

Contents

1	Problématique	0-0
1.1	Problèmes inverses en magnétisme	0-0
1.2	Transposable à tous les problèmes en $1/R$	0-0
1.3	Génération et correction d'un champ magnétique	0-0
2	Choix du développement de Legendre	0-0
2.1	Localisation de l'erreur	0-0
2.2	Approximation de la forme analytique par la série	0-0
2.3	Limitation à l'ordre 5	0-0
3	Mesure des coefficients	0-0
3.1	Identification des A_{nm} et B_{nm}	0-0
3.2	Obligation de prise de mesure sur une sphère	0-0
3.3	Calcul des A_{nm}, B_{nm}	0-0
3.4	Algorithme	0-0
4	Système d'équations à inverser	0-0
4.1	Identification	0-0
4.2	Possibilité d'une solution analytique	0-0
4.3	Recours à une méthode numérique	0-0
5	Cas du problème à deux et trois variables	0-0
5.1	Problème des plans tangents	0-0
6	Généralisation à n variables	0-0
7	Etude des aimants permanents	0-0
7.1	Extrait du programme CALMAG3D	0-0
7.2	Calcul cylindrique et forme analytique simple du cartésien .	0-0
7.3	Remplacement de $1/R$ par la série de Legendre	0-0
8	Correction d'un champ magnétique en RMN	0-0
8.1	Mesure préalable des défauts	0-0
8.2	Extraction des coefficients A_{nm} et B_{nm} (algorithme précédemment cité)	0-0
8.3	Génération du champ opposé aux défauts (non prise en compte de la valeur du champ final)	0-0

8.4	Choix de la cage d'aimants et du seul déplacement en z . . .	0-0
9	Expérimentation de la cage d'aimants	0-1
9.1	Influence de l'environnement	0-1
9.2	Détermination obligatoire du champ rémanent de chaque aimant	0-1
9.3	Montage d'essai	0-1
9.4	Validation de la méthode au mG près	0-1
10	Etude des conducteurs	0-1
10.1	Application quasi directe des algorithmes précédents	0-1
10.2	Choix de générateurs à configuration plane	0-1
10.3	Test sur des configurations classiques en RMN	0-1
11	Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial x}$	0-1
12	Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial y}$	0-1
13	Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial z}$	0-1
13.1	Coefficients principaux (difficile à annuler)	0-1
14	Expérimentation des gradients	0-1
14.1	Très conforme à la théorie car aucune approximation	0-1
14.2	Tolérance positionnelle de +/- 1mm pour une zone utile de 10 cm de diamètre.	0-1
14.3	Efficacité énergétique entre les gradients plats et leurs homo- logues cylindriques égale à 65%.	0-1
15	D'autres profils ...	0-1
15.1	Champ à variation sinusoidale suivant la direction x	0-1
16	Conclusion	0-1
16.1	Algorithmes bien adaptés pour les problèmes en $1/R$	0-1
16.2	Résultats expérimentaux satisfaisants.	0-1
16.3	Mise en oeuvre d'un logiciel ergonomique de placement des sources.	0-1

Génération de champs magnétiques statiques par courant et aimant permanent. Méthode de calcul de la synthèse de champ et réalisation de profil quelconque.

Alexandre LABICHE

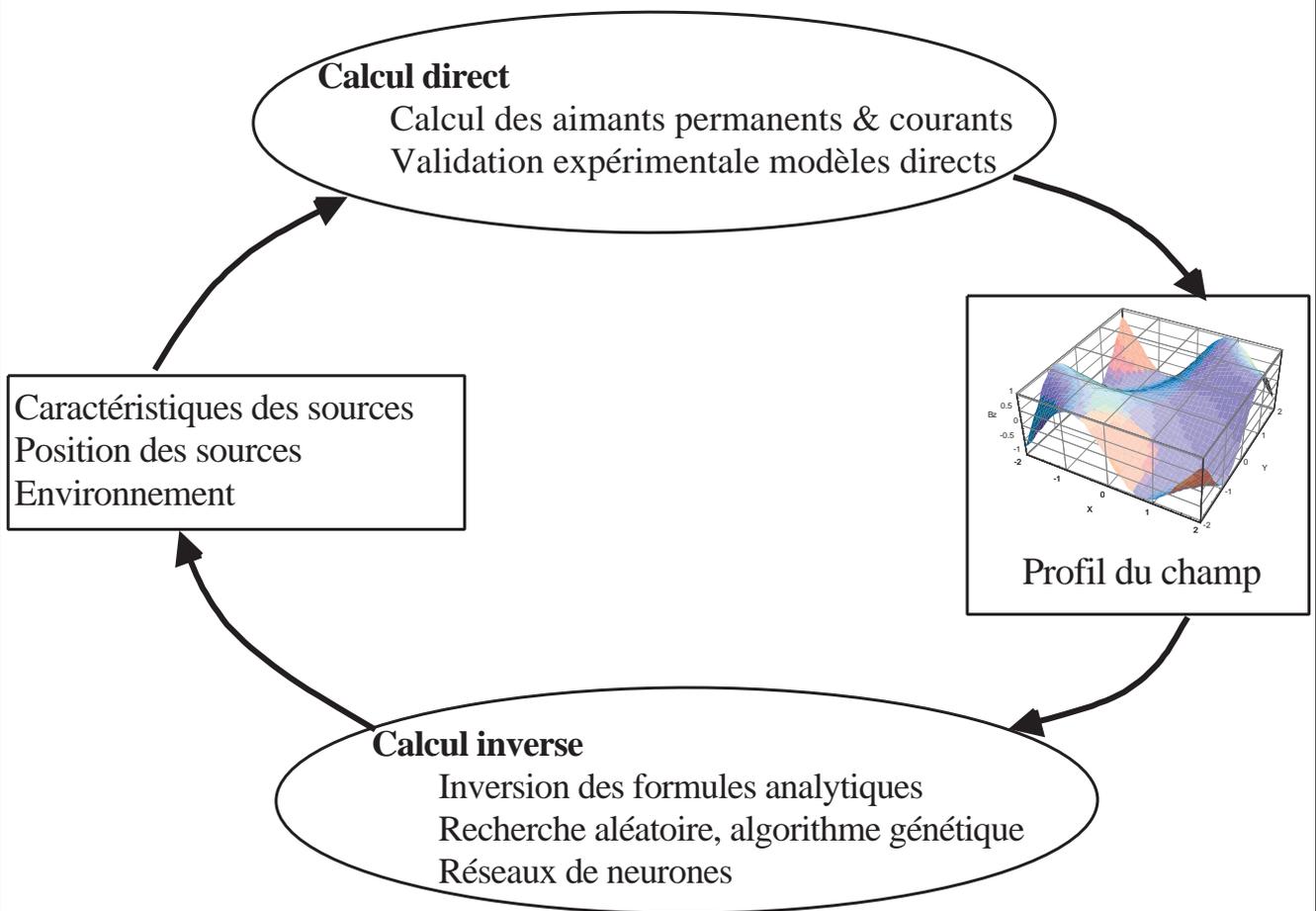
Laboratoire U2R2M - Université d'ORSAY

Sommaire:

- Problématique
- Développement de Legendre
- Mesure des coefficients
- Système d'équations à inverser
- Cas simple à deux variables
- Cas à n variables
- Application aux aimants
 - Correction d'un champ magnétique en RMN
- Application aux conducteurs
 - Génération de gradients de champs
 - D'autres profils, exemple sinusoïde
- Conclusion

1 Problématique

1.1 Problèmes inverses en magnétisme



1.2 Transposable à tous les problèmes en $1/R$

Les problèmes en $1/R$ reposent sur la solution fondamentale de l'équation de Laplace $\nabla^2\psi = 0$ en 3 dimensions. Cette équation est du type elliptique. Le problème inverse typique est celui de la prospection électrique.

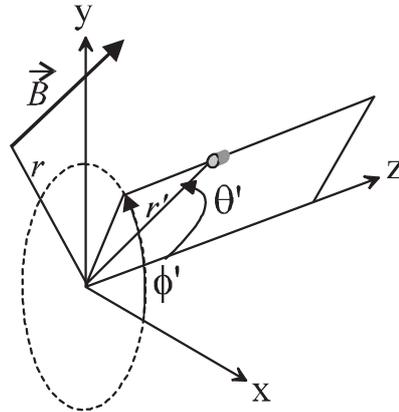
1.3 Génération et correction d'un champ magnétique

A partir de segments de conducteurs ou d'aimants permanents, nous allons calculer les caractéristiques et la position des sources afin d'obtenir tel profil de champ.

2 Choix du développement de Legendre

$$\frac{1}{\|r - r'\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta').$$

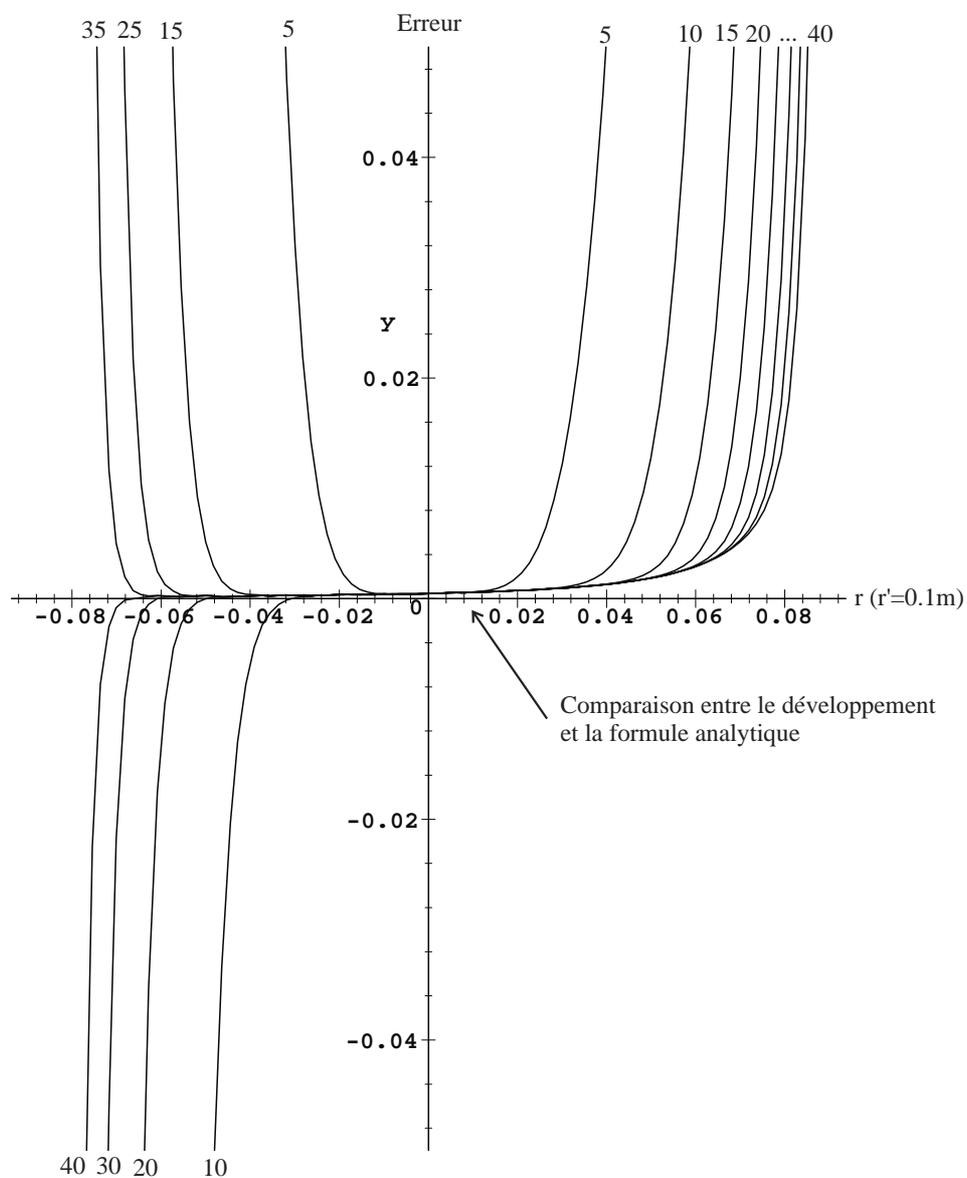
$$\cos [m(\phi - \phi')] \begin{cases} \frac{r^n}{r'^{n+1}} & \text{si } r' > r \\ \frac{r'^n}{r^{n+1}} & \text{si } r > r'. \end{cases} \quad (1)$$



2.1 Localisation de l'erreur

Ce développement est fortement relié aux séries de Taylor. La transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes montre que chaque terme de la série est un polynôme

2.2 Approximation de la forme analytique par la série



2.3 Limitation à l'ordre 5

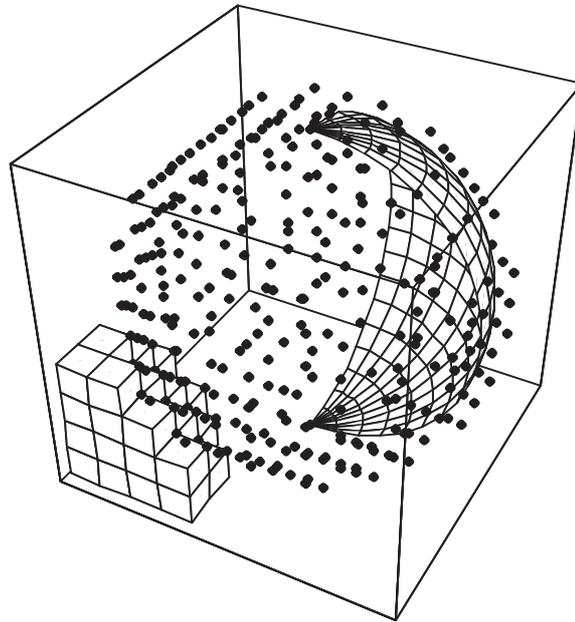
Cette limitation volontaire à l'ordre 5 représente dans un volume en 3 dimensions, 36 coefficients à déterminer.

3 Mesure des coefficients

3.1 Identification des A_{nm} et B_{nm}

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)) r^n P_{nm}(\cos \theta)$$

3.2 Obligation de prise de mesure sur une sphère



3.3 Calcul des A_{nm}, B_{nm}

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P_{nm}(\cos(\theta)) \cos(m\phi))^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}$$
$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_{nm}(\cos(\theta)) \sin(m\phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P_{nm}(\cos(\theta)) \sin(m\phi))^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}$$

3.4 Algorithme

- Entrée d'un tableau de points de mesures X_i, Y_i, Z_i et B_i

- Identification

$$x_1 + x_2 * r * P_{10}(\cos(Z_i/r)) + x_3 * r * P_{11}(\cos(Z_i/r)) \\ \cos(1 \arctan(Y_i, X_i)) + \dots = B_i$$

avec $x_1 = a_{00}, x_2 = a_{10}, x_3 = a_{11}, x_4 = b_{11}, \dots$

- Obtention d'une matrice rectangulaire

$$\begin{bmatrix} 1 & f_2(X_1, Y_1, Z_1) & f_3(X_1, Y_1, Z_1) \\ 1 & f_2(X_2, Y_2, Z_2) & f_3(X_2, Y_2, Z_2) \\ 1 & f_2(X_3, Y_3, Z_3) & f_3(X_3, Y_3, Z_3) \\ 1 & f_2(X_4, Y_4, Z_4) & f_3(X_4, Y_4, Z_4) \\ 1 & f_2(X_5, Y_5, Z_5) & f_3(X_5, Y_5, Z_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

- Si les lignes sont linéairement indépendantes donc si chacun des points de mesure est situé sur la même sphère \Rightarrow matrice pseudo-inverse de **Moore-Penrose**.

$$X = (A^T A)^{-1} . A^T . B$$

4 Système d'équations à inverser

4.1 Identification

L'équation ci-dessous permet de relier les coefficients de mesure A_{nm} , B_{nm} avec les variables r' , θ' , ϕ' .

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_{ordres}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos(m\phi) + B_{nm} \sin(m\phi)) r^n P_{nm}(\cos \theta) + \\ & - \sum_{n=0}^{N_{ordre}} \sum_{m=0}^{m=n} \epsilon_m \frac{(n-m)! P_{nm}(\cos \theta')}{(n+m)! r'^{n+1}} \cdot \\ & r^n P_{nm}(\cos \theta) [\cos(m\phi) \cos(m\phi') + \sin(m\phi) \sin(m\phi')] = 0 \end{aligned}$$

Mise en facteur et élimination des termes en r , θ , ϕ .

$$\left\{ A_{nm} - \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{nm}(\cos \theta')}{r'^{n+1}} \right]_{z_1}^{z_2} \cos(m\phi') \right\} \times P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\phi) = 0$$

et

$$\left\{ B_{nm} - \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{P_{nm}(\cos \theta')}{r'^{n+1}} \right]_{z_1}^{z_2} \sin(m\phi') \right\} \times P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\phi) = 0$$

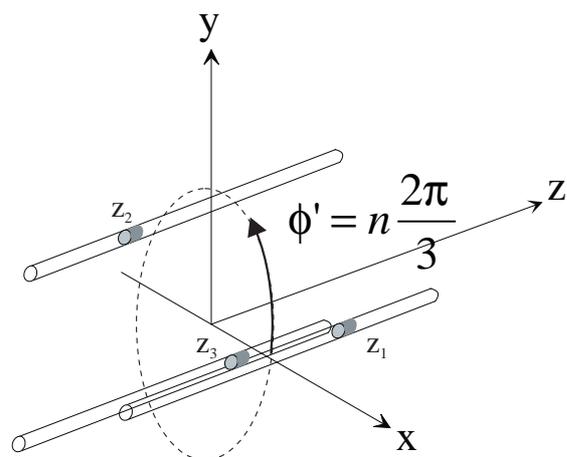
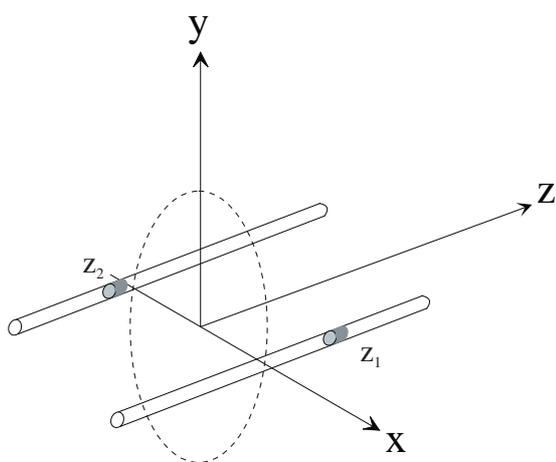
4.2 Possibilité d'une solution analytique

La transformation r', θ', ϕ' en x', y', z' ramène les équations en somme de fractions de polynômes, utilisation possible de la base de Grobner.

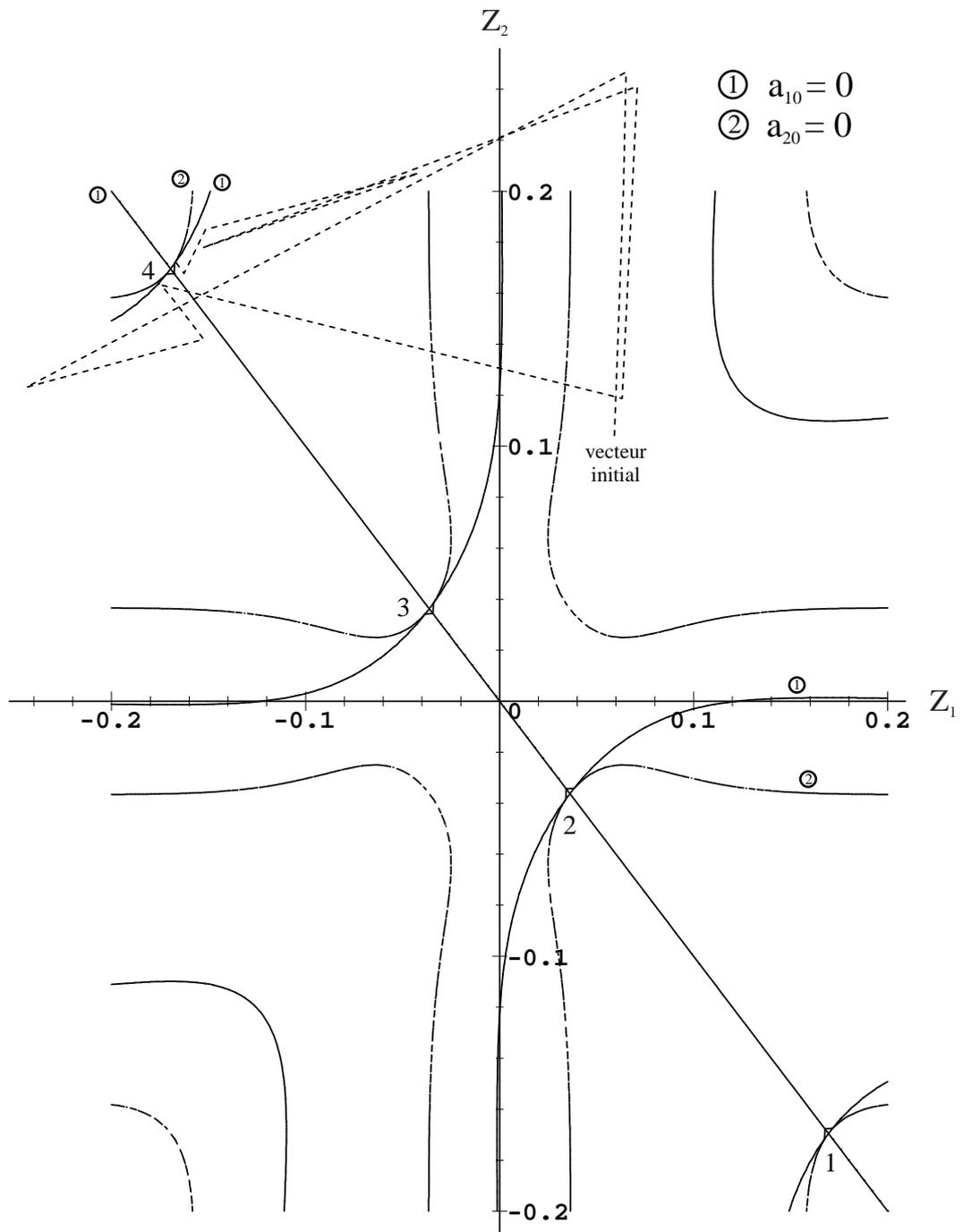
4.3 Recours à une méthode numérique

La base de Grobner n'est déterminable que pour des petits systèmes de polynômes. Vu la taille de notre problème, utilisation d'un algorithme d'inversion d'équations non linéaires.

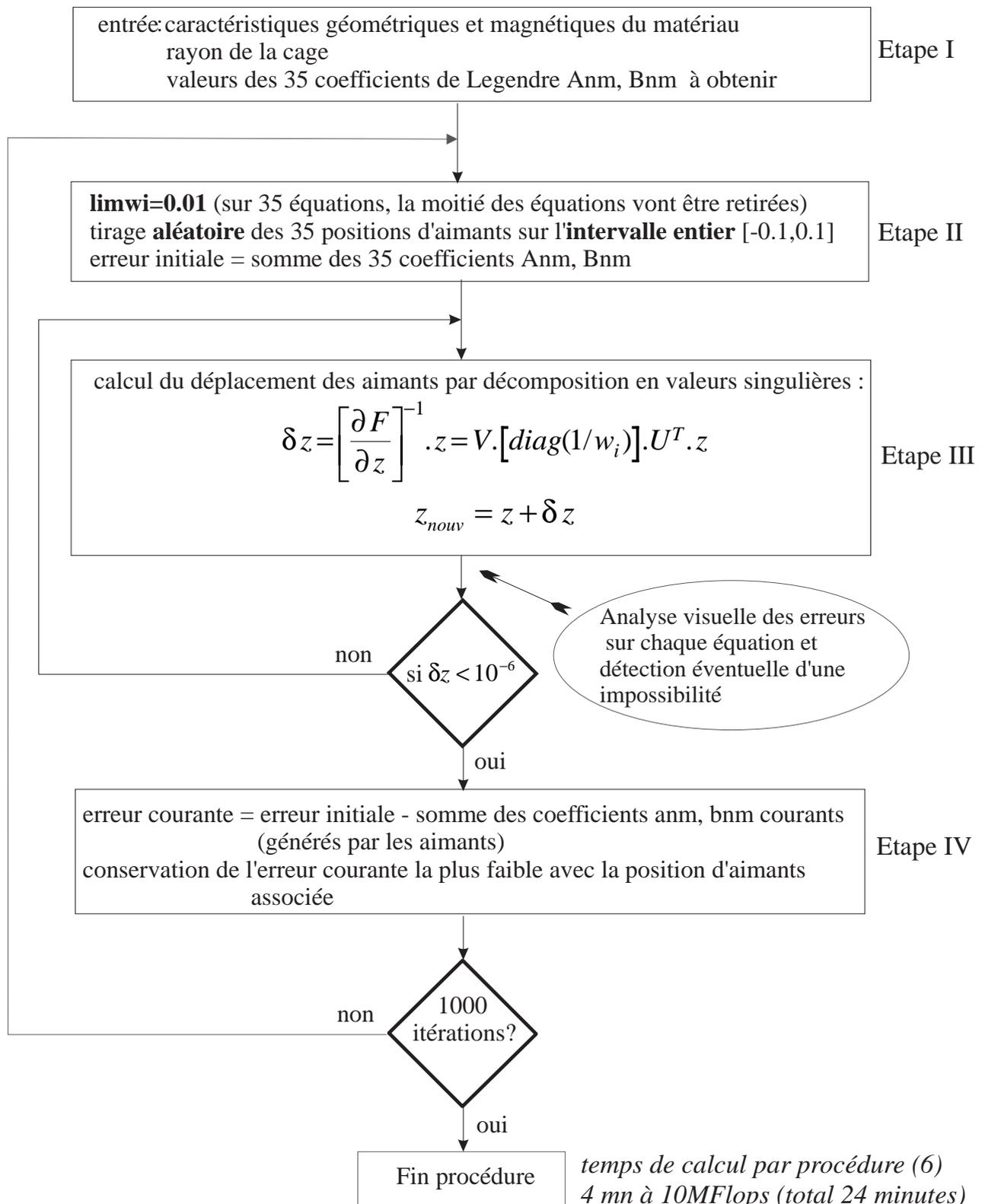
5 Cas du problème à deux et trois variables



5.1 Problème des plans tangents

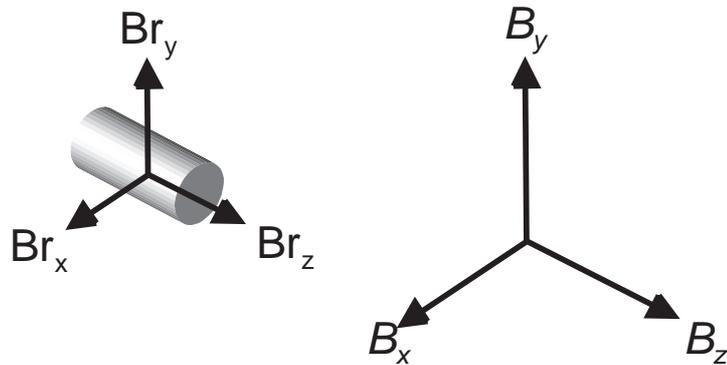


6 Généralisation à n variables

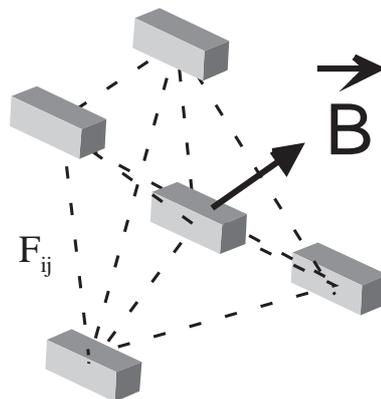


7 Etude des aimants permanents

7.1 Extrait du programme CALMAG3D

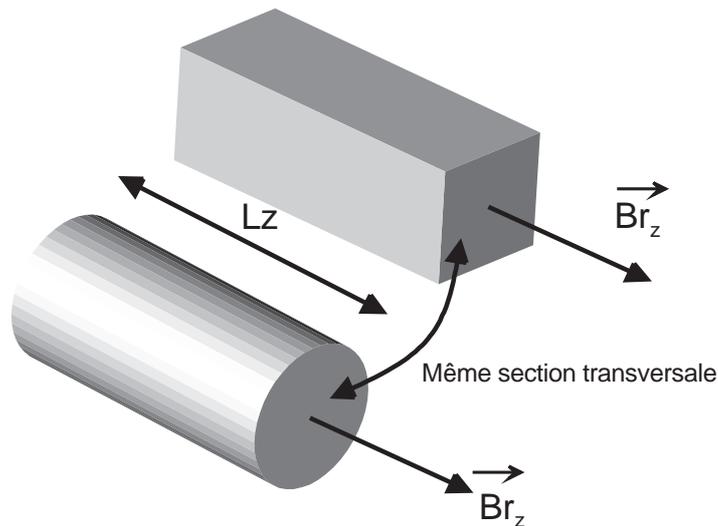


⇒ 9 relations entre les composantes du champ rémanent et les composantes du champ magnétique extérieur.



$$[B_j] = [B_{0,j}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N [F_{ij}] \cdot [M_i] - [D_j] \cdot [M_j]$$

7.2 Calcul cylindrique et forme analytique simple du cartésien



$$B_z(x, y, z) = \frac{M_z}{4\pi} \left[\arctan \left(\frac{(x - x')(y - y')}{(z - z') R} \right) \right]_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \quad (2)$$

$$\text{avec } R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

7.3 Remplacement de 1/R par la série de Legendre

$$B_z = \frac{M_z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \left[\frac{1}{R} \right]_{z_1}^{z_2} dx' dy' \quad (3)$$

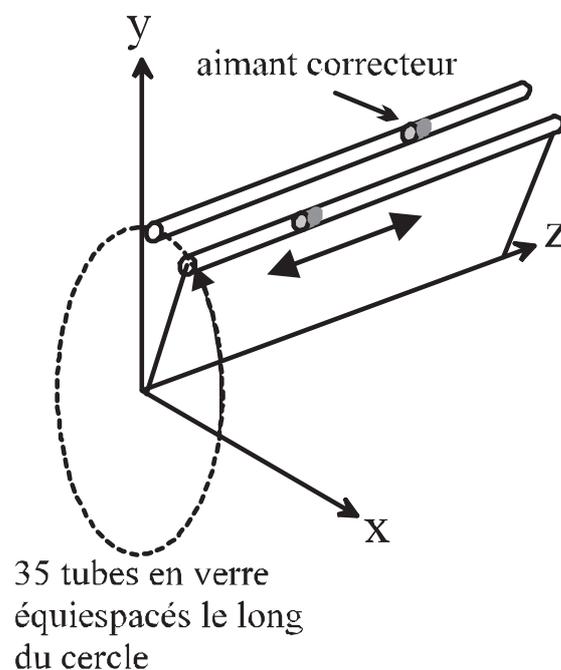
8 Correction d'un champ magnétique en RMN

8.1 Mesure préalable des défauts

8.2 Extraction des coefficients A_{nm} et B_{nm}
(algorithme précédemment cité)

8.3 Génération du champ opposé aux défauts (non prise en compte de la valeur du champ final)

8.4 Choix de la cage d'aimants et du seul déplacement en z



9 Expérimentation de la cage d'aimants

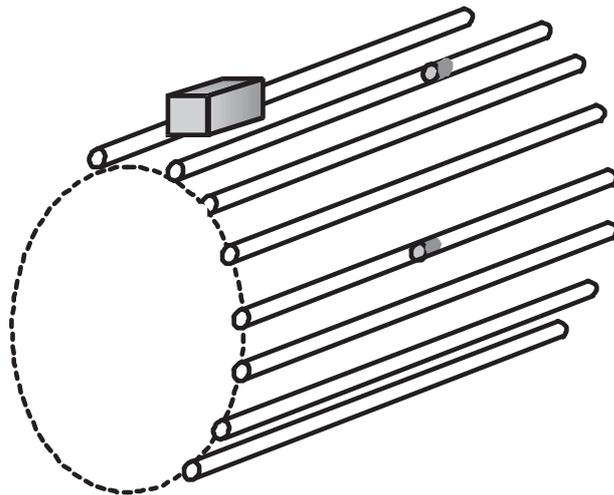
9.1 Influence de l'environnement

⇒ Grande influence du champ terrestre

9.2 Détermination obligatoire du champ rémanent de chaque aimant

⇒ Dispersion de la valeur du champ rémanent

9.3 Montage d'essai



9.4 Validation de la méthode au mG près

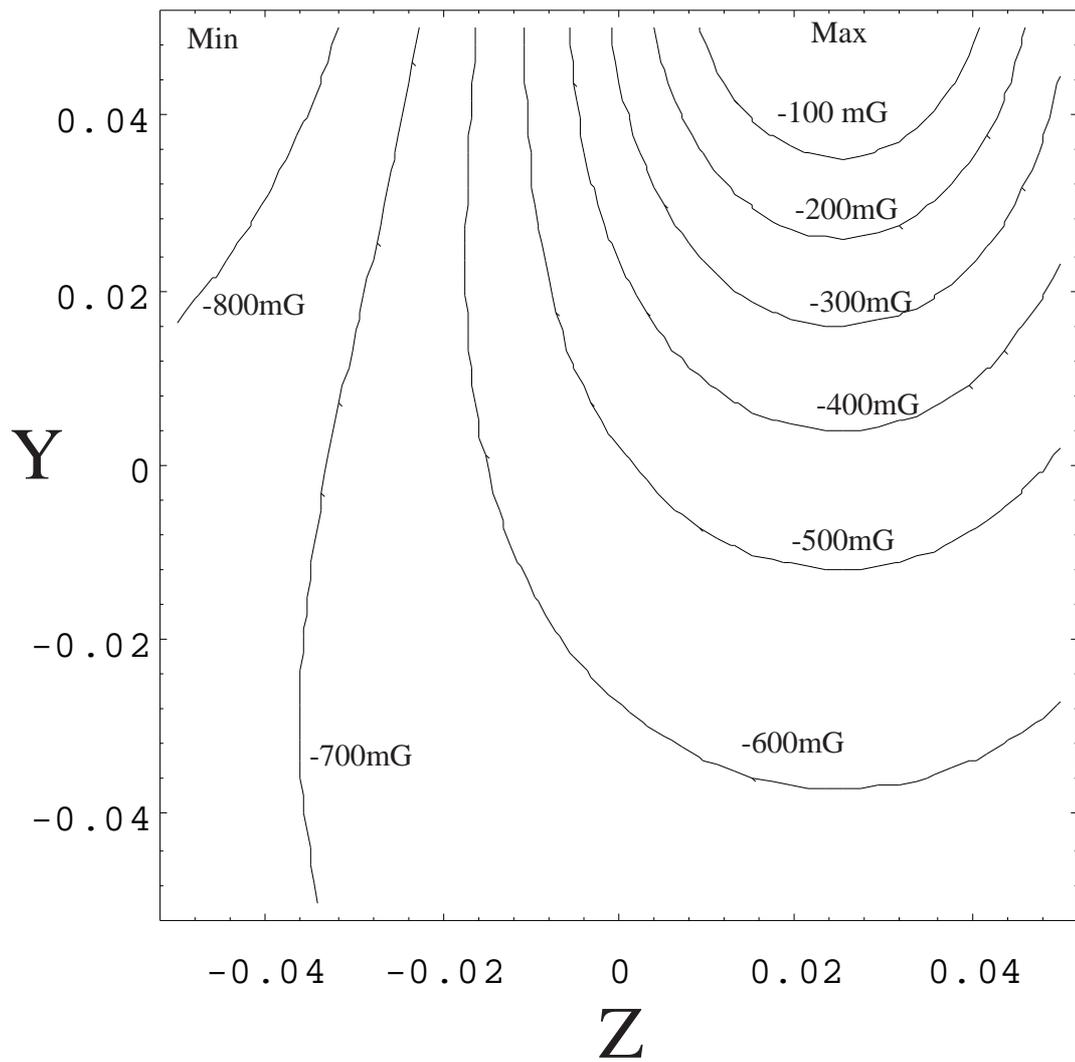


Figure 1: Courbe de niveau du champ initial

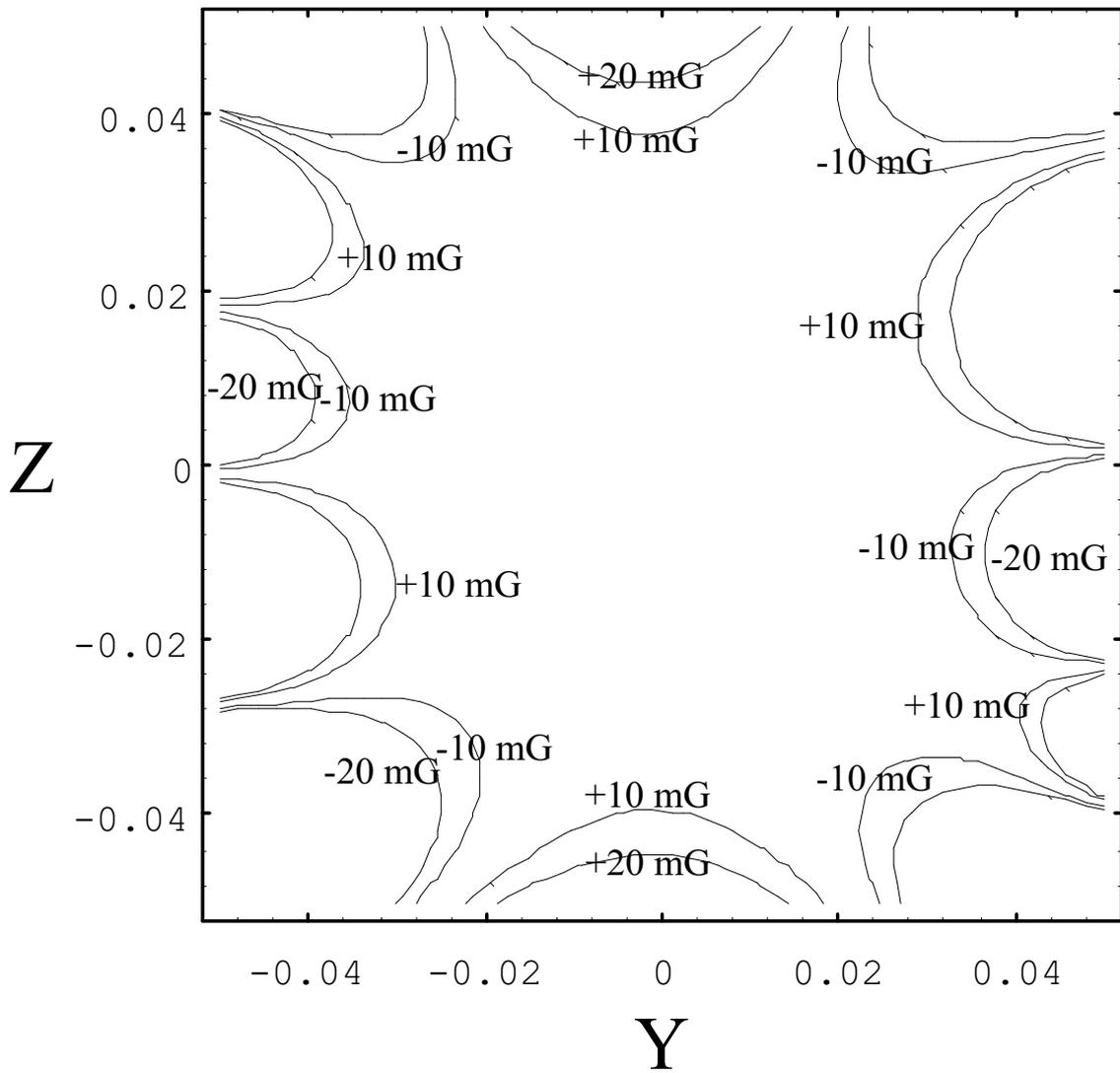


Figure 2: Courbe de niveau du champ corrigé (6ème ordre apparent)

10 Etude des conducteurs

10.1 Application quasi directe des algorithmes précédents

10.2 Choix de générateurs à configuration plane

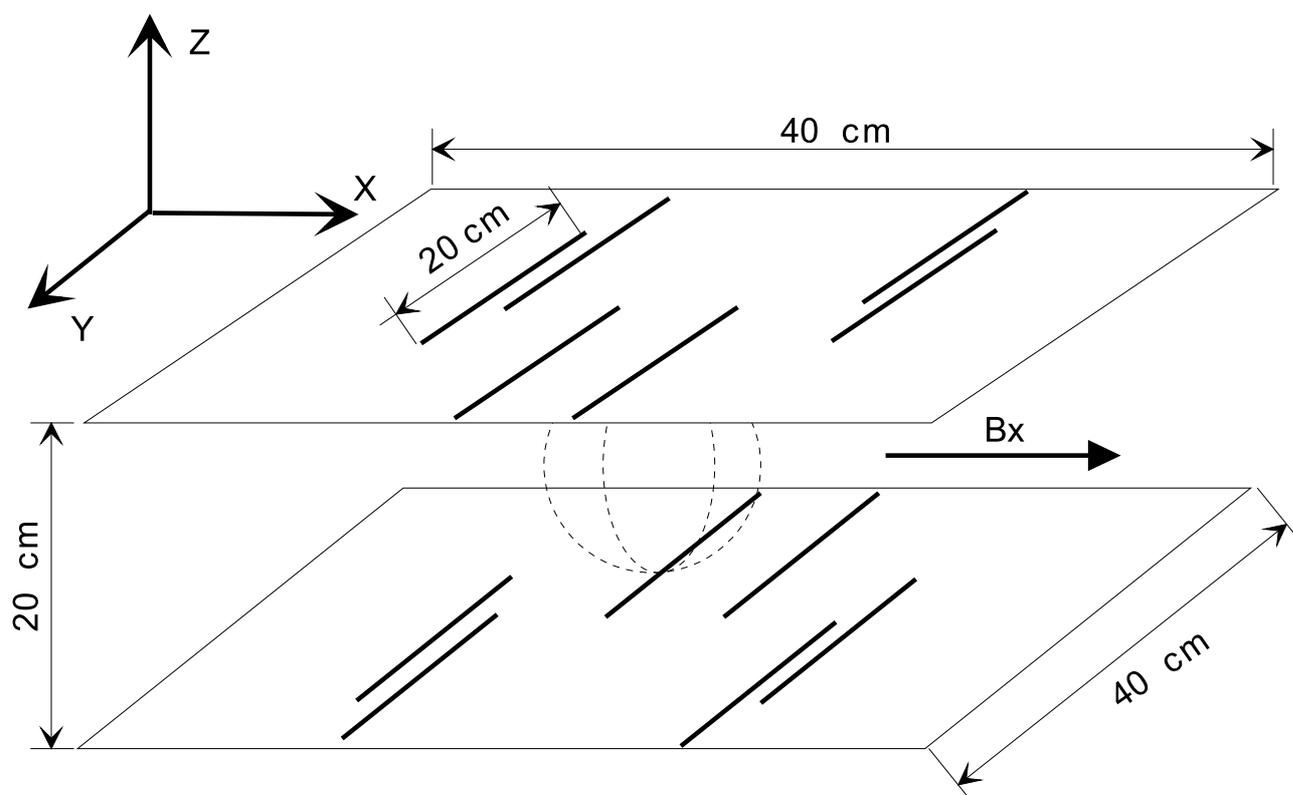
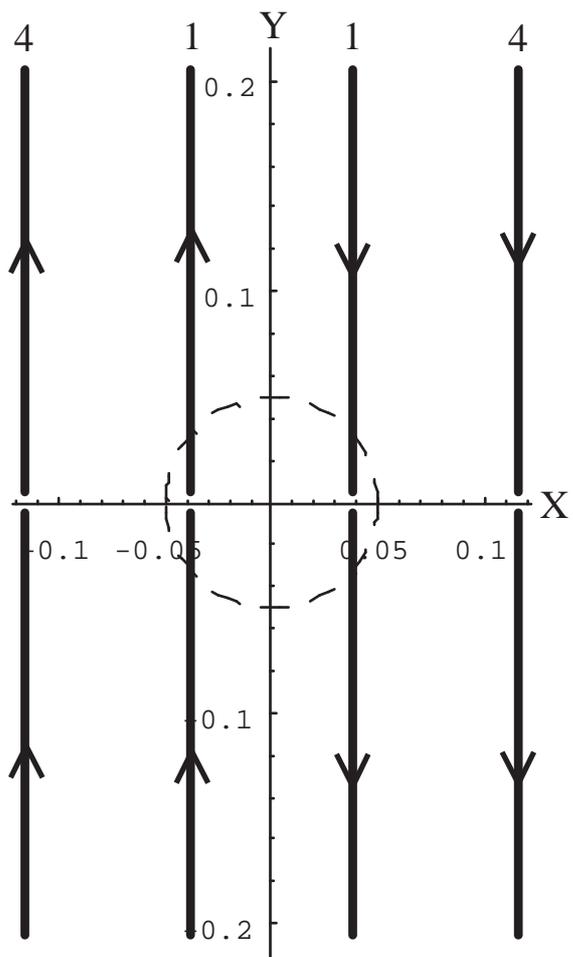


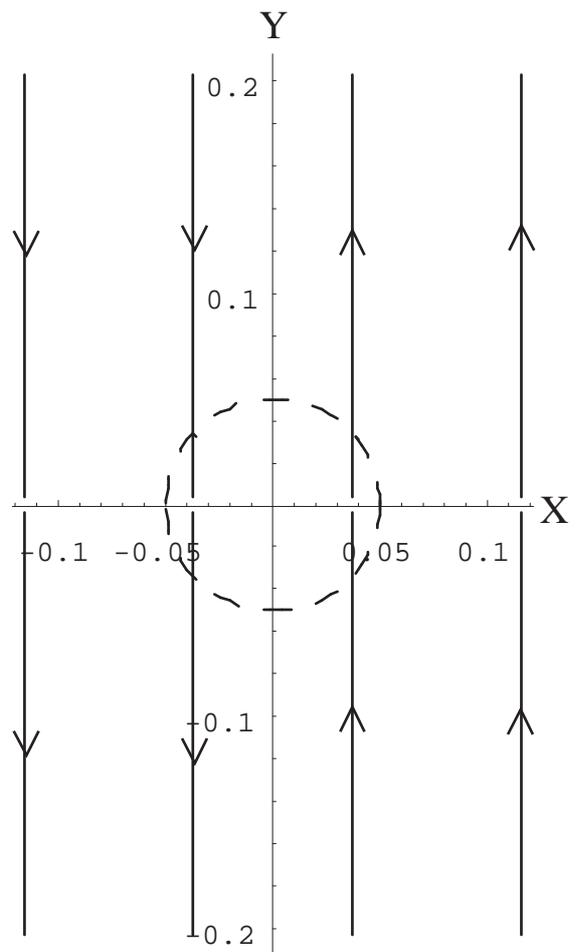
Figure 3: Génération d'un profil de champ B_x

10.3 Test sur des configurations classiques en RMN

11 Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial x}$



dessus ($z = 10\text{cm}$)



dessous ($z = -10\text{cm}$)

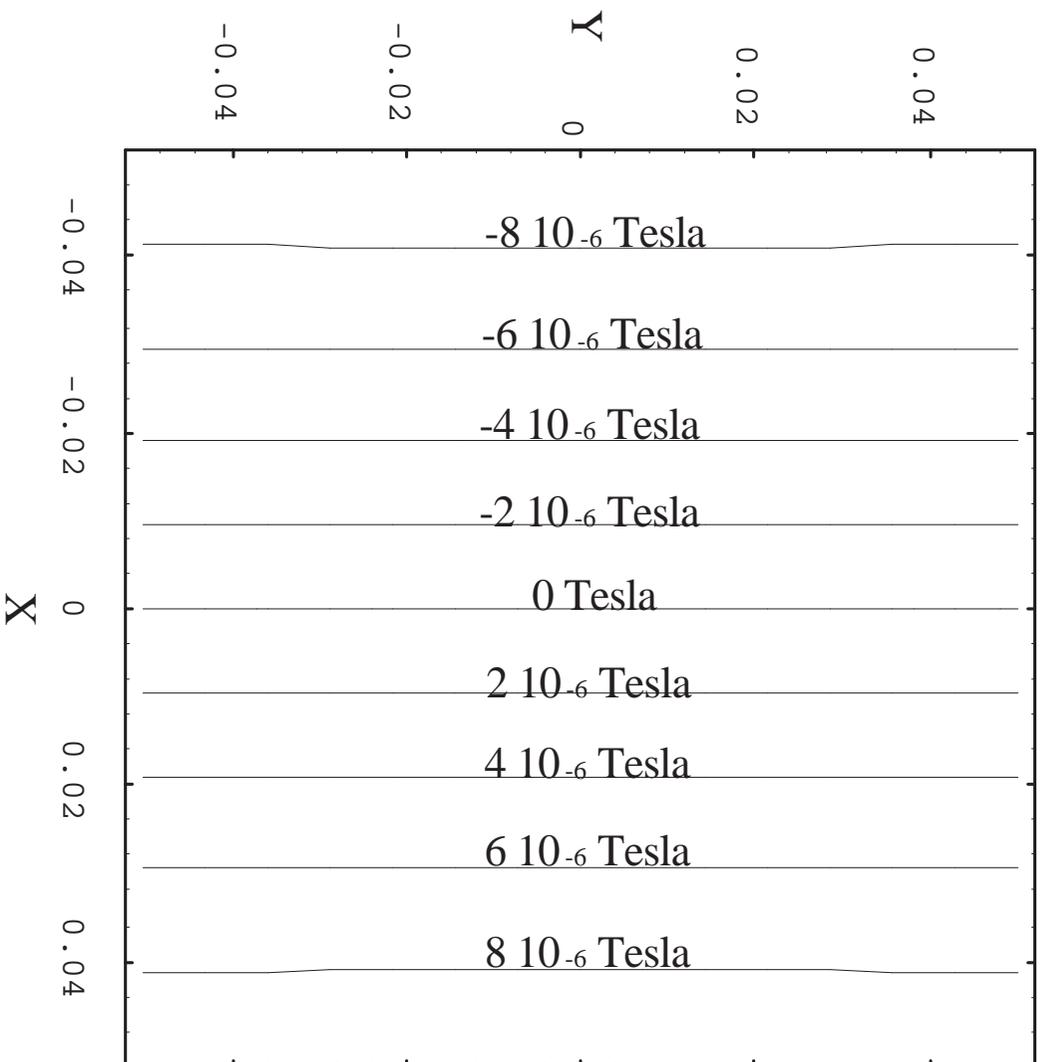
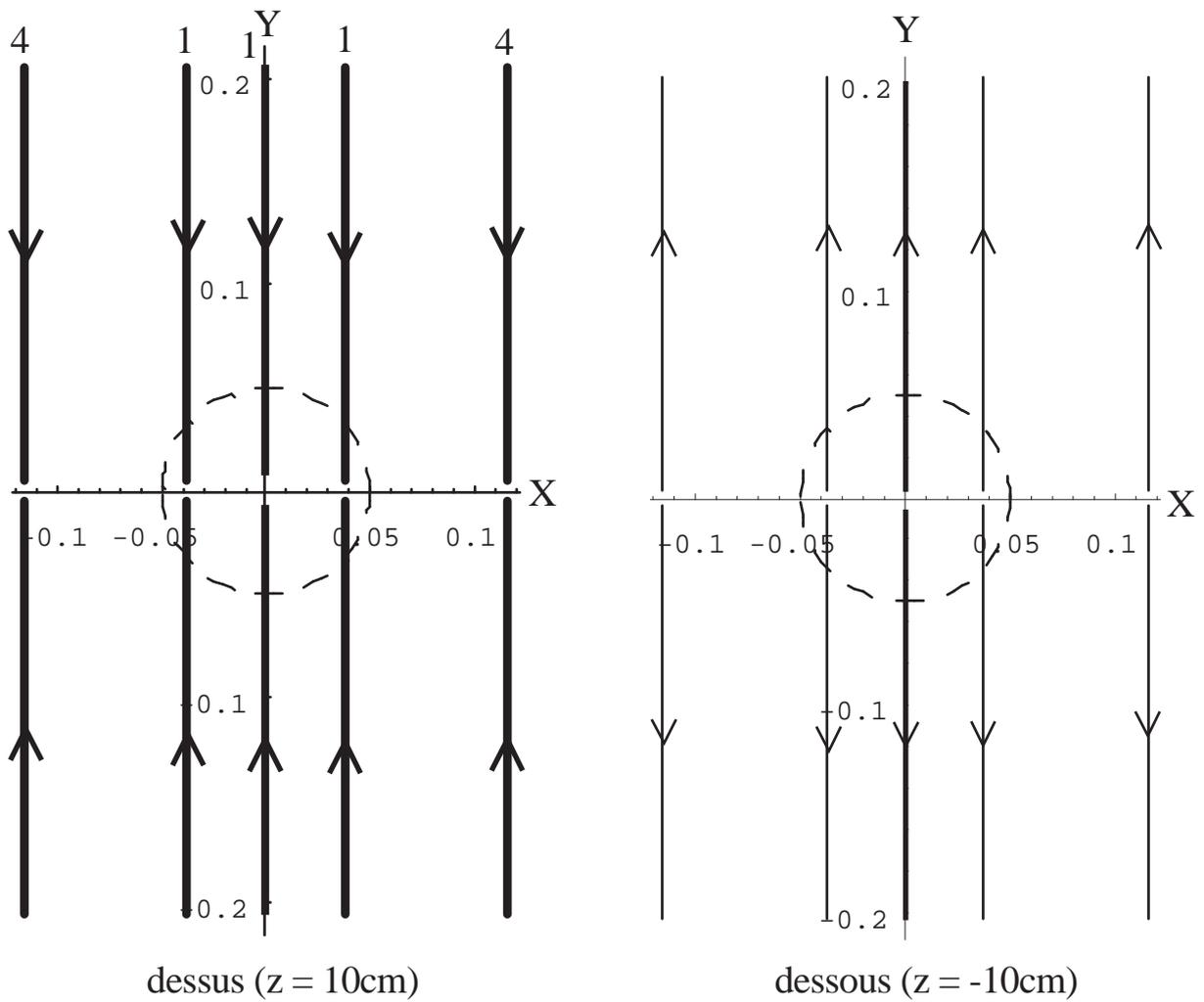


Figure 4: $17 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla/m}$ pour un courant de 1 A.

12 Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial y}$



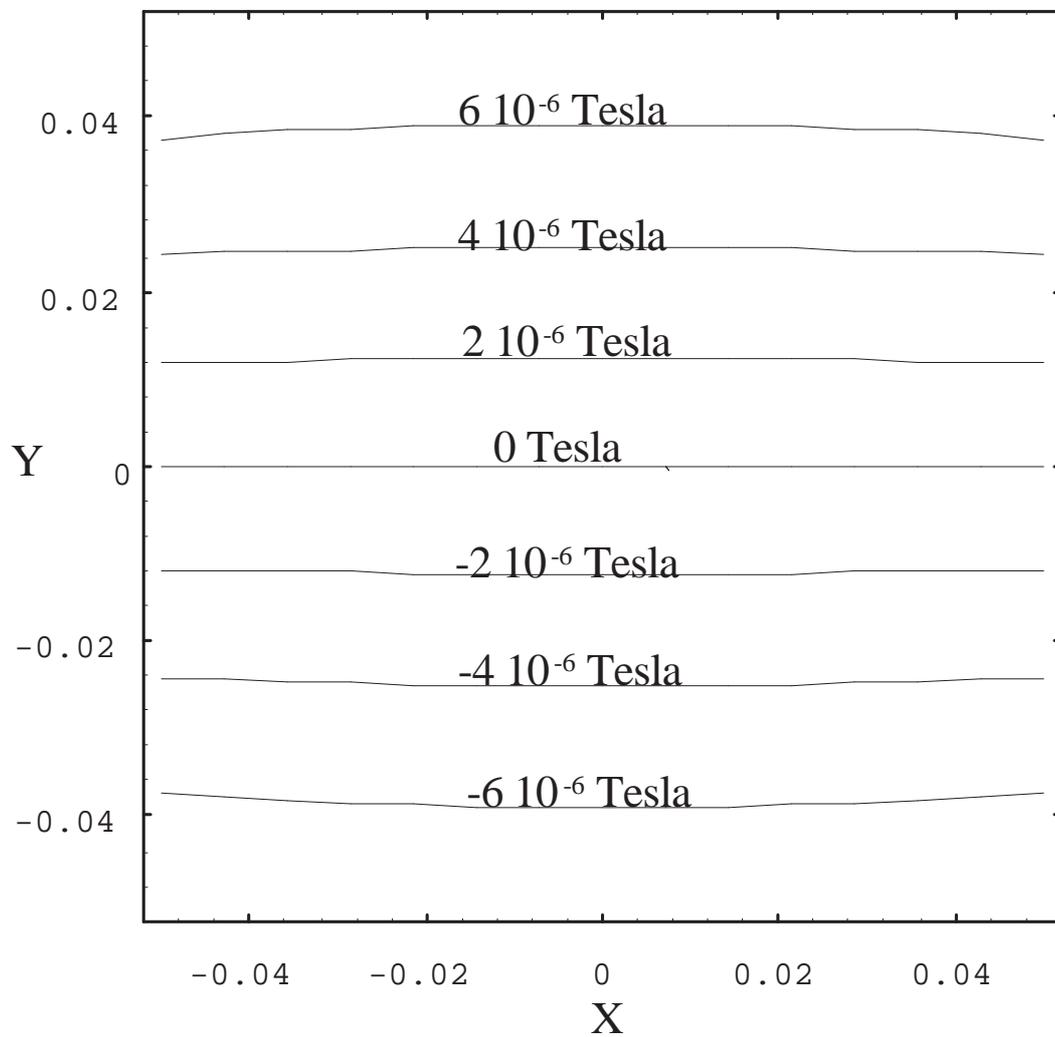


Figure 5: Courant de 1 A.

13 Gradient de champ $\frac{\partial B_x}{\partial z}$

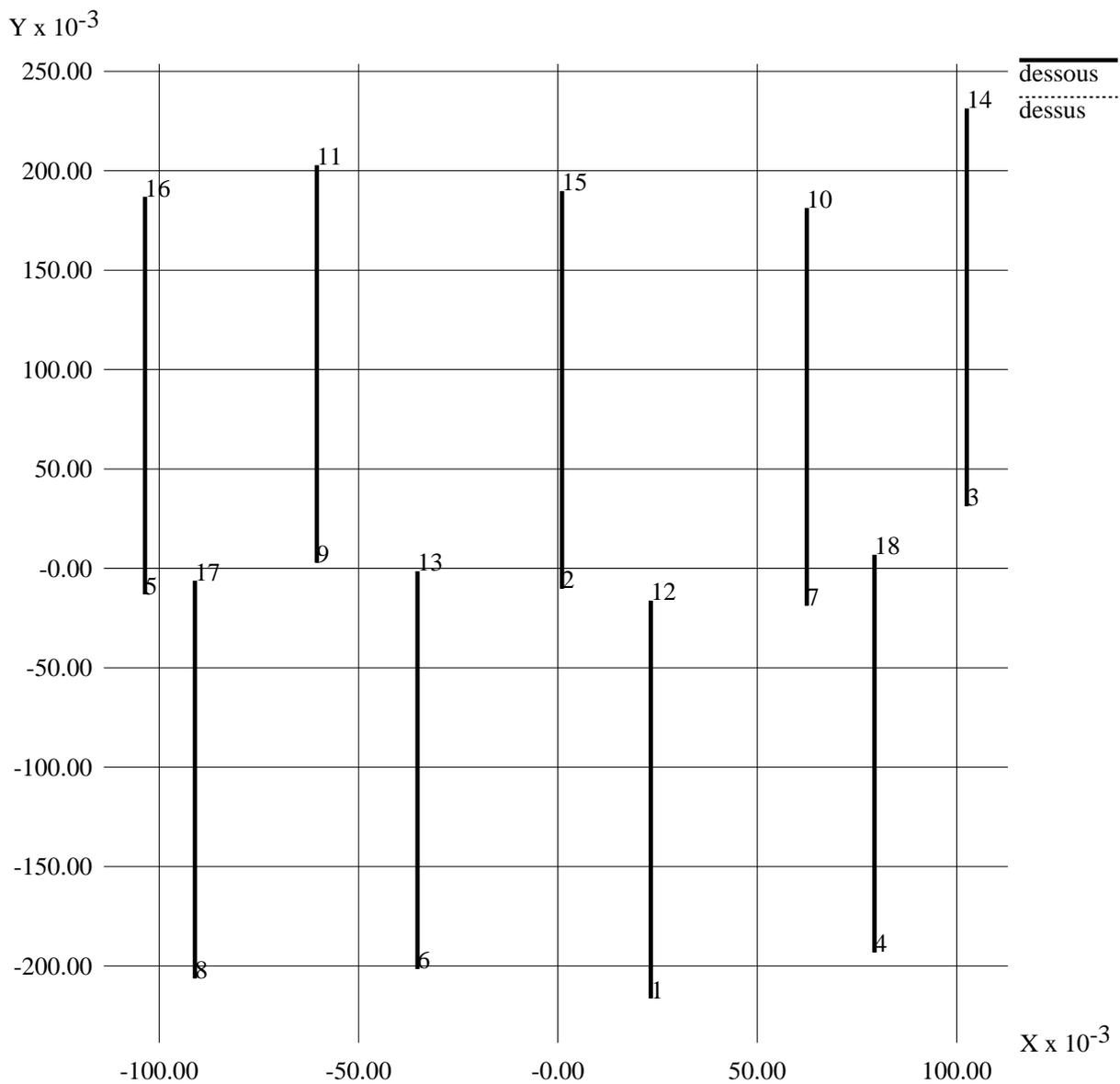


Figure 6: Les courants sont dans le même sens. Le gradient est de 8.10^{-5} Tesla/m pour un courant de 1 A.

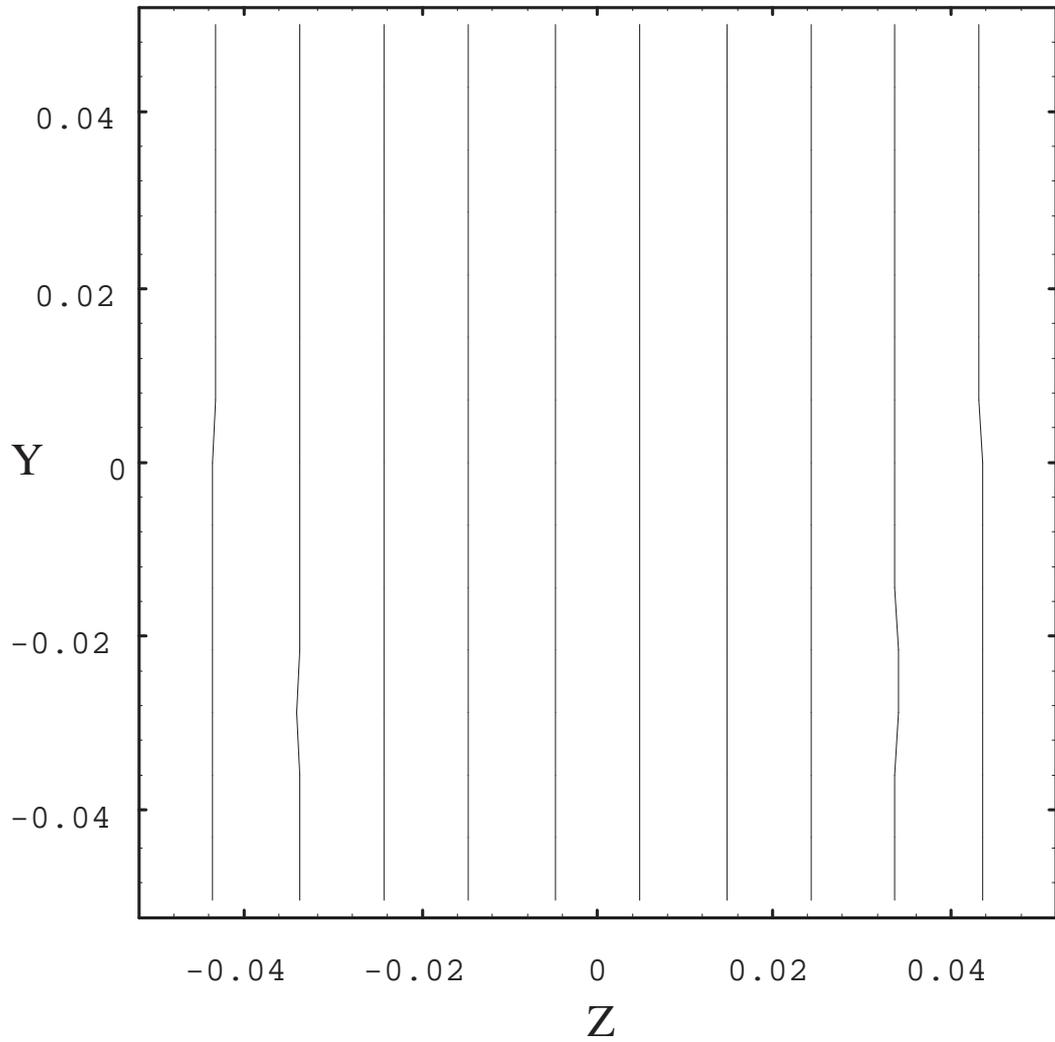


Figure 7: Linéarité élevée du gradient $\frac{\partial B_x}{\partial z}$

13.1 Coefficients principaux (difficile à annuler)

- Champ homogène (a_{00}) $\Rightarrow A_{20} = -r^2/2 + z^2$

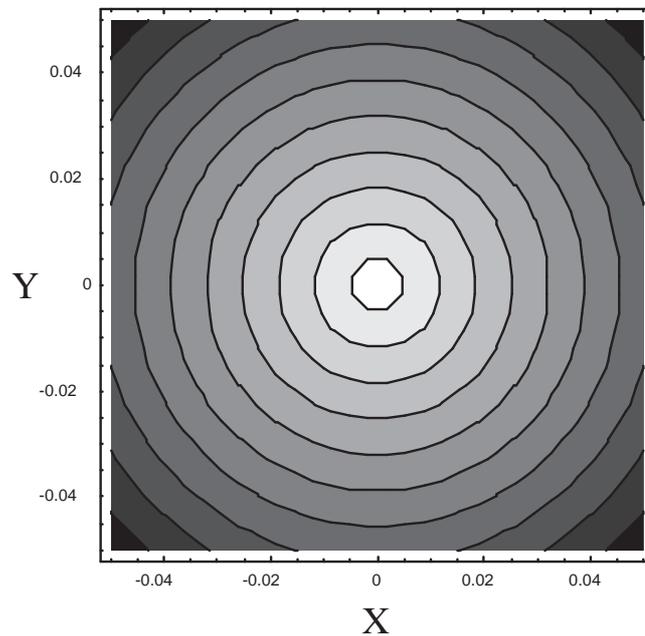


Figure 8: Coefficient A_{20} non nul. Manque de sources sur les bords.

- Gradient x (a_{11}) $\Rightarrow A_{31} = x(-3r^2/2 + 6z^2)$

- Gradient y (b_{11}) $\Rightarrow B_{31} = y(-3r^2/2 + 6z^2)$

- Gradient z (a_{10}) $\Rightarrow A_{30} = z(-3r^2/2 + z^2)$

14 Expérimentation des gradients

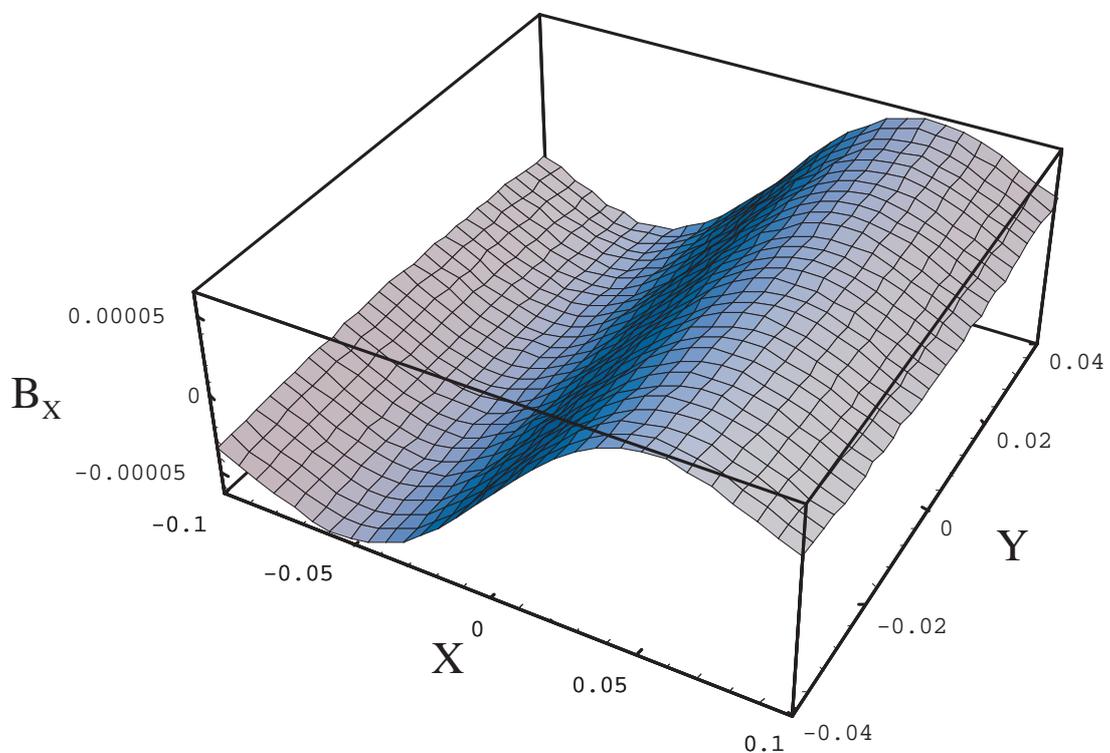
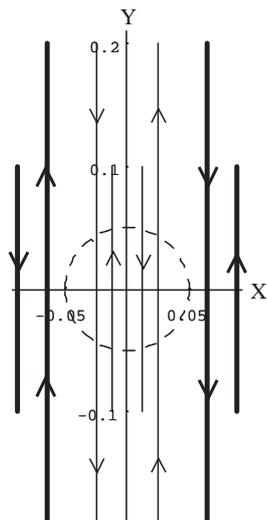
14.1 Très conforme à la théorie car aucune approximation

14.2 Tolérance positionnelle de +/- 1mm pour une zone utile de 10 cm de diamètre.

14.3 Efficacité énergétique entre les gradients plats et leurs homologues cylindriques égale à 65%.

15 D'autres profils ...

15.1 Champ à variation sinusoidale suivant la direction x



16 Conclusion

- 16.1 Algorithmes bien adaptés pour les problèmes en 1/R.
- 16.2 Résultats expérimentaux satisfaisants.
- 16.3 Mise en oeuvre d'un logiciel ergonomique de placement des sources.