LABICHE Alexandre, Université D'ORSAY (IEF/U2R2M)

Sujet: Génération de champs magnétiques statiques par courant et aimant permanent. Méthode de calcul de la synthèse de champ et réalisation de profil quelconque.

Résumé: Nous présentons une technique de synthèse de champ magnétique statique. A partir d'un profil de champ désiré, il s'agit de retrouver la position ou certaines caractéristiques de sources de champ. Comme les équations utilisées sont celles du développement du champ en $1/R$, nous pouvons étendre cette technique aux champs électrostatiques. Du point de vue numérique, c'est la recherche des racines de ces équations qui nous intéresse et non une optimisation d'une fonction de coût. Nous avons donc suivi l'heuristique générale qui veut que le nombre d'équations doit être égal au nombre d'inconnues. Les degrés de liberté du système (nombre d'aimants, déplacement en x,y des conducteurs, valeur du courant, etc...) sont donc en accord avec le nombre d'équations à résoudre. Mais ceci est vrai dans les problèmes linéaires et en aucun cas nous ne pouvons assurer une solution dans les systèmes non linéaires même si on augmente le nombre de degrés de liberté et ensuite résoudre le problème par une technique des moindres carrés. Sur ce dernier point, c'est une fonctionnelle qui va être minimisée et rien ne peut être dit a priori sur la précision des résultats.

Nous avons choisi la recherche des vraies racines de ces équations. Le système de résolution est de cette façon capable de donner quelles sont les équations qui ne peuvent pas être annulées (ou égales à une valeur fixe). En étudiant finement ce problème, certaines caractéristiques des structures de génération de champ sont nécessaires, elles sont présentées tout au long du document.

Nous commencerons donc par le calcul direct du champ magnétique généré par un aimant permanent. Ce calcul ne pose pas réellement de difficulté, il s'agit surtout d'obtenir une précision suffisante par rapport au champ réel. Cette étape permet ultérieurement de vérifier la validité d'une configuration sans avoir systématiquement besoin de réaliser une maquette. Nous verrons qu'un seul paramètre doit être déterminé expérimentalement, il s'agit du champ rémanent de chaque aimant composant la structure de correction. Nous étudierons ensuite le problème inverse qui fournira la position des aimants. C'est le sujet même de la thèse.

Dans les cas pratiques, nous pourrons soit contrôler les défauts de champs en les mesurant préalablement et ensuite générer un profil en adéquation avec le champ déjà présent, soit générer un profil simple sans tenir compte

des éventuels défauts liés à l'environnement. Nous avons traité le premier cas par une configuration d'aimants et le deuxième cas par fils conducteurs. Le calcul direct du champ généré par des conducteurs n'est pas présenté car nous utilisons la loi de Biot-Savart. La validité expérimentale est d'ailleurs aisée car il n'y a aucune approximation et le courant circulant dans les conducteurs est facilement contrôlable (à contrario de la valeur du champ rémanent des aimants).

Dans notre cas, l'imagerie par résonance magnétique à bas champ nécessite un champ de 1010 Gauss pour une fréquence de résonance de l'hydrogène à 4.3 MHz. Dans le cadre même de l'imagerie, l'homogénéité du champ magnétique statique doit être excellente. Dans notre cas l'erreur maximale dans la zone utile est de plus ou moins 10 mG (10^{-6} T). Ceci représente donc une erreur relative pour un imageur à bas champ de 10 parties par million (10 ppm pour 1010 Gauss). En comparaison, le champ magnétique terrestre sous nos latitudes est de l'ordre de 500 mG. Vu la grande homogénéité de ce champ, cela ne pose pas de difficultés majeures. En revanche, en présence de structures métalliques avoisinantes (fer à béton par exemple) le champ magnétique terrestre sera dévié localement. De ce fait, il générera à lui seul une erreur très importante dans la zone utile. Il s'agit alors de bien cartographier ces défauts afin d'avoir une référence lors de la mesure d'une configuration. Il apparait qu'un réglage à 10 mG près ne permet absolument pas de déplacer la machine et surtout pas de la tourner, une fois que celle-ci est réglée.

Dans cette étude nous considérerons que l'ajout d'aimants ou de conducteurs ne peuvent pas aimanter les structures avoisinantes et que la perméabilité magnétique est constante dans la zone de correction.

Nous avons présenté une alternative en utilisant les fonctions de Bessel. Il existe aussi une méthode approchante, l'utilisation du développement de Fourier-Bessel du champ magnétique. Pour un profil de champ déterminé, il s'agit de retrouver une distribution de courant surfacique portée par un cylindre ou un plan. Sur ce principe plusieurs publications montrent des réalisations de gradients, de générateurs de champ homogènes, etc...

Au titre de la comparaison l'article de Martens montre une série de gradients et les profils isovaleurs (sensés représenter une suite de lignes parallèles dans le cas de gradients). Outre la complexité des lignes de courants, nous avons gagné un facteur 100 en précision de gradient pour une inductance plus faible que celle présentée dans l'article. Nous n'avons donc pas trouvé d'inconvénient à notre structure.

Mais cette comparaison ne doit pas être faite de la sorte. Car comme nous l'avons signalé au début du document, il s'agit du choix de la localisation de l'erreur. Les méthodes issues du développement en série de Taylor sont très précises au centre mais si la troncature de la série est à n, l'erreur est en r^{n+1}. En s'écartant du centre, l'erreur devient subitement très importante. En revanche les articles utilisant les fonctions de Fourier-Bessel assurent une plus grande zone utile mais l'erreur est plus importante dans cette région.

Le concept d'une densité de courant nous parait tout de même, dans le cas de profils précis, assez hasardeux. Car au moment de la réalisation, il faut approximer cette densité par une série de conducteurs. Si le pas d'échantillonage est petit, la précision sera plus élevée mais le nombre de conducteurs aussi. L'inductance peut alors atteindre des valeurs prohibitives. La démarche inverse est à l'insu de la précision. Il se trouve que les articles utilisant cette techniques sont confrontés au problème du choix de l'échantillonage et de l'apodisation.

Il existe aussi des méthodes très intéressantes fondées d'une part sur les réseaux de neurones et d'autre part les algorithmes génétiques. L'application au calcul inverse des champs électromagnétiques se justifie vis à vis de la complexité des inversions. Ces deux méthodes sont par essence génériques. Sur des problèmes réputés non solvables, ces techniques ont donné de très bons résultats.

Les réseaux de neurones programmés sur ordinateur simulent le comportement de leurs homologues naturels. Après un apprentissage parfois très long, les liaisons (e.q. synapses) sont calibrées sous forme de calcul des coefficients. Ceux-ci modulent plus ou moins le signal issu du neurone précédent vers le neurone suivant. La simulation des fonctions logiques aussi complexes soient-elles sont des problèmes triviaux en réseaux de neurones. Une fois le réseau calibré, le temps de calcul d'une réponse est très rapide d'où son utilité grandissante dans le domaine du temps réel.

L'article de Kishimoto Sakasai et Ara propose d'apprendre au réseau de neurones où placer des sources en fonction du champ qu'elles génèrent. L'apprentissage est simple, on choisit un grand nombre de positions de sources choisies aléatoirement dans l'espace et on fournit par un calcul direct le champ magnétique correspondant au réseau de neurones. Donc durant la phase d'apprentissage, en entrée du réseau, on fournit les caractéristiques du champ et en sortie la position des sources. Un algorithme classique utilisé pour le calcul des coefficients synaptiques est la rétropropagation de l'erreur. Après l'initialisation, le fait extraordinaire est que le réseau est capable de donner une position de sources à peu près cohérente même si le champ entré n'est pas dans le domaine d'apprentissage. C'est d'ailleurs l'intérêt premier des problèmes inverses, d'autres applications exploitent plutôt la fonction de mémorisation de l'apprentissage. Même si la précision n'a actuellement rien à voir avec celle nécessaire à nos applications, c'est une méthode très prometteuse.

Les algorithmes génétiques quant à eux fonctionnent très différemment. Ils sont utilisés dans les problèmes NP complets, c'est à dire à explosion combinatoire. Si l'espace de recherche est absolument gigantesque, comme la recherche exhaustive de toutes les positions valides du jeu d'échecs (supérieures au nombre de particules dans l'univers), ils trouvent leur intérêt en sélectionnant très rapidement les combinaisons "localement gagnantes". Telle que la Nature opère une sélection naturelle des hélices d'ADN viables, les algorithmes ont à leur disposition la possibilité de multiplier, détruire ou de muter les combinaisons les plus significatives du problème. Ils effectuent ces opérations avec une probabilité donnée.

Dans le domaine de la synthèse de champ, nous avons un critère de probabilité concernant la recherche des positions qui statistiquement se trouvent de plus en plus proche de la solution. Nous avons choisi une méthode purement numérique afin de diminuer considérablement le nombre de vecteurs aléatoires. Mais il est aussi possible de faire ce choix parmi cet espace à l'aide des algorithmes génétiques. C'est encore une méthode qui laisse l'ordinateur chercher seul une solution à partir d'une loi "locale". Celle-ci peut être dans le cas de la cage d'aimants, le choix des aimants à déplacer à l'étape n. Puis en fonction des meilleures configurations, cette loi peut croiser les positions (cross-over). Cependant, nous doutons de l'efficacité dans ce cas précis de la méthode, car en bougeant un seul aimant toutes les autres positions doivent être retouchées. C'est donc un problème fortement couplé. Il apparaît donc que mélanger deux parties des deux configurations les plus significatives n'a aucune chance de donner une configuration plus performante. En revanche, les problèmes faiblement couplés donnent de très bons résultats.

Nous avons donc montré la possibilité de créer une grande variété de champs magnétiques dans un volume donné. L'utilisation du développement du potentiel en polynômes de Legendre est bien adapté si l'on recherche une grande précision d'un profil limité dans l'espace. Toutefois il est impératif d'utiliser un algorithme performant de recherche de racines. Pour appréhender correctement la méthode d'inversion choisie, nous avons expliqué la résolution d'un problème simple en deux et trois dimensions. Ceci permet la représentation graphique des équations.

Dans un premier temps, nous avons créé un champ fictif à partir de générateurs puis nous avons inversé le problème. Sachant qu'au moins une solution existe, l'algorithme a été affiné jusqu'au obtenir une solution en un temps de calcul raisonnable. Nous avons remarqué que le nombre de solutions est très limité voire unitaire car nous avons toujours retrouvé la position initiale des générateurs et seulement celle-ci. L'unicité est démontrée par ailleurs. Si un champ est défini dans l'espace il n'existe qu'une position de sources capable de le produire. Mais à une précision donnée plusieurs configurations peuvent être équivalentes.

La principale difficulté rencontrée lors de l'étude est la possibilité physique d'une structure déterminée à générer le profil de champ demandé. Le choix de la cage d'aimants et du seul déplacement en z ne nous prouve pas nécessairement l'existance de la solution même si celle-ci est dans le domaine de correction. Une étude mathématique du couplage entre équations dans le cas d'une structure donnée permettrait certainement de lever cette question. Pour rejoindre ce problème nous n'avons pas obtenu avec une grande précision pour tous les gradients plats. Certains coefficients posent des difficultés car nous limitons volontairement l'emplacement des sources à des zones restreintes.

Les équations composant le système sont des fractions de polynômes, il est donc possible d'inverser analytiquement ces équations et les réécrire sur la forme d'une base de Groebner. Toutefois la mise au même dénominateur de ces fractions fournit un polynôme de degré très élevé. Si cette piste est suivie, il est impératif de poursuivre jusqu'à la base de Groebner sinon nous nous ramenons à la recherche de racines de polynômes ce que nous faisons déjà actuellement.