



HAL
open science

Développement d'une méthode numérique pour les équations de Navier-Stokes en approximation anélastique : application aux instabilités de Rayleigh-Taylor

Zohra Hammouch

► **To cite this version:**

Zohra Hammouch. Développement d'une méthode numérique pour les équations de Navier-Stokes en approximation anélastique : application aux instabilités de Rayleigh-Taylor. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112086 . tel-00714149

HAL Id: tel-00714149

<https://theses.hal.science/tel-00714149>

Submitted on 3 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École doctorale : Physique de la région parisienne ED-107

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

DOMAINE DE RECHERCHE : INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES

Présentée par

Zohra Hammouch

**Développement d'une méthode numérique pour les
équations de Navier-Stokes en approximation anélastique :
Application aux instabilités de Rayleigh-Taylor**

Directeur de thèse : **M. Serge GAUTHIER**

Co-direction : **M. Gérard LABROSSE**

Soutenue le 30 mai 2012
Devant la Commission d'Examen

JURY

Mme. Claudine DANG VU-DELCARTE	Professeur d'Université	Présidente du jury
M. Gilmar MOMPEAN	Professeur d'Université	Rapporteur
M. Stéphane VINCENT	Maître de conférence	Rapporteur
M. Éric CHENIER	Maître de conférence	Examineur

À mes parents.

Les sciences sont des serrures dont la clé est l'étude.
proverbe arabe

Persévérance et dignité mènent très loin.
Daniel Desbiens

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Serge Gauthier, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, malgré l'étendue de ses prérogatives que je sais conséquentes et en dépit de l'éloignement. Je lui suis redevable de m'avoir fait profiter de ses connaissances et de son expérience capitalisée depuis le début de sa carrière.

Je remercie Gérard Labrosse pour son inestimable apport qui nous a aidé à lever certaines zones d'ombre et nous a permis d'avancer significativement. Ses connaissances spécifiques combinées aux nôtres ont été un atout décisif pour le bon déroulement de cette thèse.

Je remercie également Gilmar Mompean et Stéphane Vincent pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être mes rapporteurs. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur suis très reconnaissante pour le temps consacré à la rédaction des rapports, avec tout le travail et l'investissement que cela implique. De même, mes remerciements s'adressent à Claudine Dang Vu-Delcarte pour avoir présidé mon jury et à Eric Chénier pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de faire parti du jury.

Je remercie, plus particulièrement, Laurent Véron pour son indéfectible soutien, ses questions pertinentes et son aide précieuse qui ont permis d'achever sereinement cette thèse. Je remercie le département de physique théorique et application et plus particulièrement Laurence Bonnet de m'avoir accueillie dans leur locaux et m'avoir intégrée. Un grand merci, en particulier à Sylvie pour sa gentillesse, sa sympathie et son agréable compagnie.

Puisque la tradition l'exige -et si je déroge à la règle je risque d'être maudite sur trois générations- voici la liste des personnes que je souhaite remercier (thésard, post-docs et stagiaires) qui ont rendu les pauses déjeuner et café aussi intéressantes qu'utiles, par les débats enflammés et de hautes volées (.....).

Merci à Franck de m'avoir réconciliée avec la mode vestimentaire masculine. Même habillé

Remerciements

d'un sac poubelle, ta classe légendaire n'en pâtirait pas. Ton pull rose restera gravé à tout jamais dans ma mémoire. À Emmeric, ton imagination débordante et tes capacités d'abstraction quasi-infinie nous ont permis d'atteindre des dimensions parallèles jusqu'alors insoupçonnées. Gauthier, le seul jeune célibataire de France et d'Europe à disposer d'un spacieux break, qui a rendu agréable le covoiturage. Laurent, le récit de tes anecdotes (vécues ou non : « la vérité est ailleurs ») nous a favorisé la digestion. Xavier, tes mises à jour fréquentes sur l'actualité people du site et d'Hollywood et ta perpétuelle rengaine « petite question » me manqueront. Yoann, alias Franck de D'É CO, je dois à nouveau déménager, chauffe tes biscottos! Par contre, mon réveil te remercie pour la fin de ces « early session parties ». Daniel, non je n'ai pas acheté autant de chaussures. Même si tes apparitions se faisaient rares, ta compagnie pimentait mes pauses déjeuner.

Rachel et Deborah nos soirées filles passées à refaire le monde nous ont permis d'économiser des séances chez le psy.

À Sarah, la meilleure des co-bureaux dont on puisse rêver. Aussi pétillante que la Badoit après un repas copieux, tes avis éclairés sur nos questions existentielles ont sû rendre ces trois années de thèse agréables.

Je tiens également à remercier mes amis qui ont sû me supporter et me soutenir pendant ces 3 dernières années. Merci au gang des chats noirs, pour ces soirées de folies où la seule règle était de rester éveillée. Mouna, merci pour tes expressions qui ont sû me redonner le sourire dans les moments critiques. Bokea, ces derniers mois passés en ta compagnie m'ont rendue plus sereine. Aicha, merci pour tes conseils, ton écoute et ton rire indescriptible. Meriem, merci pour tes appels quotidiens et ces escapades qui m'ont permise de me ressourcer et de repartir de plus belle. Je ne pourrais oublier nos moments passés à Cachan et tes fameuses recettes à la truite.

Enfin, Un grand merci à ma famille pour leur soutien et leur patience.

À Soliman, tes réponses à mes questions me surprendront toujours autant!

À Zakaria, je te souhaite bon courage si tu comptes suivre mes traces.

À Najat, tes encouragements et ta générosité font de toi une excellente grande soeur.

À Khalid, alias « BOUTIET » pour tes conseils avisés et inestimables. Mais je suis sûre que le récit de mes péripéties et tribulations durant ces années ont agrémenté ton quotidien au milieu de la steppe kazakhe.

Enfin, à mes parents, sans qui je ne serais jamais aller au bout de mes projets. Je vous dois tout.

Table des matières

Introduction générale	1
I Modèle physique	9
1 Instabilité de Rayleigh-Taylor	9
2 Etat de l'art sur les instabilité de Rayleigh-Taylor	12
2.1 Études numériques	12
2.2 Études expérimentales	13
3 Équations du mélange	13
3.1 Thermodynamique d'un corps pur	13
3.2 Mélange de gaz parfaits	14
3.3 Équations thermo-mécaniques d'évolution du mélange	16
3.4 Conditions aux limites et conditions initiales	19
3.5 Adimensionnement des équations complètes de Navier-Stokes	20
4 Équilibre hydrostatique	26
II Approximation anélastique	31
1 Contrainte CFL et ondes acoustiques	31
2 Approximation anélastique appliquée au mélange de deux fluides	32
3 Approximation anélastique	38
4 Système d'équations du mélange	38
5 Stabilité linéaire de l'IRT	43
5.1 État de l'art sur la stabilité linéaire	43
5.2 Méthode des modes normaux	44

Table des matières

5.3	Analyse en modes normaux en approximation anélastique	46
5.4	Relation de dispersion	49
5.5	Influence des paramètres sur le taux de croissance	50
5.5.1	Influence de la stratification	50
5.5.2	Influence du nombre d'Atwood	52
5.5.3	Influence des hauteurs de chaque fluide	53
5.6	Fonctions propres	58
III Rappels sur les méthodes numériques		61
1	Rappels sur les méthodes spectrales	61
1.1	Méthodes des résidus pondérés	62
1.1.1	Polynômes de Tchebycheff	63
1.2	Méthode de collocation de Tchebycheff	65
1.2.1	Transformation de coordonnées	65
1.2.2	Dérivation spectrale	66
1.2.3	Intégration spectrale	67
2	Rappels sur les méthodes de résolution des problèmes de Stokes incompressibles	68
3	Algorithme de résolution en multidomaine	70
4	Adaptation dynamique multidomaine	70
5	Application au code AMENOPHIS	72
5.1	Discrétisation spatiale	72
5.2	Schéma numérique temporel	74
5.3	Critère d'adaptation dynamique multidomaine	77
5.4	Initialisation des perturbations	78
IV Méthode d'Uzawa pour les équations de Navier-Sokes en approximation anélastique		81
1	Modes propres du problème de Stokes en AN dans un canal plan infini	82
1.1	Modèle physique	82
1.2	Équations du modèle	83
1.3	Conclusion de l'étude	84
1.4	Invariance du problème de Stokes	86
2	Découplage des vitesses en 3D	87
3	Méthode de décomposition de domaine	97
3.1	Conditions de raccord	98

3.2	Méthode de la matrice d'influence appliquée au système couplé en vitesse/pression	100
3.3	Matrice d'influence	101
3.4	cas particulier $ K = 0$	104
3.5	Résolution des équations paraboliques	108
4	Résolution selon la méthode d'Uzawa	108
5	Modes de pression parasite	112
V Validation du code numérique pour l'approximation anélastique		115
1	Comparaison des opérateurs codés sous MATHEMATICA et FORTRAN	115
2	Étude d'expérience d'IRT : systèmes liquides à faible nombre d'Atwood avec perturbations initiales mono-mode	117
2.1	Descriptif de l'expérience	117
2.2	Résultats expérimentaux	118
2.3	Simulation anélastique	119
2.4	Comparaisons des résultats expérimentaux et numériques	120
3	Comparaison des simulations des versions compressible et anélastique	125
VI Influence de la stratification initiale des deux fluides		135
1	Champ de densité à l'instant initial	135
2	Étude du développement de l'IRT selon le paramètre de stratification	137
Conclusion générale et perspectives		149
Annexe A : Indice adiabatique du mélange		153
Annexe B : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'AN		155
A	Redimensionnement des équations de Navier Stokes dans le cadre de l'AN	155
A.1	État hydrostatique	155
A.2	État dynamique	156
B	Nouvel adimensionnement des équations de Navier-Stokes	157
Annexe C : Inversion partielle		161
Annexe D : Expressions des opérateurs d'Uzawa et d'Helmholtz		163

Table des matières

Annexe E : Modes propres de Stokes en approximation anélastique dans un canal plan infini	165
Table des figures	193
Liste des tableaux	199
Références bibliographiques	201

Introduction générale

Contexte

Le développement des pays émergents et le mode de vie des pays riches impliquent une forte augmentation des besoins en énergie. Le gaz, le charbon et le pétrole représentent 77% des ressources énergétiques mondiales. Les réserves en charbon sont considérables et demeurent les mieux distribuées. Cependant, l'exploitation de ce combustible est fortement nuisible à l'environnement et contribue, entre autre, à l'émission des gaz à effet de serre lors de sa combustion. Quant au gaz et au pétrole, ils présentent un avantage majeur puisqu'ils sont aisément exploitables. Néanmoins la disparition de leurs réserves serait estimée à la fin du siècle. D'autres modes de production d'énergie sont envisagés mais restent encore très peu développés et présentent des inconvénients telles que les contraintes hydrologiques et topographiques pour l'hydro-électricité, ou les lacunes du stockage pour les énergies renouvelables. L'énergie nucléaire de fission représente 17 % de la consommation électrique mondiale. Sa production n'émet aucun gaz à effet de serre, elle n'est donc pas mise en cause dans le réchauffement climatique. Cependant, deux inconvénients freinent son développement : la défiance de l'opinion publique quant aux questions de sécurité, de sûreté et de la gestion des déchets. L'exploitation actuelle de l'uranium 235, aux coûts économiques acceptables, présent à 0,7 % dans le minerai de l'uranium, impliquerait son épuisement dans 70 ans. Il est donc nécessaire de palier les problèmes d'épuisement des ressources naturelles et du réchauffement climatique. C'est pourquoi les efforts sont concentrés sur la production d'énergie nucléaire par fusion. Ce mode de production d'énergie exploite un combustible théoriquement inépuisable, aucun gaz à effet de serre n'est émis lors de sa

production et finalement le problème de la gestion des déchets radioactifs à vie longue ne se pose pas.

La fusion thermonucléaire

L'énergie de l'univers et des étoiles est le produit de la fusion thermonucléaire. La fusion des deux isotopes de l'hydrogène deutérium 2_1D (ou 2H) et du tritium 3_1T (ou 3H) dégage huit fois plus d'énergie que la fission et entre 10^6 à 10^7 fois plus que les combustibles fossiles. La figure 1 illustre cette réaction. Les efforts de recherche ont pour ambition de reproduire sur Terre des conditions favorables à cette réaction de fusion pour répondre à la demande croissante en énergie tout en résolvant les problèmes énergétiques et environnementaux. En effet, le deutérium se retrouve en grande quantité dans la mer (un litre d'eau de mer fournirait une énergie équivalente à 300 litres de pétrole) et le tritium (obtenue à partir du lithium par la réaction ${}^6Li + n \rightarrow T + \alpha$) disposerait d'une ressource suffisante pour 10 000 ans compte tenue de la consommation actuelle.

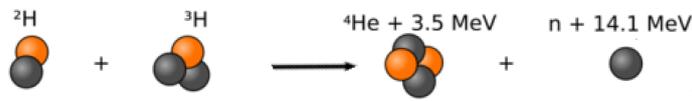


Figure 1 – Réaction de fusion deutérium-tritium.

Une température de l'ordre des $10^7 K$ est maintenue par les noyaux d'hélium ; les neutrons créés ralentissent dans un liquide caloporteur pour une installation à génération de vapeur (centrales thermiques actuelles) et transportent ainsi l'énergie exploitable. Le milieu matériel dans lequel évoluent ces réactions thermonucléaires est extrêmement chaud et très ionisé, on parle alors de plasma. Afin que l'énergie libérée lors des réactions de fusion soit au moins égale à l'énergie fournie au système, cette réaction doit obéir au critère de Lawson (Lindl (1998)) : le produit de la densité du mélange du combustible et du temps que met ce mélange à perdre son énergie (temps de confinement) doit dépasser un seuil. Pour pouvoir exploiter la fusion comme source d'énergie, le critère du triple produit, dérivé de celui de Lawson (température, densité et temps de confinement) doit être respecté. Ainsi la puissance transférée au milieu par les particules issues des réactions suffit à les entretenir sans apport d'énergie extérieur (l'ignition) et la combustion est alors auto-entretenu. Deux types de fusion sont alors envisageables.

- La fusion par confinement magnétique (FCM) :

une petite quantité de combustible à très basse densité ($n \sim 10^{22}/m^3$) est piégée dans une boîte immatérielle formée par des champs magnétiques et est maintenue à très haute température pendant un temps de confinement assez long ($\tau \sim 1s$). Le projet ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) exploite ce principe : les lignes de champ magnétique se renferment sur elles mêmes sans sortir de l'enceinte, ces dernières sont générées par des bobines extérieures ainsi que par le courant circulant dans le plasma. Cependant, cette technique n'est pas satisfaisante, dans la mesure où le confinement du plasma n'est pas aussi facilement assuré pour une durée aussi longue et les matériaux se doivent de résister aux neutrons fortement énergétiques.

– La fusion par confinement inertiel (FCI) :

un petit volume de combustible est porté à très haute densité ($n \sim 10^{33}/m^3$) et à haute température pendant un temps de confinement très court ($\tau \sim 10^{-11}s$), des faisceaux de lumière laser (ou de particules chargées) extrêmement puissants sont focalisés sur une microbille contenant le combustible. Le confinement du combustible est ainsi le résultat de sa propre inertie. Actuellement, deux grandes installations utilisent cette méthode ; le projet (National Ignition Facility) est construit et en cours de fonctionnement au Lawrence Livermore Laboratory aux États-Unis et le LMJ (Laser mégajoule) est le projet français développé au CEA. Ces projets permettront d'avancer dans la compréhension de la physique de la fusion inertielle, mais également de développer l'astrophysique de laboratoire. Cependant, de nombreux phénomènes physiques se doivent d'être maîtrisés pour le bon fonctionnement de la fusion. En effet, la propagation des faisceaux de lumière laser dans le plasma entourant la cible (interaction laser-plasma) et les instabilités hydrodynamiques nuisent au bon déroulement de la FCI. Ces travaux de thèse se situent dans cette problématique, à savoir les instabilités de Rayleigh-Taylor que l'on détaillera par la suite.

La fusion par confinement inertiel

La FCI se fonde sur les lasers de fortes puissances, dont les rendements actuels sont de 0.2% (les projets NIF et LMJ ont pour ambition d'atteindre les 1%), qui permettent d'irradier une cible. Cette cible est un microballon sphérique, ayant une fine enveloppe de plastique et renfermant une première couche de mélange D-T (Deutérium-Tritium) cryogénique et au centre le D-T gazeux (figure 2). Dans un des schémas d'allumage, le rayon du microballon est de 2 mm ; le plastique de densité $1 g/cm^3$ a une épaisseur de 0.04 mm ; le DT solide a une densité de $0.22 g/cm^3$ et a une épaisseur de 0.2 mm ; le grand volume de la cible de rayon 1.76 mm est rempli de D-T gazeux à une densité très

faible 5.10^{-4} g/cm^3 . Le tout est maintenu à une température de 18 K.

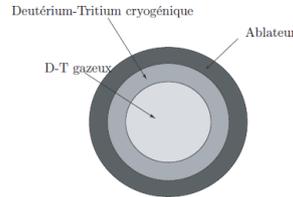


Figure 2 – Microballon contenant le mélange de Deutérium-Tritium.

Il existe différents modèles d'implosion ablatif. Nuckolls proposa en 1972 une attaque directe, en focalisant les faisceaux de lumière laser sur la cible de combustible. L'attaque indirecte fut proposée en 1976 ; la cible est placée dans une cavité cylindrique en or (hohlraum) percée de deux trous où passent les faisceaux qui sont focalisés sur la paroi intérieure. L'énergie déposée sur cette paroi est absorbée en donnant un plasma rayonnant fortement dans le domaine X. La cible est ainsi irradiée par le rayonnement de corps noir créé dans la cavité en Or (figure 3). La compression du microballon doit conserver autant que possible la symétrie sphérique, à tout instant de l'implosion. Lors de l'attaque indirecte, le rayonnement X attaque la cible de façon plus uniforme que l'attaque directe.

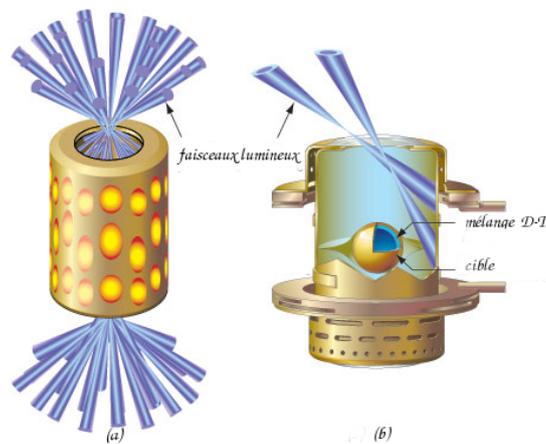


Figure 3 – Schéma de principe de l'attaque indirecte (<http://www.centauri-dreams.org/>).

Le processus de fusion par confinement inertiel consiste en cinq phases qui se succèdent (*irradiation*). En premier lieu, la cible constituée d'une capsule en plastique, cryogénique et de gaz de deutérium et de tritium est irradiée avec des faisceaux de lumière laser (voir figure 2). Puis, lors de l'irradiation le plasma se forme et est éjecté vers l'extérieur, ce qui engendre une onde de compression qui se propage vers l'intérieur du fait du principe

d'action-réaction (*implosion*). Une fois les conditions d'allumage atteintes, les particules α produites par les réactions thermonucléaires déposent leur énergie dans le D-T froid (*ignition*) et une onde de combustion thermonucléaire auto-entretenu se crée et se propage dans le combustible périphérique (*combustion*). Un schéma plus récent a été proposé en 1994 au LLNL, appelé allumage rapide. Le principe est de séparer les phases de compression et celle de chauffage-allumage. La compression est tout d'abord assurée par l'interaction de faisceaux longs, puis un canal de basse densité est creusé par une première impulsion laser courte. Une seconde impulsion encore plus courte au niveau de ce canal permet de générer et de transporter des électrons rapides dans le but de céder leur énergie dans la région du coeur. Finalement, la cible est allumée. Néanmoins, ce nouveau schéma n'en est encore qu'au stade de la recherche fondamentale.

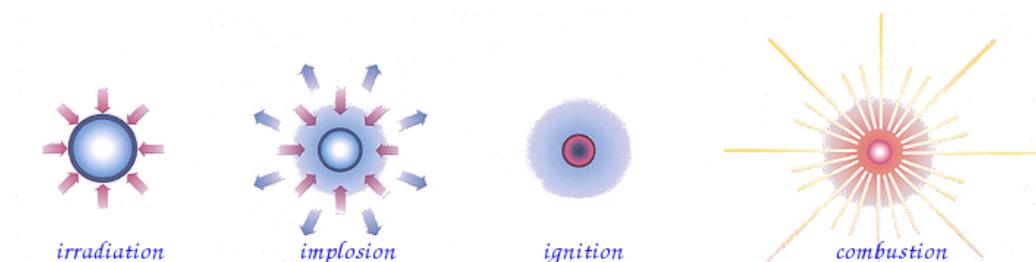


Figure 4 – Étapes de la fusion par confinement inertiel.

Les instabilités hydrodynamiques

Lorsque deux fluides sont en contact, on observe des instabilités hydrodynamiques au niveau de l'interface, lorsque cette dernière est perturbée. De nombreuses études ont permis de mettre en évidence différents types d'instabilités :

- lorsqu'un fluide lourd surplombe un fluide léger en présence d'un champ d'accélération, une instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) se développe ([Rayleigh \(1883\)](#), [Taylor \(1950\)](#)),
- Dans une configuration où les deux fluides présentent des vitesses tangentielles, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaît ([Lord Kelvin \(1871\)](#), [von Helmholtz \(1868\)](#)),
- l'instabilité de Richtmyer-Meshkov se développe lors du passage d'un choc à travers une interface perturbée ([Richtmyer \(1960\)](#), [Meshkov \(1970\)](#)),
- l'instabilité de Couette-Taylor : lorsqu'un fluide s'écoule entre deux cylindres concentriques ne tournant pas à la même vitesse angulaire, des tourbillons apparaissent dans l'écoulement,

- l’instabilité de Rayleigh-Bénard : lorsqu’une couche de fluide est chauffée par le bas, dès qu’un certain écart de température est atteint, la convection s’établit dans le fluide. La viscosité et la diffusion thermique sont des facteurs stabilisants, etc

Les travaux de Chandrasekhar [1961] ont contribué à mettre en évidence quelques unes des nombreuses instabilités hydrodynamiques connues à ce jour.

Objectifs

Lors de la phase d’implosion, la coquille (milieu lourd) pousse le D-T. La surface de la coquille étant rugueuse et les rayonnements incidents non uniformes, conduisent à des non-uniformités d’accélération susceptibles de s’amplifier exponentiellement. L’instabilité en jeu est celle de Rayleigh-Taylor et se développe dans deux régions différentes : au début de la phase d’accélération, le plasma de faible densité accélère le plasma dense vers l’intérieur de la cible, à l’extérieur de la coquille ; en fin d’implosion, la pression du point chaud augmente et décélère le combustible dense qui est en cours de mouvement centripète ; on voit un mélange combustible dense et froid et du combustible chaud se former. Les performances de la FCI sont amoindries par l’apparition de ces instabilités hydrodynamiques. Il est donc indispensable d’étudier l’instabilité de Rayleigh-Taylor afin de mieux comprendre ses mécanismes et de maîtriser son développement. Pour cela, le code AMENOPHIS (Adaptative Multidomain psEudo-spectral Numerical methOd for the Parallelization of Hydrodynamic Instabilities Simulation) (Le Creurer (2005)) a été développé depuis les années 80. Ce code de simulation numérique directe permet d’étudier les instabilités de Rayleigh-Taylor pour des fluides compressibles et est parallélisé sur deux niveaux, l’un intra-domaine (méthode de décomposition de domaine), l’autre inter-domaine (parallélisation MPI). De plus, les profils des gradients de densité étant très raides, le maillage est auto-adaptatif. AMENOPHIS est un code pseudo-spectral de type collocation où les variables sont développées en séries de Fourier selon les directions transverses (x , y) et sur des polynômes de Tchebycheff dans la direction inhomogène z . Le schéma en temps retenu est de type Runge-Kutta à 3 étapes (les termes advectifs sont traités explicitement tandis que les termes de diffusion sont traités de manière semi-implicite). Le domaine entier est décomposé en sous-domaines (selon la direction z) et la position des bords de ces sous-domaines est définie en minimisant une norme de l’erreur de projection de la solution calculée (dans chaque sous-domaine une transformation de coordonnées auto-adaptative est utilisée, (cf. Renaud (1996))). Les versions précédentes du code AMENOPHIS reposent

sur la simulation numérique des équations complètes de Navier-Stokes. Mais, les petits pas en temps imposés par la contrainte CFL impliquent des temps de calcul très importants. En outre, on distingue deux effets de compressibilité : la stratification liée à l'équilibre hydrostatique (Sr mesure la dépendance exponentielle du champ de masse volumique selon l'axe z .) et la compressibilité dynamique liée à l'équation d'état. Des études ont montré que l'effet dominant demeure la stratification, c'est pourquoi filtrer les ondes acoustiques (principales responsables de la contrainte CFL) permet de réduire ce coût. L'objectif de ce travail de thèse consiste donc à développer un algorithme permettant la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'approximation dite « anélastique », où les ondes acoustiques sont filtrées grâce à un développement asymptotique.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à la présentation du modèle de mélange considéré dans le cadre de notre étude (après avoir détaillé les trois étapes de développement de l'IRT). Dans le second chapitre, nous établissons les équations de Navier-Stokes privées de la contribution des ondes sonores, à l'aide de l'approximation anélastique. Nous exposons une étude de la stabilité linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en approximation anélastique dans la limite de fluides parfaits. Puis nous détaillons les différentes méthodes numériques utilisées par le code AMENOPHIS dans le troisième chapitre. Ensuite, les méthodes numériques utilisées pour la nouvelle option de AMENOPHIS ainsi que l'étude du problème de Stokes (issu des équations de Navier-Stokes privées des termes non linéaires) font l'objet du chapitre 4. Les chapitres 5 et 6 sont consacrés à l'analyse des résultats des simulations.

Chapitre I

Modèle physique

Le développement de l'IRT présente trois étapes que nous détaillons dans un premier temps, dans ce chapitre. Après un bref rappel sur la thermodynamique d'un corps pur, nous présentons le modèle de mélange considéré dans le cadre de notre étude. Nous développons ensuite les équations thermo-mécaniques d'évolution du mélange et les conditions aux limites et initiales. Finalement, nous exposons l'état d'équilibre hydrostatique.

1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Comme mentionné en introduction, lors de l'implosion de la coquille par laser dans le cadre de la FCI, une instabilité hydrodynamique, dite de Rayleigh-Taylor (IRT), se développe. Lord Rayleigh [1883] fut le premier à étudier la stabilité de la surface de séparation de deux fluides dont les densités diffèrent, sous l'effet de la pesanteur terrestre. Ses travaux furent repris par Taylor en 1950, de manière plus générale en étudiant l'effet d'un champ d'accélération quelconque. Cette IRT est observée dans de nombreux phénomènes physiques :

- en astrophysique, l'IRT est primordiale dans la compréhension de l'évolution des restes de supernovae (Hester *et al.* (1996), Fryxell *et al.* (1991) et Kifonidis *et al.* (2003)),
- en météorologie avec la formation des nuages (Rayleigh (1883)),
- dans le domaine de la sonoluminescence, lors de l'implosion, par ondes sonores, d'une bulle de gaz plongée dans un fluide (Brenner *et al.* (1995)), etc...

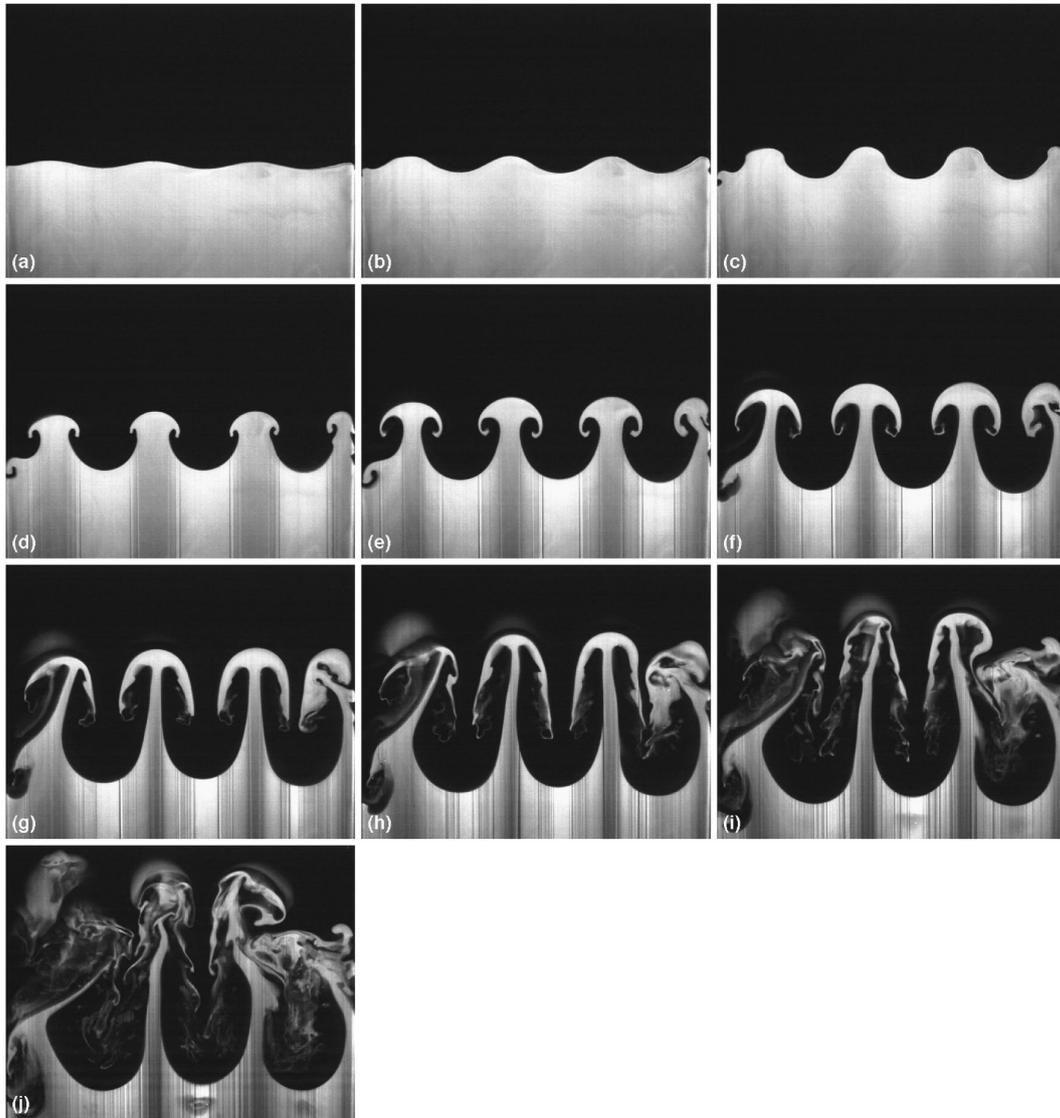


Figure I.1 – Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'une expérience réalisée par Waddell *et al.* [2001].

L'expérience menée par Waddell *et al.* [2001] permet d'illustrer le développement de l'IRT. Le principe consiste en l'accélération de deux liquides de densités différentes contenus dans un réservoir qui se déplace verticalement sur un rail. Le fluide léger est posé sur le fluide lourd et ce système est initialement au repos et stable dans le champ de pesanteur. Les deux fluides sont accélérés et une perturbation sinusoïdale de la surface de séparation des deux fluides est créée dans la direction horizontale, à l'instant initial (figure I.1.a).

Pour cela, le réservoir est attaché à une plaque de montage qui maintient l'orientation du réservoir qui permet les mouvements dans la direction horizontale. Un moteur pas à pas à déplacement linéaire génère l'oscillation du réservoir, l'amplitude et la longueur d'onde de l'oscillation sont contrôlées par ordinateur. Ce dispositif permet ainsi de générer une perturbation initiale mono-mode à l'instant initial. Un système formé d'une poulie et d'un poids permet d'accélérer les fluides vers le bas engendrant ainsi une force de gravité artificielle orientée vers le haut. La surface de séparation des deux fluides (qu'on appellera « interface » dans la suite) est alors observée au cours du temps, à l'aide d'une caméra CCD (figure I.1). On peut constater comment le fluide lourd (en bas) s'étale vers le haut dans le fluide léger. On distingue trois étapes lors du développement de l'IRT au cours du temps : la phase linéaire (figure I.1.a-c), la phase non-linéaire (figure I.1.c-h), et finalement la phase turbulente.

Lors de la phase linéaire, la perturbation sinusoïdale croît. Cette phase dure tant que la longueur d'onde λ des perturbations reste très grande par rapport à l'amplitude : $A(t) \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$ où k est le nombre d'onde de la perturbation. L'étude de la stabilité linéaire est incontournable. En effet, cette analyse permet une première approche du problème physique et permet d'utiliser le principe de superposition ; les modes propres sont linéairement indépendants et une somme de ces solutions permet de reconstruire les perturbations. D'un point de vue théorique, la phase linéaire de l'IRT est relativement bien étudiée pour des fluides incompressibles et compressibles, et sera rappelée dans le [chapitre II](#). L'étude de la stabilité linéaire d'un écoulement stratifié, pour des fluides non visqueux est menée dans le cadre de l'approximation anélastique dans ce même chapitre et présente un résultat nouveau.

Ensuite, l'interface se développe en forme de champignon, et l'instabilité ne croît plus exponentiellement. On observe que des bulles de fluide léger envahissent le fluide lourd, et des pics de fluide lourd remontent dans le fluide léger. Ce comportement est caractéristique de l'IRT en phase non-linéaire. La perturbation devient asymétrique par rapport à l'interface initiale non-perturbée. De manière plus générale, lors de la phase non-linéaire, le comportement de ce type d'écoulement dépend des spécificités de la configuration de l'interface à l'instant initial. Plus précisément, le saut des masses volumiques à l'interface, mesuré par un nombre sans dimension appelé nombre d'Atwood (tel que $At = (\rho_{lourd} - \rho_{leger}) / (\rho_{lourd} + \rho_{leger})$ et $0 \leq At \leq 1$), joue un rôle primordial. Si les densités des deux fluides sont très proches (At tend vers 0) ; alors l'instabilité de Kelvin-

Helmholtz domine l'écoulement ; si les densités sont très différentes (At tend vers 1), cette instabilité secondaire disparaît. Lorsque la déformation de l'interface s'est significativement accentuée, on ne peut plus déterminer une expression analytique de l'interface. C'est pourquoi, cette dernière est estimée numériquement ou expérimentalement. Les modes de perturbation présents sont couplés et le taux de croissance diminue lors de cette phase. Lorsque $A(t) > \lambda$, on constate des interactions entre les modes (Youngs (1984)).

Finalement, la phase turbulente s'installe ; l'IRT commence à se développer sur un spectre d'échelles beaucoup plus large. Ce régime est caractérisé par la cascade de Kolmogorov. Une fois la turbulence complètement développée, on constate qu'une zone de mélange apparaît et différencier le fluide lourd et le fluide léger de la configuration initiale devient difficile. Toutefois, lorsque le nombre de Reynolds n'est pas assez élevé, ce régime n'est pas forcément atteint.

2 Etat de l'art sur les instabilités de Rayleigh-Taylor

2.1 Études numériques

Deux types d'approches sont généralement utilisées pour les simulations d'instabilités de Rayleigh-Taylor :

- L'approche lagrangienne qui utilise la méthode des éléments finis ou de volume finis (Magnaudet *et al.* (1995)), mais cette approche est trop coûteuse ;
- L'approche eulérienne qui prend en compte l'évolution de la distribution de la phase tel que les méthodes de marqueur (Daly (1967), Daly (1969), Rider & Kothe (1995)), la méthode des surfaces de niveau (Hirt & Nichols (1981), Youngs (1982)). Cette méthode est moins précise mais permet de développer des algorithmes plus aisément lorsque l'interface est fortement déformée.

Une méthode originale multigrille permet de résoudre les écoulements incompressibles de deux fluides avec tension de surface et est appliquée aux instabilités de Rayleigh-Taylor. Cette méthode a ainsi permis de réduire le coût en taille mémoire de 50% (Vincent & Caltagirone (2000)). Une revue des simulations d'instabilités de Rayleigh-Taylor est donnée dans Le Creurer & Gauthier (2008)

2.2 Études expérimentales

Les premières expériences d'IRT ont été menées par Lewis (Lewis (1950)) et avaient pour but de valider la théorie linéaire de Taylor. Dans ces expériences, la photographie à grande vitesse fut utilisée pour observer l'IRT générée en accélérant vers le bas des liquides dans un tube en utilisant la pression de l'air. Emmons (1960) améliora le dispositif de Lewis en accélérant un petit réservoir contenant du liquide et de l'air. Schneider *et al.* (1998) utilisèrent un moteur électrique linéaire pour accélérer les systèmes liquide. Puis des méthodes alternatives ont été développées pour pallier aux faibles durées d'expériences en utilisant la gravité pour engendrer l'IRT (Linden & Redondo (1991), Dalziel *et al.* (1999)). Cependant, ce dispositif présente un inconvénient majeur. En effet, les perturbations à l'état initial ne sont pas maîtrisées. Finalement, le dispositif décrit plus haut pour des perturbations mono-modes (Waddell *et al.* (2001)) fut proposé.

3 Équations du mélange

3.1 Thermodynamique d'un corps pur

Soit U l'énergie interne d'un système thermodynamique caractérisé, par l'entropie S , H son enthalpie $H = U + P V$, sa température T , sa pression P et son volume V , on peut définir deux fonctions d'état :

- l'énergie libre notée : $F = U - T S$;
- l'enthalpie libre notée : $G = H - T S$;

D'après le premier principe de la thermodynamique d'un corps pur (*cf.* Landau & Lifchitz (1967)) : les variations des fonctions d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 dF &= -P dV - S dT; \\
 dG &= V dP - S dT; \\
 dU &= -P dV + T dS; \\
 dH &= V dP + T dS.
 \end{aligned}
 \tag{I. 3. 1}$$

On remarque que, selon le couple de variables choisi pour décrire le système thermodynamique, une fonction d'état est plus appropriée qu'une autre. Le tableau I.1 résume les différentes fonctions à considérer pour un couple de variables donné. Si on souhaite déterminer toutes les grandeurs thermodynamiques d'un corps pur à partir des variables T et V , le choix de l'énergie libre comme potentiel thermodynamique est donc plus judicieux.

Variables	(T, V)	(P, T)	(V, S)	(S, P)
Potentiel thermodynamique	F	G	U	H

Tableau I.1 – Potentiel thermodynamique à considérer selon le couple de variables donné.

La première des relations I. 3. 1 nous permet d'obtenir une relation pour la pression :

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T. \quad (\text{I. 3. 2})$$

Lorsqu'un gaz parfait vérifie la statistique de Boltzmann, l'expression de cette énergie libre est donnée par la relation suivante (cf. Landau & Lifchitz (1967)) :

$$F(T, V) = N\epsilon_0 - N k_b T \ln \left(\frac{e V}{N} \right) - N C_v T \ln(k_B T) - N \varsigma T, \quad (\text{I. 3. 3})$$

où :

- N est le nombre de molécules de gaz parfait,
- ϵ_0 est le niveau d'énergie 0 d'une molécule de gaz,
- k_B est la constante de Boltzmann,
- e est la constante de Neper,
- C_V est la capacité calorifique à volume constant,
- et ς est la constante chimique de gaz.

D'après I. 3. 2 et I. 3. 3, la pression peut se réécrire :

$$P = \frac{N k_B}{V} T = \frac{n N_A k_B}{V} T = \frac{n \mathcal{R} \rho}{m} T = \frac{\mathcal{R} \rho}{M} T, \quad (\text{I. 3. 4})$$

où

- n est le nombre de moles de gaz,
- N_A est le nombre d'Avogadro,
- \mathcal{R} est la constante des gaz parfaits,
- et M est sa masse molaire.

3.2 Mélange de gaz parfaits

On considère un mélange de deux gaz parfaits (indités H et L), l'interaction des particules de chaque gaz est négligeable. On suppose donc que les grandeurs extensives expri-

mées par unité de volume sont additives et que le mélange est isotherme $T = T_H = T_L$. Nous déterminons dans la suite les expressions de toutes les grandeurs thermodynamiques d'un tel mélange.

Soit $\rho_i = m_i/V$, la masse volumique partielle du composant i . La masse volumique totale du mélange s'écrit donc :

$$\rho = \rho_H + \rho_L. \quad (\text{I. 3. 5})$$

De plus, on définit la concentration de chaque constituant en fonction des densités partielles telle que :

$$c_H = c = \frac{\rho_H}{\rho} \quad \text{et} \quad c_L = 1 - c = \frac{\rho_L}{\rho}. \quad (\text{I. 3. 6})$$

Pour déterminer la pression totale du mélange, il faut repartir des énergies libres de chaque constituant. Leur somme représente celle du mélange des deux gaz parfaits :

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial F_H}{\partial V} \right)_T - \left(\frac{\partial F_L}{\partial V} \right)_T = \frac{\rho_H R T}{M_H} + \frac{\rho_L R T}{M_L} = P_H + P_L. \quad (\text{I. 3. 7})$$

Cette dernière relation est appelée loi de Dalton et stipule que la pression totale du mélange est la somme des pressions de chaque constituant. À présent, déterminons les capacités calorifiques du mélange (C_v et C_p). L'énergie interne du mélange est la somme des énergies internes de chaque gaz ($U = U_H + U_L$).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V &= \left(\frac{\partial U_H}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial U_L}{\partial T} \right)_V, \\ \rho V C_v &= \rho_H V C_{v H} + \rho_L V C_{v L}, \\ C_v &= \frac{\rho_H}{\rho} C_{v H} + \frac{\rho_L}{\rho} C_{v L}, \\ C_v &= c C_{v H} + (1 - c) C_{v L}. \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 8})$$

Pour déterminer la capacité calorifique massique à pression constante C_p , on part de l'additivité de l'enthalpie ($H = H_H + H_L$) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P &= \left(\frac{\partial H_H}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial H_L}{\partial T} \right)_P, \\ \rho V C_p &= \rho_H V C_{p H} + \rho_L V C_{p L}, \\ C_p &= \frac{\rho_H}{\rho} C_{p H} + \frac{\rho_L}{\rho} C_{p L}, \\ C_p &= c C_{p H} + (1 - c) C_{p L}. \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 9})$$

Il est possible de déterminer une relation entre les capacités calorifiques massiques à pression et volume constant ($H_i = U_i + P_i V$), appelée loi de Meyer :

$$\begin{aligned} \frac{dH_i}{dT} &= \frac{dU_i}{dT} = \frac{d(P_i V)}{dT}, \\ \rho_i V C_{p\ i} &= \rho_i V C_{v\ i} + n_i R, \\ C_{p\ i} &= C_{v\ i} + \frac{R}{M_i}. \end{aligned} \tag{I. 3. 10}$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de l'indice adiabatique de chaque constituant γ_i :

$$\gamma_i = \frac{C_{p\ i}}{C_{v\ i}} \quad \text{et} \quad C_{v\ i} = \frac{R}{(\gamma_i - 1) M_i}.$$

L'indice adiabatique du mélange ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$) s'écrit (*cf.* [annexe A](#)) :

$$\gamma(c) = \frac{c(1 - \Gamma)(1 - r_M)\gamma_H + (1 - c)(1 + \Gamma)(1 + r_M)\gamma_L}{c(1 - \Gamma)(1 - r_M) + (1 - c)(1 + \Gamma)(1 + r_M)}, \tag{I. 3. 11}$$

Avec :

$$\Gamma = \frac{(\gamma_H - 1) - (\gamma_L - 1)}{(\gamma_L - 1) - (\gamma_L - 1)} \quad \text{et} \quad r_M = \frac{M_H - M_L}{M_H + M_L}.$$

3.3 Équations thermo-mécaniques d'évolution du mélange

On considère un fluide lourd, qui surplombe un fluide léger, à l'équilibre hydrostatique à l'état initial et soumis à une accélération constante $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. La séparation des deux fluides est représentée par une interface imaginaire de très faible épaisseur (d sur la figure [I.2](#)), de cote $z = 0$. Étant donné que les fluides considérés sont miscibles, il n'existe pas d'interface réelle entre les deux fluides mais on définit une « pseudo-interface » présentant une discontinuité caractérisée par un très fort gradient de densité. Les fluides sont considérés visqueux, compressibles et thermiquement conducteurs.

L'écoulement étudié est compris dans un domaine tridimensionnel, limité par deux plans horizontaux $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in [0, L_x], / y \in [0, L_y], / z \in [z_{inf}, z_{sup}]\}$. On modélise ce mélange de fluides miscibles par les équations de Navier-Stokes mono-fluide complétées par une équation d'advection-diffusion pour la concentration du constituant le plus dense et la loi d'état des gaz parfaits. Dans la suite, on note les grandeurs sans dimensions : ϕ' .

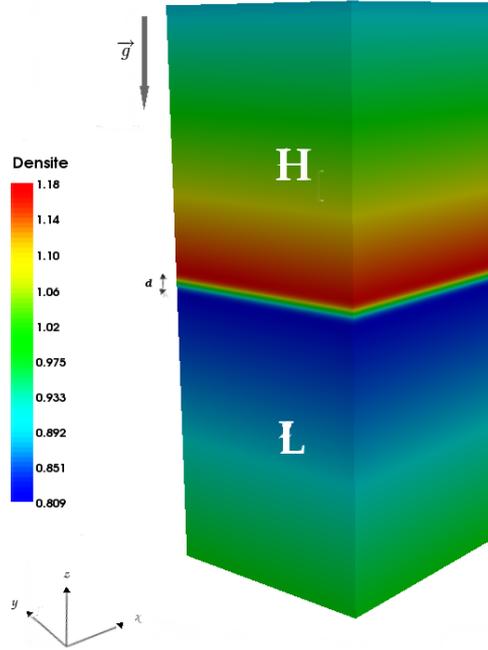


Figure I.2 – Configuration initiale de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : équilibre hydrostatique des deux fluides pour pour $Sr = 0.2$.

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_j}{\partial x'_j} = 0 . \quad (\text{I. 3. 12})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_i u'_j}{\partial x'_j} = - \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x'_j} - \rho' g \delta_{i3} . \quad (\text{I. 3. 13})$$

La relation de Stokes entre les coefficients de Lamé (λ et μ) est supposée vérifiée : $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$. Le tenseur des contraintes visqueuses σ_{ij} s'écrit donc :

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_l} \right) , \quad (\text{I. 3. 14})$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique.

Évolution de l'énergie interne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho' C_v' T'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' C_v' T' u_j'}{\partial x_j'} = -p' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j'} + \sigma_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(\kappa \frac{\partial T'}{\partial x_j'} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(D (C_{p,H} - C_{p,L}) T' \frac{\partial c'}{\partial x_j'} \right). \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 15})$$

Remarque : Le flux thermique est donné par : $q_j = h_\alpha J_{\alpha j} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$ avec $J_{\alpha j} = -\rho D_\alpha \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j}$.

De plus, l'effet Dufour qui caractérise la contribution du gradient de concentration au flux de chaleur est négligé dans ce modèle de mélange.

Conservation des espèces

$$\frac{\partial \rho' c}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' c u_j'}{\partial x_j'} = \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(\rho' D \frac{\partial c}{\partial x_j'} \right). \quad (\text{I. 3. 16})$$

Remarque : Ici, l'effet Soret qui caractérise la contribution du gradient de température sur la diffusion des espèces, est également négligé.

Les variables sont les composantes du champ de vitesse (u_i'), la densité (ρ'), la température (T'), la concentration ($c' = \rho_H/\rho$) et la pression (p'). κ représente le coefficient de conductivité thermique du mélange et D la diffusion massique entre constituants.

Loi d'état du milieu :

Le système formé des équations I. 3. 12 - I. 3. 16 est fermé par l'équation d'état d'un mélange de gaz parfaits. L'additivité des grandeurs extensives permet de réécrire cette loi d'état :

$$p' = RT' \left(\frac{\rho'_H}{M_H} + \frac{\rho'_L}{M_L} \right).$$

Cette relation peut se réécrire :

$$p' = RT' \left(\frac{\rho'_H M_L + \rho'_L M_H}{M_H M_L} \right),$$

ce qui devient :

$$p' = RT' \frac{2\rho'_L M_H + 2\rho'_H M_L}{(\rho'_H + \rho'_L)(M_H + M_L)} (\rho'_H + \rho'_L) \frac{M_H + M_L}{2 M_H M_L}.$$

En manipulant le second membre, on obtient :

$$p' = RT' \left(1 + \frac{M_H - M_L}{M_H + M_L} - 2 \frac{M_H - M_L}{M_H + M_L} \frac{\rho'_H}{\rho'_H + \rho'_L} \right) (\rho'_H + \rho'_L) \frac{M_H + M_L}{2 M_H M_L}.$$

En notant $c' = \frac{\rho'_H}{\rho'_H + \rho'_L}$, $r_M = \frac{M_H - M_L}{M_H + M_L}$ et $M_r = \frac{2M_H M_L}{M_H + M_L}$, l'équation d'état du mélange s'écrit finalement :

$$p' = \rho' T' \frac{R}{M_r} (1 + r_M - 2r_M c'). \quad (\text{I. 3. 17})$$

Étant donné que nous considérons deux gaz parfaits vérifiant l'équilibre hydrostatique, r_M se réécrit de la manière suivante :

$$r_M = \frac{\frac{\rho'_H R T}{p'_H} - \frac{\rho'_L R T}{p'_L}}{\frac{\rho'_H R T}{p'_H} + \frac{\rho'_L R T}{p'_L}} = \frac{\frac{\rho'_H}{p'_H} - \frac{\rho'_L}{p'_L}}{\frac{\rho'_H}{p'_H} + \frac{\rho'_L}{p'_L}}.$$

De plus la continuité des contraintes à l'interface initiale implique $p'_H = p'_L$, soit :

$$r_M = \frac{\rho'_H - \rho'_L}{\rho'_H + \rho'_L} = At.$$

Un peu plus haut, il a été montré que si les quantités C_{vi} étaient supposées constantes alors $C_v = cC_{vH} + (1 - c)C_{vL}$ et l'énergie interne des deux fluides ne dépendaient que de la température (première loi de Joule). Finalement, nous supposons dans la suite que $\mu_H = \mu_L = \mu$ et $\kappa_H = \kappa_L = \kappa$.

3.4 Conditions aux limites et conditions initiales

On muni le système d'équations formé de I. 3. 12 - I. 3. 16 de conditions aux limites périodiques suivant les directions x et y et du type Neumann ou Dirichlet dans la direction z :

$$\frac{\partial u'}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v'}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{I. 3. 18a})$$

$$w' \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{I. 3. 18b})$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{I. 3. 18c})$$

$$\frac{\partial c'}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (\text{I. 3. 18d})$$

où $\Gamma = \{(x, y, z) \in \Omega / z = z_{inf} \text{ ou } z = z_{sup}\}$ est la frontière du domaine Ω et $\partial\phi/\partial\vec{n} = \nabla\phi \cdot \vec{n}$ est la dérivée normale des grandeurs $(\phi = u \ v \ w \ T \ C)^T$.

Le système est également muni des conditions initiales suivantes :

$$u'(x, y, z, t = 0) = u'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19a})$$

$$v'(x, y, z, t = 0) = v'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19b})$$

$$w'(x, y, z, t = 0) = w'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19c})$$

$$\rho'(x, y, z, t = 0) = \rho'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19d})$$

$$T'(x, y, z, t = 0) = T'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19e})$$

$$c'(x, y, z, t = 0) = c'_0(x, y, z), \quad (\text{I. 3. 19f})$$

Ces conditions initiales peuvent être arbitraires et celles retenues pour notre étude seront détaillées dans la suite.

3.5 Adimensionnement des équations complètes de Navier-Stokes

Dans le but de supprimer les unités des équations d'évolution, les grandeurs physiques sont adimensionnées en normalisant ces quantités par des grandeurs de référence (paramètres géométriques et physiques). Cette théorie permet de simplifier la représentation paramétrique de problèmes physiques. Les échelles de référence retenues sont les suivantes :

- pour les longueurs, $L_r = L_y$,
- pour le temps, t_r (ce qui induit une échelle pour la vitesse $U_r = L_r t_r$),
- pour la masse volumique : on choisit la moyenne des masses volumiques des deux fluides au niveau de leur zone de contact, à l'équilibre hydrostatique, $\rho_r = \frac{\overline{\rho_H}(z=0) + \overline{\rho_L}(z=0)}{2}$,
- pour la température, on décide de considérer la température de base supposée uniforme et constante $T_r = \overline{T}$;
- pour la pression, elle découle de l'équation d'état $p_r = \rho_r \frac{R}{M_r} T_r$.

Les quantités de référence pour le mélange considérées sont :

- la masse molaire de référence, M_r ,
- rapport des chaleurs spécifiques de référence, γ_r ,
- rapport des chaleurs spécifiques à volume constant de référence, $C_{v,r}$.

Finalement, nous supposons que la viscosité dynamique μ , la conductivité thermique κ et ρD sont constants. Les différentes grandeurs des équations thermo-mécaniques d'évolution

du mélange (données plus haut 3.3) sont adimensionnées, en considérant le changement de variables suivant $\phi' = \phi_r \phi$, où $\phi = (X_i \ t \ \rho \ u_i \ T)^T$.

Conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_j}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{U_r \rho_r}{L_r} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{U_r \rho_r}{L_r} \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 20})$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_i u'_j}{\partial x'_j} &= - \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x'_j} - \rho' g \delta_{i3}, \\ \frac{\rho_r U_r^2}{L_r} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\rho_r U_r^2}{L_r} \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} &= - \frac{\rho_r R T_r}{L_r} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu U_r}{L_r^2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho_r \rho g \delta_{i3}, \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} &= - \frac{R T_r}{U_r^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{U_r \rho_r L} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{g L_r}{U_r^2} \rho \delta_{i3}. \end{aligned}$$

On considère les nombres sans dimension suivants :

- Le nombre de Reynolds représentant le rapport entre l'advection et la diffusion visqueuse de la quantité de mouvement, $Re = \frac{\rho_r U_r L_r}{\mu}$,
- le nombre de Mach, : $Ma^2 = \frac{U_r^2}{\gamma_r R T_r}$,
- Le nombre de Froude caractérisant dans un fluide l'importance relative des forces liées à la vitesse et à la force de pesanteur, $Fr^2 = \frac{U_r^2}{g L_r}$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient donc :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\gamma_r Ma^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \rho \delta_{i3}. \quad (\text{I. 3. 21})$$

Loi d'état du milieu :

$$p' = \rho' T' \frac{R^*}{M_r} (1 + r_M - 2r_M c),$$

$$\rho_r \frac{R^*}{M_r} T_r p = \rho T \frac{R^*}{M_r} (1 + r_M - 2r_M c) \rho_r T_r .$$

l'équation d'état devient donc :

$$p = \rho T (1 + r_M - 2r_M c) . \quad (\text{I. 3. 22})$$

Conservation des espèces :

$$\frac{\partial \rho' c}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' c u_j'}{\partial x_j'} = \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(\rho' D' \frac{\partial c}{\partial x_j'} \right) ,$$

$$\frac{\rho_r U_r}{L_r} \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\rho_r U_r}{L_r} \frac{\partial \rho c u_j}{\partial x_j} = \frac{\rho_r D_r}{L_r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) .$$

Or :

$$\frac{D_r}{U_r L} = \frac{\rho_r D_r}{\mu} \frac{\mu}{U_r L \rho_r} = \frac{1}{Sc Re} .$$

En posant :

$$\boxed{Sc = \frac{\mu}{\rho_r D_r} .}$$

Le nombre de Schmidt (Sc) représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité massique. L'équation de conservation des espèces adimensionnée devient :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) . \quad (\text{I. 3. 23})$$

Si on considère $\rho D = cste = B$, l'adimensionnement de cette equation devient :

$$\frac{\rho_r U_r}{L_r} \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\rho_r U_r}{L_r} \frac{\partial \rho c u_j}{\partial x_j} = \frac{B}{L_r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) ,$$

soit :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c u_j)}{\partial x_j} = B_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} , \quad (\text{I. 3. 24})$$

avec $B_c = \frac{B}{Sc Re}$

Equation de l'énergie totale :

L'énergie totale $\rho' E'$ est définie comme la somme de l'énergie cinétique E_{cin} , l'énergie

interne E_{int} et l'énergie potentielle E_{pot} , avec :

$$\begin{aligned}\rho' E'_{cin} &= \frac{1}{2} \rho' u'^2, \\ \rho' E'_{int} &= \rho C'_v T', \\ \rho' E'_{pot} &= \rho g z' .\end{aligned}$$

En adimensionnant, les variables physiques de l'équation de conservation de l'énergie totale comme précédemment :

$$\begin{aligned}\rho_r U_r^2 \rho E &= \frac{1}{2} \rho_r U_r^2 \rho u^2 + C_v \rho_r T_r \rho T + L \rho_r \rho g z , \\ \rho E &= \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{C_v}{U_r^2} T_r \rho T + \frac{Lg}{U_r^2} \rho z .\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{C_v}{U_r^2} T_r = \frac{C_v}{\gamma_r R^*} \frac{\gamma_r R^* T_r}{U_r^2} = \frac{1}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} ,$$

et

$$\frac{L_r g}{U_r^2} = \frac{1}{Fr^2} .$$

On obtient ainsi, l'expression de l'énergie totale adimensionnée :

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} \rho T + \frac{1}{Fr^2} \rho z . \quad (\text{I. 3. 25})$$

Dans la suite, nous tentons d'exprimer $\rho dE / dt$. Pour cela, il suffit de travailler sur les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie données précédemment. Tout d'abord, nous savons que :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) = \rho u_i \frac{du_i}{dt} ,$$

soit :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) = \rho u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) .$$

Or le premier membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ,$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + u_i \left(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{=0 \text{ d'après (I.3.20)}} \right).$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Donc d'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on a :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) = - \frac{1}{\gamma_r Ma^2} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \rho u_i \delta_{i3}.$$

De même que précédemment, le premier membre de l'équation d'évolution de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho T u_j}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{dT}{dt}.$$

Donc d'après l'équation de conservation de l'énergie adimensionnée, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} \rho \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \\ &= - \frac{1}{\gamma_r Ma^2} p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \frac{1}{(\gamma_r - 1) Ma^2} \frac{1}{Pr Re} \Delta T \\ &\quad + \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \end{aligned}$$

où, le nombre de Prandtl représente le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. Il compare les phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide, $Pr = \frac{\mu C_p}{\kappa}$. À présent, développons le terme $\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Fr^2} z \right)$:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Fr^2} z \right) = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{Fr^2} z \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Fr^2} z \right) \right],$$

soit,

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Fr^2} z \right) = \frac{\rho}{Fr^2} u_i \delta_{i3}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} = & -\frac{1}{\gamma_r Ma^2} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \rho u_i \delta_{i3} \\ & - \frac{1}{\gamma_r Ma^2} p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \frac{1}{(\gamma_r - 1) Ma^2} \frac{1}{Pr Re} \Delta T \\ & + \frac{1}{Fr^2} \rho u_i \delta_{i3} + \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Cette équation peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} = & \frac{1}{Re} \left(u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) + \frac{1}{(\gamma_r - 1) Ma^2} \frac{1}{Pr Re} \Delta T \\ & - \frac{1}{\gamma_r Ma^2} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(E + \frac{1}{\gamma_r Ma^2} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{Re} \sigma_{ij} u_i - \frac{1}{(\gamma_r - 1) Ma^2} \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right. \\ \left. + \frac{1}{Sc Re} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{I. 3. 26})$$

avec :

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{C_v}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} \rho T + \frac{1}{Fr^2} \rho z.$$

L'adimensionnement des équations complètes de Navier-Stokes fait apparaître cinq nombres sans dimension, reportés dans le tableau [I.2](#).

nom	Reynolds	Froude	Mach	Schmidt	Prandtl	Inidce adiabatique
notation	Re	Fr	Ma	Sc	Pr	γ_r
expression	$\frac{\rho_r U_r L_r}{\mu}$	$\frac{U_r}{\sqrt{g L_r}}$	$\frac{U_r}{\sqrt{\gamma_r R T_r}}$	$\frac{\mu}{\rho_r D}$	$\frac{\mu C_p}{\kappa}$	cf. I. 3. 11

Tableau I.2 – Nombres sans dimension des équations de Navier-Stokes.

4 Équilibre hydrostatique

L'état de base du fluide lourd et léger est à l'équilibre hydrostatique dans un champ d'accélération \vec{g} et la température est supposée constante dans tout le domaine (noté \bar{T}). En l'absence de vitesse, l'état hydrostatique s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{u} = 0 \\ \frac{d\bar{p}_i}{dz} + \bar{\rho}_i g = 0 \\ \bar{p}_i = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_i} \bar{\rho}_i \bar{T} \\ \Delta \bar{T} = 0. \end{cases} \quad i = H, L \quad (\text{I. 4. 27})$$

L'expression de la masse volumique pour chaque fluide, à l'état d'équilibre devient donc :

$$\bar{\rho}_i(z) = \bar{\rho}_i(0) \exp\left(\frac{-g\mathcal{M}_i}{\mathcal{R}\bar{T}} z\right), \quad (\text{I. 4. 28})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} z \in [z_{inf}, 0] \text{ pour } i = L, \\ z \in [0, z_{sup}] \text{ pour } i = H. \end{cases}$$

L'additivité des grandeurs thermodynamiques permet d'obtenir l'expression de l'état d'équilibre de la masse volumique du mélange dans l'intervalle $[z_{inf}, z_{sup}]$:

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_H(0) \exp\left(\frac{-g\mathcal{M}_H}{\mathcal{R}\bar{T}} z\right) \mathbb{1}_{[z_{inf}, 0]} + \bar{\rho}_L(0) \exp\left(\frac{-g\mathcal{M}_L}{\mathcal{R}\bar{T}} z\right) \mathbb{1}_{[0, z_{sup}]}.$$

Si on adimensionne les différentes grandeurs, cette dernière expression devient :

$$\bar{\rho}^*(z^*) = \frac{\bar{\rho}_H(0)}{\rho_r} \exp\left(\frac{-g \mathcal{M}_H}{\mathcal{R} \bar{T}} L_y z^*\right) \mathbb{1}_{[z_{inf}, 0]} + \frac{\bar{\rho}_L(0)}{\rho_r} \exp\left(\frac{-g \mathcal{M}_L}{\mathcal{R} \bar{T}} L_y z^*\right) \mathbb{1}_{[0, z_{sup}]} . \quad (\text{I. 4. 29})$$

De plus, nous pouvons réécrire $(g \mathcal{M}_H) / (\mathcal{R} \bar{T})$ et $(g \mathcal{M}_L) / (\mathcal{R} \bar{T})$:

$$\begin{aligned} \frac{g \mathcal{M}_H}{\mathcal{R} \bar{T}} &= \frac{g}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{2 \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L} \frac{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L}{2 \mathcal{M}_L} , \\ &= \frac{g M_r}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L}{2 \mathcal{M}_L} , \\ &= \frac{g M_r}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{1}{1 - r_{\mathcal{M}}} , \\ &= \frac{Sr}{L_y} \frac{1}{1 - r_{\mathcal{M}}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g \mathcal{M}_L}{\mathcal{R} \bar{T}} &= \frac{g}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{2 \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L} \frac{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L}{2 \mathcal{M}_H} , \\ &= \frac{g M_r}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_L}{2 \mathcal{M}_H} , \\ &= \frac{g M_r}{\mathcal{R} \bar{T}} \frac{1}{1 + r_{\mathcal{M}}} , \\ &= \frac{Sr}{L_y} \frac{1}{1 + r_{\mathcal{M}}} , \end{aligned}$$

où le nombre sans dimension Sr vaut $gM_r/(\mathcal{R} \bar{T})$ (l'équivalent de $\gamma_r Ma^2$ donné dans le tableau I.2 avec $U_r = \sqrt{g L_y}$).

La relation I. 4. 29 se réécrit, en abandonnant les * :

$$\bar{\rho}(z) = (1 - At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_{\mathcal{M}}} z\right) \mathbb{1}_{[z_{inf}, 0]} + (1 + At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} z\right) \mathbb{1}_{[0, z_{sup}]} . \quad (\text{I. 4. 30})$$

La densité décrite par la relation I. 4. 30, étant discontinue, cette dernière est régularisée à l'aide de la fonction $H_{\pm}(z)$ définie par :

$$H_{\pm}(z) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta}\right) \right) , \quad (\text{I. 4. 31})$$

où $\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$ est la fonction d'erreur et δ représente l'épaisseur de la pseudo-interface. La figure I.3 représente l'allure de ces fonctions de lissage $H_{\pm}(z)$ pour différentes valeurs de δ . En faisant tendre δ et D vers 0, on retrouve le modèle de fluides

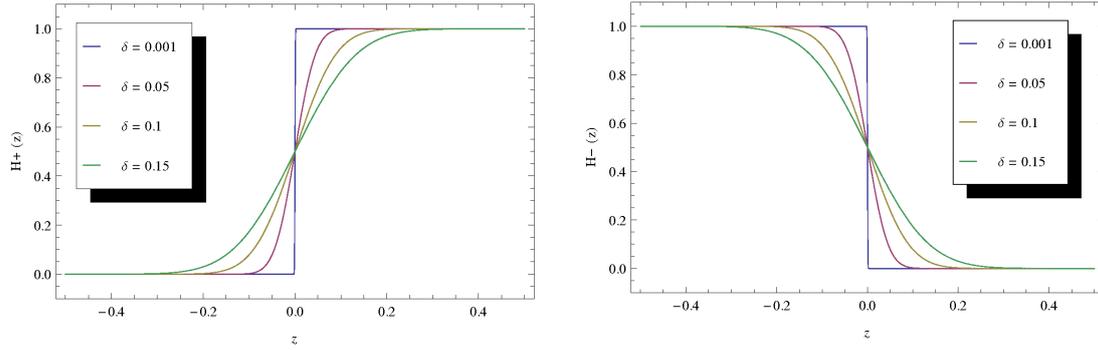


Figure I.3 – Profil de $H_+(z)$ (à gauche) et $H_-(z)$ (à droite) pour différentes épaisseurs de la pseudo-interface δ en fonction de la coordonnée $z \in [-0.5, 0.5]$.

non miscibles et la relation I. 4. 30 peut se réécrire :

$$\bar{\rho}(z) = (1 - At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_{\mathcal{M}}} z\right) H_-(z) + (1 + At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} z\right) H_+(z). \quad (\text{I. 4. 32})$$

On se rend compte de l'importance du paramètre de stratification Sr qui mesure la dépendance exponentielle du champ de masse volumique selon l'axe z . Une fois l'expression de la densité de l'état de base connue, on obtient l'expression de la concentration :

$$\bar{c}(z) = \frac{1}{\bar{\rho}(z)} (1 + At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} z\right) H_+(z). \quad (\text{I. 4. 33})$$

La deuxième équation du système I. 4. 27 nous permet de déterminer la pression de l'état de base, connaissant la masse volumique de l'état de base :

$$\begin{aligned} \bar{p}(z) = P_0 &+ (1 - At) (1 + r_{\mathcal{M}}) \left[\exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_{\mathcal{M}}} z\right) H_-(z) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_{\mathcal{M}}} \frac{\delta}{2}\right)^2 \text{erf}\left(\frac{z}{\delta} + \frac{Sr}{1 + r_{\mathcal{M}}} \frac{\delta}{2}\right) \right] \\ &+ (1 + At) (1 - r_{\mathcal{M}}) \left[\exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} z\right) H_+(z) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} \frac{\delta}{2}\right)^2 \text{erf}\left(\frac{z}{\delta} + \frac{Sr}{1 - r_{\mathcal{M}}} \frac{\delta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I. 4. 34})$$

Il est important de noter que le paramètre At doit être égal à $r_{\mathcal{M}}$ pour que la pression soit continue. Et finalement, la troisième équation du système, permet d'obtenir la

température de l'état de base :

$$\bar{T}(z) = \frac{\bar{P}(z)}{(1 + r_{\mathcal{M}} - 2 r_{\mathcal{M}} \bar{c}(z)) \bar{\rho}(z)} . \quad (\text{I. 4. 35})$$

P_0 est une constante d'intégration qui permet de vérifier $\bar{T}(z_{inf}) = 1$. La figure I.4 représente l'état de base obtenu par les relations précédentes pour $\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{c} et \bar{T} .

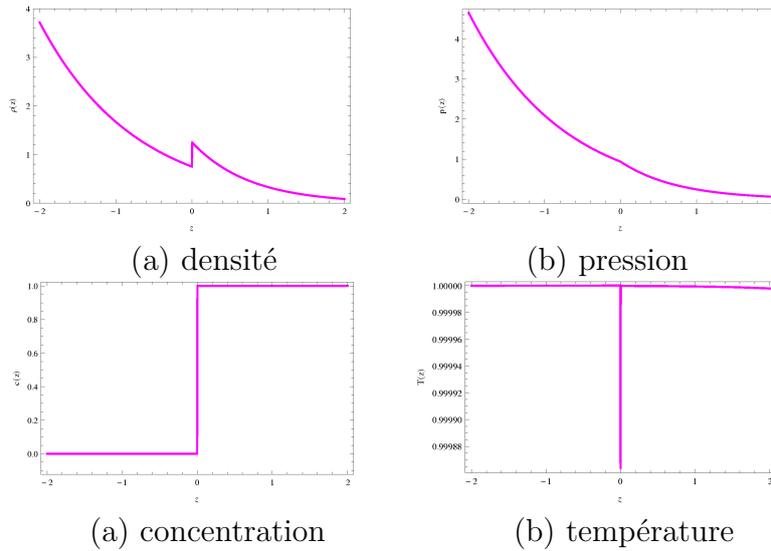


Figure I.4 — Profils caractéristiques de l'état de base pour $Sr = 1$, $At = r_{\mathcal{M}} = 0.25$ et $\delta = 0.001$ pour $z \in [-2, 2]$.

Ce chapitre a permis de présenter le modèle physique considéré pour la simulation numérique du développement de l'IRT à l'aide du code de calcul AMENOPHIS. Les

équations du modèle sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\gamma_r Ma^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \rho \delta_{i3}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(E + \frac{1}{\gamma_r Ma^2} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{Re} \sigma_{ij} u_i - \frac{1}{(\gamma_r - 1) Ma^2} \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{Sc Re} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \right] = 0, \\ \text{avec } \rho E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{C_v}{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2} \rho T + \frac{1}{Fr^2} \rho z, \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c u_j)}{\partial x_j} = B_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \\ p = \rho T (1 + r_M - 2r_M c). \end{array} \right. \quad (\text{I. 4. 36})$$

L'état hydrostatique est représenté par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(z) = (1 - At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_M} z\right) H_-(z) + (1 + At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_M} z\right) H_+(z), \\ \bar{c}(z) = \frac{1}{\bar{\rho}(z)} (1 + At) \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_M} z\right) H_+(z), \\ \bar{p}(z) = P_0 \\ \qquad + (1 - At) (1 + r_M) \left[\exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_M} z\right) H_-(z) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Sr}{1 + r_M} \frac{\delta}{2}\right)^2 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta} + \frac{Sr}{1 + r_M} \frac{\delta}{2}\right) \right] \\ \qquad + (1 + At) (1 - r_M) \left[\exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_M} z\right) H_+(z) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Sr}{1 - r_M} \frac{\delta}{2}\right)^2 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta} + \frac{Sr}{1 - r_M} \frac{\delta}{2}\right) \right], \\ \bar{T}(z) = \frac{\bar{P}(z)}{(1 + r_M - 2 r_M \bar{c}(z)) \bar{\rho}(z)}. \end{array} \right. \quad (\text{I. 4. 37})$$

Il est nécessaire à présent de discuter de l'approximation envisagée pour le développement de la nouvelle option du code AMENOPHIS.

Chapitre II

Approximation anélastique

Les versions précédentes du code AMENOPHIS résolvent les équations complètes de Navier-Stokes. Bien que les ondes acoustiques aient en général une influence négligeable sur la physique du mélange, elles sont responsables en grande partie de la forte contrainte CFL sur le pas de temps. Après un rappel sur la contrainte CFL, nous établissons les équations de Navier-Stokes privées de la contribution des ondes sonores. Puis, nous exposons une étude de la stabilité de linéaire de l'IRT en approximation anélastique sans viscosité ni tension superficielle, jusqu'à présent absente dans la littérature.

1 Contrainte CFL et ondes acoustiques

La possibilité de fluctuations de pression permet au système de fluides de décrire des propagations d'ondes de pression rapides, de type acoustiques. Ceci pose de sérieuses contraintes de calcul sur le pas de temps, appelées contraintes CFL (Courant Friedrichs et Lewy). Il s'agit de la condition de stabilité pour résoudre les équations aux dérivées partielles hyperboliques. En pratique, elle sert à donner le seuil au-dessus duquel on observe une instabilité des calculs numériques. Si la dimension de la maille est inférieure à la distance parcourue dans l'intervalle de pas de temps de l'onde la plus rapide que permet l'équation, l'erreur grandit et le système est

instable. Cette contrainte s'écrit :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U| + |c|},$$

où Δx représente la taille d'une maille (dans les trois directions), et Δt , le pas de temps. La vitesse de propagation des ondes sonores c est trop importante par rapport à la vitesse matérielle du fluide U . Il est donc nécessaire d'envisager des approximations permettant de réduire cette contrainte CFL en filtrant les ondes acoustiques, puisque ces dernières sont négligeables lorsque les vitesses dans l'écoulement sont faibles. Ainsi la contrainte se réduit à :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U|}.$$

Ces approximations sont dites à bas nombre de Mach car elles sont obtenues par un développement asymptotique des équations complètes de Navier-Stokes en fonction du nombre de Mach. Il existe plusieurs approximations et nous retenons ici l'approximation anélastique (AN).

2 Approximation anélastique appliquée au mélange de deux fluides

L'AN est obtenue par un développement des équations complètes de Navier-Stokes à l'aide d'un petit paramètre, fonction du nombre de Mach. Dans notre cas, on considère le petit paramètre : $\epsilon = \gamma Ma^2$.

Ordre ϵ^{-1}

Lorsque l'on considère le cas particulier de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, à l'ordre ϵ^{-1} , on retrouve l'équation vérifiant l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = -Sr\rho^{(0)}\delta_{i3}, \quad (\text{II. 2. 1})$$

si on suppose que :

$$\boxed{Sr = \frac{\gamma Ma^2}{Fr^2} = \frac{g L}{R T} \approx O(1).}$$

La stratification du fluide est donnée par le paramètre de stratification Sr . Lorsque c (la vitesse du son) est très élevée, la stratification est faible et le temps acoustique, par exemple, $t = L_r/c$ est faible, les transmissions sont quasi-instantanées, l'acoustique est négligeable ; c'est le domaine de l'incompressible. Au contraire, lorsque c est très petit, la stratification est forte et le temps acoustique plus long. L'acoustique n'est pas négligeable ; c'est le domaine du compressible. Entre ces deux limites, on peut concevoir qu'il existe un domaine de l'espace des paramètres dans lequel la stratification n'est pas négligeable, mais le temps acoustique suffisamment faible pour que les transmissions soient considérées comme instantanées. C'est le domaine de l'anélastique, avec une borne supérieure pour la stratification.

Ordre ϵ^0

Les équations différentielles de la dynamique sont toutes obtenues en retenant l'ordre ϵ^0 des équations complètes de Navier-Stokes. On considère donc que les quantités $\phi^{(0)}$ sont confondues avec celles de l'état de base, à l'équilibre hydrostatique (soit $\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t} = 0$). Dans la suite, nous nous consacrons au développement des équations de Navier-Stokes, selon l'ordre ϵ^0 , l'équation de conservation de la masse devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(0)} u_i^{(1)}) = 0. \quad (\text{II. 2. 2})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement, à l'ordre 0 en ϵ s'écrit :

$$\rho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^{(0)} u_j^{(1)} u_i^{(1)})}{\partial x_j} = - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - Sr \rho^{(1)} \delta_{i3},$$

si on impose :

$$\boxed{\frac{\gamma Ma^2}{Re} \ll O(1).}$$

En considérant l'équation II. 2. 2, cette relation devient :

$$\rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - Sr \rho^{(1)} \delta_{i3}, \quad (\text{II. 2. 3})$$

où $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée matérielle $\frac{\partial}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

La loi d'état des gaz parfaits se réécrit :

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} (1 + r_M - 2r_M c^{(0)}). \quad (\text{II. 2. 4})$$

Compte tenu du fait que la concentration c n'est pas développée en fonction du paramètre ϵ , l'équation de conservation des espèces se réécrit, en considérant la relation II. 2. 2 :

$$\rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^{(0)} D \frac{\partial c}{\partial x_j} \right). \quad (\text{II. 2. 5})$$

Si on considère $\rho D = cste = B$, on obtient :

$$\rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = B_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{II. 2. 6})$$

avec $B_c = \frac{B}{Sc Re}$.

Finalement, l'équation de conservation de l'énergie totale adimensionnée devient à

l'ordre ϵ^0 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho^{(0)} u_i^{(1)} u_i^{(1)} + \frac{C_v}{\gamma_r - 1} (T^{(1)} \rho^{(0)} + T^{(0)} \rho^{(1)}) + Sr \rho^{(1)} z \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j^{(1)} \left(\frac{1}{2} \rho^{(0)} u_i^{(1)} u_i^{(1)} + \frac{C_v}{\gamma_r - 1} (T^{(1)} \rho^{(0)} + T^{(0)} \rho^{(1)}) + Sr \rho^{(1)} z \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j^{(1)} p^{(1)} \right) - \frac{\gamma_r}{(\gamma_r - 1) Re Pr} \Delta T^{(1)} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} \right) \\ & + \frac{1}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = 0. \end{aligned}$$

Développons cette relation de la manière suivante :

$$A + B + C + D = 0.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(0)} T^{(1)} C_v) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} \rho^{(0)} T^{(1)} C_v), \\ B = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(1)} T^{(0)} C_v) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} \rho^{(1)} T^{(0)} C_v), \\ C = Sr (\gamma_r - 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(1)} z) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} \rho^{(1)} z) \right\}, \\ D = (\gamma_r - 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho^{(0)} u_i^{(1)} u_i^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j^{(1)} \frac{1}{2} \rho^{(0)} u_i^{(1)} u_i^{(1)} \right) \right\}, \\ \quad + (\gamma_r - 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} p^{(1)}) + \frac{\gamma_r}{(\gamma_r - 1) Re Pr} \Delta T^{(1)} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)}) \right\} \\ \quad + \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Développons chaque terme :

$$\begin{aligned} A &= T^{(1)} C_v \left[\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} \rho^{(0)}) \right] + T^{(1)} \rho^{(0)} \left[\frac{\partial C_v}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial C_v}{\partial x_j} \right] \\ &\quad + \rho^{(0)} C_v \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

D'après l'équation de continuité à l'ordre 0 en ϵ (II. 2. 2), le premier terme s'annule.

On obtient ainsi :

$$A = T^{(1)} \rho^{(0)} \frac{dC_v}{dt} + \rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt}.$$

De même :

$$\begin{aligned} B &= T^{(0)} C_v \left[\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j^{(1)} \rho^{(1)}) \right] + T^{(0)} \rho^{(1)} \left[\frac{\partial C_v}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial C_v}{\partial x_j} \right] \\ &\quad + \rho^{(1)} C_v \left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \right], \end{aligned}$$

devient :

$$B = \rho^{(1)} T^{(0)} \frac{dC_v}{dt} + \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz},$$

puisque $T^{(0)}$ ne dépend que de la variable spatiale z . Traitons le terme C :

$$C = Sr (\gamma_r - 1) \left[\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j^{(1)} \rho^{(1)} \right) \right] + Sr (\gamma_r - 1) \rho^{(1)} \left[\frac{\partial z}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right].$$

Or, $\frac{dz}{dt} = u_i \delta_{i3}$ et l'équation de conservation de la masse à l'ordre 1 (II. 2. 8), nous donne :

$$C = Sr (\gamma_r - 1) \rho^{(1)} u_i \delta_{i3}.$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho^{(0)} u_j^{(1)} u_j^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j^{(1)} \left(\frac{1}{2} \rho^{(0)} u_j^{(1)2} \right) \right] = \rho^{(0)} u_j^{(1)} \frac{du_j^{(1)}}{dt}.$$

L'équation de quantité de mouvement à l'ordre 0 (II. 2. 3) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} u_j^{(1)} \frac{du_j^{(1)}}{dt} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j^{(1)} p^{(1)} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i^{(1)} \sigma_{ij}^{(0)} \right) - Sr u_j^{(1)} \rho^{(1)} \delta_{j3} \\ &\quad + p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$C + D = - (\gamma_r - 1) p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\gamma_r - 1}{Re} \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\gamma_r}{Re Pr} \Delta T^{(1)},$$

On a également :

$$\frac{dC_v}{dt} = \frac{dC_v}{dc} \frac{dc}{dt},$$

ce qui implique la relation suivante :

$$\frac{dC_v}{dt} = (C_{v,H} - C_{v,L}) \frac{dc}{dt}.$$

En considérant ces dernières relations, l'équation de conservation de la concentration à l'ordre ϵ^0 (II. 2. 6), et en notant $d_c C_v = C_{v,H} - C_{v,L}$, l'équation de l'énergie a pour

expression :

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt} = & - \left(\rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)} \right) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} B c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\
& - \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} + \frac{\gamma_r}{Re Pr} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} \\
& + \frac{(\gamma_r - 1)}{Re} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - (\gamma_r - 1) p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} \\
& + \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{II. 2. 7}$$

Dans la suite, nous développons également l'équation d'état à l'ordre ϵ , puisque que l'ordre ϵ^0 ne nous permet d'obtenir uniquement la relation qui relie les différentes grandeurs physiques de l'état hydrostatique. De plus, l'équation de conservation de la masse à l'ordre ϵ n'est pas résolue mais est utile dans le développement de l'équation de conservation d'énergie, donnée plus haut.

Ordre ϵ^1

L'équation de conservation de la masse à l'ordre ϵ devient :

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(1)} u_j^{(1)}}{\partial x_j} = 0. \tag{II. 2. 8}$$

Tandis que la loi d'état des gaz parfaits devient :

$$p^{(1)} = \left(1 + r_M - 2r_M c^{(0)} \right) \left(\rho^{(1)} T^{(0)} + \rho^{(0)} T^{(1)} \right) - 2r_M \left(c - c^0 \right) \rho^{(0)} T^{(0)}.$$

En divisant par $p^{(0)}$, cette relation se réécrit :

$$\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} = \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{2r_M (c - c^0)}{1 + r_M - 2r_M c^0}. \tag{II. 2. 9}$$

Nous avons ainsi établi les équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'approximation anélastique. Toutes les équations différentielles sont obtenues à l'ordre ϵ^0 et la relation issue de la loi d'état du milieu est obtenue à l'ordre ϵ^1 . De plus l'équilibre

hydrostatique est donné à l'ordre ϵ^{-1} .

3 Approximation anélastique

Une des particularités de cette approximation réside dans le fait que l'équation de conservation de la masse se réduit à $\nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{V}) = 0$. Différentes interprétations de cette contrainte ont été envisagées. À l'origine $\bar{\rho}(z)$ représente la densité d'un état de base hydrostatique. Batchelor [1953] fut le premier à proposer cette AN, puis Ogura & Phillips [1962] reprirent ses travaux en 1962 et approchèrent les équations de moment et thermodynamique à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Gough étudia l'approximation anélastique pour la convection thermique également [1969]. Wilhelmson & Ogura [1972] considèrent une densité $\bar{\rho}(z)$ modifiée et Lipps & Hemler [1982] proposent un nouveau système pour l'appliquer à la géophysique. De nos jours, de nombreux ouvrages présentent les différentes formulations de l'AN, tels que ceux de Zeytounian [1990], Emanuel [1994] et Durran [1999, 2007] dans le cadre de la science de l'atmosphère.

4 Système d'équations du mélange

Le développement asymptotique entrepris ci-dessus permet d'obtenir les équations de Navier-Stokes, privées de la contribution de l'acoustique, régissant l'IRT dans le cadre de l'AN. Ainsi l'état hydrostatique est donné par le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = -Sr \rho^{(0)} \delta_{i3}, \\ p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} (1 + r_M - 2r_M c^{(0)}), \\ \Delta T^{(0)} = 0, \end{cases}$$

(II. 4. 10)

tandis que les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(0)} u_i^{(1)}) = 0, \\ \rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - Sr \rho^{(1)} \delta_{i3}, \\ \rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt} = -(\rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)}) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} \frac{B}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\ \quad - \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \\ \quad + \frac{\gamma_r}{Re Pr} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Re} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - (\gamma_r - 1) p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j}, \\ \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} = \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{2r_M (c - c^0)}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}}, \\ \rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = \frac{Bc}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}. \end{array} \right. \quad (\text{II. 4. 11})$$

L'adimensionnement retenu lors du développement du code AMENOPHIS étant différent de celui utilisé pour déterminer les équations dans le cadre de l'AN, il faut désormais redimensionner ces mêmes équations puis considérer l'adimensionnement souhaité. Les équations régissant l'état hydrostatique deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = -Sr \rho^{(0)} \delta_{i3} \\ p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} (1 + r_M - 2r_M c^{(0)}) \\ \Delta T^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II. 4. 12})$$

et les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(0)} u_i^{(1)}) = 0, \\ \rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{Sr} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{\rho^{(0)}}{p^{(0)}} p^{(1)} \delta_{i3} \\ \quad - \rho^{(0)} \left[\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right] \delta_{i3}, \\ \rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt} = -(\rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)}) \frac{dc C_v}{\rho^{(0)}} \frac{B}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\ \quad - \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \\ \quad + \frac{\gamma_r}{Re Pr} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Re} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - (\gamma_r - 1) p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j}, \\ \rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = \frac{Bc}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} = \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}}. \end{array} \right. \quad (\text{II. 4. 13})$$

Le développement détaillé de ces équations est donné en [annexe B](#) et les nombres sans dimension sont récapitulés dans le tableau [II.1](#).

nombre	Re	Sr	Sc	Pr	r_M	γ_r
expression	$\frac{\rho_r g^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{\mu}$	$\frac{gL}{RT_r}$	$\frac{\mu}{\rho_r D}$	$\frac{\mu C_p}{\kappa}$	$\frac{M_H - M_L}{M_H + M_L}$	cf. I. 3. 11

Tableau II.1 – Nombres sans dimension des équations de Navier-Stokes.

Remarque : La fluctuation de densité est remplacée par son expression en fonction de la pression, la température et la concentration (état hydrostatique et fluctuation), dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement donnée par l'équation

d'état du mélange. Cette manipulation nous permet ainsi de traiter la densité de façon semi-implicite (d'un point de vue numérique). En effet, la partie fonction de la pression sera traitée de manière implicite tandis que celle fonction de la concentration et de la température (beaucoup moins importante) sera traitée explicitement.

Notons que par souci de simplification, on remplace les grandeurs $\gamma Ma^2 \phi^{(1)}$ par $\phi^{(1)}$ sauf pour les vitesses.

À ce système d'équations s'ajoutent les conditions aux limites. On impose des conditions de type Dirichlet pour la composante verticale w et de type Neumann pour les composantes horizontales u et v :

$$\begin{aligned} w(z = z_{sup}) &= w(z = z_{inf}) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}(z = z_{sup}) &= \frac{\partial u}{\partial z}(z = z_{inf}) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z}(z = z_{sup}) &= \frac{\partial v}{\partial z}(z = z_{inf}) = 0. \end{aligned}$$

Le tableau II.2 permet de faire le bilan des équations différentielles et des inconnues du problème :

Équation de conservation	ϵ^0
Masse	$\nabla(\rho^{(0)} u_j^{(1)}) = 0$
Quantité de mouvement	$u_j^{(1)} = f(p^{(1)}, \rho^{(1)}, T^{(1)}, \rho^{(0)}, c)$
Énergie totale	$T^{(1)} = f(c, u_j^{(1)}, \rho^{(0)}, \rho^{(1)})$
Espèce	$c = f(u_j^{(1)}, \rho^{(0)})$

Tableau II.2 – Bilan des équations différentielles du système d'équations de Navier-Stokes en AN.

Au total, le système est défini par 6 équations différentielles (dont 3 sont les projections sur les axes du repère de l'équation de conservation de la quantité de

mouvement), une contrainte sur le champ de vitesse et une équation algébrique (équation d'état) qui permet d'obtenir la fluctuation de densité.

En conclusion, l'AN permet d'éliminer les ondes acoustiques du système en utilisant un profil de densité constant, mais non-uniforme dans l'équation de continuité et de quantité de mouvement, sauf dans le terme de poussée d'Archimède. Le fluide devient ainsi quasiment incompressible. L'équation de continuité ne garantit plus la conservation de la masse. En effet, dans les équations de Navier Stokes complètes, il y a une contribution parabolique (la diffusion) et une contribution hyperbolique (l'acoustique), tandis que l'AN permet de ne garder que la contribution parabolique et implique l'ellipticité (*cf.* [chapitre IV](#)). Ainsi la pression change de nature puisque dans les équations complètes, elle reflétait à la fois la thermodynamique et l'acoustique et dans l'AN, elle agit comme un multiplicateur de Lagrange sur le champ de vitesse et est prise en compte dans la thermodynamique.

5 Stabilité linéaire de l'IRT

L'étude de stabilité linéaire permet, entre autres, de mettre en évidence les différents facteurs influant sur la stabilité de l'écoulement. Ces calculs de stabilité linéaire sont fondamentaux car ils prédisent les longueurs d'onde des modes les plus instables ainsi que leurs taux d'amplification. Cela permet, lors de simulations directes, d'introduire les perturbations qui seront les plus amplifiées. Dans la suite, la méthode d'analyse en modes normaux est retenue. Cette méthode permet de ramener un problème aux valeurs initiales à un problème aux valeurs propres, dont la plus grande détermine le taux de croissance ainsi que le mode propre associé qui donne la structure spatiale de l'écoulement. L'évolution des modes de perturbation dépend donc de leur taux de croissance.

5.1 État de l'art sur la stabilité linéaire

Taylor [1950] et Chandrasekhar [1961] ont étudié la phase linéaire de l'IRT. Le taux de croissance pour les fluides parfaits incompressibles est donné par la relation de dispersion suivante :

$$\sigma_{in} = \sqrt{At g k}. \quad (\text{II. 5. 14})$$

Il est fonction du nombre d'onde k , du nombre d'Atwood At et de la constante de gravité g . Cependant cette relation conduit à une constatation aberrante physiquement. En effet, lorsque k tend vers l'infini ce taux de croissance tend vers l'infini. C'est pourquoi, de nombreuses études ont été menées, dans le but de décrire l'influence de différents paramètres sur le développement de l'IRT pour des fluides incompressibles, tels que la viscosité ou la tension superficielle (Chandrasekhar (1961)). Il a été montré que pour des nombres d'onde k inférieurs à k_c , le taux de croissance se comporte, comme dans le cas non-visqueux, selon $\sqrt{At g k}$, tandis que, lorsque k est supérieur à un nombre d'onde critique, le taux de croissance décroît en $1/k$. La présence de viscosité stabilise les grands nombres d'onde et il existe donc un nombre d'onde d'instabilité maximum. D'autres études ont été menées pour le cas de fluides compressibles. L'expression analytique du taux de croissance pour des fluides parfaits en écoulement isotherme est donnée dans l'article Mathews & Blumenthal (1977) et pour un écoulement isentropique dans Lezzi & Prosperetti (1989).

Cependant les études actuelles se concentrent sur les effets de compressibilité sur le taux de croissance de l'IRT et ont suscité de nombreux désaccords (Livescu (2003); Ribeyre *et al.* (2004); Livescu (2005); Ribeyre *et al.* (2005)). En effet, certains travaux assurent que la compressibilité a un effet déstabilisant et augmente le taux de croissance (Vandervoort (1961); Bernstein & Book (1983)), tandis que d'autres affirment le contraire (Sharp (1984); Plesset & Hsieh (1964)). Cette controverse est essentiellement due à une mauvaise définition de la compressibilité. C'est pourquoi S. Gauthier et B. Le Creurer insistent sur la définition de la notion de compressibilité dans leur article (Gauthier & Le Creurer (2010)). La « compressibilité statique » est liée à l'équilibre hydrostatique, car le fluide est initialement à densité variable, et est représentée par la stratification ; l'échelle de gradient de densité de chaque fluide en découle. La compressibilité dynamique est, quant à elle, liée à l'équation d'état du fait d'une vitesse du son finie ; l'indice adiabatique γ de chaque fluide régit cet effet de compressibilité, pour l'équation d'état des gaz parfaits. Ces deux effets sont souvent appelés à tort « compressibilité », ce qui a fait l'objet de nombreuses mauvaises interprétations. Dans la publication de Lafay *et al.* (2007), le tracé des courbes de dispersion a permis de mettre en évidence que la « compressibilité dynamique », pour des gaz parfaits, élargissait le domaine de l'instabilité de l'écoulement de Rayleigh-Taylor tout en augmentant le taux de croissance linéaire. Alors que c'est l'inverse pour la « compressibilité statique ».

5.2 Méthode des modes normaux

L'analyse en modes normaux consiste à perturber (de manière infinitésimale) une solution des équations de Navier-Stokes. En négligeant dans les équations les termes au-delà du premier ordre, on obtient un problème aux valeurs initiales, linéaire. Cette méthode permet ainsi de décrire comment les petites perturbations évoluent avec le temps, dans le système d'équations II. 4. 13. Pour cela, chaque quantité ϕ est décomposée en une composante de base correspondant à l'état hydrostatique $\bar{\phi}$ et une composante qui décrit les perturbations $\tilde{\phi}$:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(z) + \tilde{\phi}(x, y, z, t).$$

Ici $\phi = (\rho \ u_i \ Tc)^T$ et vérifie les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. $\tilde{\phi}$ dépend des 3 coordonnées spatiales et du temps. On néglige les termes supérieurs à l'ordre 1. Le système linéaire est à coefficients constants et la solution est une superposition de fonctions exponentielles, car l'écoulement moyen est indépendant du temps. Le problème étant périodique dans le plan (x, y) et l'évolution temporelle des perturbations étant exponentielles, les composantes fluctuantes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\phi}(x, y, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{\sigma t} e^{i(kx+hy)}.$$

$\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ est un complexe appelé taux de croissance et est homogène à l'inverse d'un temps. En soustrayant les équations du système II. 4. 13 décrivant l'écoulement de base à celles de l'écoulement complet, on obtient les équations gouvernant les quantités fluctuantes. On obtient ainsi un problème aux valeurs propres. Le signe de σ_r reflète le comportement de l'IRT :

- $\sigma_r \leq 0$: la perturbation s'atténue avec le temps. On dit que l'état de base est linéairement stable par rapport au mode (k, h) . Le milieu est alors stable par rapport aux petites perturbations. Pour les perturbations plus importantes, l'étude de la stabilité est approfondie par une analyse non-linéaire ;
- $\sigma_r = 0$: l'amplitude de la perturbation n'évolue pas et ce mode (k, h) de stabilité est marginale ou neutre. L'allure de l'instabilité est alors caractérisée par σ_i :
 - $\sigma_i = 0$: le mode (k, h) et les perturbations sont dites « stationnaires ».
 - $\sigma_i \neq 0$: le mode (k, h) est oscillant et se propage comme une onde progressive de vitesse de phase $v_{\sigma_i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{k^2 + h^2}}$;
- $\sigma_r \geq 0$: la perturbation croît exponentiellement avec le temps. On dit que l'état de base est linéairement instable par rapport au mode (k, h) . Dans cette configuration, le devenir des perturbations infinitésimales est prédit en examinant les termes non linéaires. En effet, cette étude est primordiale car les termes non linéaires croissent beaucoup plus rapidement que ceux linéaires jusqu'à devenir dominants. Ces termes non linéaires régissent ainsi l'instabilité assez rapidement.

5.3 Analyse en modes normaux en approximation anélastique

Dans la suite, nous considérons des fluides parfaits. Partons de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(0)} u_i^{(1)}) = 0. \quad (\text{II. 5. 15})$$

Faisons l'hypothèse que $\text{rot}(\vec{u}) = 0$, il est donc possible d'introduire une fonction de courant ϕ telle que $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$. L'équation II. 5. 15 devient ainsi :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{II. 5. 16})$$

avec ρ_0 ne dépendant que de z , on peut rechercher une solution sous la forme :

$$\phi(x, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{\sigma t} e^{ikx}. \quad (\text{II. 5. 17})$$

L'équation II. 5. 16 devient, après simplification :

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d\hat{\phi}}{dz} - k^2 \hat{\phi} = 0. \quad (\text{II. 5. 18})$$

Dans la suite, nous déterminons $\hat{\phi}$ pour chaque milieu.

Milieu lourd

Les caractéristiques propres à ce fluide sont données par : $\rho_{0H} = (1 + At)e^{\mathcal{A}_-(Sr, At)z}$ (masse volumique du milieu lourd à l'état hydrostatique), avec : $\mathcal{A}_-(Sr, At) = -Sr/(1 - At)$. Ainsi le terme $d\rho_{0H}/dz = \mathcal{A}_-(Sr, At) \rho_{0H}$ et l'équation II. 5. 18 devient donc :

$$\frac{d^2 \hat{\phi}_H}{dz^2} + \mathcal{A}_-(Sr, At) \frac{d\hat{\phi}_H}{dz} - k^2 \hat{\phi}_H = 0, \quad (\text{II. 5. 19})$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} \phi_H = \lambda_H e^{r_{1H}z} + \mu_H e^{r_{2H}z}, \\ r_{1H}(Sr, At, k) = \frac{-\mathcal{A}_- + \sqrt{\mathcal{A}_-^2 + 4k^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_{2H}(Sr, At, k) = \frac{-\mathcal{A}_- - \sqrt{\mathcal{A}_-^2 + 4k^2}}{2}. \end{cases} \quad (\text{II. 5. 20})$$

Milieu léger

Le fluide léger diffère du second milieu par sa densité à l'état hydrostatique, notée : $\rho_{0L} = (1 - At)e^{\mathcal{A}_+(Sr, At)z}$, où $\mathcal{A}_+(Sr, At) = -Sr/(1 + At)$. En notant que $d\rho_{0L}/dz = \mathcal{A}_+(Sr, At, k)\rho_{0L}$, l'équation II. 5. 18 devient pour ce milieu :

$$\frac{d^2 \hat{\phi}_L}{dz^2} + \mathcal{A}_+ \frac{d\hat{\phi}_L}{dz} - k^2 \hat{\phi}_L = 0, \quad (\text{II. 5. 21})$$

et la solution est :

$$\begin{cases} \phi_L = \lambda_L e^{r_{1L}z} + \mu_L e^{r_{2L}z}, \\ r_{1L}(Sr, At, k) = \frac{-\mathcal{A}_+ + \sqrt{\mathcal{A}_+^2 + 4k^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_{2L}(Sr, At, k) = \frac{-\mathcal{A}_+ - \sqrt{\mathcal{A}_+^2 + 4k^2}}{2}. \end{cases} \quad (\text{II. 5. 22})$$

Expressions des pressions et vitesses dans chaque milieu

En reprenant la relation entre les vitesses et la fonction courant, il est possible de déduire l'expression des composantes des vitesses de chaque milieu à l'aide des termes introduits en II. 5. 20 et II. 5. 22 :

$$\begin{cases} u_H(x, z, t) = ik (\lambda_H e^{r_{1H}z} + \mu_H e^{r_{2H}z}) e^{\sigma t} e^{ikx}, \\ u_L(x, z, t) = ik (\lambda_L e^{r_{1L}z} + \mu_L e^{r_{2L}z}) e^{\sigma t} e^{ikx}, \\ w_H(x, z, t) = (\lambda_H r_{1H} e^{r_{1H}z} + \mu_H r_{2H} e^{r_{2H}z}) e^{\sigma t} e^{ikx}, \\ w_L(x, z, t) = (\lambda_L r_{1L} e^{r_{1L}z} + \mu_L r_{2L} e^{r_{2L}z}) e^{\sigma t} e^{ikx}. \end{cases} \quad (\text{II. 5. 23})$$

Les constantes λ_H , μ_H , λ_L , μ_L peuvent être déterminées à l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} w_H(z=0) = w_L(z=0) = v_0, \\ w_H(z=h_H) = w_L(z=-h_L) = 0. \end{cases} \quad (\text{II. 5. 24})$$

Or : $w_H(z=h_H) = (\lambda_H r_{1H} e^{r_{1H} h_H} + \mu_H r_{2H} e^{r_{2H} h_H}) e^{\sigma t} e^{ikx}$. Les conditions aux limites permettent de déduire l'expression des λ_H en fonction de μ_H :

$$\lambda_H = -\frac{r_{2H}}{r_{1H}} \mu_H e^{h_H(r_{2H}-r_{1H})}. \quad (\text{II. 5. 25})$$

De même, comme : $w_L(z=-h_L) = (\lambda_L r_{1L} e^{r_{1L}(-h_L)} + \mu_L r_{2L} e^{r_{2L}(-h_L)}) e^{\sigma t} e^{ikx}$, λ_L a pour expression :

$$\lambda_L = -\frac{r_{2L}}{r_{1L}} \mu_L e^{-h_L(r_{2L}-r_{1L})}. \quad (\text{II. 5. 26})$$

Les conditions aux limites en $z=0$ permettent de déterminer les constantes μ_H et μ_L en fonction de v_0 , la composante verticale de la vitesse au niveau de l'interface des deux fluides à l'instant initial : $w_H(z=0) = w_L(z=0) = v_0 = \frac{\partial \xi}{\partial t}(0) = \sigma \xi(0)$. Ces coefficients ont donc pour expression :

$$\mu_H = \frac{v_0}{r_{2H} (1 - e^{h_H(r_{2H}-r_{1H})})}, \quad \mu_L = \frac{v_0}{r_{2L} (1 - e^{h_L(r_{1L}-r_{2L})})}. \quad (\text{II. 5. 27})$$

La composante selon x de l'équation de quantité de mouvement permet d'exprimer la pression dans chaque fluide :

$$\rho^{(0)} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \Rightarrow \hat{p} = -\rho^{(0)} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}.$$

Ainsi, la pression de chaque milieu s'exprime de la manière suivante :

$$\hat{p}_L = -(1 - At) e^{A_+(Sr, At)z} \sigma \hat{\phi}_L, \quad \text{et} \quad \hat{p}_H = -(1 + At) e^{A_-(Sr, At)z} \sigma \hat{\phi}_H.$$

Les fonctions courant $\phi_{H,L}$, les composantes des vitesses $u_{H,L}, w_{H,L}$ et les pressions $p_{H,L}$ ont donc pour expression :

$$\begin{aligned}
\phi_H(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2H} (1 - e^{h_H(r_{2H} - r_{1H})})} e^{r_{2H} h_H} \left(e^{r_{2H}(z - h_H)} - \frac{r_{2H}}{r_{1H}} e^{r_{1H}(z - h_H)} \right), \\
\phi_L(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2L} (1 - e^{h_L(r_{1L} - r_{2L})})} e^{-r_{2L} h_L} \left(e^{r_{2L}(z + h_L)} - \frac{r_{2L}}{r_{1L}} e^{r_{1L}(z + h_L)} \right), \\
w_H(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{1 - e^{h_H(r_{2H} - r_{1H})}} e^{r_{2H} h_H} \left(e^{r_{2H}(z - h_H)} - e^{r_{1H}(z - h_H)} \right), \\
w_L(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{1 - e^{h_L(r_{1L} - r_{2L})}} e^{-r_{2L} h_L} \left(e^{r_{2L}(z + h_L)} - e^{r_{1L}(z + h_L)} \right), \\
u_H(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= ik \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2H} (1 - e^{h_H(r_{2H} - r_{1H})})} e^{r_{2H} h_H} \left(e^{r_{2H}(z - h_H)} - \frac{r_{2H}}{r_{1H}} e^{r_{1H}(z - h_H)} \right), \\
u_L(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= ik \frac{\sigma \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2L} (1 - e^{h_L(r_{1L} - r_{2L})})} e^{-r_{2L} h_L} \left(e^{r_{2L}(z + h_L)} - \frac{r_{2L}}{r_{1L}} e^{r_{1L}(z + h_L)} \right), \\
p_H(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma^2 \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2H} (1 - e^{h_H(r_{2H} - r_{1H})})} e^{r_{2H} h_H} \left(e^{r_{2H}(z - h_H)} - \frac{r_{2H}}{r_{1H}} e^{r_{1H}(z - h_H)} \right), \\
p_L(x, z, t; Sr, At, k, h_H, h_L) &= \frac{\sigma^2 \xi(0) e^{\sigma t} e^{ikx}}{r_{2L} (1 - e^{h_L(r_{1L} - r_{2L})})} e^{-r_{2L} h_L} \left(e^{r_{2L}(z + h_L)} - \frac{r_{2L}}{r_{1L}} e^{r_{1L}(z + h_L)} \right).
\end{aligned}$$

(II. 5. 28)

5.4 Relation de dispersion

La relation de dispersion est obtenue par la manipulation de la condition de raccord de l'interface des deux milieux. Cette relation est donnée par le théorème de Bernoulli, qui s'écrit après adimensionnement :

$$\rho_{0H} \left(\frac{\partial \phi_H(0)}{\partial t} + \xi(0) \right) = \rho_{0L} \left(\frac{\partial \phi_L(0)}{\partial t} + \xi(0) \right). \quad (\text{II. 5. 29})$$

Si on pose :

$$\begin{aligned}
F_H(k, Sr, At, h_H) &= \frac{1}{1 - e^{h_H(r_{2H} - r_{1H})}} \left(1 - \frac{r_{2H}}{r_{1H}} e^{(r_{2H} - r_{1H})h_H} \right), \\
F_L(k, Sr, At, h_L) &= \frac{1}{1 - e^{h_L(r_{1L} - r_{2L})}} \left(1 - \frac{r_{2L}}{r_{1L}} e^{(r_{1L} - r_{2L})h_L} \right),
\end{aligned}$$

la condition de raccord II. 5. 29 devient :

$$\rho_{0H} \left[\frac{\sigma^2}{r_{2H}} F_H(k, Sr, At, h_H) + 1 \right] = \rho_{0L} \left[\frac{\sigma^2}{r_{2L}} F_L(k, Sr, At, h_L) + 1 \right].$$

On obtient ainsi la relation de dispersion :

$$\sigma^2 = \frac{1 - \frac{\rho_{0H}}{\rho_{0L}}}{\left[\frac{\rho_{0H}}{\rho_{0L} r_{2H}} F_H(k, Sr, At, h_H) - \frac{1}{r_{2L}} F_L(k, Sr, At, h_L) \right]}.$$

Or , $At = \frac{\rho_{0H} - \rho_{0L}}{\rho_{0H} + \rho_{0L}}$. L'expression de la relation de dispersion devient donc :

$$\sigma^2 = \frac{-2At}{\frac{1+At}{r_{2H}} F_H(k, Sr, At, h_H) - \frac{1-At}{r_{2L}} F_L(k, Sr, At, h_L)}. \quad (\text{II. 5. 30})$$

Les nombres sans dimension intervenant dans cette relation de dispersion sont : At , Sr , h_H et h_L . Nous remarquons l'indépendance par rapport à l'indice adiabatique, ce qui est naturel puisque l'intérêt de l'approximation anélastique est de ne pas prendre en compte la contribution de la compressibilité dynamique, liée à l'équation d'état (quantifiée par l'indice adiabatique). Dans la suite, nous comparons le taux de croissance en approximation anélastique au taux de croissance incompressible. On représente d'ailleurs, sur une courbe de dispersion, ce rapport $\frac{\sigma_{anel}}{\sigma_{in}}$ en fonction du nombre d'onde, dont l'allure varie suivant les effets physiques pris en compte.

5.5 Influence des paramètres sur le taux de croissance

5.5.1 Influence de la stratification

Mathews & Blumenthal ont étudié les effets de la stratification pour des fluides parfaits compressibles [1977] et ont ainsi montré l'effet stabilisant de la stratification. La figure II.1 rejoint ces conclusions, en effet plus la stratification augmente, plus l'IRT met du temps à se développer, cela rejoint les conclusions de Mathews & Blumenthal (1977) concernant l'effet stabilisant de la stratification.

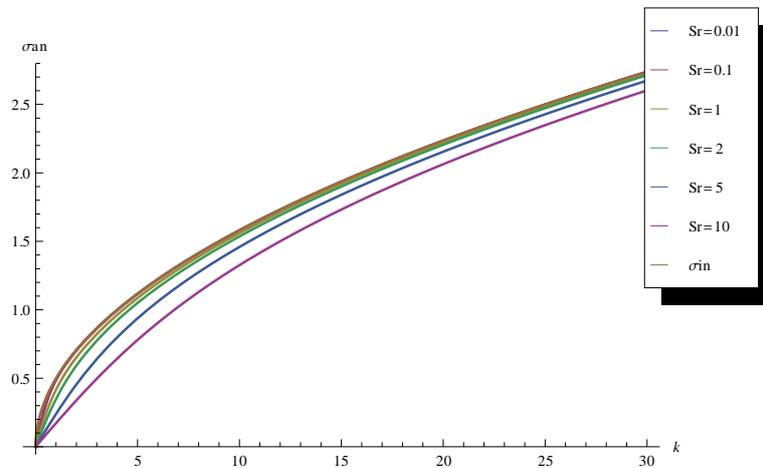


Figure II.1 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de Sr avec $At = 0.25$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$.

La figure II.1 présente le rapport du taux de croissance dans le cadre de l'AN sur celui obtenu lorsque les fluides considérés sont incompressibles en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeur de la stratification Sr . On observe que plus Sr tend vers 0, plus le taux de croissance tend vers celui lié aux fluides incompressibles. À l'opposé, plus Sr augmente et plus ce rapport de taux de croissance se réduit au grands nombres d'onde. Les grandes échelles sont ainsi affectées.

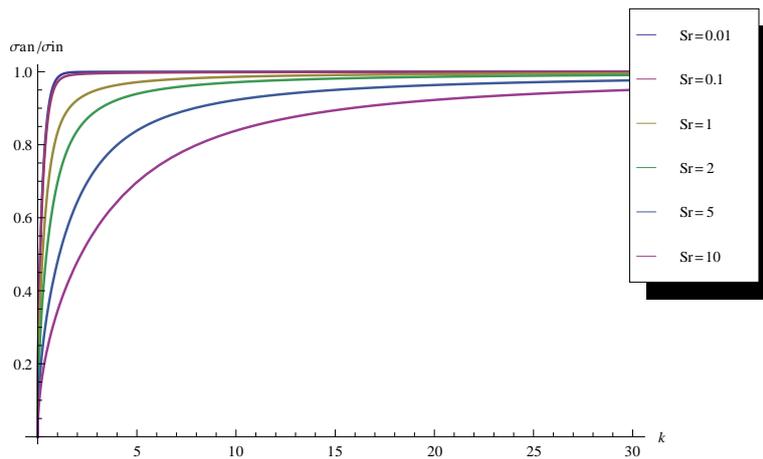


Figure II.2 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de Sr avec $At = 0.25$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$.

5.5.2 Influence du nombre d'Atwood

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le saut des masses volumiques à l'interface initiale est caractérisé par le nombre d'Atwood. Compte tenu du fait que le taux de croissance est proportionnel à \sqrt{At} , il est utile de quantifier l'influence de ce paramètre dans le cadre de l'AN. La figure II.3 permet de conclure que plus le saut des masses volumiques entre les deux fluides augmente, plus l'IRT se développe rapidement.

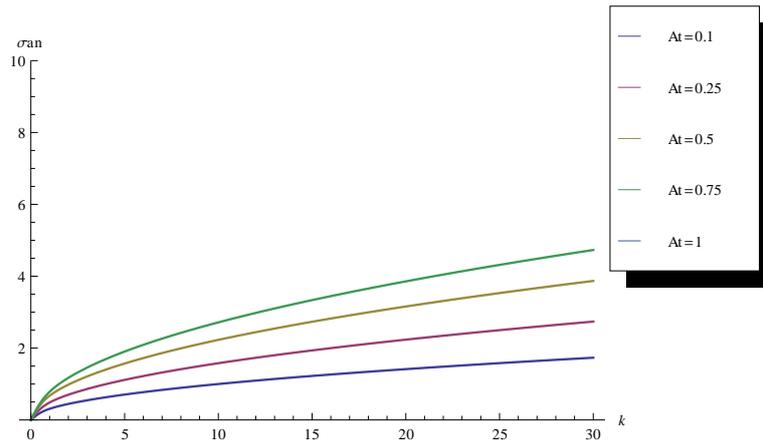


Figure II.3 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de At avec $Sr = 0.1$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$.

La figure II.4 présente le rapport du taux de croissance dans le cadre de l'AN sur celui obtenu par la relation II. 5. 14, vérifiée lorsque les fluides considérés sont incompressibles en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeurs du nombre d'Atwood. Il apparaît que plus la valeur du paramètre At est faible plus le taux de croissance tend vers celui lié aux fluides incompressibles.

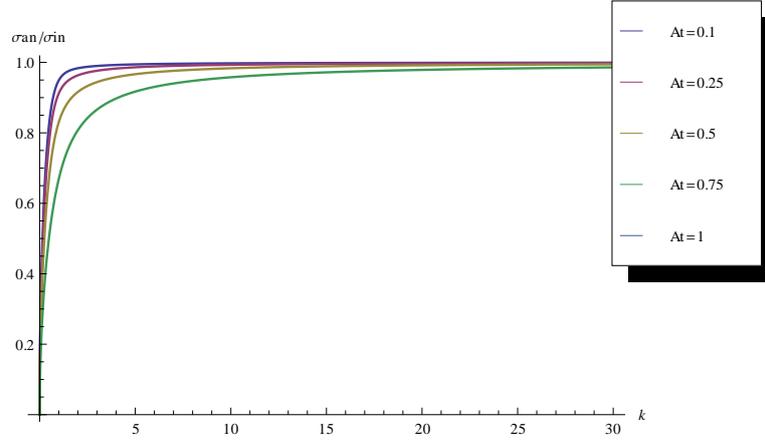


Figure II.4 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de At avec $Sr = 0.1$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$.

5.5.3 Influence des hauteurs de chaque fluide

La relation de dispersion II. 5. 30 montre que le taux de croissance dépend également des hauteurs des deux fluides h_H et h_L . Il est donc intéressant d'étudier l'influence de ces deux paramètres. La figure II.5 montre que plus les hauteurs des fluides sont importantes, plus le taux de croissance augmente rapidement. Nous remarquons également que le taux de croissance en approximation anélastique se rapproche de celui des fluides incompressibles d'autant plus que les hauteurs des fluides sont importantes. La figure II.6 confirme cette remarque, en effet plus les hauteurs augmentent plus le rapport des taux de croissance en AN et en incompressible tend vers 1 rapidement.

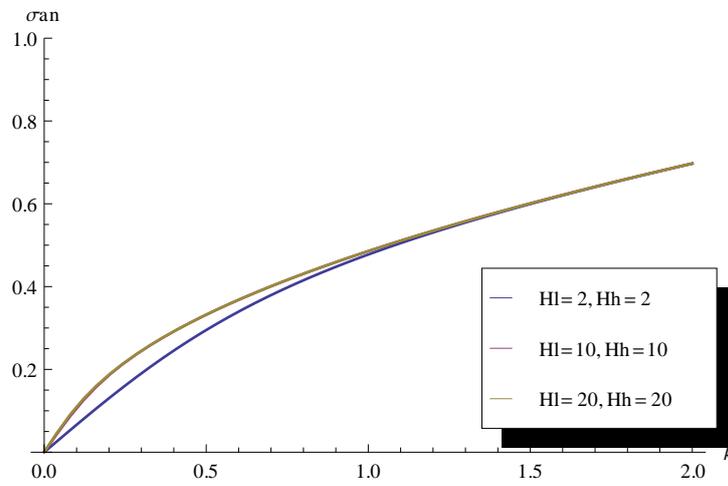


Figure II.5 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de $h_H = h_L$ avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$.

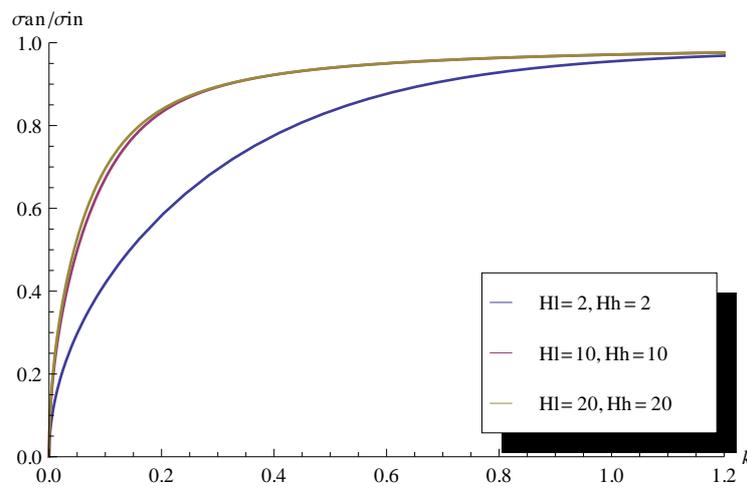


Figure II.6 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de $h_H = h_L$ avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$.

Les cas représentés sur les figures précédentes ne nous indiquent pas l'influence de la hauteur de chaque fluide. La figure II.7 montre que plus la boîte contient de fluide lourd plus le taux de croissance augmente rapidement et le rapport des taux de croissance tend vers 1 rapidement (*cf.* figure II.8).

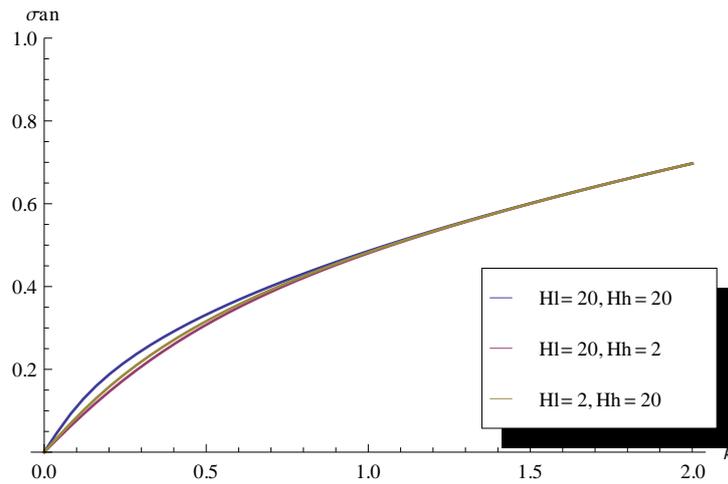


Figure II.7 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_H et h_L avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$.

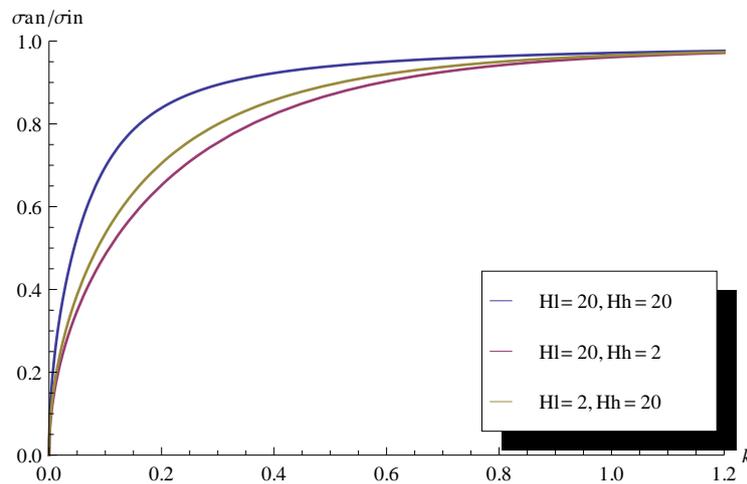


Figure II.8 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_H et h_L avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$.

Nous étudions désormais l'influence de la hauteur d'un fluide en fixant celle du second. Nous observons que le taux de croissance augmente plus rapidement avec la hauteur du fluide léger (*cf.* figure II.9) et se rapproche du taux de croissance incompressible comme le montre la figure II.10.

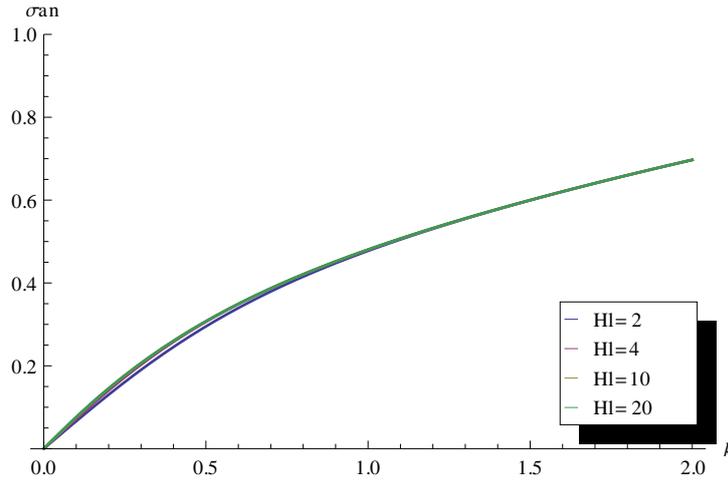


Figure II.9 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_L avec $At = 0.25$, $Sr = 0.1$ et $h_H = 2$.

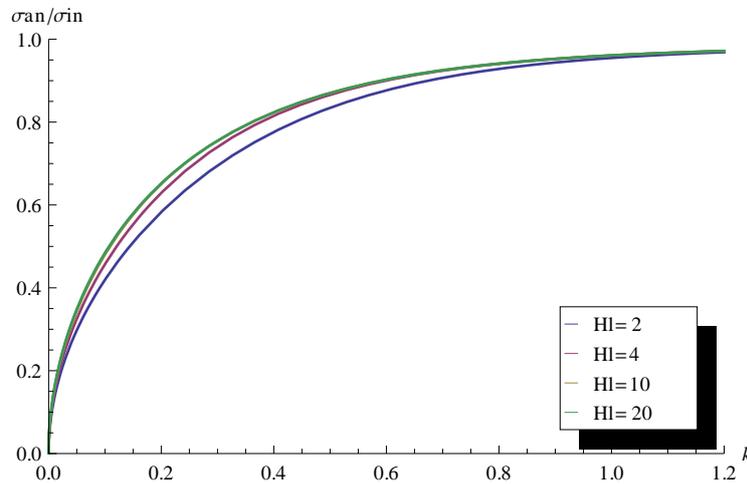


Figure II.10 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_L avec $At = 0.25$, $Sr = 0.1$ et $h_H = 2$.

Finalement, nous constatons les mêmes observations lorsque la hauteur du fluide lourd augmente (*cf.* figure II.11 et II.12).

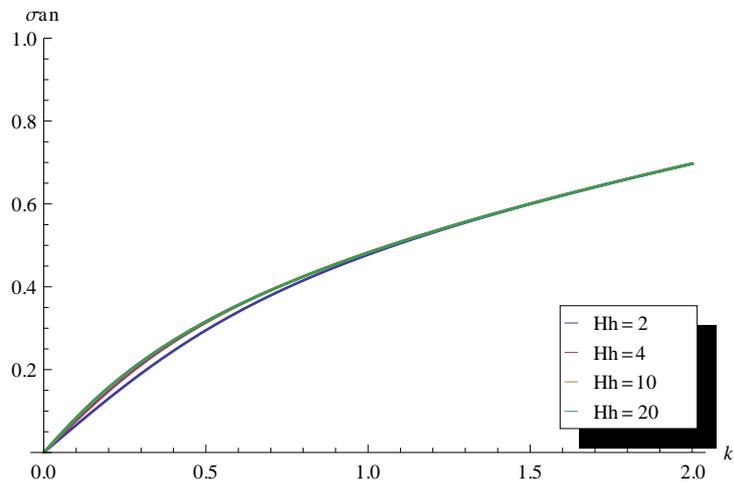


Figure II.11 – Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_H avec $At=0.25$, $Sr=0.1$ et $h_L = 2$.

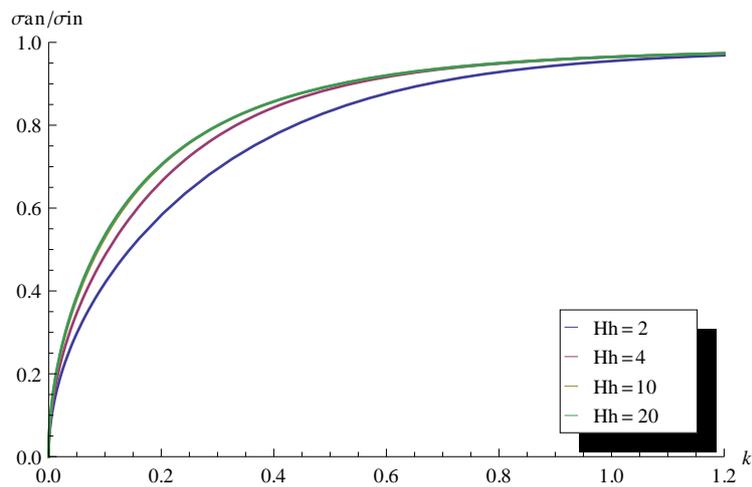


Figure II.12 – Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_H avec $At=0.25$, $Sr=0.1$ et $h_L = 2$.

5.6 Fonctions propres

Cette étude de la stabilité linéaire permet de quantifier l'influence des différents paramètres sur le taux de croissance mais également d'introduire les perturbations qui seront les plus amplifiées dans le code de simulation AMENOPHIS. Les figures II.13 présentent ainsi les profils du potentiel (ϕ), des vitesses orthogonale (u) et verticale (w) et la pression (p) propres données par les relations II. 5. 28.

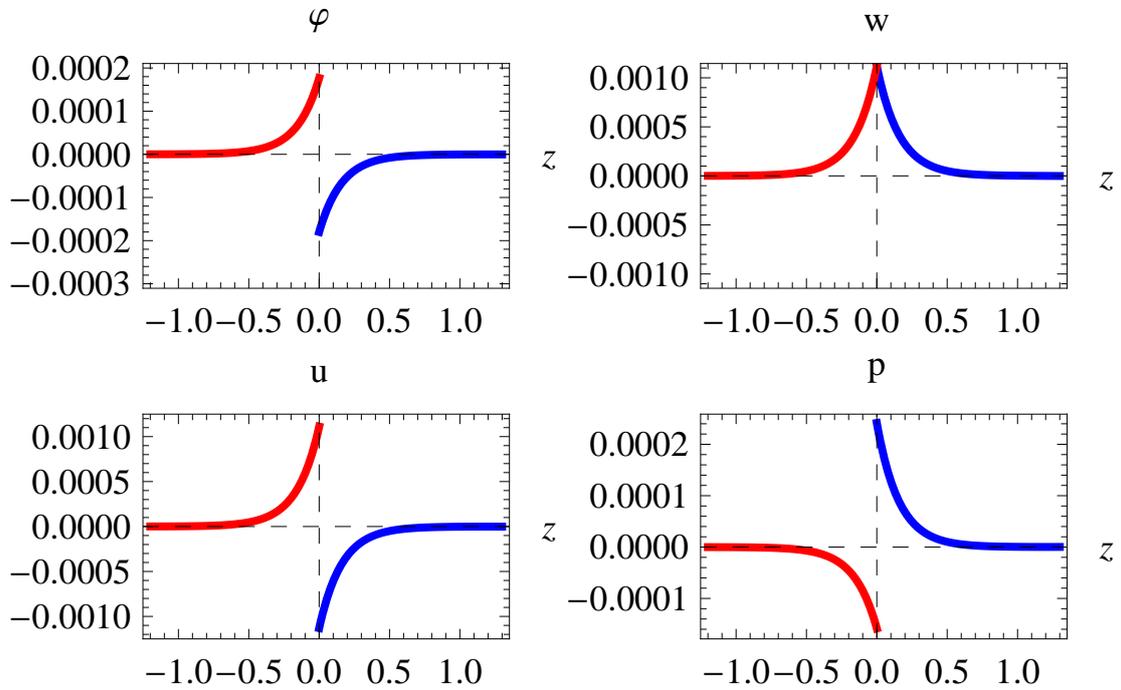


Figure II.13 – fonctions propres de la fonction courant (ϕ), des composantes orthogonales de la vitesse (u) et verticale (w) et la pression (p) pour un nombre d'onde $k = 2 \pi$, pour le fluide lourd (en bleu) et le fluide léger (en rouge), pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$.

Dans ce chapitre nous avons établi les équations de l'AN et effectué une étude sur la stabilité linéaire de l'IRT dans le cadre de cette même approximation. En déterminant l'expression analytique du taux de croissance, nous avons pu mettre en évidence l'influence du paramètre de stratification, du nombre d'Atwood ou de la

hauteur des fluides constituant le mélange. Ainsi, nous observons que :

- la stratification a un effet stabilisant sur l'IRT ;
- l'IRT se développe plus rapidement avec le nombre d'Atwood ;
- l'IRT se développe plus rapidement lorsque les hauteurs des fluides augmentent. Cette rapidité est d'autant plus importante que le fluide lourd est majoritaire.

Cette étude nous a permis également de déterminer analytiquement l'expression des perturbations dominantes afin de les implanter dans le code de simulation directe AMENOPHIS. Une fois le modèle physique du mélange et l'AN explicités, nous consacrons la suite au descriptif du code AMENOPHIS.

Chapitre III

Rappels sur les méthodes numériques

L'étude de l'IRT en régime non-linéaire est menée à l'aide de simulations effectuées par le code AMENOPHIS parallélisé avec MPI ([Le Creurer \(2005\)](#)). Ce chapitre est consacré au descriptif des différentes méthodes numériques, considérées dans AMENOPHIS. Dans un premier temps, nous effectuons des rappels sur les méthodes spectrales, le schéma en temps Runge-Kutta d'ordre 2 et à 3 étapes et les méthodes de résolution des problèmes de Stokes incompressibles. Puis, nous développons les algorithmes liés à la résolution en multidomaine et l'adaptation dynamique multidomaine. Ensuite nous nous concentrons sur l'application de ces différentes méthodes numériques au code AMENOPHIS.

1 Rappels sur les méthodes spectrales

Il existe différentes méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles d'un problème. Parmi ces dernières, les méthodes spectrales demeurent d'excellents outils de par leur remarquable précision. Elles consistent en un développement des variables dépendantes sur un ensemble de fonctions orthogonales occupant tout le domaine de résolution et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points inhérents à ce même domaine. Cette méthode numérique utilisée pour la première fois par Galerkin, fut ensuite appliquée au calcul de niveaux d'énergie électronique à l'aide d'une méthode de collocation ([Slater \(1934\)](#)). Lanczos traita par la suite l'importance du choix des fonctions de développement et des points de collocation ([1938](#) et [1973](#)). Elles furent ensuite utilisées pour la résolution des équations de la

mécanique des fluides avec une méthode de type Fourier. Ce travail entrepris par Orszag permit de rendre ces méthodes très intéressantes [1972]. Il répertoria dans un ouvrage avec Gottlieb (1977) l'essentiel des résultats concernant les méthodes spectrales de Fourier ou polynomiales. Canuto, Hussein, Quarteroni et Zang développèrent ce travail dans le domaine de la mécanique des fluides dans Hussaini *et al.* (1987). Peyret s'attarde sur ces méthodes de résolution pour des fluides visqueux incompressibles (2002). Labrosse, quant à lui insiste sur la structure des opérateurs qui interviennent dans les résolutions des équations de transport (2011).

Les méthodes spectrales appartiennent à la classe générale de la méthode des résidus pondérés caractérisées par leurs fonctions de développement et leurs fonctions poids.

1.1 Méthodes des résidus pondérés

On considère l'équation différentielle à résoudre, de la forme :

$$\mathcal{L}(u(x, t)) = \mathbf{f}. \quad (\text{III. 1. 1})$$

\mathcal{L} est un opérateur différentiel, avec comme conditions aux limites $\mathcal{B}(u(x, t)) = 0$ pour $x \in \Omega$.

Soit \mathbf{P}_N un opérateur de projection défini sur un ensemble de dimension finie par la relation :

$$u_N(x, t) = \mathbf{P}_N u(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(x). \quad (\text{III. 1. 2})$$

$\varphi_k(x)$ représentent les fonctions de développement et $a_k(t)$, les coefficients de développement. Ces derniers sont déterminés de manière à ce que le résidu

$R_N = \mathcal{L}u_N - \mathbf{f}$ s'annule en moyenne (ie. le résidu est orthogonal à chaque fonction ψ_j) :

$$\langle R_N, \psi_j \rangle_p = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (\text{III. 1. 3})$$

Les ψ_j représentent les fonctions test. Le produit scalaire est défini par la relation :

$$\langle u, v \rangle_p = \int_{\Omega} u(x) v(x) p(x) dx. \quad (\text{III. 1. 4})$$

$p(x)$ est la fonction poids. Il existe plusieurs méthodes permettant de choisir les fonctions test. Trois méthodes sont essentiellement appliquées :

- La méthode de Galerkin : les fonctions test ψ_j et les fonctions de développement φ_k sont identiques et satisfont aux conditions aux limites du problème ;
- La méthode Tau : les fonctions test et les fonctions de développement sont identiques mais contrairement à la méthode précédente, elles ne satisfont pas les conditions aux limites homogènes du problème ;
- La méthode de collocation : les fonctions test sont des fonctions de Dirac centrées sur des points dits de collocation. Le résidu s'annule exactement aux points de collocation (résultat de l'équation III. 1. 3). Les fonctions de développement quant à elles sont des polynômes orthogonaux de type Tchebycheff ou Legendre et ne vérifient pas nécessairement les conditions aux limites. La fonction poids a pour expression :
 - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour les polynômes de Tchebycheff ;
 - 1 pour les polynômes de Legendre.

Quant aux conditions aux limites, elles sont imposées aux points de collocation de la frontière du domaine.

1.1.1 Polynômes de Tchebycheff

Considérons le problème de Sturm-Liouville, caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\zeta} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \frac{dT_n}{d\zeta} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n = 0, \\ T_n(1) = 0, \end{cases} \quad (\text{III. 1. 5})$$

avec $\zeta \in [-1, 1]$. Les polynômes de Tchebycheff sont les fonctions propres de ce problème et sont définis par la relation :

$$T_n(\zeta) = \cos(n \arccos(\zeta)) \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{III. 1. 6})$$

avec $T_n(\zeta) \in [-1, 1]$. En posant $\zeta = \cos \theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$, on obtient : $T_n(\zeta) = \cos(n\theta)$ et par conséquent : $T_0(\zeta) = 1$, $T_1(\zeta) = \zeta$, $T_2(\zeta) = 2\zeta^2 - 1$.

La relation de trigonométrie $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos(n\theta)$ permet

d'établir la relation de récurrence entre trois polynômes consécutifs :

$$T_{n+1}(\zeta) = 2\zeta T_n(\zeta) - T_{n-1}(\zeta) \quad n \geq 1. \quad (\text{III. 1. 7})$$

De plus, la relation d'orthogonalité entre deux polynômes de Tchebycheff dans l'espace $L^2_p([-1, 1])$ s'écrit :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(\zeta) T_m(\zeta) p(\zeta) d\zeta = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta. \quad (\text{III. 1. 8})$$

La fonction poids p est défini par la relation : $p(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$. On obtient ainsi :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \frac{\pi}{2} \bar{c}_n \delta_{nm} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{III. 1. 9})$$

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = 2, \\ \bar{c}_n = 1 \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Les polynômes de Tchebycheff présentent des propriétés utiles à mentionner :

$$\begin{aligned} T_n(\pm 1) &= (\pm 1)^n, \\ T'_n(\pm 1) &= (\pm 1)^{n+1} n^2, \\ |T'_n(\zeta)| &\leq n^2 \quad \text{pour } \zeta \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Notons également que Clenshaw observa que la formule de l'intégrale d'un polynôme de Tchebycheff n'impliquait que 2 polynômes :

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1} \right] \quad k \geq 2,$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_0(x) dx &= T_1(x), \quad \int_{-1}^1 T_1(x) dx = \frac{1}{4} [T_0(x) + T_2(x)], \\ \int_{-1}^1 T_k(x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ pair,} \\ \frac{2}{1-k^2} & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 Méthode de collocation de Tchebycheff

La méthode de collocation explicitée précédemment se distingue par :

- ses fonctions de développement : des polynômes orthogonaux de type Tchebycheff ;
- ses fonctions test : fonctions de Dirac centrés sur ses points dits de collocation.

On considère une fonction $u(\varsigma) \in L^2_p([-1, 1])$. $u_N(\varsigma)$ représente l'approximation de $u(\varsigma)$, par une série de Tchebycheff tronquée à l'ordre $N-1$:

$$u_N(\varsigma) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k T_k(\varsigma) \quad \varsigma \in [-1, 1],$$

avec

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\pi \bar{c}_k} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-\varsigma^2}} u(\varsigma) T_k(\varsigma) d\varsigma.$$

Les points de collocation sont définis comme l'ensemble des points de Gauss-Lobatto, par :

$$\varsigma_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N-1}\right) \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Cependant, bon nombre de problèmes sont à résoudre dans un intervalle autre que $[-1, 1]$. Il est donc nécessaire d'utiliser une transformation de coordonnées, ramenant le domaine physique à l'intervalle $\in [-1, 1]$ (Peyret (2002)). Dans notre cas, représenter un gradient, situé au milieu d'un domaine est rendu possible par une souplesse dans le positionnement des points de collocation et une méthode de décomposition de domaine qui sera détaillé dans la suite.

1.2.1 Transformation de coordonnées

Les fonctions de transformation de coordonnées retenues sont bijectives et dépendent des bornes de l'intervalle de calcul (x_{inf} et x_{sup}). Différentes fonctions ont été étudiées dans Renaud (1996) et Renaud & Gauthier (1997), parmi celles-ci une transformation a été retenue, dépendant d'un seul paramètre :

$$x(\varsigma) = \frac{x_{inf} + x_{sup}}{2} + \frac{a \varsigma}{\sqrt{1 + L^2 - \varsigma^2}}, \quad (\text{III. 1. 10})$$

avec $\varsigma \in [-1, 1]$, $a > 0$ et $L = \frac{2a}{x_{sup} - x_{inf}}$. Ainsi, les points sont resserrés autour du milieu de l'intervalle lorsque a tend vers 0 et tend vers une distribution de Gauss-Lobatto lorsque a tend vers l'infini. Dans [Renaud \(1996\)](#), la valeur de a , permettant une répartition quasi-uniforme des points du maillage est calculée. Cette valeur est obtenue en minimisant la distance entre la distribution des points définis par la relation [III. 1. 10](#) et une distribution des points uniforme. Cette distance ne dépend que du paramètre L . Pour $L = 0,3277(x_{sup} - x_{inf})$, a est optimum ([Renaud \(1996\)](#)).

1.2.2 Dérivation spectrale

La dérivation d'une fonction u connue sur les points de collocation x_j est définie comme la dérivation de u_N , projection de la fonction u_N sur l'espace des polynômes de Tchebycheff de degré inférieur ou égal à $N - 1$, représentant la fonction u sur les points de collocation en tenant compte de la transformation de coordonnées.

$$\frac{du}{dx}(x_j) \approx \frac{du_N}{d\varsigma}(\varsigma_j) \frac{d\varsigma}{dx}(\varsigma_j).$$

$\frac{du_N}{d\varsigma}(\varsigma_j)$ correspond à la dérivée de la transformation de coordonnées. Il existe différentes méthodes de calcul de dérivée spectrale, le calcul sous forme matricielle est retenue dans notre étude :

$$D_N u(\varsigma_j) = \sum_{j=0}^{N-1} (D_N)_{ij} u(\varsigma_j),$$

où D_N est la matrice de dérivation première, dans l'espace physique associée aux points de collocation, et dont les éléments ont pour expression (Peyret (2002)) :

$$(D_N)_{ij} = \begin{cases} \frac{2(N-1)^2 + 1}{6} & \text{pour } i = j = 1, \\ -\frac{\varsigma_i}{2(1 - \varsigma_i^2)} & \text{pour } 2 \leq i \leq N-2, i = j, \\ \frac{\bar{c}_i (-1)^{i+j}}{\bar{c}_j (\varsigma_i - \varsigma_j)} & \text{pour } i \neq j, \\ -\frac{2(N-1)^2 + 1}{6} & \text{pour } i = j = N-1, \end{cases} \quad (\text{III. 1. 11})$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = \bar{c}_N = 2, \\ \bar{c}_j = 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

Remarque : La dérivée pième est calculée par la relation : $D_N^{(p)} = D_N D_N^{(p-1)}$, (Rothman (1991)).

1.2.3 Intégration spectrale

Il existe différentes méthodes d'intégration spectrale, ou « quadrature », basées sur un développement des intégrales en polynômes de Tchebycheff. L'intégration par la formule de Clenshaw-Curtis (1960) est une approximation convergeant rapidement (comparable aux lois de la quadrature gaussienne) et est retenue dans notre étude. La formule de Clenshaw-Curtis s'écrit :

$$\int_{-1}^1 u(x) dx \cong \sum_{i=0}^N \omega_i u(x_i), \quad (\text{III. 1. 12})$$

où les fonctions poids s'écrivent, pour N pair :

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{N^2 - 1} & \text{pour } i = 0 \text{ et } i = N, \\ \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{N/2} \frac{1}{\bar{c}_k} \frac{\cos(2\pi i k/N)}{1 - 4k^2} & \text{pour } i = 1, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (\text{III. 1. 13})$$

avec $\bar{c}_0 = \bar{c}_{N/2} = 2$ et $\bar{c}_k = 1$ pour $1 \leq k \leq N/2 - 1$

Pour N impair, les fonctions poids ont pour expression :

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{N^2} & \text{pour } i = 0 \text{ et } i = N, \\ \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \frac{1}{\bar{c}_k} \frac{\cos(2\pi i k/N)}{1 - 4k^2} + (-1)^i \frac{2 \cos(\pi i/N)}{N^2(2 - N)} & \text{pour } i = 1, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (\text{III. 1. 14})$$

avec $\bar{c}_0 = \bar{c}_{(N-1)/2} = 2$ et $\bar{c}_k = 1$ pour $1 \leq k \leq (N - 1)/2 - 1$.

Notons que la formule III. 1. 12 est exacte si $u(x)$ est un polynôme de degré au plus N .

2 Rappels sur les méthodes de résolution des problèmes de Stokes incompressibles

Avant de détailler la méthode de résolution retenue dans le cadre de l'AN, nous rappelons ici les méthodes les plus répandues pour des fluides incompressibles. Le problème de Stokes est régi par les équations différentielles adimensionnées :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{v} + \vec{\nabla} p = \vec{f}, & \text{dans } \Omega \otimes t > 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, & \text{dans } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{III. 2. 15})$$

Seules des conditions aux limites en vitesse sont imposées puisqu'il a été montré qu'il était inutile d'ajouter des conditions aux frontières en pression. En effet, la pression a pour simple contrainte de vérifier $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ sur tout le domaine et à chaque pas de temps. Il est impératif de découpler les champs de vitesse et de pression. Dans la suite nous utiliserons une formulation dite en variables primitives dans le but d'exposer les différentes méthodes de résolution de ce type de problème de Stokes. Cette formulation est obtenue en appliquant la divergence au système III. 2. 15 :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 p = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{III. 2. 16})$$

La particularité de la résolution des équations des problèmes de Stokes réside dans le découplage des vitesses et pressions. Les solveurs de Stokes sont trop nombreux dans la littérature pour tous les citer, cependant, ils peuvent être regroupés dans 4 principales familles de méthodes, présentant chacune des caractéristiques différentes : la méthode de projection diffusion, la méthode de « splitting » temporel, la méthode de Green et la méthode d'Uzawa que l'on retient dans notre étude. La méthode d'Uzawa (Arrow *et al.* (1964)) se base sur la version discrète de la première équation du système III. 2. 15 sur tout le domaine privé de ses points aux frontières (puisque ces valeurs sont imposées). En associant la seconde relation sur le domaine entier cette fois, cela conduit à une équation sur la pression p . La pression est ainsi calculée en tous ses points. En revenant à la première équation, on peut déterminer les champs de vitesse. La méthode de Green (Kleiser & Schumann (1980)) utilise la formulation en variables primitives III. 2. 16 et fait appel à des impulsions de pression distribuées sur la frontière pour compenser à tout instant t les effets de compressibilité dans le domaine entier. Le « splitting temporel » (Temam (1969)) prend en considération la version semi-discrète temporelle du système III. 2. 15. L'incompressibilité est imposée sur une vitesse intermédiaire et non sur la vitesse réelle en un instant donné, ce qui permet de déterminer la pression découplée de cette même vitesse. La pression est ainsi calculée par l'intermédiaire d'étape de projection. Finalement, la méthode de projection diffusion (Batoul *et al.* (1994)) consiste à se dire que si $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ doit être nul, alors $\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{v}$ est à divergence nulle. Le découplage vitesse/pression

se fait alors indépendamment de tout schéma temporel. Dans son ouvrage consacré aux méthodes spectrales, Labrosse détaille ces différentes méthodes de découplage vitesse/pression et en fait un bilan sur leur consistance, leur coût et le caractère solénoïdal du champ de vitesse (2011 cf. chapitre 17, section 17.2).

3 Algorithme de résolution en multidomaine

Dans la suite nous verrons que la résolution des équations de Navier-Stokes en multidomaine se ramène à la résolution de plusieurs sous-problèmes élémentaires (le nombre m dépend du type d'équations traitées), tels que : $\tilde{\phi}_{k,h}^i = \tilde{\phi}_{k,h}^{i(0)} + \sum_{s=1}^{m-1} \lambda_s^i \tilde{\phi}_{k,h}^{i(s)}$. Les caractéristiques de ces sous-solutions seront détaillées dans le chapitre suivant (cf. chapitre IV section 3). Le schéma de résolution, pour chaque étape du schéma Runge-Kutta, en multidomaine, est le suivant :

- i. Calcul des sous-solutions $\tilde{\phi}_{k,h}^i$ et des seconds membres $\tilde{S}_{U k,h}^{i(s)}$ et $\tilde{S}_{w k,h}^{i(s)}$

(Remarque : les sous solutions des sous problèmes non homogènes en équation ne sont réactualisées que si la discrétisation des points de collocation est modifiée d'un cycle à l'autre ou si le pas de temps change).

- ii. Calcul des λ_s^i en inversant la matrice d'influence.
- iii. Calcul des solutions reconstruites à l'aide des relations IV. 3. 44, IV. 3. 41 et IV. 3. 42 pour chaque sous domaine.
- iv. Calcul des solutions dans l'espace physique à l'aide de la transformation de Fourier inverse et du changement de variable inverse (cf. chapitre IV section 2).

Cette méthode de décomposition est appliquée aux solutions de chaque sous problème homogène en équation ou en conditions aux limites.

4 Adaptation dynamique multidomaine

Bien que les méthodes spectrales soient adaptées pour représenter des solutions régulières, de manière très précise, la simulation du développement d'une IRT demande un nombre important de polynômes de Tchebycheff (très coûteux en mémoire

et en temps de calcul), du fait de l'existence d'une zone à très fort gradient de densité. Pour palier cet inconvénient, il est intéressant de décomposer le domaine de calcul en sous-domaines et utiliser une transformation de coordonnées. Une procédure de génération dynamique permet d'adapter automatiquement, tout au long d'une simulation, la position des interfaces numériques et le paramètre de transformation de coordonnées de chaque sous-domaine.

Soit un domaine de calcul $\Omega = [z_{inf}, z_{sup}]$, découpé en N_{dom} sous-domaines, sans re-

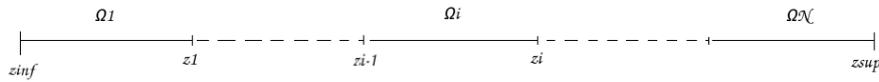


Figure III.1 – Illustration de la méthode de décomposition de domaine.

couvrement, et tel que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_{dom}} \Omega_i$, où $\Omega_i = [z_{i-1}, z_i]$, $i = 1, \dots, N_{dom}$, avec $z_0 = z_{inf}$ et $z_N = z_{sup}$, comme l'illustre la figure III.1. Nous considérons a_i le paramètre de transformation des coordonnées du sous-domaine Ω_i et J_2^i , la valeur de la fonctionnelle évaluée sur le sous-domaine Ω_i . Pour adapter la valeur du paramètre a_i et la position des frontières, l'algorithme suivant est respecté :

- sélection de l'interface z_i pour $i \in [1, N_{dom} - 1]$;
- recherche de la meilleure position de l'interface sur un ensemble de N_p valeurs discrètes, sur un intervalle I_i , prédéfini autour de la frontière ;
- Pour chaque valeur N_p :
 - minimisation de chaque valeur de la norme J_2^i afin d'obtenir la valeur optimale de a_i ;
 - calcul de la norme J_2 totale et obtention d'un ensemble de N_p valeurs de la norme totale J_2^i ;
 - obtention de la meilleure position de l'interface z_i par le minimum, parmi les N_p valeurs, de la fonctionnelle J_2 ;
 - sélection de l'interface z_{i+1} ;
 - répétition des étapes précédentes jusqu'à ce que $i = N_{dom} - 1$

Un ensemble de points de collocation est ainsi redéfini pour chaque sous-domaine. On itère cet algorithme jusqu'à ce que la position des frontières des sous-domaines converge. La solution est alors interpolée sur ce nouvel ensemble de points de collocation.

5 Application au code AMENOPHIS

Dans le code AMENOPHIS, l'équation d'énergie est formulée en température et la concentration est obtenue en résolvant une équation d'advection-diffusion. Le système est fermé avec l'équation d'état des gaz parfaits. Le schéma en temps Runge-Kutta à 3 étapes est développé. Ce code de simulation directe est pseudo-spectral de type collocation dans la direction inhomogène z et en séries de Fourier dans les directions transverses x et y . Le domaine de calcul est décomposé en sous-domaines disjoints, selon la direction inhomogène z . Le code étant parallélisé avec MPI, il y a donc deux niveaux de parallélisation. Dans chaque sous-domaine, l'évolution des gradients, tout au long d'une simulation, est décrite précisément grâce à une transformation de coordonnées auto-adaptative, dans chaque sous-domaine. De même, la position des interfaces est auto-adaptative.

5.1 Discrétisation spatiale

Toutes les grandeurs physiques ϕ sont décomposées en deux quantités $\phi^{(0)}$ qui représente l'état hydrostatique et $\phi^{(1)}$ qui modélise les perturbations telles que :

$$\phi(x, y, z, t) = \phi^{(0)}(z) + \phi^{(1)}(x, y, z, t). \quad (\text{III. 5. 17})$$

Les parties fluctuantes sont développées en polynômes de Tchebycheff dans la direction z et en série de Fourier suivant les deux directions x et y :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \\ p(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \sum_{k=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{h=-N_y/2}^{N_y/2-1} \sum_{\ell=0}^{N_z} \begin{pmatrix} u_{k,h,\ell}(t) \\ w_{k,h,\ell}(t) \\ p_{k,h,\ell}(t) \end{pmatrix} T_\ell(\varsigma(z)) e^{2\pi i \left(\frac{k}{L_x} x + \frac{h}{L_y} y \right)}, \quad (\text{III. 5. 18})$$

où x , y et z sont les coordonnées dans l'espace physique et ς celle de l'espace spectral. L'état hydrostatique étant connu, les perturbations des grandeurs physiques $\phi^{(1)}$ sont

résolues à l'aide du système II. 4. 13 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^{(0)} u_i^{(1)} \right) = 0 \\ \rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -A_U \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + B_U \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + C_{u3} \frac{\rho^{(0)}}{p^{(0)}} p^{(1)} \delta_{i3} - C_{u3} \rho^{(0)} \left[\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right] \delta_{i3}, \\ \rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt} = - \left(\rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)} \right) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} B_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} - \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} \\ \quad + B_T \Delta T^{(1)} + C_T \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - A_T p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + B_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \\ \rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = B_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} = \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}}. \end{array} \right. \quad (\text{III. 5. 19})$$

On introduit les coefficients suivants :

nombre	A_T	B_T	C_T	B_c	A_U	B_U	C_{u3}
expression	$\gamma_r - 1$	$\frac{\gamma_r}{Re Pr}$	$\frac{\gamma_r}{Re Sr}$	$\frac{B}{Sc Re}$	$\frac{1}{Sr}$	$\frac{1}{Re}$	-1

Tableau III.1 – Coefficients sans dimension des équations de Navier-Stokes en approximation anélastique.

Ce système d'équations est complété avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = \left. w \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial c}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (\text{III. 5. 20})$$

On ajoute également les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t = 0) &= u_0(x, y, z), \\
 v(x, y, z, t = 0) &= v_0(x, y, z), \\
 w(x, y, z, t = 0) &= w_0(x, y, z), \\
 \rho'(x, y, z, t = 0) &= \rho'_0(x, y, z), \\
 T(x, y, z, t = 0) &= T_0(x, y, z), \\
 c(x, y, z, t = 0) &= c_0(x, y, z).
 \end{aligned}$$

La somme de l'état de base et des perturbations forme ces conditions initiales. Les perturbations implantées dans le code lors de l'initialisation sont obtenues par l'étude de la stabilité linéaire exposée précédemment dans le chapitre II.

Finalement, la décomposition en sous-domaines implique une linéarisation des termes de diffusion en $1/(\rho^{(0)}C_v)$ qui sont réécrits :

$$\frac{1}{\rho^{(0)}C_v} = \left(\frac{1}{\rho^{(0)}C_v} - \frac{1}{\rho^{(0)}\overline{C_{vs}}} \right) + \frac{1}{\rho^{(0)}\overline{C_{vs}}}, \quad (\text{III. 5. 22})$$

où $\overline{C_{vs}}(z, t) = \text{moy}[C_{vs}(x, y, z, t)]$. Ainsi les termes associés aux variations $\left(\frac{1}{\rho^{(0)}C_v} - \frac{1}{\rho^{(0)}\overline{C_{vs}}} \right)$ seront calculés explicitement, tandis que les termes en $\frac{1}{\rho^{(0)}\overline{C_{vs}}}$ seront traités implicitement.

5.2 Schéma numérique temporel

Les équations différentielles à résoudre sont de type :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = H(\phi), \quad \text{avec } \phi = (u \ w \ p)^T.$$

$H(\phi)$ est un opérateur de dérivée spatiale d'ordre 2. Cet opérateur est la somme d'un terme non linéaire $F(\phi)$, et d'un terme linéaire d'ordre 2, $G(\phi)$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = G(\phi) + F(\phi).$$

La discrétisation temporelle retenue dans notre étude est basée sur un schéma aux différences finies. Plus précisément, nous décidons d'adopter un schéma numérique semi-implicite de Runge-Kutta à 3 étapes dans une formulation à faible encombrement mémoire. La particularité de ce schéma est l'ajout d'un traitement de type Crank-Nicolson des termes linéaires visqueux. Le schéma est le suivant :

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \phi^n, \\
H_1 &= \Delta t_n F(\phi_0), \\
\phi_1 &= \phi_0 + \frac{1}{3}H_1 + \frac{1}{6}\Delta t_n (G(\phi_0) + G(\phi_1)), \\
H_2 &= \Delta t_n F(\phi_1) - \frac{5}{9}H_1, \\
\phi_2 &= \phi_1 + \frac{15}{16}H_2 + \frac{5}{24}\Delta t_n (G(\phi_1) + G(\phi_2)), \\
H_3 &= \Delta t_n F(\phi_2) - \frac{153}{128}H_2 \\
\phi_3 &= \phi_2 + \frac{8}{15}H_3 + \frac{1}{8}\Delta t_n (G(\phi_2) + G(\phi_3)), \\
\phi^{n+1} &= \phi_3.
\end{aligned} \tag{III. 5. 23}$$

Ce schéma est d'ordre 3 concernant les termes traités explicitement et 2 pour les termes traités implicitement (Boudesocque-Dubois *et al.* (2003)). Cependant, les splittings III. 5. 22 réduisent l'ordre de ce schéma à 1 (Sabbah (2002)).

Pour les équations complètes, le pas de temps Δt_n est calculé à l'aide de l'expression suivante (Boudesocque-Dubois *et al.* (2003), Guillard *et al.* (1992)) :

$$\begin{aligned}
\Delta t_n \leq & C \min_{i,j,k} \left[\frac{N_x}{2 L_x} \frac{|u_{i,j,k}|}{K_{advection}^{fourier}} + \frac{N_y}{2 L_y} \frac{|v_{i,j,k}|}{K_{advection}^{fourier}} + \frac{N_z}{|f'(\xi_k)|} \frac{|w_{i,j,k}|}{K_{advection/dirichlet}^{chebyshev}} \right. \\
& + D_{max} \frac{|f''(\xi_k)|}{|f'^3(\xi_k)|} \frac{N_z^2}{K_{advection/dirichlet}^{chebyshev}} \\
& + C_{ijk} \sqrt{\left(\frac{N_x}{2L_x K_{advection}^{fourier}} \right)^2 + \left(\frac{N_y}{2L_y K_{advection}^{fourier}} \right)^2 + \left(\frac{N_z^2}{f'(\xi_k) K_{advection/dirichlet}^{chebyshev}} \right)^2} \\
& \left. + D_{max} \left(\frac{N_x^2}{K_{diffusion}^{fourier} L_x^2} + \frac{N_y^2}{K_{advection}^{fourier} L_y^2} + \frac{N_z^4}{K_{diffusion/dirichlet}^{chebyshev} f'^2(\xi_k)} \right) \right]^{-1},
\end{aligned}
\tag{III. 5. 24}$$

$$\text{où, } C_{RK3E} = 1 - (4 + \sqrt{17})^{-1/3} + (4 + \sqrt{17})^{1/3} \approx 2.51275, \quad K_{advection}^{fourier} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$K_{diffusion}^{fourier} = \frac{\sqrt{C_{RK3E}}}{4\pi^2}, \quad K_{advection/dirichlet}^{chebyshev} = 7.39, \quad K_{diffusion/dirichlet}^{chebyshev} = 53.4, \quad \text{et}$$

$$D_{max} = \max \left[\max \left(\frac{4}{3 Re}, \frac{1}{Sc Re} \right) \max_{i,j,k} \left| \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s} \right|, \frac{\gamma_r}{Pr Re} \max_{i,j,k} \left| \frac{1}{\rho C_v} - \frac{1}{\rho C_{vs}} \right| \right].$$

C est la constante CFL et f représente la transformation de coordonnées de l'espace physique à l'espace spectral. De plus les constantes K dépendent du schéma Runge-Kutta, de l'équation différentielle considérée, de la discrétisation spatiale et des conditions aux limites. Le critère sur le pas de temps retenu couple à la fois l'advection et la diffusion. On remarque également la présence d'un terme dépendant de la vitesse du son représentative des ondes acoustiques. Dans le cas de l'AN, ce terme est donc négligé puisque les ondes sonores sont filtrées. La formule III. 5. 24 se réécrit pour l'AN :

$$\begin{aligned}
\Delta t_n \leq C \min_{i,j,k} & \left[\frac{N_x}{2 L_x} \frac{|u_{i,j,k}|}{K_{advection}^{fourier}} + \frac{N_y}{2 L_y} \frac{|v_{i,j,k}|}{K_{advection}^{fourier}} + \frac{N_z}{|f'(\xi_k)|} \frac{|w_{i,j,k}|}{K_{advection/dirichlet}^{chebyshev}} \right. \\
& + D_{max} \frac{|f''(\xi_k)|}{|f'^3(\xi_k)|} \frac{N_z^2}{K_{advection/dirichlet}^{chebyshev}} \\
& \left. + D_{max} \left(\frac{N_x^2}{K_{diffusion}^{fourier} L_x^2} + \frac{N_y^2}{K_{advection}^{fourier} L_y^2} + \frac{N_z^4}{K_{diffusion/dirichlet}^{chebyshev} f'^2(\xi_k)} \right) \right]^{-1},
\end{aligned}
\tag{III. 5. 25}$$

où,

$$D_{max} = \frac{\gamma_r}{Pr Re} \max \left| \frac{1}{\rho^{(0)} C_v} - \frac{1}{\rho^{(0)} C_{vs}} \right|.$$

Les autres constantes restent inchangées.

5.3 Critère d'adaptation dynamique multidomaine

Le code AMENOPHIS présente une adaptation automatique de la position des interfaces numériques et du paramètre de transformation de coordonnées de chaque sous-domaine, permettant ainsi de suivre la structure du développement de l'IRT au cours d'une simulation, de manière précise. Le but est donc de minimiser l'erreur d'interpolation. Pour cela, nous considérons une fonction test $f(z, t)$ telle que :

$$f(z, t) = \frac{\langle \rho \rangle}{max \langle \rho \rangle} + \frac{\langle T \rangle}{max \langle T \rangle} + \frac{\langle c \rangle}{max \langle c \rangle}, \tag{III. 5. 26}$$

où $\langle \phi \rangle = \langle \phi(z, t) \rangle$ est la valeur moyenne de ϕ suivant les directions x et y , et $max \langle \phi \rangle$ son maximum. La fonctionnelle globale sur tout le domaine de calcul Ω est donnée par la somme de chacun de ses N_{dom} sous-domaines, tel que :

$$J_2(f) = \sum_{i=1}^{N_{dom}} J_2(f_i). \tag{III. 5. 27}$$

De plus, à chaque cycle de calcul, cette fonction varie, la meilleure position des interfaces et les meilleurs paramètres de transformation de coordonnées ne sont donc recalculés que lorsque la variation de J_2^i dépasse un certain seuil. Pour cela, nous introduisons un critère ϵ (pratiquement ≥ 1) et la valeur de référence J_2^R au dernier remaillage. La recherche d'une nouvelle décomposition de domaine ne sera effectuée que si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\max_{1 \leq i \leq N_{dom}} \left| \frac{J_2(f_i)}{J_2^R} - 1 \right| \geq \epsilon. \quad (\text{III. 5. 28})$$

5.4 Initialisation des perturbations

L'étude la stabilité linéaire nous a permis de déterminer les fonctions propres de chaque fluide (*cf.* chapitre II section 5.6). Ces fonctions propres présentant une discontinuité au niveau de la pseudo-interface, il a fallu lisser ces profils à l'aide des fonctions de lissage représentées sur les figures I.3. La fonction courant ϕ du milieu a donc pour expression :

$$\phi(y, z, t) = H_+(z) \phi_H(y, z, t) + H_-(z) \phi_L(y, z, t),$$

où ϕ_H et ϕ_L sont données par les relations II. 5. 28. Les profils des vitesses et pression sont ainsi obtenues. La figure III.2 présentent les profils de la fonction courant, des vitesses verticale et horizontale et la pression retenue pour l'initialisation des perturbations dans le code AMENOPHIS. Il est important de noter qu'il est impératif que les conditions initiales en pression et en vitesse soient compatibles (Montigny-Rannou (1983), Deville *et al.* (1984)) et que la contrainte $\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u}) = 0$ soit vérifiée. En toute rigueur, la fluctuation de pression devrait être donnée par la résolution d'une équation de Poisson. Cependant par manque de temps, nous avons estimé que la fonction propre de la pression, donnée par l'étude de la stabilité linéaire serait une bonne approximation. Ceci dit, initialiser la fluctuation de pression par la solution d'une équation de Poisson fait partie des perspectives d'amélioration de la version anélastique du code AMENOPHIS.

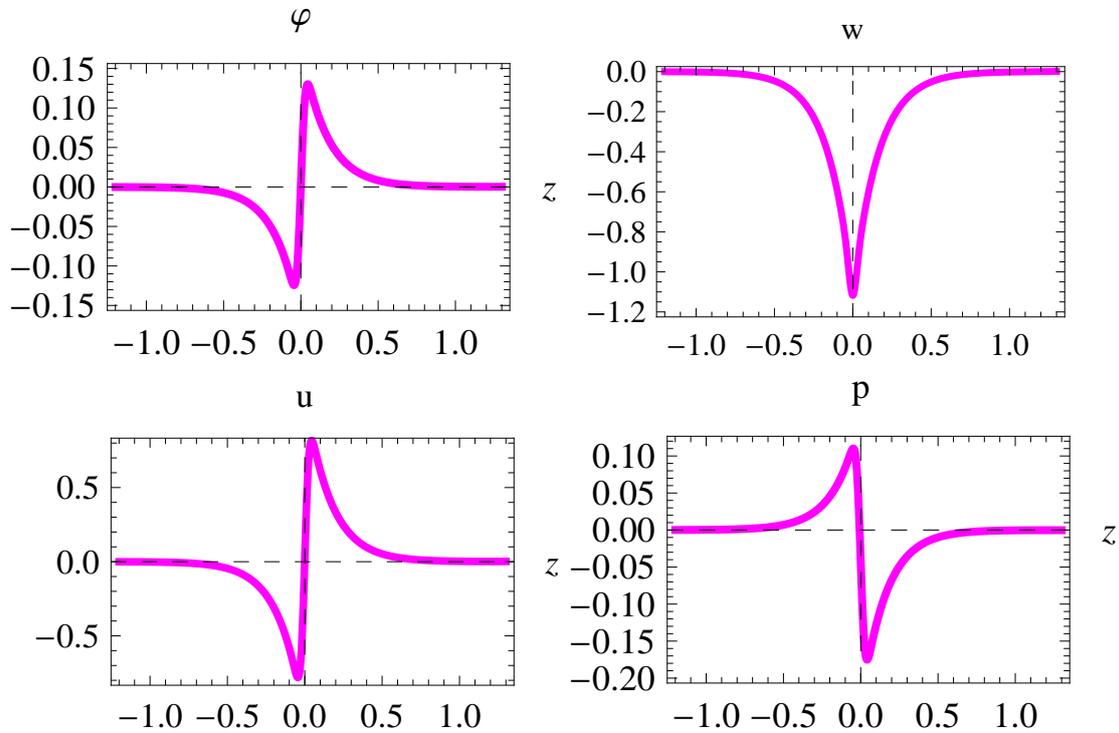


Figure III.2 – fonctions propres lissées de la fonction courant (ϕ), des composantes orthogonales de la vitesse (u) et verticale (w) et la pression (p), pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$.

De plus, les fonctions propres des vitesses vérifient la contrainte provenant de l'équation de conservation de la masse ($\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u}) = 0$), comme l'illustre la figure suivante.

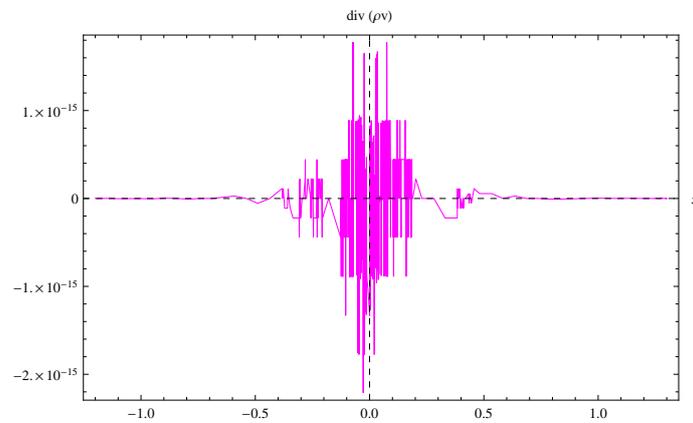


Figure III.3 – $\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u})$, pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$ à $t = 0$.

Ce chapitre a permis de détailler les méthodes spectrales et les algorithmes du code de calcul AMENOPHIS. La difficulté majeure du développement de la nouvelle version de AMENOPHIS, demeure le nouvel algorithme de résolution basé sur la méthode d'Uzawa.

Chapitre IV

Méthode d'Uzawa pour les équations de Navier-Sokes en approximation anélastique

La résolution effective des équations de Navier-Stokes en AN s'effectue par le problème de Stokes pour la partie implicite. Nous nous penchons donc sur l'étude du problème de Stokes issu des équations de Navier-Stokes privées de ses termes non linéaires. Ainsi le problème de Stokes généralisé a été résolu dans le cadre de l'approximation anélastique, pour une configuration à un seul fluide. Cette étude fait l'objet d'un article à paraître au « *Journal of Scientific Computing* » (cf. [annexe E](#)). L'implantation de l'option « anélastique » dans le code AMENOPHIS a demandé de nombreuses modifications. En effet, nous montrerons que la résolution en 3D des équations de Navier-Sokes en approximation anélastique rendait possible un découplage des vitesses en 3D. De plus, la méthode de décomposition de domaines présente une matrice d'influence différente de celle obtenue dans le cas de la résolution des équations complètes de Navier-Stokes (pour des fluides compressibles). Finalement, nous exposons la méthode d'Uzawa, souvent utilisée pour des fluides incompressibles, appliquée aux équations de Navier-Sokes en approximation anélastique. Il est important de noter que la méthode d'Uzawa est utilisable dans notre cas car la discrétisation spatiale est de type Tchebycheff dans une seule direction sinon elle serait trop coûteuse.

1 Modes propres du problème de Stokes en AN dans un canal plan infini

Cette partie est consacrée à la détermination de l'espace propre du problème de Stokes dans le cadre de l'AN. Le système d'équations régissant le problème de Stokes est formé des équations de Navier-Stokes, privé de son terme d'inertie $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. L'objectif est de démontrer l'ellipticité de l'AN et de calculer le spectre de l'opérateur associé. Cette étude est menée pour deux raisons. La première est qu'en montrant que les valeurs propres de cet opérateur sont toutes réelles et négatives, on s'assure que la solution s'éteint au fur et à mesure du temps s'il n'y a pas de source entretenue. Ce résultat est essentiel car il est lié aux propriétés de stabilité de l'approximation numérique. La deuxième raison, et c'est l'intérêt principal, est que cette analyse permet d'avoir un aperçu des solutions attendues dans le cadre de notre étude des équations complètes de Navier-Stokes privées de l'acoustique. En effet, les problèmes de Navier-Stokes peuvent se scinder en deux parties : une partie inhomogène et une partie homogène. La solution du problème inhomogène correspond à la solution particulière du système formé par les équations différentielles inhomogènes qui satisfait les conditions aux limites non homogènes. La solution du problème homogène peut être développée en modes propres de Stokes. En effet, une fois le gradient de densité lissé par la turbulence, il subsiste une turbulence qui décroît et peut être reconstituée à l'aide de quelques modes propres de Stokes.

1.1 Modèle physique

Nous considérons la configuration de Rayleigh-Taylor pour un seul fluide. Ce fluide qui présente une diffusivité thermique infinie, est par conséquent à température constante ($T = T^{(0)}$) et suit la loi d'état des gaz parfaits :

$$P = \rho R T^{(0)}. \tag{IV. 1. 1}$$

Le fluide est confiné, en présence d'une accélération constante $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, entre deux plans horizontaux infinis, distants de $2H$ (*cf.* figure IV.1). L'état de base du fluide est à l'équilibre hydrostatique. La pression et la densité de l'état de base ($p^{(0)}$ et $\rho^{(0)}$) sont reliés par la relation $\vec{\nabla} p^{(0)} = \rho^{(0)}(z) \vec{g}$. En considérant H , l'échelle de longueur, on

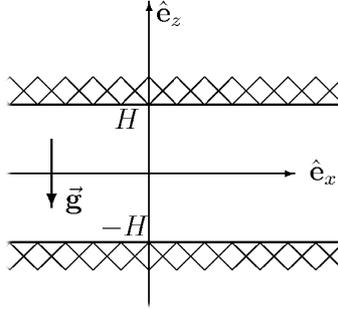


Figure IV.1 – Le canal plan infini dans la direction horizontale.

obtient la relation adimensionnée $d\rho^{(0)}/dz = -Sr \rho^{(0)} \vec{e}_z$, où $Sr = g H / R T^{(0)}$. Les états de base de la densité et de la pression présentent une dépendance exponentielle verticale de la stratification :

$$\rho^{(0)}(z) = p^{(0)}(z) = \exp(-Sr z). \quad (\text{IV. 1. 2})$$

Si $Sr = 0$, nous retrouvons la configuration d'un écoulement incompressible dans un canal plan infini (Orszag *et al.* (1986), Leriche & Labrosse (2007)). La relation I. 3. 21 issue de l'équation de conservation de la quantité de mouvement adimensionnée ne permet pas d'envisager cette limite à stratification nulle. C'est pourquoi nous décidons de considérer un nouvel adimensionnement.

1.2 Équations du modèle

Les équations de départ sont issues du système III. 5. 19 appliquée à la configuration de Rayleigh-Taylor pour un seul fluide. De ce fait, l'équation de concentration et de température sont abandonnées. Ce système d'équations de la dynamique dimensionnées devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho^{(0)} u_i' = 0, \\ \rho^{(0)} \frac{du_i'}{dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_j'} - \rho' g \delta_{i3}, \\ p' = \rho' R T^{(0)}, \end{cases} \quad (\text{IV. 1. 3})$$

avec :

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l'}{\partial x_l} \right).$$

Les échelles de référence retenues sont ρ_r pour la masse volumique, H pour les longueurs, $t_r = \rho_r H^2 / \mu$ pour le temps, (ce qui induit une échelle pour la vitesse $U_r = H / t_r$), et $p_r = \rho_r U_r^2$ pour la pression. La deuxième relation du système IV. 1. 3 se réécrit avec les grandeurs adimensionnées de la manière suivante :

$$\frac{\rho_r U_r}{t_r} \rho^{(0)} \frac{du_i}{dt} = - \frac{\rho_r U_r^2}{H} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu U_r}{H^2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho_r \rho g \delta_{i3},$$

soit :

$$\rho^{(0)} \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - Sr \rho \delta_{i3}.$$

Le système IV. 1. 3 devient après adimensionnement :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho^{(0)} u_i = 0, \\ \rho^{(0)} \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - Sr \rho \delta_{i3}, \\ p = \rho. \end{cases} \quad (\text{IV. 1. 4})$$

Les modes propres de Stokes ont ainsi été calculés dans l'article donné en [annexe B](#). Deux configurations ont été étudiées. Elles annulent toutes deux l'écoulement sur les plans limites horizontaux. En revanche, elles diffèrent par les conditions aux limites : l'une impose des conditions de non adhérence du fluide sur les bords du canal (cas (D), pour Dirichlet), et l'autre considère une tension de surface nulle (cas (N), pour Neumann). Ces études sont effectuées pour des nombres d'onde horizontaux $k = 0$, et $k = 2 \pi$. Cette analyse a permis de mettre en évidence certains aspects du problème de Stokes en AN.

1.3 Conclusion de l'étude

Dans un premier temps, l'ellipticité du problème a été démontrée. En effet, toutes les valeurs propres sont réelles et négatives, hormis une valeur propre nulle pour le cas (N). Cette dernière remarque, permet ainsi de développer un algorithme stable

pour la résolution des équations gouvernant l'IRT en AN. Nous remarquons que cette démonstration utilise une partie de la poussée d'Archimède, pour construire le problème de Stokes, contrairement à l'incompressible.

Les spectres numériques des opérateurs présentent tous les mêmes comportements. Les valeurs propres dont la valeur absolue est de faible amplitude convergent vers une enveloppe limite correspondant aux résultats analytiques. En revanche, les autres valeurs propres (celles dont la valeur absolue est importante) s'éloignent significativement des résultats analytiques. Le désaccord numérique-analytique croît avec le nombre d'onde (*cf.* figure IV.2, le spectre analytique correspond à $n = 1, \dots, 25$ et le spectre numérique au fréquences de coupure $N = 15, 20$ et 25).

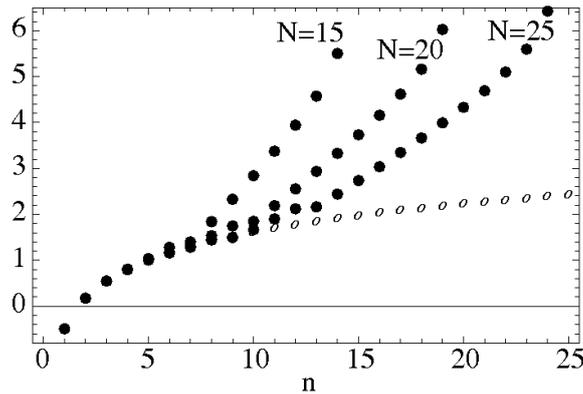


Figure IV.2 – Les spectres $\log_{10}(-\lambda(n))$ analytiques et numériques, pour $Sr = 5$ pour le cas (D) et $k = 0$.

Les modes propres sont formés d'une pile de cellules (ou de couches horizontales de vitesse opposée quand $k = 0$) localisée dans la partie basse du canal, laissant une zone morte dans la partie supérieure du canal (*cf.* figure IV.3). L'extension de cette zone morte se réduit avec la fréquence spatiale du mode propre. Par cette localisation au fond du canal, les modes propres ont accès aux plus grands gradients verticaux de la pression hydrostatique et de la densité du fluide, cela réduit alors au minimum la diffusivité du mouvement effectif de ce dernier et, par conséquent, le taux d'amortissement temporel des modes propres. En résumé, plus le paramètre de stratification est important, plus la durée de vie des modes propres anélastiques est

grande. Les modes propres des cas (D) et (N) ont des profils de vitesse similaires. En revanche, les pressions dynamiques se comportent différemment. La connaissance des modes propres de Stokes anélastiques nous donne un aperçu de la dynamique de la dernière étape du développement de l'IRT. Durant cette phase, le moteur s'est pratiquement éteint et l'écoulement se meurt.

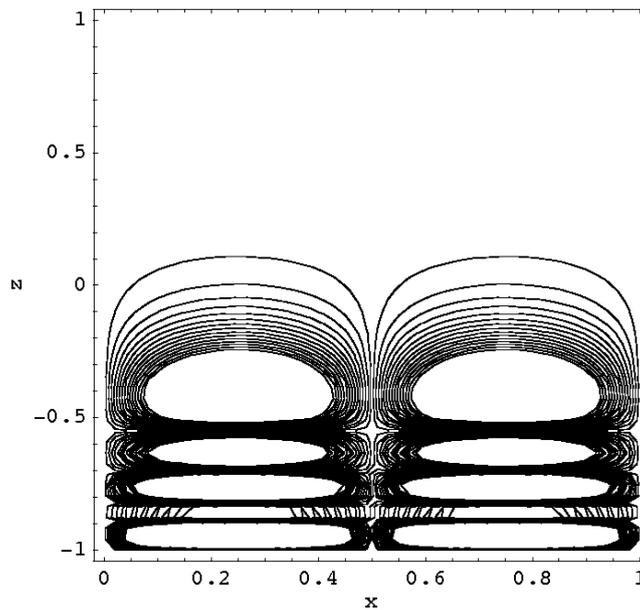


Figure IV.3 – Lignes de contour de la fonction de courant pour le cas D et $Sr = 5$ tracées pour le mode propre $n = 5$.

1.4 Invariance du problème de Stokes

Le problème de Stokes, défini dans l'article par les équations (11) et (12), s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda \rho_0(z) \vec{v} &= - \left(\vec{\nabla} + Sr \hat{e}_z \right) p + \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= Sr w, \text{ avec : } \rho_0(z) = p_0(z) = \exp(-Sr z). \end{aligned} \quad (\text{IV. 1. 5})$$

Nous montrons, dans la suite, l'invariance du problème de Stokes à l'addition de la pression $\alpha p_0(z)$. Pour cela, considérons la transformation : $\tilde{p} = p + \alpha p_0(z)$. L'état

hydrostatique vérifie :

$$\frac{dp_0(z)}{dz} = -Sr \rho_0(z).$$

Cela implique que :

$$\left(\vec{\nabla} + Sr \hat{e}_z\right) \tilde{p} = \left(\vec{\nabla} + Sr \hat{e}_z\right) p + \left(\vec{\nabla} + Sr \hat{e}_z\right) \alpha p_0(z) = \left(\vec{\nabla} + Sr \hat{e}_z\right) p \quad (\text{IV. 1. 6})$$

Si p est solution de IV. 1. 5, alors \tilde{p} l'est aussi, il y donc invariance de la pression à l'addition de $\alpha p_0(z)$ du problème de Stokes. Il est intéressant de noter la différence avec une configuration de fluides incompressibles, où l'invariance est à une constante près, ce qui fait la particularité du problème de Stokes en AN.

2 Découplage des vitesses en 3D

Nous montrons dans la suite, que déterminer une solution dans le cas 3D des équations issues de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (qui couplent les trois composantes de vitesse et la pression) se réduit à une résolution de deux systèmes d'équations bien découplés. En effet la manipulation de différentes combinaisons linéaires des composantes horizontales des vitesses permet de dérouler un système composé de la contrainte issue de la conservation de la masse et deux équations couplant la composante verticale de la vitesse, une combinaison des deux composantes horizontales et la pression. La méthode d'Uzawa est celle retenue pour résoudre ce système. En outre une équation d'Helmholtz, dont l'inconnue est une seconde combinaison linéaire des composantes horizontales de la vitesse, est à résoudre (découplée des autres grandeurs physiques). Dans la suite, nous nous consacrons au développement de ces deux systèmes modifiés. L'équation de la quantité de mouvement donnée par la deuxième équation du système II. 4. 13 et la contrainte dérivant

de la conservation de la masse s'écrivent, dans le plan (x, y, z) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{(0)} \frac{\partial u}{\partial t} + A_u \frac{\partial p}{\partial x} - B_u \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = -\rho^{(0)} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \\ \rho^{(0)} \frac{\partial v}{\partial t} + A_u \frac{\partial p}{\partial y} - B_u \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} = -\rho^{(0)} u_j \frac{\partial v}{\partial x_j}, \\ \rho^{(0)} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(A_u \frac{\partial}{\partial z} - C_{u3} \frac{\rho^{(0)}}{p^{(0)}} \right) - B_u \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} \\ \qquad \qquad \qquad = -\rho^{(0)} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} - C_{u3} \rho^{(0)} \left(\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + L_\rho^{-1} w = 0, \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 7})$$

avec : $L_\rho^{-1} = \frac{1}{\rho^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)}}{dz}$. Ce système est muni des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, y, z = z_{inf}, t) = 0, \quad w(x, y, z = z_{sup}, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z = z_{inf}, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z = z_{sup}, t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z = z_{inf}, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z = z_{sup}, t) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 8})$$

Nous nous intéressons dans un premier temps aux contraintes visqueuses, pour cela développons les termes $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, pour $i = 1, 2, 3$. On sait que :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right].$$

Pour $i = 1$, ce terme s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}.$$

En développant cette dernière expression en fonction des dérivées partielles des composantes des vitesses, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right],$$

qui devient, après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u. \quad (\text{IV. 2. 9})$$

En utilisant le même le procédé pour $i = 2$, on trouve :

$$\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} = \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v. \quad (\text{IV. 2. 10})$$

De même, pour $i = 3$, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z} \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right].$$

Après simplification, ce terme devient :

$$\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} = \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w. \quad (\text{IV. 2. 11})$$

Le système IV. 2. 7 devient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B_u}{A_u} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad = -u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad = -u_j \frac{\partial v}{\partial x_j}, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) p - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \right] \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad = -u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} - C_{u3} \rho^{(0)} \left(\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right), \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + L_\rho^{-1} w = 0.
 \end{array} \right. \tag{IV. 2. 12}$$

Les conditions aux limites sont toujours données par IV. 2. 8. Comme explicité dans la section 5.2, les trois premières équations différentielles du premier ordre sont approchées par une méthode de Runge-Kutta semi-implicite à 3 étapes dans une formulation à faible encombrement mémoire. Développons la première équation du système précédent (en u) pour chaque étape de ce schéma :

$$\begin{aligned}
 u^{(q+1)} &= u^{(q)} + \beta_{q+1} \mathcal{H}^{q+1} + \chi_{q+1} \Delta t_n \left[\mathcal{G} \left(u^{(q)} \right) + \mathcal{G} \left(u^{(q+1)} \right) \right], \\
 \mathcal{H}^{q+1} &= -\alpha_{q+1} \mathcal{H}^q + \Delta t_n \mathcal{F} \left(u^{(q)} \right).
 \end{aligned} \tag{IV. 2. 13}$$

Les différents coefficients α , χ et β sont donnés par le système III. 5. 23, et :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} \left(u^{(q)} \right) &= \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ -\frac{\partial p^{(q)}}{\partial x} + \frac{B_u}{A_u} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u^{(q)} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v^{(q)}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w^{(q)}}{\partial x \partial z} \right] \right\}, \\
 \mathcal{F} \left(u^{(q)} \right) &= -u_j^{(q)} \frac{\partial u^{(q)}}{\partial x_j}.
 \end{aligned}$$

La relation IV. 2. 13 peut s'écrire :

$$u^{(q+1)} - \chi_{q+1} \Delta t_n \mathcal{G} \left(u^{(q+1)} \right) = u^{(q)} + \beta_{q+1} \mathcal{H}^{q+1} + \chi_{q+1} \Delta t_n \mathcal{G} \left(u^{(q)} \right),$$

En posant $\mathcal{C}_{q+1} = \frac{1}{\chi_{q+1} \Delta t_n}$ et en multipliant l'équation précédente par $\frac{\rho^{(0)}}{A_u}$, l'équation en u à résoudre pour chaque étape de la méthode devient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} u^{(q+1)} + \frac{\partial p^{(q+1)}}{\partial x} \\ - \frac{B_u}{A_u} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u^{(q+1)} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v^{(q+1)}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w^{(q+1)}}{\partial x \partial z} \right] = S_u^q, \end{aligned} \quad (\text{IV. 2. 14})$$

avec :

$$S_u^q = \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \left[u^{(q)} + \beta_{q+1} \mathcal{H}^{q+1} + \chi_{q+1} \Delta t_n \mathcal{G} \left(u^{(q)} \right) \right]. \quad (\text{IV. 2. 15})$$

De même, l'équation en v devient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} v^{(q+1)} + \frac{\partial p^{(q+1)}}{\partial y} \\ - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u^{(q+1)}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v^{(q+1)} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w^{(q+1)}}{\partial y \partial z} \right] = S_v^q, \end{aligned} \quad (\text{IV. 2. 16})$$

où :

$$\begin{aligned} S_v^q &= \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \left[v^{(q)} + \beta_{q+1} \mathcal{H}^{q+1} + \chi_{q+1} \Delta t_n \mathcal{G} \left(v^{(q)} \right) \right], \\ \mathcal{G} \left(v^{(q)} \right) &= \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ -\frac{\partial p^{(q)}}{\partial y} + \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u^{(q)}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v^{(q)} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w^{(q)}}{\partial y \partial z} \right] \right\}, \\ \mathcal{F} \left(v^{(q)} \right) &= -u_j^{(q)} \frac{\partial v^{(q)}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 2. 17})$$

Et finalement, l'équation en w devient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} w^{(q+1)} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) p^{(q+1)} \\ - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u^{(q+1)}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v^{(q+1)}}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w^{(q+1)} \right] = S_w^q. \end{aligned} \quad (\text{IV. 2. 18})$$

où :

$$\begin{aligned} S_w^q &= \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \left[w^{(q)} + \beta_{q+1} \mathcal{H}^{q+1} + \chi_{q+1} \Delta t_n \mathcal{G} \left(w^{(q)} \right) \right], \\ \mathcal{G} \left(w^{(q)} \right) &= - \frac{A_u}{\rho^{(0)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) p^{(q)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u^{(q)}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v^{(q)}}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w^{(q)} \right] \right\}, \\ \mathcal{F} \left(w^{(q)} \right) &= -u_j^{(q)} \frac{\partial w^{(q)}}{\partial x_j} - C_{u3} \rho^{(0)} \left(\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV. 2. 19})$$

Le système IV. 2. 12 devient donc, pour chaque étape Runge-Kutta :

$$\begin{cases} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} u + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B_u}{A_u} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] = S_u, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} v + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] = S_v, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} w + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) p \\ \quad - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \right] = S_w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + L_\rho^{-1} w = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 2. 20})$$

Remarque : pour alléger la notation on note ϕ pour $\phi^{(q+1)}(x, y, z)$, $\phi = (u \ v \ w \ p)^T$ et $S_{u,v,w}$ pour $S_{u,v,w}^{(q)}(x, y, z)$

Ce système est toujours doté des conditions aux limites données par les relations

IV. 2. 8. La résolution du problème complet s'effectuant dans l'espace de Fourier, il nous faut développer ce système d'équations dans ce même espace, soit :

$$\begin{pmatrix} p(x, y, z, t) \\ u_i(x, y, z, t) \\ S_{u,v,w}(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \sum_{k=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{h=-N_y/2}^{N_y/2-1} \begin{pmatrix} \hat{p}_{k,h}(z) \\ \hat{u}_{i\ k,h}(z) \\ \hat{S}_{u,v,w\ k,h}(z) \end{pmatrix} e^{i(kx+hy)} .$$

IV. 2. 19 a pour expression dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \hat{u}_{k,h} + ik \hat{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} \left[\left(-\frac{4}{3} k^2 - h^2 + D^2 \right) \hat{u}_{k,h} - \frac{1}{3} kh \hat{v}_{k,h} + \frac{ik}{3} D \hat{w}_{k,h} \right] = \hat{S}_{u\ k,h}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \hat{v}_{k,h} + ih \hat{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} \left[-\frac{1}{3} kh \hat{u}_{k,h} + \left(-k^2 - \frac{4}{3} h^2 + D^2 \right) \hat{v}_{k,h} + \frac{ih}{3} D \hat{w}_{k,h} \right] = \hat{S}_{v\ k,h}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \hat{w}_{k,h} + \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \hat{p}_{k,h} \\ - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{ik}{3} D \hat{u}_{k,h} + \frac{ih}{3} D \hat{v}_{k,h} + \left(-k^2 - h^2 + \frac{4}{3} D^2 \right) \hat{w}_{k,h} \right] = \hat{S}_{w\ k,h}, \\ ik \hat{u}_{k,h} + ih \hat{v}_{k,h} + D \hat{w}_{k,h} + L_\rho^{-1} \hat{w}_{k,h} = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 2. 21})$$

Remarque : On note la dérivée spatiale $\frac{d}{dz} : D$.

Ce système est muni des conditions aux limites dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} \hat{w}_{k,h}(z = z_{inf}) = \hat{w}_{k,h}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \hat{u}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \hat{u}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \hat{v}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 2. 22})$$

La présence de termes croisés dans les opérateurs implique que ces opérateurs deviennent complexes. On se retrouve ainsi avec un couplage entre parties réelle et imaginaire du spectre du champ de vitesse. Cette dernière remarque nous incite à effectuer un changement de variables permettant de manipuler un opérateur discret réel et de ne pas alourdir le problème avec un couplage des parties réelles et imaginaires. Pour cela, considérons le changement de variables suivant (inspiré de Sabbah (2002)) :

$$\widehat{w}_{k,h} = \widetilde{w}_{k,h}, \quad \widehat{p}_{k,h} = \widetilde{p}_{k,h}, \quad \widetilde{u}_{k,h} = i\widehat{u}_{k,h} \quad \text{et} \quad \widetilde{v}_{k,h} = i\widehat{v}_{k,h}$$

Le système IV. 2. 21 devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \widetilde{u}_{k,h} - k \widetilde{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} \left[\left(-\frac{4}{3}k^2 - h^2 + D^2 \right) \widetilde{u}_{k,h} - \frac{1}{3}kh \widetilde{v}_{k,h} - \frac{k}{3} D \widetilde{w}_{k,h} \right] = \widetilde{S}_{u \ k,h}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \widetilde{v}_{k,h} - h \widetilde{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} \left[-\frac{1}{3}kh \widetilde{u}_{k,h} + \left(-k^2 - \frac{4}{3}h^2 + D^2 \right) \widetilde{v}_{k,h} - \frac{h}{3} D \widetilde{w}_{k,h} \right] = \widetilde{S}_{v \ k,h}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \widetilde{w}_{k,h} + \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \widetilde{p}_{k,h} \\ \quad - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{k}{3} D \widetilde{u}_{k,h} + \frac{h}{3} D \widetilde{v}_{k,h} + \left(-k^2 - h^2 + \frac{4}{3} D^2 \right) \widetilde{w}_{k,h} \right] = \widetilde{S}_{w \ k,h}, \\ k \widetilde{u}_{k,h} + h \widetilde{v}_{k,h} + D \widetilde{w}_{k,h} + L_\rho^{-1} \widetilde{w}_{k,h} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 23})$$

On note :

$$\widetilde{S}_u = i\widehat{S}_u, \quad \widetilde{S}_v = i\widehat{S}_v \quad \text{et} \quad \widetilde{S}_w = \widehat{S}_w.$$

Les conditions aux limites se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{w}_{k,h}(z = z_{inf}) = \widetilde{w}_{k,h}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{u}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \widetilde{u}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{v}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \widetilde{v}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 24})$$

Il est utile de séparer les cas où $k = h = 0$ des autres, puisque dans ce dernier, les équations se simplifient significativement.

Si $k \neq 0$ ou $h \neq 0$, on peut insérer la contrainte du caractère solénoïdal de la quantité de mouvement $\rho^{(0)} \vec{u}$ (dernière du système IV. 2. 23), tout en gardant les mêmes conditions aux limites IV. 2. 24 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{u}_{k,h} - k \tilde{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} (D^2 - k^2 - h^2) \tilde{u}_{k,h} - \frac{B_u k}{A_u 3} L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h} = \tilde{S}_{u \ k,h}, \\
\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{v}_{k,h} - h \tilde{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} (D^2 - k^2 - h^2) \tilde{v}_{k,h} - \frac{B_u h}{A_u 3} L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h} = \tilde{S}_{v \ k,h}, \\
\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{w}_{k,h} + \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{k,h} \\
\quad - \frac{B_u}{A_u} \left(D^2 - k^2 - h^2 - \frac{1}{3} (DL_\rho^{-1} + L_\rho^{-1}D) \right) \tilde{w}_{k,h} = \tilde{S}_{w \ k,h}, \\
k \tilde{u}_{k,h} + h \tilde{v}_{k,h} + D \tilde{w}_{k,h} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h} = 0.
\end{array} \right. \tag{IV. 2. 25}$$

Désormais, nous nous consacrons à la réécriture de ce système en effectuant des combinaisons linéaires. En multipliant la première équation du système IV. 2. 25 par k et en y ajoutant la seconde multipliée par h , on obtient une première équation en $\tilde{U}_{k,h}$. Sur le même principe, si on multiplie la première équation par h et qu'on en soustrait la seconde multipliée par k , on obtient une seconde équation en $\tilde{V}_{k,h}$. La troisième équation reste la même. La quatrième est réécrite avec $\tilde{U}_{k,h}$. Le nouveau système se réécrit en deux systèmes distincts, où les équations en $\tilde{U}_{k,h}$ et $\tilde{V}_{k,h}$ sont découplées, pour $|K| \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{U}_{k,h} - |K| \tilde{p}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} (D^2 - |K|^2) \tilde{U}_{k,h} - \frac{B_u |K|}{A_u 3} L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h} = \tilde{S}_{U \ k,h}, \\
\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{w}_{k,h} + \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{k,h} \\
\quad - \frac{B_u}{A_u} \left(D^2 - |K|^2 - \frac{1}{3} (DL_\rho^{-1} + L_\rho^{-1}D) \right) \tilde{w}_{k,h} = \tilde{S}_{w \ k,h}, \\
|K| \tilde{U}_{k,h} + D \tilde{w}_{k,h} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h} = 0,
\end{array} \right. \tag{IV. 2. 26}$$

$$\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{V}_{k,h} - \frac{B_u}{A_u} (D^2 - |K|^2) \tilde{V}_{k,h} = \tilde{S}_{V \ k,h}. \tag{IV. 2. 27}$$

On note :

$$\tilde{S}_{U_{k,h}} = \frac{k}{|K|} \tilde{S}_{u_{k,h}} + \frac{h}{|K|} \tilde{S}_{v_{k,h}} \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_{V_{k,h}} = \frac{h}{|K|} \tilde{S}_{u_{k,h}} - \frac{k}{|K|} \tilde{S}_{v_{k,h}}$$

De plus,

$$|K| \tilde{U}_{k,h} = k \tilde{u}_{k,h} + h \tilde{v}_{k,h}, \quad |K| \tilde{V}_{k,h} = h \tilde{u}_{k,h} - k \tilde{v}_{k,h} \quad \text{et} \quad |K|^2 = k^2 + h^2.$$

On complète ces équations avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{w}_{k,h}(z = z_{inf}) = \tilde{w}_{k,h}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \tilde{U}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \tilde{V}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 2. 28})$$

Ici, on remarque que l'équation en $\tilde{w}_{k,h}$, n'est pas modifiée. Pour résoudre ce système, on détermine $\tilde{U}_{k,h}$, $\tilde{w}_{k,h}$ et $\tilde{p}_{k,h}$ par la méthode d'Uzawa (détaillée dans la section 4), puis $\tilde{V}_{k,h}$ est déterminée par la résolution d'un problème d'Helmholtz. Une fois $\tilde{U}_{k,h}$ et $\tilde{V}_{k,h}$ obtenus on peut déterminer $\tilde{u}_{k,h}$ et $\tilde{v}_{k,h}$ par le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{k,h} = \frac{k}{|K|} \tilde{U}_{k,h} + \frac{h}{|K|} \tilde{V}_{k,h}, \\ \tilde{v}_{k,h} = \frac{h}{|K|} \tilde{U}_{k,h} - \frac{k}{|K|} \tilde{V}_{k,h}. \end{cases} \quad (\text{IV. 2. 29})$$

Concernant la configuration 2D, le système IV. 2. 26 ne change pas. Cependant, le système IV. 2. 27 n'a plus lieu d'être puisque $\tilde{v}_{k,h} = 0$.

Si $h = k = 0$, les conditions aux limites IV. 2. 28 restent inchangées mais le système IV. 2. 25 se simplifie puisque la contrainte dérivant de l'équation de conservation de la masse revient à $\tilde{w}_{0,0} = 0$, ce qui permet de découpler la vitesse $\tilde{w}_{0,0}$ et $\tilde{p}_{0,0}$. Ce

système devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} D^2 \right] \tilde{u}_{0,0} = \tilde{S}_{u \ 0,0}, \\ \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} D^2 \right] \tilde{v}_{0,0} = \tilde{S}_{v \ 0,0}, \\ \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{0,0} = \tilde{S}_{w \ 0,0}, \\ \tilde{w}_{0,0} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 30})$$

Ici les 4 équations sont bien découplées et de type Helmholtz pour celles en $\tilde{u}_{0,0}$ et $\tilde{v}_{0,0}$. Dans cette configuration, il faut résoudre $\tilde{p}_{0,0}$ en multipliant l'inverse de l'opérateur $\left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right)$ par le terme source de la troisième relation du système précédent, et les vitesses $\tilde{u}_{0,0}$ et $\tilde{v}_{0,0}$ sont obtenues en faisant le produit de l'inverse de l'opérateur d'Helmholtz et la source pour chaque composante, et $\tilde{w}_{0,0} = 0$. Concernant la configuration 2D, le système d'équations à résoudre se simplifie en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} D^2 \right] \tilde{u}_{0,0} = \tilde{S}_{u \ 0,0}, \\ \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{0,0} = \tilde{S}_{w \ 0,0}, \\ \tilde{w}_{0,0} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 2. 31})$$

Le principe de résolution est le même.

3 Méthode de décomposition de domaine

Comme il a été mentionné précédemment, la présence de zones de forts gradients rencontrées lors d'une instabilité de Rayleigh-Taylor, diminue fortement l'efficacité des méthodes spectrales qui sont très précises pour des solutions régulières. Le couplage d'une technique de décomposition de domaine et d'une transformation de coordonnées dans chaque sous-domaine permet ainsi d'adapter le maillage à la rai-

deur de l'écoulement. La solution est bien représentée dans l'espace physique en utilisant une approximation polynomiale modérée car la transformation de coordonnées permet une distribution plus souple des points de collocation. Néanmoins la technique de décomposition de domaine est la principale responsable de la précision du code AMENOPHIS. Selon la nature de l'équation différentielle, le raccord des solutions aux interfaces de chaque domaine diffère. En effet si l'équation différentielle est d'ordre 1, la solution se doit d'être continue, alors que si elle est de deuxième ordre, la dérivée normale de la solution est imposée continue également (cf. Chandrasekhar (1961), chapitre 13).

3.1 Conditions de raccord

Il est donc nécessaire de déterminer des conditions de transmission au niveau de l'interface de deux sous-domaines adjacents notés Ω_i et Ω_{i+1} (cf. III.1). Les vitesses doivent être continues dans l'espace de Fourier : $\vec{u}^i(z_i) = \vec{u}^{i+1}(z_i)$. Cette condition s'écrit dans l'espace de Fourier pour chaque étape du schéma RK3SE2 de temps (après différentes combinaisons linéaires (cf. section 4) et changements de variable) :

$$\begin{cases} \tilde{U}_{k,h}^i(z_i) = \tilde{U}_{k,h}^{i+1}(z_i), \\ \tilde{w}_{k,h}^i(z_i) = \tilde{w}_{k,h}^{i+1}(z_i) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N_{dom} - 1). \quad (\text{IV. 3. 32})$$

Soit $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes tel que : $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)$ et \vec{n} le vecteur normal unitaire à l'interface orienté de Ω_i vers Ω_{i+1} , le tenseur des contraintes projeté sur ce même vecteur unitaire s'écrit :

$$df_k = \sigma_{k3} dS \vec{n} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{IV. 3. 33})$$

Cette contrainte s'écrit donc dans l'espace de Fourier pour chaque étape du schéma RK3SE2 de temps (après le changement de variable cf. section 4) :

$$\begin{aligned}
df_1 &= \mu \left(k \tilde{u}_{k,h}^i + \frac{\partial \tilde{w}_{k,h}^i}{\partial z} \right) dS \vec{n}, \\
df_2 &= \mu \left(h \tilde{v}_{k,h}^i + \frac{\partial \tilde{w}_{k,h}^i}{\partial z} \right) dS \vec{n}, \\
df_3 &= \left[-\tilde{p}_{k,h}^i + \frac{2\mu}{3} \left(2 \frac{\partial \tilde{u}_{k,h}^i}{\partial z} - k \tilde{w}_{k,h}^i \right) \right] dS \vec{n}.
\end{aligned} \tag{IV. 3. 34}$$

df_1 , df_2 et df_3 doivent être continues, cette contrainte se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{k,h}^i(z_i) &= \tilde{U}_{k,h}^{i+1}(z_i), \\
\tilde{w}_{k,h}^i(z_i) &= \tilde{w}_{k,h}^{i+1}(z_i), \\
\frac{\partial \tilde{U}_{k,h}^i}{\partial z}(z_i) &= \frac{\partial \tilde{U}_{k,h}^{i+1}}{\partial z}(z_i), \\
\frac{\partial \tilde{w}_{k,h}^i}{\partial z}(z_i) &= \frac{\partial \tilde{w}_{k,h}^{i+1}}{\partial z}(z_i) \quad (i = 1, \dots, N_{dom} - 1),
\end{aligned} \tag{IV. 3. 35}$$

et :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{k,h}^i(z_i) &= \tilde{V}_{k,h}^{i+1}(z_i), \\
\frac{\partial \tilde{V}_{k,h}^i}{\partial z}(z_i) &= \frac{\partial \tilde{V}_{k,h}^{i+1}}{\partial z}(z_i) \quad (i = 1, \dots, N_{dom} - 1).
\end{aligned} \tag{IV. 3. 36}$$

De plus, la contrainte $div(\rho^{(0)}(\vec{u})) = 0$ qui se réécrit dans l'espace de Fourier $|K| \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)} + D\tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} = 0$, implique que $D\tilde{w}_{k,h}^{(q+1)}$ est continue. Ce qui revient à imposer la condition de raccord suivante :

$$\tilde{p}_{k,h}^i(z_i) = \tilde{p}_{k,h}^{i+1}(z_i), \quad (i = 1, \dots, N_{dom} - 1). \tag{IV. 3. 37}$$

3.2 Méthode de la matrice d'influence appliquée au système couplé en vitesse/pression

On considère le système d'équations, composé de la quantité de mouvement et de la contrainte sur le champ de vitesse, à résoudre de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)} = |K| \tilde{p}_{k,h}^{(q+1)} + \frac{B_u}{A_u} \left[(D^2 - |K|^2) \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)} + \frac{|K|}{3} L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} \right] \\ \quad + \tilde{S}_{U_{k,h}}^q \delta_{0s}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} = \left(-D + \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{k,h}^{(q+1)} + \frac{B_u}{A_u} (D^2 - |K|^2) \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} \\ \quad - \frac{B_u}{3 A_u} (DL_\rho^{-1} + L_\rho^{-1}D) \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} + \tilde{S}_{w_{k,h}}^q \delta_{0s}, \\ |K| \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)} + D \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)} = 0, \\ \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)}(z = z_{inf}) = 0, \quad \tilde{U}_{k,h}^{(q+1)}(z = z_{sup}) = 0, \\ \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)}(z = z_{inf}) = 0, \quad \tilde{w}_{k,h}^{(q+1)}(z = z_{sup}) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 3. 38})$$

On peut appliquer la méthode de décomposition de domaine au système IV. 3. 38. Le domaine de calcul $\Omega = [z_{inf}, z_{sup}]$ est découpé en N_{dom} sous-domaines, sans recouvrement, et tel que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_{dom}} \Omega_i$, où $\Omega_i = [z_{i-1}, z_i]$, $i = 1, \dots, N_{dom}$, avec $z_0 = z_{inf}$ et $z_N = z_{sup}$, comme l'illustre la figure III.1.

Étant donné que le problème est linéaire, ses solutions peuvent s'écrire comme la superposition des solutions de 5 problèmes élémentaires (Pulicani (1988a)). On pose :

$$\tilde{\phi}_{k,h}^i = \tilde{\phi}_{k,h}^{i(0)} + \sum_{s=1}^4 \lambda_s^i \tilde{\phi}_{k,h}^{i(s)}, \quad \text{avec } \tilde{\phi}_{k,h}^i = \left(\tilde{U}_{k,h}^i \quad \tilde{w}_{k,h}^i \quad \tilde{p}_{k,h}^i \right)^T, \quad (i = 1, \dots, N_{dom}) \quad (\text{IV. 3. 39})$$

Pour alléger l'écriture, l'exposant $(q + 1)$, n'apparaît plus, mais chaque solution $\tilde{\phi}_{k,h}^i$ représente la solution dans l'espace de Fourier, pour $|K| = k^2 + h^2 \neq 0$, au pas de temps $(q + 1)$. $\tilde{\phi}_{k,h}^{i(0)}$ est solution du problème non homogène en équation mais homogène en conditions aux limites, tandis que les $\tilde{\phi}_{k,h}^{i(s)}$ ($s = 1, 2, 3, 4$) sont solutions

des problèmes homogènes en équation mais non homogènes en conditions aux limites du problème IV. 3. 38 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{U}_{k,h}^{i(s)} = |K| \tilde{p}_{k,h}^{i(s)} + \frac{B_u}{A_u} \left[(D^2 - |K|^2) \tilde{U}_{k,h}^{i(s)} + \frac{|K|}{3} L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} \right] \\ \quad + \tilde{S}_{U_{k,h}}^{i(s)} \delta_{0s}, \\ \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} = \left(-D + \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{k,h}^{i(s)} + \frac{B_u}{A_u} (D^2 - |K|^2) \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} \\ \quad - \frac{B_u}{3 A_u} (D L_\rho^{-1} + L_\rho^{-1} D) \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} + \tilde{S}_{w_{k,h}}^{i(s)} \delta_{0s}, \\ |K| \tilde{U}_{k,h}^{i(s)} + D \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{i(s)} = 0, \\ \tilde{U}_{k,h}^{i(s)}(z = z_{i-1}) = \delta_{1s}, \quad \tilde{U}_{k,h}^{i(s)}(z = z_i) = \delta_{2s}, \\ \tilde{w}_{k,h}^{i(s)}(z = z_{i-1}) = \delta_{3s}, \quad \tilde{w}_{k,h}^{i(s)}(z = z_i) = \delta_{4s} \quad (i = 1, \dots, N_{dom}), (s = 0, 1, 2, 3, 4). \end{array} \right. \quad (\text{IV. 3. 40})$$

Ce système d'équations est résolu sur tous les sous-domaines. L'idée directrice est de construire une matrice d'influence traduisant les conditions de continuité de la solution aux interfaces numériques et des conditions aux limites physiques. Les coefficients λ_s^i sont ainsi déterminés à l'aide des conditions de raccord à chaque interface z_i et des conditions aux limites physiques du domaine entier. L'inversion du système linéaire associé à cette matrice d'influence permet de déterminer les valeurs à imposer à l'interface pour assurer la régularité de la solution.

3.3 Matrice d'influence

La décomposition en sous domaines conduit à la résolution de 5 sous-problèmes (IV. 3. 40) dans chaque sous-domaine Ω_i . Les conditions de raccord données par IV. 3. 35 et IV. 3. 37, complétées par les conditions aux limites du domaine entier permettent de dérouler un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_s^i . Dans la suite, on note $\tilde{\phi}_{k,h}^{i(s)} : \phi_s^i$, la continuité des fonctions donne les relations

suivantes, avec ($i = 1, \dots, N_{dom} - 1$) :

$$\begin{cases} \lambda_2^i = \lambda_1^{i+1}, \\ \lambda_4^i = \lambda_3^{i+1}, \\ \lambda_1^i p_1^i(z_i) + \lambda_1^{i+1} [p_2^i(z_i) - p_1^{i+1}(z_i)] - \lambda_1^{i+2} p_2^{i+1}(z_i) \\ + \lambda_3^i p_3^i(z_i) + \lambda_3^{i+1} [p_4^i(z_i) - p_3^{i+1}(z_i)] - \lambda_3^{i+2} p_4^{i+1}(z_i) = p_0^{i+1}(z_i) - p_0^i(z_i). \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 41})$$

La continuité de la dérivée de la vitesse horizontale donne la relation suivante :

$$\begin{cases} \lambda_1^i \frac{\partial U_1^i}{\partial z}(z_i) + \lambda_1^{i+1} \left[\frac{\partial U_2^i}{\partial z}(z_i) - \frac{\partial U_1^{i+1}}{\partial z}(z_i) \right] - \lambda_1^{i+2} \frac{\partial U_2^{i+1}}{\partial z}(z_i) \\ + \lambda_3^i \frac{\partial U_3^i}{\partial z}(z_i) + \lambda_3^{i+1} \left[\frac{\partial U_4^i}{\partial z}(z_i) - \frac{\partial U_3^{i+1}}{\partial z}(z_i) \right] - \lambda_3^{i+2} \frac{\partial U_4^{i+1}}{\partial z}(z_i) \\ = \frac{\partial U_0^{i+1}}{\partial z}(z_i) - \frac{\partial U_0^i}{\partial z}(z_i). \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 42})$$

Finalement, les conditions aux limites donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} w^1(z_{inf}) = 0, \\ w^{N_{dom}}(z_{sup}) = 0, \\ \frac{\partial U^1}{\partial z}(z_{inf}) = 0, \\ \frac{\partial U^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 43})$$

ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} \lambda_3^1 = 0, \\ \lambda_4^{N_{dom}} = 0, \\ \lambda_1^1 \frac{\partial U_1^1}{\partial z}(z_{inf}) + \lambda_1^2 \frac{\partial U_2^1}{\partial z}(z_{inf}) + \lambda_3^1 \frac{\partial U_3^1}{\partial z}(z_{inf}) + \lambda_3^2 \frac{\partial U_4^1}{\partial z}(z_{inf}) = -\frac{\partial U_0^1}{\partial z}(z_{inf}), \\ \lambda_1^{N_{dom}} \frac{\partial U_1^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) + \lambda_2^{N_{dom}} \frac{\partial U_2^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) + \lambda_3^{N_{dom}} \frac{\partial U_3^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) \\ + \lambda_4^{N_{dom}} \frac{\partial U_4^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) = -\frac{\partial U_0^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}). \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 44})$$

On a $2(N_{dom} + 1)$ équations pour $2(N_{dom} + 1)$ inconnues. Soit le système $M\Lambda = \bar{E}$, où :

M est appelée matrice d'influence, et est obtenue par le système formé de IV. 3. 41, IV. 3. 42 et IV. 3. 44.

Λ est le vecteur dont les composantes sont les $2N_{dom} + 2$ inconnues λ_s^i :

$$\Lambda = \left(\lambda_1^1 \dots \lambda_1^{N_{dom}} \lambda_2^{N_{dom}} \lambda_3^1 \dots \lambda_3^{N_{dom}} \lambda_4^{N_{dom}} \right)^T.$$

\bar{E} est le second membre, tel que :

$$\bar{E}^T = \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial U_0^1}{\partial z}(z_{inf}) \\ \dots \\ \frac{\partial U_0^{i+1}}{\partial z}(z_i) - \frac{\partial U_0^i}{\partial z}(z_i) \\ \dots \\ -\frac{\partial U_0^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) \\ \dots \\ -\frac{\partial w_0^1}{\partial z}(z_{inf}) \\ \dots \\ p_0^{i+1}(z_i) - p_0^i(z_i) \\ \dots \\ -\frac{\partial w_0^{N_{dom}}}{\partial z}(z_{sup}) \end{array} \right) \quad i = 1, \dots, N_{dom} - 1$$

La matrice d'influence détaillée ici ne concerne que le système IV. 2. 26 pour des nombres d'onde non nuls. Lorsque les nombres d'onde sont nuls, la matrice d'influence est complètement différente car le système est alors considérablement simplifié. C'est pourquoi, nous nous attardons sur cette particularité.

3.4 cas particulier $|K| = 0$

Si $|K| = 0$, comme explicité dans la section 2, le problème se réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} D^2 \right] \tilde{u}_{0,0} = \tilde{S}_{u\ 0,0}, \\ \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} D^2 \right] \tilde{v}_{0,0} = \tilde{S}_{v\ 0,0}, \\ \left(D - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \right) \tilde{p}_{0,0} = \tilde{S}_{w\ 0,0}, \\ \tilde{w}_{0,0} = 0. \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 45})$$

Nous avons ainsi 2 problèmes d'Helmholtz à résoudre en $\tilde{u}_{0,0}$ et $\tilde{v}_{0,0}$ puisque $\tilde{w}_{0,0} = 0$. L'équation de quantité de mouvement implique une équation différentielle d'ordre 1 sur la pression. Cependant, la pression sert de multiplicateur de Lagrange dans les équations anélastiques permettant à $\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u}) = 0$ de rester vérifiée. Il faut donc calculer $\tilde{u}_{0,0}$ et $\tilde{v}_{0,0}$ séparément par la méthode multi-domaine pour les équations paraboliques, donnée dans le mémoire de thèse de B. Le Creurer [2005]. $\tilde{p}_{0,0}$ est ensuite obtenue en multipliant l'inverse de l'opérateur (membre de gauche) avec le terme source de la troisième relation du système précédent, puis raccordée aux interfaces de chaque sous-domaine par la méthode détaillée ci-dessous. La pression de base notée \bar{p} (par souci de lisibilité) est solution de la troisième équation du système précédent. En effet, l'état hydrostatique de la pression vérifie :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{C_{u3}}{A_u} \bar{\rho} \delta_{i3}, \quad (\text{IV. 3. 46})$$

où $\bar{\rho}$ représente la masse volumique à l'état hydrostatique, soit la projection sur l'axe des z :

$$D\bar{p} = \frac{C_{u3}}{A_u} \bar{\rho}. \quad (\text{IV. 3. 47})$$

Or, pour $|K| = 0$, une solution particulière doit vérifier :

$$\left(D - \frac{C_{u3} \bar{\rho}}{A_u \bar{p}} \right) \tilde{p}_{0,0} = 0. \quad (\text{IV. 3. 48})$$

Montrons que, $\tilde{p}_{0,0} = \alpha \bar{p}$ (α , réel) vérifie la relation IV. 3. 49 :

$$\left(D - \frac{C_{u3} \bar{\rho}}{A_u \bar{p}} \right) \alpha \bar{p} = \alpha \left[\frac{C_{u3}}{A_u} \bar{\rho} - \frac{C_{u3} \bar{\rho}}{A_u \bar{p}} \bar{p} \right] = 0. \quad (\text{IV. 3. 49})$$

La pression, pour ce cas particulier, est invariante à l'addition de $\alpha \bar{p}$ ce qui est différent des fluides incompressibles où la pression est invariante à une constante additive près (cette observation a également été faite pour le problème de Stokes cf. section 1.4). Elle peut donc s'écrire, dans chaque sous-domaine, sous la forme (cf. section 3.1) :

$$\tilde{p}_{0,0}^i = \tilde{p}_{0,0}^{i(0)} + \alpha^i \bar{p},$$

où $\tilde{p}_{0,0}^{i(0)}$ est la solution en pression du sous-problème inhomogène. La pression se devant d'être continue, on obtient la relation suivante :

$$\tilde{p}_{0,0}^i(z_i) = \tilde{p}_{0,0}^{i+1}(z_i) \quad (i = 1, \dots, N_{dom} - 1),$$

soit :

$$\tilde{p}_{0,0}^{i(0)}(z_i) + \alpha^i \bar{p}(z_i) = \tilde{p}_{0,0}^{i+1(0)}(z_i) + \alpha^{i+1} \bar{p}(z_i) \quad .$$

On obtient ainsi un système linéaire sur les α^i :

$$\alpha^i - \alpha^{i+1} = \frac{\tilde{p}_{0,0}^{i+1(0)}(z_i) - \tilde{p}_{0,0}^{i(0)}(z_i)}{\bar{p}(z_i)}.$$

Cette relation nous permet d'obtenir ($N_{dom} - 1$) relations, il nous en faut désormais une dernière afin de fermer le système. C'est pourquoi, nous prenons en compte la conservation de la masse :

$$\int_{\Omega} \rho^{(1)}(x, y, z, t) d\Omega = 0.$$

Soit :

$$\rho^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{N_x/2-1} \sum_{h=0}^{N_y/2-1} \hat{\rho}_{k,h}(z, t) e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} e^{\frac{2i\pi hy}{L_y}},$$

la conservation de la masse devient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho^{(1)}(x, y, z, t) d\Omega &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\sum_{k=0}^{N_x/2-1} \sum_{h=0}^{N_y/2-1} \hat{\rho}_{k,h}(z, t) e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} e^{\frac{2i\pi ky}{L_y}} \right) dx dy dz \\
 &= \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{h=1}^{N_y/2-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} e^{\frac{2i\pi ky}{L_y}} dx dy \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{k,h}(z, t) dz \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_x/2-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} dx dy \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{k,0}(z, t) dz \\
 &+ \sum_{h=1}^{N_y/2-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} e^{\frac{2i\pi ky}{L_y}} dx dy \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,h}(z, t) dz \\
 &+ \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,0}(z, t) dz \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dx dy = 0,
 \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho^{(1)}(x, y, z, t) d\Omega &= \sum_{k=1}^{N_x/2-1} \sum_{h=1}^{N_y/2-1} \left[\frac{L_x}{2i\pi k} e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} \right]_0^{L_x} \left[\frac{L_y}{2i\pi h} e^{\frac{2i\pi hy}{L_y}} \right]_0^{L_y} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{k,h}(z, t) dz \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_x/2-1} \left[\frac{L_x}{2i\pi k} e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} \right]_0^{L_x} [y]_0^{L_y} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{k,0}(z, t) dz \\
 &+ \sum_{h=1}^{N_y/2-1} [x]_0^{L_x} \left[\frac{L_y}{2i\pi h} e^{\frac{2i\pi hy}{L_y}} \right]_0^{L_y} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,h}(z, t) dz \\
 &+ [y]_0^{L_y} [x]_0^{L_x} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,0}(z, t) dz = 0.
 \end{aligned} \tag{IV. 3. 50}$$

Il est important ici de traiter séparément les cas où $k = h = 0$, des autres. En effet, en remarquant que :

$$\left[\frac{L_x}{2i\pi k} e^{\frac{2i\pi kx}{L_x}} \right]_0^{L_x} = \frac{L_x}{2i\pi k} (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k - \cos 0 + i \sin 0) = 0, \tag{IV. 3. 51}$$

la relation IV. 3. 50 se simplifie :

$$\int_{\Omega} \rho^{(1)}(x, y, z, t) d\Omega = L_x L_y \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,0}(z, t) dz = 0. \tag{IV. 3. 52}$$

Pour $L_x = L_y = 1$, la conservation de la masse se réécrit :

$$\int_{z_{inf}}^{z_{sup}} \hat{\rho}_{0,0}(z) dz = 0.$$

$\hat{\rho}_{0,0}(z)$ représente la fluctuation de densité dans l'espace de Fourier pour $|K| = 0$. En prenant la décomposition de domaine, cette relation devient :

$$\sum_{i=1}^{N_{dom}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{\rho}_{0,0}^i(z) dz = 0.$$

Cette relation peut se réécrire, en prenant en compte l'équation d'état :

$$\sum_{i=1}^{N_{dom}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \left(\tilde{p}_{0,0}^i + \alpha_i \bar{p} \right) - \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}} \tilde{T}_{0,0}^i + \frac{2 r_M \bar{\rho}}{1 + r_M - 2 r_M \bar{c}} \tilde{c}_{0,0}^i \right] (z) dz = 0,$$

soit :

$$\sum_{i=1}^{N_{dom}} \alpha_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} \bar{\rho}(z) dz = \sum_{i=1}^{N_{dom}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \tilde{p}_{0,0}^i - \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}} \tilde{T}_{0,0}^i + \frac{2 r_M \bar{\rho}}{1 + r_M - 2 r_M \bar{c}} \tilde{c}_{0,0}^i \right] (z) dz.$$

Il nous faut résoudre le système $M_p \Lambda_p = \bar{E}_p$, où M_p est la matrice d'influence, définie par :

$$\begin{cases} M_{p1j} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \bar{\rho}(z) dz & j = 1, \dots, N_{dom} - 1, \\ M_{p_{ii-1}} = 1 \text{ et } M_{p_{ii}} = -1 & \text{et } i = 2, \dots, N_{dom}, \\ M_{p_{ij}} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV. 3. 53})$$

Λ_p est le vecteur dont les composantes sont les N_{dom} $\alpha^i : \Lambda_p = (\alpha^1 \dots \alpha^{N_{dom}})$.

\bar{E} est le second membre, tel que :

$$\bar{E}^T = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{N_{dom}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[\frac{\bar{\rho} \tilde{\rho}^i}{\bar{p}} \tilde{p}_{0,0}^i - \frac{\bar{\rho} \tilde{T}^i}{\bar{T}} \tilde{T}_{0,0}^i + \frac{2 r_M \bar{\rho}}{1 + r_M - 2 r_M \bar{c}} \tilde{c}_{0,0}^i \right] (z) dz \\ \dots \\ \frac{\tilde{p}_{0,0}^{i+1(0)}(z_i) - \tilde{p}_{0,0}^{i(0)}(z_i)}{\bar{p}(z_i)} \\ \dots \end{array} \right) \quad i = 1, \dots, N_{dom} - 1$$

3.5 Résolution des équations paraboliques

La méthode de décomposition de domaine est ainsi détaillée pour le premier système issu de la contrainte issue de l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, il reste à donc à mentionner la méthode de décomposition de domaine pour des équations paraboliques pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathcal{C}_{q+1} - \frac{B_u}{A_u} (D^2 - |K|^2) \right] \tilde{V}_{k,h} = \tilde{S}_{V_{k,h}} \\ \frac{\partial \tilde{V}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{inf}) = \frac{\partial \tilde{V}_{k,h}}{\partial z}(z = z_{sup}) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV. 3. 54})$$

Ce processus est détaillé dans [Pulicani \(1988b\)](#), [Renaud \(1996\)](#) et [Le Creurer \(2005\)](#). Cette même méthode est également utilisée pour le cas particulier $|K| = 0$.

4 Résolution selon la méthode d'Uzawa

La résolution du problème complet consiste en la résolution de 5 problèmes de Stokes élémentaires, 4 homogènes et 1 inhomogène. Pour ce dernier, les termes non linéaires $(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})$ sont traités de manière explicite. Dans la suite, nous détaillerons la méthode d'Uzawa, appliquée à notre étude. Comme il a été précisé plus haut, pour résoudre un problème dans une configuration 3D, on peut se restreindre à la résolution de deux systèmes découplés en vitesses U et V , combinaisons linéaires des composantes de vitesses u et v dans l'espace de Fourier.

On résout dans la suite chaque sous problème de Stokes lié à la méthode de la matrice

d'influence (détaillée dans la section III.3), pour une étape de Runge-Kutta et pour chaque sous-domaine i (l'exposant est abandonné car cela alourdi les notations). Chaque quantité est un vecteur à $N + 1$ composantes. Les systèmes à résoudre sont IV. 3. 40, accompagnés de l'équation qui découle de la méthode de décomposition de domaine, de l'équation parabolique de type Helmholtz (voir section 3), IV. 3. 54 (découplée du système) si $|K| \neq 0$ et IV. 2. 31 sinon. Le système IV. 3. 40 est résolu par la méthode d'Uzawa, tandis que l'équation IV. 3. 54 est résolue séparément. Remarquons que si X' est la dérivée d'un vecteur X à $N + 1$ composantes et X'' sa dérivée seconde, on obtient les relations suivantes :

$$\sum_{j=0}^N D_{ij} X_j = X'_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^N D_{ij}^2 X_j = X''_i,$$

donc, pour $i = 0, \dots, N$:

$$X'_i = D_{i0} X_0 + D_{iN} X_N + \sum_{j=1}^{N-1} D_{ij} X_j \quad \text{et} \quad X''_i = D_{i0}^2 X_0 + D_{iN}^2 X_N + \sum_{j=1}^{N-1} D_{ij}^2 X_j. \quad (\text{IV. 4. 55})$$

Le système à $N + 1$ équations devient ainsi un système à $N - 1$ équations, puisque les valeurs de $\tilde{U}_{k,h}^{(s)}$ et $\tilde{w}_{k,h}^{(s)}$ sont connues aux bords de chaque sous domaine et s'écrit :

$$\begin{cases} H_{U \ I} \tilde{U}_{k,hI}^{(s)} - \frac{B_u |K|}{3 A_u} (L_\rho^{-1})_I \tilde{w}_{k,hI}^{(s)} = |K| \tilde{p}_{k,hI}^{(s)} + \tilde{S}_{U \ k,h \ I} + \tilde{S}_{cl \ U \ k,h \ I}, \\ H_{w \ I} \tilde{w}_{k,hI}^{(s)} = - \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right) \tilde{p}_{k,h}^{(s)} + \tilde{S}_{w \ k,h \ I} + \tilde{S}_{cl \ w \ k,h \ I}, \end{cases} \quad (\text{IV. 4. 56})$$

Les vecteurs indicés I sont les vecteurs privés de leur première et dernière composantes. \underline{D} (respectivement \underline{I}) représente la matrice de dérivation (respectivement identité) privée de sa première et dernière ligne.

Soit pour $\ell = 0, \dots, N - 2$:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{S}_{cl \ U \ k, h \ I} \right]_{\ell} &= \frac{B_u}{A_u} \left(D_{\ell+1 \ 0}^2 \tilde{U}_{k, h \ 0}^{(s)} + D_{\ell+1 \ N}^2 \tilde{U}_{k, h \ N}^{(s)} \right), \\ \left[\tilde{S}_{cl \ w \ k, h \ I} \right]_{\ell} &= \frac{B_u}{A_u} \left[\left(D_{\ell+1 \ 0}^2 \tilde{w}_{k, h \ 0}^{(s)} + D_{\ell+1 \ N}^2 \tilde{w}_{k, h \ N}^{(s)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_u}{A_u} \left[\frac{L_{\rho \ \ell+1}^{-1}}{3} \left(D_{\ell+1 \ 0} \tilde{w}_{k, h \ 0}^{(s)} + D_{\ell+1 \ N} \tilde{w}_{k, h \ N}^{(s)} \right) \right] \right], \end{aligned} \tag{IV. 4. 57}$$

et les opérateurs d'Helmholtz :

$$\begin{cases} H_{U \ I} = \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathbb{C}_{q+1} \mathbb{I}_I - \frac{B_u}{A_u} \left(D_I^2 - |K| \ ^2 \mathbb{I}_I \right), \\ H_{w \ I} = \frac{\rho^{(0)}}{A_u} \mathbb{C}_{q+1} \mathbb{I}_I - \frac{B_u}{A_u} \left[D_I^2 - |K| \ ^2 \mathbb{I}_I - \frac{1}{3} \left(D_I L_{\rho \ I}^{-1} + L_{\rho \ I}^{-1} D_I \right) \right]. \end{cases} \tag{IV. 4. 58}$$

Les matrices \mathbb{I}_I , respectivement D_I , sont les matrices unité, respectivement dérivation à l'ordre $N - 1$. On note $\tilde{U}_{k, h \ 0}^{(s)}$, respectivement $\tilde{w}_{k, h \ 0}^{(s)}$, la valeur de $\tilde{U}_{k, h}^{(s)}$, respectivement $\tilde{w}_{k, h}^{(s)}$, au bord gauche du sous domaine (en z_{i-1} sur la figure III.1), et $\tilde{U}_{k, h \ N}^{(s)}$, respectivement $\tilde{w}_{k, h \ N}^{(s)}$, la valeurs de $\tilde{U}_{k, h}^{(s)}$, respectivement $\tilde{w}_{k, h}^{(s)}$, au bord droit du sous domaine (en z_i sur la figure III.1). $\left[\tilde{S}_{cl \ U \ k, h \ I} \right]_{\ell}$ est la contribution des conditions aux limites imposées sur le terme $\frac{B_u}{A_u} D^2 \tilde{U}_{k, h}^{(s)}$ (les deux premiers termes donnés dans la seconde relation IV. 4. 55) et $\left[\tilde{S}_{cl \ w \ k, h \ I} \right]_{\ell}$ des mêmes contributions sur le terme $\frac{B_u}{A_u} \left(D^2 - \frac{1}{3} L_{\rho}^{-1} D \right) \tilde{w}_{k, h}^{(s)}$ dans le système IV. 2. 26. Les inconnues $\tilde{U}_{k, h}^{(s)}$

et $\tilde{w}_{k,h}^{(s)}$ peuvent donc s'exprimer en fonction de $\tilde{p}_{k,h}^{(s)}$, à l'aide du système suivant :

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{k,h I}^{(s)} &= -H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right) \tilde{p}_{k,h}^{(s)} + H_w^{-1} \left(\tilde{S}_{w k,h I} + \tilde{S}_{cl w k,h I} \right) \\
\tilde{U}_{k,h I}^{(s)} &= H_U^{-1} \underline{\mathbb{L}} \tilde{p}_{k,h}^{(s)} - H_U^{-1} S_I \\
\underline{\mathbb{L}} &= |K| \left[-\frac{B_u}{3 A_u} L_{\rho^{-1} I}^{-1} H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right) + \underline{\mathbb{I}} \right] \\
S_I &= -\frac{B_u |K|}{3 A_u} L_{\rho^{-1} I}^{-1} H_w^{-1} \left(\tilde{S}_{w k,h I} + \tilde{S}_{cl w k,h I} \right) - \tilde{S}_{U k,h I} - \tilde{S}_{cl U k,h I}
\end{aligned} \tag{IV. 4. 59}$$

Il nous faut désormais, trouver une relation nous permettant d'obtenir la pression. Pour cela, l'équation provenant de la contrainte sur $(\rho^{(0)} \vec{u})$, du système IV. 3. 40, pour chaque sous problème de Stokes, est exploitée :

$$|K| \tilde{U}_{k,h}^{(s)} + D \tilde{w}_{k,h}^{(s)} + L_{\rho}^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{(s)} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
|K| \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{U}_{k,h 1}^{(s)} \\ \dots \\ \tilde{U}_{k,h N-1}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (L_{\rho}^{-1})_1 \tilde{w}_{k,h 1}^{(s)} \\ \dots \\ (L_{\rho}^{-1})_{N-1} \tilde{w}_{k,h N-1}^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N-1} D_{0j} \tilde{w}_{k,h j}^{(s)} \\ \sum_{j=1}^{N-1} D_{1j} \tilde{w}_{k,h j}^{(s)} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{N-1} D_{N-1j} \tilde{w}_{k,h j}^{(s)} \\ \sum_{j=1}^{N-1} D_{Nj} \tilde{w}_{k,h j}^{(s)} \end{pmatrix} = \\
- \underbrace{\begin{pmatrix} D_{00} \tilde{w}_{k,h 0}^{(s)} + D_{0N} \tilde{w}_{k,h N}^{(s)} \\ D_{10} \tilde{w}_{k,h 0}^{(s)} + D_{1N} \tilde{w}_{k,h N}^{(s)} \\ \dots \\ D_{N-1 0} \tilde{w}_{k,h 0}^{(s)} + D_{N-1 N} \tilde{w}_{k,h N}^{(s)} \\ D_{N0} \tilde{w}_{k,h 0}^{(s)} + D_{NN} \tilde{w}_{k,h N}^{(s)} \end{pmatrix}}_{\Sigma_w} + \underbrace{\begin{pmatrix} -|K| \tilde{U}_{k,h 0}^{(s)} - (L_{\rho}^{-1})_0 \tilde{w}_{k,h 0}^{(s)} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -|K| \tilde{U}_{k,h N}^{(s)} - (L_{\rho}^{-1})_N \tilde{w}_{k,h N}^{(s)} \end{pmatrix}}_{\Sigma_{Uw}}.
\end{aligned}$$

Σ_{Uw} provient de la décomposition de $D \tilde{w}_{k,h}^{(s)}$, détaillée en IV. 4. 55 et Σ_w découle des

composantes extrêmes de $|K| \tilde{U}_{k,h}^{(s)} + L_\rho^{-1} \tilde{w}_{k,h}^{(s)}$. Le principe est de faire passer tous les termes fonction des conditions aux frontières, connus, dans le membre de droite de la relation IV. 3. 40. Le système précédant peut donc s'écrire en fonction des $N - 1$ composantes des vecteurs vitesses privés de leurs valeurs aux bords :

$$|K| \bar{\mathbb{I}} \tilde{U}_{k,h_I}^{(s)} + \bar{D} \tilde{w}_{k,h_I}^{(s)} + L_\rho^{-1} \bar{\mathbb{I}} \tilde{w}_{k,h_I}^{(s)} = -\Sigma_w + \Sigma_{Uw}. \quad (\text{IV. 4. 60})$$

Ici, nous avons bien un système à $N + 1$ équations et $\bar{\mathbb{I}}$ (respectivement \bar{D}) représente la matrice unitée (respectivement dérivée) privée de ses première et dernière colonnes. Remplaçons $\tilde{U}_{k,h_I}^{(s)}$ et $\tilde{w}_{k,h_I}^{(s)}$ par leur expression, on obtient le système à $N + 1$ équations :

$$\underbrace{\left[|K| \bar{M} H_U^{-1} \underline{\mathbb{I}} - (\bar{D} + L_\rho^{-1} \bar{\mathbb{I}}) H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right) \right]}_{H_p} \tilde{p}_{k,h}^{(s)} = -\Sigma_w + \Sigma_{Uw} + |K| \bar{M} H_U^{-1} S_I - (\bar{D} + L_\rho^{-1} \bar{\mathbb{I}}) H_w^{-1} \left(\tilde{S}_{w k,h I} + \tilde{S}_{\ell w k,h I} \right). \quad (\text{IV. 4. 61})$$

La manipulation des matrices rectangulaires \bar{D} , $\bar{\mathbb{I}}$, $\underline{\mathbb{I}}$ et \underline{D} permet ainsi de déterminer la pression en tout point même aux extrémités du domaine, sans conditions aux limites. Une fois la pression connue, on peut déterminer les vitesses à l'aide des relations IV. 4. 59.

5 Modes de pression parasite

Ainsi, pour chaque nombre d'onde $|K|$, il existe un opérateur d'Uzawa H_p qu'il faut inverser et nous retenons la méthode de diagonalisation pour cela (cf. annexe C). Les sections précédentes ont montré que pour $|K| = 0$, la résolution était particulière et *a fortiori* l'opérateur H_p . Aucune condition aux limites n'étant imposée sur la pression, cela implique que les matrices représentant l'opérateur d'Uzawa H_p (opérateur de pression) présentent deux valeurs propres nulles. L'existence de ces 2 valeurs propres nulles implique la non inversibilité de H_p , pour ce cas particulier. Pour palier cette contrainte, nous considérons une inversion partielle, détaillée en

annexe C. De plus, sur les deux valeurs propres, une correspond au mode de pression dit parasite, l'autre vient de l'invariance par rapport à l'ajout de la pression de base, fixée par la conservation de la masse $\left(\int_{\partial V} \rho dV = 0, \text{ cf. section 1.4}\right)$. En effet, une partie du terme en pression dans le système IV. 3. 40 est exprimée à travers sa dérivée. L'approximation en Tchebycheff de la pression s'écrit :

$$p_N(\varsigma) = \sum_{k=0}^N \hat{p}_k T_k(\varsigma), \quad (\text{IV. 5. 62})$$

avec $T_0 = 1$. La pression résultante de la méthode d'Uzawa reste contaminée par le mode parasite et le mode lié à l'invariance par rapport à l'ajout de la pression de base, et présente des oscillations. C'est pourquoi, il est nécessaire de filtrer ces deux modes. Pour cela, nous respectons trois étapes :

- Nous calculons les coefficients de Tchebycheff \hat{p}_k ($k = 0, \dots, N$) à l'aide de la pression $p_N(\varsigma)$;
- Nous annulons les deux coefficients \hat{p}_k correspondant aux valeurs propres nulles ;
- Avec ce spectre filtré, nous calculons le champ de pression filtré $\bar{p}_N(\varsigma)$ défini à l'ajout de la pression de base près, figé avec la conservation de la masse.

Ce chapitre nous a permis de présenter les modes propres de Stokes d'une configuration stratifiée (à stratification constante). Les modes propres de l'IRT classique mériteraient certainement d'être analysés. La résolution des équations de Navier-Sokes en approximation anélastique nécessite le développement de méthodes spécifiques que nous détaillons par la suite. Nous avons également développé la méthode de décomposition de domaine en exprimant la méthode de matrice d'influence appliquée à un système couplé en vitesse/pression, mais également au cas particulier d'un nombre d'onde nul. De plus, la méthode d'Uzawa a été appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes en AN. À présent, il est impératif de valider l'écriture

des opérateurs et intéressant de discuter les résultats obtenus par les simulations de cette nouvelle option du code AMENOPHIS.

Chapitre V

Validation du code numérique pour l'approximation anélastique

Dans le but de valider le code AMENOPHIS, dans sa version anélastique nous avons effectués différents tests. La première étape a été de valider le codage des opérateurs sous FORTRAN en les comparant à sa réécriture sous MATHEMATICA. Puis, nous procédons à différentes comparaisons de résultats expérimentaux et de simulations numériques. Dans un premier temps nous tentons de retrouver les conclusions des travaux expérimentaux menés par Waddell *et al.* [2001]. Pour cela, nous rappelons le dispositif expérimental utilisé ainsi que les différentes caractéristiques de mélange, puis nous détaillons les différentes estimations envisagées dans nos simulations pour se rapprocher de la configuration expérimentale. Par la suite, nous comparerons les résultats obtenus par la version anélastique du code à celle compressible, qui a jusqu'à présent fait ses preuves.

1 Comparaison des opérateurs codés sous MATHEMATICA et FORTRAN

L'opérateur d'Uzawa, noté H_p (donné par la relation IV. 4. 61) a été codé à l'aide du logiciel MATHEMATICA pour un nombre d'onde K multiple de 2π , (matrice de dimension 64×64). Les figures suivantes présentent le module de la différence des valeurs propres obtenues par MATHEMATICA et FORTRAN pour 2 valeurs de stratification $Sr = 0.2$ et $Sr = 10$ pour $K = 2\pi$. Nous constatons, que les résultats obtenus en FORTRAN et MATHEMATICA convergent, avec une erreur maximale

de l'ordre de 10^{-11} pour $Sr = 0.2$ et de 10^{-9} pour $Sr = 10$.

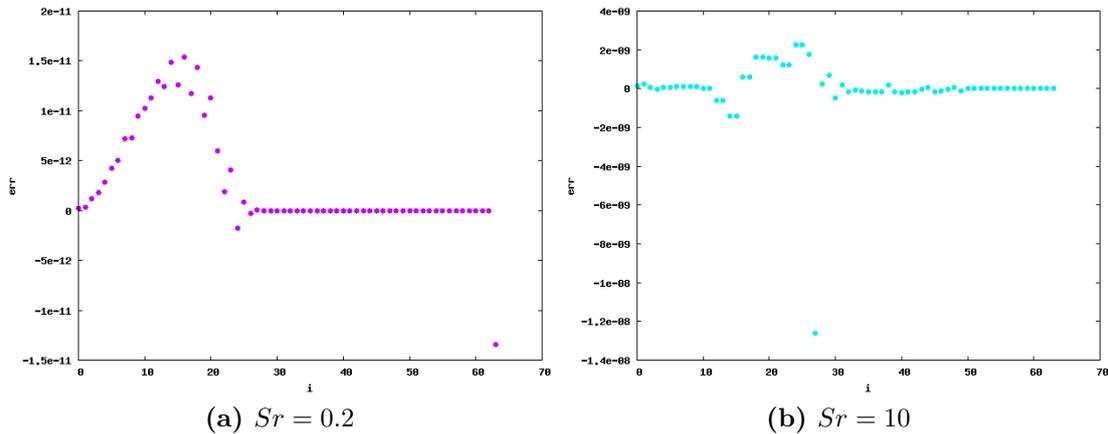
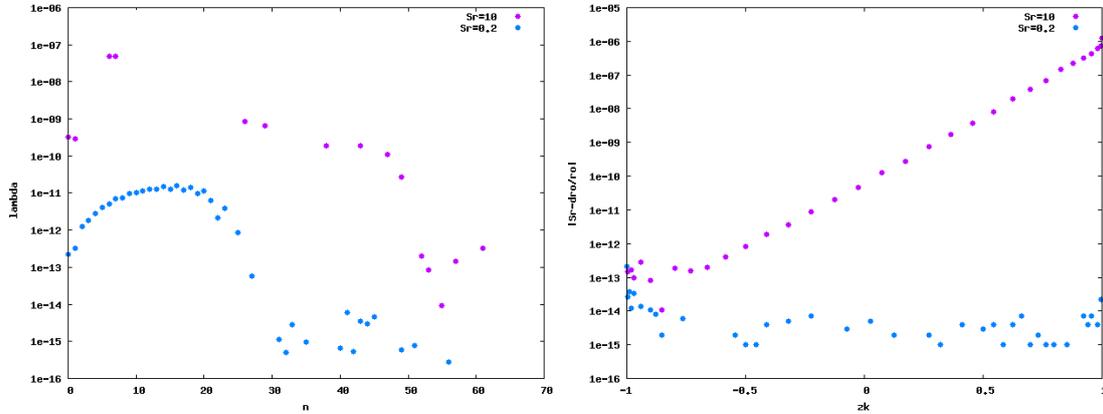


Figure V.1 – Différence des valeurs propres de H_p calculées par MATHEMATICA/FORTRAN pour $k = 2\pi$.

De plus, l'inverse de l'opérateur d'Uzawa a été également vérifié. En effet, le maximum de la différence des valeurs de cet opérateur inversé, obtenues par MATHEMATICA et FORTRAN est égale à : 5.8×10^{-11} (Alors que le maximum de cette même différence sur H_p est de 1.8×10^{-11}) pour $Sr = 0.2$, et 3.05×10^{-11} (6.2×10^{-9} pour H_p) pour $Sr = 10$. Le cas particulier du nombre d'onde nul demande également une discussion. Là encore, nous avons codé l'opérateur d'Uzawa, à la fois sous MATHEMATICA et FORTRAN. La figure suivante présente la différence des valeurs propres obtenues par MATHEMATICA et FORTRAN pour 2 valeurs du paramètre de stratification $Sr = 0.2$ et $Sr = 10$. Nous constatons une différence beaucoup plus prononcée pour $Sr = 10$ qui s'explique par le calcul de la quantité $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$. En effet, dans le code FORTRAN, ce paramètre se détermine numériquement, tandis que sous MATHEMATICA ce dernier est considéré constant est égale à Sr . De plus, la pseudo-inversion (due à l'apparition de 2 valeurs propres nulles pour $k = 0$) a été également vérifiée. En effet, le maximum de la différence des valeurs de cet opérateur (64×64), obtenues par MATHEMATICA et FORTRAN est égale à : 1.57×10^{-10} pour $Sr = 0.2$, et 3.23×10^{-6} pour $Sr = 10$.



(a) Différence des valeurs propres de H_p calculées par MATHEMATICA/FORTRAN.

(b) Différence de L_ρ^{-1} pris en compte par MATHEMATICA/FORTRAN .

Figure V.2 – Différence des résultats MATHEMATICA/FORTRAN pour $k = 0$.

2 Étude d'expérience d'IRT : systèmes liquides à faible nombre d'Atwood avec perturbations initiales mono-mode

2.1 Descriptif de l'expérience

Il existe différentes méthodes permettant d'étudier le développement de l'IRT en laboratoire. La méthode la plus répandue consiste en l'accélération d'un système de deux fluides de masses volumiques différentes, vers le bas, d'une amplitude supérieure à la pesanteur. Ainsi, une force de gravité « artificielle », orientée vers le haut est générée, et est ajustable. Le dispositif expérimental est formé d'un réservoir en plexiglas qui se déplace sur un rail, d'un accélérateur et d'un système de levage. Les dimensions du réservoir contenant les fluides considérés sont données par la figure V.3. La combinaison des deux fluides considérés dans l'expérience étudiée est composée d'une solution d'eau salée (du nitrate de calcium dissout dans de l'eau distillée) qui représente le fluide lourd et de l'heptane pour le le fluide léger. Ici, les fluides sont non miscibles ; un tensioactif est ajouté de manière à diminuer la tension superficielle entre les surfaces des deux fluides. La combinaison des fluides présente

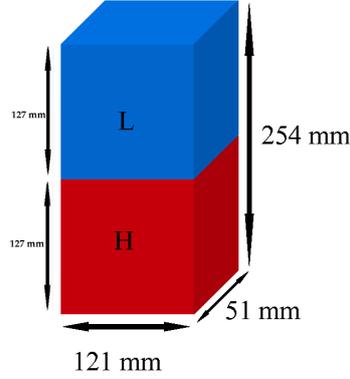


Figure V.3 – Dimension de la boîte réalisée par Waddell *et al.* [2001].

un nombre d'Atwood ($\rho_H - \rho_L / \rho_H + \rho_L$) de 0.336. La valeur du champ d'accélération est estimée à $g = 0.32 G_{terre} = 3.14 \text{ m/s}^2$. Une perturbation sinusoïdale de la surface de séparation des deux fluides est créée dans la direction horizontale, à l'instant initial, dont la longueur d'onde s'élève à $\lambda = 35 \text{ mm}$.

2.2 Résultats expérimentaux

Les profils du développement de l'IRT sont analogues à ceux obtenus pour des fluides miscibles, mis à part qu'on observe moins d'enroulements de l'interface des deux fluides que lorsque les liquides considérés sont miscibles. Ce faible enroulement peut être dû au nombre d'Atwood plus élevé. Mais la faible tension de surface (inhérente à cette combinaison de fluides non miscibles) peut également expliquer cette observation. On se rend compte également qu'à partir d'un temps assez avancé les profils des champignons deviennent moins symétriques, les chapeaux des champignons sont plus allongés. Étant donné que l'échelle de longueur liée à la tension de surface (défini par $\sqrt{2\gamma/\Delta\rho G}$, où γ représente la tension de surface et G l'accélération) est du même ordre de grandeur que les plus petites échelles de longueur observées, l'arrondissement des bords abruptes dans les enroulements (figure I.1 f-g) devraient être des effets de tension de surface (*cf.* Waddell *et al.* (2001)). De plus, le début du développement des structures en champignon ne devrait pas être affecté par cette faible tension de surface. Dans la suite, on décide de ne comparer que la deuxième expérience présentée dans Waddell *et al.* (2001), aux simulations de la

version anélastique du code AMENOPHIS.

2.3 Simulation anélastique

Certaines hypothèses ont été faites pour l'élaboration des simulations numériques à l'aide du code AMENOPHIS, avec sa nouvelle option anélastique. Il est donc nécessaire de les mettre en évidence afin d'expliquer les différentes estimations effectuées pour la comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Tous les fluides considérés sont incompressibles or la version du code est anélastique ce qui impose une stratification de l'écoulement des fluides. Étant données les dimensions du réservoir, une stratification de $Sr = 0.1$ est considérée comme assez faible pour que le fluide soit non stratifié. De plus, la concentration en nitrate de calcium de la solution salée n'étant pas donnée, nous estimons qu'il s'agit d'une solution saturée (38% de nitrate de calcium). En outre, bien que le tensioactif ajouté diminue la tension superficielle entre les surfaces des deux fluides, les fluides restent non miscibles, alors que pour le code AMENOPHIS, ils sont considérés miscibles. Les caractéristiques sont estimées à l'aide du manuel de chimie et physique [CRC Handbook (2007)]. La constante de diffusion est fixée à $D = 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. La masse volumique de référence a pour valeur $(\rho_H + \rho_L)/2 = 1030 \text{ kg/m}^3$ et la masse molaire du mélange vaut $2(M_H M_L)/(M_H + M_L) = 84.99 \text{ g/mol}$. La capacité calorifique à pression constante est estimée à 418.8 J/(kg K) et la conductivité thermique à 0.6 W/(m.K) (considérée comme constante et identique pour les deux fluides dans le code). Ne connaissant pas réellement la viscosité dynamique des deux fluides, nous avons défini un intervalle : $1.10^{-3} \text{ N.s/m}^2 \leq \mu_r \leq 7.10^{-3} \text{ N.s/m}^2$. La question est un peu plus complexe pour l'indice adiabatique, puisque le code AMENOPHIS considère l'équation d'état des gaz parfaits, alors que les fluides pris en compte dans l'expérience ne la vérifient pas. Deux solutions sont envisagées pour donner une valeur approximative de γ_r . Lorsque l'on considère de l'eau sous très haute pression l'équation d'état du « stiffened gas » est souvent utilisé et le γ de référence est estimé à 6.1 (cf. http://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_state). La deuxième solution consiste à le déterminer à l'aide de la vitesse du son. En effet on sait que la vitesse du son est égale à 1430 m/s pour l'eau pure, 1500 m/s pour l'eau de mer (0.4 % de sel) et 1162 m/s pour l'heptane (cf. [CRC Handbook (2007)] et WIKIPEDIA). La célérité

du son dans un liquide est une fonction de la masse volumique ρ et du coefficient de compressibilité adiabatique χ_s et se calcule ainsi : $c_s = 1/(\sqrt{\rho\chi_s})$ où $\chi_s = (\gamma p)^{-1}$. Le manuel de chimie estime que la pression de l'eau à 20 ° C et de densité 998.2 kg/m³ est de 1MPa. On obtient ainsi $\gamma_{eau\ salée} \sim 2.04 \times 10^3$ et $\gamma_{heptane} \sim 0.92 \times 10^3$ (on a gardé une pression de 1MPa). Dans la suite on considère un indice adiabatique de référence pour le mélange tel que $\gamma_r \sim 1 \times 10^3$.

2.4 Comparaisons des résultats expérimentaux et numériques

Le tableau V.1 résume les simulations réalisées pour cette comparaison expérience/numérique qui prennent en compte les estimations explicitées ci-dessus.

	unité	RTTS	RTTW	RTTX	RTTY	RTTZ
M_r	g/mol	84.997	84.997	84.997	84.997	84.997
ρ_r	g/ml	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
μ_r	N.s/m ²	0.007	0.007	0.001	0.001	0.001
κ_r	W/(m.K)	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
γ_r		6.1	6.1	6.1	1000	1000
C_p	J/(kg K)	418.8	418.8	418.8	418.8	418.8
g	m ² /s ²	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14
Re		13660	13660	95607	95607	95607
Sr		0.1	0.1	0.1	0.1	0.05
Sc		5	6800	971	971	971
Pr		4.88	4.88	0.698	0.698	0.698
résolution (nx*nz)		128*(4*64)	128*(4*64)	128*(4*64)	128*(4*64)	128*(4*64)
δ		0.031	0.031	0.031	0.031	0.031
x_{init}		-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01

Tableau V.1 – Paramètres numériques et physiques de chaque simulation numérique.

Remarque : Étant données les estimations effectuées sur les grandeurs physiques des fluides considérés pour les simulations numériques, les nombres sans dimension diffèrent également.

La figure V.4 présente les amplitudes du défaut initial mesurées à différents temps pour toutes les simulations décrites par le tableau V.1 et celle de Waddell *et al.*. Les amplitudes de l'IRT obtenues par nos simulations numériques se rapprochent des résultats expérimentaux. Nous constatons également que la simulation RTTY semble être la plus proche de la configuration expérimentale. En effet la différence maximale s'élève à 16%. Nous retenons donc cette simulation pour discuter des différences des résultats expérimentaux / numériques.

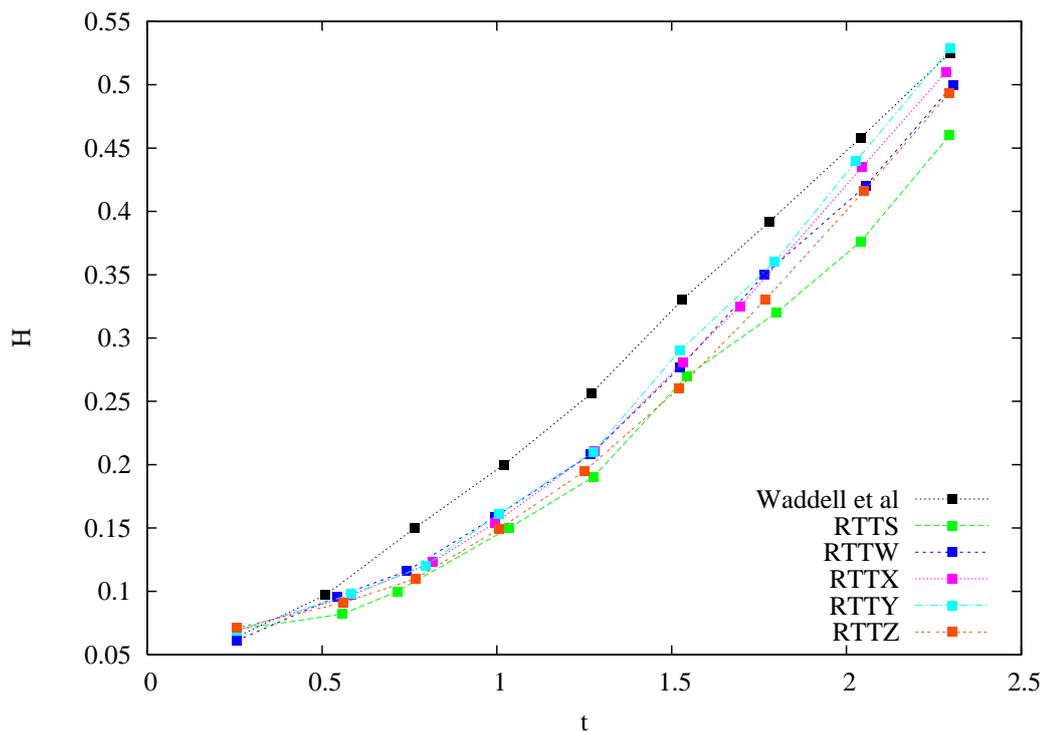


Figure V.4 — Évolution de l'amplitude de l'IRT pour les résultats expérimentaux et les simulations.

Les figures V.5 à V.13 montrent les iso-valeurs de la concentration à différents instants du développement de l'IRT, obtenus par Waddell *et al.* dans [2001] et ceux donnés par la simulation RTTY.

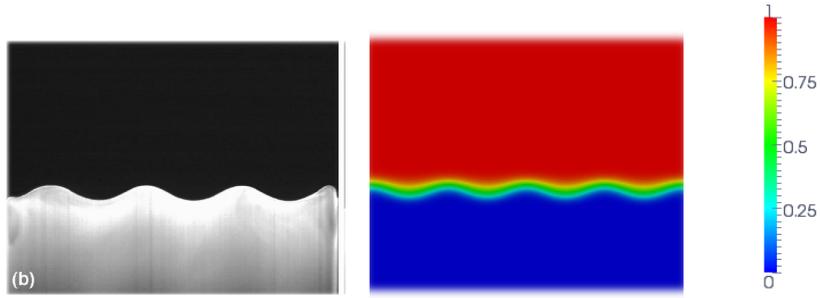


Figure V.5 – perturbation a $t_{exp} = 0.255$ et $t_{simu} = 0.85$.

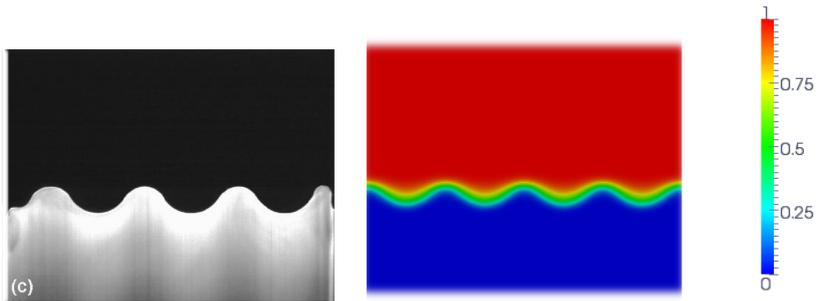


Figure V.6 – perturbation a $t_{exp} = 0.51$ et $t_{simu} = 1.153$.

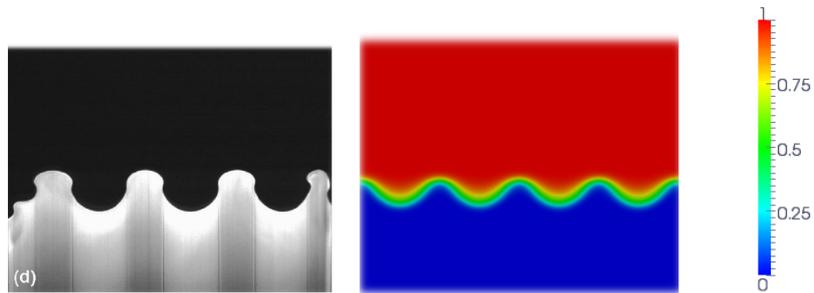


Figure V.7 – perturbation a $t_{exp} = 0.765$ et $t_{simu} = 1.31$.

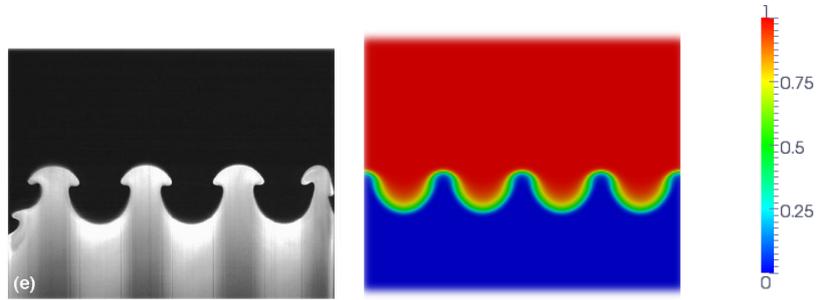


Figure V.8 – perturbation a $t_{exp} = 1.02$ et $t_{simu} = 1.63$.

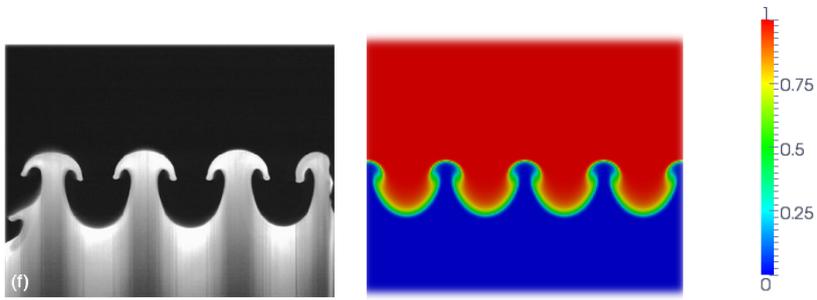


Figure V.9 – perturbation a $t_{exp} = 1.27$ et $t_{simu} = 1.867$.

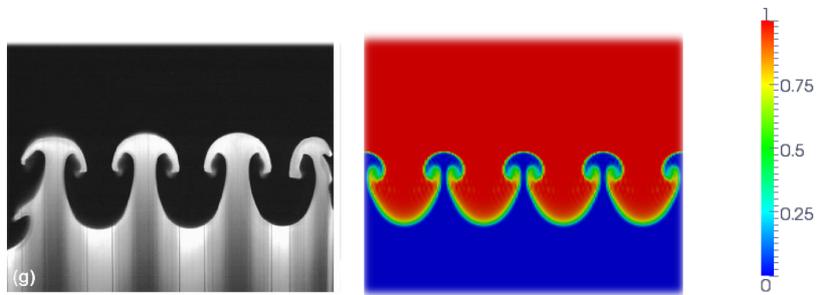


Figure V.10 – perturbation a $t_{exp} = 1.53$ et $t_{simu} = 2.138$.

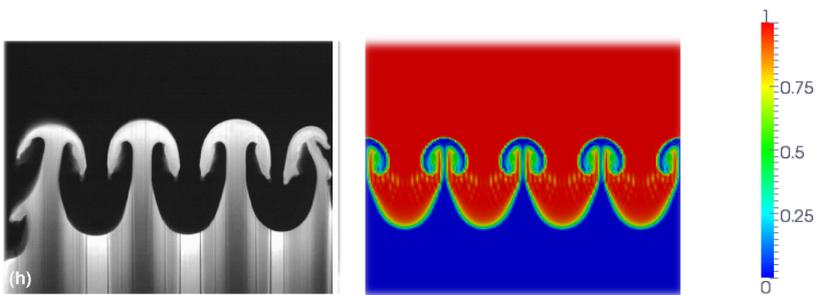


Figure V.11 – perturbation a $t_{exp} = 1.78$ et $t_{simu} = 2.38$.

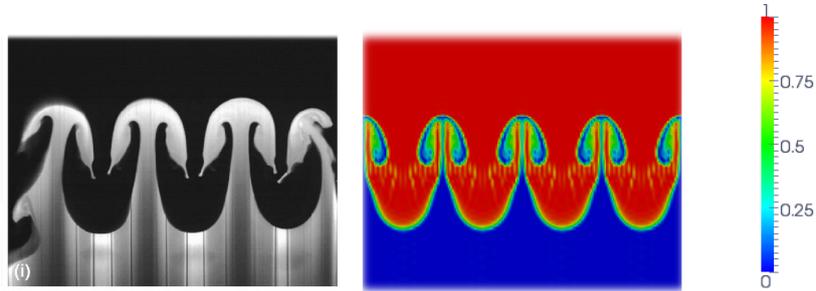


Figure V.12 – perturbation a $t_{exp} = 2.04$ et $t_{simu} = 2.65$.

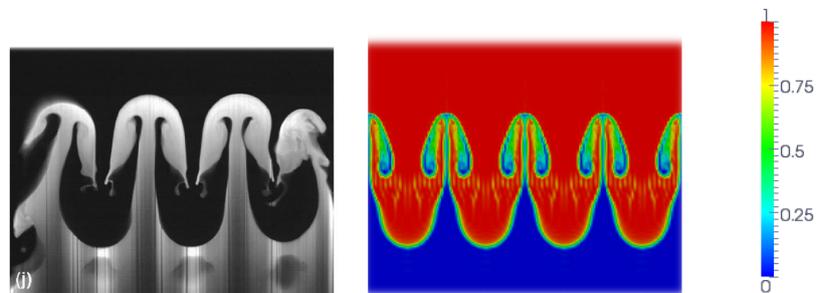


Figure V.13 – perturbation a $t_{exp} = 2.296$ et $t_{simu} = 2.89$.

Les structures du développement de l'IRT présentées par la simulation RTTY montrent les mêmes caractéristiques que celles visualisées lors de l'expérience menée par Waddell *et al.* En effet, nous constatons que les enroulements débutent sur la figure V.8 et produisent les structures en champignons bien connues. De plus, nous observons également qu'au fur et à mesure que la simulation avance dans le temps, le haut des champignons s'allonge considérablement. Cependant, la largeur du pied du champignon est beaucoup plus faible que celui illustré par l'expérience. Cette différence peut être expliquée par les estimations envisagées pour atteindre une configuration analogue au dispositif mis en place par Waddell *et al.* Tout d'abord, le code de calcul AMENOPHIS considère un coefficient de viscosité dynamique de référence constant et identique pour les deux fluides. L'expérience envisage un mélange de deux fluides de viscosité différente, or ce coefficient peut influencer sur la largeur de cette base. Les fluides considérés dans l'expérience sont incompressibles, or la version du code développée en approximation anélastique est quasi-incompressible, la compressibilité dite statique n'est pas filtrée, et est maîtrisée par le paramètre de

stratification. Cet aspect peut également expliquer le fait que dans les simulations, l'IRT se développe moins vite.

3 Comparaison des simulations des versions compressible et anélastique

Dans cette partie nous effectuons des comparaisons entre les résultats obtenus à l'aide du code AMENOPHIS dans sa version compressible (déjà validé) et sa version anélastique (filtre les ondes acoustiques mais maintient de la stratification) pour différentes valeurs de la contrainte CFL, C présent dans la relation III. 5. 25. La configuration envisagée est standard et les caractéristiques numériques et physiques sont données dans le tableau V.4.

paramètres numériques				paramètres physiques							
Ny	Nz	δ	x_{init}	Sr	At	Re	Pr	Sc	$\gamma_H = \gamma_L$	z_{inf}	z_{sup}
128	4x64	0.031	1.10^{-4}	0.2	0.2	5000	0.71	0.71	5/3	-1.3	1.2

Tableau V.2 – Paramètres numériques et physiques de la simulation standard.

Nous comparons l'évolution de différentes quantités physiques des résultats de ces simulations. Le tableau V.3 détaille les différentes moyennes prises en compte. La notation $\langle \phi \rangle$ correspond à la moyenne en z , $\bar{\phi}$ la moyenne en y et $\overline{\langle \phi \rangle}$ ne dépend que du temps.

<i>Figure</i>	<i>Expression</i>
Longueur de mélange	$4\langle \bar{c}(1 - \bar{c}) \rangle$
Fraction de mélange	$\overline{\langle c(1 - c) \rangle} / \langle \bar{c}(1 - \bar{c}) \rangle$
Énergie cinétique moyennée en $y-z$	$\overline{\langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle}$
Anisotropie de l'énergie cinétique, moyennée en $y-z$	$\overline{\langle u_z^2 \rangle} / \overline{\langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle}$
Rotationnel moyenné en $y-z$	$\overline{\langle \text{rot} \vec{u} \rangle}$
Divergence moyennée en $y-z$	$\overline{\langle (\text{div} \vec{u})^2 \rangle}^{1/2}$
Variance de densité moyennée en $y-z$	$\overline{\langle \rho' \rangle}^{1/2} / \langle \bar{\rho} \rangle$
Variance de concentration moyennée en $y-z$	$\overline{\langle c'^2 \rangle}^{1/2}$
Variance relative de la pression moyennée en $y-z$	$\left(\overline{\langle p'^2 \rangle} - \langle \bar{p} \rangle^2 \right) / \langle \bar{p} \rangle^2$
Variance de la pression moyenné en $y-z$	$\overline{\langle p'^2 \rangle} / \langle \bar{p} \rangle^2$
Divergence de l'écoulement moyen moyennée en $y-z$	$\overline{\langle (\text{div} u)^2 \rangle}$
Divergence des fluctuations moyennée en $y-z$	$\overline{\langle (\text{div} u'')^2 \rangle}$
Dissipation moyennée en $y-z$	$\overline{\langle \bar{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \rangle}$

Tableau V.3 – Liste des quantités moyennes calculées.

La constante C est déterminée de manière empirique. C'est pourquoi, nous étudions les différents résultats obtenus par la simulation du cas standard en faisant varier cette constante. Ici nous tentons de comparer les résultats obtenus pour $C = 0.4, 1.3, 2.2$ avec la version anélastique (AN) et $C = 0.4$ en version compressible (COMP). Dans le but de comparer les versions anélastique et compressible, nous étudions les évolutions temporelles des différentes grandeurs physiques répertoriées

dans le tableau V.3. L'évolution de la longueur de mélange en fonction du temps (*cf.* V.14), montre que la valeur du paramètre C a peu d'influence. Nous constatons également une bonne concordance avec les résultats obtenus par la version COMP. Ces conclusions sont confirmées par la figure V.15, qui nous donne l'allure de l'évolution de la fraction de mélange (*cf.* tableau V.3). Jusqu'à un temps $t \approx 7$, l'instabilité ne s'est pas encore développée. Puis, l'amplitude augmente considérablement et reflète le développement de la structure en champignon. La bulle de fluide léger envahit le fluide lourd et un pic de fluide lourd remonte dans le fluide léger. Finalement, à $t \approx 17$, l'amplitude sature car le champignon a atteint le fond de la boîte.

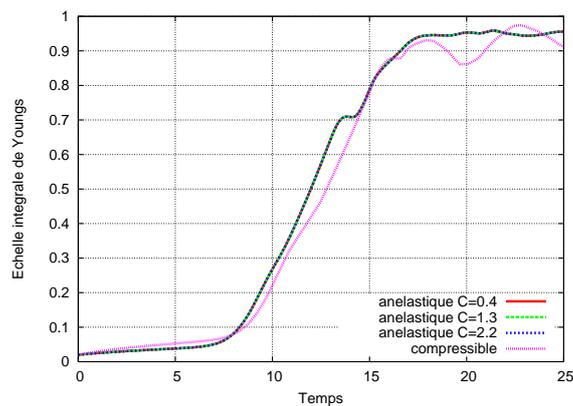


Figure V.14 – Évolution de la longueur de mélange pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

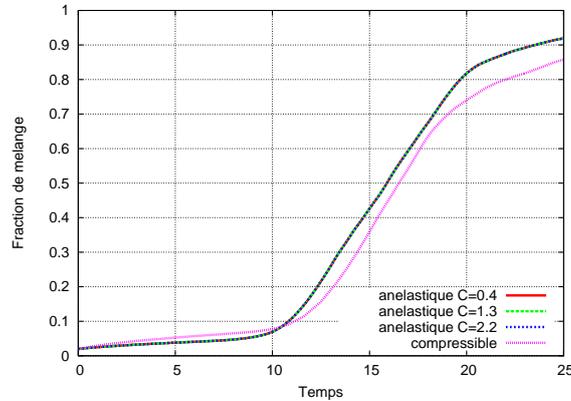


Figure V.15 – Évolution de la fraction de mélange pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

Nous constatons que les courbes représentant l'évolution de l'énergie cinétique moyennée, au cours du temps (figure V.16) montrent que la contrainte CFL ne semble pas influencer pour les trois valeurs considérées. Les profils de l'énergie cinétique moyennée présentent un comportement similaire selon les versions compressible et anélastique. Une fois que l'IRT se développe, les vitesses augmentent brusquement lors de l'apparition de la structure en champignon. Finalement, lorsque le champignon atteint le fond de la boîte l'énergie cinétique diminue fortement.

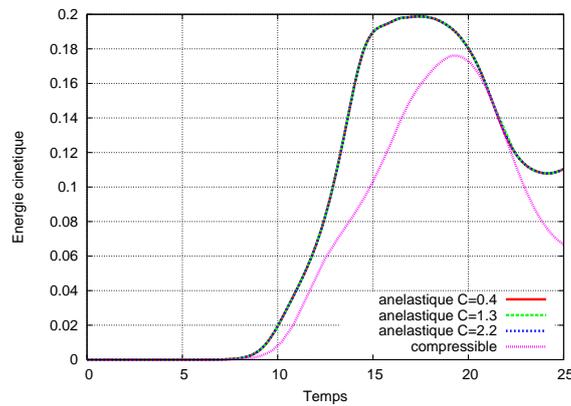


Figure V.16 – Évolution de l'énergie cinétique moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

Concernant la vorticité, sa moyenne présente la même allure dans les deux versions (*cf.* figure V.17). La vorticité permet d’apprécier l’enroulement des extrémités du champignon. Dans un premier temps, l’IRT peine à se développer puisque la perturbation initiale des vitesses est très faible (1×10^{-4}). Puis le champignon commence à se développer et très rapidement la vorticité augmente considérablement pour arriver à un maximum. L’IRT entame sa phase non-linéaire lorsque l’enroulement de l’interface artificielle des deux fluides est de plus en plus prononcé. Une fois que la vorticité a une valeur maximale, elle chute car le champignon a atteint le fond de la boîte.

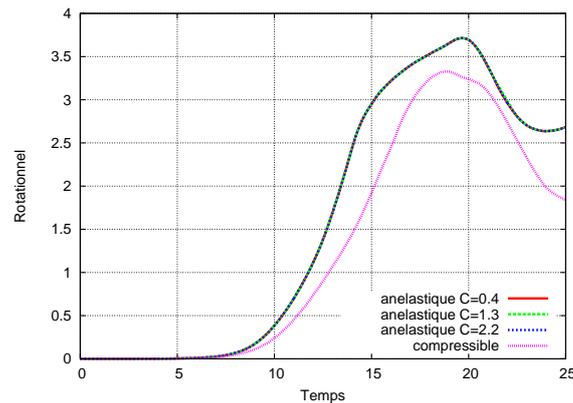


Figure V.17 – Évolution du rotationnel moyenné en $y z$ pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

La variance de la densité (*cf.* figure V.18) permet de caractériser la dispersion de la distribution de cette dernière. On constate que les profils sont similaires d’une version à l’autre, cela quelque soit la valeur de C . De même la figure V.19 présente la variance de concentration moyennée. Une fois de plus on observe une bonne corrélation entre la version anélastique et compressible.

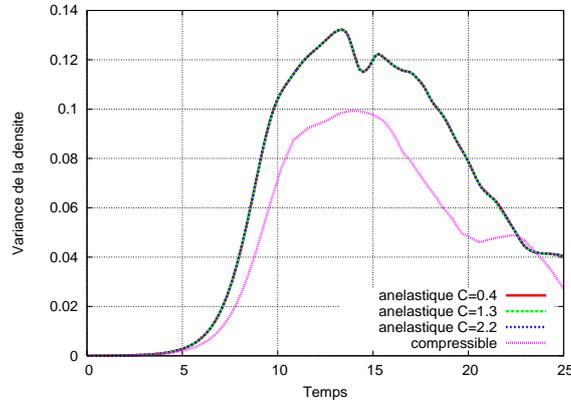


Figure V.18 – Évolution de la variance de densité moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

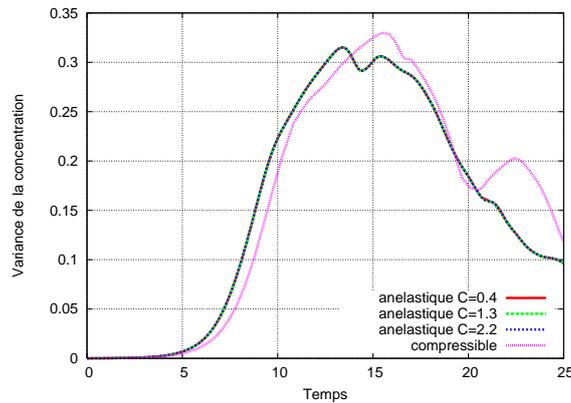


Figure V.19 – Évolution de la variance de concentration moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

Les figures suivantes prennent en compte les fluctuations de pression et les pressions totales. Nous observons que ces termes sont nettement supérieurs en version anélastique. Cette constatation s'explique par la différence de l'expression de l'équation d'état dans les deux versions. En effet, pour des fluides compressibles elle a pour expression : $P = (1 + r_M - 2 r_M c) \rho T$ alors qu'en approximation anélastique elle est représentée par la relation donnée dans le système II. 4. 13 (version linéarisée de la relation précédente).

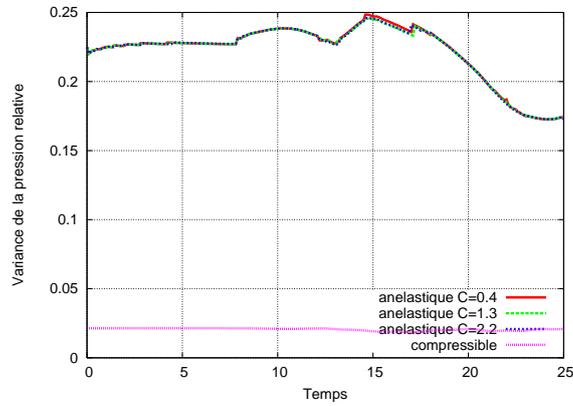


Figure V.20 – Évolution de la variance relative de la pression moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

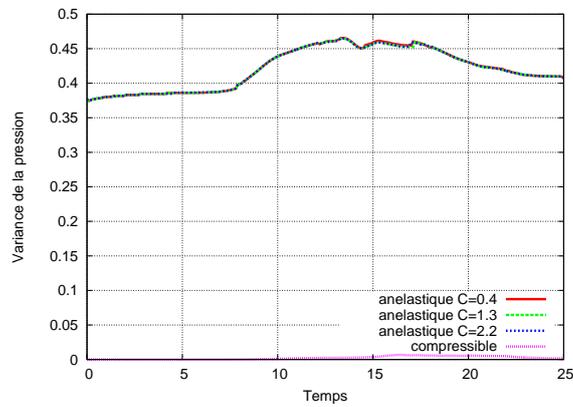


Figure V.21 – Évolution de la variance de la pression moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

L'écart de la dissipation (*cf.* figure V.22) dans les deux versions semblent plus prononcé que les autres grandeurs physiques moyennées du développement de l'IRT.

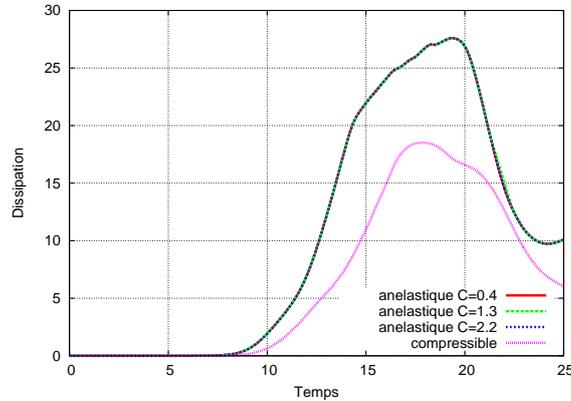


Figure V.22 – Évolution de la dissipation moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

La figure V.23 confirme bien qu'à partir de $t \approx 6$, l'instabilité commence à se développer pour atteindre le fond de la boîte à $t \approx 17$.

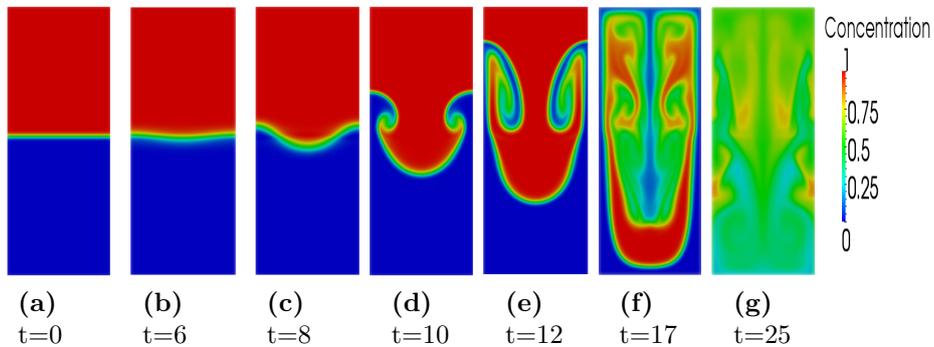


Figure V.23 – Évolution du champ de concentration pour la configuration standard.

Dans l'ensemble, nous constatons que les comportements du développement de l'IRT sont identiques selon la valeur de la contrainte CFL considérée en option anélastique. Cependant, nous remarquons une différence entre les versions anélastique et compressible. Les effets des ondes acoustiques, présentes dans les fluides compressibles, semblent atténuer le développement de l'IRT.

Le tableau V.4 résume les différentes caractéristiques des simulations, en particulier celles des décompositions dynamiques (DD).

Simulation	RTTI	RTTN	RTTP	RTTICF
C	0.4	1.3	2.2	0.4
Version	AN	AN	AN	COMP
Nombre de processeurs	16	16	16	16
Durée de simulation	3H03	1H18	1H30	24H50
Nombre de cycles en temps	106399	35003	20420	1121428
Nombre de décompositions	209	221	371	1451
Durée totale de DD	0H30	0H26	0H30	0H49
Temps de DD/temps CPU total	0.16	0.33	0.48	0.01
Δt_{moyen} (10^{-4})	2.4	7.1	12	0.22

Tableau V.4 – Paramètres numériques de la simulation standard.

Nous constatons un gain de temps spectaculaire entre les versions du code anélastique et compressible, le temps de calcul passe de 24H50 en version compressible, à 1H18 en version anélastique ($C = 1.3$). Le pas de temps beaucoup plus faible pour des fluides compressibles explique ce gain (*cf.* figure V.24), en effet, le tableaux V.4 montre que le pas de temps moyen passe de 0.22×10^{-4} (en version compressible) à 0.71×10^{-3} (en version anélastique), soit un facteur ≈ 30 . Le filtre des ondes sonores a ainsi permis d’augmenter le pas de temps moyen des simulations à l’aide de la version anélastique du code AMENOPHIS. De plus, nous pouvons conclure sur la valeur optimum de **C**. En effet, cette valeur se situe entre 1.3 et 2.2 car même si le pas de temps est plus élevé pour $C = 2.2$, la simulation correspondant à cette contrainte CFL présente beaucoup plus de remaillages (le maillage est auto-adaptatif) et donc demande plus de temps. En effet, le processus d’adaptation comporte une phase d’interpolation, qui induit des erreurs. Il faut donc limiter le nombre d’adaptations.

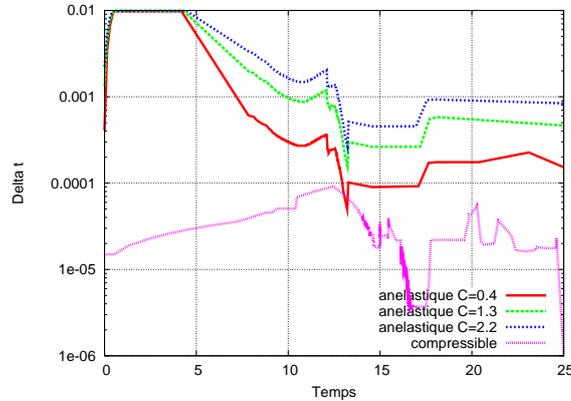


Figure V.24 – Évolution du pas de temps pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.

Ce chapitre nous a permis de valider les résultats de la version anélastique du code AMENOPHIS. En comparant les résultats numériques à ceux obtenus expérimentalement dans l'étude menée par Waddell *et al.*, nous avons constaté un développement similaire de l'IRT. Cependant, les différences permettent d'envisager un point d'amélioration qui consiste à prendre en compte une viscosité qui dépend de la concentration dans le code AMENOPHIS. La version anélastique permettrait aussi de prendre en compte des fluides incompressibles qui correspondrait à la limite de stratification nulle de la version anélastique. De plus, nous avons mis en évidence une légère différence dans les caractéristiques du développement de l'IRT d'une version à l'autre qui s'interprète par l'absence d'ondes acoustiques. Il serait donc intéressant de vérifier ce comportement en phase linéaire, en comparant des études sur la stabilité linéaire en AN et pour des fluides compressibles.

Chapitre VI

Influence de la stratification initiale des deux fluides

La particularité de cette version anélastique du code AMENOPHIS est qu'elle permet de prendre en compte les effets de compressibilité statique dans le développement en négligeant les effets de la compressibilité dynamique. Il est donc intéressant d'étudier les effets de la compressibilité statique en faisant varier le paramètre de stratification qui le représente. Ce chapitre est consacré à l'influence de la stratification initiale des deux fluides.

1 Champ de densité à l'instant initial

Pour notre étude, nous considérons la configuration standard dont les caractéristiques physiques et numériques sont données dans le tableau [V.4](#). Nous faisons varier la valeur paramètre Sr (0.2, 1 et 2). Les figures [VI.1](#) montrent la distribution des masses volumiques à l'équilibre hydrostatique. Nous remarquons que lorsque le paramètre de stratification est suffisamment important, le fluide léger devient plus dense au fond de la boîte que le fluide lourd situé au dessus.

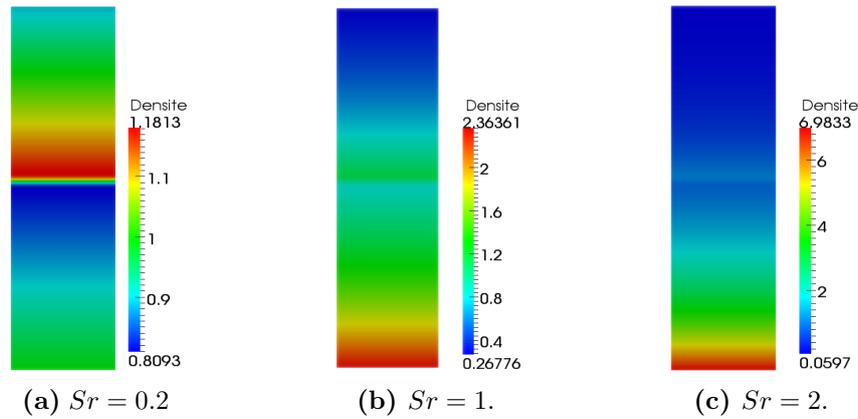


Figure VI.1 – Masse volumique de l'état hydrostatique pour différentes valeurs du paramètre de stratification.

Même si cette constatation paraît surprenante, l'IRT peut se développer puisque la condition nécessaire à l'apparition de l'IRT est la présence d'un saut de densité au niveau de l'interface des deux fluides. La figure VI.2 présente la densité moyenne en fonction de la hauteur z pour différentes valeurs du paramètre de stratification, à l'instant initial. Nous constatons bien le saut des masses volumiques au niveau de l'interface (qui reste identique quelque soit Sr , puisque le nombre d'Atwood reste inchangé).

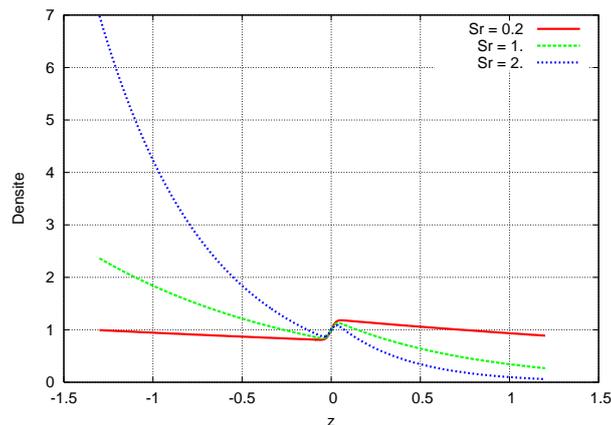


Figure VI.2 – Densité moyenne à $t = 0$ pour différentes valeurs de Sr .

2 Étude du développement de l'IRT selon le paramètre de stratification

Les figures VI.3-VI.8 permettent de présenter les évolutions de la concentration et de la vorticité, au cours du temps, pour les trois stratifications initiales des deux fluides. Le développement de l'IRT semble différent d'une stratification à l'autre. En effet, lorsque Sr augmente la taille du champignon diminue. Cette constatation est confirmée par la figure VI.10 pour les cas $Sr = 0.2$ et $Sr = 1$; la structure se développe plus lentement lorsque la stratification augmente. Dans le chapitre II, l'analyse en modes normaux de la stabilité linéaire va dans ce sens car elle met en évidence l'effet stabilisant de la stratification (*cf.* figure II.1). La configuration $Sr = 2$ a un comportement particulier. En effet, nous constatons une zone de vorticité intense, vers le fond de la boîte (*cf.* figure VI.8) car le maximum est multiplié par 2. Nous observons que l'IRT se développe de manière analogue aux configurations de faible stratification jusqu'à un temps avoisinant $t = 11$, cependant au delà de ce temps, le champignon se réduit à une aiguille qui descend plus vite. Cette aiguille ne descend plus par saut de masse volumique mais par inertie. De plus, cette configuration est particulière car le fluide lourd est descendu par l'IRT dans une région où il y a du fluide lourd (*cf.* figure VI.5) et présente ainsi un frein au développement de l'IRT. Concernant le champ de vorticité, nous constatons qu'il s'étale beaucoup plus sur la hauteur de la boîte mais sa largeur est beaucoup plus faible que pour des stratifications moins élevées.

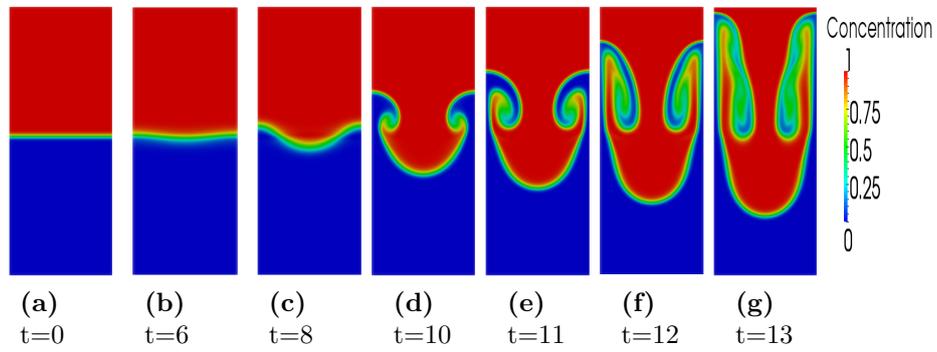


Figure VI.3 – Évolution du champ de concentration pour $Sr = 0.2$.

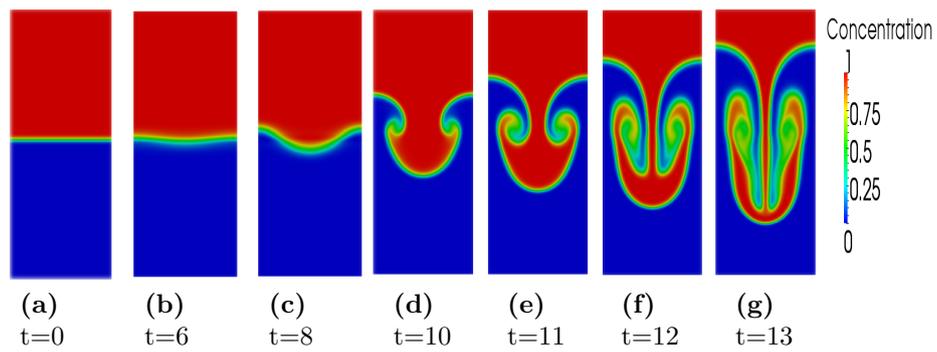


Figure VI.4 – Évolution du champ de concentration pour $Sr = 1$.

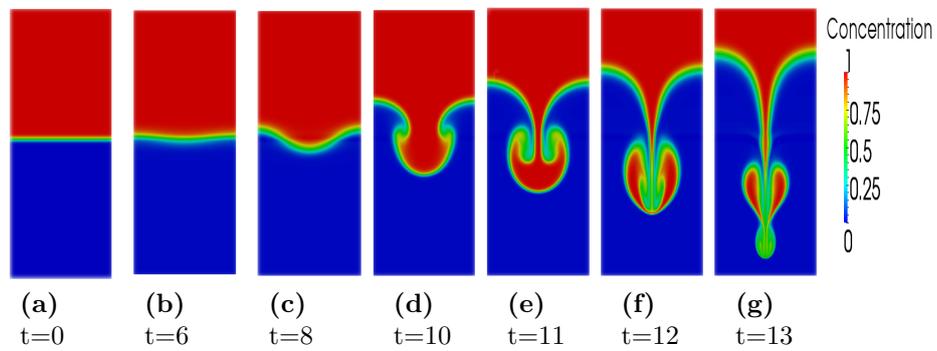


Figure VI.5 – Évolution du champ de concentration pour $Sr = 2$.

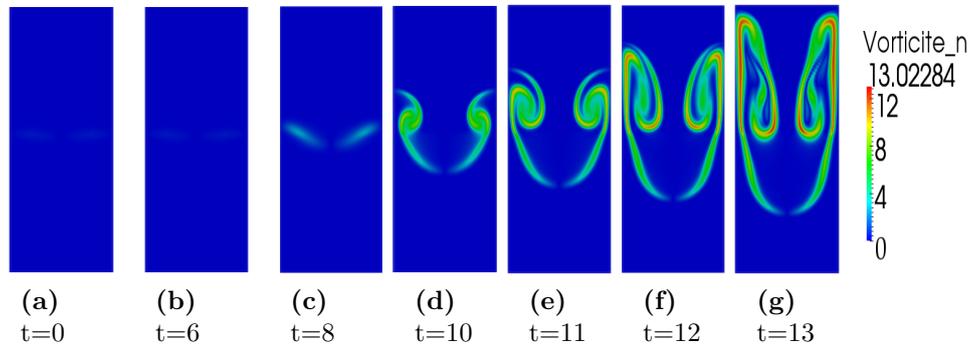


Figure VI.6 – Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 0.2$.

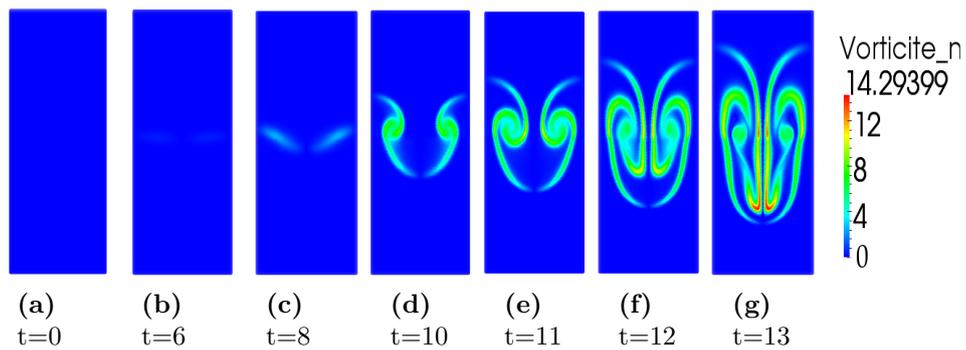


Figure VI.7 – Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 1$.

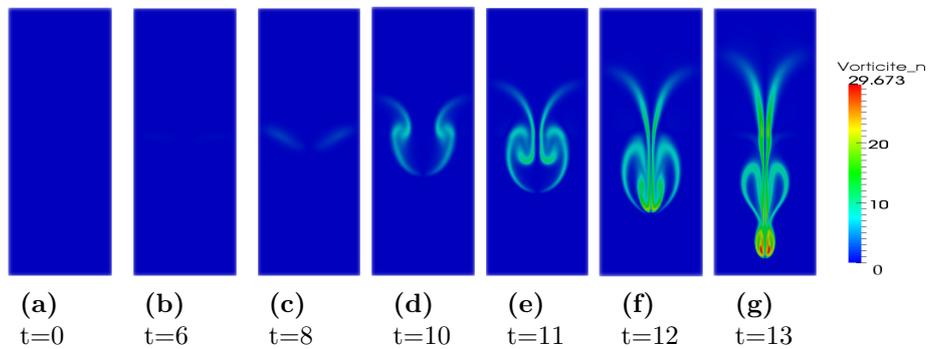
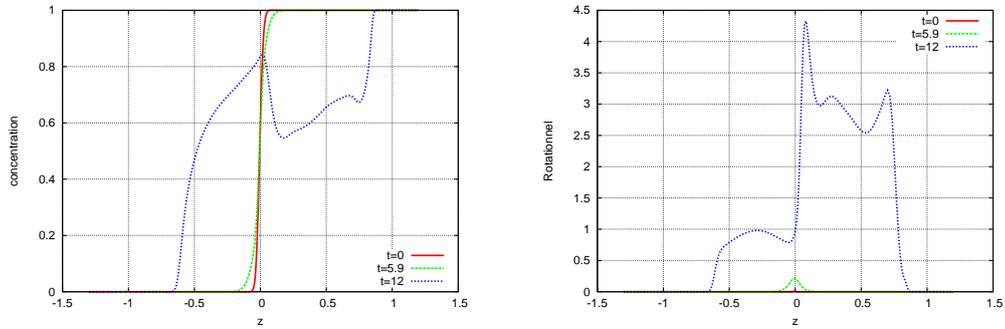
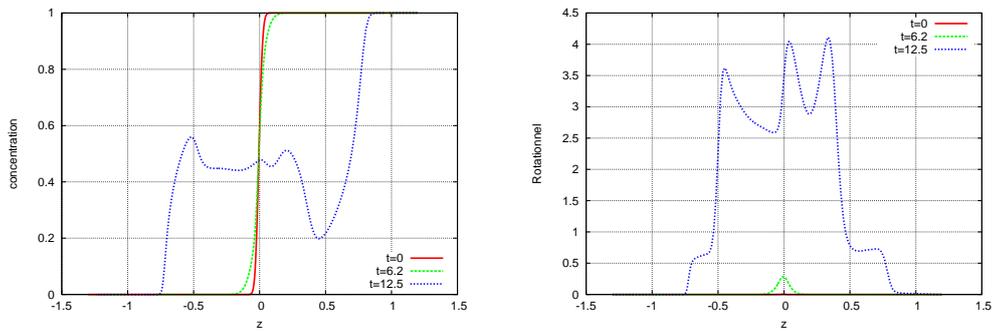


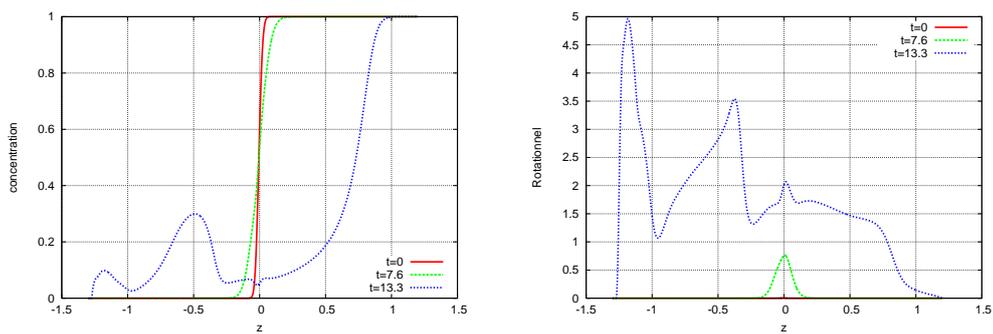
Figure VI.8 – Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 2$.



(a) $Sr = 0.2$, $t = 0$, $t = 5.9$ et $t = 12$



(b) $Sr = 1.0$, $t = 0$, $t = 6.2$ et $t = 12.5$



(c) $Sr = 2.0$, $t = 0$, $t = 7.6$ et $t = 13.3$

Figure VI.9 – Concentration et vorticité moyennées à 3 instants pour différentes valeurs de Sr .

Les figures VI.9 présentent les profils des concentration et vorticité moyennées

en y à différents temps de la simulation. Bien que les temps soient différents d'une simulation à l'autre on constate néanmoins la tendance de l'instabilité à se déplacer vers le fond de la boîte, aussi bien en concentration qu'en vorticité.

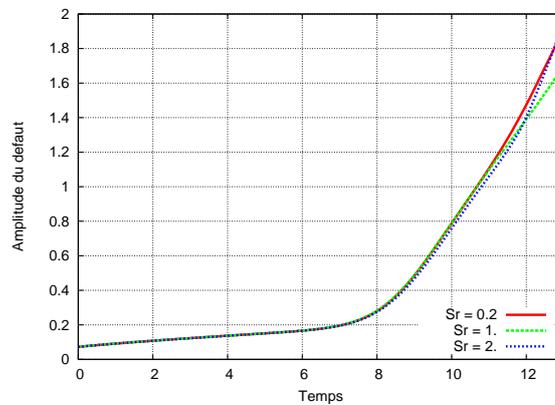


Figure VI.10 – Évolution de l'amplitude du défaut initial pour différentes valeurs de Sr .

Bien que les structures des champignons soient différentes d'une stratification à l'autre, les profils des grandeurs moyennées en y et z ne reflètent pas vraiment ce comportement. En effet, la figure VI.10 montre une évolution de l'amplitude du défaut initial équivalente pour les trois valeurs de stratification considérées. Concernant la longueur de mélange (*cf.* figure VI.11) et la fraction de mélange (*cf.* figure VI.12), pour les valeurs de stratification $Sr = 0.2$ et $Sr = 1$, nous ne voyons pas de différence en terme d'intégrale. De plus, pour $Sr = 2$, en fin de simulation elle semble diminuer, ce qui ne représente pas le comportement observé, puisque le champignon s'étale sur la hauteur de la boîte. Cette constatation n'est pas contradictoire car ici nous parlons de grandeurs moyennes.

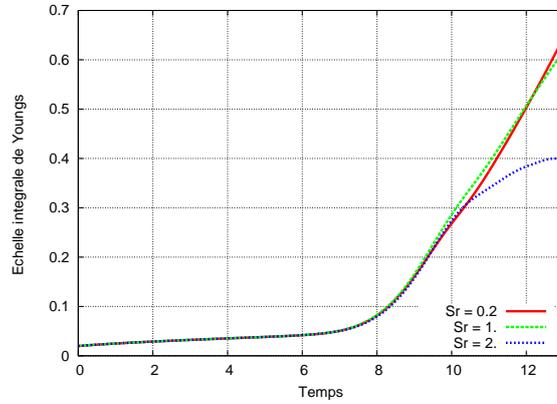


Figure VI.11 – Évolution de la longueur de mélange pour différentes valeurs de Sr .

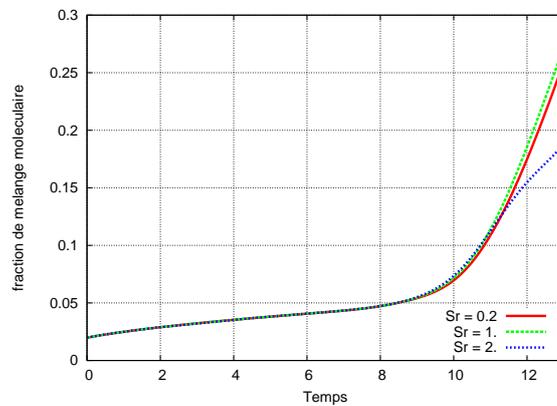


Figure VI.12 – Évolution de la fraction de mélange pour différentes valeurs de Sr .

La figure VI.13 permet d'apprécier l'évolution de l'énergie cinétique moyennée en y et z et nous constatons qu'elle est plus faible en fin de simulation lorsque la stratification vaut 2.

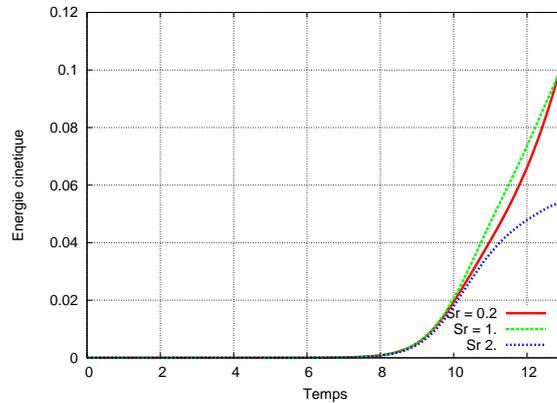


Figure VI.13 – Évolution de l'énergie cinétique moyennée en y et z pour différentes valeurs de Sr .

En ce qui concerne l'évolution de l'anisotropie de l'énergie cinétique, moyennée en y et z (*cf.* figure VI.14), celle-ci est différente dès l'initialisation et est plus élevée pour $Sr = 2$. Cette observation est certainement due au choix d'initialisation des champs de perturbations mentionnée plus haut dans le chapitre III (*cf.* section 5.4). Ceci nous conforte dans l'idée d'initialiser les simulations en résolvant une équation de Poisson, plutôt que de considérer les fonctions propres obtenues par l'analyse de la stabilité linéaire.

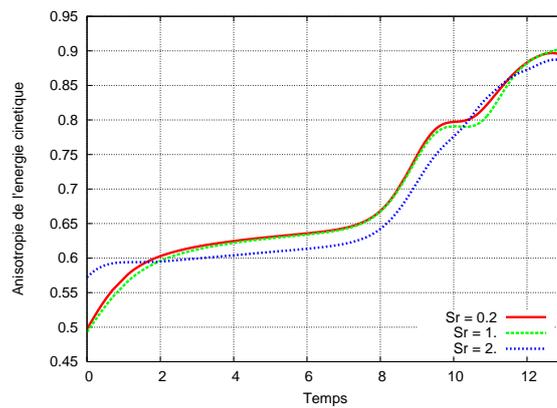


Figure VI.14 – Évolution de l'anisotropie de l'énergie cinétique, moyennée en y et z pour différentes valeurs de Sr .

La figure suivante montre qu'en terme d'intégrale, les champs de vorticité semblent identiques pour différentes valeurs de stratification bien que leurs structures soient très différentes lorsque Sr augmente.

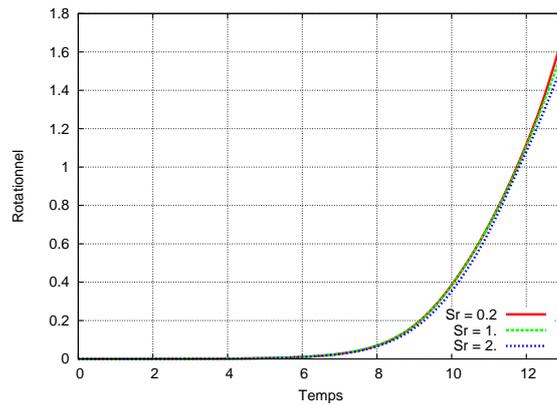


Figure VI.15 –  volution du rotationnel moyenn e en $y-z$ pour différentes valeurs de Sr .

L'évolution de la variance de la concentration (figure VI.16) semble similaire à celui de l'énergie cinétique.

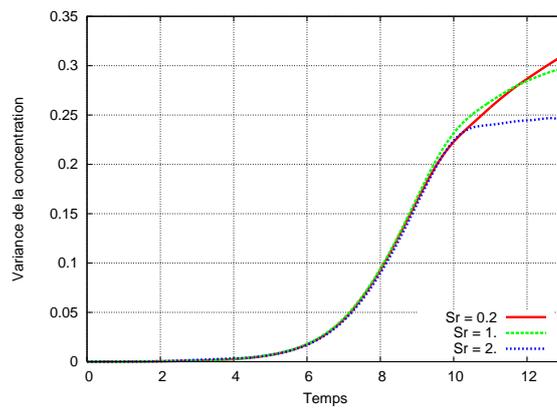


Figure VI.16 –  volution de la variance de concentration moyenn e en $y-z$ pour différentes valeurs de Sr .

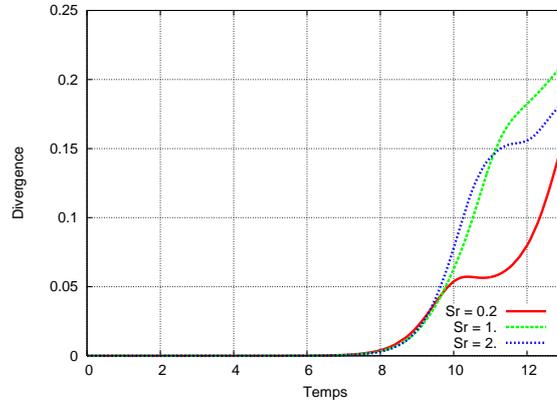


Figure VI.17 – Évolution de la divergence moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de Sr .

La variance relative de la pression moyennée (VI.18) évolue très différemment d'une configuration à l'autre particulièrement en début de simulation. Là encore l'initialisation des simulations semble être responsable de ces importantes différences de profils.

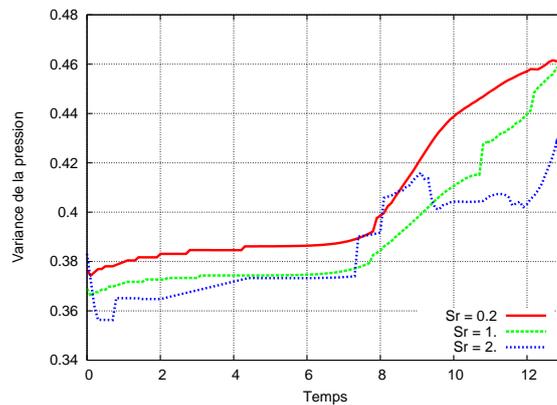


Figure VI.18 – Évolution de la variance de la pression moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de Sr .

La figure VI.19 montre que la dissipation moyennée est plus faible lorsque la stratification augmente.

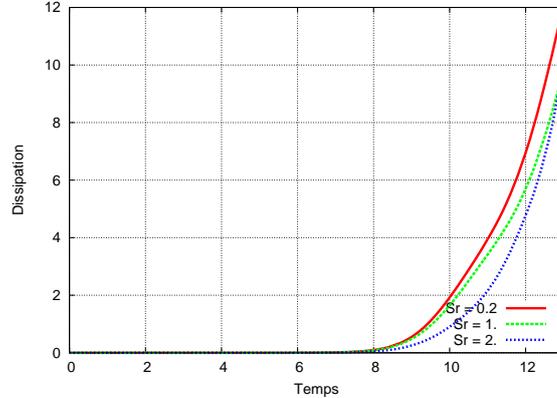


Figure VI.19 – Évolution de la dissipation moyennée en $y-z$ pour différentes valeurs de Sr .

Le pas de temps moyen diminue lorsque la stratification augmente, comme le montre la figure VI.20. Des simulations effectuées pour des fluides compressibles, à l'aide de la version initiale du code AMENOPHIS, ont montré que le pas de temps moyen augmentait avec la stratification car le pas de temps d'advection, proportionnel à \sqrt{Sr} pilote la simulation (Lafay (2007)). Étant donné que les ondes acoustiques sont filtrées le pas de temps d'advection n'intervient plus dans la version anélastique de AMENOPHIS.

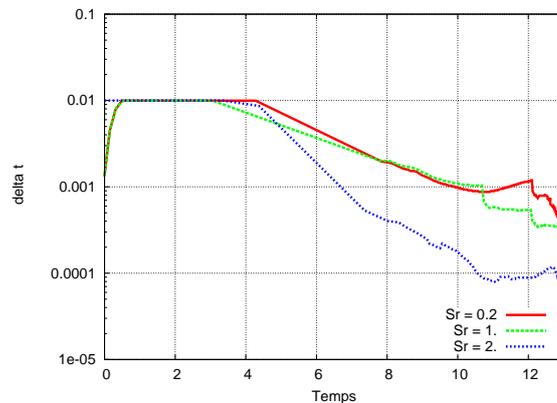


Figure VI.20 – Évolution du pas de temps pour différentes valeurs de Sr .

Ce début d'étude de l'influence de la stratification initiale des deux fluides nous a permis de mettre en évidence certains aspects du développement de l'IRT. Nous constatons que les simulations mono-modes semblent donner des résultats différents lorsque la stratification initiale des deux fluides devient de plus en plus importante. Cette constatation mérite de lancer plus de simulations afin de se conforter sur les comportements particuliers de ce type de configurations.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse est le développement d'une méthode numérique pour les équations de Navier-Stokes en approximation anélastique, appliquée aux instabilités de Rayleigh-Taylor. Des simulations numériques directes étaient effectuées jusqu'au début de ce projet à l'aide du code AMENOPHIS, développé pour des fluides miscibles, visqueux, compressibles et thermiquement conducteurs. Une nouvelle option a été développée dans le but d'augmenter le pas de temps contraint par la contrainte CFL, considérablement réduit par la présence d'ondes acoustiques. Ces ondes acoustiques étant les principales responsables du coût élevé de la résolution des équations complètes de Navier-Stokes, il a donc fallu développer un algorithme permettant la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'approximation dite « anélastique », qui permet de filtrer ces ondes grâce à un développement asymptotique. Une fois ces équations de Navier-Stokes obtenues dans une configuration Rayleigh-Taylor, en approximation anélastique, nous avons pu étudier la stabilité numérique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cadre de fluides parfaits. En établissant la relation de dispersion, nous avons ainsi mis en évidence l'effet stabilisant de la stratification et déstabilisant du rapport des densités des deux fluides. Finalement, l'étude la stabilité linéaire nous a permis de déterminer les fonctions propres des vitesses verticale et horizontale et la pression retenue pour l'initialisation des perturbations dans le code AMENOPHIS. Cette méthode d'initialisation permet de rendre compatible les conditions initiales en pression et en vitesse assurant ainsi la contrainte imposée par la conservation de la masse ($\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u}) = 0$).

Cependant, il serait encore plus judicieux de résoudre un problème de Poisson pour l'initialisation des perturbations de pression.

L'implantation de l'option anélastique du code AMENOPHIS a demandé de nombreuses modifications dans l'algorithme de résolution. En effet, la méthode de résolution retenue pour cette approximation est la méthode d'Uzawa généralement utilisée dans le cadre de fluides incompressibles. De plus la méthode de décomposition de domaine appliquée à des équations à caractère elliptique, demande un algorithme différent de celui utilisé pour des équations paraboliques (telles qu'elles étaient considérées dans les versions précédentes). En outre, l'existence de modes de pression parasite a nécessité une résolution particulière pour le mode de Fourier $|K| = 0$.

L'étude du problème de Stokes dans le cadre d'une configuration stratifiée (à stratification constante) a permis de montrer que le problème était elliptique et que les spectres de l'opérateur de Stokes présentent des similitudes avec les résultats analytiques. Nous avons également présenté les modes propres de Stokes de cette même configuration. Les modes propres de l'instabilité de Rayleigh-Taylor classique mériteraient certainement d'être analysés.

Une fois le développement du code terminé, la validation reste une étape importante avant une étude paramétrique des résultats numériques. Les algorithmes et l'implantation dans le code AMENOPHIS sont validés par les comparaisons de l'opérateur d'Uzawa développé en Fortran et à l'aide de Mathematica. De plus des résultats numériques ont été comparés à une expérience avec des fluides incompressibles. Finalement, une étude des solutions numériques obtenues avec les options anélastique et compressible a été menée. La comparaison des résultats numériques obtenus par la version anélastique de AMENOPHIS à ceux obtenus expérimentalement dans l'étude menée par Waddell *et al.* a révélé un développement similaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Nous avons également mis en évidence une légère différence dans les caractéristiques du développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en comparant les simulations effectuées avec la version anélastique et compressible, qui serait due au filtrage des ondes acoustiques dans la version anélastique. Cette constatation nous incite à vérifier ces différents comportements en phase linéaire. De plus, le pas de temps moyen passe de 0.22×10^{-4} (en version compressible) à 0.71×10^{-3} (en version anélastique), pour un exemple de solution mono-mode, soit

un facteur ≈ 32 ; ce qui satisfait aux attentes de ces travaux de thèse.

Finalement, l'abandon de la compressibilité dynamique (liée à l'équation d'état), nous incite à étudier le comportement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en faisant varier le paramètre de stratification (Sr) représentatif de la compressibilité statique. Le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor semble différent d'une stratification à l'autre. Cette constatation mérite d'étudier plus de simulations afin de se conforter sur les comportements particuliers de ce type de configurations.

Ces différents résultats numériques présentés ne sont considérés qu'en 2D. Cependant, la version anélastique a été développée en 3D. À l'issue de ce travail, il est envisageable de simuler des couches de mélange turbulentes issues des instabilités de Rayleigh-Taylor dans l'approximation anélastique, avec des délais de traitements considérablement réduits et acceptables, par rapport à ceux obtenus avec les équations de Navier-Stokes complètes.

L'étape de validation permet également d'élargir des perspectives d'évolution du code AMENOPHIS. Les différences des résultats numériques et expérimentaux nous encouragent à envisager un point d'amélioration qui consiste à prendre en compte une viscosité qui dépend de la concentration. La version anélastique permettrait également de prendre en compte des configurations non-stratifiées qui correspondraient à la limite de stratification nulle de la version anélastique.

Annexe A : Indice adiabatique du mélange

L'indice adiabatique du mélange s'écrit :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

En exprimant les capacités calorifiques du mélange à l'aide des capacités calorifiques de chaque gaz, cette relation devient :

$$\gamma = \frac{c C_{p H} + (1 - c) C_{p L}}{c C_{v H} + (1 - c) C_{v L}}.$$

La capacité calorifique à pression constante de chaque constituant peut s'écrire en fonction de la capacité calorifique à volume constant du même constituant :

$$\gamma = \frac{c \left[C_{v H} + \frac{R}{M_H} \right] + (1 - c) \left[C_{v L} + \frac{R}{M_L} \right]}{c C_{v H} + (1 - c) C_{v L}}.$$

En utilisant la relation : $C_{v i} = \frac{R}{(\gamma_i - 1)M_i}$, cette dernière relation se réécrit :

$$\gamma = \frac{c \left[\frac{R}{(\gamma_H - 1)M_H} + \frac{R}{M_H} \right] + (1 - c) \left[\frac{R}{(\gamma_L - 1)M_L} + \frac{R}{M_L} \right]}{c \frac{R}{(\gamma_H - 1)M_H} + (1 - c) \frac{R}{(\gamma_L - 1)M_L}},$$

Annexe A : Indice adiabatique du mélange

soit, en simplifiant :

$$\gamma = \frac{c(\gamma_L - 1)M_L\gamma_H + (1 - c)(\gamma_H - 1)M_H\gamma_L}{c(\gamma_L - 1)M_L + (1 - c)(\gamma_H - 1)M_H}.$$

Si on pose $\Gamma = \frac{(\gamma_H - 1) - (\gamma_L - 1)}{(\gamma_H - 1) + (\gamma_L - 1)}$ et $r_M = \frac{M_H - M_L}{M_H + M_L}$, alors, γ peut s'écrire :

$$\gamma(c) = \frac{c(1 - \Gamma)(1 - r_M)\gamma_H + (1 - c)(1 + \Gamma)(1 + r_M)\gamma_L}{c(1 - \Gamma)(1 - r_M) + (1 - c)(1 + \Gamma)(1 + r_M)}.$$

Nous pouvons définir un γ de référence. Pour cela, nous définissons une concentration de référence $c_r = (1 - A_t)/2$, et $r_M = A_t$ l'indice adiabatique s'écrit :

$$\gamma_r = \frac{(1 - \Gamma)(1 - A_t)^2\gamma_H + (1 + \Gamma)(1 + A_t)^2\gamma_L}{(1 - \Gamma)(1 + A_t)^2 + (1 + \Gamma)(1 - A_t)^2}.$$

Annexe B : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'AN

A Redimensionnement des équations de Navier Stokes dans le cadre de l'AN

A.1 État hydrostatique

La première équation du système II. 4. 10, provenant de l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut se réécrire :

$$\frac{L}{\rho_r RT_r} \frac{dp^{(0)*}}{dx_i^*} = -\frac{gL_r}{RT_r} \frac{\rho^{(0)*}}{\rho_r} \delta_{i3}.$$

Ce système devient après simplification :

$$\frac{dp^{(0)*}}{dx_i^*} = -g \frac{\rho^{(0)*}}{\rho_r} \delta_{i3}.$$

De même la relation algébrique provenant de la loi d'état se redimensionne comme :

$$\frac{p^{(0)*}}{\rho_r RT_r} = -\frac{\rho^{(0)*}}{\rho_r} \frac{T^{(0)*}}{T_r} \left(1 + r_M - 2r_M c^{(0)}\right),$$

soit :

$$p^{(0)*} = -R \rho^{(0)*} T^{(0)*} \left(1 + r_M - 2r_M c^{(0)} \right).$$

Et finalement la dernière équation de l'état hydrostatique se réécrit :

$$\Delta T^{(0)*} = 0.$$

A.2 État dynamique

La contrainte déduite de l'équation de continuité du système II. 4. 11 redimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial \left(\rho^{(0)*} u_i^{(1)*} \right)}{\partial x_i^*} = 0.$$

L'équation dérivée de la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{L_r}{\rho_r U_r^2} \rho^{(0)*} \frac{du_i^{(1)*}}{dt^*} = -\frac{L_r}{\rho_r R T_r} \frac{\partial p^{(1)*}}{\partial x_i^*} + \frac{\mu L_r}{\rho_r U_r^2} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)*}}{\partial x_j^*} - \frac{g L_r}{R T_r \rho_r} \rho^{(1)*} \delta_{i3},$$

soit,

$$\rho^{(0)*} \frac{du_i^{(1)*}}{dt^*} = -\frac{U_r^2}{R T_r} \frac{\partial p^{(1)*}}{\partial x_i^*} + \mu \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)*}}{\partial x_j^*} - \frac{g U_r^2}{R T_r} \rho^{(1)*} \delta_{i3}.$$

On obtient ainsi :

$$\rho^{(0)*} \frac{du_i^{(1)*}}{dt^*} = -\frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\gamma_r M a^2 p^{(1)*} \right) + \mu \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)*}}{\partial x_j^*} - g \left(\gamma_r M a^2 \rho^{(1)*} \right) \delta_{i3}.$$

Penchons nous sur l'équation différentielle obtenue par la conservation de l'énergie, en la réadimensionnant, elle devient :

$$\begin{aligned} \frac{L_r}{\rho_r T_r U_r (\gamma_r - 1)} \frac{\rho^{(0)*}}{dt^*} \frac{d \left(T^{(1)*} \right)}{dt^*} &= -\frac{L_r}{\rho_r R T_r U_r} p^{(1)*} \frac{\partial u_j^{(1)*}}{\partial x_j^*} + \frac{\mu L_r}{\rho_r U_r^3} \sigma_{ij}^{(1)*} \frac{\partial u_i^{(1)*}}{\partial x_j^*} \\ &+ \frac{\kappa L_r}{(\gamma_r - 1) \rho_r C_v U_r T_r} \Delta^* T^{(1)*} - \frac{L_r}{\rho_r U_r T_r} \rho^{(1)*} C_v u_3^{(1)*} \frac{dT^{(0)*}}{dz^*} \\ &- \frac{L_r}{\rho_r U_r T_r} \left(\rho^{(0)*} T^{(1)*} + \rho^{(1)*} T^{(0)*} \right) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)*}} B c \frac{\partial^2 c^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}. \end{aligned}$$

En multipliant par $\gamma_r Ma^2$, cette relation devient :

$$\begin{aligned} \rho^{(0)*} \frac{d(\gamma_r Ma^2 T^{(1)*})}{dt^*} &= -\frac{1}{C_v} (\gamma_r Ma^2 p^{(1)*}) \frac{\partial u_j^{(1)*}}{\partial x_j^*} + \frac{\mu(\gamma_r - 1)}{R} \sigma_{ij}^{(1)*} \frac{\partial u_i^{(1)*}}{\partial x_j^*} \\ &+ \frac{\kappa}{C_v} \Delta^* (\gamma_r Ma^2 T^{(1)*}) - \frac{\gamma_r \gamma_r Ma^2}{C_v} \rho^{(1)*} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)*}}{dz} \\ &- \frac{\gamma_r \gamma_r Ma^2}{C_v} (\rho^{(0)*} T^{(1)*} + \rho^{(1)*} T^{(0)*}) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)*}} Bc \frac{\partial^2 c^*}{\partial x_j \partial x_j^*}. \end{aligned}$$

Finalement, l'équation d'état se réécrit :

$$\frac{\rho^{(1)*}}{\rho^{(0)*}} = \frac{p^{(1)*}}{p^{(0)*}} - \frac{T^{(1)*}}{T^{(0)*}} + \frac{2r_M (c^* - c^{(0)*})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)*}}.$$

Désormais, il nous faut réécrire ces équations à l'aide d'un nouvel adimensionnement.

B Nouvel adimensionnement des équations de Navier-Stokes

On utilise les mêmes grandeurs caractéristiques que précédemment, à l'exception de la relation $U_r = \sqrt{gL}$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement et d'évolution de l'énergie requièrent notre attention. Concernant l'état dynamique, la contrainte provenant de l'équation de continuité et l'équation d'état restent inchangées. Seules les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont à adimensionner de nouveau : l'équation de quantité de mouvement se réécrit :

$$\rho_r g \rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{\rho_r R T_r}{L} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_r Ma^2 p^{(1)} + \frac{\mu \sqrt{gL}}{L^2} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - \rho_r g (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) \delta_{i3},$$

soit :

$$\rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{Sr} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma_r Ma^2 p^{(1)}) + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) \delta_{i3}.$$

Annexe B : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'AN

Finalement, la conservation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}
 \rho_r T_r \sqrt{\frac{g}{L}} \rho^{(0)} \frac{d}{dt} (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) &= -\frac{\rho_r R T_r}{C_v} \sqrt{\frac{g}{L}} (\gamma_r Ma^2 p^{(1)}) \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{(\gamma_r - 1) \mu g}{RL} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} \\
 &+ \frac{\kappa T_r}{C_v L^2} \Delta (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) - \frac{L_r}{\rho_r \sqrt{g L T_r}} (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} \\
 &- \frac{L_r}{\rho_r \sqrt{g L T_r}} \left(\rho^{(0)} (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) + (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) T^{(0)} \right) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} Bc \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\
 &+ \frac{L_r}{\rho_r \sqrt{g L T_r}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right)
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \rho^{(0)} \frac{d}{dt} (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) &= -(\gamma_r - 1) (\gamma_r Ma^2 p^{(1)}) \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\gamma_r (\gamma_r - 1) Ma^2}{Re} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} \\
 &+ \frac{\gamma_r}{Pr Re} \Delta (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) - (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} \\
 &- \left(\rho^{(0)} (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) + (\gamma_r Ma^2 \rho^{(1)}) T^{(0)} \right) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} Bc \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\
 &+ \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) (\gamma_r Ma^2 T^{(1)}) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right).
 \end{aligned}$$

Par souci de simplification on remplace les grandeurs $\gamma_r Ma^2 \phi^{(1)}$ par $\phi^{(1)}$ sauf pour les vitesses. Les équations de Navier-Stokes en AN deviennent avec ce nouvel adimensionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(0)} u_i^{(1)}) = 0, \\
\rho^{(0)} \frac{du_i^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{Sr} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{\rho^{(0)}}{p^{(0)}} p^{(1)} \delta_{i3} \\
\quad - \rho^{(0)} \left[\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} - \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}} \right] \delta_{i3}, \\
\rho^{(0)} C_v \frac{dT^{(1)}}{dt} = -(\rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)}) \frac{d_c C_v}{\rho^{(0)}} \frac{B}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j} \\
\quad - \rho^{(1)} C_v u_3^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{dz} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Sc Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((C_{p,H} - C_{p,L}) T^{(1)} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \\
\quad + \frac{\gamma_r}{Re Pr} \Delta T^{(1)} + \frac{(\gamma_r - 1)}{Re} \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j} - (\gamma_r - 1) p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_j}, \\
\rho^{(0)} \frac{dc}{dt} = \frac{B}{Sc Re} \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \partial x_j}, \\
\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} = \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{2r_M (c - c^{(0)})}{1 + r_M - 2r_M c^{(0)}}.
\end{array} \right.$$

Annexe B : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes dans le
cadre de l'AN

Annexe C : Inversion partielle

L'inversion des matrices se fait par diagonalisation . Soit, $\{\lambda_j\}$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice M et P^{-1} celle qui la diagonalise, M et P sont reliés par la relation :

$$D = P^{-1} M P,$$

Où D représente la matrice diagonale. Les lignes de P^{-1} sont les vecteurs propres à gauche de la matrice M et les colonnes de P sont ses vecteurs propres à droite. M peut se réécrire sous la forme :

$$M = P D P^{-1}.$$

Ainsi, l'inverse de la matrice M a pour expression :

$$M^{-1} = P D^{-1} P^{-1}.$$

Une matrice M^{-1} est l'inverse partiel d'une matrice M si elle vérifie les relations d'identité partielle :

$$M^{-1}.M = I_{M^{-1}.M}, M.M^{-1} = I_{M.M^{-1}},$$

où les matrices $I_{M^{-1}.M}$ et $I_{M.M^{-1}}$ ont leurs valeurs propres égales à 0 ou 1. Concrètement, pour un opérateur présentant des dérivées secondes, cela revient à perdre une partie constante, et une partie linéaire de la fonction de départ. Ces matrices présentent ainsi une infinité d'inverses partielles. Dans notre étude, nous considérons l'inverse partielle canonique qui est relativement simple d'un point de vue numé-

rique. En effet, la matrice diagonale définie plus haut D^{-1} est constituée des valeurs propres inverses lorsqu'elles sont non nulles, est de 0 lorsqu'elles sont nulles (*cf.* [Labrosse \(2011\)](#)).

Annexe D : Expressions des opérateurs d’Uzawa et d’Helmholtz

Equation pour la pression :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left[\underbrace{|K| \overline{M} H_U^{-1} \underline{\mathbb{I}}}_{\text{prod3u}} - \underbrace{(\overline{D} + L_\rho^{-1} \overline{\mathbb{I}}) H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right)}_{\text{prod2w}} \right]}_{\text{opérateur_pression_uzawa}} \tilde{P}_{k,h}^{(s)} \\
 & = \\
 & -\Sigma_w + \Sigma_{Uw} - \underbrace{(\overline{D} + L_\rho^{-1} \overline{\mathbb{I}}) H_w^{-1}}_{\text{sp3}} \underbrace{\left(\tilde{S}_{w \ k,h \ I} + \tilde{S}_{cl \ w \ k,h \ I} \right)}_{\text{sourcep3}} \\
 & - \underbrace{\frac{B_u |K|^2}{3 A_u} \overline{M} H_U^{-1} L_\rho^{-1} H_w^{-1}}_{\text{sp1}} \underbrace{\left(\tilde{S}_{w \ k,h \ I} + \tilde{S}_{cl \ w \ k,h \ I} \right)}_{\text{sourcep1}} \\
 & - \underbrace{|K| \overline{M} H_U^{-1}}_{\text{sp2}} \underbrace{\left(\tilde{S}_{U \ k,h \ I} + \tilde{S}_{cl \ U \ k,h \ I} \right)}_{\text{sourcep2}}
 \end{aligned}$$

Annexe D : Expressions des opérateurs d'Uzawa et d'Helmholtz

* Equation pour la vitesse w :

$$\tilde{w}_{k,hI}^{(s)} = \underbrace{-H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right)}_{\text{opérateur_w_uzawa}} \tilde{p}_{k,h}^{(s)} + \underbrace{H_w^{-1} \left(\tilde{S}_{w\ k,h\ I} + \tilde{S}_{cl\ w\ k,h\ I} \right)}_{\text{sourcew}}$$

* Equation pour la vitesse u :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{k,hI}^{(s)} &= H_U^{-1} |K| \underbrace{\left[-\frac{B_u}{3 A_u} L_{\rho\ I}^{-1} H_w^{-1} \left(\underline{D} - \frac{C_{u3} \rho^{(0)}}{A_u p^{(0)}} \underline{\mathbb{I}} \right) + \underline{\mathbb{I}} \right]}_{\text{opérateur_u_uzawa}} \tilde{p}_{k,h}^{(s)} \\ &+ \underbrace{\frac{B_u |K|}{3 A_u} H_U^{-1} L_{\rho\ I}^{-1} H_w^{-1} \left(\tilde{S}_{w\ k,h\ I} + \tilde{S}_{cl\ w\ k,h\ I} \right)}_{\text{sp12}} + \underbrace{H_U^{-1} \left(\tilde{S}_{U\ k,h\ I} + \tilde{S}_{cl\ U\ k,h\ I} \right)}_{\text{sourceu2}} \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{sourceu1}} \\ &\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{sourceu}} \end{aligned}$$

**Annexe E : Modes propres de
Stokes en approximation
anélastique dans un canal plan
infini**

Anelastic Stokes Eigenmodes in Infinite Channel

Zohra Hammouch · Gérard Labrosse · Serge Gauthier

Received: 9 January 2012 / Revised: 11 June 2012 / Accepted: 14 June 2012
© Springer Science+Business Media, LLC 2012

Abstract The anelastic Stokes eigenmodes are computed for a fluid confined, in presence of gravity, between two horizontally infinite plates. These eigenmodes are described by one horizontal wave number k . The eigenvalues $\lambda(k^2)$ are proved to be all negative. They depend monotonically upon k , behaving like k^2 for very large k .

Two particular values of k are considered, i.e., $k = 2\pi$ and $k = 0$, and the stratification parameter of the equilibrium state is taken between 0 (incompressible approximation) and 10 (upper limit of the anelastic configuration). The $k = 2\pi$ eigenvalue problem is solved numerically while the $k = 0$ is solved both numerically and analytically. Two physical configurations are analyzed, one with no-slip boundary conditions imposed on both horizontal walls, and one with no-stress, while imposing no flow through these boundaries in both cases. The main results are: (i) the smaller the stratification, the larger the decay rate, (ii) the eigenmodes are localized in the lower part of the channel, their vertical extension increasing with the eigenmode spatial frequency, (iii) the Neumann eigenmode decay rates are smaller than their Dirichlet counterparts, except for $k = 0$, where it is just the reverse, (iv) a general trend seems to emerge from the present study, regarding the way the numerical eigenvalues of an elliptic operator compare with the analytical ones, viz., the numerical spectrum overestimates (in absolute value) the analytical spectrum, slightly in the low frequency part of the spectrum and more and more strongly in the upper part.

Keywords Anelastic Stokes eigenmodes · Galerkin method · Reid-Harris eigenfunctions · Extended Reid-Harris eigenfunctions · Flow in infinite channel

1 Introduction

This paper is devoted to the determination of the eigenspace of the Stokes problem formulated within the anelastic-approximation framework.

Z. Hammouch · G. Labrosse · S. Gauthier (✉)
CEA, DAM, DIF, Bruyères-le-Châtel, 91297 Arpajon, France
e-mail: Serge.Gauthier@cea.fr

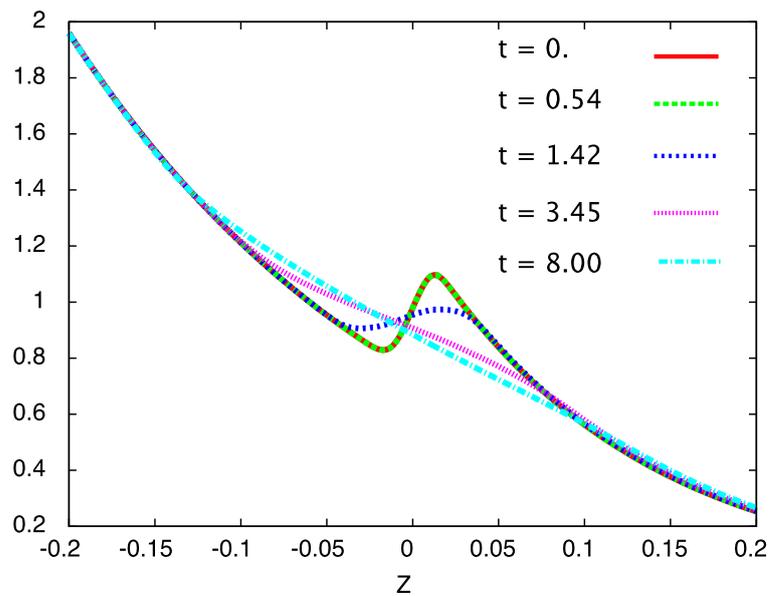
It is well-known that the complete Navier-Stokes equations describe the evolution of the three basic Kovásznyai modes, i.e., the vorticity, entropic and acoustic modes, [6]. However, in many flows, the acoustics carries very little energy and no particular information and thus, it may be neglected. This leads to the so-called “low Mach number” family of approximations. Among them, the “anelastic” approximation has been first established by Gough, [8], and since then, widely used by astrophysicists, for the simulation of thermal convection. This approximation filters out the acoustic mode but keeps the vorticity and entropic modes. In particular, it allows us to retain the stratification of the initial equilibrium rest state. It generalizes the Boussinesq approximation by considering now that it is the momentum field, i.e., the product of a constant nonuniform density by the velocity, and not the velocity itself, which is solenoidal.

This work is developed in the context of the Rayleigh-Taylor (RT) instability, the RT flow being the potentially unstable superposition of a heavy fluid above a lighter one in a constant acceleration field. Each layer, the heavy and lighter ones, is stably stratified. Such an instability is present and plays a prominent role, for example, in inertial-confinement fusion and in supernovae explosion in astrophysics. Most of the RT numerical simulations have been carried out either within the framework of the Boussinesq approximation, i.e., with an incompressible flow settled in an unstratified layer, or with the complete Navier-Stokes equations, [1, 2]. These approaches suffer from major drawbacks. First, the physics involved in the Boussinesq model may be limited and, second, the presence of acoustic waves strongly reduces the time step and slows down the numerical simulations. Between these two limits, the anelastic approximation offers a good trade-off. In this study, the fluid temperature is constant and uniform, which will bring illustrations of the differences one can have between the incompressible and the anelastic physics of the Stokes modes.

This paper is totally dedicated to the Stokes part of the anelastic Navier-Stokes problem, i.e., the problem one obtains by dropping the inertia term $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. The object is to settle and to verify the ellipticity of the anelastic approximation and to compute the spectrum of the associated Stokes operator.

Why to pay such an attention to this linear problem? The answer is two-fold. There is first a practical issue. The eigenvalues of this operator are shown to be all real and negative (apart from one zero eigenvalue in the no-stress case), meaning that the solution dies out as time goes on if there is no sustained source. This result is essential, since it is related to the stability properties of the numerical approximation. But more important is the fundamental insight one can get from this analysis. Any solution to the full unsteady Navier-Stokes problem can be decomposed into an “inhomogeneous” part, viz., the particular solution of the inhomogeneous differential system which satisfies the inhomogeneous boundary conditions, plus a remaining “homogeneous” part which can be expanded into the Stokes eigenmodes. In particular, the time fluctuating part of a turbulent Navier-Stokes solution constitutes a part of this latter component of the solution, and the Stokes eigenmodes supply the natural basis for analyzing it. The Stokes eigenmodes open thus the access to the Navier-Stokes dynamics. It turns out that the anelastic Stokes eigenmodes which are computed in this paper are related to the latest phase of the RT dynamics. To understand this comment, let us observe Fig. 1 which gives the density profile horizontal averages at selected times in the evolution of the instability. One recognizes at the first times the superposition of the two stably stratified layers with a jump in density which smooths down as times goes on. At large enough times, for t larger than 8 according to this figure, the whole density profile tends to get monotonic, leading, little by little, to an exponentially stable stratified layer. This is precisely the model adopted for the anelastic Stokes eigenmodes.

Fig. 1 Density profile horizontal averages, as function of the vertical position z , at five different dimensionless times, from a RT numerical simulation carried out with the complete Navier-Stokes equations [11]. The initial density profile is an unstable stack of two stable exponential profiles of the type given by Eq. (2), with $\mathbb{S}_r = 8$ and 4.8 for the heavy and light fluids, respectively. The initial density jump around $z = 0$ is smoothed down within the turbulent mixing layer that develops as time goes on



The incompressible Stokes eigenmodes have been computed in the square and in the cube, [13, 14]. They have their own, and interesting, dynamics. In particular it was established that the velocity vector potential $\vec{\psi}$ is proportional to the vorticity $\vec{\omega}$ in the bulk region of each eigenmode on account of the harmonic nature of the dynamical pressure. We will see that the dynamical pressure is no longer harmonic in the anelastic model, which implies that this $(\vec{\psi}, \vec{\omega})$ relationship is not satisfied by the anelastic Stokes eigenmodes. This is the first difference between the incompressible and anelastic physics. It will be documented later in this paper.

2 Physical Configuration

The one-fluid model of the RT instability is considered. The fluid is of infinite thermal diffusivity, and therefore isothermal at temperature T_0 , its density ρ being related to the pressure P by the perfect-gas law, i.e.,

$$P = \rho R T_0, \tag{1}$$

where R is the perfect-gas constant evaluated per molar mass. The fluid is confined, in presence of the gravity $\vec{g} = -g \hat{e}_z$, between two infinite horizontal plates separated by the distance $2H$ as sketched in Fig. 2. An hydrostatic state is allowed to exist in this configuration. Its pressure and density fields, $p_0(z)$ and $\rho_0(z)$, are related through $\vec{\nabla} p_0 = \rho_0(z) \vec{g}$. Adopting H as length scale one gets a dimensionless relation, i.e., $\frac{d\rho_0}{dz} = -\mathbb{S}_r \rho_0 \hat{e}_z$, wherein \mathbb{S}_r is the (positive) stratification parameter defined by

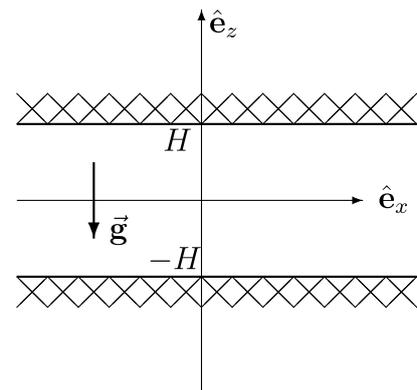
$$\mathbb{S}_r = \frac{gH}{RT_0}.$$

The rest-state dimensionless density and pressure fields are therefore endowed with an exponential vertical stratification, according to

$$\rho_0(z) = p_0(z) = e^{-\mathbb{S}_r z}. \tag{2}$$

The limit where $\mathbb{S}_r = 0$ corresponds to an incompressible flow in infinite channel (see [14, 17] for example), while the value $\mathbb{S}_r = 10$ is considered as an upper bound for the

Fig. 2 (x, z) cross-section of the horizontally infinite channel



anelastic approximation of a configuration where acoustic waves start being of significant importance. In Fig. 1 the approximately exponential density profile at $t = 8$ corresponds to $\mathbb{S}_r \simeq 3.5$ in the turbulent mixing layer. The incompressible ($\mathbb{S}_r = 0$) Stokes eigenmodes in infinite channel are revisited in Appendix C. They are used in this study as reference data for validating the eigenvalue solvers designed for the case where $\mathbb{S}_r \neq 0$.

The physical problem under consideration is (x, y, z) -three-dimensional. However there is no preferred direction in the (x, y) -horizontal plane, which allows us to treat this configuration as being two-dimensional in the (x, z) vertical plane as shown in Fig. 2. As a consequence, only one horizontal wave number is considered, i.e., $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, and the fluid velocity has only two components defined by $\vec{v} = u(x, z, t) \hat{e}_x + w(x, z, t) \hat{e}_z$, \hat{e}_x and \hat{e}_z being the unit vectors in the x and z directions.

3 Governing Equations

3.1 The Inhomogeneous Problem

The Stokes flow is considered in the framework of the anelastic approximation. The starting version of the dimensional momentum balance equation reads

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \mu \left(\vec{\nabla}^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) - \rho g \hat{e}_z + \rho \vec{f}, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[, \quad (3)$$

where μ is the dynamical viscosity, P and ρ are the total pressure and density, and \vec{f} is a possible external source of acceleration. This term may contain the inertial contribution $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ leading thus to the Navier-Stokes formulation of the momentum balance equation (3). This equation is completed by the equation of state (1) together with the mass balance equation written down in the anelastic approximation, i.e.,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in [-1, 1]. \quad (4)$$

The following scales are introduced: $\bar{\rho}$ for density, H and $\tau = \bar{\rho} \frac{H^2}{\mu}$ for length and time, $V = \frac{H}{\tau}$ for the velocity and $\Pi = \bar{\rho} V^2$ for the pressure. This leads to the dimensionless version of the state equation (1),

$$P = \rho \frac{RT_0}{V^2}, \quad (5)$$

and of the momentum balance,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) = -(\vec{\nabla} + \mathbb{S}_r \hat{e}_z) P + \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f}, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[, \quad (6)$$

wherein the term $\mathbb{S}_r \hat{\mathbf{e}}_z P$ comes from the buoyancy part, ρg , expressed in terms of the pressure by using (5). Equation (4) is just considered now in its dimensionless meaning.

Equation (6) contains the hydrostatic equation which leads to (2). We can therefore subtract from this Eq. (6) the hydrostatic part of the pressure and density fields and retain only the dynamical pressure field, p . The dynamical part of the density, $\rho - \rho_0$, only contributes in $\rho \vec{\mathbf{v}}$. It thus feeds an higher order of approximation. The anelastic dimensionless formulation of the momentum and mass balance equations then reads

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0(z) \vec{\mathbf{v}}) = -(\vec{\nabla} + \mathbb{S}_r \hat{\mathbf{e}}_z)p + \vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}) + \rho \vec{\mathbf{f}}, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[, \quad (7)$$

and

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0(z) \vec{\mathbf{v}}) = 0, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in [-1, 1]. \quad (8)$$

The anelastic continuity constraint (8) leads to introduce a vector potential $\vec{\psi}$ such that

$$\rho_0(z) \vec{\mathbf{v}} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}. \quad (9)$$

In a plane-flow configuration this vector potential reduces to a one-component vector, normal to the plane of the flow, i.e., $\vec{\psi} = \psi(x, z, t) \hat{\mathbf{e}}_y$, $\psi(x, z, t)$ being the anelastic stream function. The relation (9) then supplies

$$\rho_0(z) u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{and} \quad \rho_0(z) w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

3.2 The Eigenproblem

The present study deals with the determination of the associated eigenmodes, the anelastic Stokes eigenmodes, of velocity $\vec{\mathbf{v}}$ and pressure p , such that $\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} = \lambda \vec{\mathbf{v}}$, therefore corresponding to $\vec{\mathbf{f}} = 0$ in (7) and verifying thus

$$\lambda \rho_0(z) \vec{\mathbf{v}} = -(\vec{\nabla} + \mathbb{S}_r \hat{\mathbf{e}}_z)p + \vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}), \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[, \quad (11)$$

together with (8) now expressed in a way which will turn out to be very useful, namely,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbb{S}_r w, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in [-1, 1]. \quad (12)$$

Two cases of dimensionless boundary conditions are imposed at $z = \pm 1$. Both are of no flow through the top and bottom boundaries of the channel, viz.,

$$w(z = \pm 1) = 0, \quad \forall x, \quad (13)$$

with either no-slip condition in Case (D), viz.,

$$u(z = \pm 1) = 0, \quad \forall x, \quad (14)$$

or no-stress in Case (N), i.e.,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad \forall x. \quad (15)$$

These $(\vec{\mathbf{v}}, p)$ eigenmodes are to be determined, together with the eigenvalues λ . In the adopted physical configuration they are periodic, of real horizontal wave-number k . We can therefore introduce a normal-mode factorization which reads

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \\ p(x, z, t) \\ \psi(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(z) \\ \tilde{w}(z) \\ \tilde{p}(z) \\ \tilde{\psi}(z) \end{pmatrix} e^{ikx + \lambda t}, \tag{16}$$

where the amplitudes $\tilde{\bullet}(z)$, $\bullet = u, w, p, \psi$, may be complex. By (10) one then has

$$\rho_0(z) \tilde{u}(z) = -\frac{d\tilde{\psi}}{dz} \quad \text{and} \quad \rho_0(z) \tilde{w}(z) = ik \tilde{\psi}(z). \tag{17}$$

The factorization (16) also allows us to give the relation (12) the following writing,

$$ik \tilde{u} + \frac{d\tilde{w}}{dz} = \mathbb{S}_r \tilde{w}, \quad \forall z \in [-1, 1], \tag{18}$$

and the boundary conditions (13) through (15) read now, for Case (D) first,

$$\tilde{u}(z = \pm 1) = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1), \tag{19}$$

and, second, for Case (N),

$$\left. \frac{d\tilde{u}}{dz} \right|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1). \tag{20}$$

The Sect. 4 shows that the eigenvalues λ are negative: the anelastic Stokes problem is elliptic.

3.3 The $k = 0$ Case

The case where $k = 0$ requires a bit of attention. It corresponds to a flow which only depends upon the vertical coordinate, z . By (8) which leads to $\frac{d}{dz}(\rho_0(z) w) = 0$, and owing to the boundary condition (13), one sees that the velocity is purely horizontal, with

$$\vec{v} = u(z, t) \hat{e}_x = \tilde{u}(z) e^{\lambda t} \hat{e}_x. \tag{21}$$

This flow is of Poiseuille type, and, as in the incompressible Poiseuille case, the constraint (8) does not lead to any information on the pressure since this equation is automatically satisfied. This means that, in the present configuration, the departure to the hydrostatic pressure, p , cancels, i.e., $p = 0$ is the physically realistic solution of the momentum balance equation (11) vertical component wherein w cancels. This leads to the Poiseuille-type problem,

$$\lambda \rho_0(z) \tilde{u} = \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2}, \quad \forall z \in]-1, 1[, \tag{22}$$

completed with the left parts of the boundary conditions (19) or (20). In fact it is a Sturm-Liouville-type problem whose eigenvalues are negative, [18], except the zero eigenvalue for the Case (N) problem. Ordering them such that $0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, they verify the asymptotic limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\mathbb{S}_r^2}{16 \sinh(\mathbb{S}_r/2)}. \tag{23}$$

This limit does not depend upon the boundary conditions. The eigenvalue problem (22) may be brought into a Bessel-type equation with the change of variable $y = 2\sqrt{\lambda} \exp(-\mathbb{S}_r z/2)/\mathbb{S}_r$. Equation (22) then writes in terms of $\bar{u}(y)$ according to

$$y^2 \bar{u}'' + y \bar{u}' - y^2 \bar{u} = 0, \tag{24}$$

where the prime denotes the differentiation with respect to y . The solution to (24) is

$$\bar{u}(y) = c_1 \text{BesselI}(0, y) + 2 c_2 \text{BesselK}(0, y), \tag{25}$$

where BesselI and BesselK are the modified Bessel functions and $c_{1,2}$ are two integration constants. Application of the boundary conditions, (19) or (20), leads to an homogeneous system of two algebraic equations, where the eigenvalue λ is a parameter. The zeroes of the main determinant of this system are the sought eigenvalues. The solution of the eigenvalue problem (22), \tilde{u} , may then be written down. The results are commented in Sect. 6.3.

4 Ellipticity of the Anelastic Stokes Problem

It can be shown that the problem (11)–(15) is elliptic, with $\lambda < 0$: the associated flow exponentially damps in time in absence of any sustaining source. Let us introduce the energy integral $\int_{(\Omega)} \rho_0(z) \vec{v}^2 d\Omega$ computed over any open domain Ω wherein the momentum (11) and mass (12) balance equations are imposed, the closure $\partial\Omega$ being made of the physical boundaries where conditions are imposed. This refers to a more general configuration than the infinite channel considered hereafter for computing the λ 's. In particular the forthcoming analytic treatment holds for a 3D flow, with $\vec{v} = u \hat{e}_x + v \hat{e}_y + w \hat{e}_z$, occurring in the stratified density field $\rho_0(z)$. By (11) one has

$$\begin{aligned} \lambda \left(\int_{(\Omega)} \rho_0(z) \vec{v}^2 d\Omega \right) = & - \int_{(\Omega)} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \mathbb{S}_r w p) d\Omega \\ & + \int_{(\Omega)} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{v} d\Omega + \frac{1}{3} \int_{(\Omega)} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\Omega. \end{aligned} \tag{26}$$

The terms of the right-hand side can be transformed into boundary integrals. Using (12) together with the Green-Ostrogradski theorem gives the first term in the right-hand side the following writing,

$$\int_{(\Omega)} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p d\Omega = \int_{(\partial\Omega)} p \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \mathbb{S}_r \int_{(\Omega)} w p d\Omega,$$

where $\hat{\mathbf{n}} dS$ is the infinitesimal surface element vector of $\partial\Omega$, normal to $\partial\Omega$ and pointing outwards from the domain Ω . For each of both other terms one also gets

$$\int_{(\Omega)} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{v} d\Omega = \sum_{\bullet=u,v,w} \left(\int_{(\partial\Omega)} \bullet(\vec{\nabla} \bullet) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{(\Omega)} (\vec{\nabla} \bullet)^2 d\Omega \right)$$

and

$$\int_{(\Omega)} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\Omega = \int_{(\partial\Omega)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{(\Omega)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 d\Omega.$$

The boundary contributions vanish if $\vec{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ together with either $\vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$ or $\frac{\partial}{\partial n} (\vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}) = 0$ where $\hat{\mathbf{t}}$ is the unit vector tangent to $\partial\Omega$. When these boundary conditions are satisfied, which is the case of the boundary conditions adopted for the infinite channel, then (26) leads to

$$\lambda \left(\int_{(\Omega)} \rho_0(z) \vec{v}^2 d\Omega \right) = -\frac{1}{3} \int_{(\Omega)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 d\Omega - \sum_{\bullet=u,v,w} \int_{(\Omega)} (\vec{\nabla} \bullet)^2 d\Omega.$$

Negative real eigenvalues λ are therefore expected and the problem (11) through (15) is elliptic.

It is worth noticing that this ellipticity property is directly associated with the presence of the pressure term coming from the buoyancy.

5 Velocity-Pressure Uncoupling

This section considers only the case where the wave number k and the pressure p are therefore not zero.

5.1 Equations for the Velocity

Uncoupling the velocity components and the pressure from (11) and (8) is made easy by the relation (12). Using indeed (12) and writing down the vertical component of (11) allow us to get a first equation in p and w , viz.,

$$\lambda \rho_0(z) w = -\left(\frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{S}_r\right) p + \vec{\nabla}^2 w + \frac{\mathbb{S}_r}{3} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[. \tag{27}$$

Applying the operator $\vec{\nabla} \cdot$ on the relation (11) and using (8) together with again (12) lead to a second relation in p and w ,

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbb{S}_r \frac{\partial}{\partial z}\right) p = \frac{4}{3} \mathbb{S}_r \vec{\nabla}^2 w, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[. \tag{28}$$

It is then straightforward to eliminate the pressure from both relations (27) and (28) for obtaining an equation in w . Its first expression reads

$$\lambda \left(\vec{\nabla}^2 + \mathbb{S}_r \frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_0(z) w = \left[\left(\vec{\nabla}^2 + \mathbb{S}_r \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{\mathbb{S}_r}{3} \frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{4\mathbb{S}_r}{3} \vec{\nabla}^2 \left(\mathbb{S}_r + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right] w.$$

After some manipulations, it simplifies according to

$$\lambda \left(\vec{\nabla}^2 + \mathbb{S}_r \frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_0(z) w = \left[(\vec{\nabla}^2)^2 - \frac{4\mathbb{S}_r^2}{3} \vec{\nabla}^2 + \frac{\mathbb{S}_r^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] w, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[.$$

Taking now the normal-mode factorization (16) into account yields an ordinary differential problem in z ,

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\frac{d^2}{dz^2} + \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2\right) \rho_0(z) \tilde{w} \\ &= \left[\frac{d^4}{dz^4} - (2k^2 + \mathbb{S}_r^2) \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \left(k^2 + \frac{4}{3} \mathbb{S}_r^2\right)\right] \tilde{w}, \quad \forall z \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

One more step is needed to reach the last version of the eigenvalue problem to be solved for λ and for the associated eigenmodes $\tilde{w}(z)$. Using the expression (2) for $\rho_0(z)$ leads to

$$\begin{aligned} &\lambda \rho_0(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2\right) \tilde{w} \\ &= \left[\frac{d^4}{dz^4} - (2k^2 + \mathbb{S}_r^2) \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \left(k^2 + \frac{4}{3} \mathbb{S}_r^2\right)\right] \tilde{w}, \quad \forall z \in]-1, 1[. \end{aligned} \tag{29}$$

This relation (29) gives the differential part of the eigenproblem to be solved. Notice that this relation indicates that the eigenvalues behave like k^2 as k goes to infinity.

Associating the boundary conditions (19) and (20) while using (18) supplies the four boundary conditions on \tilde{w} which are requested for solving (29). They read, in Case (D),

$$\left. \frac{d\tilde{w}}{dz} \right|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1), \tag{30}$$

and, in Case (N),

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz}\right) \tilde{w} \Big|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1). \tag{31}$$

Observe that the presence of the density exponential stratification ($\mathbb{S}_r \neq 0$ in (2)) in the rest state prevents the flow from enjoying any z -symmetry property, whereas, in both Cases, (D) and (N), when \mathbb{S}_r vanishes, $\mathbb{S}_r = 0$, the Stokes eigenmodes become of incompressible nature, and are either z -symmetric or z -anti-symmetric. With $\mathbb{S}_r = 0$ the differential equation (29) reduces to the well known relation, viz.,

$$\lambda \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \tilde{w} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2 \tilde{w}. \tag{32}$$

Only the Case (N) boundary conditions (31) are modified when \mathbb{S}_r cancels. They read here

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} \Big|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1). \tag{33}$$

The $\mathbb{S}_r = 0$ Case (D) Stokes problem, i.e., (32) and (30), is treated in [14, 17]. The Cases (D) and (N) Stokes eigenvalues are given in Appendix C.

Knowing the velocity vertical component $\tilde{w}(z)$ leads straightforwardly to the horizontal component $\tilde{u}(z)$ by making use of (18).

From Sect. 4, and consulting the eigenvalue problem (29) posed in \tilde{w} together with the pressure equation (28), one can infer that the eigenmode vertical velocity component and the pressure amplitudes, (\tilde{w}, \tilde{p}) , are real functions of z . As a consequence, by (17) and (18), the fields $\tilde{u}(z)$ and $\tilde{\psi}(z)$ are purely imaginary. We therefore introduce the real stream function $\tilde{\Psi}(z)$ such that

$$\tilde{\psi}(z) = -i \tilde{\Psi}(z) \quad \text{and} \quad \rho_0(z) \tilde{w}(z) = k \tilde{\Psi}(z). \tag{34}$$

5.2 Equations for Determining the Pressure

Having determined the velocity component $\tilde{w}(z)$ of the eigenmodes provides a right-hand side to the pressure equation (28). But we cannot solve it for the pressure because this field is deprived of any boundary condition. We will then proceed as with the Projection-Diffusion method, [3]. It leads to introduce a quasi-Poisson operator, here a quasi- $\frac{d^2}{dz^2}$ operator in this x -periodic configuration, which is invertible without boundary condition. The steps are here described in the continuous realm, the numerical implementation being exposed later on, in Appendix A.

We start from (11) recasted as follows in order to introduce an acceleration field $\vec{\mathbf{a}}$,

$$\lambda \rho_0(z) \vec{\mathbf{v}} - \vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{v}} - \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}) \equiv \vec{\mathbf{a}} = -(\vec{\nabla} + \mathbb{S}_r \hat{\mathbf{e}}_z) p, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in]-1, 1[. \tag{35}$$

The right part of (35) is an $(\vec{\mathbf{a}}, p)$ Darcy-type problem which can be solved if $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ is known and with normal boundary conditions imposed on $\vec{\mathbf{a}}$. Let us give the details regarding both these points.

One has, first, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ by taking the left-hand side of (35) as a definition of $\vec{\mathbf{a}}$. Using (12) it simply reads

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{a}} = -\frac{4}{3} \mathbb{S}_r \vec{\nabla}^2 w, \quad \forall x \text{ and } \forall z \in [-1, 1],$$

that is, in terms of the amplitudes introduced in (16),

$$i k \tilde{a}_x + \frac{d\tilde{a}_z}{dz} = -\frac{4}{3} \mathbb{S}_r \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{w}, \quad \forall z \in [-1, 1]. \tag{36}$$

Second, for the normal boundary conditions to impose on $\vec{\tilde{a}}$, in the present x -periodic configuration the only condition we have to fix is \tilde{a}_z at $z = \pm 1$. This is given by the left-hand side of (35), knowing that \tilde{w} vanishes at both z extremities (see (30) and (31)), and using (12). One gets

$$\tilde{a}_z|_{z=\pm 1} = -\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\mathbb{S}_r}{3} \frac{d}{dz} \right) \tilde{w} \Big|_{z=\pm 1}.$$

Taking (30) and (31) into account leads to the following boundary conditions, in Case (D),

$$\tilde{a}_z|_{z=\pm 1} = -\frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} \Big|_{z=\pm 1}, \tag{37}$$

and, in Case (N),

$$\tilde{a}_z|_{z=\pm 1} = -\frac{4}{3} \mathbb{S}_r \frac{d\tilde{w}}{dz} \Big|_{z=\pm 1}. \tag{38}$$

We thus have all the elements that we need to get a discrete invertible operator acting on the pressure. The constraint (36) is discretized taking into account the appropriate condition (37) or (38) every time the boundary values of \tilde{a}_z are needed, and using otherwise, i.e., for the z -internal nodal values of $\vec{\tilde{a}}$, the right-hand side of (35).

6 Numerical Determination of the Anelastic Stokes Eigenmodes and Eigenvalues

The anelastic Stokes eigenvalues λ depend both upon the horizontal wavenumber k and upon the stratification parameter \mathbb{S}_r . They are defined, in the case where $k = 0$, by the eigenproblem (22) and the left sides of the boundary conditions (19) or (20). When $k \neq 0$, one has to consider the eigenproblem (29) (or (32) when $\mathbb{S}_r = 0$) and the boundary conditions (30) or (31) (or (33) when $\mathbb{S}_r = 0$). We first treat the case where the wavenumber k is fixed to a non-zero value, $k = 2\pi$, \mathbb{S}_r being considered as a parameter going from 0 to 10. For $\mathbb{S}_r \leq 1$ the anelastic eigenmodes are close to the incompressible channel modes, known in the Case (D), [14, 17] and determined in Appendix C for the Case (N). We thus fix \mathbb{S}_r to 2.5, 5, 7.5 and 10 for identifying the influence of this parameter. Then we analyze the situation with $k = 0$ fixing $\mathbb{S}_r = 5$. The eigenmode structure will be briefly commented. We have chosen to normalize the stream-function of the eigenmodes to 1. All the computations were made using the Mathematica software, [21], with 60 significant digits. This supplies very small residuals to the transcendental equations (like (49) or (53)) one has to solve for evaluating the wave numbers of the various eigenfunctions. The residual order of magnitude ranges from 10^{-57} to 10^{-41} .

6.1 Comments About the Numerical Evaluation of Eigenvalues

Two comments deserve to be made at this stage.

1. The differential problem (29) is made of two operators, a stiffness and a mass operator. Some caution must therefore be taken for its discretization to be consistent with the math-

emational problem: the ellipticity should be preserved. This has been commented in [10] when dealing with weak formulations of $\frac{d^2}{dz^2}$. Adopting for example the usual Chebyshev collocation approach for constructing the matrices representing both the stiffness and mass parts of the differential problem (29), and, then, modifying them with the boundary conditions, lead to sets of eigenvalues which are polluted by either complex or, even, by real positive eigenvalues, whereas all should be real negative. This difficulty has been met very early when collocation Cheyshev methods were used to solve boundary value or initial value problems, [4, 7, 15, 16, 22, 23]. It was recognized in [23] that the Galerkin method does not suffer from such a drawback because the boundary conditions are satisfied by the expansion functions. The discretization approach used in the present paper is therefore of Galerkin type.

2. Once the ellipticity of an operator is preserved by its discrete formulation, what can we hope about the agreement between the numerical and the unknown theoretical eigenvalues? To this respect, the eigenvalues one gets from the discrete Chebyshev second-derivative $\frac{d^2}{dz^2}$ can be considered as a model to answer this question. It is well known, [20], that the leading numerical eigenvalues are fairly good approximations of the theoretical ones, whereas a systematic important discrepancy comes into play with the non-leading eigenvalues. The whole numerical spectrum overestimates, in absolute value, the theoretical spectrum. The leading eigenvalues are associated with low-frequency eigenvectors which can be well described with the chosen cut-off. The remaining eigenvalues are mainly of numerical origin, associated with choppier and choppier numerical eigenvectors. In the case of $\frac{d^2}{dz^2}$, about $\frac{2}{3}$ of the numerical spectrum can be considered as approximating fairly well the theoretical one. For the present eigenvalue problem we are in unknown domain, except for the $k = 0$ configuration, commented in Sect. 6.3, where an analytical treatment is available.

6.2 Configuration $k = 2\pi$

Let us expand the unknown Stokes eigenmode $\tilde{w}(z)$ in functional bases which satisfy the boundary conditions of Cases (D) and (N). These bases are spanned by the eigenfunctions $\Phi^{(\bullet)}(\alpha; z)$, with $\bullet = D, N$, of the differential problem

$$\frac{d^4 \Phi^{(\bullet)}}{dz^4} = \alpha^4 \Phi^{(\bullet)}, \quad \forall z \in] - 1, 1[, \quad \bullet = D, N, \tag{39}$$

completed with the appropriate set of boundary conditions, viz., in Case (D),

$$\left. \frac{d\Phi^{(D)}}{dz} \right|_{z=\pm 1} = 0 = \Phi^{(D)}(z = \pm 1), \tag{40}$$

and, in Case (N),

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} \right) \Phi^{(N)} \Big|_{z=\pm 1} = 0 = \Phi^{(N)}(z = \pm 1). \tag{41}$$

The eigenfunctions $\Phi^{(D)}(\alpha; z)$ are the well known Reid-Harris (RH) functions, [9, 19]. They enjoy the mirror-symmetry property in z , being either z -even functions, denoted by $\Phi^{(D)}(\alpha_e; z)$, or z -odd functions, denoted by $\Phi^{(D)}(\alpha_o; z)$. They read

$$\Phi^{(D)}(\alpha_e; z) = \frac{\cosh(\alpha_e z)}{\cosh(\alpha_e)} - \frac{\cos(\alpha_e z)}{\cos(\alpha_e)}, \quad \Phi^{(D)}(\alpha_o; z) = \frac{\sinh(\alpha_o z)}{\sinh(\alpha_o)} - \frac{\sin(\alpha_o z)}{\sin(\alpha_o)}. \quad (42)$$

The Case (N) eigenfunctions, $\Phi^{(N)}(\alpha; z)$, are determined in Appendix B. Having no z -symmetry property they are constructed as a linear combination of the even and odd RH eigenfunctions. They read

$$\Phi^{(N)}(\alpha; z) = \frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha z)}{\cos(\alpha)} + \beta \left(\frac{\sinh(\alpha z)}{\sinh(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha z)}{\sin(\alpha)} \right).$$

We call them Extended Reid-Harris (ERH) eigenfunctions. As it can be seen from Appendix B, one cannot go to the limit where \mathbb{S}_r vanishes and go back to symmetrical and anti-symmetrical basis functions. Because of this singularity in \mathbb{S}_r the ERH functions are only defined for non-zero \mathbb{S}_r 's. When \mathbb{S}_r vanishes, the Case (N) Stokes eigenmodes $\tilde{w}(z)$ become incompressible and turn out to be periodic in z as it is well-known, being either z -even or z -odd. This is the reason why we cannot get them starting from the $\Phi^{(N)}(\alpha; z)$ eigenfunctions.

The determination of the $\mathbb{S}_r = 0$ Stokes eigenmodes is made in Appendix C.

6.2.1 Case (D): No-slip Conditions on Top and Bottom of the Channel

The matrix system whose eigenvalues and eigenmodes are to be computed is first presented. We then report the results with comments made on the spectrum, i.e., eigenvalues and eigenmodes.

The Matrix System The unknown field $\tilde{w}(z)$ is decomposed according to

$$\tilde{w}(z) = \sum_{n=1}^N (\hat{w}_{e,n} \Phi^{(D)}(\alpha_{e,n}; z) + \hat{w}_{o,n} \Phi^{(D)}(\alpha_{o,n}; z)), \quad (43)$$

where the set of coefficients $\hat{w}_{e,n}$ and $\hat{w}_{o,n}$ constitutes the spectrum of $\tilde{w}(z)$ in the RH basis (42), and N is the cut-off which leads to $\mathcal{N} = 2N$ eigenvalues and eigenmodes. These coefficients are determined, together with the eigenvalues λ , by plugging (43) into (29) and projecting the resulting equation onto the RH basis via the scalar product

$$(f, g) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(z) g(z) dz.$$

The RH eigenfunctions are orthogonal and of L_2 norm equal to 1. We thus get a set of matrices of size N , whose entries are, successively, for $l, n = 1, \dots, N$,

$$(S_{ee})_{ln} = \left(\alpha_{e,n}^4 + k^2 \left(k^2 + \frac{4}{3} \mathbb{S}_r^2 \right) \right) \delta_{ln} - (2k^2 + \mathbb{S}_r^2) \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{e,l}; z), \frac{d^2 \Phi^{(D)}(\alpha_{e,n}; z)}{dz^2} \right),$$

$$(S_{oo})_{ln} = \left(\alpha_{o,n}^4 + k^2 \left(k^2 + \frac{4}{3} \mathbb{S}_r^2 \right) \right) \delta_{ln} - (2k^2 + \mathbb{S}_r^2) \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{o,l}; z), \frac{d^2 \Phi^{(D)}(\alpha_{o,n}; z)}{dz^2} \right),$$

and

$$(M_{ee})_{ln} = \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{e,l}; z), \rho_0(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2 \right) \Phi^{(D)}(\alpha_{e,n}; z) \right),$$

$$(M_{eo})_{ln} = \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{e,l}; z), \rho_0(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2 \right) \Phi^{(D)}(\alpha_{o,n}; z) \right),$$

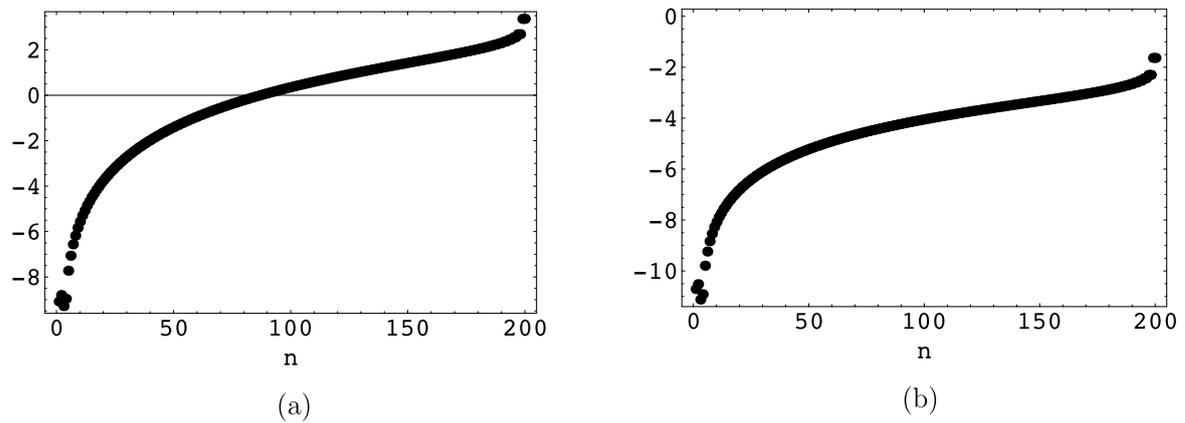


Fig. 3 Case (D). The departure between the $\mathbb{S}_r = 0$ analytical spectrum, $\lambda_{an}(n)$, and the corresponding numerical (RH) spectrum, $\lambda(n)$. In (a) $\log_{10}(\lambda_{an}(n) - \lambda(n))$, in (b) $\log_{10}(\frac{\lambda_{an}(n) - \lambda(n)}{-\lambda_{an}(n)})$, for $n = 1, \dots, \mathcal{N} = 200$

$$\begin{aligned}
 (M_{oe})_{ln} &= \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{o,l}; z), \rho_0(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2 \right) \Phi^{(D)}(\alpha_{e,n}; z) \right), \\
 (M_{oo})_{ln} &= \left(\Phi^{(D)}(\alpha_{o,l}; z), \rho_0(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2 \right) \Phi^{(D)}(\alpha_{o,n}; z) \right),
 \end{aligned}$$

where δ_{ln} is the Kronecker identity-matrix ln entry. This leads to the following block-matrix system of size \mathcal{N} ,

$$\lambda \begin{vmatrix} M_{ee} & M_{eo} \\ M_{oe} & M_{oo} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \widehat{W}_e \\ \widehat{W}_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{ee} & 0 \\ 0 & S_{oo} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \widehat{W}_e \\ \widehat{W}_o \end{vmatrix}, \tag{44}$$

where \widehat{W}_e and \widehat{W}_o are the column vectors of the coefficients $\widehat{w}_{e,n}$ and $\widehat{w}_{o,n}$. This system supplies the Case (D) numerical anelastic Stokes eigenmodes. For non-zero \mathbb{S}_r they have no z -symmetry property. This is associated with the presence of the off-diagonal mass block-matrices, M_{eo} and M_{oe} , which couple the z -even and z -odd RH components of $\tilde{w}(z)$. These matrices vanish for $\mathbb{S}_r = 0$, which leads to Stokes eigenmodes $\tilde{w}(z)$ of given z -symmetry, those of the Case (D) infinite channel, [14, 17].

Assessment of the RH Numerical System The incompressible Stokes eigenmodes $\tilde{w}(z)$ of the Case (D) infinite channel are analytically known (see [14, 17] and Appendix C). This offers the possibility of validating the Galerkin approach (43), together with its numerical implementation (44), and also to measure from the eigenvalues the quality of the approximation (43). Figure 3 shows the departure between the $\mathbb{S}_r = 0$ analytical spectrum, $\lambda_{an}(n)$, and the corresponding numerical (RH) spectrum, $\lambda(n)$, with, in (a), $\log_{10}(\lambda_{an}(n) - \lambda(n))$ and, in (b), $\log_{10}(\frac{\lambda_{an}(n) - \lambda(n)}{-\lambda_{an}(n)})$, for $n = 1, \dots, \mathcal{N} = 200$. This figure is instructive and telling. First, one sees that $-\lambda > -\lambda_{an}$, i.e., the Galerkin method overestimates the absolute value of the eigenvalues. Second, this systematic discrepancy drifts with the spatial frequency n , leading to the typical curve in (a). In the present $\mathbb{S}_r = 0$ case, one observes that the resulting relative errors remain relatively small even at high frequency. We should not be surprised to see this relative error increasing with \mathbb{S}_r while leading to error curves similar to the curve in (a).

The Eigenvalues The numerical eigenvalues one obtains for any \mathbb{S}_r are negative, as expected from Sect. 4. They are now presented.

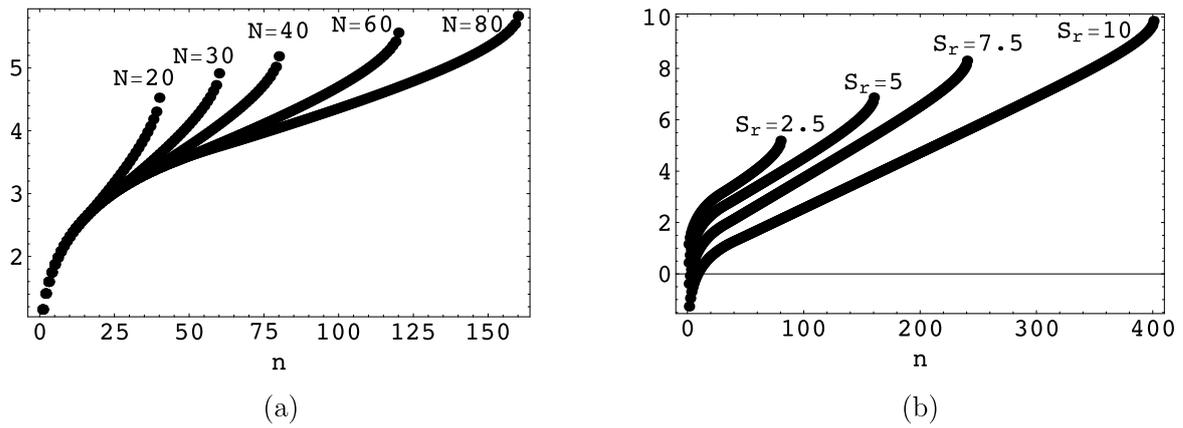


Fig. 4 Case (D). The numerical spectra, $\log_{10}(-\lambda(n))$ for $n = 1, \dots, \mathcal{N} = 2N$, plotted in (a) for $\mathbb{S}_r = 2.5$ and several cut-offs N , and in (b) for several \mathbb{S}_r values

Table 1 Case (D), $\mathbb{S}_r = 5$. The 10 leading eigenvalues

n	$-\lambda(n)$
1	2.736584487152108
2	5.402333751956518
3	9.033207762946186
4	13.41649825160977
5	18.67749317054990
6	24.73671318495961
7	31.65066728587325
8	39.37807770354647
9	47.95107548708649
10	57.34467464776111

For \mathbb{S}_r fixed to $\mathbb{S}_r = 2.5$, the spectrum, viz., the $\log_{10}(-\lambda(n))$'s for $n = 1, \dots, \mathcal{N}$, is computed from different cut-offs N , in order to see the emergence of a region where the numerical eigenvalues are good approximations of the theoretical λ 's. This is shown in Fig. 4(a). One does observe a common envelop (of negative curvature) whose extension is about $\frac{\mathcal{N}}{2} = N$. It provides the numerical evaluation of the theoretical spectrum. The remaining part of the curves in Fig. 4(a) looks pretty much, qualitatively, like the error curve in Fig. 3(a). Table 1 lists the ten leading eigenvalues, $-\lambda(n)$, for $n = 1, \dots, 10$, obtained for $\mathbb{S}_r = 5$ and with $N = 80$. The data are given with 16 significant digits.

Four different values of \mathbb{S}_r are now considered, i.e., $\mathbb{S}_r = 2.5, 5, 7.5, 10$. The corresponding numerical spectra, respectively computed with $N = 40, 80, 120, 200$, are gathered in Fig. 4(b) in order to see the influence the stratification parameter has on the damping rate of the anelastic Stokes eigenmodes. It is seen that increasing \mathbb{S}_r reduces their damping rate. As a way to illustrate the sensitivity with \mathbb{S}_r of this damping rate Fig. 5(a) shows the evolution of the leading eigenvalue $\lambda(1)$, via $\log_{10}(-\lambda(1))$. A fairly good fit to the data plotted in Fig. 5(a), provided by the subroutine Fit of the Mathematica software, gives us the law

$$\log_{10}(-\lambda(1)) = 1.64941 - 0.133731 \mathbb{S}_r - 0.0268018 \mathbb{S}_r^2 + 0.00110532 \mathbb{S}_r^3.$$

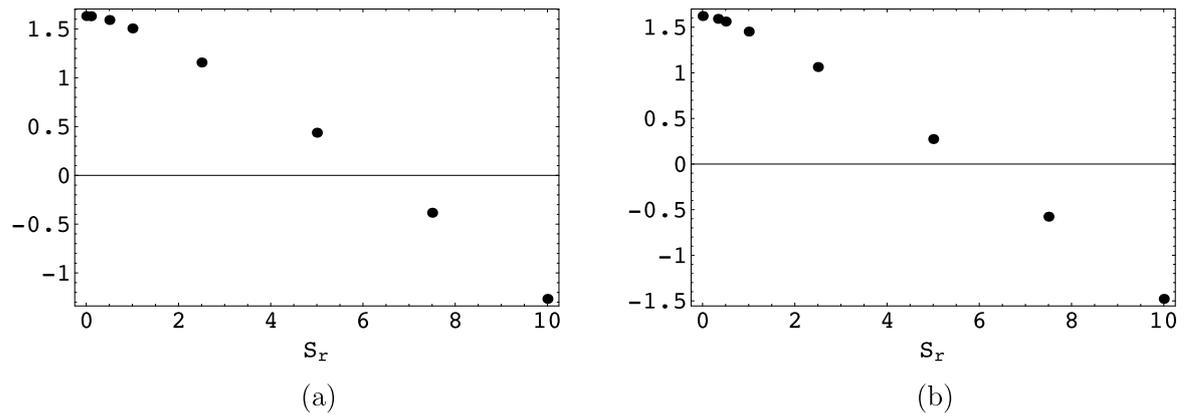


Fig. 5 Cases (D) and (N) in (a) and (b). Evolution with S_r of the leading eigenvalue $\lambda(1)$, via $\log_{10}(-\lambda(1))$

This fit leads to an evaluation of the $S_r = 0$ (incompressible flow in channel) eigenvalue, i.e., $\lambda(1) = -42.9319$, to within 3.9% of accuracy. How to understand the physical reason which makes the damping rate of the eigenmodes to decrease with S_r , the stratification parameter? We will see that the eigenmodes are localized in the lower part of the channel, i.e., in the region where the density is the largest, and therefore the momentum diffusivity (which scales as $1/\rho_0(z)$) is the smallest.

The Eigenmodes They can be completely described by the stream function, i.e., $\psi(x, z) = -\tilde{\Psi}(z)\text{Re}(ie^{ikx}) = \sin(kx)\tilde{\Psi}(z)$ (see (34)) and the dynamical pressure, i.e., $p(x, z) = \tilde{p}(z)\text{Re}(e^{ikx}) = \cos(kx)\tilde{p}(z)$. The pressure is thus in phase quadrature, in x , with respect to the stream function. Using (34) together with (43) leads to the z -amplitude of the stream function, $\tilde{\Psi}(z)$. It reads

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{\rho_0(z)}{k} \sum_{n=0}^N (\hat{w}_{e,n} \Phi^{(D)}(\alpha_{e,n}; z) + \hat{w}_{o,n} \Phi^{(D)}(\alpha_{o,n}; z)),$$

the coefficients $\hat{w}_{e,n}$ and $\hat{w}_{o,n}$ coming from the column vectors, \hat{W}_e and \hat{W}_o , eigenmodes of the matrix system (44). The pressure field $\tilde{p}(z)$ has been computed following the way described in Appendix A, expanding on $\mathbb{N} = 40$ Chebyshev polynomials the eigenmode velocity vertical component given by (43). Both these fields, stream function and pressure, are computed for the $n = 1, 5$ and 10 eigenmodes of Table 1, i.e., for $S_r = 5$.

The stream function and pressure contour lines are drawn in Figs. 6 and 7, in (a) for the eigenmode $n = 1$, and in (b) for the eigenmode $n = 5$ of Table 1. Figures 8(a) and (b) respectively show the amplitudes, viz., $\tilde{\Psi}(z)$ and $\tilde{p}(z)$. The effect of the stratification shows up clearly. Each eigenmode is made of cells stacked in the low part of the stratified zone. A dead zone then settles on top of the flow. Comparing the $n = 1, 5$ and 10 flows, in particular consulting Figs. 8(a) and 9(a), indicates that the dead-zone extension tends to diminish with the eigenmode spatial frequency, i.e., with increasing n . This is correlated with a significant increase with n of the order of magnitude of the dynamical-pressure vertical gradient, as it can be observed in Fig. 8(b).

6.2.2 Case (N): No-stress Conditions on Top and Bottom of the Channel, $S_r \neq 0$

The results are presented here following the same procedures and organization as those adopted for the Case (D) in the preceding section. We had however to expand on $\mathbb{N} = 95$

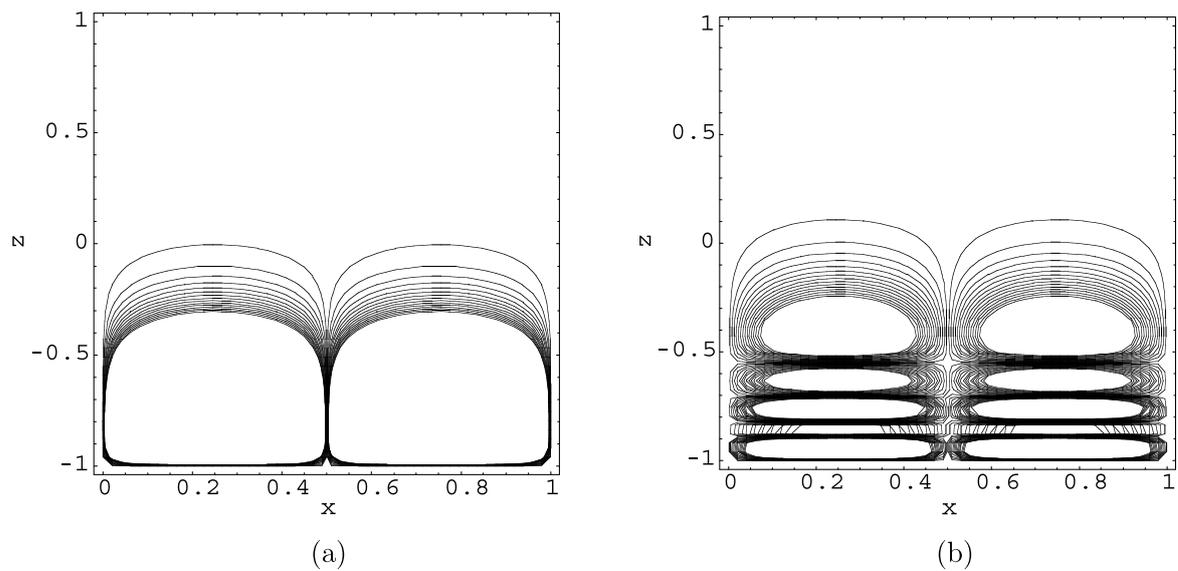


Fig. 6 Case (D), $S_r = 5$. Stream function $\psi(x, z)$ contour lines plotted for the eigenmodes $n = 1$ (in **(a)**) and $n = 5$ (in **(b)**) of Table 1

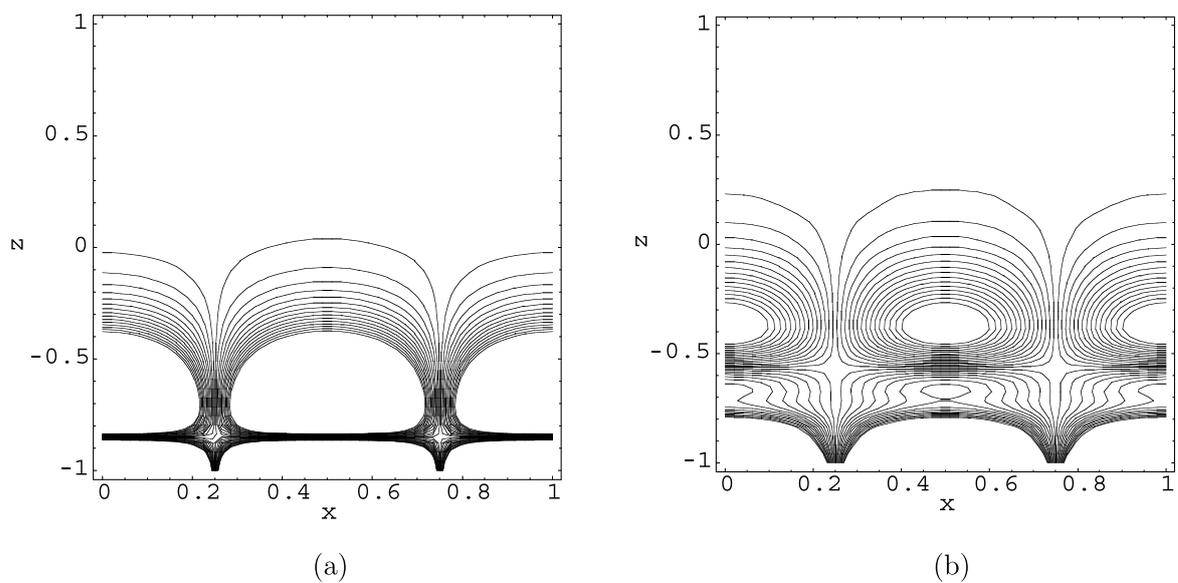


Fig. 7 Case (D), $S_r = 5$. Pressure $p(x, z)$ contour lines plotted for the eigenmodes $n = 1$ (in **(a)**) and $n = 5$ (in **(b)**) of Table 1

Chebyshev polynomials the eigenmode velocity vertical component given by (45) in order to compute the pressure.

The ERH Matrix System The unknown field $\tilde{w}(z)$ is here decomposed according to

$$\tilde{w}(z) = \sum_{n=0}^N \hat{w}_n \Phi^{(N)}(\alpha_n; z), \tag{45}$$

where the coefficients \hat{w}_n constitute the spectrum of $\tilde{w}(z)$ in the ERH basis, i.e., the $\Phi^{(N)}(\alpha_n; z)$'s, and N is the cut-off. These coefficients, together with the eigenvalues λ , are determined by proceeding as in the previous section. The matrix entries of the numerical system read

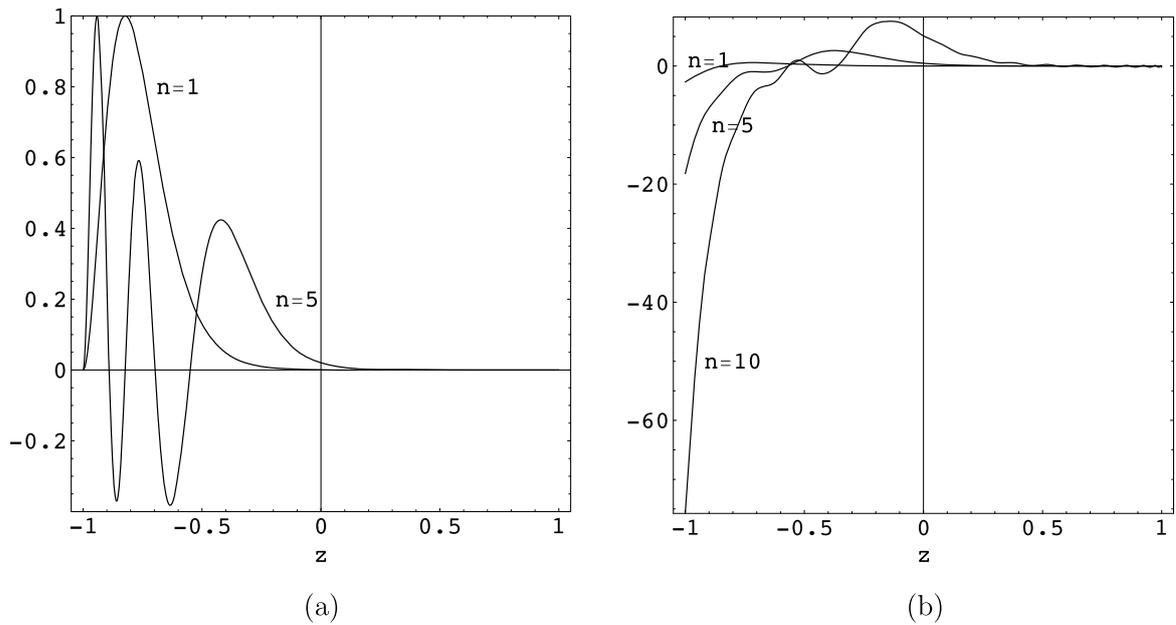


Fig. 8 Case (D), $\mathbb{S}_r = 5$. The stream-function amplitude $\tilde{\Psi}(z)$ in (a) and the dynamical-pressure amplitude $\tilde{p}(z)$ in (b), of the eigenmodes $n = 1, 5$ and 10 of Table 1

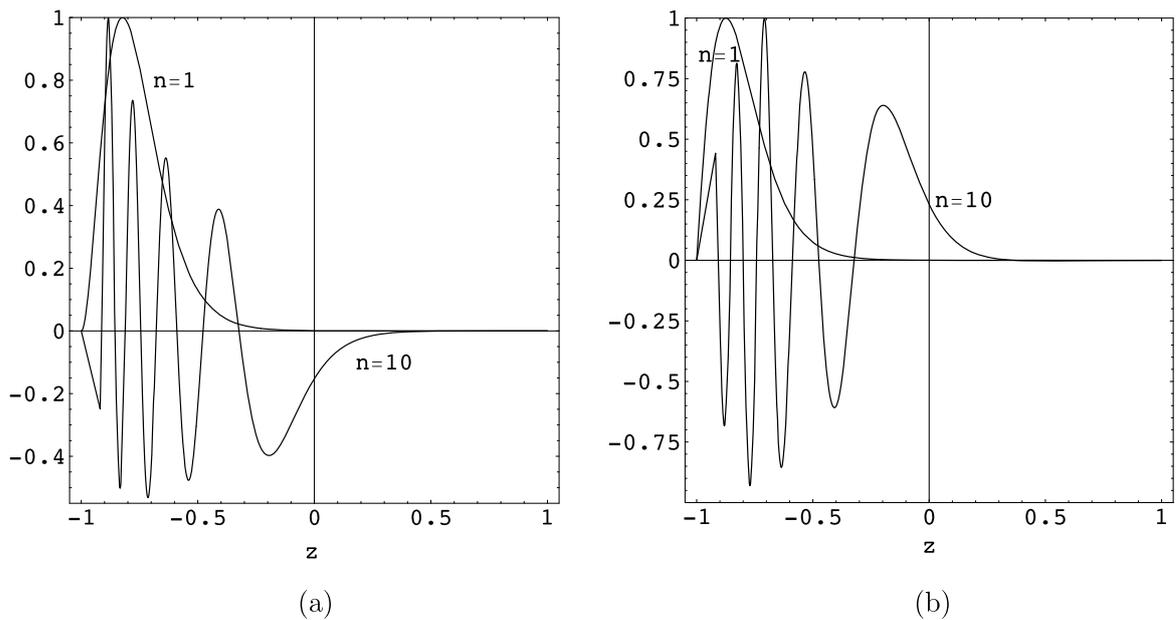


Fig. 9 Case (D) in (a), Case (N) in (b), $\mathbb{S}_r = 5$. The stream-function amplitude $\tilde{\Psi}(z)$ of the eigenmodes $n = 1, 10$ of Table 1 in (a) and Table 2 in (b)

$$S_{ln} = \left(\alpha_n^4 + k^2 \left(k^2 + \frac{4}{3} \mathbb{S}_r^2 \right) \right) \mathbb{L}(\alpha_n) \delta_{ln} - (2k^2 + \mathbb{S}_r^2) \left(\Phi^{(N)}(\alpha_l; z), \frac{d^2 \Phi^{(N)}(\alpha_n; z)}{dz^2} \right),$$

and

$$M_{ln} = \left(\Phi^{(N)}(\alpha_l; z), \rho(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \mathbb{S}_r \frac{d}{dz} - k^2 \right) \Phi^{(N)}(\alpha_n; z) \right),$$

where $\sqrt{\mathbb{L}(\alpha_n)}$ is the L_2 norm of $\Phi^{(N)}(\alpha_n; z)$ (see Appendix B). Whence the matrix system,

$$\lambda M \widehat{W} = S \widehat{W},$$

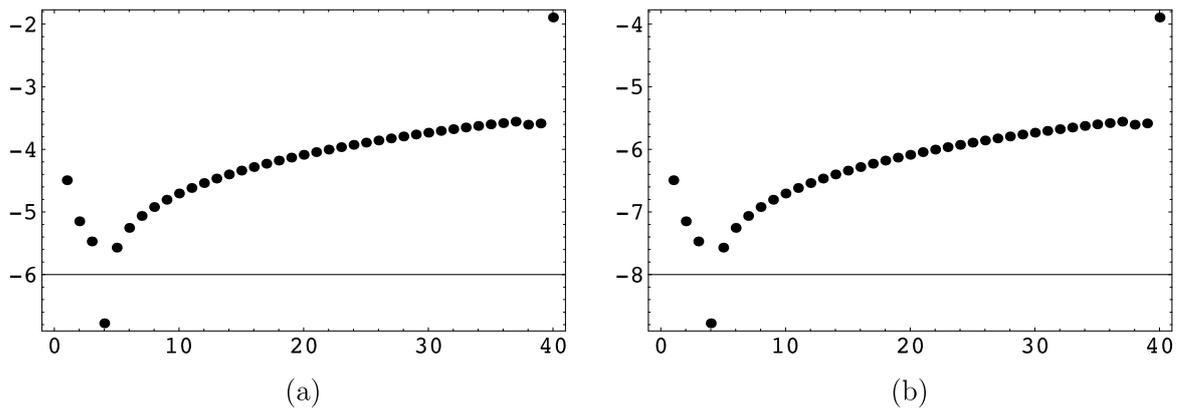


Fig. 10 Case (N). The departure, $\log_{10} |\lambda_{an}(n) - \lambda(n)|$, for $n = 1, \dots, N = 40$, between the $\mathbb{S}_r = 0$ analytical spectrum, $\lambda_{an}(n)$, and the ERH numerical spectrum, $\lambda(n)$, obtained with $\mathbb{S}_r = .001$ in (a) and $\mathbb{S}_r = .0001$ in (b)

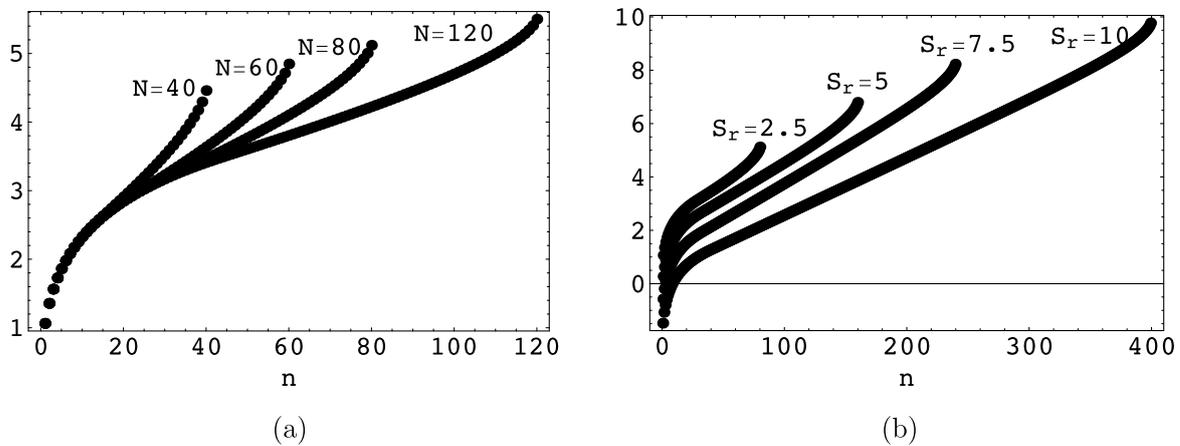


Fig. 11 Case (N). The numerical spectra, $\log_{10}(-\lambda(n))$ for $n = 1, \dots, N$, plotted in (a) for $\mathbb{S}_r = 2.5$ and several cut-offs N , and in (b) for several \mathbb{S}_r values

where \widehat{W} is the column vector made of the coefficients \widehat{w}_n . The numerically determined eigenvalues and eigenvectors are those of the matrix $M^{-1}S$. Notice that the present cut-off, N , has to be considered as equivalent to the cut-off denoted by \mathcal{N} in the previous Dirichlet case.

Assessment of the ERH Numerical System The ERH decomposition (45) cannot be extended to $\mathbb{S}_r = 0$ to compare its results with the theoretical $\mathbb{S}_r = 0$ eigenvalues, λ_{an} , given in Appendix C. We can however proceed to a qualitative validation of the ERH system by comparing to λ_{an} its results obtained with very small \mathbb{S}_r values, checking that the λ 's converge, with \mathbb{S}_r going to zero, to the λ_{an} 's. We have chosen \mathbb{S}_r to be $\mathbb{S}_r = .001$ and $\mathbb{S}_r = .0001$. Figures 10(a) and (b) show $\log_{10} |\lambda_{an}(n) - \lambda(n)|$ for both these values of \mathbb{S}_r . The convergence clearly shows up and indicates that $\log_{10} |\lambda_{an} - \lambda|$ behaves as \mathbb{S}_r^2 , for small \mathbb{S}_r .

The Eigenvalues Again, the numerical spectra obtained with different cut-offs N and shown in Fig. 11(a) exhibit a common envelop of negative curvature. It contains about $\frac{N}{2}$ eigenvalues which correctly approximate the theoretical ones. The tails of these numerical spectra, i.e., beyond the $\frac{N}{2}$ leading eigenvalues, are made, for each N case, of eigenvalues of mainly numerical origin. Table 2 lists the ten leading eigenvalues, $-\lambda(n)$, for $n = 1, \dots, 10$,

Table 2 Case (N), $\mathbb{S}_r = 5$. The 10 leading eigenvalues

n	$-\lambda(n)$
1	1.879857461560770
2	4.228833885434780
3	7.395557694345232
4	11.39210931247646
5	16.22251002424690
6	21.88990237028420
7	28.39694036383768
8	35.74584726466826
9	43.93842602845011
10	52.97608083538158

obtained for $\mathbb{S}_r = 5$ and with $N = 160$. Comparing the lists of eigenvalues in Tables 1 and 2 indicates that the Neumann eigenmode decay rates are smaller than their Dirichlet counterparts, which is physically not surprising.

Figure 11(b) shows the numerical spectra obtained for $\mathbb{S}_r = 2.5, 5, 7.5$ and 10 with the respective cut-offs $N = 80, 160, 240$ and 400. As with the Dirichlet case, Case (D), the decay rates of the eigenmodes decrease with increasing values of the stratification parameter \mathbb{S}_r . This is illustrated by Fig. 5(b) which shows the evolution of the leading eigenvalue $\lambda(1)$, via $\log_{10}(-\lambda(1))$. Fitting these data gives us the law

$$\log_{10}(-\lambda(1)) = 1.63809 - 0.171884\mathbb{S}_r - 0.0251322\mathbb{S}_r^2 + 0.00112006\mathbb{S}_r^3.$$

This fit leads to an evaluation of the $\mathbb{S}_r = 0$ (incompressible flow in channel) eigenvalue, i.e., $\lambda(1) = -\frac{17\pi^2}{4}$, to within 3.6% of accuracy.

The Eigenmodes The stream function, $\tilde{\Psi}(z)$, reads here

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{\rho_0(z)}{k} \sum_{n=0}^N \hat{w}_n \Phi^{(N)}(\alpha_n; z).$$

Figures 12(a) and 9(b) show the stream-function amplitude $\tilde{\Psi}(z)$ and Fig. 12(b) the dynamical-pressure amplitude $\tilde{p}(z)$, for $\mathbb{S}_r = 5$, of the eigenmodes $n = 1, 5$ and 10 of Table 2. They confirm what was observed with Case (D): the flow of each eigenmode is localized in the lower part of the channel, while reducing the dead-zone extension when n increases. The most striking difference between the Dirichlet and Neumann cases appears in the dynamical-pressure amplitude plots. Comparing indeed the curves drawn in Figs. 8(b) and 12(b), one notices a dynamical-pressure dip in the Neumann case, deeper and deeper and moving toward the top part of the channel (at $z = -0.4$ and $z = -0.15$ for $n = 5$ and $n = 10$ respectively) as n increases. And moreover, in the Neumann case, the dynamical pressure tends to a constant non-zero value in the dead zone.

6.3 Fixing $k = 0$ in Cases (D) and (N)

The results obtained from the Sturm-Liouville formulation of the problem are now briefly presented. Table 3 lists the 10 leading eigenvalues for both Cases (D) and (N). It appears that the eigenmodes corresponding to the Neumann case have a larger decay rate than their

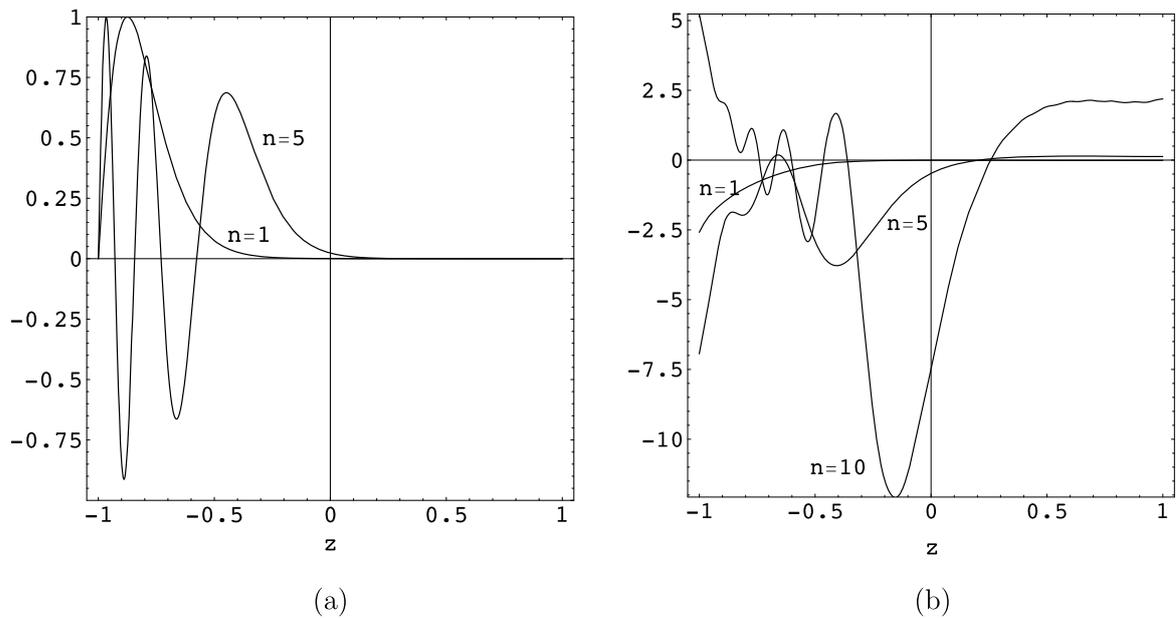


Fig. 12 Case (N), $S_r = 5$. The stream-function amplitude $\tilde{\Psi}(z)$ in (a) and the dynamical-pressure amplitude $\tilde{p}(z)$ in (b) of the eigenmodes $n = 1, 5$ and 10 of Table 2

Table 3 Cases (D) and (N), $k = 0$ and $S_r = 5$. The 10 leading eigenvalues obtained from the analytical solution of the Sturm-Liouville problem (22). The zero eigenvalue in Case (N) has been discarded

n	$-\lambda(n)$, Case (D)	$-\lambda(n)$, Case (N)
1	0.321964479845249	0.618462468194388
2	1.495475411038872	2.073736784996063
3	3.525106520395690	4.361736618071577
4	6.406659790836835	7.482818006529817
5	10.13789256310127	11.43746569241741
6	14.71739823511305	16.22616767198741
7	20.14420557695586	21.84939701130551
8	26.41760116817370	28.30760720418906
9	33.53703793797945	35.60123061703558
10	41.50208290746385	43.73067800960133

Dirichlet counterparts, the difference decreasing with the frequency of the eigenmode, as announced by the asymptotic limit (23). In Fig. 13 are plotted the velocities of two eigenmodes, i.e., the $n = 1$ and $n = 5$ of Table 3. The dynamics of this $k = 0$ configuration can be seen as a superposition (when $n > 1$) of left- and right- moving layers, each one being of Poiseuille type, i.e., with an almost parabolic dependence in z . Like with the non-zero k configurations, there is an accumulation of moving layers in the low part of the channel, but no dead zone in its upper part.

This $k = 0$ case deserves to be taken for illustrating comments made previously in Sect. 6.1 regarding the difference between the analytical and numerical spectra of any given elliptic operator. Since we know here the analytical eigenvalues, let us confront them to those one determines numerically. Solving the eigenvalue problem defined by (22) poses no problem. The system is discretized in the usual framework of a Chebyshev collocation method, briefly presented in the beginning of the Appendix A. We denote by \mathbb{N} the Chebyshev polynomial expansion cut-off, with $(\mathbb{N} + 1)$ the number of grid points chosen at the

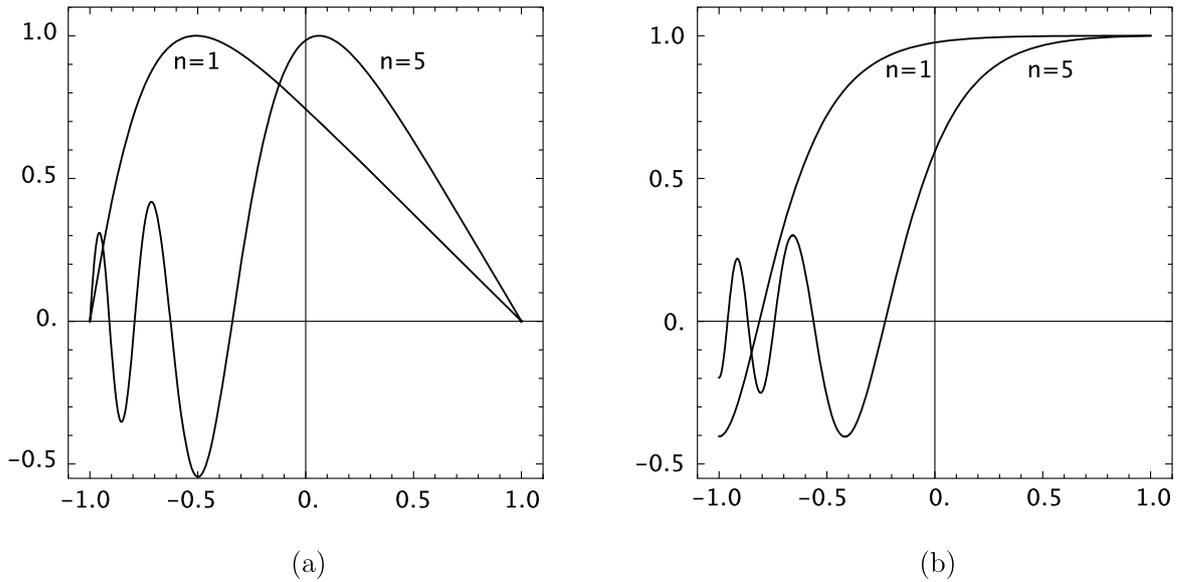


Fig. 13 The $k = 0$ velocity horizontal component, $\tilde{u}(z)$, of the Sturm-Liouville eigenmodes $n = 1$ and $n = 5$ of Table 3, plotted for $\mathbb{S}_r = 5$, in (a) for Case (D), no-slip, and in (b) for Case (N), no-stress

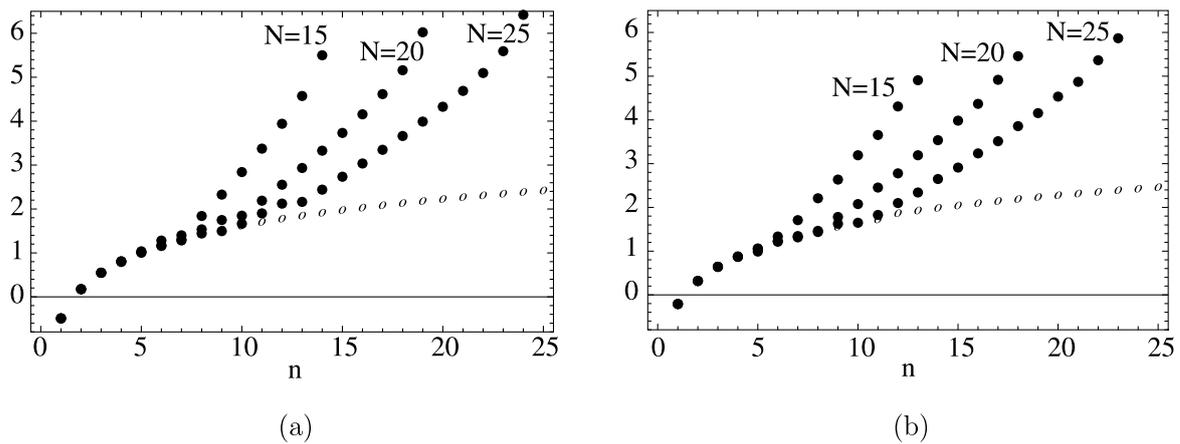


Fig. 14 The $k = 0$ analytical (o) and numerical (\bullet) spectra, $\log_{10}(-\lambda(n))$, for $\mathbb{S}_r = 5$, in (a) for Case (D) and in (b) for Case (N). The analytical spectra correspond to $n = 1, \dots, 25$. The numerical spectra are computed with the cut-offs $\mathbb{N} = 15, 20$ and 25

Gauss-Lobatto locations, [5]. On account of both boundary conditions, one gets $(\mathbb{N} - 1)$ eigenvalues. One of them is zero in the Case (N), i.e., with Neumann conditions at both extremities. Considering only the value $\mathbb{S}_r = 5$ for the stratification parameter it has been checked that \mathbb{N} should not exceed 25 for the polynomial approximation of $\rho_0^{-1}(z)$ (see (22)) not to be polluted by saturation effects in its pseudo-spectrum. The numerical λ 's are presented in Fig. 14 together with their analytical companion. As commented in Sect. 6.1, the lower part (40% approximately) of the numerical spectrum is a good approximation of the analytical spectrum and an important departure is observed for the higher frequency mode eigenvalues. We have here one more example where the numerical spectrum overestimates (in absolute value), significantly at high frequencies, the analytical spectrum of an elliptic operator. Such an overestimation goes with a steep increase of the spatial frequency of the numerical eigenmode compared with what it should be in the analytical one.

7 Conclusion

The anelastic Stokes eigenmodes are computed for a fluid confined, in presence of gravity, between two horizontally infinite plates. The rest-state density and pressure fields are exponentially stratified in the vertical direction, \mathbb{S}_r denoting the stratification parameter and the stratification being stabilizing. The limit case where the stratification disappears ($\mathbb{S}_r = 0$) corresponds to an incompressible flow in infinite channel, while $\mathbb{S}_r = 10$ is the upper limit of the anelastic configuration. Considering the horizontal wave number k with two values, $k = 2\pi$ and $k = 0$, two physical configurations are analyzed, one with no-slip conditions imposed on both horizontal walls, Case (D), and one with no-stress, Case (N), while imposing no flow through these boundaries in both cases.

The differential problem is shown to be elliptic: all its eigenvalues are negative, discarding one zero eigenvalue in the Case (N). This opens the way to design a stable algorithm for solving the anelastic equations.

The eigenvalues behave monotonically with k and tend to be linear with k^2 as k becomes very large.

The eigenvalue problem formulation involves a stiffness operator and a mass operator. Its correct discretization must be carried out by using a Galerkin approach, the only way to maintain the ellipticity of the problem. For $k = 2\pi$, the Case (D) is treated by expanding the velocity vertical component in series of Reid-Harris eigenfunctions while Extended Reid-Harris eigenfunctions are introduced for the Case (N). For $k = 0$, an analytical solution can be worked out, allowing us to compare the numerical eigenvalues to the analytical ones.

All the numerical spectra present a similar behavior. On one hand, their lower part converges, with the numerical cut-offs, toward a limit envelope which can be considered as corresponding to the analytical eigenvalues. On the other hand, the upper part significantly departs from the mentioned envelope and corresponds to numerical eigenmodes which are choppier and choppier. All that is well known from the second derivative Chebyshev operator and it is here confirmed with the $k = 0$ case where the analytical solution is known. From a purely numerical view point this means that the Stokes solvers are overstabilized if implicitly treated with time.

The eigenmodes are made of a stack of cells (or of horizontal layers of opposite velocity when $k = 0$) localized in the low part of the channel, leaving a dead zone in the upper part of the channel, the extension of this dead zone being smaller and smaller with the spatial frequency of the eigenmode. By this localization the eigenmodes have access to the largest vertical gradient of the hydrostatic pressure and also to the largest density, which then minimizes the effective momentum diffusivity and consequently the temporal damping rate of the eigenmode. As a consequence, the larger the stratification parameter the longer the lifetime of the anelastic eigenmodes. The Case (D) and (N) eigenmodes have comparable velocity profiles. Conversely their dynamical-pressure behaves in a specific way.

The knowledge of the anelastic Stokes eigenmodes provides some insight into the dynamics of the last gasp of the Rayleigh-Taylor behavior, the stage where the motor is practically turned off and the flow dies out by itself. The eigenmodes of the full Rayleigh-Taylor configuration would certainly deserve to be analyzed.

Appendix A: The Pressure Discrete System

In most of the closed flows the pressure is not known on the boundaries and the $\vec{\nabla}^2 p$ equation (see (28) for example) it must verify cannot be used for determining it. This is one aspect of

the (\vec{v}, p) uncoupling in the incompressible and anelastic formulations of the Navier-Stokes problem. The present case is fairly easy to treat: the x -periodicity of the configuration leads to separate equations on the velocity and pressure fields. Once the velocity is known the pressure remains to be determined without introducing any boundary condition. To this end we use the Projection-Diffusion approach, [3, 12], which turns out to be the only spectrally accurate numerical tool capable of computing the Stokes eigenmodes in the cube, [14]. It will lead to a discrete system which is very close to (28) but does not require to be completed by boundary conditions for being inverted. Let us see the way we proceed.

The right-hand side of (28) is considered as being analytically known, which is practically the case from (43) and (45). We can therefore compute its nodal values at any given set of points. These points are chosen to be located at the Chebyshev Gauss-Lobatto (CGL) coordinates, [5],

$$z_p = -\cos\left(p \frac{\pi}{\mathbb{N}}\right), \quad p = 0, \dots, \mathbb{N},$$

where \mathbb{N} is the Chebyshev cut-off of the decomposition of the field $\tilde{p}(z)$. Let us introduce the column vector \tilde{P} made of the $(\mathbb{N} + 1)$ CGL nodal values of $\tilde{p}(z)$, i.e.,

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{\mathbb{N}})^t \quad \text{with } \tilde{p}_n \equiv \tilde{p}(z_n).$$

Let D be the first-derivation CGL matrix, of size $(\mathbb{N} + 1)$, whose entries are given by

$$D \equiv D_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mathbb{N}^2+1}{6} & & & & & & & & & -\frac{(-1)^{\mathbb{N}}}{2} \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)} & & & & & \\ & & & & & & \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j} \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ \frac{(-1)^{\mathbb{N}}}{2} & & & & & & & & & \frac{2\mathbb{N}^2+1}{6} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

where

$$\bar{c}_0 = \bar{c}_{\mathbb{N}} = 2, \quad \bar{c}_{0 < n < \mathbb{N}} = 1.$$

We can now discretize Eq. (36) and, then, take into account both the right part of (35) and the boundary conditions (37) or (38). This leads to a three-step handling.

1. One has directly, from (36),

$$ik(\tilde{a}_x)_n + \sum_{n'=0}^{\mathbb{N}} D_{nn'}(\tilde{a}_z)_{n'} = -S_n \quad \text{for } n = 0, \dots, \mathbb{N}, \quad (47)$$

where $(\tilde{a}_x)_n$ and $(\tilde{a}_z)_n$ are the nodal values of \tilde{a}_x and \tilde{a}_z at $z = z_n$ and

$$S_n = \frac{4}{3} \mathbb{S}_r \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{w} \Big|_{z_n}$$

supplies the nodal value at $z = z_n$ of the right-hand side of Eq. (36).

2. The boundary values, $(\tilde{a}_z)_0$ and $(\tilde{a}_z)_{\mathbb{N}}$, of \tilde{a}_z are imposed by (37) or (38). Lets denote them by

$$(\tilde{a}_z)_{\bullet} = \tilde{A}_{\bullet} \quad \text{with } \bullet = 0, \mathbb{N}.$$

They can thus be introduced in (47) which leads to

$$ik(\tilde{a}_x)_n + \sum_{\nu=1}^{\mathbb{N}-1} D_{n\nu}(\tilde{a}_z)_\nu = -S_n - (D_{n0}\tilde{A}_0 + D_{n\mathbb{N}}\tilde{A}_{\mathbb{N}}) \quad \text{for } n = 0, \dots, \mathbb{N}.$$

3. The remaining nodal values of \tilde{a}_x and \tilde{a}_z are replaced in this latter equation by the right part of (35). This introduces the pressure nodal values, according to

$$\begin{aligned} k^2\tilde{p}_n - \sum_{\nu=1}^{\mathbb{N}-1} D_{n\nu} \left(\sum_{n'=0}^{\mathbb{N}} D_{\nu n'}\tilde{p}_{n'} + \mathbb{S}_r\tilde{p}_\nu \right) \\ = -S_n - (D_{n0}\tilde{A}_0 + D_{n\mathbb{N}}\tilde{A}_{\mathbb{N}}) \quad \text{for } n = 0, \dots, \mathbb{N}. \end{aligned}$$

This is the pressure equation which can be given a matrix form, by introducing rectangular matrices, i.e., \overline{D} of $(\mathbb{N} + 1)$ rows and $(\mathbb{N} - 1)$ columns and \underline{D} of $(\mathbb{N} - 1)$ rows and $(\mathbb{N} + 1)$ columns, their entries being thus such that

$$\overline{D}_{n\nu} = D_{n\nu} \quad \text{for } n = 0, \dots, \mathbb{N}, \nu = 1, \dots, \mathbb{N} - 1,$$

and

$$\underline{D}_{\nu n} = D_{\nu n} \quad \text{for } \nu = 1, \dots, \mathbb{N} - 1, n = 0, \dots, \mathbb{N}.$$

Whence the pressure discrete system,

$$(\overline{D} \cdot \underline{D} - k^2 I + \mathbb{S}_r \overline{D} \cdot \underline{I}) \tilde{P} = \tilde{S}, \tag{48}$$

where I is the unit matrix of size $(\mathbb{N} + 1)$, \underline{I} its restriction to $(\mathbb{N} - 1)$ rows, and \tilde{S} is the vector column made of the $(\mathbb{N} + 1)$ quantities $(S_n + (D_{n0}\tilde{A}_0 + D_{n\mathbb{N}}\tilde{A}_{\mathbb{N}}))$, i.e., for $n = 0, \dots, \mathbb{N}$. It is instructive to compare (28) with (48). The latter equation is the closest discrete version of the former which does not require any boundary condition to be inverted. In particular, the matrix $\overline{D} \cdot \underline{D}$, called the quasi- $\frac{d^2}{dz^2}$ operator, has real eigenvalues, all negative except two of them which are zero. It is the elementary brick of the quasi-Poisson operator which determines the pressure in the incompressible context, [12].

Appendix B: Extended Reid-Harris Functions $\Phi^{(\mathbb{N})}(\alpha; z)$

These eigenfunctions are defined by Eqs. (39) and (41). Their boundary conditions do not allow them to enjoy any z -symmetry property. We can therefore express them as a linear combination of the z -even and -odd RH eigenfunctions, i.e.,

$$\Phi^{(\mathbb{N})}(\alpha; z) = \frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha z)}{\cos(\alpha)} + \beta \left(\frac{\sinh(\alpha z)}{\sinh(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha z)}{\sin(\alpha)} \right),$$

where the coefficient β has to be related to the eigenvalue α . Each z -even and -odd part of $\Phi^{(\mathbb{N})}(z)$ satisfies the differential equation (39) and the Dirichlet part of the boundary condition (41). One thus has only to impose the mixed boundary condition, viz., the left-hand side of (41). It supplies

$$\beta = \frac{\mathbb{S}_r}{2\alpha} (\tanh(\alpha) + \tan(\alpha)),$$

the eigenvalues α being the roots of the following transcendental equation,

$$4\alpha^2 - \mathbb{S}_r^2 (\tanh(\alpha) + \tan(\alpha)) \left(\frac{1}{\tanh(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) = 0. \tag{49}$$

Table 4 The 10 leading eigenvalues α_n , the associated β 's and $\mathbb{L}(\alpha_n)$'s, obtained for $\mathbb{S}_r = 5$. The data are given with 16 significant digits

n	α	β	$\mathbb{L}(\alpha_n)$
1	2.610489907748982	0.3848460532724232	0.8163279666377166
2	4.428597151424086	2.499841199643798	8.766625927695120
3	6.122238749649591	0.3420478980896408	2.654263088026187
4	7.751424445479414	3.456283194732373	52.35837277510633
5	9.353824662869002	0.2482747464031552	6.535451597375111
6	10.94357566121672	4.617764311287492	193.9314173085745
7	12.52662439920060	0.1916383877914133	12.05393329535633
8	14.10579694980948	5.825112472684525	522.9099831217119
9	15.68257273222750	0.1553641776864424	19.16315782838179
10	17.25778686269828	7.051015489204248	1158.952600525995

Like the RH functions, the $\Phi^{(N)}(\alpha; z)$ are orthogonal, but not normalized, by the following scalar product,

$$(\Phi^{(N)}(\alpha_l; z), \Phi^{(N)}(\alpha_n; z)) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi^{(N)}(\alpha; z) \Phi^{(N)}(\alpha'; z) dz = \mathbb{L}(\alpha_n) \delta_{ln},$$

where $\sqrt{\mathbb{L}(\alpha_n)}$ is the L_2 norm of $\Phi^{(N)}(\alpha_n; z)$. In Table 4 are given the 10 leading eigenvalues α together with the associated β 's and $\mathbb{L}(\alpha_n)$'s, obtained for $\mathbb{S}_r = 5$. The data are given with 16 significant digits.

Appendix C: The Incompressible Stokes Eigenmodes in Infinite Channel

This appendix is devoted to the case where $\mathbb{S}_r = 0$, i.e., when the rest state is of constant density and the flow is therefore taken as incompressible. The pressure equation obtains from (28) and (16). It reads

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \tilde{p} = 0, \quad \forall z \in]-1, 1[. \tag{50}$$

For the velocity vertical component \tilde{w} , one had (32), recalled here

$$\lambda \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) \tilde{w} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2 \tilde{w}, \tag{51}$$

completed by the boundary conditions, in Case (D),

$$\left.\frac{d\tilde{w}}{dz}\right|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1),$$

and, in Case (N),

$$\left.\frac{d^2\tilde{w}}{dz^2}\right|_{z=\pm 1} = 0 = \tilde{w}(z = \pm 1). \tag{52}$$

In both cases, the Stokes eigenmodes $\tilde{w}(z)$ enjoy a z -symmetry property: they are either symmetrical or anti-symmetrical under the mirror operation $z \rightarrow -z$. The associated eigenmodes are denoted by $\tilde{w}_e(z)$ and $\tilde{w}_o(z)$.

The Case (D), no-slip on the top and bottom walls, is well known, [14, 17]. We just give here its analytical description. The velocity components $\tilde{w}_e(z)$ and $\tilde{w}_o(z)$ read

$$\tilde{w}_e(z) = \frac{\cosh(kz)}{\cosh(k)} - \frac{\cos(\mu_e z)}{\cos(\mu_e)}, \quad \tilde{w}_o(z) = \frac{\sinh(kz)}{\sinh(k)} - \frac{\sin(\mu_o z)}{\sin(\mu_o)},$$

where the μ_e 's and μ_o 's are the roots of the following transcendental relations

$$\mu_e \tan(\mu_e) = -k \tanh(k), \quad \mu_o \cot(\mu_o) = k \coth(k). \quad (53)$$

The corresponding Stokes eigenvalues are given by $\lambda_\bullet = -(k^2 + \mu_\bullet^2)$ with $\bullet = e, o$. The first eigenvalues are listed in [17] for $k = 1, 10$.

The Case (N), no-stress on the top and bottom walls, defined by (51) and (52), becomes periodic in z , with

$$\tilde{w}_e(z) = \cos(\mu_e z), \quad \tilde{w}_o(z) = \sin(\mu_o z),$$

where

$$\mu_e = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \dots, \infty; \quad \mu_o = n\pi, \quad n = 1, \dots, \infty.$$

The Stokes eigenvalues are then simply $\lambda(n) = -(k^2 + (n \frac{\pi}{2})^2)$ for $n = 1, \dots, \infty$. The associated dynamical pressure field is harmonic by (50). It has also to be periodic in all space directions. It must then be zero, $\tilde{p}(z) = 0$.

References

1. Abarzhi, S.I., Gauthier, S., Rosner, R.: Preface: turbulent mixing and beyond. In: 1st International Conference on Turbulent Mixing and Beyond, vol. T132, pp. 011001–014056 (2009)
2. Abarzhi, S.I., Sreenivasan, K.R.: Introduction: turbulent mixing and beyond. Philos. Trans. R. Soc. Lond. A, **368**, 1537–1828 (2010). 1st International Conference on Turbulent Mixing and Beyond
3. Batoul, A., Khallouf, H., Labrosse, G.: Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II **319**, 1455–1461 (1994)
4. Brenier, B., Roux, B., Bontoux, P.: Comparaison des méthodes Tau-Chebyshev et Galerkin dans l'étude de stabilité des mouvements de convection naturelle. Problème des valeurs propres parasites. J. Méc. Théor. Appl. **5**(1), 95–119 (1986)
5. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A.: Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer Series in Computational Physics. Springer, New York (1988)
6. Chu, B.-T., Kovásznay, L.S.G.: Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. J. Fluid Mech. **3**, 494–514 (1957)
7. Gary, J., Helgason, R.: A matrix method for the ordinary differential eigenvalue problem. J. Comput. Phys. **5**, 169–187 (1970)
8. Gough, D.O.: The anelastic approximation for thermal convection. J. Atmos. Sci. **26**, 448–456 (1969)
9. Harris, D.L., Reid, W.H.: On orthogonal functions which satisfy four boundary conditions. I. Tables for use in Fourier-type expansions. Astrophys. J. Suppl. Ser. **3**, 429–447 (1958)
10. Labrosse, G.: The piecewise-linear Finite Volume scheme: the best known lowest-order preconditioner for the $\frac{d^2}{dx^2}$ Chebyshev spectral operator. J. Comput. Phys. **228**(12), 4491–4509 (2009)
11. Le Creurer, B., Gauthier, S.: A return toward equilibrium in a two-dimensional Rayleigh-Taylor instability for compressible miscible fluids. Theor. Comput. Fluid Dyn. **22**, 125–144 (2008)
12. Leriche, E., Labrosse, G.: High-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting: numerical investigations of their comparative properties. SIAM J. Sci. Comput. **22**, 1386–1410 (2000)
13. Leriche, E., Labrosse, G.: Stokes eigenmodes in square domain and the stream function—vorticity correlation. J. Comput. Phys. **200**, 489–511 (2004)
14. Leriche, E., Labrosse, G.: Vector potential—vorticity relationship for the Stokes flows: application to the Stokes eigenmodes in 2D/3D closed domain. Theor. Comput. Fluid Dyn. **21**(1), 1–13 (2007)
15. Malik, M.R.: Numerical methods for hypersonic boundary layers stability. J. Comput. Phys. **86**, 376–413 (1990)

16. Malik, M.R., Orszag, S.A.: Linear stability analysis of three-dimensional compressible boundary layers. *J. Sci. Comput.* **2**(1), 77–97 (1987)
17. Orszag, S.A., Israeli, M., Deville, M.: Boundary conditions for incompressible flows. *J. Sci. Comput.* **1**(1), 75–111 (1986)
18. Råde, L., Westergren, B.: *Mathematics Handbook for Science and Engineering*. Springer, Berlin (1999)
19. Reid, W.H., Harris, D.L.: On orthogonal functions which satisfy four boundary conditions. II. Integrals for use with Fourier-type expansions. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **3**, 448–452 (1958)
20. Vandeven, H.: On the eigenvalues of second-order spectral differentiation operators. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **80**, 313–318 (1990)
21. Wolfram, S.: *The Mathematica Book*, Fourth edn. Wolfram Media/Cambridge University Press, Cambridge (1999)
22. Zebib, A.: A Chebyshev method for the solution of boundary value problems. *J. Comput. Phys.* **53**, 443–455 (1984)
23. Zebib, A.: Removal of spurious modes encountered in solving stability problems by spectral methods. *J. Comput. Phys.* **70**, 521–525 (1987)

Table des figures

1	Réaction de fusion deutérium-tritium.	2
2	Microballon contenant le mélange de Deutérium-Tritium.	4
3	Schéma de principe de l'attaque indirecte (http://www.centauri-dreams.org/).	4
4	Étapes de la fusion par confinement inertiel.	5
I.1	Développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lors d'une expérience réalisée par Waddell <i>et al.</i> [2001].	10
I.2	Configuration initiale de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : équilibre hydrostatique des deux fluides pour pour $Sr = 0.2$	17
I.3	Profil de $H_+(z)$ (à gauche) et $H_-(z)$ (à droite) pour différentes épaisseurs de la pseudo-interface δ en fonction de la coordonnée $z \in [-0.5, 0.5]$	28
I.4	Profils caractéristiques de l'état de base pour $Sr = 1$, $At = r_M = 0.25$ et $\delta = 0.001$ pour $z \in [-2, 2]$	29
II.1	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de Sr avec $At = 0.25$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$	51
II.2	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de Sr avec $At = 0.25$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$	51

Table des figures

II.3	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de At avec $Sr = 0.1$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$	52
II.4	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de At avec $Sr = 0.1$, $h_H = 2$. et $h_L = 2.25$	53
II.5	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de $h_H = h_L$ avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$	54
II.6	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de $h_H = h_L$ avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$	54
II.7	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_H et h_L avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$	55
II.8	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_H et h_L avec $At = 0.25$ et $Sr = 0.1$	55
II.9	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_L avec $At = 0.25$, $Sr = 0.1$ et $h_H = 2$	56
II.10	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_L avec $At = 0.25$, $Sr = 0.1$ et $h_H = 2$	56
II.11	Taux de croissance anélastique en fonction de k pour différentes valeurs de h_H avec $At=0.25$, $Sr=0.1$ et $h_L = 2$	57
II.12	Rapport du taux de croissance anélastique sur le taux de croissance incompressible en fonction de k pour différentes valeurs de h_H avec $At=0.25$, $Sr=0.1$ et $h_L = 2$	57
II.13	fonctions propres de la fonction courant (ϕ), des composantes orthogonales de la vitesse (u) et verticale (w) et la pression (p) pour un nombre d'onde $k = 2 \pi$, pour le fluide lourd (en bleu) et le fluide léger (en rouge), pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$. . .	58
III.1	Illustration de la méthode de décomposition de domaine.	71

III.2	fonctions propres lissées de la fonction courant (ϕ), des composantes orthogonales de la vitesse (u) et verticale (w) et la pression (p), pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$	79
III.3	$\text{div}(\rho^{(0)}\vec{u})$, pour $Sr = 0.1$, $At = 0.25$, $h_H = 2$ et $h_L = 2.25$ à $t = 0$	79
IV.1	Le canal plan infini dans la direction horizontale.	83
IV.2	Les spectres $\log_{10}(-\lambda(n))$ analytiques et numériques, pour $Sr = 5$ pour le cas (D) et $k = 0$	85
IV.3	Lignes de contour de la fonction de courant pour le cas D et $Sr = 5$ tracées pour le mode propre $n = 5$	86
V.1	Différence des valeurs propres de Hp calculées par MATHEMATICA/FORTRAN pour $k = 2\pi$	116
V.2	Différence des résultats MATHEMATICA/FORTRAN pour $k = 0$	117
V.3	Dimension de la boîte réalisée par Waddell <i>et al.</i> [2001].	118
V.4	Évolution de l'amplitude de l'IRT pour les résultats expérimentaux et les simulations.	121
V.5	perturbation a $t_{exp} = 0.255$ et $t_{simu} = 0.85$	122
V.6	perturbation a $t_{exp} = 0.51$ et $t_{simu} = 1.153$	122
V.7	perturbation a $t_{exp} = 0.765$ et $t_{simu} = 1.31$	122
V.8	perturbation a $t_{exp} = 1.02$ et $t_{simu} = 1.63$	123
V.9	perturbation a $t_{exp} = 1.27$ et $t_{simu} = 1.867$	123
V.10	perturbation a $t_{exp} = 1.53$ et $t_{simu} = 2.138$	123
V.11	perturbation a $t_{exp} = 1.78$ et $t_{simu} = 2.38$	123
V.12	perturbation a $t_{exp} = 2.04$ et $t_{simu} = 2.65$	124
V.13	perturbation a $t_{exp} = 2.296$ et $t_{simu} = 2.89$	124
V.14	Évolution de la longueur de mélange pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	127
V.15	Évolution de la fraction de mélange pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	128
V.16	Évolution de l'énergie cinétique moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	128
V.17	Évolution du rotationnel moyenné en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	129

Table des figures

V.18	Évolution de la variance de densité moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	130
V.19	Évolution de la variance de concentration moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	130
V.20	Évolution de la variance relative de la pression moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	131
V.21	Évolution de la variance de la pression moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	131
V.22	Évolution de la dissipation moyennée en y z pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	132
V.23	Évolution du champ de concentration pour la configuration standard.	132
V.24	Évolution du pas de temps pour différentes valeurs de C pour les versions anélastique et compressible.	134
VI.1	Masse volumique de l'état hydrostatique pour différentes valeurs du paramètre de stratification.	136
VI.2	Densité moyenne à $t = 0$ pour différentes valeurs de Sr	136
VI.3	Évolution du champ de concentration pour $Sr = 0.2$	138
VI.4	Évolution du champ de concentration pour $Sr = 1$	138
VI.5	Évolution du champ de concentration pour $Sr = 2$	138
VI.6	Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 0.2$	139
VI.7	Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 1$	139
VI.8	Évolution du champ de vorticité pour $Sr = 2$	139
VI.9	Concentration et vorticité moyennes à 3 instants pour différentes valeurs de Sr	140
VI.10	Évolution de l'amplitude du défaut initial pour différentes valeurs de Sr	141
VI.11	Évolution de la longueur de mélange pour différentes valeurs de Sr .	142
VI.12	Évolution de la fraction de mélange pour différentes valeurs de Sr .	142
VI.13	Évolution de l'énergie cinétique moyennée en y et z pour différentes valeurs de Sr	143

VI.14 Évolution de l'anisotropie de l'énergie cinétique, moyennée en y z pour différentes valeurs de Sr	143
VI.15 Évolution du rotationnel moyenné en y z pour différentes valeurs de Sr	144
VI.16 Évolution de la variance de concentration moyennée en y z pour différentes valeurs de Sr	144
VI.17 Évolution de la divergence moyennée en y z pour différentes valeurs de Sr	145
VI.18 Évolution de la variance de la pression moyenné en y z pour différentes valeurs de Sr	145
VI.19 Évolution de la dissipation moyennée en y z pour différentes valeurs de Sr	146
VI.20 Évolution du pas de temps pour différentes valeurs de Sr	146

Table des tableaux

Liste des tableaux

I.1	Potentiel thermodynamique à considérer selon le couple de variables donné.	14
I.2	Nombres sans dimension des équations de Navier-Stokes.	26
II.1	Nombres sans dimension des équations de Navier-Stokes.	40
II.2	Bilan des équations différentielles du système d'équations de Navier-Stokes en AN.	41
III.1	Coefficients sans dimension des équations de Navier-Stokes en approximation anélastique.	73
V.1	Paramètres numériques et physiques de chaque simulation numérique.	120
V.2	Paramètres numériques et physiques de la simulation standard.	125
V.3	Liste des quantités moyennes calculées.	126
V.4	Paramètres numériques de la simulation standard.	133

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- ARROW, K., HURWICZ, L. & UZAWA, H. 1964 *Studies in linear and non-linear programming*. Stanford University Press, Stanford, California.
- BATCHELOR, G. K. 1953 The conditions for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect-gas atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **79**, 224–235.
- BATOUL, A, KHALLOUF, H. & LABROSSE, G. 1994 Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* **319** (12), 1455–1461.
- BERNSTEIN, IRA B. & BOOK, DAVID L. 1983 Effect of compressibility on the Rayleigh-Taylor instability. *Physics of Fluids* **26** (2), 453–458.
- BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., CLARISSE, J. M. & GAUTHIER, S. 2003 A spectral Chebyshev method for linear stability analysis of one-dimensional exact solutions of gas dynamics. *Journal of Computational Physics* **184** (2), 592 – 618.
- BRENNER, M.P., LOHSE, D. & DUPONT, T.F. 1995 Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence. *Physical Review Letters* **75** (5), 954–957.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydrodynamic Stability*. Oxford University Press .
- CLENSHAW, C. W & CURTIS, A. R. 1960 A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik* **2** (1), 197–205.
- CRC HANDBOOK 2007 *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 88th Edition*, 88th edn. CRC Press.

Références bibliographiques

- DALY, B.-J. 1967 Numerical study of two-fluid Rayleigh-Taylor instability. *Physic of fluids* **10**, 297.
- DALY, B.-J. 1969 Numerical study of the effect of surface tension on interface instability,. *Physic of fluids* **12**, 1340.
- DALZIEL, S.-B., LINDEN, P.-F. & YOUNGS, D.-L. 1999 Self-similarity and internal structure of the turbulence induced by Rayleigh-Taylor instability. *Journal of fluid Mechanics* **1**, 399.
- DEVILLE, M., KLEISER, L. & MONTIGNY-RANNOU, F. 1984 Pressure and time treatment for Chebyshev spectral solution of a Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **4** (12), 1149–1163.
- DURRAN, D.R. 1999 *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Springer.
- DURRAN, D.R. & ARAKAWA, A. 2007 Generalizing the Boussinesq approximation to stratified compressible flow. *Comptes Rendus Mécanique* **335** (9-10), 655 – 664.
- EMANUEL, K.A. 1994 *Atmospheric convection*. Oxford University Press.
- EMMONS, H.-W. & CHANG, C.-T. 1960 Taylor instability of finite surface waves. *Journal of Fluid Mechanics* **7**, 177–193.
- FRYXELL, B., ARNETT, D. & MUELLER, E. 1991 Instabilities and clumping in SN 1987A. I - Early evolution in two dimensions. *Astrophysical Journal* **367**, 619–634.
- GAUTHIER, S. & LE CREURER, B. 2010 Compressibility effects in rayleigh-taylor instability-induced flows. *Philosophical Transactions of The Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **368**, 1681–1704.
- GOTTLIEB, D., ORSZAG, S.A. & STEVEN, A 1977 *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- GOUGH, D. O. 1969 The anelastic approximation for thermal convection. *Journal of Atmospheric Sciences* **26**, 448–456.
- GUILLARD, H., MALE, J.M. & PEYRET, R. 1992 Adaptive spectral methods with application to mixing layer computations. *Journal of Computational Physics* **102** (1), 114 – 127.
- VON HELMHOLTZ, H. 1868 On discontinuous movement of fluids. *Philosophical Magazine* **36**, 337.

- HESTER, J. J., STONE, J. M., SCOWEN, P. A., JUN, B.-I., GALLAGHER, III, J. S., NORMAN, M. L., BALLESTER, G. E., BURROWS, C. J., CASERTANO, S., CLARKE, J. T., CRISP, D., GRIFFITHS, R. E., HOESSEL, J. G., HOLTZMAN, J. A., KRIST, J., MOULD, J. R., SANKRIT, R., STAPELFELDT, K. R., TRAUGER, J. T., WATSON, A. & WESTPHAL, J. A. 1996 WFPC2 Studies of the Crab Nebula. III. Magnetic Rayleigh-Taylor Instabilities and the Origin of the Filaments. *Astrophysical Journal* **456**, 225–.
- HIRT, C.-W. & NICHOLS, B.-D. 1981 Volume of fluid (vof) methods for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computing* **39**, 201.
- HUSSAINI, M Y, ZANG & QUARTERONI, A 1987 Spectral methods in fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics* **19** (1), 339–367.
- KIFONIDIS, K., PLEWA, T., JANKA, H. TH & MUELLER, E. 2003 Non-spherical Core Collapse Supernovae I. Neutrino-Driven Convection, Rayleigh-Taylor Instabilities, and the Formation and Propagation of Metal Clumps. *Astronomy & Astrophysics* **408**, 621.
- KLEISER, L. & SCHUMANN, U. 1980 Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows pp. 165–173.
- LABROSSE, G. 2011 *Méthodes spectrales, méthodes locales, méthodes globales, problèmes d’Helmoltz et de Stokes, équations de Navier-Stokes*. Ellipses.
- LAFAY, M.-A. 2007 *Stabilité et simulation numérique de l’écoulement de Rayleigh-Taylor pour des fluides miscibles compressibles*. PhD thesis, CEA-Université Paris 11.
- LAFAY, M.-A., CREURER, B. LE & GAUTHIER, S. 2007 Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability between miscible fluids. *Europhysics Letters* **79** (6), 64002.
- LANCZOS, C. 1938 Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *Journal of Mathematical Physics* **17**, 123–199.
- LANCZOS, C. 1973 Legendre versus Chebyshev methods. *Topics in Numerical Analysis*. J.H Miller (Academic Press, London, New York) pp. 191–201.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. 1967 *Physique Statistique*. Mir-Moscou.
- LE CREURER, B. 2005 *Simulation numérique pseudo-spectrales de l’instabilité de Rayleigh-Taylor pour des fluides compressibles*. PHD Thesis.

Références bibliographiques

- LE CREURER, B. & GAUTHIER, S. 2008 A return toward equilibrium in a 2D Rayleigh-Taylor instability for compressible fluids with a multidomain adaptive Chebyshev method. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **22**, 125–144.
- LERICHE, E. & LABROSSE, G. 2007 Vector potential-vorticity relationship for the stokes flows : application to the stokes eigenmodes in 2D/3D closed domain. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **21**, 1–13.
- LEWIS, D.-J. 1950 the instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes II. *Royal society publishing* **202**, 81.
- LEZZI, A. & PROSPERETTI, A. 1989 Rayleigh-Taylor instability for adiabatically stratified fluids. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* **1** (11), 1784–1795.
- LINDEN, P.-F. & REDONDO, J.-M. 1991 Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability. *Physics of fluids* **3**, 1269.
- LINDL, J.D. 1998 *Inertial confinement Fusion Flow*. Springer-Verlag.
- LIPPS, F. B. & HEMLER, R. S. 1982 A Scale Analysis of Deep Moist Convection and Some Related Numerical Calculations. *Journal of Atmospheric Sciences* **39**, 2192–2210.
- LIVESCU, D. 2003 Compressibility effects on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids. *Physics of Fluids* **16** (1), 118–128.
- LIVESCU, D. 2005 Comment on “Compressible Rayleigh–Taylor instabilities in supernova remnants”. *Physics of Fluids* **17** (6), 069101.
- LORD KELVIN, W. T. 1871 Hydrokinetic solutions and observations. *Philosophical Magazine* **42**, 362.
- MAGNAUDET, J., RIVERO, M. & FAVRE, J. 1995 Accelerated flows around a rigid sphere or a spherical bubble. *Journal of fluid mechanics* **97**, 284.
- MATHEWS, W. G. & BLUMENTHAL, G. R. 1977 Rayleigh-Taylor Stability of Compressible and Incompressible Radiation-Supported Surfaces and Slabs : Application to QSO Clouds. *Astrophysical Journal* **214**, 10.
- MESHKOV, E. E. 1970 Instability of a shock wave accelerated interface between two gases. *NASA Technical Report* **13**, 074.
- MONTIGNY-RANNOU, F. 1983 Influence of compatibility conditions in numerical simulation of inhomogeneous incompressible flows. *Gesellschaft Angewandte Mathematik und Mechanik Workshop Paris France* **127**.

- OGURA, Y. & PHILLIPS, N. A. 1962 Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences* **19**, 173–179.
- ORSZAG, S.A. 1972 Comparison of spectral and pseudospectral approximations. *Stud. Appl. Math.* **51**, 253–259.
- ORSZAG, S. A., ISRAELI, M. & DEVILLE, M. O. 1986 Boundary conditions for incompressible flows. *Journal of Scientific Computing* **1**, 75–111.
- PEYRET, R. 2002 *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Springer.
- PLESSET, M. S & HSIEH, D.Y 1964 General analysis of the stability of superposed fluids. *Physics of Fluids* **7** (8), 1099–1108.
- PULICANI, J.-P. 1988a A spectral multi-domain method for the solution of 1D-Helmholtz and Stokes-type equations. *Computers and Fluids* **16**, 207–215.
- PULICANI, J.-P. 1988b *Application des méthodes spectrales à l'étude d'écoulements de convection..* PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- RAYLEIGH, LORD 1883 Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London Mathematical Society* **14**, 170.
- RENAUD, F. 1996 *Méthode spectrale de décomposition dynamique de domaines : Application aux écoulements compressibles de Rayleigh-Bénard et Kevin-Helmholtz.* PhD thesis, CEA-Université de Nice-Sophia Antipolis.
- RENAUD, F. & GAUTHIER, S. 1997 A dynamical pseudo-spectral domain decomposition technique : application to viscous compressible flows. *Journal of Computational Physics* **131**, 89–108.
- RIBEYRE, X., TIKHONCHUK, V. T. & BOUQUET, S. 2004 Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants. *Physics of Fluids* **16** (12), 4661–4670.
- RIBEYRE, X., TIKHONCHUK, V. T. & BOUQUET, S. 2005 Response to Comment on 'Compressible Rayleigh-Taylor instabilities in supernova remnants'. *Physics of Fluids* **17** (6), 069102.
- RICHTMYER, R. D. 1960 Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, 297.
- RIDER, W.-J. & KOTHE, D.-B. 1995 Stretching and tearing interface tracking methods. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* **12**, 95–1717.

-
- ROTHMAN, E.E. 1991 *Reducing round-off error in Chebyshev pseudospectral computations*. Cornell Theory Center, Cornell University.
- SABBAH, C. 2002 *Parallélisation hybride d'une méthode spectrale multidomaine 3D pour la simulation d'écoulements compressibles subsoniques*. Technical Report, Université de Nice-Sofia Antipolis.
- SCHNEIDER, M.-B., DIMONTE, G. & REMINGTON, B. 1998 Large and small scale structure in Rayleigh-Taylor mixing. *Physical Review* **80**, 3507.
- SHARP, D. H. 1984 An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **12** (1-3), 3 – 10, 11–18.
- SLATER, J. C. 1934 Electronic energy bands in metals. *Physical Review*. **45** (11), 794–801.
- TAYLOR, G. 1950 The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proceedings of the Royal Society A*. **201**, 192.
- TEMAM, R. 1969 Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I). *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **32** (2), 135–153.
- VANDERVOORT, P. O. 1961 The Character of the Equilibrium of a Compressible, Inviscid Fluid of Varying Density. *Astrophysical Journal* **134**, 699.
- VINCENT, S. & CALTAGIRONE, J.-P. 2000 A One-Cell Local Multigrid Method for Solving Unsteady Incompressible Multiphase Flows. *Journal of Computational Physics* **163**, 172–215.
- WADDELL, J. T., NIEDERHAUS, C. E. & JACOBS, J. W. 2001 Experimental study of Rayleigh-Taylor instability : Low Atwood number liquid systems with single-mode initial perturbations. *Physics of Fluids* **13**, 1263–1273.
- WILHELMSON, R. & OGURA, Y. 1972 The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *Journal of the Atmospheric Sciences* **29** (7), 1295–1307.
- YOUNGS, D.-L. 1982 Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, in Numerical Methods for Fluid Dynamics. *Institute for Mathematics and Its Applications Conference Series* **4**, 27.
- YOUNGS, D. L. 1984 Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D Nonlinear Phenomena* **12**, 32–44.
- ZEYTOUNIAN, R.K. 1990 *Asymptotic modeling of atmospheric flows*. Springer-Verlag.

Résumé

L'approximation dite « anélastique » permet de filtrer les ondes acoustiques grâce à un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes, augmentant ainsi le pas en temps moyen, lors de la simulation numérique du développement d'instabilités hydrodynamiques. Ainsi, les équations anélastiques sont établies pour un mélange de deux fluides pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

La stabilité linéaire de l'écoulement est étudiée pour la première fois pour des fluides parfaits, par la méthode des modes normaux, dans le cadre de l'approximation anélastique.

Le problème de Stokes issu des équations de Navier-Stokes sans les termes non linéaires (une partie de la poussée d'Archimède est prise en compte) est défini ; l'ellipticité est démontrée, l'étude des modes propres et l'invariance liée à la pression sont détaillées.

La méthode d'Uzawa est étendue à l'anélastique en mettant en évidence le découplage des vitesses en 3D, le cas particulier $k = 0$ et les modes parasites de pression. Le passage au multidomaine a permis d'établir les conditions de raccord (raccord C^0 de la pression sans condition aux limites physiques).

Les algorithmes et l'implantation dans le code AMENOPHIS sont validés par les comparaisons de l'opérateur d'Uzawa développé en Fortran et à l'aide de Mathematica. De plus des résultats numériques ont été comparés à une expérience avec des fluides incompressibles. Finalement, une étude des solutions numériques obtenues avec les options anélastique et compressible a été menée. L'étude de l'influence de la stratification initiale des deux fluides sur le développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est amorcée.

Mots clés : Approximation anélastique - Méthode d'Uzawa - Problème de Stokes - Méthode pseudo-spectrale multidomaine - Maillage auto-adaptatif - Parallélisation MPI - Equations de Navier-Stokes - Ecoulements stratifiés - Stratification - Fluides miscibles - Instabilité de Rayleigh-Taylor - Analyse de stabilité linéaire - Couche de mélange.

Abstract

The « anelastic » approximation allows us to filter the acoustic waves thanks to an asymptotic development of the Navier-Stokes equations, so increasing the averaged time step, during the numerical simulation of hydrodynamic instabilities development. So, the anelastic equations for a two fluid mixture in case of Rayleigh-Taylor instability are established.

The linear stability of Rayleigh-Taylor flow is studied, for the first time, for perfect fluids in the anelastic approximation.

We define the Stokes problem resulting from Navier-Stokes equations without the non linear terms (a part of the buoyancy is considered) ; the ellipticity is demonstrated, the eigenmodes and the invariance related to the pressure are detailed.

The Uzawa's method is extended to the anelastic approximation and shows the decoupling speeds in 3D, the particular case $k = 0$ and the spurious modes of pressure. Passing to multidomain allowed to establish the transmission conditions.

The algorithms and the implementation in the existing program are validated by comparing the Uzawa's operator in Fortran and Mathematica languages, to an experiment with incompressible fluids and results from anelastic and compressible numerical simulations.

The study of the influence of the initial stratification of both fluids on the development of the Rayleigh-Taylor instability is initiated.

Keywords : Anelastic approximation- Uzawa's method - Stokes problem - Multidomain pseudo-spectral method - Auto-adaptive meshing - MPI parallelism - Navier-Stokes equations- Stratified flows - Stratification - Miscible fluids - Rayleigh-Taylor instability - Linear stability analysis - Mixing layer.