



HAL
open science

Algèbres de Hopf d'arbres et structures pré-Lie

Abdellatif Saïdi

► **To cite this version:**

Abdellatif Saïdi. Algèbres de Hopf d'arbres et structures pré-Lie. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2011. Français. NNT : 2011CLF22208 . tel-00720201

HAL Id: tel-00720201

<https://theses.hal.science/tel-00720201>

Submitted on 24 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir



Université Blaise Pascal
UFR Sciences et Technologies
D.U. 2208
E.D. 704 (Sciences Fondamentales)

THÈSE

Présentée par

Abdellatif SAIDI

En vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DES UNIVERSITÉS DE MONASTIR ET DE BLAISE PASCAL

Discipline : MATHÉMATIQUES

Algèbres de Hopf d'arbres et structures pré-Lie

Soutenue le 17 décembre 2011 devant la commission d'Examen

Jury

Boujemaa AGREBAOUI	Professeur, Université de Sfax	Rapporteur
Didier ARNAL	Professeur émérite, Université de Bourgogne	Examinateur
Slaïm BEN FARAH	Professeur, Université de Monastir	Président de Jury
Frédéric CHAPOTON	CR, CNRS Université de Lyon	Rapporteur
Dominique MANCHON	CR, CNRS Université Blaise Pascal	Directeur
Mohamed SELMI	Professeur, Université de Sousse	Directeur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire UMR 6620 et CNRS de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand sous la direction du Professeur Dominique MANCHON et au laboratoire Physique-Mathématique à la faculté des Sciences de Monastir sous la direction du Professeur Mohamed SELMI.

Il est habituel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à le rendre possible. Même si dans mon cas, cette liste peut sembler plus longue que de coutume, c'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais rendre hommage à tous ceux qui à leur manière m'ont aidé à mener à bien cette thèse.

Je désire alors exprimer ma profonde gratitude :

à mon directeur de thèse monsieur Dominique MANCHON, je voudrais lui exprimer ma profonde gratitude de m'avoir transmis l'envie de faire la recherche en mathématiques, pour sa sympathie, sa disponibilité et ses conseils intéressants et bien profitables pour l'avancement de mon travail. Pendant toutes les heures passées ensemble, j'ai pu apprendre et profiter pleinement de son expérience et ses qualités scientifiques.

à mon directeur de thèse monsieur Mohamed SELMI pour le soutien qu'il m'a toujours apporté durant la préparation de cette thèse. Je le remercie pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer et pour les conseils judicieux qu'il m'a prodigués.

Aux professeurs Boujemaa AGREBAOUI et Frédéric CHAPOTON, qui ont eu l'extrême gentillesse d'accepter d'être Rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs efforts et leur patience.

Au professeur Didier ARNAL, qui m'a honoré en acceptant d'être Examineur de ce Jury.
Au professeur Slaïm BEN FARAH d'avoir accepté de présider mon Jury.

Au professeur Leila BEN ABDELGHANI d'accepter à participer à ce Jury. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier tous les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions et particulièrement : Kurusch EBRAHIMI-FARD, Loïc FOISSY, Frédéric CHAPOTON et Jean-Louis LODAY.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes vifs remerciements à tous mes enseignants depuis l'école primaire.

Je voudrais remercier les membres du Laboratoire de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand, qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions, Je remercie encore tous le personnel de ce laboratoire pour leur disponibilité, leur patience et

surtout leur gentillesse.

Je voudrais remercier mes collègues doctorants de la Faculté des Sciences de Monastir et de l'Université Blaise Pascal. Je remercie tout les membres de l'Unité de recherche Physique-Mathématique de la Faculté des Sciences de Monastir. Je voudrais remercier encore mes collègues enseignants de la Faculté des Sciences de Monastir et l'Ecole Supérieure des Sciences et de Technologie de Hammam-Sousse.

Je remercie enfin ma famille et surtout ma grand-mère Hadda, mon père Abdelkader, ma mère Ghenia et mes soeurs Hanen, Marwa, Dalel et Nawres.

Table des matières

1	Introduction aux algèbres de Hopf	9
1	Algèbres, cogèbres et bigèbres	9
1.1	Algèbres	9
1.2	Cogèbres	10
1.3	Bigèbres	13
2	Convolution et algèbres de Hopf	15
2.1	Convolution	15
2.2	Algèbres de Hopf	16
2.3	Exemples d'algèbres de Hopf	16
3	Espaces gradués	16
3.1	Bigèbres graduées	17
3.2	Algèbres de Hopf connexes	17
2	Lois pré-Lie en interaction	19
1	Introduction	19
2	Algèbres pré-Lie	19
3	L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK}	21
3.1	Définition	21
3.2	Dual gradué de \mathcal{H}_{CK}	22
3.3	La loi pré-Lie de greffe	23
4	L'algèbre de Hopf \mathcal{H}	24
4.1	Définition	24
4.2	Dual gradué de \mathcal{H}	24
4.3	La loi pré-Lie d'insertion	25
5	Relation entre \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}	27
6	Les quatre lois pré-Lie	27
7	Relation entre les lois pré-Lie de greffe et d'insertion	28
7.1	Quelques calculs explicites	31
7.2	Une approche opéradique	33
8	Produit semi-direct et produit croisé	35
8.1	Produit semi-direct d'algèbres pré-Lie	35
8.2	Produit croisé d'algèbres enveloppantes	36

8.3	Coproduit croisé des deux algèbres de Hopf \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}	37
3	Etude de l'algèbre pré-Lie d'insertion	39
1	Introduction	39
2	Algèbre pré-Lie Libre	39
3	Hauteur d'un sommet, Energie d'un arbre	40
4	Produit de fusion	41
5	Générateurs de l'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$	41
6	Relations dans $(\mathcal{T}, \triangleright)$ autres que la relation pré-Lie	44
7	Une autre algèbre pré-Lie sur les arbres enracinés	49
4	L'opérade pré-Lie est une déformation de L'opérade NAP	56
1	Préliminaires et définitions	56
2	Opérades : une approche par les espèces	59
2.1	Catégories	59
2.2	Foncteurs	59
2.3	Espèces	60
2.4	Composition des espèces	60
2.5	Opérades dans une catégorie monoïdale symétrique	61
2.6	Compositions partielles	62
3	Deux structures d'opérade sur les arbres enracinés	62
3.1	L'opérade pré-Lie	63
3.2	L'opérade NAP	63
4	La notion d'opérade à débit constant	64
4.1	Définition générale	64
4.2	Exemple : L'opérade à débit constant $Endop(V)$ lorsque V est un K - espace vectoriel gradué	64
5	L'opérade à débit constant \mathcal{O}^λ	65
6	Algèbre NAP déformée	71
6.1	Définitions relatives aux opérades à débit constant	72
6.2	L'opérade à débit constant \mathcal{PL}_λ	73

Introduction

Les algèbres de Hopf d'arbres sont en général munies d'un produit associatif libre, commutatif ou non. Elles sont donc essentiellement caractérisées par leurs co-produits, [10, 14, 4, 26]. A la suite des travaux de P. Chartier, E. Hairer et G. Vilmart [9] sur la substitution des B-séries en analyse numérique, D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon ont introduit un nouveau co-produit [4] sur une algèbre commutative de forêts d'arbres enracinés \mathcal{H} . Cette algèbre de Hopf co-agit (à gauche ou à droite) sur l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} , introduite par A. Connes et D. Kreimer [10] dans le but d'étudier un problème de renormalisation. L'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}^0 est munie d'une structure pré-Lie à gauche, notée \triangleright qui s'exprime en termes d'insertion d'un arbre dans un autre.

La co-action à gauche se transporte au niveau des algèbres pré-Lie comme une relation de "dérivation" de la loi \triangleright sur la structure pré-Lie de greffe d'un arbre sur un autre notée \rightarrow obtenue sur l'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}_{CK}^0 . Nous donnons deux démonstrations, l'une par un calcul direct en dualisant la co-action de \mathcal{H} sur \mathcal{H}_{CK} et l'autre par les opérades en se basant exactement sur l'opérade pré-Lie [8]. Ensuite, nous mettons également en évidence un co-produit sur l'algèbre tensorielle $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ qui en fait une algèbre de Hopf dont le dual gradué est isomorphe à l'algèbre enveloppante du produit semi-direct des deux algèbres de Lie sous-jacentes aux algèbres pré-Lie de greffe et d'insertion [25].

Soit $\mathcal{T} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}'$, où \mathcal{T}_n est l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés à n sommets. En 2001, Frédéric Chapoton et Muriel Livernet ont montré que l'algèbre pré-Lie des arbres enracinés $(\mathcal{T}, \rightarrow)$ est l'algèbre pré-Lie libre sur un seul générateur, en montrant le résultat comme conséquence de leur description de l'opérade pré-Lie par les arbres enracinés labellisés [8]. En 2002, le même résultat a été démontré par A. Dzhumadil'daev et Clas Löfwall dans [12] sans faire appel aux opérades.

Nous avons montré que l'algèbre pré-Lie d'insertion $(\mathcal{T}', \triangleright)$ est engendrée par deux générateurs mais n'est pas libre : nous exhibons en effet deux familles de relations non triviales [28].

Le bon objet mathématique pour étudier les différents types d'algèbres : associatives, commutatives, Lie, Leibniz, pré-Lie, Dendriformes, non associatives permutatives (qu'on appelle dans la suite algèbres *NAP*) etc..., est la notion d'opérade. Cette notion (la terminologie "opérades" est due à J. P. May) est apparue dans les années soixante-dix en topologie algébrique (J. Stasheff, J. P. May, J. M. Boardman, R. M. Vogt). On observe depuis les années quatre-vingt dix un regain d'intérêt pour cette théorie, dû à la mise en évidence de liens avec la cohomologie des graphes, la dualité de Koszul, la théorie de représentations et la théorie quantique des champs.

Dans notre travail, nous nous sommes concentrés principalement sur les deux opérades pré-Lie et NAP, gouvernant respectivement les algèbres pré-Lie et les algèbres non-associatives permutatives NAP. Plus précisément on déforme l'opérade NAP. Nous n'avons pas réussi à le faire dans le cadre ordinaire des opérades. Par conséquent, nous introduisons la notion d' "opérades à débit constant" qui sont des opérades colorées avec structure de semi-groupe additif sur les couleurs. Cette terminologie peut-être justifiée comme suit : les opérations n -aires sont représentés par n rivières qui se jettent dans un lac et une rivière qui s'en écoule dont le débit est la somme des flux entrants. La déformation des opérades dans le sens ordinaire a été récemment utilisée dans la quantification par déformation [20, 13, 27], voir aussi [3] dans un contexte des algèbres dupliciales et dendriformes. Nous avons introduit une famille d'opérades à débit constant \mathcal{O}^λ dépendant d'un paramètre scalaire λ . Cette famille constitue une sorte de déformation de l'opérade NAP ; on obtient l'opérade NAP pour $\lambda = 0$ et l'opérade Pré-Lie pour $\lambda = 1$. Le prototype de ces opérades à débit constant est l'opérade $Endop(V)$ où $V = \bigoplus_{n \geq 1} V_n$ est un espace vectoriel gradué.

Le premier chapitre est consacré à des rappels de résultats généraux sur les algèbres de Hopf. Le chapitre 2 est consacré aux études des deux algèbres pré-Lie d'insertion \triangleright et de greffe \rightarrow issues respectivement des algèbres de Hopf \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK} . Nous montrons que pour tout $t \in \mathcal{T}'$, $u, v \in \mathcal{T}$, on a :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (t \triangleright u) \rightarrow v + u \rightarrow (t \triangleright v).$$

Cette relation nous a aidé à mettre en évidence un coproduit sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ qui en fait une algèbre de Hopf dont le dual gradué est isomorphe à l'algèbre enveloppante du produit semi-direct des deux algèbres sous-jacentes aux deux algèbres pré-Lie considérées.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'algèbre pré-Lie d'insertion $(\mathcal{T}', \triangleright)$. Dans ce but, suivant une idée de F. Chapoton, nous avons défini l'énergie potentielle d'un arbre par $d(t) = \sum_{v \in V(t)} h(v)$ où $V(t)$ est l'ensemble des sommets de l'arbre t et $h(v)$ est la distance entre la racine de t et le sommet v . Nous montrons que cette algèbre est engendrée par deux générateurs et nous montrons qu'elle n'est pas libre en donnant deux familles non triviales de relations. A la fin de ce chapitre, on a défini une autre loi pré-Lie sur les arbres enracinés notée \odot . On a montré aussi que (\mathcal{T}', \odot) est une algèbre pré-Lie non libre en donnant quelques relations.

Le dernier chapitre est organisé comme suit : les deux premières sections sont des généralités sur les opérades, en mettant l'accent dans la deuxième section sur la description des opérades dans le cadre des espèces. La troisième section est un rappel des opérades pré-Lie et NAP introduite par F. Chapoton et M. Livernet dans [8] et [18]. La quatrième section est consacrée à l'introduction de la notion d'opérade à débit constant. Grosso modo, ces objets sont étroitement liées aux opérades colorées avec structure d'un semi-groupe additif sur les couleurs. Nous donnons l'opérade $Endop(V)$, où V est un espace vectoriel gradué positivement, comme exemple de ces opérades. Dans la cinquième section nous construisons pour tout scalaire λ l'opérade à débit constant \mathcal{O}^λ sur les arbres enracinés. Dans ce but nous introduisons des arbres labellisés avec des poids strictement positifs sur les sommets. Nous avons défini l'énergie potentielle d'un

tel arbre t par :

$$d(t) = \sum_{v \in V(t)} h(v) |v|,$$

où $|v|$ désigne le poids du sommet v . Nous montrons alors comment on peut considérer l'opéade pré-Lie comme déformation de l'opéade NAP dans ce cadre. En oubliant la graduation (les poids des sommets), on obtient pour $\lambda = 0$ l'opéade NAP et pour $\lambda = 1$ l'opéade pré-Lie.

Chapitre 1

Introduction aux algèbres de Hopf

Dans ce chapitre, on va introduire la notion d'algèbre de Hopf en donnant des exemples. On va commencer par étudier les algèbres, les cogèbres, les bigèbres et les algèbres de Hopf. Les références classiques sur ce sujet sont [1, 29] et [19]. Dans ce chapitre K est un corps de caractéristique zéro.

1 Algèbres, cogèbres et bigèbres

1.1 Algèbres

Définition 1 Une K -algèbre unitaire est un triplet (A, m, η) où A est un espace vectoriel, $m : A \otimes A \rightarrow A$ et $\eta : K \rightarrow A$ des applications linéaires, satisfaisant les deux axiomes suivants :

– *Associativité*

$$m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m).$$

C'est-à dire le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{Id \otimes m} & A \otimes A \\ m \otimes Id \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

– *Unité* :

$$m \circ (Id \otimes \eta) = Id = m \circ (\eta \otimes Id).$$

L'algèbre A est dite commutative si

$$m \circ \tau = m,$$

où $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ pour tout $a, b \in A$. L'application τ est dite la volte de $A \otimes A$.

De la même manière, les notions de module (à gauche ou à droite), d'idéal, de sous-algèbre s'expriment sous forme de diagrammes commutatifs.

Définition 2 Une sous-algèbre de A est un sous espace vectoriel B de A tel que :

$$m(B \otimes B) \subset B \text{ et } \eta(K) \subset B.$$

Un A module à gauche est un couple (M, p) où M est un espace vectoriel et $p : A \otimes M \longrightarrow M$ vérifiant les axiomes suivants :

- Associativité :

$$p \circ (m \otimes Id) = p \circ (Id \otimes p).$$

- Unité :

$$p \circ (\eta \otimes Id) = Id_M.$$

- Un idéal à gauche de A est un sous-espace I de A tel que :

$$m(A \otimes I) \subset I.$$

De même I est un idéal à droite, si $m(I \otimes A) \subset I$. Un idéal bilatère de A est un sous-espace I de A tel que :

$$m(A \otimes I + I \otimes A) \subset I.$$

Définition 3 Soient A et B deux algèbres et $\phi : A \longrightarrow B$ une application linéaire. On dit que ϕ est un morphisme d'algèbres si :

$$m_B \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ m_A,$$

et

$$\phi \circ \eta_A = \eta_B.$$

1.2 Cogèbres

Pour définir les axiomes des cogèbres, nous allons dualiser les axiomes définissant les algèbres.

Définition 4 Une cogèbre (ou coalgèbre) co-unitaire est un triplet (C, Δ, ϵ) , où C est un espace vectoriel, $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ (coproduit) et $\epsilon : C \longrightarrow K$ (co-unité) satisfaisant les deux axiomes suivants :

- Coassociativité :

$$(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta.$$

- Co-unité :

$$(\epsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id = (Id \otimes \epsilon) \circ \Delta.$$

La cogèbre C est dite cocommutative si

$$\tau \circ \Delta = \Delta,$$

où τ est la volte de $C \otimes C$.

Notation de Sweedler [29] : Le coproduit d'un élément est une somme de tenseurs, ainsi pour $x \in C$, on va utiliser la notation suivante (dite notation de Sweedler) :

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2.$$

Alors l'axiome de co-associativité s'écrit pour tout $x \in C$, de la manière suivante :

$$\sum_{(x)} \sum_{(x_1)} (x_1)_1 \otimes (x_1)_2 \otimes x_2 = \sum_{(x)} \sum_{(x_2)} x_1 \otimes (x_2)_1 \otimes (x_2)_2 := \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2 \otimes x_3.$$

L'axiome de co-unité s'écrit pour tout $x \in C$:

$$\sum_{(x)} \epsilon(x_1) x_2 = \sum_{(x)} x_1 \epsilon(x_2) = x.$$

Remarque 1 *La co-unité ϵ est unique.*

Dualisons maintenant les notions d'idéal et de sous-algèbre.

Définition 5 *Soit C une cogèbre et V un sous-espace de C .*

1. V est dite sous-cogèbre de C si $\Delta(V) \subset V \otimes V$.
2. V est dit coidéal bilatère si $\Delta(V) \subset V \otimes C + C \otimes V$ et $\epsilon(V) = 0$.
3. Un espace vectoriel M est un C -comodule à gauche, autrement dit C coagit à gauche sur M s'il existe une application linéaire $\delta : M \longrightarrow C \otimes M$ vérifiant les deux axiomes suivants :

$$(\Delta \otimes Id_M) \circ \delta = (Id_C \otimes \delta) \circ \delta,$$

et

$$(\epsilon \otimes Id_M) \circ \delta = Id_M.$$

4. Un espace vectoriel M est un C -comodule à droite s'il existe une application linéaire $\delta : M \longrightarrow M \otimes C$ tels que :

$$(\delta \otimes Id_C) \circ \delta = (Id_M \otimes \Delta) \circ \delta,$$

et

$$(Id_M \otimes \epsilon) \circ \delta = Id_M.$$

Définition 6 *Soient C et D deux cogèbres et $\phi : C \longrightarrow D$ une application linéaire. On dira que ϕ est un morphisme de cogèbres si :*

$$\Delta_D \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_C, \text{ soit encore } \sum_{(x)} \phi(x_1) \otimes \phi(x_2) = \sum_{(\phi(x))} (\phi(x))_1 \otimes (\phi(x))_2 \quad \forall x \in C.$$

et

$$\epsilon_D \circ \phi = \epsilon_C,$$

c'est-à-dire si les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\phi} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{\phi \otimes \phi} & D \otimes D \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{\epsilon_D} & K \\
\uparrow \phi & \nearrow \epsilon_C & \\
C & &
\end{array}$$

Proposition 2 Soit $\phi : C \longrightarrow D$ un morphisme de cogèbres. Alors $\text{Im}(\phi)$ est une sous-cogèbre de D , $\text{Ker}(\phi)$ est un coïdéal de C et $C/\text{Ker}(\phi)$ est une cogèbre isomorphe à $\text{Im}(\phi)$. L'isomorphisme est la bijection induite par ϕ .

Exemple 1 1. Soit V un espace vectoriel de base $(e_i)_{i \in I}$ alors (V, Δ, ϵ) est une cogèbre cocommutative, où :

$$\begin{aligned}
\Delta(e_i) &= e_i \otimes e_i, \quad \forall i \in I, \\
\epsilon(e_i) &= 1, \quad \forall i \in I.
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(K)$ l'espace des matrices carrées d'ordre n . Soit $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$. On pose $\Delta(e_{i,j}) = \sum_{k=1}^n e_{i,k} \otimes e_{k,j}$ et $\epsilon(e_{i,j}) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. On vérifie bien que $(M_n(K), \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre. Elle est cocommutative si $n = 1$.

3. Soient C et D deux cogèbres. Alors $C \otimes D$ est aussi une cogèbre, avec le coproduit suivant :

$$(Id_C \otimes \tau \otimes Id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D),$$

autrement dit :

$$\Delta(x \otimes y) = \sum_{(x)} \sum_{(y)} (x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2), \quad \forall x \in C \text{ et } y \in D.$$

Et la co-unité est $\epsilon : x \otimes y \longmapsto \epsilon_C(x)\epsilon_D(y)$.

Proposition 3 1. Soit (C, Δ, ϵ) une cogèbre (non nécessairement de dimension finie). Alors C^* est une algèbre avec le produit défini par :

$$fg(x) = (f \otimes g) \circ \Delta(x) = \sum_{(x)} f(x_1)g(x_2),$$

et l'unité donnée par la transposée de ϵ , i.e $u(\lambda) = \lambda\epsilon$.

2. Soit (A, m, η) une algèbre de dimension finie. Alors A^* est une cogèbre avec le coproduit $\Delta = m^* : A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* = A^* \otimes A^*$ et la counité est $\epsilon : f \longmapsto f(1_A)$.

Preuve :

1. Associativité : Soient f, g et h trois éléments de C^* , pour $x \in C$ on a :

$$\begin{aligned}
(fg)h(x) &= \sum_{(x)} (fg)(x_1)h(x_2) \\
&= \sum_{(x)} \sum_{(x_1)} f((x_1)_1)g((x_1)_2)h(x_2) \\
&= \sum_{(x)} \sum_{(x_2)} f(x_1)g((x_2)_1)h((x_2)_2) \\
&= \sum_{(x)} f(x_1)gh(x_2) \\
&= f(gh)(x).
\end{aligned}$$

Dans le passage de la ligne 2 à la ligne 3 on a utilisé la coassociativité de Δ .

De plus, pour tout $x \in C^*$:

$$\begin{aligned}
(u(1)f)(x) &= (\epsilon f)(x) \\
&= (\epsilon \otimes f)\Delta(x) \\
&= \sum_{(x)} \epsilon(x_1)f(x_2) \\
&= f\left(\sum_{(x)} \epsilon(x_1)x_2\right) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Dans le dernier passage, on a utilisé la compatibilité entre ϵ et Δ . Par le même calcul on montre aussi que $fu(1) = f$.

2. Coassociativité : Soit $f \in A^*$. En identifiant $(A \otimes A \otimes A)^*$ à $A^* \otimes A^* \otimes A^*$ (car A est de dimension finie). Pour tout $x \otimes y \otimes z \in A \otimes A \otimes A$:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id) \circ \Delta(f)(x \otimes y \otimes z) &= \Delta(f)(xy \otimes z) \\
&= f((xy)z) \\
&= f(x(yz)) \\
&= \Delta(f)(x \otimes yz) \\
&= (Id \otimes \Delta)(f)(x \otimes y \otimes z).
\end{aligned}$$

D'autre part, en notant $\epsilon : f \mapsto f(1)$, pour tout $x \in A$:

$$(\epsilon \otimes Id) \circ \Delta(f)(x) = f(1.x) = f(x).$$

De même pour $(Id \otimes \epsilon) \circ \Delta$.

1.3 Bigèbres

Une bigèbre (ou bialgèbre) est à la fois une algèbre et une cogèbre, avec une compatibilité entre les deux structures.

Définition 7 Une bigèbre est une famille $(B, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ où :

1. (B, m, η) est une algèbre unitaire.
2. (B, Δ, ϵ) est une cogèbre co-unitaire.
3. m et η sont des morphismes de cogèbres co-unitaires, où bien d'une manière équivalente Δ et ϵ sont deux morphismes d'algèbres unitaires.

Définition 8 1. Soient B et B' deux bigèbres et $\phi : B \rightarrow B'$ une application linéaire. On dit que ϕ est un morphisme de bigèbres si ϕ est à la fois un morphisme d'algèbres unitaires et un morphisme de cogèbres co-unitaires.

2. Soit B une bigèbre et I un sous-espace de B . On dit que I est un bi-idéal, si I est à la fois idéal et co-idéal.

Exemples 4 1. Soit G un semi-groupe multiplicatif. Soit KG l'espace vectoriel de base les éléments de G . Le produit de G est étendu par bilinéarité à KG tout entier i.e $m(\lambda g \otimes \lambda' g') = \lambda \lambda' g g'$ pour tout $\lambda, \lambda' \in K$ et $g, g' \in G$. Ainsi KG est une algèbre. On définit un coproduit sur KG par $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in G$. Ainsi KG est une cogèbre. Sa counité vérifie $\epsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$. De plus pour tout $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}\Delta(gh) &= gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h), \\ \epsilon(gh) &= 1 = \epsilon(g)\epsilon(h).\end{aligned}$$

Ce qui prouve que Δ et ϵ sont deux morphismes d'algèbres. Donc KG est une bigèbre, elle est cocommutative, et elle est commutative si G est commutatif. Sa dimension est le cardinal de G .

2. Bigèbre tensorielle et bigèbre symétrique : Soit V un espace vectoriel. On définit par récurrence sur n , $V^{\otimes n} = V \otimes V^{\otimes n-1}$ et $V^0 = K$. L'algèbre tensorielle est définie par :

$$T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n},$$

le produit étant donné par la concaténation. L'algèbre $T(V)$ est munie d'une structure de bigèbre définie par la formule suivante :

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

L'application $\Delta : V \rightarrow T(V) \otimes T(V)$ ainsi définie s'étend en un unique morphisme d'algèbres $\Delta : T(V) \rightarrow T(V) \otimes T(V)$, car $T(V)$ est l'algèbre associative libre sur V . On vérifie facilement que $T(V)$ est cocommutative, elle est commutative si et seulement si $\dim(V) = 0$ ou 1 .

La counité ϵ est définie par :

$$\begin{aligned}\epsilon(v) &= 0 \quad \forall v \in V, \\ \epsilon(\lambda) &= \lambda \quad \forall \lambda \in K.\end{aligned}$$

Décrivons de manière plus précise le coproduit de $T(V)$. Nous allons utiliser les notations suivantes : Soient $v_1, \dots, v_n \in V$. Pour toute partie $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, on pose $v_I = v_{i_1} \dots v_{i_k}$. En particulier $v_\emptyset = 1$. Alors

$$\Delta(v_1 \dots v_n) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} v_I \otimes v_{I^c},$$

où v^c désigne le complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$. Ce coproduit s'appelle coproduit de battage (coproduit shuffle) de $v_1 \dots v_n$.

L'algèbre symétrique $S(V)$ est par définition $T(V)/I$ où I l'idéal engendré par $x \otimes y - y \otimes x$ pour tout $x, y \in V$. Ainsi $S(V)$ est une bigèbre commutative et cocommutative. Plus précisément le coproduit sur $S(V)$ s'écrit :

$$\Delta(v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}) = \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq k_1 \\ \vdots \\ 0 \leq j_n \leq k_n}} \frac{k_1!}{j_1!(k_1 - j_1)!} \dots \frac{k_n!}{j_n!(k_n - j_n)!} v_1^{j_1} \dots v_n^{j_n} \otimes v_1^{k_1 - j_1} \dots v_n^{k_n - j_n},$$

pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$ et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$.

2 Convolution et algèbres de Hopf

2.1 Convolution

Soient (A, m, η) une algèbre et (C, Δ, ϵ) une cogèbre. On définit le produit de convolution noté \star sur l'espace vectoriel des applications linéaires de C dans A par

$$f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Autrement dit, pour tout $x \in C$:

$$(f \star g)(x) = \sum_{(x)} f(x_1)g(x_2).$$

Proposition 5 *L'espace des applications linéaires de C dans A muni de \star est une algèbre associative. L'unité est l'application $u \circ \epsilon$.*

Preuve :

Soient $f, g, h \in \text{Hom}(C, A)$. Pour tout $x \in C$:

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(x) &= \sum_{(x)} f \star g(x_1)h(x_2) \\ &= \sum_{(x)} \sum_{(x_1)} f((x_1)_1)g((x_1)_2)h(x_2) \\ &= \sum_{(x)} \sum_{(x_2)} f(x_1)g((x_2)_1)h((x_2)_2) \\ &= \sum_{(x)} f(x_1)(g \star h)(x_2) \\ &= f \star (g \star h)(x). \end{aligned}$$

D'autre part, si $f \in \text{Hom}(C, A)$ et tout $x \in C$ on a :

$$\begin{aligned} \eta \circ \epsilon \star f(x) &= f\left(\sum_{(x)} \epsilon(x_1)x_2\right) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

de même on vérifie que :

$$f \star u \circ \epsilon = f.$$

Ainsi $(\text{Hom}(C, A), \star, u \circ \epsilon)$ est une algèbre associative. □

Remarque 6 *Si H est une bigèbre, on peut prendre $A = C = H$. Alors $\text{Hom}(H, H)$ est muni d'un produit \star , qui n'est pas la composition. L'élément neutre pour ce produit est $x \rightarrow \epsilon(x)1_H$, ce qui n'est pas Id_H .*

2.2 Algèbres de Hopf

Définition 9 Soit H une bigèbre. On dira que H est une algèbre de Hopf si Id_H possède une inverse dans l'algèbre de convolution $(Hom(H, H), \star, u \circ \epsilon)$. L'unique inverse de Id_H est appelé antipode de H et est noté en général S . Autrement dit, H est une algèbre de Hopf s'il existe une application linéaire $S : H \longrightarrow H$ telle que pour tout $x \in H$:

$$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 = \sum_{(x)} x_1S(x_2) = \epsilon(x)1_H.$$

Remarque 7 L'antipode est unique lorsqu'il existe.

Définition 10 Soit H une algèbre de Hopf et I un sous-espace de H .

1. On dira que I est une sous-algèbre de Hopf de H si c'est une sous-bigèbre de H et $S(I) \subset I$.
2. On dira que I est un idéal de Hopf de H si c'est un bi-idéal et si $S(I) \subset I$.

Définition 11 Soient H et H' deux algèbres de Hopf. Soit $\phi : H \longrightarrow H'$ une application linéaire. On dit que ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf si ϕ est un morphisme de bigèbres et $\phi \circ S = S' \circ \phi$, où S' est l'antipode de H' .

2.3 Exemples d'algèbres de Hopf

1. Soit G un groupe. Soit $S : KG \longrightarrow KG$ l'application linéaire qui envoie g sur g^{-1} pour tout $g \in G$. Alors pour tout $g \in G$:

$$(S \star Id)(g) = S(g)g = 1_G = \epsilon(g)1_G = (Id \star S)(g).$$

Ainsi KG est une algèbre de Hopf, son antipode est S défini ci-dessus.

2. Si I est une sous algèbre de Hopf de H , alors I est une algèbre de Hopf d'antipode $S|_I$.
3. Si I est un idéal de Hopf, alors :
 H/I est une algèbre de Hopf d'antipode induit par S .

3 Espaces gradués

Définition 12 Soit V un espace vectoriel. On dit que V est un espace vectoriel gradué s'il existe une famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces de V de dimension finie telle que :

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n.$$

Les éléments de V_n sont appelés les éléments homogènes de degré n .

Pour tout $v \in V$, le degré de v est le plus petit entier naturel n tel que $v \in V_0 \oplus \dots \oplus V_n$.

3.1 Bigèbres graduées

Soit H une bigèbre. On dira que H est une bigèbre graduée si :

1. $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$.
2. Les applications m, η, Δ et ϵ sont homogènes de degré zéro, i.e :

$$\begin{aligned}
 m(H_n \otimes H_m) &\subset H_{n+m} \\
 \Delta(H_n) &\subset \sum_{p+q=n} H_p \otimes H_q \\
 \eta(K) &\subset H_0 \\
 \epsilon(H_0) &\subset K \\
 \epsilon(H_n) &= 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

Une algèbre de Hopf H est dite graduée si elle est graduée en tant que bigèbre et si $S(H_n) \subset H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Algèbres de Hopf connexes

Définition 13 Soit B une bigèbre. On dira que B est connexe si $\dim(H_0) = 1$. Comme $1_B \in H_0$, B est connexe si $H_0 = K \cdot 1_B$.

Soit H une algèbre de Hopf graduée. On dira que H est une algèbre de Hopf connexe si elle est connexe comme bigèbre.

Théorème 8 Soit H une bigèbre connexe. Alors H est une algèbre de Hopf.

Preuve :

Montrons par récurrence sur le degré que l'antipode S existe.

1. Comme $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, on a $S(1_H) = 1_H$.
2. On suppose que $S(x)$ existe pour tout $x \in \bigoplus_{K=0}^n H_k$. Comme Δ est homogène de degré zéro, on a pour tout $x \in H_{n+1}$

$$\Delta(x) = x \otimes 1_H + 1_H \otimes x + \sum_{1 \leq p, q < n+1 \text{ et } p+q=n+1} x_p \otimes x_q,$$

où $x_p \in H_p$ et $x_q \in H_q$. On a pour tout $x \in \ker \epsilon$:

$$S \star Id(x) = 0,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
 S \star Id(x) &= S(x) + S(1_H)x + \sum_{1 \leq p, q \leq n \text{ et } p+q=n+1} S(x_p)x_q \\
 &= S(x) + x + \sum_{1 \leq p, q \leq n \text{ et } p+q=n+1} S(x_p)x_q \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$S(x) = -x - \sum_{1 \leq p, q \leq n \text{ et } p+q=n+1} S(x_p)x_q.$$

Ce qui montre que H est une algèbre de Hopf d'antipode S défini par récurrence.

□

Exemple 2 *L'algèbre tensorielle $T(V)$, où V est un espace vectoriel est une algèbre de Hopf. $T(V)$ est graduée par les longueurs des mots. Son antipode est définie pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$ par :*

$$S(v_1 \dots v_n) = (-1)^n v_n \dots v_1.$$

Chapitre 2

Lois pré-Lie en interaction

1 Introduction

Dans tout ce chapitre K désignera un corps de caractéristique nulle. Alain Connes et Dirk Kreimer ont introduit une algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} commutative non cocommutative sur les forêts d'arbres enracinés. Leur coproduit est défini à l'aide des coupes admissibles. Dans l'article [4], Damien Calaque, Kurusch Ebrahimi-Fard et Dominique Manchon ont introduit un nouveau coproduit sur une algèbre commutative de forêts d'arbres enracinés \mathcal{H} . L'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}^0 est munie d'une structure pré-Lie à gauche, notée \triangleright qui s'exprime en termes d'insertion d'un arbre dans un autre. Dans ce chapitre on montre qu'il y a une relation "de dérivation" reliant cette structure à la structure pré-Lie à gauche de greffe d'un arbre sur un autre [8], notée \rightarrow , obtenue sur l'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}_{CK}^0 de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} [10]. Dans la deuxième partie de ce chapitre, On met également en évidence un coproduit sur le produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ qui en fait une algèbre de Hopf dont le dual gradué est isomorphe à l'algèbre enveloppante du produit semi-direct des deux algèbres de Lie sous-jacentes aux deux algèbres pré-Lie considérées.

2 Algèbres pré-Lie

Une K -algèbre magmatique $(E, *)$ est un espace vectoriel E muni d'une application bilinéaire qui à chaque couple (x, y) associe $x * y$. Pour tout $x \in E$ on note L_x l'application linéaire de E définie par :

$$L_x(y) = x * y, \text{ pour tout } y \in E. \quad (2.1)$$

On munit E du crochet suivant :

$$[x, y] = x * y - y * x. \quad (2.2)$$

Soit $\mathcal{L}(E) = \{f : E \longrightarrow E, f \text{ linéaire}\}$. On munit $\mathcal{L}(E)$ du crochet de Lie habituel :

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f, \text{ pour tout } f, g \in \mathcal{L}(E).$$

$(E, *)$ est dite algèbre pré-Lie à gauche [2] si :

$$L_{[x,y]} = [L_x, L_y], \text{ pour tout } x, y \in E, \quad (2.3)$$

i.e.

$$(x * y - y * x) * z = x * (y * z) - y * (x * z), \text{ pour tout } x, y, z \in E. \quad (2.4)$$

Ainsi une algèbre pré-Lie à gauche [8] est un K -espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire $*$ vérifiant la relation suivante : Pour tout x, y et z dans L :

$$(x * y) * z - x * (y * z) = (y * x) * z - y * (x * z). \quad (2.5)$$

C'est-à-dire si on note par (x, y, z) l'expression $(x * y) * z - x * (y * z)$ la relation (2.5) s'écrit :

$$(x, y, z) = (y, x, z). \quad (2.6)$$

De la même manière si on a :

$$(x, y, z) = (x, z, y) \text{ pour tout } x, y, z \in L, \quad (2.7)$$

on dira que L est une algèbre pré-Lie à droite.

En particulier, si $(L, *)$ est une algèbre pré-Lie à gauche alors $(L, *^{\text{op}})$ est une algèbre pré-Lie à droite où $*^{\text{op}}$ est défini par :

$$x *^{\text{op}} y = y * x. \quad (2.8)$$

Proposition 9 Une algèbre pré-Lie $(L, *)$ munie du crochet :

$$[x, y] = x * y - y * x \text{ pour tout } x, y \in L, \quad (2.9)$$

est une algèbre de Lie.

Preuve : On vérifie facilement l'identité de Jacobi. □

Exemples 10 1. Les algèbres associatives sont des algèbres pré-Lie.

2. Soient $E = K[x_1, \dots, x_n]$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et V est l'ensemble des sommes des $U_i \partial_i$ où $U_i \in E$.

On définit \star par :

$$U_i \partial_i \star W_j \partial_j = U_i \partial_i (W_j) \partial_j.$$

On vérifie facilement que l'algèbre (V, \star) est une algèbre pré-Lie à gauche.

3. L'algèbre de Faà di Bruno : Soit $V = \text{vect}(e_i, i \in \mathbb{N}^*)$, on définit \star par

$$e_i \star e_j = j e_{i+j}.$$

On vérifie que (V, \star) est une algèbre pré-Lie à gauche. L'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Faà di Bruno associée au groupe des difféomorphismes formels de la droite tangents à l'identité.

3 L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK}

3.1 Définition

Soit \mathcal{T}_n l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés à n sommets. Soit \mathcal{T} l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$. L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer [10] est définie comme l'algèbre symétrique de \mathcal{T} , i.e : $\mathcal{H}_{CK} = S(\mathcal{T})$. On note $\mathbf{1}$ l'unité de \mathcal{H}_{CK} identifiée à l'arbre vide. Le coproduit Δ_{CK} [14] est défini par :

$$\Delta_{CK}(t) = \mathbf{1} \otimes t + t \otimes \mathbf{1} + \sum_{c \in \text{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t), \quad (2.10)$$

où $\text{Adm}(t)$ désigne l'ensemble des coupes admissibles c de l'arbre t , où $P^c(t)$ correspond au branchage et $R^c(t)$ correspond au tronc. On rappelle qu'une coupe est un ensemble non vide d'arêtes. Une coupe est dite non admissible s'il existe un sommet de t tel que le trajet de la racine à ce dernier rencontre au moins 2 arêtes de la coupe. Une coupe élémentaire est une coupe contenant une seule arête de t . Si $F = t_1.t_2\dots.t_n$ est une forêt, on a :

$$\Delta_{CK}(F) = \Delta_{CK}(t_1)\Delta_{CK}(t_2)\dots\Delta_{CK}(t_n). \quad (2.11)$$

On peut voir autrement la formule du coproduit en introduisant la définition très naturelle suivante proposée par A. Murua pour les coupes admissibles :

Toute forêt F définit une structure d'ensemble partiellement ordonné sur l'ensemble $v(F)$ de ses sommets : pour tout $x, y \in v(F)$ on posera $x < y$ s'il existe un chemin qui relie la racine d'un des arbres de la forêt à y en passant par x . Une coupe admissible est alors la donnée de deux parties A et B de $v(F)$ telles que $A \amalg B = v(F)$, $A \cap B = \emptyset$ et $A < B$, c'est-à-dire que si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x < y$ ou x et y ne sont pas comparables. Le coproduit s'écrit alors :

$$\Delta_{CK}(F) = \sum_{A \amalg B = v(F), A < B} F_B \otimes F_A, \quad (2.12)$$

où le tronc F_A (resp. le branchage F_B) est la forêt définie par A (resp. B) et les arêtes reliant deux sommets de A (resp. B). Il est à noter que la relation $<$ ainsi définie sur les parties de $v(F)$ n'est pas transitive. La coassociativité du coproduit découle de la formule suivante, dont la preuve est immédiate :

$$(I \otimes \Delta_{CK})\Delta_{CK}(F) = (\Delta_{CK} \otimes I)\Delta_{CK}(F) = \sum_{A \amalg B \amalg C = v(F), A < B < C} F_C \otimes F_B \otimes F_A, \quad (2.13)$$

où la notation $A < B < C$ signifie que $A < B$, $B < C$ et $A < C$.

\mathcal{H}_{CK} est une algèbre de Hopf graduée, la graduation est suivant le nombre de sommets.

Exemple 3

$$\Delta_{CK}(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}) = \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \otimes \mathbf{1} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \dots \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \quad (2.14)$$

3.2 Dual gradué de \mathcal{H}_{CK}

Soit \mathcal{H}_{CK}^0 le dual gradué de \mathcal{H}_{CK} : $\mathcal{H}_{CK}^0 = \bigoplus (\mathcal{H}_{CK,n})^*$ où $\mathcal{H}_{CK,n}$ désigne l'espace vectoriel engendré par les forêts à n sommets. Alors \mathcal{H}_{CK}^0 est une algèbre de Hopf [14]. On note (δ_u) la base duale dans $(\mathcal{H}_{CK,n})^*$ de la base des forêts de degré n dans $\mathcal{H}_{CK,n}$. La correspondance $u \mapsto \delta_u$, définie sur les forêts, s'étend en un isomorphisme linéaire de \mathcal{H}_{CK} sur son dual gradué \mathcal{H}_{CK}^0 . On désigne par $*$ le produit de convolution sur le dual de \mathcal{H}_{CK} . Ce produit se restreint à \mathcal{H}_{CK}^0 en le dual gradué du coproduit de \mathcal{H}_{CK} .

Lemme 11 (voir [4]) *Pour tout t arbre dans \mathcal{T} l'élément δ_t est un caractère infinitésimal (i.e. $\delta_t(xy) = \delta_t(x)e(y) + e(x)\delta_t(y)$ pour tout x, y arbres dans \mathcal{T} , où e est l'élément neutre pour le produit de convolution $*$). La famille $(\delta_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une base de l'espace $\text{Prim } \mathcal{H}_{CK}^0$ des caractères infinitésimaux de \mathcal{H}_{CK} qui sont dans \mathcal{H}_{CK}^0 .*

Lemme 12 *L'espace des caractères infinitésimaux est une algèbre de Lie pour le crochet :*

$$[\alpha, \beta] = \alpha * \beta - \beta * \alpha. \quad (2.15)$$

Preuve :

Il suffit de montrer que le crochet de deux caractères infinitésimaux est un caractère infinitésimal : soient donc α, β deux caractères infinitésimaux et $x, y \in \mathcal{H}_{CK}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha * \beta(xy) &= \sum_{(x)} \sum_{(y)} \alpha(x_1 y_1) \beta(x_2 y_2) \\ &= \sum_{(x)} \sum_{(y)} \alpha(x_1) \beta(x_2) e(y_1) e(y_2) \\ &\quad + \sum_{(x)} \sum_{(y)} \alpha(y_1) \beta(x_2) e(x_1) e(y_2) \\ &\quad + \sum_{(x)} \sum_{(y)} \alpha(x_1) \beta(y_2) e(y_1) e(x_2) \\ &\quad + \sum_{(x)} \sum_{(y)} \alpha(y_1) \beta(y_2) e(x_1) e(x_2) \\ &= \alpha * \beta(x) e(y) + \alpha(x) \beta(y) + \beta(x) \alpha(y) + e(x) \alpha * \beta(y), \end{aligned}$$

de même

$$\beta * \alpha(xy) = \beta * \alpha(x) e(y) + \beta(x) \alpha(y) + \alpha(x) \beta(y) + e(x) \beta * \alpha(y),$$

donc

$$(\alpha * \beta - \beta * \alpha)(xy) = (\alpha * \beta - \beta * \alpha)(x) e(y) + e(x) (\alpha * \beta - \beta * \alpha)(y).$$

Ainsi $[\alpha, \beta]$ est un caractère infinitésimal. □

3.3 La loi pré-Lie de greffe

Soient t, t' et x des arbres dans \mathcal{T} , on définit :

$$\langle \delta_{t \rightarrow t'}, x \rangle = \sum_{c \in \mathcal{E}lm(x)} \langle \delta_t, P^c(x) \rangle \langle \delta_{t'}, R^c(x) \rangle, \quad (2.16)$$

où $\mathcal{E}lm(x)$ désigne l'ensemble des coupes élémentaires de x . Ainsi $\langle \delta_{t \rightarrow t'}, x \rangle$ est le nombre de coupes élémentaires de x tels que $P^c(x) = t$ et $R^c(x) = t'$. Par suite :

$$t \rightarrow t' = \sum_{x \text{ arbre}} N(t, t', x)x, \quad (2.17)$$

où $N(t, t', x)$ est le nombre de coupes élémentaires de x tels que $P^c(x) = t$ et $R^c(x) = t'$. On obtient :

$$[\delta_t, \delta_{t'}] = \delta_{t \rightarrow t' - t' \rightarrow t}. \quad (2.18)$$

Exemple 4

$$\bullet \rightarrow \heartsuit = \heartsuit + 3\spadesuit \quad (2.19)$$

Pour un arbre t on note $\sigma(t)$ son facteur de symétrie, c'est-à-dire le nombre d'automorphismes de t . On définit une autre loi \rightarrow_σ liée à la précédente comme suit :

$$t \rightarrow_\sigma t' = \sum_{x \text{ arbre}} M(t, t', x)x, \quad (2.20)$$

où $M(t, t', x) = N(t, t', x) \frac{\sigma(t)\sigma(t')}{\sigma(x)}$ est le nombre de manières de greffer t sur t' pour obtenir x [16].

Exemple 5

$$\bullet \rightarrow_\sigma \heartsuit = 2\heartsuit + \spadesuit \quad (2.21)$$

On a de façon évidente :

$$\phi(t \rightarrow_\sigma t') = \phi(t) \rightarrow \phi(t'), \quad (2.22)$$

où ϕ est l'isomorphisme linéaire de \mathcal{T} dans \mathcal{T} défini par $\phi(t) = \sigma(t)t$ pour tout arbre t .

Proposition 13 *Les lois de greffe \rightarrow et \rightarrow_σ sont des lois pré-Lie à gauche.*

Preuve : Soient t, t' et t'' des arbres dans \mathcal{T} , on a :

$$t' \rightarrow_\sigma t'' = \sum_{v \in t''} t' \circ_v t'', \quad (2.23)$$

où $t' \circ_v t'' :=$ est donné par la greffe de t' sur le sommet v de t'' . Par suite :

$$t \rightarrow_\sigma (t' \rightarrow_\sigma t'') = t \rightarrow_\sigma \left(\sum_{v \in t''} t' \circ_v t'' \right) \quad (2.24)$$

$$= \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} (t \circ_w t') \circ_v t'' + \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} t \circ_w (t' \circ_v t''). \quad (2.25)$$

De même on a :

$$(t \rightarrow_{\sigma} t') \rightarrow_{\sigma} t'' = \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} t \circ_w (t' \circ_v t''). \quad (2.26)$$

Ainsi $t \rightarrow_{\sigma} (t' \rightarrow_{\sigma} t'') - (t \rightarrow_{\sigma} t') \rightarrow_{\sigma} t'' = \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} t \circ_w (t' \circ_v t'')$. On voit que le membre de droite est symétrique en t et t' , ce qui montre que \rightarrow_{σ} est pré-Lie à gauche. L'assertion pour la loi \rightarrow s'en déduit immédiatement grâce à (2.22). □

4 L'algèbre de Hopf \mathcal{H}

4.1 Définition

Soit \mathcal{T}' l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés qui contiennent au moins une arête. On définit \mathcal{H} [4] comme l'algèbre symétrique de \mathcal{T}' i.e. $\mathcal{H} = S(\mathcal{T}')$. L'unité de \mathcal{H} est identifiée à l'arbre sans arêtes \bullet . Cette algèbre est caractérisée par son coproduit Δ tel que $\Delta(\bullet) = \bullet \otimes \bullet$ et par :

$$\Delta(t) = \sum_{s \text{ sous-forêt de } t} s \otimes t/s, \quad (2.27)$$

pour tout arbre t ayant au moins une arête. Une sous-forêt s de t est soit la forêt triviale \bullet et dans ce cas $t/s = t$, soit une collection (t_1, t_2, \dots, t_n) de sous-arbres disjoints de t et non triviaux (i.e. ayant chacun au moins une arête). L'arbre t/s est l'arbre contracté que l'on obtient en écrasant chaque composante de la sous-forêt sur un point (voir [4]).

Exemple 6

$$\Delta(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = \bullet \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \bullet + 2 \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}. \quad (2.28)$$

Cette algèbre est une algèbre de Hopf graduée [14], la graduation étant suivant le nombre des arêtes.

4.2 Dual gradué de \mathcal{H}

Soit \mathcal{H}^0 le dual gradué de \mathcal{H} , soit (Z_s) , (s forêt dans \mathcal{H}) la base duale de la base des forêts de \mathcal{H} . Pour tout $t \in \mathcal{T}'$, Z_t est un caractère infinitésimal (donc primitif dans \mathcal{H}^0), et la famille $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}'}$ est une base de l'espace $\text{Prim } \mathcal{H}^0$ des caractères infinitésimaux de \mathcal{H} qui sont dans \mathcal{H}^0 . Si on note par \star le produit de convolution dans \mathcal{H}^0 , on obtient que l'ensemble des caractères infinitésimaux de \mathcal{H} est une algèbre de Lie pour le crochet suivant :

$$[Z_t, Z_u] = Z_t \star Z_u - Z_u \star Z_t, \quad (2.29)$$

où t et u sont des arbres dans \mathcal{T}' . On a :

$$\begin{aligned}
\langle Z_t \star Z_u, v \rangle &= \langle Z_t \otimes Z_u, \Delta(v) \rangle \\
&= \sum_{s \text{ dans } v} \langle Z_t, s \rangle \langle Z_u, v/s \rangle \\
&= \mathcal{N}(t, u, v),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(t, u, v)$ est le nombre de sous arbres de v isomorphes à t tel que le contracté v/t soit isomorphe à u .

4.3 La loi pré-Lie d'insertion

On définit la loi \triangleright comme l'insertion d'un arbre dans un autre (voir [4]), pour deux arbres t et t' on définit :

$$t \triangleright t' = \sum_{x \text{ arbre}} \mathcal{N}(t, t', x)x. \quad (2.30)$$

On obtient alors :

$$Z_t \star Z_{t'} - Z_{t'} \star Z_t = Z_{t \triangleright t'} - Z_{t' \triangleright t}. \quad (2.31)$$

Exemple 7

$$\mathfrak{I} \triangleright \mathfrak{V} = 2\mathfrak{I}\mathfrak{V} + \mathfrak{Y} + 3\mathfrak{V}\mathfrak{V}. \quad (2.32)$$

Soit Π la projection de \mathcal{H}^0 sur $Prim(\mathcal{H}^0)$ parallèlement à $\mathcal{H}' = \langle Z_f \rangle$ où f est une forêt non triviale (produit d'au moins deux arbres), et soit $\tilde{\Pi} = Id_{\mathcal{H}^0} - \Pi$. On aura :

$$Z_{t \triangleright t'} = \Pi(Z_t \star Z_{t'}) \quad (2.33)$$

Lemme 14 *Soit t un arbre et f une forêt non vide. Alors :*

$$\Pi(Z_t \star Z_f) = \Pi(Z_t \star \Pi(Z_f)). \quad (2.34)$$

Preuve :

-Si f est un arbre on a directement le résultat.

-Si f est une forêt non triviale, soit u un arbre. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle Z_t \star Z_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes Z_f, \Delta(u) \rangle \\
&= \sum_{s \text{ sous-forêt de } u} \langle Z_t, s \rangle \langle Z_f, u/s \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car u/s arbre. Ainsi :

$$\Pi(Z_t \star Z_f) = \Pi(Z_t \star \Pi(Z_f)) = 0.$$

□

Lemme 15 Soient t, u deux arbres alors :

$$\tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u) = \tilde{\Pi}(Z_u \star Z_t). \quad (2.35)$$

Preuve : Les éléments primitifs de \mathcal{H}^0 forment une algèbre de Lie pour la convolution \star , ce qui prouve :

$$\tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u - Z_u \star Z_t) = 0.$$

□

Proposition 16 La loi d'insertion est une loi pré-Lie à gauche.

Preuve : Soient t, u et v trois arbres. On a :

$$\begin{aligned} Z_{t \triangleright (u \triangleright v) - (t \triangleright u) \triangleright v} &= \Pi(Z_t \star Z_{u \triangleright v}) - \Pi(Z_{t \triangleright u} \star Z_v) \\ &= \Pi(Z_t \star \Pi(Z_{u \triangleright v})) - \Pi(\Pi(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\ &= \Pi(Z_t \star Z_u \star Z_v) - \Pi(\Pi(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\ &= \Pi(\tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\ &= \Pi(\tilde{\Pi}(Z_u \star Z_t) \star Z_v) \quad (\text{d'après le lemme 15}) \\ &= Z_{u \triangleright (t \triangleright v) - (u \triangleright t) \triangleright v}, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$t \triangleright (u \triangleright v) - (t \triangleright u) \triangleright v = u \triangleright (t \triangleright v) - (u \triangleright t) \triangleright v.$$

Par suite \triangleright est une loi pré-Lie à gauche.

□

Remarque 17 La proposition 13 peut se montrer d'une manière analogue. De manière générale pour toute algèbre de Hopf commutative libre $\mathcal{A} = S(V)$ sur un espace vectoriel V avec $\Delta(V) \subset \mathcal{A} \otimes (V \oplus K)$ on obtient ainsi une loi pré-Lie à gauche sur V ([22] § 5).

5 Relation entre \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}

L'algèbre de Hopf \mathcal{H} coagit à gauche (resp. à droite) sur l'algèbre de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK} (voir [4]) par l'unique morphisme d'algèbres $\Phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ (resp. $\Psi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}$) défini par : $\Phi(\mathbf{1}) = \bullet \otimes \mathbf{1}$ (resp. $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \bullet$) et $\Phi(t) = \Delta(t)$ (resp. $\Psi(t) = \Delta(t)$) si $t \neq \mathbf{1}$.

Théorème 18 (voir le théorème 8 de [4]) L'application Φ vérifie :

$$(Id_{\mathcal{H}} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{CK}, \quad (2.36)$$

i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{CK} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \\ \Delta_{CK} \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta_{CK} \\ \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK} & & \\ \Phi \otimes \Phi \downarrow & & \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} & \xrightarrow{m^{1,3}} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK} \end{array}$$

où :

$$\begin{aligned} m^{1,3} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK} \\ a \otimes b \otimes c \otimes d &\longmapsto ac \otimes b \otimes d \end{aligned}$$

On remarque que \mathcal{H}_{CK} est une \mathcal{H} -comodule cogèbre, c'est-à-dire une cogèbre dans la catégorie des \mathcal{H} -comodules.

On désignera par \star le produit de \mathcal{H}^0 dual du coproduit Δ , et on notera de la même manière les actions à gauche et à droite de \mathcal{H}^0 sur \mathcal{H}_{CK}^0 obtenues en dualisant les coactions Φ et Ψ .

Proposition 19 Soient $\alpha \in \mathcal{H}^0$ et $a \in \mathcal{H}_{CK}^0$ alors on a :

$$\alpha \star Z_{\bullet} = Z_{\bullet} \star \alpha = \alpha \quad (2.37)$$

$$Z_{\bullet} \star a = a \star Z_{\bullet} = a \quad (2.38)$$

Preuve : voir corollaire 12 de [4].

□

6 Les quatre lois pré-Lie

En plus des deux lois pré-Lie \rightarrow et \rightarrow_{σ} définies au paragraphe 3.3 et de la loi \triangleright définie au paragraphe 4.3, on définit pour $u, v \in \mathcal{T}'$:

$$u \triangleright_{\sigma} v = \sum_{w \text{ arbre}} \mathcal{M}(u, v, w)w, \quad (2.39)$$

où $\mathcal{M}(u, v, w) = \mathcal{N}(u, v, w) \frac{\sigma(u)\sigma(v)}{\sigma(w)}$ représente le nombre de manières d'insérer u dans v pour obtenir w .

Exemple 8

$$\mathfrak{!} \triangleright_{\sigma} \mathfrak{V} = 4 \mathfrak{!} \mathfrak{V} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{V} \tag{2.40}$$

On a de façon évidente une relation analogue à (2.22) :

$$\phi(u \triangleright_{\sigma} v) = \phi(u) \triangleright \phi(v), \tag{2.41}$$

La question qui se pose ici est la suivante : y a-t-il une relation reliant les deux structures pré-Lie \rightarrow et \triangleright (ou de façon équivalente, \rightarrow_{σ} et \triangleright_{σ}) ?

7 Relation entre les lois pré-Lie de greffe et d'insertion

Dans ce paragraphe nous montrons qu'il y a une relation reliant les deux structures pré-Lie précédentes.

Théorème 20 *Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}^0$ et $a, b \in \mathcal{H}_{CK}^0$ on a :*

$$\sum_{(\alpha)} (\alpha_1 \star a) \star (\alpha_2 \star b) = \alpha \star (a \star b), \tag{2.42}$$

où l'on utilise la notation de Sweedler : $\Delta(\alpha) = \sum_{(\alpha)} \alpha_1 \otimes \alpha_2$ ([1], [16], [29]). Autrement dit \mathcal{H}_{CK}^0 est une \mathcal{H}^0 -algèbre, c'est-à-dire une algèbre dans la catégorie des \mathcal{H}^0 -modules.

Preuve :

En appliquant le foncteur "dual gradué" au diagramme du théorème 18 on obtient le résultat. □

En conséquence si $\alpha \in \mathcal{H}^0$ est un caractère infinitésimal, en particulier α est un élément primitif donc :

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes Z_{\bullet} + Z_{\bullet} \otimes \alpha. \tag{2.43}$$

Par suite pour tout $a, b \in \mathcal{H}_{CK}^0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \star (a \star b) &= (\alpha \star a) \star (Z_{\bullet} \star b) + (Z_{\bullet} \star a) \star (\alpha \star b) \\ &= (\alpha \star a) \star b + a \star (\alpha \star b), \quad (\text{d'après la proposition 19}). \end{aligned}$$

Soit Π_{CK} la projection de \mathcal{H}_{CK}^0 sur les éléments primitifs de \mathcal{H}_{CK}^0 parallèlement à $\mathcal{H}'_{CK} = \langle \delta_f \rangle$ où f est une forêt non triviale.

Lemme 21 *Soit f une forêt non vide et t un arbre dans \mathcal{T} alors on a :*

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f)) \tag{2.44}$$

Preuve :

- Si f est un arbre, on a directement le résultat car $\Pi_{CK}(\delta_f) = \delta_f$.

- Si f est une forêt non triviale, soit u un arbre dans \mathcal{H}_{CK} alors deux cas se présentent : $u = \mathbf{1}$ ou $u \in \text{Ker } \epsilon$, où ϵ est la co-unité pour l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} .

* Si $u = \mathbf{1}$ alors :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \Phi(\mathbf{1}) \rangle \\ &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \bullet \otimes \mathbf{1} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

or $\Pi_{CK}(\delta_f) = 0$, donc le résultat est vrai pour $\mathbf{1}$.

* Si $u \in \text{Ker } \epsilon$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \Delta(u) \rangle \\ &= \sum_{s \text{ sous-forêt de } u} Z_t(s) \delta_f(u/s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Car le contracté u/s est un arbre. Ainsi on obtient que :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = 0 = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f)).$$

Par suite on conclut que :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f)).$$

□

Lemme 22 Pour tout arbre $t \in \mathcal{T}'$ et $u \in \mathcal{T}$ on a :

$$Z_t \star \delta_u = \delta_{t \triangleright u} \tag{2.45}$$

Preuve : Soit w une forêt dans \mathcal{T} alors :

-Si $w = \mathbf{1}$ alors $\langle Z_t \star \delta_u, w \rangle = 0 = \langle \delta_{t \triangleright u}, \mathbf{1} \rangle$.

-Si w est un arbre non vide, alors :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_u, w \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_u, \Delta(w) \rangle \\ &= \sum_{s \text{ sous-forêt de } w} \langle Z_t, s \rangle \langle \delta_u, u/s \rangle \\ &= \langle \delta_{t \triangleright u}, w \rangle. \end{aligned}$$

-Si w est une forêt non vide et produit d'au moins deux arbres non vides, w s'écrit w_1w_2 où $w_1, w_2 \in \text{Ker } \epsilon$. Comme Φ est un morphisme d'algèbres on a :

$$\begin{aligned}
\langle Z_t \star \delta_u, w_1w_2 \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_u, \Phi(w_1)\Phi(w_2) \rangle \\
&= \sum_{\substack{s_1 \text{ sous-forêt de } w_1, \\ s_2 \text{ sous-forêt de } w_2}} \langle Z_t, s_1s_2 \rangle \langle \delta_u, (w_1/s_1)(w_2/s_2) \rangle \\
&= 0 = \langle \delta_{t \triangleright u}, w_1w_2 \rangle .
\end{aligned}$$

□

Théorème 23 Pour tout $t \in \mathcal{T}'$ et $u, v \in \mathcal{T}$ on a :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (t \triangleright u) \rightarrow v + u \rightarrow (t \triangleright v). \quad (2.46)$$

Preuve : Soient $t \in \mathcal{T}'$ et $u, v \in \mathcal{T}$. On a d'après le théorème 20 :

$$Z_t \star (\delta_u \star \delta_v) = (Z_t \star \delta_u) \star \delta_v + \delta_u \star (Z_t \star \delta_v)$$

donc :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star (\delta_u \star \delta_v)) = \Pi_{CK}((Z_t \star \delta_u) \star \delta_v) + \Pi_{CK}(\delta_u \star (Z_t \star \delta_v)).$$

Par suite :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_u \star \delta_v)) = \Pi_{CK}(\delta_{t \triangleright u} \star \delta_v) + \Pi_{CK}(\delta_u \star \delta_{t \triangleright v}), \text{ (lemmes 21+22).}$$

Ainsi

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_{u \rightarrow v}) = \delta_{(t \triangleright u) \rightarrow v} + \delta_{u \rightarrow (t \triangleright v)},$$

d'où :

$$\delta_{t \triangleright (u \rightarrow v)} = \delta_{(t \triangleright u) \rightarrow v} + \delta_{u \rightarrow (t \triangleright v)},$$

ce qui prouve que :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (t \triangleright u) \rightarrow v + u \rightarrow (t \triangleright v).$$

□

Remarque 24 D'après (2.22), (2.41) et le théorème précédent on montre aussi que pour tout $t \in \mathcal{T}'$ et $u, v \in \mathcal{T}$:

$$t \triangleright_{\sigma} (u \rightarrow_{\sigma} v) = (t \triangleright_{\sigma} u) \rightarrow_{\sigma} v + u \rightarrow_{\sigma} (t \triangleright_{\sigma} v). \quad (2.47)$$

7.1 Quelques calculs explicites

Exemple 9 Soient $t = \mathbf{!}$, $u = \bullet$ et $v = \mathbf{!}$ on a :

$$u \rightarrow v = \bullet \rightarrow \mathbf{!} = \mathbf{!} + 2\mathbf{V}, \quad (2.48)$$

donc :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = \mathbf{!} \triangleright \mathbf{!} + 2\mathbf{!} \triangleright \mathbf{V} \quad (2.49)$$

$$= 3\mathbf{!} + 2\mathbf{Y} + \mathbf{!V} + (4\mathbf{!V} + 2\mathbf{Y} + 6\mathbf{V}) \quad (2.50)$$

$$= 3\mathbf{!} + 4\mathbf{Y} + 5\mathbf{!V} + 6\mathbf{V}. \quad (2.51)$$

Or :

$$t \triangleright v = \mathbf{!} \triangleright \mathbf{!} = 2\mathbf{!} + 2\mathbf{V}, \quad (2.52)$$

donc :

$$\begin{aligned} u \rightarrow (t \triangleright v) &= 2(\bullet \rightarrow \mathbf{!}) + 2(\bullet \rightarrow \mathbf{V}) \\ &= 2(\mathbf{!} + 2\mathbf{Y} + \mathbf{!V}) + 2(\mathbf{!V} + 3\mathbf{V}) \\ &= 2\mathbf{!} + 4\mathbf{Y} + 4\mathbf{!V} + 6\mathbf{V}, \end{aligned}$$

par suite :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v) = \mathbf{!} + \mathbf{!V}, \quad (2.53)$$

or :

$$\begin{aligned} (t \triangleright u) \rightarrow v &= (\mathbf{!} \triangleright \bullet) \rightarrow \mathbf{!} \\ &= \mathbf{!} \rightarrow \mathbf{!} \\ &= \mathbf{!} + \mathbf{!V}, \end{aligned}$$

ce qui est la différence $t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v)$.

Exemple 10 On prend dans cet exemple :

$$t = \mathbf{!}, u = \mathbf{V}, v = \mathbf{Y}.$$

- Calcul de $t \triangleright (u \rightarrow v)$.

On a :

$$u \rightarrow v = \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \searrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \end{array}.$$

Donc :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (\downarrow \triangleright \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array}) + (\downarrow \triangleright \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array}) + 2(\downarrow \triangleright \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \end{array}).$$

Notant respectivement (1), (2) et (3) les termes précédentes, on aura :

$$\begin{aligned} (1) &= 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} + 3 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \end{array} + 3 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array}, \\ (2) &= 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \end{array} + 3 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + 3 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \vee \end{array}, \\ (3) &= 4 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + 6 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + 4 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (1) + (2) + (3). \quad (2.54)$$

-Calcul de $u \rightarrow (t \triangleright v)$:

On a :

$$\begin{aligned} t \triangleright v &= \downarrow \triangleright \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \end{array} \\ &= 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} + 3 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$u \rightarrow (t \triangleright v) = 2(\begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array}) + 3(\begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array}) + 2(\begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array}) + \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array},$$

Notant (1'), (2'), (3') et (4') les termes de la somme précédente on aura :

$$\begin{aligned} (1') &= 2(\begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array}), \\ (2') &= 3(\begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \end{array}), \\ (3') &= 2(\begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \vee \end{array}), \\ (4') &= \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + 2 \begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \downarrow \vee \vee \vee \vee \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \vee \vee \vee \vee \vee \end{array}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u \rightarrow (t \triangleright v) = (1') + (2') + (3') + (4'). \quad (2.55)$$

La différence (2.54)-(2.55), nous donne :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v) = \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array}.$$

-Calcul de $(t \triangleright u) \rightarrow v$:

On a :

$$\begin{aligned} t \triangleright u &= \begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \\ \text{!} \end{array} \triangleright \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$(t \triangleright u) \rightarrow v = \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + 2 \left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} \right) + 3 \left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{Y} \\ \text{Y} \end{array} \right),$$

ce qui est bien la différence $t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v)$.

7.2 Une approche opéradique

Le théorème 23 est un cas particulier d'un phénomène général de nature opéradique. Rappelons qu'une opérade vectorielle unitaire \mathcal{P} est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'un espace vectoriel \mathcal{P}_n muni d'une action à droite du groupe symétrique S_n , et d'une loi de composition :

$$\gamma : \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_{p_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{p_n} \longrightarrow \mathcal{P}_{p_1+p_2+\cdots+p_n} \quad (2.56)$$

satisfaisant des axiomes d'associativité et d'équivariance par rapport aux actions des groupes symétriques en présence (voir Chapitre 4 Paragraphes 1 et 2 pour une définition des opérades).

L'unitarité s'exprime par l'existence d'un $e \in \mathcal{P}_1$ tel que :

$$\gamma(e; \beta) = \beta \text{ et} \quad (2.57)$$

$$\gamma(\beta; e, e, \dots, e) = \beta. \quad (2.58)$$

Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}_n, \beta \in \mathcal{P}_p$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ la composition partielle $\alpha \circ_i \beta \in \mathcal{P}_{n+p-1}$ est définie par :

$$\alpha \circ_i \beta = \gamma(\alpha; \underbrace{e, \dots, e}_{i-1 \text{ termes}}, \beta, e, \dots, e). \quad (2.59)$$

Lorsque l'opérade est augmentée, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{P}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{P}_1 = K$, la somme des compositions partielles :

$$\alpha \triangleleft \beta := \sum_{i=1}^n \alpha \circ_i \beta \quad (2.60)$$

est une loi pré-Lie à droite sur $\bigoplus_{k \geq 2} \mathcal{P}_k$ [6], que l'on étend à \mathcal{P} en entier en posant $e \triangleleft \alpha = \alpha \triangleleft e = \alpha$.

L'associativité et l'équivariance impliquent notamment :

1. Pour tout $\sigma \in S_n$ et pour tout $\tau \in S_p$, on a :

$$(\alpha\sigma) \circ_i (\beta\tau) = (\alpha \circ_i \beta)(\sigma \circ_i \tau),$$

où $\sigma \circ_i \tau$ est la permutation de $\{1, \dots, n+p-1\}$ obtenue en permutant $\{i, \dots, i+p-1\}$ à l'aide de τ , puis en permutant $\{1, \dots, i-1, \{i+1, \dots, n+p-1\}, i+1, \dots, n+p-1\}$ à l'aide de σ .

2. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}_n$, pour tout $\beta_j \in \mathcal{P}_{p_j}, j = 1, \dots, n$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{P}_q$ on a l'égalité suivante dans $\mathcal{P}_{p_1+\dots+p_n+q-1}$:

$$\gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j \circ_i \alpha, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n) = \gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_n) \circ_{p_1+\dots+p_{j-1}+i} \alpha. \quad (2.61)$$

3. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}_n, \beta_j \in \mathcal{P}_{p_j}, j = 1, \dots, n$ et pour tout $\sigma \in S_n, \tau_j \in S_{p_j}$ on a :

$$\gamma(\mu\sigma; \beta_1\tau_1, \dots, \beta_n\tau_n) = \gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_n)\gamma(\sigma; \tau_1, \dots, \tau_n),$$

où $\gamma(\sigma; \tau_1, \dots, \tau_n)$ est la permutation de $\{1, 2, \dots, p_1+p_2+\dots+p_n\}$ obtenue en permutant les éléments $(p_1+\dots+p_{j-1}+1, \dots, p_1+\dots+p_n)$ du j -ème bloc par τ_j , puis en permutant les blocs par σ .

L'algèbre libre à un générateur $A_{\mathcal{P}}$ sur l'opérade \mathcal{P} [15] est donnée par $\bigoplus_{n>0} \mathcal{P}_n/S_n$. Les trois égalités ci-dessus impliquent que les compositions partielles passent au quotient ainsi que la loi pré-Lie \triangleleft , et que nous avons pour toute opération n -aire μ sur $A_{\mathcal{P}}$ et $a_j \in \mathcal{P}_{p_j}/S_{p_j}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\mu(a_1, \dots, a_{j_1}, a_j \circ_i b, a_{j+1}, \dots, a_n) = \mu(a_1, a_2, \dots, a_n) \circ_{p_1+p_2+\dots+p_{j-1}+i} b.$$

En sommant sur tous les i possibles de 1 jusqu'à p_j puis sur tout les j de 1 à n , on obtient donc :

$$\sum_{j=1}^n \mu(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j \triangleleft b, a_{j+1}, \dots, a_n) = \mu(a_1, a_2, \dots, a_n) \triangleleft b. \quad (2.62)$$

Le théorème 23 en découle en prenant pour \mathcal{P} l'opérade pré-Lie [8] et pour μ la loi de greffe à droite :

$$\mu(a, b) = a \leftarrow b.$$

On obtient bien :

$$(a \leftarrow b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \leftarrow b + a \leftarrow (b \triangleleft c).$$

Le théorème 23 s'en déduit par le fait que : $a \leftarrow b = b \rightarrow a$ et $a \triangleleft b = b \triangleright a$.

8 Produit semi-direct et produit croisé

8.1 Produit semi-direct d'algèbres pré-Lie

Soient $(\mathfrak{g}_1, \triangleright)$ et $(\mathfrak{g}_2, \rightarrow)$ deux algèbres pré-Lie à gauche. On suppose qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{g}_1 &\longrightarrow \text{Der } \mathfrak{g}_2 \\ X &\longmapsto D_X \end{aligned}$$

On munit le produit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ du produit bilinéaire, noté encore \triangleright , défini par :

$$(X_1, X_2) \triangleright (Y_1, Y_2) = (X_1 \triangleright Y_1, D_{X_1}Y_2 + X_2 \rightarrow Y_2). \quad (2.63)$$

Proposition 25 *La loi \triangleright définie ci-dessus est pré-Lie à gauche.*

Preuve : On plonge naturellement \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 dans \mathfrak{g} . Tout élément X de \mathfrak{g} s'écrit alors $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $X_2 \in \mathfrak{g}_2$. Pour montrer l'égalité $[L_\alpha, L_\beta]\gamma = L_{[\alpha, \beta]}\gamma$ pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}$, il suffit de la montrer pour α, β, γ dans \mathfrak{g}_1 ou \mathfrak{g}_2 .

– Premier cas : on suppose $\gamma \in \mathfrak{g}_1$. On écrit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$ avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathfrak{g}_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} [L_\alpha, L_\beta]\gamma &= [L_{\alpha_1}, L_{\beta_1}]\gamma \\ &= L_{[\alpha_1, \beta_1]}\gamma \\ &= L_{[\alpha, \beta]}\gamma. \end{aligned}$$

– Deuxième cas : on suppose $\gamma \in \mathfrak{g}_2$.

1. Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}_1$, on a :

$$[L_\alpha, L_\beta]\gamma = [D_\alpha, D_\beta]\gamma = D_{[\alpha, \beta]}\gamma = L_{[\alpha, \beta]}\gamma.$$

2. Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}_2$, on a directement :

$$[L_\alpha, L_\beta]\gamma = L_{[\alpha, \beta]}\gamma.$$

car \mathfrak{g}_2 est pré-Lie.

3. Si $\alpha \in \mathfrak{g}_1$ et $\beta \in \mathfrak{g}_2$, on a :

$$L_{[\alpha, \beta]}\gamma = [\alpha, \beta] \rightarrow \gamma = (D_\alpha\beta) \rightarrow \gamma,$$

tandis que :

$$[L_\alpha, L_\beta]\gamma = L_\alpha L_\beta \gamma - L_\beta L_\alpha \gamma = D_\alpha(\beta \rightarrow \gamma) - \beta \rightarrow (D_\alpha \gamma) = (D_\alpha\beta) \rightarrow \gamma.$$

Le cas $\alpha \in \mathfrak{g}_2$ et $\beta \in \mathfrak{g}_1$ s'en déduit par antisymétrie. □

L'algèbre pré-Lie \mathfrak{g} ainsi définie est le produit semi-direct de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 et se note $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$. La structure d'algèbre de Lie correspondante est le produit semi-direct des deux algèbres de Lie \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 . Le crochet s'écrit explicitement :

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], D_{X_1}Y_2 - D_{Y_1}X_2 + [X_2, Y_2]). \quad (2.64)$$

8.2 Produit croisé d'algèbres enveloppantes

Soit A une bigèbre et B une algèbre. On suppose qu'il existe $D : A \rightarrow \mathcal{L}(B)$ tel que :

$$D_a(bb') = \sum_{(a)} D_{a_1}bD_{a_2}b', \quad (2.65)$$

avec $\Delta(a) = \sum_{(a)} a_1 \otimes a_2$ (notation de Sweedler). On verra également D comme une application linéaire de $A \otimes B$ dans B via $D(a \otimes b) \simeq D(a)(b)$. On définit le produit suivant sur $A \otimes B$:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := \sum_{(a)} a_1a' \otimes bD_{a_2}b'. \quad (2.66)$$

Proposition 26 *Si la bigèbre A est cocommutative, le produit ci-dessus est associatif.*

Preuve : C'est un calcul direct en utilisant la notation de Sweedler. Soient $a, a', a'' \in A$ et $b, b', b'' \in B$. On a :

$$\begin{aligned} ((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') &= \sum_{(a)} (a_1a' \otimes bD_{a_2}b')(a'' \otimes b'') \\ &= \sum_{(a)} \sum_{(a_1a')} (a_1a')_1a'' \otimes bD_{a_2}b'D_{(a_1a')_2}b'' \\ &= \sum_{(a)} \sum_{(a')} a_1a'_1a'' \otimes bD_{a_3}b'D_{(a_2)}D_{(a'_2)}b'', \end{aligned}$$

tandis que :

$$\begin{aligned} (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')) &= \sum_{(a')} (a \otimes b)(a'_1a'' \otimes b'D_{a'_2}b'') \\ &= \sum_{(a')} \sum_{(a)} a_1a'_1a'' \otimes bD_{a_2}(b'D_{a'_2}b'') \\ &= \sum_{(a')} \sum_{(a)} a_1a'_1a'' \otimes bD_{a_2}b'D_{a_3}D_{a'_2}b'' \\ &= \sum_{(a)} \sum_{(a')} a_1a'_1a'' \otimes bD_{a_3}b'D_{a_2}D_{a'_2}b''. \end{aligned}$$

□

Considérons maintenant deux algèbres de Lie \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 . On suppose qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie $D : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g}_2$, on considère leur produit semi-direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$, le crochet étant donné par la formule (2.64). Le morphisme D induit un unique morphisme d'algèbres de Lie $D : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{Der } \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$, qui lui-même s'étend en un unique morphisme d'algèbres $D : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_2))$. Ce morphisme vérifie :

$$D_w(uv) = \sum_{(w)} D_{w_1}uD_{w_2}v, \quad (2.67)$$

où la notation de Sweedler se rapporte au coproduit de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$. Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 26.

Proposition 27 *L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Hopf au produit croisé $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$, le coproduit sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$ étant donné par $\Delta(u \otimes v) = \tau_{23}(\Delta(u) \otimes \Delta(v))$.*

Preuve :

On pose $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ et $B = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. Il existe ([11] Prop. 2.2.10) un unique isomorphisme linéaire $\varphi : A \otimes B \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\varphi(u \otimes v) = vu$ pour tout $u \in A$ et $v \in B$. Il faut montrer que φ est un isomorphisme d'algèbres lorsqu'on munit $A \otimes B$ du produit croisé. C'est une conséquence directe de l'égalité suivante dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$uv' = \sum_{(u)} (D_{u_2} v') u_1 \quad (2.68)$$

pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ et $v' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$. On a alors en effet pour tout $u, u' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ et $v, v' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi(u \otimes v) \varphi(u' \otimes v') &= vuv'u' \\ &= \sum_{(u)} v(D_{u_2} v') u_1 u' \\ &= \varphi \left(\sum_{(u)} u_1 u' \otimes v D_{u_2} v' \right) \\ &= \varphi((u \otimes v)(u' \otimes v')). \end{aligned}$$

L'égalité (2.68) se montre par récurrence sur le degré de filtration de u dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$, le cas $u = X \in \mathfrak{g}_1$ se réduisant à l'égalité :

$$Xv' = v'X + D_X v'. \quad (2.69)$$

Il reste à voir que φ est un morphisme de cogèbres, ce qui résulte du petit calcul suivant :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(u \otimes v) &= \Delta v \cdot \Delta u \\ &= \sum_{(u),(v)} v_1 u_1 \otimes v_2 u_2 \\ &= \sum_{(u),(v)} \varphi(u_1 \otimes v_1) \otimes \varphi(u_2 \otimes v_2) \\ &= (\varphi \otimes \varphi) \circ \tau_{23} \left(\sum_{(u),(v)} u_1 \otimes u_2 \otimes v_1 \otimes v_2 \right) \\ &= (\varphi \otimes \varphi) \circ \tau_{23}(\Delta u \otimes \Delta v) = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(u \otimes v). \end{aligned}$$

□

8.3 Coproduit croisé des deux algèbres de Hopf \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}

Nous appliquons les résultats du paragraphe précédent avec les deux algèbres de Lie correspondant aux deux algèbres pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$ et $(\mathcal{T}, \rightarrow)$. Dans ce cas le morphisme φ ci-dessus

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées. Avec les notations précédentes, $A = \mathcal{H}^0$, $B = \mathcal{H}_{CK}^0$, et le produit croisé sur $A \otimes B$ s'écrit :

$$\tilde{m} = (m_A \otimes m_B) \circ (I_A \otimes I_A \otimes I_B \otimes D) \circ \tau_{24} \circ (\Delta_A \otimes I_B \otimes I_A \otimes I_B) : A \otimes B \otimes A \otimes B \rightarrow A \otimes B. \quad (2.70)$$

On voit d'après le lemme 22 que la transposition \star de la coaction Φ restreinte à $A \otimes B$ coïncide avec l'action $D : A \otimes B \rightarrow B$ définie au paragraphe précédent. Considérant le dual gradué de l'algèbre de Hopf cocommutative $A \otimes B$, le produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ muni du produit usuel et du coproduit $\tilde{\Delta}$ dual de \tilde{m} est une algèbre de Hopf commutative. Le coproduit s'écrit donc :

$$\tilde{\Delta} = (m_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}_{CK}} \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}_{CK}}) \circ \tau_{24} \circ (I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}_{CK}} \otimes \Phi) \circ (\Delta_{\mathcal{H}} \otimes \Delta_{CK}). \quad (2.71)$$

Chapitre 3

Etude de l'algèbre pré-Lie d'insertion

1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'algèbre pré-Lie d'insertion, on montre qu'elle est engendrée par deux générateurs, et on montre qu'elle n'est pas libre en donnant deux familles non-triviales de relations.

2 Algèbre pré-Lie Libre

soit V un espace vectoriel. On définit l'algèbre pré-Lie libre sur V notée $PL(V)$ par la propriété universelle suivante : il existe $i : V \rightarrow PL(V)$ telle que pour toute algèbre pré-Lie A et toute application linéaire $\varphi : V \rightarrow A$, il existe un unique morphisme d'algèbres pré-Lie $\tilde{\varphi} : PL(V) \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} PL(V) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & A \\ \uparrow i & \nearrow \varphi & \\ V & & \end{array}$$

L'unicité de $PL(V)$ est claire. L'existence est obtenue comme quotient de l'algèbre magma-tique $M(V)$ par l'idéal engendré par les relations pré-Lie à gauche :

$$X(YZ) - (XY)Z - Y(XZ) + (YX)Z.$$

Théorème 28 [12], [8] *L'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}, \rightarrow)$ est l'algèbre pré-Lie libre à un seul générateur. Ce générateur est l'arbre à un seul sommet \bullet .*

Ce théorème, ou plutôt sa version à plusieurs générateurs faisant appel aux arbres colorés a été démontré par F. Chapoton et M. Livernet comme corollaire de leur description explicite de l'opérade pré-Lie [8]. Il a été également démontré par A. Dzhumadil'daev et Clas Löfwall dans [12] par sans faire appel aux opérades.

On peut remarquer que, dès 1857, A. Cayley [5] a découvert une relation entre les arbres

enracinés et les champs de vecteurs de \mathbb{R}^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il a mis en évidence pour tout champ de vecteurs X de \mathbb{R}^n une correspondance :

$$F_X : (\mathcal{T}, \rightarrow) \longrightarrow (\mathcal{X}(\mathbb{R}^n), \triangleright),$$

qui se trouve être l'unique morphisme d'algèbres pré-Lie tel que $F_X(\bullet) = X$. En analyse numérique, les champs de vecteurs $F_X(t)$, $t \in T$ sont appelés différentielles élémentaires [9].

3 Hauteur d'un sommet, Energie d'un arbre

Pour tout $n \geq 2$, on désigne par T_n l'ensemble des arbres à n sommets. E_1, E_2 sont respectivement \downarrow et \updownarrow .

Définition 14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et t un arbre. Pour tout sommet s de t on définit la hauteur de s par $h(s) :=$ Le nombre d'arêtes du chemin reliant la racine à ce sommet. On définit l'énergie de l'arbre t par :

$$d(t) = \sum_{s \text{ sommet de } t} h(s) \quad (3.1)$$

Exemple 11 $d(\bullet) = 0$

$$d(\downarrow) = 1$$

$$d(\swarrow) = 2, \quad d(\updownarrow) = 3,$$

$$d(\searrow) = 3, \quad d(\swarrow\downarrow) = 4, \quad d(\swarrow\updownarrow) = 5, \quad d(\updownarrow\downarrow) = 6, \dots$$

Il est clair que dans T_n , la couronne possède l'énergie la plus basse et l'échelle possède l'énergie la plus élevée. Pour tout $n, d \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{T}_n^d le K -espace vectoriel engendré par les arbres à n sommets et d'énergie supérieure ou égale à d i.e :

$$\mathcal{T}_n^d = \langle t \in T_n / d(t) \geq d \rangle \quad (3.2)$$

Ceci constitue une filtration décroissante de \mathcal{T}_n : $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{n-1} \supseteq \mathcal{T}_n^n \supseteq \dots \supseteq \mathcal{T}_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \supseteq \{0\}$

Exemple 12 Dans \mathcal{T}_4 on a :

$$\mathcal{T}_4^3 = \mathcal{T}_4$$

$$\mathcal{T}_4^4 = \langle \swarrow\downarrow, \swarrow\updownarrow, \updownarrow\downarrow \rangle,$$

$$\mathcal{T}_4^5 = \langle \swarrow\updownarrow, \updownarrow\downarrow \rangle,$$

$$\mathcal{T}_4^6 = \langle \updownarrow\downarrow \rangle$$

Notations

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout t_1, \dots, t_n , on note par $B_+^\bullet(t_1, \dots, t_n)$ l'arbre obtenu en greffant les arbres t_1, \dots, t_n sur une seule racine.

On note $\mathcal{T}' = \bigoplus_{\geq 2} \mathcal{T}_n$.

4 Produit de fusion

Définition 15 Pour tout arbres t_1, t_2 on définit le produit de fusion de deux arbres t_1 et t_2 noté $t_1 \times t_2$ comme l'arbre obtenu en fusionnant les deux racines de t_1 et t_2 en une seule racine.

Exemple 13 Si $t_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$, $t_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$, alors : $t_1 \times t_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$.

Il est clair que le produit de fusion \times est associatif et commutatif.

On sait que pour tout arbre t dans T , il existe des arbres t_1, \dots, t_k dans T tels que :

$$t = B_+^\bullet(t_1, t_2, \dots, t_k). \quad (3.3)$$

Si pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, on pose $s_j = B_+^\bullet(t_j)$, on obtient :

$$t = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_k. \quad (3.4)$$

5 Générateurs de l'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$

Soit T' l'ensemble des arbres qui contiennent au moins une arête, et soit $\mathcal{T}' = \langle T' \rangle = \bigoplus_{n \geq 2} \mathcal{T}_n$. Dans ce paragraphe, on montre que l'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$ est engendrée par les deux

générateurs $\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$ et $\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$, i.e : $\forall t \in T', t$ s'écrit en utilisant des combinaisons de $\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$, $\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$, \triangleright et les parenthèses. Dans ce but, on introduit les lemmes suivants :

Lemme 29 Soient $t_1, t_2 \in T$, on pose $s_1 = B_+^\bullet(t_1), s_2 = B_+^\bullet(t_2)$, alors on a :

$$s_1 \triangleright s_2 = s_1 \times s_2 + \tilde{s}, \quad (3.5)$$

où \tilde{s} est une somme d'arbres qui ont des énergies strictement supérieures à $d(s_1 \times s_2)$.

Preuve :

On a $d(s_1 \times s_2) = d(s_1) + d(s_2)$.

$s_1 \triangleright s_2$ est une somme d'arbres appartenant à trois types différents :

-Type 1 : Fusionner les deux racines de s_1 et s_2 , c'est l'unique arbre $s_1 \times s_2$.

-Type 2 : La racine de l'arbre obtenu est celle de s_2 :

* Soit en fusionnant la racine de s_1 avec un sommet de s_2 autre que la racine.

* Soit en insérant s_1 à l'intérieur de s_2 au-dessus de l'arête numéro un de s_2 .

Par suite les arbres obtenus ont des énergies supérieures ou égales à $d(s_1) + d(s_2) + v(s_1) - 1$, où $v(s_1)$ désigne le nombre de sommets de s_1 , or $d(s_1) + d(s_2) + v(s_1) - 1 \geq d(s_1) + d(s_2) + 1$ car s_1 a au moins deux sommets.

-Type 3 : La racine de l'arbre obtenu est celle de s_1 :

* Soit en fusionnant la racine de s_2 avec un sommet de s_1 autre que la racine. Par suite les arbres obtenus ont des énergies supérieures ou égales à $d(s_1) + d(s_2) + v(s_2) - 1$.

* Soit en cassant l'arbre s_2 et en fusionnant la racine de chacune de ses parties connexes à un sommet de s_1 . Par suite les arbres obtenus ont des énergies supérieures ou égales à $d(s_1) +$

$d(s_2) + 1$.

Ainsi $s_1 \triangleright s_2 = s_1 \times s_2 + \tilde{s}$ où \tilde{s} est une somme d'arbres qui ont des énergies supérieures strictement à $d(s_1 \times s_2)$. □

Lemme 30 Soit E_n , ($n \geq 3$) l'échelle à n arêtes, ($E_n \in T_{n+1}$) alors

$$E_n = \frac{1}{n-2}(E_1 \triangleright E_{n-1} - E_{n-1} \triangleright E_1) = \frac{1}{n-2}[E_1, E_{n-1}] \quad (3.6)$$

Preuve :

Soit E_n , $n \geq 2$ l'échelle à n arêtes, on note par s_0 la racine de E_n et par s_1, s_2, \dots, s_n les autres sommets où s_j est de hauteur j . On a :

$$E_1 \triangleright E_n = (n+1)E_{n+1} + 2E_n \circ_{n-1} E_1 + \sum_{i=1}^{n-2} E_n \circ_i E_1 + E_n \times E_1 \quad (3.7)$$

où $E_n \circ_i E_1$ désigne l'arbre obtenu en fusionnant la racine de E_1 avec le sommet s_i de E_n .

De même :

$$E_n \triangleright E_1 = 2E_{n+1} + 2E_n \circ_{n-1} E_1 + \sum_{i=1}^{n-2} E_n \circ_i E_1 + E_n \times E_1. \quad (3.8)$$

D'où le résultat en considérant la différence (3.7)-(3.8) □

Théorème 31 L'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}, \triangleright)$ est engendrée par les deux générateurs E_1 et E_2 .

Preuve :

Le résultat se démontre par une double récurrence, récurrence croissante suivant le nombre de sommets n , et une récurrence décroissante suivant l'énergie d .

Soit $n \geq 2$, on suppose que pour tout arbre t dans T_n , t s'écrit à l'aide de E_1, E_2 et \triangleright et montrons le résultat pour T_{n+1} .

Pour T_{n+1} l'énergie maximale est $d_{\max} = \frac{n(n+1)}{2}$, atteinte par l'échelle E_n et on a :

$$\mathcal{T}_{n+1}^{d_{\max}} = \langle E_n \rangle. \quad (3.9)$$

Or d'après lemme 30, $E_n = \frac{1}{n-2}[E_1, E_{n-1}]$, d'où d'après l'hypothèse de récurrence sur n , E_n s'écrit à l'aide de E_1, E_2 et \triangleright .

Soit $t \in T_{n+1}^d$. Il existe $t_1, \dots, t_k \in T$ tels que

$$t = B_+^\bullet(t_1, \dots, t_k). \quad (3.10)$$

Soit $s_j = B_+^\bullet(t_j)$, alors $t = s_1 \times \dots \times s_k$. Ainsi deux cas se présentent :

- $t \neq B_+^\bullet(t_1)$ (i.e : $k > 1$).
- $t = B_+^\bullet(t_1)$ (i.e : $t = t_1 \rightarrow \bullet$).

- 1^{er} cas : $t \neq B_+^\bullet(t_1)$, ainsi $t = s_1 \times \dots \times s_k$ où $k \geq 2$ par suite $s_j \in T_{n_j}$ où $n_j < n + 1$. On peut alors écrire :

$$t = s_1 \times \dots \times s_k = s_1 \triangleright (s_2 \triangleright (\dots \triangleright (s_{k-1} \triangleright s_k) \dots)) - \tilde{s}, \quad (3.11)$$

où $\tilde{s} \in \mathcal{T}_{n+1}^{d+1}$ (d'après lemme 29).

On a $s_j \in T_{n_j}$, $n_j < n + 1$ par suite pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ s_j s'écrit à l'aide de E_1, E_2 et \triangleright (ceci par hypothèse de récurrence sur le nombre de sommets).

De même \tilde{s} s'écrit à l'aide de E_1, E_2 et \triangleright (ceci par hypothèse de récurrence sur l'énergie d).

- 2^{me} cas : soit $t \in T_{n+1}^d$ tel que $t = B_+^\bullet(t_1)$.

On applique l'hypothèse de récurrence à t_1 donc on peut écrire :

$$t_1 = \sum t' \triangleright t'', \quad \text{où } t', t'' \in T'. \quad (3.12)$$

Par linéarité on peut supposer que $t_1 = t' \triangleright t''$, ainsi :

$$\begin{aligned} t &= t_1 \rightarrow \bullet \\ &= (t' \triangleright t'') \rightarrow \bullet \\ &= t' \triangleright (t'' \rightarrow \bullet) - t'' \rightarrow (t' \triangleright \bullet) \quad \text{d'après la relation de dérivation (2.46)} \\ &= t' \triangleright B_+^\bullet(t'') - t'' \rightarrow t'. \end{aligned}$$

Or : $t' \triangleright B_+^\bullet(t'')$ s'écrit en fonction de E_1, E_2 et \triangleright (par hypothèse de récurrence sur n).

De même si $t' \neq E_1$, $t' \neq E_2$ on applique la relation de dérivation (2.46) à t' . On peut supposer par récurrence sur le nombre de sommets que t' est une somme de termes de types :

$$t' = t^{(3)} \triangleright t^{(4)} \quad (3.13)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} t'' \rightarrow t' &= t'' \rightarrow (t^{(3)} \triangleright t^{(4)}) \\ &= t^{(3)} \triangleright (t'' \rightarrow t^{(4)}) - (t^{(3)} \triangleright t'') \rightarrow t^{(4)} \quad \text{on applique la dérivation (2.46)}. \end{aligned}$$

Le terme $t'' \rightarrow t^{(4)}$ s'écrit à l'aide de E_1, E_2 et \triangleright (ceci par hypothèse de récurrence sur n) ainsi de même pour $t^{(3)} \triangleright (t'' \rightarrow t^{(4)})$. On remarque que $v(t^{(4)}) < v(t')$.

On applique la même procédure (appliquée déjà à t') à $t^{(4)}$ et ainsi de suite. Comme le nombre de sommets diminue à chaque étape, on aboutit par itération à l'un des deux cas suivants :

$$s = t_0 \rightarrow \bullet \quad \text{ou} \quad s = t_0 \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array},$$

où s est une somme d'arbres.

- 1^{er} cas : $s = t_0 \rightarrow \bullet$, d'où :

$$s = B_+^\bullet(t_0) \times \bullet + (B_+^\bullet)^2(t_0) \in \mathcal{T}_{n+1}^d,$$

avec $d = d(t_0) + v(t_0) + 1$. Or $B_+^\bullet(t_0) \triangleright \bullet = B_+^\bullet(t_0) \times \bullet + (B_+^\bullet)^2(t_0) + \tilde{s}$ où \tilde{s} est une somme d'arbres obtenus en insérant \bullet à un sommet de $B_+^\bullet(t_0)$ autre que la racine. Ainsi

$d(\tilde{s}) \geq d(B_+(t_0)) + 2$ ce qui prouve que $\tilde{s} \in \mathcal{T}_{n+1}^{d+1}$, donc \tilde{s} s'écrit en fonction de $\blacktriangleright, \blacktriangleright^{\circ}$ et \triangleright .
Ainsi :

$$t_0 \rightarrow \blacktriangleright = B_+(t_0) \triangleright \blacktriangleright - \tilde{s}$$

or $B_+(t_0) \in T_n$ s'écrit en fonction de $\blacktriangleright, \blacktriangleright^{\circ}$ et \triangleright (par hypothèse de récurrence sur n). Par suite s s'écrit à l'aide de $\blacktriangleright, \blacktriangleright^{\circ}$ et \triangleright .

- 2^{me} cas : $s = t_0 \rightarrow \blacktriangleright^{\circ} \in \mathcal{T}_{n+1}^d$ avec $d = d(t_0) + v(t_0) + 3$. On a :

$$t_0 \rightarrow \blacktriangleright^{\circ} = B_+(t_0) \times \blacktriangleright^{\circ} + B_+(B_+(t_0) \times \blacktriangleright) + (B_+)^3(t_0).$$

Or

$$B_+(t_0) \triangleright \blacktriangleright^{\circ} = B_+(t_0) \times \blacktriangleright^{\circ} + B_+(B_+(t_0) \times \blacktriangleright) + \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2,$$

où \tilde{s}_1 est une somme d'arbres obtenus en branchant $\blacktriangleright^{\circ}$ à un sommet de $B_+(t_0)$ autre que la racine et \tilde{s}_2 est une somme d'arbres obtenus en insérant $B_+(t_0)$ à l'intérieur de $\blacktriangleright^{\circ}$ (i.e : on casse $\blacktriangleright^{\circ}$). Par suite :

$$d(\tilde{s}_1) \geq d(B_+(t_0)) + 5 = d(t_0) + v(t_0) + 5 > d.$$

De même

$$d(\tilde{s}_2) \geq d(B_+(t_0)) + v(B_+(t_0)) + 3 > d.$$

Ainsi par hypothèse de récurrence sur l'énergie d on obtient que \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 s'écrivent à l'aide de $\blacktriangleright, \blacktriangleright^{\circ}$ et \triangleright . Or :

$$t_0 \rightarrow \blacktriangleright^{\circ} = B_+(t_0) \triangleright \blacktriangleright^{\circ} - \tilde{s}_1 - \tilde{s}_2. \quad (3.14)$$

D'où s s'écrit en fonction de $\blacktriangleright, \blacktriangleright^{\circ}$ et \triangleright .

Conclusion : L'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$ est engendrée par les deux générateurs \blacktriangleright et $\blacktriangleright^{\circ}$. □

Note : Dans la suite de l'article on travaille avec \rightarrow_{σ} et \triangleright_{σ} mais on écrit \rightarrow et \triangleright pour simplifier les notations.

Remarque 32 *L'équation suivante :*

$$2\blacktriangleright^{\circ} = \blacktriangleright \triangleright \blacktriangleright - \blacktriangleright^{\circ}, \quad (3.15)$$

permet de conclure que l'algèbre pré-Lie $(\mathcal{T}', \triangleright)$ est aussi engendrée par les deux générateurs \blacktriangleright et $\blacktriangleright^{\circ}$.

6 Relations dans $(\mathcal{T}, \triangleright)$ autres que la relation pré-Lie

Soit $T^{\bullet, \circ}$ l'ensemble des arbres dont les sommets sont colorés en blanc et noir. On met une graduation sur $T^{\bullet, \circ}$ donnée par :

$$W(\bullet) = 1.$$

$$W(\circ) = 2.$$

Pour $t \in T^{\bullet, \circ}$ on définit :

$$W(t) = \sum_{s \text{ sommet de } t} W(s).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_n \in T^{\bullet, \circ}$ on note par $B_+^{\bullet}(t_1, \dots, t_n)$ (resp $B_+^{\circ}(t_1, \dots, t_n)$) l'arbre obtenu en greffant t_1, \dots, t_n sur un seul sommet noir (resp. blanc).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n^{\bullet, \circ}$ désigne l'ensemble des arbres de poids n dans $T^{\bullet, \circ}$.

On note par $\mathcal{T}^{\bullet, \circ}$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de $T^{\bullet, \circ}$ et par $\mathcal{T}_n^{\bullet, \circ}$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de $T_n^{\bullet, \circ}$.

On sait que $(\mathcal{T}^{\bullet, \circ}, \rightarrow)$ est l'algèbre pré-Lie libre à deux générateurs [8], [12].

Exemples 33 On a :

$$\mathfrak{!} = \bullet \rightarrow \bullet \tag{3.16}$$

$$\mathfrak{V} = \bullet \rightarrow (\bullet \rightarrow \bullet) - (\bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \bullet \tag{3.17}$$

$$\mathfrak{!} = \bullet \rightarrow \circ \tag{3.18}$$

Soit $\phi : \mathcal{T}^{\bullet, \circ} \longrightarrow \mathcal{T}'$ l'unique morphisme d'algèbres pré-Lie défini par :

$$\begin{cases} \phi(\bullet) = \mathfrak{!} \\ \phi(\circ) = \mathfrak{V} \end{cases}$$

Exemples 34

$$\phi(\mathfrak{!}) = \mathfrak{!} \triangleright \mathfrak{!} = 2\mathfrak{!} + \mathfrak{V}. \tag{3.19}$$

$$\phi(\mathfrak{V}) = \mathfrak{!} \triangleright (\mathfrak{!} \triangleright \mathfrak{!}) - (\mathfrak{!} \triangleright \mathfrak{!}) \triangleright \mathfrak{!} = 2\mathfrak{!} + 2\mathfrak{V} \tag{3.20}$$

$$\phi(\mathfrak{!}) = \mathfrak{!} \triangleright \mathfrak{V} = \mathfrak{Y} + 4\mathfrak{V} + \mathfrak{V} \tag{3.21}$$

Remarque 35 - D'après le théorème 31 l'application ϕ est surjective.

- L'application ϕ est homogène de degré zéro : La graduation dans $\mathcal{T}^{\bullet, \circ}$ est définie par les poids des arbres, tandis que dans \mathcal{T}' la graduation est suivant le nombre d'arêtes. Par suite $\phi : \mathcal{T}_n^{\bullet, \circ} \longrightarrow \mathcal{T}_n$ est surjective (\mathcal{T}_n est l'espace vectoriel engendré par les arbres à n arêtes).

Pour déterminer toutes les relations dans $(\mathcal{T}', \triangleright)$ il faut déterminer le noyau de ϕ . Nous allons ici déterminer quelques relations. On aboutit aux résultats suivants :

Théorème 36 Pour tout $s, t \in T^{\bullet, \circ}$, on a :

$$\phi(B_+^{\bullet}(s, t)) = \phi(s) \rightarrow \phi(t) + \phi(t) \rightarrow \phi(s). \tag{3.22}$$

Preuve :

Pour tout $s, t \in T^{\bullet, \circ}$, on note $S = \phi(s)$ et $T = \phi(t)$. De la relation :

$$B_+^{\bullet}(s, t) = s \rightarrow (t \rightarrow \bullet) - (s \rightarrow t) \rightarrow \bullet, \tag{3.23}$$

on déduit :

$$\begin{aligned}
\phi(B_+^\bullet(s, t)) &= \phi(s) \triangleright (\phi(t) \triangleright \phi(\bullet)) - (\phi(s) \triangleright \phi(t)) \triangleright \phi(\bullet) \\
&= S \triangleright (T \triangleright \bullet) - (S \triangleright T) \triangleright \bullet \\
&= S \triangleright [T \triangleright (\bullet \rightarrow \bullet)] - (S \triangleright T) \triangleright (\bullet \rightarrow \bullet) \\
&= S \triangleright [T \rightarrow \bullet - \bullet \rightarrow T] - (S \triangleright T) \rightarrow \bullet - \bullet \rightarrow (S \triangleright T) \\
&= (S \triangleright T) \rightarrow \bullet + T \rightarrow S + S \rightarrow T + \bullet \rightarrow (S \triangleright T) - (S \triangleright T) \rightarrow \bullet - \bullet \rightarrow (S \triangleright T) \\
&= T \rightarrow S + S \rightarrow T \\
&= \phi(t) \rightarrow \phi(s) + \phi(s) \rightarrow \phi(t).
\end{aligned}$$

Dans les lignes 4 et 5 on a utilisé la formule de dérivation des lois pré-Lie (2.46) .

□

Corollaire 37 1. Pour tout $n \geq 3$ et tout $t_1, \dots, t_n \in T^{\bullet \circ}$ on a :

$$B_+^\bullet(t_1, \dots, t_n) \in \ker \phi. \quad (3.24)$$

Preuve :

1. On traite tout d'abord le cas $n = 3$

Soient $s, t, u \in T^{\bullet \circ}$. On note $S = \phi(s)$, $T = \phi(t)$, $U = \phi(u) \in \mathcal{J}'$. On a :

$$B_+^\bullet(s, t, u) = s \rightarrow B_+^\bullet(t, u) - B_+^\bullet(s \rightarrow t, u) - B_+^\bullet(t, s \rightarrow u),$$

donc :

$$\begin{aligned}
\phi(B_+^\bullet(s, t, u)) &= \phi(s) \triangleright \phi(B_+^\bullet(t, u)) - \phi(B_+^\bullet(s \rightarrow t, u)) - \phi(B_+^\bullet(t, s \rightarrow u)) \\
&= S \triangleright (T \rightarrow U + U \rightarrow T) - \phi(s \rightarrow t) \rightarrow U - U \rightarrow \phi(s \rightarrow t) \\
&\quad - T \rightarrow \phi(s \rightarrow u) - \phi(s \rightarrow u) \rightarrow T \\
&= (S \triangleright T) \rightarrow U + T \rightarrow (S \triangleright U) + (S \triangleright U) \rightarrow T + U \rightarrow (S \triangleright T) \\
&\quad - (S \triangleright T) \rightarrow U - U \rightarrow (S \triangleright T) - T \rightarrow (S \triangleright U) - (S \triangleright U) \rightarrow T \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Comme pour tout $n \geq 4$ et tout $t_1, \dots, t_n \in T^{\bullet \circ}$ on a :

$$B_+^\bullet(t_1, \dots, t_n) = t_n \rightarrow B_+^\bullet(t_1, \dots, t_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} B_+^\bullet(t_1, \dots, \underbrace{t_n \rightarrow t_k}_{k^{\text{me}} \text{ position}}, \dots, t_{n-1}), \quad (3.25)$$

la démonstration se fait par récurrence sur n .

De façon informelle, le Corollaire précédent dit qu'il est impossible d'insérer plus de deux arbres dans l'arbre \downarrow . □

Théorème 38 *Pour tout $s, t \in T^{\bullet, \circ}$ on a :*

$$\begin{aligned} \phi(B_+^\circ(s, t)) &= 2[\phi(s) \rightarrow (\bullet \rightarrow \phi(t)) - (\phi(s) \rightarrow \bullet) \rightarrow \phi(t)] \\ &\quad + 2[\phi(t) \rightarrow (\phi(s) \rightarrow \bullet) - (\phi(t) \rightarrow \phi(s)) \rightarrow \bullet] \\ &\quad + 2[\bullet \rightarrow (\phi(t) \rightarrow \phi(s)) - (\bullet \rightarrow \phi(t)) \rightarrow \phi(s)] \end{aligned}$$

Preuve :

Soient $s, t \in T^{\bullet, \circ}$, on note $S = \phi(s), T = \phi(t) \in \mathcal{T}^{\bullet, \circ}$. Comme :

$$\begin{aligned} B_+^\circ(s, t) &= s \rightarrow B_+^\circ(t) - B_+^\circ(s \rightarrow t) \\ &= s \rightarrow (t \rightarrow \circ) - (s \rightarrow t) \rightarrow \circ, \end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \phi(B_+^\circ(s, t)) &= \phi(s \rightarrow (t \rightarrow \circ)) - \phi((s \rightarrow t) \rightarrow \circ) \\ &= \phi(s) \triangleright \phi(t \rightarrow \circ) - \phi(s \rightarrow t) \triangleright \phi(\circ) \\ &= \phi(s) \triangleright [\phi(t) \triangleright \phi(\circ)] - [\phi(s) \triangleright \phi(t)] \triangleright \phi(\circ) \\ &= S \triangleright (T \triangleright \heartsuit) - (S \triangleright T) \triangleright \heartsuit \quad (*). \end{aligned}$$

Or :

$$\heartsuit = \bullet \rightarrow (\bullet \rightarrow \bullet) - (\bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \bullet. \quad (3.26)$$

Ainsi :

$$(*) = S \triangleright [T \triangleright (\bullet \rightarrow (\bullet \rightarrow \bullet))] \quad (1)$$

$$-S \triangleright [T \triangleright ((\bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \bullet)] \quad (2)$$

$$-(S \triangleright T) \triangleright [\bullet \rightarrow (\bullet \rightarrow \bullet)] \quad (3)$$

$$+(S \triangleright T) \triangleright [(\bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \bullet] \quad (4).$$

Or :

$$\begin{aligned}
(1) &= S \triangleright [T \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot)] + S \triangleright [\cdot \rightarrow (T \triangleright (\cdot \rightarrow \cdot))] \\
&= (S \triangleright T) \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot) + T \rightarrow (S \triangleright (\cdot \rightarrow \cdot)) + S \triangleright [\cdot \rightarrow (T \rightarrow \cdot) + \cdot \rightarrow (\cdot \rightarrow T)] \\
&= (S \triangleright T) \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot) + T \rightarrow (S \rightarrow \cdot + T \rightarrow (\cdot \rightarrow S)) \\
&\quad + S \rightarrow (T \rightarrow \cdot) + \cdot \rightarrow (S \triangleright (T \rightarrow \cdot)) + S \rightarrow (\cdot \rightarrow T) + \cdot \rightarrow (S \triangleright (\cdot \rightarrow T)) \\
&= (S \triangleright T) \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot) + T \rightarrow (S \rightarrow \cdot) + T \rightarrow (\cdot \rightarrow S) \\
&\quad + S \rightarrow (T \rightarrow \cdot) + \cdot \rightarrow ((S \triangleright T) \rightarrow \cdot) + \cdot \rightarrow (T \rightarrow S) \\
&\quad S \rightarrow (\cdot \rightarrow T) + \cdot \rightarrow (S \rightarrow T) + \cdot \rightarrow (\cdot \rightarrow (S \triangleright T)), \\
(2) &= -S \triangleright [(T \triangleright (\cdot \rightarrow \cdot)) \rightarrow \cdot] - S \triangleright [(\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow T] \\
&= -(S \triangleright (T \rightarrow \cdot)) \rightarrow \cdot - (T \rightarrow \cdot) \rightarrow S - (S \triangleright (\cdot \triangleright T)) \rightarrow \cdot \\
&\quad - (\cdot \rightarrow T) \rightarrow S - (S \rightarrow \cdot) \rightarrow T - (\cdot \rightarrow S) \rightarrow T - [(\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow (S \triangleright T)] \\
&= -((S \triangleright T) \rightarrow \cdot) \rightarrow \cdot - (T \rightarrow S) \rightarrow \cdot - (T \rightarrow \cdot) \rightarrow S \\
&\quad - (S \rightarrow T) \rightarrow \cdot - (\cdot \rightarrow (S \triangleright T)) \rightarrow \cdot - (\cdot \rightarrow T) \rightarrow S \\
&\quad - (S \rightarrow \cdot) \rightarrow T - (\cdot \rightarrow S) \rightarrow T - (\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow (S \triangleright T), \\
(3) &= -(S \triangleright T) \triangleright [\cdot \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot)] \\
&= -(S \triangleright T) \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot) - \cdot \rightarrow ((S \triangleright T) \triangleright (\cdot \rightarrow \cdot)) \\
&= -(S \triangleright T) \rightarrow (\cdot \rightarrow \cdot) - \cdot \rightarrow ((S \triangleright T) \rightarrow \cdot) - \cdot \rightarrow (\cdot \rightarrow (S \triangleright T)), \\
(4) &= (S \triangleright T) \triangleright [(\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow \cdot] \\
&= ((S \triangleright T) \triangleright (\cdot \rightarrow \cdot)) \rightarrow \cdot + (\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow (S \triangleright T) \\
&= ((S \triangleright T) \rightarrow \cdot) \rightarrow \cdot + (\cdot \rightarrow (S \triangleright T)) \rightarrow \cdot + (\cdot \rightarrow \cdot) \rightarrow (S \triangleright T).
\end{aligned}$$

On faisant la somme (1) + (2) + (3) + (4) et en utilisant le fait que \rightarrow est une loi pré-Lie à gauche, on trouve le résultat demandé au théorème précédent. □

Corollaire 39 1. Pour tout $s, t, u \in T^{\bullet, \circ}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(B_+^\circ(s, t, u)) &= 2[T \rightarrow (S \rightarrow U) - (T \rightarrow S) \rightarrow U] \\
&\quad + 2[U \rightarrow (T \rightarrow S) - (U \rightarrow T) \rightarrow S] \\
&\quad + 2[S \rightarrow (U \rightarrow T) - (S \rightarrow U) \rightarrow T]
\end{aligned}$$

où $S = \phi(s)$, $T = \phi(t)$ et $U = \phi(u)$

2. Pour tout $n \geq 4$ et tout $t_1, \dots, t_n \in T^{\bullet, \circ}$ on a :

$$B_+^\circ(t_1, \dots, t_n) \in \ker \phi \tag{3.27}$$

Preuve :

1. Pour tout $s, t, u \in T^{\bullet, \circ}$, on a :

$$B_+^\circ(s, t, u) = s \rightarrow B_+^\circ(t, u) - B_+^\circ(s \rightarrow t, u) - B_+^\circ(t, s \rightarrow u), \tag{3.28}$$

puis en appliquant le théorème précédent on trouve le résultat.

2. On traite tout d'abord le cas $n = 4$. Pour t_1, t_2, t_3 et $t_4 \in T^{\bullet, \circ}$ on a :

$$B_+^\circ(t_1, \dots, t_4) = t_4 \rightarrow B_+^\circ(t_1, t_2, t_3) - B_+^\circ(t_4 \rightarrow t_1, t_2, t_3) - B_+^\circ(t_1, t_4 \rightarrow t_2, t_3) - B_+^\circ(t_1, t_2, t_4 \rightarrow t_3), \quad (3.29)$$

puis on applique le résultat précédent.

Pour tout $n \geq 5$ et $t_1, \dots, t_n \in T^{\bullet, \circ}$ on a :

$$B_+^\circ(t_1, \dots, t_n) = t_n \rightarrow B_+^\circ(t_1, \dots, t_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} B_+^\circ(t_1, \dots, \underbrace{t_n \rightarrow t_k}_{k^{\text{me}} \text{ position}}, \dots, t_{n-1}), \quad (3.30)$$

par suite on montre le résultat par une récurrence sur n . Une manière informelle de comprendre le corollaire (39) est de dire qu'on ne peut pas insérer plus de trois arbres dans \vee .

□

7 Une autre algèbre pré-Lie sur les arbres enracinés

Définition 16 Pour $s, t \in T'$,

$$s \odot t = \sum_{v \in v(t)} s \odot_v t,$$

où $s \odot_v t$ est l'arbre obtenu en fusionnant la racine de s au sommet v de t .

Remarque 40 Ce produit provient de l'opérade NAP (voir paragraphe (3.2) du chapitre 4).

Exemples 41

$$\begin{aligned} \text{!} \odot \text{!} &= \vee + \text{!} \\ \vee \odot \text{!} &= \vee \downarrow + \text{!} \downarrow + \text{!} \downarrow \end{aligned}$$

On introduit les deux familles d'arbres suivantes :

– $T_{n,p} = E_p \times C_{n-p}$, où \times est le produit de fusion.

– $V_{n,p} = E_p \times E_2 \times C_{n-p-2}$. On remarque que $T_{n,2} = V_{n,1}$.

Exemple 14 $T_{4,2} = \vee \downarrow$ et $V_{5,2} = \vee \downarrow \downarrow$.

On note par \circ le produit de Butcher.

Proposition 42 L'algèbre (\mathcal{T}', \odot) est une algèbre pré-Lie à gauche.

Preuve : Soient $s, t, u \in T'$, on a :

$$\begin{aligned}
u \odot (s \odot t) &= \sum_{v \in v(t)} \sum_{w \in v(s \odot_v t)} u \odot_w (s \odot_v t) \\
&= \sum_{v \in v(t)} \sum_{w \in v(t)} u \odot_w (s \odot_v t) \\
&\quad + \sum_{v \in v(t)} \sum_{w \in v(s)} u \odot_w (s \odot_v t) \\
&\quad - \sum_{v \in v(t)} (u \times s) \odot_v t,
\end{aligned}$$

or

$$(u \odot s) \odot t = \sum_{v \in v(s)} \sum_{w \in v(t)} (u \odot_v s) \odot_w t.$$

$$\text{Ainsi } u \odot (s \odot t) - (u \odot s) \odot t = \sum_{v \in v(t)} \sum_{w \in v(t)} u \odot_w (s \odot_v t) - \sum_{v \in v(t)} (u \times v) \odot_v t.$$

On remarque que dans les expressions précédentes il y a une symétrie en u et s , ce qui montre que l'algèbre (\mathcal{T}', \odot) est une algèbre pré-Lie à gauche. □

Lemme 43 Pour tout $s, u, v \in T'$ on a :

$$s \odot (u \circ v) = (s \odot u) \circ v + u \circ (s \odot v).$$

Le démonstration est immédiate.

Lemme 44 Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in T'_n$, il existe $\alpha_t \in \mathbb{Q}$ tel que

$$t = \sum_{(t)} t' \odot t'' + \alpha_t C_n, \tag{3.31}$$

où dans chaque terme de la somme $t' \in \mathcal{T}'_p$ et $t'' \in \mathcal{T}'_q$ avec $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $p + q = n$.

Preuve : La démonstration se fait par récurrence sur n .

- Pour $n = 2$, on a $\mathcal{T}'_2 = \langle \mathfrak{!}, \mathfrak{V} \rangle$, or

$$\mathfrak{!} = \mathfrak{!} \odot \mathfrak{!} - \mathfrak{V}.$$

Ainsi $\forall t \in T'_2$, t vérifie (3.31).

- Soit $n \geq 2$, on suppose que pour tout $l \in \{2, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in T'_l$, il existe $\alpha_t \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$t = \sum_{(t)} t' \odot t'' + \alpha_t C_l,$$

(où dans chaque terme de la somme $t' \in \mathcal{T}'_p$ et $t'' \in \mathcal{T}'_q$ avec $p + q = l$), et montrons que la propriété (3.31) est vérifiée pour tout $t \in T'_n$.

Soit $t \in T'_n$, montrons que t vérifie (3.31) par récurrence décroissante sur la valence de la racine dans T'_n .

- Dans T'_n , valence = n est atteinte par la couronne C_n .
- Dans T'_n , valence = $n - 1$ atteinte par $E_2 \times C_{n-2}$, or

$$E_2 \times C_{n-2} = \frac{1}{n-1} E_1 \odot C_{n-1} - \frac{1}{n-1} C_n,$$

ce qui prouve que $E_2 \times C_{n-2}$ vérifie (3.31).

Soit $t \in T'_n$. Il existe t_1, \dots, t_k tels que $t = B_+(t_1, \dots, t_k)$.

- Si $k \geq 2$, soit $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tel que t_{i_0} contient au moins deux sommets. Quitte à permuter on peut supposer que t_1 contient au moins deux sommets.
- Etape 1 :

$$\begin{aligned} t &= t_1 \odot B_+(\bullet, t_2, \dots, t_k) \\ &\quad - t_1 \times B_+(\bullet, t_2, \dots, t_k) \\ &\quad - \sum_{j=2}^k B_+(\bullet, t_2, \dots, t_1 \odot t_j, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Le terme $B_+(\bullet, t_2, \dots, t_k)$ appartient à T'_p où $p < n$, ainsi d'après l'hypothèse de récurrence sur le degré on a :

$$B_+(\bullet, t_2, \dots, t_k) = \sum s_1 \odot s_2 + \beta C_p.$$

Par suite $t_1 \odot B_+(\bullet, t_2, \dots, t_k) = \sum t_1 \odot (s_1 \odot s_2) + \beta(t_1 \odot C_p)$. De même pour tout $j \in \{2, \dots, k\}$, $t_1 \times B_+(\bullet, t_2, \dots, t_1 \odot t_j, t_{j+1}, \dots, t_k)$ vérifie l'équation (3.31) (hypothèse de récurrence décroissante sur la valence de la racine). Il reste le terme

$$\sum_{j=2}^k B_+(\bullet, t_2, \dots, t_1 \odot t_j, t_{j+1}, \dots, t_k),$$

on va le traiter dans l'étape 2 suivante :

- Etape 2 : Soit $j \in \{2, \dots, k\}$. On a :

$$\begin{aligned} B_+(\bullet, t_2, \dots, t_1 \odot t_j, t_{j+1}, \dots, t_k) &= \frac{1}{2} (t_1 \odot t_j) \odot B_+(\bullet, t_2, \dots, \bullet, t_{j+1}, \dots, t_k) \\ &\quad - \frac{1}{2} (t_1 \odot t_j) \times B_+(\bullet, t_2, \dots, \bullet, t_{j+1}, \dots, t_k) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2, i \neq j}^k B_+(\bullet, t_2, \dots, (t_1 \odot t_j) \odot t_i, \dots, \bullet, t_{j+1}, \dots, t_k) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes vérifient (3.31) pour la même raison que dans l'étape 1. On réordonne les branches

$$B_+(\bullet, t_2, \dots, (t_1 \odot t_j) \odot t_i, \dots, \bullet, t_{j+1}, \dots, t_k) = B_+(\bullet, \bullet, t_2, \dots, (t_1 \odot t_j) \odot t_i, \dots, t_k).$$

En réitérant la procédure autant de fois que nécessaire, on aboutit à la fin au terme $B_+(\bullet, \dots, \bullet) = C_n$, ce qui prouve le résultat.

– Si $t = B_+(t_1)$. Comme :

$$t = t_1 \odot \mathbf{!} - t_1 \times \mathbf{!},$$

on procède comme quand $k \geq 2$.

□

Théorème 45 *Pour tout $n \geq 1$:*

– *D'une part on a :*

$$E_n = A + \alpha_n C_n,$$

où A est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et des arbres de degré strictement plus petit et α_n est un coefficient rationnel. On trouvera exactement :

$$E_n = E_{n-1} \odot E_1 + \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} E_k \odot C_j + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} C_n.$$

– *Et d'autre part on a :*

$$E_n = B + \beta_n C_n,$$

où B est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et des arbres de degré strictement plus petit et $\beta_n = \frac{(-1)^{n-1}n(n-1)}{2(n-1)!}$. Par suite on obtient que pour tout $n \geq 3$, $\alpha_n \neq \beta_n$. Ce qui nous donne :

$$\forall n \geq 3, \quad C_n = \frac{A - B}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Preuve : La démonstration de ce théorème nécessite les deux lemmes suivants :

□

Lemme 46 *Pour tout $n \geq 2$ et tout $p \in \{1, \dots, n\}$, on a :*

$$T_{n,p} = C + \frac{(-1)^{p-1}(n-p)!}{(n-1)!} C_n,$$

où C est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et d'arbres de degré strictement plus petit.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} T_{n,p} &= \frac{1}{n-p+1} (E_{p-1} \odot C_{n-p+1} - T_{n,p-1}) \\ &= \frac{1}{n-p+1} E_{p-1} \odot C_{n-p+1} \\ &\quad - \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)} E_{p-2} \odot C_{n-p+2} + \frac{(-1)}{(n-p+1)} \frac{(-1)}{(n-p+2)} T_{n,p-3}, \end{aligned}$$

Ainsi une démonstration par récurrence sur p nous donne :

$$T_{n,p} = C + \frac{(-1)^{p-1}(n-p)!}{(n-1)!} C_n.$$

□

Lemme 47 Pour tout $n \geq 3$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n - p - 2 \geq 0$ on a :

$$V_{n,p} = D + \frac{(-1)^p (n-p-2)! (np - \frac{p(p+1)}{2} - 1)}{(n-1)!} C_n,$$

où D est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et d'arbres de degré strictement plus petit.

Preuve : On a :

$$V_{n,p} = \frac{1}{(n-p-1)} (E_{p-1} \odot T_{n-p+1,2} - T_{n,p+1} - B_+(T_{p,p-1}) \times C_{n-p-1} - V_{n,p-1})$$

or :

$$\begin{aligned} B_+(T_{p,p-1}) \times C_{n-p-1} &= \frac{1}{(n-p)} (T_{p,p-1} \odot C_{n-p} - T_{n,p-1}) \\ &= \dots + \frac{(-1)^{p+1} (n-p+1)!}{(n-p)(n-1)!} C_n, \end{aligned}$$

où \dots est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et d'arbres de degré strictement plus petit.

Par suite :

$$\begin{aligned} V_{n,p} &= \dots + \frac{(-1)^{p+1} (n-p-2)!}{(n-1)!} C_n + \frac{(-1)^p (n-p+1)(n-p-2)!}{(n-1)!} C_n - \frac{1}{(n-p-1)} V_{n,p-1} \\ &= \dots + \frac{(-1)^p (n-p-2)!}{(n-1)!} (n-p) C_n - \frac{1}{(n-p-1)} V_{n,p-1}. \end{aligned}$$

De même on trouve :

$$V_{n,p-1} = \dots + \frac{(-1)^{p-1} (n-p-1)(n-p+1)}{(n-1)!} C_n - \frac{1}{(n-p)} V_{n,p-2}.$$

Par itération on obtient :

$$V_{n,2} = \dots + \frac{(n-4)!(n-2)}{(n-1)!} C_n - \frac{1}{(n-3)} V_{n,1}.$$

$$\text{Or } V_{n,1} = T_{n,2} = \dots + \frac{-1}{(n-1)} C_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} V_{n,p} &= \dots + \frac{(-1)^p (n-p-2)!(n-p)}{(n-1)!} C_n - \frac{1}{(n-p-1)} V_{n,p-1} \\ &= \dots + \frac{(-1)^p (n-p-2)!(n-p)}{(n-1)!} C_n \\ &\quad - \frac{1}{(n-p-1)} \left(\frac{(-1)^{p-1} (n-p-1)(n-p+1)}{(n-1)!} C_n - \frac{1}{(n-p)} V_{n,p-2} \right). \end{aligned}$$

Par suite par récurrence on montre que

$$V_{n,p} = D_n + \frac{(-1)^p (n-p-2)!}{(n-1)!} (np - \frac{p(p+1)}{2} - 1) C_n,$$

où D_n est une expression qui s'écrit à l'aide de \odot et des arbres de degré strictement plus petit. \square

Démonstration du théorème (suite) :

– on a :

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n-1} \odot E_1 - T_{n,n-1} \\ &= A + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} C_n \end{aligned}$$

(A l'aide d'un calcul simple on peut montrer que $A = E_{n-1} \odot E_1 + \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} E_k \odot C_j$).

– On a :

$$E_n = E_{n-2} \odot E_2 - B_+(T_{n-1,n-2}) - E_{n-2} \times E_2 \text{ or :}$$

$$B_+(T_{n-1,n-2}) = T_{n-1,n-2} \odot E_1 - T_{n,n-2},$$

et

$$E_{n-2} \times E_2 = E_{n-3} \times T_{3,2} - B_+(T_{n-2,n-3}) \times E_1 - V_{n,n-3} - T_{n,n-1}$$

De même

$$B_+(T_{n-2,n-3}) = \frac{1}{2}(T_{n-2,n-3} \odot C_2 - T_{n,n-3}).$$

Ainsi :

$$E_n = B_n + \frac{(-1)^{n-1}n(n-1)}{2((n-1)!)} C_n.$$

où B_n est une expression qui s'écrit en fonction de \odot et d'arbres de degré strictement plus petit.

Par suite l'égalité $\alpha_n = \beta_n$ s'obtient si et seulement si $n = 2$.

Par suite si $n \geq 3$ on trouve :

$$C_n = \frac{A_n - B_n}{\beta_n - \alpha_n}.$$

□

Corollaire 48 Pour tout $n > 1, n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in T'_n$ on a :

$$t = \sum_{(t)} t' \odot t'', \quad (3.32)$$

où dans chaque terme de la somme $t' \in \mathcal{T}'_p$ et $t'' \in \mathcal{T}'_q$ avec $p \geq 1, q \geq 1$ et $p + q = n$.

Théorème 49 Soit ψ l'unique morphisme d'algèbres de $(\mathcal{T}^{\bullet, \circ}, \rightarrow)$ dans (\mathcal{T}', \odot) tels que :

$$\begin{cases} \psi(\bullet) = \mathbf{!} \\ \psi(\circ) = \mathbf{v} \end{cases}$$

Alors ψ est surjective.

Preuve : Le théorème précédent se démontre par récurrence sur n en utilisant l'équation (3.32).

□

Relations

Comme dans le cas de l'insertion on détermine quelques relations :

Lemme 50 *Pour tout $s, t \in T$, si on désigne par $T = \psi(t)$ et $S = \psi(s)$ alors on a :*

$$\psi(B_+(s, t)) = T \circ S + S \circ T,$$

où \circ est le produit de Butcher.

Preuve : Soit $s, t \in T$, comme $B_+(s, t) = s \rightarrow (t \rightarrow \bullet) - (s \rightarrow t) \rightarrow \bullet$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(B_+(s, t)) &= \psi(s) \odot (\psi(t) \odot \mathbf{!}) - (\psi(s) \odot \psi(t)) \odot \mathbf{!} \\ &= S \odot [T \odot (\bullet \circ \bullet)] - (S \odot T) \odot (\bullet \circ \bullet) \\ &= S \odot (T \circ \bullet + \bullet \circ T) - (S \odot T) \circ \bullet - \bullet \circ (S \odot T) \\ &= (S \odot T) \circ \bullet + T \circ S + S \circ T + \bullet \circ (S \odot T) - (S \odot T) \circ \bullet - \bullet \circ (S \odot T) \\ &= T \circ S + S \circ T \end{aligned}$$

□

Théorème 51 1. *Pour tout $s, t, u \in \mathcal{T}$, on a :*

$$B_+(t, u, s) \in \ker \psi.$$

2. *Tout arbre t dont au moins un sommet noir possède au moins trois branches est dans le noyau de ψ .*

La même démarche que dans le Paragraphe (6) (voir aussi [28]), on peut montrer que pour tout arbre qui a un sommet blanc possède au moins quatre branches appartient au noyau de ψ . Mais il reste encore à déterminer toutes les relations.

Chapitre 4

L'opérade pré-Lie est une déformation de L'opérade NAP

1 Préliminaires et définitions

Le bon objet mathématique pour étudier les différents "types" d'algèbres est la notion d'opérade. Une opérade \mathcal{P} [21], [15] est la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un K -espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ muni d'une action à droite du groupe symétrique S_n , et d'applications de compositions partielles :

$$\begin{aligned} \circ_i & : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \longrightarrow \mathcal{P}(m+n-1), & i = 1, \dots, n \\ (a, b) & \longmapsto a \circ_i b \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathcal{P}(n)$ et $b \in \mathcal{P}(m)$ qui satisfont les axiomes suivants :

- Les deux axiomes d'associativité :

$$(a \circ_i b) \circ_{i+j-1} c = a \circ_i (b \circ_j c), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, \quad (4.1)$$

$$(a \circ_i b) \circ_{m+j-1} c = (a \circ_j c) \circ_i b, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j \quad (4.2)$$

Les deux associativités ci-dessus sont appelées respectivement associativité emboîtée et associativité disjointe.

- l'axiome d'unité : L'existence d'un objet $e \in \mathcal{P}(1)$ tel que

$$e \circ a = a \quad (4.3)$$

$$a \circ_i e = a, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, a \in \mathcal{P}(n). \quad (4.4)$$

- L'axiome d'équivariance : Pour tout $\sigma \in S_n, \tau \in S_m$, on a

$$a \cdot \sigma \circ_{\sigma(i)} b \cdot \tau = (a \circ_i b) \cdot \rho(\sigma, \tau), \quad (4.5)$$

où $\rho(\sigma, \tau) \in S_{n+m-1}$ est définie comme suit : τ permute l'ensemble $E_i = \{i, i+1, \dots, i+m-1\}$ qui est de cardinal m et par suite par σ on permute l'ensemble $\{1, \dots, i-1, E_i, i+m, \dots, m+n-1\}$ qui est de cardinal n .

La composition globale γ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(k_n) &\longrightarrow \mathcal{P}(k_1 + \dots + k_n) \\ (a, b_1, \dots, b_n) &\longmapsto (\dots ((a \circ_n b_n) \circ_{n-1} b_{n-1}) \dots) \circ_1 b_1. \end{aligned}$$

Les compositions partielles \circ_i s'écrivent :

$$a \circ_i b = \gamma(a, e, \dots, e, b, e, \dots, e). \quad (4.6)$$

Exemple 15 L'opérade $Endop(V)$ où V est un K -espace vectoriel

On se place ici dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps K , munie du produit tensoriel usuel. Soit V un K -espace vectoriel. Pour tout $n \geq 1$, on définit $V^{\otimes n}$ par récurrence : $V^{\otimes 1} = V$ et $V^{\otimes n+1} = V \otimes V^{\otimes n}$. Soit $Endop(V)(n) = \mathcal{L}(V^{\otimes n}, V)$ l'espace des applications linéaires de $V^{\otimes n}$ dans V . L'action à droite du groupe symétrique S_n sur $Endop(V)(n)$ se définit par l'action à gauche sur $V^{\otimes n}$ en permutant les indices :

$$(f \cdot \sigma)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \forall f \in Endop(V)(n). \quad (4.7)$$

Pour tout $f \in Endop(V)(n)$, $g \in Endop(V)(m)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on appelle composition partielle $f \circ_i g$ le morphisme de $Endop(V)(n+m-1)$ défini par :

$$(f \circ_i g)(v_1, \dots, v_{n+m-1}) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, g(v_i, \dots, v_{i+m-1}), v_{i+m}, \dots, v_{n+m-1}). \quad (4.8)$$

L'unité est l'application identité de V notée Id_V . Les compositions partielles définies ci-dessus vérifient bien les axiomes d'une opérade.

Définition 17 Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux opérades. Un morphisme d'opérades de \mathcal{P} dans \mathcal{Q} est une séquence $a = \{a(n), n \in \mathbb{N}^*\}$ d'applications $K[S_n]$ -linéaires $a(n) : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{Q}(n)$ vérifiant :

1. $a(1)(e) = e$,
2. $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, i \in \{1, \dots, n\}, \mu \in \mathcal{P}(n), \nu \in \mathcal{P}(m)$,

$$a(n+m-1)(\mu \circ_i \nu) = a(n)(\mu) \circ_i a(m)(\nu).$$

Définition 18 Soient V un K -espace vectoriel et \mathcal{P} une opérade. On dit que V est une \mathcal{P} -algèbre ou algèbre sur \mathcal{P} , s'il existe un morphisme d'opérades a de \mathcal{P} dans l'opérade $Endop(V)$. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \dots, v_n \in V$, on note

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = a(n)(\mu)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n). \quad (4.9)$$

Soient (V, a) et (W, b) deux \mathcal{P} -algèbres. Soit $\phi : (V, a) \rightarrow (W, b)$ une application linéaire. ϕ est dite un morphisme de \mathcal{P} -algèbres si pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \dots, v_n \in V$,

$$\phi(\mu(v_1, \dots, v_n)) = \mu(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)). \quad (4.10)$$

Définition 19 \mathcal{P} -algèbre libre sur un espace vectoriel

Soient \mathcal{P} une opérade et V un K -espace vectoriel. On définit la \mathcal{P} -algèbre libre sur V , notée $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V)$ par la propriété universelle suivante :

Il existe $i : V \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V)$ tel que pour toute \mathcal{P} -algèbre A et pour toute application linéaire $\varphi : V \rightarrow A$, il existe un unique morphisme de \mathcal{P} -algèbres $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V) \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & A \\ \uparrow i & \nearrow \varphi & \\ V & & \end{array}$$

Remarque 52 La \mathcal{P} -algèbre libre sur V est unique à isomorphisme unique près.

Proposition 53 [23] Pour tout \mathcal{P} une opérade et V un K -espace vectoriel on a :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V) \approx \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n} \quad (4.11)$$

Preuve :

Soient \mathcal{P} une opérade et V un K -espace vectoriel. Soient A une \mathcal{P} -algèbre et $\varphi : V \rightarrow A$ une application linéaire. On note $\mathcal{F} = \bigoplus_{n > 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}$. Montrons tout d'abord que \mathcal{F} est une \mathcal{P} -algèbre. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} a(n) : \mathcal{P}(n) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}^{\otimes n}, \mathcal{F}) \\ \mu &\longmapsto a(n)(\mu), \end{aligned}$$

où pour tout $\nu_1 \in \mathcal{P}(k_1), \dots, \nu_n \in \mathcal{P}(k_n), v_1 \in V^{\otimes k_1}, \dots, v_n \in V^{\otimes k_n}$,

$$a(n)(\mu)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_n \otimes v_n) = \gamma(\mu, \nu_1, \dots, \nu_n) \bigotimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n). \quad (4.12)$$

a est un morphisme d'opérades. En effet

$$\begin{aligned} a(1)(e)(\nu_1 \otimes v_1) &= \gamma(e, \nu_1) \otimes v_1 \\ &= \nu_1 \otimes v_1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $a(1)(e) = e$. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*, \mu \in \mathcal{P}(n), \xi \in \mathcal{P}(m), i \in \{1, \dots, n\}, \nu_1 \in \mathcal{P}(k_1), \dots, \nu_{n+m-1} \in \mathcal{P}(k_{n+m-1}), v_1 \in V^{\otimes k_1}, \dots, v_{n+m-1} \in V^{\otimes k_{n+m-1}}$. On a :

$$\begin{aligned} &a(n)(\mu) \circ_i a(m)(\xi)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_{n+m-1} \otimes v_{n+m-1}) \\ &= a(n)(\mu)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_{i-1} \otimes v_{i-1}, a(m)(\xi)(\nu_i \otimes v_i, \dots, \nu_{i+m-1} \otimes v_{i+m-1}), \\ &\quad \nu_{i+m} \otimes v_{i+m}, \dots, \nu_{n+m-1} \otimes v_{n+m-1}) \\ &= a(n)(\mu)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_{i-1} \otimes v_{i-1}, \gamma(\xi, \nu_i, \dots, \nu_{i+m-1}) \otimes (v_i \otimes \dots \otimes v_{i+m-1}), \\ &\quad \nu_{i+m} \otimes v_{i+m}, \dots, \nu_{n+m-1} \otimes v_{n+m-1}) \\ &= \gamma(\mu, \nu_1, \dots, \nu_{i-1}, \gamma(\xi, \nu_i, \dots, \nu_{i+m-1}), \nu_{i+m}, \dots, \nu_{n+m-1}) \bigotimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1} \\ &= \gamma(\mu \circ_i \xi, \nu_1, \dots, \nu_{n+m-1}) \bigotimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1} \\ &= a(n+m-1)(\mu \circ_i \xi)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_{n+m-1} \otimes v_{n+m-1}) \end{aligned}$$

ce qui prouve $a(n + m - 1)(\mu \circ_i \xi) = a(n)(\mu) \circ_i a(m)(\xi)$. On définit $\tilde{\varphi} : \mathcal{F} \rightarrow A$ comme suit : pour tout $n > 0$, $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et tout $v_1, \dots, v_n \in V$,

$$\tilde{\varphi}(\mu, v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \mu(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)), \quad (4.13)$$

en utilisant la notation (4.9). Ainsi par construction $\tilde{\varphi}$ est un morphisme de \mathcal{P} -algèbres (4.10). On a donc :

$$\tilde{\varphi}(a(n)(\mu)(\nu_1 \otimes v_1, \dots, \nu_n \otimes v_n) = \mu(\tilde{\varphi}(\nu_1 \otimes v_1), \dots, \tilde{\varphi}(\nu_n \otimes v_n)) \quad (4.14)$$

ce qui prouve l'unicité de $\tilde{\varphi}$ par récurrence sur la graduation de \mathcal{F} . On définit :

$$\begin{aligned} i : V &\longrightarrow \mathcal{F} \\ v &\longmapsto e \otimes v \end{aligned}$$

où e est l'unité dans l'opérade \mathcal{P} . Il est clair que :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ i(v) &= \tilde{\varphi}(e \otimes v) \\ &= e(\varphi(v)) \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

Par suite \mathcal{F} vérifie la propriété universelle ci-dessus, ce qui prouve la proposition 53. □

2 Opérades : une approche par les espèces

2.1 Catégories

Une catégorie \mathcal{C} est une collection d'objets $Obj(\mathcal{C})$ et la donnée pour tout couple d'objets (A, B) d'une collection de morphismes (ou flèches) de A vers B , qui vérifient les axiomes d'une catégorie [24].

Exemple 16 1. *Catégorie des ensembles finis : les objets sont les ensembles finis et les flèches sont les bijections.*

2. *Catégorie des espaces vectoriels : les objets sont les K -espaces vectoriels et les flèches sont les applications linéaires.*

2.2 Foncteurs

Un foncteur \mathcal{F} est un "morphisme" entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} . Plus précisément, pour tout objet A de \mathcal{C} , $\mathcal{F}(A)$ est un objet de \mathcal{D} et pour toute flèche f de \mathcal{C} , $\mathcal{F}(f)$ est une flèche de \mathcal{D} vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)} \quad \forall A \in Obj(\mathcal{C}) \\ \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \quad \forall f, g \text{ flèches composables de } \mathcal{C} \end{cases}$$

2.3 Espèces

Soit \mathcal{C} une catégorie tensorielle symétrique [24]. Une espèce dans la catégorie \mathcal{C} [17] est un foncteur contravariant \mathcal{F} de la catégorie des ensembles finis $\mathcal{F}in$ dans \mathcal{C} . Ainsi une espèce \mathcal{F} fournit un objet $\mathcal{F}(A)$ pour tout ensemble fini A et un isomorphisme $\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ pour toute bijection $\varphi : B \rightarrow A$. En particulier $Aut A \approx S_n$ agit à droite sur $\mathcal{F}(A)$ si le cardinal de A est égal à n . Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux espèces. Un morphisme d'espèces entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est une transformation naturelle $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Donc pour deux ensembles finis A et B de même cardinal et toute bijection φ de B dans A , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}_\varphi} & \mathcal{F}(B) \\ \psi(A) \downarrow & & \downarrow \psi(B) \\ \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}_\varphi} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

2.4 Composition des espèces

Soit I un ensemble fini. Toute relation d'équivalence R sur I induit une partition de I en blocs. Soient R et R' deux relations d'équivalence sur I . On dit que R est plus fine que R' et on écrit $R < R'$ si pour tout $x, y \in I$, xRy implique $xR'y$. De façon évidente tout bloc de R est contenu dans un bloc de R' . On note $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ la catégorie des espèces dans \mathcal{C} . La composition des espèces est un bifoncteur $\boxtimes : \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ tel que pour tout ensemble fini I ,

$$(F \boxtimes G)(I) = \bigoplus_{R \models I} F(I/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} G(J), \quad (4.15)$$

où la notation $R \models I$ signifie que R est une relation d'équivalence sur I . $Aut I$ agit sur les relations d'équivalence sur I et donc sur $(F \boxtimes G)(I)$.

Remarque 54 *L'ordre sur les différents $J \in I/R$ n'est pas spécifié dans l'écriture du produit tensoriel à droite dans l'équation (4.15). Le passage d'un choix d'ordre à un autre est un isomorphisme donné par l'usage répété des voltes $\tau_{AB} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$.*

Proposition 55 *Le produit \boxtimes , défini ci-dessus est associatif.*

Preuve : Soient I un ensemble fini, F, G et $H \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$, alors

$$\begin{aligned} ((F \boxtimes G) \boxtimes H)(I) &= \bigoplus_{R \models I} (F \boxtimes G)(I/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} H(J) \\ &= \bigoplus_{R \models I} \left(\bigoplus_{S' \models I/R} F((I/R)/S') \otimes \bigotimes_{K' \in (I/R)/S'} G(K') \right) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} H(J) \\ &= \bigoplus_{R \models I} \left(\bigoplus_{S \models I, R \models I, R < S} F(I/S) \otimes \bigotimes_{K \in I/S} G(K/R) \right) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} H(J) \\ &= \bigoplus_{R < S \models I} F(I/S) \otimes \bigotimes_{K \in I/S} G(K/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} H(J). \end{aligned}$$

Alors que :

$$\begin{aligned}
(F \boxtimes (G \boxtimes H))(I) &= \bigoplus_{\mathcal{S}=I} F(I/\mathcal{S}) \otimes \bigotimes_{J \in I/\mathcal{S}} (G \boxtimes H)(J) \\
&= \bigoplus_{\mathcal{S}=I} F(I/\mathcal{S}) \otimes \bigotimes_{J \in I/\mathcal{S}} \left(\bigoplus_{R|=J} G(J/R) \otimes \bigotimes_{K \in J/R} H(K) \right) \\
&= \bigoplus_{R < \mathcal{S}=I} F(I/\mathcal{S}) \otimes \bigotimes_{K \in I/\mathcal{S}} G(K/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} H(J),
\end{aligned}$$

Ce qui montre la proposition. Dans le passage à la dernière ligne on a utilisé le fait que la donnée d'une relation d'équivalence sur chaque bloc de \mathcal{S} est équivalente à la donnée d'une relation d'équivalence $R < \mathcal{S}$ sur I .

□

Remarque 56 *Le produit \boxtimes se comporte comme un produit tensoriel, à part le fait que $F \boxtimes G \neq G \boxtimes F$ en général. L'élément neutre est l'espèce E tels que $E(\{*\}) = Ke$ et $E(I) = 0$ pour tout I de cardinal supérieur à 2 ou I l'ensemble vide.*

Notations : Soient I un ensemble fini et R une relation d'équivalence sur I . On note $(F \boxtimes F)(I)_R = F(I/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} F(J)$, de sorte que l'on a : $(F \boxtimes F)(I) = \bigoplus_{R|=I} (F \boxtimes F)(I)_R$. Pour σ un automorphisme de I et J un bloc de I/R , la restriction $\sigma|_J$ est une bijection de J sur $J.\sigma$. On note R^σ la relation d'équivalence sur I définie par $iR^\sigma j \Leftrightarrow \sigma(i)R\sigma(j)$ et on note $\bar{\sigma}$ l'isomorphisme de I/R sur I/R^σ déduit de σ .

2.5 Opérades dans une catégorie monoïdale symétrique

Définition 20 *Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale symétrique. Une opérade dans la catégorie \mathcal{C} est un monoïde dans la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Plus précisément, une opérade est une espèce F munie d'un morphisme $\gamma : F \boxtimes F \rightarrow F$ associatif i.e : tel que l'on a $\gamma(\gamma \otimes I) = \gamma(I \otimes \gamma)$. Le morphisme γ définit pour tout ensemble I et toute relation d'équivalence R sur I :*

$$\gamma_{I,R} : F(I/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} F(J) \longrightarrow F(I). \quad (4.16)$$

L'équivariance se traduit par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
F(I/R) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} F(J) & \xrightarrow{\gamma_{I,R}} & F(I) \\
\downarrow (F \boxtimes F)(\sigma)|_{(F \boxtimes F)(I)_R} & & \downarrow F(\sigma) \\
F(I/R^\sigma) \otimes \bigotimes_{J \in I/R^\sigma} F(J) & \xrightarrow{\gamma_{I,R^\sigma}} & F(I)
\end{array}$$

$$\text{où } (F \boxtimes F)(\sigma) = F(\bar{\sigma}) \otimes \bigotimes_{J \in I/R} F(\sigma|_J).$$

2.6 Compositions partielles

Pour simplifier on peut supposer que l'opérade F est augmentée i.e : $F(\emptyset) = 0$ et $F(\{*\}) = Ke$. On considère sur l'ensemble fini I' une relation d'équivalence R tels que tous les blocs soient des singletons sauf un noté J . On note $I = I'/R$ et $i = \{J\} \in I$, d'où $I' = I \setminus \{i\} \cup J$. On note \circ_i la composition : $\gamma : F(I'/R) \otimes F(J) \rightarrow F(I')$ qui est $\gamma : F(I) \otimes F(J) \rightarrow F(I \setminus \{i\} \cup J)$. Les autres composantes à gauche sont de la forme $F(\{*\}) = \mathbf{1}$, donc n'apparaissent pas dans le produit tensoriel. L'associativité s'exprime par la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} F(I) \otimes F(J) \otimes F(K) & \xrightarrow{Id_I \otimes \circ_j} & F(I) \otimes F(J \setminus \{j\} \cup K) \\ \circ_i \downarrow & & \downarrow \circ_i \\ F(I \setminus \{i\} \cup J) \otimes F(K) & \xrightarrow{\circ_j} & F(I \setminus \{i\} \cup J \setminus \{j\} \cup K) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} F(I) \otimes F(J) \otimes F(K) & \xrightarrow{\circ_i \otimes Id} & F(I \setminus \{i\} \cup J) \otimes F(K) \\ \tau_{2,3} \downarrow & & \downarrow \circ_i \\ F(I) \otimes F(K) \otimes F(J) & & \\ \circ_l \otimes Id \downarrow & & \\ F(I \setminus \{l\} \cup K) \otimes F(J) & \xrightarrow{\circ_i} & F(I \setminus \{i, l\} \cup J \cup K) \end{array}$$

où $\tau_{2,3} = Id_{F(I)} \otimes \tau_{F(J), F(K)}$. Le premier diagramme correspond à l'associativité emboîtée tandis que le second correspond à l'associativité disjointe.

3 Deux structures d'opérade sur les arbres enracinés

On rappelle brièvement dans cette section l'opérade des arbres enracinés introduite par F. Chapoton et M. Livernet dans [8]. Un arbre enraciné est un graphe fini orienté connexe sans boucles, dont l'un des sommets n'est l'arrivée d'aucune arête; ce sommet est appelé la racine. Les arbres enracinés seront dessinés avec la racine en bas (voir [14],[10]). Pour tout $n \geq 1$ un arbre enraciné labellisé de degré n est un arbre à n sommets labellisés. Pour tout ensemble fini A de cardinal n , on note $\mathcal{RT}(A)$ l'espace des arbres enracinés de degré n labellisé par les éléments de A . Le groupe $Aut A$ des permutations des éléments de A agit à droite sur $\mathcal{RT}(A)$ en permutant les labels. Soit $\mathcal{RT} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{RT}(n)$. On munit l'espèce \mathcal{RT} d'une structure d'opérade (voir [8]) : L'action du groupe symétrique est naturelle en permutant les labels des sommets. Soit A un ensemble fini de cardinal n et $v \in A$. Pour un arbre T de degré n labellisé par les éléments de A , on note $E(T, v)$ l'ensemble des arêtes de T arrivant au sommet v de T .

On a utilisé la notation : $\mathcal{RT}(n) = \mathcal{RT}(\{1, \dots, n\})$.

3.1 L'opérade pré-Lie

Soient A et B deux ensembles finis. Soit $v \in A$. On définit les compositions partielles $\circ_v : \mathcal{RT}(A) \otimes \mathcal{RT}(B) \rightarrow \mathcal{RT}(A - \{v\} \cup B)$, de la façon suivante :

$$T \circ_v S = \sum_{f: E(T,v) \rightarrow B} T \circ_v^f S, \quad (4.17)$$

où $T \circ_v^f S$ est l'arbre de $\mathcal{RT}(A - \{v\} \cup B)$ obtenu en remplaçant le sommet v de T par l'arbre S et en reliant chaque arête a dans $E(T, v)$ au sommet $f(a)$ de S (voir en détail dans [8]). L'unité est l'arbre à un seul sommet. Ces compositions partielles définissent une opérade qui est l'opérade pré-Lie. On définit : $T \triangleleft S = \sum_{v \in A} (T \circ_v S)$. La loi \circ passe au quotient par les axiomes du groupe

symétrique (axiome d'équivariance). On pose $\mathcal{F}_{PL}(n) = \mathcal{RT}(n)/S_n$ et $\mathcal{F}_{PL} = \bigoplus_{n \geq 2} \mathcal{PL}(n)$.

Théorème 57 *l'espace \mathcal{F}_{PL} muni de l'application bilinéaire \triangleleft définie ci-dessus est une algèbre pré-Lie à droite. Ce théorème est vrai pour toute opérade \mathcal{O} augmentée i.e : telle que $\dim \mathcal{O}_1 = 1$ [8].*

Remarque 58 *On a déjà vu au Chapitre 2 (paragraphe 7.2), que les compositions partielles ci-dessus donnent lieu à deux structures pré-Lie à droite \triangleleft et \leftarrow sur \mathcal{F}_{PL} [8] telles que la première agit sur la deuxième par dérivation [25], la structure pré-Lie \leftarrow est définie par :*

$$T \leftarrow S = \left(\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 T \right) \circ_2 S, \quad (4.18)$$

appelée greffe de S sur T et on a la relation de dérivation suivante :

$$(T \leftarrow S) \triangleleft U = (T \triangleleft U) \leftarrow S + T \leftarrow (S \triangleleft U) \quad \forall S, T, U \in \mathcal{F}_{PL}. \quad (4.19)$$

3.2 L'opérade NAP

On définit [18] les compositions partielles $\circ_v : \mathcal{RT}(A) \otimes \mathcal{RT}(B) \rightarrow \mathcal{RT}(A - \{v\} \cup B)$ comme suit :

$$T \circ_v S = T \circ_v^{f_0} S, \quad (4.20)$$

où $T \circ_v^{f_0} S$ est l'arbre de $\mathcal{RT}(A - \{v\} \cup B)$ obtenu en remplaçant le sommet v de T par l'arbre S et en relie les arêtes de $E(T, v)$ par la racine de S . L'unité est l'arbre enraciné à un seul sommet. On définit $T \odot S = \sum_{v \in A} T \circ_v S$. La loi \odot passe au quotient par l'action des groupes symétriques (axiom d'équivariance). En appliquant le résultat de F. Chapoton [6, 7] à l'opérade *NAP* on obtient :

Théorème 59 *L'espace $\mathcal{F}_{NAP} = \bigoplus_{n \geq 2} \mathcal{RT}(n)/S_n$ muni du produit bilinéaire \odot défini ci-dessus est une algèbre pré-Lie à droite.*

Remarque 60 Les compositions partielles définies ci-dessus donnent lieu à une structure non associative permutative \diagdown sur \mathcal{F}_{NAP} . La structure $NAP \diagdown$ est définie par :

$$T \diagdown S = \left(\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \circ_1 T \right) \circ_2 S, \quad (4.21)$$

appelé produit de Butcher (à droite) de T par S et on a la relation de dérivation suivante :

$$(T \diagdown S) \odot U = (T \odot U) \diagdown S + T \diagdown (S \odot U) \quad \forall S, T, U \in \mathcal{F}_{NAP}. \quad (4.22)$$

4 La notion d'opérade à débit constant

On définit dans cette section la notion d'opérade à débit constant, dont le prototype est $Endop(V)$ où V est un espace vectoriel gradué.

4.1 Définition générale

Soit \mathcal{O} une opérade. On dit que \mathcal{O} a une structure d'opérade à débit constant, si de plus

$$\mathcal{O}_A = \prod_{W:A \rightarrow \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{A,W} \text{ pour tout ensemble fini } A, \text{ où :}$$

– L'action à droite du groupe symétrique vérifie :

$$(\mathcal{O}_{A,W}).\sigma = \mathcal{O}_{A,W \circ \sigma} \quad \forall \sigma \in Aut A. \quad (4.23)$$

– Pour deux ensembles finis A et B et $v \in A$ on a :

$$\circ_v : \mathcal{O}_{A,W} \otimes \mathcal{O}_{B,X} \rightarrow \mathcal{O}_{A-\{v\} \cup B, W \amalg X}, \quad (4.24)$$

avec image nulle si $\sum_{b \in B} b \neq W(v)$ et $W \amalg X|_{A-\{v\}} = W|_{A-\{v\}}, W \amalg X|_B = X$.

4.2 Exemple : L'opérade à débit constant $Endop(V)$ lorsque V est un K -espace vectoriel gradué

Soit $V = \bigoplus_{j \geq 1} V_j$ un K -espace vectoriel gradué. Soit $Endop(V)(n)$ l'espace des morphismes homogènes de degré zéro de $V^{\otimes n}$ dans V , i.e :

$$\begin{aligned} Endop(V)(n) &= \mathcal{L}_0(V^{\otimes n}, V) \\ &= \prod_{a_1, \dots, a_n, n \geq 1} \mathcal{L}(V_{a_1} \otimes \dots \otimes V_{a_n}, V_{a_1 + \dots + a_n}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathcal{L}_0(V^{\otimes n}, V)$ et pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, on définit α_{a_1, \dots, a_n} par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{a_1, \dots, a_n}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_n) \quad \text{si } v_j \in V_{a_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ = 0 \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Les compositions partielles \circ_i vérifient :

$$(\alpha \circ_i \beta)_{c_1, \dots, c_{n+m-1}} = \alpha_{c_1, \dots, c_{i-1}, (\sum_{j=i}^{i+m-1} c_j), c_{i+m}, \dots, c_{m+n-1}} \circ_i \beta_{c_i, \dots, c_{i+m-1}}, \quad (4.25)$$

et donc

$$\alpha_{a_1, \dots, a_n} \circ_i \beta_{b_1, \dots, b_m} = 0, \quad (4.26)$$

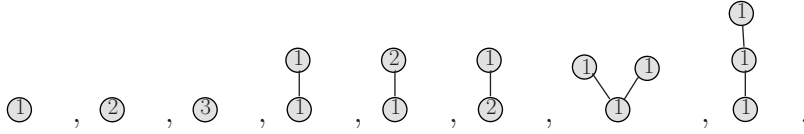
sauf peut-être si $a_i = \sum_{j=1}^m b_j$. Ainsi :

Théorème 61 *Endop(V) est une opérade à débit constant au sens du paragraphe 4.1*

5 L'opérade à débit constant \mathcal{O}^λ

Définition 21 *On définit des arbres enracinés avec des poids sur leurs sommets : ① , ② , ③ , ...*

Exemple 17 *Les arbres de poids inférieur ou égal à 3 sont*



Pour T un arbre on définit le poids de T , noté $|T|$ par :

$$|T| = \sum_{v \in v(T)} |v|, \quad (4.27)$$

où $v(T)$ désigne l'ensemble des sommets de T .

On dessine les arbres enracinés avec des labels et numéros sur leurs sommets, chaque numéro désigne le poids du sommet.

Définition 22 *On définit l'énergie potentielle d'un arbre enraciné T par :*

$$d(T) = \sum_{v \in v(T)} |v| h(v), \quad (4.28)$$

où $h(v)$ est la hauteur de v dans T , i.e. la distance de v à la racine de T en comptant le nombre d'arêtes.

Soit λ un élément du corps K . Pour tout ensemble fini A , soit \mathcal{O}_A^λ l'espace vectoriel engendré par les arbres à $\text{card}(A)$ sommets labellisés par A de poids quelconque. Pour $S \in \mathcal{O}_A^\lambda$ et v un sommet de S , on désigne par $E(S, v)$ l'ensemble des arêtes de S arrivant sur le sommet v de S . Soit B un ensemble fini et $T \in \mathcal{O}_B^\lambda$, on définit les compositions partielles par :

$$S \circ_{v, \lambda} T = \begin{cases} \sum_{f: E(S, v) \rightarrow v(T)} \lambda^{d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T)} S \circ_v^f T & \text{si } |T| = |v| \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $S \circ_v^f T$ est l'élément de $\mathcal{O}_{(A-\{v\})\amalg B}^\lambda$ obtenu en remplaçant le sommet v par S et en reliant chaque arête de $E(S, v)$ par leur image par f dans $v(T)$ et f_0 est l'application de $E(S, v)$ dans $v(T)$ qui envoie chaque arête a de $E(S, v)$ sur la racine de T . On remarque que l'arbre $S \circ_v^{f_0} T$ a la plus petite énergie potentielle dans la somme précédente. L'unité est l'élément suivant :

$$\sum_{n \geq 1} \textcircled{n} ,$$

où \textcircled{n} est l'arbre à un seul sommet de poids n , (la somme infinie précédente a un sens car \mathcal{O}_1^λ est un produit). L'action du groupe symétrique S_n sur \mathcal{O}_n^λ est naturelle en permutant les sommets.

Exemple 18 Pour $S = \begin{array}{c} \textcircled{(c,2)} \textcircled{(d,1)} \\ | \\ \textcircled{(b,3)} \\ | \\ \textcircled{(a,1)} \end{array}$ et $T = \begin{array}{c} \textcircled{(h,2)} \\ | \\ \textcircled{(e,1)} \end{array}$, on a :

$$S \circ_{b,\lambda} T =$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \textcircled{(c,2)} \textcircled{(h,2)} \textcircled{(d,1)} \\ | \\ \textcircled{(e,1)} \\ | \\ \textcircled{(a,1)} \end{array} + \lambda \begin{array}{c} \textcircled{(d,1)} \\ | \\ \textcircled{(h,2)} \\ | \\ \textcircled{(e,1)} \\ | \\ \textcircled{(a,1)} \end{array} + \lambda^2 \begin{array}{c} \textcircled{(c,2)} \\ | \\ \textcircled{(h,2)} \\ | \\ \textcircled{(d,1)} \\ | \\ \textcircled{(e,1)} \\ | \\ \textcircled{(a,1)} \end{array} + \lambda^3 \begin{array}{c} \textcircled{(c,2)} \textcircled{(d,1)} \\ | \\ \textcircled{(h,2)} \\ | \\ \textcircled{(e,1)} \\ | \\ \textcircled{(a,1)} \end{array} \\ f_0 : \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow e \\ d \rightarrow e \end{array} \right. \quad f : \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow e \\ d \rightarrow h \end{array} \right. \quad f : \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow h \\ d \rightarrow e \end{array} \right. \quad f : \left\{ \begin{array}{l} c \rightarrow h \\ d \rightarrow h \end{array} \right. \end{array}$$

Théorème 62 Les compositions partielles précédentes définissent sur \mathcal{O}^λ une structure d'opé-
rade à débit constant.

Preuve :

On commence tout d'abord par la démonstration de l'associativité emboîtée puis la démonstration de l'associativité disjointe.

– Associativité emboîtée : montrons $(S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U = S \circ_{v,\lambda} (T \circ_{w,\lambda} U)$ où v est un sommet de S et w un sommet de T .

Soient $S, T, U \in \mathcal{O}^\lambda$, v un sommet de S et w un sommet de T tels que $|T| = |v|$ et $|U| = |w|$. On a :

$$\begin{aligned} (S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U &= \sum_{f:E(S,v) \rightarrow v(T)} \lambda^{d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T)} (S \circ_v^f T) \circ_{w,\lambda} U \\ &= \sum_{f:E(S,v) \rightarrow v(T)} \sum_{g:E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)} \lambda^{d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T) + d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U) - d((S \circ_v^f T) \circ_w^{g_0} U)} (S \circ_v^f T) \circ_w^g U \\ &= \sum_{f:E(S,v) \rightarrow v(T)} \sum_{g:E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)} \lambda^{A(f,g)} (S \circ_v^f T) \circ_w^g U, \end{aligned}$$

où $A(f, g) = d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T) + d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U) - d((S \circ_v^f T) \circ_w^{g_0} U)$. De même :

$$\begin{aligned} S \circ_{v,\lambda} (T \circ_{w,\lambda} U) &= \sum_{\tilde{g}: E(T,w) \rightarrow v(U)} \lambda^{d(T \circ_w^{\tilde{g}} U) - d(T \circ_w^{g_0} U)} S \circ_{v,\lambda} (T \circ_w^{\tilde{g}} U) \\ &= \sum_{\tilde{f}: E(S,v) \rightarrow v(T \circ_w^{\tilde{g}} U)} \sum_{\tilde{g}: E(T,w) \rightarrow v(U)} \lambda^{d(T \circ_w^{\tilde{g}} U) - d(T \circ_w^{g_0} U) + d(S \circ_v^{\tilde{f}}(T \circ_w^{\tilde{g}} U)) - d(S \circ_v^{f_0}(T \circ_w^{\tilde{g}} U))} S \circ_v^{\tilde{f}} (T \circ_w^{\tilde{g}} U) \\ &= \sum_{\tilde{g}: E(T,w) \rightarrow v(U)} \sum_{\tilde{f}: E(S,v) \rightarrow v(T \circ_w^{\tilde{g}} U)} \lambda^{B(\tilde{f}, \tilde{g})} S \circ_v^{\tilde{f}} (T \circ_w^{\tilde{g}} U), \end{aligned}$$

où

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = d(T \circ_w^{\tilde{g}} U) - d(T \circ_w^{g_0} U) + d(S \circ_v^{\tilde{f}} (T \circ_w^{\tilde{g}} U)) - d(S \circ_v^{f_0} (T \circ_w^{\tilde{g}} U)).$$

Dans le but de montrer $(S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U = S \circ_{v,\lambda} (T \circ_{w,\lambda} U)$, on introduit le lemme suivant :

Lemme 63 *Il y a une bijection naturelle $(f, g) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{g})$ telle que*

$$(S \circ_v^f T) \circ_w^g U = S \circ_v^{\tilde{f}} (T \circ_w^{\tilde{g}} U). \quad (4.29)$$

Preuve :

Soient v un sommet de S et w un sommet de T tels que $|T| = |v|$ et $|U| = |w|$. Soient $f : E(S, v) \rightarrow v(T)$ et $g : E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)$ deux applications données. Cherchons $\tilde{g} : E(T, w) \rightarrow v(U)$ et $\tilde{f} : E(S, v) \rightarrow v(T \circ_w^{\tilde{g}} U) = v(T) \cup v(U) \setminus \{w\}$ tels que l'équation (4.29) est vérifiée.

Soit e une arête de T arrivant sur w , ainsi e est une arête de $S \circ_v T$ arrivant sur w . On pose $\tilde{g}(e) = g(e)$. De même on définit \tilde{f} d'une manière unique comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E(S, v) &\longrightarrow V(T \circ_w^{\tilde{g}} U) = v(T) \cup v(U) \setminus \{w\} \\ e &\longmapsto \tilde{f}(e) = \begin{cases} f(e) & \text{si } f(e) \neq w \\ g(e) & \text{si } f(e) = w \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose qu'on a le couple (\tilde{f}, \tilde{g}) et on cherche le couple (f, g) tel que l'équation (4.29) est vérifiée. On a $\tilde{f} : E(S, v) \rightarrow v(T) \cup v(U) \setminus \{w\}$ et $\tilde{g} : E(T, w) \rightarrow v(U)$.

On définit alors :

$$\begin{aligned} f : E(S, v) &\longrightarrow v(T) \\ e &\longmapsto f(e) = \begin{cases} \tilde{f}(e) & \text{si } \tilde{f}(e) \notin v(U) \\ w & \text{si } \tilde{f}(e) \in v(U) \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : E(S \circ_v^f T, w) &\longrightarrow v(U) \\ e &\longmapsto g(e) = \begin{cases} \tilde{g}(e) & \text{si } e \in T \\ \tilde{f}(e) & \text{si } e \in S \text{ et } f(e) = w \end{cases} \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème (suite)

Pour montrer $(S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U = S \circ_{v,\lambda} (T \circ_{w,\lambda} U)$, il reste à montrer que $A(f, g) = B(\tilde{f}, \tilde{g})$.

On pose

$$A'(f, g) = A(f, g) + d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U),$$

$$B'(\tilde{f}, \tilde{g}) = B(\tilde{f}, \tilde{g}) + d(S \circ_v^{\tilde{f}_0} (T \circ_w^{\tilde{g}_0} U)),$$

et

$$\epsilon(f) = d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T).$$

On a :

$$\epsilon(f) = \sum_{e \in E(S,v)} h(f(e)) \cdot |B_e|, \quad (4.30)$$

où $h(f(e))$ est la distance entre $f(e)$ et la racine de T dans le nouvel arbre $S \circ_v^f T$ et $|B_e|$ est le poids de la branche liée à e . De même :

$$\begin{aligned} d((S \circ_v^f T) \circ_w^{g_0} U) - d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U) &= \sum_{e \in E(S,v)} h(f(e)) |B_e| \\ &= \epsilon(f), \end{aligned}$$

Ici g_0 n'intervient pas car on a branché sur la racine de U , ainsi $A'(f, g) = d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U)$. Par le même calcul on montre $B'(\tilde{f}, \tilde{g}) = d(S \circ_v^{\tilde{f}} (T \circ_w^{\tilde{g}} U))$. Ainsi par le lemme 63 on a $A'(f, g) = B'(\tilde{f}, \tilde{g})$ c'est-à-dire $A(f, g) + d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U) = B(\tilde{f}, \tilde{g}) + d(S \circ_v^{\tilde{f}_0} (T \circ_w^{\tilde{g}_0} U))$, ce qui prouve que $A(f, g) = B(\tilde{f}, \tilde{g})$ car par le lemme 63 on a $d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U) = d(S \circ_v^{\tilde{f}_0} (T \circ_w^{\tilde{g}_0} U))$.

– L'associativité disjointe : Soient v, w deux sommets disjoints de S tels que $|v| = |T|$ et $|w| = |U|$, montrons que :

$$(S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U = (S \circ_{w,\lambda} U) \circ_{v,\lambda} T. \quad (4.31)$$

On a

$$\begin{aligned} (S \circ_{v,\lambda} T) \circ_{w,\lambda} U &= \sum_{f: E(S,v) \rightarrow v(T)} \lambda^{d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T)} (S \circ_v^f T) \circ_{w,\lambda} U \\ &= \sum_{f: E(S,v) \rightarrow v(T)} \sum_{g: E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)} \lambda^{k(f) + d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U) - d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U)} (S \circ_v^f T) \circ_w^g U \\ &= \sum_{f: E(S,v) \rightarrow v(T)} \sum_{g: E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)} \lambda^{C(f,g)} (S \circ_v^f T) \circ_w^g U, \end{aligned}$$

où

$$k(f) = d(S \circ_v^f T) - d(S \circ_v^{f_0} T),$$

et

$$C(f, g) = k(f) + d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U) - d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U).$$

De même on trouve :

$$(S \circ_{w,\lambda} U) \circ_{v,\lambda} T = \sum_{\tilde{g}: E(S,w) \rightarrow v(U)} \sum_{\tilde{f}: E(S \circ_w^{\tilde{g}} U, v) \rightarrow v(T)} \lambda^{D(\tilde{f}, \tilde{g})} (S \circ_w^{\tilde{g}} U) \circ_v^{\tilde{f}} T,$$

où $D(\tilde{g}, \tilde{f}) = k(\tilde{g}) + d((S \circ_w^{\tilde{g}} U) \circ_v^{\tilde{f}} T) - d((S \circ_w^{\tilde{g}} U) \circ_v^{\tilde{f}_0} T)$ et $k(\tilde{g}) = d(S \circ_w^{\tilde{g}} U) - d(S \circ_w^{\tilde{g}_0} U)$. Pour montrer (4.31), on introduit le lemme suivant :

Lemme 64 On a une bijection naturelle $(f, g) \mapsto (\tilde{f}, \tilde{g})$ telle que

$$(S \circ_v^f T) \circ_w^g U = (S \circ_w^{\tilde{g}} U) \circ_v^{\tilde{f}} T. \quad (4.32)$$

Preuve :

Soient $f : E(S, v) \rightarrow v(T)$ et $g : E(S \circ_v^f T, w) \rightarrow v(U)$ deux applications données. Cherchons $\tilde{g} : E(S, w) \rightarrow v(U)$ et $\tilde{f} : E(S \circ_w^{\tilde{g}} U, v) \rightarrow v(T)$ telles que l'équation (4.32) est vérifiée. Il faut que \tilde{g} soit la restriction de g sur les arêtes e provenant de S et $\tilde{f} = f$ car $E(S \circ_w^g U, v) = E(S, v)$ car les sommets v et w sont disjoints.

Inversement, Soient $\tilde{g} : E(S, w) \rightarrow v(U)$ et $\tilde{f} : E(S \circ_w^{\tilde{g}} U, v) \rightarrow v(T)$ deux applications données. Cherchons les applications f et g pour que l'équation (4.32) soit vérifiée.

Il faut que f soit la restriction de \tilde{f} sur les arêtes e provenant de S et $g = \tilde{g}$ car $E(S, w) = E(S \circ_v^f T, w)$ (v et w sont deux sommets de S disjoints).

□

Démonstration du théorème (fin)

Ainsi pour montrer l'associativité disjointe il reste à montrer que pour tout couple (f, g) et (\tilde{f}, \tilde{g}) on a $C(f, g) = D(\tilde{f}, \tilde{g})$. On pose

$$C'(f, g) = C(f, g) + d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U)$$

et

$$D'(\tilde{f}, \tilde{g}) = D(\tilde{f}, \tilde{g}) + d((S \circ_w^{\tilde{g}_0} U) \circ_v^{\tilde{f}_0} T).$$

On a :

$$k(f) = \sum_{e \in E(S, v)} h(f(e)) |B_e|,$$

De même on a :

$$d((S \circ_v^f T) \circ_w^{g_0} U) - d((S \circ_v^{f_0} T) \circ_w^{g_0} U) = k(f),$$

car on a changé le sommet w par un arbre de même poids, et par g_0 on a greffé sur la racine ; ce qui prouve $C'(f, g) = d((S \circ_v^f T) \circ_w^g U)$. Par suite $D'(\tilde{f}, \tilde{g}) = d((S \circ_w^{\tilde{g}} U) \circ_v^{\tilde{f}} T)$. Par le lemme 64, $C'(f, g) = D'(\tilde{f}, \tilde{g})$ et par le même lemme $C(f, g) = D(\tilde{f}, \tilde{g})$, Ce qui prouve l'associativité disjointe.

Les compositions partielles définies sur \mathcal{O}^λ vérifient bien les axiomes d'une opérade à débit constant.

□

Remarque 65 L'opérade à débit constant \mathcal{O}^λ modulo l'oubli de la multigraduation ainsi définie est :

- l'opérade pré-Lie [8] si $\lambda = 1$.
- l'opérade NAP si $\lambda = 0$.

Soit \mathcal{O}^λ l'opérade à débit constant définie ci-dessus. Pour tout ensemble fini A , On pose $\mathcal{O}_A^\lambda =$

$\prod_{W:A \rightarrow \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{A,W}^\lambda$. Une base topologique de l'espace \mathcal{O}_A^λ est

$\mathcal{O}_A^\lambda = \{(t, W), \text{ où } t \text{ arbre labellisé à card } A \text{ sommets et } W : A \rightarrow \mathbb{N}^*\},$

ici W détermine les poids des sommets. On désigne par \mathcal{O}_{PL} l'opérade pré-Lie des arbres enracinés labellisés [8]. On pose :

$$\begin{aligned} i : \mathcal{O}_{PL} &\longrightarrow \mathcal{O}^1 \\ t &\longmapsto \sum_{W:A \rightarrow \mathbb{N}^*} (t, W), \end{aligned}$$

Théorème 66 *i est un morphisme injectif d'opérades.*

Preuve : Soient A et B deux ensembles finis. Soient S et T deux arbres labellisés respectivement par A et B et $v \in A$. Montrons :

$$i(S \circ_v T) = i(S) \circ_{v,1} i(T). \quad (4.33)$$

L'équation (4.33) équivaut à montrer

$$\begin{aligned} \sum_{W:(A-\{v\}) \amalg B \rightarrow \mathbb{N}^*} (S \circ_v T, W) &= \sum_{X:A \rightarrow \mathbb{N}^*} (S, X) \circ_{v,1} \sum_{Y:B \rightarrow \mathbb{N}^*} (T, Y) \\ &= \sum_{X:A \rightarrow \mathbb{N}^*} (S, X) \circ_{v,1} \sum_{Y:B \rightarrow \mathbb{N}^*, \sum_{b \in B} Y(b) = X(v)} (T, Y). \end{aligned}$$

Soit $f : E(S, v) \longrightarrow v(T)$ et $W : (A - \{v\}) \amalg B \rightarrow \mathbb{N}^*$. Il existe $X : A \rightarrow \mathbb{N}^*$ et $Y : B \rightarrow \mathbb{N}^*$ uniques tels que

$$(S \circ_v^f T, W) = (S, X) \circ_{v,1}^f (T, Y).$$

Il suffit de prendre $Y = W|_B$, $X|_{A-\{v\}} = W|_{A-\{v\}}$ et $X(v) = \sum_{b \in B} Y(b)$.

En faisant la somme sur les différents branchements f possibles, on trouve :

$$i(S \circ_v T) = i(S) \circ_{v,1} i(T), \quad (4.34)$$

Ce qui prouve le théorème. □

Si \circ_{NAP} désigne la composition partielle pour l'opérade NAP , on montre comme pour l'opérade pré-Lie que

$$\begin{aligned} j : \mathcal{O}_{NAP} &\longrightarrow \mathcal{O}^0 \\ t &\longmapsto \sum_{W:A \rightarrow \mathbb{N}^*} (t, W) \end{aligned}$$

est un morphisme injectif d'opérades i.e.

$$j(S \circ_{NAP,v} T) = J(S) \circ_{v,0} j(T), \quad (4.35)$$

pour tout couple d'arbres S, T et tout sommet v de S .

6 Algèbre NAP déformée

Définition 23 Soit λ un réel, On définit l'opérateur de greffe " \leftarrow_λ ", pour tout $S, T \in \mathcal{O}^\lambda$ par :

$$T \leftarrow_\lambda S = \left(\begin{array}{c} \bigcirc_{(w, |S|)} \\ | \\ \bigcirc_{(v, |T|)} \end{array} \right) \circ_{w, \lambda} T \quad (4.36)$$

Il est clair que :

$$T \leftarrow_\lambda S = \sum_{v \in v(T)} \lambda^{|S|h(v)} T \leftarrow_v S, \quad (4.37)$$

où $T \leftarrow_v S$ est l'arbre obtenu en greffant S sur le sommet v de T , $h(v)$ est la hauteur de v dans T et $|S|$ est le poids de S .

Théorème 67 Pour tout $S, T, U \in \mathcal{O}^\lambda$, on a :

$$(U \leftarrow_\lambda T) \leftarrow_\lambda S - \lambda^{|S|} U \leftarrow_\lambda (T \leftarrow_\lambda S) = (U \leftarrow_\lambda S) \leftarrow_\lambda T - \lambda^{|T|} U \leftarrow_\lambda (S \leftarrow_\lambda T). \quad (4.38)$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} (U \leftarrow_\lambda T) \leftarrow_\lambda S &= \sum_{v \in v(U \leftarrow_\lambda T)} \sum_{w \in v(U)} \lambda^{|S|h(v)+|T|h(w)} (U \leftarrow_w T) \leftarrow_v S \\ &= \sum_{w \in v(U)} \sum_{v \in v(T \rightarrow_w U)} \lambda^{|S|h(v)+|T|h(w)} (U \leftarrow_w T) \leftarrow_v S \\ &= \sum_{w \in v(U)} \sum_{v \in v(U)} \lambda^{|S|h(v)+|T|h(w)} (U \leftarrow_w T) \leftarrow_v S \\ &\quad + \sum_{w \in v(U)} \sum_{v \in v(T)} \lambda^{|S|(h(v)+h(w)+1)+|T|h(w)} U \leftarrow_w (T \leftarrow_v S). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} U \leftarrow_\lambda (T \leftarrow_\lambda S) &= \sum_{v \in v(T)} \sum_{w \in v(U)} \lambda^{|S|h(v)+|T \leftarrow_v S|h(w)} U \leftarrow_w (T \leftarrow_v S) \\ &= \sum_{v \in v(T)} \sum_{w \in v(U)} \lambda^{|S|(h(v)+h(w))+|T|h(w)} U \leftarrow_w (T \leftarrow_v S). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(U \leftarrow_\lambda T) \leftarrow_\lambda S - \lambda^{|S|} U \leftarrow_\lambda (T \leftarrow_\lambda S) = \sum_{v, w \in v(U)} \lambda^{|S|h(v)+|T|h(w)} (U \leftarrow_w T) \leftarrow_v S. \quad (4.39)$$

Dans l'équation (4.39), il y a symétrie en les termes S et T car w, v sont deux sommets de U . Par suite on trouve le Théorème 67. □

6.1 Définitions relatives aux opérades à débit constant

Définition 24 Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux opérades à débit constant. Un morphisme d'opérades à débit constant a est un morphisme d'opérades, qui de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifie :

$$a(n) : \mathcal{P}_{n,k_1,\dots,k_n} \longrightarrow \mathcal{Q}_{n,k_1,\dots,k_n}. \quad (4.40)$$

Définition 25 Soient \mathcal{P} une opérade à débit constant et $V = \bigoplus_{n>0} V_n$ un espace vectoriel gradué. On dit que V est une \mathcal{P} -algèbre graduée, s'il existe un morphisme d'opérades à débit constant $a : \mathcal{P} \rightarrow \text{Endop}(V)$. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}_{n,k_1,\dots,k_n}$, $v_1 \in V_{k_1}, \dots, v_n \in V_{k_n}$, on note

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = a(n)(\mu)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$$

Soient (V, a) et (W, b) deux \mathcal{P} -algèbres graduées. Soit $\phi : (V, a) \rightarrow (W, b)$ une application linéaire homogène de degré zéro. ϕ est dite morphisme de \mathcal{P} -algèbres graduées si pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \dots, v_n \in V$,

$$\phi(\mu(v_1, \dots, v_n)) = \mu(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)).$$

On définit la \mathcal{P} -algèbre graduée libre $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V)$ sur V par la propriété universelle suivante : il existe $i : V \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V)$ telle que pour toute \mathcal{P} -algèbre graduée A et toute application linéaire homogène de degré zéro $\varphi : V \rightarrow A$ il existe un unique morphisme de \mathcal{P} -algèbres graduées $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V) \rightarrow A$ tel que

$$\tilde{\varphi} \circ i = \varphi.$$

On pose $\mathcal{F} = \bigoplus_{n>0} \left(\prod_{k_1, \dots, k_n > 0} \mathcal{P}_{n,k_1, \dots, k_n} \right) \otimes V_{k_1} \otimes \dots \otimes V_{k_n} / S_n$. Par le même travail que dans la section 1, on montre que \mathcal{F} est la \mathcal{P} -algèbre graduée libre.

Cas particulier : si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim V_n = 1$ alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V) &= \bigoplus_{n>0} \left(\prod_{k_1, \dots, k_n > 0} \mathcal{P}_{n,k_1, \dots, k_n} \right) / S_n \\ &= \bigoplus_{n>0} \mathcal{P}_n / S_n \end{aligned}$$

Remarque 68 L'algèbre NAP déformée $(\mathcal{F}_{\mathcal{O}\lambda}, \leftarrow_{\lambda})$ est une algèbre :

- pré-Lie à droite lorsque $\lambda = 1$ [25], [2] [28].
- NAP à droite lorsque $\lambda = 0$.

Plus précisément les morphismes d'opérades i et j définis précédemment passent au quotient par l'action des groupes symétriques. On a donc un morphisme d'algèbres pré-Lie

$\bar{i} : \mathcal{F}_{PL} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{O}1}$ et un morphisme d'algèbres NAP $\bar{j} : \mathcal{F}_{NAP} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{O}0}$. De plus \bar{i} est l'unique morphisme d'algèbres pré-Lie tel que $\bar{i}(\bullet) = \sum_{n>0} \textcircled{n}$. De même \bar{j} est l'unique morphisme

d'algèbres NAP tel que $\bar{j}(\bullet) = \sum_{n>0} \textcircled{n}$.

6.2 L'opérade à débit constant $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda$

Une algèbre pré-Lie est une algèbre sur une certaine opérade quadratique binaire. De même une algèbre NAP déformée au sens précédent est une algèbre graduée sur une opérade à débit constant $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda$: soit \mathcal{F} l'opérade à débit constant libre engendrée par l'espace $\mathcal{F}(2) = \prod_{k,l>0} \mathcal{F}_{2,k,l}$.

Une base de $\mathcal{F}(n)$ est un espace vectoriel muni d'un produit avec des parenthèses sur n variables tel que chaque variable x a un poids qu'on la note par $|x|$. Par exemple une base de $\mathcal{F}(2)$ est donnée par (xy) et (yx) . Une base de $\mathcal{F}(3)$ est $((xy)z)$, $(x(yz))$ et leurs permutations. Soit r le sous-module de $\mathcal{F}(3)$ engendré par :

$$((xy)z) - \lambda^{|z|}(x(yz)) - ((xz)y) + \lambda^{|y|}(x(zy)).$$

Soit (R) l'idéal engendré par r . On note $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{F}/(R)$. Le théorème suivant est l'analogue du théorème 1.9 de F. Chapoton et M. Livernet [8]

Théorème 69 *L'opérade $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda$ est isomorphe à l'opérade à débit constant \mathcal{O}^λ définie sur les arbres enracinés.*

Changement de notations : Dans la suite, on note par " \star_λ " le produit " \leftarrow_λ ".

Preuve :

Nous adoptons la démonstration du théorème 1.9 de [8]. On définit un morphisme d'opérades $\phi : \mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}^\lambda$ et nous allons montrer que ϕ est un isomorphisme. Puisque $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{F}/(R)$, il suffit de définir ϕ sur $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda(2) = \mathcal{F}(2)$ dans $\mathcal{O}^\lambda(2)$ puis d'étendre ϕ sur \mathcal{F} par la propriété universelle

d'une opérade libre, et afin de montrer que ϕ s'annule sur (R) . On définit $\phi(xy) = \begin{array}{c} \bigcirc_{(y,|y|)} \\ | \\ \bigcirc_{(x,|x|)} \end{array}$ et $\phi(yx) = \begin{array}{c} \bigcirc_{(x,|x|)} \\ | \\ \bigcirc_{(y,|y|)} \end{array}$. On a :

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi(xy) \star_\lambda \phi(z) - \lambda^{|z|} \phi(x) \star_\lambda \phi(yz) - \phi(xz) \star_\lambda \phi(y) + \lambda^{|y|} \phi(x) \star_\lambda \phi(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le morphisme ϕ s'annule donc sur (R) . Soit I un ensemble fini formé par des labels. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \underline{k} &: I \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ a &\longmapsto k_a \end{aligned}$$

On travaille avec les espèces, en considérant $\phi_I : \mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda(I) \rightarrow \mathcal{O}^\lambda(I)$. Cherchons $\psi_I : \mathcal{O}^\lambda(I) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda(I)$ tel que :

$$\begin{cases} \phi_I \circ \psi_I = id \\ \psi_I \circ \phi_I = id \end{cases}$$

On a $\mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda = \prod \mathcal{P}\mathcal{L}_\lambda(I)_{\underline{k}}$ et $\mathcal{O}^\lambda(I) = \prod \mathcal{O}^\lambda(I)_{\underline{k}}$. On cherche $\phi_{I,\underline{k}} : \mathcal{P}\mathcal{L}(I)_{\underline{k}} \rightarrow \mathcal{O}^\lambda(I)_{\underline{k}}$. Montrons le résultat par récurrence sur le cardinal de I .

- Si $I = \{x\}$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ on pose $\psi(\bigcirc_{(x,|x|)}) = x$.

- Soit $n > 0$, on suppose que la propriété est vraie pour tout ensemble I de cardinal inférieur ou égale à n . Soit I un ensemble de cardinal $n + 1$. soit T un arbre labellisé par I (les poids des sommets étant déterminés par $|-| : I \rightarrow \mathbb{N}^*$). soit x l'indice de la racine de T . Modulo les permutations des branches, T s'écrit d'une façon unique :

The diagram shows a root node x at the bottom, connected by lines to a row of nodes T_1, T_2, \dots, T_p above it. The nodes T_1, T_2, \dots, T_p are arranged horizontally, with an ellipsis between T_2 and T_p . Lines connect x to T_1 , x to T_2 , and x to T_p .

$$T = B[x, T_1, \dots, T_p] = \tag{4.41}$$

c'est-à dire l'arbre obtenu en greffant les arbres $(T_i)_{1 \leq i \leq p}$ sur la racine d'indice x , (B c'est l'opérateur de greffe), où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, T_i est un arbre labellisé par un sous ensemble J_i de I . On définit l'application ψ_I par récurrence sur la valence de la racine :

- Si $p = 1$, alors $T = B[x, T_1] = \bigcirc^{(x, |x|)} \star_\lambda T_1$ donc $\psi_I(T) = (x\psi_I(T_1))$.
- Si $p > 1$. On a :

$$\begin{aligned} T &= B[x, T_1, \dots, T_p] \\ &= B[x, T_2, \dots, T_p] \star_\lambda T_1 - \lambda^{|T_1|} \sum_{j=2}^p B[x, T_2, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\psi_I(T) = (\psi_I(B[x, T_2, \dots, T_p])\psi_I(T_1)) - \lambda^{|T_1|} \sum_{j=2}^p \psi_I(B[x, T_2, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p]). \tag{4.42}$$

Il reste à montrer que $\psi_I(T)$ ne dépend pas des permutations des branches T_i pour tout

$i \in \{1, \dots, p\}$. On a :

$$\begin{aligned}
T &= B[x, T_2, \dots, T_p] \star_\lambda T_1 - \lambda^{|T_1|} \sum_{j=2}^p B[x, T_2, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p] \\
&= \left(B[x, T_3, \dots, T_p] \star_\lambda T_2 - \lambda^{|T_2|} \sum_{k=3}^p B[x, T_3, \dots, T_k \star_\lambda T_2, \dots, T_p] \right) \star_\lambda T_1 \\
&\quad - \lambda^{|T_1|} B[x, T_2 \star_\lambda T_1, T_3, \dots, T_p] - \lambda^{|T_1|} \sum_{j=3}^p B[x, T_2, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p] \\
&= (B[x, T_3, \dots, T_p] \star_\lambda T_2) \star_\lambda T_1 - \lambda^{|T_2|} \sum_{k=3}^p (B[x, T_3, \dots, T_k \star_\lambda T_2, \dots, T_p]) \star_\lambda T_1 \\
&\quad - \lambda^{|T_1|} \left(B[x, T_3, \dots, T_p] \star_\lambda (T_2 \star_\lambda T_1) + \lambda^{|T_2 \star_\lambda T_1|} \sum_{j=3}^p B[x, T_3, \dots, T_j \star_\lambda (T_2 \star_\lambda T_1), \dots, T_p] \right) \\
&\quad - \lambda^{|T_1|} \sum_{j=3}^p B[x, T_3, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p] \star_\lambda T_2 + \lambda^{|T_1|+|T_2|} \sum_{j=3}^p B[x, t_3, \dots, (T_j \star_\lambda T_1) \star_\lambda T_2, \dots, T_p] \\
&\quad + \lambda^{|T_1|+|T_2|} \sum_{j=3}^p \sum_{k=3, k \neq j}^p B[x, T_3, \dots, (T_j \star_\lambda T_1), \dots, (T_k \star_\lambda T_2), \dots, T_p].
\end{aligned}$$

Soit alors :

$$A_{12} = ((\psi_I(B[x, T_3, \dots, T_p])\psi_I(T_2))\psi_I(T_1)) - \lambda^{|T_1|} (\psi_I(B[x, T_3, \dots, T_p]) (\psi_I(T_2)\psi_I(T_1))). \quad (4.43)$$

Soit A_{21} le même terme en permutant T_1 et T_2 . On a $A_{12} - A_{21} \in (R)$. Il est clair que pour tout $j \in \{3, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned}
B_{12}^j &= \lambda^{|T_2|} (\psi_I(B[x, T_3, \dots, T_j \star_\lambda T_2, \dots, T_p])\psi_I(T_1)) \\
&\quad + \lambda^{|T_1|} (\psi_I(B[x, T_3, \dots, T_j \star_\lambda T_1, \dots, T_p])\psi_I(T_2)) \\
&= B_{21}^j.
\end{aligned}$$

De même $\sum_{k,j=3, k \neq j}^p C_{12}^{jk} = \sum_{k,j=3, k \neq j}^p C_{21}^{jk}$, où :

$$C_{12}^{jk} = \psi_I(B[x, T_3, \dots, (T_j \star_\lambda T_1), \dots, (T_k \star_\lambda T_2), \dots, T_p]). \quad (4.44)$$

Pour tout $j \in \{3, \dots, p\}$ on a :

$$\begin{aligned}
D_{12}^j &= \lambda^{|T_1|+|T_2|} \psi_I(B[x, T_3, \dots, (T_j \star_\lambda T_1) \star_\lambda T_2, \dots, T_p]) \\
&\quad + \lambda^{|T_1|} \psi_I(B[x, T_3, \dots, T_j \star_\lambda (T_2 \star_\lambda T_1), \dots, T_p]),
\end{aligned}$$

coincide avec D_{21}^j via le théorème 67.

On a montré que $\psi_I(T)$ ne dépend pas des permutations des branches T_1 et T_2 . Par récurrence on peut montrer que $\psi_I(T)$ ne dépend pas de l'ordre des branches T_1 et T_j pour tout $j \in \{2, \dots, p\}$. De même on montre que $\psi_I(T)$ ne dépend pas de l'ordre des branches T_j et T_k pour tout $k, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $j \neq k$. D'où l'unicité de $\psi_I(T)$. □

Bibliographie

- [1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).
- [2] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze, *Chronological algebras and nonstationary vector fields*, J. Sov. Math (1981); 17 :1, 1650-1675.
- [3] N. Bergeron, J-L. Loday, *The symmetric operation in a free pre-Lie algebra is magmatic*, Proc. AMS, 1585-1597 (2011).
- [4] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series*, Advances in Appl. Math, **47**, 282-308 (2011).
- [5] A. Cayley, *On the theory of Analytic Forms called trees*, Philos. Mag. **13**, 19-30, 1857. Reprinted in Mathematical Papers, vol.3. Cambridge : pp 242-246.
- [6] F. Chapoton, *Rooted trees and an exponential-like series*. arxiv :math /0209104v1 (2002).
- [7] F. Chapoton, *Operads and algebraic combinatorics of trees*, Sém. Loth. Combinatoire **58** (2008)
- [8] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not. 2001, 395–408 (2001).
- [9] Ph. Chartier, E. Hairer, G. Vilmart, *Numerical integrators based on modified differential equations*, Math.Comp., **76**, 1941-1953 (2007).
- [10] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. in Math. Phys. **199**, 203–242 (1998).
- [11] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [12] A. Dzhumadl'daev, C. Löfwall, *Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homotopy, Homology and Applications, **4(2)**, 165-190 (2002).
- [13] V. Dotsenko, *An operadic approach to deformation quantization of compatible Poisson Brackets*, J. Gen. Lie theory and Appl, **1** No. 2, 107-115 (2007).
- [14] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, Bull. Sci. Math. **126**, no. 3, 193–239 et no 4, 249–288 (2002).
- [15] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J, **76**, no. 1, 203-272 (1994).

- [16] M. Hoffman, *Combinatorics of Rooted Trees and Hopf Algebras* Trans. AMS **355**, 3795–3811 (2003).
- [17] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Springer Lect. Notes in Math. **1234** , 126-159 (1986).
- [18] M. Livernet, *A rigidity theorem for pre-Lie algebras*, J. Pure Appl. Alg. **207** , 1-18 (2006).
- [19] Christian Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer Verlag, New York, (1995).
- [20] M. Livernet, J-L. Loday, *The Poisson operad as a limit of associative operads*, unpublished preprint, March 1998.
- [21] J-L. Loday, *La renaissance des opérades*, Séminaire N. Bourbaki, 1994-1995, exp. n^0 792, p.47-74.
- [22] J-L. Loday, M. Ronco, *Combinatorial Hopf algebras*, Clay Math. Proc, **11**, Amer. Math. Soc P347-383.
- [23] J-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic operads*, (2010), www-irma.u-strasbg.fr/~Loday/ .
- [24] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer Graduate Text in Maths **5**, (1971).
- [25] D. Manchon, A.Saïdi, *Lois pré-Lie en interaction*, Comm. Alg. volume **39** No 10, p3662-3680 (2011).
- [26] H. Munthe-Kaas, W. M. Wright, *On the Hopf algebraic structures of Lie group integrators*, J. Found. Comput. Math, **8**, NO 2, p227-257 (2008).
- [27] M. Markl, E. Remm, *Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras* , J. Algebra **299** , No.1, 171-189 (2006) .
- [28] A. Saïdi, *On a pre-Lie algebra defined by insertion of rooted trees*, Lett. Math. Phys. n.**92**, p181-196 (2010).
- [29] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).

Résumé

Nous étudions dans cette thèse l'algèbre de Hopf \mathcal{H} associée à l'opérade pré-Lie. L'espace des éléments primitifs du dual gradué est muni d'une structure pré-Lie à gauche notée \triangleright définie par l'insertion d'un arbre dans un autre. Nous retrouvons la relation de dérivation entre le produit pré-Lie \triangleright et le produit pré-Lie de greffe \rightarrow sur les éléments primitifs du dual gradué de l'algèbre de Hopf de Connes Kreimer \mathcal{H}_{CK} . Nous mettons en évidence un coproduit sur le produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$, qui en fait une algèbre de Hopf dont le dual gradué est isomorphe à l'algèbre enveloppante du produit semi-direct des deux algèbres de Lie considérées.

Nous montrons que l'espace engendré par les arbres enracinés qui ont au moins une arête, muni du produit d'insertion, est une algèbre pré-Lie (non libre) engendrée par deux éléments. Nous mettons en évidence deux familles de relations. De plus nous montrons un résultat similaire pour l'algèbre pré-Lie associée à l'opérade NAP.

Finalement on introduit les opérades à débit constant et on montre que l'opérade pré-Lie s'obtient comme déformation de l'opérade NAP dans ce cadre.

Mots clé : algèbre de Hopf, arbres enracinés, opérade, algèbre pré-Lie, algèbre NAP.

Abstract

We investigate in this thesis the Hopf algebra structure on the vector space \mathcal{H} spanned by the rooted forests, associated with the pre-Lie operad. The space of primitive elements of the graded dual of this Hopf algebra is endowed with a left pre-Lie product denoted by \triangleright , defined in terms of insertion of a tree inside another. In this thesis we retrieve the “derivation” relation between the pre-Lie structure \triangleright and the left pre-Lie product \rightarrow on the space of primitive elements of the graded dual \mathcal{H}_{CK}^0 of the Connes-Kreimer Hopf algebra \mathcal{H}_{CK} , defined by grafting. We also exhibit a coproduct on the tensor product $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$, making it a Hopf algebra the graded dual of which is isomorphic to the enveloping algebra of the semidirect product of the two (pre-)Lie algebras considered.

We prove that the span of the rooted trees with at least one edge endowed with the pre-Lie product \triangleright is generated by two elements. It is not free : we exhibit two families of relations. Moreover we prove a similar result for the pre-Lie algebra associated with the NAP operad. Finally, we introduce current preserving operads and prove that the pre-Lie operad can be obtained as a deformation of the NAP operad in this framework.

Keywords : Hopf algebra, rooted trees, operad, pre-Lie algebra, NAP algebra.