



HAL
open science

Génération de champs magnétiques statiques par courant et aimant permanent. Méthode de calcul de la synthèse de champ et réalisation de profil quelconque

Alexandre Labiche

► **To cite this version:**

Alexandre Labiche. Génération de champs magnétiques statiques par courant et aimant permanent. Méthode de calcul de la synthèse de champ et réalisation de profil quelconque. Physique Numérique [physics.comp-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1998. Français. NNT: . tel-00723886v1

HAL Id: tel-00723886

<https://theses.hal.science/tel-00723886v1>

Submitted on 15 Aug 2012 (v1), last revised 28 Sep 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N° D'ORDRE: 4963

<p style="text-align: center;">UNIVERSITE DE PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY</p>
--

THESE
présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR

Alexandre LABICHE

SUJET: Génération de champs magnétiques statiques par courant et aimant permanent. Méthode de calcul de la synthèse de champ et réalisation de profil quelconque.

Soutenue le Mercredi 7 Janvier 1998 devant la Commission d'examen

MM. COULOMB	Jean Louis	Rapporteur
JEANDEY	Christian	Membre du jury
L'HUILLIER	Jean Pierre	Rapporteur
SAUZADE	Michel	Président du jury
TAQUIN	Jacques	Directeur de thèse

Génération de champs magnétiques statiques
par courant et aimant permanent.
Méthode de calcul de la synthèse de champ et
réalisation de profil quelconque.

LABICHE Alexandre

23 octobre 1997

Remerciements

Je remercie vivement mon directeur de thèse M. Taquin pour sa disponibilité et son suivi tout au long de cette thèse. Son expérience dans le domaine du calcul des champs magnétiques fût indispensable et les orientations choisies furent bénéfiques. Ces trois années ont donc été très riches en enseignement.

Je remercie grandement les directeurs du laboratoire, M. M. Sauzade et M. J. Bittoun, pour m'avoir accepté dans leur unité et avoir mis à disposition les moyens nécessaires à ce travail.

Je remercie vivement M. S.K. Kan pour m'avoir enseigné un domaine connexe tel que le calcul de champ radiofréquence.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire pour son soutien et sa grande gentillesse.

Je remercie les membres du jury, en particulier M. Coulomb et M. L'huillier pour avoir accepté la charge supplémentaire de rédaction des rapports de thèse.

Je remercie L'Ecole Spéciale des Travaux Publics qui a contribué pour une large part à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction	5
1 Détermination du champ \vec{B}	7
1.1 Potentiel Scalaire	7
1.2 Coordonnées généralisées	7
1.2.1 Détermination de la matrice F	9
1.3 Coordonnées cylindriques	9
1.3.1 Matrice F en coordonnées cylindriques	9
1.4 Coordonnées cartésiennes	12
1.4.1 Matrice F en coordonnées cartésiennes	12
1.5 Forme des aimants	15
1.6 Influence du champ démagnétisant	16
1.6.1 Calcul du champ démagnétisant	16
2 Correction du champ	21
2.1 Développement du potentiel	21
2.2 Conditions sur le calcul des coefficients	24
2.3 Algorithme de calcul des coefficients	27
2.4 Annulations des coefficients	30
2.5 Calcul des aimants correcteurs	30
2.5.1 Développement d'un aimant en polynômes de Legendre	31
2.5.2 Approximation de l'intégration surfacique	32
2.5.3 Annulation des coefficients	33
2.5.4 Configuration matérielle de la correction	35
2.6 Résolution d'un premier problème	36

2.6.1	Discussion sur le sens d'aimantation des aimants par rapport au champ principal	37
2.7	Influence sur les composantes transverses	41
2.8	Développement du champ en fonctions de Bessel	42
3	Résolution non linéaire	45
3.1	Méthode générale	45
3.2	Racines des équations de Legendre	46
3.3	Inversion de la matrice jacobienne	47
3.4	Décomposition en valeur singulière d'une matrice carrée	48
3.5	Organigramme du logiciel	50
4	Application à deux variables	53
4.1	Allure des courbes a_{00} , a_{10} , a_{20}	54
4.2	Choix de vecteurs initiaux	54
5	Génération de champ par fils de courant	59
5.1	Développement du champ d'un segment de fil	60
5.1.1	Calcul de la composante B_z (voir Fig 5.1)	60
5.1.2	Calcul de la composante B_x (voir Fig 5.1)	61
5.1.3	Calcul de la composante B_y (voir Fig 5.1)	62
5.2	Générateur de champ uniforme	63
5.3	Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial x}$	65
5.4	Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial y}$	70
5.5	Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial z}$	75
5.6	Arcs de retour	76
5.7	Génération d'un champ sinusoïdal	79
6	Expérimentation	83
6.1	Environnement de mesure	83
6.2	Mesure du gradient a_{11} version I	84
6.3	Mesure du gradient a_{11} version II	86
6.4	Validation de la cage d'aimants	86
	Conclusion	89

Introduction

Ce document présente une technique de synthèse de champ magnétique statique. A partir d'un profil de champ désiré, il s'agit de retrouver la position ou certaines caractéristiques de sources de champ. Comme les équations utilisées sont celles du développement du champ en $1/R$, nous pouvons étendre cette technique aux champs électrostatiques. Du point de vue numérique, c'est la recherche des racines de ces équations qui nous intéresse et non une optimisation d'une fonction de coût. Nous avons donc suivi l'heuristique générale qui veut que le nombre d'équations doit être égal au nombre d'inconnues. Les degrés de liberté du système (nombre d'aimants, déplacement en x,y des conducteurs, valeur du courant, etc...) sont donc en accord avec le nombre d'équations à résoudre. Mais ceci est vrai dans les problèmes linéaires et en aucun cas nous ne pouvons assurer une solution dans les systèmes non linéaires même si on augmente le nombre de degrés de liberté et ensuite résoudre le problème par une technique des moindres carrés. Sur ce dernier point, c'est une fonctionnelle qui va être minimisée et rien ne peut être dit a priori sur la précision des résultats.

Nous avons choisi la recherche des vraies racines de ces équations. Le système de résolution est de cette façon capable de donner quelles sont les équations qui ne peuvent pas être annulées (ou égales à une valeur fixe). En étudiant finement ce problème, certaines caractéristiques des structures de génération de champ sont nécessaires, elles sont présentées tout au long du document.

Nous commencerons donc par le calcul direct du champ magnétique généré par un aimant permanent. Ce calcul ne pose pas réellement de difficulté, il s'agit surtout d'obtenir une précision suffisante par rapport au champ réel. Cette étape permet ultérieurement de vérifier la validité d'une configuration sans avoir systématiquement besoin de réaliser une maquette. Nous verrons qu'un seul paramètre doit être déterminé expérimentalement, il s'agit du champ rémanent de chaque aimant composant la structure de correction. Nous étudierons ensuite le problème inverse qui fournira la position des ai-

mants. C'est le sujet même de la thèse.

Dans les cas pratiques, nous pourrions soit contrôler les défauts de champs en les mesurant préalablement et ensuite générer un profil en adéquation avec le champ déjà présent, soit générer un profil simple sans tenir compte des éventuels défauts liés à l'environnement. Nous avons traité le premier cas par une configuration d'aimants et le deuxième cas par fils conducteurs. Le calcul direct du champ généré par des conducteurs n'est pas présenté car nous utilisons la loi de Biot-Savart. La validité expérimentale est d'ailleurs aisée car il n'y a aucune approximation et le courant circulant dans les conducteurs est facilement contrôlable (à contrario de la valeur du champ rémanent des aimants).

Dans notre cas, l'imagerie par résonance magnétique à bas champ nécessite un champ de 1010 Gauss pour une fréquence de résonance de l'hydrogène à 4.3 MHz. Dans le cadre même de l'imagerie, l'homogénéité du champ magnétique statique doit être excellente. Dans notre cas l'erreur maximale dans la zone utile est de plus ou moins 10 mG (10^{-6} T). Ceci représente donc une erreur relative pour un imageur à bas champ de 10 parties par million (10 ppm pour 1010 Gauss). En comparaison, le champ magnétique terrestre sous nos latitudes est de l'ordre de 500 mG. Vu la grande homogénéité de ce champ, cela ne pose pas de difficultés majeures. En revanche, en présence de structures métalliques avoisinantes (fer à béton par exemple) le champ magnétique terrestre sera dévié localement. De ce fait, il générera à lui seul une erreur très importante dans la zone utile. Il s'agit alors de bien cartographier ces défauts afin d'avoir une référence lors de la mesure d'une configuration. Il apparaît qu'un réglage à 10 mG près ne permet absolument pas de déplacer la machine et surtout pas de la tourner, une fois que celle-ci est réglée.

Dans cette étude nous considérerons que l'ajout d'aimants ou de conducteurs ne peuvent pas aimanter les structures avoisinantes et que la perméabilité magnétique est constante dans la zone de correction.

Chapitre 1

Détermination du champ \vec{B}

Nous allons étudier la validité du calcul direct du champ magnétique généré par un aimant permanent. Bien que les aimants utilisés soient cylindriques, nous justifierons l'usage d'une formule simple issue du calcul en coordonnées cartésiennes. Nous étudierons aussi la démagnétisation propre de l'aimant et la possibilité de l'intégrer en déterminant expérimentalement la valeur du champ rémanent de chaque aimant.

1.1 Potentiel Scalaire

Si dans une région donnée il n'y a pas de sources de courant, nous pouvons définir un potentiel scalaire ψ , tel que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \quad (1.1)$$

En présence de milieux magnétiques [41, p.37], le potentiel s'écrit:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} dv' \quad (1.2)$$

Si l'aimantation \vec{M} est définie et localisée, une intégration par partie donne:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} dv' \quad (1.3)$$

1.2 Coordonnées généralisées

Le champ magnétique \vec{B} en un point i de l'espace, déterminé à partir du champ \vec{B}_{ext} créé par des courants et du champ produit par un corps aimanté

de volume V et d'aimantation \vec{M} est donné par l'expression:

$$\vec{B}(\vec{r}_i) = \vec{B}_{ext}(\vec{r}_i) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} dv' \quad (1.4)$$

où \vec{r}_i et \vec{r}' sont respectivement les coordonnées du point i et les coordonnées internes du volume V .

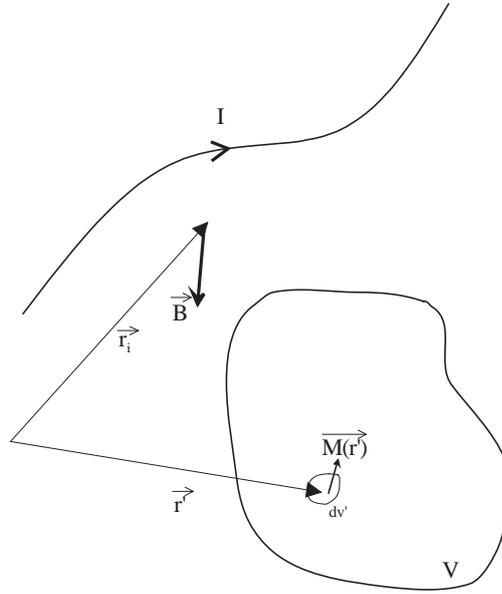


FIG. 1.1 – Champ magnétique produit par un corps aimanté et des lignes de courant.

Si l'on discrétise le volume aimanté V en N éléments V_i tel que l'aimantation puisse y être considérée comme homogène, le champ magnétique créé en un point j du volume V peut se mettre sous la forme matricielle suivante[41, p.9]:

$$[B_j] = [B_{0,j}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N [F_{ij}] \cdot [M_i] - [D_j] \cdot [M_j] \quad (1.5)$$

La matrice F permet de calculer le champ créé par l'aimantation M_i d'un volume V_i en un point quelconque hors du dit volume. Formellement, la matrice D est identique à la matrice F , elle exprime l'influence du champ généré par un volume élémentaire sur lui-même. Ceci se traduit par une diminution de l'aimantation du matériau et de ce fait du champ d'excitation

extérieure \vec{B} . La matrice D est alors appelée matrice démagnétisante. Pour simplifier les calculs, la matrice ligne D est déterminée suivant le point de calcul situé au centre de l'élément et de ce fait [39], la matrice est constituée des termes diagonaux de la matrice F . Il est impératif de tenir compte de la démagnétisation si l'on cherche l'aimantation $\vec{M}(r')$ induite dans le matériau par un champ extérieur, $\vec{M} = f(\vec{H})$, car les erreurs peuvent être conséquentes et dépendent de la forme du volume aimanté. Comme nous le verrons par la suite, le champ peut baisser de 1% dans le cas d'un volume aimanté cubique. La forme matricielle de cette dernière relation s'écrit

$$[M_j] = [\chi_j] \cdot [B_j] \quad (1.6)$$

La résolution simultanée des deux équations (1.5) et (1.6) permet de calculer le champ magnétisant dans chaque élément. Dans la thèse [41] et l'article [39], la solution repose sur un calcul itératif permettant à chaque étape d'affiner les aimantations $[M_j]$.

1.2.1 Détermination de la matrice F

Le calcul du gradient d'une fonction scalaire $f(u_1, u_2, u_3)$ en coordonnées curvilignes orthogonales dont le repère est supporté par les vecteurs normés $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ s'écrit [50, p.72]

$$\vec{\nabla} f(u_1, u_2, u_3) = \sum_{l=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ll}}} \frac{\partial f}{\partial u^l} \vec{e}_l \quad (1.7)$$

Le champ magnétique \vec{B} est alors déterminé par l'équation

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_i) &= \vec{B}_{ext}(\vec{r}_i) - \frac{1}{4\pi} \\ &\times \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{M(r')}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\int_V \frac{1}{\sqrt{g_{ll}}} \frac{\partial}{\partial u^l} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} dv' \right) \vec{e}_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.3 Coordonnées cylindriques

1.3.1 Matrice F en coordonnées cylindriques

Le tenseur métrique g_{ij} en coordonnées cylindriques s'écrit

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Nous identifions ensuite le terme en double somme dans l'équation (1.8) avec la matrice $[F_{ij}]$ de l'équation (1.5). La matrice D est obtenue quand le point de calcul r se trouve à l'intérieur du volume d'intégration de l'élément. En coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) Figure (1.2), la matrice F peut s'écrire:

$$[F_{ij}] = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} F_{\rho\rho'} & F_{\rho\phi'} & F_{\rho z'} \\ F_{\phi\rho'} & F_{\phi\phi'} & F_{\phi z'} \\ F_{z\rho'} & F_{z\phi'} & F_{zz'} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

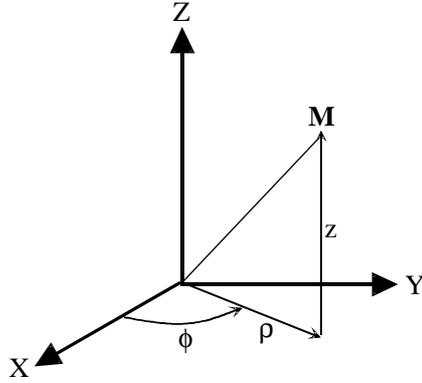


FIG. 1.2 – Variables utilisées en coordonnées cylindriques.

L'identification des éléments de la matrice conduit aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} F_{\rho\rho'} &= \frac{\partial}{\partial\rho} \int_V \frac{\partial}{\partial\rho'} \left(\frac{1}{R} \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \\ F_{\rho\phi'} &= \frac{\partial}{\partial\rho} \int_V \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial\phi'} \left(\frac{1}{R} \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \\ &= \frac{\partial}{\partial\rho} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} d\rho' dz' \\ F_{\rho z'} &= \frac{\partial}{\partial\rho} \int_V \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \\ &= \frac{\partial}{\partial\rho} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{z_1}^{z_2} \rho' d\rho' d\phi' \\ F_{\phi\rho'} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\phi} \int_V \frac{\partial}{\partial\rho'} \left(\frac{1}{R} \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho} \int_S \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial \rho'} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} \rho' d\rho' dz' \\
F_{\phi\phi'} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_V \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial \phi'} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} d\rho' dz' \\
F_{\phi z'} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z'} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= -\frac{1}{\rho} \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{\phi_1, z_1}^{\phi_2, z_2} \rho' d\rho' \\
F_{z\rho'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial \rho'} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= - \int_S \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial \rho'} \right]_{z_1}^{z_2} \rho' d\rho' d\phi' \\
F_{z\phi'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial \phi'} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{\phi_1, z_1}^{\phi_2, z_2} d\rho' \\
F_{zz'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z'} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{z_1}^{z_2} \rho' d\rho' d\phi'
\end{aligned}$$

où R est la distance entre le point de mesure et le point d'intégration

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') - (z - z')^2}$$

Après l'intégration analytique, on obtient les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
f_{\rho\rho'} d\phi' &= \frac{\rho\rho' z - \rho\rho' z' - \rho'^2 z \cos(\phi - \phi') + \rho'^2 z' \cos(\phi - \phi')}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')) R} \\
&+ \cos(\phi - \phi') \log(-z + z' + R) \\
&+ \arctan\left(\frac{(z - z')}{\rho \sin(\phi - \phi')}\right) \sin(\phi - \phi') \\
&+ \arctan\left(\frac{(z - z')(-\rho' + \rho \cos(\phi - \phi'))}{\rho R \sin(\phi - \phi')}\right) \sin(\phi - \phi') \\
F_{\rho\phi'} &= \cos(\phi - \phi') \log(-z + z' + R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{(z-z')}{\rho \sin(\phi-\phi')}\right) \sin(\phi-\phi') \\
& -\arctan\left(\frac{(z-z')(-\rho'+\rho \cos(\phi-\phi'))}{\rho R \sin(\phi-\phi')}\right) \sin(\phi-\phi') \\
f_{\rho z'} d\phi' &= \frac{\rho-\rho' \cos(\phi-\phi')}{R} \\
& + \frac{\rho \cos(\phi-\phi') \left(-\cos(\phi-\phi') + \frac{\rho-\rho' \cos(\phi-\phi')}{R}\right)}{\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R} + \\
& + \cos(\phi-\phi') \log(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R) \\
f_{\phi \rho'} dz' &= -\frac{\frac{\rho'}{R} - \log(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R)}{\rho} \\
F_{\phi \phi'} &= -\left(\arctan\left(\frac{(z-z')}{\rho \sin(\phi-\phi')}\right) \cos(\phi-\phi')\right) + \\
& + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{(-z+z')(-\rho'+\rho \cos(\phi-\phi'))}{\rho R \sin(\phi-\phi')}\right) \cos(\phi-\phi') \\
& + \log(-z+z'+R) \sin(\phi-\phi') \\
F_{\phi z'} &= -\frac{R + \rho \cos(\phi-\phi') \log(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R)}{\rho} \\
f_{z \rho'} d\phi' &= -\frac{\rho'}{R} + \log(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R) \\
F_{z \phi'} &= -\log(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R) \\
f_{z z'} d\phi' &= \frac{z-z'}{R} + \frac{\rho(z-z') \cos(\phi-\phi')}{R(\rho' - \rho \cos(\phi-\phi') + R)}
\end{aligned}$$

On s'aperçoit qu'il reste à intégrer numériquement $f_{\rho\rho'}, f_{\rho z'}, f_{z\rho'}, f_{zz'}$ en ϕ' et $f_{\phi\rho'}$ en z' . Il s'agit ici de primitives, il convient d'appliquer les bornes avant toute intégration numérique. Par exemple, pour $f_{\rho\rho'} d\phi'$ on calculera préalablement les 4 termes provenant de l'intégration en ρ' et z' .

1.4 Coordonnées cartésiennes

1.4.1 Matrice F en coordonnées cartésiennes

Le tenseur métrique g_{ij} est dans ce cas particulièrement simple et est égal à la matrice identité:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

on écrira que [51, p.59]

$$[F_{ij}] = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} F_{xx'} & F_{xy'} & F_{xz'} \\ F_{yx'} & F_{yy'} & F_{yz'} \\ F_{zx'} & F_{zy'} & F_{zz'} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{xx'} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{x_1}^{x_2} dy' dz' \\ F_{xy'} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial y'} dx' dy' dz' \\ &= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} dz' \\ F_{xz'} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z'} dx' dy' dz' \\ &= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{x_1, z_1}^{x_2, z_2} dy' \\ F_{yx'} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'} dx' dy' dz' \\ &= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} dz' \\ F_{yy'} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial y'} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{y_1}^{y_2} dx' dz' \\ F_{yz'} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z'} dx' dy' dz' \\ &= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{y_1, z_1}^{y_2, z_2} dx' \\ F_{zx'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'} dx' dy' dz' \\ &= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{x_1, z_1}^{x_2, z_2} dy' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{zy'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial y'} dx' dy' dz' \\
&= - \int_L \left[\frac{1}{R} \right]_{y_1, z_1}^{y_2, z_2} dx' \\
F_{zz'} &= \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z'} dx' dy' dz' \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{z_1}^{z_2} dx' dy'
\end{aligned} \tag{1.13}$$

On obtient les formes analytiques suivantes¹ :

$$\begin{aligned}
F_{xx'} &= \arctan \left(\frac{(y - y')(z - z')}{(x - x')R} \right) \\
F_{xy'} &= -\ln(-z + z' + R) \\
F_{xz'} &= -\ln(-y + y' + R) \\
F_{yx'} &= -\ln(-z + z' + R) \\
F_{yy'} &= \arctan \left(\frac{(x - x')(z - z')}{(y - y')R} \right) \\
F_{yz'} &= -\ln(-x + x' + R) \\
F_{zx'} &= -\ln(-y + y' + R) \\
F_{zy'} &= -\ln(-x + x' + R) \\
F_{zz'} &= \arctan \left(\frac{(x - x')(y - y')}{(z - z')R} \right)
\end{aligned}$$

Les formules en coordonnées cartésiennes sont d'une grande utilité dans notre étude. Nous pouvons calculer rapidement le champ généré par un petit aimant parallélépipédique dont l'aimantation interne \vec{M} sera considérée homogène et dirigée suivant l'axe \vec{z} uniquement. Si nous voulons déterminer la composante z du champ extérieur généré par cet aimant, à partir de $F_{zz'}$ nous obtenons:

$$B_z(x, y, z) = \frac{M_z}{4\pi} \left[\arctan \left(\frac{(x - x')(y - y')}{(z - z')R} \right) \right]_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \tag{1.14}$$

$$\text{avec } R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

1. A partir de ces primitives on intégrera suivant les bornes $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, cela fera donc 8 termes à calculer pour chaque intégrale.

La Figure (1.3) représente le profil du champ B_z généré par un petit aimant placé à 10 cm de l'axe z . La section transversale de cet aimant est carrée et de côté $= \sqrt{0.004^2 \pi / 4}$. La longueur suivant z est de 5mm et l'aimantation rémanente est égale à 1,2 Tesla.

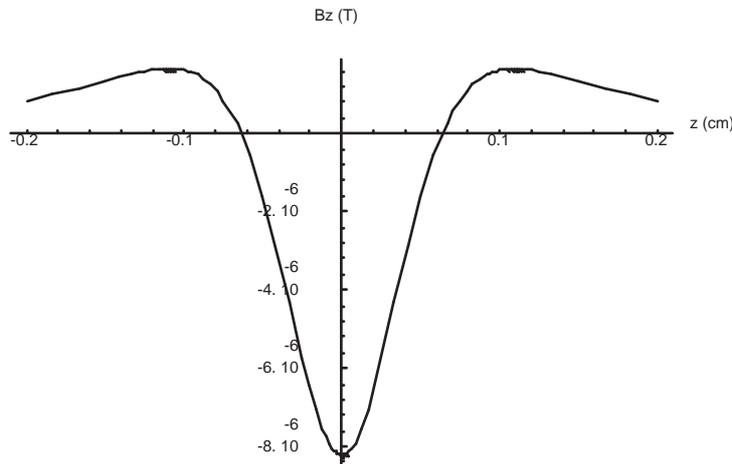


FIG. 1.3 – champ B_z généré par un aimant correcteur.

1.5 Forme des aimants

Le problème consiste à prouver la validité de la formule (1.14) pour un aimant à section cylindrique. Cette formule est rigoureuse pour un aimant ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Il est beaucoup plus économique en temps de calcul d'utiliser cette forme analytique que la formule $F_{zz'}$ page 12 où il reste à effectuer une intégration suivant ϕ' . La géométrie des aimants correcteurs que nous utilisons est un barreau de section cylindrique de diamètre 4mm et de longueur 5mm. L'aimantation est dirigée suivant la longueur du barreau et est égale à 1,2 Tesla pour du néodyme-ferbore. La Figure (1.4) montre la différence relative entre le champ B_z calculé par l'intégration en coordonnées cylindriques et l'approximation de ce champ par la formule en coordonnées cartésiennes. Les sections et les longueurs du barreau cylindrique et du barreau rectangulaire doivent être égales. Il s'agit donc d'un même volume de matière aimantée qui donne à grande distance un même champ.

Nous remarquons que l'erreur maximum est à peu près située à un rayon de la surface de l'aimant. Comme il s'agit essentiellement d'un rapport de longueur, les dimensions peuvent être considérées comme relatives. L'erreur maximale est de 1%. Toutefois le point de calcul sera en général situé à 5

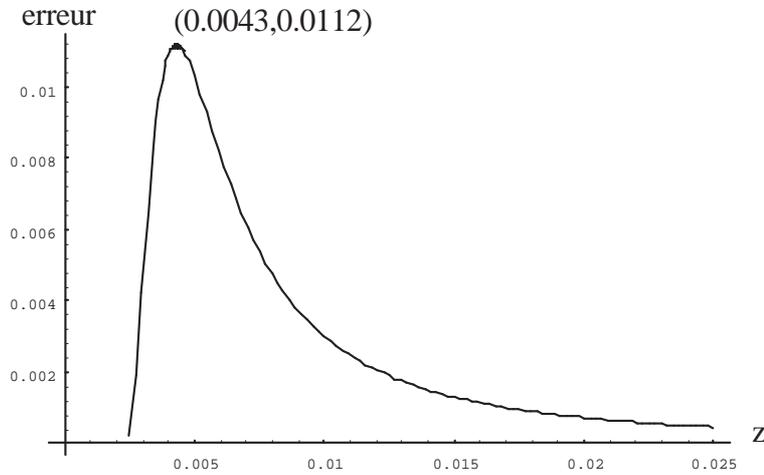


FIG. 1.4 – Différence $\frac{B_{z_{cyl}} - B_{z_{rect}}}{B_{z_{cyl}}}$

cm minimum de l'aimant soit à environ 10 fois sa taille. Nous atteignons alors une précision inférieure à 1 pour 1000, ce qui est suffisant compte tenu de la dispersion du champ rémanent de chaque aimant. Cette dispersion à la fabrication est de 5 % par rapport à la valeur nominale fournie par la documentation. C'est souvent la valeur maximum du champ rémanent qui est donnée par le constructeur. Les aimants peuvent alors varier entre 1,15 et 1,2 Tesla.

1.6 Influence du champ démagnétisant

En utilisant la formule (1.14), nous considérons que l'aimantation à l'intérieur de l'aimant est rigide et égale à sa valeur maximum c'est à dire 1,2 Tesla dans notre cas. En réalité, nous omettons un terme très important qui est la démagnétisation de l'aimant sur lui-même. Nous nous proposons donc de quantifier l'erreur de calcul lors de la détermination du champ lointain par la formule analytique en arctangente.

1.6.1 Calcul du champ démagnétisant

Pour déterminer l'influence du champ démagnétisant, nous décomposons l'aimant parallélépipédique en $n \times n \times n$ éléments dont l'aimantation de

chacun sera considérée constante dans tout le volume. Afin d'examiner l'effet de l'échantillonnage, nous effectuerons des décompositions de plus en plus fines.

Nous allons comparer le champ calculé sur l'axe \vec{z} par chacune des décompositions sachant que l'aimant sera placé à l'origine des coordonnées. La géométrie et les caractéristiques magnétiques de l'aimant sont celles citées précédemment.

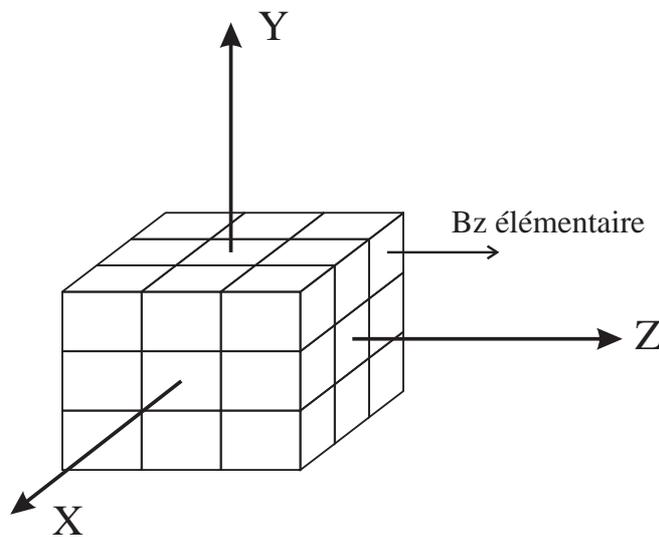


FIG. 1.5 – *Décomposition élémentaire d'un aimant*

Le tableau 1.1 montre que la décomposition converge rapidement vers une même valeur de champ. Ceci est d'autant plus vrai que nous nous éloignons de l'aimant. En revanche un écart existe entre l'utilisation de la formule analytique colonne (2) et l'aimant décomposé faisant intervenir le champ démagnétisant. La colonne (7) est beaucoup plus précise mais le temps de calcul est considérablement plus élevé que celui nécessaire à l'évaluation de (1.14).

Nous pouvons remarquer dans le tableau 1.2 qu'à grande distance (> 10 cm) la valeur donnée par la formule (1.14) et le champ obtenu en tenant compte de la démagnétisation diffèrent de 1.018 %, Etant donné la dispersion réelle du champ rémanent de 1,2 Tesla ± 5 %, nous devons absolument réévaluer le champ rémanent en utilisant (1.14) et quelques points de mesures situés si possible à plus de 10 cm soit 20 fois le diamètre de l'aimant. Grâce à la régularité de la colonne (4) à grande distance, la démagnétisation sera

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
z mm	formule(1.14)	1x1x1	2x2x2	3x3x3	4x4x4	5x5x5	$\frac{(7)-(2)}{(7)}\%$
2.51	5.54e-01	5.49e-01	5.51e-01	5.46e-01	5.38e-01	5.44e-01	-1.81
3.51	2.96e-01	2.93e-01	2.92e-01	2.91e-01	2.91e-01	2.91e-01	-1.78
4.51	1.50e-01	1.48e-01	1.48e-01	1.48e-01	1.47e-01	1.47e-01	-1.53
5.51	8.16e-02	8.09e-02	8.07e-02	8.06e-02	8.05e-02	8.05e-02	-1.37
6.51	4.84e-02	4.80e-02	4.79e-02	4.79e-02	4.78e-02	4.78e-02	-1.28
7.51	3.09e-02	3.07e-02	3.06e-02	3.06e-02	3.06e-02	3.05e-02	-1.21
8.51	2.09e-02	2.07e-02	2.07e-02	2.07e-02	2.07e-02	2.07e-02	-1.17
9.51	1.48e-02	1.47e-02	1.46e-02	1.46e-02	1.46e-02	1.46e-02	-1.14
10.51	1.08e-02	1.07e-02	1.07e-02	1.07e-02	1.07e-02	1.07e-02	-1.12
11.51	8.21e-03	8.14e-03	8.13e-03	8.13e-03	8.12e-03	8.12e-03	-1.10
12.51	6.36e-03	6.30e-03	6.29e-03	6.29e-03	6.29e-03	6.29e-03	-1.09
13.51	5.02e-03	4.98e-03	4.97e-03	4.97e-03	4.97e-03	4.97e-03	-1.08
14.51	4.04e-03	4.00e-03	4.00e-03	3.99e-03	3.99e-03	3.99e-03	-1.07
15.51	3.29e-03	3.26e-03	3.26e-03	3.26e-03	3.26e-03	3.26e-03	-1.06
16.51	2.72e-03	2.70e-03	2.69e-03	2.69e-03	2.69e-03	2.69e-03	-1.06
17.51	2.27e-03	2.26e-03	2.25e-03	2.25e-03	2.25e-03	2.25e-03	-1.05
18.51	1.92e-03	1.90e-03	1.90e-03	1.90e-03	1.90e-03	1.90e-03	-1.05
19.51	1.64e-03	1.62e-03	1.62e-03	1.62e-03	1.62e-03	1.62e-03	-1.04
20.51	1.41e-03	1.39e-03	1.39e-03	1.39e-03	1.39e-03	1.39e-03	-1.04
21.51	1.22e-03	1.21e-03	1.21e-03	1.20e-03	1.20e-03	1.20e-03	-1.04
22.51	1.06e-03	1.05e-03	1.05e-03	1.05e-03	1.05e-03	1.05e-03	-1.04
23.51	9.33e-04	9.25e-04	9.24e-04	9.24e-04	9.24e-04	9.24e-04	-1.03
24.51	8.23e-04	8.16e-04	8.15e-04	8.15e-04	8.14e-04	8.14e-04	-1.03
25.51	7.29e-04	7.23e-04	7.22e-04	7.22e-04	7.22e-04	7.22e-04	-1.03
26.51	6.49e-04	6.44e-04	6.43e-04	6.43e-04	6.43e-04	6.43e-04	-1.03
27.51	5.81e-04	5.76e-04	5.75e-04	5.75e-04	5.75e-04	5.75e-04	-1.03
28.51	5.21e-04	5.17e-04	5.16e-04	5.16e-04	5.16e-04	5.16e-04	-1.03
29.51	4.70e-04	4.66e-04	4.65e-04	4.65e-04	4.65e-04	4.65e-04	-1.03
30.51	4.25e-04	4.21e-04	4.21e-04	4.21e-04	4.21e-04	4.21e-04	-1.02

TAB. 1.1 – Comparaison entre maillages plus ou moins fins

inclue dans l'évaluation du champ rémanent et on conservera une précision d'environ un pour mille .

(1)	(2)	(3)	(4)
z (mm)	formule(1.14) T	5x5x5	$\frac{(3)-(2)}{(3)}\%$
10.00	1.269e-02	1.254e-02	-1.1327
20.00	1.523e-03	1.507e-03	-1.0464
30.00	4.475e-04	4.429e-04	-1.0302
40.00	1.882e-04	1.863e-04	-1.0245
50.00	9.624e-05	9.526e-05	-1.0218
60.00	5.565e-05	5.509e-05	-1.0204
70.00	3.503e-05	3.468e-05	-1.0195
80.00	2.346e-05	2.322e-05	-1.0190
90.00	1.647e-05	1.631e-05	-1.0186
100.00	1.201e-05	1.189e-05	-1.0183
110.00	9.020e-06	8.929e-06	-1.0181
120.00	6.947e-06	6.877e-06	-1.0179
130.00	5.464e-06	5.409e-06	-1.0178
140.00	4.375e-06	4.330e-06	-1.0177
150.00	3.557e-06	3.521e-06	-1.0176
160.00	2.930e-06	2.901e-06	-1.0176
170.00	2.443e-06	2.418e-06	-1.0175
180.00	2.058e-06	2.037e-06	-1.0175
190.00	1.750e-06	1.732e-06	-1.0174
200.00	1.500e-06	1.485e-06	-1.0174
210.00	1.296e-06	1.283e-06	-1.0174
220.00	1.127e-06	1.116e-06	-1.0173
230.00	9.864e-07	9.765e-07	-1.0173
240.00	8.681e-07	8.594e-07	-1.0173
250.00	7.681e-07	7.603e-07	-1.0173

TAB. 1.2 – Erreur lors de l'utilisation de (1.14) à grande distance.

Chapitre 2

Correction du champ

Après avoir validé le calcul direct, la synthèse de champ peut donc être vérifiée numériquement. Bien que nous puissions partir de la formule en arc-tangente et utiliser une méthode inverse standard, nous devons faire le choix d'une fonction d'erreur et surtout déterminer comment cette erreur sera répartie. De plus cette démarche ne donne aucune information sur le nombre d'aimants nécessaires pour une précision donnée. Pour la localisation de l'erreur, nous avons choisi de l'éloigner le plus possible du centre et donc naturellement de travailler sur une base de fonctions du type séries de Taylor. Ceci nous conduit directement, dans le cas de potentiels, au développement du champ en polynômes de Legendre.

2.1 Développement du potentiel

Pour rendre homogène un champ magnétique, une solution consiste à exprimer le champ mesuré en une série plus simple qui l'approximera et tenter d'annuler un maximum de termes parasites.

La résolution de l'équation différentielle $\nabla^2\psi = 0$ en coordonnées sphériques donne la série double suivante:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)) r^n P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.1)$$

où P_{nm} sont les polynômes de Legendre associés.¹

1. Dans la suite de nos calculs nous utiliserons la convention d'écriture selon Abramowitz, $P_{nm} = (-1)^m P_n^m = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$

Sur la sphère unité on détermine les A_{nm} et B_{nm} en calculant les intégrales suivantes:²

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P_{nm}(\cos(\theta)) \cos(m\phi))^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (2.2)$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos(\theta)) \sin(m\phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P_{nm}(\cos(\theta)) \sin(m\phi))^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (2.3)$$

On démontre que l'on peut remplacer les dénominateurs [37, p.709] par $N_{n0} = 4\pi \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$ et pour $m > 0$, $N_{nm} = 2\pi \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$. Ainsi il n'est pas nécessaire d'intégrer numériquement les dénominateurs.³

La transformation des intégrandes aux numérateurs de A_{nm} et B_{nm} en coordonnées cartésiennes permet de visualiser facilement les contributions de chaque coefficient. Toutefois il est important de les utiliser avec précaution dans le cas d'une intégration dans un volume, car ils ne sont plus orthogonaux entre eux s'ils ne sont pas situés sur la sphère. Tout point en dehors aura pour effet de coupler les coefficients entre eux, dégradant de ce fait les résultats.

Nous obtenons les coefficients suivants en effectuant les substitutions $\cos(\theta) = z/r$ et $\phi = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$ puis nous utiliserons les polynômes de Tchebycheff $\cos[n \arccos(\omega)] = T_n(\omega)$ et $\sin[n \arccos(\omega)] = U_n(\omega)$. Toutefois lors de ces transformations il faut respecter les domaines⁴ car les angles ne sont souvent plus dans le bon quadrant[38].

$$\begin{aligned} a_{00} &= 1 \\ a_{10} &= z \\ a_{11} &= x \\ a_{20} &= \frac{-x^2 - y^2}{2} + z^2 \\ a_{21} &= 3xz \\ a_{22} &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

2. Si les mesures sont effectuées sur une sphère de rayon r , la normalisation (sphère de rayon unité) des coefficients A_{nm} et B_{nm} est assurée par le terme r^n .

3. Le changement de variable $x \rightarrow \cos t$ implique mathématiquement $(1-x^2)^{m/2} \rightarrow |\sin t|^m$, cependant nous pouvons enlever la valeur absolue et utiliser $(1-x^2)^{m/2} \rightarrow \sin^m t$. De cette façon, nous dégageons des problèmes de domaines et t n'est plus compris entre $[0, \pi]$.

4. Dans les cas complexes telles que les équations présentées à la page 60, nous avons choisi de conserver une forme du type $\cos[m \arctan(y', x')]$

$$\begin{aligned}
a_{30} &= \frac{-3(x^2 + y^2)z}{2} + z^3 \\
a_{31} &= \frac{-3x(x^2 + y^2)}{2} + 6xz^2 \\
a_{32} &= 15(x^2 - y^2)z \\
a_{33} &= 15x(x^2 - 3y^2) \\
a_{40} &= \frac{3(x^2 + y^2)^2}{8} - 3(x^2 + y^2)z^2 + z^4 \\
a_{41} &= \frac{-15x(x^2 + y^2)z}{2} + 10xz^3 \\
a_{42} &= \frac{15(-x^4 + y^4)}{2} + 45(x^2 - y^2)z^2 \\
a_{43} &= 105x(x^2 - 3y^2)z \\
a_{44} &= 105x^4 - 630x^2y^2 + 105y^4 \\
a_{50} &= \frac{15(x^2 + y^2)^2z}{8} - 5(x^2 + y^2)z^3 + z^5 \\
a_{51} &= \frac{15x(x^2 + y^2)^2}{8} - \frac{45x(x^2 + y^2)z^2}{2} + 15xz^4 \\
a_{52} &= \frac{105(-x^4 + y^4)z}{2} + 105(x^2 - y^2)z^3 \\
a_{53} &= \frac{105x(-x^2 + 3y^2)(x^2 + y^2 - 8z^2)}{2} \\
a_{54} &= 945(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)z \\
a_{55} &= 945x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) \\
b_{11} &= y \\
b_{21} &= 3yz \\
b_{22} &= 6xy \\
b_{31} &= \frac{-3y(x^2 + y^2)}{2} + 6yz^2 \\
b_{32} &= 30xyz \\
b_{33} &= 15y(3x^2 - y^2) \\
b_{41} &= \frac{-15y(x^2 + y^2)z}{2} + 10yz^3 \\
b_{42} &= -15xy(x^2 + y^2) + 90xyz^2 \\
b_{43} &= 105y(3x^2 - y^2)z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{44} &= 420 x^3 y - 420 x y^3 \\
b_{51} &= \frac{15 y (x^2 + y^2)^2}{8} - \frac{45 y (x^2 + y^2) z^2}{2} + 15 y z^4 \\
b_{52} &= -105 x y (x^2 + y^2) z + 210 x y z^3 \\
b_{53} &= \frac{105 y (-3 x^2 + y^2) (x^2 + y^2 - 8 z^2)}{2} \\
b_{54} &= 3780 x (x - y) y (x + y) z \\
b_{55} &= 945 y (5 x^4 - 10 x^2 y^2 + y^4)
\end{aligned}$$

2.2 Conditions sur le calcul des coefficients

A partir de mesures du champ effectuées à la surface d'une sphère, quelques conditions s'imposent pour obtenir une bonne précision dans la détermination des coefficients A_{nm} et B_{nm} . Une méthode générale de calcul consiste à intégrer chaque longitude de la sphère c'est à dire la partie:

$$\int_0^\pi f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$

puis effectuer la transformation de Fourier des intégrations précédentes afin de déterminer l'intégration en $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$ (latitude). Il est donc nécessaire d'éviter tout repliement (cf. FFT en traitement du signal) d'ordres supérieurs [42]. Nous choisirons un rayon r de sphère pour la mesure égal à la moitié du rayon de placement des générateurs. Il s'agit d'un compromis entre la détermination des ordres inférieurs qui se mesurent très bien près du centre et deviennent impossible à déterminer si $r \approx r'$. C'est exactement le contraire pour les ordres élevés.

L'intégration précédente devient délicate si les points de mesure ne sont pas placés sur des fuseaux régulièrement espacés car cela nécessite une intégration numérique à pas variable. De même il faut normaliser le rayon du point et recalculer sa valeur sur la sphère de mesure. Lors de la mesure, il est difficile d'assurer mécaniquement un rayon et un positionnement angulaire constants à tous les points de mesure⁵. Il est donc préférable de prendre des points équi-espacés dans un volume parallélépipédique et choisir ensuite en entrée les points les plus proches d'une sphère de rayon donné. On peut même, si le nombre de points mesurés est élevé, calculer indépendamment

5. Il y a un grand nombre de points aux pôles de la sphère si chaque latitude est composée d'un même nombre de points.

plusieurs sphères de diamètres différents et confronter les résultats. Comme l'indique la Figure (2.1), la mesure du champ se fera sur une grille cubique de pas h et nous choisirons l'ensemble des points dont la distance au centre est comprise entre $R - h < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R + h$

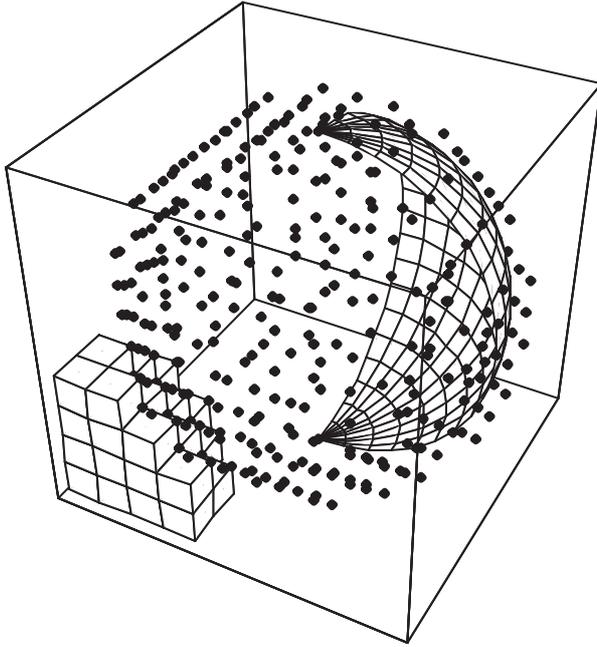


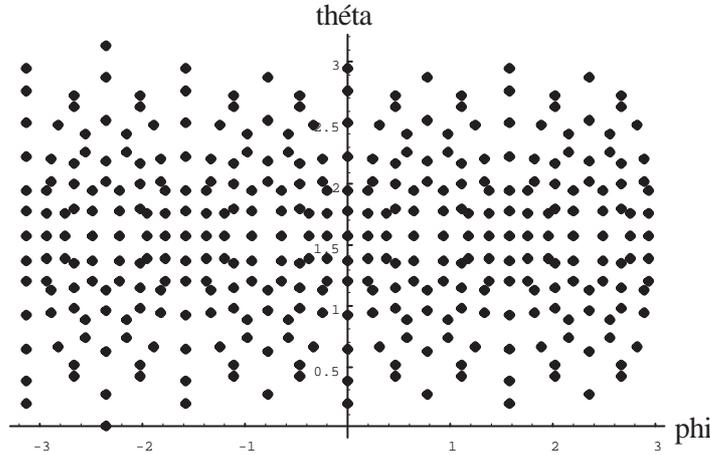
FIG. 2.1 – Mesure du champ sur une sphère approximative de rayon $R \pm h$

Les Figures (2.1) et (2.2) sont obtenues par un maillage $10 \times 10 \times 10$ d'un cube tangent à la sphère de mesure. Nous obtenons donc $(n + 1)^3$ noeuds, c'est à dire 1331 points de mesures. En reprenant l'ensemble des points situés à $\pm h$ de la sphère, nous obtenons un total de 350 points qui interviendront effectivement dans le calcul des coefficients A_{nm} et B_{nm} . La distribution angulaire est correcte comme on peut le constater sur la Figure (2.2). Cependant un couplage dans le calcul apparaît puisque les termes en r^n interviennent et qu'ils ne sont pas orthogonaux. Le tableau 2.1 résume la précision de l'algorithme suite à toutes les approximations et aux conditions indiquées ci-dessus. Pour déterminer ce tableau, nous avons créé numériquement un champ comportant tous les harmoniques jusqu'à l'ordre 5 inclus et d'amplitude égale à 1. Le problème inverse consiste à retrouver la valeur 1 à partir des points de mesures.

Une précision de l'ordre de 10^{-4} est suffisante dans cette étude, nous pouvons donc considérer cette méthode de mesure satisfaisante.

A_{00}	1.000047	-	-
A_{10}	1.000036	-	-
A_{11}	9.999906e-01	B_{11}	1.000087
A_{20}	9.998247e-01	-	-
A_{21}	1.000032	B_{21}	1.000026
A_{22}	9.999436e-01	B_{22}	1.000008
A_{30}	9.999918e-01	-	-
A_{31}	1.000009	B_{31}	1.000042
A_{32}	9.999989e-01	B_{32}	9.999925e-01
A_{33}	1.000030	B_{33}	9.999934e-01
A_{40}	1.000123	-	-
A_{41}	9.999818e-01	B_{41}	9.999873e-01
A_{42}	1.000000	B_{42}	1.000002
A_{43}	9.999972e-01	B_{43}	9.999989e-01
A_{44}	9.999971e-01	B_{44}	9.999983e-01
A_{50}	1.000039	-	-
A_{51}	9.999526e-01	B_{51}	9.999725e-01
A_{52}	9.999986e-01	B_{52}	1.000000
A_{53}	9.999994e-01	B_{53}	9.999998e-01
A_{54}	1.000000	B_{54}	9.999999e-01
A_{55}	1.000000	B_{55}	1.000001

TAB. 2.1 – Erreur sur les coefficients pour un échantillonnage de 350 points.

FIG. 2.2 – Distribution angulaire en θ , ϕ des points de mesure

2.3 Algorithme de calcul des coefficients

Nous allons donc déterminer les coefficients qui minimisent l'écart entre l'ensemble des points de mesures et la combinaison linéaire des fonctions de Legendre. La forme générale du modèle est

$$y(x) = \sum_{k=1}^M a_k X_k(x) \quad (2.4)$$

Nous définissons une fonction de mérite que nous chercherons à minimiser:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i) \right]^2 \quad (2.5)$$

Le minimum de cette fonction est donnée par les M équations normales:

$$0 = \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_j(x_i) \right] X_k(x_i) \quad k = 1 \cdots M \quad (2.6)$$

Nous pouvons réécrire ce système sous la forme

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} a_j = \beta_k \quad (2.7)$$

avec

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N X_j(x_i)X_k(x_i) \text{ et } \beta_k = \sum_{i=1}^N y_i X_k(x_i) \quad (2.8)$$

L'application de la forme générale précédente se résume dans l'algorithme *coefficients* qui calcule les termes jusqu'à l'ordre 8 inclus. Les deux sous-programmes indiquent la façon de calculer l'ordre des coefficients en fonction de l'indice servant au rangement linéaire des variables. La fonction *lgndr* est disponible dans toute littérature traitant du calcul par récurrence des polynômes de Legendre associés (ex:[13]).

COEFFICIENTS()

```

1  nmax ← 8
2  nbvara ← 45
3  nbvarb ← 36
4  nbvar ← nbvara + nbvarb
5  nbpoints ← 350
6  for i ← 1 to nbpoints
7    do x[i] ← ?
8      y[i] ← ?
9      z[i] ← ?
10   champ[i] ← ?
11
12  for k ← 1 to nbvar
13    do bet[k] ← 0.
14      for l ← 1 to nbvar
15        do u[k][l] ← 0.
16
17  for i ← 1 to nbpoints
18    do r ←  $\sqrt{x[i]^2 + y[i]^2 + z[i]^2}$ 
19      for k ← 1 to nbvara
20        do n, m ← DETANM(k)
21          a[k] ←  $(-1)^m r^n \text{lgndr}(n, m, z[i]/r) \cos(m \arctan(y[i], x[i]))$ 
22          bet[k] ← bet[k] + champ[i] × a[k]
23
24      for k ← 1 to nbvarb
25        do n, m ← DETBNM(k)
26          a[k + nbvara] ←  $(-1)^m r^n \text{lgndr}(n, m, z[i]/r) \sin(m \arctan(y[i], x[i]))$ 
27          bet[k + nbvara] ← bet[k + nbvara] + champ[i] × a[k + nbvara]
28
```

```

29     for  $k \leftarrow 1$  to  $nbvar$ 
30         do for  $l \leftarrow 1$  to  $nbvar$ 
31             do  $u[k][l] \leftarrow u[k][l] + a[k] \times a[l]$ 
32
33
34
35     for  $l \leftarrow 1$  to  $nbvar$ 
36         do  $sol[l] \leftarrow \sum_k u^{-1}[k][l] \times bet[k]$ 
37

```

DETANM(i)

```

1  indent  $\leftarrow 0$ 
2  for  $n \leftarrow 0$  to  $nmax$ 
3      do for  $m \leftarrow 0$  to  $n$ 
4          do indent  $\leftarrow indent + 1$ 
5              if indent =  $i$ 
6                  then return  $n, m$ 
7
8
9  error " $i \notin [1, nbvara]$ "

```

DETBNM(i)

```

1  indent  $\leftarrow 0$ 
2  for  $n \leftarrow 1$  to  $nmax$ 
3      do for  $m \leftarrow 1$  to  $n$ 
4          do indent  $\leftarrow indent + 1$ 
5              if indent =  $i$ 
6                  then return  $n, m$ 
7
8
9  error " $i \notin [1, nbvarb]$ "

```

Cette technique de calcul est équivalente à la détermination de la matrice pseudo-inverse de **Moore-Penrose** qui permet de construire la solution générale du problème des fonctions d'associations linéaires. Il s'agit de trouver une matrice X minimisant la norme euclidienne $\|AX - B\|$, où A et B sont deux matrices rectangulaires données. Si les lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes ce qui est le cas si les points de mesure sont sur

une même sphère, la solution est

$$X = (A^T A)^{-1} . A^T . B \quad (2.9)$$

2.4 Annulations des coefficients

Le champ magnétique statique doit, en imagerie par résonance magnétique, être le plus homogène possible. Nous chercherons à annuler jusqu'à un certain ordre tous les coefficients. Nous devons alors créer un champ magnétique dont les ordres seront opposés à ceux du champ principal. Nous avons choisi pour cette étude un dispositif à base d'aimants permanents dont les dimensions sont très inférieures à celles de la machine. Les aimants correcteurs auront un volume maximum d'un centimètre cube. Comme nous le verrons plus tard, il faut un minimum de volume de matière aimantée pour générer un champ non négligeable au centre, tout en respectant un développement multipolaire⁶ assez faible.

2.5 Calcul des aimants correcteurs

Plusieurs solutions pour la détermination du champ magnétique généré par un aimant sont utilisables. Comme nous l'avons vu aux chapitres précédents, nous pouvons déterminer sous une forme complètement analytique le champ produit par des aimants rectangulaires. L'avantage certain de cette approche est un temps de calcul très réduit et surtout une très grande précision. En revanche, nous ne disposons pas de formules aussi pratiques pour des aimants cylindriques ou des secteurs, car il reste souvent une intégration numérique à réaliser. Toutefois ce type d'approche analytique ne convient plus pour générer a priori un champ magnétique. Le problème inverse consiste à déterminer par exemple la position d'aimants ou encore les caractéristiques géométriques et les aimantations afin de générer tel type de champ. On peut résoudre le problème par une optimisation non linéaire avec minimisation de l'erreur entre le champ à obtenir et le champ généré par les aimants, les variables étant la position de chaque aimant ou encore une caractéristique géométrique.

Il s'avère que cette approche ne donne généralement pas de bons résultats. Une première constatation est que les équations entrant dans le calcul

6. La zone d'intérêt se limitera à la moitié des dimensions du générateur. Le développement multipolaire devient important si $r/r' > 1/2$.

numérique sont fortement couplées, il y a donc une grande difficulté à inverser le problème. Une deuxième constatation est qu'il faut généralement un grand nombre de degrés de liberté (nous les avons évalués à une trentaine au moins) ce qui rend particulièrement difficile l'optimisation non linéaire de ces paramètres. Il faut aussi réfléchir à la forme de la fonctionnelle. Prenons par exemple une minimisation de la norme entre le champ désiré et le champ généré par les aimants, il serait très gênant que l'erreur soit importante au centre tout en conservant une erreur moyenne faible.

La localisation de l'erreur est donc très importante. Généralement on essaie que l'erreur soit située le plus loin possible du centre. Une idée simple consiste à annuler les dérivées successives du champ magnétique (origine de la fonction au centre de la machine). En coordonnées cartésiennes, si l'on veut annuler jusqu'à la dérivée cinquième incluse:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \dots, \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \dots$$

on obtient 215 équations à annuler $((ordre + 1)^3 - 1)$, plus une équation supplémentaire si on désire contrôler la valeur du champ constant. Toutefois nous sommes en présence d'un champ magnétique, et plusieurs combinaisons de dérivées sont nulles; ceci facilite considérablement le problème car le nombre d'équations à annuler sera moindre. Pour obtenir directement une base de dérivées non nulles, nous utiliserons le développement du potentiel scalaire en polynômes de Legendre.

Dans un volume où il n'y a aucune charge électrique en déplacement et de perméabilité constante, ce qui est le cas dans la zone utile de la machine, le champ magnétique est décrit par une loi du type $\vec{B} = -\vec{\nabla}\psi$ avec

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.10)$$

Une solution du laplacien est un potentiel en $\frac{1}{R}$.

En coordonnées polaires le laplacien s'écrit:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.11)$$

2.5.1 Développement d'un aimant en polynômes de Legendre

Le calcul se fera à partir d'un aimant dont l'aimantation \vec{M} est dirigée suivant l'axe \vec{z} et nous nous intéresserons pour l'instant à la seule composante

z du champ \vec{B} généré par cet aimant. Nous utiliserons la formule $F_{zz'}$ page 14 avec comme hypothèse que l'aimantation est rigide et n'est donc pas influencée par le champ extérieur. Toutefois, il serait intéressant de déterminer expérimentalement l'influence des composantes transverses extérieures H_x et H_y sur la valeur de l'aimantation M_z . Suivant ces hypothèses, le champ produit par l'aimant est

$$B_z = \frac{M_z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{z_1}^{z_2} dx' dy' \quad (2.12)$$

En utilisant le développement de $\frac{1}{R}$ en coordonnées sphériques [31, p.1274], le développement du potentiel peut s'écrire:⁷

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta').$$

$$\cos [m(\phi - \phi')] \begin{cases} \frac{r^n}{r'^{n+1}} & \text{si } r' > r \\ \frac{r'^n}{r^{n+1}} & \text{si } r > r'. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous pouvons ensuite entrer la dérivée par rapport à z dans l'intégrale et déterminer l'intégrande de la façon suivante [12, p.48][48]:

pour $r' > r$ (Les aimants correcteurs sont placés à l'extérieur de la zone utile):

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} = - \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{n+1m}(\cos \theta').$$

$$\cos [m(\phi - \phi')] \frac{r^n}{r'^{n+2}} \quad (2.14)$$

Nous pouvons remarquer que la dérivation en z ne porte pas sur les variables θ et r mais sur les variables θ' et r' . En utilisant le fait que $\frac{\partial 1/R}{\partial z} = -\frac{\partial 1/R}{\partial z'}$, l'identification entre les coefficients A_{nm} , B_{nm} mesurés et le développement du champ produit par les aimants est plus aisé.

2.5.2 Approximation de l'intégration surfacique

L'intégration suivant x' et y' de l'équation précédente sera pour l'instant négligée et nous remplacerons cette intégration par la section transversale A de l'aimant. Cette approximation doit alors être soigneusement évaluée afin

7. $\epsilon_m = 1$ si $m = 0$ et 2 si $m > 0$

que l'erreur commise ne soit pas en contradiction avec la précision désirée lors de l'annulation des coefficients A_{nm} et B_{nm} .

Nous obtenons donc le développement du champ B_z suivant:⁸

$$B_z(\rho, \theta, \phi) = -\frac{M_z A}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos \theta')}{r'^{n+2}} \right]_{z_1}^{z_2} \cdot r^n P_{nm}(\cos \theta) \cos [m(\phi - \phi')] \quad (2.15)$$

Ce développement est donc valide dans le cas où $r < r'$. Vu que la somme s'étend de $n = 0$ à l' ∞ , il est nécessaire d'étudier la convergence de la série en fonction de n . La Figure (2.3) présente l'erreur relative entre la valeur exacte du champ et le développement (2.15) en fonction de la valeur n . L'aimant se trouvant à $r' = 10cm$, nous constatons nettement que (2.15) n'est valide que sur le domaine $r \in] - r', r'[$. Les bornes de l'intervalle sont les asymptotes à l' ∞ . Nous remarquons aussi que plus nous nous éloignons de la source plus l'erreur est faible, jusqu'au décrochement dû à la troncature de la série. L'erreur augmente en s'approchant de la source car nous n'avons pas réalisé l'intégration en x, y de la section de l'aimant.

2.5.3 Annulation des coefficients

En développant $\cos [m(\phi - \phi')] = \cos(m\phi) \cos(m\phi') + \sin(m\phi) \sin(m\phi')$, nous pouvons identifier les coefficients A_{nm} et B_{nm} du champ mesuré avec les coefficients correspondants des aimants correcteurs. En ajoutant au champ mesuré le champ généré par les aimants, nous avons l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N_{ordres}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)) r_{mes}^n P_{nm}(\cos \theta) + \\ & - \frac{M_z A}{4\pi} \sum_{n=0}^{N_{ordre}} \sum_{m=0}^{m=n} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos \theta')}{r'^{n+2}} \right]_{z_1}^{z_2} \cdot \\ & r^n P_{nm}(\cos \theta) [\cos(m\phi) \cos(m\phi') + \sin(m\phi) \sin(m\phi')] = 0 \quad (2.16) \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que cette identification est tout à fait valide car chaque composante du champ magnétique vérifie l'équation de Laplace

8. Nous avons choisi la convention que les indices numérotés z_1 et z_2 représentent les coordonnées du début et de la fin du barreau aimanté. En toute rigueur ils devraient s'appeler z'_1 et z'_2 mais afin d'alléger la formulation, il n'y a pas de confusion possible avec les coordonnées du point de calcul.

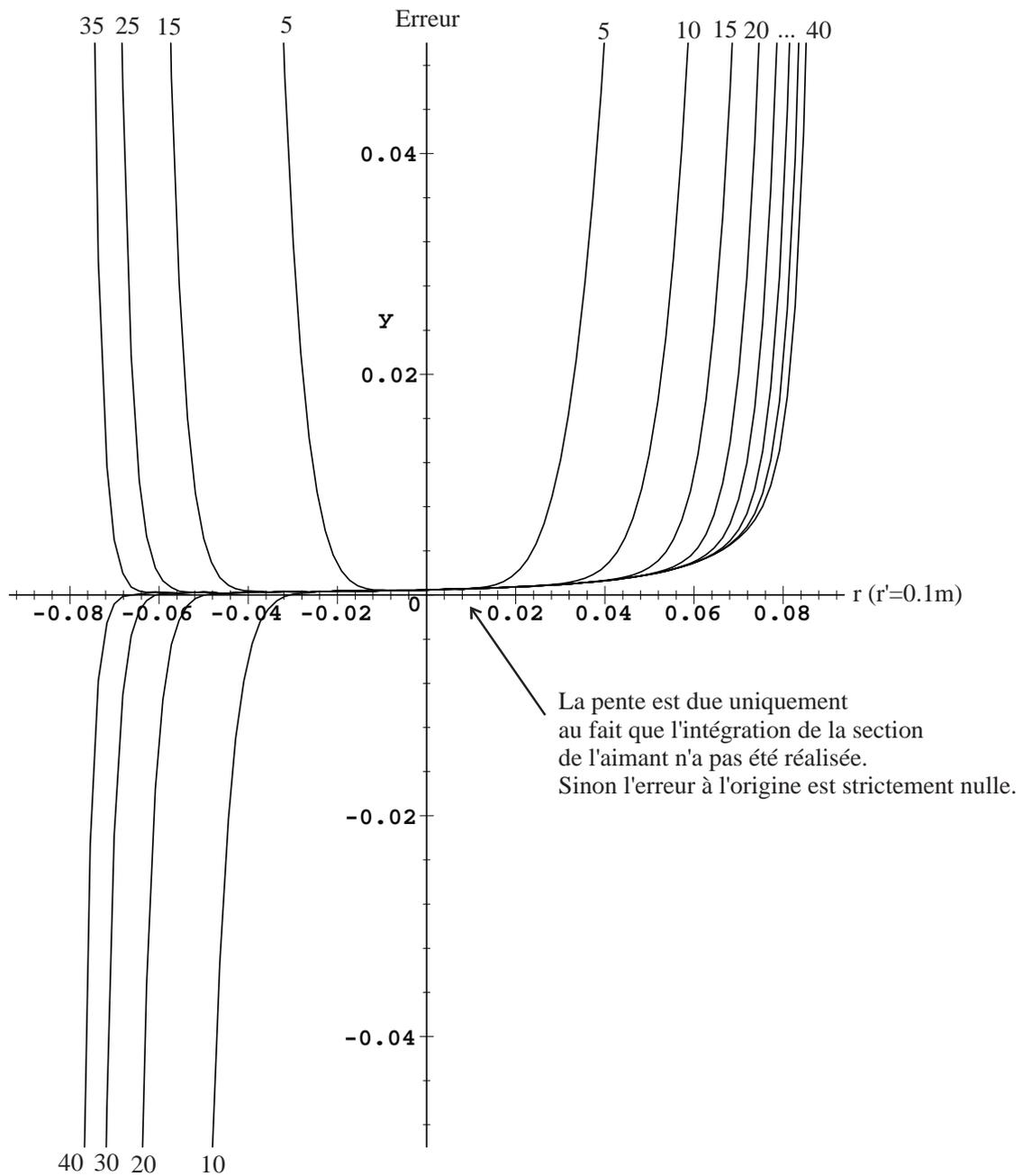


FIG. 2.3 – Erreur relative entre la formule (1.14) et le développement (2.15) en fonction de n . La source se trouve à $r' = 10cm$.

$\nabla^2\psi = 0$. D'ailleurs toute intégration ou dérivation suivant les coordonnées spatiales ne modifie pas cette propriété. Nous pouvons donc toujours approximer le champ par la série double Eq(2.1).

Les termes r_{mes}^n et r^n vont être normalisés à 1 pour alléger le calcul. En utilisant la propriété d'orthogonalité du développement de Legendre, nous allons regrouper et annuler les fonctions facteurs des termes en $P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\phi)$ et $P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\phi)$, nous obtenons un système d'équations de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{nm}}{4\pi} - \frac{M_z A}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos\theta')}{r'^{n+2}} \right]_{z_1}^{z_2} \cos(m\phi') \\ P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\phi) = 0 \end{array} \right\} \times \quad (2.17)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_{nm}}{4\pi} - \frac{M_z A}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos\theta')}{r'^{n+2}} \right]_{z_1}^{z_2} \sin(m\phi') \\ P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\phi) = 0 \end{array} \right\} \times \quad (2.18)$$

Pour corriger tous les harmoniques jusqu'à l'ordre 5 inclus, nous avons 35 équations de ce type à résoudre simultanément. Nous ne conserverons que la partie entre accolades car ces équations doivent être vérifiées quelque soit le point de calcul (θ, ϕ) . Nous remarquons immédiatement que le nombre de variables n'est pas suffisant pour annuler les 35 équations ci-dessus. Nous pouvons alors ajouter N aimants pour récupérer les variables manquantes, on écrit donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos\theta'_i)}{r_i'^{n+2}} \right]_{z_{i1}}^{z_{i2}} \cos(m\phi'_i) = 0 \\ \frac{B_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\cos\theta'_i)}{r_i'^{n+2}} \right]_{z_{i1}}^{z_{i2}} \sin(m\phi'_i) = 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

2.5.4 Configuration matérielle de la correction

Nous avons disposé les aimants sur un cylindre de rayon 10 cm⁹. Pour une simplicité de réglage nous nous sommes permis de fixer l'angle ϕ' de chaque aimant ne disposant donc que du déplacement en z' pour le réglage¹⁰. N'ayant

9. Dans tout le document, r' est égal à 10 cm minimum et les mesures s'effectuent à 5 cm du centre. Pour généraliser les résultats, nous considérons que la zone d'intérêt est la moitié des dimensions de la machine.

10. les lettres ' sont utilisées simplement pour préciser qu'il s'agit des coordonnées des aimants et non du point de calcul

donc qu'un degré de liberté par aimant, nous avons choisi de distribuer uniformément 35 aimants identiques en ϕ' autour du cylindre et d'agir sur leur déplacement en z' .

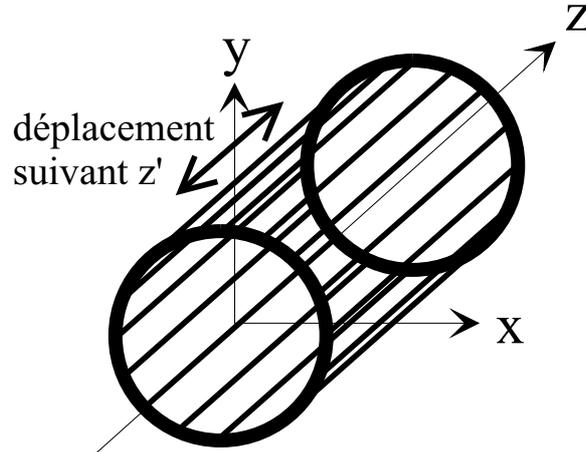


FIG. 2.4 – Configuration des aimants

Le principe du réglage se déroule de la manière suivante; dans un premier temps, nous mesurons le champ magnétique à l'aide d'une sonde à effet Hall ou un gaussmètre RMN. Les points de mesures devront être situés de préférence à la surface d'une sphère. Puis à l'aide d'un logiciel nous déterminons de façon précise les coefficients des harmoniques sphériques. C'est à partir de ces coefficients que nous allons déterminer la position des aimants qui produisent exactement les coefficients dont la valeur sera opposée à celles du champ mesuré.

Le logiciel de détermination des coefficients de Legendre est numériquement stable, le problème est quasiment linéaire. En revanche la détermination de la position des aimants à partir des coefficients de Legendre est un problème non linéaire. Le couplage entre les équations étant très élevé, nous devons utiliser des méthodes numériques particulières qui permettent d'inverser les équations. Un chapitre sera consacré à la résolution numérique.

2.6 Résolution d'un premier problème

Pour valider la méthode, nous avons essayé de corriger les défauts d'homogénéité du champ B_z créé par une ferrite de petite dimension placée sur un rayon de 11 cm et un déplacement en z de 2,5 cm par rapport à l'origine des axes. Puis nous avons disposé les 35 aimants dans la configuration

expliquée précédemment (placés sur un cylindre de rayon 10 cm et uniformément distribués en ϕ). La ferrite est volontairement placée sur un rayon un peu plus grand de façon à éviter un possible conflit de position. Dans un premier temps, il faut mesurer le champ généré par la ferrite à la surface d'une sphère. Un nombre de 350 points permet de calculer les harmoniques sphériques avec une précision suffisante (voir Tab 2.1) en respectant le fait que les harmoniques supérieurs non calculés ne soient pas trop élevés dans la zone de mesure. Il y aurait à la manière de la Transformation de Fourier un repliement des harmoniques supérieurs sur les harmoniques inférieurs. Dans notre cas sur une sphère de mesure de 5 cm de diamètre ce ne fut pas le cas.

Comme exemple, les figures (2.5) et (2.6) montrent un champ principal avant la correction (courbe haute dans chaque figure) et après l'ajout des aimants correcteurs (courbe basse) pour deux axes Oz et Ox .

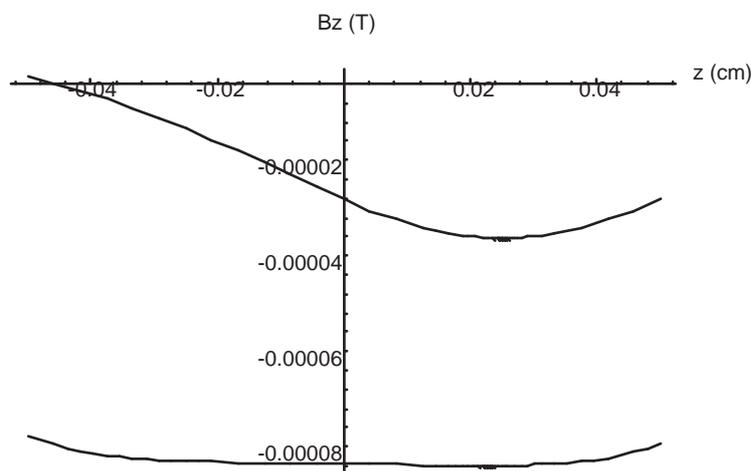


FIG. 2.5 – Correction du champ sur l'axe \vec{z}

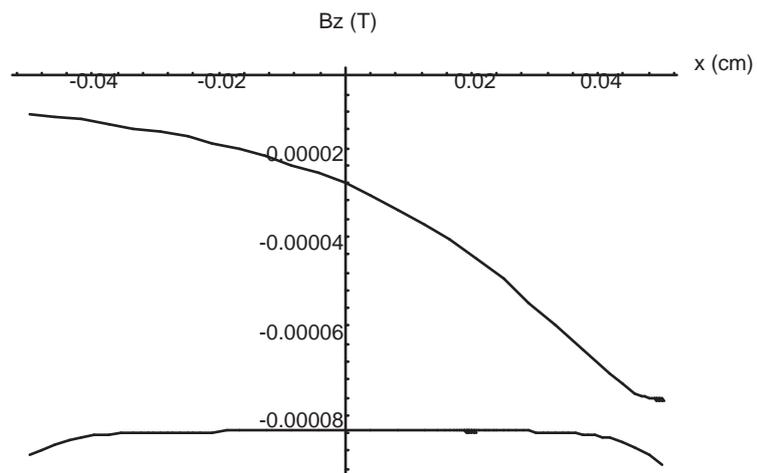
Ces figures montrent nettement une amélioration du champ entre la première courbe et la deuxième beaucoup plus homogène.

2.6.1 Discussion sur le sens d'aimantation des aimants par rapport au champ principal

Tous les aimants dans le même sens:

Si nous orientons tous les aimants correcteurs dans la même direction nous obtenons une distribution des valeurs des coefficients A_{nm} et B_{nm} centrée sur 0. Toutefois jusqu'à l'ordre 5 inclus¹¹, le coefficient A_{20} échappe à cette

11. Nous n'avons pas analysé notre configuration pour un ordre supérieur à 5.

FIG. 2.6 – Correction du champ sur l'axe \vec{x}

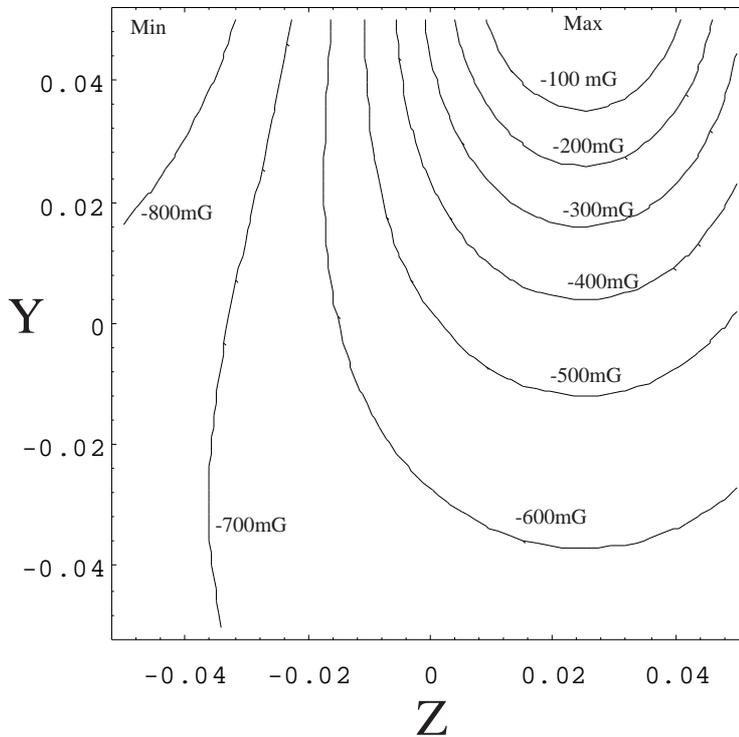


FIG. 2.7 – Courbe de niveau du champ initial

règle. Celui-ci n'est pas centré sur zéro et une des limites de l'étalement est approximativement zéro. Pour être plus précis la valeur zéro peut être atteinte mais avec une probabilité très faible. Il est donc nécessaire de générer un défaut de champ comportant un A_{20} ¹². C'est donc le signe de ce coefficient qui va déterminer l'orientation générale des aimants de correction.

Un aimant sur deux dans le même sens:

Cette fois ci, tous les coefficients sont approximativement centrés, nous pouvons donc choisir le sens de variation du champ principal. Cependant les valeurs maximum atteintes par les coefficients de cette configuration sont 25 % plus faibles. Nous avons donc un pouvoir de correction plus faible.

¹². Ce coefficient exprime la différence de courbure suivant l'axe \vec{z} et la moyenne des courbures suivant les axes \vec{x} et \vec{y}

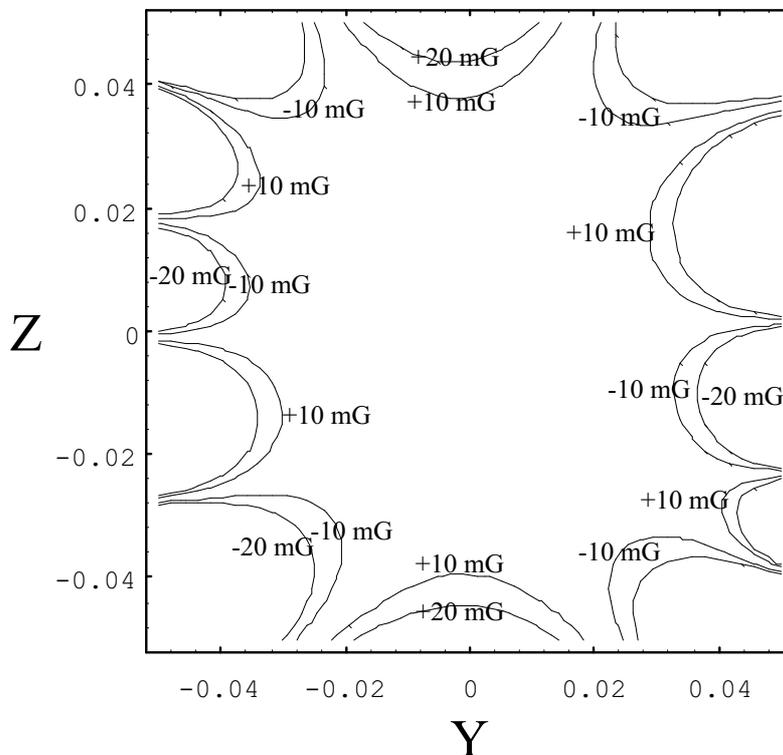


FIG. 2.8 – Courbe de niveau du champ corrigé (6ème ordre apparent)

Une hémisphère dans un sens et vice-versa

On pourra aussi utiliser le fait qu'en orientant une hémisphère dans un sens et l'autre dans le sens opposé nous pouvons décentrer la distribution du gradient correspondant de l'intervalle $-\alpha$ à $+\alpha$ vers 0 à $2\alpha^{13}$, ceci peut éventuellement servir à corriger un gradient important. Néanmoins nous rappellerons que le pouvoir de correction sur les autres coefficients sera encore diminué de 25%.

13. Par exemple orientons l'hémisphère haute de notre configuration dans le sens du champ et l'hémisphère basse dans le sens opposé, la distribution du coefficient B_{11} , c'est à dire le gradient suivant y , sera décentrée.

2.7 Influence sur les composantes transverses

En imagerie par résonance magnétique, nous avons fait l'hypothèse que seule nous intéressait la composante longitudinale du champ car le champ radiofréquence ne capte à priori que suivant cet axe. Cependant, il existe une contribution des composantes transverses. En symétrie de révolution, les configurations classiques du type bobine de helmoltz génèrent essentiellement un champ suivant une direction. Mais notre système de correction ne possède pas, sauf cas particulier, de symétrie de révolution. Il est donc intéressant de savoir si ce système n'amplifie pas les erreurs transverses, aucune équation de contrôle n'étant intégrée. La Figure (2.9) montre qu'au contraire les lignes de champ tendent vers la direction \vec{z} . La divergence $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ est vérifiée car chacune des dérivées $\partial B_x / \partial x$, $\partial B_y / \partial y$ et $\partial B_z / \partial z$ est nulle. Le terme parasite le plus important est un gradient $\partial B_y / \partial z$.

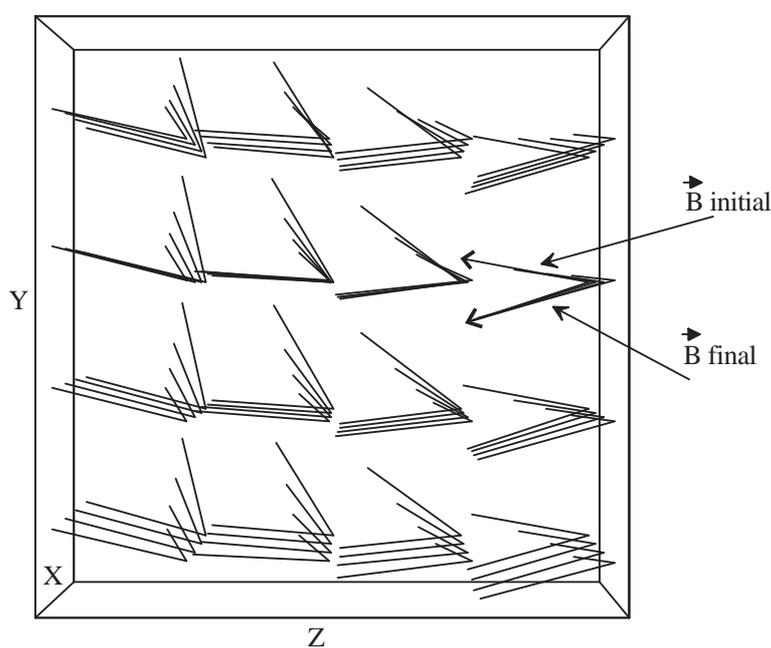


FIG. 2.9 – Comportement du champ \vec{B} avant et après la correction. Les composantes transverses B_x et B_y sont globalement plus faibles.

2.8 Développement du champ en fonctions de Bessel

Une alternative à la démarche précédente en coordonnées cylindriques est l'utilisation des fonctions de Bessel. Nous ferons toujours l'hypothèse que le remplacement de l'intégrale en x' et y' par la surface simple de l'aimant est suffisamment précise pour un point de calcul éloigné de l'aimant correcteur.

Partons donc du développement du potentiel en coordonnées cylindriques[24, p.118]:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \times \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + \sum_{m=0}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \right\} dk \quad (2.20)$$

où I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées.

Ensuite une identification intéressante peut être utilisée:

$$K_0 \left(k \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) = I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + 2 \sum_{m=0}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \quad (2.21)$$

En utilisant comme précédemment la formule $F_{zz'}$ page 14 et en dérivant l'intégrande par rapport à z , nous obtenons l'équation du champ B_z généré par un aimant correcteur dont l'aimantation est M_z , la section transversale est A et la longueur est $z_2 - z_1$:

$$\begin{aligned} B_z(\rho, \phi, z) &= \frac{M_z A}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \cos[k(z - z')]}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_2} \times \\ &\quad K_0 \left(k \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) dk \\ &= -\frac{M_z A}{2\pi^2} \int_0^\infty k (\sin[k(z - z_2)] - \sin[k(z - z_1)]) \times \\ &\quad K_0 \left(k \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) dk \quad (2.22) \end{aligned}$$

Il existe donc d'autres développements possibles du champ. En étudiant la convergence de la série issue de la formule précédente, nous pouvons extraire

les différents termes de la série et former un système d'équations. La série suivante débute à l'ordre 1 car le calcul de l'ordre 0 oblige l'utilisation des limites. Nous sommes en présence d'une indétermination et celle-ci levée, le terme à l'ordre 0 est égal à zéro.

$$B_z(\rho, \phi, z) = -\frac{M_z A}{2\pi^2} \sum_1^N k (\sin[k(z - z_2)] - \sin[k(z - z_1)]) \times \\ K_0 \left(k \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) \quad (2.23)$$

La Figure (2.10) montre, de la même façon que la Figure (2.3), l'erreur relative entre la valeur exacte du champ et le développement (2.23) pour $N = 36$ et $N = 64$. On remarquera que l'erreur dans la zone utile est plus importante que le développement en Legendre en revanche il n'y a plus de rayon de convergence. Ceci a l'avantage de créer de grandes zones utiles si l'on admet une erreur moyenne plus importante. Il est toutefois nécessaire ne pas s'approcher trop près de la source, car les harmoniques supérieurs deviennent, comme le développement de Legendre, prépondérants.

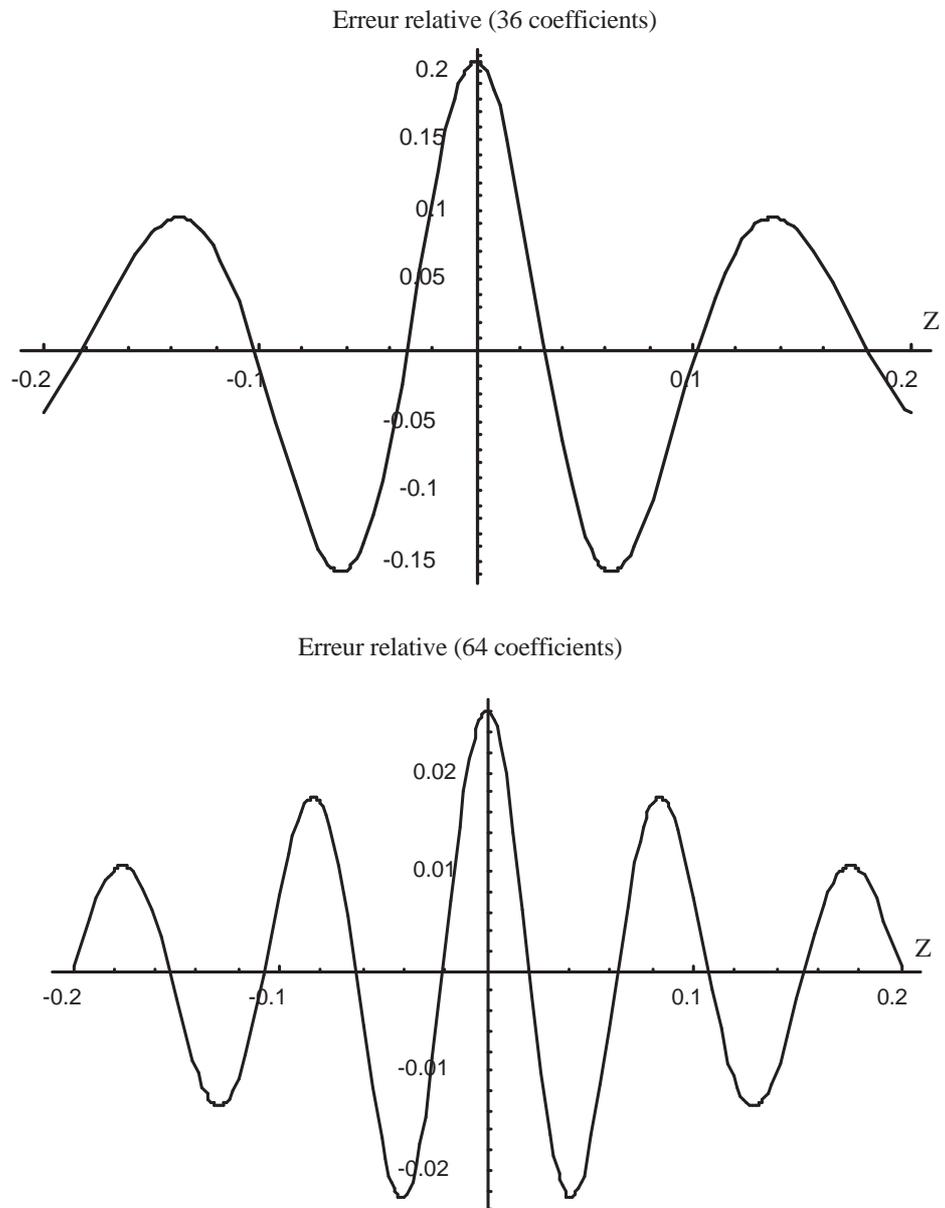


FIG. 2.10 – *Erreur relative entre le champ exact et l'approximation en fonctions de Bessel*

Chapitre 3

Résolution non linéaire

La résolution numérique du système d'équations de Legendre est essentielle. A partir d'un champ exprimé sous forme de coefficients de Legendre, le programme détermine la position des aimants qui généreront ce champ. La principale difficulté est que les différentes équations sont fortement couplées. Quand nous linéarisons à chaque itération les équations, la matrice jacobienne n'est pas inversible. Il est donc impossible de résoudre ce système par une méthode classique du type Newton-Raphson. Cependant la méthode de décomposition en valeurs singulières d'une matrice permet partiellement la résolution de ce problème. Nous avons alors créé notre propre système de résolution fondé sur cette méthode et sur l'analyse du comportement de ce type d'équations. Cette technique peut être utile pour des problèmes inverses dérivant d'un potentiel en $\frac{1}{R}$.

3.1 Méthode générale

Nous voulons résoudre le système suivant par la méthode de Newton.

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Ayant un vecteur initial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, nous allons déterminer un vecteur déplacement δ en développant chaque fonction en série de Taylor et ne conservant que les termes linéaires.

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})\delta_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\delta_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\delta_n &= 0 \\
f_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})\delta_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\delta_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x})\delta_n &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x})\delta_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x})\delta_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\delta_n &= 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

En notation matricielle, le système d'équation (3.2) s'écrit

$$F(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + J.\delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2) = 0 \tag{3.3}$$

on calcule $\delta\mathbf{x}$ par

$$J.\delta\mathbf{x} = -F \equiv \delta\mathbf{x} = -J^{-1}.F \tag{3.4}$$

$\delta\mathbf{x}$ représente l'écart à appliquer au vecteur initial \mathbf{x} et s'il n'y a pas de singularité au point considéré [2, p.373], $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ sera la nouvelle approximation de la racine du système d'équations (3.1). Nous réitérerons le calcul jusqu'à l'obtention d'une racine suffisamment précise.

3.2 Racines des équations de Legendre

Pour déterminer la position des aimants correcteurs, nous utilisons le système d'équations (2.19) déterminé au chapitre précédent:

$$\begin{cases} \frac{A_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1,m}(\cos \theta'_i)}{r_i'^{n+2}} \right]_{z_{i_1}}^{z_{i_2}} \cos(m\phi'_i) = 0 \\ \frac{B_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1,m}(\cos \theta'_i)}{r_i'^{n+2}} \right]_{z_{i_1}}^{z_{i_2}} \sin(m\phi'_i) = 0 \end{cases}$$

Nous avons choisi de déplacer les aimants uniquement en z . Ainsi chaque aimant se déplacera dans une des 35 rainures uniformément distribuées autour du cylindre générateur.

Pour faire apparaître les variables z_i , la partie entre crochet de (2.19) sera réécrite en coordonnées cartésienne, et nous déterminerons ϕ' pour chaque aimant i .

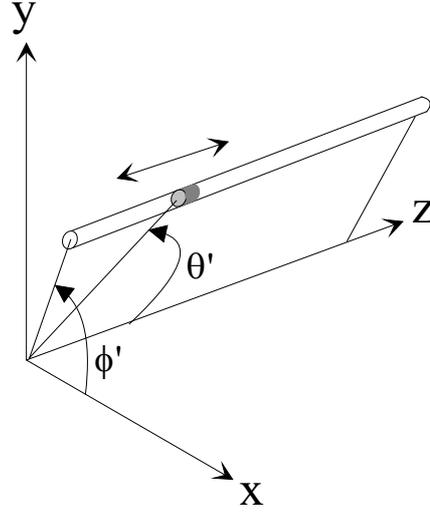


FIG. 3.1 – Variables utilisées

$$\begin{cases} \frac{A_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\frac{z'_i}{r'_i})}{r'_i{}^{n+2}} \right]_{z_{i1}^{z_{i2}}} \cos \left[m(i-1) \frac{2\pi}{35} \right] = 0 \\ \frac{B_{nm}}{4\pi} - \sum_{i=1}^N \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+1m}(\frac{z'_i}{r'_i})}{r'_i{}^{n+2}} \right]_{z_{i1}^{z_{i2}}} \sin \left[m(i-1) \frac{2\pi}{35} \right] = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Les équations principales étant posées, il faut maintenant déterminer les racines. Nous calculerons donc le jacobien du système (3.5) par rapport aux variables z_i . Chaque élément de la matrice s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{M_i A_i}{4\pi} \epsilon_m \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{n+2m}(\frac{z'_i}{r'_i})}{r'_i{}^{n+3}} \right]_{z_{i1}^{z_{i2}}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left[m(i-1) \frac{2\pi}{35} \right] \quad (3.6)$$

3.3 Inversion de la matrice jacobienne

Une étape importante est le calcul de J^{-1} dans (3.4) car la principale difficulté s'y trouve. Admettons que nous soyons très proche d'un vecteur solution, une différence de 10% sur une seule des coordonnées du vecteur suffit à rendre le système non inversible. Les équations composant le système se découpent donc dans une région très proche de la solution. La difficulté reste

le choix d'un vecteur initial. Une méthode ad-hoc consiste à tirer aléatoirement chaque position d'un aimant correcteur dans un intervalle raisonnable¹.

La probabilité d'être proche du vecteur solution² est particulièrement faible, nous pouvons considérer après un calcul grossier avoir une chance sur 10^{35} . Il est donc quasiment impossible de trouver une racine en un temps acceptable. Toutefois le temps de calcul peut être largement diminué en utilisant la méthode de décomposition en valeurs singulières d'une matrice carrée.

L'idée générique de la recherche des racines se fonde sur l'hypothèse suivante, prenons un vecteur initial quelconque et un nombre d'équations très inférieur à celui du système général et nous ferons l'hypothèse que le vecteur solution trouvé doit se rapprocher de la solution réelle. Si nous diminuons le nombre d'équation à résoudre à n , le programme ne peut nous fournir que les n variations les plus significatives sur les coordonnées du vecteur initial. Les autres coordonnées du vecteur ne sont pas affectées (i.e certains aimants ne bougent pas du tout). Il paraît donc clair que la précision atteinte sera insuffisante. Mais dans notre problème, un fait remarquable est que le vecteur trouvé peut servir de façon efficace à la recherche d'une nouvelle solution au système sur lequel on augmente le nombre d'équations à résoudre. Le processus se termine quand nous avons atteint le nombre complet d'équations et trouvé le vecteur solution.

3.4 Décomposition en valeur singulière d'une matrice carrée

Cette technique très puissante est utilisée lors d'inversion de matrices singulières. L'élimination de Gauss ou la décomposition LU³ ne peuvent être employées du fait de leur sensibilité aux erreurs d'arrondi. La décomposition en valeur singulière est souvent utilisée dans le cadre des calculs de moindres carrés linéaires. les matrices sont généralement mal conditionnées car il s'agit de minimiser l'écart entre un modèle et un ensemble de points supérieurs au nombre de variables nécessaires à la détermination complète d'une solution. Le problème est dans ce cas surdimensionné. Dans cette étude, nous n'utilisons pas les moindres carrés mais une recherche de racines, car les équations génèrent déjà une matrice non inversible quand le nombre d'inconnues est égal aux nombre d'équations. L'utilisation d'un nombre de variables supé-

1. Les bornes de l'intervalle sont approximativement égale au rayon du cylindre générateur, au delà l'aimant n'a plus d'influence significative.

2. ou des vecteurs solutions, hypothèse non vérifiée

3. Lower Upper triangular matrix

3.4. DÉCOMPOSITION EN VALEUR SINGULIÈRE D'UNE MATRICE CARRÉE 49

rieur ne fournit pas de meilleurs résultats.

La décomposition en valeur singulière est fondée sur le théorème d'algèbre linéaire suivant: Toute matrice A dont le nombre de lignes est supérieure ou égale au nombre de colonnes peut être décomposée en un produit de trois matrices U , W , V^T . La matrice U est de même taille que la matrice A et ses vecteurs colonnes sont orthogonaux entre eux. La matrice W est une matrice diagonale composée de valeurs positives ou nulles, sa taille est égale au nombre de colonnes de A . Enfin la matrice V^T est une matrice carrée orthogonale. On a donc:

$$A = U \cdot [diag(w_i)] \cdot V^T \quad (3.7)$$

Les routines numériques utilisées sont issues d'un algorithme proposé par Forsythe[15] originellement proposé par Golub et Reinsch[18].

Dans notre cas, la matrice A est carrée, les trois matrices seront donc aussi carrées et de même taille que A . Comme U et V sont des matrices orthogonales, la transposée de chacune de ces matrices est égale à leur inverse. L'inverse de la matrice A s'écrit

$$A^{-1} = V \cdot [diag(1/w_i)] \cdot U^T \quad (3.8)$$

Dans le cas de la recherche de racines d'un système dérivant d'un potentiel en $1/R$, les équations (représentées par l'équation principale du champ a_{00} et des dérivées successives) s'annulent à l'infini. Vu la taille de notre système (rayon du cylindre générateur égal à 10 cm), à plus de 30 cm du centre nous pouvons considérer que les aimants sont placés à l'infini. Comme la matrice à inverser est justement le jacobien de ces équations par rapport aux coordonnées spatiales, le système sera rendu non inversible dans le cas où des aimants seraient éjectés loin de la zone d'intérêt. Beaucoup d'éléments de cette matrice seront annulés et ainsi les vecteurs lignes ou colonnes de la matrice A^{-1} deviennent linéairement dépendant. La conséquence classique d'un système divergent est de ne fournir aucun résultat. Cette tendance générale est d'ailleurs la principale difficulté rencontrée dans les problèmes inverses relatifs au positionnement des sources.

Les coefficients de la matrice diagonale W^{-1} indiquent si la matrice est bien conditionnée. Si le rapport $w_{max}/w_{min} > 10^6$ dans le cas des flottants codés sur 4 octets et $w_{max}/w_{min} > 10^{12}$ dans le cas des flottants codés sur 8 octets, les erreurs d'arrondi deviennent très importantes lors de l'inversion de la matrice A par une méthode du pivot de Gauss.

En fixant une valeur limite où toute valeur w_i inférieure sera remplacée

par zéro⁴, nous supprimons certaines lignes de la matrice A . Elles sont soit couplées entre elles soit proches de zéro. Le calcul de l'inverse par cette méthode va résoudre $AX = B$ par une méthode des moindres carrés, il s'agira alors de déterminer X tel que $\|AX - B\|$ soit minimum.

3.5 Organigramme du logiciel

Les positions d'aimants générant le champ opposé au champ déterminé par les coefficients A_{nm} , B_{nm} , eux-même issus des mesures, sont données par l'algorithme de la Figure (3.2).

Les 5 procédures suivantes consistent à reprendre la procédure initiale et réutiliser les vecteurs solutions trouvés précédemment en divisant par 10 à chaque procédure le coefficient de couplage $limwi$. Le tirage aléatoire sera centré sur le vecteur solution précédent +/- 1 cm.

L'itération 2 s'écrit donc en reprenant l'algorithme initial et en remplaçant l'étape II par la Figure (3.3).

4. Nous allons transgresser une règle mathématique $w_i = 0 \rightarrow 1/w_i = \infty = 0$, un infini que nous avons remplacé par zéro!

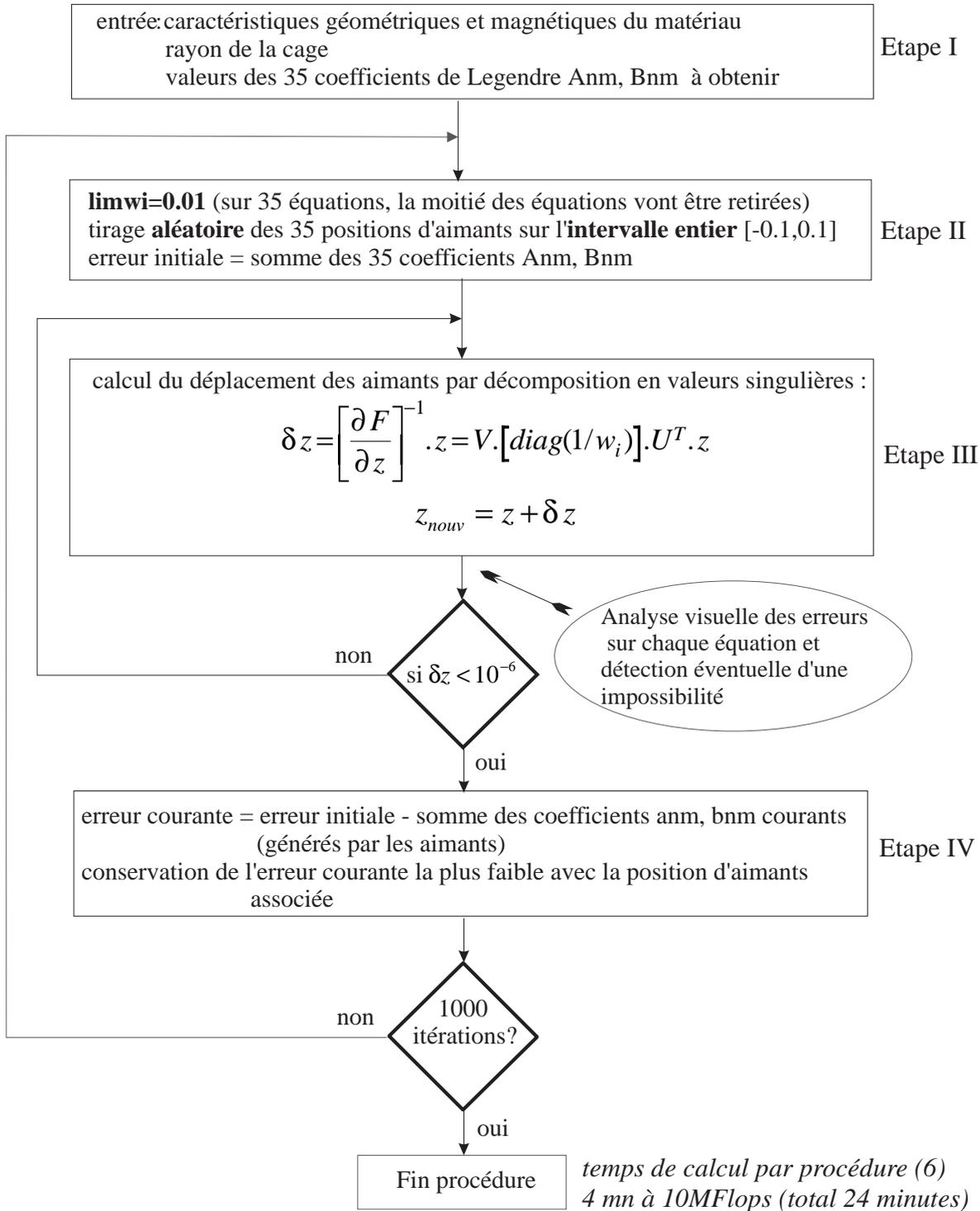


FIG. 3.2 – Organigramme de la recherche initiale

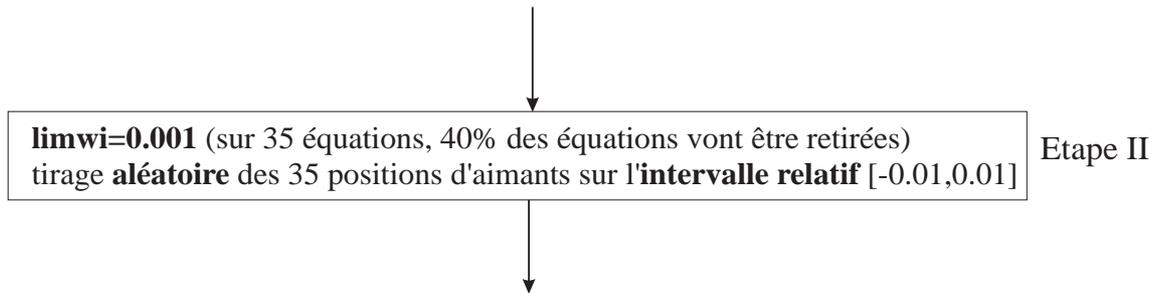


FIG. 3.3 – *Modification de l'étape II pour les prochaines procédures*

Chapitre 4

Application à deux variables

Pour illustrer l'algorithme du chapitre précédent par une méthode graphique, nous allons déterminer la position de deux aimants qui généreront un champ homogène sur l'axe \vec{z} . Ces 2 aimants sont dans la première configuration Figure (4.1) et les caractéristiques des aimants sont données au chapitre 1.5. Comme nous nous intéressons uniquement au champ B_z sur l'axe, leur position en ϕ' est sans importance. Cette étude est instructive car, nous pouvons transposer ce cas à deux dimensions aux exemples plus compliqués à n dimensions.

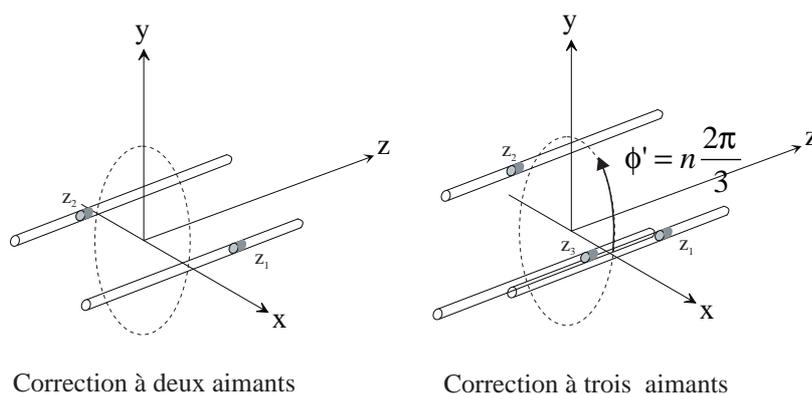


FIG. 4.1 – Configurations à deux et trois aimants

4.1 Allure des courbes a_{00} , a_{10} , a_{20}

La courbe $a_{00} = cste$ est représentée en 2 et 3 dimensions (2 et 3 aimants), les coordonnées des axes sont les positions des aimants. On remarque que la transposition est aisée car la courbe $f(z_1, z_2) = cste \equiv f(z_1, z_2, z_3 = 0) = cste$. Nous retrouvons la courbe à deux aimants par une coupe de la courbe à 3 aimants. La courbe $a_{00} = 0$ est subtile, les axes \vec{x} et \vec{y} sont des asymptotes à l'infini, il existe aussi une courbe virtuelle quand $z_1 = z_2 = \infty$. Toutefois ces solutions lointaines ne nous intéressent pas, nous limiterons donc l'étude à +/- 20cm¹.

La Figure (4.3) représente les deux courbes $a_{10} = 0$ et $a_{20} = 0$. Il s'agit de trouver les points d'intersections des solutions simultanées. La particularité de la première équation est qu'elle se compose d'une droite $z_2 = -z_1$ et de courbes tangentes aux points solutions de a_{20} . Les algorithmes du type Newton multidimensionnel échoueront car le vecteur solution suivant est déterminé par l'intersection des hyperplans, eux-même tangents aux courbes au point courant. On imagine donc qu'une solution déterminée par deux courbes tangentes ne peut être trouvée. Dans ce cas précis, la solution ne fait aucun doute car la deuxième courbe est automatiquement intersectée par la droite. Le tracé de la polyligne en pointillé représente le chemin suivi lors de la recherche de solutions. On remarque que le 4ème segment est très proche de la solution mais il se trouve éjecté par la suite. La deuxième approche est faite en utilisant l'algorithme par SVD, comme un hyperplan est supprimé si il est parallèle à un autre². La solution est alors trouvée. Toutefois si le vecteur initial répond à $z_2 = -z_1$, une solution sera très rapidement trouvée, même avec une méthode de Newton-Raphson.

4.2 Choix de vecteurs initiaux

Lors d'une génération de champ simple, beaucoup de coefficients du développement de Legendre sont nuls. Nous retrouvons souvent une droite³ du

1. Nous rappelons que dans tout le document, nous avons normalisé les dimensions du générateur à $r' = 10$ cm. Ceci n'est absolument pas restrictif car il s'agit d'un rapport de dimension entre r et r' , nous avons donc choisi que les aimants pouvaient se déplacer au maximum de +/- 2r'.

2. Deux lignes du jacobien sont identiques, donc la décomposition en valeur singulière supprimera une des lignes et continuera sous la forme d'une résolution au sens des moindres carrés

3. Certaines équations comportent même à elles seules plusieurs droites comme par exemple $a_{31} = 0$.

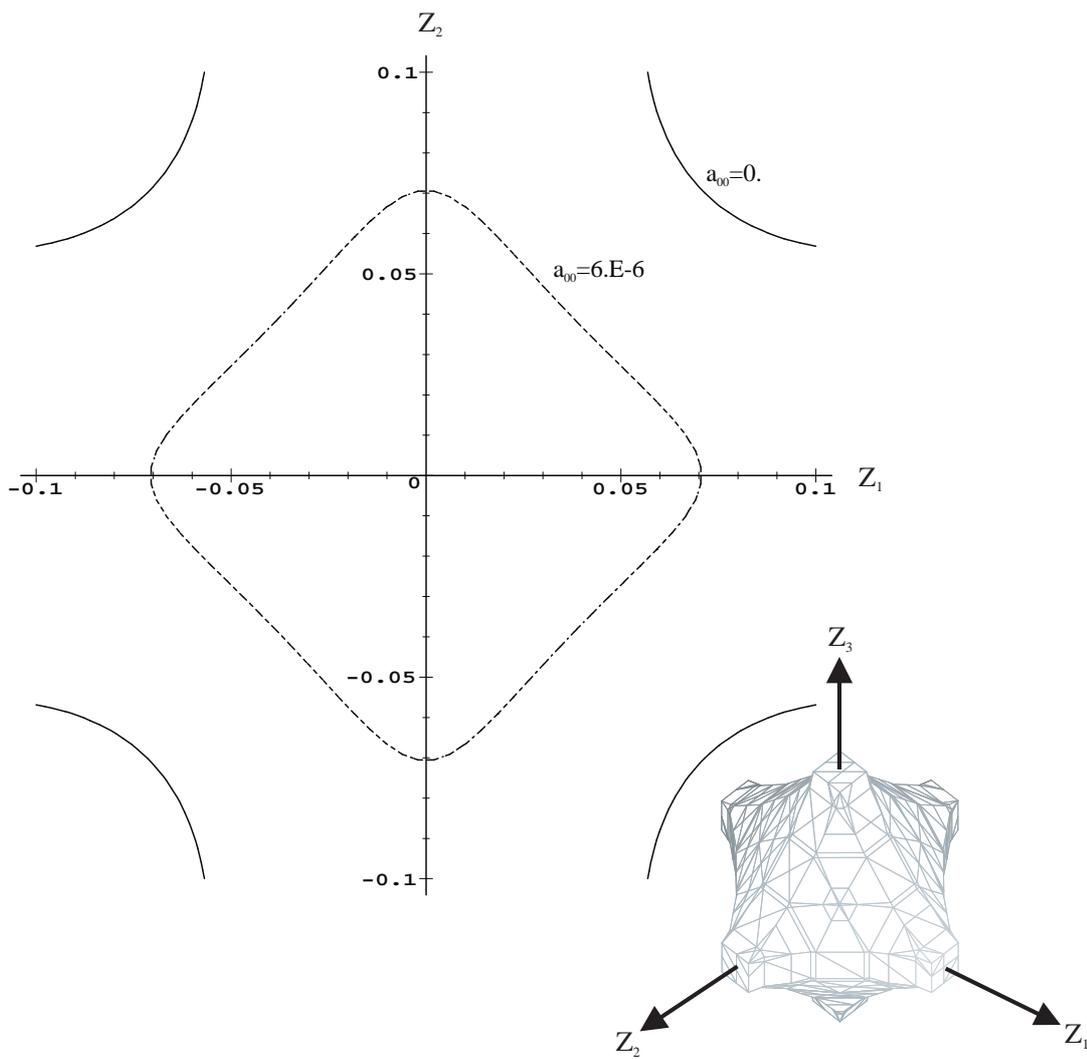


FIG. 4.2 – a_{00} pour deux et trois aimants. Les axes représentent les positions des aimants le long des glissières.

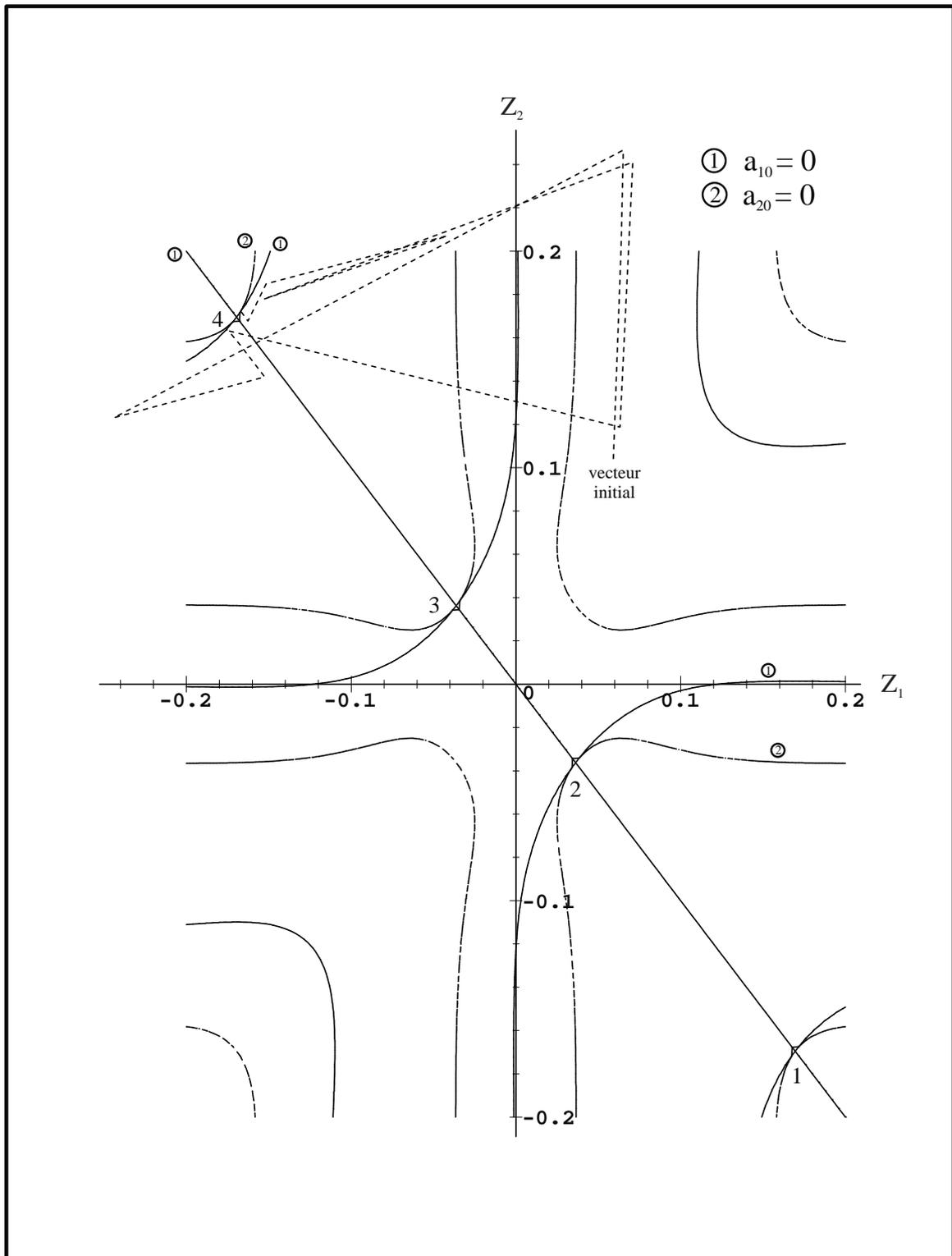


FIG. 4.3 – Recherche de solutions par l'algorithme de Newton pour les 4 premiers segments. Après l'échec, l'approche finale est effectuée par élimination des plans tangents.

type $z_1 \pm z_2 \pm \dots \pm z_n = 0$, il est particulièrement indiqué de choisir un vecteur initial dont les composantes sont constituées de la même valeur absolue choisie aléatoirement et de signe en accord avec l'équation de cette droite. De cette façon le vecteur accroche au plan, et est donc moins soumis au phénomène des courbes tangentes. En termes physiques nous pouvons relier ceci aux différentes symétries, mais l'effort mental devient important quand le nombre d'ordres à corriger est grand. Il serait alors intéressant de passer en revue les différentes équations des droites et de tester différents vecteurs initiaux. Une méthode brute consiste à essayer toutes les combinaisons de signes, mais pour 35 équations nous obtenons $2^{34} = 17\,179\,869\,184$ vecteurs initiaux.

Cependant ces considérations ne sont valides que dans le cas d'annulation des coefficients. Dans le cas contraire, les droites disparaissent comme nous pouvons le constater sur la Figure (4.4). Il n'existe donc pas de symétrie pure si le coefficient considéré n'est pas nul. Il semble toutefois difficile de rechercher des solutions annulant certains coefficients car la fonction n'est pas partout dérivable⁴. L'expérience montre qu'il est plus simple de corriger un champ magnétique où aucun de ses coefficients n'est nul que de générer un profil de champ particulier et comportant a priori beaucoup de coefficients nuls.

Nous avons donc démontré l'intérêt d'éliminer un des plans tangents par notre algorithme. Par effet de bord, nous évitons aussi de nous approcher trop près de la solution afin d'éviter un calcul erroné du jacobien, certaines fonctions n'étant pas dérivables en ces points. C'est donc l'approche de la solution au sens des moindres carrés qui élimine cette difficulté.

4. C'est justement aux points solutions 1,2,3,4 de la Figure (4.3) qu'une des fonctions n'est pas dérivable.

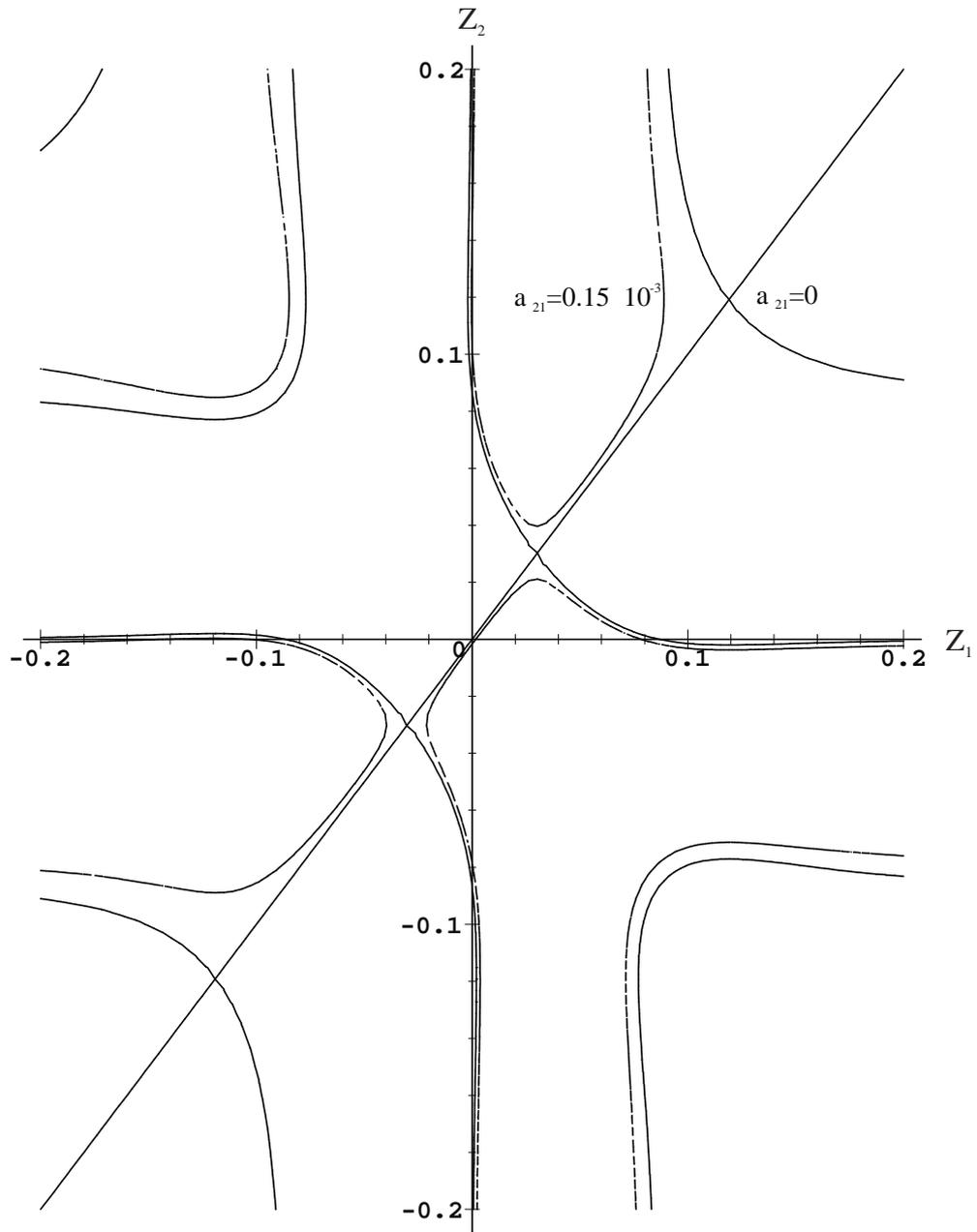


FIG. 4.4 – Les symétries n'existent que dans le cas de coefficients nuls.

Chapitre 5

Génération de champ par fils de courant

L'hypothèse initiale est que nous pouvons générer un grand nombre de configurations à partir de fils de courant rectilignes. Nous avons choisi au départ la forme du conducteur la plus simple possible et essayé de générer des champs arbitraires. Si ceci ne se révèle pas possible, les fonctions issues du développement du potentiel n'étant peut-être pas indépendantes dans le cas d'un segment de droite, nous choisirons une autre forme de lignes de courant. Le passage de segments de droites vers des B-splines par exemples ne posent aucune difficulté car les équations des éléments de courant sont définies sous la forme paramétrique $x' = f(t)$, $y' = f(t)$ et $z' = f(t)$. Ceci permet d'effectuer ultérieurement une intégration numérique des éléments infinitésimaux \vec{dl} entre le point de départ et le point d'arrivée des arcs de courants.

D'une façon générale, le potentiel vecteur \vec{A} créé par un élément de courant \vec{dl} et d'intensité I s'écrit:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{\vec{dl}}{R} \quad (5.1)$$

et le champ magnétique \vec{B} s'écrit

$$\vec{B} = r \vec{\otimes} t \vec{A} \quad (5.2)$$

Ces équations nous permettent d'utiliser directement le développement en polynômes de Legendre.

5.1 Développement du champ d'un segment de fil

5.1.1 Calcul de la composante B_z (voir Fig 5.1)

Considérons tout d'abord un segment de droite porté par un plan $z = cste$ et intéressons nous à la seule composante z du champ généré par ce fil de coordonnées $(x_1, y_1; x_2, y_2)$:

$$B_z = \int_l (y_2 - y_1) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} - (x_2 - x_1) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} \quad (5.3)$$

En reprenant le développement de $1/R$ (2.13), l'intégration le long du fil porte sur les coordonnées x' et y' . Les différents coefficients hors intégration s'écrivent:¹

$$a_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_{m-1} \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} (1 + \delta_{m-1}) \\ (- (y_2 - y_1) \cos [(m-1) \arctan(y', x')] - (x_2 - x_1) \sin [(m-1) \arctan(y', x')]) \\ P_{n+1m-1} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right] + \epsilon_{m+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (1 - \delta_{m+1}) \\ ((y_2 - y_1) \cos [(m+1) \arctan(y', x')] - (x_2 - x_1) \sin [(m+1) \arctan(y', x')]) \\ P_{n+1m+1} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

$$b_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_{m-1} \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} (1 + \delta_{m-1}) \\ (- (y_2 - y_1) \sin [(m-1) \arctan(y', x')] + (x_2 - x_1) \cos [(m-1) \arctan(y', x')]) \\ P_{n+1m-1} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right] + \epsilon_{m+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (1 - \delta_{m+1}) \\ ((y_2 - y_1) \sin [(m+1) \arctan(y', x')] + (x_2 - x_1) \cos [(m+1) \arctan(y', x')]) \\ P_{n+1m+1} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

avec

$$\epsilon_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

1. Nous avons volontairement écrit $\arctan(y', x')$ qui renvoie l'angle dans l'ensemble des quatre quadrants, cette syntaxe est similaire à la forme $\arctan(\frac{y'}{x'})$ définie seulement sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

et

$$\delta_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Pour calculer les différents coefficients, nous effectuons la substitution suivante $x' = x_1 + (x_2 - x_1) \times t$, $y' = y_1 + (y_2 - y_1) \times t$. Nous reconnaissons les équations paramétriques d'un segment de droite. Nous intégrons ensuite Bz suivant t variant de $[0, 1]$. Cette étape peut donc être modifiée en remplaçant les équations paramétriques dans le programme par d'autres équations dans la routine d'intégration numérique et en ayant pris soin de modifier les termes en $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ par la dérivée locale du chemin d'intégration. Les termes sus-cités sont d'ailleurs obtenus de cette façon en dérivant les deux équations paramétriques par rapport à t .

L'intégration analytique est possible pour tous les coefficients, cependant un coefficient d'ordre 4 nécessite 20 millions de caractères pour être représenté. L'ordre 5 ne peut être raisonnablement écrit analytiquement. De ce fait, nous choisirons l'intégration numérique, beaucoup plus rapide.

5.1.2 Calcul de la composante B_x (voir Fig 5.1)

Après avoir considéré la composante z du champ généré par les fils, nous allons déterminer la composante x du champ. Actuellement de nombreuses publications [8][22][23][32] portent sur la maîtrise des composantes du champ parallèles aux plaques (dans notre repère les composantes x et y). Il s'agit essentiellement de génération de gradients de champ.

$$B_x = \int_l \underbrace{(z_2 - z_1) \frac{\partial^1}{\partial y}}_{=0} - (y_2 - y_1) \frac{\partial^1}{\partial z} \quad (5.4)$$

Etant donné que les segments de fils de coordonnées $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ se trouvent tous à $z' = cste$, le premier terme de l'intégrale est nul. L'écriture du champ B_x est semblable à celle utilisée pour les aimants correcteurs:

$$a_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_m \frac{(n - m + 1)!}{(n + m)!} \times -(y_2 - y_1) \cos [m \arctan(y', x')] P_{n+1m} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

$$b_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \times -(y_2 - y_1) \sin [m \arctan(y', x')] \\ P_{n+1m} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

avec $x' = x_1 + (x_2 - x_1) \times t$, $y' = y_1 + (y_2 - y_1) \times t$ et $z' = cste$.

La Figure (5.1) indique les dimensions que nous avons choisies pour le générateur de champ. Dans cette étude, seuls les fils générant un champ B_x sont représentés, il n'y a donc pas d'arcs transverses tracés dans les dessins. Cependant pour quantifier les champs B_y et B_z , ils interviendront effectivement dans le calcul.

Physiquement les lignes de courants sont fermées et nous considérons que les arcs de retour sont éloignés de la zone d'intérêt. Ce point peut être critiqué car ceci force une plaque de dimension importante. Toutefois cette omission n'est pas capitale dans un premier temps, car il s'agit de montrer la possibilité de générer des configurations de champs à partir de fils rectilignes. Si cela se révèle possible, les cas inventoriés peuvent être étudiés en vue de la réalisation pratique sachant que dans le cas d'un gradient $\partial B_x / \partial x$ il n'y a pas d'arcs de retour. Nous pouvons former des spires sur une même plaque, les sens des courants étant opposés par symétrie suivant l'axe \vec{y} .

5.1.3 Calcul de la composante B_y (voir Fig 5.1)

Cette composante ne nous intéresse pas car elle est parallèle aux fils conducteurs actifs. Toutefois lors d'un calcul du vecteur \vec{B} , il est nécessaire de prendre en compte les arcs transversaux qui eux génèrent une composante B_y . Pour le calcul des coefficients a_{nm} et b_{nm} relatifs à cette composante, nous effectuons une permutation des x' , y' à partir des coefficients relatifs à la composante B_x

$$a_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \times -(x_2 - x_1) \cos [m \arctan(x', y')] \\ P_{n+1m} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

$$b_{nm} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^{n+2}} \epsilon_m \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \times -(x_2 - x_1) \sin [m \arctan(x', y')]$$

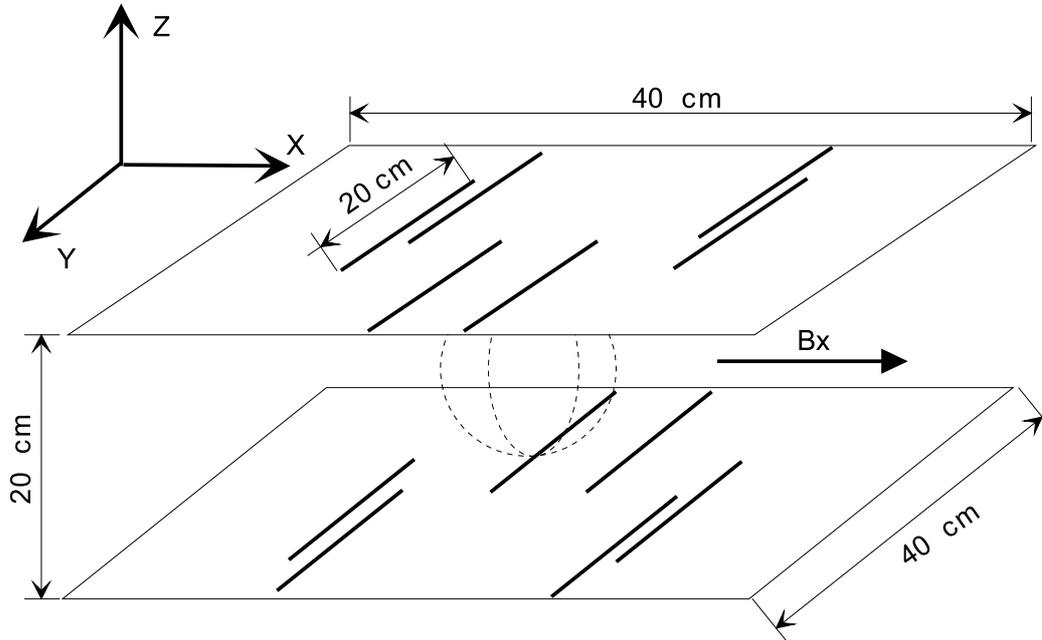


FIG. 5.1 – Génération d'un profil de champ B_x (la sphère de rayon 5 cm indique la zone d'intérêt).

$$P_{n+1m} \left[\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right]$$

avec $x' = x_1 + (x_2 - x_1) \times t$, $y' = y_1 + (y_2 - y_1) \times t$ et $z' = cste$.

5.2 Générateur de champ uniforme

Nous allons calculer une configuration de champ B_x uniforme dans une sphère de 10 cm de diamètre. Ce cas est intéressant du point de vue numérique, car les valeurs des coordonnées du tableau 5.1 annulent parfaitement tous les coefficients jusqu'à l'ordre 5 inclus. C'est pour cette raison que nous avons conservé une précision très élevée pour les valeurs du tableau. Cependant ce cas ne présente qu'un intérêt théorique car la dimension des plaques dans la direction y est importante.

Dans le cas d'un champ très homogène comme l'indique la carte de champ Fig(5.2), nous avons toujours obtenu cette configuration avec un rapport des courants de 4. Nous ne pouvons conclure sur l'unicité de cette solution, mais après plusieurs essais, nous n'avons pas trouvé d'autres configurations. Le

rapport de 4 est une condition que nous avons imposé, le système trouvant une solution à partir d'un rapport de courants de 3,2. Toutefois, il est plus simple d'avoir des rapports entiers afin de réaliser des spires avec un même courant, nous avons alors choisi la valeur 4. Des valeurs supérieures fonctionnent mais la dimension des plaques devient prohibitive, car il faut éloigner les conducteurs extérieurs de la zone centrale.

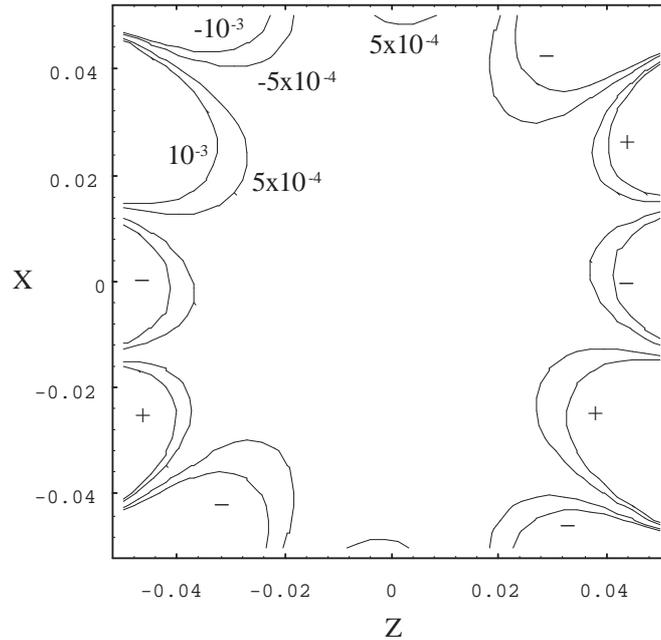


FIG. 5.2 – Homogénéité du champ B_x . Erreur relative par rapport au champ central.

En analysant la Figure (5.3) et les coordonnées du tableau 5.1, la configuration est relativement étonnante car il n'y a pas de symétrie axiale. Il existe simplement une symétrie ponctuelle à l'origine entre les deux plaques. Il existe aussi des conducteurs placés à l'extérieur portant des courants importants par rapport à ceux du centre. Si nous demandons au système de trouver une position avec un rapport de courant moindre, le coefficient $a_{20} = -r^2/2 + z^2$ ne peut plus être annulé. En nous reportant à l'étude de la correction par une cage d'aimants permanents, ce coefficient se révélait déjà capital pour la réalisation du système de correction. Ce coefficient exprime le manque de sources uniformément distribuées autour de la zone d'intérêt. Rappelons qu'à l'intérieur d'une sphère de matière aimantée par exemple, le champ est parfaitement uniforme. Mais par souci d'accessibilité nous ne pouvons placer des sources tout autour de la zone utile. Comment alors simuler

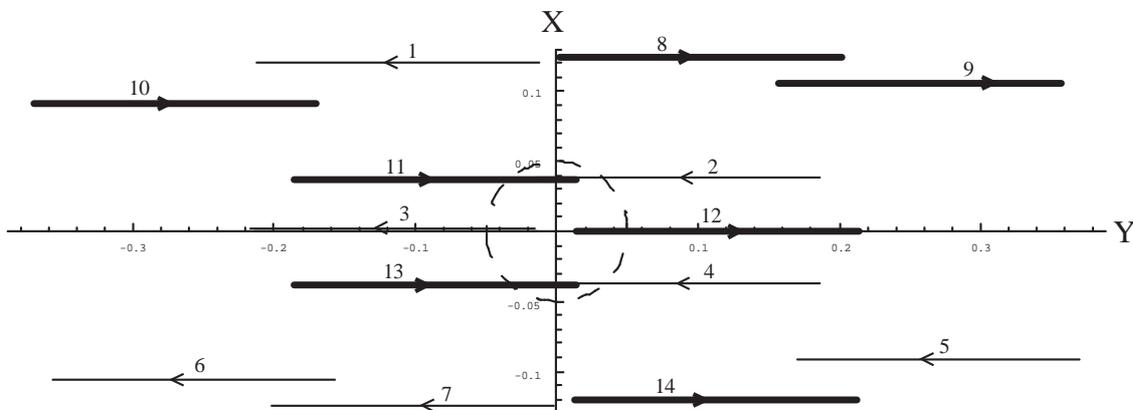


FIG. 5.3 – Vue de dessus des plaques haute et basse. B_x dirigé vers le haut et homogène jusqu'à l'ordre 5 inclus.

la distribution uniforme de charges ne pouvant se répartir que sur deux plans parallèles? Le système a choisi d'augmenter la distance des fils extérieurs par rapport à l'origine, et de ce fait l'angle d'incidence de ces conducteurs devient plus faible. Toutefois le fil doit porter un courant plus important de façon à simuler un fil proche, virtuellement placé entre les deux plans. Ce comportement est prépondérant, le garder en mémoire nous permet d'élaborer plus rapidement des configurations initiales. Au point de vue de la faisabilité, nous devons donc chercher à distribuer uniformément les sources autour de la zone et quand cela n'est pas possible, simuler les sources manquantes par d'autres plus fortes. Chacune d'entre elles sera positionnée aux angles θ et ϕ de la source remplacée et à une distance admissible mécaniquement.

5.3 Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial x}$

Nous allons maintenant étudier une série de gradients dont le premier sera suivant l'axe \vec{x} . Ces configurations se révèlent plus difficiles à trouver pour une raison que nous avons pu élucider. Le calcul consiste à annuler tous les coefficients sauf A_{11} . Cependant le programme ne peut pas annuler le coefficient $a_{31} = 3x(-r^2/2 + 2z^2)$. Or nous avons déjà rencontré cette difficulté avec le coefficient A_{20} lors de champs homogènes. Il s'agit du même problème car nous pouvons reconnaître une forme du type $a_{31} \sim xa_{20}$ sachant que le coefficient x ne peut pas s'annuler car il s'agit ici de la valeur du gradient.

réf	plan ($z=\pm 0.1\text{m}$)	x (m)	y (m)	intensité relative
1	bas	0.120873	-0.211988	4
2	bas	0.0387396	-0.0140289	1
3	bas	0.	-0.213914	1
4	bas	-0.0376243	-0.0137464	1
5	bas	0.091118	0.169644	4
6	bas	-0.105396	-0.357483	4
7	bas	-0.124105	-0.202016	4
8	haut	0.124105	0.00201545	-4
9	haut	0.105396	0.157481	-4
10	haut	0.0911151	-0.369644	-4
11	haut	0.0376243	-0.186254	-1
12	haut	0.	0.0139139	-1
13	haut	-0.0387396	-0.185971	-1
14	haut	-0.120873	0.0119882	-4

TAB. 5.1 – Position des fils et intensité pour B_x homogène

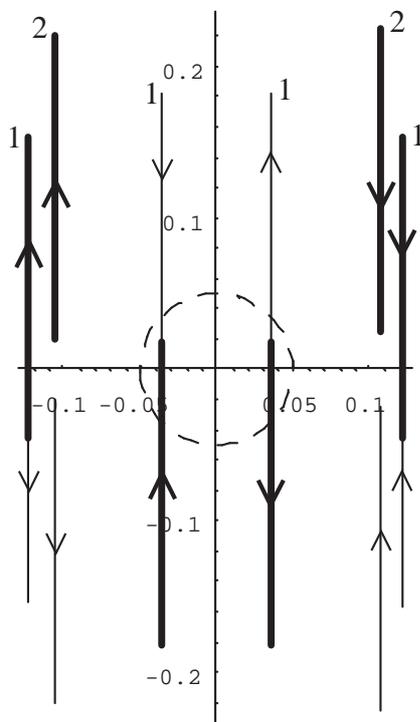
C'est donc le second terme très proche par sa forme à a_{20} mais avec un coefficient 2 appliqué à z^2 . Le problème du manque de sources placées autour de la zone utile devient encore plus gênant. Nous n'avons pas pu annuler complètement ce coefficient avec des rapports de courants inférieurs à 6, ce qui est déjà très préjudiciable pour l'efficacité énergétique du système.²

La configuration suivante est déterminée pour des fils extérieurs portant un courant 2 fois plus importants. Comme nous allons le voir, ceci n'est pas suffisant pour rattraper le manque de courant à la périphérie de la zone utile.

On remarque bien sur la carte de champ (5.5) que les conducteurs extérieurs devraient porter un courant plus élevé. Après avoir essayé avec un rapport de courant de 3 et obtenu des résultats peu satisfaisants, la configuration Fig(5.6) améliore très nettement la linéarité du gradient. Toutefois la première configuration peut être retenue si une contrainte énergétique existe tout en acceptant un gradient de cette précision.

Le logiciel a fourni la solution Figure (5.6). Les coordonnées sur l'axe \vec{y} sont rigoureusement zéro, mais par souci de clarté nous avons légèrement écarté les fils de l'axe. Il est évident qu'à la réalisation les fils symétriques par rapport à l'axe \vec{y} seront joints. Nous pouvons alors isoler 3 paramètres sur les 36 variables de départ, les conducteurs intérieurs à $x = \pm 0.038\text{m}$ et les conducteurs extérieurs à $x = \pm 0.1159\text{m}$ portant un courant 4 fois plus

2. Vu les courants très forts qu'ils portent, ils se placent loin de la zone.

FIG. 5.4 – Configuration (II) de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$

réf	plan ($z=\pm 0.1\text{m}$)	x (m)	y (m)	intensité relative
1	bas	-0.123	-0.154	-1
2	bas	-0.105	-0.22	-2
3	bas	-0.036	-0.018	-1
4	bas	0.036	-0.018	1
5	bas	0.105	-0.22	2
6	bas	0.123	-0.154	1
7	haut	-0.123	-0.046	1
8	haut	-0.105	0.02	2
9	haut	-0.036	-0.182	1
10	haut	0.036	-0.182	-1
11	haut	0.105	0.02	-2
12	haut	0.123	-0.046	-1

TAB. 5.2 – Position des fils et intensité pour la configuration Fig(5.4)

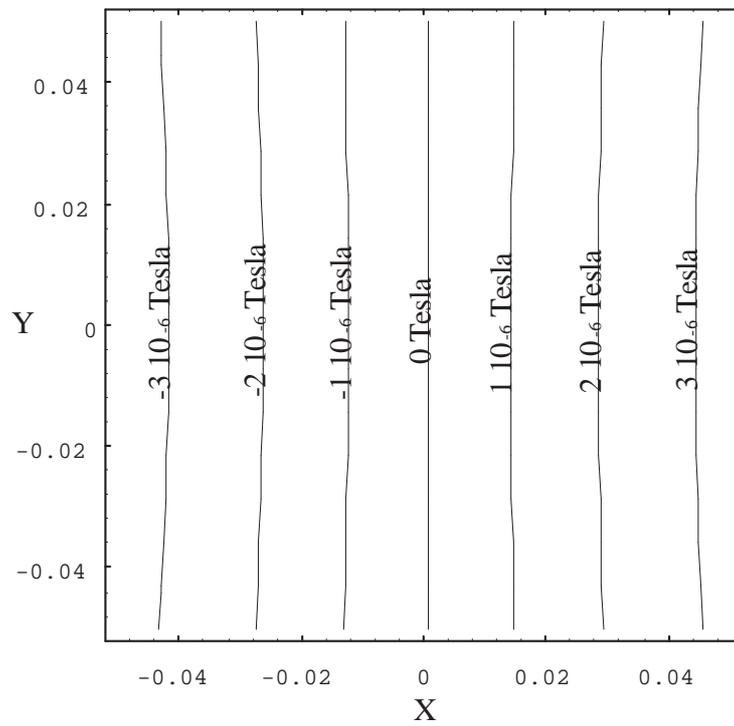


FIG. 5.5 – Tracé (II) du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ pour un courant de 1 A. Problème évident d'un manque de courant dans les coins de la figure.

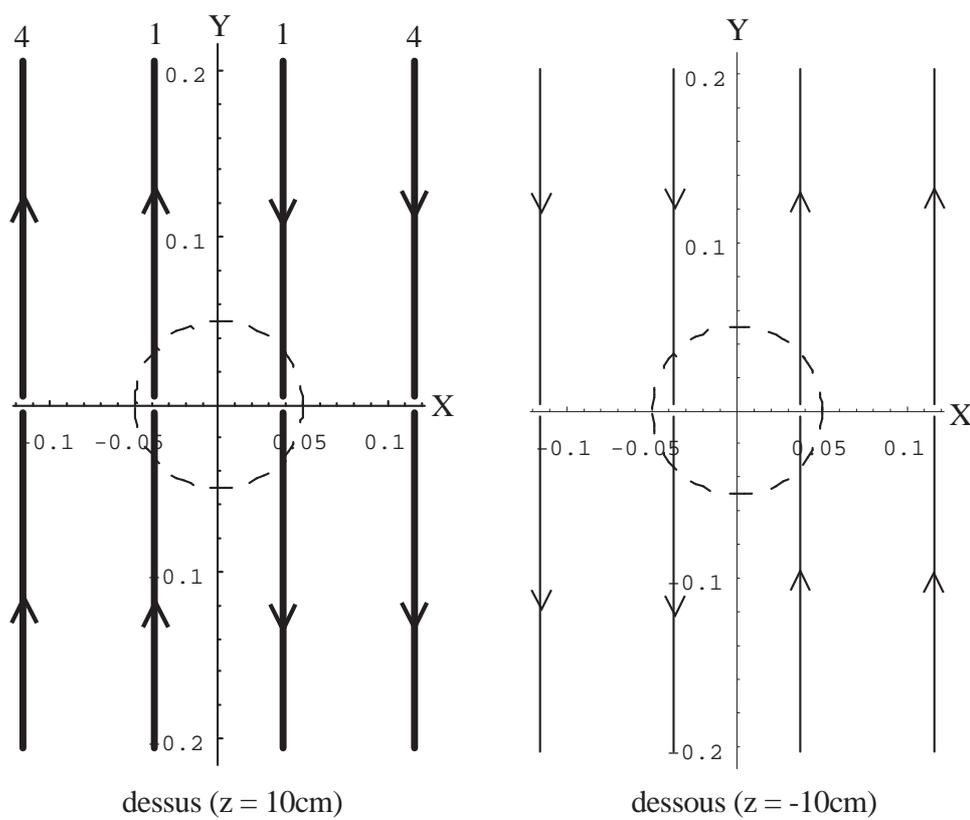


FIG. 5.6 – Configuration de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$

important.

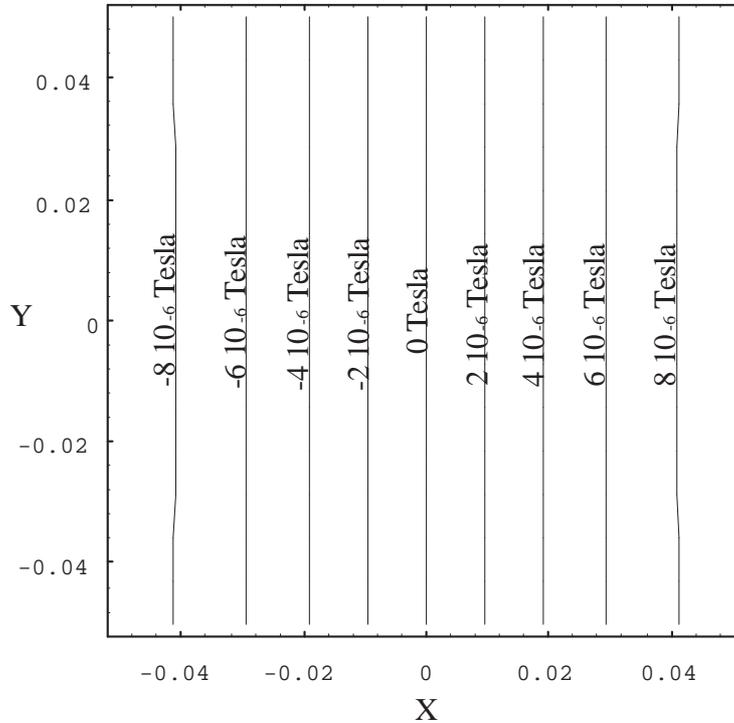


FIG. 5.7 – Tracé du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 17.10^{-5} \text{Tesla/m}$ pour un courant de 1 A.

5.4 Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial y}$

Comme dans les exemples précédents, le coefficient $b_{31} = 3y(-r^2/2 + 2z^2)$ sera difficile à annuler. Il représente le manque de sources placées dans la direction privilégiée y et éloignées du centre³. Cependant, nous nous sommes refusés à augmenter les dimensions des plaques afin de respecter un encombrement minimum. En considérant que le programme peut donner une extrémité d'un conducteur à 10 cm, il faut ajouter 20 cm de longueur de fil suivant \vec{y} . Les configurations étant toujours symétriques suivant la direction du gradient, la dimension totale de la plaque suivant l'axe \vec{y} peut atteindre 60cm.

3. Cette remarque est identique pour coefficient a_{31} , les sources venant se placer principalement dans la direction x et éloignées du centre.

Pour illustrer le problème du manque de sources suivant la direction y , la configuration Fig(5.8) est une solution générant les coefficients $B_{11} = 12 \cdot 10^{-5}$ et $B_{31} = 5 \cdot 10^{-4}$. Les 34 autres coefficients sont annulés.

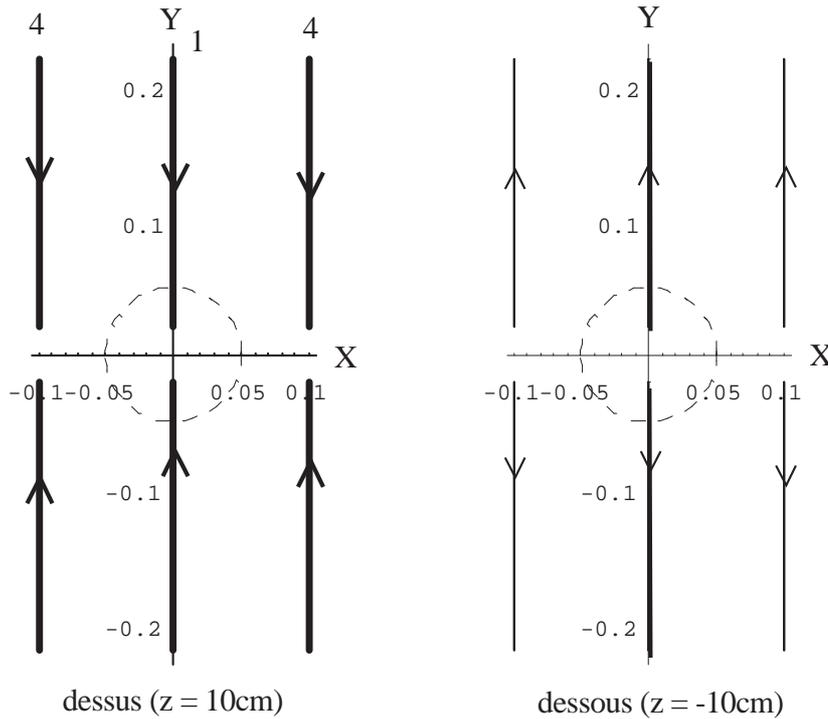


FIG. 5.8 – Configuration (I) de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial y}$. Le coefficient B_{31} n'est pas annulé.

La carte de champ Figure (5.9) montre nettement une forme en tonneau du gradient suivant la direction y . Pour diminuer le phénomène, nous pouvons ajouter des lignes de courants dans cette zone. Pratiquement, nous chercherons à diminuer le courant au centre et l'augmenter vers les bords. Dans la configuration Fig(5.10), huit conducteurs ont été rajoutés portant chacun un courant unité. Le profil du gradient est nettement amélioré. Le logiciel n'a tout de même pas trouvé de configurations annulant strictement les 35 coefficients. La Figure (5.10) est très proche de celle du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$. Le sens des courants sont simplement modifiés et les conducteurs placés à $x = 0$ sont rajoutés.

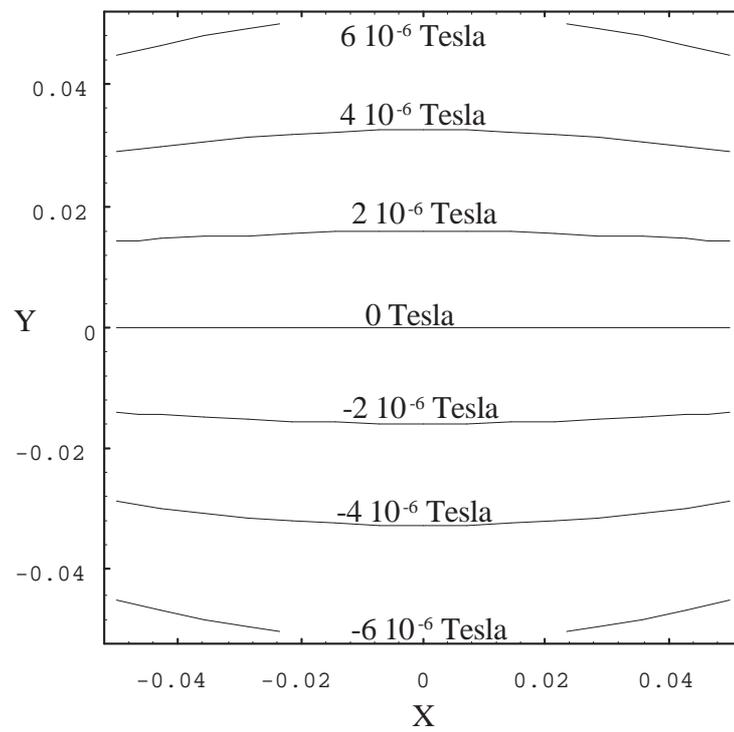


FIG. 5.9 – Tracé (I) du gradient non compensé $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ pour un courant de 1 A. $B_{31} \neq 0$, ce qui explique ce gros défaut en forme de tonneau.

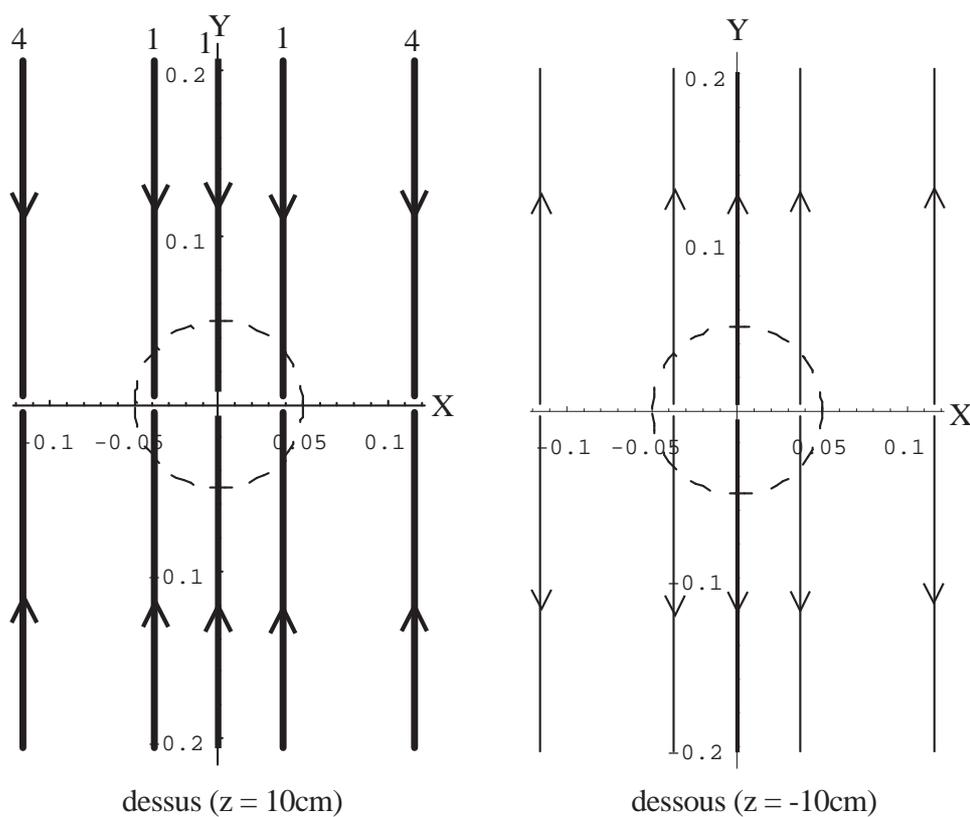


FIG. 5.10 – Configuration (II) de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial y}$

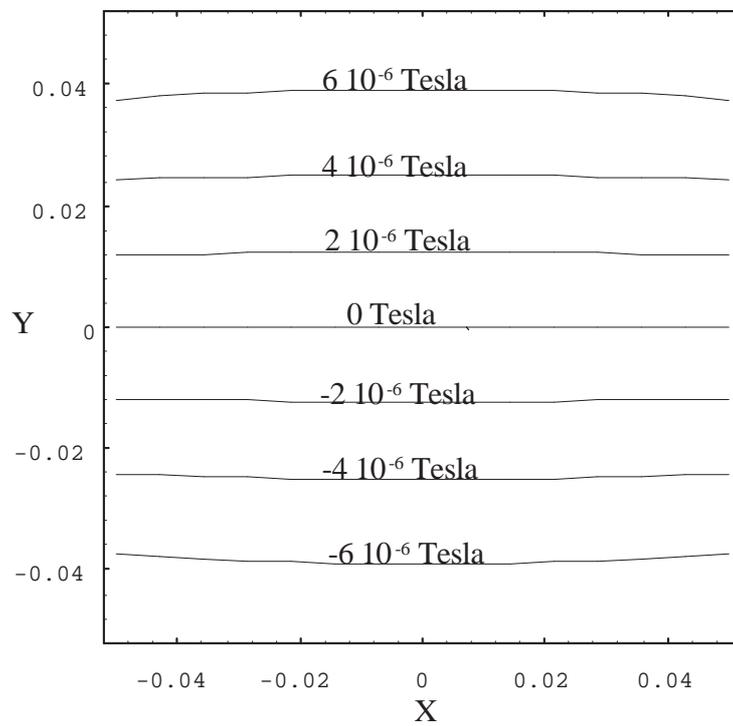


FIG. 5.11 – Tracé (II) du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ pour un courant de 1 A. Même après la compensation, c'est le gradient le plus difficile à obtenir.

5.5 Génération d'un gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial z}$

Du point de vue numérique, la recherche de cette configuration ne posa aucun problème. Le coefficient $a_{30} \sim za_{20}$ est plus facile à annuler que a_{20} dans le cas du champ homogène vu le facteur 3 appliqué au terme en r^2 . Il n'est donc pas nécessaire de renforcer la densité de courant à la périphérie de la plaque. Toutefois il semble que le nombre de conducteurs ne peut être diminué, de ce fait le nombre de degrés de liberté est égal au nombre d'équations. La linéarité du gradient est excellente car l'erreur résiduelle faite sur l'annulation des coefficients est inférieure à 10^{-12} .

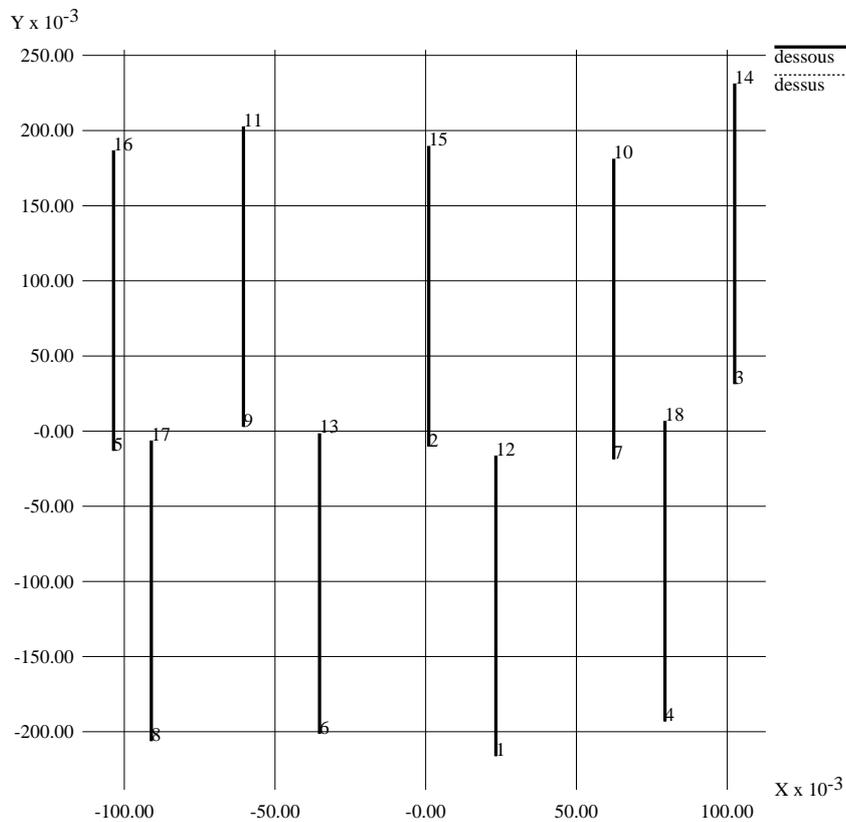


FIG. 5.12 – Configuration de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$. Les conducteurs haut et bas sont parfaitement superposés et les courants sont dans le même sens. Le gradient est de $8 \cdot 10^{-5}$ Tesla/m pour un courant de 1 A.

réf	plan ($z=\pm 0.1\text{m}$)	x (m)	y (m)	intensité relative
1/12	haut/bas	2.327160e-02	-2.162440e-01	1
2/15	haut/bas	1.028740e-03	-1.020940e-02	1
3/14	haut/bas	1.025250e-01	3.133280e-02	1
4/18	haut/bas	7.939740e-02	-1.931820e-01	1
5/16	haut/bas	-1.035660e-01	-1.312850e-02	1
6/13	haut/bas	-3.520900e-02	-2.014650e-01	1
7/10	haut/bas	6.240620e-02	-1.876790e-02	1
8/17	haut/bas	-9.102770e-02	-2.062440e-01	1
9/11	haut/bas	-6.046200e-02	2.825180e-03	1

TAB. 5.3 – Position des fils pour un gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$.

Ce gradient peut être considéré comme une référence. Nous constatons sa qualité sur la carte de champ.

5.6 Arcs de retour

Les arcs de retour ne posent aucune difficulté du point de vue numérique, en revanche ils augmentent substantiellement les dimensions des générateurs et l'inductance du système. Dans tous les cas, ils apparaissent gênants.

Afin de démontrer la possibilité de générer des profils de champ à partir de segments de droite, nous avons considéré un seul conducteur rectiligne. L'évaluation de la contribution de l'arc de retour est néanmoins nécessaire, les lignes de courant étant fermées. Il est toujours possible d'éloigner à l'infini cet arc et négliger son effet, mais dans ce cas l'inductance du circuit augmente. A l'opposé si l'arc de retour est trop près de la zone d'intérêt, l'efficacité énergétique du système peut être dégradée.

Le programme initial ne calcule pas les contributions des arcs de retour car suivant les profils (voir le gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$), nous pouvons relier ensemble les fils symétriques et de sens de courant opposé. C'est plutôt lors d'une étude particulière qu'il sera nécessaire de les ajouter ou non.

Pour illustrer la faisabilité du calcul des arcs de retour, nous avons choisi de les intégrer à la configuration du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$. Ils sont d'une part mécaniquement nécessaire car les courants sont tous dans le même sens. D'autre part cette configuration est très précise, il est donc aisé de comparer la contribution des arcs.

Dans un premier temps nous avons ajouté les arcs de retour sans modifier

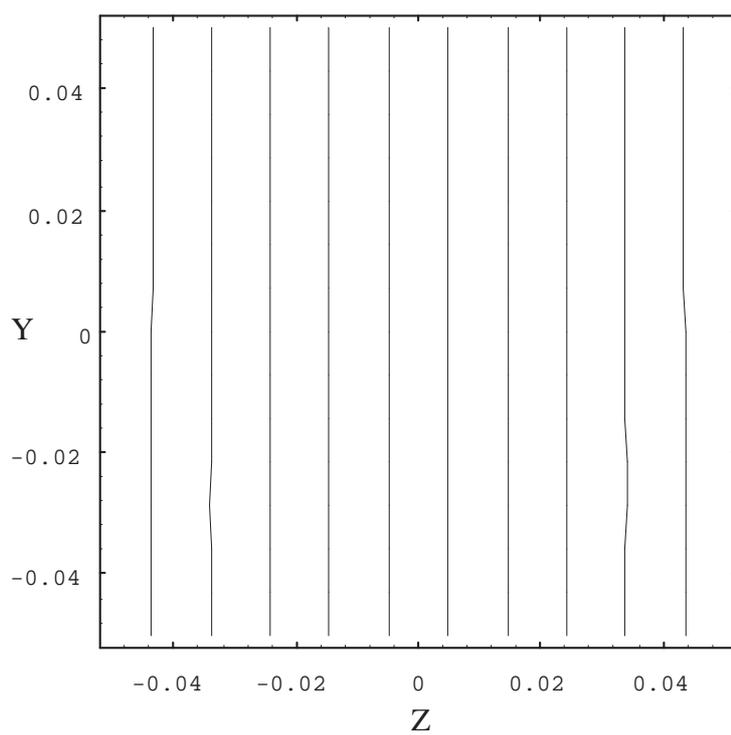


FIG. 5.13 – Tracé du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ pour un courant de 1 A. Les éventuels défauts sur la figure sont issues du format d'impression. La linéarité est dans ce cas particulièrement bonne.

la position des conducteurs. Il apparaît que l'erreur commise sur le profil est de l'ordre de 1%. En revanche cela n'est pas vérifié sur tous les profils car celui du champ homogène devient complètement faux. Toutefois pour respecter la très grande précision des profils, nous avons recalculé une nouvelle configuration en tenant compte des arcs de retour.

Nous avons formé des spires rectangulaires, tout en maintenant le bord extérieur suivant l'axe \vec{x} à ± 20 cm. Cette valeur arbitraire a été choisie car, de cette façon, les plaques sont sensiblement carrées. Sur la Figure (5.14), nous n'avons mentionné que quelques arcs de retour par souci de clarté. La valeur du gradient est de 8.10^{-5} Tesla/m pour un courant de 1 A et les autres coefficients sont parfaitement annulés. Nous pouvons donc nous reporter à la carte de champ précédente Figure (5.13). Les arcs de retour se déplacent suivant l'ordonnée correspondant à leur arc actif. On pourra donc souligner le fait que nous ne disposons pas de variables supplémentaires car les arcs de retour font partie intégrante de l'arc actif puisque nous avons volontairement décidé de figer l'abscisse.

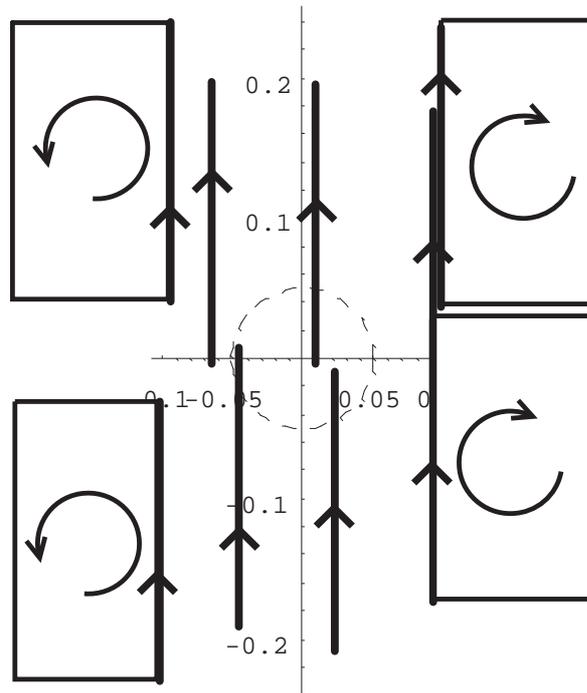


FIG. 5.14 – Configuration de gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ avec arcs de retour (certains seulement sont représentés).

plan ($z=\pm 0.1\text{m}$)	x (m)	y (m)	intensité relative
haut/bas	2.181870e-02	-2.095720e-01	1
haut/bas	8.933420e-03	-4.407990e-03	1
haut/bas	9.891050e-02	3.627250e-02	1
haut/bas	9.164390e-02	-1.735700e-01	1
haut/bas	-9.325290e-02	3.971330e-02	1
haut/bas	-4.403900e-02	-1.918690e-01	1
haut/bas	9.319660e-02	-2.408020e-02	1
haut/bas	-1.015300e-01	-2.298690e-01	1
haut/bas	-6.335610e-02	-3.737180e-03	1

TAB. 5.4 – Position des fils pour un gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ avec arcs de retour.

5.7 Génération d'un champ sinusoidal

Pour prouver la versatilité de la méthode, il est intéressant d'étudier des profils moins standards. Suite aux 4 configurations précédentes, nous allons créer un champ dont la variation sera sinusoidale suivant l'axe \vec{x} et si possible homogène suivant les différents plans YZ . Ce profil est souvent retrouvé dans les tubes à ondes progressives et les lasers à électrons libres. La période spatiale détermine alors la fréquence de l'onde émise. Dans notre cas, nous avons choisi une période spatiale égale à 20 cm (= à l'écart entre plaques). Le logiciel a fourni la configuration Fig(5.15), les courants sont tous unitaires. Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas d'arcs de retour puisque nous pouvons relier les fils symétriques et de courant opposé.

Théoriquement, nous n'avons pas la possibilité de contrôler le profil d'un champ en dehors de la sphère de rayon 5 cm (la moitié du rayon des générateurs). Pourtant nous avons pu étendre la zone suivant l'axe \vec{x} jusqu'à ± 10 cm. Les harmoniques supérieurs à 5 restent faibles si l'on ne s'approche pas des conducteurs. Toutefois suivant les axes \vec{y} et \vec{z} , les contraintes restent identiques aux configurations précédentes. La zone utile est donc approximativement cylindrique. Il apparaît sur cet exemple que le coefficient A_{33} ne peut être parfaitement maîtrisé tout comme l'a été le coefficient A_{20} pour la réalisation du champ homogène. Ceci est identifié par la légère courbe suivant l'axe \vec{y} à $x = \pm 10\text{cm}$, Figure(5.16). Ce cas est certainement plus destiné aux fonctions de Bessel. Comme il s'agit d'un champ sinusoidal spatial avec a priori plusieurs périodes sur des exemples concrets, il est préférable de contrôler la qualité du champ sur toute la zone plutôt que d'éloigner l'erreur du centre vers les bords.

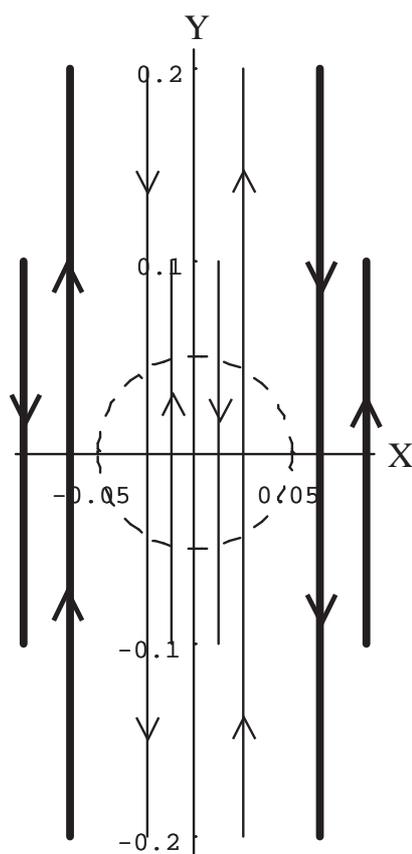


FIG. 5.15 – Configuration pour un champ sinusoidal.

plan ($z=\pm 0.1\text{m}$)	x (m)	y (m)	intensité relative
bas	0.025	0.	1
bas	-0.025	0.	-1
bas	0.025	-0.2	1
bas	-0.025	-0.2	-1
bas	-0.0116	-0.1	1
bas	0.0116	-0.1	-1
haut	0.0883	-0.1	1
haut	-0.0883	-0.1	-1
haut	-0.0639	-0.2	1
haut	0.0639	-0.2	-1
haut	-0.0639	0.	1
haut	0.0639	0.	-1

TAB. 5.5 – Position des fils pour un champ sinusoidal. Les arcs de retour ne sont pas nécessaires vu la symétrie et le sens des courants.

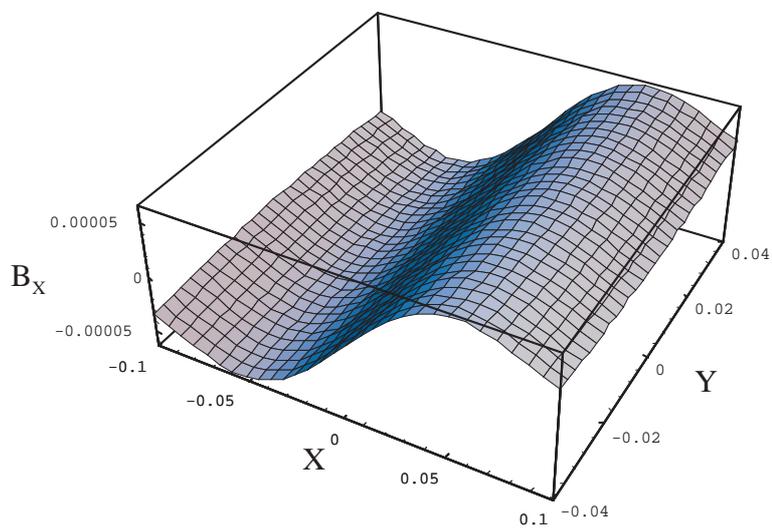


FIG. 5.16 – Tracé du champ sinusoidal pour un courant de 100 A.

Chapitre 6

Expérimentation

Pour prouver la validité de la méthode de génération de champ, nous avons expérimenté quelques configurations de champ. Il s'agit surtout de vérifier les calculs directs de champs et leur précision, car la méthode inverse ne peut pas être mise en cause. La seule erreur du calcul inverse tel que nous l'avons présenté est de ne fournir aucun résultat si la disposition physique ne permet pas de réaliser le champ demandé. Si le résultat est donné, il est particulièrement simple de vérifier la chaîne directe. Le comportement est quasiment binaire, la solution existe ou n'existe pas et dans le dernier cas quels sont les compromis à réaliser. Toutefois, pour l'aspect mécanique, il est intéressant d'évaluer les tolérances positionnelles. Si par exemple il faut une tolérance de l'ordre du micron, ce système de correction (ou de génération) sera plus difficilement réalisable.

6.1 Environnement de mesure

Chronologiquement, nous avons vérifié la génération de champ par conducteurs, car ceci se révèle expérimentalement très simple. Nous avons évidemment choisi deux plaques non conductrices et amagnétiques (bois) espacées de 20 cm et des vis en laiton. La présence de ces dernières n'est pas gênante en calcul statique mais dans le cas de commutation de champ, les courants de Foucault dans le corps des vis ne sont plus négligeables. Nous avons signalé dans l'introduction que l'environnement magnétique ou ferromagnétique était le point le plus délicat. Nous avons donc choisi un endroit pour les mesures présentant une grande homogénéité du champ terrestre et nous avons placé la sonde perpendiculairement à ce champ. Après avoir déplacé la sonde à vide dans un cube de 10x10x10cm et vérifié que la variation ne dépasse pas

le mG, nous avons mesuré le champ généré par nos configurations.

Pour fixer quelques ordres de grandeurs, le champ terrestre est approximativement de 450 mG. La perpendicularité de la sonde est donc critique. Le déplacement d'une voiture à 50 mètres de la zone génère une variation de 0.1 mG. Un trousseau de clés placées à 1 mètre produit une variation de 5mG et un petit aimant de correction produit la même variation à 40 cm. A Paris et à la date du 1er Octobre 1997, le champ magnétique terrestre a comme composantes 210,59 mG Nord, -8,45 mG Est, 422,44 mG suivant la verticale et la variation annuelle est de 0.4 mG (*d'après le National Geophysical Center Boulder, Colorado USA*). Si nous analysons ces valeurs, la plus grande valeur du champ se trouve suivant la verticale. Nous avons rencontré le problème mécanique suivant, la sonde à effet Hall placée au bout d'un bras ne reste pas perpendiculaire au champ vertical terrestre. Car suivant la position de la sonde, la flèche mécanique varie et entraîne une variation de 5 mG. Un montage de mesure plus robuste est donc nécessaire.

6.2 Mesure du gradient a_{11} version I

Le coefficient a_{11} représente le gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$. Nous avons appliqué un courant de 350 mA afin que le fil ne chauffe pas. La résistance ohmique du cuivre variant avec la température, nous avons enregistré une dérive du champ en utilisant une alimentation stabilisée en tension et un fort courant. Ceci n'est pas gênant avec l'utilisation d'une alimentation stabilisée en courant, mais nous n'en disposons pas pour des courants inférieurs à un ampère. Nous avons donc choisi de limiter l'effet joule.

Nous pensons avoir respecté une tolérance positionnelle de l'ordre du mm. Nous avons aussi déplacé les fils en jouant sur leur élasticité et nous n'avons pas enregistré de variation significative. Ceci est donc une constatation rassurante quant à la faisabilité du système en accord avec le calcul numérique de la tolérance positionnelle évaluée à +/- 1 mm.

Nous avons donc mesuré un gradient répondant aux caractéristiques choisies, il subsiste toutefois quelques erreurs de mesures de l'ordre du mG essentiellement due à une pollution magnétique. L'homogénéité suivant les autres axes est excellente, le gaussmètre ne nous a pas fourni d'écart significatif. L'inductance mesurée est de $13\mu H$ pour une valeur de gradient de 677 mG/m/A. Les dimensions du système sont données page 67.

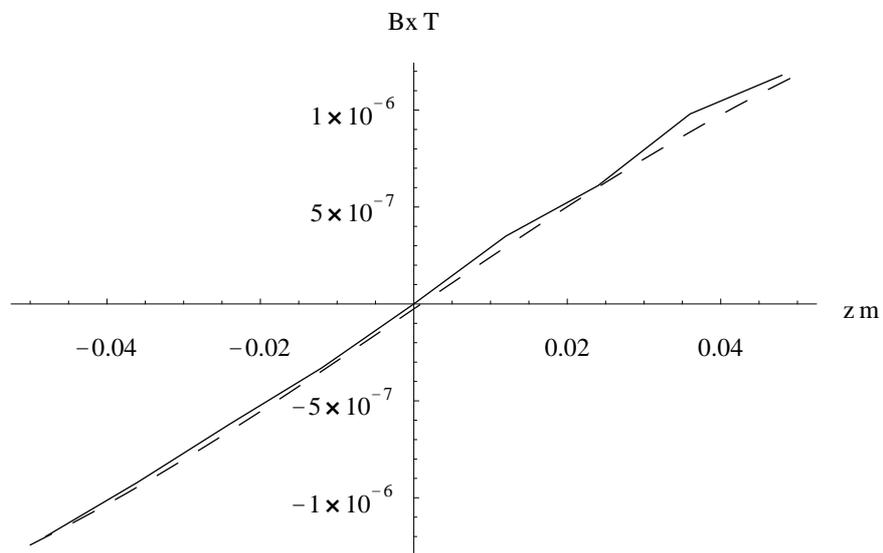


FIG. 6.1 – Courbe réelle et courbe théorique en pointillé du gradient a_{11} version I. Les erreurs sont dues à la rigidité imparfaite du système de mesure. L'homogénéité suivant les autres axes est excellente.

6.3 Mesure du gradient a_{11} version II

Le rapport des courants extérieurs intérieurs est de 4. Nous pouvons donc attendre une augmentation de l'inductance par rapport au premier gradient (rapport de 2), toutefois l'efficacité va aussi augmenter. Nous analyserons donc plus finement les avantages et inconvénients de ces deux structures.

Ce gradient a été mesuré et nous avons remarqué sa très grande linéarité. Il ne nous a pas été possible de détecter le moindre défaut par rapport aux courbes théoriques. C'est donc un gradient qui mérite d'être retenu pour des applications futures.

Nous avons mesuré une inductance de $48\mu H$ pour une valeur de gradient de 1710 mG/m/A , ce qui est donc très intéressant car l'inductance est faible. Pour comparer avec la première configuration de gradient a_{11} , le gradient II est 2.5 fois plus important. Nous devons donc au moins doubler la première configuration pour obtenir la même valeur de champ, l'inductance va alors augmenter¹ au minimum de n et au maximum de n^2 .

6.4 Validation de la cage d'aimants

Nous avons tout d'abord mesuré la valeur du champ rémanent de chaque aimant suivant les conditions citées page 19. Puis nous avons comparé une carte de champ générée par la cage d'aimants et son modèle théorique. Les différences relevées sont en accord avec la précision nécessaire. Le calcul direct est donc une preuve suffisante lors de la validation d'une configuration trouvée par le calcul inverse. Nous rappelons que dans le cas de la cage, le calcul direct n'est pas coûteux car il s'agit de formules en arctan et dans le cas de tronçons de fils, le calcul est issu de la loi de Biot et Savart et est complètement analytique.

Nous avons réalisé deux configurations, la première où tous les aimants sont dans le même sens et placés à $z = 0$ et la deuxième où un aimant sur deux est inversé. Comme le nombre d'aimants est impair et vu les disparité des valeurs de champ rémanent, sur l'axe \vec{z} , nous devons retrouver une forme équivalente à un seul aimant placé à $z = 0$. La première configuration donne un champ central de 2,2 Gauss, le champ terrestre n'est donc pas gênant dans

1. Cette considération est empirique, le calcul des inductances est toujours très difficile à réaliser. Toutefois si nous doublons une structure, l'inductance sera au moins multipliée par deux car le flux est deux fois plus fort. Mais au maximum elle atteindra un facteur de 4, le couplage entre spires n'est pas égal à l'unité car chaque spire ne voit qu'une partie du flux des autres spires.

le cas d'un défaut de perpendicularité de la sonde. En revanche la deuxième configuration est plus difficile à mesurer car la valeur du champ central est de 50 mG. Nous constatons alors sur la Figure (6.2) un défaut de positionnement de la sonde à $z = 0.05m$.

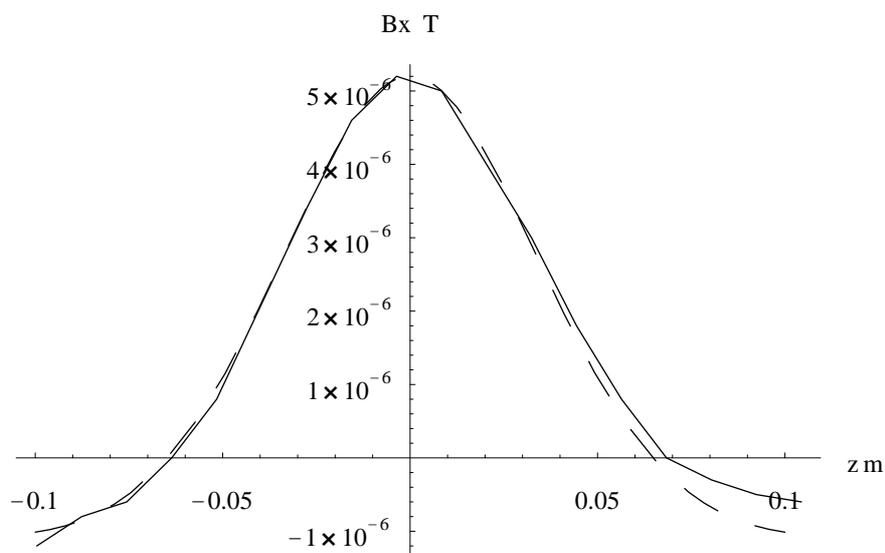


FIG. 6.2 – Courbe réelle et courbe théorique en pointillé de la cage d'aimants. Les erreurs de mesures sont du même type que celles vues sur les gradients, la faible rigidité du système de mesure est certainement en cause.

Conclusion

Nous avons présenté une alternative en utilisant les fonctions de Bessel. Il existe aussi une méthode approchante, l'utilisation du développement de Fourier-Bessel du champ magnétique. Pour un profil de champ déterminé, il s'agit de retrouver une distribution de courant surfacique portée par un cylindre ou un plan[46]. Sur ce principe les publications [53][7][47] montrent des réalisations de gradients, de générateurs de champ homogènes, etc...

Au titre de la comparaison l'article [32] montre une série de gradients et les profils isovaleurs (sensés représenter une suite de lignes parallèles dans le cas de gradients). Outre la complexité des lignes de courants, nous avons gagné un facteur 100 en précision de gradient pour une inductance plus faible que celle présentée dans l'article. Nous n'avons donc pas trouvé d'inconvénient à notre structure.

Mais cette comparaison ne doit pas être faite de la sorte. Car comme nous l'avons signalé au début du document, il s'agit du choix de la localisation de l'erreur. Les méthodes issues du développement en série de Taylor sont très précises au centre mais si la troncature de la série est à n , l'erreur est en r^{n+1} . En s'écartant du centre, l'erreur devient subitement très importante. En revanche les articles utilisant les fonctions de Fourier-Bessel assurent une plus grande zone utile mais l'erreur est plus importante dans cette région.

Le concept d'une densité de courant nous paraît tout de même, dans le cas de profils précis, assez hasardeux. Car au moment de la réalisation, il faut approximer cette densité par une série de conducteurs. Si le pas d'échantillonnage est petit, la précision sera plus élevée mais le nombre de conducteurs aussi. L'inductance peut alors atteindre des valeurs prohibitives. La démarche inverse est à l'insu de la précision. Il se trouve que les articles utilisant cette techniques sont confrontés au problème du choix de l'échantillonnage et de l'apodisation[32] [8].

Il existe aussi des méthodes très intéressantes fondées d'une part sur les réseaux de neurones et d'autre part les algorithmes génétiques. L'application au calcul inverse des champs électromagnétiques se justifie vis à vis de la

complexité des inversions. Ces deux méthodes sont par essence génériques. Sur des problèmes réputés non solvables, ces techniques ont donné de très bons résultats.

Les réseaux de neurones programmés sur ordinateur simulent le comportement de leurs homologues naturels. Après un apprentissage parfois très long, les liaisons (e.q. synapses) sont calibrées sous forme de calcul des coefficients. Ceux-ci modulent plus ou moins le signal issu du neurone précédent vers le neurone suivant. La simulation des fonctions logiques aussi complexes soient-elles sont des problèmes triviaux en réseaux de neurones. Une fois le réseau calibré, le temps de calcul d'une réponse est très rapide d'où son utilité grandissante dans le domaine du temps réel.

L'article [3] propose d'apprendre au réseau de neurones où placer des sources en fonction du champ qu'elles génèrent. L'apprentissage est simple, on choisit un grand nombre de positions de sources choisies aléatoirement dans l'espace et on fournit par un calcul direct le champ magnétique correspondant au réseau de neurones. Donc durant la phase d'apprentissage, en entrée du réseau, on fournit les caractéristiques du champ et en sortie la position des sources. Un algorithme classique utilisé pour le calcul des coefficients synaptiques est la rétropropagation de l'erreur. Après l'initialisation, le fait extraordinaire est que le réseau est capable de donner une position de sources à peu près cohérente même si le champ entré n'est pas dans le domaine d'apprentissage. C'est d'ailleurs l'intérêt premier des problèmes inverses, d'autres applications exploitent plutôt la fonction de mémorisation de l'apprentissage. Même si la précision n'a actuellement rien à voir avec celle nécessaire à nos applications, c'est une méthode très prometteuse.

Les algorithmes génétiques quant à eux fonctionnent très différemment. Ils sont utilisés dans les problèmes NP complets, c'est à dire à explosion combinatoire. Si l'espace de recherche est absolument gigantesque, comme la recherche exhaustive de toutes les positions valides du jeu d'échecs (supérieures au nombre de particules dans l'univers), ils trouvent leur intérêt en sélectionnant très rapidement les combinaisons "localement gagnantes". Telle que la Nature opère une sélection naturelle des hélices d'ADN viables, les algorithmes ont à leur disposition la possibilité de multiplier, détruire ou de muter les combinaisons les plus significatives du problème. Ils effectuent ces opérations avec une probabilité donnée.

Dans le domaine de la synthèse de champ, nous avons un critère de probabilité énoncé à la page 48 concernant la recherche des positions qui statistiquement se trouvent de plus en plus proche de la solution. Nous avons choisi une méthode purement numérique afin de diminuer considérablement le nombre de vecteurs aléatoires. Mais il est aussi possible de faire ce choix

parmi cet espace à l'aide des algorithmes génétiques. C'est encore une méthode qui laisse l'ordinateur chercher seul une solution à partir d'une loi "locale". Celle-ci peut être dans le cas de la cage d'aimants, le choix des aimants à déplacer à l'étape n . Puis en fonction des meilleures configurations, cette loi peut croiser les positions (cross-over). Cependant, nous doutons de l'efficacité dans ce cas précis de la méthode, car en bougeant un seul aimant toutes les autres positions doivent être retouchées. C'est donc un problème fortement couplé. Il apparaît donc que mélanger deux parties des deux configurations les plus significatives n'a aucune chance de donner une configuration plus performante. En revanche, les problèmes faiblement couplés donnent de très bons résultats.

Nous avons donc montré la possibilité de créer une grande variété de champs magnétiques dans un volume donné. L'utilisation du développement du potentiel en polynômes de Legendre est bien adapté si l'on recherche une grande précision d'un profil limité dans l'espace. Toutefois il est impératif d'utiliser un algorithme performant de recherche de racines. Pour appréhender correctement la méthode d'inversion choisie, nous avons expliqué la résolution d'un problème simple en deux et trois dimensions. Ceci permet la représentation graphique des équations.

Dans un premier temps, nous avons créé un champ fictif à partir de générateurs puis nous avons inversé le problème. Sachant qu'au moins une solution existe, l'algorithme a été affiné jusqu'à obtenir une solution en un temps de calcul raisonnable. Nous avons remarqué que le nombre de solutions est très limité voire unitaire car nous avons toujours retrouvé la position initiale des générateurs et seulement celle-ci. L'unicité est démontrée par ailleurs [35]. Si un champ est défini dans l'espace il n'existe qu'une position de sources capable de le produire. Mais à une précision donnée plusieurs configurations peuvent être équivalentes.

La principale difficulté rencontrée lors de l'étude est la possibilité physique d'une structure déterminée à générer le profil de champ demandé. Le choix de la cage d'aimants et du seul déplacement en z ne nous prouve pas nécessairement l'existence de la solution même si celle-ci est dans le domaine de correction. Une étude mathématique du couplage entre équations dans le cas d'une structure donnée permettrait certainement de lever cette question. Pour rejoindre ce problème nous n'avons pas obtenu avec une grande précision pour tous les gradients plats. Certains coefficients posent des difficultés car nous limitons volontairement l'emplacement des sources à des zones restreintes.

Les équations composant le système sont des fractions de polynômes, il est donc possible d'inverser analytiquement ces équations et les réécrire sur

la forme d'une base de Groebner. Toutefois la mise au même dénominateur de ces fractions fournit un polynôme de degré très élevé. Si cette piste est suivie, il est impératif de poursuivre jusqu'à la base de Groebner sinon nous nous ramenons à la recherche de racines de polynômes ce que nous faisons déjà actuellement.

Bibliographie

- [1] N. N. Abdelmalek. On the solution of least squares problems and pseudo-inverses. *Computing*, 13:215–228, 1974.
- [2] Forman S. Acton. *Numerical Methods That Work*. Mathematical Association of America, 1990.
- [3] Kishimoto Sakasai Ara. Solution of electromagnetic inverse problem using combinational method of hopfield neural network and genetic algorithm. *Journal of Applied Physics*, 79:1–7, 1996.
- [4] Artley. *Fields and Configurations*. Holt, Rinehart, Winston, New York, 1965.
- [5] Saint-Jalmes Taquin Barjoux. Optimization of homogeneous electromagnetic coil systems: application to whole body nmr imaging magnets. *Review Of Scientific Instruments*, 52:1501–1508, 1981.
- [6] Bertram. On the convergence of iterative solutions of the integral magnetic field equation. *IEEE Transactions on Magnetism*, 11:928–933, 1975.
- [7] Turner Bowley. Passive screening of switched magnetic field gradients. *J Phys:Scientific Instruments*, 19:876–879, 1986.
- [8] Crozier Dodd Luescher Field Doddrell. The design of biplanar, shielded, minimum energy, or minimum power pulsed b0 coils. *MAGMA*, 3:49–55, 1995.
- [9] O Dwyer O Donnell. Choosing the relaxation parameter for the solution of nonlinear magnetic field problems by the newton-raphson method. *IEEE Transactions on Magnetism*, 31, 1995.
- [10] Durand. *Magnétostatique*. Masson, 1968.

- [11] L. Eldén. A weighted pseudoinverse, generalized singular values, and constrained least squares problems. *BIT*, 22:487–502, 1983.
- [12] D. I. Hoult F. Romeo. Magnet field profiling: Analysis and correcting coil design. *Magnetic Resonance in Medicine*, 1:44–65, 1984.
- [13] Press Vetterling Teukolsky Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.
- [14] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. JOHN WILEY & SONS, 1987.
- [15] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
- [16] Philip E. Gill, Walter Murray, and Margaret H. Wright. *Practical Optimization*. Acpress, 1981.
- [17] G. H. Golub and W. Kahan. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2:205–224, 1965.
- [18] G. H. Golub and C. Reinsch. Singular value decomposition and least squares solution. *Numerische Mathematik*, 14:403–420, 1970.
- [19] I. J. Good. Some applications of the singular decomposition of a matrix. *Technometrics*, 11, 1969.
- [20] S. J. Hammarling. The singular value decomposition in multivariate statistics. *ACM SIGNUM Newsletter*, 20:2–25, 1985.
- [21] Hawksworth. New magnet designs for mr. *Magnetic Resonance in Medicine*, 17:27–32, 1991.
- [22] Ersahin Hinks Bronskill Henkelman. Biplanar gradient coil for interventional open-concept superconducting magnet. In *Fourth ISMRM Meeting, New York, 124*, 1996.
- [23] Ersahin Hinks Bronskill Henkelman. Gradient coil design for interventional open configuration magnet with pole pieces. In *Fifth ISMRM Meeting, Vancouver, British Columbia, Canada*, 1997.
- [24] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1975.

- [25] Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2):164–168, July 1944.
- [26] Donald W. Marquardt. An algorithm for the least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 11(2):431–441, June 1963.
- [27] Labiche Taquin Momy. Correction d'un champ magnétique statique par aimants permanents. In *Numelec'97, Ecole Centrale de Lyon*, 1997.
- [28] Nakata Fujiwara Okamoto Muramatsu. Method for determining relaxation factor for modified newton-raphson method. *IEEE Transactions on Magnetism*, 29:1962–1965, 1993.
- [29] Rheinboldt Ortega. *Iterative Solution of Nonlinear Equation In Several Variables*. New York: Academic Press, 1970.
- [30] Ostrowski. *Solutions of Equations and Systems of Equations*. New York: Academic Press, 1966.
- [31] H. Feshbach P. M. Morse. *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill Book Compagny, 1953.
- [32] Martens Petropoulos Brown Andrew Morich Patrick. Insertable biplanar gradient coils for magnetic resonance imaging. *Rev Sci Instrum*, 62(11):2639–2645, 1991.
- [33] G. Peters and J. H. Wilkinson. Inverse iteration, ill-conditioned equations, and Newton's method. *SIAM Review*, 21:339–360, 1979.
- [34] Bank Rose. Parameter selection for newton-like methods applicable to non-linear partial differential equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 17:806–822, 1980.
- [35] Roubine. *Compléments d'électromagnétisme*. Ecole Supérieure d'Electricité, 1980.
- [36] Albanese Rubinacci. Numerical procedures for the solution of non linear electromagnetic problems. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28:1228–1231, 1992.
- [37] Tikhonov Samarskii. *Equations of mathematical physics*. Dover Publications, Inc, 1990.

- [38] Saint-Jalmes Darrasse Taquin Sauzade. Etudes de bobines de gradients commutés, de bobines de déplacements de champs et de bobines de correction pour imageurs de rmn. *Rapport final du contrat ANVAR, IEF Orsay*, 84460200, 1987.
- [39] Souza Vidigal Momy Taquin Sauzade. Nonlinear calculations of three-dimensional static magnetic fields. *IEEE Transactions on Magnetism*, 33:2486–2491, 1997.
- [40] Souza Vidigal Taquin Sauzade. Optimal design of a self shielded magnetic resonance imaging magnet. *Journal de Physique II*, pages 2121–2132, 1993.
- [41] M. Souza. *Etude d'un système magnétique pour IRM de grand volume et d'accès facile à la zone homogène*. PhD thesis, Université de PARIS-SUD, Centre d'Orsay, 1992.
- [42] P. N. Swarztrauber. On the spectral approximation of discrete scalar and vector functions on the sphere. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16, December 1979.
- [43] Labiche Taquin. Magnetic field profile generation software. In *Compu-mag, Rio de Janeiro*, 1997.
- [44] Torset Labiche Momy Taquin. Gradient design for an imager n.m.r with flat magnet. In *ESMRMB*, 1996.
- [45] Simkin Trowbridge. Optimizing electromagnetic devices combining direct search methods with simulated annealing. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28:1545–1548, 1992.
- [46] Turner. A target field approach to optimal coil design. *Journal of Applied Physics*, 19:L147–L151, 1986.
- [47] Turner. Gradient coil design: A review of methods. *MRI*, 11:903–920, 1993.
- [48] R. Vadovic. Magnetic field correction using magnetized shims. *IEEE Transactions On Magnetism*, 25(4):3133–3139, 1989.
- [49] J. M. Varah. On the numerical solution of ill-conditioned linear systems with applications to ill-posed problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10:257–267, 1973.

- [50] Y.Semezis V.Drivas, L.Rosenthal. *La pratique des tenseurs*. Eyrolles, 1987.
- [51] C. E. Vidigal. *Méthode de calcul de champ magnétique pour IRM avec aimant permanent et fer*. PhD thesis, Université de PARIS-SUD, Centre d'Orsay, 1992.
- [52] Nestor Sepulveda Wikswo. A numerical study of the use of magnetometers to detect hidden awes in conducting objects. *Journal of Applied Physics*, 79:2122–2135, 1996.
- [53] Yoda. Analytical design method of self-shielded planar coils. *Journal of Applied Physics*, 67:4349–4353, 1990.