



HAL
open science

Systèmes quantiques en interaction : physique mésoscopique et atomes froids

Christophe Mora

► **To cite this version:**

Christophe Mora. Systèmes quantiques en interaction : physique mésoscopique et atomes froids. Systèmes mésoscopiques et effet Hall quantique [cond-mat.mes-hall]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. tel-00712112

HAL Id: tel-00712112

<https://theses.hal.science/tel-00712112>

Submitted on 26 Jun 2012

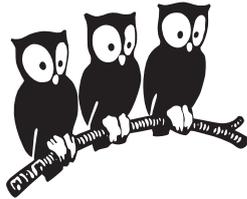
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE

LABORATOIRE PIERRE AIGRAIN



MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

présenté par

Christophe MORA

Sujet du mémoire

**Systèmes quantiques en interaction :
physique mésoscopique et atomes froids**

Soutenue le 7^{er} mars 2012 devant le jury composé de :

Cristiano CIUTI	Rapporteur
Antoine GEORGES	Rapporteur
Thierry GIAMARCHI	Examineur
Frank HEKKING	Rapporteur
Philippe LAFARGE	Président
Thierry MARTIN	Rapporteur

Résumé sur l'originalité des recherches

Le mémoire qui suit présente un résumé de mes activités de recherche de ces cinq dernières années, c'est-à-dire depuis 2006 et mon recrutement à l'université Paris Diderot comme maître de conférence, affecté au Laboratoire Pierre Aigrain (LPA, ENS). Auparavant, j'ai effectué ma thèse au Laboratoire de physique statistique (LPS) de l'ENS sur les phases Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov, initialement prédites pour certains supraconducteurs de type II, et récemment observées dans des gaz d'atomes froids fermioniques. J'ai aussi travaillé pendant ma thèse sur le développement d'une théorie de Bogoliubov applicable à toute dimension pour un gaz de bosons en interaction faible. Mon postdoc à l'université de Düsseldorf a été l'occasion d'un début de changement thématique en direction de la physique mésoscopique, avec l'étude du transport dans un conducteur désordonné unidimensionnel multi-canaux, tout en continuant une activité sur les atomes froids, en particulier sur le problème à quelques corps dans des géométries confinées 1D.

Depuis mon installation au LPA, j'ai poursuivi et développé mes recherches dans le domaine de la physique mésoscopique tout en gardant une activité en atomes froids. À cet égard, le département de physique de l'ENS m'a offert un environnement scientifique particulièrement stimulant et enrichissant. La proximité avec des expérimentateurs à la fois en atomes froids et en physique mésoscopique m'a permis de multiplier les discussions et de pouvoir ainsi orienter mes thématiques de recherche. Mon travail s'est décliné suivant quatre thématiques détaillées dans ce mémoire, deux en physique mésoscopique et deux en atomes froids.

Mes intérêts en physique mésoscopique ont été motivés par deux expériences réalisées au LPA dans le groupe de physique mésoscopique. La première expérience a consisté à mesurer le bruit en courant traversant un nanotube de carbone mono-paroi posé entre deux électrodes métalliques. Le nanotube de carbone mono-paroi possédant une dégénérescence orbitale naturelle due à la chiralité du transport à sa surface, l'existence d'un écrantage Kondo $SU(4)$ intriquant le spin et le degré de liberté orbital est pertinente pour la compréhension du transport électronique. Nous avons donc étendu la théorie des liquides de Fermi de l'effet Kondo au cas où le spin localisé présente une symétrie étendue de type $SU(N)$. Nous avons ensuite pu utiliser cette théorie pour calculer et prédire les comportements du bruit et du courant à basse énergie et extraire de ces résultats les valeurs de charges effectives caractérisant le transport. La seconde expérience conduite au LPA à laquelle je me suis intéressé est celle de la capacité quantique. Une boîte quantique reliée à un canal unidimensionnel chiral et contrôlée par une grille de dessus réalise l'équivalent quantique d'un circuit RC classique en série. Nous avons étudié le régime linéaire en présence d'une excitation AC et montré l'existence, dans le régime quantique, de deux résistances universelles et quantifiées pour une petite et une grande boîte. La première de ces résistances avait auparavant été mesurée pour la première fois au LPA. Poursuivant ce travail en considérant le cas d'un réservoir non-polarisé en spin et d'une très petite boîte, nous avons dérivé l'existence d'un pic géant dans la résistance du circuit RC quantique en fonction du champ magnétique extérieur. La hauteur de ce pic augmente rapidement avec la force de la répulsion coulombienne dans la boîte.

Le premier des sujets que j'ai abordé dans le domaine des atomes froids est en lien, sans en être la suite, avec mon travail de postdoc sur le problème à quelques corps. Sur l'effondrement de Thomas dans le problème à trois corps bosonique et l'émergence des états d'Efimov, nous avons mis au point une approche simple qui rend compte de ces états en mappant le problème à trois corps sur une équation de Schrödinger 1D. Notre approche permet ainsi d'obtenir des résultats analytiques dans le cas d'une résonance de Feshbach étroite. Nous nous sommes aussi

intéressés au problème à quatre corps fermioniques avec trois fermions lourds et un autre plus léger. Dans une certaine fenêtre de rapports de masse que nous avons déterminée, nous avons montré l'émergence d'une série géométrique d'états liés efimoviens lorsque les interactions sont résonantes. De façon plus générale, nous envisageons l'existence de séries d'états liés efimoviens à N corps. Le second de mes sujets de recherche dans le domaine des atomes froids est motivé par des expériences sur des gaz fermioniques déséquilibrés conduites au département de physique (au LKB) dans le groupe de C. Salomon et F. Chevy. L'énergie du polaron - un fermion de l'espèce minoritaire habillée par la mer de Fermi de l'espèce majoritaire - détermine le lieu de la transition entre un gaz partiellement polarisé et un gaz complètement polarisé, et est donc pertinent pour comprendre la forme des profils de densité observés expérimentalement. Nous avons tout d'abord étudié le cas où le fermion minoritaire s'apparie préférentiellement avec un fermion majoritaire pour former une molécule bosonique composite dans la mer de Fermi majoritaire. Nous avons déterminé perturbativement l'énergie de cet état moléculaire habillé en interaction faible, illustrant au passage son aspect composite, puis une approche variationnelle nous a donné une estimation précise de son énergie jusque dans le régime d'interaction forte. Reprenant le cas d'une interaction attractive à longue distance ($a < 0$) où le fermion minoritaire n'a pas de partenaire privilégié et forme un polaron avec la mer de Fermi majoritaire, nous avons dérivé une équation d'état pour le gaz de fermions partiellement polarisé en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Pour cela, nous avons calculé de façon exacte le terme dominant les interactions entre polarons à forte polarisation.

D'une façon générale, mes travaux théoriques ont le plus souvent été en lien avec des expériences, soit fraîchement réalisées soit en cours de réalisation, ce qui a favorisé les échanges avec les groupes concernés à l'ENS.

Je mentionne ci-dessous des travaux qui ont été publiés après mon recrutement mais qui ne figurent pas dans ce mémoire. Les deux premiers articles sont le fruit d'une collaboration, débutée sur la fin de mon postdoc avec X. Waintal et O. Parcollet, où nous avons étudié par des calculs Monte-Carlo la transition dans un gaz de bosons dipolaires bidimensionnel entre un condensat et une phase cristalline. Le troisième article est dans la continuité de mon travail de thèse avec Y. Castin. Nous avons calculé de façon perturbative l'énergie d'un gaz de Bose bidimensionnel. La comparaison entre nos résultats et un calcul Monte-Carlo est excellente jusqu'à des densités relativement élevées.

Références :

- C. MORA, O. PARCOLLET, X. WAIN TAL, *Quantum melting of a crystal of dipolar bosons*, Phys. Rev. B **76**, 064511 (2007).
C. MORA, X. WAIN TAL, *Variational wave functions, ground state and their overlap*, Phys. Rev. Lett. **99**, 030403 (2007).
C. MORA, Y. CASTIN, *Ground State Energy of the Two-Dimensional Weakly Interacting Bose Gas : First Correction Beyond Bogoliubov Theory*, Phys. Rev. Lett. **102**, 180404 (2009).

Table des matières

1	Bruit en courant et liquide de Fermi dans l'effet Kondo	4
1.1	Contexte	4
1.2	Bruit en courant et charges universelles	5
1.3	Théorie générale du liquide de Fermi local pour l'effet Kondo	6
1.4	Calculs du courant et du bruit à basse énergie	8
1.4.1	Charge effective	8
1.4.2	Corrections en température et asymétrie	9
	Bibliographie	11
2	Circuit RC quantique	13
2.1	Contexte	13
2.2	Circuit RC cohérent	15
2.3	Résistances universelles du circuit RC quantique	16
2.3.1	Approche de liquide de Fermi	16
2.3.2	Approches perturbatives à faibles et fortes transmissions	18
2.4	Pic dans la résistance de relaxation de charge pour le modèle d'Anderson	19
	Bibliographie	21
3	Problèmes à quelques corps	24
3.1	Contexte	24
3.2	États liés d'Efimov	25
3.3	Les états d'Efimov revisités	26
3.4	Effet d'Efimov à quatre corps	29
3.4.1	Effet d'Efimov à N corps	29
3.4.2	Trois fermions et un atome plus léger	30
	Bibliographie	31
4	Polarons fermioniques	33
4.1	Contexte	33
4.2	Problème à $N+1$ corps : le polaron	34
4.3	Gaz dilué de polarons	35
4.3.1	Argument heuristique	35
4.3.2	Calcul complet	36
4.4	Boson composite dans une mer de Fermi	37
	Bibliographie	40

Chapitre 1

Bruit en courant et liquide de Fermi dans l'effet Kondo

Les progrès constants dans la miniaturisation et la portabilité des composants électroniques nous conduisent aujourd'hui à des tailles typiques qui s'approchent des échelles atomiques. Les défis pour les années à venir sont aussi bien technologiques que fondamentaux. Ils nécessiteront une compréhension plus profonde des phénomènes de transport électrique aux échelles nanométriques où la physique quantique devient incontournable. À très basse température, comprendre et maîtriser les effets de cohérence quantique conjugués aux interactions entre électrons représentent un vaste défi pour les physiciens.

1.1 Contexte

Les premières observations de l'effet Kondo remontent aux années 30 [1]. La diffusion des électrons mobiles dans les métaux par des impuretés magnétiques devient résonante à basse énergie et conduit à une remontée de la résistivité¹ à basse température [3]. Le terme d'échange entre le spin de l'impureté et le spin local des électrons de conduction conduit à des divergences logarithmiques dans l'amplitude de diffusion [2]. Ces divergences préfigurent en fait la formation d'un état corrélé à N corps, le nuage Kondo, dans lequel le spin de l'impureté est écranté par le gaz d'électrons environnant. Le nuage diffuse ensuite très efficacement les autres électrons de conduction. Longtemps cantonnée aux métaux, la physique Kondo a trouvé un nouveau terrain d'application dans les boîtes quantiques [4] grâce aux progrès récents dans la microfabrication et la réalisation de nanostructures (gaz d'électrons 2D, nanotubes de carbone, nanofils, transport moléculaire, nanotubes de carbone, etc). Le confinement des électrons sur de très petites tailles exacerbe les effets d'interaction coulombienne et conduit à des états de charge et de spin bien définis. En conséquence, une boîte quantique peut se comporter comme un spin unique, une impureté, et induire un effet Kondo en se couplant aux électrons de conduction des électrodes auxquelles elle est connectée. Cet effet Kondo dans les boîtes s'observe, dans les expériences de transport mésoscopique, par une remontée spectaculaire de la conductance à basse énergie [5,6] liée à la formation de l'état (nuage) Kondo. L'échelle d'énergie associée au nuage Kondo est la température Kondo T_K . Elle est en général d'autant plus grande que le confinement des électrons est fort et donc que l'énergie de charge (coulombienne) est importante.

L'effet Kondo a été observé dans de très nombreuses nanostructures depuis un peu plus

1. L'explication des remontées de résistivité par l'effet Kondo date toutefois de 1964 [2].

d'une dizaine d'années. En particulier, les nanotubes de carbone sont des systèmes avantageux pour cette physique car le confinement des électrons y est assez fort, la taille transverse étant de l'ordre de quelques nanomètres, ce qui donne des températures Kondo atteignant plusieurs Kelvin [7]. Par ailleurs, leur forme unidimensionnelle facilite la connexion aux électrodes métalliques extérieures. Les nanotubes de carbone ont la particularité que le transport des électrons à leur surface est chiral, selon le sens de rotation des électrons, les deux chemins étant sensiblement équivalents. Et en effet on observe, depuis cinq, six ans, une dégénérescence orbitale² dans les expériences [7–9] sondant l'effet Kondo qui s'ajoute à la dégénérescence de spin. Les nanotubes offrent donc la possibilité excitante d'étudier l'écrantage à la fois du spin et d'un degré de liberté orbital [10, 11] et donc de réaliser un effet Kondo de symétrie SU(4). Cette symétrie étendue requiert toutefois que le degré de liberté orbital soit conservé lors du passage des électrons entre la boîte et les électrodes ce qui n'a *a priori* rien d'évident mais semble être le cas expérimentalement. Une explication souvent avancée, mais pas démontrée, tient à la façon dont le nanotube est connecté aux électrodes métalliques. Le nanotube est posé entre deux parties métalliques - elles-mêmes reliées aux électrodes - si bien que les parties du nanotube touchant le métal, et qui possèdent donc la même structure orbitale que la boîte, jouent le rôle des réservoirs. Précisons que l'existence d'une symétrie orbitale additionnelle, et donc l'observation d'un effet Kondo SU(4), ne se restreint pas aux nanotubes de carbone et est aussi envisageable dans d'autres nanostructures. L'effet d'un degré de liberté orbital a ainsi été observé dans une boîte quantique verticale réalisée dans une hétérostructure [12].

Référence : T. DELATTRE, C. FEUILLET-PALMA, L. G. HERRMANN, P. MORFIN, J.-M. BERROIR, G. FÈVE, B. PLAÇAIS, D. C. GLATTLI, M.-S. CHOI, C. MORA, T. KONTOS, *Noisy Kondo impurities*, Nature Physics **5**, 208 (2009).

1.2 Bruit en courant et charges universelles

Revenons au modèle Kondo historique de symétrie SU(2) où le spin 1/2 d'une impureté est couplé à une mer de Fermi d'électrons de spin 1/2. Bien que tridimensionnel en apparence, le modèle peut être réduit à une dimension [13], sur un axe semi-infini $x > 0$, car la diffusion des électrons est uniquement en onde s . Le champ décrivant les électrons de conduction a alors deux composantes, gauche $\psi_L(x)$ et droite $\psi_R(x)$, avec la condition aux limites $\psi_L(0) = \psi_R(0)$. Le couplage avec l'impureté brise la propriété d'invariance conforme³ du modèle unidimensionnel des électrons en introduisant l'échelle d'énergie T_K . L'invariance conforme est néanmoins restaurée [14, 15] à basse énergie $\ll T_K$, c'est-à-dire à grande distance (au-delà du nuage Kondo) et pour des grands temps, lorsque le flot du groupe de renormalisation est complètement développé et que l'on a atteint le point fixe de couplage fort. Dans ce régime, les fonctions de corrélation sont reproduites avec des fermions sans interaction auxquels on impose la condition aux limites modifiée $\psi_L(0) = -\psi_R(0)$. Cette condition correspond à un déphasage des électrons de $\pi/2$ en accord avec la règle de somme de Friedel [16] pour l'écrantage d'un spin 1/2, celui de l'impureté en l'occurrence.

On obtient donc à basse énergie un liquide de Fermi local [17] puisque le point de départ est un gaz de fermions libres. Les corrections au gaz idéal lorsqu'on augmente en énergie sont décrites par des opérateurs non pertinents et sont de deux types : (i) des termes de diffusion

2. cette dégénérescence orbitale naturelle n'était pas visible dans les premières expériences Kondo, les tubes d'alors étant encore trop désordonnés.

3. l'invariance conforme inclut, parmi d'autres, l'invariance d'échelle.

élastique qui donnent une dépendance en énergie au déphasage au-delà de $\pi/2$, (ii) des termes de diffusion inélastique correspondant à des interactions entre électrons localisées en $x = 0$. Le crossover Kondo qui relie les points fixes de haute et de basse énergie est universel [18] en ce sens qu'il ne fait intervenir que la température Kondo T_K comme échelle d'énergie. Le rapport entre les termes élastique et inélastique est donc universel, c'est-à-dire dans la pratique un nombre sans dimension [19]. Le déphasage subit par les électrons de conduction à basse énergie est finalement donné par

$$\delta_\sigma(\varepsilon, \delta n_{\sigma'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1}{T_K}(\varepsilon - \varepsilon_F) - \frac{\phi_1}{T_K} \sum_{\varepsilon'; \sigma' \neq \sigma} \delta n_{\sigma'}(\varepsilon') \quad (1.1)$$

où $\delta n_{\sigma'}(\varepsilon) = n_{\sigma'}(\varepsilon) - \theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$ est la distribution des nombres d'occupation relative à celle de l'état fondamental. Dans l'équation (1.1), α_1 contrôle la diffusion élastique, ϕ_1 la diffusion inélastique et $\alpha_1 = \phi_1$. Un grand avantage de l'approche de liquide de Fermi est qu'elle est aussi valable pour des situations hors-équilibre [20, 21], par exemple en présence d'une différence de potentiel source-drain. Ainsi, $n_{\sigma'}(\varepsilon)$ dans l'équation (1.1) n'est pas forcément la distribution de Fermi mais la distribution réelle des électrons qui dépend des contraintes extérieures et éventuellement du temps. Le liquide de Fermi local permet donc d'obtenir des prédictions exactes pour le modèle Kondo hors-équilibre au voisinage du couplage fort, un problème *a priori* difficile [22].

Les expériences de transport dans les boîtes mesurent le courant qui traverse une impureté Kondo mais aussi le bruit de ce courant [23, 24]. Or, dans le régime de liquide de Fermi à basse énergie, le transfert de charge implique un mélange de processus à un ou deux électrons contrôlés par les termes élastique et inélastique du modèle. La charge effective correspondante - définie à partir du facteur de Fano du courant retro-diffusé - est $5/3e$ pour l'effet Kondo SU(2) [25], l'universalité de ce résultat étant une conséquence de l'universalité du rapport entre termes élastique et inélastique. On obtient donc un nombre, $5/3$, correspondant à une quantité mesurable expérimentalement [23] et qui présente l'avantage d'être universel, c'est-à-dire de ne pas dépendre des détails de la boîte quantique⁴. D'une façon plus générale, la valeur de la charge effective va dépendre de la symétrie de l'effet Kondo et diffère entre SU(2) et SU(4). On peut donc imaginer que sa mesure permet de discriminer les symétries du point fixe de couplage fort. Malgré des efforts dans cette direction [23, 24], cette charge n'a pas encore reçu de confirmation expérimentale claire.

1.3 Théorie générale du liquide de Fermi local pour l'effet Kondo

Afin de déterminer la charge effective dans le cas SU(4), je me suis intéressé à l'approche de liquide de Fermi dans le cas d'une symétrie étendue SU(N). L'approche originelle de Nozières [17], correspondant à l'équation (1.1), est en fait insuffisante dans le cas général. L'opérateur dominant de dimension 2 qui perturbe le gaz de fermions libres - correspondant aux deux derniers termes de l'équation (1.1) - est en fait suivi d'un opérateur de dimension 3 puis d'opérateurs de dimension > 3 dans l'hamiltonien effectif de basse énergie [26]. Or, comme la contribution au bruit et au courant de l'opérateur dominant de dimension 2 s'annule au premier ordre en perturbation, sa contribution devient du même ordre que celle de l'opérateur suivant de dimension 3, et on doit prendre en compte ces deux opérateurs dans la théorie. Le cas SU(2)

4. nous verrons cependant au 1.4.2 qu'il existe des corrections à cette universalité dues à l'asymétrie des couplages aux deux électrodes.

étudié par Nozières est particulier : il présente en effet une symétrie particule-trou qui annule complètement l'opérateur de dimension 3.

En ajoutant les termes de dimension 3 au déphasage (1.1), on obtient le développement général pour SU(N)

$$\begin{aligned} \delta_\sigma(\varepsilon, \delta n_{\sigma'}) &= \frac{m\pi}{N} + \frac{\alpha_1}{T_K}(\varepsilon - \varepsilon_F) + \frac{\alpha_2}{T_K^2}(\varepsilon - \varepsilon_F)^2 - \sum_{\sigma' \neq \sigma} \left(\frac{\phi_1}{T_K} \sum_{\varepsilon'} \delta n_{\sigma'}(\varepsilon') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2}{2T_K^2} \sum_{\varepsilon'} (\varepsilon + \varepsilon' - 2\varepsilon_F) \delta n_{\sigma'}(\varepsilon') - \frac{\chi_2}{T_K^2} \sum_{\substack{\sigma'' < \sigma' \\ \sigma'' \neq \sigma}} \sum_{\varepsilon', \varepsilon''} \delta n_{\sigma'}(\varepsilon') \delta n_{\sigma''}(\varepsilon'') \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T_K^3}\right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec les coefficients sans dimension α_1 , α_2 pour la partie élastique, ϕ_1 , ϕ_2 et χ_2 pour la partie inélastique. m est le nombre d'électrons formant l'impureté⁵. Dans le cas SU(2), on ne peut avoir que $m = 1$ alors que $m = 1, \dots, N-1$ dans le cas général SU(N). Notons que la transformation $m \rightarrow N - m$ réalise la symétrie particule-trou dans ce modèle. Les trois premiers termes élastiques de l'expression (1.2) coïncident avec le développement de la phase pour un niveau résonant de largeur $\sim T_K$. La *résonance Kondo* est néanmoins une résonance à N corps formée par les électrons de conduction et nécessitant la présence d'une surface de Fermi bien marquée. C'est la raison pour laquelle la phase (1.2) dépend des nombres d'occupation des électrons $\delta n_\sigma(\varepsilon)$.

La *résonance Kondo* est ainsi portée par la distribution des électrons de conduction : c'est le principe de *flottaison* de la résonance Kondo sur la mer de Fermi⁶. Par conséquent, décaler de $\delta\varepsilon$ la distribution électronique décale aussi de $\delta\varepsilon$ la position de la résonance. On peut aussi remarquer que la phase (1.2) doit dépendre uniquement des distributions réelles des électrons et non de la position de référence du niveau de Fermi ε_F . En implémentant l'indépendance de l'équation (1.2) par rapport à ε_F , on obtient les relations

$$\alpha_1 = (N - 1)\phi_1, \quad (1.3a)$$

$$\alpha_2 = \frac{N - 1}{4} \phi_2, \quad \phi_2 = (N - 2)\chi_2. \quad (1.3b)$$

qui généralisent le résultat $\alpha_1 = \phi_1$ de SU(2).

Il est particulièrement intéressant de constater que l'on peut redériver les relations (1.3) en suivant une approche de théorie conforme. Affleck et Ludwig [13, 14] ont les premiers remarqué que les termes en α_1 et ϕ_1 dans la phase (1.2) sont en fait issus d'un unique opérateur de dimension 2, $\mathbf{J}(0) \cdot \mathbf{J}(0)$, où $\mathbf{J}(0)$ est l'opérateur courant de spin du gaz 1D pris en $x = 0$. Nous avons montré que la même réduction s'applique aux termes de dimension 3 en α_2 , ϕ_2 et χ_2 , qui proviennent d'un unique opérateur $d_{ABC} J^A(0) J^B(0) J^C(0)$ où d_{ABC} est un tenseur symétrique apparaissant dans les produits des générateurs de l'algèbre SU(N). Cet opérateur reprend en fait la forme de l'opérateur Casimir cubique [27] de l'algèbre SU(N) de la même façon que $\mathbf{J}(0) \cdot \mathbf{J}(0)$ reprenait la forme du Casimir d'ordre deux. Les relations (1.3) sont donc une conséquence directe de la propriété de séparation spin-charge du modèle Kondo.

Les relations (1.3) sont néanmoins insuffisantes pour reproduire l'universalité du crossover Kondo car les constantes α_1 et α_2 restent indépendantes. Fort heureusement, l'énergie libre du modèle Kondo SU(N) a été obtenue sous la forme d'un développement en puissances de la

5. ou le nombre de boîtes dans la représentation colonne de SU(N).

6. comme un bateau à quai suit le niveau de la mer qui le porte.

température et du champ magnétique par une méthode d'ansatz de Bethe [28]. On peut donc, en calculant l'énergie libre à partir de l'équation (1.2), comparer avec le résultat de l'ansatz de Bethe afin d'obtenir le rapport universel

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} = \frac{N-2}{N-1} \frac{\Gamma(1/N)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N}\right)} \frac{\tan(\pi/N)}{\tan(m\pi/N)} \quad (1.4)$$

qui nous manquait. En redéfinissant T_K de telle sorte que $\alpha_1 = 1$, on obtient à partir des relations (1.3) et (1.4) un modèle de basse énergie universel, c'est-à-dire dont les prédictions ne vont dépendre que de la température Kondo T_K . Dans le cas symétrique particule-trou, $m = N/2$, comme c'est le cas pour $SU(2)$, la relation (1.4) donne $\alpha_2 = 0$ et donc $\phi_2 = \chi_2 = 0$ d'après les formules (1.3b). Cela correspond à une résonance Kondo centrée au niveau de Fermi.

Pour finir nous avons calculé, à partir de notre modèle de liquide de Fermi, le rapport de Lorentz⁷ et comparé le résultat avec l'approche à N grand de Read et Newns [29]. Les résultats coïncident exactement dans la limite $N \gg 1$.

Référence : CHRISTOPHE MORA, *Fermi-liquid theory for $SU(N)$ Kondo model*, Phys. Rev. B **80**, 125304 (2009).

1.4 Calculs du courant et du bruit à basse énergie

En prenant comme point de départ la théorie de liquide de Fermi discutée au 1.3, nous avons calculé le courant et le bruit en courant à travers une impureté Kondo $SU(N)$ dans la limite de basse énergie. Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration réunissant N. Regnault, X. Leyronas, A. Clerk, K. Le Hur et P. Vitushinsky et moi-même. Les termes élastiques de l'équation (1.2) peuvent être pris en compte par une simple approche de diffusion de type Landauer-Büttiker. Dans ce cas, on développe le modèle sur les opérateurs correspondant aux états propres de diffusion à un corps. Les interactions sont plus difficiles à traiter car le problème est hors-équilibre (stationnaire pour être plus précis), les distributions de Fermi des deux électrodes n'étant pas équilibrées aux mêmes potentiels chimiques. On a donc utilisé un développement diagrammatique dans le formalisme de Keldysh, adapté aux situations hors-équilibre, afin d'inclure les termes inélastiques d'interaction entre électrons. Nos résultats sont détaillés ci-dessous.

Références : C. MORA, X. LEYRONAS, N. REGNAULT, *Current noise through a Kondo quantum dot in a $SU(N)$ Fermi liquid state*, Phys. Rev. Lett. **100**, 036604 (2008).

C. MORA, P. VITUSHINSKY, X. LEYRONAS, A. A. CLERK, K. LE HUR, *Theory of nonequilibrium transport in the $SU(N)$ Kondo regime*, Phys. Rev. B **80**, 155322 (2009).

1.4.1 Charge effective

Nous allons commencer par expliquer la façon dont on définit une charge effective e^* dans ce problème [25]. Précisons que celle-ci n'a rien à voir avec une charge fractionnaire. Une charge fractionnaire est la charge d'une excitation élémentaire tandis que notre charge effective provient d'une moyenne sur des processus indépendants impliquant un ou deux électrons. Si les deux

⁷. le rapport de Lorentz est le rapport entre la conductivité thermique et la conductivité électrique divisé par la température.

notions peuvent conduire au même rapport bruit sur courant, la différence devient explicite lorsqu'on calcule la statistique complète du transfert de charge [30]. La théorie de liquide de Fermi construite au 1.3 conduit naturellement à un développement du courant et du bruit en puissances de la polarisation électrique V , avec des termes dominants en V , dit linéaires, et des corrections non-linéaires en V^3 , V/T_K étant le petit paramètre de ce développement.

La partie linéaire du courant (et du bruit) est élastique, contrôlée par le déphasage au point fixe $\delta_0 = m\pi/N$, le premier terme dans le développement (1.2). La statistique qui en résulte est binomiale, comme pour un diffuseur cohérent, avec une transmission $T_0 = \sin^2 \delta_0$ et un bruit purement de partition $\sim T_0(1 - T_0)$. Il est important d'avoir à l'esprit que cette partie linéaire du signal domine les comportements du courant et du bruit. La charge effective e^* est définie en prenant le rapport des corrections non-linéaires $\sim V^3$ du bruit et du courant. Par simple analyse dimensionnelle, on constate que la charge e^* ne dépend ni de V , ni de T_K : ramenée à la charge de l'électron, c'est un nombre sans dimension et universel. Le cas SU(2) est particulier car on a alors $T_0 = 1/8$ et la partie linéaire du bruit s'annule. En remplaçant le courant par le courant retro-diffusé, correspondant à soustraire le courant maximum pouvant traverser la boîte quantique, on supprime complètement les parties linéaires et le rapport bruit sur courant donne directement la charge e^* dans la limite $V \rightarrow 0$. Le calcul complet donne finalement le facteur de Fano effectif

$$F = \frac{1}{2e} \frac{\delta S}{\delta I} = \frac{1 + \sin^2(2\delta_0) + \frac{9-13\sin^2(2\delta_0)}{N-1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sin 4\delta_0}{\frac{N+4}{N-1} \cos 2\delta_0 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sin 2\delta_0}, \quad (1.5)$$

où δI et δV désignent les corrections non-linéaires $\sim V^3$ au courant et au bruit. $F \neq 1$ indique que le processus de transfert des charges n'est pas poissonien. Cela est dû bien sûr aux interactions qui introduisent des transferts d'électrons par deux mais aussi au bruit de partition cohérent associé à la diffusion élastique à un électron. Pour SU(2), on obtient $F = -5/3$ ce qui donne la charge $e^* = 5/3 e$, et pour SU(4), $F = -\alpha_1^2/3\alpha_2 \simeq -0.300$ et $e^* = 0.300 e$. Plus généralement, le tableau 1.1 donne F pour différentes valeurs de N et m .

m	N							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-5/3	-0.672	-0.300	-0.156	0.003	0.156	0.287	0.393
2		-0.672	-3/2	-1.256	-1.031	-0.855	-0.679	-0.503
3			-0.300	-1.256	-7/5	-1.326	-1.254	-1.173
4				-0.156	-1.031	-1.326	-4/3	-1.313

TABLE 1.1: Facteur de Fano non-linéaire F , Eq. (1.5), pour différentes valeurs de N et m .

1.4.2 Corrections en température et asymétrie

Notre définition de la charge effective du 1.4.1 suppose bien sûr un système idéal, c'est-à-dire à température nulle et dont le couplage aux électrodes drain et source est exactement symétrique. Nous avons donc étudié les écarts à cette idéalité en prenant en compte les effets de la température et l'asymétrie du couplage aux électrodes.

8. c'est aussi le cas plus généralement lorsque $m = N/2$, c'est-à-dire dans le cas symétrique particule-trou.

Considérons tout d'abord le cas général asymétrique à température nulle. Dans le cas SU(2), le résultat pour le facteur de Fano effectif (1.5) est simplement

$$F = -\frac{5}{3} + \frac{8}{3}C^2, \quad (1.6)$$

où $C = (t_s^2 - t_d^2)/(t_s^2 + t_d^2)$ mesure le degré d'asymétrie du couplage, avec $C = 0$ dans le cas symétrique et $C \rightarrow 1$ dans le cas maximalelement asymétrique. La formule (1.6) interpole entre la charge effective $-5/3$ du 1.4.1 dans le cas symétrique $C = 0$ et le résultat $F = 1$ pour $C = 1$. La limite $C = 1$ correspond de fait à un régime tunnel incohérent où le saut d'un électron depuis l'électrode la plus faiblement couplée vers la boîte est le processus limitant le transport électronique. Il est donc normal de trouver dans ce régime $F = 1$ correspondant à une statistique de transfert de charge poissonienne. On retrouve aussi cette limite, $F = 1$ pour $C = 1$, dans le cas général SU(N), ordre par ordre dans le développement du bruit et du courant en puissances de V . Le cas SU(4) est plus compliqué car la présence d'une asymétrie fait apparaître des termes en V^2 dans le courant et dans le bruit. Toutefois, si on restreint la définition du facteur de Fano (1.6) aux seuls termes en V^3 , on obtient le développement $F \simeq -0.300(1 - 8.33C^2)$ pour $C \ll 1$, qui indique une correction importante due à l'asymétrie.

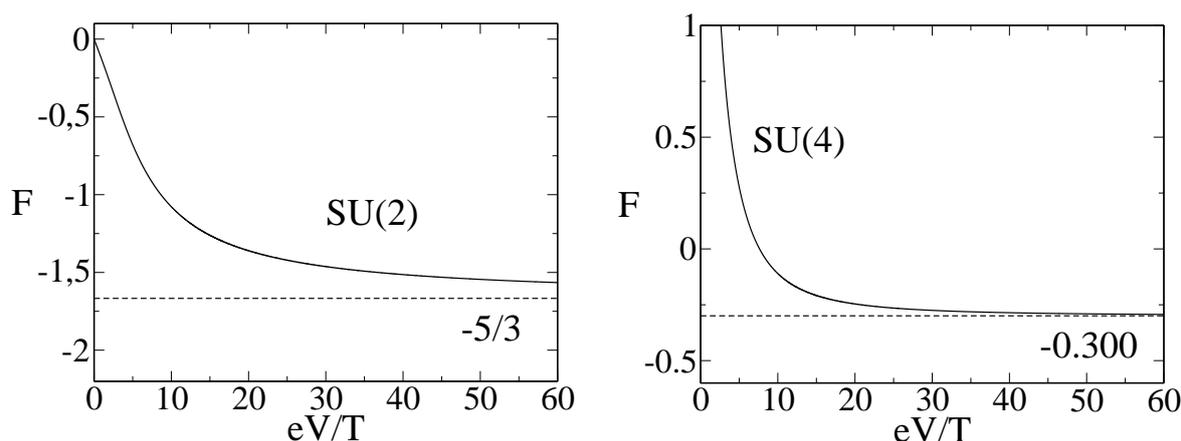


FIGURE 1.1: Facteur de Fano généralisé (1.7) en fonction du rapport eV/T pour les cas SU(2) et SU(4).

On peut aussi étudier le cas de couplage symétrique aux électrodes mais à température finie $T \neq 0$. L'approche de liquide de Fermi requiert néanmoins de rester dans le régime de suffisamment basse température $T \ll T_K$. Dans ce cas, on peut étendre la définition du facteur de Fano de la façon suivante

$$F(eV/T) \equiv \frac{1}{2e} \frac{S(V, T) - S_0(V, T) - 4T \frac{\partial \delta I}{\partial V}(V, T)}{\delta I(V, T)}, \quad (1.7)$$

avec $\delta I(V, T) = I(V, T) - I_0(V)$. $S_0(V, T)$ et $I_0(V)$ sont le bruit et le courant obtenus au point fixe de couplage fort, c'est-à-dire en oubliant les corrections de liquide de Fermi⁹. La définition (1.7) implique pour le facteur de Fano effectif F une fonction universelle du rapport eV/T tant que $eV, T \ll T_K$. Le résultat pour les symétries SU(2) et SU(4) est représenté figure 1.1 où l'on constate que les corrections en température aux prédictions idéales sont très importantes et devront être prises en compte dans les réalisations expérimentales.

9. $S_0(V, T)$ et $I_0(V)$ sont donnés par les formules de Landauer-Büttiker avec la transmission $T_0 = \sin^2 \delta_0$.

Bibliographie

- [1] L. KOUWENHOVEN & L. GLAZMAN, *Revival of the Kondo effect*, Phys. World p. 33 (2001).
- [2] J. KONDO, *Resistance minimum in dilute magnetic alloys*, Progr. Theoret. Phys. **32** (1), 37 (1964).
- [3] A. HEWSON, *The Kondo Problem to Heavy Fermions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [4] L. I. GLAZMAN & M. PUSTILNIK, *Low-temperature transport through a quantum dot*, in H. BOUCHIAT & AL., éditeurs, *Nanophysics : Coherence and Transport* (Elsevier, 2005), pp. 427-478, arXiv :cond-mat/0501007.
- [5] W. G. VAN DER WIEL, S. D. FRANCESCHI, T. FUJISAWA, J. M. ELZERMAN, S. TARUCHA & L. P. KOUWENHOVEN, *The Kondo effect in the unitary limit*, Science **289** (5487), 2105 (2000).
- [6] J. NYGARD, D. H. COBDEN & P. E. LINDELOF, *Kondo physics in carbon nanotubes*, Nature **408** (6810) (2000).
- [7] P. JARILLO-HERRERO, J. KONG, H. S. J. VAN DER ZANT, C. DEKKER, L. P. KOUWENHOVEN & S. DE FRANCESCHI, *Orbital Kondo effect in carbon nanotubes*, Nature **434** (7032), 484 (2005).
- [8] A. MAKAROVSKI, A. ZHUKOV, J. LIU & G. FINKELSTEIN, *SU(2) and SU(4) Kondo effects in carbon nanotube quantum dots*, Phys. Rev. B **75**, 241407 (2007).
- [9] L. G. HERRMANN, T. DELATTRE, P. MORFIN, J.-M. BERROIR, B. PLAÇAIS, D. C. GLATTLI & T. KONTOS, *Shot Noise in Fabry-Perot Interferometers Based on Carbon Nanotubes*, Phys. Rev. Lett. **99**, 156804 (2007).
- [10] L. BORDA, G. ZARÁND, W. HOFSTETTER, B. I. HALPERIN & J. VON DELFT, *SU(4) Fermi Liquid State and Spin Filtering in a Double Quantum Dot System*, Phys. Rev. Lett. **90**, 026602 (2003).
- [11] M.-S. CHOI, R. LÓPEZ & R. AGUADO, *SU(4) Kondo Effect in Carbon Nanotubes*, Phys. Rev. Lett. **95**, 067204 (2005).
- [12] S. SASAKI, S. AMAHA, N. ASAKAWA, M. ETO & S. TARUCHA, *Enhanced Kondo Effect via Tuned Orbital Degeneracy in a Spin 1/2 Artificial Atom*, Phys. Rev. Lett. **93**, 017205 (2004).
- [13] I. AFFLECK & A. W. W. LUDWIG, *Exact conformal-field-theory results on the multichannel Kondo effect : Single-fermion Green's function, self-energy, and resistivity*, Phys. Rev. B **48**, 7297 (1993).
- [14] I. AFFLECK, *A current algebra approach to the Kondo effect*, Nucl. Phys. B **336** (3), 517 (1990).
- [15] I. AFFLECK & A. W. W. LUDWIG, *The Kondo effect, conformal field theory and fusion rules*, Nucl. Phys. B **352** (3), 849 (1991).
- [16] D. C. LANGRETH, *Friedel Sum Rule for Anderson's Model of Localized Impurity States*, Phys. Rev. **150**, 516 (1966).
- [17] P. NOZIÈRES, *A fermi-liquid description of the Kondo problem at low temperatures*, J. Low Temp. Phys. **17**, 31 (1974).

-
- [18] K. G. WILSON, *The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [19] P. NOZIÈRES, in M. KRASIUS & M. VUORIO, éditeurs, *Proceedings of the 14th International Conference on Low Temperature Physics*, volume 5 (North Holland, Amsterdam,, 1974), pp. 339-374.
- [20] A. OGURI, *Fermi-liquid theory for the Anderson model out of equilibrium*, Phys. Rev. B **64**, 153305 (2001).
- [21] Y. MEIR & A. GOLUB, *Shot Noise through a Quantum Dot in the Kondo Regime*, Phys. Rev. Lett. **88**, 116802 (2002).
- [22] F. B. ANDERS, *Steady-State Currents through Nanodevices : A Scattering-States Numerical Renormalization-Group Approach to Open Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **101**, 066804 (2008).
- [23] O. ZARCHIN, M. ZAFFALON, M. HEIBLUM, D. MAHALU & V. UMANSKY, *Two-electron bunching in transport through a quantum dot induced by Kondo correlations*, Phys. Rev. B **77**, 241303 (2008).
- [24] Y. YAMAUCHI, K. SEKIGUCHI, K. CHIDA, T. ARAKAWA, S. NAKAMURA, K. KOBAYASHI, T. ONO, T. FUJII & R. SAKANO, *Evolution of the Kondo Effect in a Quantum Dot Probed by Shot Noise*, Phys. Rev. Lett. **106**, 176601 (2011).
- [25] E. SELA, Y. OREG, F. VON OPPEN & J. KOCH, *Fractional Shot Noise in the Kondo Regime*, Phys. Rev. Lett. **97**, 086601 (2006).
- [26] F. LESAGE & H. SALEUR, *Strong-Coupling Resistivity in the Kondo Model*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4540 (1999).
- [27] A. KLEIN, *Invariant operators of the unitary unimodular group in n dimensions*, J. Math. Phys. **4**, 1283 (1963).
- [28] V. V. BAZHANOV, S. L. LUKYANOV & A. M. TSVELIK, *Analytical results for the Coqblin-Schrieffer model with generalized magnetic fields*, Phys. Rev. B **68**, 094427 (2003).
- [29] A. HOUGHTON, N. READ & H. WON, *$1/N$ expansion for the transport coefficients of the single-impurity Anderson model*, Phys. Rev. B **35**, 5123 (1987).
- [30] A. O. GOGOLIN & A. KOMNIK, *Full Counting Statistics for the Kondo Dot in the Unitary Limit*, Phys. Rev. Lett. **97**, 016602 (2006).

Chapitre 2

Circuit RC quantique

Communiquer et interagir avec les électrons dans un langage qui leur parle. Les traiter individuellement plutôt que collectivement. S'intéresser, finalement, aux vrais problèmes qui les concernent. C'est un programme qu'il n'est pas incohérent de juger dispendieux et quelque peu irréaliste lorsqu'on est au fait des contraintes actuelles. C'est celui des physiciens qui sondent le transport électronique dans la gamme des hyperfréquences.

2.1 Contexte

La très grande majorité des expériences de transport dans des structures mésoscopiques ou nanoscopiques est réalisée à basse fréquence afin de faciliter l'adaptation du système aux circuits macroscopiques externes. En général, ces expériences perturbent de façon adiabatique le système et sondent la charge moyenne qui le traverse. Elles ne sont donc pas directement sensibles à la dynamique des électrons dont l'observation nécessite des fréquences plus élevées [1]. Pour donner un ordre de grandeur, on imagine des électrons se déplaçant à la vitesse de Fermi $\sim 10^5 m.s^{-1}$ dans une boîte quantique dont la taille est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. Les fréquences typiques nécessaires pour observer la dynamique de ces électrons sont donc au-dessus du GHz¹ dans le domaine des hyperfréquences (ou micro-ondes). Avec des longueurs d'onde typiques centimétriques, l'aspect propagatif des signaux hyperfréquences les rend très sensibles aux défauts et aux couplages capacitifs ce qui présente un défi expérimental pour contrôler, acheminer et mesurer ces signaux.

Malgré ces difficultés, de nombreuses expériences se sont développées ces dernières années sondant le transport à fréquence finie et la dynamique des électrons. Certaines ont par exemple mis en évidence les processus non-linéaires du transport photo-assisté [3–5] où, soit l'absorption, soit l'émission d'un photon se combine avec le passage d'un électron d'une électrode à l'autre. Dans le régime quantique ($\hbar\omega \gg k_B T$), la mesure du bruit à fréquence finie [6] correspond à un échange de photons d'énergie $\hbar\omega$ entre la source et le détecteur [2]. Les expériences permettant d'observer ces photons se sont développées essentiellement suivant deux directions. Une première technique consiste à placer un détecteur quantique nanoscopique *in situ* [7–12], comme une jonction tunnel SIS ou une boîte quantique, qui va absorber les photons émis par la source dans une certaine gamme de fréquences. D'autres expériences [13–16] mesurent directement le bruit en courant du conducteur quantique dans la gamme des hyperfréquences.

1. aux températures cryogéniques, les fréquences supérieures au GHz permettent aussi d'explorer le régime quantique $\hbar\omega \gg k_B T$ où les fluctuations de point zéro dominent les fluctuations thermiques [2].

Néanmoins, pour être mesurable, le signal issu du conducteur quantique doit passer par une chaîne d'amplificateurs cryogéniques bas-bruit.

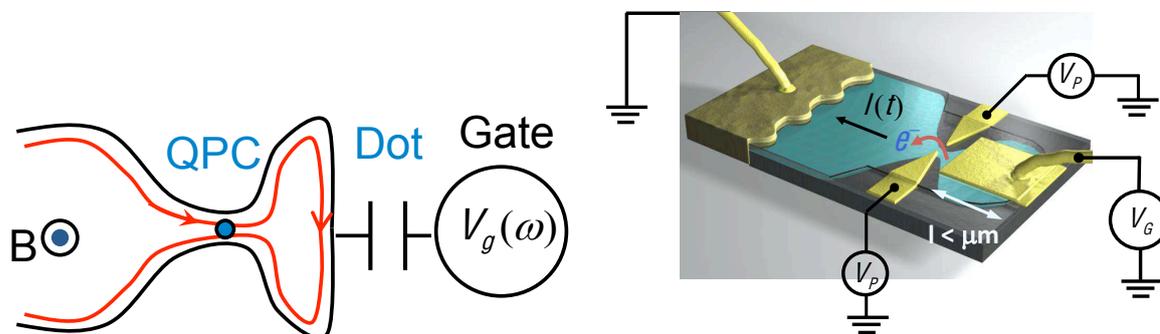


FIGURE 2.1: Gauche : représentation schématique de la *capacité quantique* du LPA. Les électrons circulent le long de l'état de bord représenté en rouge. La partie gauche est reliée à un réservoir métallique et est séparée de la partie droite, la boîte quantique, par un point de contact quantique. La boîte quantique est couplée capacitivement à une grille métallique. Droite : vue d'artiste (due à D. Darson) du même montage expérimental. La grille métallique est reliée au potentiel V_g et les électrodes du point de contact quantique au potentiel V_p permettant de contrôler son ouverture.

Le groupe de physique mésoscopique du Laboratoire Pierre Aigrain (LPA) a mis au point une expérience [17] qui permet de manipuler les électrons de façon plus contrôlée. Le principe de la *capacité quantique* est le suivant : l'état de bord d'un gaz d'électrons 2D, représenté figure 2.1, forme localement une boucle de taille micrométrique qui joue le rôle de boîte quantique. La constriction à l'entrée de la boucle définit un point de contact quantique (QPC) qui couple de manière contrôlée la boîte et le réservoir formé par le reste de l'état de bord. Une grille métallique, déposée au-dessus de la boîte quantique et reliée à une source de tension V_g , complète le dispositif et permet de contrôler électrostatiquement la charge dans la boîte. Avec le point de contact quantique comme élément résistif et le couple boîte quantique et grille formant les armatures d'un condensateur, ce circuit microscopique peut se voir comme l'équivalent quantique du circuit classique RC en série. En faisant varier la tension de grille V_g , on peut charger ou décharger la capacité quantique dans le réservoir (ici le reste de l'état de bord). Les premières mesures [17] ont été réalisées dans le régime AC linéaire où la charge de la boîte varie de façon infinitésimale. On mesure alors l'admittance du circuit RC et c'est la situation qui sera discutée dans ce chapitre. L'expérience s'est ensuite tournée [18, 19] vers le régime non-linéaire en démontrant l'injection d'un électron unique² dans la mer de Fermi du réservoir. Cette expérience remarquable ouvre la voie à l'étude d'une optique quantique électronique [20].

Très récemment, une méthode alternative permettant de mesurer l'admittance d'une boîte quantique a été développée dans plusieurs expériences [21, 22], dont une au LPA dans le groupe animé par T. Kontos (voir référence plus bas). L'idée est de coupler la boîte quantique à un résonateur micro-onde qu'on va exciter au voisinage de sa fréquence propre. Contrairement aux expériences précitées dans ce chapitre, la mesure ne s'applique donc pas au transport des électrons (courant ou bruit) mais aux photons qui excitent la boîte quantique *via* le résonateur. Le résonateur peut être fabriqué à l'aide de composants discrets insérés sur le porte-échantillon, auquel cas on effectue des mesures de réflectométrie radio-fréquence avec des fréquences propres quelque peu inférieures au GHz. Des fréquences plus élevées, de l'ordre de plusieurs GHz, sont

2. en réalité une paire électron-trou par période d'excitation.

obtenues lorsqu'une cavité micro-onde supraconductrice est utilisée. La boîte quantique est insérée dans la cavité et se couple capacitivement au champ électromagnétique y régnant³. On réalise dans ce cas des mesures de transmission entre les deux ports de la cavité. La boîte quantique (ou plus généralement le conducteur quantique) peut être décrite par un circuit équivalent dont l'effet est de décaler les fréquences propres du résonateur et d'élargir les résonances correspondantes. La mesure de ces décalages permet finalement de remonter à l'admittance du système.

Référence : M.R. DELBECQ, V. SCHMITT, F.D. PARMENTIER, N. ROCH, J.J. VIENNOT, G. FÈVE, B. HUARD, C. MORA, A. COTTET & T. KONTOS, *Coupling a quantum dot, fermionic leads and a microwave cavity on-chip*, arXiv :1108.4371.

2.2 Circuit RC cohérent

À basse température, la longueur de cohérence des électrons excède la taille de la boîte quantique. Dans ce régime cohérent, la réponse du circuit RC quantique et celle d'un circuit RC classique ne coïncident pas sur toute la gamme des fréquences ce qui empêche la description du RC quantique par un circuit équivalent. Toutefois, le développement à basse fréquence de l'admittance d'un circuit RC classique

$$Y(\omega) = \frac{I(\omega)}{V_g(\omega)} = -i\omega C_0 + \omega^2 C_0^2 R_q + \mathcal{O}(\omega^3) \quad (2.1)$$

permet, par identification avec le même développement dans le cas quantique, de définir une capacité quantique C_0 et une résistance R_q appelée résistance de relaxation de charge. Cette identification et le circuit équivalent en résultant ne sont alors valables que tant que $\omega R_q C_0 \ll 1$. Remarquons que $Y(0) = 0$ car les deux branches de l'état de bord (cf. figure 2.1) sont reliées au même réservoir métallique. Un courant $I(t) \neq 0$ induit donc une accumulation de charge dans la boîte ce qui exclut l'existence d'un courant moyen non nul.

Un résultat remarquable, prédit par Büttiker *et al* [23, 24] et observé au LPA [17], est que la résistance de relaxation de charge est universelle à température nulle, $R_q = h/2e^2$, et ne dépend donc pas de la transmission du QPC. Elle diffère donc essentiellement de la résistance que l'on mesurerait pour le même point de contact quantique en régime DC. Physiquement, les électrons se propagent dans la boîte puis ressortent de façon cohérente dans le régime AC ce qui n'est pas le cas dans le régime DC où les électrons entrant et sortant de la boîte ne sont pas corrélés en phase.

Les électrons cohérents sont décrits par des fonctions d'onde délocalisées se propageant à travers la boîte quantique où les différents chemins, correspondant à une ou plusieurs réflexions à l'entrée du QPC, interfèrent en ajoutant leurs amplitudes. En l'absence d'interactions, la situation est en fait très semblable à l'optique ondulatoire : les électrons ressemblent à des photons qui traverseraient un milieu dispersif. Ainsi le déphasage $\Phi(\varepsilon - \varepsilon_d)$ accumulé après passage par la boîte dépend de l'énergie ($\varepsilon_d = -eV_g$)

$$e^{i\Phi(\varepsilon)} = \frac{r - e^{i2\pi\varepsilon/\Delta}}{1 - r e^{i2\pi\varepsilon/\Delta}} \quad (2.2)$$

où r est le coefficient de réflexion du QPC, Δ l'écart entre niveaux de la boîte, $2\pi\varepsilon/\Delta$ la phase accumulée après un seul tour dans la boîte. En présence d'une excitation AC sur la tension de

3. cela correspondrait, pour l'expérience de la *capacité quantique* du LPA, à relier la grille de potentiel V_g au guide d'onde coplanaire.

grille $V_g(t)$, on obtient, à partir de la théorie de diffusion à la Landauer-Büttiker, le résultat suivant à basse fréquence [25]

$$I(t) = \frac{e^2}{h} [V_g(t) - V_g(t - \tau)] \quad (2.3)$$

pour le courant total en direction du réservoir, où τ est le retard en temps de Wigner-Smith

$$\tau = \hbar \frac{d\Phi(\varepsilon - \varepsilon_d)}{d\varepsilon}, \quad (2.4)$$

évalué au niveau de Fermi. Le résultat (2.3) s'interprète comme la somme de deux courants de conductance parfaite e^2/h : le courant de l'état de bord quittant la boîte et le courant de celui y entrant. La différence entre ces deux courants s'explique par le caractère dispersif du transport à travers la boîte. Excités par une tension AC, des électrons arrivant sur la boîte à des instants différents ont une énergie différente, subissent un déphasage (2.2) différent, et ne sont donc pas ralentis de la même façon. Il en résulte une accumulation dynamique de charge dans la boîte et donc un courant AC vers le réservoir.

Le passage en Fourier de l'équation (2.3) à basse fréquence donne, après comparaison avec la définition (2.1)

$$R_q = \frac{h}{2e^2}, \quad C_0 = \frac{e^2}{h} \tau, \quad (2.5)$$

donc $\tau = 2RC$ s'interprète aussi comme le temps RC du circuit, c'est-à-dire le temps moyen de résidence d'un électron dans la boîte. On montre ainsi que le régime cohérent donne une résistance R_q quantifiée universelle. Seule la capacité quantique C_0 dépend de la transmission du QPC et des détails de la boîte, comme l'écart moyen entre niveaux Δ , réalisant ainsi une spectroscopie de celle-ci.

Référence : A. COTTET, C. MORA, T. KONTOS, *Mesoscopic admittance of a double quantum dot*, Phys. Rev. B **83**, 121311(R) (2011).

2.3 Résistances universelles du circuit RC quantique

Avec K. Le Hur, nous nous sommes intéressés au circuit RC quantique en présence d'interactions coulombiennes dans la boîte. Nous avons montré que l'universalité de la résistance de relaxation de charge, $R_q = h/2e^2$, survit aux interactions même dans le régime de blocage de Coulomb. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Hamamoto *et al.* [26] par des calculs analytiques similaires aux nôtres dans le cas d'une transmission presque parfaite et par des calculs Monte-Carlo à toute transmission. Par ailleurs, dans le cas où la boîte quantique est grande et possède un spectre continu, nous avons identifié une nouvelle résistance de relaxation de charge universelle, $R_q = h/e^2$, qui ne dépend ni des interactions dans la boîte, ni de la transmission entre la boîte et le réservoir unidimensionnel. La transition entre les deux résistances a lieu lorsque la fréquence d'excitation $\hbar\omega$ devient de l'ordre de l'espacement entre niveaux Δ de la boîte.

2.3.1 Approche de liquide de Fermi

Dans une boîte quantique où les électrons sont confinés, les interactions coulombiennes sont souvent exacerbées et importantes. Le coût énergétique pour ajouter un électron supplémentaire

a alors tendance à bloquer le transport entre la boîte et son réservoir, c'est le phénomène de blocage de Coulomb. On peut donc légitimement se demander si cette inhibition du transport de charge n'affecte pas la résistance AC. Nous allons voir que ça n'est pas le cas.

Les interactions rendent le problème plus compliqué car les électrons ne sont plus indépendants et l'analogie du 2.2 avec les photons ne s'applique plus. On peut toujours traiter le problème perturbativement dans l'interaction [27] ou perturbativement dans la transmission (faible ou forte) comme nous le verrons au 2.3.2. Toutefois, si les interactions induisent des corrélations entre électrons aux temps intermédiaires, le problème se simplifie aux temps longs ou à basse fréquence [28], en analogie avec le régime de basse énergie du modèle Kondo discuté au 1.2. Le modèle effectif est un liquide de Fermi [29] : les électrons sont indépendants et acquièrent, après leur diffusion par la boîte, un déphasage δ relié par la règle de somme de Friedel à l'occupation de la boîte $\delta/\pi = \langle \hat{n} \rangle$. De façon surprenante, on retrouve ici la description cohérente du 2.2 avec l'identification $2\delta(\varepsilon_d) = \Phi(-\varepsilon_d)$ et les résultats (2.5), en particulier la charge universelle $R_q = h/2e^2$ et, en exprimant τ en fonction de δ grâce à (2.4),

$$C_0 = -e^2 \frac{\partial \langle \hat{n} \rangle}{\partial \varepsilon_d} = e^2 \chi_c, \quad (2.6)$$

où χ_c est la susceptibilité de charge statique de la boîte. Nous avons donc montré que la résistance de charge universelle est une conséquence directe du point fixe liquide de Fermi de basse énergie.

Un calcul alternatif permet de retrouver $R_q = h/2e^2$ à partir du modèle de basse énergie. En présence d'une excitation AC de faible amplitude, $\varepsilon_d = \varepsilon_d^0 + \varepsilon_\omega \cos \omega t$, la puissance dissipée est donnée par la théorie de la réponse linéaire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \varepsilon_\omega^2 \omega \text{Im} \chi_c(\omega), \quad (2.7)$$

où $\chi_c(\omega)$ est la susceptibilité de charge dynamique. On a supposé ici un terme $\varepsilon_d \hat{n}$ dans l'hamiltonien initial. Par ailleurs, l'hamiltonien de basse énergie prend la forme suivante

$$H = \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k - \sum_{k,k'} \tan \left(\frac{\delta(\varepsilon_d)}{\pi \nu_0} \right) c_k^\dagger c_{k'}, \quad (2.8)$$

correspondant à un terme potentiel diffusant (phase $\delta(\varepsilon_d)$) des électrons libres (ν_0 est la densité d'état au niveau de Fermi). En présence de l'excitation $\varepsilon_d = \varepsilon_d^0 + \varepsilon_\omega \cos \omega t$, avec $\varepsilon_\omega, \omega \rightarrow 0$, on développe le terme potentiel au premier ordre ε_ω . Après un changement de base absorbant l'ordre zéro, on obtient

$$H = \sum_k \varepsilon_k \tilde{c}_{k\sigma}^\dagger \tilde{c}_{k\sigma} + \varepsilon_\omega \cos \omega t \frac{\chi_c}{\nu_0} \sum_{k,k'} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{k'}, \quad (2.9)$$

où la susceptibilité de charge statique χ_c est introduit après dérivation de la règle de somme de Friedel par rapport à ε_d . L'hamiltonien (2.9) constitue un point de départ alternatif pour calculer la puissance dissipée en réponse linéaire avec le résultat

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \varepsilon_\omega^2 \omega \text{Im} \chi_{\hat{A}}(\omega), \quad (2.10)$$

où $\chi_{\hat{A}}(t-t') = i\theta(t-t') \langle [\hat{A}(t), \hat{A}(t')] \rangle$ et l'opérateur $\hat{A} = (\chi_c/\nu_0) \sum_{k,k'} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{k'}$ crée des excitations électron-trou. Un calcul simple [30] donne à température nulle $\text{Im} \chi_{\hat{A}}(\omega) = \pi \chi_c^2 \omega$ et, en identifiant les puissances (2.7) et (2.10), la formule de Korringa-Shiba (pour $\omega \rightarrow 0$)

$$\text{Im} \chi_c(\omega) = \pi \omega \chi_c^2. \quad (2.11)$$

La forme de l'opérateur \hat{A} éclaire sur l'origine physique de la dissipation, provoquée ici par des excitations particule-trou d'amplitude χ_c . En remarquant que $I(\omega) = -i\omega e^2 \chi_c(\omega) V_g(\omega)$, on obtient par comparaison avec le développement (2.1) l'équivalence entre Korryng-Shiba et $R_q = h/2e^2$.

Qu'en est-il du cas de la grande boîte dont le spectre est dense? Nous venons de voir que la dissipation pour une petite boîte provient des états continus du réservoir et non des états discrets de la boîte. La grande boîte offre donc un canal supplémentaire pour la dissipation qui peut avoir lieu à la fois dans le réservoir et dans la boîte. Par ailleurs, le cas de la grande boîte présente une symétrie entre le réservoir et la boîte. La charge totale du système commute avec l'hamiltonien⁴ : ainsi, pour $\langle \hat{n} \rangle$ électrons dans la boîte, on a $-\langle \hat{n} \rangle$ électrons dans le réservoir et la règle de somme de Friedel prédit un déphasage $\delta = \pi \langle \hat{n} \rangle$ (resp. $-\delta$) pour les électrons du réservoir (resp. de la boîte) à l'énergie de Fermi. On obtient finalement à basse énergie deux liquides de Fermi découplés⁵ caractérisés par des déphasages opposés. En reprenant le raisonnement ci-dessus sur la puissance dissipée, on trouve une nouvelle formule de Korryng-Shiba

$$\text{Im}\chi_c(\omega) = 2\pi\omega\chi_c^2. \quad (2.12)$$

correspondant à la résistance de relaxation de charge universelle $R_q = h/e^2$. Le facteur 2 par rapport à la petite boîte résulte du doublement des canaux de dissipation conjugué à l'équivalence entre boîte et réservoir.

2.3.2 Approches perturbatives à faibles et fortes transmissions

Nous avons vérifié les prédictions du 2.3.1 par des calculs explicites à faible transmission et forte transmission (ou faible réflexion).

Pour le cas des faibles transmissions, on utilise un modèle tunnel introduit par Matveev et Glazman [31] d'hamiltonien

$$H = \sum_p \varepsilon_p c_p^\dagger c_p + \sum_k \varepsilon_k d_k^\dagger d_k + E_c (\hat{n} - N_0)^2 + t \sum_{k,p} \left(d_k^\dagger c_p + c_p^\dagger d_k \right), \quad (2.13)$$

comprenant une énergie de charge $E_c = e^2/(2C_g)$ et un terme de saut t entre le réservoir (opérateurs c_p) et la boîte (opérateurs d_k). $N_0 = C_g V_g/e$ est la charge imposée par la grille. Le calcul perturbatif à l'ordre deux donne la susceptibilité de charge statique $e^2 \chi_c = DC_g/(1/4 - N_0^2)$, où $D = t^2 \nu_0 \nu_1$ dépend des densités d'états ν_0 et ν_1 du réservoir et de la boîte, et une partie imaginaire nulle pour la susceptibilité dynamique de charge à basse fréquence due au gap d'énergie pour ajouter ou enlever un électron dans la boîte.

Le calcul perturbatif poussé à l'ordre quatre fait intervenir des excitations non gappées qui donnent une contribution non nulle à basse fréquence à $\text{Im}\chi_c$. On obtient finalement les formules de Korryng-Shiba (2.11) et (2.12) selon la taille de la boîte et donc les résistances universelles $R_q = h/2e^2, h/e^2$. Dans ce calcul, on constate explicitement le doublement de la résistance lorsque le spectre de la boîte devient continu.

Précisons que, même lorsque le terme de saut t est petit, le calcul perturbatif n'est plus valable à proximité de la dégénérescence de charge correspondant à $N_0 = 1/2$ ⁶ et un calcul

4. on fixe la charge totale à zéro par convention.

5. la conservation de l'énergie sur des temps très longs (basse fréquence) impose qu'un électron incident soit entièrement réfléchi à l'interface entre la boîte et le réservoir pour ne pas payer d'énergie de charge.

6. en particulier, la formule obtenue perturbativement pour la susceptibilité de charge statique diverge en $N_0 = 1/2$.

2.4. Pic dans la résistance de relaxation de charge pour le modèle d'Anderson 19

non-perturbatif devient nécessaire. Il existe néanmoins un mapping [31] autour de $N_0 = 1/2$ entre le modèle (2.13) et l'hamiltonien d'échange anisotrope de l'effet Kondo. Le mapping relie la charge du modèle initial au spin du modèle fictif et permet, à partir de la formule de Korringa-Shiba sur la susceptibilité de spin du modèle Kondo, de montrer que le domaine de validité de la formule (2.12) s'étend au voisinage du point de dégénérescence de charge $N_0 = 1/2$.

À faible réflexion, on décrit le système incluant le réservoir et la boîte par un gaz d'électrons unidimensionnel auquel s'ajoute un terme de rétro-diffusion local à l'interface entre le réservoir et la boîte dont l'amplitude est petite. La bosonisation du gaz unidimensionnel permet de prendre en compte les interactions de façon exacte [32], le prix à payer étant que le terme de rétro-diffusion devient non-linéaire (sinusoïdal) et est donc traité perturbativement. Dans le cas d'une grande boîte, l'action décrivant le système s'écrit

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_n \phi_0(\omega_n) \phi_0(-\omega_n) \left(|\omega_n| + \frac{E_c}{\pi} \right) - \frac{v_{FR}}{\pi a} \int_0^\beta d\tau \cos [2\phi_0(\tau) + 2\pi N_0], \quad (2.14)$$

où l'on a intégré exactement les variables du gaz d'électrons 1D en ne conservant que l'opérateur décrivant la charge $\hat{n} = N_0 + \phi_0/\pi$. r désigne ici le petit paramètre sans dimension contrôlant la rétro-diffusion à l'interface entre la boîte et le réservoir. L'action (2.14) pour $r = 0$ est quadratique et donne directement les résultats

$$C_0 = C_g, \quad R_q = \frac{h}{e^2}. \quad (2.15)$$

En présence d'une faible rétro-diffusion $r \ll 1$, un calcul perturbatif au second ordre en r donne à nouveau $R_q = h/e^2$, ce qui signifie que les corrections en r et r^2 s'annulent exactement. La résistance est donc inchangée, en accord avec notre discussion du 2.3.1. Le terme de capacité acquiert quant à lui des oscillations

$$\frac{C_0}{C_g} = 1 - \frac{re^C}{\pi} 2\pi \cos(2\pi N_0) + 1.86 \left(\frac{re^C}{\pi} \right)^2 4\pi \cos(4\pi N_0), \quad (2.16)$$

marquant les premiers effets de la quantification de la charge⁷.

Un calcul très similaire peut être conduit dans le cas de la petite boîte où la quantification des niveaux de la boîte devient pertinente. On confirme ainsi par cette approche perturbative le résultat $R_q = h/2e^2$ jusqu'au second en r .

Référence : C. MORA, K. LE HUR, *Universal Resistances of the Quantum RC circuit*, Nature Physics **6**, 697 (2010).

2.4 Pic dans la résistance de relaxation de charge pour le modèle d'Anderson

Les modèles que nous avons considérés jusqu'ici, au 2.2 et 2.3, ne tiennent pas compte du spin des électrons, ou autrement dit, concernent des électrons polarisés comme c'est le cas pour les états de bord de l'effet Hall quantique. Avec M. Filippone⁸ et K. Le Hur, nous nous sommes intéressés au calcul de la résistance de relaxation de charge pour le modèle d'Anderson qui prend

7. les oscillations pour la charge dans la boîte s'amplifient lorsque la transmission diminue jusqu'à donner des marches d'escalier à transmission nulle.

8. Michele Filippone a débuté sa thèse sous ma direction en septembre 2010.

2.4. Pic dans la résistance de relaxation de charge pour le modèle d'Anderson 20

en compte le spin des électrons et l'énergie de charge pour une très petite boîte dont un seul niveau d'énergie contribue au transport. Pertinent pour le transport dans les nanostructures, le modèle d'Anderson est un modèle minimal présentant des fortes corrélations électroniques. Toutefois, le point fixe de basse énergie reste un liquide de Fermi et l'approche que nous avons décrite au 2.3.1 s'applique aussi à ce modèle en ajoutant le degré de liberté de spin.

En reprenant le calcul de la puissance dissipée en présence d'une tension de grille AC du 2.3.1, on trouve une formule de Korringa-Shiba généralisée (pour $\omega \rightarrow 0$)

$$\text{Im}\chi_c(\omega) = \pi\omega (\chi_{c\uparrow}^2 + \chi_{c\downarrow}^2), \quad (2.17)$$

où $\chi_c(\omega)$ désigne la susceptibilité totale de charge et $\chi_{c\sigma} = -\partial\langle\hat{n}_\sigma\rangle/\partial\varepsilon_d$ les susceptibilités statiques décrivant les variations des charges de spin donné dans la boîte avec la tension de grille. À champ magnétique nul, les deux états de spin sont équivalents, $\chi_{c\uparrow} = \chi_{c\downarrow} = \chi_c/2$, et la formule (2.17) donne la résistance universelle

$$R_q = \frac{h}{4e^2}, \quad (2.18)$$

qui coïncide avec le résultat d'un modèle sans interaction impliquant deux canaux de conduction identiques [27].

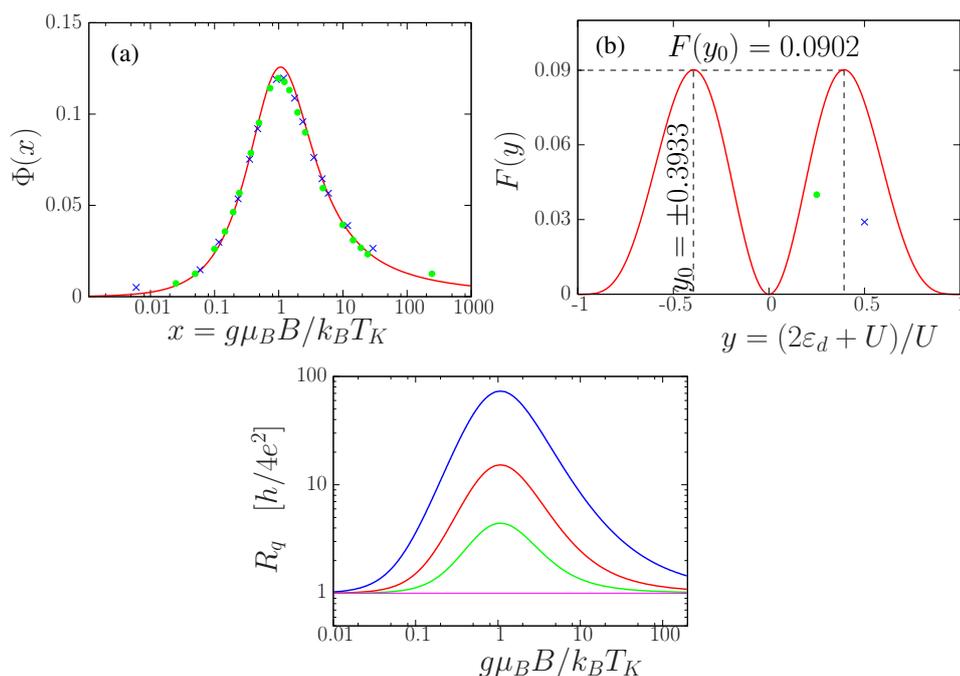


FIGURE 2.2: (a) Fonction $\Phi(x)$ (ligne en trait plein) et (b) fonction enveloppe $F(y)$. $y = \pm 1$ correspondent aux deux pics de Coulomb de la fonction spectrale. Cercles verts ($\varepsilon_d = -0.15$) et croix bleues ($\varepsilon_d = -0.1$) sont extraits de la Fig. 3a) de la référence [33], avec $U = 0.4$ et $\Gamma = 0.02$, en implémentant la formule (2.21) et en redimensionnant l'axe des abscisses. (c) Résistance de relaxation de charge pour $\varepsilon_d/U = -1/2 \pm 0.1967$ et pour différents rapports de $U/\Gamma = 15, 10, 7$.

Inspirés par les résultats d'une étude Monte-Carlo [33] prédisant, entre autres, un pic dans la résistance de relaxation de charge en fonction du champ magnétique, nous avons, à partir de la formule (2.17), confirmé l'existence de ce pic et dérivé ses propriétés analytiques dans le régime Kondo $U \gg \Gamma$. En introduisant la magnétosusceptibilité de charge $\chi_m = \chi_{c\uparrow} - \chi_{c\downarrow}$ qui

mesure la sensibilité de la magnétisation à une variation de la tension de grille, la formule (2.17) conduit au résultat général

$$R_q = \frac{h}{4e^2} \frac{\chi_c^2 + \chi_m^2}{\chi_c^2}. \quad (2.19)$$

Les susceptibilités qui apparaissent dans cette expression sont statiques et peuvent donc être calculées par la méthode de l'ansatz de Bethe [34]. La magnétosusceptibilité de charge χ_m est ainsi obtenue en utilisant l'expression connue [34] de la magnétisation dans le régime Kondo en fonction du champ magnétique ainsi que l'expression de la température Kondo $T_K = 2\sqrt{U\Gamma/\pi e} \exp[\pi\varepsilon_d(\varepsilon_d + U)/2U\Gamma]$ pour le modèle d'Anderson. Le résultat pour χ_m prend la forme

$$\chi_m = \frac{\pi}{\Gamma} \frac{2\varepsilon_d + U}{U} \Phi\left(\frac{g\mu_B B}{k_B T_K}\right). \quad (2.20)$$

ce qui donne

$$R_q = \frac{h}{4e^2} \left[1 + \left(\frac{U}{\Gamma}\right)^4 F(y) (\Phi(x))^2 \right], \quad (2.21)$$

où les fonctions $\Phi(x)$ et $F(y)$ sont représentées figure 2.2. Un pic apparaît donc dans la résistance lorsque le champ magnétique est du même ordre que la température Kondo. La hauteur de ce pic varie comme $(U/\Gamma)^4$ pour $U \gg \Gamma$ ce qui donne un effet très rapidement visible expérimentalement. L'enveloppe de ce pic s'annule pour $\varepsilon_d = -U/2$ où la symétrie particule-trou implique que la magnétisation est extrême par rapport au potentiel de grille ε_d si bien que $\chi_m = 0$ et $R_q = h/4e^2$ quelque soit le champ magnétique. L'accord entre notre résultat et le calcul Monte-Carlo précité [33] est excellent pour la forme de la résistance en fonction du champ magnétique, cf. figure 2.2.

Référence : M. FILIPPONE, K. LE HUR, C. MORA, *Giant Charge Relaxation Resistance in the Anderson Model*, Phys. Rev. Lett. **107**, 176601 (2011).

Bibliographie

- [1] R. J. SCHOELKOPF, P. WAHLGREN, A. A. KOZHEVNIKOV, P. DELSING & D. E. PROBER, *The radio-frequency single-electron transistor (RF-SET) : a fast and ultrasensitive electrometer*, Science **280**, 1238 (1998).
- [2] A. A. CLERK, M. H. DEVORET, S. M. GIRVIN, FLORIAN MARQUARDT & R. J. SCHOELKOPF, *Introduction to quantum noise, measurement, and amplification*, Rev. Mod. Phys. **82** (2), 1155 (2010).
- [3] L. P. KOUWENHOVEN, S. JAUHAR, J. ORENSTEIN, P. L. MCEUEN, Y. NAGAMUNE, J. MOTOHISA & H. SAKAKI, *Observation of Photon-Assisted Tunneling through a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3443 (1994).
- [4] R. J. SCHOELKOPF, A. A. KOZHEVNIKOV, D. E. PROBER & M. J. ROOKS, *Observation of "Photon-Assisted" Shot Noise in a Phase-Coherent Conductor*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2437 (1998).
- [5] A. KOGAN, S. AMASHA & M. A. KASTNER, *Photon-induced Kondo satellites in a single-electron transistor*, Science **304** (5675), 1293 (2004).
- [6] R. J. SCHOELKOPF, P. J. BURKE, A. A. KOZHEVNIKOV, D. E. PROBER & M. J. ROOKS, *Frequency Dependence of Shot Noise in a Diffusive Mesoscopic Conductor*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3370 (1997).

- [7] R. AGUADO & L. P. KOUWENHOVEN, *Double Quantum Dots as Detectors of High-Frequency Quantum Noise in Mesoscopic Conductors*, Phys. Rev. Lett. **84** (9), 1986 (2000).
- [8] R. DEBLOCK ET AL., *Detection of Quantum Noise from an Electrically Driven Two-Level System*, Science **301** (5630), 203 (2003).
- [9] E. ONAC, F. BALESTRO, L. H. W. VAN BEVEREN, U. HARTMANN, Y. V. NAZAROV & L. P. KOUWENHOVEN, *Using a Quantum Dot as a High-Frequency Shot Noise Detector*, Phys. Rev. Lett. **96** (17), 176601 (2006).
- [10] S. GUSTAVSSON, M. STUDER, R. LETURCQ, T. IHN, K. ENSSLIN, D. C. DRISCOLL & A. C. GOSSARD, *Frequency-Selective Single-Photon Detection Using a Double Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **99** (20), 206804 (2007).
- [11] W. W. XUE, Z. JI, F. PAN, J. STETTENHEIM, M. P. BLENCOWE & A. J. RIMBERG, *Measurement of quantum noise in a single-electron transistor near the quantum limit*, Nature Physics **5** (9), 660 (2009).
- [12] J. BASSET, H. BOUCHIAT & R. DEBLOCK, *Emission and Absorption Quantum Noise Measurement with an On-Chip Resonant Circuit*, Phys. Rev. Lett. **105** (16), 166801 (2010).
- [13] J. GABELLI, L.-H. REYDELLET, G. FÈVE, J.-M. BERROIR, B. PLAÇAIS, P. ROCHE & D. C. GLATTLI, *Hanbury Brown–Twiss Correlations to Probe the Population Statistics of GHz Photons Emitted by Conductors*, Phys. Rev. Lett. **93** (5), 056801 (2004).
- [14] J. GABELLI & B. REULET, *Dynamics of Quantum Noise in a Tunnel Junction under ac Excitation*, Phys. Rev. Lett. **100** (2), 026601 (2008).
- [15] E. ZAKKA-BAJJANI, J. SÉGALA, F. PORTIER, P. ROCHE, D. C. GLATTLI, A. CAVANNA & Y. JIN, *Experimental Test of the High-Frequency Quantum Shot Noise Theory in a Quantum Point Contact*, Phys. Rev. Lett. **99** (23), 236803 (2007).
- [16] E. ZAKKA-BAJJANI, J. DUFOULEUR, N. COULOMBEL, P. ROCHE, D. C. GLATTLI & F. PORTIER, *Experimental Determination of the Statistics of Photons Emitted by a Tunnel Junction*, Phys. Rev. Lett. **104** (20), 206802 (2010).
- [17] J. GABELLI, G. FÈVE, J.-M. BERROIR, B. PLAÇAIS, A. CAVANNA, B. ETIENNE, Y. JIN & D. C. GLATTLI, *Violation of Kirchhoff's Laws for a Coherent RC Circuit*, Science **313** (5786), 499 (2006).
- [18] G. FÈVE, A. MAHÉ, J.-M. BERROIR, T. KONTOS, B. PLAÇAIS, D. C. GLATTLI, A. CAVANNA, B. ETIENNE & Y. JIN, *An On-Demand Coherent Single-Electron Source*, Science **316** (5828), 1169 (2007).
- [19] A. MAHÉ, F. D. PARMENTIER, E. BOCQUILLON, J.-M. BERROIR, D. C. GLATTLI, T. KONTOS, B. PLAÇAIS, G. FÈVE, A. CAVANNA & Y. JIN, *Current correlations of an on-demand single-electron emitter*, Phys. Rev. B **82** (20), 201309 (2010).
- [20] C. GRENIER, R. HERVÉ, G. FÈVE & P. DEGIOVANNI, *Electron Quantum Optics in Quantum Hall Edge Channels*, Mod. Phys. Lett. B **25**, 1053 (2011).
- [21] T. FREY, P. J. LEEK, M. BECK, A. BLAIS, T. IHN, K. ENSSLIN & A. WALLRAFF, *Dipole coupling of a double quantum dot to a microwave resonator*, arXiv :1108.5378 (2011).
- [22] S. J. CHORLEY, J. WABNIG, Z. V. PENFOLD-FITCH, K. D. PETERSSON, J. FRAKE, C. G. SMITH & M. R. BUITELAAR, *Measuring the complex admittance of a carbon nanotube double quantum dot*, arXiv :1109.1827 (2011).

-
- [23] M. BÜTTIKER, A. PRÊTRE & H. THOMAS, *Dynamic conductance and the scattering matrix of small conductors*, Phys. Rev. Lett. **70** (26), 4114 (1993).
- [24] M. BÜTTIKER, H. THOMAS & A. PRÊTRE, *Mesoscopic capacitors*, Phys. Lett. A **180** (4-5), 364 (1993).
- [25] Z. RINGEL, Y. IMRY & O. ENTIN-WOHLMAN, *Delayed currents and interaction effects in mesoscopic capacitors*, Phys. Rev. B **78**, 165304 (2008).
- [26] Y. HAMAMOTO, T. JONCKHEERE, T. KATO & T. MARTIN, *Dynamic response of a mesoscopic capacitor in the presence of strong electron interactions*, Phys. Rev. B **81** (15), 153305 (2010).
- [27] S. E. NIGG, R. LÓPEZ & M. BÜTTIKER, *Mesoscopic Charge Relaxation*, Phys. Rev. Lett. **97** (20), 206804 (2006).
- [28] I. L. ALEINER & L. I. GLAZMAN, *Mesoscopic charge quantization*, Phys. Rev. B **57**, 9608 (1998).
- [29] P. NOZIÈRES, *A Fermi-liquid description of the Kondo problem at low temperatures*, J. Low Temp. Phys. **17** (1), 31 (1974).
- [30] MARKUS GARST, PETER WÖLFLE, LÁSZLÓ BORDA, JAN VON DELFT & LEONID GLAZMAN, *Energy-resolved inelastic electron scattering off a magnetic impurity*, Phys. Rev. B **72** (20), 205125 (2005).
- [31] L. I. GLAZMAN & K. A. MATVEEV, *Lifting of the Coulomb blockade of one-electron tunneling by quantum fluctuations*, Sov. Phys. JETP **71** (5), 1031 (1990).
- [32] K. A. MATVEEV, *Coulomb blockade at almost perfect transmission*, Phys. Rev. B **51**, 1743 (1995).
- [33] M. LEE, R. LÓPEZ, M.-S. CHOI, T. JONCKHEERE & T. MARTIN, *Effect of many-body correlations on mesoscopic charge relaxation*, Phys. Rev. B **83** (20), 201304 (2011).
- [34] A. M. TSVELICK & P. B. WIEGMANN, *Exact results in the theory of magnetic alloys*, Adv. Phys. **32** (4), 453 (1983).

Chapitre 3

Problèmes à quelques corps

Le domaine des atomes froids a connu un développement spectaculaire dans les deux dernières décennies. Les gaz d'atomes froids forment des systèmes quantiques modèles de taille macroscopique, sans défaut, et facilement manipulables à l'aide de lasers. Ils permettent de vérifier très directement les prédictions de la physique quantique sur des objets cohérents macroscopiques. Récemment est née l'idée des simulateurs quantiques où les gaz d'atomes froids sont piégés et contrôlés de façon à reproduire des modèles de matière condensée. Un pont s'est ainsi établi entre le domaine des atomes froids et celui de la matière condensée.

3.1 Contexte

D'une manière générale, la compréhension des problèmes à quelques corps est un outil fondamental [1] pour l'étude des vapeurs atomiques ultra-froides, ou gaz d'atomes froids. Tout d'abord ces processus à quelques corps interviennent dans la construction d'hamiltoniens modèles [2–5] qui permettent d'appréhender les effets à N corps. Ensuite les collisions entre un nombre réduit d'atomes sont généralement responsables des pertes atomiques dans les gaz piégés [6, 7] : lors d'une collision, une partie de l'énergie d'interaction est convertie en énergie cinétique, ce qui permet aux atomes impliqués de s'extraire du piège lorsque cette énergie excède la profondeur du piège. Ces processus limitent donc le temps de vie des gaz ultra-froids. La majeure partie des études de collisions dans les gaz d'atomes froids est aujourd'hui encore le fait de spécialistes chevronnés qui déterminent précisément les potentiels inter-atomiques. La complexité de ce travail vient des multiples états de spin impliqués mais aussi du fait que les mesures expérimentales sont toujours indirectes. Les potentiels sont ainsi reconstruits à partir de données expérimentales de spectroscopie radio-fréquence.

Parallèlement à ces calculs multi-canaux, le développement récent, depuis une dizaine d'années environ, de la technique expérimentale des résonances de Feshbach [8] qui permet de modifier de façon contrôlée les interactions atomiques, a conduit au développement d'une physique à quelques corps *du pauvre* [9] où les potentiels entre atomes sont simplifiés à l'extrême. L'idée est qu'il est possible, en se plaçant à proximité d'une résonance de Feshbach, d'atteindre un régime résonant où la longueur de diffusion a est grande devant la taille typique du potentiel ℓ . Dans ce cas la physique cesse de dépendre des détails des potentiels à courte distance et toute la complexité disparaît. On entre dans un régime dit *universel* [1, 10] où les observables sont fonctions principalement de la longueur de diffusion et éventuellement d'un petit nombre de paramètres additionnels. Ce régime se décrit à l'aide de modèles effectifs où les interactions ont une portée nulle. Dans ces modèles, la fonction d'onde est solution d'une équation

de Schrödinger sans interaction à laquelle on rajoute des conditions aux limites lorsque les atomes coïncident spatialement afin de reproduire l'effet des interactions [11–13]. On impose par exemple la condition aux limites de Bethe-Peierls à la fonction d'onde

$$\psi(\mathbf{r}, \{\mathbf{r}_i\})|_{r \rightarrow 0} = A(\{\mathbf{r}_i\}) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (3.1)$$

lorsque deux atomes sont proches. \mathbf{r} est la distance (vecteur) reliant les deux atomes considérés, $\{\mathbf{r}_i\}$ l'ensemble des positions des autres atomes et $A(\{\mathbf{r}_i\})$ une fonction indéterminée de ces positions.

Pour être complet, précisons que l'utilisation des modèles de portée nulle ne nécessite pas la proximité d'une résonance de Feshbach. Leur application au cas des gaz dilués est d'ailleurs bien antérieure au développement des résonances de Feshbach. Tant que l'on s'intéresse à des énergies faibles, correspondant à des distances plus grandes que la taille typique des potentiels ℓ - c'est le cas par exemple pour l'énergie du fondamental d'un gaz de Bose-Einstein dilué en interaction faible - les détails du potentiel à courte distance importent peu. Un modèle de portée nulle est alors applicable même lorsque a et ℓ sont du même ordre. Par contre, si l'on s'intéresse à des états liés à quelques corps dont la taille est de l'ordre de a , une situation résonante $a \gg \ell$ est nécessaire pour appliquer un modèle de portée nulle. C'est notamment le cas pour les états liés d'Efimov [14].

3.2 États liés d'Efimov

Dans la situation résonante où la longueur de diffusion diverge $a \rightarrow \pm\infty$, il n'y a plus de longueur caractéristique dans le problème qui devient *invariant d'échelle* [15]. Une conséquence de cette invariance est que, à partir d'un état propre de l'hamiltonien d'énergie E , on peut toujours construire un autre état propre d'énergie E/λ^2 , et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi l'existence d'un seul état lié dans le modèle engendre automatiquement un continuum non borné d'états liés [16] ce qui est impossible pour un problème hermitien. On voit surgir ici une difficulté récurrente des modèles de portée nulle - où les interactions sont remplacées par des conditions aux limites sur les fonctions d'onde -, à savoir qu'on doit toujours vérifier que leurs prédictions coïncident avec celles d'un modèle réaliste, donc hermitien par construction, pour lequel on a fait tendre la portée des interactions vers zéro. On résout la contradiction du continuum d'états liés par une opération de filtrage qui consiste à ne garder de ces états qu'un sous-ensemble de fonctions orthogonales [16], auquel cas on retombe sur la limite de portée nulle d'un modèle hermitien.

C'est précisément ce qui passe pour le problème à trois corps bosonique. En appliquant les conditions de Bethe-Peierls (3.1) à trois bosons de même masse, on peut montrer l'existence d'un état lié et donc automatiquement d'un continuum d'états liés. L'opération de filtrage spectral est réalisée en ajoutant une condition aux limites supplémentaire lorsque trois bosons coïncident spatialement [17, 18]. On obtient ainsi les états liés d'Efimov : ceux-ci forment une série géométrique [14, 16], le rapport entre les énergies de deux états consécutifs étant constant, avec un point d'accumulation à énergie nulle. On peut être plus précis : la dépendance en l'hyperrayon R - dont le carré est la somme des distances au carré des trois bosons au centre de masse - se factorise dans la fonction d'onde. En particulier, on peut montrer [14], lorsque les trois bosons coïncident spatialement, le comportement asymptotique suivant

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)|_{R \rightarrow 0} \propto \frac{\sin[s_0 \ln(R/\ell) + \varphi]}{R^2}, \quad (3.2)$$

à partir des conditions de Bethe-Peierls (3.1), où $s_0 \simeq 1.00624$ et φ est *a priori* indéterminée. La longueur ℓ dans cette expression est en fait arbitraire¹ et n'a pas de signification physique réelle puisque ℓ est définie *modulo* le facteur multiplicatif e^{π/s_0} . Son unique rôle est d'adimensionner l'argument du logarithme. Changer ℓ modifie juste l'origine de la phase φ . La phase φ s'interprète physiquement comme le déphasage entre l'onde entrante et l'onde sortante par rapport à $R = 0$ dans le comportement asymptotique (3.2).

Physiquement, la phase φ est déterminée par le comportement à courte distance des vrais potentiels inter-atomiques indépendamment des valeurs de l'énergie E ou de la longueur de diffusion a . En particulier, on montre [16] que le fait de fixer φ réalise le filtrage d'états orthogonaux. Le paramètre à trois corps φ joue ainsi un rôle analogue à la longueur de diffusion a pour le deux corps : fixer a et φ dans les conditions aux limites (3.1) et (3.2) réalise bien la limite de portée nulle d'un modèle hermitien. La série géométrique des états liés d'Efimov est finalement donnée par ($n \in \mathbb{Z}$)

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m} e^{-2\pi n/s_0}, \quad (3.3)$$

avec

$$\kappa_* \ell = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\varphi + \text{Arg} \Gamma(1 + is_0)}{s_0}\right), \quad (3.4)$$

et la fonction Gamma notée $\Gamma(z)$. On constate que le spectre (3.3) donne bien un continuum d'états liés tant que la phase φ est indéterminée. On remarque aussi que la structure géométrique des états d'Efimov tire son origine de la symétrie d'échelle discrète $R \rightarrow Re^{\pi/s_0}$ engendrée par la condition aux limites (3.2).

La prédiction de l'existence des états d'Efimov n'est certainement pas récente. Le sujet est issu de la physique nucléaire où les longueurs de diffusions peuvent être naturellement légèrement supérieures aux tailles typiques des potentiels. Cependant, à ma connaissance, la physique d'Efimov n'a jamais été mise en évidence dans ces systèmes. Le regain d'intérêt qui s'exprime aujourd'hui pour la physique efimovienne a démarré en 2006 avec les premières mesures indirectes d'états d'Efimov dans un gaz d'atomes de ^{133}Cs [19]. Depuis, de nombreux groupes [20–26] ont observé des effets efimoviens dans différents systèmes de bosons ou de fermions. On peut remarquer que la physique d'Efimov ne requiert pas forcément des bosons identiques. Pour des atomes de même masse, les opérateurs échangeant les atomes commutent avec l'hamiltonien. La présence d'un secteur complètement symétrique est donc suffisant pour observer l'émergence d'états d'Efimov. Ceci exclut des fermions dans un ou deux états de spin mais reste compatible avec trois fermions dans trois états de spin différents.

3.3 Les états d'Efimov revisités

Avec A. O. Gogolin et R. Egger, nous avons proposé une méthode alternative qui permet de montrer simplement et de façon analytique l'apparition des états d'Efimov. Nous avons pour cela considéré un modèle à deux canaux [27] pour lequel on fait tendre la taille typique du potentiel ℓ vers zéro. L'avantage de ce modèle est qu'il fait apparaître, dans le calcul de l'amplitude de collision à deux corps

$$f(k) = -\frac{1}{a^{-1} + ik + R^* k^2}, \quad (3.5)$$

1. on l'a prise ici par convention égale à la taille typique du potentiel.

une longueur additionnelle $R^* > 0$ en plus de la longueur de diffusion a . Noter que l'expression (3.5) est valable² pour tout k (en particulier aussi pour $kR^* \gg 1$) mais n'a de sens que si $R^* \gg \ell$, c'est-à-dire pour une résonance de Feshbach étroite. Cette nouvelle longueur R^* brise l'invariance d'échelle dans la limite unitaire $1/a = 0$ mais régularise ainsi la pathologie, ou *effondrement de Thomas* [28], associée à la coïncidence des trois bosons. L'intérêt du modèle à deux canaux est qu'il est hermitien par construction. On peut donc implémenter directement la limite de portée nulle sur un modèle hermitien et ainsi éviter toute opération délicate de filtrage spectral.

On donne ici un aperçu des calculs, le lecteur intéressé par les détails pourra se reporter à nos articles. On note tout d'abord que l'équation de Schrödinger initiale peut se ramener à une équation intégrale dont la variable est la distance entre un atome et le centre de masse des deux atomes restant. Cette équation intégrale peut ensuite, après un certain nombre de manipulations algébriques, se récrire comme une équation de Schrödinger effective unidimensionnelle,

$$\left[\hat{T} \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) + U(\xi) - \mathcal{E} \right] \tilde{\psi}(\xi) = 0, \quad (3.6)$$

où la fonction d'onde fictive $\tilde{\psi}$ est par construction antisymétrique, $\tilde{\psi}(\xi) = -\tilde{\psi}(-\xi)$. Dans l'équation (3.6), l'énergie $\mathcal{E} = 4\pi/(3\sqrt{3}) - 1 \simeq 1.41839$ est constante, le terme d'énergie cinétique n'est pas simplement quadratique mais est donné par

$$\hat{T}(s) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\sinh(\pi s/6)}{s \cosh(\pi s/2)}. \quad (3.7)$$

de façon analogue à la structure de bande d'un solide. Le terme d'énergie potentielle a la forme suivante

$$U(\xi) = -\frac{1}{a\lambda} \frac{1}{\cosh \xi} + R^* \lambda \cosh \xi. \quad (3.8)$$

Il est symétrique, borné inférieurement et infini pour $\xi \rightarrow \pm\infty$. Le paramètre λ est associé à l'énergie $E = -\hbar^2 \lambda^2/m$ dans l'équation de Schrödinger initiale.

La recherche des états propres du problème se fait intuitivement de la façon suivante : λ étant fixé, le potentiel $U(\xi)$ associé à l'énergie cinétique $\hat{T}(s)$ possède un ensemble discret d'énergies propres espacées les unes des autres et dont aucune ne coïncide *a priori* avec l'énergie \mathcal{E} . En changeant λ , on décale ces énergies propres. À chaque fois qu'une de ces énergies coïncide avec \mathcal{E} , on obtient une valeur admissible pour λ , et donc pour l'énergie E d'un état lié. On comprend donc ainsi comment on obtient un ensemble discret d'énergies propres E à partir de l'équation (3.6). Une approche de type WKB permet, pour les états de haute énergie ($\lambda \rightarrow 0$ ou $E \rightarrow 0^-$), de déterminer analytiquement le spectre à l'unitarité $1/a = 0$. On obtient le spectre géométrique (3.3), caractéristique des états d'Efimov, avec $\kappa_* R^* = 2e^{-\pi\gamma/s_0}$. Le paramètre γ est la phase accumulée au point de rebroussement du potentiel (3.8). On peut la calculer analytiquement en écrivant la solution du problème au bord à l'aide d'un contour de Barnes [29] dont l'intégrand est judicieusement choisi. Le résultat final est analytique et donne $\gamma \simeq -0.090518155$.

En dehors de l'unitarité $1/a \neq 0$, les états d'Efimov évoluent continûment [1] en fonction de $1/a$ puis disparaissent à la fois pour $a = a_* > 0$ lorsque leur énergie atteint le seuil de dissociation dimère-atome $E = -\hbar^2/ma^2$ et pour $a = a'_* < 0$ lorsque leur énergie s'annule. Ce second seuil correspond à la dissociation du trimère en trois atomes libres. L'équation (3.6)

2. en cela, elle diffère de l'habituel développement de portée effective en puissance de k .

permet ainsi de déterminer analytiquement les positions a'_* où les énergies des états d'Efimov s'annulent. Ces positions sont importantes expérimentalement. Elles correspondent à des pics dans les pertes en atomes du gaz et permettent ainsi de mettre en évidence la physique efimovienne dans une expérience. Le résultat est $a'_*/R^* = -e^{2\pi\gamma/s_0}$ modulo un facteur e^{π/s_0} ou encore

$$a'_*\kappa_* = -2e^{\pi\gamma/s_0} \simeq -1.50763. \quad (3.9)$$

En plus du spectre d'Efimov, nous nous sommes aussi intéressés à la solution d'énergie nulle du modèle pour laquelle nous avons dérivé une expression analytique à la fois lorsque la longueur de diffusion a est positive et négative. Cette solution d'énergie nulle donne ensuite accès au taux de recombinaison à trois corps du gaz [30], un processus de collision où trois atomes libres forment un dimère accompagné d'un atome seul. L'énergie de liaison du dimère est convertie en énergie cinétique ce qui conduit généralement à une diminution du nombre d'atomes piégés. Le calcul de recombinaison à trois corps est donc une donnée expérimentale importante qui limite le temps de vie d'un gaz d'atomes froids. Si l'on revient à l'équation intégrale dont la variable est la distance entre un atome et le centre de masse des deux autres, celle-ci prend la forme suivante (pour $a, |x| \gg R^*$)

$$\left(\hat{L}_0 - \frac{1}{a}\right) f(\mathbf{x}) = 4\pi \sqrt{\frac{6}{V}}, \quad (3.10)$$

où V est le volume du système et l'opérateur intégral est donné à énergie nulle par

$$\hat{L}_0 f(\mathbf{k}) = |k| f(\mathbf{k}) - \frac{2}{\sqrt{3}\pi^2} \int d^3k' \frac{f(\mathbf{k}')}{k^2 + k'^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}. \quad (3.11)$$

La connaissance de la fonction $f(\mathbf{x})$ donne directement accès à la fonction d'onde des trois bosons (voir les articles pour plus de détails). La dérivation de la solution exacte de l'équation (3.10) est facilitée par le fait que l'opérateur \hat{L}_0 , n'impliquant aucune échelle de longueur, est homogène. Ainsi son action sur une fonction puissance donne à nouveau une fonction puissance. L'astuce pour résoudre l'équation (3.10) consiste donc à écrire sa solution comme une intégrale sur un contour de Barnes³ d'une fonction puissance où la puissance est la variable d'intégration. Une action de \hat{L}_0 correspond alors à un simple décalage dans le plan complexe du contour d'intégration qui peut être ramené à sa position initiale en l'absence de pôles. Nous avons calculé la solution de l'équation (3.10) et ainsi obtenu une formule exacte pour le taux de recombinaison à trois corps ($a > 0$) [31, 32] :

$$\alpha_{\text{rec}} = \frac{128\pi^2 (4\pi - 3\sqrt{3}) \hbar^2 a^4 \sin^2(\delta_1) \sinh^2(\pi s_0)}{\sinh^2(\pi s_0) m \sinh^2(\pi s_0) + \cos^2(\delta_1)}, \quad (3.12)$$

où $s_0 \simeq 1.00624$. La phase δ_1 est donnée par $\delta_1 = 2\pi\gamma + \pi/2 + s_0 \ln(R^*/a)$. Graphiquement la formule (3.12) prédit une oscillation [1] du taux de recombinaison en fonction de $\ln(R^*/a)$ avec des annulations pour $\delta_1 = 0, \pi$ et des maxima pour $\delta_1 \simeq \pm\pi/2$ pour lesquels $\alpha_{\text{rec}} \simeq 67.1177 \hbar^2 a^4/m$. La période des oscillations est fixée par le facteur d'échelle e^{π/s_0} .

Références : A. O. GOGOLIN, C. MORA, R. EGGER, *Analytical solution of the bosonic three-body problem*, Phys. Rev. Lett. **100**, 140404 (2008).

C. MORA, A. O. GOGOLIN, R. EGGER, *Exact solution of the three-boson problem at vanishing energy*, C. R. Physique **12**, 27-38 (2011).

3. le contour de Barnes dans le plan complexe suit simplement l'axe imaginaire avec une partie réelle légèrement positive.

3.4 Effet d'Efimov à quatre corps

3.4.1 Effet d'Efimov à N corps

Nous allons voir dans la discussion qui suit que la physique d'Efimov n'est en aucun cas restreinte au problème à trois corps mais qu'elle peut également surgir dans les problèmes à quatre, cinq, six corps, ou plus généralement à N corps [15]. Néanmoins, il faut aussitôt préciser que toute série d'états d'Efimov à N corps est déstabilisée par l'existence d'états d'Efimov impliquant un plus petit nombre d'atomes. En effet, un état lié efimovien de N atomes peut se dissocier en un état lié de plus basse énergie impliquant $m < N$ atomes accompagné des $N - m$ atomes libres restants. Ce canal de dissociation donne une largeur spectrale finie à l'état d'Efimov qui n'est alors plus un véritable état lié. En conséquence, l'existence des états liés d'Efimov à trois bosons exclut l'apparition de véritables états efimoviens impliquant quatre bosons ou plus.

Considérons le cas général de N atomes, fermions ou bosons, de masses $(m_i)_{i=1\dots N}$, pour lequel il n'existe pas d'effet d'Efimov impliquant un sous-ensemble de ces N atomes. On suppose, pour simplifier la discussion, que toutes les longueurs de diffusion divergent et on applique donc les conditions de Bethe-Peierls (3.1), pour toutes les paires d'atomes, aux états propres de l'hamiltonien sans interaction

$$H = \sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\mathbf{r}_i}. \quad (3.13)$$

C'est le modèle standard de portée nulle avec son *invariance d'échelle*. Après factorisation du mouvement du centre de masse, les conditions de Bethe-Peierls (3.1) (avec $1/a = 0$) avec l'hamiltonien (3.13) constituent un problème séparable en coordonnées hypersphériques [15]. On introduit l'hyperrayon $R = [\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{C})^2 / \bar{m}]^{1/2}$ où \mathbf{C} est la position du centre de masse et $\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i$ la masse moyenne des atomes. Les $3N - 4$ autres coordonnées sont notées Ω : ce sont les hyperangles. La fonction d'onde prend la forme factorisée

$$\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = R^{(5-3N)/2} F(R) f(\Omega). \quad (3.14)$$

Le problème le plus difficile est de déterminer la fonction $f(\Omega)$, état propre du Laplacien sur l'hypersphère vérifiant les conditions de contact de Bethe-Peierls ainsi que les conditions de symétrie bosonique et/ou fermionique. La valeur propre de ce problème⁴ est notée s^2 . La fonction $F(R)$ est alors simplement solution de l'équation

$$EF(R) = -\frac{\hbar^2}{2\bar{m}} \left(\partial_R^2 + \frac{1}{R} \partial_R \right) F(R) + \frac{\hbar^2 s^2}{2\bar{m}R^2} F(R). \quad (3.15)$$

et ne dépend ni des conditions de contact, ni de la statistique. L'équation (3.15) est une équation de Schrödinger effective à 2D dont le potentiel est en s^2/R^2 . Le monde est ici divisé en deux :

1. soit $s^2 > 0$ et le potentiel est répulsif. Il n'y a alors pas de pathologie et pas non plus d'états liés, c'est le cas non-efimovien.
2. soit $s^2 < 0$ et le potentiel est attractif. Le problème est pathologique lorsque $R \rightarrow 0$ (c'est l'*effondrement de Thomas* ou chute vers le centre [28]) et on obtient un continuum

4. l'absence d'effet d'Efimov lorsque tout sous-ensemble des N atomes se rencontre implique que le problème hyperangulaire est bien défini et ne présente pas de pathologie.

non-physique d'états liés. Cette pathologie est résolue en introduisant une condition aux limites supplémentaires, à savoir

$$F(R)|_{R \rightarrow 0} \propto \sin [s_0 \ln(R/\ell) + \varphi], \quad (3.16)$$

similaire à la condition de contact (3.2). On retrouve alors le spectre d'états géométrique caractéristique de la physique efimovienne,

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m} e^{-2\pi n/s_0}, \quad (3.17)$$

sauf qu'il s'agit ici d'états liés à N atomes.

C'est finalement la forme universelle de l'équation hyperradiale (3.15) qui conduit au résultat que, soit on a aucun état lié, soit on a une série géométrique d'états liés de type Efimov. De même, pathologie mathématique à distance nulle, brisure de l'invariance d'échelle à l'unitarité et états d'Efimov apparaissent toujours conjointement

3.4.2 Trois fermions et un atome plus léger

Avec L. Pricoupenko et Y. Castin, nous avons étudié le cas de trois fermions identiques de masse M en interaction résonante ($1/a = 0$) avec un atome, boson ou fermion, plus léger de masse m . Le problème de deux fermions identiques avec un atome plus léger donne un spectre d'Efimov au-delà d'une valeur critique du rapport des masses $\alpha = M/m > \alpha_c(2; 1) \simeq 13.607$ [33]. Ainsi, pour un plus petit rapport des masses, $\alpha < \alpha_c(2; 1)$, ce problème à trois corps ne développe pas de pathologie dans l'approche de portée nulle de Bethe-Peierls et l'invariance d'échelle est préservée. Nous nous sommes donc intéressés, pour notre problème à $3 + 1$ corps, à la région $\alpha < \alpha_c(2; 1)$ où, suivant notre discussion du 3.4.1, un état d'Efimov à quatre corps est susceptible d'apparaître sans effet d'Efimov à trois corps.

Comme précédemment, au 3.3, l'équation de Schrödinger initiale $H\psi = E\psi$ avec l'hamiltonien (3.13), habillée des conditions de contact (3.1), peut se ramener à une équation intégrale dépendant pour ce problème de deux vecteurs. En utilisant l'invariance du problème par rotation, on peut réduire cette dépendance à trois variables qui sont la norme de chacun des vecteurs ainsi que l'angle les séparant. Les considérations du 3.4.1 permettent de simplifier encore d'avantage le problème puisque la seule donnée importante est la valeur de s^2 qui indique ou non la présence d'états liés d'Efimov. s^2 ne dépendant pas de l'énergie propre E , on peut se restreindre à l'étude de la solution d'énergie nulle. Celle-ci a la particularité d'être invariante d'échelle, c'est-à-dire que la solution de l'équation hyperradiale (3.15) pour $E = 0$ est $F(R) = R^s$ tout simplement. En injectant cette propriété dans l'équation intégrale, on obtient un problème aux valeurs propres n'impliquant plus que deux variables (et donc simple à implémenter numériquement) et donnant directement accès à la valeur de s .

En calculant la valeur de s^2 en fonction du rapport de masse α , nous avons montré l'émergence d'états d'Efimov impliquant les quatre atomes pour un rapport de masse $\alpha(3; 1) < \alpha < \alpha(2; 1)$ avec $\alpha(3; 1) \simeq 13.384$.

Référence : Y. CASTIN, C. MORA, L. PRICOUPEENKO, *Four-body Efimov effect*, Phys. Rev. Lett. **105**, 223201 (2010).

Bibliographie

- [1] E. BRAATEN & H.-W. HAMMER, *Universality in few-body systems with large scattering length*, Phys. Rep. **428** (5-6), 259 (2006).
- [2] I. BLOCH, J. DALIBARD & W. ZWERGER, *Many-body physics with ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **80** (3), 885 (2008).
- [3] E. BRAATEN & A. NIETO, *Quantum corrections to the energy density of a homogeneous Bose gas*, Eur. Phys. J. B **11** (1), 143 (1999).
- [4] P. F. BEDAQUE, H.-W. HAMMER & U. VAN KOLCK, *Renormalization of the Three-Body System with Short-Range Interactions*, Phys. Rev. Lett. **82** (3), 463 (1999).
- [5] C. MORA, A. KOMNIK, R. EGGER & A. O. GOGOLIN, *Four-Body Problem and BEC-BCS Crossover in a Quasi-One-Dimensional Cold Fermion Gas*, Phys. Rev. Lett. **95** (8), 080403 (2005).
- [6] E. NIELSEN & J. H. MACEK, *Low-energy recombination of identical bosons by three-body collisions*, Phys. Rev. Lett. **83** (8), 1566 (1999).
- [7] B. D. ESRY, C. H. GREENE & J. P. BURKE JR, *Recombination of three atoms in the ultracold limit*, Phys. Rev. Lett. **83** (9), 1751 (1999).
- [8] T. KÖHLER, K. GÖRAL & P. S. JULIENNE, *Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances*, Rev. Mod. Phys. **78** (4), 1311 (2006).
- [9] J. P. D'INCAO & B. D. ESRY, *Scattering Length Scaling Laws for Ultracold Three-Body Collisions*, Phys. Rev. Lett. **94** (21), 213201 (2005).
- [10] L. PLATTER, *Low-Energy Universality in Atomic and Nuclear Physics*, Few-Body Syst. **46** (3), 139 (2009).
- [11] G. V. SKORNIKOV & K. A. TER-MARTIROSIAN, *The Three-Body Problem with Short-Range Forces. Scattering of Low-Energy Neutrons by Deuterons*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **31**, 775 (1956), [Sov. Phys. JETP 4, 648 (1957)].
- [12] D. S. PETROV, *Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction*, Phys. Rev. A **67** (1), 010703 (2003).
- [13] C. MORA, R. EGGER, A. O. GOGOLIN & A. KOMNIK, *Atom-Dimer Scattering for Confined Ultracold Fermion Gases*, Phys. Rev. Lett. **93** (17), 170403 (2004).
- [14] V. EFIMOV, *Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles*, Yad. Fiz **12**, 1080 (1970), [Sov. J. Nucl. Phys 12, 589 (1971)].
- [15] FÉLIX WERNER & YVAN CASTIN, *Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications*, Phys. Rev. A **74**, 053604 (2006).
- [16] G. S. DANILOV, *On the Three-Body Problem with Short-Range Forces*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 498 (1961), [Sov. Phys. JETP 13, 349 (1961)].
- [17] R. A. MINLOS & L. D. FADDEEV, *Comment on the Problem of Three Particles with Point Interactions*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 1850 (1961), [Sov. Phys. JETP 14, 1315 (1962)].
- [18] R. A. MINLOS & L. D. FADDEEV, *On the point interaction for a three-particle system in quantum mechanics*, Doklady Akademii Nauk SSR **141**, 1335 (1961), [Sov. Phys. Doklady 6, 1072 (1962)].

- [19] T. KRAEMER, M. MARK, P. WALDBURGER, J. G. DANZL, C. CHIN, B. ENGESER, A. D. LANGE, K. PILCH, A. JAAKKOLA, H. C. NÄGERL & R. GRIMM, *Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms*, Nature **440** (7082), 315 (2006).
- [20] S. KNOOP, F. FERLAINO, M. MARK, M. BERNINGER, H. SCHÖBEL, H. C. NÄGERL & R. GRIMM, *Observation of an Efimov-like trimer resonance in ultracold atom-dimer scattering*, Nature Physics **5** (3), 227 (2009).
- [21] M. ZACCANTI, B. DEISSLER, C. D'ERRICO, M. FATTORI, M. JONA-LASINIO, S. MÜLLER, G. ROATI, M. INGUSCIO & G. MODUGNO, *Observation of an Efimov spectrum in an atomic system*, Nature Physics **5** (8), 586 (2009).
- [22] G. BARONTINI, C. WEBER, F. RABATTI, J. CATANI, G. THALHAMMER, M. INGUSCIO & F. MINARDI, *Observation of Heteronuclear Atomic Efimov Resonances*, Phys. Rev. Lett. **103** (4), 043201 (2009).
- [23] N. GROSS, Z. SHOTAN, S. KOKKELMANS & L. KHAYKOVICH, *Observation of Universality in Ultracold ^7Li Three-Body Recombination*, Phys. Rev. Lett. **103** (16), 163202 (2009).
- [24] T. B. OTTENSTEIN, T. LOMPE, M. KOHNEN, A. N. WENZ & S. JOCHIM, *Collisional Stability of a Three-Component Degenerate Fermi Gas*, Phys. Rev. Lett. **101** (20), 203202 (2008).
- [25] J. H. HUCKANS, J. R. WILLIAMS, E. L. HAZLETT, R. W. STITES & K. M. O'HARA, *Three-Body Recombination in a Three-State Fermi Gas with Widely Tunable Interactions*, Phys. Rev. Lett. **102** (16), 165302 (2009).
- [26] S.E. POLLACK, D. DRIES & R.G. HULET, *Universality in Three- and Four-Body Bound States of Ultracold Atoms*, Science **326** (5960), 1683 (2009).
- [27] M. JONA-LASINIO, L. PRICOUPENKO & Y. CASTIN, *Three fully polarized fermions close to a p -wave Feshbach resonance*, Phys. Rev. A **77** (4), 043611 (2008).
- [28] L. H. THOMAS, *The Interaction Between a Neutron and a Proton and the Structure of ^3H* , Phys. Rev. **47** (12), 903 (1935).
- [29] J. H. MACEK, S. OVCHINNIKOV & G. GASANEO, *Solution for boson-diboson elastic scattering at zero energy in the shape-independent model*, Phys. Rev. A **72** (3), 032709 (2005).
- [30] J. P. D'INCAO & B. D. ESRY, *Enhancing the observability of the Efimov effect in ultracold atomic gas mixtures*, Phys. Rev. A **73** (3), 30703 (2006).
- [31] J. H. MACEK, S. YU OVCHINNIKOV & G. GASANEO, *Exact solution for three particles interacting via zero-range potentials*, Phys. Rev. A **73** (3), 032704 (2006).
- [32] K. HELFRICH, H.-W. HAMMER & D. S. PETROV, *Three-body problem in heteronuclear mixtures with resonant interspecies interaction*, Phys. Rev. A **81** (4), 042715 (2010).
- [33] V. EFIMOV, *Energy levels of three resonantly interacting particles*, Nucl. Phys. A **210** (1), 157 (1973).

Chapitre 4

Polarons fermioniques

4.1 Contexte

L'appariement des électrons de spin opposés, c'est-à-dire la formation des paires de Cooper [1], est au coeur de la théorie BCS proposée par Bardeen, Cooper et Schrieffer [2] pour expliquer le phénomène de supraconductivité avec le succès que l'on sait. L'obtention récente, à partir de 2003, de superfluides fermioniques [3–6] dans des gaz d'atomes ultra-froids (${}^6\text{Li}$ et ${}^{40}\text{K}$) a permis de confirmer ce mécanisme d'appariement dans une situation où l'on peut faire varier expérimentalement la longueur de diffusion a et donc la force et le signe des interactions inter-atomiques. En faisant varier le rapport $1/k_F a$, les expériences ont ainsi mis en évidence un crossover continu [7, 8] entre un superfluide fermionique de type BCS pour $1/k_F a < 1$ (régime attractif ou fortement répulsif incluant la limite unitaire) et un condensat de Bose-Einstein de dimères fortement liés pour $1/k_F a \gg 1$ (régime faiblement répulsif). Dans ce scénario, les paires de Cooper enchevêtrées du régime BCS se transforment continûment en des dimères presque ponctuels, de taille a , dans le régime BEC.

De par sa structure en paires de Cooper, un superfluide BCS possède le même nombre de fermions dans les deux états de spin. Il est par conséquent difficilement polarisable puisque briser une paire coûte une énergie Δ (le gap supra). Cette propriété a conduit Clogston [9] et Chandrasekhar [10] à prédire que l'état BCS n'est absolument pas modifié, et donc que la polarisation reste nulle, tant que la différence de potentiels chimiques entre les deux espèces¹ $\bar{\mu} = (\mu_1 - \mu_2)/2$ reste plus petite que le gap Δ . L'état du système au-delà de la polarisation critique reste un sujet assez ouvert avec la prédiction de phases exotiques comme les phases de Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) [11, 12].

Dans les gaz d'atomes froids, les expériences de polarisation du superfluide BCS, où l'on crée un déséquilibre entre les populations des deux états de spin, ont démontré [13–17] l'existence de trois phases distinctes lorsqu'on varie le rapport μ_2/μ_1 :

- (I) la phase BCS superfluide [15] non-polarisée, avec $n_1 = n_2$ même lorsque $\mu_1 > \mu_2$.
- (II) une phase normale partiellement polarisée [18] avec $n_1 > n_2$ mais $n_2 \neq 0$.
- (III) une phase normale complètement polarisée, $n_2 = 0$.

Ces trois phases apparaissent dans la figure 4.2. La transition de Clogston et Chandrasekhar est du premier ordre et sépare les phases (I) et (II). Expérimentalement, elle intervient lorsque la différence de potentiel chimique $\bar{\mu}$ et le gap Δ sont égaux [17], en accord avec l'argument de Clogston et Chandrasekhar. La transition entre les phases (II) et (III) est du second ordre car

1. dans ce qui suit, on note 1 l'espèce majoritaire et 2 l'espèce minoritaire.

l'espèce minoritaire disparaît continûment. À l'unitarité $1/a = 0$, les mesures expérimentales localisent la transition (I)-(II) à $\mu_2/\mu_1 \simeq 0.065$ et la transition (II)-(III) à $\mu_2/\mu_1 \simeq -0.6$. Dans les expériences pour lesquelles l'approximation de densité locale (LDA) est valable, ce qui est le cas le plus souvent, le rapport local μ_2/μ_1 diminue lorsque la distance au centre du piège augmente. Les différentes phases (I), (II), (III) sont ainsi séparées spatialement dans le piège et forment des croûtes concentriques. En présence d'un déséquilibre global des populations, le coeur superfluide non-polarisé est entouré par la partie normale polarisée du gaz [14,19].

L'existence de la phase (II) a d'abord été controversée, car elle n'était pas observée dans les expériences du groupe de Rice [13] contrairement aux expériences du MIT [14,16] ou de l'ENS [17]. Une transition directe entre les phases (I) et (III) est en effet toujours envisageable. On peut cependant démontrer d'un point de vue théorique [20] que la phase (II) s'insère entre les phases (I) et (III). La phase (III) est un gaz de Fermi idéal sans interaction² dont l'énergie est connue. À partir de calculs Monte-Carlo donnant l'énergie de la phase (I), on trouve que l'éventuelle transition (I)-(III) est située à $\mu_2/\mu_1 \simeq -0.1$. Déterminer la position de la transition (II)-(III) revient à résoudre un problème à N+1 corps. En effet, pour passer de la phase (III) à la phase (II), on commence par ajouter un unique fermion minoritaire à la mer de fermions majoritaires. Le fermion minoritaire habillé [21] par son interaction avec la mer de Fermi est appelé *polaron* [22]. La transition a donc lieu lorsque cet ajout est énergétiquement favorable, c'est-à-dire lorsque le potentiel chimique μ_2 dépasse l'énergie du polaron μ_P . À l'unitarité, l'énergie du polaron doit être, par analyse dimensionnelle, de la forme $\mu_P = A \mu_1$, où A est un nombre sans dimension. On va voir au 4.2 un raisonnement variationnel simple montrant que $A < -0.6$, ce qui achève de prouver l'existence de la phase (II).

Référence : F. CHEVY, C. MORA, *Ultra-cold Polarized Fermi Gases*, Rep. Prog. Phys. **73**, 112401 (2010).

4.2 Problème à N+1 corps : le polaron

Les motivations expérimentales développées au 4.1 nous conduisent à nous intéresser au problème académique du polaron, un *problème à N+1 corps* [20], où un atome unique interagit avec une mer de Fermi. Bosc ou fermion, l'atome doit seulement être distinct des fermions composant la mer de Fermi. À l'unitarité, ce problème reste non perturbatif et il faudrait en principe resommer complètement la série des perturbations pour obtenir des résultats quantitatifs. Toutefois, le polaron a la particularité d'être très bien décrit par une approche variationnelle simple où l'impureté (l'atome unique) induit uniquement une excitation particule-trou dans la mer de Fermi. La fonction d'onde variationnelle, introduite par F. Chevy [20], prend ainsi la forme suivante

$$|\psi\rangle = \phi_0 |FS; \mathbf{k}\rangle + \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{q}} \phi_{\mathbf{k}', \mathbf{q}} |\mathbf{k}', \mathbf{q}; \mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'\rangle \quad (4.1)$$

où les coefficients ϕ_0 et $\phi_{\mathbf{k}', \mathbf{q}}$ sont déterminés par minimisation de l'énergie [23]. $|FS; \mathbf{k}\rangle$ désigne la mer de Fermi à laquelle s'ajoute l'impureté d'impulsion \mathbf{k} . $|\mathbf{k}', \mathbf{q}; \mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'\rangle$ désigne la mer de Fermi perturbée par une excitation particule-trou : $q < k_F$ est l'impulsion du trou excité en $k' > k_F$. L'impulsion de l'impureté est décalée de $\mathbf{q} - \mathbf{k}'$ pour satisfaire la conservation de l'impulsion. Conservée par les interactions, l'impulsion totale de l'état (4.1) est donc \mathbf{k} . Le

² on rappelle que les fermions de même spin n'interagissent pas entre eux en onde s. La longueur de diffusion a caractérise les interactions entre les fermions de spins différents.

calcul de l'énergie $E_{\mathbf{k}}$ de cet état, puis sa minimisation, conduit à la formule suivante³

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i} + \sum_{q < k_F} \left[\frac{m_r}{2\pi\hbar^2 a} - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{2m_r}{\hbar^2 k'^2} + \sum_{k' > k_F} \frac{1}{\varepsilon_k + \varepsilon_{i, \mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k}'} - \varepsilon_q - E_{\mathbf{k}}} \right]^{-1} \quad (4.2)$$

où $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, $\varepsilon_{i,k} = \hbar^2 k^2 / 2m_i$, m est la masse des fermions majoritaires, m_i la masse de l'impureté et $m_r = mm_i / (m + m_i)$ la masse réduite. À faible vecteur d'onde, on obtient le développement de l'énergie

$$E_{\mathbf{k}} = \mu_P + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \dots \quad (4.3)$$

avec, à l'unitarité $1/a = 0$ et pour des masses égales $m = m_i$, $\mu_P = A\mu_1$ avec $\mu_1 = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ et

$$A = -0.6066, \quad m^*/m = 1.17. \quad (4.4)$$

Bien qu'extraits d'une approche variationnelle, ces résultats sont en très bon accord avec un calcul de Monte-Carlo diagrammatique [22] qui donne $A = -0.61(1)$ et $m^*/m = 1.20(1)$. Cette coïncidence s'explique par la probabilité relativement faible d'exciter une paire particule-trou : à peu près 25% dans ce calcul variationnel. Ceci justifie *a posteriori* le développement en nombre d'excitations particule-trou. Un calcul variationnel avec deux excitations particule-trou [24] donne des résultats encore plus proches du Monte-Carlo, presque exacts quantitativement.

Le polaron et son énergie (4.3) est donc un très bon exemple de quasi-particule. Il est formé par l'impureté habillée par la mer de Fermi. Son énergie au repos est μ_P et sa masse effective m^* diffère de la masse initiale de l'impureté.

4.3 Gaz dilué de polarons

Supposons maintenant qu'on entre plus à l'intérieur de la phase (II) en venant de la phase (III), on se trouve alors dans une phase normale fortement polarisée, avec $n_2 \ll n_1$, qu'on peut aussi voir comme un gaz de polarons dilués. Avec F. Chevy, nous avons obtenu une formule exacte pour l'équation d'état de la phase (II) dans la limite diluée $n_2 \ll n_1$. Précédant notre travail, un calcul Monte-Carlo [21, 25] de l'énergie d'un gaz de fermions de spin 1/2 fortement polarisé (dans la phase (II)) a pu être approximé par la loi de Landau-Pomeranchuk

$$\frac{E}{N_1} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \left(1 + \frac{5(\mu_P/\mu_1)}{3} x + \frac{m}{m^*} x^{5/3} + Fx^2 \right), \quad (4.5)$$

où $x = n_2/n_1 \ll 1$ et $\mu_1 = \hbar^2 k_F^2 / 2m$. On retrouve pour $x = 0$ l'énergie d'un gaz de Fermi idéal. Les termes suivants à l'intérieur des parenthèses décrivent le gaz de polarons fermioniques en interaction : le second terme provient des énergies au repos, le troisième est l'énergie d'une mer de Fermi de densité n_2 , conséquence de la statistique de Fermi à laquelle obéissent les polarons. Le dernier terme semble impliquer des interactions entre polarons. Numériquement, l'estimation $F \sim 0.14$ a été obtenue à l'unitarité [25].

4.3.1 Argument heuristique

Une approche heuristique permet d'obtenir une formule exacte pour le coefficient F en fonction des propriétés du polaron. Nous verrons au 4.3.2 que cette formule peut être démontrée

3. le zéro d'énergie correspond à la mer de Fermi majoritaire sans impureté.

dans le cadre d'une approche plus rigoureuse. On suppose pour commencer que la mer de Fermi majoritaire est couplée à un réservoir dont le potentiel chimique μ_1 est fixé. L'ajout d'un fermion minoritaire implique alors un déplacement de fermions majoritaires depuis le réservoir vers la mer de Fermi pour habiller l'impureté. Ce nombre de fermions déplacés est donné par [26]

$$\nu = \left(\frac{\partial n_1}{\partial n_2} \right)_{\mu_1} = - \frac{\partial \mu_2 / \partial n_1}{\partial \mu_1 / \partial n_1} \quad (4.6)$$

où l'on a utilisé la symétrie de la matrice de compressibilité $\partial \mu_i / \partial n_j$. À la limite unitaire, le résultat est simplement $\nu = -A = |A|$. $|A| \sim 0.6$ est donc le nombre moyen de fermions majoritaires impliqués dans un polaron.

À partir de là, on écrit l'énergie du gaz dilué de polarons sous la forme

$$E(n_1, n_2) = E(n_1, 0) + \int_0^{n_2} \mu_2(n_1, n'_2) dn'_2, \quad (4.7)$$

puis on admet que le potentiel chimique $\mu_2(n_1, n'_2)$ est donné par l'énergie d'un polaron unique μ_P calculé avec la densité de fermions majoritaires $n_1 - \nu n_2$. On prend ainsi en compte la déplétion de l'espèce majoritaire due à la formation des polarons. Ce changement de densité implique en retour une correction à l'énergie des polarons et donc une interaction effective entre polarons. Après un développement de $\mu_P(n_1 - \nu n_2)$ au premier ordre en n_2 et une intégration sur la variable n_2 , l'équation (4.7) redonne la loi de Landau-Pomeranchuk (4.5) avec

$$F = \frac{5}{9} \left(\frac{d\mu_P}{d\mu_1} \right)^2. \quad (4.8)$$

Cela donne $F = 5A^2/9 \simeq 0.2$ à l'unitarité, à comparer à la valeur $F \sim 0.14$ extraite des calculs Monte-Carlo. En utilisant l'approche variationnelle décrite au 4.2, dont on sait qu'elle donne des résultats quantitatifs même à l'unitarité, on peut déterminer μ_P en fonction de $k_F a$ puis calculer F à l'aide de la formule exacte (4.8). Le résultat est comparé figure 4.1 aux ajustements sur des données Monte-Carlo [27]. L'accord est plutôt bon, les deux prédictions présentant un maximum autour de $1/k_F a \sim 0.5$.

4.3.2 Calcul complet

L'approche heuristique du 4.3.1 peut être justifiée plus rigoureusement. On utilise pour cela le fait que la position de la surface de Fermi correspond à un pôle dans la fonction de Green,

$$\frac{\hbar^2 k_{F,2}^2}{2m} - \mu_2 + \Sigma_2(\omega = 0, \mathbf{k}_{F,2}; \mu_1, \mu_2) = 0. \quad (4.9)$$

Par ailleurs, la règle de somme de Luttinger implique que la relation $k_{F,2} = (6\pi^2 n_2)^{1/3}$ entre densité n_2 et vecteur de Fermi $k_{F,2}$ est indépendante des interactions [28]. On obtient ainsi une relation implicite reliant n_2 , μ_2 et μ_1 permettant de déterminer l'équation d'état du gaz. On fait ensuite le lien avec la physique du polaron par continuité, en notant que μ_2 et μ_P coïncident lorsque $k_{F,2}$ s'annule. Un développement⁴ de l'équation (4.9) en puissances de $k_{F,2}^2$ et $\mu_2 - \mu_P$ donne le résultat

$$\mu_2 = \mu_P + \frac{\hbar^2 k_{F,2}^2}{2m^*} + \mathcal{O}(k_{F,2}^4), \quad (4.10)$$

4. le développement effectué ici requiert l'analyticité de la self-énergie Σ_2 ce qui n'est généralement pas le cas. Toutefois dans notre cas, le fait que le potentiel chimique μ_2 soit négatif au voisinage de μ_P conduit à l'absence de pôles dans le développement diagrammatique de Σ_2 ce qui garantit son analyticité.

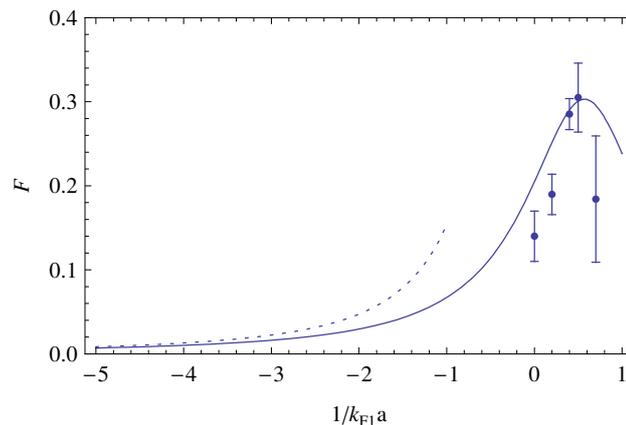


FIGURE 4.1: Variations de F (ligne pleine) le long du crossover BEC-BCS comparées aux résultats de simulations Monte-Carlo. La ligne en traits tiretés provient d'un calcul perturbatif au troisième ordre en $k_F a$. Les points Monte-Carlo [27] sont obtenus à partir de l'ajustement des données Monte-Carlo à la loi de Landau-Pomeranchuk (4.5).

qui, combiné aux relations de Gibbs-Duhem $n_i = \partial_{\mu_i} P$, conduit à l'équation d'état

$$P = \frac{1}{15\pi^2} \left[\left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu_1^{5/2} + \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (\mu_2 - \mu_p)^{5/2} \right]. \quad (4.11)$$

Ce résultat est valable pour un gaz de polarons dilué, les corrections étant d'ordre $(\mu_2 - \mu_p)^{7/2}$. Physiquement, l'équation d'état (4.11) décrit un mélange de deux gaz idéaux de Fermi, un pour l'espèce majoritaire, l'autre pour le gaz de polarons. Dans cette approche grand-canonique (et à cet ordre d'approximation), les polarons n'interagissent pas. Le lecteur sera donc peut-être surpris d'apprendre que l'énergie, dans l'ensemble canonique, calculée à partir de la pression (4.11), est exactement la loi de Landau-Pomeranchuk (4.5) pour $n_2/n_1 \ll 1$, où F est donnée par la relation (4.8) établie heuristiquement au 4.3.1.

Le fait que la présence d'interactions entre polarons dépende de l'ensemble considéré se comprend à partir de l'image physique développée au 4.3.1. L'effet de déplétion de l'espèce majoritaire dû à la formation des polarons n'intervient pas dans l'ensemble grand-canonique où c'est le potentiel chimique μ_1 qui est fixé et non la densité n_1 .

De façon assez surprenante le développement (4.11), valable en principe pour un gaz de fermions fortement polarisé, se révèle en fait quantitatif jusqu'à des concentrations élevées de polarons. Les mesures expérimentales collent même à l'équation (4.11) jusqu'à la transition entre les phases (II) et (I), comme on le voit sur la figure 4.2, et on peut ainsi retrouver analytiquement la position de la transition (I)-(II) $\mu_2/\mu_1 \sim 0.065$.

Référence : C. MORA, F. CHEVY, *The normal phase of an imbalanced Fermi gas*, Phys. Rev. Lett. **104**, 230402 (2010).

4.4 Boson composite dans une mer de Fermi

La physique du polaron, discutée aux 4.2 et 4.3, est pertinente pour des longueurs de diffusion a négatives ou au voisinage de l'unitarité lorsque $k_F |a| \gg 1$. Cela correspond en gros au domaine des abscisses de la figure 4.1. L'état fondamental du problème à $N+1$ corps change

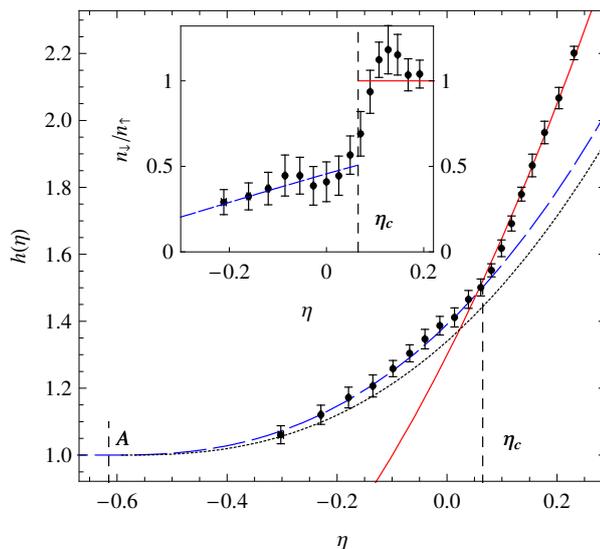


FIGURE 4.2: Équation d'état d'un gaz de fermions unitaire polarisé dans l'ensemble grand-canonique. $h(\eta = \mu_2/\mu_1) = P(\mu_1, \mu_2)/P_0(\mu_1)$ est le rapport entre la pression du gaz et celle d'un gaz idéal comprenant une seule espèce de spin. La phase normale partiellement polarisée (II) est favorisée pour $\eta = [A, \eta_c] \sim [-0.6, 0.065]$, la phase superfluide (I) pour $\eta > \eta_c$ et la phase normale complètement polarisée (III) pour $\eta < A$. La ligne en traits tiretés représente notre prédiction (4.11) et la ligne en pointillés celle d'un calcul Monte-Carlo [21]. La ligne pleine (rouge) correspond à l'énergie du gaz unitaire superfluide non-polarisé (I) et ne dépend donc que d'un seul paramètre. Insert : ratios n_2/n_1 entre les densités calculés à partir des identités $n_i = \partial_{\mu_i} P$ et comparés aux données expérimentales. Les données expérimentales de cette figure, représentées par des points noirs avec leurs barres d'erreur, sont extraites de la référence [17].

de structure lorsque la longueur de diffusion devient positive et petite, $k_F a \ll 1$. L'impureté commence par capturer un des fermions majoritaires pour former un dimère fortement lié dont l'énergie de liaison \hbar^2/ma^2 excède largement l'énergie de Fermi ε_F . En conséquence, la mer de Fermi modifie de façon perturbative le dimère. Précisons que les fermions majoritaires sont indiscernables et que l'impureté peut donc échanger son partenaire avec un fermion de la mer de Fermi : le dimère est un boson composite. Toutefois, le calcul de l'énergie ne fait apparaître cet aspect composite qu'au troisième ordre non nul en perturbation. On s'attend à ce que la première correction à l'énergie du dimère soit le terme de champ moyen $g_{\text{ad}} n_1$, proportionnel à la densité de fermions majoritaires, où la constante de couplage $g_{\text{ad}} = 3\pi\hbar^2 a_{\text{ad}}/m$ fait intervenir la longueur de diffusion atome-dimère $a_{\text{ad}} = 1.1786 a$.

Nous avons donc, pour $k_F a \ll 1$, un état fondamental où l'impureté est un boson composite et non un polaron. Un calcul diagrammatique Monte-Carlo [22] prédit que la transition entre le polaron et la molécule composite est discontinue (du premier ordre) et intervient pour $1/k_F a \simeq 0.91(2)$, en plutôt bon accord avec des mesures expérimentales radio-fréquences [29].

Avec F. Chevy, nous nous sommes intéressés à la description théorique de la molécule habillée par la mer de Fermi. Nous avons tout d'abord calculé le développement de son énergie en puissances de $x_F = k_F a$ jusqu'au premier ordre indiquant sa nature composite. Le problème du développement de l'énergie du dimère composite n'est *a priori* pas simple car la présence du problème à trois corps implique des resommations diagrammatiques. Nous avons donc choisi de partir d'une approche variationnelle où la fonction d'onde du dimère habillé inclut les excitations de zéro, une ou deux paire(s) particule-trou. L'hamiltonien de départ est par ailleurs

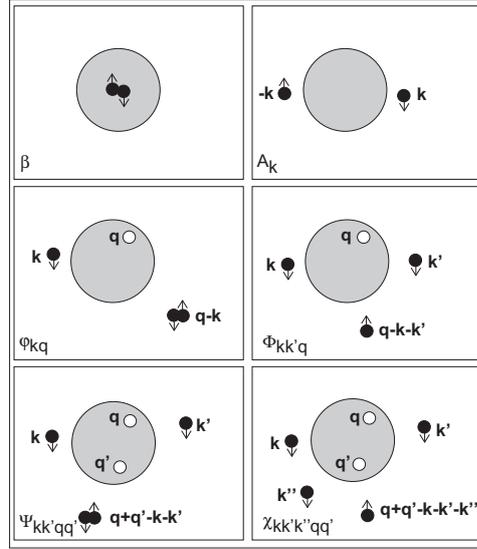


FIGURE 4.3: Notre fonction d'onde variationnelle n'inclut qu'un nombre restreint d'excitations particule-trou : zéro pour la première ligne, puis un et deux pour la seconde et la troisième ligne. Les deux colonnes correspondent au canal occupé, fermé ou ouvert, dans le modèle à deux canaux.

un modèle à deux canaux, le même qu'au 3.3, où l'interaction entre fermions est médiée par un boson ponctuel décrivant le canal fermé. La fonction d'onde variationnelle est représentée schématiquement figure 4.3.

L'intérêt de cette approche par fonction d'onde, par contraste avec une approche diagrammatique [30], est que les processus à trois corps sont automatiquement resommés. On applique ensuite aux équations issues du problème variationnel le développement perturbatif⁵ en x_F . Le résultat obtenu pour l'énergie est

$$E = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \left(1 - \frac{x_F^3 \tilde{a}_{ad}}{2\pi} - \frac{2x_F^4 \tilde{a}_{ad}^2}{\pi^2} (\ln 2 - 3/8) + 2x_F^5 \alpha_3 + \dots \right), \quad (4.12)$$

avec $\tilde{a}_{ad} = a_{ad}/a \sim 1.1786$ et $\alpha_3 \simeq 0.0637$ est un coefficient numérique. Le premier terme à l'intérieur de la parenthèse correspond à l'énergie du dimère seul, les deux suivants⁶ à l'excitation d'une unique paire particule-trou, le quatrième enfin à l'excitation de deux paires particule-trou. Il est utile de comparer ce résultat à l'énergie d'un boson non-composite (de taille nulle) plongé dans une mer de Fermi. On retrouve alors exactement l'équation (4.12), dont l'énergie du dimère $-\hbar^2/ma^2$ a été soustraite et où a_{ad} désigne la longueur de diffusion fermion-boson, mais avec $\alpha_3 \simeq 0.00025 \tilde{a}_{ad}^3$ au lieu de $\alpha_3 \simeq 0.0637$. Cette différence dans le dernier terme révèle l'aspect composite de la molécule.

Nous avons aussi déterminé l'énergie de la molécule habillée par une approche purement variationnelle [31] incluant une excitation particule-trou tout au plus. Dans cette approche, les équations obtenues ne sont pas développées en x_F mais résolues exactement. On n'a pas pris en compte les excitations à deux paires particule-trou pour rendre le problème tractable nu-

5. précisons que, pour ce problème comme pour le polaron, le développement en puissances de x_F coïncide avec le développement en nombres d'excitations particule-trou. Étendre l'espace variationnel à trois excitations particule-trou ou plus ne fait que rajouter des contributions d'ordres supérieurs en x_F à l'énergie. Ainsi les coefficients du développement perturbatif (4.12) obtenus sont-ils *exacts*, même si le point de départ du calcul est variationnel.

6. le second terme se réécrit comme $g_{ad}n_1$.

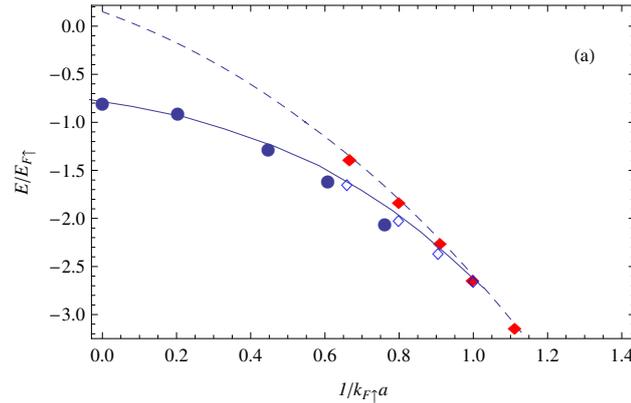


FIGURE 4.4: Comparaison entre les énergies des états polaron (l'impureté est un fermion) et molécule (l'impureté est un boson composite). Ligne pleine (tiretée) : calcul variationnel de l'énergie pour le polaron (molécule). Cercles pleins : résultats expérimentaux du MIT [29]. Diamants pleins (vides) : calculs Monte-Carlo diagrammatiques [22] pour la molécule (le polaron).

mériquement. Le très bon accord entre nos résultats, les calculs Monte-Carlo diagrammatiques et les mesures expérimentales est illustré figure (4.4). De façon identique au cas du polaron, la molécule semble ainsi très bien se prêter à une description théorique variationnelle.

Référence : C. MORA, F. CHEVY, *Ground state of a tightly bound composite dimer immersed in a Fermi sea*, Phys. Rev. A **80**, 033607 (2009).

Bibliographie

- [1] L.N. COOPER, *Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas*, Phys. Rev. **104** (4), 1189 (1956).
- [2] J. BARDEEN, L.N. COOPER & J.R. SCHRIEFFER, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108** (5), 1175 (1957).
- [3] S. JOCHIM, M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, G. HENDL, S. RIEDL, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG & R. GRIMM, *Bose-Einstein condensation of molecules*, Science **302** (5653), 2101 (2003).
- [4] M. GREINER, C.A. REGAL & D.S. JIN, *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*, Nature **426** (6966), 537 (2003).
- [5] M.W. ZWIERLEIN, C.A. STAN, C.H. SCHUNCK, S.M.F. RAUPACH, S. GUPTA, Z. HADZIBABIC & W. KETTERLE, *Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules*, Phys. Rev. Lett. **91** (25), 250401 (2003).
- [6] T. BOURDEL, L. KHAYKOVICH, J. CUBIZOLLES, J. ZHANG, F. CHEVY, M. TEICHMANN, L. TARRUELL, S.J.J.M.F. KOKKELMANS & C. SALOMON, *Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6*, Phys. Rev. Lett. **93** (5), 050401 (2004).
- [7] A.J. LEGGETT, *Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems*, J. Phys. C. **41** (4), 7 (1980).
- [8] P. NOZIERES & S. SCHMITT-RINK, *Bose condensation in an attractive fermion gas : From weak to strong coupling superconductivity*, J. Low Temp. Phys. **59** (3), 195 (1985).

- [9] A.M. CLOGSTON, *Upper limit for the critical field in hard superconductors*, Phys. Rev. Lett. **9** (6), 266 (1962).
- [10] B.S. CHANDRASEKHAR, *A note on the maximum critical field of high-field superconductors*, App. Phys. Lett. **1** (1), 7 (1962).
- [11] P. FULDE & R.A. FERRELL, *Superconductivity in a strong spin-exchange field*, Phys. Rev **135**, A550 (1964).
- [12] A.I. LARKIN & Y.N. OVCHINNIKOV, *Nonuniform state of superconductors*, Zh. Eksp. Teor. Fiz **47**, 1136 (1964).
- [13] G.B. PARTRIDGE, W. LI, R.I. KAMAR, Y. LIAO & R.G. HULET, *Pairing and phase separation in a polarized Fermi gas*, Science **311** (5760), 503 (2006).
- [14] Y. SHIN, M.W. ZWIERLEIN, C.H. SCHUNCK, A. SCHIROTZEK & W. KETTERLE, *Observation of phase separation in a strongly interacting imbalanced Fermi gas*, Phys. Rev. Lett. **97** (3), 030401 (2006).
- [15] M.W. ZWIERLEIN, A. SCHIROTZEK, C.H. SCHUNCK & W. KETTERLE, *Fermionic superfluidity with imbalanced spin populations*, Science **311** (5760), 492 (2006).
- [16] Y. SHIN, C.H. SCHUNCK, A. SCHIROTZEK & W. KETTERLE, *Phase diagram of a two-component Fermi gas with resonant interactions*, Nature **451** (4), 689 (2008).
- [17] S. NASCIBENE, N. NAVON, K. JIANG, F. CHEVY & C. SALOMON, *Exploring the Thermodynamics of a Universal Fermi Gas*, Nature **463**, 1057 (2010).
- [18] C.H. SCHUNCK, Y. SHIN, A. SCHIROTZEK, M.W. ZWIERLEIN & W. KETTERLE, *Pairing without superfluidity : The ground state of an imbalanced Fermi mixture*, Science **316** (5826), 867 (2007).
- [19] G. B. PARTRIDGE, W. LI, Y. A. LIAO, R. G. HULET, M. HAQUE & H. T. C. STOOFF, *Deformation of a trapped Fermi gas with unequal spin populations*, Phys. Rev. Lett. **97** (19), 190407 (2006).
- [20] F. CHEVY, *Universal phase diagram of a strongly interacting Fermi gas with unbalanced spin populations*, Phys. Rev. A **74** (6), 063628 (2006).
- [21] C. LOBO, A. RECATI, S. GIORGINI & S. STRINGARI, *Normal state of a polarized Fermi gas at unitarity*, Phys. Rev. Lett. **97** (20), 200403 (2006).
- [22] N. PROKOF'EV & B. SVISTUNOV, *Fermi-polaron problem : Diagrammatic Monte Carlo method for divergent sign-alternating series*, Phys. Rev. B **77** (2), 020408 (2008).
- [23] R. COMBESCOT, A. RECATI, C. LOBO & F. CHEVY, *Normal state of highly polarized Fermi gases : simple many-body approaches*, Phys. Rev. Lett. **98** (18), 180402 (2007).
- [24] R. COMBESCOT & S. GIRAUD, *Normal state of highly polarized Fermi gases : full many-body treatment.*, Phys. Rev. Lett. **101** (5), 050404 (2008).
- [25] S. PILATI & S. GIORGINI, *Phase separation in a polarized Fermi gas at zero temperature*, Phys. Rev. Lett. **100** (3), 030401 (2008).
- [26] ZHENHUA YU, SASCHA ZÖLLNER & C. J. PETHICK, *Comment on "Normal Phase of an Imbalanced Fermi Gas"*, Phys. Rev. Lett. **105**, 188901 (2010).
- [27] G. BERTAINA & S. GIORGINI, *Density profiles of polarized Fermi gases confined in harmonic traps*, Phys. Rev. A **79** (1) (2009).
- [28] JM LUTTINGER & J. WARD, *Ground-state energy of a many-fermion system. II*, Phys. Rev. **118** (5), 1417 (1960).

-
- [29] A. SCHIROTZEK, C-H WU, A SOMMER & M.W ZWIERLEIN, *Observation of Fermi Polarons in a Tunable Fermi Liquid of Ultracold Atoms*, Phys. Rev. Lett. **102 (23)**, 230402 (2009).
- [30] R. COMBESCOT, S. GIRAUD & X. LEYRONAS, *Analytical theory of the dressed bound state in highly polarized Fermi gases*, Europhys. Lett. **88 (6)**, 6007 (2009).
- [31] M. PUNK, P.T. DUMITRESCU & W. ZWERGER, *Polaron to molecule transition in a strongly imbalanced Fermi gas*, Phys. Rev. A **80**, 053605 (2009).