, la loi conditionnelle de x sachant $(L_1 x_{T_1} = v_1, \dots, L_N x_{T_N} = v_N)$ est donnée par la loi du processus y , solution sur $[0, T]$ de*

$$dy_t = b_t(y_t) dt + \sigma_t(y_t) dw_t + \sigma_t(y_t) \sigma_t(y_t)^* \sum_{k=1}^N \nabla_x \log q_t^{(k)}(x, v_k) \Big|_{x=y_t} \mathbf{1}_{[T_{k-1}, T_k)}(t) dt,$$

$$y_0 = x_0.$$

(2.13)

Démonstration. On sait maintenant que le processus β défini sur $[0, T]$ par

$$\beta_t = w_t - \sum_{k=1}^N \int_{T_{k-1} \wedge t}^{T_k \wedge t} \sigma(x_s)^* \nabla \log q_s^{(k)}(x_s, Y_k) ds$$

est un $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ -mouvement brownien indépendant de $(L_1 x_{T_1}, \dots, L_N x_{T_N})$. A l'aide de ce processus, il vient

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)d\beta_t + \sum_{k=1}^N \sigma_t(x_t)\sigma_t(x_t)^* \nabla \log q_t^k(x_t, Y_k) \mathbf{1}_{[T_{k-1}, T_k)}(t)dt$$

ainsi $x = F(\beta, Y_1)$ où F est bi-mesurable (les solutions pouvant être construites à l'aide de la méthode de Picard). On conclut donc en utilisant l'indépendance de β avec Y_1 pour obtenir le résultat voulu. \square

2.3.2 Résultat par absolue continuité

Cette partie, rédigée en anglais, vise à étendre le résultat de B.Delyon et Y.Hu dans le cadre d'observations partielles. La différence majeure réside évidemment dans le manque d'informations sur les coordonnées non-observées au voisinage des temps d'observation. On ne peut alors effectuer un conditionnement pas-à-pas en utilisant la propriété de Markov. Il nous faut donc considérer tous les conditionnements à la fois.

Pour s'en convaincre, prenons un mouvement brownien 2-dimensionnel $w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$. La loi de w conditionnée par $w_S^1 = u$ et $w_T^2 = v$ avec $S < T$ est donnée par celle de y , solution de

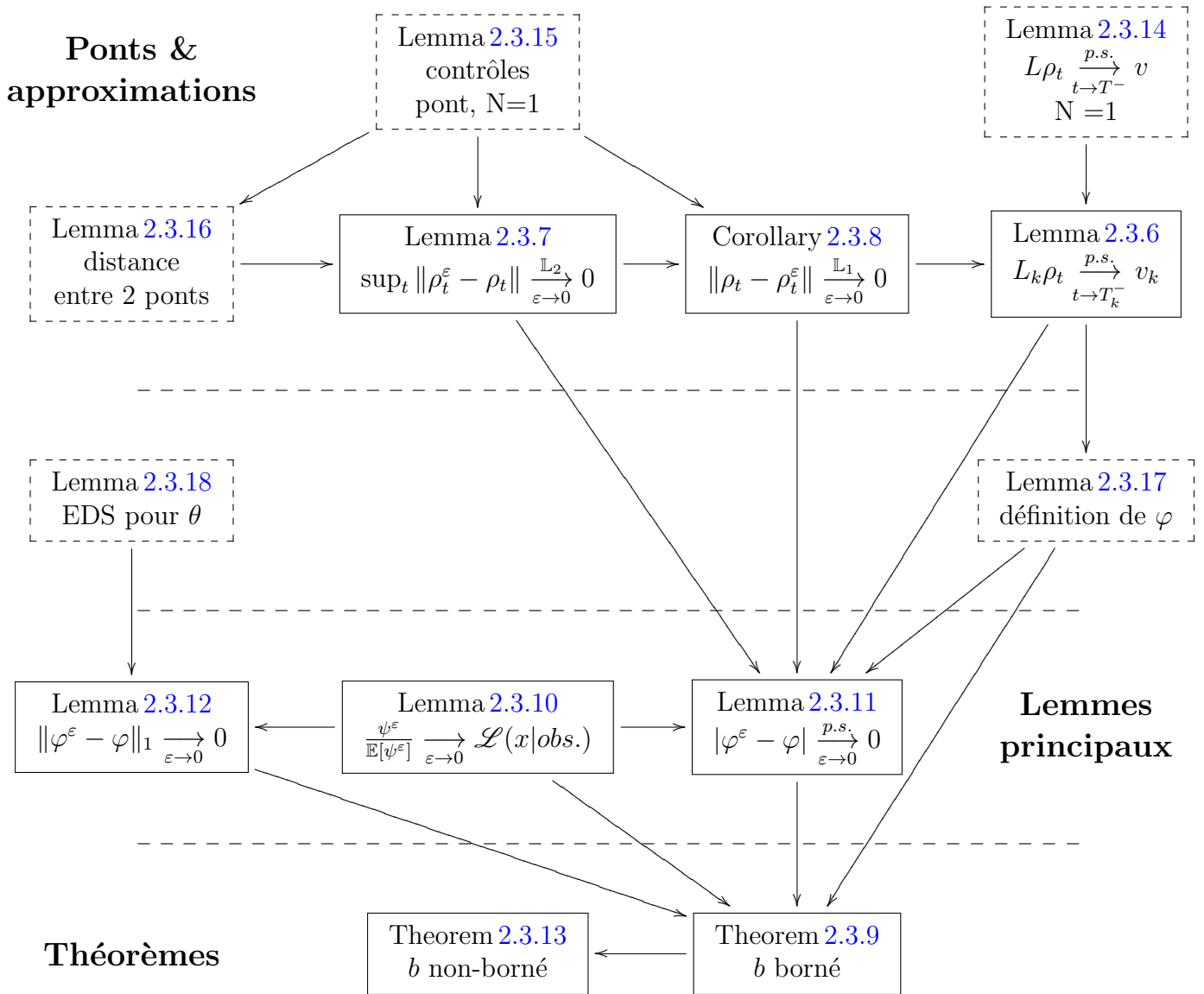
$$dy_t = dw_t - \begin{pmatrix} \frac{y_t^1 - u}{S-t} \mathbf{1}_{t < S} \\ \frac{y_t^2 - v}{T-t} \mathbf{1}_{t < T} \end{pmatrix} dt, \quad y_0 = 0.$$

Chaque coordonnée est alors un pont brownien.

En premier lieu, nous allons définir nos contraintes. Pour chaque temps déterministe T_k , $k = 1, \dots, N$ vérifiant $0 < T_1 < \dots < T_k < \dots < T_N = T$, on observe partiellement le processus, ce qui se traduit à l'aide de transformations linéaires des vecteurs x_{T_k} , $L_k x_{T_k}$, où L_k est une matrice déterministe à valeur dans $\mathbb{R}^{m_k, n}$ dont les m_k lignes forment une famille orthonormale. On cherche alors à décrire la loi conditionnelle $\mathcal{L}(x | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N})$ où les vecteurs v_k sont des vecteurs déterministes arbitraires.

Dans l'optique de faciliter la lecture de cette section, les deux prochaines pages sont dédiées à l'explication de sa structure générale.

Structure de la section 2.3.2



Légende

[] : désigne les lemmes situés en appendice de la section.

→ : signifie « intervient dans la preuve de ».

Cette section est articulée autour de la démonstration d'un résultat central : le Théorème 2.3.9. Cette dernière repose sur l'utilisation d'approximations y^ε d'un candidat y (équation 2.16 de type ρ , équation 2.14) inspiré de celui de Delyon et Hu (équation 2.7). La raison de l'introduction de ces approximations provient des singularités présentes dans la dérive de l'EDS satisfaite par y . On définit alors les y^ε en stoppant les termes singuliers à une distance ε des temps correspondants, ces processus sont de la forme générale des ρ^ε approximations de ρ . On traite dans un premier temps ces différents processus en établissant des contrôles de natures différentes qui seront utiles pour la suite (Lemmes 2.3.6, 2.3.7 et le Corollaire 2.3.8). Notre choix d'approximation nous permet d'appliquer une transformation de Girsanov pour passer de la loi de x - le processus d'origine - à celle de chacun des y^ε , ainsi pour toute fonction continue bornée f

$$\mathbb{E}[f(x)D^\varepsilon(x)] = \mathbb{E}[f(y^\varepsilon)].$$

L'essence de la méthode réside dans le fait que la densité de Girsanov D^ε peut-être décomposée comme le quotient de deux fonctions ψ^ε et φ^ε

$$D^\varepsilon = \frac{\psi^\varepsilon}{\varphi^\varepsilon}.$$

Ceci nous permet d'écrire de façon équivalente

$$\frac{\mathbb{E}[f(x)\psi^\varepsilon(x)]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon(x)]} = \frac{\mathbb{E}[f(y^\varepsilon)\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)]}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)]},$$

où $\psi^\varepsilon(x)$ est une approximation de l'unité au sens où le terme de droite converge vers l'espérance conditionnelle de $f(x)$ sachant nos observations lorsque ε tend vers 0 (Lemme 2.3.10). Le traitement du second membre, plus complexe, repose sur la combinaison des Lemmes 2.3.11 et 2.3.12 qui vont nous permettre d'appliquer le lemme de Scheffé, et ainsi de conclure (l'existence de la limite étant garantie par le Lemme 2.3.17). En effet le premier donne la convergence presque sûre de $\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)$ vers $\varphi(y)$ et le second la convergence \mathbb{L}_1 uniforme.

Les démonstrations de ces deux lemmes nécessitent l'utilisation de la batterie de résultats obtenus au préalable, le Lemme 2.3.10 ainsi que ceux obtenus sur le pont y et sur leurs approximations y^ε . De plus, un résultat supplémentaire, le Lemme 2.3.18, sur un processus auxiliaire θ nous fournira un contrôle local de la quantité ψ^ε aux voisinages des singularités.

We define an SDE on $[0, T]$,

$$d\rho_t = b_t(\rho_t)dt + \sigma_t(\rho_t)dw_t - \sum_{k=1}^N P_t^k(\rho_t) \frac{\rho_t - u_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(t)dt, \quad \rho_0 = u, \quad (2.14)$$

where for all time $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}^n$ and for all $1 \leq k \leq N$, the matrix $P_t^k(z)$ is an oblique projection and u_k is any vector satisfying $L_k u_k = v_k$. The correction term operates only on the interval $(T_k - \delta_k, T_k)$ where $T_k - \delta_k < T_k$ for technical reasons. We will show that with a suitable choice for those projections (see equation (2.26)) we have the following equivalence in law for the corresponding solution y

$$\mathcal{L}(x | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}) \sim \mathcal{L}(y),$$

with an explicit density (Theorem 2.3.9 below). This result seems to rely on one main assumption, that is the uniform ellipticity of the functions $L_k \sigma \sigma^* L_k^*$. This allows us to control almost all the convergences. However, some additional technical requirements on specific transition laws are needed. The question that those requirements can be deduced from the uniform ellipticity of the functions $L_k \sigma \sigma^* L_k^*$ remains open.

Notations

Let $T_k, k = 0, \dots, N$ be $N + 1$ non negative numbers verifying $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$, where T is the finite horizon of our study. We define also the matrices $L_k \in \mathbb{R}^{m_k, n}$, $k = 1, \dots, N$ whose rows form an orthonormal family.

We define arbitrary positive numbers $\delta_k, k = 1, \dots, N$, such that $T_{k-1} < T_k - \delta_k < T_k$. Moreover, we denote their minimum by $\delta_0 \triangleq \min_k \{\delta_k\}$.

The set $C_b^{1,2}$ is the subspace of $C^{1,2}$ of the functions whose derivatives are bounded. Let the functions a, A^k , and $\beta^k, k = 1 \dots, N$, defined for all $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ by

$$a_t(z) = \sigma_t(z)\sigma_t(z)^*, \quad A_t^k(z) = (L_k \sigma_t(z)\sigma_t(z)^* L_k^*)^{-1}, \quad \beta_t^k(z) = \sigma_t(z)^* L_k^* A_t^k(z).$$

We denote by x, y , and y^ε , the n -dimensional processes, which are the solutions on $[0, T]$ of

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u, \quad (2.15)$$

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \sum_{k=1}^N \sigma_t(y_t) \beta_t^k(y_t) \frac{y_t - v_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(t)dt, \quad y_0 = u, \quad (2.16)$$

$$dy_t^\varepsilon = b_t(y_t^\varepsilon)dt + \sigma_t(y_t^\varepsilon)dw_t + \sum_{k=1}^N \sigma_t(y_t^\varepsilon) \beta_t^k(y_t^\varepsilon) \frac{y_t^\varepsilon - v_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(t)dt, \quad y_0^\delta = u, \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

respectively, where w is a n -dimensional Brownian motion.

For the sake of readability, we choose not to specify arguments when not necessary. For example, the equation (2.1) becomes

$$dx_t = b_t dt + \sigma_t dw_t.$$

First of all, let introduce the general assumptions of our framework

Assumption 2.3.5. *The functions b , σ are locally Lipschitz, in addition, σ is bounded. The functions A_k , $k = 1, \dots, N$ defined for all $z \in \mathbb{R}^n$ by*

$$A_t^k(z) = (L_k \sigma_t(z) \sigma_t(z)^* L_k^*)^{-1}$$

belong to $C_b^{1,2}$ and satisfy

$$\lambda^{-1} I_{m_k} < A_k < \lambda I_{m_k} \quad (2.19)$$

in the sense of symmetric matrices, for some $\lambda > 0$.

Moreover, for any $0 \leq \varepsilon \leq \delta_0$, and for all $0 \leq i < j \leq k \leq N$, the conditional law $\mathcal{L}(L_j x_{T_j - \varepsilon}, L_{j+1} x_{T_{j+1} - \varepsilon}, \dots, L_k x_{T_k - \varepsilon} | \mathcal{F}_{T_i}^\varepsilon)$ admits a density $q_{T_i}^\varepsilon$, continuous in ε and in space, which satisfies

$$q_{T_i}^\varepsilon(z_j, \dots, z_k) \leq \mu \quad (2.20)$$

where $\mu > 0$ is a constant. An additional assumption on $q := q_{T_0} = q_0$ is needed

$$q(v_1, \dots, v_N) > 0. \quad (2.21)$$

This framework is larger than Delyon & Hu's one. Indeed, if b and σ are supposed to belong to $C_b^{1,2}$, we may use Aronson's estimates (see *e.g.* [Aro67] or [PÈ84]) which imply these assumptions. In the case of a degenerated matrix $\sigma\sigma^*$, there is no general rule, some studies exist in special cases. For example, in [DM10], the authors present the solution x of a system of n linked equations, each of dimension d , where the noise term only appears in the first equation. The noise propagates in the system through the different coefficients. The authors set density estimates which imply our assumptions if we choose the constant matrix $L_k = L$, such that LX is the solution of the first d -dimensional equation.

Bridges

We recall that a bridge is defined as a solution of (2.14)

$$\begin{cases} d\rho_t = b_t(\rho_t)dt + \sigma_t(\rho_t)dw_t - \sum_{k=1}^N P_t^k(\rho_t) \frac{\rho_t - u_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(t)dt \\ \rho_0 = u_0 \end{cases}$$

Suppose (Assumption 2.3.5) holds, we assume in addition that b is bounded and that

$$(t, z) \mapsto P_t^k(z)$$

is a $C_b^{1,2}$ function and that for any z

$$L_k P_t^k(z) = L_k \quad \text{and} \quad \ker(L_k) = \ker(P_t^k(z)). \quad (2.22)$$

As a remark, this implies the existence of a constant $C > 0$ such that for every $z, x \in \mathbb{R}^n$

$$\|P_t^k(z)x\| \leq C\|L_k x\|. \quad (2.23)$$

Indeed, if $E = \ker(L_k)^\perp$, then the restriction L_E of L_k is a bijection from E to its image, so that

$$P_E = P_E L_E^{-1} L_E$$

First of all, we present a lemma to describe the behaviour of process y

Lemma 2.3.6. *The SDE (2.14) admits a unique strong solution on $[0, T]$ in the sense of the absolute convergence, meaning that*

$$\int_{T_k - \delta_k}^{T_k} \frac{\|P_t^k(\rho_t)(\rho_t - u_k)\|}{T_k - t} dt < +\infty.$$

For all k , we have $L_k y_{T_k} = L_k u_k$ almost surely (a.s.). Moreover, for any time t such that $T_k - \delta_k < t < T_k$, then $\|L_k(y_t - u_k)\|^2 \leq C_k(\omega)(T_k - t) \log \log[(T_k - t)^{-1} + e]$ a.s., where C_k is a positive random variable.

Proof. Let us remark that for times in $[T_{k-1}, T_k]$ (with $T_0 = 0$) the SDE (2.14) becomes

$$d\rho_t = b_t dt - P_t^k \frac{\rho_t - u_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(t) dt + \sigma(\rho_t) dw_t.$$

So that we may reduce the proof to the study of (2.14) with only one observation time, but we here have to consider random initial conditions. If uniqueness holds it will lead to the result by concatenation. The proof in the case $N = 1$ is given in Lemma 2.3.14 in the appendix. \square

Bridge approximations

Let us introduce approximations that will be useful in the proof of the main result in next section. Let $0 < \varepsilon < \delta_0$, we set

$$d\rho_t^\varepsilon = b_t(\rho_t^\varepsilon) dt + \sigma_t(\rho_t^\varepsilon) dw_t - \sum_k P_t^k(\rho_t^\varepsilon) \frac{\rho_t^\varepsilon - u_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(t) dt, \quad \rho_0^\varepsilon = u_0 \quad (2.24)$$

The only difference with the bridge equation (2.14) is that each correction term is stopped from a distance ε from the observation time.

Lemma 2.3.7. *For any positive integer q , we introduce a stopping time τ_q*

$$\tau_q = \inf\{t \in [0, T] : \|\rho_t\| > q\}.$$

Let $\alpha_q = (Cq + 1)^{-N}$, then for all $q \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}\|^2] \leq C\varepsilon^{\alpha_q}$$

for all $0 < \varepsilon < (\delta_0 \wedge 1)$ where C is a positive constant. The numbers C and α_q depend on T, N , the $(\delta_k)_k$, the $(A_k)_k$, and the bounds for b and σ .

Proof. Given in the appendix, the proof uses classical techniques and auxiliary processes defined on $[T_{k-1}, T_k]$. \square

Corollary 2.3.8. 1. For all $\varepsilon < 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0, T]} \|\rho_{t \wedge \tau_q} - \rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon\|\right] \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha q}{2}}(1 - \log \varepsilon),$$

2. there exists a sequence $(\varepsilon_q)_q$, such that for all $t \in [0, T]$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\rho_t - \rho_t^{\varepsilon_q}\| = 0 \quad a.s..$$

Result in the case of partial observation

We aim to obtain a Delyon&Hu-type theorem that gives absolute continuity of process x conditioned on observations $(L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}$ with respect to a bridge process y .

For all $1 \leq k \leq N$, we define

$$a_t(z) := \sigma_t(z)\sigma_t(z)^*, \quad A_t^k(z) := (L_k a_t(z) L_k^*)^{-1},$$

$$\beta_t^k(z) := \sigma_t(z)^* L_k^* A_t^k(z) \quad \text{and} \quad \eta_k(z) := \sqrt{\det(A_{T_k}^k(z))},$$

where $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Let us remark that

$$\beta_t^k(z)^* \beta_t^k(z) = A_t^k(z) \quad \text{and} \quad L_k \sigma_t(z) \beta_t^k(z) = I_{m_k}. \quad (2.25)$$

We now consider a specific projection P , defined for all k and z by

$$P_t^k(z) := a_t(z) L_k^* A_t^k(z) L_k = \sigma_t(z) \beta_t^k(z) L_k. \quad (2.26)$$

Here are both systems we now consider

$$\begin{aligned} dx_t &= b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u \\ dy_t &= b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t - \sum_{k=1}^N \sigma_t(y_t) \beta_t^k(y_t) \frac{L_k y_t - v_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)} dt, \quad y_0 = u. \end{aligned}$$

The result is the following

Theorem 2.3.9. Assume (A 2.3.5) is satisfied, and b is bounded. Then for every bounded continuous function f (for the uniform norm)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(x) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] \\ &= C \mathbb{E} \left[f(y) \prod_{k=1}^N \eta_k(y_{T_k}) \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_k - \delta_k}^k(L_k y_{T_k - \delta_k} - v_k)\|^2}{2\delta_k} + \int_{T_k - \delta_k}^{T_k} - \frac{(L_k y_s - v_k)^* A_s^k(y_s) L_k b_s(y_s) ds}{T_k - s} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(L_k y_s - v_k)^* d(A_s^k(y_s)) (L_k y_s - v_k)}{2(T_k - s)} - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A^k(y)_{i,j}, (L_k y - v_k)_i (L_k y - v_k)_j \rangle_s}{2(T_k - s)} \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

where C is a positive constant.

Proof. As said before, to explicit both functions ψ^ε and φ^ε , we apply Girsanov's theorem with the additional drift term $h_t^\varepsilon(x_t)$ defined by

$$h_t^\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^N \beta_t^k(z) \frac{v_k - L_k z}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}.$$

Then for all bounded continuous functions f

$$\mathbb{E}[f(y^\varepsilon)] = \mathbb{E}[f(x) \exp\{-\int_0^T h_t^\varepsilon(x_t)^* dw_t + \frac{1}{2} \|h_t^\varepsilon(x_t)\|^2 dt\}].$$

Using properties (2.25) of the functions β^k , an Itô's formula for $t \in (T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)$ gives

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\|\beta_t^k(x_t)(L_k x_t - v_k)\|^2}{T_k - t}\right) &= \frac{2(L_k x_t - v_k)^* A_t^k(x_t) L_k dx_t}{T_k - t} + \frac{\|\beta_t^k(x_t)(L_k x_t - v_k)\|^2}{(T_k - t)^2} dt \\ &+ \frac{(L_k x_t - v_k)^* d(A_t^k(x_t))(L_k x_t - v_k)}{T_k - t} + \frac{m_k}{T_k - t} dt \\ &+ \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k(x), (L_k x - v_k)_i (L_k x - v_k)_j \rangle_t}{T_k - t}. \end{aligned}$$

The k^{th} term of the sum $h_t^\varepsilon(x_t)^* dw_t$ may now be isolated from that one in dx_t above. Then,

$$\begin{aligned} & - \frac{2(L_k x_t - v_k)^* A_t^k \sigma_t dw_t}{T_k - t} - \frac{\|\beta_t^k(L_k x_t - v_k)\|^2}{(T_k - t)^2} dt \\ &= -d\left(\frac{\|\beta_t^k(L_k x_t - v_k)\|^2}{T_k - t}\right) + \frac{m_k}{T_k - t} dt + \frac{2(L_k x_t - v_k)^* A_t^k L_k b_t dt}{T_k - t} \\ &+ \frac{(L_k x_t - v_k)^* dA_t^k(L_k x_t - v_k)}{T_k - t} + \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k, (L_k x - v_k)_i (L_k x - v_k)_j \rangle_t}{T_k - t}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Since we have

$$\|h_t^\varepsilon\|^2 dt = \sum_k \frac{\|\beta_t^k(L_k x_t - v_k)\|^2}{(T_k - t)^2} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(t) dt$$

and

$$(h_t^\varepsilon)^* dw_t = - \sum_k \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(t) \frac{(L_k x_t - v_k)^* A_t^k L_k \sigma_t dw_t}{T_k - t},$$

we obtain $-2(h_t^\varepsilon)^* dw_t - \|h_t^\varepsilon\|^2 dt$ adding the terms given by (2.28). Finally, it leads us to a

new expression for the density given by Girsanov's theorem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(y^\varepsilon)] = \mathbb{E} \left[f(x) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N -\frac{\|\beta_{T_k-\varepsilon}^k(L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k)\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\|\beta_{T_k-\delta_k}^k(L_k x_{T_k-\delta_k} - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{T_k-\delta_k}^{T_k-\varepsilon} \frac{(L_k x_t - v_k)^* A_t^k L_k b_t dt}{T_k - t} + \frac{m_k}{2(T_k - t)} dt + \frac{(L_k x_t - v_k)^* dA_t^k (L_k x_t - v_k)}{2(T_k - t)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k, (L_k x - v_k)_i (L_k x - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

In an equivalent way,

$$\mathbb{E}[f(y^\varepsilon)\varphi^\varepsilon] = \mathbb{E}[f(x)\psi^\varepsilon], \quad (2.29)$$

with

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon := \varphi^\varepsilon(y^\varepsilon) = C^\varepsilon \prod_{k=1}^N \eta_k^\delta(y_{T_k-\varepsilon}^\varepsilon) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N -\frac{\|\beta_{T_k-\delta_k}^k(L_k y_{T_k-\delta_k}^\varepsilon - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right. \\ \left. + \int_{T_k-\delta_k}^{T_k-\varepsilon} -\frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* A_t^k L_k b_t dt}{T_k - t} - \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* dA_t^k (L_k y_t^\varepsilon - v_k)}{2(T_k - t)} \right. \\ \left. - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k, (L_k y^\varepsilon - v_k)_i (L_k y^\varepsilon - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} \right\} \quad (2.30) \end{aligned}$$

and

$$\psi^\varepsilon := \psi^\varepsilon(x) = C^\varepsilon \prod_{k=1}^N \eta_k^\varepsilon(x_{T_k-\varepsilon}) \exp \left\{ -\frac{\|\beta_{T_k-\varepsilon}^k(x_{T_k-\varepsilon})(L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k)\|^2}{2\varepsilon} \right\} \quad (2.31)$$

where for all $z \in \mathbb{R}^n$

$$\eta^\varepsilon(z) = \sqrt{\det(A_{T_k-\varepsilon}^k(z))} \quad \text{and} \quad C^\varepsilon = \prod_k \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}}.$$

Now using it in the case where $f = 1$, we get formally

$$\frac{\mathbb{E}[f(x)\psi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]} = \frac{\mathbb{E}[f(y^\varepsilon)\varphi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]}.$$

The fact that the left-hand side converges toward the conditional expectation is given by Lemma 2.3.10 in the appendix, for finite-dimensional distributions. This proof justifies the choice for the matrices P^k .

An obvious candidate for the limit of the φ^ε is

$$\begin{aligned} \varphi := \varphi(y) = & C^{\delta_k} \prod_{k=1}^N \eta_k(y_{T_k}) \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_k-\delta_k}^k(y_{T_k-\delta_k})(L_k y_{T_k-\delta_k} - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right. \\ & + \int_{T_k-\delta_k}^{T_k} \frac{(L_k y_t - v_k)^* A_t^k L_k b_t(y_t) dt}{T_k - t} - \frac{(L_k y_t - v_k)^* d(A_t^k(y_t))(L_k y_t - v_k)}{2(T_k - t)} \\ & \left. - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k(y), (L_k y - v_k)_i (L_k y - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} \right\} \quad (2.32) \end{aligned}$$

Thanks to Lemma 2.3.17 given in the appendix, φ is well defined. Moreover, $\mathbb{E}[\varphi]$ is also finite. We want to conclude thanks to Scheffé's Lemma. Finally, the main difficulties of the proof stand in showing almost and uniform convergences for the $\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)$. Thanks to Lemmas 2.3.11 and 2.3.12 given in next section, we are able to say that both convergences hold for a subsequence $(\varepsilon_q)_{q \in \mathbb{N}}$.

Finally we have shown that for every continuous function g

$$\mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_1}) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] = C \mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) \varphi(y)]$$

this could be extended to bounded continuous functions of whole path, since $C([0, T], \mathbb{R})$ is a Polish space. \square

Lemmas

This section provides the main lemmas on which the proof of Theorem 2.3.9 is based.

Lemma 2.3.10. *There exist three positive constant numbers ε', c_1, c_2 such that for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$,*

$$c_1 \leq \mathbb{E}[\psi^\varepsilon] \leq c_2$$

Moreover, for any increasing sequence $(t_j)_{1 \leq j \leq M}$ in $[0, T]$, and for all bounded continuous functions g

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_M}) \psi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]} = \mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_M}) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}].$$

Proof. Let recall

$$\psi^\varepsilon = \prod_{k=1}^N \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \sqrt{\det(A_{T_k-\varepsilon}^k(x_{T_k-\varepsilon}))} \exp \left\{ - \frac{(L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k)^* A_{T_k-\varepsilon}^k(x_{T_k-\varepsilon})(L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k)}{2\varepsilon} \right\}.$$

Then, using the uniform ellipticity of the A_k , $k = 1 \dots, N$, we are able to get

$$\prod_{k=1}^N \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ - \frac{\lambda \|L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k\|^2}{2\varepsilon} \right\} \leq \psi^\varepsilon \leq \prod_{k=1}^N \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \lambda^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ - \frac{\|L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k\|^2}{2\lambda\varepsilon} \right\}.$$

We first work with the left-hand side to get a lower bound for $\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]$

$$\begin{aligned} e_\lambda^\varepsilon &:= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^N \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|L_k x_{T_k-\varepsilon} - v_k\|^2}{2\varepsilon}\right\} \right] \\ &= \int q^\varepsilon(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \prod_{k=1}^N \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|\zeta_k - v_k\|^2}{2\varepsilon}\right\} d\zeta_k. \end{aligned}$$

We then apply the change of variable $\zeta_k = \sqrt{\varepsilon}z_k + v_k$,

$$\begin{aligned} e_\lambda^\varepsilon &= \int q^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}z_1 + v_1, \dots, \sqrt{\varepsilon}z_N + v_N) \prod_{k=1}^N \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|z_k\|^2}{2}\right\} dz_k \\ &\geq \int_K q^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}z_1 + v_1, \dots, \sqrt{\varepsilon}z_N + v_N) \prod_{k=1}^N \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|z_k\|^2}{2}\right\} dz_k, \end{aligned}$$

where $K \subset \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_N}$ is a compact set containing 0. Since q^ε is uniformly bounded, we may apply Lebesgue's theorem to get

$$\int_K q^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}z_1 + v_1, \dots, \sqrt{\varepsilon}z_N + v_N) \prod_{k=1}^N \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|z_k\|^2}{2}\right\} dz_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} q(v_1, \dots, v_N) C(\lambda) > 0$$

where $C(\lambda) > 0$. Then, by continuity, there exists $0 < \varepsilon' < \delta_0$, such that for all $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$,

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon] \geq e_\lambda^\varepsilon \geq \int_K q^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}z_1 + v_1, \dots, \sqrt{\varepsilon}z_N + v_N) \prod_{k=1}^N \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda \|z_k\|^2}{2}\right\} dz_k \geq q(v_1, \dots, v_N) C.$$

Now, in order to get the limit toward the conditional expectation

$$E_\lambda^\varepsilon(g) := \mathbb{E}[g(x_{t_j}, \dots, x_{t_M}) \psi^\varepsilon] = \int \mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_M}) \psi^\varepsilon | (L_k x_{T_k-\varepsilon} = \zeta_k)_{1 \leq k \leq N}] q^\varepsilon(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \prod_{k=1}^N d\zeta_k.$$

Applying the same change of variable as before,

$$E_\lambda^\varepsilon(g) = \int \mathbb{E}[g \prod_{k=1}^N \eta_{T_k-\varepsilon}^k \exp\left\{-\frac{\|\beta_{T_k-\varepsilon}^k z_k\|^2}{2}\right\} | (L_k x_{T_k-\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}z_k + v_k)_{1 \leq k \leq N}] q^\varepsilon((\sqrt{\varepsilon}z_k + v_k)_k) dz_k.$$

By uniform ellipticity of the functions A^k ,

$$E_\lambda^\varepsilon(g) \leq \|g\|_\infty \int q^\varepsilon((\sqrt{\varepsilon}z_k + v_k)_k) \prod_{k=1}^N \lambda^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\|z_k\|^2}{2\lambda}\right\} dz_k.$$

First, for $g \equiv 1$ this gives an uniform upper bound for $\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]$. Now, since q^ε is uniformly bounded in ε and space, we may apply Lebesgue's theorem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\lambda^\varepsilon(g) = \int \mathbb{E}[g \prod_{k=1}^N \eta_{T_k}^k \exp\{-\frac{\|\beta_{T_k}^k z_k\|^2}{2}\} | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] q^0((v_k)_k) dz_k.$$

It remains to integrate with respect to the z_k , $k = 1, \dots, N$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\lambda^\varepsilon(g) = q(v_1, \dots, v_N) \mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}].$$

Finally

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) \psi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]} = \mathbb{E}[g(x_{t_1}, \dots, x_{t_N}) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}].$$

□

Lemma 2.3.11. *There exists a decreasing sequence $(\varepsilon_q)_{q \in \mathbb{N}}$ tending to 0 such that*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} |\varphi^{\varepsilon_q} - \varphi| = 0 \quad a.s.$$

Proof. First, we use triangular inequality

$$|\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon) - \varphi(y)| \leq |\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon) - \varphi^\varepsilon(y)| + |\varphi^\varepsilon(y) - \varphi(y)|.$$

By Lemma 2.3.17 the second summand on the right hand side converges toward 0. We now treat the term $|\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon) - \varphi^\varepsilon(y)|$,

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)}{\varphi^\varepsilon(y)} \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{\eta_k^\varepsilon(y_{T_k - \varepsilon}^\varepsilon)}{\eta_k^\varepsilon(y_{T_k - \varepsilon})} \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_k - \delta_k}^k(y_{T_k - \delta_k}^\varepsilon)(L_k y_{T_k - \delta_k}^\varepsilon - v_k)\|^2 - \|\beta_{T_k - \delta_k}^k(y_{T_k - \delta_k})(L_k y_{T_k - \delta_k} - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right. \\ & \quad + \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* A_t^k(y_t^\varepsilon) L_k b_t(y_t^\varepsilon) - (L_k y_t - v_k)^* A_t^k(y_t) L_k b_t(y_t)}{T_k - t} dt \\ & \quad - \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* d(A_t^k(y_t^\varepsilon))(L_k y_t^\varepsilon - v_k) - (L_k y_t - v_k)^* d(A_t^k(y_t))(L_k y_t - v_k)}{2(T_k - t)} \\ & \quad \left. - \sum_{i,j} \frac{d\langle A_{i,j}^k(y_t^\varepsilon), (L_k y_t^\varepsilon - v_k)_i (L_k y_t^\varepsilon - v_k)_j \rangle_t - d\langle A_{i,j}^k(y_t), (L_k y_t - v_k)_i (L_k y_t - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} \right\}. \end{aligned}$$

By respecting the order above, we may write it as

$$\frac{\varphi^\varepsilon(y^\varepsilon)}{\varphi^\varepsilon(y)} \stackrel{\text{Notation}}{=} \prod_{k=1}^N \Xi_k^\varepsilon \exp\{\Upsilon_k^\varepsilon + \Psi_k^\varepsilon + \Theta_k^\varepsilon + \Phi_k^\varepsilon\}.$$

According to Corollary 2.3.8, there exists a decreasing sequence $(\varepsilon_q)_{q \in \mathbb{N}}$ tending to 0 satisfying for all k that $y_{T_k - \varepsilon_q}^{\varepsilon_q}$ converges almost surely to y_{T_k} . From this we obtain the fact that $\Xi_k^{\varepsilon_q}$ converges almost surely toward 1 and $\Upsilon_k^{\varepsilon_q}$ toward 0 using regularity of σ . Then for all k , since b and σ are regular functions

$$|\Psi_k^\varepsilon| \leq c \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{\|y_t^\varepsilon - y_t\|}{T_k - t} dt,$$

where $c > 0$ only depends on L_k , b and σ . It remains to show that the integral converges to 0 almost surely at least for a subsequence. Let us remark that the process y is almost surely bounded since it is continuous on $[0, T]$. This implies the existence of an integer valued random variable $Q := Q(\omega)$ such that $\tau_Q > T$. Then for all $q \geq Q$

$$\int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{\|y_t^\varepsilon - y_t\|}{T_k - t} dt = \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{\|y_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - y_{t \wedge \tau_q}\|}{T_k - t} dt$$

Now, we use Corollary 2.3.8, let recall that $\alpha_q = (cq + 1)^{-N}$ and $\varepsilon_q = e^{-(cq+1)^{N+1}}$. After interversion, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{q \geq 1} \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon_q} \frac{\|y_{t \wedge \tau_q}^{\varepsilon_q} - y_{t \wedge \tau_q}\|}{T_k - t} dt\right] &\leq \sum_{q \geq 1} \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon_q} \frac{\varepsilon_q^{\alpha_q} (1 + \log \varepsilon_q)}{T_k - t} dt \\ &\leq \sum_{q \geq 1} 2C e^{(cq+1)} (1 + 2(cq + 1)^{N+1})^2 \end{aligned}$$

which converges. So that the integral $\int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon_q} \frac{\|y_{t \wedge \tau_q}^{\varepsilon_q} - y_{t \wedge \tau_q}\|}{T_k - t} dt$ converges almost surely to 0 as q tends to infinity. That leads us to almost sure convergence for all k of $|\Psi_k^{\varepsilon_q}|$ to 0. Now we use identity (2.50)

$$\begin{aligned} \Theta_k^\varepsilon &= \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{\|L_k y_t - v\|^2}{T_k - t} p_t(y_t) dt + \frac{\|L_k y_t - v\|^2}{T_k - t} q_t(y_t) dw_t + \frac{\|L_k y_t - v\|^2}{(T_k - t)^2} r_t(y_t) dt \\ &\quad - \frac{\|L_k y_t^\varepsilon - v\|^2}{T_k - t} p_t(y_t^\varepsilon) dt - \frac{\|L_k y_t^\varepsilon - v\|^2}{T_k - t} q_t(y_t^\varepsilon) dw_t - \frac{\|L_k y_t^\varepsilon - v\|^2}{(T_k - t)^2} r_t(y_t^\varepsilon) dt \end{aligned}$$

where p , q , and r are all $C_b^{1,2}$ functions. Hence using Lemma 2.3.6 and Corollary 2.3.8 as above we obtain that $\lim_{\varepsilon_q \rightarrow 0} |\Theta_k^{\varepsilon_q}| = 0$ up to a subsequence. It remains to treat the term Φ_k^ε . Still using identity (2.50), Lemmas 2.3.6 and 2.3.7 we show that $\lim_{\varepsilon_q \rightarrow 0} |\Phi_k^{\varepsilon_q}| = 0$ for some subsequence $(\varepsilon_q)_q$ tending to 0. \square

Lemma 2.3.12. *There exists a decreasing sequence $(\varepsilon_q)_{q \in \mathbb{N}}$ tending to 0 such that*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|\varphi^{\varepsilon_q} - \varphi|] = 0.$$

Proof. As a first consequence of Lemma 2.3.10, thanks to identity (2.29), the quantity $\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]$ is finite so that $\frac{\varphi^\varepsilon}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]}$ is a density. We may also use Fatou's lemma to get

$$\mathbb{E}[\varphi] \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi^\varepsilon] \leq c_2.$$

It takes more work to control $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]$.

Let us introduce the heuristic of this proof. Since φ^ε converges almost surely toward φ as ε tends to 0 (for a given subsequence), we know, thanks to Scheffé's lemma, that it suffices to show that $\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]$ converges to $\mathbb{E}[\varphi]$. In order to treat the $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]$, we will express φ as the limit of a uniform integrable family indexed by ε . That is why we introduce a stopping time τ^ε , that controls the oscillations of ψ^ε and φ^ε thanks to a level J . We know that identity 2.29 allows us to work on ψ^ε instead of φ^ε if necessary. The role of this stopping time is crucial, because it provides, through Lemma 2.3.18, a lower bound depending on level J for $\frac{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{T=\tau^\varepsilon}]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]}$, and so for $\frac{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon \mathbf{1}_{T=\tau^\varepsilon}]}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]}$. Then, it remains to show the uniform integrability of the family $(\varphi^\varepsilon \mathbf{1}_{T=\tau^\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$, it is obtained thanks to the definition of τ^ε and Novikov's lemma. Finally, we let ε goes to 0 and J to ∞ to conclude.

Let $J > 0$ be a large number, we introduce for all process $(z_t)_{t \in [0, T]}$ and for all $1 \leq k \leq N$ the stopping time τ_k^ε

$$\begin{aligned} \tau_k^\varepsilon &= \tau_k^\varepsilon(z) = \inf\{t_k < t \leq T_k - \varepsilon : \frac{1}{\sqrt{T_k - t}} \exp\{-\frac{\|L_k z_t - v_k\|^2}{2(T_k - t)} D\} \leq J^{-1}\} \\ &= \inf\{t_k < t \leq T_k - \varepsilon : \frac{\|L_k z_t - v_k\|^2}{2(T_k - t)} \geq D^{-1} \log\left(\frac{J}{\sqrt{T_k - t}}\right)\}. \end{aligned}$$

where D is a positive constant such that $DI_d \leq A^k$. We know that such a constant exists according to assumptions on the functions A^k . The t_k are chosen to be real numbers contained in $(T_{k-1}, T_k - \varepsilon)$. As a convention we set $\tau_k^\varepsilon = T_k$ if the condition is empty. Let τ^ε be the first of the τ_k^ε such that the condition is non-empty

$$\tau^\varepsilon = \inf_k \{\tau_k^\varepsilon : \tau_k^\varepsilon < T_k\},$$

we set as convention $\tau^\varepsilon = T$ if for all k , $\tau_k^\varepsilon = T_k$. Then, for every bounded continuous function f

$$\frac{\mathbb{E}[f(y^\varepsilon) \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon < T} \varphi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]} = \frac{\mathbb{E}[f(x) \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon < T} \psi^\varepsilon]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]}$$

We recall that

$$\psi^\varepsilon = \prod_k \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \eta_k^\varepsilon(x_{T_k - \varepsilon}) \exp\left\{-\frac{\|\beta_{T_k - \varepsilon}^k(L_k x_{T_k - \varepsilon} - v_k)\|^2}{2\varepsilon}\right\}.$$

We now consider to be on set $\{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon\}$



We decompose ψ^ε into a product of three factors

$$\begin{aligned} F_1 &= \prod_{j < k} \varepsilon^{-\frac{m_j}{2}} \eta_j^\varepsilon(x_{T_j - \varepsilon}) \exp\left\{-\frac{\|\beta_{T_j - \varepsilon}^j(L_j x_{T_j - \varepsilon} - v_j)\|^2}{2\varepsilon}\right\}, \\ F_2 &= \varepsilon^{-\frac{m_k}{2}} \eta_k^\varepsilon(x_{T_k - \varepsilon}) \exp\left\{-\frac{\|\beta_{T_k - \varepsilon}^k(L_k x_{T_k - \varepsilon} - v_k)\|^2}{2\varepsilon}\right\}, \\ F_3 &= \prod_{j > k} \varepsilon^{-\frac{m_j}{2}} \eta_j^\varepsilon(x_{T_j - \varepsilon}) \exp\left\{-\frac{\|\beta_{T_j - \varepsilon}^j(L_j x_{T_j - \varepsilon} - v_j)\|^2}{2\varepsilon}\right\}. \end{aligned}$$

We are interested in

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}] = \mathbb{E}[F_1 F_2 F_3 \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}].$$

We now use Markov's property to get independence between Past and Future knowing Present (cf [DM75] see last chapter about conditional expectations)

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}] = \mathbb{E}\left[F_1 F_2 \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon} \mathbb{E}[F_3 | \mathcal{F}_{T_k}]\right] = \mathbb{E}\left[F_1 \mathbb{E}\left[F_2 \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon} \mathbb{E}[F_3 | \mathcal{F}_{T_k}] | \mathcal{F}_{\tau_k^\varepsilon}\right]\right]. \quad (2.33)$$

First, due to the uniform ellipticity of the functions A_j , we may write

$$\mathbb{E}[F_3 | \mathcal{F}_{T_k}] \leq \int q_{T_k}^\varepsilon(\zeta_{j+1}, \dots, \zeta_N) \prod_{j > k} \lambda^{\frac{n}{2}} \varepsilon^{-\frac{m_j}{2}} \exp\left\{-\frac{\|L_j \zeta_j - v_j\|^2}{2\lambda\varepsilon}\right\}.$$

Then, in a same way as in the proof of Lemma 2.3.10, after a suitable change of variable, we use the uniform upper bound for the density to get a constant upper bound for $\mathbb{E}[F_3 | \mathcal{F}_{T_k}]$.

In order to study the factor $\mathbb{E}[F_2 \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon} | \mathcal{F}_{\tau_k^\varepsilon}]$ we introduce

$$\theta_t = \frac{1}{\sqrt{T_k - t}} \exp\left\{-\frac{\|\beta_t^k(L_k x_t - v_k)\|^2}{2(T_k - t)}\right\}.$$

Thanks to Lemma 2.3.18, we know that there exist a bounded adapted process π , a martingale M both defined on $[T_{k-1}, T_k - \varepsilon]$ and a positive number $0 < h < 1$, such that

$$d\theta_t = dM_t + \theta_t^{1-h} (T_k - t)^{-\frac{1+h}{2}} \pi_t dt.$$

We now integrate it for $t \in (\tau_k^\varepsilon, T_k - \varepsilon]$

$$\theta_t = \theta_{\tau_k^\varepsilon} + M_t - M_{\tau_k^\varepsilon} + \int_{\tau_k^\varepsilon}^t \pi_s \theta_s^{1-h} (T_k - s)^{-\frac{h+1}{2}} ds.$$

This leads to the following

$$\mathbb{E}[\theta_t \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < t}] \leq J^{-1} + \bar{\pi} \int_{t_k}^t \mathbb{E}[\theta_s \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < s}]^{1-h} (T_k - s)^{-\frac{h+1}{2}} ds,$$

where $\bar{\pi} = \sup_s |\pi_s|$. So $\mathbb{E}[\theta \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < t}]$ is bounded by the function u , which is the solution of

$$du_s = \bar{\pi} u_s^{1-h} (T_k - s)^{-\frac{h+1}{2}} ds, \quad u_{t_k} = J^{-1},$$

and this equation has an explicit solution

$$u_t = \left\{ \frac{2h\bar{\pi}}{1-h} [(T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} - (T_k - t)^{\frac{1-h}{2}}] + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}} \leq \left\{ c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}},$$

where c_k is a positive constant. Then for all $t \in [T_{k-1}, T_k - \varepsilon]$

$$\mathbb{E}[\theta_t \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < t} | \mathcal{F}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon, x_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon] \leq \left\{ c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}}.$$

In particular when $t = T_k - \varepsilon$

$$\mathbb{E}[F_2 \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < T_k - \varepsilon} | \mathcal{F}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon] = \mathbb{E}[\theta_{T_k - \varepsilon} \mathbf{1}_{\tau_k^\varepsilon < T_k - \varepsilon} | \mathcal{F}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon] \leq \left\{ c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}}.$$

We now come back to equation (2.33), we get a first bound

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}] \leq C \left\{ c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}} \mathbb{E}[F_1].$$

for a constant $C > 0$. We find a constant upper bound for $\mathbb{E}[F_1]$ in a same way as we get the upper bound for $\mathbb{E}[F_3 | \mathcal{F}_{T_k}]$.

Finally the inequality we get from equation (2.33) is the following

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}] \leq G \left\{ c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h} \right\}^{\frac{1}{h}}$$

where G is a positive constant. From this we deduce

$$\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{T > \tau^\varepsilon}] = \sum_k \mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{\tau^\varepsilon = \tau_k^\varepsilon}] \leq G \max_k \left\{ (c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h})^{\frac{1}{h}} \right\}.$$

According to this last result and using the lower bound of $\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]$ given by Lemma 2.3.10 we finally have

$$\frac{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon \mathbf{1}_{T = \tau^\varepsilon}]}{\mathbb{E}[\psi^\varepsilon]} \geq 1 - G \max_k \left\{ (c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h})^{\frac{1}{h}} \right\},$$

where G is positive constant. So using inequality (2.29) we obtain

$$\frac{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon \mathbf{1}_{T = \tau^\varepsilon}]}{\mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]} \geq 1 - G \max_k \left\{ (c_k (T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h})^{\frac{1}{h}} \right\}. \quad (2.34)$$

Moreover, the family $(\varphi^\varepsilon \mathbf{1}_{T = \tau^\varepsilon})_\varepsilon$ is uniformly integrable. Indeed by definition of τ^ε we can get upper bounds depending on J for the different factors in expression (2.30) of φ^ε or (2.32) of φ , for all $0 \leq \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon &= \prod_{k=1}^N \varepsilon_k^{-\frac{m_k}{2}} \eta_k^\varepsilon(y_{T_k - \varepsilon}^\varepsilon) \exp \left\{ - \int_{T_k - \delta_k}^{T_k - \varepsilon} \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* A_t^k L_k b_t dt}{T_k - t} - \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* dA_t^k (L_k y_t^\varepsilon - v_k)}{2(T_k - t)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k, (L_k y^\varepsilon - v_k)_i (L_k y^\varepsilon - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} - \frac{\|\beta_{T_k - \delta_k}^k(y_{T_k - \delta_k}^\varepsilon)(L_k y_{T_k - \delta_k}^\varepsilon - v_k)\|^2}{2\delta_k} \right\}, \end{aligned}$$

in fact " $\varphi^0 = \varphi$ ".

In order to prove the uniform integrability, we first find controls on the different integrands appearing in φ^ε by using the definition of τ^ε . We recall that b and σ are bounded so are the functions η^k . Then on $\{t \leq \tau^\varepsilon\}$

$$\left\| \frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* A_t^k L_k b_t}{T_k - t} \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{T_k - t}} \sqrt{\log \left(\frac{J}{(T_k - t)^{\frac{m_k}{2}}} \right)},$$

which is an integrable quantity in T_k , and C is a positive constant depending on the choice of b and σ . A same method gives an upper bound for the terms where quadratic variation appears. We may express the canonical decomposition of remaining terms dA_t^k in the following way

$$\frac{(L_k y_t^\varepsilon - v_k)^* dA_t^k (L_k y_t^\varepsilon - v_k)}{2(T_k - t)} = \frac{\|L_k^* y_t^\varepsilon - v_k\|^2}{T_k - t} r_t^k(y_t^\varepsilon) dw_t + \frac{\|L_k y_t^\varepsilon - v_k\|^2}{T_k - t} q_t^k(y_t^\varepsilon) dt,$$

where r^k and q^k are bounded adapted functions. We denote by Z^ε , the martingale defined on $[0, T]$ by

$$Z_t^\varepsilon = \sum_{T_k - \delta_k < t} \int_{(T_k - \delta_k)}^{(T_k - \varepsilon) \wedge t} \frac{\|L_k y_s^\varepsilon - v_k\|^2}{T_k - s} r_s^k dw_s.$$

Then for fixed J , there exists a constant K such that

$$\varphi^\varepsilon \mathbf{1}_{t \leq \tau^\varepsilon} \leq K \prod_k \exp\{Z_{t \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon - \frac{1}{2} \langle Z_{. \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon \rangle_t\}.$$

Let us remark that for all $p > 0$

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{p^2}{2} \langle Z_{. \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon \rangle_t\right\} &= \exp\left\{p \sum_k \int_{(T_k - \delta_k) \wedge t \wedge \tau^\varepsilon}^{(T_k - \varepsilon) \wedge t \wedge \tau^\varepsilon} \frac{\|L_k y_s^\varepsilon - v_k\|^4}{2|T_k - s|^2} \|r_s^k\|^2 ds\right\} \\ &\leq \exp\left\{p \sum_k \int_{T_k - \delta_k}^{T_k} \left[\log \left(\frac{J}{(T_k - s)^{\frac{m_k}{2}}} \right) \right]^2 ds\right\} \leq C^p, \end{aligned}$$

where C is a positive constant. Thus, for any positive number p , we apply Novikov's lemma (cf [KS91] p.198) on the continuous local martingale $(pZ_{t \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$. It comes

$$\mathbb{E} \left[\exp\left\{pZ_{t \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon - \frac{p^2}{2} \langle Z_{. \wedge \tau^\varepsilon}^\varepsilon \rangle_t\right\} \right] = 1,$$

for every $p > 0$.

Then we take the $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0}$ and use Lebesgue's theorem to obtain

$$\frac{\mathbb{E}[\varphi \mathbf{1}_{T=\tau}]}{\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi^\varepsilon]} \geq 1 - N \max_k \left\{ (c_k(T_k - t_k)^{\frac{1-h}{2}} + J^{-h}) \right\}^{\frac{1}{h}} \quad (2.35)$$

Now $\mathbf{1}_{T=\tau}$ converges almost surely to 1 as J tends to infinity. We are able to say after letting the t_k tend to T_k that

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi^\varepsilon] \leq \mathbb{E}[\varphi] \quad (2.36)$$

We finish the proof by Scheffé's lemma (cf [DM75] p.36) \square

Case where b is unbounded

Suppose now that b is locally Lipschitz with respect to x and is locally bounded. Moreover the SDE (2.1) admits a strong solution. We use a Girsanov theorem (see *e.g.* [DH06]) to reduce the problem to the case of a bounded drift.

We obtain

Theorem 2.3.13. *Suppose σ, σ^{-1} and the $A_k, k = 1, \dots, N$ to be $C_b^{1,2}$ -functions. Assume that b is a locally bounded function, which is locally Lipschitz with respect to x . Let y be the solution of*

$$dy_t = \hat{b}_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t - \sum_{k=1}^N \sigma_t(y_t)\beta_t^k(y_t) \frac{L_k y_t - v_k}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_k - \varepsilon_k, T_k)}(t)dt$$

where \hat{b} satisfies the assumptions of Theorem 2.3.9.

Then for any bounded continuous function f

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(x) | (L_k x_{T_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] \\ &= C \mathbb{E} \left[f(y) \prod_{k=1}^N \eta_k(y_{T_k}) \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_k - \varepsilon_k}^k(L_k y_{T_k - \varepsilon_k} - v_k)\|^2}{2\varepsilon_k} + \int_{T_k - \varepsilon_k}^{T_k} - \frac{(L_k y_s - v_k)^* A_s^k(y_s) L_k \hat{b}_s(y_s) ds}{T_k - s} \right. \right. \\ & \quad - \frac{(L_k y_s - v_k)^* d(A_t^k(y_t)) (L_k y_s - v_k)}{2(T_k - s)} - \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A^k(y)_{i,j}, (L_k y - v_k)_i (L_k y - v_k)_j \rangle_s}{2(T_k - s)} \\ & \quad \left. \left. + \int_0^T \check{b}_t^*(y_t) a_t(y_t)^{-1} dy_t - \frac{1}{2} \|\sigma_t(y_t)^{-1} \check{b}_t(y_t)\|^2 dt \right\} \right] \end{aligned}$$

where C is a positive constant and $\check{b} = b - \hat{b}$.

Proof. Let \hat{x} be the solution of

$$d\hat{x}_t = \hat{b}_t(\hat{x}_t)dt + \sigma_t(\hat{x}_t)dw_t, \quad \hat{x}_0 = u$$

Then from Girsanov theorem (see *e.g.* [DH06]), for any bounded continuous function f and g

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x)g(L_1 x_{T_1}, \dots, L_N x_{T_N})] &= \mathbb{E}[f(\hat{x})g(L_1 \hat{x}_{T_1}, \dots, L_N \hat{x}_{T_N}) e^{\int_0^T \check{b}_t^*(\hat{x}_t) a_t(\hat{x}_t)^{-1} d\hat{x}_t - \frac{1}{2} \|\sigma_t(\hat{x}_t)^{-1} \check{b}_t(\hat{x}_t)\|^2 dt}] \\ &= \int \mathbb{E}[f(\hat{x}) e^{\int_0^T \check{b}_t^*(\hat{x}_t) a_t(\hat{x}_t)^{-1} d\hat{x}_t - \frac{1}{2} \|\sigma_t(\hat{x}_t)^{-1} \check{b}_t(\hat{x}_t)\|^2 dt} | (L_k \hat{x}_{t_k} = v_k)_{1 \leq k \leq N}] g(v_1, \dots, v_N) \prod_k dv_k \end{aligned}$$

It remains to apply Theorem 2.3.9. \square

Appendix

Proofs of Lemma 2.3.7 and Corollary 2.3.8

Proof of Lemma 2.3.7. We consider an interval of type $[T_{k-1}, T_k)$. We introduce a process ρ^k , a solution on this interval for the bridge equation (2.14) initialized at time T_{k-1} by the value $\rho_{T_{k-1}}^\varepsilon$. A picture to visualize what is going on is given by Figure 2.2 in page 44. We use this new process ρ^k to write

$$\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}\|^2] \leq 2\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}^k\|^2] + 2\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^k - \rho_{t \wedge \tau_q}\|^2]. \quad (2.37)$$

We will study both terms separately.

For the first one, on $[T_{k-1}, T_k - \varepsilon)$ the term $\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}^k\|$ is 0 a.s. and on $[T_k - \varepsilon, T_k)$, we can reduce the study to that of $\|x_t - \rho_t\|^2$ with a same initialization $\rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon$ at time $T_k - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}^k\|^2 | \rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon]] &\leq 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[\|\rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^k - \rho_{t \wedge \tau_q}^k\|^2 | \rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon]] \\ &\quad + 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon\|^2 | \rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon]]. \end{aligned}$$

We then use Lemma 2.3.15 given in the appendix and classical techniques (see *e.g.* [IW89] p.170) to obtain upper bounds

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}^k\|^2 | \rho_{(T_k - \varepsilon) \wedge \tau_q}^\varepsilon]] \leq c\varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon} \mathbb{E}[\|L_k(\rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - u_k)\|^2]), \quad (2.38)$$

where c is a positive constant. Now in order to treat the remaining term we use Lemma 2.3.16

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^k - \rho_{t \wedge \tau_q}\|^2 | \rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon, \rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon]] \leq \mathbb{E}[\|\rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}\|^2]^\alpha.$$

Finally, on $[T_{k-1}, T_k)$

$$\mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{t \wedge \tau_q}\|^2] \leq c' \left[\varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon} \mathbb{E}[\|L_k(\rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - u_k)\|^2]) + \mathbb{E}[\|\rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_{k-1} \wedge \tau_q}\|^2]^\alpha \right], \quad (2.39)$$

where $0 < \alpha < 1$ and c' is a positive constant only depending on T , bounds b and σ . We show by induction that there exists some constant C such that for all $1 \leq k \leq N$

$$\mathbb{E}[\|\rho_{T_k \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_k \wedge \tau_q}\|^2] \leq C^k \varepsilon^{\alpha^{k-1}}. \quad (2.40)$$

The base case is given by equation (2.38). Indeed on $[0, T_1]$ processes ρ^1 and y are indistinguishable since they have a same initialization at time 0. Suppose now for some k that inequality (2.40) holds. We now use equation (2.39) to get

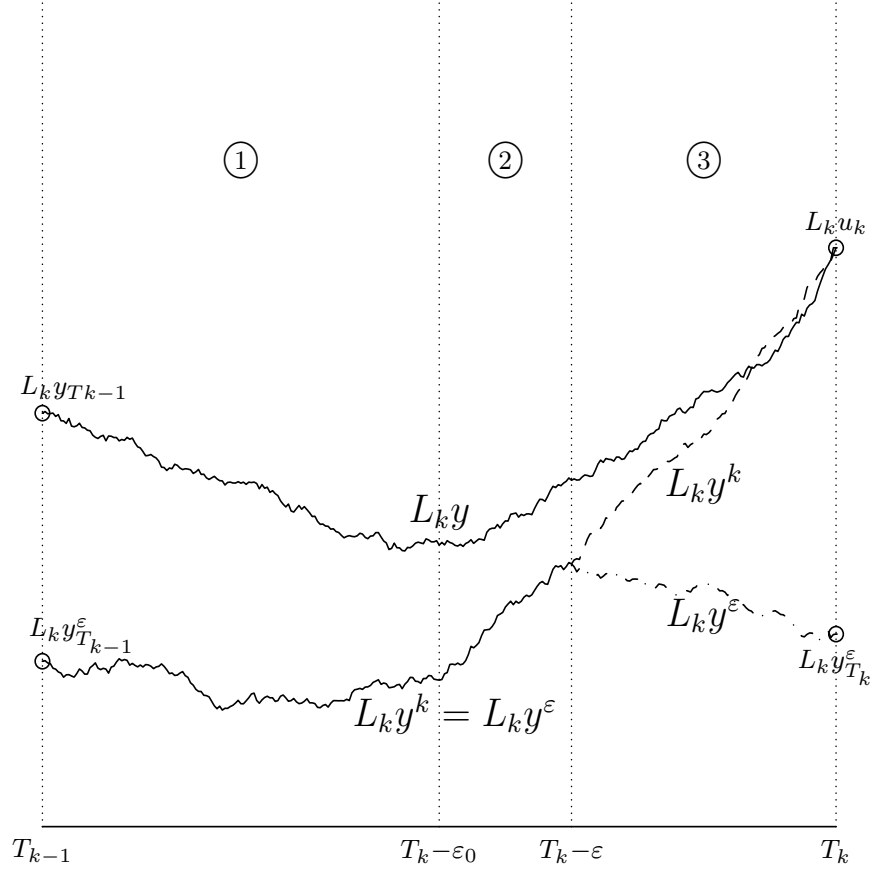
$$\mathbb{E}[\|\rho_{T_{k+1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_{k+1} \wedge \tau_q}\|^2] \leq c' \left[\varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon} \mathbb{E}[\|L_{k+1}(\rho_{T_k \wedge \tau_q}^\varepsilon - u_{k+1})\|^2]) + \mathbb{E}[\|\rho_{T_k \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_k \wedge \tau_q}\|^2]^\alpha \right].$$

That gives us thanks to the induction assumption

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\rho_{T_{k+1} \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_{k+1} \wedge \tau_q}\|^2] &\leq c'_k \varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon} \mathbb{E}[\|\rho_{T_k \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_k \wedge \tau_q}\|^2]) + \mathbb{E}[\|\rho_{T_k \wedge \tau_q}^\varepsilon - \rho_{T_k \wedge \tau_q}\|^2]^\alpha \\ &\leq C[\varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon}) + C^k \varepsilon^{\alpha^k}]. \end{aligned}$$

where C is a positive constant. This concludes the proof. \square

FIGURE 2.2 – Illustration of the three different dynamics considered



Let us recall

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t \quad (2.1)$$

$$d\rho_t = b_t(\rho_t)dt - P_t(\rho_t)\frac{\rho_t - u_k}{T_k - t} + \sigma_t(\rho_t)dw_t \quad (2.14)$$

- ① First, the three processes follow the dynamics of the initial diffusion (2.1) with a different initialization for ρ .
- ② Now, the three processes follow the dynamics of the bridge (2.14), which means that the correction term operates and forces these processes to get closer to the observation
- ③ At the end, only the processes y and ρ^k go on following the dynamics of the bridge (2.14) and both tend to the observation, while ρ^ε follows the initial dynamics (2.1)

Proof of Corollary 2.3.8.

1. It consists in using Lemma 2.3.7 in order to set bounds for the different terms in the following equation

$$\begin{aligned} \rho_t - \rho_t^\varepsilon &= \int_0^t [b_s(\rho_s) - b_s(\rho_s^\varepsilon)] ds + [\sigma_s(\rho_s) - \sigma_s(\rho_s^\varepsilon)] dw_s \\ &\quad + \sum_{k=1}^N P_s^k(\rho_s) \frac{u_k - \rho_s}{T_k - s} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(s) - P_s^k(\rho_s^\varepsilon) \frac{u_k - \rho_s^\varepsilon}{T_k - s} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(s) ds. \end{aligned}$$

For both first terms,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^{t \wedge \tau_q} [b_s(\rho_s) - b_s(\rho_s^\varepsilon)] ds \right\| \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau_q} \|b_s(\rho_s) - b_s(\rho_s^\varepsilon)\| ds \right] \leq C \varepsilon^{\frac{\alpha_q}{2}},$$

and thanks to Davis inequality (*cf.* [Kle05] p.201)

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^{t \wedge \tau_q} [\sigma_s(\rho_s) - \sigma_s(\rho_s^\varepsilon)] dw_s \right\| \right] \leq c \mathbb{E} \left[\sqrt{\int_0^{T \wedge \tau_q} \|\sigma_s(\rho_s) - \sigma_s(\rho_s^\varepsilon)\|^2 ds} \right] \leq C \varepsilon^{\frac{\alpha_q}{2}}.$$

For the remaining terms, we decompose each integral into three parts

$$\begin{aligned} &\int_0^t P_s^k(\rho_s) \frac{u_k - L_k \rho_s}{T_k - s} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k)}(s) - P_s^k(\rho_s^\varepsilon) \frac{u_k - \rho_s^\varepsilon}{T_k - s} \mathbf{1}_{(T_k - \delta_k, T_k - \varepsilon)}(s) ds \\ &= \int_{t \wedge (T_k - \delta_k)}^{t \wedge (T_k - \varepsilon)} [P_s^k(\rho_s) - P_s^k(\rho_s^\varepsilon)] \frac{u_k - \rho_s}{T_k - s} ds + \int_{t \wedge (T_k - \delta_k)}^{t \wedge (T_k - \varepsilon)} P_s^k(\rho_s^\varepsilon) \frac{\rho_s - \rho_s^\varepsilon}{T_k - s} ds \\ &\quad + \int_{t \wedge (T_k - \varepsilon)}^{t \wedge T_k} P_s^k(\rho_s) \frac{u_k - \rho_s}{T_k - s} ds. \end{aligned}$$

The regularity of σ and Lemma 2.3.15 give

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_{t \wedge \tau_q \wedge (T_k - \delta_k)}^{t \wedge \tau_q \wedge T_k} [P_s^k(\rho_s) - P_s^k(\rho_s^\varepsilon)] \frac{u_k - \rho_s}{T_k - s} ds \right\| \right] \\ &\leq c \int_0^{\tau_q \wedge T_k} \mathbb{E} \left[\|\rho_s - \rho_s^\varepsilon\| \frac{\|u_k - \rho_s\|}{T_k - s} \right] \leq c \int_0^{\tau_q \wedge T_k} \frac{\mathbb{E}[\|\rho_s - \rho_s^\varepsilon\|^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{T_k - s}} \mathbb{E} \left[\frac{\|u_k - \rho_s\|^2}{T_k - s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{\alpha_q}{2}}, \end{aligned}$$

where $c > 0$ and $C > 0$ are constant. Then

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_{t \wedge \tau_q \wedge (T_k - \delta_k)}^{t \wedge \tau_q \wedge (T_k - \varepsilon)} P_s^k(\rho_s^\varepsilon) \frac{\rho_s - \rho_s^\varepsilon}{T_k - s} ds \right\| \right] \leq \int_{\tau_q \wedge (T_k - \delta_k)}^{\tau_q \wedge (T_k - \varepsilon)} \frac{\mathbb{E}[\|\rho_s - \rho_s^\varepsilon\|]}{T_k - s} ds \leq \varepsilon^{\frac{\alpha_q}{2}} \log\left(\frac{\delta_k}{\varepsilon}\right).$$

Then, thanks to Lemma 2.3.15, we may write

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_{t \wedge \tau_q \wedge (T_k - \varepsilon)}^{t \wedge \tau_q \wedge T_k} P_s^k(\rho_s) \frac{u_k - \rho_s}{T_k - s} ds \right\| \right] \leq c \int_{T_k - \varepsilon}^{T_k} \frac{ds}{\sqrt{T_k - s}} \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

2. We know that

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|\rho_{t \wedge \tau_q} - \rho_{t \wedge \tau_q}^{\varepsilon_q}\| \right] \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha_q}{2}} (1 - \log \varepsilon).$$

Since $\alpha_q = (cq + 1)^{-N}$ for a constant c , it suffices to take

$$\varepsilon_q = e^{-(cq+1)^{N+1}}.$$

Hence

$$\mathbb{E} \left[\sum_{q \geq 1} \sup_{t \in [0, T]} \|\rho_{t \wedge \tau_q} - \rho_{t \wedge \tau_q}^{\varepsilon_q}\| \right] \leq \sum_{q \geq 1} C e^{-(cq+1)^{N+1}} (1 + 2(cq + 1)^{N+1}),$$

which converges. This implies that for all $t \in [0, T]$, the quantity $\|\rho_t - \rho_t^{\varepsilon_q}\|$ converges almost surely toward 0. \square

Technical lemmas

Lemma 2.3.14. *Let us consider equation (2.14) with random initial condition u on $[0, T]$ with $N = 1$, which means only one observation time in T ,*

$$d\rho_t = b_t(\rho_t)dt + \sigma_t(\rho_t)w_t - P_t(\rho_t) \frac{\rho_t - u_1}{T - t} \mathbf{1}_{(T - \varepsilon_1, T)}(t)dt, \quad \rho_0 = u$$

Then this equation admits a unique strong solution on $[0, T)$. Moreover $\|L(\rho_t - u_1)\|^2 \leq C(\omega)(T - t) \log \log[(T - t)^{-1} + e]$ a.s., where C is a positive random variable.

Proof. We recall that parameters b and σ are locally Lipschitz functions. So that the equation admits a unique solution on both intervals $[0, T - \varepsilon_1]$ and $(T - \varepsilon_1, T)$ and so on $[0, T)$. Moreover thanks to Itô's formula, on $(T - \varepsilon_1, T)$

$$d \frac{L(\rho_t - u_1)}{T - t} = (T - t)^{-1} L[b_t dt + \sigma_t dw_t - P_t \frac{\rho_t - u_1}{T - t} dt] + L \frac{\rho_t - u_1}{(T - t)^2} dt$$

then using (2.22), we have $LP_t = L$ so that

$$d \frac{L(\rho_t - u_1)}{T - t} = (T - t)^{-1} L[b_t dt + \sigma_t dw_t]$$

For all $1 \leq i \leq m$ the process $\{(\int_0^t (T - s)^{-1} L\sigma_s(\rho_s)dw_s)_i, t \geq 0\}$ is a continuous local martingale whose quadratic variation $\tau_t = \int_0^t \sum_{1 \leq j, k \leq n} (T - s)^{-2} (L_{i,j}\sigma_s(\rho_s)_{j,k})^2 ds$ satisfies $\lim_{t \rightarrow T} \tau_t = +\infty$ and $\tau_t \leq \frac{c}{T-t}$ where c is a positive constant. Hence we just have to apply

the Dambis-Dubins-Schwarz theorem that gives us the existence of a Brownian motion B^i such that

$$\left(\int_0^t (T-s)^{-1} L \sigma_s(\rho_s) dw_s \right)_i = B^i(\tau_t)$$

The law of iterated logarithm allows us to conclude. \square

Lemma 2.3.15. *Let us consider equation (2.14) with random initial condition u on $[0, T]$ with $N = 1$ which means only one observation time in T*

$$d\rho_t = b_t(\rho_t)dt - P_t(\rho_t) \frac{\rho_t - u_1}{T-t} dt + \sigma_t(\rho_t)dw_t, \quad \rho_0 = u.$$

Then for all $s < t < T$,

$$\frac{\mathbb{E}[\|L(\rho_t - u_1)\|^2]}{T-t} \leq c(1 + \sqrt{T-t} \mathbb{E}[\|L(u - u_1)\|^2]), \quad (2.41)$$

and

$$\mathbb{E}[\|\rho_s - \rho_t\|^2] \leq C(t-s)(1 + \sqrt{T-s} \mathbb{E}[\|L(u - u_1)\|^2]), \quad (2.42)$$

where c and C are positive constants depending on T , ε_1 , bounds for b and σ .

Proof. Thanks to Identity (2.22), on $(T - \varepsilon_1, T)$

$$dL(\rho_t - u_1) = L[b_t dt + \sigma_t dw_t] - L \frac{\rho_t - u_1}{T-t} dt.$$

Thus

$$d(\|L(\rho_t - u_1)\|^2) = 2(\rho_t - u_1)^* L^* L[b_t dt + \sigma_t dw_t] - 2 \frac{\|L(\rho_t - u_1)\|^2}{T-t} dt + \text{Tr}(La_t L^*) dt,$$

where the function Tr gives the sum of all diagonal terms. Finally

$$d\left(\frac{\|L(\rho_t - u_1)\|^2}{T-t}\right) = 2 \frac{(\rho_t - u_1)^* L^* L[b_t dt + \sigma_t dw_t]}{T-t} + \frac{\text{Tr}(La_t L^*)}{T-t} dt - \frac{\|L(\rho_t - u_1)\|^2}{(T-t)^2} dt.$$

Setting $E_t = \mathbb{E}\left[\frac{\|L(\rho_t - u_1)\|^2}{T-t}\right]$, since b and σ are bounded, we get

$$E'_t \leq C_1 \left(\frac{\sqrt{E_t} + 1}{T-t} \right) - \frac{E_t}{T-t}, \quad (2.43)$$

where C_1 is a positive constant depending on $\|b\|_\infty$ and $\|\sigma\|_\infty$.

$$E'_t \leq (T-t)^{-1} \left[C_1 \left(\frac{E_t}{2C_1} + \frac{C_1}{2} + 1 \right) - E_t \right] = (T-t)^{-1} \left(C - \frac{E_t}{2} \right), \quad (2.44)$$

where $C = C_1 + \frac{C_1^2}{2}$. Thus

$$\left(\frac{E_t - 2C}{\sqrt{T-t}}\right)' = \frac{E_t'}{\sqrt{T-t}} + \frac{E_t - 2C}{2(T-t)^{\frac{3}{2}}} \leq 0,$$

thanks to (2.44). Hence

$$\frac{E_t - 2C}{\sqrt{T-t}} \leq \frac{E_{T-\varepsilon_1} - 2C}{\sqrt{\varepsilon_1}},$$

which can be written as

$$E_t \leq 2C + \sqrt{\frac{T-t}{\varepsilon_1}}(E_{T-\varepsilon_1} - 2C).$$

Similarly for $t < T - \varepsilon_1$, inequality (2.43) becomes

$$E_t \leq C'(E_0 + 1) \exp\left\{\frac{C't}{\varepsilon_1}\right\},$$

where C' is a positive constant only depending on T and bounds of b and σ . That gives us (2.41).

By definition for $s, t \in (T - \varepsilon_1, T)$ we have

$$\rho_t - \rho_s = \int_s^t b_\tau d\tau + \sigma_\tau dw_\tau - P_\tau \frac{\rho_\tau - u_1}{T - \tau} d\tau.$$

Since b and σ are bounded functions, using Minkowski's inequality

$$\mathbb{E}[\|\rho_t - \rho_s\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}[\|\int_s^t b_\tau d\tau\|^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[\|\int_s^t \sigma_\tau dw_\tau\|^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[\|\int_s^t P_\tau \frac{\rho_\tau - u_1}{T - \tau} d\tau\|^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

Thanks to Doob's inequality (see *e.g.* [IW89] p.170) we get

$$\mathbb{E}[\|\int_s^t b_\tau d\tau\|^2] + \mathbb{E}[\|\int_s^t \sigma_\tau dw_\tau\|^2] \leq C_2(t-s),$$

where $C_2 = C_1^2$ is the square of the constant introduced above. Thanks to Minkowski's Integral Inequality (see *e.g.* [HLP88] p.146), assumptions (2.22) on matrix P and result (2.41), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \int_s^t P_\tau \frac{\rho_\tau - u_1}{T - \tau} d\tau \right\|^2 \right] &\leq \left(\int_s^t \mathbb{E} \left[\frac{\|P_\tau(\rho_\tau - u_1)\|^2}{(T - \tau)^2} \right]^{\frac{1}{2}} ds \right)^2 \\ &\leq c(1 + \sqrt{T-s} \mathbb{E}[\|L(u - u_1)\|^2]) \left(\int_s^t \frac{d\tau}{\sqrt{T-\tau}} \right)^2 = 4c(t-s)(1 + \sqrt{T-s} \mathbb{E}[\|L(u - u_1)\|^2]). \end{aligned}$$

Finally using $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, we have on $(T - \varepsilon_1, T)$

$$\mathbb{E}[\|\rho_t - \rho_s\|^2] \leq (C_2 \wedge 4c)(t-s)(2 + \sqrt{T-s} \mathbb{E}[\|L(u - u_1)\|^2]).$$

Using Doob's inequality for $s, t \in [0, T - \varepsilon_1]$ with $s < t$

$$\mathbb{E}[\|\rho_t - \rho_s\|^2] \leq C_2(t - s),$$

this gives the second result (2.42). \square

Lemma 2.3.16. *Let ρ and z be two bridges. For any positive integer q , we introduce a stopping time τ_q*

$$\tau_q = \inf\{t \in [0, T] : \|\rho_t\| > q\}.$$

Then

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q} - z_{t \wedge \tau_q}\|^2] \leq C(\mathbb{E}[\|\rho_0 - z_0\|^2])^{\frac{1}{Cq+1}},$$

where $C > 0$ depends on T, n , on the uniform bounds of the different coefficients, and linearly on the number $\sqrt{\mathbb{E}[\|Lz_0 - v\|^2]} \vee \sqrt{\mathbb{E}[\|L\rho_0 - v\|^2]}$.

Proof. By definition of both processes ρ and z , we are able to write on $[0, T - \delta_0]$

$$\begin{aligned} d\|\rho_t - z_t\|^2 &= 2(\rho_t - z_t)^* \{[b_t(\rho_t) - b_t(z_t)]dt + [\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)]dw_t\} \\ &\quad + \text{Tr}([\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)][\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)]^*) dt \end{aligned} \quad (2.46)$$

On $[T - \delta_0, T]$

$$\begin{aligned} d\|\rho_t - z_t\|^2 &= 2(\rho_t - z_t)^* \{[b_t(\rho_t) - b_t(z_t)]dt + [\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)]dw_t\} \\ &\quad + \text{Tr}([\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)][\sigma_t(\rho_t) - \sigma_t(z_t)]^*) dt \\ &\quad + 2(\rho_t - z_t)^* \left\{ P_t(\rho_t) \frac{v - L\rho_t}{T - t} - P_t(z_t) \frac{v - Lz_t}{T - t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Let $E_t = \mathbb{E}[\|\rho_{t \wedge \tau_q} - z_{t \wedge \tau_q}\|^2]$. We decompose its study into two intervals $[0, T - h]$ and $[T - h, T]$ where h will be chosen small *a posteriori*.

First, on $[T - h, T]$, thanks to Lemma 2.3.15, we are able to get a rough estimate by applying Cauchy-Schwarz inequality to equations (2.46) and (2.47).

$$E'_t \leq C_1 \sqrt{\frac{E_t}{T - t}},$$

where $C_1 > 0$ depends on T , on the dimension n , on the uniform bounds of the different coefficients, and linearly on the number $\sqrt{\mathbb{E}[\|Lz_0 - v\|^2]} \vee \sqrt{\mathbb{E}[\|L\rho_0 - v\|^2]}$. Then by integration

$$\sqrt{E_t} \leq C_1(\sqrt{h} - \sqrt{T - t}) + \sqrt{E_{T-h}} \leq C_1\sqrt{h} + \sqrt{E_{T-h}}.$$

By using the inequality $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 2(a + b)$,

$$E_t \leq 2(C_1^2 h + E_{T-h})$$

Now, for all $(t, \rho, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$P_t(\rho) \frac{\rho - u_1}{T-t} - P_t(z) \frac{z - u_1}{T-t} = [P_t(\rho) - P_t(z)] \frac{\rho - u_1}{T-t} + P_t(z) \frac{\rho - z}{T-t} \quad (2.48)$$

Since the coefficients b, σ, a and A are regular functions, we combine equations (2.46) and (2.47) and also Lemma 2.3.15 to get

$$\begin{aligned} \forall t \leq \tau_q, \quad d\|\rho_t - z_t\|^2 &\leq C\|\rho_t - z_t\|^2(1 + \frac{q}{T-t}) \\ \forall t > \tau_q, \quad d\|\rho_{t \wedge \tau_q} - z_{t \wedge \tau_q}\|^2 &= d\|\rho_{\tau_q} - z_{\tau_q}\|^2 \leq C\|\rho_{\tau_q} - z_{\tau_q}\|^2(1 + \frac{q}{T-\tau_q}) \\ &\leq C_0\|\rho_{t \wedge \tau_q} - z_{t \wedge \tau_q}\|^2(1 + \frac{q}{T-t}), \end{aligned}$$

then E satisfies

$$E'_t \leq C_2 \frac{qE_t}{T-t},$$

where $C_2 > 0$ depends on T , on the dimension n , on the uniform bounds of the different coefficients, and linearly on the number $\sqrt{\mathbb{E}[\|Lz_0 - v\|^2]}$. This leads to

$$E_t \leq E_0 \left(\frac{T}{T-t} \right)^{C_2 q} \leq E_0 \left(\frac{T}{h} \right)^{C_2 q}.$$

Generally, on $[0, T]$, after substitution, we have obtained that

$$E_t \leq 2E_0 \left(\frac{T}{h} \right)^{Cq} + 2Ch,$$

where $C = C_1^2 \vee C_2$. We choose $h = (qE_0T^{Cq})^{\frac{1}{Cq+1}}$ which minimizes the right-hand side above. Then,

$$E_t \leq 2(E_0T^{Cq})^{\frac{1}{Cq+1}} (q^{\frac{-Cq}{Cq+1}} + Cq^{\frac{1}{Cq+1}}),$$

and the last factor in the right-hand side is bounded with respect to q . \square

Lemma 2.3.17. *Almost surely, for all $1 \leq k \leq N$ the following integral is absolutely convergent*

$$\begin{aligned} \int_{T_k - \delta_k}^{T_k} \frac{(L_k y_t - v_k)^* A_t^k(y_t) L_k b_t(y_t) dt}{T_k - t} + \frac{(L_k y_t - v_k)^* dA_t^k(y_t) (L_k y_t - v_k)}{2(T_k - t)} \\ + \sum_{1 \leq i, j \leq m_k} \frac{d\langle A_{i,j}^k(y), (L_k y - v_k)_i (L_k y - v_k)_j \rangle_t}{2(T_k - t)} \quad (2.49) \end{aligned}$$

Proof. We reduce the study without loss of generality to that of

$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t - \sigma_t(y_t)\beta_t(y_t) \frac{Ly_t - v}{T-t} \mathbf{1}_{(T-\delta_1, T)}(t)dt.$$

We then treat integrability for each term.

For the first term, since b and β are bounded, we use Lemma 2.3.6 to get

$$\left\| \frac{Ly_t - v}{T - t} \right\| \leq C \sqrt{\frac{\log \log ((T - t)^{-1} + e)}{T - t}},$$

where C is a positive random variable. Now, for all positive α , we have $\log \log x \leq x^\alpha$. Then for α small enough, we obtain integrability of right-hand side.

For the second term in (2.49), we recall that for all z we have $A_t(z) = \beta_t(z)^* \beta_t(z) = (La_t(z)L^*)^{-1}$, hence

$$dA_t = p_t dt + q_t dw_t + r_t \frac{Ly_t - v}{T - t} dt,$$

where p , q and r are bounded adapted processes. So that

$$\frac{(Ly_t - v)^* dA_t (Ly_t - v)}{T - t} = \frac{\|Ly_t - v\|^2}{T - t} p_t dt + \frac{\|Ly_t - v\|^2}{T - t} q_t dw_t + \frac{\|Ly_t - v\|^2}{(T - t)^2} r_t dt, \quad (2.50)$$

where p , q and r are bounded adapted processes. Using Lemma 2.3.6, we obtain that the quantities $\frac{\|Ly_t - v\|^2}{T - t}$, $\frac{\|Ly_t - v\|^2}{(T - t)^2}$ and $\frac{\|Ly_t - v\|^4}{(T - t)^2}$ are integrable in a left neighbourhood of T .

For the last term in (2.49), we use Itô's formula and the fact that $L\sigma_t(z)\beta_t(z) = I_d$, so that on $(T - \delta_k, T_k)$

$$d(Ly_t - v) = L[b_t dt + \sigma_t dw_t] - \frac{Ly_t - v}{T - t} dt.$$

Hence

$$d\langle A_{i,j}, (Ly_t - v)_i (Ly_t - v)_j \rangle_t \leq \|Ly_t - v\| p_t dt,$$

where p is the same bounded adapted process given above. Finally

$$\sum_{i,j} \frac{d\langle A_{i,j}, (Ly_t - v)_i (Ly_t - v)_j \rangle_t}{T - t} \leq \frac{\|Ly_t - v\| p_t}{T - t} dt,$$

for some bounded adapted process p , and this last term is integrable. \square

Lemma 2.3.18. *Suppose assumptions of Theorem 2.3.9 are verified. Let process θ defined on $[t_0, T]$ by*

$$\theta_t = \frac{1}{\sqrt{T - t}} \exp\left\{-\frac{\|\beta_t(Lx_t - v)\|^2}{2(T - t)}\right\}.$$

Then, there exist a bounded adapted process π , a martingale M both defined on $[t_0, T]$ and a positive number h , such that

$$d\theta_t = dM_t + \theta_t^{1-h} (T - t)^{-\frac{1+h}{2}} \pi_t dt.$$

Proof. For $t \in [t_0, T]$, let $z_t = Lx_t - v$, $p_t = \|\beta_t(Lx_t - v)\|$, we have

$$\theta_t = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \exp\left\{-\frac{p_t^2}{2(T-t)}\right\} \quad \text{and} \quad p_t^2 = z_t^* A_t z_t.$$

It is also easy to see that

$$dz_t = Lb_t dt + L\sigma_t dw_t,$$

and then $d\langle z \rangle_t = La_t L^* dt = (A_t)^{-1} dt$. We use Itô's formula

$$d(p_t^2) = d(z_t^* A_t z_t) = 2z_t^* A_t dz_t + z_t^* dA_t z_t + \sum_{i,j} d\langle A_{i,j}, z_i z_j \rangle_t + m dt.$$

Then

$$d\frac{p_t^2}{T-t} = \frac{2z_t^* A_t dz_t}{T-t} + \frac{p_t^2 dt}{(T-t)^2} + \frac{z_t^* dA_t z_t}{T-t} + \frac{m dt}{T-t} + \frac{\sum_{i,j} d\langle A_{i,j}, z_i z_j \rangle_t}{T-t}.$$

First using definitions of z , β and A we get

$$\begin{aligned} z_t^* A_t dz_t &= z_t^* A_t L dx_t = z_s^* A_t L \sigma_t \sigma_t^{-1} dx_t \\ &= z_t^* (\beta_t)^* \sigma_t^{-1} b_t dt + z_t^* (\beta_t)^* dw_t. \end{aligned}$$

This leads us to the existence of two bounded adapted processes $r^{(1)}$ and $r^{(2)}$ defined on $[t_0, T]$ such that

$$z_t^* A_t dz_t = p_t r_t^{(1)} dt + p_t r_t^{(2)} dw_t.$$

In a same way we remark that there exist two bounded adapted processes $r^{(3)}$ and $r^{(4)}$ such that

$$d(La_t L^*) = r_t^{(3)} dt + r_t^{(4)} dw_t.$$

we get

$$z_t^* dA_t z_t = z_t^* (d(La_t L^*)^{-1}) z_t = p_t^2 r_t^{(3)} dt + p_t^2 r_t^{(4)} dw_t$$

for some bounded adapted processes $r^{(3)}$ and $r^{(4)}$. Finally, we obtain existence of two bounded adapted processes r and r' such that

$$d\frac{p_t^2}{T-t} = \frac{2p_t dw_t}{T-t} + \frac{p_t^2 dt}{(T-t)^2} + r_t \frac{p_t^2}{T-t} dw_t + \frac{dt}{T-t} + r'_t \frac{p_t^2 + p_t}{T-t} dt.$$

From this we deduce its quadratic variation

$$d\left\langle \frac{p_t^2}{T-t} \right\rangle = \frac{4p_t^2 + r_t^2 p_t^4 + 4r_t p_t^3}{(T-t)^2} dt.$$

Now we apply Itô's formula to the function θ always for $t \in [t_0, T]$

$$d\theta_t = \frac{\theta_t dt}{2(T-t)} - \frac{1}{2} \theta_t d\left(\frac{p_t^2}{T-t}\right) + \frac{1}{8} \theta_t d\left\langle \frac{p_t^2}{T-t} \right\rangle.$$

We deduce from the three last equations after simplification of four terms that there exist a martingale M and a bounded adapted process r'' both defined on $[t_0, T]$ such that

$$d\theta_t = dM_t + \theta_t r_t'' \left(\frac{p_t^2 + p_t}{T-t} + \frac{p_t^4 + p_t^3}{(T-t)^2} \right) dt.$$

For any $h > 0$, functions $x \mapsto e^{-h\frac{x^2}{2}} |z|^m$ for $m = 1, 2, 3, 4$ are all bounded, then there exists a constant c_h such that

$$(\sqrt{T-t}\theta_t)^h \left(\frac{p_t^2 + p_t}{T-t} + \frac{p_t^4 + p_t^3}{(T-t)^2} \right) \leq \frac{c_h}{\sqrt{T-t}}.$$

This gives us the existence of a bounded adapted process π defined on $[t_0, T]$ that allows us to write

$$d\theta_t = dM_t + \theta_t^{1-h} (T-t)^{-\frac{1+h}{2}} \pi_t dt.$$

□

2.3.3 Simulations

Afin d'illustrer le Théorème 2.3.9 nous allons présenter des simulations du modèle d'Heston (*cf.* [DJB05]). Utilisé en finances, ce modèle se traduit par une équation du prix d'une action S dont la volatilité v est solution d'une seconde équation différentielle stochastique autonome

$$\begin{cases} dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + \kappa\sqrt{v_t}dw_t^1, \\ dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dw_t^2 \end{cases}$$

où

$$w^2 = \cos(\alpha)w^1 + \sin(\alpha)w^3. \quad (2.51)$$

où w^1 et w^3 sont deux mouvements browniens indépendants. La covariance $\cos(\alpha)$ est un paramètre du modèle.

- le coefficient μ correspond à la tendance du marché,
- le coefficient θ est la moyenne en temps long,
- le coefficient γ est le taux de relaxation de retour à la moyenne,
- enfin, le coefficient κ est la variance du bruit.

Dans les faits, seule le prix de l'action est observable. On cherche donc à utiliser notre résultat afin de reconstruire la volatilité à l'aide de ces seules observations du prix de l'action à des temps donnés.

Remarque 2.3.19. *La covariance des deux mouvements browniens w^1 et w^2 est très importante en pratique. En effet, afin de le mettre en évidence, reprenons les notations du Théorème 2.3.9 en dimension quelconque. La matrice σ peut s'écrire*

$$\sigma_t(z) = \begin{pmatrix} L_k \\ L_k^\perp \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \pi_t(z) & \kappa_t(z) \\ \phi_t(z) & \rho_t(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_k \\ L_k^\perp \end{pmatrix}$$

où les vecteurs lignes arbitraires de L_k^\perp complètent ceux de L_k pour former une base orthonormale. Si la matrice $K_t(z) = \pi_t(z)\phi_t(z)^* + \kappa_t(z)\rho_t(z)^* \neq 0$, alors le terme de correction agit également sur la variable observable ! En effet le terme correcteur devient

$$\sigma_t(z)\sigma_t(z)^*L_k^*A_t(z) = \begin{pmatrix} L_k \\ L_k^\perp \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} I_{m_k} \\ L_k^\perp \sigma_t(z)[L_k \sigma_t(z)]^* A_t(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k \\ L_k^\perp \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} I_{m_k} \\ K_t(z)A_t(z) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

(cette expression est bien indépendante du choix de L_k^\perp !) Ainsi, la loi de la variable d'état $L_k^\perp x$ est également corrigée, on évite alors la simulation à l'aveugle pour la variable d'état. C'est dans ce cadre que le Théorème 2.3.9 semble le plus intéressant finalement.

On introduit alors le processus $z = \log\left(\frac{S}{S_0}\right) - \mu t$. Ce qui nous donne le système suivant

$$\begin{cases} dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + \kappa\sqrt{v_t}dw_t^1, \\ dz_t = -\frac{v_t}{2}dt + \sqrt{v_t}dw_t^2. \end{cases}$$

Afin de satisfaire l'Hypothèse 2.2.1, on limite l'évolution des coefficients

$$\begin{cases} dv_t = -\gamma(f_r(v_t) - \theta)dt + \kappa\sqrt{f_r(v_t)}dw_t^1, \\ dz_t = -\frac{f_r(v_t)}{2}dt + \sqrt{f_r(v_t)}dw_t^2. \end{cases}$$

avec $f_r(x) = \max\left(\min(x, r), \frac{1}{r}\right)$ qui confine ainsi x dans une bande $E_r = [\frac{1}{r}, r]$.

On peut expliciter alors les quantités nécessaires à la mise en place de la simulation conditionnelle

$$\sigma_t(v, z) = \begin{pmatrix} \kappa\sqrt{f_r(v)} & 0 \\ \cos(\alpha)\sqrt{f_r(v)} & \sin(\alpha)\sqrt{f_r(v)} \end{pmatrix}, \quad a_t(v, z) = \begin{pmatrix} \kappa^2 f_r(v) & \kappa \cos(\alpha) f_r(v) \\ \kappa \cos(\alpha) f_r(v) & f_r(v) \end{pmatrix}$$

$$A_t(v, z) = \frac{1}{f_r(v)}, \quad a_t L^* A_t = \begin{pmatrix} \kappa \cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que ce dernier vecteur donne la direction de correction. Il apparaît clairement que le choix de la covariance des mouvements browniens, comme remarqué plus haut, joue un rôle dans la correction de la variable d'état (v_t). Le pont correspondant est ainsi donné par

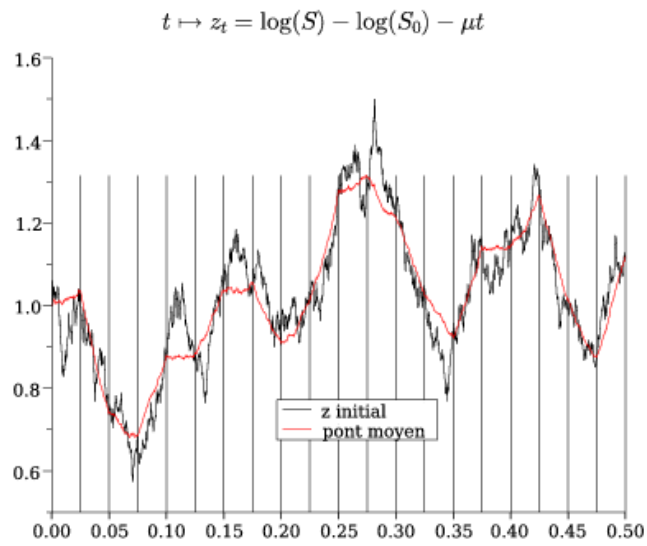
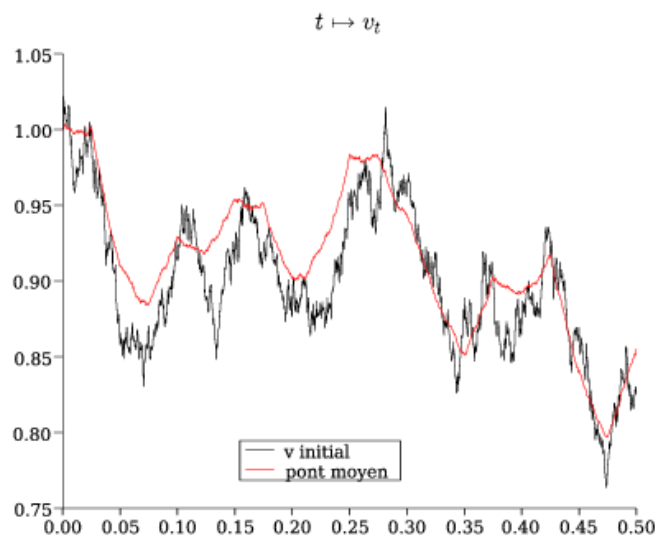
$$\begin{cases} d\hat{v}_t = -\gamma(f_r(\hat{v}_t) - \theta)dt + \kappa\sqrt{f_r(\hat{v}_t)}dw_t^1 + \kappa \cos(\alpha) \frac{z_k - \hat{z}_t}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_{k-1}, T_k)}(t)dt, \\ d\hat{z}_t = -\frac{f_r(\hat{v}_t)}{2}dt + \sqrt{f_r(\hat{v}_t)}dw_t^2 + \frac{z_k - \hat{z}_t}{T_k - t} \mathbf{1}_{(T_{k-1}, T_k)}(t)dt, \end{cases} \quad (2.53)$$

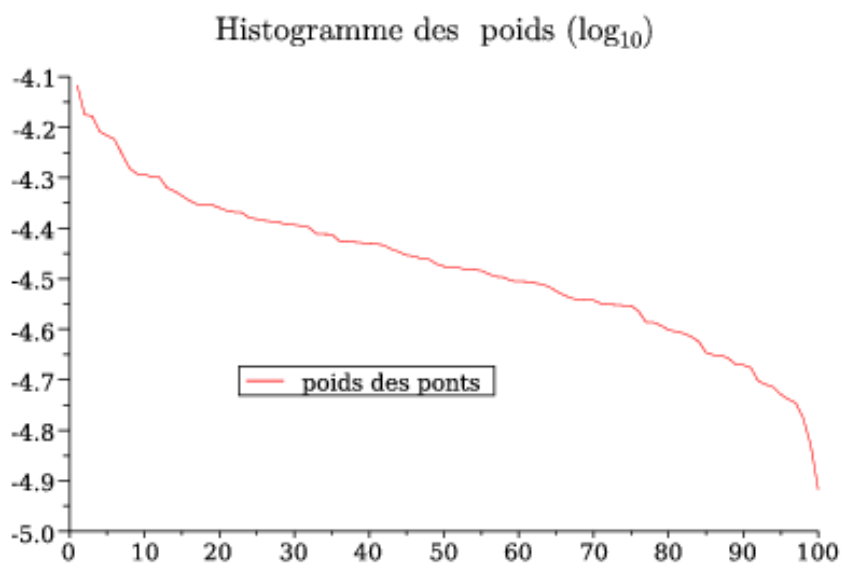
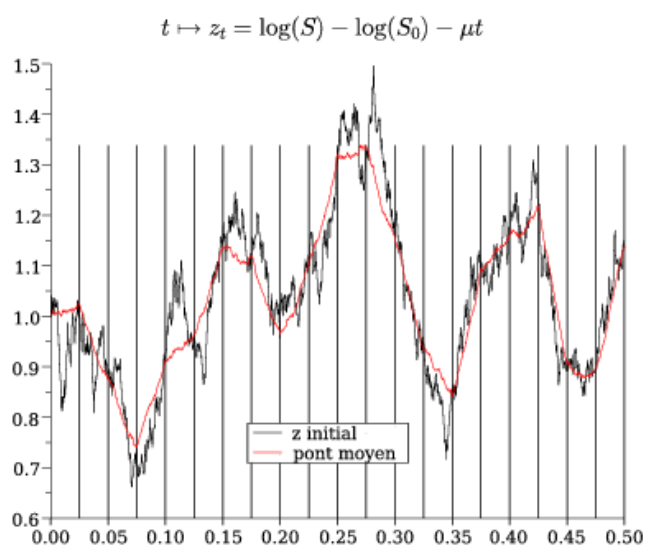
où z_k est la valeur observée de la variable z_{T_k} .

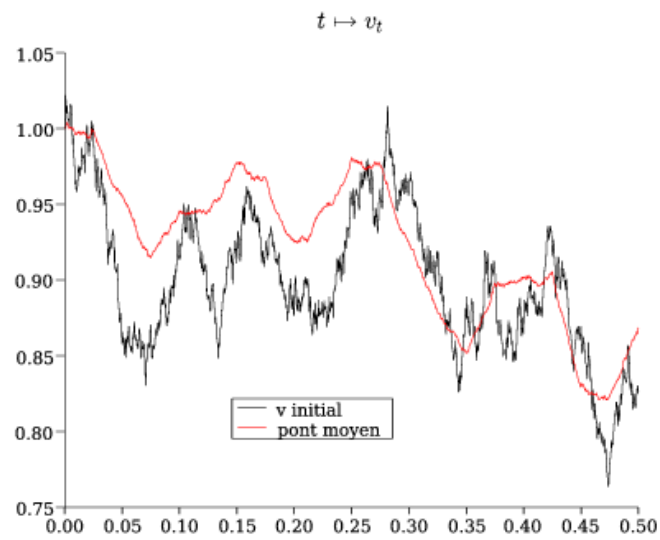
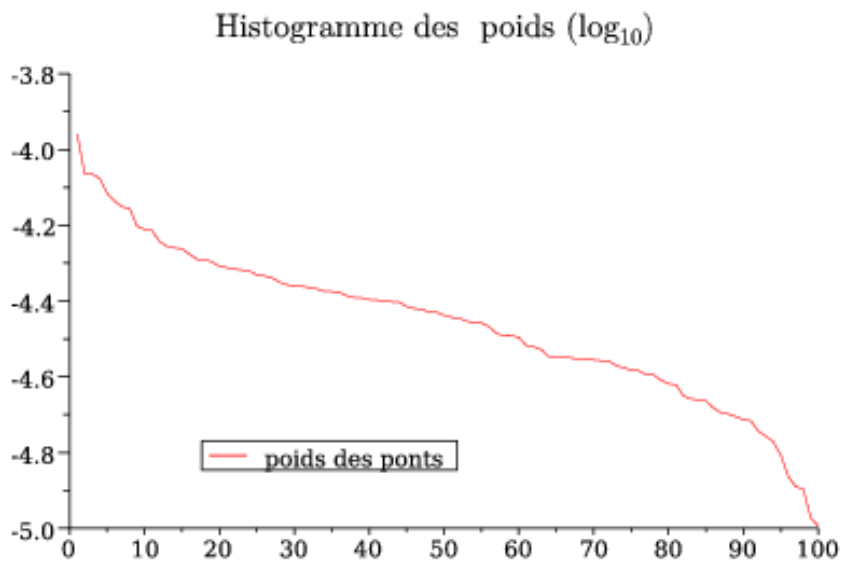
Pour la calibration du jeu de paramètres du modèle, nous avons choisi une estimation de ceux-ci obtenus dans [SST]

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,6067 \\ \theta &= 0,0707 \\ \kappa &= 0,2928. \end{aligned}$$

On a alors traité deux cas, chacun réalisé à partir d'une même graine, avec 20 observations, et 1500 pas de discrétisation. Dans le premier $\cos(\alpha) = 0,9$ (Figures 2.3, 2.4 et 2.5 p.56-57) et dans le second $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Figures 2.6, 2.7 et 2.8 p.57-58). Dans les deux cas on a simulé 100 ponts correspondants et calculé la moyenne pondérée à l'aide de la densité du Théorème 2.3.9. Sur les graphiques présentés les trajectoires en noires représentent notre « vérité terrain », les observations ont été relevées sur la trajectoire noire simulée à l'aide de la loi de z . Les trajectoires rouges correspondent aux reconstructions réalisées par la moyenne pondérée. A chaque fois est également représenté un histogramme des poids obtenus. Par poids, on entend l'évaluation de la fonction de densité à la constante de normalisation (constante inconnue) près. On ne peut donc comparer directement les poids suivant les deux types de corrélation considérés, vu que la densité et donc la constante de normalisation inconnue dépendent de la valeur du $\cos(\alpha)$. Une étude plus approfondie du comportement de ces poids permettrait certainement une interprétation des valeurs obtenues. Cependant, il est intéressant de voir qu'il n'y a pas qu'une trajectoire qui prend tout le poids. On a grossièrement un facteur 10 entre le meilleur poids et le plus faible dans chaque cas. Il ressort clairement que la reconstruction semble bien meilleure dans le premier cas, la volatilité reconstruite suit la volatilité de référence, alors que dans le deuxième cas, c'est beaucoup moins flagrant.

FIGURE 2.3 – Premier cas : $\cos(\alpha) = 0,9$ FIGURE 2.4 – Premier cas : $\cos(\alpha) = 0,9$

FIGURE 2.5 – Premier cas : $\cos(\alpha) = 0,9$ FIGURE 2.6 – Deuxième cas : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

FIGURE 2.7 – Deuxième cas : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ FIGURE 2.8 – Deuxième cas : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Chapitre 3

Application

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Étienne Mémin et Anne Cuzol de l'équipe FLUMINANCE de l'INRIA. Cette équipe s'intéresse aux modèles d'écoulements fluides que l'on retrouve en météorologie et dans les mouvements océaniques. Un des objectifs d'Étienne Mémin et Anne Cuzol est de créer des méthodes de reconstruction d'une telle dynamique à l'aide d'images observées voir Figure 3.1. C'est dans ce cadre que nous cherchons à exploiter le Théorème 2.3.9.

3.1 Modèle Général

Le modèle déterministe habituellement adopté repose sur les équations de Navier-Stokes. Celles-ci décrivent le bilan de quantité de mouvement et ainsi permettent de caractériser la vitesse $v_t(x_t)$ de chaque particule physique dont la position au temps t est donnée par la variable x_t . Dans le cas d'un fluide incompressible, elles se traduisent par

$$\begin{cases} x_0^z = z, \\ dx_t^z = v_t(x_t^z)dt, \\ dv_t(x_t^z) = -\frac{1}{\rho}\nabla p_t(x_t^z) + \nu\Delta v_t(x_t^z)dt, \\ \operatorname{div}(v_t(x)) = 0, \end{cases}$$

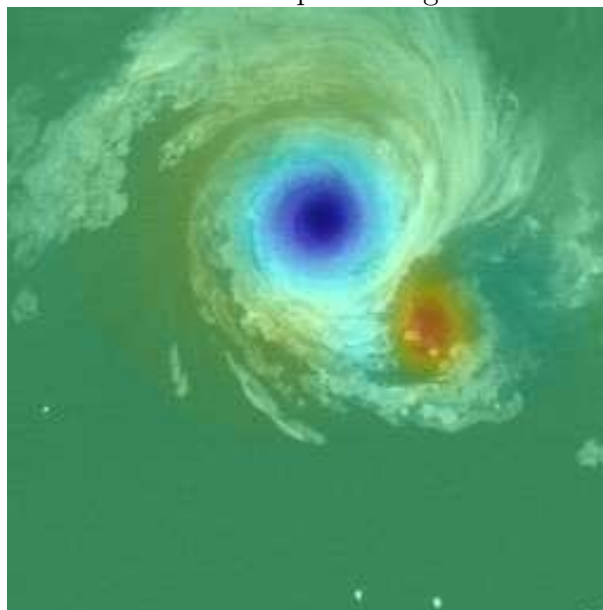
où p est un terme de pression. Notre modèle cherche à ajouter une incertitude de position dans la dynamique des particules. Mais nous allons tout de même conserver certaines hypothèses du modèle déterministe.

La première idée importante dans notre choix de modèle tient dans l'hypothèse que le long du flot, la dérive $t \mapsto V_t(X_t^z)$ d'une particule X_t^z initialisée en z , satisfait à la formulation lagrangienne de l'équation de Navier-Stokes en dimension 2 dans le cas d'un fluide incompressible

$$dV_t(X_t^z) = -\frac{1}{\rho}\nabla P_t(X_t^z)dt + \nu\Delta V_t(X_t^z)dt, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(V_t(x)) = 0. \quad (3.2)$$

FIGURE 3.1 – Exemple d’image observée.



Source : http://www.irisa.fr/fluminance/images/onera_bi.jpg

Le choix de la dimension se justifie par sa simplicité, principalement parce que l'on peut se ramener à l'étude du rotationnel de V comme on le verra plus tard, et ainsi se dédouaner du terme de pression. Ceci évite d'étudier ce champ, ce qui rajouterait des équations d'évolutions à notre système. Bien sûr, dans notre cas, on suppose que cette approximation d'un champ tridimensionnel est satisfaisante en terme d'interprétation physique. De nombreux travaux traitent de ce modèle à l'aide d'outils probabilistes. On peut distinguer plusieurs classes suivant les objectifs. Certains se sont intéressés à une méthode type Monte-Carlo pour approcher la solution déterministe. Sans être exhaustif (ce n'est pas le but ici), on peut citer par exemple les travaux de C.Marcharo et M.Pulvirenti [MP82], et plus récemment S.Méléard [Mél00] et [Mél01]. Un second objectif possible est l'ajout d'un terme aléatoire représentant une force qui vient s'ajouter au bilan de la quantité de mouvement, cette contrainte physique va ainsi se répercuter sur toutes les variables liées au flot. On peut citer par exemple, entre autres encore une fois, les travaux de A.Bensoussan et R.Temam [BT73], et plus récemment de R.Mikulevicius et B.Rozovskii [MR02], [MR04] et [MR05], de M.Hairer et J.C.Mattingly [HM06], ou encore de G.Da Prato et A.Debussche [DPD08]. Ces modèles visent, entre autres, à respecter rigoureusement une logique physique déterministe ou non et l'aléa peut servir alors à estimer les solutions ou bien à inclure une force non-déterministe. Notre approche s'inscrirait dans une troisième classe de modèles liés aux équations de Navier-Stokes 2D. En effet, notre objectif est d'obtenir un lien entre les représentations eulériennes du champ des vitesses et les images obtenues afin de reconstruire le champ des vitesses. On inclut une incertitude de position des particules qui se répercute alors sur les variables d'intérêt.

Dans les choix que nous faisons, le champ V n'est plus la vitesse réelle des particules. On considère une erreur à l'échelle du système appliquée directement à chaque particule. Cette aléa peut se justifier notamment par le fait qu'en pratique, on discrétise la fenêtre d'observation en fonction des pixels de l'image, ce qui implique également une discrétisation des opérateurs différentiels comme nous le verrons plus loin.

On se donne une grille $\mathcal{G}_1 = \{x_p\}_{1 \leq p \leq G}$ de points régulièrement espacés d'une distance h dans chacune des directions des vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de la base canonique. Cette grille abstraite est plus grossière que la grille de pixels correspondant à la structure même des images observées. On génère le bruit du système à l'aide de mouvements browniens 2-dimensionnels chacun rattaché à un point de la grille. On dispose alors d'un mouvement brownien \mathbf{W} de dimension 2 fois G le nombre de points de la grille \mathcal{G}_1 .

La dynamique de chaque particule est alors donnée par l'équation en dimension 2 suivante

$$dX_t^z = V_t(X_t^z)dt + \Sigma_t(X_t^z)d\mathbf{W}_t, \quad X_0^z = z. \quad (3.3)$$

La matrice $\Sigma_t(x)$ a pour vocation de régulariser en espace le champ $\Sigma_t(x)d\mathbf{W}_t$. Dans l'exemple traité plus loin, ce champ correspond à une discrétisation d'une convolution entre un mouvement brownien de dimension infinie avec un noyau gaussien.

Pour structurer les images, on fait l'hypothèse que chacune d'elles est obtenue comme la capture simultanée des luminances de chacune des particules se situant en face d'un pixel. De plus, une particule est supposée de luminance constante, ainsi

$$dI_t(X_t^z) = 0. \quad (3.4)$$

Notre premier objectif, est d'obtenir une représentation eulérienne des quantités d'intérêt à partir des représentations lagrangiennes du modèle considéré. C'est à dire que de la représentation des champs V et I le long du flot, nous cherchons à déterminer les expressions des fonctions $(t, x) \mapsto V_t(x)$ et $(t, x) \mapsto I_t(x)$. Les calculs qui entrent en jeu sont comparables à ceux de P.Constantin et G.Iyer dans leur article [CI08] où ils proposent une méthode, type Monte-Carlo pour estimer les solutions des équations de Navier-Stokes 3D.

Théorème 3.1.1. *Le modèle théorique suivant*

$$\begin{aligned} dX_t^z &= V_t(X_t^z)dt + \Sigma_t(X_t^z)d\mathbf{W}_t, \\ dV_t(X_t^z) &= -\frac{1}{\rho}\nabla P_t(X_t^z)dt + \nu\Delta V_t(X_t^z)dt, \\ dI_t(X_t^z) &= 0, \\ \operatorname{div}(V_t(x)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour V un champ C^3 est équivalent à

$$\begin{aligned}
dV_t(x) &= -\nabla V_t(x)^* V_t(x) dt - \frac{1}{\rho} \nabla P_t(x) dt + \nu \Delta V_t(x) dt - \nabla V_t(x)^* \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_{ij} V_t(x) dt + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \partial_i \left[\Sigma_t^{j,k}(x) \partial_j V_t(x) \right] \Sigma_t^{i,k}(x) dt, \\
dI_t(x) &= -\nabla I_t(x)^* V_t(x) dt - \nabla I_t(x)^* \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_{ij} I_t(x) dt + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \partial_i \left[\partial_j I_t(x) \Sigma_t^{j,k}(x) \right] \Sigma_t^{i,k}(x) dt, \\
\operatorname{div}(V_t(x)) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.2. La condition sur la divergence est équivalente à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \Delta P_t(x) &= -(\nabla V_t^1(x))^* \partial_1 V_t(x) - (\nabla V_t^2(x))^* \partial_2 V_t(x) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \frac{1}{2} [\Sigma_t^{i,k}(x) (\nabla \Sigma_t^{j,k}(x))^* dt \\
&\quad + \Sigma_t^{j,k}(x) (\nabla \Sigma_t^{i,k}(x))^*] \partial_{ij} V_t(x) dt + [\partial_i \Sigma_t^{j,k}(x) (\nabla \Sigma_t^{i,k}(x))^* dt \\
&\quad + \Sigma_t^{i,k}(x) (\partial_i \nabla \Sigma_t^{j,k}(x))^*] \partial_j V_t(x) dt, \\
(\nabla \Sigma_t^{1,k}(x))^* \partial_1 V_t(x) + (\nabla \Sigma_t^{2,k}(x))^* \partial_2 V_t(x) &= 0, \quad \forall 1 \leq k \leq 2G.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Démonstration. Supposons que

$$dV_t(x) = b_t(x) dt + \sigma_t(x) d\mathbf{W}_t. \tag{3.8}$$

On applique la formule d'Itô-Wentzell (cf. Théorème A.3.1 en annexe) en utilisant les équations (3.3) et (3.8), il vient

$$\begin{aligned}
dV_t(X_t^z) &= (b_t(X_t^z) + \nabla V_t(X_t^z)^* V_t(X_t^z)) dt + (\nabla V_t(X_t^z)^* \Sigma_t(X_t^z) + \sigma_t(X_t^z)) dW_t \\
&\quad + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(X_t^z)}{2} \partial_{ij} V_t(X_t^z) dt + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq \ell \leq 2}} \partial_\ell \left(\begin{matrix} \sigma_t^{1k}(X_t^z) \\ \sigma_t^{2k}(X_t^z) \end{matrix} \right) \Sigma_t^{\ell k}(X_t^z) dt,
\end{aligned}$$

où la matrice $a = \Sigma \Sigma^*$, et les opérateurs sont appliqués à chaque coordonnée. On identifie alors les fonctions b et σ en utilisant l'équation (3.1). Par exactement le même raisonnement, on retrouve l'équation pour I .

Pour que la divergence du champ des vitesses soit nulle, les coefficients b et σ doivent vérifier certaines conditions

$$\operatorname{div}(V_t(x)) = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{div}(b_t(x) dt) = 0, \\ \operatorname{div}(\sigma_t(x) d\mathbf{W}_t) = 0. \end{cases}$$

Voyons ce que cela implique sur le coefficient σ . La condition sur la divergence est équivalente à dire que chaque colonne de σ est de divergence nulle. Ainsi en utilisant l'expression de la dérive (équation (3.6)), chaque colonne de σ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_1 V^1 & \partial_2 V^1 \\ \partial_1 V^2 & \partial_2 V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^1 \\ \Sigma^2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\partial_1 [\partial_1 V_t^1(x) \Sigma_t^1(x) + \partial_2 V_t^1(x) \Sigma_t^2(x)] + \partial_2 [\partial_1 V_t^2(x) \Sigma_t^1(x) + \partial_2 V_t^2(x) \Sigma_t^2(x)] = 0,$$

pour toute colonne $\begin{pmatrix} \Sigma_t^1(x) \\ \Sigma_t^2(x) \end{pmatrix}$ de la matrice $\Sigma_t(x)$. Si le champ V est suffisamment régulier en espace, en utilisant le fait que la divergence est nulle, la condition se simplifie

$$\partial_1 V_t^1(x) \partial_1 \Sigma_t^1(x) + \partial_2 V_t^1(x) \partial_1 \Sigma_t^2(x) + \partial_1 V_t^2(x) \partial_2 \Sigma_t^1(x) + \partial_2 V_t^2(x) \partial_2 \Sigma_t^2(x) = 0.$$

Pour ce qui est de la condition de divergence sur la dérive b , elle s'écrit

$$\operatorname{div} \left\{ -\nabla V_t(x)^* V_t(x) - \frac{1}{\rho} \nabla P_t(x) + \nu \Delta V_t(x) - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_{ij} V_t(x) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \partial_i \left[\begin{pmatrix} \partial_j V^1 \Sigma_t(x)^{1k} \\ \partial_j V^2 \Sigma_t(x)^{1k} \end{pmatrix} \Sigma_t^{ik}(x) \right] \right\} = 0.$$

Or, l'opérateur de divergence commute avec toutes les dérivées partielles, ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla V^* V) &= \partial_1(V^1 \partial_1 V^1 + V^2 \partial_2 V^1) + \partial_2(V^1 \partial_1 V^2 + V^2 \partial_2 V^2) = (\nabla V^1)^* \partial_1 V + (\nabla V^2)^* \partial_2 V, \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho} \nabla P\right) &= \frac{1}{\rho} \Delta P, \\ \operatorname{div}(\nu \Delta V) &= \nu \Delta \operatorname{div} V = 0, \\ \operatorname{div}(a^{i,j} \partial_{ij} V) &= a^{i,j} \operatorname{div}(\partial_{ij} V) + (\nabla a^{i,j})^* \partial_{ij} V = (\nabla a^{i,j})^* \partial_{ij} V, \\ \operatorname{div}(\partial_i[(\partial_j V^p \Sigma^{pk})] \Sigma^{ik}) &= \Sigma^{ik} \operatorname{div}(\partial_i[(\partial_j V^p \Sigma^{pk})]) + (\nabla \Sigma^{ik})^* \partial_i[(\partial_j V^p \Sigma^{pk})]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la divergence du champ est nulle, on obtient,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}}{2} \partial_{ij} V_t - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \Sigma_t^{ik} \partial_i \left[\Sigma_t^{jk} \partial_j V_t \right] \right\} \\ = - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \frac{1}{2} \left[\Sigma^{ik} (\nabla \Sigma^{jk})^* + \Sigma^{jk} (\nabla \Sigma^{ik})^* \right] \partial_{ij} V + \left[\partial_i \Sigma^{jk} (\nabla \Sigma^{ik})^* + \Sigma^{ik} (\partial_i \nabla \Sigma^{jk})^* \right] \partial_j V. \end{aligned}$$

□

Maintenant, vu que le champ V est à divergence nulle, on peut obtenir un nouveau jeu d'équations, en passant au rotationnel. En effet, si on définit un nouveau champ par $\xi = \text{rot}(V) = \partial_1 V^2 - \partial_2 V^1$, nous allons pouvoir écrire un nouveau système d'équation où l'on se sera affranchi du terme de pression P . De plus, à l'aide du noyau de Green $G(x) = \frac{\log \|x\|}{2\pi}$, il est possible de reconstruire V à l'aide de ξ .

Corollaire 3.1.3. *Le Système (3.5), pour un champ de vitesses V régulier C^3 est équivalent à (aux conditions aux bords près)*

$$\begin{aligned}
d\xi_t(x) &= -\nabla \xi_t(x) * V_t(x) dt + \nu \Delta \xi_t(x) dt - \nabla \xi_t(x) * \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad - \sum_{k=1}^{2G} d\mathbf{W}_t^k (\det[\nabla \Sigma_t^1(x), \partial_1 V_t(x)] - \det[\nabla \Sigma_t^2(x), \partial_2 V_t(x)]) \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_{i,j} \xi_t(x) dt + \frac{1}{2} \det[\nabla a_t^{i,j}(x), \partial_{ij} V_t(x)] dt \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \Sigma_t^{i,k}(x) (\partial_i \Sigma_t^{j,k}(x) \partial_j \xi_t(x) dt + \Sigma_t^{j,k}(x) \partial_{ij} \xi_t(x) dt \\
&\quad + \det(\nabla \Sigma_t^{j,k}(x), \partial_{ij} V_t(x)) dt + \partial_i \Sigma_t^{j,k}(x) \det(\nabla \Sigma_t^{i,k}(x), \partial_j V_t(x)) dt \\
&\quad + \Sigma_t^{j,k}(x) \det(\nabla \Sigma_t^{i,k}(x), \partial_{ij} V_t(x))] dt, \\
dI_t(x) &= -\nabla I_t(x) * V_t(x) dt - \nabla I_t(x) \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_{ij} I_t(x) dt + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \partial_i \left[\partial_j I_t(x) \Sigma_t^{j,k}(x) \right] \Sigma_t^{i,k}(x) dt, \\
V_t(x) &= \nabla G * \xi_t(x).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration. Si on reprend l'équation pour le champ V dans le Système (3.6), il suffit d'appliquer le rotationnel aux deux membres. On utilise le fait que pour un champ V et une fonction réelle f

$$\text{rot}(fV) = \text{rot}(V)f + \det[\nabla f, V]. \tag{3.10}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\nabla V * V) &= \sum_{k=1}^2 \partial_1 [\partial_k V^2 V^k] - \partial_2 [\partial_k V^1 V^k] \\
&= \sum_{k=1}^2 (\partial_{1k} V^2 - \partial_{2k} V^1) V^k + (\partial_1 V^k \partial_k V^2 - \partial_2 V^k \partial_k V^1) \\
&= \nabla \xi * V + \text{div}(V) \text{rot}(V) = \nabla \xi * V.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\text{rot}(\nabla P) = 0.$$

Pour le laplacien, on utilise la régularité de V

$$\text{rot}\Delta V = \partial_1\Delta V^2 - \partial_2\Delta V^1 = \Delta(\partial_1 V^2 - \partial_2 V^1) = \Delta\xi.$$

Le rotationnel du terme de bruit devient

$$\begin{aligned} \text{rot}(-\nabla V^* \Sigma d\mathbf{W}) &= -\text{rot}\left(\sum_{k=1}^{2G} \nabla V^* \begin{pmatrix} \Sigma_{1k} \\ \Sigma_{2k} \end{pmatrix} d\mathbf{W}_k\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{2G} d\mathbf{W}_k [\partial_1(\partial_1 V_2 \Sigma_{1k} + \partial_2 V_2 \Sigma_{2k}) - \partial_2(\partial_1 V_1 \Sigma_{1k} + \partial_2 V_1 \Sigma_{2k})] \\ &= -\nabla \xi^* \Sigma d\mathbf{W} - \sum_{k=1}^{2G} d\mathbf{W}_k [\partial_1 V_2 \partial_1 \Sigma_{1k} + \partial_2 V_2 \partial_1 \Sigma_{2k} - \partial_1 V_1 \partial_2 \Sigma_{1k} - \partial_2 V_1 \partial_2 \Sigma_{2k}]. \end{aligned}$$

La Formule (3.10) va nous permettre de traiter les termes restants

$$\text{rot}\left(\sum_{i,j} \frac{a^{ij}}{2} \partial_{ij} V\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} \xi + \det(\nabla a^{ij}, \partial_{ij} V)$$

et

$$\text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) = \sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_i \text{rot}(\Sigma^{jk} \partial_j V) + \det(\nabla \Sigma^{ik}, \partial_i [\Sigma^{jk} \partial_j V]). \quad (3.11)$$

Toujours à l'aide de l'équation (3.10), il vient

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) &= \sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} (\partial_i \Sigma^{jk} \partial_j \xi + \Sigma^{jk} \partial_{ij} \xi + \det(\nabla \Sigma^{jk}, \partial_{ij} V) \\ &\quad + \partial_i \Sigma^{jk} \det(\nabla \Sigma^{ik}, \partial_j V) + \Sigma^{jk} \det(\nabla \Sigma^{ik}, \partial_{ij} V)). \end{aligned}$$

□

3.2 Un exemple

Dans cet exemple, on fixe la fonction Σ . Cette dernière est choisie afin de remplir certains critères. Le bruit en un point x de l'espace est une combinaison linéaire de tous les G différents mouvements browniens. Chaque coefficient étant une densité gaussienne centrée en les points x_p de la grille \mathcal{G}_1 . Ceci nous garantit une meilleure influence des proches voisins de la grille de bruit \mathcal{G}_1 . On se laisse en paramètre local, la variance de chacune des densités afin de pouvoir jouer, si besoin est, sur la zone efficace couverte par la densité.

De plus, afin d'être en mesure de modéliser des impulsions locales, chaque coefficient est multiplié par une fonction locale.

Nous allons ici traiter le modèle précédent, en fixant le paramètre Σ

$$\Sigma_t(x) = \Phi_t(x) \otimes I_2 = \begin{pmatrix} \Phi_t^1(x) & 0 & \Phi_t^2(x) & 0 & \dots & \Phi_t^G(x) & 0 \\ 0 & \Phi_t^1(x) & 0 & \Phi_t^2(x) & \dots & 0 & \Phi_t^G(x) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

où \otimes est le produit de Kronecker et le vecteur ligne Φ est donné par

$$\Phi_t^p(x) = \varphi_p(\|x - x_p\|^2) h_t^p(x_p), \quad 1 \leq p \leq G, \quad (3.13)$$

où $\varphi_p(r) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-r}{2\nu_p^2}\right)$. Remarquons au passage que

$$a_t(x) = \Sigma_t(x) \Sigma_t(x)^* = \|\Phi_t(x)\|^2 I_2. \quad (3.14)$$

Le bruit appliqué à une particule dépendra de manière plus importante du bruit des points de la grille dont elle est proche. On ajoute, à l'aide de h , la possibilité de donner des impulsions locales sur chaque point de la grille. Ainsi pour tout $1 \leq i \leq 2$

$$\partial_i \Sigma_t^{j,k}(x) = \frac{x^i - x^i_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}}{\nu_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}^2} \Sigma_t^{j,k}(x) \quad (3.15)$$

où $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ représente la partie entière supérieure de $\frac{k}{2}$.

On écrit alors ce que devient le Système (3.9)

$$\begin{aligned} d\xi_t(x) &= -\nabla \xi_t(x)^* V_t(x) dt + \nu \Delta \xi_t(x) dt - \Phi_t(x) \otimes \nabla_t \xi_t(x)^* d\mathbf{W}_t + \frac{1}{2} \|\Phi_t(x)\|^2 \Delta \xi_t(x) dt \\ &\quad + \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_p}{\nu_p^2} \{ d\mathbf{W}_{2p-1} [\tilde{x}_p^2 \partial_1 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_1 V_2] + d\mathbf{W}_{2p} [\tilde{x}_p^2 \partial_2 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_2 V_2] \} \\ &\quad + \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_t^p(x)^2}{\nu_p^2} \left(\xi_t(x) + \nabla \xi_t(x)^* \tilde{x}_p + \det[\tilde{x}_p, \Delta V_t(x) + \frac{2}{\nu_p^2} \nabla V_t(x)^* \tilde{x}_p] \right) dt, \\ dI_t(x) &= -\nabla I_t(x)^* V_t(x) dt - \Phi_t(x) \otimes \nabla I_t(x)^* d\mathbf{W}_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\Phi_t(x)\|^2 \Delta I_t(x) dt + \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_t^p(x)^2}{\nu_p^2} \nabla I_t(x)^* \tilde{x}_p dt, \\ V_t(x) &= \nabla G * \xi_t(x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $\tilde{x}_p = x_p - x$.

Démonstration. En effet, vu que $a = \|\Phi\|^2 I_2$,

$$\sum_{i,j} a^{ij} \partial_{ij} \xi = \sum_i \|\Phi\|^2 \partial_{ii} \xi = \|\Phi\|^2 \Delta \xi.$$

De même

$$\sum_{i,j} \det[\nabla a^{ij}, \partial_{ij}V] = \sum_i \det[\nabla a^{ii}, \partial_{ii}V].$$

On rappelle que $\|\Phi\|^2 = \sum_p (\varphi_p h_p)^2$ et $\partial_j \varphi_p = \frac{\tilde{x}_p^j}{\nu_p^2} \varphi_p$, ainsi

$$\sum_i \det[\nabla a^{ii}, \partial_{ii}V] = \sum_{p,i} \det[\nabla (\varphi_p h_p)^2, \partial_{ii}V] = \sum_p \frac{(\varphi_p h_p)^2}{\nu_p^2} \det[\tilde{x}_p, \Delta V].$$

Pour les derniers termes, nous allons partir de leur factorisation (3.11). On utilise alors la structure de Σ . Il n'y a qu'un seul terme non-nul sur chaque colonne de Σ ,

$$\text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) = \text{rot}\left(\sum_{i,k} \Sigma^{ik} \partial_i [\Sigma^{ik} \partial_i V]\right).$$

On somme ensuite par paquets pour éliminer les termes nuls

$$\text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) = \sum_p \text{rot}\left(\Sigma^{1(2p-1)} \partial_1 [\Sigma^{1(2p-1)} \partial_1 V] + \Sigma^{2(2p)} \partial_2 [\Sigma^{2(2p)} \partial_2 V]\right).$$

Or $\Sigma^{1(2p-1)} = \Sigma^{2(2p)} = \Phi^p$,

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) &= \sum_p \text{rot}\left(\Phi^p \{\partial_1 [\Phi^p \partial_1 V] + \partial_2 [\Phi^p \partial_2 V]\}\right) \\ &= \sum_p \text{rot}\left(\Phi^p \{\nabla V^* \nabla \Phi^p + \Phi^p \Delta V\}\right). \end{aligned}$$

De plus, $\nabla \Phi^p = \frac{\Phi^p}{\nu_p^2} \tilde{x}_p$,

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) &= \sum_p \text{rot}\left((\Phi^p)^2 \left\{ \frac{1}{\nu_p^2} \nabla V^* \tilde{x}_p + \Delta V \right\}\right) \\ &= \sum_p (\Phi^p)^2 \text{rot}\left(\frac{1}{\nu_p^2} \nabla V^* \tilde{x}_p + \Delta V\right) + \det[\nabla(\Phi^p)^2, \frac{1}{\nu_p^2} \nabla V^* \tilde{x}_p + \Delta V]. \end{aligned}$$

Cette dernière équation se simplifie, en effet

$$\text{rot}(\nabla V^* \tilde{x}_p) = \xi + \nabla \xi^* \tilde{x}_p \quad \text{et} \quad \text{rot}(\Delta V) = \Delta \xi.$$

Ainsi

$$\text{rot}\left(\sum_{i,j,k} \Sigma^{ik} \partial_j [\Sigma^{jk} \partial_j V]\right) = \sum_p (\Phi^p)^2 \left(\frac{\xi}{\nu_p^2} + \frac{\nabla \xi^* \tilde{x}_p}{\nu_p^2} + \Delta \xi \right) + \frac{2(\Phi^p)^2}{\nu_p^2} \det[\tilde{x}_p, \frac{1}{\nu_p^2} \nabla V^* \tilde{x}_p + \Delta V].$$

Pour les facteurs du mouvement brownien, un calcul montre que pour tout vecteur v de dimension 2

$$v^* \Phi \otimes I_2 = \Phi \otimes v^*.$$

Il reste à expliciter le dernier terme

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{2G} d\mathbf{W}_k [\partial_1 V_2 \partial_1 \Sigma_{1k} + \partial_2 V_2 \partial_1 \Sigma_{2k} - \partial_1 V_1 \partial_2 \Sigma_{1k} - \partial_2 V_1 \partial_2 \Sigma_{2k}] \\ & = - \sum_{p=1}^G d\mathbf{W}_{2p-1} [\partial_1 V_2 \partial_1 \Sigma_{1k} - \partial_1 V_1 \partial_2 \Sigma_{1k}] + d\mathbf{W}_{2p} [\partial_2 V_2 \partial_1 \Sigma_{2k} - \partial_2 V_1 \partial_2 \Sigma_{2k}]. \end{aligned}$$

Ensuite on utilise $\partial_i \Sigma_{jp} = \tilde{x}_p^i \frac{\Phi_p}{\nu_p^2}$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{2G} d\mathbf{W}_k [\partial_1 V_2 \partial_1 \Sigma_{1k} + \partial_2 V_2 \partial_1 \Sigma_{2k} - \partial_1 V_1 \partial_2 \Sigma_{1k} - \partial_2 V_1 \partial_2 \Sigma_{2k}] \\ & = - \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_p}{\nu_p^2} \{ d\mathbf{W}_{2p-1} [\tilde{x}_p^1 \partial_1 V_2 - \tilde{x}_p^2 \partial_1 V_1] + d\mathbf{W}_{2p} [\tilde{x}_p^1 \partial_2 V_2 - \tilde{x}_p^2 \partial_2 V_1] \} \\ & = \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_p}{\nu_p^2} \{ d\mathbf{W}_{2p-1} [\tilde{x}_p^2 \partial_1 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_1 V_2] + d\mathbf{W}_{2p} [\tilde{x}_p^2 \partial_2 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_2 V_2] \}. \end{aligned}$$

□

3.3 Schéma discret

On définit pour chaque direction les quantités suivantes qui approchent les dérivées première et seconde

$$\partial_h^i f(t, x) = \frac{1}{2h} (f(t, x + h e_i) - f(t, x - h e_i)), \quad (3.17)$$

$$\partial_h^{i,j} f(t, x) = \frac{1}{4h^2} [f(t, x + h(e_i + e_j)) + f(t, x - h(e_i + e_j)) \quad (3.18)$$

$$- f(t, x + h(e_i - e_j)) - f(t, x + h(-e_i + e_j))]. \quad (3.19)$$

Ceci nous permet de définir les approximations de tous les opérateurs différentiels qui interviennent dans (3.9).

$$\begin{aligned}
d\xi_t(x) &= -\nabla_h \xi_t(x) * V_t(x) dt + \nu \Delta_h \xi_t(x) dt - \nabla_h \xi_t(x) * \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad + \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_p}{\nu_p^2} \left\{ d\mathbf{W}_{2p-1} [\tilde{x}_p^2 \partial_h^1 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_h^1 V_2] + d\mathbf{W}_{2p} [\tilde{x}_p^2 \partial_h^2 V_1 - \tilde{x}_p^1 \partial_h^2 V_2] \right\} \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_h^{i,j} \xi_t(x) dt + \frac{1}{2} \det[\nabla_h a_t^{i,j}(x), \partial_h^{i,j} V_t(x)] dt \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \Sigma_t^{i,k}(x) (\partial_h^i \Sigma_t^{j,k}(x) \partial_h^j \xi_t(x) dt + \Sigma_t^{j,k}(x) \partial_h^{ij} \xi_t(x) dt \\
&\quad + \det(\nabla_h \Sigma_t^{j,k}(x), \partial_h^{ij} V_t(x)) dt + \partial_h^i \Sigma_t^{j,k}(x) \det(\nabla_h \Sigma_t^{i,k}(x), \partial_h^j V_t(x)) dt \\
&\quad + \Sigma_t^{j,k}(x) \det(\nabla_h \Sigma_t^{i,k}(x), \partial_h^{ij} V_t(x))) dt, \\
dI_t(x) &= -\nabla_h I_t(x) * V_t(x) dt - \nabla_h I_t(x) \Sigma_t(x) d\mathbf{W}_t \\
&\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_t^{i,j}(x)}{2} \partial_h^{ij} I_t(x) dt + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2G \\ 1 \leq i, j \leq 2}} \partial_h^i \left[\partial_h^j I_t(x) \Sigma_t^{j,k}(x) \right] \Sigma_t^{i,k}(x) dt, \\
V_t(x) &= \nabla G *_{h} \xi_t(x),
\end{aligned}$$

(3.20)

où $*_h$ représente la discrétisation de la convolution. On introduit alors une grille d'observation $\mathcal{G}_2 = \{y_q\}_{1 \leq q \leq F}$ composé des F pixels de la fenêtre. Ainsi, une fois le V substitué, si $\vec{\xi}$ et \vec{I} désignent les vecteurs F -dimensionnels dont les q -ièmes coordonnées sont respectivement $\xi(y_q)$ et $I(y_q)$

$$d \begin{pmatrix} \vec{\xi}_t \\ \vec{I}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{B}_t(\vec{\xi}_t, \vec{I}_t) \\ \vec{b}_t(\vec{\xi}_t, \vec{I}_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \vec{\Sigma}_t(\vec{\xi}_t, \vec{I}_t) \\ \vec{\sigma}_t(\vec{\xi}_t, \vec{I}_t) \end{pmatrix} d\mathbf{W}_t.$$

On se retrouve alors dans le cadre d'une équation différentielle stochastique que l'on cherche à conditionner par rapport à certaines coordonnées. La loi ciblée est ainsi

$$\mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{I} \end{pmatrix} \middle| (\vec{I}_{T_m} = \mathbb{I}_m)_{1 \leq m \leq M} \right).$$

On introduit alors un processus auxiliaire $\begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{I} \end{pmatrix}$ solution sur $[0, T_M]$ de

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} \hat{\xi}_t \\ \hat{I}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{B}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \\ \vec{b}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \vec{\Sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \\ \vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \end{pmatrix} d\mathbf{W}_t \\ &+ \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} \vec{\Sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^* A_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \\ I_G \end{pmatrix} \frac{\mathbb{I}_m - \vec{I}_t}{T_m - t} \mathbf{1}_{(T_m - \varepsilon_m, T_m)}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$A_t(x, y) = (\vec{\sigma}_t(x, y) \vec{\sigma}_t(x, y)^*)^{-1}. \quad (3.22)$$

Les ε_m correspondent aux longueurs des intervalles de temps sur lesquels on effectue la correction, la seule contrainte $T_{m-1} < T_m - \varepsilon_m < T_m$ évite le chevauchement de deux corrections. Le théorème 2.3.9 nous donne le résultat suivant en supposant que les coefficients rentrent dans les hypothèses (sinon on peut effectuer un travail de régularisation supplémentaire sur les coefficients)

$$\mathbb{E} \left[f(\vec{\xi}, \vec{I}) \right] = \mathbb{E} \left[f(\hat{\xi}, \hat{I}) D(\hat{\xi}, \hat{I}) \right], \quad (3.23)$$

où

$$\begin{aligned} D(\hat{\xi}, \hat{I}) &= C \prod_{m=1}^M \eta_m \exp \left\{ - \frac{\|\beta_{T_m - \varepsilon_m}(\hat{\xi}_{T_m}, \hat{I}_{T_m - \varepsilon_m})(\vec{I}_{T_m - \varepsilon_m} - \mathbb{I}_m)\|^2}{2\varepsilon_m} + \int_{T_m - \varepsilon_m}^{T_m} - \frac{(\vec{I}_s - \mathbb{I}_m)^* A_s \vec{b}_s(\hat{\xi}_s, \hat{I}_s) ds}{T_m - s} \right. \\ &\left. - \frac{(\vec{I}_s - \mathbb{I}_m)^* d(A_s(\hat{\xi}_s, \hat{I}_s))(\vec{I}_s - \mathbb{I}_m)}{2(T_m - s)} - \sum_{1 \leq i, j \leq F} \frac{d(A_s(\hat{\xi}_s, \hat{I}_s))_{i,j}(\vec{I}_s - \mathbb{I}_m)_i(\vec{I}_s - \mathbb{I}_m)_j}{2(T_m - s)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec

$$\eta_m = \sqrt{\det(A_{T_m}(\hat{\xi}_{T_m}, \hat{I}_{T_m}))}. \quad (3.25)$$

Remarque 3.3.1. Les deux derniers termes peuvent être vus comme la limite de

$$\begin{aligned} &\sum - \frac{(\vec{I}_{t_{k+1}} - \mathbb{I}_m)^* (A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) (\vec{I}_{t_{k+1}} - \mathbb{I}_m)}{2(T_m - t_k)} \\ &= \sum - \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq F} (A_{t_{k+1}} - A_{t_k})_{i,j} \left((\vec{I}_{t_{k+1}} - \mathbb{I}_m)_i (\vec{I}_{t_{k+1}} - \mathbb{I}_m)_j - (\vec{I}_{t_k} - \mathbb{I}_m)_i (\vec{I}_{t_k} - \mathbb{I}_m)_j \right)}{2(T_m - t_k)} \\ &\quad - \frac{(\vec{I}_{t_k} - \mathbb{I}_m)^* (A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) (\vec{I}_{t_k} - \mathbb{I}_m)}{2(T_m - t_k)}. \end{aligned}$$

3.4 Retour à l'exemple

On peut écrire ce que cela donne pour notre exemple (3.16)

$$\begin{aligned} \vec{B}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^q &= \nabla_h \hat{\xi}_t(y_q)^* (-\nabla G *_h \hat{\xi}_t(y_q)) + (\nu + \frac{1}{2} \|\Phi_t(y_q)\|^2) \Delta_h \hat{\xi}_t(y_q) \\ &+ \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_t^p(y_q)^2}{\nu_p^2} (\hat{\xi}_t(y_q) + \nabla_h \hat{\xi}_t(y_q)^* \tilde{x}_{p,q} + \det[\tilde{x}_{p,q}, \Delta_h \nabla G *_h \hat{\xi}_t(y_q) + \frac{2}{\nu_p^2} \nabla_h (\nabla G *_h \hat{\xi}_t(y_q))^* \tilde{x}_{p,q}]) \end{aligned}$$

avec $\tilde{x}_{p,q} = x_p - y_q$,

$$\vec{b}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^q = -\nabla_h \hat{I}_t(y_q)^* \nabla G *_h \hat{\xi}_t(y_q) + \frac{1}{2} \|\Phi_t(y_q)\|^2 \Delta_h \hat{I}_t(y_q) + \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_t^p(y_q)^2}{\nu_p^2} \nabla_h \hat{I}_t(y_q) \tilde{x}_{p,q}$$

et les q -ièmes lignes des matrices de dispersion

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^{q\bullet} &= -\Phi_t(y_q) \otimes \nabla_h \hat{\xi}_t(y_q)^* + M_q \\ \vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^{q\bullet} &= -\Phi_t(y_q) \otimes \nabla_h \hat{I}_t(y_q)^*, \end{aligned}$$

avec

$$M_q = \left(\frac{\Phi_t^1}{\nu_1^2} \tilde{x}_{1,q}^* \nabla_h V^2 \quad \frac{\Phi_t^1}{\nu_1^2} \tilde{x}_{1,q}^* (-\nabla_h V^1) \quad \dots \quad \frac{\Phi_t^1}{\nu_1^2} \tilde{x}_{1,q}^* \nabla_h V^2 \quad \frac{\Phi_t^G}{\nu_G^2} \tilde{x}_{G,q}^* (-\nabla_h V^1) \right)$$

Ainsi pour tous $1 \leq i, j \leq F$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^* \right]^{i,j} &= \Phi_t(y_i) \otimes \nabla_h \hat{I}_t(y_i)^* (\Phi_t(y_j) \otimes \nabla_h \hat{I}_t(y_j))^* \\ &= \Phi_t(y_i)^* \Phi_t(y_j) \nabla_h \hat{I}_t(y_i)^* \nabla_h \hat{I}_t(y_j) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \left[\vec{\Sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t) \vec{\sigma}_t(\hat{\xi}_t, \hat{I}_t)^* \right]^{i,j} &= -\Phi_t(y_i)^* \Phi_t(y_j) \nabla_h \hat{\xi}_t(y_i)^* \nabla_h \hat{I}_t(y_j) \\ &- \sum_{p=1}^G \frac{\Phi_p(y_i) \Phi_p(y_j)}{\nu_p^2} \left\{ [\tilde{x}_{p,i}^2 \partial_1 V_1(y_i) - \tilde{x}_{p,i}^1 \partial_1 V_2(y_i)] \partial_1 \hat{I}(y_j) + [\tilde{x}_{p,i}^2 \partial_2 V_1(y_i) - \tilde{x}_{p,i}^1 \partial_2 V_2(y_i)] \partial_2 \hat{I}(y_j) \right\}. \end{aligned}$$

3.5 Simulations

Nous présentons ici les dernières simulations obtenues par Anne Cuzol en utilisant ce modèle.

En premier lieu une trajectoire de référence de la vorticité a été simul e sur l'intervalle $[0, 36]$ avec un pas de 0,1 pour le schéma d'Euler, ainsi qu'une trajectoire des luminances associ es. Les images sont de taille 16×16 , la grille de bruit possède un pas de 3 par rapport

à cette grille de pixels. A chaque temps d'observation $T_m = 6, 12, 18, 24, 36$ on relève l'image des luminances correspondante $\mathbb{I}_m = (I_{t_k}(y))_{y \in \mathcal{G}_2}$. On cherche donc à appliquer la méthode présentée en conditionnant suivant ces observations. Une simulation de 60 trajectoires conditionnelles ont été réalisées, et pour chacune d'elle, on a estimé leur poids donné par la densité évaluée en cette trajectoire. Afin de comparer avec une simulation à l'aveugle, 60 trajectoires ont été réalisées sans le terme correctif.

La difficulté principale réside dans le calcul de la matrice inverse

$$\mathbf{A}_t(\hat{\mathbf{I}}_t) = (\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)^*)^{-1}.$$

La méthode choisie par Anne Cuzol, consiste en une estimation empirique de celle-ci

- On simule un ensemble de N réalisations selon $\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)d\mathbf{w}_t$
- On stocke ces réalisations dans X de taille (G, N)
- On a donc $\frac{1}{N}XX^*$ approximation empirique de la covariance $\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)^*$
- On calcule la SVD de $X : X = UDV^*$
- Donc $\frac{1}{N}XX^* = \frac{1}{N}UDD^*U^*$
- Finalement on approche $(\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)\boldsymbol{\tau}_t(\hat{\mathbf{I}}_t)^*)^{-1}$ par $N(XX^*)^{-1} = NU(DD^*)^{-1}U^*$

Sur la Figure 3.2, page 73, on retrouve l'erreur moyenne en valeur absolue de chaque vorticité simulée par rapport à la trajectoire de référence. Les trajectoires bleues sont obtenues à partir des trajectoires conditionnelles, les noires sont celles lancées à l'aveugle selon la loi initiale. Enfin, la trajectoire conditionnelle de plus fort poids a été représentée en rouge. Il est rassurant de voir une nette différence entre les trajectoires bleues et noires. On valide ainsi le résultat par simulation.

Les Figures 3.3 jusqu'à 3.5 p.74 représentent des simulations de luminances obtenues aux temps 1, 2, ..., 36. La première ligne correspond à la trajectoire de référence, la seconde à la trajectoire estimée \hat{I} obtenue à l'aide d'une moyenne pondérée des simulations conditionnelles. Enfin la troisième ligne donne l'erreur point par point en valeur absolue entre \hat{I} et la trajectoire de référence. Les Figures 3.6 jusqu'à 3.8 p.75, quant à elles, donnent les simulations de vorticité correspondantes.

Ces simulations sont encourageantes, en effet, la reconstruction de la vorticité est satisfaisante. Cette étape ne représente pourtant que le début de la création d'une méthode efficace surtout en réanalyse. En effet, pour l'instant nous n'avons travaillé que sur un modèle jouet.

On pourrait voir ce que l'on est en mesure de réaliser concrètement avec ce modèle à partir d'une base de données réelles. Ceci nécessiterait bien sûr quelques modifications et améliorations. Il serait également intéressant de comparer cette approche avec les méthodes utilisées en général. Si on considère par exemple le filtrage particulaire, voire des méthodes plus évoluées comme le filtrage d'ensemble de Kalman et le filtrage d'ensemble de Kalman pondéré (cf. [PMCG10]), on sait qu'en pratique, un grand nombre de particules est nécessaire. On pourrait comparer les méthodes par le nombre de particules à considérer afin d'obtenir une estimation raisonnable. Ceci fait partie des objectifs à court terme que nous espérons réussir à traiter.

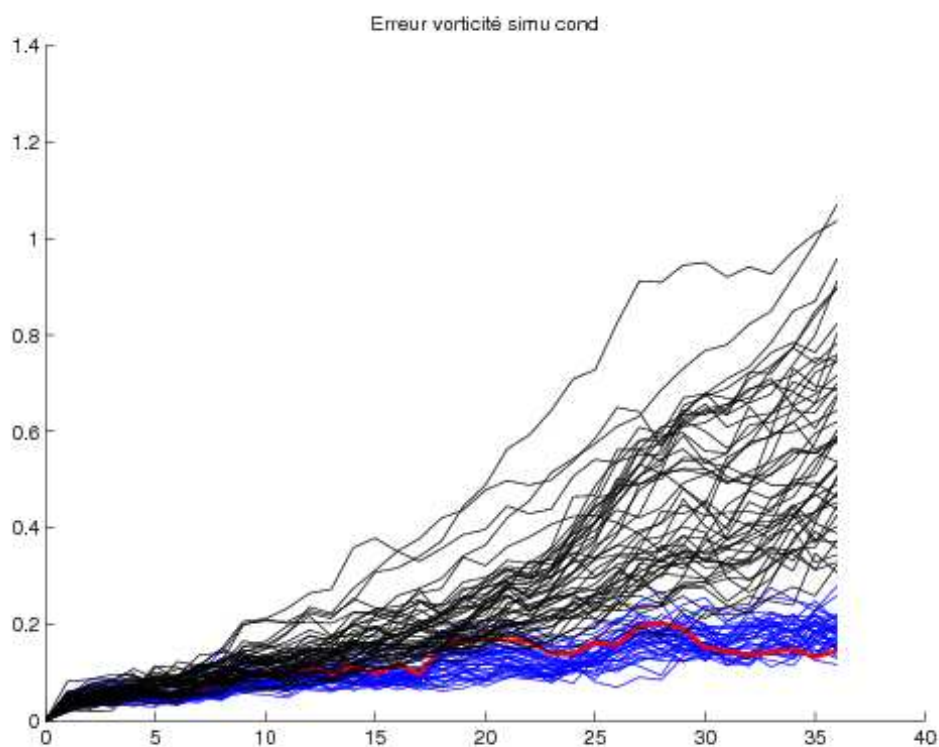


FIGURE 3.2 – Erreur de la vorticité simulée par rapport à la trajectoire de référence.



FIGURE 3.3 – Luminances simulées et erreurs du temps 1 au temps 12

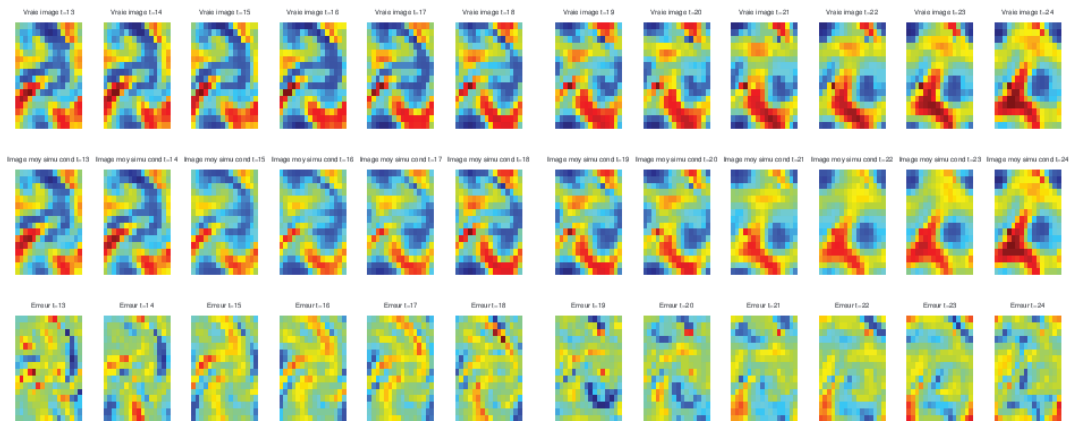


FIGURE 3.4 – Luminances simulées et erreurs du temps 13 au temps 24

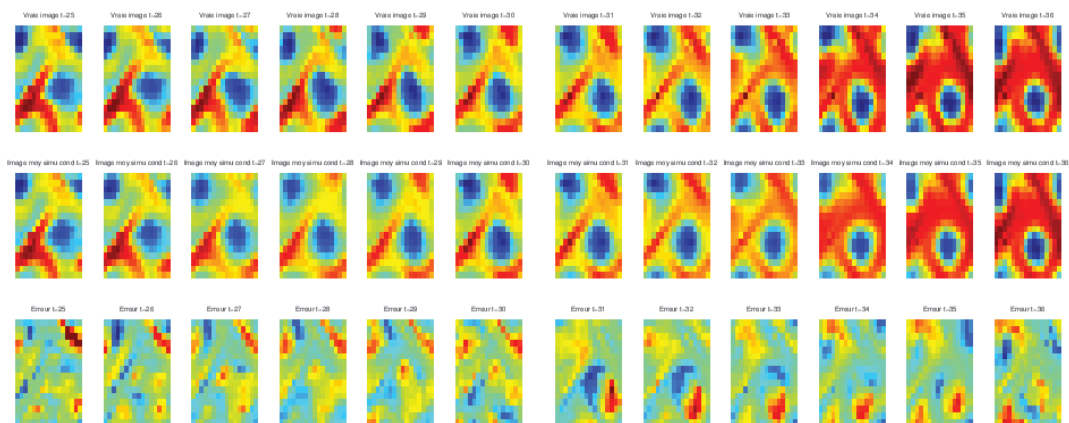


FIGURE 3.5 – Luminances simulées et erreurs du temps 25 au temps 36

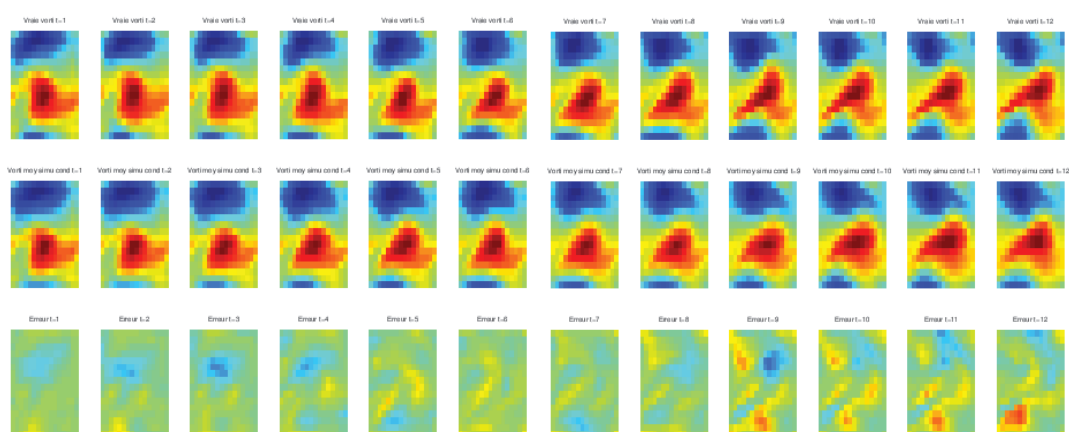


FIGURE 3.6 – Vorticités simulées et erreurs du temps 1 au temps 12

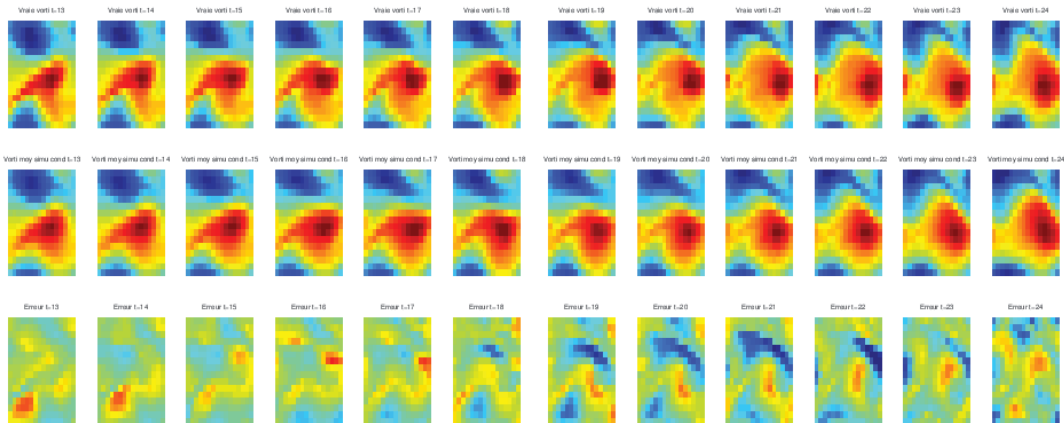


FIGURE 3.7 – Vorticités simulées et erreurs du temps 13 au temps 24

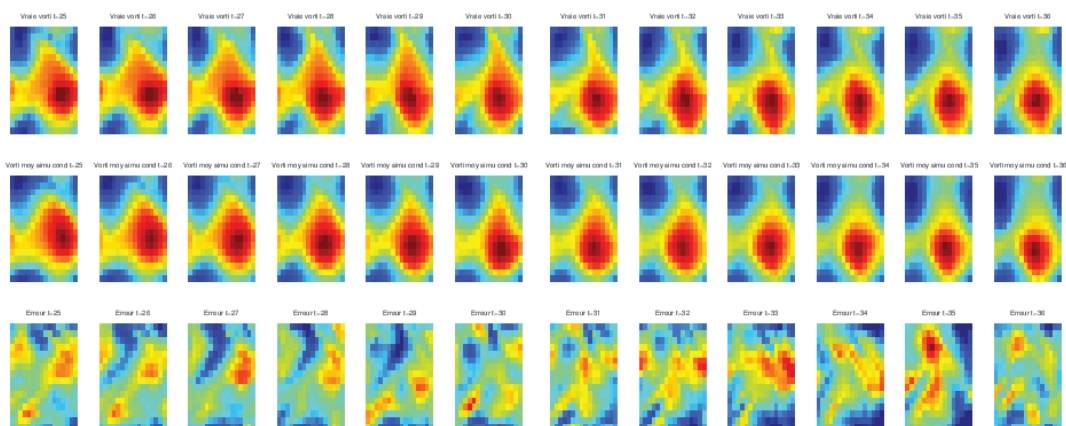


FIGURE 3.8 – Vorticités simulées et erreurs du temps 25 au temps 36

Chapitre 4

Conditionnement de processus ponctuels

Les processus ponctuels forment également une large classe de processus en temps continu. Il paraît naturel de se pencher sur leur cas, plus précisément dans le cas markovien, et de tenter de définir un pont poissonnien par exemple. Dans ce cas, la forme du terme correcteur est identique (*cf.* [JY79] et [EK91]). Nous cherchons alors à étendre ce résultat dans le cas d'une intensité déterministe variable. Un résultat de type « Girsanov » nous permettra d'élargir le résultat de conditionnement à une classe de processus ponctuels à intensité stochastique plus générale. Nous allons mettre également en place un résultat de conditionnement d'une classe de processus ponctuels n'admettant pas d'intensité stochastique. Finalement, nous allons également étudier le cas des processus de Markov à sauts en temps continu sur un espace d'états fini. Tout repose encore une fois sur les problèmes de martingales associées à ces différents processus ponctuels.

4.1 Real point processes

4.1.1 General results

This section gives a short recall of basic definitions and properties of real point processes, please read [BB03] or [Bré81] to learn more.

Definition 4.1.1. *A counting measure on \mathbb{R} is a countable sum of Dirac measures on \mathbb{R} . For any counting measure m , there exists a non decreasing sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of numbers belonging to $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ such that $m = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{t_n}$ with the convention $\delta_{-\infty} = \delta_{+\infty} = 0$. A counting measure is said to be simple when the sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is increasing.*

We denote by $\mathbf{M}(\mathbb{R})$ the set of all counting measures on \mathbb{R} , we endow it with the σ -algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(m \mapsto m(C)) : C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$. The couple $(\mathbf{M}(\mathbb{R}), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ is called the canonical space of real point processes.

Definition 4.1.2. *A real point process N is a measurable application from a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ to $(\mathbf{M}(\mathbb{R}), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ where the image of N is contained in the subset of simple*

measures. We denote by $T_n(\omega) = t_n(N(\omega))$ the n^{th} jumping time of N . We introduce the process $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$ defined by

$$N_t = N((-\infty, t]),$$

so that the real point process N can be considered as a step function on \mathbb{R} . The point process N is said to be non-explosive if $\lim_n T_n = \infty$ a.s..

Theorem 4.1.3 (Dellacherie, Meyer). *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$ be a filtered space, where (\mathcal{F}_t) is the natural filtration of process N . There exists a (\mathcal{F}_t) -predictable random measure dA_t (or equivalently a non decreasing (\mathcal{F}_t) -predictable process A) such that for all positive (\mathcal{F}_t) -predictable process X , we have*

$$\mathbb{E}\left[\int X_t d(N_t - A_t)\right] = 0.$$

Moreover such a measure is unique in the sense that any process A' satisfying the same conditions verify almost surely for all $t \in \mathbb{R}$ the equality $A'_t = A_t$.

Proposition 4.1.4. *The (\mathcal{F}_t) -predictable random measure dA_t is characterized through the following*

1. *The process $(N_{t \wedge T_n} - A_{t \wedge T_n})_t$ is a (\mathcal{F}_t) -martingale for all $n \geq 1$*
- 2.

$$\int_{[T_\infty, \infty)} dA_t = 0 \quad \text{a.s..}$$

Remarque 4.1.5. *In the case of a non-explosive point process, both conditions are reduced to the fact that $(N_t - A_t)_t$ has to be a (\mathcal{F}_t) -martingale.*

Proposition 4.1.6. *When for all ω , the measure $dA_t(\omega)$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, there exists a positive process (λ_t) , which can be chosen (\mathcal{F}_t) -predictable such that*

$$A_t = \int_0^t \lambda_s ds.$$

Then we say that the point process N admits the (stochastic) intensity $(\lambda_t)_t$.

It is now time to see the link between the stochastic intensity and the Markov property. In fact, if for all $s \geq 0$, $\lambda_s := \lambda_s(N_{s-})$, then N is a Markov process. Moreover, if (λ_s) is deterministic, then the increments of N are independent. The Poisson case corresponds to a jump process with a constant deterministic intensity, which means stationary independent increments

4.1.2 Case of the deterministic intensity

We first give a result from [JY79] we will extend in the more general case of deterministic intensities. We denote $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ the natural filtration of the point process N ,

$$Q_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$$

is the associated (\mathcal{F}_t) -martingale. We set $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$ the enlarged filtration given by $\mathcal{G}_t = \cap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(Q_T)) = \cap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(N_T))$ (λ is deterministic).

Let N be a Poisson point process on $[0, T] \times \Omega$ with rate $\lambda > 0$ satisfying $N_0 = 0$. In [JY79], the authors show that η defined on $[0, T] \times \Omega$ given by

$$\eta_t = N_t - \int_0^t \frac{N_T - N_{s-}}{T - s} ds,$$

is a (\mathcal{G}_t) -martingale with the predictable quadratic variation $\int_0^t \frac{N_T - N_{s-}}{T - s} ds$. Now we consider a point process whose intensity $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ is deterministic. The result remains true in this larger case. We introduce for $s < t$

$$\Lambda_{s,t} = \int_s^t \lambda_u du.$$

Theorem 4.1.7. *There exists a (\mathcal{G}_t) -martingale η defined on $[0, T] \times \Omega$ given by*

$$\eta_t = N_t - \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (N_T - N_{s-}) ds,$$

whose quadratic variation is

$$\langle \eta \rangle_t = \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (N_T - N_{s-}) ds,$$

and $(\eta_t)_t$ is independent of $\sigma(N_T) \subset \mathcal{G}_0$.

Proof. We here use a similar proof to that of [EK91]. It consists in the concatenation of Lemmas 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10 and 4.1.11 which follow. \square

Lemma 4.1.8. *Let X and Y be independent Poisson random variables with parameters μ_X and μ_Y respectively, and set $\alpha = \frac{\mu_X}{\mu_X + \mu_Y}$. Then*

$$\mathbb{E}[X|X + Y] = \alpha(X + Y).$$

Proof. It suffices to compute for all $0 \leq k \leq n$ the quantities $\mathbb{P}(X = k|X + Y = n)$. Indeed

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k|X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{e^{-\mu_X} \mu_X^k}{k!} \frac{e^{-\mu_Y} \mu_Y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!}{e^{-\mu_X - \mu_Y} ((\mu_X + \mu_Y)^n)} \\ &= \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}. \end{aligned}$$

The conditional law of X is binomial, then

$$\mathbb{E}[X|X + Y = n] = \alpha n.$$

□

Lemma 4.1.9. For $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}[Q_t - Q_s | \mathcal{G}_s] = \frac{\Lambda_{s,t}}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_s).$$

Proof. Since \mathcal{F}_s and $Q_T - Q_s$ are independent, we have $\mathbb{E}[Q_t - Q_s | \mathcal{F}_s \vee \sigma(Q_T)] = \mathbb{E}[Q_t - Q_s | Q_T - Q_s]$. Then we use Lemma 4.1.8 with $X = N_t - N_s$ and $Y = N_T - N_t$ to get

$$\mathbb{E}[Q_t - Q_s | \mathcal{F}_s \vee \sigma(Q_T)] = \frac{\Lambda_{s,t}}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_s).$$

Now, let g_s belong to $\mathcal{G}_s = \cap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{F}_{s+\varepsilon} \vee \sigma(Q_T))$, then for any $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[(Q_t - Q_{s+\varepsilon})g_s] = \frac{\Lambda_{s+\varepsilon,t}}{\Lambda_{s+\varepsilon,T}}(Q_T - Q_{s+\varepsilon}).$$

It remains to take the limit in \mathbb{L}^1 as ε tends toward 0. □

Lemma 4.1.10.

$$\eta_t = N_t - \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}}(N_T - N_{s-})ds = Q_t - \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_{s-})ds$$

is a \mathcal{G} -martingale.

Proof. Since N_T is a.s. finite, the quantities $\int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}}(N_T - N_{s-})ds$ and $\int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}}(N_T - N_s)ds$ coincide for any $t < T$. Then

$$\mathbb{E}[\eta_t - \eta_s | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[Q_t - Q_s | \mathcal{G}_s] - \int_s^t \frac{\lambda_u}{\Lambda_{u,T}} \mathbb{E}[Q_T - Q_u | \mathcal{G}_s] du$$

Thanks to Lemma 4.1.9 and the definition of $\Lambda_{s,t}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\eta_t - \eta_s | \mathcal{G}_s] \\ &= \frac{\Lambda_{s,t}}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_s) - \int_s^t \frac{\lambda_u}{\Lambda_{u,T}} \mathbb{E}[Q_T - Q_s - (Q_u - Q_s) | \mathcal{G}_s] du \\ &= \frac{\Lambda_{s,t}}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_s) - \int_s^t \frac{\lambda_u}{\Lambda_{u,T}} \left(1 - \frac{\Lambda_{s,u}}{\Lambda_{s,T}}\right) (Q_T - Q_s) du \\ &= \frac{\Lambda_{s,t}}{\Lambda_{s,T}}(Q_T - Q_s) - \int_s^t \frac{\lambda_u}{\Lambda_{u,T}} \left(\frac{\Lambda_{s,T} - \Lambda_{s,u}}{\Lambda_{s,T}}\right) (Q_T - Q_s) du \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.11. η has jumps of size 1 which coincide with those of N , and

$$\langle \eta \rangle_t = \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (N_T - N_{s-}) ds$$

Proof. We use Itô's formula to obtain

$$\begin{aligned} (\eta_t)^2 &= 2 \int_0^t \eta_{s-} d\eta_s + [\eta]_t = 2 \int_0^t \eta_{s-} d\eta_s + N_t \\ &= 2 \int_0^t \eta_{s-} d\eta_s + \eta_t + \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (N_T - N_{s-}) ds \end{aligned}$$

and the first two terms are (\mathcal{G}_t) -martingales. \square

Then by applying Proposition 4.1.4, it ensures

Corollary 4.1.12. For any $v \in \mathbb{N}$, the conditional law $\mathcal{L}(N|N_T = v)$ where N admits for bounded deterministic intensity $(\lambda_t)_t$ is given by that one of the point process N^v whose stochastic intensity $\tilde{\lambda}_t$ is defined by

$$\tilde{\lambda}_t = \frac{\lambda_t}{\Lambda_{t,T}} (v - N_{t-})$$

Proof. In fact the solution of

$$N_t^v = \eta_t + \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (v - N_{s-}) ds$$

can be defined through a Picard's iteration since we have

$$\|N_t^{(k+1)} - N_t^{(k)}\|^2 \leq \frac{C_{\lambda,T} t}{T-t} \int_0^t \|N_{s-}^{(k)} - N_{s-}^{(k-1)}\|^2 ds$$

Thus it is measurable with respect to v . Then thanks to Theorem 4.1.7 we can show that $\mathcal{L}(N|N_T = v)$ is given by the law $\mathcal{L}(N^v)$ by conditioning the canonical decomposition of N as a (\mathcal{G}_t) -semi-martingale

$$N_t = \eta_t - \int_0^t \frac{\lambda_s}{\Lambda_{s,T}} (N_T - N_{s-}) ds$$

\square

4.1.3 Girsanov's theorem

To extend the last result to a larger class we introduce a probability change theorem given in [Bré81] (T3 p.165 and T4 p.168).

Theorem 4.1.13. *Let N and N' be two non-explosive point processes define on $[0, T]$, with intensities λ_t and λ'_t , respectively. Suppose that λ_t is positive for any $t \in [0, T]$. Moreover, suppose that for all $t \in [0, T]$, $\mu_t := \frac{\lambda'_t}{\lambda_t} < c$ and λ_t are both bounded. Then for all \mathcal{F}_t -measurable function f*

$$\mathbb{E}[f(N')] = \mathbb{E}[f(N) \left(\prod_{T_n \leq t} \mu_{T_n} \right) \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s - \lambda'_s ds \right\}].$$

Hence we have a new corollary of Theorem 4.1.7 by using Lemma A.2.1

Corollary 4.1.14. *Let N and N' be two non-explosive point processes with positive intensities λ_t and λ'_t respectively. Suppose λ_t is deterministic and $\lambda'_t := \lambda'_t(N'_{t-})$, and that $\mu_t(n) := \frac{\lambda'_t(n)}{\lambda_t}$ is bounded. Then for all positive measurable function f*

$$\mathbb{E}[f(N') | N'_T = v] = C \mathbb{E}[f(N^v) \left(\prod_{T'_n \leq t} \mu_{T'_n} \right) \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s - \lambda'_s(N^v_{s-}) ds \right\}].$$

where N^v is given by Corollary 4.1.12.

Proof. Thanks to Corollary 4.1.12, we know that

$$\mathbb{E}[f(N) | N_T = v] = \mathbb{E}[f(N^v)]$$

where the real point process N^v admits for stochastic intensity

$$\frac{\lambda_t}{\Lambda_{t,T}} \frac{v - N^v_{t-}}{T - t}.$$

Now, Girsanov's theorem allows us to write for any positive continuous function g

$$\mathbb{E}[f(N')g(N'_T)] = \mathbb{E}[f(N)g(N_T) \left(\prod_{T_n \leq t} \mu_{T_n} \right) \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s - \lambda'_s ds \right\}].$$

Then, it remains to apply Lemma A.2.1 given in the appendix. \square

4.1.4 Case of a deterministic finite discrete associated measure

We are now considering a non-explosive point process N whose associated compensator is $a_t = \sum_{s \leq t} \Delta a_s$. We assume that $\Delta a_s \leq 1$. In order to understand the law of this process, we use the characterization of point processes (cf. [Wat64] or [Bré75]). So that N is a process verifying

1. $N_t - N_s$ and \mathcal{F}_s are independent for $s < t$
2. $\mathbb{E}[\exp\{vu(N_t - N_s)\}] = \prod_{s < r < t} \{1 + (e^{vu} - 1)\Delta a_r\}$

In other words, this means, that at a finite number of discontinuity times t of a , the process N jumps with probability Δa_t .

At first, we study the case where the height of the jumps of a is $1/2$. We define

$$n_t = \text{Card}\{s : s \leq t, \Delta a_s > 0\}$$

So that N_t is the sum of n_t independent Bernoulli variables with parameter $1/2$. We can compute explicitly the law of N_t conditioned on $N_T = v$, indeed for all k

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = k | N_T = v) &= \mathbb{P}(N_t = k) \mathbb{P}(N_T - N_t = v - k) \mathbb{P}(N_T = v)^{-1} \\ &= \binom{n_t}{k} \binom{n_T - n_t}{v - k} \binom{n_T}{v}^{-1} \end{aligned}$$

To obtain the law of the conditioned process, we want to find its associated measure.

Theorem 4.1.15. *Let N be a point process admitting for associated measure the finite sum $a_t = \sum_{s \leq t} \Delta a_s$ with $\Delta a_s = \frac{1}{2}$ if it is positive. The conditional point process N^v corresponding to the conditional of N knowing $N_T = v$ is (with the convention $\frac{0}{0} = 1$)*

$$\sum_{s \leq t} \frac{N_T^v - N_{s^-}^v}{a_T - a_{s^-}} \Delta a_s$$

Proof. We just have to consider the height of the jumps at the discontinuity times t_k of a .

$$\mathbb{P}(N_{t_k} = v_k | N_{t_{k-1}} = v_{k-1}, N_T = v) = \binom{n_{t_k} - n_{t_{k-1}}}{v_k - v_{k-1}} \binom{n_T - n_{t_k}}{v - v_k} \binom{n_T - n_{t_{k-1}}}{v - v_{k-1}}^{-1}$$

Hence If $v_k = v_{k-1} + 1$ then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t_k} = v_k | N_{t_{k-1}} = v_{k-1}, N_T = v) &= \binom{1}{1} \binom{n_T - n_{t_{k-1}} - 1}{v - v_{k-1} - 1} \binom{n_T - n_{t_{k-1}}}{v - v_{k-1}}^{-1} \\ &= \frac{v - v_{k-1}}{n_T - n_{t_{k-1}}} \end{aligned}$$

Else if $v_k = v_{k-1}$ then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t_k} = v_k | N_{t_{k-1}} = v_{k-1}, N_T = v) &= \binom{1}{0} \binom{n_T - n_{t_{k-1}} - 1}{v - v_{k-1}} \binom{n_T - n_{t_{k-1}}}{v - v_{k-1}}^{-1} \\ &= \frac{n_T - n_{t_{k-1}} - v + v_{k-1}}{n_T - n_{t_{k-1}}} = 1 - \frac{v - v_{k-1}}{n_T - n_{t_{k-1}}} \end{aligned}$$

□

Now, let N' be a non explosive point process whose associated compensator is given by $a'_t = \sum_{s \leq t} \Delta a'_s$ with $\Delta a'_s \leq 1$. So that at each discontinuity of a' the process N' jumps with probability $\Delta a'_s$. We can easily compute the probability of a path on $[0, T]$. Indeed, at each jump time T'_n , the process had a probability of $\Delta a'_{T'_n}$ to jump. For all others sites s for which $\Delta a_s > 0$, the process had a probability of $1 - \Delta a'_s$ not to jump. Finally, the probability of a path can be written

$$\prod_{T'_n \leq T} \Delta a'_{T'_n} \prod_{\substack{s \leq T \\ s \neq T'_n}} (1 - \Delta a'_s).$$

Let N be the point process whose generator $a_t = \sum_{s \leq t} \Delta a_t$ possesses the same discontinuities than a' but with $\Delta a_t = \frac{1}{2}$ when it is positive. We are now able to compare both laws of N and N' , since the calculus above gives the probability of the same path under the law of N , so that we are able to express a kind of Girsanov transformation. For any \mathcal{F}_T -measurable positive function f

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(N')] &= \mathbb{E}[f(N) \prod_{T_n \leq T} \Delta a'_{T_n} \prod_{\substack{s \leq T \\ s \neq T_n}} (1 - \Delta a'_s) \prod_{T_n \leq T} \Delta a_{T_n}^{-1} \prod_{\substack{s \leq T \\ s \neq T_n}} (1 - \Delta a_s)^{-1}] \\ &= 2^{n_T} \mathbb{E}[f(N) \prod_{T_n \leq T} \Delta a'_{T_n} \prod_{\substack{s \leq T \\ s \neq T_n}} (1 - \Delta a'_s)], \end{aligned}$$

where $n_t = \text{Card}\{s \in [0, T] : \Delta a_s > 0\}$ is the number of sites at which the process can jump. In fact, this could be deduced from a more global result appearing in [BJ77] p.377. This gives the change of measure between two general point processes, by using the corresponding representations given by Watanabe's characterization ([Wat64],[Bré75]). Using this last computation, it ensues

Corollary 4.1.16. *Let N and N' two non-explosive point processes with associated compensators $a_t = \sum_{s \leq t} \Delta a_t$ and $a'_t = \sum_{s \leq t} \Delta a'_t$, respectively. Suppose that a and a' admit the same discontinuity times and $\Delta a_t = \frac{1}{2}$ when positive. Then, for any \mathcal{F}_T -measurable positive function f*

$$\mathbb{E}[f(N')] = \mathbb{E}[f(N^v) \prod_{T_n^v \leq T} \Delta a'_{T_n^v} \prod_{\substack{s \leq T \\ s \neq T_n^v}} (1 - \Delta a'_s)].$$

Proof. We just have to apply Lemma A.2.1 given in the appendix. \square

4.2 Jump Markov processes on a finite set of states

4.2.1 Result

We set a probability space $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ and the finite set of states S . Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a jump Markov process on S and $(\mathcal{F}_t)_t$ its natural filtration. The transition probabilities

$(p_{s,t}(x,y))_{x,y \in S}$ are defined for $x, y \in S$ and $s \leq t$ by

$$p_{s,t}(x,y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$$

Let $P_{s,t}$ be the operator acting on functions from S to \mathbb{R} defined by

$$\forall f : S \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in S, \quad P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}[f(X_t) | X_s = x]$$

The family $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ is a semi-group in the sense that for all $0 \leq s \leq t \leq u$

$$\begin{aligned} P_{s,u} &= P_{s,t} \circ P_{t,u} \\ P_{s,s} &= Id \end{aligned}$$

Definition 4.2.1. We say that the semi-group $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ is differentiable in t if the following quantities

$$L_t^+ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{t,t+h} - Id}{h}, \quad L_t^- = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{t-h,t} - Id}{h}$$

exist and are equal.

If $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ is differentiable for all t , we define the generator $(L_t)_{t \leq 0}$ by $L_t = L_t^+$.

Proposition 4.2.2. Let the semi group $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ be differentiable, then we have the Kolmogorov's equations

$$\partial_t P_{s,t} = P_{s,t} L_t \tag{4.1}$$

$$\partial_s P_{s,t} = -L_s P_{s,t} \tag{4.2}$$

Theorem 4.2.3. Let X be a jump Markov process with generator (L_t) . Let \tilde{X} be the conditional process following the law of X conditioned on $X_T = v$. Then \tilde{X} admits for generator

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t : F(S) &\rightarrow F(S) \\ f &\mapsto \frac{L_t(f p_{t,T}(\cdot, v)) - f L_t p_{t,T}(\cdot, v)}{p_{t,T}(\cdot, v)} \end{aligned}$$

with for all x, y in S and $0 \leq s \leq t$

$$p_{s,t}(x,y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$$

Proof. First, the transition probabilities $p_{s,t}(x,y) := P_{s,t}(\mathbf{1}_y)(x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$ of X allow to express that ones $\tilde{p}_{s,t}$ of the conditional process \tilde{X} . For all $s \leq t$ and $x, y \in S$ such that $p_{s,T}(x,v) > 0$

$$\tilde{p}_{s,t}(x,y) = \mathbb{P}(\tilde{X}_t = y | \tilde{X}_s = x) = p_{s,t}(x,y) \frac{p_{t,T}(y,v)}{p_{s,T}(x,v)}$$

We define

$$g_{s,t}(x,y) = \frac{p_{t,T}(y,v)}{p_{s,T}(x,v)}$$

so that, g gives the density of \tilde{P} with respect to P . Indeed, for any positive function f ,

$$\tilde{P}_{s,t}f(x) = \mathbb{E}[f(\tilde{X}_t)|\tilde{X}_s = x] = \mathbb{E}[f(X_t)g_{s,t}(x, X_t)|X_s = x] = P_{s,t}(fg_{s,t}(x, \cdot))(x)$$

Using this we can write thanks to Kolmogorov's equations

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{P}_{s,t}f(x) &= \partial_t P_{s,t}(fg_{s,t}(x, \cdot))(x) \\ &= \partial_t P_{s,t}(fg)(x)|_{g=g_{s,t}(\cdot, x)} + \partial_t P_{s,u}(fg_{s,t}(x, \cdot))(x)|_{u=t} \end{aligned}$$

First, let treat the second term

$$\partial_t P_{s,u}(fg_{s,t}(\cdot, x))(x) = P_{s,u}(f\partial_t g_{s,t}(\cdot, x))(x).$$

Now, we use the definition of g , since $p_{t,T}(y, v) = P_{t,T}(\mathbf{1}_v)(y)$

$$\partial_t g_{s,t}(x, y) = \frac{\partial_t p_{t,T}(y, v)}{p_{s,T}(x, v)} = \frac{-L_t p_{t,T}(y, v)}{p_{s,T}(x, v)} = -L_t g_{s,t}(x, y).$$

Hence

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{P}_{s,t}f(x) &= P_{s,t}L_t(fg_{s,t}(x, \cdot))(x) + P_{s,t}(f\partial_t g_{s,t}(x, \cdot))(x) \\ &= P_{s,t} [L_t(fg_{s,t}(x, \cdot)) - fL_t g_{s,t}(x, \cdot)](x) \\ &= P_{s,t} \left[g_{s,t}(x, \cdot) \left(\frac{L_t - L_t g_{s,t}(x, \cdot)}{g_{s,t}(x, \cdot)} \right) (fg_{s,t}(x, \cdot)) \right](x). \end{aligned}$$

Finally

$$\partial_t \tilde{P}_{s,t} = P_{s,t} \tilde{L}_t,$$

with operator \tilde{L}_t defined as follows

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t : F(S) &\rightarrow F(S) \\ f &\mapsto \frac{L_t(fg_{s,t}) - fL_t g_{s,t}}{g_{s,t}} \end{aligned}$$

which does not depend on s since $p_{s,T}(x, v)$ cancels. \square

4.2.2 Simulation

Technique

In order to simulate a jump Markov process X with intensity $(\lambda_t)_t$, one option is the following :

Starting from $X_0 = a_0$, for all $b \neq a_0$, we generate an inhomogeneous Poisson process N^b of parameter $q_{a_0 b}(t) = L_t \mathbf{1}_b(x)$. For this, we introduce $\Lambda_{a_0 b}(t) = \int_0^t q_{a_0 b}(s) ds$, and then we use the fact that

$$N_t^b = N_{\Lambda_{a_0 b}(t)}^0$$

where N^0 is a homogeneous Poisson process of parameter 1. We then obtain the first jump T_1^b of N^b by inverting Λ . Then we jump to the state a_1 for which N^b jumps first. And so on, we generate independent inhomogeneous Poisson processes N^b for $b \neq a_1$ of parameter $q_{a_1 b}(T_1 + t) \dots$

The algorithm is the following

ALGORITHM For fixed number of states N , time horizon H , and initial state a_0 .

- **Initialization** \rightarrow For each state $b \neq a_0$, generate an exponentially distributed variable $E^a \sim \mathcal{E}(1)$, compute or estimate $\Lambda_{a_0 b}^{-1}(E^a)$, then set $T_1 = \min_{b \neq a_0} (\Lambda_{a_0 b}^{-1}(E^a))$ and a_1 the state for which the minimum is realized.
 - **While the last jump time t is lesser than H** \rightarrow If N is the integer such that $t = T_N$. For each state $b \neq a_N$, generate an exponentially distributed variable $E^b \sim \mathcal{E}(1)$, compute or estimate $\Lambda_{a_N b}^{-1}(E^b + \Lambda_{a_N b}(T_N))$, then set $T_{N+1} = \min_{b \neq a_N} (\Lambda_{a_N b}^{-1}(E^b))$ and a_{N+1} the state for which the minimum is realized.
 - **Truncation** \rightarrow For first $t = T_N$ for which $t > T$, set $t = H$ and $a_N = a_{N-1}$.
-

Example

We now choose to study the conditioning of a time-and-space homogeneous jump markov process of parameter λ on a state space S such that $|S| = N$. First, we compute the new generator \tilde{L}

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t : F(S) &\rightarrow F(S) \\ f &\mapsto \frac{1}{p_{T-t}(\cdot, v)} \sum_{y \in S} (f(y) - f(\cdot)) p_{T-t}(y, v) \end{aligned}$$

We need the expression of p_{T-t} , we get it using the fact that $P_t = \exp(Qt)$. Thus, if $\mathbf{1}_N$ is the square matrix with all coefficients equal to 1, and I_N the identity matrix, we obtain by computation

$$P_t = \exp(\lambda t(\mathbf{1} - NI_N)) = e^{-\lambda N t} I_N + \frac{1}{N}(1 - e^{-\lambda N t}) \mathbf{1}_N$$

This allows us to get $\tilde{L}_t \mathbf{1}_a(x)$ for all $a \neq x \in S$. The expression depends on the links between a , x and v

If $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ then for all $a \neq v$

$$\tilde{L}_t \mathbf{1}_a(v) = \lambda \frac{p_{T-t}(a, v)}{p_{T-t}(v, v)} = \lambda \frac{1 - e^{-\lambda N(T-t)}}{(N-1)e^{-\lambda N(T-t)} + 1}$$

this leads to

$$\Lambda_{va}(t) = \lambda t + \frac{1}{N-1} \log \left(\frac{(N-1)e^{-\lambda N T} + 1}{(N-1)e^{-\lambda N(T-t)} + 1} \right)$$

but here we can not have an explicit formula for the inverse function.

If $\mathbf{x} \neq \mathbf{v}$ then

If $a = v$

$$\tilde{L}_t \mathbf{1}_v(x) = \lambda \frac{p_{T-t}(v, v)}{p_{T-t}(x, v)} = \lambda \frac{(N-1)e^{-\lambda N(T-t)} + 1}{1 - e^{-\lambda N(T-t)}}$$

so that

$$\Lambda_{xv}(t) = \lambda t + \log \left(\frac{1 - e^{-\lambda N T}}{1 - e^{-\lambda N(T-t)}} \right)$$

whose inverse has no explicit formula.

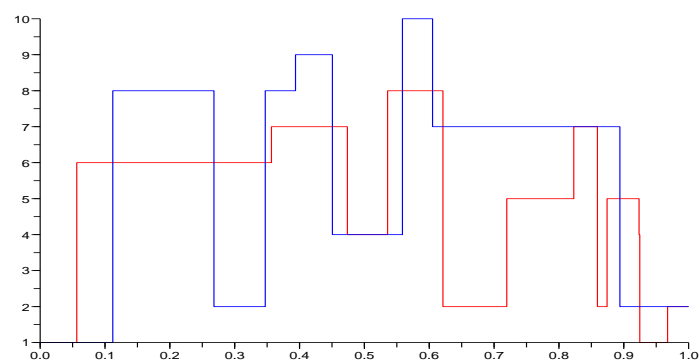
Else for $a \neq x$

$$\tilde{L}_t \mathbf{1}_a(x) = \lambda \frac{p_{T-t}(a, v)}{p_{T-t}(x, v)} = \lambda$$

so that

$$\Lambda_{xa}(t) = \lambda t \quad \text{and} \quad \Lambda_{xa}^{-1}(u) = \frac{u}{\lambda}$$

FIGURE 4.1 – Illustration of a simulation with 10 states



The red curve whose generator is L defined by $Lf = \sum_y f(y)$ is simulated to obtain an observation in time 1. The blue curve with generator \tilde{L} is simulated thanks to the conditional law.

Annexe A

Annexe

A.1 Densités de transition d'un processus de Markov

Nous énonçons ici un résultat connu comme les estimées d'Aronson suite à l'article [Aro67]. Ces estimées donnent un encadrement des densités de transition par des noyaux gaussiens.

On se donne une EDS n -dimensionnelle

$$dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t, \quad x_0 = u \quad (\text{A.1})$$

où w est un mouvement brownien d -dimensionnel. On considère alors les densités de transition $p_{s,t}(x, y)$ du processus x .

Ce résultat se trouve dans [Dyn65] p.227 Théorème 0.4.. On peut également consulter directement [IKO01].

Théorème A.1.1 (Il'in, Kalashnikov, Oleinik). *Supposons que*

1. Les fonctions $\sigma\sigma^*$ et b sont bornées sur une bande $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et α -Hölder en espace
2. La fonction $\sigma\sigma^*$ vérifie également une condition d'Hölder en temps sur $[0, T]$
3. Il existe une constante λ telle que pour tout couple (t, x)

$$\sigma_t(x)\sigma_t(x)^* > \lambda I_n,$$

au sens des matrices symétriques.

Alors

1. Pour tout $0 \leq s < t \leq T$

$$p_{s,t}(x, y) > 0.$$

2. De plus

$$p_{s,t}(x, y) \leq M(t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\alpha\|y-x\|^2}{t-s}}, \quad (\text{A.2})$$

$$|\partial_i p_{s,t}(x, y)| \leq M(t-s)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{\alpha\|y-x\|^2}{t-s}}, \quad (\text{A.3})$$

$$|\partial_{ij} p_{s,t}(x, y)| \leq M(t-s)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\alpha\|y-x\|^2}{t-s}}, \quad (\text{A.4})$$

$$|\partial_t p_{s,t}(x, y)| \leq M(t-s)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\alpha\|y-x\|^2}{t-s}}, \quad (\text{A.5})$$

où M et α sont deux constantes strictement positives.

En réalité, il existe une borne inférieure de même type pour les densités. Il est donné par exemple, dans [Aro67] ou encore [Aze84], [Str88] et également dans [PÈ84] Théorème 3.6. Pour des cadres plus larges.

Théorème A.1.2 (Aronson). *Sous les mêmes conditions que le résultat précédent, pour tous $0 \leq s < t \leq T$*

$$\mu(t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda\|y-x\|^2}{t-s}} \leq p_{s,t}(x, y) \leq M(t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\alpha\|y-x\|^2}{t-s}},$$

où $\mu, \lambda, M, \alpha > 0$ sont des constantes.

Des résultats plus récents existent, ils visent à affaiblir les hypothèses, notamment l'uniforme ellipticité. Par exemple, dans la présentation du Théorème 2.3.9, on parle d'un papier de F.Delarue et S.Menozzi [DM10] dans lequel ils mettent en place de telles estimées dans le cadre d'un système de n équations de dimensions d . Un mouvement brownien intervient uniquement dans la première équation, l'aléa se propageant aux autres équations à travers les différents coefficients.

A.2 Equivalence de lois et conditionnements

Le lemme suivant établit le lien entre le conditionnement de deux variables de lois équivalentes par la même fonctionnelle. Ce résultat sert dans cette thèse, lorsque l'on applique un changement de mesure à la Girsanov pour se ramener à une loi que l'on sait conditionner.

Lemme A.2.1. *Soient x, ξ deux variables aléatoires de lois équivalentes, i.e. il existe une fonction $q > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{E}[f(\xi)q(\xi)]$$

Soit λ une fonction à valeurs dans un \mathbb{R}^m , on suppose que pour tout vecteur u , on a l'existence d'une variable p_u telle que :

$$\mathbb{E}[f(\xi)|\lambda(\xi) = u] = \mathbb{E}[f(p_u)]$$

alors,

$$\mathbb{E}[f(x)|\lambda(x) = u] = q_\lambda^{-1}(u)\mathbb{E}[f(p_u)q(p_u)].$$

où q_λ est la densité de la mesure image de x par rapport à celle de ξ par λ .

Démonstration. Soient f et g deux fonctions mesurables, l'équivalence de lois nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}[f(x)g \circ \lambda(x)] = \mathbb{E}[f(\xi)g \circ \lambda(\xi)q(\xi)]$$

En utilisant l'hypothèse faite sur le conditionnement de ξ

$$\mathbb{E}[f(x)g \circ \lambda(x)] = \int \mathbb{E}[f(\xi)q(\xi)|\lambda(\xi) = u]g(u)\mu_{\lambda(\xi)}(du) = \int \mathbb{E}[f(p_u)q(p_u)]g(u)\mu_{\lambda(\xi)}(du)$$

où $\mu_{\lambda(\xi)}$ est la distribution de $\lambda(\xi)$. Ainsi, en réutilisant l'équivalence de lois

$$\mathbb{E}[f(x)g \circ \lambda(x)] = \int \mathbb{E}[f(p_u)q(p_u)]q_\lambda^{-1}(u)g(u)\mu_{\lambda(x)}(du)$$

où $\mu_{\lambda(x)}$ est la distribution de $\lambda(x)$ et q_λ est la densité de $\mu_{\lambda(x)}$ par rapport à $\mu_{\lambda(\xi)}$. \square

A.3 Formule d'Itô-Wentzell

Nous présentons ici une formulation multidimensionnelle de la généralisation de la formule d'Itô, dite Formule d'Itô-Wentzell, donnée dans le livre [Kun97] p.92, appliquée à des semi-martingales browniennes. Supposons

$$\begin{aligned} dX_t &= V_t(X_t)dt + \Sigma_t(X_t)dw_t \\ dF_t(x) &= b_t(x)dt + \sigma_t(x)dw_t, \end{aligned}$$

où X_t vit dans \mathbb{R}^n , $F_t(x)$ dans \mathbb{R}^m et w est un mouvement brownien de dimension d .

Théorème A.3.1. *Supposons que pour tout $t \geq 0$, les fonctions $x \mapsto b_t(x)$ et $x \mapsto \sigma_t(x)$ appartiennent presque sûrement à $C^2(\mathbb{R}^n)$.*

$$\begin{aligned} dF_t(X_t) &= b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dw_t + \nabla_x F_t(X_t)^* dX_t \\ &\quad + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_t^{i,j}(X_t)}{2} \partial x_i \partial x_j F_t(X_t) dt + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq d}} \Sigma_t^{j,k}(X_t) \partial x_j \begin{pmatrix} \sigma_t^{1,k}(X_t) \\ \vdots \\ \sigma_t^{m,k}(X_t) \end{pmatrix} dt \end{aligned} \tag{A.6}$$

où $a = \sigma \sigma^*$.

Bibliographie

- [Aro67] D. G. Aronson. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :890–896, 1967. [29](#), [91](#), [92](#)
- [Aze84] Robert Azencott. Densité des diffusions en temps petit : développements asymptotiques. I. In *Seminar on probability, XVIII*, volume 1059 of *Lecture Notes in Math.*, pages 402–498. Springer, Berlin, 1984. [92](#)
- [Bau02] Fabrice Baudoin. Conditioned stochastic differential equations : theory, examples and application to finance. *Stochastic Process. Appl.*, 100 :109–145, 2002. [22](#)
- [BB03] François Baccelli and Pierre Brémaud. *Elements of queueing theory*, volume 26 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Palm martingale calculus and stochastic recurrences, Stochastic Modelling and Applied Probability. [77](#)
- [BJ77] Pierre Brémaud and Jean Jacod. Processus ponctuels et martingales : Résultats récents sur la modélisation et le filtrage. *Advances in Applied Probabilities*, 9 :362–416, 1977. [vii](#), [84](#)
- [Bré75] Pierre Brémaud. An extension of watanabe’s theorem of characterization of poisson processes over the positive real half line. *Journal of Applied Probabilities*, 12 :396–399, 1975. [82](#), [84](#)
- [Bré81] Pierre Brémaud. *Point processes and queues*. Springer-Verlag, New York, 1981. Martingale dynamics, Springer Series in Statistics. [77](#), [81](#)
- [BT73] A. Bensoussan and R. Temam. Équations stochastiques du type Navier-Stokes. *J. Functional Analysis*, 13 :195–222, 1973. [60](#)
- [CI08] Peter Constantin and Gautam Iyer. A stochastic Lagrangian representation of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(3) :330–345, 2008. [61](#)
- [Cla90] JMC Clark. The simulation of pinned diffusions. In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 1418–1420, 1990. [21](#)
- [DH06] Bernard Delyon and Ying Hu. Simulation of conditioned diffusions and applications to parameter estimations. *Stochastic Processes and Their Applications*, 116 :1660–1675, 2006. [iv](#), [17](#), [21](#), [42](#)

- [DJB05] Gilles Daniel, Nathan L. Joseph, and David S. Brée. Stochastic volatility and the goodness-of-fit of the Heston model. *Quant. Finance*, 5(2) :199–211, 2005. [53](#)
- [DLR77] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 39(1) :1–38, 1977. With discussion. [i](#)
- [DM75] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV, Édition entièrement refondue, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372. [39](#), [42](#)
- [DM10] François Delarue and Stéphane Menozzi. Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. *J. Funct. Anal.*, 259(6) :1577–1630, 2010. [viii](#), [29](#), [92](#)
- [DPD08] Giuseppe Da Prato and Arnaud Debussche. 2D stochastic Navier-Stokes equations with a time-periodic forcing term. *J. Dynam. Differential Equations*, 20(2) :301–335, 2008. [60](#)
- [Dyn65] E. B. Dynkin. *Markov processes. Vols. I, II*, volume 122 of *Translated with the authorization and assistance of the author by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, G. Majone. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bände 121*. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1965. [91](#)
- [EK91] Robert J. Elliott and P. Ekkehard Kopp. Equivalent martingales measures for bridge processes. *Stochastic Analysis and Applications*, 9(4) :429–444, 1991. [77](#), [79](#)
- [FI93] Hans Föllmer and Peter Imkeller. Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29(4) :569–586, 1993. [iii](#), [5](#)
- [HLP88] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition. [48](#)
- [HM06] Martin Hairer and Jonathan C. Mattingly. Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing. *Ann. of Math. (2)*, 164(3) :993–1032, 2006. [60](#)
- [IKO01] A. M. Il’in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleïnik. Second-order linear equations of parabolic type. *Tr. Semin. im. I. G. Petrovskogo*, (21) :9–193, 341, 2001. [91](#)
- [IW89] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989. [43](#), [48](#)
- [Jac85] Jean Jacod. Grossissement initial, hypothèse (h’) et théoreme de Girsanov. In Th. Jeulin and M. Yor, editors, *Grossissements de filtrations : exemples*

- et applications*, volume 1118 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 15–35. Springer Berlin / Heidelberg, 1985. [iii](#), [18](#)
- [Jeu80] T. Jeulin. *Semi-martingales et grossissement de filtration*, volume 833 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1980. [iii](#), [5](#)
- [JY79] T. Jeulin and M. Yor. Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 332–359. Springer, Berlin, 1979. [vii](#), [5](#), [9](#), [77](#), [79](#)
- [JY85] T. Jeulin and M. Yor. *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, volume 1118 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1985. [iii](#), [5](#), [18](#)
- [Kle05] Fima C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press, London, second edition, 2005. [9](#), [45](#)
- [KS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. [17](#), [41](#)
- [Kun97] Hiroshi Kunita. *Stochastic flows and stochastic differential equations*, volume 24 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Reprint of the 1990 original. [93](#)
- [LZ90] T. J. Lyons and W. A. Zheng. On conditional diffusion processes. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115(3-4) :243–255, 1990. [ii](#), [vii](#), [18](#)
- [Mac80] V. Mackevičius. Formula for conditional Wiener integrals. *Stochastic Differential Systems Filtering and Control*, pages 331–333, 1980. [9](#)
- [Mar11] Jean-Louis Marchand. Conditioning diffusions with respect to partial observations. *article under submission, available on arxiv*, 2011. [iv](#)
- [Mél00] Sylvie Méléard. A trajectorial proof of the vortex method for the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Ann. Appl. Probab.*, 10(4) :1197–1211, 2000. [60](#)
- [Mél01] Sylvie Méléard. Monte-Carlo approximations for 2d Navier-Stokes equations with measure initial data. *Probab. Theory Related Fields*, 121(3) :367–388, 2001. [60](#)
- [MP82] C. Marchioro and M. Pulvirenti. Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory. *Comm. Math. Phys.*, 84(4) :483–503, 1982. [60](#)
- [MR02] R. Mikulevicius and B. Rozovskii. On martingale problem solutions for stochastic Navier-Stokes equation. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002)*, volume 227 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 405–415. Dekker, New York, 2002. [60](#)
- [MR04] R. Mikulevicius and B. L. Rozovskii. Stochastic Navier-Stokes equations for turbulent flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(5) :1250–1310, 2004. [60](#)

- [MR05] R. Mikulevicius and B. L. Rozovskii. Global L_2 -solutions of stochastic Navier-Stokes equations. *Ann. Probab.*, 33(1) :137–176, 2005. [60](#)
- [PÈ84] F. O. Porper and S. D. Èidel'man. Two-sided estimates of the fundamental solutions of second-order parabolic equations and some applications of them. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(3(237)) :107–156, 1984. [29](#), [92](#)
- [PMCG10] N. Papadakis, E. Memin, A. Cuzol, and N. Gengembre. Data assimilation with the weighted ensemble Kalman filter. *Tellus A*, 62(5) :673–697, 2010. [vi](#), [72](#)
- [SBBA08] Chris Snyder, Thomas Bengtsson, Peter Bickel, and Jeff Anderson. Obstacles to high-dimensional particle filtering. *Mon. Wea. Rev.*, 136(12) :4629–4640, 2008. [vi](#)
- [SST] Wim Schoutens, Erwin Simons, and Jurgen Tistaert. A perfect calibration! now what? In *The best of Wilmott 2*, chapter 23. Wiley and Sons. [54](#)
- [Str88] Daniel W. Stroock. Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. In *Séminaire de Probabilités, XXII*, volume 1321 of *Lecture Notes in Math.*, pages 316–347. Springer, Berlin, 1988. [92](#)
- [Wat64] Shinzo Watanabe. On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. *Japan. J. Math.*, 34 :53–70, 1964. [82](#), [84](#)

Résumé : Le but de cette thèse est de décrire la loi conditionnelle d'un processus markovien multidimensionnel connaissant la valeur de certaines combinaisons linéaires de ses coordonnées à des instants donnés. La description recherchée consiste à mettre en évidence un processus de même type, facile à simuler, dont la loi est équivalente à la loi conditionnelle ciblée.

La classe principalement étudiée est celle des processus à diffusion. Dans un premier temps, des techniques de grossissement de filtration (Jacod 1985) permettent de déterminer les paramètres de l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus conditionnel. Cependant, on s'aperçoit alors que la dérive n'est pas explicite, car celle-ci dépend des densités de transition du processus initial, inconnues en général. Ceci rend impossible, une simulation directe par exemple à l'aide d'un schéma d'Euler. Afin de pallier ce défaut, nous proposons une alternative, dans l'esprit de Delyon et Hu (2006). L'approche consiste à proposer une équation différentielle stochastique de paramètres explicites, dont la solution est de loi équivalente à la loi conditionnelle.

Une application en collaboration avec Anne Cuzol et Etienne Mémin de l'INRIA, dans le cadre des écoulements fluides est également présentée. On applique la méthode proposée précédemment à un modèle stochastique inspiré des équations de Navier-Stokes.

Enfin, la classe des processus markoviens à sauts est également abordée.

Abstract : The aim of this work is to describe the conditional law of a multidimensional Markov process knowing linear combinations of its coordinates at given times. We are looking for a process of the same kind, whose law is equivalent to the targeted one.

The diffusion processes represent the most studied process class in this thesis. We first use techniques of enlargement of filtrations (Jacod 1985) in order to determine the parameters of the conditional stochastic differential equation (SDE). This theoretical result does not allow direct simulation of conditional paths because of its drift. Indeed, this one depends on the transition density functions of the initial diffusion, and those functions are generally unknown. That is why, we provide an alternative, inspired by a Delyon & Hu (2006), consisting in proposing a SDE, whose law is equivalent to the targeted conditional distribution. Moreover, this SDE possesses explicit coefficients, and is easy to simulate thanks to an Euler scheme. Same kind of results are also established in the case of real point processes.

An application in collaboration with Anne Cuzol and Etienne Mémin from the INRIA is also presented. It consists in applying the precedent result to a model, whose construction is based on 2D-Navier-Stokes equations.