



**HAL**  
open science

# Etude asymptotique et numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens dans des structures tubulaires minces

Roula Fares

► **To cite this version:**

Roula Fares. Etude asymptotique et numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens dans des structures tubulaires minces. Mathématiques générales [math.GM]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2011. Français. NNT: 2011STET4022 . tel-00703763

**HAL Id: tel-00703763**

**<https://theses.hal.science/tel-00703763>**

Submitted on 4 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut Camille Jordan UMR 5208 du CNRS  
Laboratoire de Mathématiques LAMUSE de l'université de Saint Etienne

# THÈSE DE DOCTORAT

Présentée à

**L' Université Jean Monnet de Saint-Etienne**

École Doctorale Sciences, Ingénierie, Santé ED SIS 488

par

**Roula FARES**

Dirigée par : Grigory PANASENKO & Laurent CARRARO

pour obtenir le grade de

**Docteur**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

## Étude asymptotique et numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens dans des structures tubulaires minces.

Soutenue le : 21 Novembre 2011

---

### Jury de Thèse :

<b>A. L. PIATNITSKI</b>	Professeur de Narvik Institute of technology	Rapporteur
<b>A. GAUDIELLO</b>	Professeur de l'Université de Cassino, Italie	Rapporteur
<b>Y. AMIRAT</b>	Professeur de l'Université de Clermont-Ferrand	Examineur
<b>A. ZINE</b>	Maître de conférences HDR de l'Ecole Centrale de Lyon	Examineur
<b>G.P. PANASENKO</b>	Professeur de l'Université Jean Monnet	Directeur de Thèse
<b>L. CARRARO</b>	Professeur de l'Université Jean Monnet	Co-directeur de Thèse



## REMERCIEMENTS

Tout au long de cette thèse, j'ai eu le privilège de recevoir de la part d'un grand nombre de personnes, des commentaires, suggestions, questions, réfutations et encouragements qui m'ont tous été très utiles. Je demande à tous ceux qui ne figureront pas dans la liste qui suit de bien vouloir me pardonner.

Mes premières pensées vont à mes directeurs de thèse Grigory PANASENKO et Laurent CARRARO. Ces trois années de thèse sous leurs directions furent pour moi un vrai enrichissement. Je leur exprime ma profonde gratitude pour m'avoir accordé leur confiance, pour m'avoir guidée avec patience attention et intérêt dans le monde de la recherche.

Je suis reconnaissante envers Andrey PIATNETSKI et Antonio GAUDIELLEO pour avoir accepté de rapporter ma thèse et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie Yousef AMIRAT et Abdel-Malek ZINE pour le temps qu'ils m'ont consacré en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime ma reconnaissance à Madame Ruxandra STAVRE, professeur de l'institut de mathématiques "Simion Stoilow" de l'académie Roumaine, pour sa collaboration et ses précieux conseils.

Je remercie tous les membres du laboratoire LAMUSE qui ont été mes professeurs puis mes collègues pendant les huit années que j'ai passée à Saint Etienne. En particulier, je voudrais remercier ma collègue et amie Imane sans qui les journées passées au laboratoire n'auraient pas été les mêmes, qui m'a continuellement soutenue, pour son aide et son rôle de relecteur du document final.

Il y a aussi les amis, qui ont beaucoup compté pour moi ces dernières années : Florence (pour son écoute et sa bienveillance), Christophe (pour tous les bons petits repas et les fous rires partagés), Valérie (pour sa joie de vivre et ces superbes soirées), Domenico (pour sa bonne humeur), Taline (pour les virées shopping et les soirées dinterminables discussions), Roukos, Pierre (pour le nouveau lexique libanais :p), Phanthanome (pour cette amitié qui dure même après son départ au Laos). Un merci tout spécifique revient à Diala qui m'a sans cesse encouragé à tenir jusqu'au bout. Cette thèse contient en grande partie son énergie.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots : je pense à mes soeurs Rida, Rabab & Jojo et les remercie pour la joie et la bonne humeur quelle m'apporte et à mon frère David pour sa vivacité et son sourire. Je remercie mes parents Hanna & Violette pour leurs soutiens, leurs encouragements et leurs amours sans faille. Cette thèse leur est dédiée.



## Summary

In order to model the blood flow through vessels, the Stokes equation with the nonconstant viscosity is considered in a thin tube structure, i.e., in a connected union of thin rectangles with heights of order  $\varepsilon$  and bases of order 1 with smoothed boundary. An asymptotic expansion of the solution is constructed. In the case of random perturbations of the constant viscosity, we prove that the leading term for the velocity is deterministic, while for the pressure it is random, but the expectations of the pressure satisfies the deterministic Darcy equation. Estimates for the difference between the exact solution and its asymptotic approximation are proved. Finally, we give some numerical results. We extend the results for a thin tube structure composed by two thin rectangles with lateral elastic boundaries which are connected by a domain with rigid boundaries. After a variational approach of the problem which gives us existence, uniqueness, regularity results and some a priori estimates, we construct an asymptotic solution. We present and solve the problems for all the terms of the asymptotic expansion. For two different cases, we describe the order of steps of the algorithm of solving the problem and we construct the main term of the asymptotic expansion. And finally, we present a variational and an asymptotic analysis for a more general case where the viscosity depends on the infinitesimal strain tensor in a thin channel. By means of the a priori estimates, we justify our asymptotic constructions, by obtaining a small error between the exact and the asymptotic solutions.



## Resumé

Afin de modéliser le flux sanguin dans les vaisseaux, l'équation de Stokes avec une viscosité variable est considérée dans une structure tubulaire mince, c'est à dire, dans une union de rectangles minces avec des hauteurs d'ordre  $\varepsilon$  et des bases d'ordre 1. Un développement asymptotique de la solution est construit. Dans le cas des perturbations aléatoires de la viscosité constante, nous prouvons que le premier terme de la vitesse est déterministe, alors que pour la pression, il est aléatoire, mais les espérances de la pression satisfont l'équation déterministe de Darcy. Les estimations pour la différence entre la solution exacte et son approximation asymptotique sont prouvées. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques. Nous étendons les résultats à une structure tubulaire mince composée de deux rectangles minces avec des parois élastiques qui sont reliés par un domaine dont les parois sont rigides. Après une approche variationnelle du problème qui nous donne des résultats d'existence, d'unicité, de régularité, et certaines estimations, a priori, nous construisons une solution asymptotique. Nous présentons et résolvons les problèmes de tous les termes du développement asymptotique. Pour deux cas différents, nous décrivons l'ordre des étapes de résolution de l'algorithme du problème et nous construisons le terme principal du développement asymptotique. Et enfin, nous présentons une analyse variationnelle et asymptotique pour un cas plus général où la viscosité dépend du tenseur des déformations dans un canal mince. Par le biais des estimations a priori, nous justifions nos constructions asymptotiques, par l'obtention d'une petite erreur entre les solutions exactes et asymptotiques.





---

---

# Table des matières

---

---

<b>Introduction</b> .....	<b>i</b>
<b>I Développement Asymptotique de la solution de l'équation de Stokes stationnaire avec viscosité variable dans une structure tubulaire mince en dimension deux</b> .....	<b>1</b>
<b>I.1 Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2 Flux dans un canal</b> .....	<b>2</b>
I.2.1 Formulation variationnelle du problème . . . . .	3
I.2.2 Analyse Asymptotique du problème . . . . .	7
<b>I.3 Flux dans une structure tubulaire</b> .....	<b>17</b>
I.3.1 Développement asymptotique . . . . .	20
I.3.2 Estimation d'erreur . . . . .	25
<b>I.4 Perturbations Aléatoires de la viscosité</b> .....	<b>27</b>
<b>I.5 Calculs Numériques</b> .....	<b>30</b>
<b>II Étude variationnelle et asymptotique d'un écoulement de fluide visqueux dans un canal à parois mixtes (rigide-élastique)</b> .....	<b>35</b>
<b>II.1 Introduction</b> .....	<b>35</b>
<b>II.2 Le problème physique</b> .....	<b>36</b>
<b>II.3 Formulation variationnelle.</b> <b>Existence, unicité, régularité et estimations a priori</b> .....	<b>40</b>
<b>II.4 Étude Asymptotique</b> .....	<b>49</b>
II.4.1 Construction de la solution asymptotique . . . . .	50
II.4.2 La détermination de la solution asymptotique . . . . .	53
<b>II.5 Les estimations d'erreur</b> .....	<b>73</b>

<b>III</b>	<b>Étude d'un écoulement stationnaire d'un fluide non-newtonien dans un tube mince</b>	<b>83</b>
III.1	Introduction .....	83
III.2	Formulation variationnelle .....	84
III.3	Analyse Asymptotique .....	89
III.4	Exemple pour $\Phi$ .....	102

---

---

# Introduction

---

---

La circulation sanguine, le transport de cellules et de substances dans un corps humain, ainsi que le refroidissement de liquide ou le transport de pétrole, sont modélisés par les équations d'écoulement de fluide posées dans des domaines minces: couche mince [19], canal ou structure tubulaire mince.

Une structure tubulaire mince est une réunion finie connexe de cylindres fins avec le rapport "diamètre/hauteur" d'ordre  $\varepsilon \ll 1$ . En dimension deux, c'est une connexion de rectangles d'épaisseur  $\varepsilon$  et d'une longueur d'ordre 1 [22];  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif (voir la figure 1).

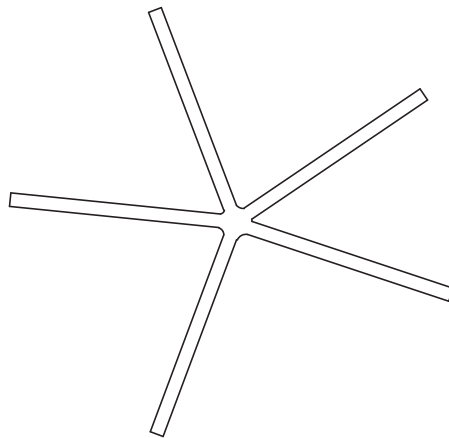
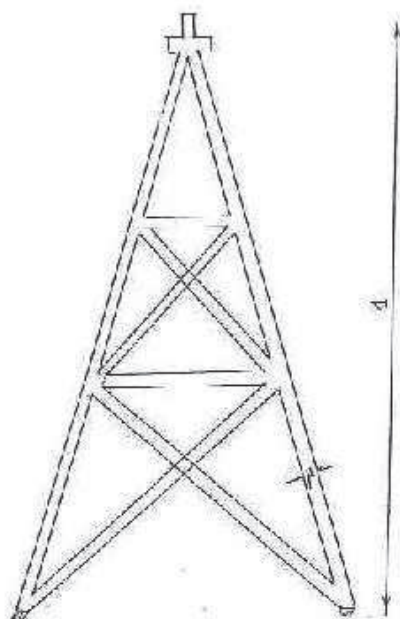
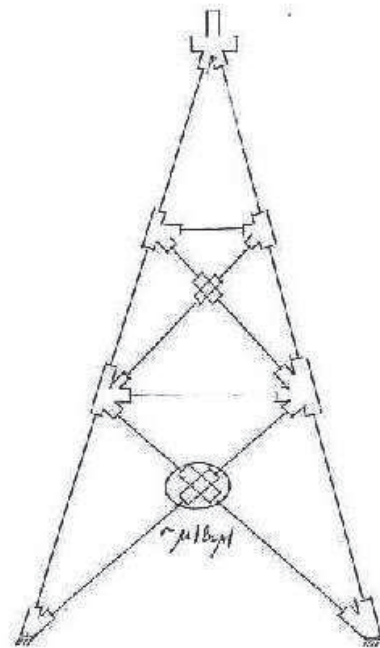


FIG. 1 – Une structure tubulaire mince en dimension 2

Le calcul numérique pour des équations aux dérivées partielles dans de tels domaines est coûteux, car la géométrie demande un grand nombre de noeuds dans la grille. La méthode de décomposition asymptotique partielle du domaine introduite dans [22] et [26], consiste à séparer le problème en sous-problèmes pour concentrer l'étude sur les parties du domaine où la solution a un comportement particulier. L'approche est de réduire la dimension et de passer localement au modèle unidimensionnel: chaque canal est unidimensionnel avec des conditions de jonction à l'extrémité (voir les figures 2 et 3).

FIG. 2 – *Structure tubulaire mince*FIG. 3 – *Décomposition asymptotique partielle du domaine*

Cette méthode est basée sur les informations concernant la structure de la solution asymptotique dans chaque partie du domaine.

Les auteurs dans [1] ont étudié l'application de la méthode au problème de Stokes dans des structures minces. Le développement asymptotique de la solution est construit et justifié. Il est composé d'un flux type Poiseuille dans les rectangles et de correcteurs couches limites aux voisinages des jonctions.

Le modèle newtonien a été choisi pour le fluide incompressible. Or dans la nature et dans la technologie, le comportement non-newtonien du fluide est très répandu. Le caractère non-newtonien le plus connu est la variation de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Ce comportement est notamment observé dans l'écoulement sanguin. Ces variations sont liées à des modifications de la structure du sang, mais aussi de son comportement mécanique lors de l'écoulement: interaction avec les parois des vaisseaux sanguins. Il existe plusieurs autres problèmes pratiques impliquant une viscosité variable, par exemple, la présence de bactéries en suspension (voir [14]) peut changer localement la viscosité.

Mathématiquement, la viscosité dépendant de la variable longitudinale de chaque rectangle de la structure tubulaire modélise un flux sanguin dans une structure de vaisseaux où la viscosité dépend de la concentration d'une certaine substance diluée dans le sang ou de cellules sanguines. En effet, l'étude asymptotique de l'équation de convection-

diffusion dans un tel domaine ([7],[26]) montre que dans le cas de la condition de Neumann (imperméabilité) sur les bords latéraux et un petit nombre de Reynolds, la concentration est asymptotiquement proche de la description unidimensionnelle, c'est l'équation de convection-diffusion située sur le graphe. La solution d'un tel problème est le terme principal du développement asymptotique, et elle dépend évidemment de la variable longitudinale. L'équation de flux est couplée avec l'équation de convection-diffusion dans ce cas. Néanmoins, si la vitesse est petite (dans notre cas, elle est de l'ordre d' $\varepsilon^2$ ), alors en négligeant la convection, en comparaison avec le terme de diffusion ou en itérant par rapport au petit terme, nous obtenons l'équation de diffusion stationnaire ; en l'absence d'un terme source dans le second membre, elle a une solution asymptotique linéaire par morceaux sur le graphe pour la concentration. En effet, le système couplé de diffusion-convection le plus simplifié est donné par :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nu(C_\varepsilon)\mathcal{D}u_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon &= f(x) \\ \operatorname{div}u_\varepsilon &= 0, \\ -\Delta C_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla C_\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

où  $C_\varepsilon$  est la concentration,  $u_\varepsilon$  et la vitesse du fluide et  $p_\varepsilon$  est la pression.

Si  $u_\varepsilon$  est petite par rapport à  $C_\varepsilon$ , nous pouvons écrire un développement pour  $C_\varepsilon$  par rapport au petit paramètre qui est le quotient de magnitudes de  $|u_\varepsilon|$  et  $|C_\varepsilon|$ . Alors pour les termes de ce développement, la troisième équation peut être résolue avant les équations du flux. Les approximations successives peuvent être une deuxième approche possible :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nu(C_\varepsilon^{(n)})\mathcal{D}u_\varepsilon^{(n)}) + \nabla p_\varepsilon^{(n)} &= f(x) \\ \operatorname{div}u_\varepsilon^{(n)} &= 0, \\ -\Delta C_\varepsilon^{(n)} + u_\varepsilon^{(n-1)} \cdot \nabla C_\varepsilon^{(n)} &= 0 \end{aligned}$$

où  $n$  est le nombre d'itérations.

Dans les deux cas, nous obtenons alors un problème avec une viscosité variable. Dans cette situation simplifiée, l'équation de diffusion peut être résolue avant l'équation de flux et nous obtenons pour le flux, l'équation de Stokes ou Navier-Stokes avec une viscosité variable dépendant (via la concentration) de la variable longitudinale.

D'autres paramètres peuvent modifier la structure même du vaisseau. En effet, les blocages partiels d'une artère (sténose) ou les interruptions brutales du débit sanguin (occlusions), sont traités par une angioplastie. C'est une technique chirurgicale qui consiste à introduire, à l'aide d'une sonde, un ballonnet à usage unique, qui va dilater l'artère à

l'endroit du rétrécissement<sup>1</sup>.

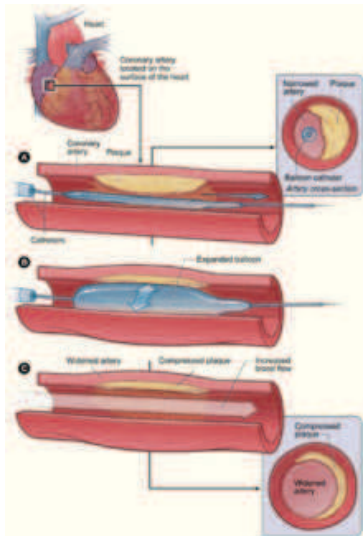


FIG. 4 – Angioplastie

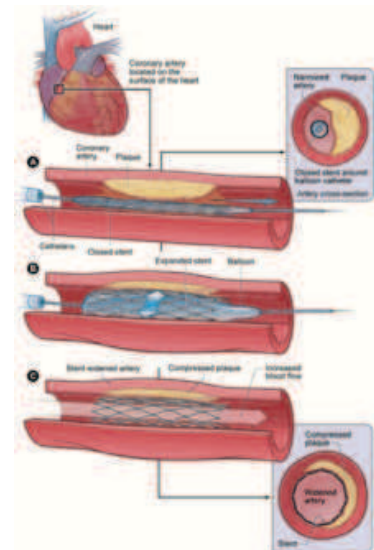


FIG. 5 – Angioplastie avec pause de Stent

Ce geste est souvent complété par la pose d'une prothèse appelée Stent. C'est une prothèse sous forme de tube, constituée d'une partie métallique recouverte ou non par un tissu étanche. Les Stents couverts sont imperméables, et sont donc utilisés pour traiter des hémorragies, colmater une plaie ou dans les vaisseaux à parois anévrismales. Quant aux stents du second type, ils sont utilisés dans le cadre de dilatation de rétrécissement des vaisseaux.(voir[13])

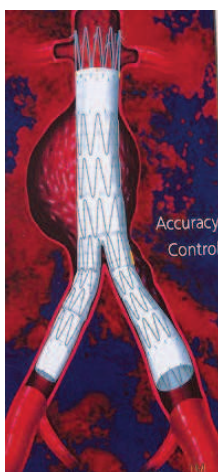


FIG. 6 – Stent bifurqué

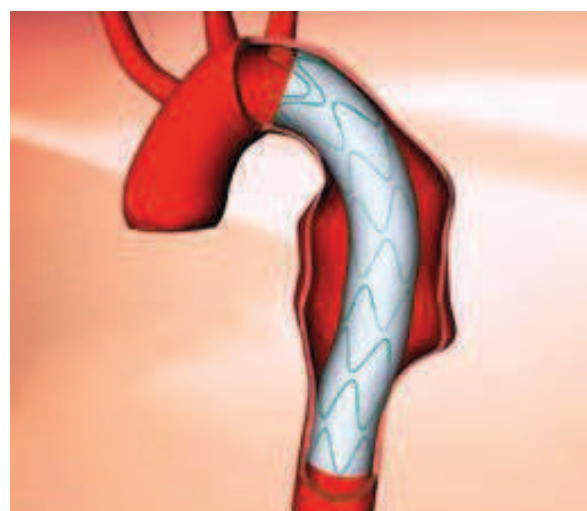


FIG. 7 – Stent couvert simple

1. les photos ont été prises du site wikipédia ainsi que de [www.gamida.net](http://www.gamida.net) et [www.dr-azencott.com](http://www.dr-azencott.com)

---

La partie du vaisseau dans laquelle est posé le stent peut être assimilée à une partie à parois rigides. Ainsi nous avons une partie du vaisseau à parois rigides et une autre à parois élastiques. Nous avons dans ces parties là une interaction entre le fluide et la structure élastique. La complexité de la structure détaillée des artères rend l'étude de l'interaction fluide-structure insoluble. Ainsi, les modèles choisis pour décrire le comportement de la membrane sont ceux d'une membrane linéairement élastique (viscoélastiques). Les auteurs ont utilisé le modèle de Navier dans [2],[3],[4] ou encore Koiter dans [5].

Dans [27], les auteurs ont considéré un flux visqueux non-stationnaire dans un canal fin avec des parois élastiques, avec des conditions de périodicité du flux aux extrémités du domaine. Les termes principaux sont comparés à ceux d'un écoulement de Poiseuille dans un tube à parois rigides. L'approche asymptotique a été ensuite étendue au cas non-périodique dans [28]. Les conditions non nulles aux bords ont nécessité dans ce cas la construction de couches limites.

Ils ont ensuite généralisé les résultats dans [29] et [30]. En effet, les résultats de [27] ont été étendus au cas de dimension trois, en considérant un flux périodique axisymétrique dans un cylindre fin à frontière latérale élastique. De plus, dans [30] deux cas différents ont été étudiés : quand le terme d'inertie dans l'équation de déplacement de la paroi était plus petit que le terme de contraintes et quand ces deux termes étaient du même ordre. Dans tous ces papiers, le flux était décrit par les équations de Stokes et le comportement de la structure élastique était simulée par l'équation de Sophie Germain ou l'équation de Koiter. L'interaction fluide-structure est mathématiquement exprimée par l'égalité entre la vitesse du fluide et la dérivée en temps du déplacement de la paroi. Une solution asymptotique a été construite en prouvant que c'est une bonne approximation de la solution exacte, vu la petite erreur entre ces deux solutions.

D'autres travaux tels que [11] et [12] donnent des résultats d'existence de solution de problèmes d'interaction fluide-structure, utilisant des procédures de point fixe tel le théorème de point fixe de schauder.

L'objectif de cette thèse est donc de faire une étude variationnelle et asymptotique d'écoulements de fluides incompressibles dont la viscosité est variable dans des domaines à parois rigides ou élastiques. Ce travail a été partagé en trois parties :

Dans le premier chapitre, nous proposons une étude de l'équation de Stokes stationnaire dans un canal avec une condition de périodicité du flux aux extrémités du domaine, puis le résultat est étendu au cas non-périodique et enfin nous faisons l'étude dans une structure tubulaire mince. L'analyse asymptotique de ce problème nous permet d'étudier le cas où la viscosité constante a quelques variations aléatoires dans chaque canal de la structure tubulaire. Il est possible dans ce cas de répondre aux questions suivantes : le premier terme



du développement asymptotique est-il déterministe ou aléatoire? Quelle est la loi de Darcy pour les espérances de la pression? Enfin nous donnons quelques résultats numériques

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une généralisation des anciens résultats présentés dans [26],[28], [31]. Nous étendons le cas considéré dans le premier chapitre, au cas où la structure tubulaire a des parois mixtes (voir la figure 8) représentant la pose d'une endoprothèse (ou stent) dans un vaisseau ou une artère. Nous donnons une étude variationnelle et asymptotique du problème.

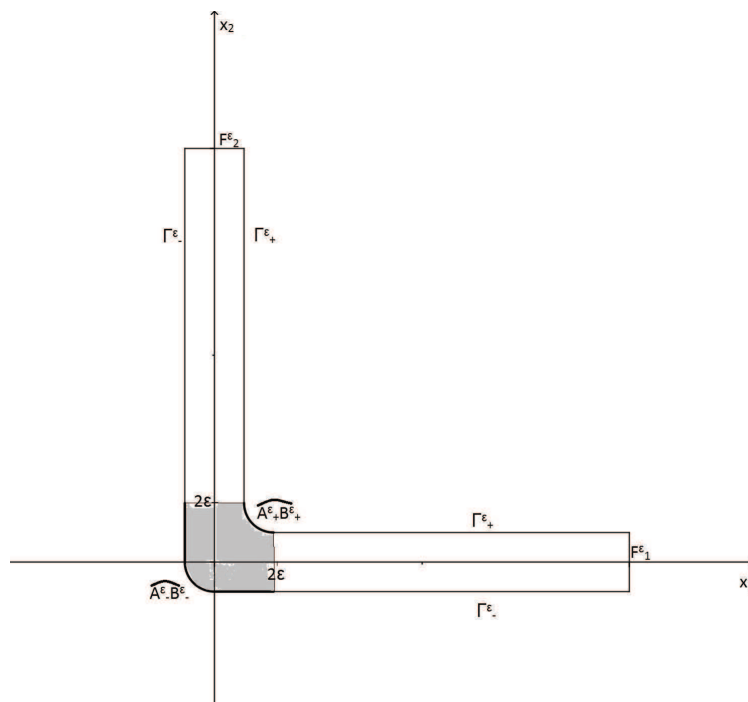


FIG. 8 – *Domaine à parois mixtes (la partie gris représente l'endoprothèse)*

Enfin, dans le troisième chapitre, nous présentons l'étude de l'équation de Stokes stationnaire dans un canal avec une viscosité variable dépendant du tenseur des déformations. La viscosité dépendant de la variable longitudinale est perturbée par une fonction lipschitzienne, dépendant du tenseur des déformations, multipliée par un petit paramètre positif. Nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnelle en fonction de ce petit paramètre, ainsi qu'une construction de la solution asymptotique dans le cas périodique.

Par le biais des estimations a priori, nous justifions nos constructions asymptotiques, par l'obtention d'une petite erreur entre les solutions exactes et asymptotiques.

# Développement Asymptotique de la solution de l'équation de Stokes stationnaire avec viscosité variable dans une structure tubulaire mince en dimension deux

---

## I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de Stokes avec une viscosité variable dans une structure tubulaire mince. En dimension deux c'est une connexion de rectangles d'épaisseur  $\varepsilon$  est de longueur d'ordre 1 [22];  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif. Un développement asymptotique dans le cas de viscosité constante à été construit dans [1]. Il est composé d'un flux type Poiseuille dans les rectangles et des correcteurs couche limite aux voisinages des jonctions. Ici, nous considérons un cas plus général où la viscosité n'est pas constante mais dépendant de la variable longitudinale de chaque canal. Cette situation modélise un flux sanguin dans des vaisseaux où la viscosité dépend de la concentration d'une certaine substance diluée dans le sang ou de cellules comme des érythrocytes et des thrombocytes.

Le plan du chapitre est le suivant : Dans la première section, nous considérons le cas d'un canal rectangulaire avec des conditions de périodicité aux extrémités du canal. Un développement asymptotique de la solution est construit et justifié.

Dans la deuxième section, nous considérons le cas d'un flux dans un tube avec un flux entrant/sortant comme conditions aux extrémités. Dans ce cas nous construisons un développement asymptotique qui contient une partie régulière et des correcteurs couches limites.

Dans la troisième section, nous construisons un développement asymptotique de la solution de l'équation de Stokes. Nous associons pour chaque rectangle une partie régulière et

nous connectons ces ansatz par des correcteurs couches limites. La procédure est similaire à celle décrite dans[26].

Dans la quatrième section, nous considérons une viscosité perturbée par une fonction aléatoire. En appliquant l'analyse asymptotique effectuée précédemment, nous calculons les premiers termes et nous prouvons que le premier terme pour la vitesse est déterministe, quant à la pression, elle est aléatoire, mais les espérances de la pression satisfont une équation de Darcy déterministe.

Tous ces développements sont justifiés par le calcul du résidus et l'application des estimations *a priori* .

Enfin nous donnons quelques résultats numériques.

## I.2 Flux dans un canal

Considérons un petit paramètre  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , et définissons alors un domaine mince

$$D_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, -\frac{\varepsilon}{2} < x_2 < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Assumons qu'un fluide incompressible remplit le domaine  $D_\varepsilon$ . Soit  $f$  la force extérieur appliquée au fluide.

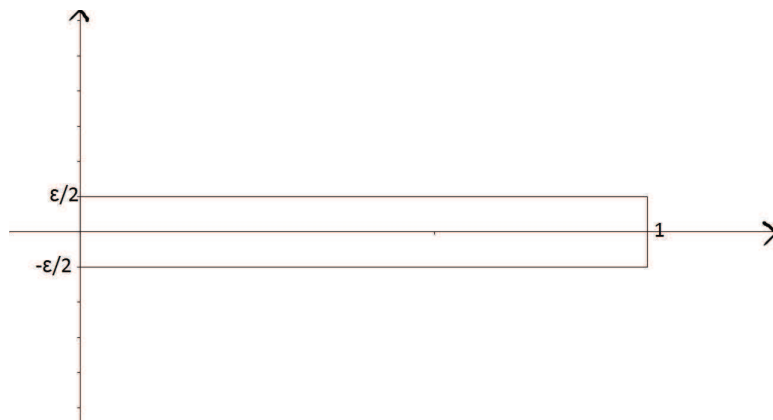


FIG. I.1 – *Domaine fin*

Considérons le problème de Stokes stationnaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon = f(x) & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \operatorname{div}u_\varepsilon = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x_1, \varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ u_\varepsilon(x_1, -\varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ u_\varepsilon(0, x_2) = \varepsilon^2\varphi_0(x_2/\varepsilon) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \\ u_\varepsilon(1, x_2) = \varepsilon^2\varphi_1(x_2/\varepsilon) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

Les inconnues du système sont la viscosité  $u_\varepsilon$  et la pression  $p_\varepsilon$  du fluide. Les conditions non-homogène aux bords pour la viscosité sont données par les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1$  dont la deuxième composante est nulle, et la première satisfait

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi_{01}(\xi_2) d\xi_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_{11}(\xi_2) d\xi_2, \quad (\text{I.2})$$

où  $\varphi_{i1} \in C_0^2([-1/2, 1/2])$ . Ici

$$(\mathcal{D}u_\varepsilon)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon j}}{\partial x_i} \right),$$

$\nu$  satisfait les conditions suivantes

$$\nu(x_1) = \nu_0 + \nu_1(x_1) \quad (\text{I.3})$$

où  $\nu_1 \in C_0^2([0,1])$ . De plus, il existe  $\rho > 0, \kappa > 0$  telle que  $\nu(x_1) \geq \kappa$  pour tout  $x_1 \in (0,1)$  et  $\nu_1(x_1) = 0$  pour tout  $x_1 \in (0, \rho) \cup (1 - \rho, 1)$  (et alors,  $\nu_0 > 0$ ).

### I.2.1 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (I.1), introduisons l'espace suivant

$$H(D_\varepsilon) = \{u \in (H_0^1(D_\varepsilon))^2 : \operatorname{div}(u) = 0\} \quad (\text{I.4})$$

et supposons que  $f \in (L^2(D_\varepsilon))^2$ .

Il existe une fonction  $\varphi^\varepsilon \in (H^1(D_\varepsilon))^2$  telle que  $\operatorname{div}\varphi^\varepsilon = 0$ ,  $\varphi^\varepsilon|_{x_1=0} = \varphi_0$  et  $\varphi^\varepsilon|_{x_1=1} = \varphi_1$  (voir [15]). En remplaçant la fonction inconnue  $u_\varepsilon$  par  $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \varepsilon^2\varphi^\varepsilon$ , nous donnons la formulation variationnelle du problème (I.1):

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1)\mathcal{D}v_\varepsilon : \mathcal{D}\psi = \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi - 2\varepsilon^2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1)\mathcal{D}\varphi^\varepsilon : \mathcal{D}\psi, \quad \forall \psi \in H(D_\varepsilon). \quad (\text{I.5})$$

**Définition I.2.1.**  $u_\varepsilon$  est une solution faible du problème (I.1) si  $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \varepsilon^2 \varphi^\varepsilon \in H(D_\varepsilon)$  et satisfait (I.5).

**Proposition I.2.1.** Si  $u_\varepsilon$  est une solution faible de (I.1), alors il existe une distribution  $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'(D_\varepsilon)$  tel que  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  satisfait (I.1)<sub>1</sub> au sens des distributions.

*Démonstration.* Si nous considérons  $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \varepsilon^2 \varphi^\varepsilon$ , alors de (I.5) nous avons que

$$\langle 2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}v_\varepsilon - \varepsilon^2\nu(x_1)\mathcal{D}\varphi^\varepsilon) + f, \psi \rangle = 0, \forall \psi \in H(D_\varepsilon)$$

Du lemme de De Rham, il s'ensuit qu'il existe une distribution  $p_\varepsilon$ , unique à une constante additive près, tel que

$$-2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}v_\varepsilon) + 2\varepsilon^2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}\varphi^\varepsilon) - f = -\nabla p.$$

Le système (I.1) est donc satisfait par  $u_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$ . □

**Théorème I.2.1.** Le problème variationnel (I.5) a une unique solution  $v_\varepsilon \in H(D_\varepsilon)$ .

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de solution sont données par le théorème de Riesz car les normes

$$\|v_\varepsilon\|_I = \left( \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1)\mathcal{D}v_\varepsilon : \mathcal{D}v_\varepsilon \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|v_\varepsilon\|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}$$

sont équivalentes. □

De plus si  $v_\varepsilon \in H(D_\varepsilon)$  est une solution du problème variationnel (I.5). Alors

$$\|v_\varepsilon\|_{(H(D_\varepsilon))^2} \leq \mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) \left( \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} + \|\varphi^\varepsilon\|_{(H^1(D_\varepsilon))^2} \right),$$

où  $C_{PF}^\varepsilon$  est la constante de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs. Notons que  $C_{PF}^\varepsilon$  peut être estimée par  $\varepsilon\tilde{\mathcal{C}}$ , où  $\tilde{\mathcal{C}}$  est indépendante de  $\varepsilon$  (voir [26]).  $\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) = O(\varepsilon)$  où  $\kappa$  est la borne inférieure de la viscosité (I.3).

Considérons le cas où  $\varphi^\varepsilon = 0$ . Alors:

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}(D_\varepsilon)} \leq C\|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2},$$

Avec  $C$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

En effet, du lemme de De Rham, nous avons l'existence d'une distribution  $p_\varepsilon$ , unique à une constante près, tel que

$$\nabla p_\varepsilon = 2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon) + f.$$

Ce qui signifie que

$$\int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div} \psi = 2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi - \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi, \quad \forall \psi \in H(D_\varepsilon)^2,$$

et alors,

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in (H_0^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|\int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div} \psi|}{\|\nabla \psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} &= \sup_{\psi \in (H_0^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi - \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi|}{\|\nabla \psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} \leq \\ &\leq (\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) + C_{PF}^\varepsilon) \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon)$  est la constante de l'estimation a priori pour  $u_\varepsilon$  et  $C_{PF}^\varepsilon$  est la constante de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (elle est de l'ordre de  $\varepsilon$ ). Cette inégalité donne une estimation de  $\nabla p_\varepsilon$  dans la norme  $H^{-1}$ .

Une étude asymptotique du problème (I.1) montre qu'une solution asymptotique est donnée par un flux type Poiseuille, avec deux correcteurs couche limite localisé au voisinage des extrémités du canal.

Didactiquement, il serait mieux de séparer la construction du flux type Poiseuille pour la viscosité variable et la construction des correcteurs couche limite. Pour cela nous simplifions le problème (I.1), et remplaçons (I.1)<sub>5</sub>, (I.1)<sub>6</sub> par la condition de périodicité par rapport à  $x_1$ .

Nous introduisons l'espace de Sobolev

$$H_{per}(D_\varepsilon) = \left\{ u \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2 : \operatorname{div} u = 0 \right\},$$

$H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon)$  est la complétion ( par rapport à la norme  $H^1(D_\varepsilon)$ ) de l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R} \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2])$  nulles en  $x_2 = \pm \varepsilon/2$  et périodiques en  $x_1$ . Comme au début de cette section  $f \in (L^2(D_\varepsilon))^2$ .

**Définition I.2.2.** *On dit que  $u_\varepsilon \in H_{per}(D_\varepsilon)$  est une solution au sens faible du problème périodique*

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon = f(x), & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{dans } D_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x_1, \varepsilon/2) = 0, & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ u_\varepsilon(x_1, -\varepsilon/2) = 0, & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ u_\varepsilon \text{ est } 1\text{-périodique en } x_1, \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

si et seulement si elle satisfait

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi = \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi, \quad \forall \psi \in H_{per}(D_\varepsilon). \quad (I.7)$$

Comme dans le théorème I.2.1, nous appliquons le théorème de Riesz pour prouver l'existence et l'unicité de  $u_\varepsilon \in H_{per}(D_\varepsilon)$ , solution du problème (I.6). L'estimation *a priori* est donnée par

$$\|u_\varepsilon\|_{(H^1(D_\varepsilon))^2} \leq \mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2}$$

où  $\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) = O(\varepsilon)$  et  $\kappa$  la borne inférieure de la viscosité.

Si  $u_\varepsilon$  est une solution au sens faible de (I.6) alors il existe une distribution  $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'(D_\varepsilon)$  tel que  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  satisfait ce problème au sens des distributions, et

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}(D_\varepsilon)} \leq C \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2},$$

où  $C$  est une constant indépendante de  $\varepsilon$ . En effet de (I.7) on a

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi = \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi, \quad \forall \psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2.$$

Du lemme de De Rham , nous avons l'existence d'une distribution  $p_\varepsilon$ , unique à une constante près, tel que

$$\nabla p_\varepsilon = 2\text{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon) + f.$$

ce qui signifie que

$$\int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \text{div}\psi = 2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi - \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi \quad \forall \psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2,$$

et alors,,

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|\int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \text{div}\psi|}{\|\nabla\psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} &= \sup_{\psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}u_\varepsilon : \mathcal{D}\psi - \int_{D_\varepsilon} f \cdot \psi|}{\|\nabla\psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} \leq \\ &\leq (\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon) + C_{PF}^\varepsilon) \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}^\varepsilon)$  est la constante de l'estimation a priori pour  $u_\varepsilon$  et  $C_{PF}^\varepsilon$  est la constante de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (elle est de l'ordre de  $\varepsilon$ ). Cette inégalité donne une estimation de  $\nabla p_\varepsilon$  dans la norme  $H^{-1}$ .

## I.2.2 Analyse Asymptotique du problème

Construisons d'abord le développement asymptotique pour la solution de problème périodique (I.6); nous étudierons ensuite le cas non périodique. Définissons le domaine semi infini

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, -\varepsilon/2 < x_2 < \varepsilon/2\}.$$

Supposons que  $f = f_1 e_1$ ,  $f_1 \in C^\infty([0, \infty])$ ,  $f_1$  est 1-périodique en  $x_1$ .



FIG. I.2 – *Tube semi-infini*

Notons

$$\langle \psi \rangle_1 = \int_0^1 \psi(x_1, x_2) dx_1, \quad \langle \psi \rangle_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(x_1, x_2) dx_2.$$

Une solution asymptotique est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{1,j}(x_1, x_2/\varepsilon), \\ u_2^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+3} u_{2,j}(x_1, x_2/\varepsilon), \\ p^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j(x_1, x_2/\varepsilon) + \sum_{j=0}^k \varepsilon^j q_j(x_1), \end{array} \right. \quad (\text{I.8})$$

avec  $u_{1,j}, u_{2,j}, p_j$  et  $q_j$  fonctions 1-périodiques en  $x_1$ , tel que  $\langle p_j \rangle_2 = 0$ .

En substituant la solution asymptotique (I.8) dans (I.6), et en identifiant les coefficients



d'ordre  $\varepsilon$  en notant  $\xi_2 = x_2/\varepsilon$  nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{1,j}}{\partial \xi_2^2} - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} + \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_j}{\partial x_1} = f_1 \delta_{j0}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,j-1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,j-3}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial p_j}{\partial \xi_2} = 0, \\ \frac{\partial u_{1,j}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,j}}{\partial \xi_2} = 0, \\ u_{1,j}(x_1, \pm 1/2) = 0, \\ u_{2,j}(x_1, \pm 1/2) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.9})$$

Notons:

$$N_1(\xi_2) = \frac{1}{2} (\xi_2^2 - 1/4),$$

(elle satisfait  $N_1'' = 1$ ,  $N_1(\pm 1/2) = 0$ ) et

$$N_2(\xi_2) = \int_{-1/2}^{\xi_2} N_1(\tau) d\tau,$$

avec

$$N_2(1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} N_1(\tau) d\tau = -\frac{1}{12}.$$

Notons:

$$D^{-1} : F \longrightarrow \int_{-1/2}^{\xi_2} F(x_1, \tau) d\tau,$$

$$\tilde{D}^{-1} : F \longrightarrow \int_{-1/2}^{\xi_2} F(x_1, \tau) d\tau - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta,$$

$$D^{-2} : F \longrightarrow \int_{-1/2}^{\xi_2} \int_{-1/2}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta - \left( \xi_2 + \frac{1}{2} \right) \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta.$$

**Théorème I.2.2.** *Les inconnues du système (I.9)  $u_{1,j}, u_{2,j}, p_j, q_j$  sont données par les re-*

lations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_{1,j} &= -D^{-2} \left\{ \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} + \frac{1}{\nu(x_1)} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\nu(x_1)} N_1(\xi_2) \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right), \\
u_{2,j} &= D^{-1} D^{-2} \left\{ \frac{\partial^3 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} \right) \right) \right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right) \right) N_2(\xi_2), \\
p_j &= \tilde{D}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,j-1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,j-3}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}}{\partial \xi_2^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{I.10}$$

*Démonstration.* En intégrant deux fois (I.9)<sub>1</sub> et en utilisant les conditions aux bords (I.9)<sub>4</sub>, nous obtenons (I.10)<sub>1</sub>. Cette relation donne une expression pour l'inconnue  $u_{1,j}$  via  $q_j$ . Toutes les autres fonctions contenues dans cette relation sont soit connues des approximations précédentes soit égales à zéro. Nous intégrons ensuite la condition d'incompressibilité (I.9)<sub>3</sub> par rapport à  $\xi_2$  avec les conditions (I.9)<sub>5</sub>. Finalement, en intégrant (I.9)<sub>2</sub> nous obtenons  $p_j$ .

L'inconnue  $q_j$  est déterminée de la condition au bord  $u_{2,j}(x_1, 1/2) = 0$ . En effet, les conditions (I.9)<sub>4</sub> et  $u_{2,j}(x_1, -1/2) = 0$  sont satisfaites par la définition de  $D^{-2}$  et  $D^{-1}$ , quant à  $u_{2,j}(x_1, 1/2) = 0$ , elle nous donne:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right) \right) &= \\
= D^{-1} D^{-2} \left\{ \frac{\partial^3 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{\nu(x_1)} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} \right) \right\} \right\} \Big|_{\xi_2=1/2}
\end{aligned} \tag{I.11}$$

□

En particulier, pour  $j = 0$ , nous avons l'équation de Darcy pour le terme principal de la pression  $q_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \right) = 0. \tag{I.12}$$

$q_0$  est alors une solution 1-périodique donnée par

$$q_0(x_1) = \int_0^{x_1} \left( f_1(\tau) - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu(\tau) \right) d\tau - \left\langle \int_0^{x_1} \left( f_1(\tau) - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu(\tau) \right) d\tau \right\rangle_1$$

d'où

$$u_{1,0}(x_1, \xi_2) = \frac{2}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) N_1(\xi_2), \quad u_{2,0}(x_1, \xi_2) = 0 \quad \text{et} \quad p_0(x_1, \xi_2) = 0.$$

Pour  $j = 1$ ;  $q_1$  la solution 1-périodique de (I.11) pour  $j = 1$ , i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12\nu(x_1)} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Il s'ensuit que  $q_1 = 0$ ,  $u_{1,1}(x_1, \xi_2) = 0$  et  $u_{2,1}(x_1, \xi_2) = 0$ . Pour  $j = 1$ , (I.10)<sub>3</sub> donne:

$$p_1(x_1, \xi_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2).$$

Pour  $j = 2$ , (I.11) devient

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12\nu(x_1)} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \right) D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) \Big|_{\xi_2=1/2}, \quad (\text{I.13})$$

comme  $D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) \Big|_{\xi_2=1/2} = \mathcal{R} \neq 0$ ,  $q_2$  est la solution 1-périodique donnée par:

$$q_2(x_1) = -12\mathcal{R} \langle f_1 \rangle_1 \left( \frac{\nu(x_1)}{\langle \nu \rangle_1} - 1 \right).$$

D'où:

$$u_{1,2}(x_1, \xi_2) = \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) + \frac{1}{\nu(x_1)} N_1(\xi_2) \frac{\partial q_2}{\partial x_1},$$

$$u_{2,2}(x_1, \xi_2) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \right] D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} N_2(\xi_2) \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right),$$

et nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème I.2.3.** *La solution asymptotique du problème (I.6) est donnée par:*

$$\begin{aligned}
u_1^k(x_1, x_2) &= \varepsilon^2 \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \\
&\quad + \varepsilon^4 \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu(x_1)} N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) + O(\varepsilon^5), \\
u_2^k(x_1, x_2) &= -\varepsilon^5 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \right] D^{-1} D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} N_2 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right) \right) + O(\varepsilon^6), \\
p^k(x_1, x_2) &= q_0 + \varepsilon^2 \left( q_2(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{I.14}$$

où  $q_0$  et  $q_2$  sont obtenues comme les uniques solutions de (I.12) et (I.13) respectivement.

**Remarque I.2.1.** *La solution donnée par (I.14) peut être écrite de la manière suivante:*

$$\begin{aligned}
u_1^k(x_1, x_2) &= -\varepsilon^2 \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu(x_1) \rangle_1} N_1(\xi_2) - \varepsilon^4 \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu''(x_1) D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{12\mathcal{R}\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu(x_1) \rangle_1} \frac{\nu'(x_1)}{\nu(x_1)} N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + O(\varepsilon^5), \\
u_2^k(x_1, x_2) &= \varepsilon^5 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu''(x_1) \right] D^{-1} D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{12\mathcal{R}\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu(x_1) \rangle_1} \left( \frac{\nu'(x_1)}{\nu(x_1)} \right)' N_2 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + O(\varepsilon^6), \\
p^k(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \left( f_1(\tau) - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu(\tau) \right) d\tau - \left\langle \int_0^{x_1} \left( f_1(\tau) - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu(\tau) \right) d\tau \right\rangle_1 \\
&\quad + \varepsilon^2 \left( -12\mathcal{R}\langle f_1 \rangle_1 \left( \frac{\nu(x_1)}{\langle \nu \rangle_1} - 1 \right) - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\langle \nu \rangle_1} \nu'(x_1) \left( N_1 \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) \right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Introduisons la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
 F^k(x_1, x_2) &= \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,k-1}}{\partial x_1} \right) + \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k-1}}{\partial x_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial p_k}{\partial x_1} \right) e_1 \\
 &+ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,k}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,k-2}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k}}{\partial \xi_2^2} \right) e_2 \\
 &+ \varepsilon \left( \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_1} \right) + \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k}}{\partial x_1 \partial \xi_2} \right) e_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,k-1}}{\partial x_1} \right) \right) e_2 \right) \\
 &+ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_1} \right) \right) e_2.
 \end{aligned} \tag{I.15}$$

**Théorème I.2.4.** Soit  $(u^k, p^k)$  la solution asymptotique donnée par (I.8) et  $(u, p)$  la solution de (I.6). Alors l'estimation suivante est vraie :

$$\|u^k - u_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon)^2} = O(\varepsilon^{k+5/2}).$$

*Démonstration.* Notons  $(U^k, P^k) = (u^k - u_\varepsilon, p^k - p_\varepsilon)$ . Nous obtenons le problème suivant pour  $(U^k, P^k)$ :

$$\begin{cases}
 -2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}U^k) + \nabla P^k = -\varepsilon^{k+1}F^k(x_1, x_2) & \text{dans } D_\varepsilon, \\
 \operatorname{div}U^k = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\
 U^k(x_1, \varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0, 1), \\
 U^k(x_1, -\varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0, 1), \\
 U^k \text{ est 1-périodique en } x_1 &
 \end{cases} \tag{I.16}$$

Les estimations à priori nous donnent :

$$\|u^k - u_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon)^2} \leq \mathcal{C}(K, C_{PF}) \|\varepsilon^{k+1}F^k\|_{L^2(D_\varepsilon)^2} = O(\varepsilon^{k+5/2})$$

et

$$\|\nabla(p^k - p_\varepsilon)\|_{H^{-1}(D_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+5/2}).$$

□

Considérons à présent le cas non périodique, i.e. nous construisons un développement asymptotique de la solution du problème (I.1). Supposons que  $f = f_1(x_1)e_1$ ,  $f_1 \in C^\infty([0, 1])$ . Définissons une solution asymptotique par :

$$\hat{u}^k(x_1, x_2) = u^k(x_1, x_2) + u_{BL0}^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + u_{BL1}^k\left(\frac{x_1 - 1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad (\text{I.17})$$

$$\hat{p}^k(x_1, x_2) = p^k(x_1, x_2) + p_{BL0}^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + p_{BL1}^k\left(\frac{x_1 - 1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$$

Les expressions de  $u^k$ ,  $p^k$  sont les mêmes que pour le cas périodique (I.8), (I.9) et (I.11). Comme les fonctions données par (I.8) ne satisfont pas les conditions (I.1)<sub>5</sub> et (I.1)<sub>6</sub>, nous introduisons les correcteurs couche limite. Ils correspondent à l'extrémité gauche pour  $i = 0$  et à l'extrémité droite pour  $i = 1$  et leurs expressions sont données par

$$\begin{aligned} u_{BLi}^k\left(\frac{x_1 - i}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) &= \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_j^i\left(\frac{x_1 - i}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \\ p_{BLi}^k\left(\frac{x_1 - i}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) &= \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j^i\left(\frac{x_1 - i}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Avec  $i = 0, 1$ . Pour obtenir les problèmes pour le correcteur correspondant à l'extrémité gauche, nous introduisons le domaine  $\Pi^+ = (0, \infty) \times (-1/2, 1/2)$ . Le problème

$$\begin{cases} -\nu_0 \Delta_\xi u_j^0(\xi) + \nabla_\xi p_j^0(\xi) = 0 & \text{si } \xi \in \Pi^+, \\ \operatorname{div}_\xi u_j^0 = 0 & \text{si } \xi \in \Pi^+, \\ u_j^0 = 0 & \text{si } \xi_2 = \pm 1/2, \\ u_j^0(0, \xi_2) = \varphi_{01} \delta_{j0} - \begin{pmatrix} u_{1,j}(0, \xi_2) \\ u_{2,j-1}(0, \xi_2) \end{pmatrix} & \text{si } \xi_2 \in (-1/2, 1/2), \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

avec la condition de compatibilité

$$\langle \varphi_{01} \delta_{j0} - u_{1,j}(0, \xi_2) \rangle_2 = 0, \quad (\text{I.20})$$

où

$$\langle \psi \rangle_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \psi(x, \xi_2) d\xi_2,$$

nous donnera les correcteurs couche limite pour la vitesse et pour la pression correspondant à l'extrémité gauche (voir [10]). Dans les domaines non compacts nous avons l'existence et l'unicité de ce type de problème voir [18] et [34]). Cette condition (I.20) génère une

condition au bord pour  $q_j$ :

$$\langle \varphi_{01} \rangle_2 \delta_{j0} + \frac{1}{12\nu_0} \left( \frac{\partial q_j(0)}{\partial x_1} - \delta_{j0} f_1(0) \right) + \left\langle \left\{ D^{-2} \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial x_1 \partial \xi_2} + D^{-2} \left( 2 \frac{\partial^2 u_{1,j-2}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} \right) \right\} \Big|_{x_1=0} \right\rangle_2 = 0.$$

De manière équivalente nous introduisons les correcteurs couche limite correspondant à l'extrémité droite. Les correcteurs pour la vitesse et la pression sont définis sur  $\Pi^- = (-\infty, 0) \times (-1/2, 1/2)$ . Une condition au bord analogue est obtenue pour  $q_j$  est satisfaite automatiquement grâce à la conservation de la moyenne pour  $u_{1,j}(x_1, \xi_2)$ . En effet,  $\langle u_{1,j}(x_1, \xi_2) \rangle_2 = D^{-1} u_{1,j}(x_1, \xi_2)|_{\xi_2=\frac{1}{2}}$ ; de plus, la condition

$$u_{2,j}|_{\xi_2=1/2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} D^{-1} u_{1,j}(x_1, \xi_2)|_{\xi_2=1/2} = 0$$

est équivalente à une équation pour  $q_j$ , i.e. cette équation pour  $q_j$  est équivalente à la loi de conservation de  $\langle u_{1,j}(x_1, \xi_2) \rangle_2$ .

Le problème satisfait par la solution asymptotique d'ordre  $k$  est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\text{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}\hat{u}^k) + \nabla \hat{p}^k = f - \varepsilon^{k+1} F^k(x_1, x_2) & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \text{div}\hat{u}^k = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \hat{u}_\varepsilon(x_1, \varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0, 1), \\ \hat{u}_\varepsilon(x_1, -\varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0, 1), \\ \hat{u}_\varepsilon(0, x_2) = \varepsilon^2 \varphi_0(x_2/\varepsilon) + \varepsilon^{k+3} u_{2,k}(0, \xi_2) e_2 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_j^{(1)} \left( -\frac{1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \\ \hat{u}_\varepsilon(1, x_2) = \varepsilon^2 \varphi_1(x_2/\varepsilon) + \varepsilon^{k+3} u_{2,k}(1, \xi_2) e_2 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_j^{(0)} \left( \frac{1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \end{array} \right. \quad (\text{I.21})$$

Où  $F^k$  est donnée par (I.15).

Notons que les conditions aux bords pour  $u^k$  en  $x_1 = 0, 1$  ne sont pas satisfaites exactement, car les traces de chaque fonction couche limite dans le coté opposé sont exponentiellement petites mais non nulles. Nous définissons une nouvelle fonction  $\hat{U}^k$  qui satisfait les mêmes conditions aux bords que  $u^k$  pour  $x_1 = 0, 1$ .

Décrivons sa construction : Soit  $U^k : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$  une solution du problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} U^k \in (H^1(D_\varepsilon))^2, \\ \operatorname{div} U^k = 0 \\ U^k(x_1, \varepsilon/2) = 0 \\ U^k(x_1, -\varepsilon/2) = 0 \\ U^k(0, x_2) = \varepsilon^{k+3} u_{2,k} \left(0, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) e_2 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_j^{(1)} \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \\ U^k(1, x_2) = \varepsilon^{k+3} u_{2,k} \left(1, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) e_2 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_j^{(0)} \left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } D_\varepsilon, \\ \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \\ \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2). \end{array} \quad (\text{I.22})$$

**Proposition I.2.2.** *Le problème (I.22) admet au moins une solution, de plus*

$$\|U^k\|_{(H^1(D_\varepsilon))^2} = O(\varepsilon^{k+3/2}). \quad (\text{I.23})$$

*Démonstration.* Définissons  $w_\varepsilon^k : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $D = (0,1) \times (-1/2, 1/2)$ ,

$$w_\varepsilon^k(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon (U^k)_1 \\ (U^k)_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (y_1, y_2) = (x_1, x_2/\varepsilon).$$

Il peut être démontré facilement que  $w_\varepsilon^k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y w_\varepsilon^k = 0 \\ w_\varepsilon^k(y_1, 1/2) = 0 \\ w_\varepsilon^k(y_1, -1/2) = 0 \\ w_\varepsilon^k(0, y_2) = \varepsilon^{k+3} u_{2,k}(0, y_2) e_2 + \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+3} u_{1,j}^{(1)}(-1/\varepsilon, y_2) \\ \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{2,j}^{(1)}(-1/\varepsilon, y_2) \end{pmatrix} \\ w_\varepsilon^k(1, y_2) = \varepsilon^{k+3} u_{2,k}(1, y_2) e_2 + \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+3} u_{1,j}^{(0)}(1/\varepsilon, y_2) \\ \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{2,j}^{(0)}(1/\varepsilon, y_2) \end{pmatrix} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } D, \\ \text{pour } y_1 \in (0,1), \\ \text{pour } y_1 \in (0,1), \\ \text{pour } y_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \text{pour } y_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{array} \quad (\text{I.24})$$

Où  $\operatorname{div}_y$  est la divergence en la variable  $y$ . Comme dans [15] nous pouvons prouver qu'il



existe une fonction telle que  $w_\varepsilon^k \in (H^1(D_\varepsilon))^2$  et

$$\|w_\varepsilon^k\|_{(H^1(D))^2} \leq C \|w_\varepsilon^k\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\partial D))^2}$$

avec une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$ . En utilisant les propriétés des correcteurs couche limite, nous avons

$$\|w_\varepsilon^k\|_{(H^1(D))^2} = O(\varepsilon^{k+3})$$

Des calculs directs donnent

$$\|U^k\|_{(H^1(D_\varepsilon))^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \|w_\varepsilon^k\|_{(H^1(D))^2}.$$

En combinant ces deux estimations nous terminons la preuve. □

La fonction

$$\hat{U}^k = \hat{u}^k - U^k \tag{I.25}$$

satisfait les mêmes conditions que  $u$  en  $x = 0,1$ . Le problème pour les nouvelles fonctions  $\hat{U}^k, \hat{p}^k$  est une conséquence de (I.22) et (I.21):

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}\hat{U}^k) + \nabla\hat{p}^k = f - \varepsilon^{k+1}F^k(x_1, x_2) - 2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}U^k) & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \operatorname{div}\hat{U}^k = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \hat{U}_\varepsilon(x_1, \varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ \hat{U}_\varepsilon(x_1, -\varepsilon/2) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ \hat{U}_\varepsilon(0, x_2) = \varepsilon^2\varphi_0(x_2/\varepsilon) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2), \\ \hat{U}_\varepsilon(1, x_2) = \varepsilon^2\varphi_1(x_2/\varepsilon) & \text{pour } x_2 \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2). \end{array} \right. \tag{I.26}$$

**Théorème I.2.5.** *Soit  $(\hat{u}^k, \hat{p}^k)$  la solution asymptotique de (I.17) et  $(u, p)$  la solution exacte de (I.1). Alors les estimations suivantes sont vraies :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\hat{u}^k - u_\varepsilon\|_{H(D_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+3/2}), \\ \|\nabla(\hat{p}^k - p_\varepsilon)\|_{H^{-1}(D_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+3/2}). \end{array} \right. \tag{I.27}$$

*Démonstration.* De (I.25) nous avons :

$$\|\hat{u}^k - u_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq \|\hat{U}^k - u_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon)} + \|U^k\|_{L^2(D_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+5/2}) + O(\varepsilon^{k+3/2}).$$

de (I.25) et (I.23) nous avons

$$\|\nabla\hat{u}^k - \nabla u\|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq \|\nabla\hat{U}^k - \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon)} + O(\varepsilon^{k+3/2}).$$

De (I.15), (I.23) et (I.26) nous avons:  $\|\hat{u}^k - u_\varepsilon\|_{H(D_\varepsilon)^2} = O(\varepsilon^{k+3/2})$ . L'estimation pour la pression est une conséquence de (I.27)<sub>1</sub> et des estimations à priori.  $\square$

### I.3 Flux dans une structure tubulaire

Dans cette section nous allons construire un développement asymptotique de la solution du problème (I.1), dans une structure tubulaire mince contenant une bifurcation. Nous justifierons l'estimation d'erreur. Définissons d'abord une structure tubulaire avec une bifurcation.

Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,  $n$  segments dans  $\mathbb{R}$ , qui ont un point en commun  $O$  (i.e. l'origine du système de coordonnées) et ce point est extrémité commune à tous ces segments. Soit  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ,  $n$  segments bornés dans  $\mathbb{R}$  contenant le point  $O$ , le milieu de chaque segment et tel que  $\beta_j$  est orthogonal à  $e_j$  (pour simplifier nous assumons que la longueur  $|\beta_j|$  de chaque  $\beta_j$  est égale à 1). Soit  $\beta_j^\varepsilon$  l'image de  $\beta_j$  obtenue par homothétie de paramètre  $\frac{1}{\varepsilon}$  et de centre  $O$ . Soit  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  le rectangle ouvert de base  $\beta_j^\varepsilon$  et de longueur  $e_j$ , soit  $\hat{\beta}_j^\varepsilon$  la deuxième base de chaque rectangle  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  et soit  $O_j$  la deuxième extrémité de  $e_j$  qui appartient à  $\hat{\beta}_j^\varepsilon$  (voir Fig. I.4). Nous définissons le graphe comme le faisceau de segments  $e_j$  centré en  $O$  comme (voir Fig. I.3)

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^n e_j.$$

Nous notons ci-dessous  $O_0 = O$ . Soit  $\gamma_j^\varepsilon$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , l'image des domaines bornés  $\gamma_j$  tel que  $\bar{\gamma}_j$  contient les points  $O_j$  et qui soient indépendants d' $\varepsilon$  obtenus par homothétie de paramètre  $\frac{1}{\varepsilon}$  et de centre  $O_j$ . Nous définissons la structure tubulaire associée au faisceau  $\mathcal{B}$  comme un domaine borné (voir Fig. I.5):

$$\mathcal{B}^\varepsilon = \left( \left( \bigcup_{j=1}^n \mathcal{B}_j^\varepsilon \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^n \bar{\gamma}_j^\varepsilon \right) \right)'$$

Le prime correspond aux points intérieurs du domaine. Assumons que  $\partial\mathcal{B}^\varepsilon \in C^2$ . Supposons que les bases  $\hat{\beta}_j^\varepsilon$  de  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sont des parties de  $\partial\mathcal{B}^\varepsilon$ . Nous ajoutons les domaines  $\gamma_j^\varepsilon$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , pour rendre la frontière de la structure tubulaire plus régulière.

Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu(x)\mathcal{D}u_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon = f(x) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \operatorname{div}u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\mathcal{B}^\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

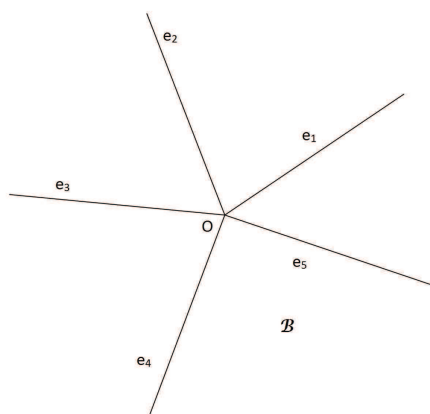


FIG. I.3 – L'ensemble des segments connectés en en point O

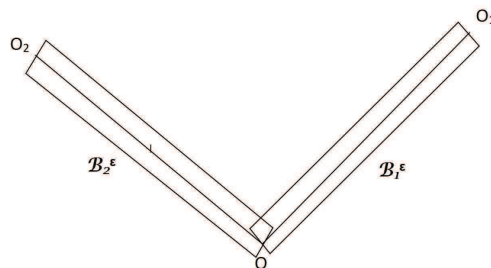


FIG. I.4 – Les rectangles  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$

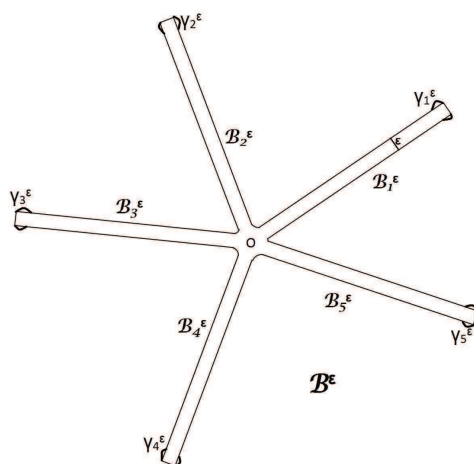


FIG. I.5 – La structure tubulaire  $\mathcal{B}^\varepsilon$

$g = 0$  sur les bords latéraux de tous les rectangles composants les  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  de plus  $g = 0$  partout à l'exception des bases  $\hat{\beta}_j^\varepsilon$  de  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  (ces bases sont supposées appartenir à la frontière de la structure tubulaire);  $g \in C^2(\hat{\beta}_j^\varepsilon)$ , et pour chaque  $j$ ,  $g = \varepsilon^2 g_j((x - O_j)/\varepsilon)$  sur  $\hat{\beta}_j^\varepsilon$ , la fonction  $g_j \in C^2$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Soit  $f$  une fonction vectorielle de  $(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2$ . La solvabilité du système donne la relation

$$\int_{\partial \mathcal{B}^\varepsilon} g \cdot n \, ds = 0. \tag{I.29}$$

Introduisons le système de coordonnées locales  $Ox_1^{e_j} x_2^{e_j}$  associé au segment  $e_j$  tel que la direction de l'axe  $Ox_1^{e_j}$  coïncide avec la direction du segment  $OO_j$ , i.e.  $x_1^{e_j}$  est la coordonnée

longitudinale. Les axes  $Ox_1^{e_j}x_2^{e_j}$  forment un système de coordonnées orthogonales. Nous notons  $d_0\varepsilon$  le minimum des rayons de tous les cercles de centre  $O$  tel que chacun de ses points appartient à un seul rectangle  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $d_1$  est le maximum des diamètres des domaines  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Nous introduisons enfin les notations suivantes

$$\hat{d}_0\varepsilon = \max\{d_0\varepsilon, d_1\varepsilon\}.$$

Nous considérons  $f$  "concentrée" aux voisinages des noeuds  $O_j$  et nulle dans les rectangles, i.e.

$$f = \begin{cases} \Phi_j \left( \frac{x - O_j}{\varepsilon} \right), & \text{for } |x - O_j| < \hat{d}_0\varepsilon, j = 0, \dots, n, \\ f_j(x_1^{e_j}), & \text{pour } |x - O_j| > \hat{d}_0\varepsilon, x_1^{e_j} \in (0, |e_j|), j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

$f_j \in C_0^\infty([0, |e_j|])$ ,  $\Phi_j \in C^1(Q)$ , ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), où  $Q$  est une boule  $|\xi| < \hat{d}_0$ . Assumons que

$$\nu(x) = \nu_0 + \nu_j(x_1^{e_j}) \quad (\text{I.31})$$

tel que  $\nu_j(x_1^{e_j}) = 0$  pour tout  $x_1^{e_j} \in [0, \beta] \cup [|e_j| - \beta; |e_j|]$ , où  $\beta$  est une constante positive;  $\nu \in C^2$  et il existe  $\kappa_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\nu(x) > \kappa_0$  pour tout  $x \in \mathcal{B}^\varepsilon$ . Sans perte de généralité nous supposons que  $f_j(x_1^{e_j}) = 0$  pour tout  $x_1^{e_j} \in [0, \beta] \cup [|e_j| - \beta; |e_j|]$ .

Soit  $H_{\text{div}=0}(\mathcal{B}^\varepsilon)$  l'espace des fonctions de divergence nulle de  $H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)$ . Soit  $H_{\text{div}=0}^0(\mathcal{B}^\varepsilon)$  le sous-espace de fonctions nulles sur la frontière de  $H_{\text{div}=0}(\mathcal{B}^\varepsilon)$ . Supposons que  $g$  peut être prolongé dans  $\mathcal{B}^\varepsilon$  comme un vecteur  $\hat{g}$  de  $H_{\text{div}=0}(\mathcal{B}^\varepsilon)$ . La formulation variationnelle de (I.1) est comme ce qui suit : Trouver  $u_\varepsilon \in H_{\text{div}=0}(\mathcal{B}^\varepsilon)$  tel que  $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \hat{g} \in H_{\text{div}=0}^0(\mathcal{B}^\varepsilon)$ , et qui satisfait l'identité intégrale suivante

$$2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}v_\varepsilon : \mathcal{D}\varphi = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} f \cdot \varphi - 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}\hat{g} : \mathcal{D}\varphi, \quad \forall \varphi \in H_{\text{div}=0}^0(\mathcal{B}^\varepsilon).$$

Le théorème de Riesz donne l'existence et l'unicité d'une telle solution car les normes

$$\|v\| = \sqrt{\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}v : \mathcal{D}v} \quad \text{et} \quad \|v\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2}$$

sont équivalentes. Nous avons comme conséquence que

$$\|v_\varepsilon\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} \leq \mathcal{C}(C_{PF}, \kappa_0) (\|f\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)^2} + \|\hat{g}\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2}),$$

où  $C_{PF}$  est indépendante de  $\varepsilon$  (voir [26]), et  $\kappa_0$  est la borne inférieure de la viscosité (I.31).

Comme précédemment pour le cas d'un canal, si  $u_\varepsilon$  est une solution faible du problème (I.28) alors il existe une distribution  $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathcal{B}^\varepsilon)$  tel que  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  satisfait ce (I.28)<sub>1</sub> au sens des distributions. Les inégalités suivantes sont vraies quand  $\hat{g} = 0$ :

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}(B^\varepsilon)} \leq C \|f\|_{(L^2(B^\varepsilon))^2}.$$

$C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

### I.3.1 Développement asymptotique

Nous construisons le développement asymptotique sous la forme suivante

$$u^a = \sum_{l=0}^k \varepsilon^{l+2} \left\{ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} u_l^e(x^{e,L}) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n u_l^{BLO_i} \left( \frac{x - O_i}{\varepsilon} \right) \right\} \quad (\text{I.32})$$

$$\begin{aligned} p^a &= \sum_{l=0}^k \varepsilon^{l+1} \left\{ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} p_l^e(x^{e,L}) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n p_l^{BLO_i} \left( \frac{x - O_i}{\varepsilon} \right) \right\} + \\ &+ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \sum_{l=0}^k \varepsilon^l q_l^e(x_1^e) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n q_0^{e_i}(x_1^{e_i} = 0) (1 - \chi_\varepsilon(x)) \theta_i(x) \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

$x^{e,L} = (x_1^e, \frac{x_2^e}{\varepsilon})$ . À la fin de la section nous multiplierons les correcteurs couches limites par des fonctions de troncature  $\eta$  dans le sous-domaine où ils sont exponentiellement petits. (voir (I.42), (I.43)). La dernière somme dans (I.33) est prise sur tous les noeuds  $O_i$  et  $q_0^{e_i}(x_1^{e_i} = 0)$  est calculé au point  $x = O_i$ ; la fonction  $q_0^{e_i}$  est supposée continue sur le graphe  $\mathcal{B}$ .  $\chi_\varepsilon(x)$  est une fonction nulle à une distance inférieure à  $(\hat{d}_0 + 1)\varepsilon$  de  $O_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\chi_\varepsilon$  vaut zéro dans les rectangles  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  si  $x_1^{e_j} \leq (\hat{d}_0 + 1)\varepsilon$  ou si  $|x_1^{e_j} - |e_j|| \leq (\hat{d}_0 + 1)\varepsilon$ ; nous supposons qu'elle vaut un dans le rectangle si  $x_1^{e_j} \geq (\hat{d}_0 + 2)\varepsilon$  et  $|x_1^{e_j} - |e_j|| \geq (\hat{d}_0 + 2)\varepsilon$ , et nous définissons  $\chi_\varepsilon$  par  $\chi_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x_1^{e_j}}{\varepsilon}\right)$  si  $(\hat{d}_0 + 1)\varepsilon \leq x_1^{e_j} \leq (\hat{d}_0 + 2)\varepsilon$  et  $\chi_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x_1^{e_j} - |e_j|}{\varepsilon}\right)$  si  $(\hat{d}_0 + 1)\varepsilon \leq |e_j| - x_1^{e_j} \leq (\hat{d}_0 + 2)\varepsilon$ .  $\chi$  étant différentiable sur  $\mathbb{R}$ , fonction d'une variable, et indépendante de  $\varepsilon$ , elle vaut zéro sur le segment  $[-(\hat{d}_0 + 1); (\hat{d}_0 + 1)]$  et 1 sur la réunion des intervalles  $(-\infty, -(\hat{d}_0 + 2)) \cup ((\hat{d}_0 + 2), +\infty)$ . De plus,  $\chi_\varepsilon$  vaut zéro sur  $\gamma_j^\varepsilon$ . Les fonctions  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont définies comme ce qui suit

$$\theta_j = \begin{cases} 0 & |x - O_j| > \min_i \frac{|e_i|}{2} \\ 1 & |x - O_j| \leq \min_i \frac{|e_i|}{2} \end{cases}$$

La relation entre les vecteurs colonnes  $x^T$  et  $x^{e_j, T}$  ( $T$  est le symbole de transposition) est

donnée par

$$x^T = \Gamma_j x^{e_j, T} + O \quad j = 1, \dots, n$$

où  $\Gamma_j$  est la matrice de passage de la base canonique à la base de coordonnées locale. En appliquant les résultats de la section I.2, pour chaque canal  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ , nous obtenons  $u_l^e$ ,  $p_l^e$  et  $q_l^e$  définis avec des constantes  $c_l^e$ ,  $d_l^e$ . En effet, en notant  $\hat{q}_l^{e_j}(x_1^{e_j})$  la solution de l'équation (I.11), avec  $\frac{\partial \hat{q}_l^{e_j}}{\partial x_1^{e_j}}(0) = 0$ . Alors la solution générale de l'équation (I.11) est sous la forme:

$$q_l^{e_j}(x_1^{e_j}) = \hat{q}_l^{e_j}(x_1^{e_j}) + c_l^{e_j} \int_0^{x_1^{e_j}} \nu(s) ds + d_l^{e_j}, \quad (\text{I.34})$$

où  $c_l^{e_j}$  et  $d_l^{e_j}$  sont des constantes inconnues ;

$$u_l^{e_j}(x^{e_j, L}) = \Gamma_j (\tilde{u}_l^{e_j}(x^{e_j, L}))^T,$$

où la seconde composante de  $\tilde{u}_l^{e_j}$  ne dépend pas de  $c_l^{e_j}$ ,  $d_l^{e_j}$  (voir (I.10)<sub>2</sub>); la même propriété est valable pour  $p_l^{e_j}$  (voir (I.10)<sub>3</sub>); la première composante  $\tilde{u}_{1,l}^{e_j}$  (voir (I.10)<sub>1</sub>) dépend de  $c_l^{e_j}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1,l}^{e_j} &= -D^{-2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_{2,l-2}^{e_j}}{\partial \xi_2^{e_j} \partial x_1^{e_j}} + \frac{1}{\nu(x_1^{e_j})} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1^{e_j}} \left( \nu(x_1^{e_j}) \frac{\partial \tilde{u}_{1,l-2}^{e_j}}{\partial x_1^{e_j}} \right) - \frac{\partial p_{l-1}^{e_j}}{\partial x_1^{e_j}} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\nu(x_1^{e_j})} N_1(\xi_2^{e_j}) \left( \frac{\partial \hat{q}_l^{e_j}}{\partial x_1^{e_j}} - f_1 \delta_{j0} \right) + c_l^{e_j} N_1(\xi_2^{e_j}) \\ &= \hat{u}_{1,l}^{e_j} + c_l^{e_j} N_1(\xi_2^{e_j}). \end{aligned}$$

Pour  $x_1^{e_j} \in [0, \beta] \cup [|e_j| - \beta, |e_j|]$ ,  $\tilde{u}_l^{e_j}$ ,  $\tilde{p}_l^{e_j}$  et  $\partial \hat{q}_l^{e_j} / \partial x_1^{e_j}$  peuvent être considérés nulles car  $f_j$  est nulle pour cette valeur de  $x_1^{e_j}$ , et la moyenne du flux  $\int_{\beta_j} \tilde{u}_{1,l}^{e_j}(\xi_2^{e_j}) d\xi_2^{e_j}$  est constante sur  $e_j$ . Ici  $N_1(\xi_2^{e_j})$  est la fonction introduite dans la section 2.

Pour obtenir le problème pour les correcteurs couche limite, nous introduisons le domaine  $\Omega_{O_0} = \cup_{j=1}^n \tilde{\Omega}_j \cup \gamma_0$ , où  $\tilde{\Omega}_j$  sont les bandes semi-infinies obtenues de  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  par extension infinie derrière la base  $\tilde{\beta}_j^\varepsilon$  et par homothétie de facteur  $\frac{1}{\varepsilon}$  (de centre  $O$ ); soit  $\Omega_j$  obtenu de  $\tilde{\Omega}_j$  par symétrie par rapport à la ligne contenant  $\beta_j^\varepsilon$  et soit  $\Omega_{O_j} = \tilde{\Omega}_j \cup \gamma_j^t$ , où  $\gamma_j^t$  est obtenue de  $\gamma_j$  par une translation (tel que le point  $O_j$  devient  $O$ ).

Comme  $\nu(x) = \nu_0$  pour tout  $x_1^{e_j} \in [0, \beta] \cup [|e_j| - \beta; |e_j|]$ , le correcteur couche limite est une paire constituée d'une fonction vectorielle  $u_l^{BLO_j}$  et d'une fonction scalaire  $p_l^{BLO_j}$

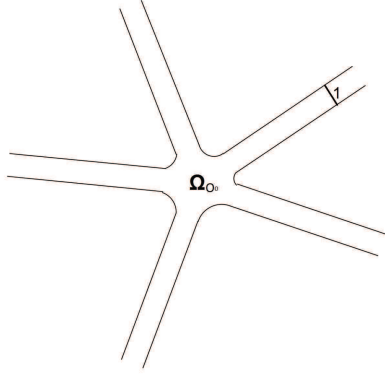


FIG. I.6 – Le domaine  $\Omega_{O_0}$



FIG. I.7 – Le domaine  $\Omega_{O_j}$ .

satisfaisant le système de Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_\xi u_l^{BLO_0} + \nabla_\xi p_l^{BLO_0} = \Phi_0(\xi) \delta_{l,0} + \\ \quad + \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \left\{ c_l^e \nu_0 \left( \Delta_\xi \left( \chi_j(\xi_1^e) \Gamma_j(N_1(\xi_2^e), 0)^T \right) - \nabla_\xi \left( \chi_j(\xi_1^e) \xi_1^e \right) \right) \right. \\ \quad \left. - d_{l+1}^e \nabla_\xi \chi_j(\xi_1^e) \right\}, \\ \operatorname{div}_\xi u_l^{BLO_0} = - \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \operatorname{div}_\xi \left( c_l^e \left( \chi_j(\xi_1^e) \Gamma_j(N_1(\xi_2^e), 0)^T \right) \right), \quad \text{si } \xi \in \Omega_{O_0}, \\ u_l^{BLO_0} |_{\partial \Omega_{O_0}} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{I.35})$$

et pour  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\hat{\xi}} u_l^{BLO_j} + \nabla_{\hat{\xi}} p_l^{BLO_j} = \\ \quad = \Phi_j(\hat{\xi}) \delta_{l,0} + \hat{c}_l^e \nu_0 \left( \Delta_{\hat{\xi}} \left( \chi_j(\hat{\xi}_1^e) \hat{\Gamma}_j(N_1(\hat{\xi}_2^e), 0)^T \right) - \nabla_{\hat{\xi}} \left( \chi_j(\hat{\xi}_1^e) \hat{\xi}_1^e \right) \right) \\ \quad - \hat{d}_{l+1}^e \nabla_{\hat{\xi}} \chi_j(\hat{\xi}_1^e), \\ \operatorname{div}_{\hat{\xi}} u_l^{BLO_j} = - \hat{c}_l^e \operatorname{div}_{\hat{\xi}} \left( \chi_j(\hat{\xi}_1^e) \hat{\Gamma}_j(N_1(\hat{\xi}_2^e), 0)^T \right), \quad \text{si } \hat{\xi} \in \Omega_{O_j}, \\ u_l^{BLO_j} |_{\partial \Omega_{O_j}; \hat{\xi}_1^{e_j} = 0} = g_j \delta_{l,0}, \\ u_l^{BLO_j} |_{\partial \Omega_{O_j}; \hat{\xi}_1^{e_j} \neq 0} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.36})$$

La variable  $\hat{\xi}_1^{e_j}$  est l'opposée de  $\xi_1^{e_j}$ , ie à la première composante du vecteur  $\Gamma_j^T \xi^{e_j, T}$ . Alors  $\hat{\xi}_1^{e_j} = \hat{\Gamma}_j^T (\xi^{e_j})^T$ , où  $\hat{\Gamma}_j = \hat{I} d \Gamma_j$  et  $\hat{I} d$  est la matrice diagonale avec  $-1, 1$  sur la diagonale.

Les constantes  $\hat{c}_l^{e_j}$ ,  $\hat{d}_l^{e_j}$  sont définies telles que les fonctions

$$c_l^{e_j} \int_0^{x_1^{e_j}} \nu(s) ds + d_l^{e_j} \quad \text{et} \quad \hat{c}_l^{e_j} \int_0^{|e_j| - x_1^{e_j}} \nu(s) ds + \hat{d}_l^{e_j}$$

sont égales, i.e.

$$c_l^{e_j} = -\hat{c}_l^{e_j}, \quad \hat{d}_l^{e_j} = c_l^{e_j} \int_0^{|e_j|} \nu(s) ds + d_l^{e_j}. \quad (\text{I.37})$$

Assumons que chaque terme de la somme  $\sum_{e=e_j; j=1, \dots, n}$  dans (I.35) est défini sur la branche de  $\Omega_{O_0}$ , correspondant à  $e = e_j$ , et s'annule dans  $\gamma_0$ . Les solutions pour les problèmes des correcteurs couche limite tendent exponentiellement vers zéro à l'infini et  $c_l^{e_j}$ ,  $\hat{c}_l^{e_j}$ ,  $d_l^{e_j}$  et  $\hat{d}_l^{e_j}$  sont choisies des conditions d'existence de telles solutions (voir [20]). Définissons en premier  $\hat{c}_l^{e_j}$  de la condition de décroissance exponentielle de  $u_l^{BLO_j}$  à l'infini:

$$\int_{\Omega_{O_j}} \hat{c}_l^{e_j} \operatorname{div}_\xi \left( \chi_j(\hat{\xi}_1^{e_j}) \hat{\Gamma}_j N_1(\xi_2^e, 0)^T \right) d\hat{\xi} = \int_{\beta_j} \left( \hat{\Gamma}_j^T g_j \right)^1 d\xi_2^e \delta_{l,0},$$

i.e.

$$- \int_{\beta_j} N_1(\xi_2^{e_j}) d\xi_2^e \hat{c}_l^{e_j} = \int_{\beta_j} \left( \hat{\Gamma}_j^T g_j \right)^1 d\xi_2^e \delta_{l,0}, \quad (\text{I.38})$$

où l'indice supérieur 1 correspond à la première composante du vecteur. Ensuite nous trouvons  $c_l^{e_j}$ , et  $\hat{d}_l^{e_j}$  comme définis dans (I.37). Puis nous déterminons les constantes  $d_{l+1}^{e_j}$  de la condition de décroissance exponentielle de  $p_l^{BLO_0}$  à l'infini. Pour cela, nous considérons en premier le problème (I.35) sans le dernier terme de l'équation (I.35)<sub>1</sub>, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_\xi \bar{u}_l^{BLO_0} + \nabla_\xi \bar{p}_l^{BLO_0} = \\ = \Phi_0(\xi) \delta_{l,0} + \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \left\{ c_l^e \nu_0 \left( \Delta_\xi (\chi_j(\xi_1^e)) \Gamma_j (N_1(\xi_2^e), 0)^T \right. \right. \\ \left. \left. - \nabla_\xi (\chi_j(\xi_1^e) \xi_1^e) \right) \right\}, \\ \operatorname{div}_\xi \bar{u}_l^{BLO_0} = - \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \operatorname{div}_\xi c_l^e \left( \chi_j(\xi_1^e) \Gamma_j (N_1(\xi_2^e), 0)^T \right), \quad \xi \in \Omega_{O_0}, \\ \bar{u}_l^{BLO_0} |_{\partial \Omega_{O_0}} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.39})$$

Les constantes  $c_l^{e_j}$  sont juste définies par (I.37) et (I.38) et satisfont la condition

$$\int_{\Omega_{O_0}} \sum_{e=e_j; \{j=1, \dots, n\}} \operatorname{div}_\xi c_l^e \left( \chi_j(\xi_1^e) \Gamma_j (N_1(\xi_2^e), 0)^T \right) d\xi_2^e = 0$$

i.e.



$$\sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \int_{\beta_j} c_l^{e_j} N_1(\xi_2^e) d\xi_2^e = 0. \quad (\text{I.40})$$

En effet, le choix des constantes  $c_l^{e_j} = -\hat{c}_l^{e_j}$  et  $c_l^{e_j}$  de (I.38) et la condition (I.29) donnent la relation (I.40).

Il existe une unique solution  $\{\bar{u}_l^{BLO_0}, \bar{p}_l^{BLO_0}\}$  d'un tel problème tel que  $\bar{u}_l^{BLO_0}$  se stabilise en zéro à l'infini dans chaque branche de  $\Omega_0$  et  $\bar{p}_l^{BLO_0}$  se stabilise sur chaque branche de  $\Omega_0$  associée à  $e_j$ , vers une constante  $\bar{p}_l^{BLO_0 \infty j}$ . Ces constantes sont définies de manière unique à une constante additive commune près, laquelle est fixé de sorte que  $\bar{p}_l^{BLO_0 \infty 1} = 0$ . Alors nous définissons

$$\begin{cases} d_{l+1}^{e_j} = -\bar{p}_l^{BLO_0 \infty j}, \\ u_l^{BLO_0} = \bar{u}_l^{BLO_0}, \\ p_l^{BLO_0} = \bar{p}_l^{BLO_0} + \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} d_{l+1}^{e_j} \chi_j(\xi_1^{e_j}) \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Sur chaque branche de  $\Omega_0$ , associée à  $e_j$ , i.e.  $p_l^{BLO_0} = \bar{p}_l^{BLO_0} - \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \bar{p}_l^{BLO_0 \infty j} \chi_j$ .

Il est clair que, la paire  $\{u_l^{BLO_0}, p_l^{BLO_0}\}$  satisfait (I.35). Les fonctions  $u_l^{BLO_0}$  et  $p_l^{BLO_0}; j = 0, 1, \dots, n$  ne sont pas définies au voisinage de  $O$ . C'est pourquoi nous changeons les expressions de  $u^a$  et  $p^a$  loin de noeuds  $O_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Soit  $\eta_j(x_1^{e_j})$  une fonction continue définie sur chaque segment  $e_j$ , elle vaut 1 si  $\left| x_1^{e_j} - \frac{|e_j|}{2} \right| \geq \frac{|e_j|}{4}$  et s'annule si  $\left| x_1^{e_j} - \frac{|e_j|}{2} \right| \leq \frac{|e_j|}{8}$ . Soit  $\eta(x) = \eta_j(x_1^{e_j})$  pour chaque rectangle  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$  et  $\eta = 1$  sur chaque  $\gamma_j^\varepsilon$ . Fixons  $\eta^{(j)}(x) = \eta(x)$  sur  $\gamma_j^\varepsilon$  et la moitié de rectangle ayant des points communs avec  $\gamma_j^\varepsilon$  et zéro sur la partie restante de  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ . Alors nous définissons  $u^a$  et  $p^a$  comme

$$\bar{u}^a = \sum_{l=0}^k \varepsilon^{l+2} \left\{ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} u_l^e(x^{e,L}) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n u_l^{BLO_i} \left( \frac{x - O_i}{\varepsilon} \right) \eta^{(i)}(x) \right\}, \quad (\text{I.42})$$

$$\begin{aligned} \bar{p}^a &= \sum_{l=0}^k \varepsilon^{l+1} \left\{ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} p_l^e(x^{e,L}) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n p_l^{BLO_i} \left( \frac{x - O_i}{\varepsilon} \right) \eta^{(i)}(x) \right\} \\ &+ \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \sum_{l=0}^k \varepsilon^l q_l^e(x_1^e) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=0}^n q_0^{e_i}(x_1^{e_i} = 0) (1 - \chi_\varepsilon(x)) \theta_i(x). \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

Notons que le dernier terme dans (I.43) correspond au correcteur couche limite  $p_l^{BLO_j}$  pour  $l = -1$ .

### I.3.2 Estimation d'erreur

Dans cette section nous estimons l'erreur entre la solution exacte et la solution asymptotique. En substituant le développement asymptotique (I.32) et (I.33) dans (I.28), nous obtenons les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\operatorname{div}(\nu(x)\mathcal{D}\bar{u}^a) + \nabla\bar{p}^a = f(x) \\ \quad - \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \left\{ \varepsilon^{k+1}\Gamma_j \left( F_{e_j}^k \right)^T \chi_\varepsilon(x) - \varepsilon^k (\nabla_\xi \chi_j(\xi_1^{e_j}) d_{k+1}^{e_j} \right. \\ \quad \quad \quad \left. - \nabla_{\tilde{\xi}} \chi_j(\tilde{\xi}_1^{e_j}) \tilde{d}_{k+1}^{e_j} \right\} + \Psi, \\ \operatorname{div}\bar{u}^a = \psi \\ \bar{u}^a = g \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \text{sur } \partial\mathcal{B}^\varepsilon, \end{array} \quad (\text{I.44})$$

où  $F_{e_j}^k$  est le résidus décrit dans (I.15) (sans la condition de périodicité en  $x_1^{e_j}$ ).  $\psi$  donnée par

$$\psi(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1^{e_i} < \beta\}, \\ -\nabla_x \eta_i(x_1^{e_i}) \cdot u^{(BLO_0)} \left( \frac{x - O_0}{\varepsilon} \right) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \left\{ \beta < x_1^{e_i} < \frac{3|e_i|}{8} \right\}, \\ 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \left\{ \frac{3|e_i|}{8} < x_1^{e_i} < \frac{5|e_i|}{8} \right\}, \\ -\nabla_x \eta_i(x_1^{e_i}) \cdot u^{(BLO_i)} \left( \frac{x - O_i}{\varepsilon} \right) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \left\{ \frac{5|e_i|}{8} < x_1^{e_i} < |e_i| \right\}, \\ 0 & \text{dans } \gamma_i^\varepsilon, i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (\text{I.45})$$

$\|\Psi\|_{(L^2((\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O\left(\exp\left(\frac{-c}{\varepsilon}\right)\right)$ ,  $\|\psi\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O\left(\exp\left(\frac{-c}{\varepsilon}\right)\right)$  avec une constante positive  $c$  et  $\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \psi ds = 0$ , car  $\int_{\partial\mathcal{B}^\varepsilon} (\bar{u}^a, n) ds = \int_{\partial\mathcal{B}^\varepsilon} (g, n) ds = 0$ . Les fonctions  $\Psi$  et  $\psi$  apparaissent de la troncature des correcteurs couches limites par la fonction  $\eta$ : elle est différente de 1 dans les parties du domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$  où  $u_l^{BLO_i}\left(\frac{x-O_i}{\varepsilon}\right)$ ,  $p_l^{BLO_i}\left(\frac{x-O_i}{\varepsilon}\right)$  et leurs dérivées sont exponentiellement petit.

Nous allons prouver l'estimation

$$\|u - \bar{u}^a\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{k+1/2}\right).$$

Nous ne pouvons pas appliquer directement les estimations à priori car la divergence

de  $\bar{u}^a$  n'est pas nulle. Construisons une fonction  $\hat{U}^a$  satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \hat{U}^a \in (H_0^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2, \\ \operatorname{div}_x \hat{U}^a = \psi & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \hat{U}^a = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1^e < \hat{d}_0\varepsilon\} \cup \gamma_j^\varepsilon, j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

**Proposition I.3.1.** *Le problème (I.46) admet au moins une solution, tel que :*

$$\|\hat{U}^a\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} = O(-c/\varepsilon)$$

*Démonstration.* Grace à (I.46)<sub>3</sub> nous pouvons considérer le problème séparément sur chaque rectangle  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ . Notons  $\hat{U}^{e_j}$  la restriction de  $\hat{U}^a$  sur  $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ , il est clair que  $\hat{U}^{e_j}(x_1^{e_j}, x_2^{e_j}) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{B}_j^\varepsilon$  tel que  $\{x_1^{e_j} < \hat{d}_0\varepsilon\}$ . Pour tout  $x \in \mathcal{B}_j^\varepsilon$  tel que  $\{x_1^{e_j} > \hat{d}_0\varepsilon\}$  nous introduisons la nouvelle variable  $(y_1^{e_j}, y_2^{e_j}) = \left( \frac{x_1^{e_j} - \hat{d}_0\varepsilon}{|e_j| - \hat{d}_0\varepsilon}, \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right)$ , clairement  $(y_1^{e_j}, y_2^{e_j}) \in (0,1) \times (-1/2, 1/2)$ . Nous définissons une nouvelle fonction  $\mu_\varepsilon^{e_j} : (0,1) \times (-1/2, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , par  $\mu_\varepsilon^{e_j}(y_1^{e_j}, y_2^{e_j}) = \left( \frac{1}{|e_j| - \hat{d}_0\varepsilon} \hat{U}_1^{e_j}((|e_j| - \hat{d}_0\varepsilon)y_1^{e_j} + \hat{d}_0\varepsilon, \varepsilon y_2^{e_j}), \frac{1}{\varepsilon} \hat{U}_2^{e_j}((|e_j| - \hat{d}_0\varepsilon)y_1^{e_j} + \hat{d}_0\varepsilon, \varepsilon y_2^{e_j}) \right)$ . Ce qui nous donne le problème suivant pour  $\mu_\varepsilon^{e_j}$ :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \mu_\varepsilon^{e_j} = \psi((|e_j| - \hat{d}_0\varepsilon)y_1^{e_j} + \hat{d}_0\varepsilon, \varepsilon y_2^{e_j}) & \text{dans } (0,1) \times (-1/2, 1/2), \\ \mu_\varepsilon^{e_j} = 0 & \text{sur } \partial((0,1) \times (-1/2, 1/2)), \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

En appliquant le résultat de [10], Chap. III, p. 127 nous obtenons:

$$\|\mu_\varepsilon^{e_j}\|_{(H^1((0,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})))^2} = O(-c/\varepsilon). \quad (\text{I.48})$$

Nous exprimons ensuite le norme de  $\hat{U}^{e_j}$  par rapport à la norme de  $\mu_\varepsilon^{e_j}$  et nous obtenons alors  $\|\hat{U}^{e_j}\|_{(H^1(\mathcal{B}_j^\varepsilon \cap \{x_1^{e_j} < \hat{d}_0\varepsilon\}))^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \|\mu_\varepsilon^{e_j}\|_{(H^1((0,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})))^2}$ , i.e.  $\|\hat{U}^{e_j}\|_{(H^1(\mathcal{B}_j^\varepsilon \cap \{x_1^{e_j} < \hat{d}_0\varepsilon\}))^2} = O(-c/\varepsilon)$ . Il s'ensuit que  $\|\hat{U}^a\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} = O(-c/\varepsilon)$ .  $\square$

Soit  $U^a = \bar{u}^a - \hat{U}^a$  Alors  $(U^a, \bar{p}^a)$  satisfait le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\operatorname{div}(\nu(x)\mathcal{D}U^a) + \nabla\bar{p}^a = f(x) + 2\operatorname{div}(\nu(x)\mathcal{D}\hat{U}^a) + \Psi \\ - \sum_{e=e_j; j=1, \dots, n} \left\{ \varepsilon^{k+1} \Gamma_j \left( F_{e_j}^k \right)^T \chi_\varepsilon(x) - \varepsilon^k (\nabla_\xi \chi_j(\xi_1^{e_j}) d_{k+1}^{e_j} - \nabla_{\tilde{\xi}} \chi_j(\tilde{\xi}_1^{e_j}) \tilde{d}_{k+1}^{e_j}) \right\}, \text{ dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \bar{u}^a = 0 \\ \bar{u}^a = g \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \text{sur } \partial\mathcal{B}^\varepsilon, \end{array} \quad (\text{I.49})$$

**Théorème I.3.1.** *Soit  $(\bar{u}^a, \bar{p}^a)$  la solution asymptotique donnée par (I.42) , (I.43) et  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  la solution du problème (I.28), les estimations suivantes sont vraies*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\bar{u}^a - u_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)^2} = O(\varepsilon^{k+1/2}), \\ \|\nabla\bar{p}^a - \nabla p_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+1/2}). \end{array} \right. \quad (\text{I.50})$$

En appliquant l'estimation à priori pour (I.49) nous obtenons

$$\|U^a - u_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+1/2})$$

et alors,

$$\|\bar{u}^a - u_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+1/2})$$

L'estimation pour la pression est obtenue des estimations a priori. Ces estimations justifient la construction de ce développement asymptotique.

**Remarque I.3.1.** *Le même résultat peut être facilement généralisé au cas où la longueur de  $\beta_j$  est différente de 1.*

**Remarque I.3.2.** *La formule (I.38) montre que seulement  $c_0^{e_j}$  est différente de zéro. La même analyse peut être faite dans le cas dans une structure à bifurcations multiples, c'est la réunion d'un nombre fini de domaine du type  $\mathcal{B}^\varepsilon$  type (voir [26], section 4.5.2), et dans ce cas les constantes  $c_i^{e_j}$  doivent être déterminés à partir d'un système algébrique d'équations linéaires (voir (4.5.43), (4.5.44) dans [26]).*

## I.4 Perturbations Aléatoires de la viscosité

Considérons à présent le cas où la fonction (I.31)  $\nu$  est aléatoire, i.e. assumons que  $\nu_1^j, \dots, \nu_M^j \in \mathcal{C}_0^2([0, |e_j|])$  et que  $(\nu^{e_1}, \dots, \nu^{e_n}) = (\nu_{\alpha_1}^1, \dots, \nu_{\alpha_n}^n)$  avec une probabilité  $(p_{i\alpha}, \dots, p_{n\alpha})$  ( $\nu_0 + \nu_k^j \geq \kappa$ ). Alors pour chaque réalisation  $(\nu_{\alpha_1}^1, \dots, \nu_{\alpha_n}^n)$  nous pouvons calculer le flux comme décrit dans les sections 1.1-1.3. Considérons l'approximation (I.14) pour un segment  $e_j$ . En calculant les valeurs de  $c_0^{e_j}$  de (I.38) nous obtenons pour  $q_0$  le problème suivant

(the Darcy law problem):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1^{e_j}} \left( \frac{1}{\nu(x_1^{e_j})} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1^{e_j}} - f \right) \right) = 0, \quad x \in e_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{1}{\nu_0} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1^{e_j}} - f \right) \Big|_{x_1^{e_j} = |e_j|} = c_0^{e_j} \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_0}{\partial x_1^{e_i}}(0) = 0, \\ q_0 \in C(\mathcal{B}^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (\text{I.51})$$

Alors le terme principal de  $u_1^{e_j}$  dans (I.14) est déterministe et est égal à  $2\varepsilon c_0^{e_j} N_1(x_2^{e_j}/\varepsilon)$ .  
 Mentionnons que les fonctions couche limite  $u^{BLO}$  sont indépendantes de  $\nu_j$  et alors elles sont déterministe.

Contrairement à  $q_0$  qui est aléatoire et

$$q_0 = \int_0^{x_1^{e_j}} f(t) dt + c_0^{e_j} \int_0^{x_1^{e_j}} \nu(t) dt \quad x \in e_j$$

Cela signifie que  $Eq_0$  satisfait  $\frac{\partial Eq_0}{\partial x_1^{e_j}} - f = E\nu(x_1^{e_j})c_0^{e_j} \quad x \in e_j$ , i.e.  $Eq_0$  est une solution du problème (I.51) où  $\nu$  est remplacée par  $E\nu$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1^{e_j}} \left( \frac{1}{E\nu(x_1^{e_j})} \left( \frac{\partial Eq_0}{\partial x_1^{e_j}} - f \right) \right) = 0, \quad x \in e_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{1}{\nu_0} \left( \frac{\partial Eq_0}{\partial x_1^{e_j}} - f \right) \Big|_{x_1^{e_j} = |e_j|} = c_0^{e_j} \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial Eq_0}{\partial x_1^{e_i}}(0) = 0, \\ Eq_0 \in C(\mathcal{B}^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (\text{I.52})$$

Ensuite, en appliquant l'équation pour  $q_2$  et la relation  $C_2^{e_j} = 0$ , nous obtenons:

$$q_2 = 12\nu(x_1^{e_j})D^{-1}D^{-2}(N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) \Big|_{\xi_2=1/2} + d_2^{e_j}.$$

Finalement, le terme principal de la première composante (locale) de la vitesse dans chaque canal est déterministe, alors que la pression est aléatoire, de même pour les correcteurs

dans la formule (I.14) pour la vitesse d'ordre  $\varepsilon^4$  pour le premier et d'ordre  $\varepsilon^5$  pour la seconde composante (localement) de la vitesse.

En remplaçant  $\frac{\partial q_0}{\partial x_1^{e_j}} - f$  par  $c_0^{e_j} \nu(x_1^{e_j})$  pour  $x \in e_j$ , nous pouvons exprimer les termes de (I.14) via les dérivées de  $\nu$  :

$$\begin{aligned}
u_1^{e_j}(x_1^{e_j}, x_2^{e_j}) &= \varepsilon^2 c_0^{e_j} N_1 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) \\
&+ \varepsilon^4 c_0^{e_j} \left( \frac{1}{\nu(x_1^{e_j})} \nu'' D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle \right) \right. \\
&+ \frac{12\nu'}{\nu} D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) |_{\xi_2=\frac{1}{2}} N_1 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^5) \\
u_2^{e_j}(x_1^{e_j}, x_2^{e_j}) &= -2\varepsilon^5 c_0^{e_j} \left\{ \left( \frac{\nu''}{\nu(x_1^{e_j})} \right)' D^{-1} D^{-2} \left( N_1 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle \right) \right. \\
&- 12 \left( \frac{\nu'}{\nu} \right)' D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) |_{\xi_2=\frac{1}{2}} N_2 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) \left. \right\} + O(\varepsilon^6) \\
p^{e_j}(x_1^{e_j}, x_2^{e_j}) &= c_0^{e_j} \int_0^{x_1^{e_j}} \nu(\theta) d\theta + \int_0^{x_1^{e_j}} f_j d\theta + d_0^{e_j} \\
&+ \varepsilon^2 12\nu D^{-1} D^{-2} (N_1(\xi_2) - \langle N_1 \rangle_2) |_{\xi_2=\frac{1}{2}} + d_2^{e_j} \\
&+ \varepsilon^2 \nu' c_0^{e_j} \left( N_1 \left( \frac{x_2^{e_j}}{\varepsilon} \right) - \langle N_1 \rangle_2 \right) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{I.53}$$

Ces formules nous permettent d'étudier les propriétés aléatoires de la vitesse par rapport à la variation aléatoire de viscosité.

## I.5 Calculs Numériques

1. Considérons le flux de Stokes dans un domaine rectangulaire  $(0,1) \times (0,\varepsilon)$  avec  $\varepsilon = 0.1$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\text{div}(\nu(x_1)Du) + \nabla p = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\varepsilon) \\ \text{div}u = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\varepsilon) \\ u(0,x_2) = \varepsilon^2 \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) & \text{sur } (0,\varepsilon) \\ \\ u(1,x_2) = \varepsilon^2 \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) & \text{sur } (0,\varepsilon) \\ u(x_1,0) = u(x_1,\varepsilon) & \text{sur } (0,1) \end{array} \right. \quad (\text{I.54})$$

Ici  $\nu(x_1) = x_1 + 1$ . De (I.10) nous avons pour  $j = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} \right) = 0 \\ u_{0,1} = \varepsilon^2 \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \\ u_{0,2} = 0 \\ p_0 = 0 \end{array} \right.$$

avec la condition (I.20) nous avons :

$$\int_0^1 \xi_2(1 - \xi_2) - u_{0,1}(0,\xi_2) d\xi_2 = 0$$

d'où en imposant la condition  $p(1,x_2) = 0$  nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0(x_1) = -x_1(x_1 + 2) + 3 \\ u_{0,1} = \varepsilon^2 \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \\ u_{0,2} = 0 \\ p_0 = 0 \end{array} \right.$$

En résolvant numériquement le problème (I.54) (avec Comsol) nous obtenons les résultats suivants :

Pour la première composante de la vitesse nous avons :

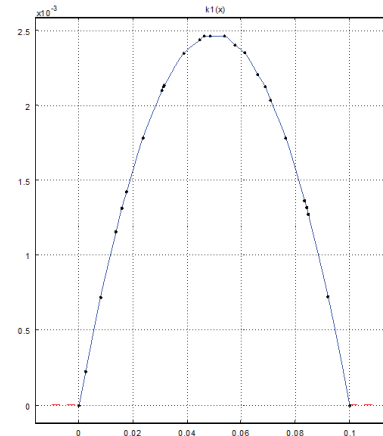
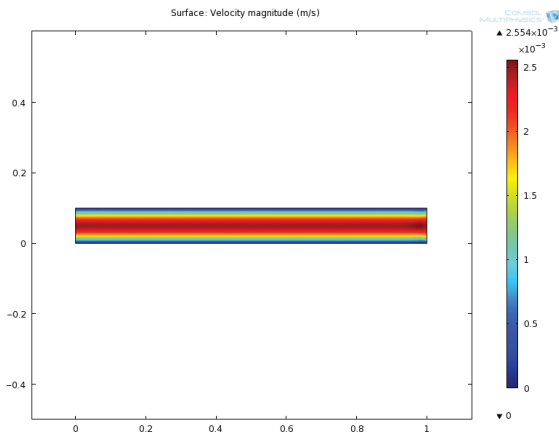


FIG. I.8 – Première composante de la vitesse

FIG. I.9 – Le profile de la première composante de la vitesse en  $x_1 = 0.5$

et pour la pression :

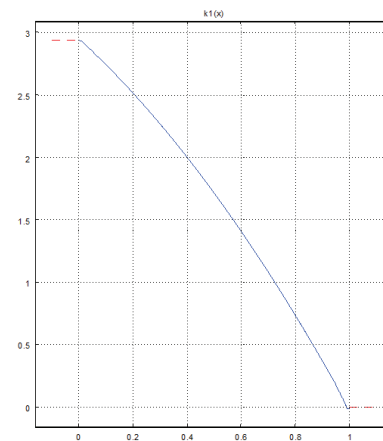
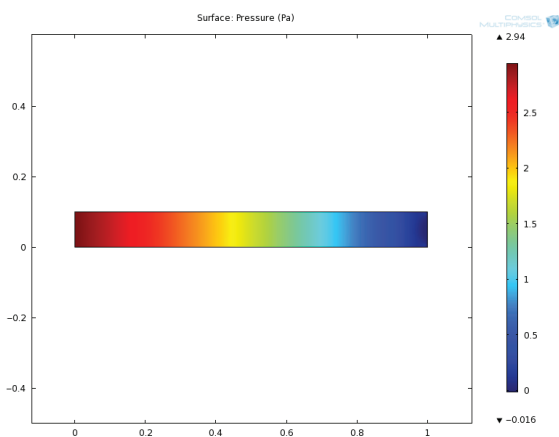


FIG. I.10 – La pression

FIG. I.11 – Le profile de la pression en  $x_2 = 0.05$

L'erreur entre les résultats numériques et les termes principaux de la solution asymptotique sont comme ce qui suit :



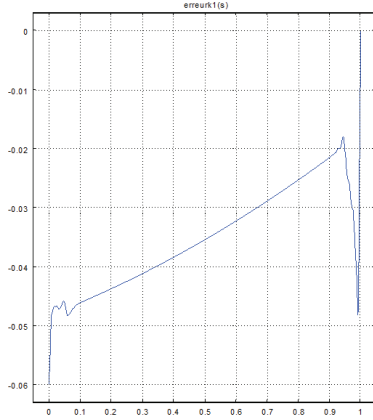


FIG. I.12 – Erreur pour la pression

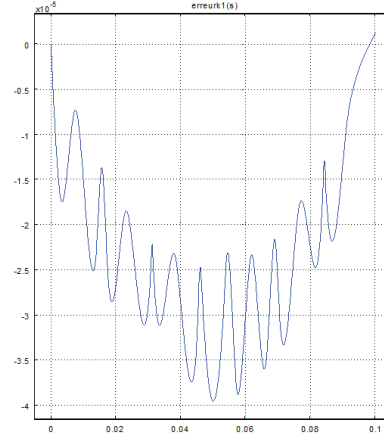


FIG. I.13 – Erreur pour la vitesse

Nous remarquons que l'erreur est de l'ordre de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^5$  pour la pression et la vitesse respectivement.

2. Considérons maintenant le problème de Stokes (I.54) dans un domaine type T  $\mathcal{B}^\varepsilon = (-1,0] \times (0,\varepsilon) \cup (0,\varepsilon) \times (-0.45,0.55)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1,x_2) = g_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad \text{sur } (0,\varepsilon) \\ u(x_1, -0.45) = g_2\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \frac{x_1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \quad \text{sur } (0,\varepsilon) \\ u(x_1, -0.45) = g_3\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) = 2\varepsilon^2 \frac{x_1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \quad \text{sur } (0,\varepsilon) \end{array} \right. \quad (\text{I.55})$$

comme conditions entrée/sortie,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $u = 0$  partout sur les bords latéraux et  $\nu(x_1,x_2) = 1 + (x_1 + 1)\mu_1(x_1) + (x_2 + 1)\mu_2(x_2) + (x_2 + 1)\mu_3(x_2)$ .  $\mu_i$  sont définies de sorte que  $\nu$  soit égale à  $x_1^{\varepsilon_j} + 1$  dans chaque rectangle et constante aux voisinages des noeuds. Les fonctions  $\mu_1, \mu_2$  et  $\mu_3$  sont de la forme suivante :

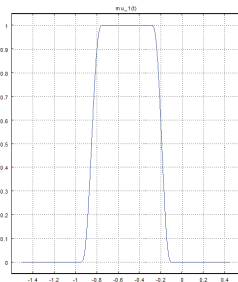


FIG. I.14 –  $\mu_1$

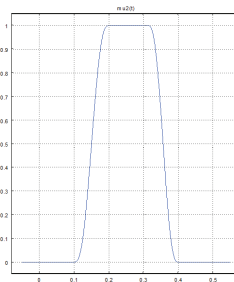


FIG. I.15 –  $\mu_2$

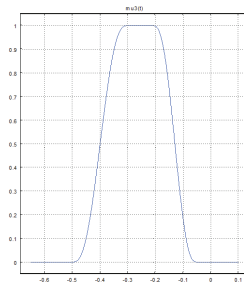


FIG. I.16 –  $\mu_3$

nous obtenons alors

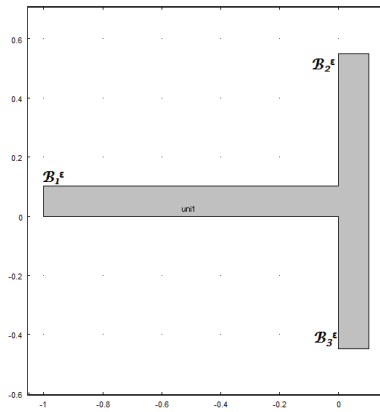


FIG. I.17 – *Le domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$*

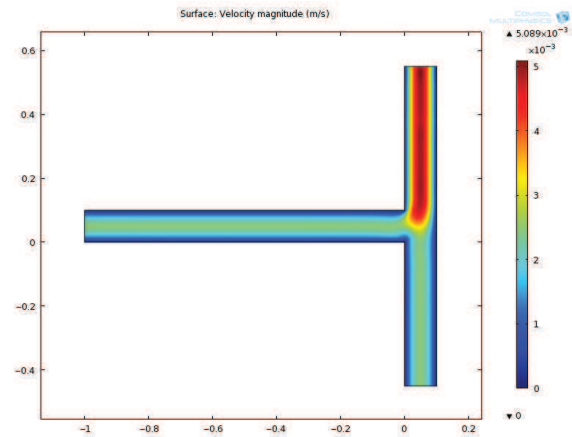


FIG. I.18 – *La magnitude de la vitesse*

Nous faisons deux découpes, la première dans  $\mathcal{B}_2^\varepsilon = (0, \varepsilon) \times (0, 0.55)$  et la deuxième dans  $\mathcal{B}_3^\varepsilon = (0, \varepsilon) \times (-0.45, 0)$ , et les résultats sont les suivants :

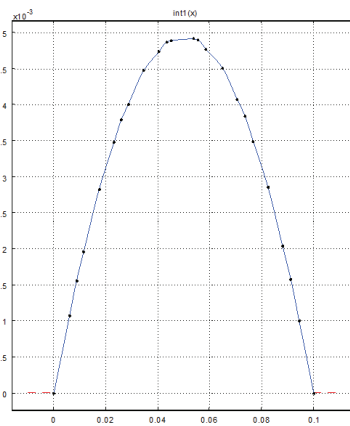


FIG. I.19 – *Le profil de la première composante de la vitesse dans  $\mathcal{B}_2^\varepsilon$  pour  $x_2 = 0.3$*

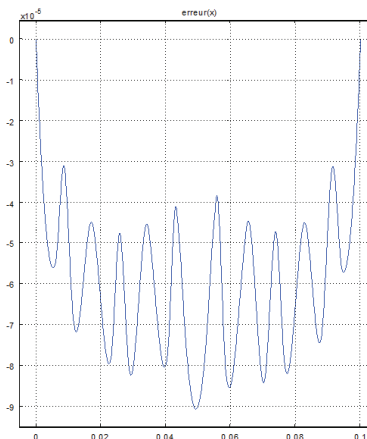


FIG. I.20 – *L'erreur pour la vitesse dans  $\mathcal{B}_2^\varepsilon$*

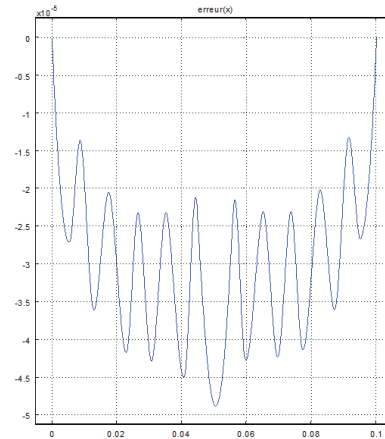
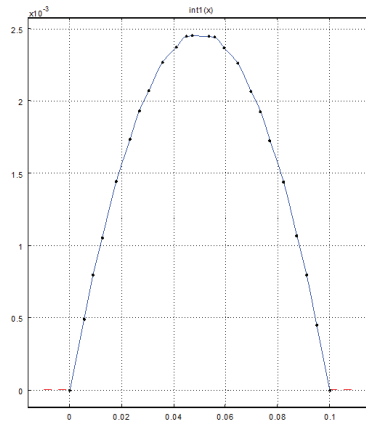


FIG. I.21 – Le profile de la première composante de la vitesse dans  $\mathcal{B}_3^\varepsilon$  pour  $x_2 = -0.2$

FIG. I.22 – L'erreur pour la vitesse dans  $\mathcal{B}_3^\varepsilon$

Nous voyons que l'erreur est de l'ordre de  $\varepsilon^5$  comme dans le cas d'un rectangle. Ceci confirme la prédiction théorique dans la section 3.

---

# Étude variationnelle et asymptotique d'un écoulement de fluide visqueux dans un canal à parois mixtes (rigide-élastique)

---

## II.1 Introduction

Nous considérons le flux de Stokes non stationnaire dans une structure tubulaire fine. En dimension deux, une structure tubulaire est l'union de rectangles fins, ayant une dimension beaucoup plus grande que l'autre. La différence entre ce chapitre et les anciens résultats présentés dans [26],[28], [31] ainsi que le chapitre 1 est que maintenant les frontières du domaine contiennent des parties rigides et d'autres élastiques.

Nous supposons que le fluide est à viscosité variable. Le domaine est constitué de deux rectangles fins avec des frontières latérales élastiques qui sont connectés par un domaine avec des frontières rigides représentant un *stent*. L'interaction entre le fluide visqueux et les frontières élastiques produit des déplacements normaux. Le comportement des frontières élastiques est décrit par l'équation de Sophie Germain.

Le plan de ce chapitre est le suivant: dans la section 2 nous donnons une description du domaine et du système couplé qui modélise notre problème. La section suivante présente la formulation variationnelle du problème. Nous pouvons trouver dans la littérature de nombreux papiers concernant l'étude variationnelle de problèmes d'interaction fluide-structure. Les résultats concernant l'existence de solutions faibles ou fortes quand le domaine est soit fixé soit dépendant du temps peuvent être trouvés dans [8], [9], [12], [32], etc. Nous établissons dans cette section des résultats tels que: existence, unicité, régularité et des estimations *a priori*. Dans la section 4 nous construisons une solution asymptotique. Comme dans [27], [28], [29], [30], [31], le problème dépend de deux paramètres. Le premier petit paramètre  $\varepsilon$ , est défini comme le ratio des dimensions des

rectangles fins, et le deuxième,  $\delta$ , correspond à la mollesse de la parois. Pour différentes valeurs des petits paramètres  $\varepsilon$  et  $\delta$ , un développement asymptotique de la solution est construit, le paramètre  $\delta$  est écrit sous la forme suivante  $\delta = \varepsilon^\gamma$ , avec  $\gamma \in \mathbb{N}, \gamma \geq 3$ . Le développement asymptotique est différent dans les cas:  $\gamma > 3$  et  $\gamma = 3$ . La solution asymptotique contient trois types différents de termes: la partie régulière, définie comme dans [27], les correcteurs couche limite correspondants aux conditions aux bords et les correcteurs correspondants à la connexion entre les deux rectangles. Les deux premiers types de termes ont été déjà introduits dans [27] et [28]. Le troisième type est caractéristique de la partie de connexion. La solution asymptotique contient aussi des fonctions de troncature introduite pour restreindre l'influence des correcteurs couches limites à la région à laquelle ils correspondent comme dans le chapitre précédent. Nous présentons et résolvons les problèmes de toutes les composantes de la solution asymptotique. Pour les deux cas  $\gamma > 3$  et  $\gamma = 3$  nous décrivons l'ordre de résolution des problèmes et donnons le terme principal du développement. Par les biais des estimations *a priori* nous justifions notre construction asymptotique, en obtenant une petite erreur entre la solution exacte et la solution asymptotique.

## II.2 Le problème physique

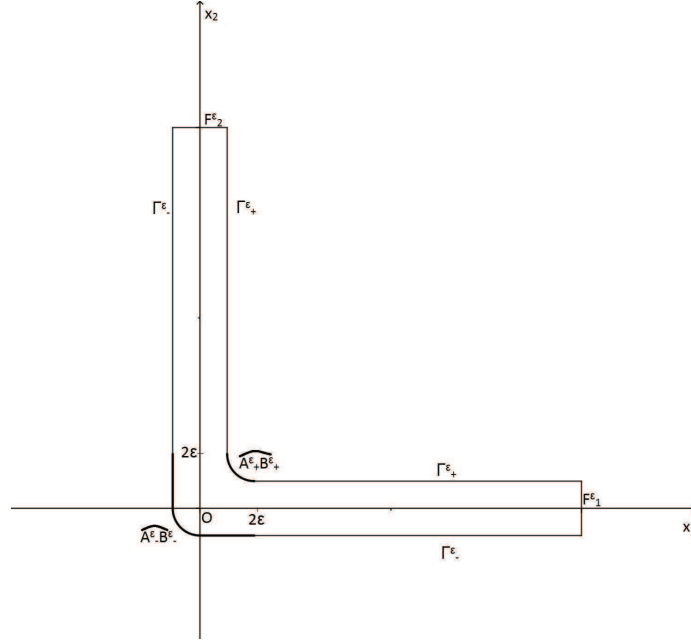
Nous considérons un fluide incompressible, visqueux, avec une viscosité variable, dans un domaine mince. Le domaine est une structure tubulaire mince, composée de deux rectangles minces avec des bords latéraux élastiques, connectés par une région avec des bords rigides. Nous introduisons encore une fois un petit paramètre  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  en relation avec le rapport de la longueur à la largeur des rectangles de dimension deux. Les rectangles fins sont donnés par :

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, -\varepsilon < x_2 < \varepsilon\}, \\ D_\varepsilon^2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\varepsilon < x_1 < \varepsilon, 0 < x_2 < 1\} \end{aligned}$$

et la zone de connexion est

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^r &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\varepsilon < x_1 < 2\varepsilon, -\varepsilon < x_2 < 2\varepsilon\} \\ &\setminus \left( \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\varepsilon < x_1 < 0, -\varepsilon < x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 \geq \varepsilon^2\} \right. \\ &\quad \left. \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < x_1 < 2\varepsilon, \varepsilon < x_2 < 2\varepsilon, (x_1 - 2\varepsilon)^2 + (x_2 - 2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon^2\} \right). \end{aligned}$$

Le domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$  est donné par  $(D_\varepsilon^1 \cap \{x_1 \geq 2\varepsilon\}) \cup (D_\varepsilon^2 \cap \{x_2 \geq 2\varepsilon\}) \cup D_\varepsilon^r$ , comme dans la Figure II.1.

FIG. II.1 – *Domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$* 

La différence entre ce travail et les travaux précédents ([28], [31]) est que le domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$  contient des zones rigides et d'autres élastiques. Soient  $\widehat{A_+^\varepsilon B_+^\varepsilon}$  et  $\widehat{A_-^\varepsilon B_-^\varepsilon}$  les zones rigides des bords de  $\mathcal{B}^\varepsilon$  définis comme ce qui suit:

$$\begin{aligned} \widehat{A_+^\varepsilon B_+^\varepsilon} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < x_1 < 2\varepsilon, \varepsilon < x_2 < 2\varepsilon, (x_1 - 2\varepsilon)^2 + (x_2 - 2\varepsilon)^2 = \varepsilon^2\}, \\ \widehat{A_-^\varepsilon B_-^\varepsilon} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\varepsilon < x_1 < 0, -\varepsilon < x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -\varepsilon, 0 < x_2 < 2\varepsilon\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 2\varepsilon, x_2 = -\varepsilon\}; \end{aligned}$$

les parties élastiques de  $\partial\mathcal{B}^\varepsilon$  sont données par :

$$\Gamma_\pm^\varepsilon = \{(\pm\varepsilon, x_2) : 2\varepsilon < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, \pm\varepsilon) : 2\varepsilon < x_1 < 1\}.$$

Soient  $F_1^\varepsilon = \{(1, x_2) : -\varepsilon < x_2 < \varepsilon\}$  et  $F_2^\varepsilon = \{(x_1, 1) : -\varepsilon < x_1 < \varepsilon\}$  les régions du flux entrant et flux sortant du domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$ . Nous notons  $F_\pm^\varepsilon = \Gamma_\pm^\varepsilon \cup \widehat{A_\pm^\varepsilon B_\pm^\varepsilon}$ , on peut écrire  $\partial\mathcal{B}^\varepsilon = F_+^\varepsilon \cup F_-^\varepsilon \cup F_1^\varepsilon \cup F_2^\varepsilon$ .

Nous étudions l'écoulement non stationnaire d'un fluide visqueux dans le domaine  $\mathcal{B}^\varepsilon$  décrit auparavant, quand le fluide interagit avec les bords élastiques  $\Gamma_\pm^\varepsilon$ . L'interaction entre le fluide et la partie élastique du bord produit un déplacement normal  $d_\pm = d_\pm(x_1, x_2, t)$ . Nous négligeons les déplacements tangentiels et on considère que les bords élastiques sont fixés. On étudie le problème pour  $t \in (0, T)$ , avec  $T$  une constante arbitraire positive et on assume que les bords ne sont pas très élastiques de sorte que les déplacements des bords est suffisamment petit. Par conséquent, à chaque instant  $t$ , on approche la position de la

membrane élastique par sa position d'origine et, alors, les équations décrivant le flux sont considérées dans leur configuration initiale. On suppose que le déplacement  $d_{\pm} : F_{\pm}^{\varepsilon} \mapsto \mathbb{R}$  est de la forme suivante :

$$d_{\pm}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} d_{\pm}(x_1, t) & \text{sur } \bar{D}_{\varepsilon}^1 \cap \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}, \\ d_{\pm}(x_2, t) & \text{sur } \bar{D}_{\varepsilon}^2 \cap \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}, \\ 0 & \text{sur } F_{\pm}^{\varepsilon} \setminus \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}. \end{cases}$$

Le problème décrit ci-dessus, avec des conditions aux bords non homogènes pour la vitesse, est modélisé par le problème couplé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2 \operatorname{div}_x (\nu(x) \mathcal{D}_x \mathbf{u}) + \nabla_x p = \mathbf{f} & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon} \times (0, T), \\ \operatorname{div}_x \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon} \times (0, T), \\ \rho h \frac{\partial^2 d_{\pm}}{\partial t^2} + \frac{h^3 E}{12} \frac{\partial^4 d_{\pm}}{\partial x_i^4} + \mu \frac{\partial^5 d_{\pm}}{\partial x_i^4 \partial t} = g_{\pm} \pm p|_{\bar{D}_{\varepsilon}^i \cap \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}} & \text{sur } (\bar{D}_{\varepsilon}^i \cap \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}) \times (0, T), \\ & i = 1, 2, \\ d_+ = 0 & \text{sur } \widehat{A_+^{\varepsilon} B_+^{\varepsilon}} \times (0, T), \\ d_- = 0 & \text{sur } \widehat{A_-^{\varepsilon} B_-^{\varepsilon}} \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_{\varepsilon} & \text{sur } (\partial \mathcal{B}^{\varepsilon} \setminus (\Gamma_+^{\varepsilon} \cup \Gamma_-^{\varepsilon})) \times (0, T), \\ d_{\pm}(1, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x_1}(1, \pm \varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ d_{\pm}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x_1}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ d_{\pm}(\pm \varepsilon, 1, t) = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x_2}(\pm \varepsilon, 1, t) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ d_{\pm}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x_2}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{\partial d_{\pm}}{\partial t}, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \times (0, T), \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon}, \\ d_{\pm}(x, 0) = \frac{\partial d_{\pm}}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\pm}^{\varepsilon}, \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal extérieur sur le bord de  $\mathcal{B}^{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tangent à  $\partial \mathcal{B}^{\varepsilon}$ . Les données du système précédent sont : quelques constantes liées au fluide et des fonctions connues.

$\rho_f, \rho, \mu, E$  sont des constantes positives données en relation avec les matériaux représentant la densité du fluide, la densité des membranes élastiques, le coefficient de viscosité et le

module de Young<sup>1</sup>, respectivement, et la constante positive  $h$  est l'épaisseur des membranes élastiques.

Les fonctions données sont:  $\nu$ , la viscosité variable du fluide satisfaisant  $\nu \in C^1(\mathcal{B}^\varepsilon)$ ,  $\nu(x) \geq \alpha > 0 \forall x \in \mathcal{B}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{f}$ , la force extérieure appliquée au fluide,  $g_\pm$ , les forces extérieures appliquées aux parties élastiques, avec  $g_\pm : F_\pm^\varepsilon \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$g_\pm(x_1, x_2, t) = \begin{cases} g_\pm(x_1, t) & \text{sur } \bar{D}_\varepsilon^1 \cap \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ g_\pm(x_2, t) & \text{sur } \bar{D}_\varepsilon^2 \cap \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ 0 & \text{sur } F_\pm^\varepsilon \setminus \Gamma_\pm^\varepsilon \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

et un petit flux entrant-sortant  $\psi_\varepsilon$  défini de la manière suivante:

$$\psi_\varepsilon(x_1, x_2, t) = \varepsilon^2 \psi(\xi_1, \xi_2, t), \quad \forall x \in \mathcal{B}^\varepsilon, \quad (\text{II.3})$$

avec  $(\xi_1, \xi_2) = (\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ . La fonction  $\psi$  est la trace de la fonction notée aussi  $\psi$  satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\xi_1, \xi_2, t) = \psi(\xi_1, t) \mathbf{e}_1, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in (2, \infty) \times (-1, 1), \\ \psi(\xi_1, \xi_2, t) = \psi(\xi_2, t) \mathbf{e}_2, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in (-1, 1) \times (2, \infty), \\ \operatorname{div}_\xi \psi = 0, \text{ dans } D^r, \\ \psi = \mathbf{0} \quad \text{sur } F_+ \cup F_-, \\ \psi(\xi_1, \xi_2, 0) = \mathbf{0}, \\ \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 + \int_{-1}^1 \psi(\xi_1, t) d\xi_1 = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

où  $D^r = \frac{1}{\varepsilon} D_\varepsilon^r$ ,  $F_\pm = F_\pm^\varepsilon$ . Les inconnues du système (II.1) sont: la vitesse du fluide,  $\mathbf{u}$ , la pression du fluide  $p$ , et les déplacements normaux des membranes élastiques  $d_\pm$ .

Le flux du fluide est décrit par les équations de Stokes non-stationnaires. Pour les déplacements on considère l'équation de Sophie-Germain. Le terme de type "visqueux",  $\mu \frac{\partial^5 d_\pm^i}{\partial x_i^4 \partial t}$ , est ajouté à l'usuelle équation d'ordre quatre pour les déplacements normaux (le modèle de Kelvin-Voigt). Habituellement,  $E$ , le module de Young, est une grande valeur ( $E$  est de l'ordre de  $10^4 - 10^6$  Pa) et cette valeur devient encore plus importante si la membrane élastique est plus rigide. De plus, on assume que l'unité d'espace est en cm et celle de temps est en secondes. On utilisera le système international d'unité, ce qui nécessite la multiplication de chaque dérivée par rapport à  $x_i$  par le facteur  $10^2$ , i.e. la dérivée d'ordre

---

1. Le module de Young en dimension deux  $E$  est défini par  $\frac{E^{(3)}}{1-\nu^2}$  où  $E^{(3)}$  est le module de Young tridimensionnel et  $\nu$  est le coefficient de Poisson



quatre va contenir un facteur  $10^8$ . Si  $h$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ m ou  $10^{-2}$ m, alors le coefficient  $\rho h$  peut être considéré comme un facteur d'ordre 1. Le coefficient  $\frac{h^3 E}{12}$  dans l'équation (II.1)<sub>3</sub> sera remplacé par un grand coefficient  $\delta^{-1}$  avec  $\delta$  de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-4}$ . Si le rapport de la largeur à la longueur des vaisseaux  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $10^{-2}$ , alors  $\delta$  est de l'ordre de  $\varepsilon^2$  à  $\varepsilon^4$ . On suppose que le terme "visqueux" est plus petit que le terme avec le coefficient  $\delta^{-1}$  et alors le nouveau coefficient aussi noté  $\mu$ , obtenu après scalling par rapport à  $x_i$ , est  $O(1)$ .

Plus de détails concernant (II.1) peuvent être trouvés, dans [27].

Avec les propriétés de  $\psi_\varepsilon$ , pour le système couplé décrivant le problème physique est :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B^\varepsilon} \mathbf{u}(x,t) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_{2\varepsilon}^1 (d_+(x_1,t) - d_-(x_1,t)) dx_1 + \int_{2\varepsilon}^1 (d_+(x_2,t) - d_-(x_2,t)) dx_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

En utilisant ensuite, les conditions initiales pour le déplacement, la condition de compatibilité devient :

$$\int_{2\varepsilon}^1 (d_+(x_1,t) - d_-(x_1,t)) dx_1 + \int_{2\varepsilon}^1 (d_+(x_2,t) - d_-(x_2,t)) dx_2 = 0. \quad (\text{II.6})$$

Cette condition montre la conservation de la masse.

## II.3 Formulation variationnelle.

### Existence, unicité, régularité et estimations a priori

Dans le but d'obtenir les propriétés ci-dessus pour la solution du problème physique, nous introduisons l'étude variationnelle. Pour simplifier les calculs, nous condérons tout d'abord (II.1) avec des conditions homogènes aux bords sur  $F_1^\varepsilon$  et  $F_2^\varepsilon$ , i.e. le problème pour  $\psi_\varepsilon = \mathbf{0}$ . Alors, les mêmes propriétés pour la solution de (II.1) sont obtenues avec les techniques usuelles pour les problèmes non homogènes. Prenant en compte les conditions aux bords pour le champ de vitesse et les déplacements et la condition (II.6) nous introduisons les espaces suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^\varepsilon = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{B}^\varepsilon, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ dans } \partial\mathcal{B}^\varepsilon \setminus (\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon), \\ \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \Gamma_\pm^\varepsilon \}, \\ W^\varepsilon = \{ (\beta_+, \beta_-) \in H^1(F_+^\varepsilon) \times H^1(F_-^\varepsilon) : (\beta_+, \beta_-) \in H_0^2(\Gamma_+^\varepsilon) \times H_0^2(\Gamma_-^\varepsilon), \\ \quad (\beta_+, \beta_-) = (0, 0) \text{ sur } \widehat{A_+^\varepsilon B_+^\varepsilon} \times \widehat{A_-^\varepsilon B_-^\varepsilon}, \\ \quad \int_{2\varepsilon}^1 (\beta_+^1(x_1) - \beta_-^1(x_1)) dx_1 + \int_{2\varepsilon}^1 (\beta_+^2(x_2) - \beta_-^2(x_2)) dx_2 = 0 \}. \end{array} \right. \quad (\text{II.7})$$

En choisissant pour les données  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; (L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)$  et  $\mathbf{g} = (g_+, g_-) \in L^2(0, T; F_+^\varepsilon) \times L^2(0, T; F_-^\varepsilon)$  nous considérons le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{d}) \in L^2(0, T; V^\varepsilon) \times H^1(0, T; W^\varepsilon), \\ \text{avec } (\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{d}}) \in L^2(0, T; (V^\varepsilon)') \times L^2(0, T; (W^\varepsilon)') \text{ qui satisfait p.p. } t \in (0, T) : \\ \rho_f \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx + 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\mathbf{u} : \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi} dx + \sum_{i=1}^2 \left\{ \rho h \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\beta} dx_i \right. \\ \left. + \frac{h^3 E}{12} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}}{\partial x_i^2} dx_i + \mu \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial x_i^2 \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}}{\partial x_i^2} dx_i \right\} = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\beta} dx_i \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in V^\varepsilon, \forall \boldsymbol{\beta} \in W^\varepsilon, \text{ avec } \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = \pm \beta_\pm \text{ sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{\partial d_\pm}{\partial t} \text{ sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{d}(0) = \dot{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (\text{II.8})$$

Ici et dans ce qui suit  $\mathbf{d} = (d_+, d_-)$  et  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_+, \beta_-)$ .

Pour le problème non homogène, nous avons la même formulation variationnelle (II.8) avec  $\mathbf{u}$  remplacée par  $\mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon$  et  $\mathbf{f}$  remplacée par  $\mathbf{f} - \rho_f \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\varepsilon}{\partial t} + 2 \operatorname{div}(\nu \mathcal{D}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon)$ .

**Théorème II.3.1.** *Le problème variationnel (II.8) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \mathbf{d})$  avec  $(\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{d}}) \in L^2(0, T; (L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2) \times L^2(0, T; L^2(F_+^\varepsilon) \times L^2(F_-^\varepsilon))$ .*

*Démonstration.* Commençons la preuve par l'unicité de la solution de (II.8). Considérons  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{d}_1)$  et  $(\mathbf{u}_2, \mathbf{d}_2)$  deux solutions de (II.8) et définissons  $(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)$ . En soustrayant les deux relations (II.8)<sub>1</sub> et prenant comme fonction test  $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{u}, \mathbf{d})$  nous obtenons :

$$0 = \frac{\rho_f}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{u}^2 dx + 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\mathbf{u} : \mathcal{D}\mathbf{u} dx \\ + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\rho h}{2} \frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right)^2 dx_i + \frac{h^3 E}{24} \frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \mu \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial x_i^2 \partial t} \right)^2 dx_i \right).$$

En intégrant de 0 à  $t$  cette égalité en prenant en compte les conditions initiales, nous obtenons :  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  p.p. dans  $(0, T)$  et  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  p.p. dans  $(0, T)$ . Alors le problème (II.8) admet une unique solution.

Pour prouver cette existence et la régularité des fonctions  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{d}$ , nous devons utiliser la méthode de Galerkin.

Nous commençons par la construction d'une base pour l'espace  $W^\varepsilon$ . Soit  $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  une base de  $H_0^2(2\varepsilon, 1)$  choisie en considérant les vecteurs propres du problème suivant :

$$\begin{cases} \zeta_j^{(iv)} = \alpha_j \zeta_j & \text{dans } (2\varepsilon, 1), \\ \zeta_j(2\varepsilon) = \zeta_j(1) = 0, \\ \zeta_j'(2\varepsilon) = \zeta_j'(1) = 0, \end{cases}$$

où  $\zeta_j^{(iv)}$  est la quatrième dérivée de  $\zeta_j$  et  $\alpha_j > 0, \forall j \in \mathbb{N}$ . Nous définissons  $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  sous la forme suivante :  $\beta_j = (\beta_{+j}, \beta_{-j})$  où

$$\beta_{\pm j}(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta_j(x_1) & \text{pour } (x_1, x_2) \in (2\varepsilon, 1) \times \{\pm\varepsilon\}, \\ 0 & \text{pour } (x_1, x_2) \in \widehat{A_\pm^\varepsilon B_\pm^\varepsilon}, \\ \zeta_j(x_2) & \text{for } (x_1, x_2) \in \{\pm\varepsilon\} \times (2\varepsilon, 1). \end{cases}$$

C'est facile de vérifier que  $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  est une base de  $W^\varepsilon$ . Nous choisissons les vecteurs de la base  $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tel que

$$\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \beta_i \cdot \beta_k dx = \delta_{ik}. \tag{II.9}$$

Comme conséquence des relations précédentes nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \beta_i'' \cdot \beta_k'' = \alpha_k \delta_{ik}. \tag{II.10}$$

Nous considérons à présent  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une base de l'espace  $V_0^\varepsilon = \{\mathbf{u} \in (H_0^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2 : \text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{B}^\varepsilon\}$ , construite avec les vecteurs propres du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -2\text{div}(\nu \mathcal{D}\psi_i) + \nabla q_i = \lambda_i \psi_i & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \text{div} \psi_i = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \psi_i = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}^\varepsilon, \end{cases}$$

avec  $\lambda_i > 0 \forall i \in \mathbb{N}$ . Les fonctions  $\psi_i, i \in \mathbb{N}$  sont uniquement déterminées à partir de la condition

$$\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \psi_j \cdot \psi_k dx = \delta_{jk}, \tag{II.11}$$

ce qui implique

$$2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\psi_i : \mathcal{D}\psi_k dx = \lambda_k \delta_{jk}. \quad (\text{II.12})$$

Ensuite, pour tout  $\beta_j$  nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi_j, p_j) \in V^\varepsilon \times L^2(\mathcal{B}^\varepsilon) \text{ tel que} \\ -2\text{div}(\nu \mathcal{D}(\varphi_j)) + \nabla p_j = 0 \text{ dans } (H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2, \\ \varphi_j \cdot \mathbf{n} = \pm \beta_{\pm j}, \varphi_j \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \Gamma_{\pm}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Suivant les résultats classiques de [33] pour le problème non homogène de Stokes, nous obtenons une unique  $\varphi_j$  et une fonction  $p_j$  unique à une constante additive près.

De plus, pour tout  $j, k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\varphi_j : \mathcal{D}\psi_k dx = 0. \quad (\text{II.13})$$

Avec les fonctions  $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , nous sommes maintenant en position de définir, pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , une solution approchée  $(\mathbf{u}_n^m, \mathbf{d}_n)$  de (II.8) comme ce qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_n^m(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \psi_i(x) + \sum_{j=1}^n \dot{b}_j(t) \varphi_j(x), \\ \mathbf{d}_n(x, t) = \sum_{j=1}^n b_j(t) \beta_j(x), \end{array} \right. \quad (\text{II.14})$$

avec  $a_i, b_j : [0, T] \mapsto \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  des fonctions scalaires inconnues. Ces fonctions sont déterminées de façon à ce que  $(\mathbf{u}_n^m, \mathbf{d}_n)$  soit la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \cdot \psi_i dx + 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m : \mathcal{D}\psi_i dx = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \psi_i dx, \\ \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \rho_f \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \cdot \varphi_j dx + 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m : \mathcal{D}\varphi_j dx + \sum_{l=1}^2 \left( \rho h \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial t^2} \cdot \beta_j dx_l \right. \\ \quad \left. + \frac{h^3 E}{12} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial x_l^2} dx_l + \mu \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_l^2 \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial x_l^2} dx_l \right) \\ = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \varphi_j dx + \sum_{l=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \beta_j dx_l, \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, n\}, \\ \mathbf{u}_n^m \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{\partial d_n^\pm}{\partial t} \text{ sur } \Gamma_{\pm}^\varepsilon, \\ \mathbf{u}_n^m(0) = \mathbf{0}, \mathbf{d}_n(0) = \dot{\mathbf{d}}_n(0) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (\text{II.15})$$

Nous introduisons les notations :

$$p_{ik} = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \varphi_k \cdot \psi_i dx, \quad q_{kj} = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \varphi_k \cdot \varphi_j dx, \quad r_{ik} = 2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu \mathcal{D}\varphi_i : \mathcal{D}\varphi_k dx.$$

Prenant en compte les notations précédentes et les relations (II.9), (II.10), (II.11), (II.12), (II.13) nous obtenons de (II.15) nous obtenons le système de  $n + m$  équations linéaires différentielles pour les fonctions inconnues  $a_i, b_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \dot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t) + \sum_{k=1}^n p_{ik} \ddot{b}_k(t) = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi}_i dx, \\ \rho_f \sum_{k=1}^m p_{kj} \dot{a}_k(t) + \rho_f \sum_{k=1}^m q_{kj} \ddot{b}_k(t) + \sum_{k=1}^n r_{kj} \dot{b}_k(t) + \rho h \ddot{b}_j(t) + \frac{h^3 E}{12} \alpha_j \dot{b}_j(t) \\ \quad + \mu \alpha_j \dot{b}_j(t) = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j dx + \sum_{l=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\beta}_j dx_l, \\ a_i(0) = b_j(0) = \dot{b}_j(0) = 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

Le système d'ordre deux précédent peut être écrit comme le système différentiel d'ordre un suivant : Trouver

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_m(t) \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad Z(t) = \begin{bmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{b}_n(t) \end{bmatrix}$$

Solution de

$$\begin{array}{c} \dot{Y} = Z \\ \left[ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{array} \right] X + \left[ \begin{array}{ccc} \rho_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_f \end{array} \right] \dot{X} + \left[ \begin{array}{ccc} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1m} & \cdots & p_{nm} \end{array} \right] \dot{Z} = \left[ \begin{array}{c} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} f \cdot \psi_1 \\ \vdots \\ \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} f \cdot \psi_m \end{array} \right] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{nm} & \cdots & p_{nm} \end{array} \right] \dot{X} + \frac{1}{\delta} \left[ \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{array} \right] Y + \rho h \left( \left[ \begin{array}{ccc} s_{11} & \cdots & s_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & \cdots & s_{nn} \end{array} \right] + I_n \right) \dot{Z} \\ + \left( \left[ \begin{array}{ccc} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{array} \right] + \mu \left[ \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{array} \right] \right) Z = \left[ \begin{array}{c} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} f \cdot \psi_1 + \sum_{l=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\beta}_j dx_l \\ \vdots \\ \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} f \cdot \psi_m + \sum_{l=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\beta}_j dx_l \end{array} \right] \end{array}$$

Les conditions initiales deviennent :

$$X(0) = Y(0) = Z(0) = 0.$$

L'existence de la solution de ce système est obtenue d'après les résultats classique pour

les équations différentielles ordinaires.

Dans cette section nous obtenons quelques estimations à priori qui donnent la régularité de la solution de (II.8). En calculant  $\sum_{i=1}^m a_i(t) \cdot (\text{II.15})_1 + \sum_{j=1}^n \dot{b}_j(t) \cdot (\text{II.15})_2$  et en utilisant (II.14) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_f}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} (\mathbf{u}_n^m)^2 dx + \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu (\mathcal{D}\mathbf{u}_n^m)^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\rho h}{2} \frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial t} \right)^2 dx_i \right. \\ & \left. + \frac{h^3 E}{24} \frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \mu \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} \right)^2 dx_i \right) \\ & = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_n^m dx + \sum_{i=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial t} dx_i. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_n^m dx & \leq \frac{\rho_f}{2} \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2\rho_f} \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 \\ \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial t} dx_i & \leq \frac{1}{2\rho h} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 + \frac{\rho h}{2} \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

D'où

$$\begin{aligned} & \rho_f \left( \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 - \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 \right) + \rho h \left( \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 - \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \right) \\ & + \frac{h^3 E}{12} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 + 2\alpha \left\| \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m \right\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4}^2 + 2\mu \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \\ & \leq \frac{1}{\rho_f} \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 + \frac{1}{\rho h} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ e^{-t} \left( \rho_f \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 + \rho h \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 + \frac{h^3 E}{12} \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \right) \right] \\ & + 2\alpha e^{-T} \left\| \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m \right\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4}^2 + 2\mu e^{-T} \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \leq \frac{1}{\rho_f} \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 + \frac{1}{\rho h} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

En intégrant de 0 à  $t$ , en utilisant les conditions initiales nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \rho_f \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 + \rho h \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon)}^2 + \frac{h^3 E}{12} \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon)}^2 \\
 & + 2\alpha \int_0^t \left\| \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m \right\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4}^2 d\tau + 2\mu \int_0^t \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon)}^2 d\tau \\
 & \leq e^T \left( \frac{1}{\rho_f} \int_0^t \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{\rho h} \int_0^t \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 d\tau \right)
 \end{aligned} \tag{II.21}$$

Nous déduisons de l'inéquation ci-dessus les étimations suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} \leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\ \left\| \mathcal{D}\mathbf{u}_n^m \right\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} \leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\ \left\| \frac{\partial d_{\pm n}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon))} \leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\ \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial s^2} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon))} \leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\ \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon \times (0,T))} \leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \end{array} \right. \tag{II.22}$$

avec  $C(\mathbf{f},\mathbf{g}) = C(T,\mu,\rho_f,\rho,E,h) \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} + \|\mathbf{g}\|_{L^2((0,T);L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon))} \right)$  et  $s$  la variable sur  $\Gamma_+^\varepsilon$  ou sur  $\Gamma_-^\varepsilon$ .

Les deuxièmes estimations sont obtenues en calculant  $\sum_{i=1}^m \dot{a}_i(t) \cdot (\text{II.15})_1 + \sum_{j=1}^n \ddot{b}_j(t) \cdot (\text{II.15})_2$  :

$$\begin{aligned}
 & \rho_f \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \nu (\mathcal{D}\mathbf{u}_n^m)^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{h^3 E}{12} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \frac{\partial^4 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t^2} dx_i \right. \\
 & \left. + \rho h \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial t^2} \right)^2 dx_i + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} \right)^2 dx_i \right) \\
 & = \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} dx + \sum_{i=1}^2 \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial t^2} dx_i.
 \end{aligned} \tag{II.23}$$

Nous écrivons  $\int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \frac{\partial^4 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t^2} dx_i$  comme  $\frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} dx_i - \int_{2\varepsilon}^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} \right)^2 dx_i$ .

puis nous utilisons l'inégalité suivante :

$$-\int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} dx_i \leq \frac{1}{2c} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(2\varepsilon,1)}^2 + \frac{c}{2} \left\| \frac{\partial^3 \mathbf{d}_n}{\partial x_i^2 \partial t} \right\|_{L^2(2\varepsilon,1)}^2$$

avec  $c = \frac{6\mu}{h^3 E}$ , enfin nous suivons le même raisonnement que précédemment c'est à dire nous écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} dx &\leq \frac{\rho_f}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)^2}^2 + \frac{1}{2\rho_f} \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)^2}^2 \\ \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial t^2} dx_i &\leq \frac{1}{2\rho h} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 + \frac{\rho h}{2} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{d}_n}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

D'où

$$\begin{aligned} &\rho_f \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)^2}^2 + \rho h \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 + \alpha \frac{d}{dt} \left\| \mathcal{D} \mathbf{u}_n^m \right\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4}^2 \\ &\leq \frac{1}{\rho_f} \left\| f(t) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)^2}^2 + \frac{1}{\rho h} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^2(F_+^\varepsilon \times F_-^\varepsilon)}^2 + \frac{2}{\mu} \left( \frac{h^3 E}{12} \right)^2 \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial s^2} \right\|_{L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon)}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

En intégrant de 0 à  $t$ , en utilisant les conditions initiales et l'estimation (II.22)<sub>4</sub> nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_n^m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} \leq \left( \frac{h^3 E}{12} \right)^{1/2} C(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \left\| \mathcal{D} \mathbf{u}_n^m \right\|_{L^\infty((0,T);(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} \leq \left( \frac{h^3 E}{12} \right)^{1/2} C(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \left\| \frac{\partial^2 d_{\pm n}}{\partial t^2} \right\|_{L^2((\Gamma_\pm^\varepsilon \times (0,T)))} \leq \left( \frac{h^3 E}{12} \right)^{1/2} C(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \left\| \frac{\partial^3 d_{\pm n}}{\partial s^2 \partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} \leq \left( \frac{h^3 E}{12} \right)^{1/2} C(\mathbf{f}, \mathbf{g}). \end{array} \right. \quad (\text{II.26})$$

De (II.22)<sub>1,2</sub> et (II.26)<sub>1,2</sub> nous obtenons que  $\{\mathbf{u}_n^m\}_{m,n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^\infty(0,T; V^\varepsilon) \cap H^1(0,T; (L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)$ . Par conséquent, nous pouvons passer à la limite dans (II.26) ce qui donne le résultat d'existence du théorème. Pour finir la preuve, notons que la régularité précisé dans (II.8) découle des estimations (II.22) et (II.26).

□

Nous introduisons la pression qui apparait dans (II.1)<sub>1,3</sub> comme une conséquence du théorème 3.1 :

**Corollaire II.3.1.** *Il existe une unique fonction  $p \in L^2(0,T; H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))$  telle que  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{d})$*



satisfait (II.1)<sub>1,3</sub> presque partout dans  $\mathcal{B}^\varepsilon \times (0,T)$  et sur  $(\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon) \times (0,T)$ , respectivement.

*Démonstration.* Nous prenons,  $\beta = 0$  dans (II.8). Alors

$$\left\langle \rho_f \frac{\partial u}{\partial t} - 2\operatorname{div}_x(\nu(x)D_x u) - f, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \{v \in (H_0^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2 : \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \mathcal{B}^\varepsilon\}$$

En appliquant le lemme de De Rham, nous prouvons l'existence d'une distribution  $q$ , unique à une distribution de  $t$  près, satisfaisant l'équation :

$$\rho_f \frac{\partial u}{\partial t} - 2\operatorname{div}_x(\nu(x)D_x u) - f = -\nabla q$$

En multipliant cette équation par une fonction test  $\varphi \in V^\varepsilon$  avec  $\varphi \cdot n = \pm \beta_\pm$  sur  $\Gamma_\pm$  en utilisant (II.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \rho h \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\beta} dx_i + \frac{h^3 E}{12} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}}{\partial x_i^2} dx_i + \mu \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial x_i^2 \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}}{\partial x_i^2} dx_i \right\} \\ & = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\beta} dx_i \pm \int_{2\varepsilon}^1 \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\beta} dx_i \right) \end{aligned}$$

pour tout  $\boldsymbol{\beta} \in W^\varepsilon$ . Il s'ensuit que

$$\rho h \frac{\partial d_\pm}{\partial t} + \frac{h^3 E}{12} \frac{d_\pm}{\partial x_i^2} + \mu \frac{\partial^3 d_\pm}{\partial x_i^2 \partial t} - g_\pm \pm q|_{\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon} = \pm h(t)$$

Le système (II.1) est satisfait par  $p = q + h$  au sens des distributions. Comme la distribution  $p$  ainsi construite a toutes ses premières dérivées dans  $H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon)$  alors  $p \in L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)$ , en outre, étant donnée que  $u \in L^2(0,T; H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))$  et  $p \in L^2(0,T; L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))$ , comme  $f \in L^2(0,T; (L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)$ , alors en appliquant le résultat de [33], Chap. I, p.33 nous obtenons  $u \in L^2(0,T; H^2(\mathcal{B}^\varepsilon))$  et  $p \in L^2(0,T; H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))$ .  $\square$

Le dernier résultat de cette première section présente les estimations pour  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{d})$ , l'unique solution de (II.1).

**Corollaire II.3.2.** *Soit  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{d})$  la solution du problème (II.1) correspondant aux données  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ . Alors les estimations suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} &\leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} &\leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\left\|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} &\leq \left(\frac{h^3 E}{12}\right)^{1/2} C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\left\|\frac{\partial d_\pm}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} &\leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\left\|\frac{\partial^2 d_\pm}{\partial s^2}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} &\leq C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\left\|\frac{\partial^2 d_\pm}{\partial t^2}\right\|_{L^2((\Gamma_\pm^\varepsilon \times (0,T)))} &\leq \left(\frac{h^3 E}{12}\right)^{1/2} C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\left\|\frac{\partial^3 d_\pm}{\partial s^2 \partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} &\leq \left(\frac{h^3 E}{12}\right)^{1/2} C(\mathbf{f},\mathbf{g}), \\
\|\nabla p\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} &\leq \left(\frac{h^3 E}{12}\right)^{1/2} C(\mathbf{f},\mathbf{g}).
\end{aligned} \tag{II.27}$$

**Remarque II.3.1.** *Si nous considérons le problème non homogène (qui correspond à  $\psi_\varepsilon$ ) nous obtenons pour la solution correspondante les même estimations (II.27) avec  $\mathbf{f}$  différente, mais qui dépend d'  $\varepsilon$  de la même manière.*

## II.4 Étude Asymptotique

Dans le but de trouver une solution approchée du problème (II.1), nous considérons des données plus régulières que dans la Section 3. Nous supposons que

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon \in (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^\varepsilon \times (0,T)))^2, \\ \mathbf{f} \in (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^\varepsilon \times (0,T)))^2, g_\pm \in \mathcal{C}^\infty(F_\pm^\varepsilon \times (0,T)), \\ \nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}^\varepsilon), \\ \exists t^* < T \text{ tel que } \mathbf{f}(x,t) = g_\pm(x,t) = \psi_\varepsilon(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathcal{B}^\varepsilon \times (0,t^*), \end{cases} \tag{II.28}$$

et  $\mathbf{f}$ ,  $g_\pm$  et  $\nu$  sont choisis de la manière suivante:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} f(x_1, t)\mathbf{e}_1 & \text{dans } (\mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1 > \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \\ f(x_2, t)\mathbf{e}_2 & \text{dans } (\mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_2 > \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \\ \mathbf{0} & \text{dans } (\mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1 \leq \frac{1}{3}, x_2 \leq \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \end{cases} \tag{II.29}$$

$$g_{\pm}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} g_{\pm}(x_1, t) & \text{sur } (F_{\pm}^{\varepsilon} \cap \{x_1 > \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \\ g_{\pm}(x_2, t) & \text{sur } (F_{\pm}^{\varepsilon} \cap \{x_2 > \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } (F_{\pm}^{\varepsilon} \cap \{x_1 \leq \frac{1}{3}, x_2 \leq \frac{1}{3}\}) \times (0, T), \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

$$\nu(x_1, x_2) = \begin{cases} \nu(x_1) & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon} \cap \{\frac{1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}\}, \\ \nu(x_2) & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon} \cap \{\frac{1}{3} < x_2 < \frac{2}{3}\}, \\ \nu_0 & \text{dans } \mathcal{B}^{\varepsilon} \cap (\{x_1 \leq \frac{1}{3}, x_2 \leq \frac{1}{3}\} \cup \{x_1 \geq \frac{2}{3}\} \cup \{x_2 \geq \frac{2}{3}\}), \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

avec  $\nu_0$  constante strictement positive.

## II.4.1 Construction de la solution asymptotique

Dans cette partie nous introduisons un deuxième petit paramètre  $\delta = \frac{12}{h^3 E}$  et notons  $\delta = \varepsilon^{\gamma}$ , avec  $\gamma \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \geq 3$ .

La solution asymptotique approchant le flux périodique dans un rectangle fin (see [27]) est modifié en utilisant deux types de correcteurs: le premier type correspondant aux conditions aux bords en  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 1$  et le deuxième représentant les fonctions couches limites aux voisinages de  $(x_1, x_2) = \mathbf{0}$ . Donc, la solution asymptotique contient la partie régulière (qui est de deux éléments vue la forme du domaine), deux fonctions couches limites correspondant à  $x_1 = 1$  et à  $x_2 = 1$ , respectivement et les correcteurs en  $(x_1, x_2) = \mathbf{0}$ . Comme les termes de la solution asymptotique devrait s'annuler dans différentes parties du domaine, nous les multiplions par des fonctions de troncature définies de la manière suivante:  $\chi, \eta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\chi, \eta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ ,

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| < 2, \\ 1, & |\tau| > 3, \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta(\tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| < \frac{3}{4}, \\ 1, & |\tau| > \frac{7}{8}. \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Nous construisons la solution asymptotique de la manière suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}(x_1, x_2, t) &= \mathbf{u}_1^{(k)}\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \mathbf{u}_2^{(k)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, t\right) \chi\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) + \\ &\quad \mathbf{u}_{bl}^{(k)1}\left(\frac{x_1 - 1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_1) + \mathbf{u}_{bl}^{(k)2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2 - 1}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_2) + \\ &\quad \mathbf{u}_{bl}^{(k)0}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \eta(1 - x_1) \eta(1 - x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_a^{(k)}(x_1, x_2, t) &= p_1^{(k)}\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + p_2^{(k)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, t\right) \chi\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) + \\
& p_{bl}^{(k)1}\left(\frac{x_1-1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_1) + p_{bl}^{(k)2}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2-1}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_2) + \\
& p_{bl}^{(k)0}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \eta(1-x_1)\eta(1-x_2),
\end{aligned} \tag{II.33}$$

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{\pm a}^{(k)}(x_1, x_2, t) &= d_{\pm 1}^{(k)}(x_1, t) \chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + d_{\pm 2}^{(k)}(x_2, t) \chi\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) + \\
& d_{\pm bl}^{(k)1}\left(\frac{x_1-1}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_1) + d_{\pm bl}^{(k)2}\left(\frac{x_2-1}{\varepsilon}, t\right) \eta(x_2) + \\
& d_{\pm bl}^{(k)0}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \eta(1-x_1)\eta(1-x_2).
\end{aligned}$$

Par définition des fonctions de troncature, notons que dans  $\mathcal{B}^\varepsilon \cap \{\frac{1}{4} \leq x_i \leq \frac{3}{4}\}$ , i.e. dans un voisinage de la région de viscosité variable, la solution asymptotique est réduite à sa partie régulière,  $(\mathbf{u}_i^{(k)}, p_i^{(k)}, d_{\pm i}^{(k)})$ , dans un voisinage de  $\{x_i = 1\}$  elle est réduite à  $(\mathbf{u}_i^{(k)} + \mathbf{u}_{bl}^{(k)i}, p_i^{(k)} + p_{bl}^{(k)i}, d_{\pm i}^{(k)} + d_{\pm bl}^{(k)i})$ ,  $i = 1, 2$ , enfin dans  $D_\varepsilon^r$  la solution asymptotique est égale au correcteur en  $x = \mathbf{0}$ ,  $(\mathbf{u}_{bl}^{(k)0}, p_{bl}^{(k)0}, d_{\pm bl}^{(k)0})$ . Ceci signifie que la partie régulière de la solution asymptotique ( qui peut être calculée et a une expression simple) représente une approximation de la solution exacte dans tout le domaine sauf dans des voisinages de  $x_1 = 1, x_2 = 1$  et  $x = \mathbf{0}$ .

Nous donnerons ensuite les expressions des trois composantes de la solution asymptotique et nous expliquerons leurs rôles et leurs constructions.

#### II.4.1.1 La partie régulière de la solution asymptotique

Pour chaque rectangle  $D_\varepsilon^1$  et  $D_\varepsilon^2$  nous définissons la partie régulière du développement asymptotique correspondante comme dans [27]. La partie régulière correspondant à  $D_\varepsilon^1$  est donnée par :

$$\left\{ \begin{aligned}
\mathbf{u}_1^{(k)}\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) &= \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{1,j}^1\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \mathbf{e}_1 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+3} u_{2,j}^1\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \mathbf{e}_2, \\
p_1^{(k)}\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) &= \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j^1\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) + \sum_{j=0}^k \varepsilon^j q_j^1(x_1, t), \\
d_{\pm 1}^{(k)}(x_1, t) &= \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+\gamma} d_{(\pm)j}^1(x_1, t).
\end{aligned} \right. \tag{II.34}$$

ceci représente la solution du problème (II.1)<sub>1,2,3,11</sub> posé dans un rectangle infini dans la direction  $Ox_1$ ,  $(-\infty, \infty) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ; les fonctions qui apparaissent dans (II.34) peuvent être calculées explicitement et représentent une bonne approximation de la solution exacte de (II.1) au voisinage de la région avec viscosité variable de  $D_\varepsilon^1$  (comme nous allons le

prouver dans la dernière section).

De la même manière nous introduisons la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^2$ .

Ainsi, la somme des deux premiers termes de la solution asymptotique représente une bonne approximation de la solution de (II.1) dans un voisinage de la région de viscosité variable du domaine, mais ne l'approche pas dans les frontières d'entrée et de sortie et dans  $D_\varepsilon^r$ . Etant donné que le but de la construction asymptotique est d'approximer la solution exacte avec des fonctions plus régulières avec une petite erreur entre eux, nous modifions et complétons la partie régulière avec deux types de correcteurs couches limites.

### II.4.1.2 Les correcteurs couches limites en $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$

Ces correcteurs couches limites sont introduites pour réparer les traces de la partie régulière de la solution asymptotique sur  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 1$ . Elles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{bl}^{(k)i} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} \mathbf{u}_j^{(i)} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), \\ p_{bl}^{(k)i} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j^{(i)} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), \\ d_{\pm bl}^{(k)i} \left( \frac{x_i}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+\gamma} d_j^{(i)} \left( \frac{x_i}{\varepsilon}, t \right), \end{array} \right. \quad i \in \{1, 2\}. \quad (\text{II.35})$$

Le correcteur avec  $i = 1$  correspond à l'extrémité  $x_1 = 1$  et celui avec  $i = 2$  correspond à  $x_2 = 1$ .

Par définition des fonctions de troncature et de la solution asymptotique nous notons l'influence de chaque correcteur défini au-dessus est significative seulement au voisinage de l'extrémité du domaine correspondante.

### II.4.1.3 Le correcteur couche limite en $x = 0$

Ce correcteur est nécessaire pour réaliser le lien entre les deux parties de la solution asymptotique, correspondants aux deux branches du domaine et obtenir les conditions sur les frontières rigides du domaine. Les expressions du correcteur en  $x = \mathbf{0}$  pour la vitesse-pression sont comme dans (II.35), alors que le correcteur des déplacements est

différent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{bl}^{(k)0} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} \mathbf{u}_j^{(0)} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), \\ p_{bl}^{(k)0} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j^{(0)} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), \\ d_{\pm bl}^{(k)0} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+\gamma} d_{(\pm)j}^{(0)} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right). \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

De la définition de la fonction de troncature  $\eta$  il s'ensuit que le correcteur en  $x = \mathbf{0}$  apparaît dans l'expression de la solution asymptotique (II.33) seulement dans  $\mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1 \leq \frac{1}{4}, x_2 \leq \frac{1}{4}\}$ , ce qui représente un voisinage de  $D_\varepsilon^r$  avec une viscosité constante et où les forces sont égales à zéro.

## II.4.2 La détermination de la solution asymptotique

Cette sous-section est dédiée à la résolution des problèmes satisfaits par les trois composantes de la solution asymptotique présentées dans la sous-section précédente. Comme les calculs sont différents selon la valeur de  $\gamma$ , nous devons analyser les problèmes et l'ordre de leur résolution pour  $\gamma > 3$  et pour  $\gamma = 3$ . De plus, dans chaque cas nous devons préciser le terme principal du développement asymptotique.

Nous commençons avec les problèmes pour les correcteurs couches limites correspondants à  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 1$  car l'étude de ces problèmes est la même pour  $\gamma > 3$  et pour  $\gamma = 3$ . Pour mieux fixer les idées, nous obtenons dans cette partie les problèmes pour les correcteurs correspondant à l'extrémité  $x_1 = 1$ .

Comme nous l'avons précisé auparavant, le terme contenant le correcteur n'est différent de zéro qu'en voisinage de l'extrémité  $x_1 = 1$ . Alors, les autres problèmes et relations correspondants à ce correcteur sont obtenues en introduisant la solution asymptotique dans (II.1)<sub>1,2,3,6,7,11</sub>. Nous obtenons deux problèmes séparés : un pour les correcteurs vitesse-pression et le deuxième pour les correcteurs des déplacements.

Étant donné que dans ce voisinage la viscosité est constante, le problème pour  $(\mathbf{u}_j^{(1)}, p_j^{(1)})$  a des coefficients constants. Nous notons  $\Pi^1$  le rectangle semi-fini  $(-\infty, 0) \times (-1, 1)$  et nous imposons pour la pression et la vitesse une limite nulle en  $-\infty$ , nous obtenons pour

$(\mathbf{u}_j^{(1)}, p_j^{(1)})$  le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\xi\xi} \mathbf{u}_j^{(1)} + \nabla_{\xi} p_j^{(1)} = -\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_{j-2}^{(1)}}{\partial t} \quad \text{dans } \Pi^1 \times (0, T), \\ \operatorname{div}_{\xi} \mathbf{u}_j^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \Pi^1 \times (0, T), \\ \mathbf{u}_j^{(1)}(\xi_1, \pm 1, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j+2-\gamma}^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial t} \mathbf{e}_2 \quad \text{dans } (-\infty, 0) \times (0, T), \\ \mathbf{u}_j^{(1)}(0, \xi_2, t) = \psi(\xi_2, t) \delta_{j0} \mathbf{e}_1 - u_{1,j}^1(1, \xi_2, t) \mathbf{e}_1 - u_{2,j-1}^1(1, \xi_2, t) \mathbf{e}_2 \\ \quad \text{sur } (-1, 1) \times (0, T), \\ \mathbf{u}_j^{(1)} \rightarrow \mathbf{0}, p_j^{(1)} \rightarrow 0, \text{ uniformément, quand } \xi_1 \rightarrow -\infty. \end{array} \right. \quad (\text{II.37})$$

La condition de compatibilité pour (II.37) est:

$$\int_{-1}^1 u_{1,j}^1(1, \xi_2, t) d\xi_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \left( d_{(+ )j+2-\gamma}^{(1)} - d_{(- )j+2-\gamma}^{(1)} \right) (\xi_1, t) d\xi_1 + \delta_{j0} \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2. \quad (\text{II.38})$$

Pour  $\gamma \geq 3$  le second membre de (II.37)<sub>3</sub> est connu; donc les correcteurs couches limites pour la vitesse et pour la pression correspondant à  $x_1 = 1$  sont uniquement déterminés de (II.37) (voir [28]). La condition (II.38) représente une relation pour déterminer la partie régulière de la solution asymptotique.

Les correcteurs couches limites pour les déplacements tendent exponentiellement vers zéros en  $-\infty$  sont obtenus comme unique solution des problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 d_{(\pm)j}^{(1)}}{\partial \xi_1^4} = -\rho h \frac{\partial^2 d_{(\pm)j-4-\gamma}^{(1)}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^5 d_{(\pm)j-\gamma}^{(1)}}{\partial \xi_1^4 \partial t} \pm p_{j-5}|_{\xi_2=\pm 1} \\ \quad \text{dans } (-\infty, 0) \times (0, T), \\ \frac{\partial^a d_{(\pm)j}^{(1)}}{\partial \xi_1^a} \rightarrow 0, \text{ uniformément, quand } \xi_1 \rightarrow -\infty, a \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{array} \right. \quad (\text{II.39})$$

Comme à l'étape  $j$  le problème (II.39) donne  $d_{(\pm)j}^{(1)}$  et  $d_{(\pm)j+1}^{(1)}$ , en introduisant la solution asymptotique dans (II.1)<sub>7</sub> nous obtenons deux conditions aux bords pour la partie régulière de la solution asymptotique pour les déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{(\pm)j}^1(1, t) = -d_{(\pm)j}^{(1)}(0, t), \\ \frac{\partial d_{(\pm)j}^1(1, t)}{\partial x_1} = -\frac{\partial d_{(\pm)j+1}^{(1)}(0, t)}{\partial \xi_1}. \end{array} \right. \quad (\text{II.40})$$

De la même manière, nous obtenons les correcteurs correspondants à l'extrémité  $x_2 = 1$ . Les couches limites pour la vitesse-pression sont définies sur  $\Pi^2 \times (0, T)$ , avec  $\Pi^2 = (-1, 1) \times (-\infty, 0)$  les couches limites pour les déplacements sont définies aussi sur  $(-\infty, 0) \times (0, T)$ . Nous étudions ensuite les problèmes pour la partie régulière de la solution asymptotique. Les résultats pour la partie régulière correspondant à  $D_\varepsilon^1$ ; la partie régulière correspondant à  $D_\varepsilon^2$  sont obtenues de la même manière que dans les travaux cités auparavant avec quelques modifications.

En introduisant (II.34) dans (II.1)<sub>1,2,3,11</sub> et collectant les termes du même ordre par rapport à  $\varepsilon$  nous obtenons le problème suivant pour  $(u_{1,j}^1, u_{2,j}^1, p_j^1, q_j^1, d_{(\pm)j}^1)$ :

$$\begin{aligned} -\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{1,j}^1}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} &= f \delta_{j0} - \rho_f \frac{\partial u_{1,j-2}^1}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}^1}{\partial x_1} \right) + \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-2}^1}{\partial \xi_2 \partial x_1} - \frac{\partial p_{j-1}^1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial p_j^1}{\partial \xi_2} &= -\rho_f \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-1}^1}{\partial \xi_2} \right) + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}^1}{\partial \xi_2^2}, \\ \frac{\partial u_{1,j}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,j}^1}{\partial \xi_2} &= 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (-1, 1) \times (0, T), \\ \frac{\partial^4 d_{(+j}^1}{\partial x_1^4} - q_j^1 &= g_+ \delta_{j0} + p_{j-1}^1|_{\xi_2=1} - \rho h \frac{\partial^2 d_{(+j-\gamma}^1}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^5 d_{(+j-\gamma}^1}{\partial x_1^4 \partial t} \quad \text{dans } (0, 1) \times \{-1\} \times (0, T), \end{aligned} \tag{II.41}$$

$$\frac{\partial^4 d_{(-j}^1}{\partial x_1^4} + q_j^1 = g_- \delta_{j0} - p_{j-1}^1|_{\xi_2=-1} - \rho h \frac{\partial^2 d_{(-j-\gamma}^1}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^5 d_{(-j-\gamma}^1}{\partial x_1^4 \partial t} \quad \text{dans } (0, 1) \times \{1\} \times (0, T),$$

$$\mathbf{u}_j^1(x_1, \pm 1, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j-\gamma+3}^1}{\partial t}(x_1, t) \mathbf{e}_2 \quad \text{dans } (0, 1) \times \{\pm 1\} \times (0, T).$$

Les deux cas,  $\gamma > 3$  et  $\gamma = 3$ , apparaissent à cause de la dernière relation du système précédent. Nous pouvons voir, alors, que pour  $\gamma > 3$  l'inconnu de cette relation est  $\mathbf{u}_j^1$ , alors que pour  $\gamma = 3$ , (II.41)<sub>6</sub> contient deux inconnus. De ce point, les calculs sont différents selon la valeur de  $\gamma$ .

Nous introduisons les fonctions :

$$N_1(\xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - 1), \quad N_2(\xi_2) = \int_{-1}^{\xi_2} N_1(\tau) d\tau$$

avec les propriétés:  $N_1'' = 1$ ,  $N_1(\pm 1) = 0$  et  $N_2(1) = -\frac{2}{3}$ .



Nous utilisons aussi les notations:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{j-1}^1(x_1, \xi_2, t) = \rho_f \frac{\partial u_{1,j-2}^1}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}^1}{\partial x_1} \right) - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-2}^1}{\partial \xi_2 \partial x_1} + \frac{\partial p_{j-1}^1}{\partial x_1}, \\ \mathcal{D}_{(\pm)j-1}^1(x_1, t) = \pm p_{j-1}^1|_{\xi_2=1} - \rho h \frac{\partial^2 d_{(\pm)j-\gamma}^1}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^5 d_{(\pm)j-\gamma}^1}{\partial x_1^4 \partial t}, \\ D^{-1} : F \rightarrow \int_{-1}^{\xi_2} F(x_1, \tau) d\tau, \\ D^{-2} : F \rightarrow \int_{-1}^{\xi_2} \int_{-1}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta - \frac{1}{2} (\xi_2 + 1) \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta, \\ I_{x_1}^{-k} : F \rightarrow \int_0^{x_1} \int_0^{a_{k-1}} \dots \int_0^{a_1} F(s, \xi_2, t) ds \\ J_{x_1} : F \rightarrow I_{x_1}^{-4}(F) + x_1^3 \left( 2 \int_0^1 I_{x_1}^{-3}(F) - \int_0^1 I_{x_1}^{-2}(F) \right) \\ \quad \quad \quad - x^2 \left( 3 \int_0^1 I_{x_1}^{-3}(F) - \int_0^1 I_{x_1}^{-2}(F) \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.42})$$

### II.4.2.1 La résolution des problèmes pour $\gamma > 3$

La partie régulière correspondant à  $D_\varepsilon^1$  est calculée en intégrant (II.41), comme ce qui suit:

**Proposition II.4.1.** *Les inconnues  $\mathbf{u}_j^1, q_j^1, p_j^1, d_{(\pm)j}^1$  sont déterminées de (II.41), à neuf fonctions de  $t$  près.*

*Démonstration.* En intégrant deux fois (II.41)<sub>1</sub> de  $-1$  à  $\xi_2$  en utilisant les conditions aux bords (II.41)<sub>6</sub> nous obtenons:

$$u_{1,j}^1(x_1, \xi_2, t) = \frac{1}{\nu(x_1)} D^{-2} (U_{j-1}^1) + \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f \delta_{j0} \right) N_1(\xi_2), \quad (\text{II.43})$$

qui contient comme inconnues  $u_{1,j}^1$  et  $q_j^1$ . Les autres fonctions contenues dans cette relation sont soit connues des itérations précédentes soit égales à zéro.

Nous intégrons ensuite la condition d'incompressibilité (II.41)<sub>3</sub> par rapport à  $\xi_2$  avec les conditions aux bords (II.41)<sub>6</sub> pour  $\xi_2 = -1$  et nous obtenons :

$$u_{2,j}^1(x_1, \xi_2, t) = \frac{\partial d_{(-)j-\gamma+3}^1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f \delta_{j0} \right) \right) N_2(\xi_2) - D^{-1} D^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) \right). \quad (\text{II.44})$$

Les deux relations précédentes donnent les composantes de la vitesse  $\mathbf{u}_j^1$  par rapport à  $q_j^1$ . Les approximations de la pression sont déterminées de (II.41)<sub>2</sub>, en supposant que les

fonctions d'intégration dépendant de  $x_1$ ,  $t$  sont nulles, comme nous considérons que toute fonction ne dépendant que de  $x_1$ ,  $t$  est contenue dans  $q_{j+1}^1$ .

$$p_j^1 = D^{-1} \left( -\rho_f \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-1}^1}{\partial \xi_2} \right) + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}^1}{\partial \xi_2^2} \right). \quad (\text{II.45})$$

En prenant  $\xi_2 = 1$  dans (II.44) et en utilisant les conditions aux bords (II.41)<sub>6</sub> for  $\xi_2 = 1$  nous obtenons une équation différentielle d'ordre deux suivante pour la fonction  $q_j^1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f \delta_{j0} \right) \right) &= \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (d_{(+ )j-\gamma+3}^1 - d_{(- )j-\gamma+3}^1) \\ &+ \frac{3}{2} \int_{-1}^1 D^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) \right) d\xi_2. \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

En intégrant (II.46) de  $x_1$  à 1, nous exprimons  $\frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}$  en fonction de  $\frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}(1,t)$ , qui représente la seule inconnue de cette expression. Cette fonction de  $t$  est obtenue de la manière suivante: nous prenons  $x_1 = 1$  dans (II.43) et nous introduisons le resultat dans (II.38). Ainsi, nous déterminons l'expression de  $\frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}$  dans  $(0,1) \times (0,T)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f \delta_{j0} \right) &= -\frac{3}{2} \delta_{j0} \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 D^{-2} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) d\xi_2 \\ &- \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \left( d_{(+ )j+2-\gamma}^{(1)} - d_{(- )j+2-\gamma}^{(1)} \right) (\xi_1, t) d\xi_1 - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^1 \left( d_{(+ )j-\gamma+3}^1 - d_{(- )j-\gamma+3}^1 \right) (s, t) ds. \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

En introduisant (II.47) dans (II.43) et (II.46) dans (II.44) nous déterminons  $\mathbf{u}_j^1$  dans  $(0,1) \times (-1,1) \times (0,T)$ .

Nous intégrons ensuite  $\nu(x_1) \cdot (\text{II.47})$  de 0 à  $x_1$  et nous obtenons  $q_j^1$  déterminé à une fonction en  $t$  près,  $q_j^1(0,t)$ :

$$\begin{aligned} q_j^1(x_1, t) &= \delta_{j0} \int_0^{x_1} f(s, t) ds - \frac{3}{2} \int_0^{x_1} \nu(\theta) \int_{\theta}^1 \frac{\partial}{\partial t} (d_{(+ )j-\gamma+3}^1 - d_{(- )j-\gamma+3}^1) (s, t) ds d\theta \\ &- \frac{3}{2} \left( \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \left( d_{(+ )j+2-\gamma}^{(1)} - d_{(- )j+2-\gamma}^{(1)} \right) (\xi_1, t) d\xi_1 + \delta_{j0} \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 \right) \left( \int_0^{x_1} \nu(s) ds \right) \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^{x_1} \int_{-1}^1 D^{-2} (U_{j-1}^1(s, \xi_2, t)) d\xi_2 ds + q_j^1(0, t). \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Les fonctions  $d_{(\pm )j}^1$  satisfont les équations différentielles d'ordre quatre suivantes :

$$\frac{\partial^4 d_{(\pm )j}^1}{\partial x_1^4} = \pm q_j^1 + g_{\pm} \delta_{j0} + \mathcal{D}_{(\pm )j-1}^1, \quad (\text{II.49})$$

avec  $q_j^1$  donné par (II.48). En écrivant  $q_j^1$  comme  $Q_j^1(x_1, t) + q_j^1(0, t)$  et en intégrant quatre

fois (II.49) par rapport à  $x_1$  nous obtenons les expressions suivantes pour  $d_{(\pm)j}^1$ :

$$\begin{aligned}
 d_{(+j)}^1(x_1, t) &= d_{(+j)}^1(0, t)(1 - 3x_1^2 + 2x_1^3) + \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(0, t)(x_1 - 2x_1^2 + x_1^3) + d_{(+j)}^1(1, t)(3x_1^2 - 2x_1^3) \\
 &\quad + \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(1, t)(-x_1^2 + x_1^3) + q_j^1(0, t) \left( \frac{x_1^2}{24} - \frac{x_1^3}{12} + \frac{x_1^4}{24} \right) + J_{x_1}(Q_j^1) + J_{x_1}(g_+) \delta_{j0} + J_{x_1}(\mathcal{D}_{(+j-1)}^1) \\
 d_{(-j)}^1(x_1, t) &= d_{(-j)}^1(0, t)(1 - 3x_1^2 + 2x_1^3) + \frac{\partial d_{(-j)}^1}{\partial x_1}(0, t)(x_1 - 2x_1^2 + x_1^3) + d_{(-j)}^1(1, t)(3x_1^2 - 2x_1^3) \\
 &\quad + \frac{\partial d_{(-j)}^1}{\partial x_1}(1, t)(-x_1^2 + x_1^3) - q_j^1(0, t) \left( \frac{x_1^2}{24} - \frac{x_1^3}{12} + \frac{x_1^4}{24} \right) - J_{x_1}(Q_j^1) + J_{x_1}(g_-) \delta_{j0} + J_{x_1}(\mathcal{D}_{(-j-1)}^1),
 \end{aligned} \tag{II.50}$$

D'où la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^1$  est déterminée à  $q_j^1(0, t), d_{(\pm)j}^1(0, t), \frac{\partial d_{(\pm)j}^1}{\partial x_1}(0, t), d_{(\pm)j}^1(1, t), \frac{\partial d_{(\pm)j}^1}{\partial x_1}(1, t)$ , près ce qui termine la preuve.  $\square$

De la même manière nous exprimons la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^2$  dépendant de neuf fonctions inconnues en  $t$ .

Nous continuons notre approche avec les problèmes pour le correcteur en  $x = \mathbf{0}$ . Comme nous l'avons déjà précisé, le terme de la solution asymptotique contenant ce correcteur n'est différent de zéro qu'en voisinage de  $D_\varepsilon^r$ . Dans ce voisinage, l'expression de la solution asymptotique se réduit à  $(\mathbf{u}_1^{(k)}(x_1, \xi_2, t)\chi(\xi_1) + \mathbf{u}_2^{(k)}(\xi_1, x_2, t)\chi(\xi_2) + \mathbf{u}_{bl}^{(k)0}(\xi, t), p_1^{(k)}(x_1, \xi_2, t)\chi(\xi_1) + p_2^{(k)}(\xi_1, x_2, t)\chi(\xi_2) + p_{bl}^{(k)0}(\xi, t), d_{\pm 1}^{(k)}(x_1, t)\chi(\xi_1) + d_{\pm 2}^{(k)}(x_2, t)\chi(\xi_2) + d_{\pm bl}^{(k)0}(\xi, t))$ . Pour obtenir les problèmes pour les correcteurs en  $x = \mathbf{0}$ , nous introduisons l'expression précédente de la solution asymptotique dans (II.1)<sub>1,2,3,4,5,6,11</sub>, avec  $\nu = \nu_0$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{0}$  in (II.1)<sub>1,3</sub>; pour dériver les termes qui contiennent les deux types de variables  $x_i$  et  $\xi_i$  nous procédons comme ce qui suit: nous remplaçons  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  par  $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ , et  $x_i$  par  $\varepsilon \xi_i$  et nous développons ces fonctions en série de Taylor par rapport à  $x_i = \varepsilon \xi_i$ . Nous introduisons les notations  $\mathcal{B} = D^r \cup \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \geq 2, \xi_2 \in (-1, 1)\} \cup \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in (-1, 1), \xi_2 \geq 2\}$ ,  $\widehat{A_\pm B_\pm} =$

$\frac{1}{\varepsilon} \widehat{A_{\pm}^{\varepsilon} B_{\pm}^{\varepsilon}}$  et nous obtenons pour  $(\mathbf{u}_j^{(0)}, p_j^{(0)})$  le problème à divergence non nulle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\xi\xi} \mathbf{u}_j^{(0)} + \nabla_{\xi} p_j^{(0)} = -\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_{j-2}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{F}_j \\ \quad + (1 - \chi(\xi_1))'_{\xi_1} q_{j+1}^1(0,t) \mathbf{e}_1 + (1 - \chi(\xi_2))'_{\xi_2} q_{j+1}^2(0,t) \mathbf{e}_2 \quad \text{dans } \mathcal{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j^{(0)} = \tilde{\theta}_j \quad \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \widehat{A_+ B_+} \cup \widehat{A_- B_-}, \\ \mathbf{u}_j^{(0)}(\xi_1, \pm 1, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j+2-\gamma}^{(0)}}{\partial t}(\xi_1, \pm 1, t) \mathbf{e}_2 \quad \text{pour } \xi_1 \geq 2, \\ \mathbf{u}_j^{(0)}(\pm 1, \xi_2, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j+2-\gamma}^{(0)}}{\partial t}(\pm 1, \xi_2, t) \mathbf{e}_1 \quad \text{pour } \xi_2 \geq 2, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} \rightarrow \mathbf{0} \text{ uniformément quand } \xi_1 \rightarrow \infty, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} \rightarrow \mathbf{0} \text{ uniformément quand } \xi_2 \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (\text{II.51})$$

pour  $j \geq 0$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\xi\xi} \mathbf{u}_{-1}^{(0)} + \nabla_{\xi} p_{-1}^{(0)} = (1 - \chi(\xi_1))'_{\xi_1} q_0^1(0,t) \mathbf{e}_1 + (1 - \chi(\xi_2))'_{\xi_2} q_0^2(0,t) \mathbf{e}_2 \quad \text{in } \mathcal{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{-1}^{(0)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathbf{u}_{-1}^{(0)} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \widehat{A_+ B_+} \cup \widehat{A_- B_-}, \\ \mathbf{u}_{-1}^{(0)}(\xi_1, \pm 1, t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \xi_1 \geq 2, \\ \mathbf{u}_{-1}^{(0)}(\pm 1, \xi_2, t) = \mathbf{0} \quad \text{pour } \xi_2 \geq 2, \\ \mathbf{u}_{-1}^{(0)} \rightarrow \mathbf{0} \text{ uniformément quand } \xi_1 \rightarrow \infty, \\ \mathbf{u}_{-1}^{(0)} \rightarrow \mathbf{0} \text{ uniformément quand } \xi_2 \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (\text{II.52})$$

Contrairement au problème (II.37) qui donne les correcteurs pour  $x_1 = 1$ , ce problème contient un second membre inconnu. Les fonctions  $\mathbf{F}_j$  sont connues, mais  $q_{j+1}^1(0,t)$  et  $q_{j+1}^2(0,t)$  sont des éléments de l'approximation suivante, donc inconnus. La fonction  $\tilde{\theta}_j$  est donnée par :

$$\tilde{\theta}_j = -\operatorname{div}_{\xi} \left( \chi(\xi_1) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial^l u_{2,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_2 \right) \right. \\ \left. + \chi(\xi_2) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_2^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^2(\xi_1, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial^l u_{2,j-l}^2(\xi_1, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_2 \right) \right). \quad (\text{II.53})$$

et doit satisfaire la condition de compatibilité.

Le problème (II.52) a une unique solution (avec la pression unique à une fonction de  $t$

près)

$$\mathbf{u}_{-1}^{(0)} = \mathbf{0},$$

$$p_{-1}^{(0)} = \begin{cases} (1 - \chi(\xi_1))q_0^1(0,t) & \text{pour } \xi_1 \geq 2, \\ q_0^1(0,t) = q_0^2(0,t) & \text{dans } D_r, \\ (1 - \chi(\xi_2))q_0^2(0,t) & \text{pour } \xi_2 \geq 2. \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Nous obtenons ensuite les problèmes pour les correcteurs en  $x = \mathbf{0}$  correspondant aux déplacements. Nous remarquons d'abord que

$$d_{(\pm)j}^{(0)} = 0 \quad \text{on} \quad \widehat{A_{\pm}B_{\pm}}. \quad (\text{II.55})$$

Notons  $\tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}$  l'unique solution de

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1^4} &= \rho h (1 - \chi(\xi_1)) + \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \frac{\partial^{l+2} d_{(\pm)j-\gamma-4-l}^1}{\partial t^2 \partial x_1^l}(0,t) \\ &+ \sum_{l=2}^j \frac{\partial^4}{\xi_1^4} \left( (1 - \chi(\xi_1)) \frac{\xi_1^l}{l!} \right) \frac{\partial^l d_{(\pm)j-l}^1}{\partial x_1^l}(0,t) \\ &+ \mu \sum_{l=0}^j \frac{\partial^4}{\xi_1^4} \left( (1 - \chi(\xi_1)) \frac{\xi_1^l}{l!} \right) \frac{\partial^{l+1} d_{(\pm)j-\gamma-l}^1}{\partial t \partial x_1^l}(0,t) \\ &- (1 - \chi(\xi_1)) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \frac{\partial^l p_{j-5-l}^1}{\partial x_1^l}(0, \pm 1, t) \\ &- (1 - \chi(\xi_1)) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \frac{\partial^l q_{j-4-l}^1}{\partial x_1^l}(0,t), \\ \frac{\partial^a \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1^a} &\rightarrow 0, \quad \text{uniformément quand } \xi_1 \rightarrow -\infty, \quad a \in \{0,1,2,3\}, \end{aligned} \right. \quad (\text{II.56})$$

et  $\tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}$  l'unique solution de

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1^4} &= \frac{\partial^4 \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1^4} - \rho h \frac{\partial^2 d_{(\pm)j-\gamma-4}^{(0)}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^5 d_{(\pm)j-\gamma}^{(0)}}{\partial \xi_1^4 \partial t} + p_{j-5/\xi_2=\pm 1}^{(0)}, \\ \frac{\partial^a \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1^a} &\rightarrow 0, \text{ uniformément quand } \xi_1 \rightarrow -\infty, \quad a \in \{0,1,2,3\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{II.57})$$

En introduisant la solution asymptotique dans (II.1)<sub>3</sub> et en identifiant les coefficients

d'ordre  $\varepsilon$  nous obtenons:

$$d_{(\pm)j}^{(0)}(\xi_1, \pm 1, t) = (\chi(\xi_1) - 1) \left( \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}(2, \pm 1, t) - (2 - \xi_1) \frac{\partial \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1}(0, \pm 1, t) \right) + \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}(\xi_1, \pm 1, t) \quad \xi_1 > 2, \quad (\text{II.58})$$

et

$$\begin{cases} d_{(\pm)j}^1(0, t) = 2 \frac{\partial \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2, \pm 1, t) - \tilde{d}_{(\pm)j-1}^{(0)}(2, \pm 1, t), \\ \frac{\partial d_{(\pm)j}^1}{\partial x_1}(0, t) = -\frac{\partial \tilde{d}_{(\pm)j}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2, \pm 1, t). \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

La relation (II.58) donne le correcteur en  $x = \mathbf{0}$  pour les déplacements correspondant à chaque branche du domaine.

Nous notons que le second membre de (II.59) est connu, car les problèmes (II.56) et (II.57) peuvent être résolus si on remplace  $j - 1$  par  $j$ .

Nous sommes à présent en mesure de retourner au calcul de la partie régulière de la solution asymptotique. Pour chaque partie de la solution asymptotique, nous avons besoin de 9 relations, pour pouvoir déterminer les 9 fonctions inconnues de l'intégration. Pour chaque partie régulière correspondant à  $D_\varepsilon^1$ , (II.38), (II.40) et (II.59) donnent 8 fonctions:  $d_{(\pm)j}^1(0, t)$ ,  $\frac{\partial d_{(\pm)j}^1}{\partial x_1}(0, t)$ ,  $d_{(\pm)j}^1(1, t)$ ,  $\frac{\partial d_{(\pm)j}^1}{\partial x_1}(1, t)$ . Il reste à déterminer  $q_j^1(0, t)$ . Nous montrerons plus loin que la  $j^{\text{ième}}$  étape cette fonction est déjà déterminée à l'étape précédente. Pour cela, revenons au problème (II.51). Comme d'habitude, nous devons construire une fonction type couche limite se stabilisant vers zéro à l'infini. Comme nous avons imposé cette condition pour la vitesse dans (II.51)<sub>6,7</sub>, il est connu que la pression se stabilise vers une certaine fonction de  $t$ . À la  $j^{\text{ième}}$  étape, nous déterminons  $q_{j+1}^1(0, t)$  et  $q_{j+1}^2(0, t)$  de la condition de la décroissance exponentielle de  $p_j^{(0)}$  en infini. Pour ceci nous considérons à la place de (II.51), le problème suivant avec le second membre connu  $j \geq -1$ :

$$\begin{cases} -\nu_0 \Delta_{\xi\xi} \mathbf{u}_j^{(0)} + \nabla_{\xi} \bar{p}_j^{(0)} = -\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_{j-2}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{F}_j & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \text{div} \mathbf{u}_j^{(0)} = \tilde{\theta}_j & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} = \mathbf{0} & \text{sur } \widehat{A_+ B_+} \cup \widehat{A_- B_-}, \\ \mathbf{u}_j^{(0)}(\xi_1, \pm 1, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j+2-\gamma}^{(0)}}{\partial t}(\xi_1, \pm 1, t) \mathbf{e}_2 & \text{pour } \xi_1 \geq 2, \\ \mathbf{u}_j^{(0)}(\pm 1, \xi_2, t) = \frac{\partial d_{(\pm)j+2-\gamma}^{(0)}}{\partial t}(\pm 1, \xi_2, t) \mathbf{e}_1 & \text{pour } \xi_2 \geq 2, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} \rightarrow \mathbf{0}, \bar{p}_j^{(0)} \rightarrow \alpha_j^1(t) & \text{uniformément quand } \xi_1 \rightarrow \infty, \\ \mathbf{u}_j^{(0)} \rightarrow \mathbf{0}, \bar{p}_j^{(0)} \rightarrow \alpha_j^2(t) & \text{uniformément quand } \xi_2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

Avec  $\alpha_j^1(t), \alpha_j^2(t)$  inconnues. En supposant pour l'instant que la fonction  $\tilde{\theta}_j$  satisfait la condition de compatibilité, il s'ensuit que (II.60) a une unique solution (l'unicité de la pression étant comprise à une fonction additive en  $t$  près). Cela signifie que la fonction  $\alpha_j(t)$ , avec  $\alpha_j(t) = \alpha_j^1(t) - \alpha_j^2(t)$  est fixée. Nous définissons pour  $j \geq -1$

$$p_j^{(0)} = \bar{p}_j^{(0)} + \chi(\xi_1)q_{j+1}^1(0,t) + \chi(\xi_2)q_{j+1}^2(0,t).$$

Des calculs standards montrent que  $(\mathbf{u}_j^{(0)}, \bar{p}_j^{(0)})$  est solution de (II.60) si et seulement si  $(\mathbf{u}_j^{(0)}, p_j^{(0)})$  satisfait (II.51) ou (II.52) for  $j = -1$  avec  $p_j^{(0)} \rightarrow \alpha_j^i(t) + q_{j+1}^i(0,t)$  uniformément quand  $\xi_i \rightarrow \infty, i = 1, 2$ . Pour obtenir le comportement désiré pour  $p_j^{(0)}$  quand  $\xi_i \rightarrow \infty, i = 1, 2$ , il suffit de prendre  $\alpha_j^i(t) = -q_{j+1}^i(0,t)$ .

Une première équation pour les inconnues  $q_{j+1}^1(0,t)$  et  $q_{j+1}^2(0,t)$  est:

$$q_{j+1}^1(0,t) - q_{j+1}^2(0,t) = \alpha_j(t) \tag{II.61}$$

et  $q_0^1(0,t) = q_0^2(0,t) = 0$ . La deuxième équation est obtenue en introduisant la solution asymptotique dans la condition de compatibilité (II.6):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (d_{(+),j+1}^1(x_1,t) - d_{(-),j+1}^1(x_1,t)) dx_1 + \int_0^1 (d_{(+),j+1}^2(x_2,t) - d_{(-),j+1}^2(x_2,t)) dx_2 = \\ & - \sum_{l=0}^j \left( \frac{\partial (d_{(+),j-l}^1 - d_{(-),j-l}^1)}{\partial x_1^l}(0,t) + \frac{\partial (d_{(+),j-l}^2 - d_{(-),j-l}^2)}{\partial x_2^l}(0,t) \right) \int_0^3 \frac{\tau^l}{l!} (\chi(\tau) - 1) d\tau \\ & - \int_{-\infty}^0 (d_{(+),j}^{(1)}(\xi_1, 1, t) - d_{(+),j}^{(1)}(\xi_1, -1, t)) d\xi_1 - \int_{-\infty}^0 (d_{(+),j}^{(2)}(1, \xi_2, t) - d_{(+),j}^{(2)}(-1, \xi_2, t)) d\xi_2 \\ & - \int_2^{\infty} (d_{(+),j}^{(0)}(\xi_1, 1, t) - d_{(+),j}^{(0)}(\xi_1, -1, t)) d\xi_1 - \int_2^{\infty} (d_{(+),j}^{(0)}(1, \xi_2, t) - d_{(+),j}^{(0)}(-1, \xi_2, t)) d\xi_2. \end{aligned} \tag{II.62}$$

Le second membre de (II.62) est connu de la  $j^{ieme}$  approximation. En remplaçant dans le membre de gauche de (II.62)  $d_{(\pm),j+1}^1$  donné par (II.50) (pour  $j \rightarrow j+1$ ) et  $d_{(\pm),j+1}^2$  donné par une relation du même type, nous obtenons la deuxième équation pour les inconnues  $q_{j+1}^1(0,t)$  et  $q_{j+1}^2(0,t)$ :

$$q_{j+1}^1(0,t) + q_{j+1}^2(0,t) = \beta_j(t), \tag{II.63}$$

avec  $\beta_j$  une fonction connue pour  $j \geq -1$ , avec :

$$\begin{aligned}
\beta_{-1}(t) = & -6! \left( \int_0^1 I_{x_1}^{-1}(f) dx_1 + \int_0^1 I_{x_2}^{-1}(f) dx_2 \right) \\
& + \frac{3 \times 6!}{2} \left( \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 \int_0^1 I_{x_1}^{-1}(\nu) dx_1 + \int_{-1}^1 \psi(\xi_1, t) d\xi_1 \int_0^1 I_{x_2}^{-1}(\nu) dx_2 \right) \\
& - \frac{6!}{2} \left( \int_0^1 I_{x_1}^{-4}(g_+ - g_-) dx_1 + \int_0^1 I_{x_2}^{-4}(g_+ - g_-) dx_2 \right) \\
& + \frac{6!}{4} \left( \int_0^1 I_{x_1}^{-3}(g_+ - g_-) dx_1 + \int_0^1 I_{x_2}^{-3}(g_+ - g_-) dx_2 \right) \\
& - \frac{6!}{4!} \left( \int_0^1 I_{x_1}^{-2}(g_+ - g_-) dx_1 + \int_0^1 I_{x_2}^{-2}(g_+ - g_-) dx_2 \right)
\end{aligned} \tag{II.64}$$

De (II.61) et (II.63) nous déterminons  $q_{j+1}^1(0, t)$  et  $q_{j+1}^2(0, t)$ , ce qui signifie que le second membre de (II.51) est maintenant connu, ce qui permet de résoudre (II.51), si nous montrons que le problème (II.51) est bien posé, i.e. la condition de compatibilité est satisfaite. De plus, ceci justifiera l'assertion précédente que  $q_j^i(0, t), i = 1, 2$  sont calculés à la  $(j-1)^{iem}$  itération. Nous pouvons dire que la  $j^{th}$  approximation est entièrement obtenue pour  $\gamma > 3$  si nous prouvons:

**Proposition II.4.2.** *Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\tilde{\theta}_j$  satisfait la condition de compatibilité:*

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds. \tag{II.65}$$

*Démonstration.* De (II.51) et (II.62) nous avons:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds = & -\frac{d}{dt} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left( d_{(+ )j+2-\gamma}^{(1)}(\xi_1, t) - d_{(- )j+2-\gamma}^{(1)}(\xi_1, t) \right) d\xi_1 \right. \\
& \left. \int_{-\infty}^0 \left( d_{(+ )j+2-\gamma}^{(2)}(\xi_2, t) - d_{(- )j+2-\gamma}^{(2)}(\xi_2, t) \right) d\xi_2 \right\} \\
& - \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{l=0}^{j+2-\gamma} \left( \frac{\partial^l (d_{(+ )j+2-\gamma-l}^1 - d_{(- )j+2-\gamma-l}^1)}{\partial x_1^l} (0, t) \right) \int_0^3 \frac{s^l}{l!} (\chi(s) - 1) ds \right. \\
& \left. \sum_{l=0}^{j+2-\gamma} \left( \frac{\partial^l (d_{(+ )j+2-\gamma-l}^2 - d_{(- )j+2-\gamma-l}^2)}{\partial x_2^l} (0, t) \right) \int_0^3 \frac{s^l}{l!} (\chi(s) - 1) ds \right\} \\
& - \frac{d}{dt} \left\{ \left( \int_0^1 (d_{(+ )j+3-\gamma}^1(x_1, t) - d_{(- )j+3-\gamma}^1(x_1, t)) dx_1 \right) \right. \\
& \left. - \left( \int_0^1 (d_{(+ )j+3-\gamma}^2(x_2, t) - d_{(- )j+3-\gamma}^2(x_2, t)) dx_2 \right) \right\}.
\end{aligned}$$



Nous exprimons ensuite les trois termes du second membre de l'égalité précédente par rapport aux composantes de la vitesse correspondantes à la partie régulière de la solution asymptotique.

De (II.38), la relation correspondante pour  $x_2 = 1$  et (II.4)<sub>6</sub> le premier terme du second membre est égal à

$$T_1 = - \int_{-1}^1 u_{1,j}^1(1, \xi_2, t) d\xi_2 - \int_{-1}^1 u_{2,j}^2(\xi_1, 1, t) d\xi_1.$$

Le troisième terme est exprimé à partir de (II.41)<sub>6</sub> et son analogue pour  $\mathbf{u}_j^2$  et s'est égal à

$$T_3 = - \int_0^1 (u_{2,j}^1(x_1, 1, t) - u_{2,j}^1(x_1, -1, t)) dx_1 - \int_0^1 (u_{1,j}^2(1, x_2, t) - u_{1,j}^2(-1, x_2, t)) dx_2.$$

Ajoutant maintenant  $T_1$  et  $T_3$  en utilisant (II.41)<sub>3</sub> et la relation similaire pour  $\mathbf{u}_j^2$  nous obtenons

$$T_1 + T_3 = - \int_{-1}^1 u_{1,j}^1(0, \xi_2, t) d\xi_2 - \int_{-1}^1 u_{2,j}^2(\xi_1, 0, t) d\xi_1.$$

Le deuxième terme est donné par

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{l=0}^j \left( \frac{\partial^l (u_{2,j-1-l}^1(0, 1, t) - u_{2,j-1-l}^1(0, -1, t))}{\partial x_1^l} \int_0^3 \frac{s^l}{l!} (\chi(s) - 1) ds \right. \\ &+ \left. \sum_{l=0}^j \left( \frac{\partial^l (u_{1,j-1-l}^2(1, 0, t) - u_{1,j-1-l}^2(-1, 0, t))}{\partial x_2^l} \right) \int_0^3 \frac{s^l}{l!} (\chi(s) - 1) ds \right) \\ &= \sum_{l=0}^j \int_{(0,3) \times (-1,1)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_1)) \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial^l u_{2,j-1-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) d\xi \\ &+ \sum_{l=0}^j \int_{(-1,1) \times (0,3)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_2)) \frac{\xi_2^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-1-l}^2(\xi_1, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial^l u_{2,j-l}^2(\xi_2, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) d\xi \\ &+ \int_{-1}^1 u_{1,j}^1(0, \xi_2, t) d\xi_2 + \int_{-1}^1 u_{2,j}^2(\xi_1, 0, t) d\xi_1. \end{aligned}$$

Finalement, en calculant  $T_1 + T_2 + T_3$ , nous obtenons l'expression suivante pour le second

membre de (II.65):

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u}_j^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds &= \sum_{l=0}^j \int_{(0,3) \times (-1,1)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_1)) \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial u_{1,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u_{2,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) d\xi \\ &+ \sum_{l=0}^j \int_{(-1,1) \times (0,3)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_2)) \frac{\xi_2^l}{l!} \left( \frac{\partial u_{1,j-l}^2(\xi_1, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u_{2,j-l}^2(\xi_1, 0, t)}{\partial x_2^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

Nous calculons ensuite le membre de gauche de (II.65). Comme  $\chi(\xi_1) = \chi(\xi_2) = 0$  sur  $\mathcal{B} \cap \{\xi_1 < 2, \xi_2 < 2\}$ , nous pouvons écrire:

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi = \int_{(2,3) \times (-1,1)} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi + \int_{(-1,1) \times (2,3)} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi.$$

Nous exprimons le premier terme du second membre de la relation précédente en prenant en compte que pour  $(\xi_1, \xi_2) \in (2,3) \times (-1,1)$ , nous avons  $\chi(\xi_2) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{(2,3) \times (-1,1)} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi &= \int_{(2,3) \times (-1,1)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_1)) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_1 \right) \right) d\xi \\ &+ \int_{(2,3) \times (-1,1)} \operatorname{div}_\xi \left( (1 - \chi(\xi_1)) \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{2,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité ci-dessus nous utilisons aussi la propriété

$$\operatorname{div}_\xi \left( \sum_{l=0}^j \frac{\xi_1^l}{l!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial^l u_{2,j-l}^1(0, \xi_2, t)}{\partial x_1^l} \mathbf{e}_2 \right) \right) = 0.$$

Le même résultat est obtenu pour le second terme du second membre et, en comparant l'expression de  $\int_{\mathcal{B}} \tilde{\theta}_j(\xi_1, \xi_2, t) d\xi$  avec le second membre de (II.66), la preuve est achevée.  $\square$

Le dernier résultat de cette section donne le terme principal de la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^1$ .

**Proposition II.4.3.** *Pour  $j = 0$  la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^1$  est donnée par*

$$\begin{cases} u_{1,0}^1(x_1, \xi_2, t) = -\frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 \right) N_1(\xi_2), \\ u_{2,0}^1(x_1, \xi_2, t) = 0, \\ p_0^1(x_1, \xi_2, t) = 0, \\ q_0^1(x_1, t) = \int_0^{x_1} f(s, t) ds - \frac{3}{2} \left( \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 \right) \int_0^{x_1} \nu(s) ds + \frac{1}{2} \beta_{-1}(t), \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

avec  $\beta_{-1}(t)$  défini par (II.64) et

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 d_{(\pm)0}^1}{\partial x_1^4} = g_{\pm} \pm q_0^1, \\ d_{(\pm)0}^1(0,t) = d_{(\pm)0}^1(1,t) = \frac{\partial d_{(\pm)0}^1}{\partial x_1}(0,t) = \frac{\partial d_{(\pm)0}^1}{\partial x_1}(1,t) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

### II.4.2.2 La résolution du problème pour $\gamma = 3$

Contrairement au cas précédent, pour  $\gamma = 3$  nous ne pouvons pas résoudre les problèmes correspondant à  $D_{\varepsilon}^1$  et à  $D_{\varepsilon}^2$  séparément. Nous commençons avec les problèmes correspondants aux fonctions avec l'indice 1. Les relations (II.43)–(II.45) sont toujours vraies. Alors,  $p_j^1$  est aussi donnée par (II.45). La différence par rapport au cas précédent est que maintenant nous ne pouvons pas exprimer les autres inconnues seulement en fonction de  $q_j^1$ , car le second membre de (II.44)  $d_{(-)j}^1$  est aussi inconnu.

Nous introduisons les notations:

$$\begin{cases} d_j^1(x_1,t) = d_{(+)j}^1(x_1,t) + d_{(-)j}^1(x_1,t), \\ \mathcal{D}_{j-1}^1 = \mathcal{D}_{(+)j-1}^1 + \mathcal{D}_{(-)j-1}^1, \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

avec  $\mathcal{D}_{(\pm)j-1}^1$  donnés par (II.42)<sub>2</sub>.

La fonction  $d_j^1$  est obtenue comme l'unique solution du problème différentiel d'ordre quatre suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 d_j^1}{\partial x_1^4} = (g_+ + g_-)\delta_{j0} + \mathcal{D}_{j-1}^1, \\ d_j^1(1,t) = -(d_{(+)j}^1(0,t) + d_{(-)j}^1(0,t)), \\ \frac{\partial d_j^1}{\partial x_1}(1,t) = -\left(\frac{\partial d_{(+)j+1}^1}{\partial \xi_1}(0,t) + \frac{\partial d_{(-)j+1}^1}{\partial \xi_1}(0,t)\right), \\ d_j^1(0,t) = 2\left(\frac{\partial \tilde{d}_{(+)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2,1,t) + \frac{\partial \tilde{d}_{(-)j-1}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2,-1,t)\right) \\ \quad - \left(\tilde{d}_{(+)j-1}^{(0)}(2,1,t) + \tilde{d}_{(-)j-1}^{(0)}(2,-1,t)\right), \\ \frac{\partial d_j^1}{\partial x_1}(0,t) = -\left(\frac{\partial \tilde{d}_{(+)j}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2,1,t) + \frac{\partial \tilde{d}_{(-)j}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2,-1,t)\right), \end{cases} \quad (\text{II.70})$$

les conditions aux bords sont obtenues à partir de (II.40) et (II.59).

Ceci signifie que  $d_{(-)j}^1$  peut être aussi exprimée par rapport à  $d_{(+)j}^1$ . Nous montrons que toutes les inconnues de la partie régulière de la solution asymptotique peuvent être

exprimées en fonction de  $d_{(+j)}^1$ ; alors, la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_\varepsilon^1$  est déterminée si nous obtenons et résolvons un problème pour  $d_{(+j)}^1$ . Comme nous ne pouvons pas nécessairement avoir toutes les conditions pour  $d_{(+j)}^1$ , nous devons considérer le problème pour le couple d'inconnues  $d_{(+j)}^1, d_{(+j)}^2$ .

**Théorème II.4.1.** *Les approximations des déplacements,  $d_{(+j)}^1, d_{(+j)}^2$ , sont obtenues comme solution du système suivant de deux équations paraboliques d'ordre six:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial t}(x_1, t) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^5 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^5}(x_1, t) \right) = G_j^1(x_1, t) - \frac{\partial H^1}{\partial x_1}(x_1, t) \delta_{j0}, \\ \frac{\partial d_{(+j)}^2}{\partial t}(x_2, t) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\nu(x_2)} \frac{\partial^5 d_{(+j)}^2}{\partial x_2^5}(x_2, t) \right) = G_j^2(x_2, t) - \frac{\partial H^2}{\partial x_2}(x_2, t) \delta_{j0}, \\ d_{(+j)}^1(1, t) = -d_{(+j)}^{(1)}(0, t), \quad \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(1, t) = -\frac{\partial d_{(+j+1)}^{(1)}}{\partial \xi_1}(0, t), \\ d_{(+j)}^1(0, t) = 2 \frac{\partial \tilde{d}_{(+j-1)}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2, 1, t) - \tilde{d}_{(+j)}^{(0)}(2, 1, t), \\ \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(0, t) = -\frac{\partial \tilde{d}_{(+j)}^{(0)}}{\partial \xi_1}(2, 1, t), \\ d_{(+j)}^2(1, t) = -d_{(+j)}^{(2)}(0, t), \quad \frac{\partial d_{(+j)}^2}{\partial x_2}(1, t) = -\frac{\partial d_{(+j+1)}^{(2)}}{\partial \xi_2}(0, t), \\ d_{(+j)}^2(0, t) = 2 \frac{\partial \tilde{d}_{(+j-1)}^{(0)}}{\partial \xi_2}(1, 2, t) - \tilde{d}_{(+j)}^{(0)}(1, 2, t), \\ \frac{\partial d_{(+j)}^2}{\partial x_2}(0, t) = -\frac{\partial \tilde{d}_{(+j)}^{(0)}}{\partial \xi_2}(1, 2, t), \\ \frac{\partial^5 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^5}(1, t) = L_j^1(t), \\ \frac{\partial^5 d_{(+j)}^2}{\partial x_2^5}(1, t) = L_j^2(t), \\ \frac{\partial^4 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^4}(0, t) - \frac{\partial^4 d_{(+j)}^2}{\partial x_2^4}(0, t) = M_j(t), \\ \frac{\partial^5 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^5}(0, t) + \frac{\partial^5 d_{(+j)}^2}{\partial x_2^5}(0, t) = N_j(t), \\ d_{(+j)}^1(x_1, 0) = d_{(+j)}^2(x_1, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.71})$$

où  $H^i, G_j^i, L_j^i, M_j, N_j$  sont des fonctions connues.

*Démonstration.* La première relation entre les inconnues  $d_{(+j)}^1$  et  $q_j^1$  est donnée par (II.41)<sub>4</sub> i.e.

$$\frac{\partial^4 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^4} - q_j^1 = g_+ \delta_{j0} + \mathcal{D}_{(+j-1)}^1 \quad (\text{II.72})$$

La deuxième relation est obtenue de (II.44) pour  $\gamma = 3$  et  $\xi_2 = 1$ , (II.41)<sub>6</sub> pour  $\xi_2 = 1$  et (II.69)<sub>1</sub>:

$$2 \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial t} = \frac{\partial d_j^1}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f \delta_{j0} \right) \right) - \int_{-1}^1 D^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) \right) d\xi_2. \quad (\text{II.73})$$

En éliminant  $q_j^1$  de (II.72) et (II.73) nous obtenons (II.71)<sub>1</sub> avec

$$\begin{cases} H^1(x_1, t) = \frac{1}{3\nu(x_1)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} g_+ + f \right), \\ G_j^1(x_1, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_j^1}{\partial t} - \int_{-1}^1 D^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) \right) d\xi_2 \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{D}_{(+j-1)}^1 \right). \end{cases}$$

Comme nous pouvons le remarquer,  $H^1$  dépend seulement des données et  $G_j^1$  dépend de quelques fonctions déterminées aux itérations précédentes. De la même manière nous obtenons (II.71)<sub>2</sub>.

(II.71)<sub>3,4</sub> sont en fait (II.40) et (II.59), respectivement et de même pour (II.71)<sub>5,6</sub>. Nous obtenons ensuite (II.71)<sub>7</sub> comme se qui suit: nous dérivons (II.72) par rapport à  $x_1$ , nous prenons  $x_1 = 1$ , et aussi  $x_1 = 1$  dans (II.43) et nous éliminons  $\frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}(1, t)$  de ces deux relations, grace à (II.38). Le second membre de (II.71)<sub>7</sub> est

$$\begin{aligned} L_j^1(t) = & \left( \frac{\partial}{\partial x_1} g_+(1, t) + f(1, t) - \frac{3}{2} \nu_0 \int_{-1}^1 \psi d\xi_2(1, t) \right) \delta_{j0} + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 D^{-2} (U_{j-1}^1)(1, \xi_2, t) d\xi_2 \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{D}_{(+j-1)}^1 - \frac{3\nu_0}{2} \frac{d}{dt} \int_{\infty}^0 \left( d_{(+j-1)}^{(1)} - d_{(-j-1)}^{(1)} \right) (\xi_1, t) d\xi_1 \end{aligned}$$

et une expression similaire est obtenue pour  $L_j^2(t)$ . (II.71)<sub>9</sub> est une conséquence de (II.61) pour  $j + 1$  remplacé par  $j$ , de (II.72) pour  $x_1 = 0$  et la relation correspondant à l'indice 2. Le second membre de (II.71)<sub>9</sub> est

$$M_j^1(0, t) = \alpha_{j-1}(t) + \mathcal{D}_{(+j-1)}^1(0, t) - \mathcal{D}_{(+j-1)}^2(0, t).$$

Finalement, (II.71)<sub>10</sub> est une conséquence de la condition de compatibilité pour (II.60), obtenue de la manière suivante: (II.53) peut être écrit comme

$$\tilde{\theta}_j = \hat{\theta}_{j-1} - \text{div}_{\xi} \left( \chi(\xi_1) u_{1,j}^1(\xi_1, 0, t) \mathbf{e}_1 + \chi(\xi_2) u_{2,j}^2(0, \xi_2, t) \mathbf{e}_2 \right)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{j-1} = & -\operatorname{div}_{\xi} \left( \chi(\xi_1) \sum_{l=1}^j \frac{\xi_1^{l-1}}{(l-1)!} \left( \frac{\xi_1}{l} \frac{\partial^l u_{1,j-l}^1}{\partial x_1^l}(0, \xi_2, t) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial^{l-1} u_{2,j-l}^1}{\partial x_1^{l-1}}(0, \xi_2, t) \mathbf{e}_2 \right) \right. \\ & \left. + \chi(\xi_2) \sum_{l=1}^j \frac{\xi_2^{l-1}}{(l-1)!} \left( \frac{\partial^l u_{1,j-l}^2}{\partial x_2^l}(\xi_1, 0, t) \mathbf{e}_1 + \frac{\xi_2}{l} \frac{\partial^l u_{2,j-l}^2}{\partial x_2^l}(\xi_1, 0, t) \mathbf{e}_2 \right) \right). \end{aligned}$$

or

$$\int_{\mathcal{B}} \chi(\xi_1) u_{1,j}^1(\xi_1, 0, t) \mathbf{e}_1 d\xi = \int_{-1}^1 u_{1,j}^1(\xi_1, 0, t) d\xi_2$$

En intégrant (II.44) par rapport à  $\xi_2$  nous avons

$$\int_{-1}^1 u_{1,j}^1(\xi_1, x_1, t) d\xi_2 = \frac{-2}{3\nu_0} \frac{\partial}{\partial x_1} q_j^1(x_1, t) + \frac{2}{3\nu_0} f(x_1, t) \delta_{j0} + \int_{-1}^1 D^{-2} (U_{j-1}^1) (\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2$$

nous prenons  $x_1 = 0$  et nous additionnons avec la relation correspondant à l'indice 2 et avec (II.60) nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_j(t) := \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}(0, t) + \frac{\partial q_j^2}{\partial x_2}(0, t) &= \frac{-3\nu_0}{2} \int_{\mathcal{B}} \hat{\theta}_{j-1} \\ &+ \frac{3\nu_0}{2} \int_2^{\infty} \left( d_{(+j-1)}^{(0)}(\xi_1, 1, t) - d_{(-j-1)}^{(0)}(\xi_1, -1, t) \right) d\xi_1 \\ &+ \frac{3\nu_0}{2} \int_2^{\infty} \left( d_{(+j-1)}^{(0)}(1, \xi_2, t) - d_{(-j-1)}^{(0)}(-1, \xi_2, t) \right) d\xi_2 \\ &+ \frac{3}{2} \int_{-1}^1 D^{-2} (U_{j-1}^1) (0, \xi_2, t) d\xi_2 \\ &+ \frac{3}{2} \int_{-1}^1 D^{-2} (U_{j-1}^2) (\xi_1, 0, t) d\xi_1 \end{aligned}$$

Nous dérivons ensuite (II.72), nous prenons  $x_1 = 0$  et nous additionnons avec la relation correspondant à l'indice 2. En remplaçant la dernière relation, nous obtenons (II.71)<sub>10</sub>, avec

$$N_j(t) = \gamma_j(t) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{D}_{(+j-1)}(0, t) + \mathcal{D}_{(-j-1)}(0, t))$$

ce qui termine la preuve. □

Les autres composantes de la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $D_{\varepsilon}^1$  ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{(-)j}^1(x_1, t) = d_j^1(x_1, t) - d_{(+)j}^1(x_1, t), \\ q_j^1(x_1, t) = \frac{\partial^4 d_{(+)j}^1}{\partial x_1^4}(x_1, t) - g_+(x_1, t)\delta_{j0} + \mathcal{D}_{(+)j-1}^1(x_1, t), \\ u_{1,j}^1(x_1, \xi_2, t) = \frac{1}{\nu(x_1)} D^{-2} (U_{j-1}^1) + \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f\delta_{j0} \right) N_1(\xi_2), \\ u_{2,j}^1(x_1, \xi_2, t) = \frac{\partial d_{(-)j-\gamma+3}^1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} - f\delta_{j0} \right) \right) N_2(\xi_2) \\ \quad - D^{-1} D^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} U_{j-1}^1 \right) \right) \\ p_j^1 = D^{-1} \left( -\rho_f \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,j-3}^1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-1}^1}{\partial \xi_2} \right) \right) \\ \quad D^{-1} \left( +2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}^1}{\partial \xi_2^2} \right). \end{array} \right. \quad (\text{II.74})$$

Comme dans la section précédente, nous discuterons l'expression des termes principaux de la solution asymptotique.

**Proposition II.4.4.** *Pour  $j = 0$  la partie régulière de la solution asymptotique correspondant à  $to D_\varepsilon^1$  est donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,0}^1(x_1, \xi_2, t) = \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial^5 d_{(+)0}^1}{\partial x_1^5}(x_1, t) - \frac{\partial}{\partial x_1} g_+(x_1, t) \right) N_1(\xi_2), \\ \quad - \frac{1}{\nu(x_1)} f(x_1, t) N_1(\xi_2), \\ u_{2,0}^1(x_1, \xi_2, t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial^5 d_{(+)0}^1}{\partial x_1^5}(x_1, t) - \frac{\partial}{\partial x_1} g_+(x_1, t) \right) \right) N_2(\xi_2), \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} (f(x_1, t)) \right) N_2(\xi_2), \\ q_0^1(x_1, t) = \frac{\partial^4 d_{(+)0}^1}{\partial x_1^4}(x_1, t) - g_+(x_1, t), \\ p_0^1(x_1, \xi_2, t) = 0, \\ d_{(-)0}^1(x_1, t) = d_0^1(x_1, t) - d_{(+)0}^1(x_1, t), \end{array} \right. \quad (\text{II.75})$$

Avec  $d_0^1, d_{+0}^1$  satisfaisant les problèmes présentés dans la preuve.

*Démonstration.* Les relations (II.75)<sub>1,2,3,4</sub> sont des conséquences de (II.43)–(II.45) et de (II.72) pour  $j=0$ . Il reste à démontrer que  $d_0^1, d_{+0}^1$  peuvent être déterminés comme uniques solutions de certains problèmes.

Pour  $j = 0$  le problème pour  $d_0^1$  devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 d_0^1}{\partial x_1^4}(x_1, t) = g_+(x, t) + g_-(x_1, t), \\ d_0^1(1, t) = \frac{\partial d_0^1}{\partial x_1}(1, t) = 0, \\ d_0^1(0, t) = \frac{\partial d_0^1}{\partial x_1}(0, t) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.76})$$

Finalement, nous obtenons le problème pour  $d_{+0}^1$  comme nous l'avons montré précédemment. Contrairement à la valeur générale de  $j$ , pour  $j = 0$  les problèmes pour  $d_{+0}^1$  et  $d_{+0}^2$  ne sont pas couplés, car  $q_0^1(0, t) = q_0^2(0, t) = 0$ . Le problème pour  $d_{+0}^1$  est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_{(+0)}^1}{\partial t}(x_1, t) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \frac{\partial^5 d_{(+0)}^1}{\partial x_1^5}(x_1, t) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial d_0^1}{\partial t} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} g_+ + f \right) \right), \\ \frac{\partial d_{(+0)}^2}{\partial t}(x_2, t) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\nu(x_2)} \frac{\partial^5 d_{(+0)}^2}{\partial x_2^5}(x_2, t) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial d_0^2}{\partial t} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\nu(x_2)} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} g_+ + f \right) \right), \\ d_{(+0)}^1(1, t) = \frac{\partial d_{(+0)}^1}{\partial x_1}(1, t) = d_{(+0)}^1(0, t) = \frac{\partial d_{(+0)}^1}{\partial x_1}(0, t) = 0, \\ d_{(+0)}^2(1, t) = \frac{\partial d_{(+0)}^2}{\partial x_2}(1, t) = d_{(+0)}^2(0, t) = \frac{\partial d_{(+0)}^2}{\partial x_2}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^5 d_{(+0)}^1}{\partial x_1^5}(1, t) = -\frac{3\nu_0}{2} \int_{-1}^1 \psi(\xi_2, t) d\xi_2 + f(1, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} g_+(1, t), \\ \frac{\partial^5 d_{(+0)}^2}{\partial x_2^5}(1, t) = -\frac{3\nu_0}{2} \int_{-1}^1 \psi(\xi_1, t) d\xi_1 + f(1, t) + \frac{\partial}{\partial x_2} g_+(1, t), \\ \frac{\partial^4 d_{(+0)}^1}{\partial x_1^4}(0, t) - \frac{\partial^4 d_{(+0)}^2}{\partial x_2^4}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^5 d_{(+0)}^1}{\partial x_1^5}(0, t) + \frac{\partial^5 d_{(+0)}^2}{\partial x_2^5}(0, t) = 0, \\ d_{(+0)}^1(x_1, 0) = d_{(+0)}^2(x_2, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.77})$$

□

Notons que le système (II.71) peut être résolu pour  $j$  remplacé par  $j + 1$  ce qui donne, avec (II.72),  $q_{j+1}^1(0, t)$ ,  $q_{j+1}^2(0, t)$ . Ainsi, le système (II.51) peut être résolu et la  $j^{\text{ième}}$  approximation est déterminée pour  $\gamma = 3$ .



### II.4.2.3 Conclusions

Dans les deux sections précédentes, nous avons déterminé la  $j^{\text{ème}}$  approximation de la solution asymptotique dans deux cas :  $\gamma > 3$  et  $\gamma = 3$ . Pour  $\gamma > 3$  nous pouvons séparer les problèmes des deux branches du tube élastique et nous obtenons la partie régulière de la solution asymptotique (pour  $D_1^\varepsilon$ ) comme ce qui suit :

- the macroscopic variable  $q_j^1$  is the unique solution of the problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1)} \left( \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1} \right) \right) = a_j^q(x_1, t), \\ \frac{\partial q_j^1}{\partial x_1}(1, t) = b_j^q(t), \\ q_j^1(0, t) = c_j^q(t), \end{cases}$$

avec  $a_j^q, b_j^q, c_j^q$  des fonctions connues;

- Les variables macroscopiques  $d_{(\pm)j}^1$  sont les solutions uniques du système différentielle d'ordre quatre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 d_{(+j)}^1}{\partial x_1^4} = a_j^d(x_1, t), \\ d_{(+j)}^1(0, t), d_{(+j)}^1(1, t), \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(0, t), \frac{\partial d_{(+j)}^1}{\partial x_1}(1, t) \quad \text{donnés,} \end{cases}$$

et un système similaire pour  $d_{(-)j}^1$ ;

- $u_{1,j}^1, u_{2,j}^1, p_j^1$  sont donnés par (II.43)–(II.45). Le terme principal de la partie régulière est présenté dans (II.67)–(II.68).

Contrairement au cas  $\gamma > 3$ , pour  $\gamma = 3$  les problèmes doivent être résolus pour les deux branches en même temps.

- Nous introduisons en premier des fonctions auxilliaires  $d_j^1, d_j^2$ , avec  $d_j^1$  la solution unique de (II.70); alors la partie régulière de la solution asymptotique est obtenues comme ce qui suit:

- les variables macroscopiques  $d_{(+j)}^1, d_{(+j)}^2$  sont obtenues comme l'unique solution du système parabolique d'ordre six (II.71);

- les variables macroscopiques  $q_j^1, q_j^2$  sont données par (II.72) et l'équation similaire pour l'indice 2;

- $u_{1,j}^1, u_{2,j}^1, p_j^1$  sont donnés aussi par (II.43)–(II.45), mais nous obtenons des expressions différentes. Le terme principal de la partie régulière de la solution asymptotique est donné

par (II.75),(II.77).

## II.5 Les estimations d'erreur

Dans cette dernière section, nous établirons l'erreur entre la solution exacte et la solution asymptotique, dans le but de justifier le développement asymptotique. En introduisant la solution asymptotique d'ordre  $k$ ,  $(\hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}, \hat{p}_a^{(k)}, \hat{d}_{\pm a}^{(k)})$ , dans (II.1) nous voulons obtenir un problème du même type que (II.1).

Les calculs qui suivront sont valables pour n'importe quelle  $\gamma \geq 3$ . Nous commençons par la divergence de la vitesse asymptotique d'ordre  $k$ . Des calculs standards donnent :

$$\operatorname{div}_x \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} = d_\varepsilon^{(k)} \quad \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \times (0, T), \quad (\text{II.78})$$

avec

$$d_\varepsilon^{(k)}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_1 < \frac{1}{8}\} \cup \{x_2 < \frac{1}{8}\}, \\ -\eta'(1-x_i) \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{1,j}^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{\frac{1}{8} < x_i, < \frac{1}{4}\}, \\ & i = 1, 2, \\ \eta'(x_1) \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{1,j}^{(1)}\left(\frac{x_1-1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{\frac{1}{4} < x_1 < 1\}, \\ \eta'(x_2) \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{2,j}^{(2)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2-1}{\varepsilon}, t\right) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{\frac{1}{4} < x_2 < 1\}. \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

Notons que la vitesse asymptotique d'ordre  $k$  n'est pas de divergence nulle.

Nous présentons ensuite les équations pour la solution asymptotique, qui correspond à (II.1)<sub>1</sub> et (II.1)<sub>3</sub>:

$$\begin{cases} \rho_f \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}}{\partial t} - 2 \operatorname{div}_x (\nu(x) D_x \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}) + \nabla_x \hat{p}_a^{(k)} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_\varepsilon^{(k)} & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \times (0, T), \\ \rho h \frac{\partial^2 \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \frac{\partial^4 \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_i^4} + \mu \frac{\partial^5 \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_i^4 \partial t} = g_\pm \pm \hat{p}_{a|\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon} + G_{\pm\varepsilon}^{(k)} & \text{sur } (\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon) \times (0, T), \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

avec  $\mathbf{F}_\varepsilon^{(k)}$ ,  $G_{\pm\varepsilon}^{(k)}$  les fonctions résidus connues. Comme les expressions de ces résidus sont compliqués, mais pas très techniques à obtenir, nous donneront seulement les estimations dans les normes des espaces correspondants:  $\|\mathbf{F}_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{k+\frac{3}{2}})$ ,  $\|G_{\pm\varepsilon}^{(k)}\|_{L^2((\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon) \times (0, T))} =$

$$\begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) & \text{for } k \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}}) & \text{for } k \geq 4. \end{cases}$$
 Ces estimations seront utilisées pour déduire l'estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution asymptotique. Nous déduisons d'abord les conditions sur les bords élastiques. En introduisant la solution asymptotique d'ordre  $k$  dans (II.1)<sub>11</sub> nous obtenons:

$$\hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t} \pm A_{\pm \varepsilon}^k, \quad \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \times (0, T), \quad (\text{II.81})$$

où l'expression de  $A_{\pm \varepsilon}^k$  sur  $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \cap \partial D_{\varepsilon}^1$  est donnée par:

$$A_{\varepsilon}^k(x_1, \pm 1, t) = \begin{cases} - \left( \varepsilon^{k+4} \frac{\partial d_{\pm k+4-\gamma}^1}{\partial t} + \dots + \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^1}{\partial t} \right) (x_1, t) \\ - \eta(x_1) \left( \varepsilon^{k+3} \frac{\partial d_{\pm k+3-\gamma}^{(1)}}{\partial t} + \dots + \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^{(1)}}{\partial t} \right) \left( \frac{x_1 - 1}{\varepsilon}, \pm 1, t \right) \\ \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \cap \{x_1 > \frac{1}{4}\}, \\ - \chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \left( \varepsilon^{k+4} \frac{\partial d_{\pm k+4-\gamma}^1}{\partial t} + \dots + \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^1}{\partial t} \right) (x_1, t) \\ - \eta(1-x_1) \left( \varepsilon^{k+3} \frac{\partial d_{\pm k+3-\gamma}^{(0)}}{\partial t} + \dots + \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^{(0)}}{\partial t} \right) \left( \frac{x_1}{\varepsilon}, \pm 1, t \right) \\ \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \cap \{2\varepsilon < x_1 < \frac{1}{4}\}, \end{cases} \quad (\text{II.82})$$

et par une expression analogue peut être écrite sur  $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon} \cap \partial D_{\varepsilon}^2$ . Nous notons que pour  $\gamma = 3$  les premiers termes dans la définition au dessus sont zéro.

Les problèmes (II.78), (II.80), (II.81) sont complétés par les conditions aux bords suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} = \mathbf{0}, \quad \hat{d}_{\pm a}^{(k)} = 0 & \text{sur } \left( \widehat{A_+^{\varepsilon} B_+^{\varepsilon}} \cup \widehat{A_-^{\varepsilon} B_-^{\varepsilon}} \right) \times (0, T), \\ \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}(1, x_2, t) = \varepsilon^2 \psi^{\varepsilon}(x_2, t) \mathbf{e}_1 + \varepsilon^{k+3} u_{2,k}^1(1, \xi_2, t) \mathbf{e}_2 & \text{sur } F_1^{\varepsilon} \times (0, T), \\ \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}(x_1, 1, t) = \varepsilon^2 \psi^{\varepsilon}(x_1, t) \mathbf{e}_2 + \varepsilon^{k+3} u_{1,k}^2(\xi_1, 1, t) \mathbf{e}_1 & \text{sur } F_2^{\varepsilon} \times (0, T), \\ \hat{d}_{\pm a}^{(k)}(1, \pm \varepsilon, t) = 0, \quad \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(1, \pm \varepsilon, t) = \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^1}{\partial x_1}(1, t) & \\ \hat{d}_{\pm a}^{(k)}(\pm \varepsilon, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(\pm \varepsilon, 1, t) = \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^2}{\partial x_1}(1, t) & \\ \hat{d}_{\pm a}^{(k)}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = 0 & \\ \hat{d}_{\pm a}^{(k)}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = 0 & t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (\text{II.83})$$

et les conditions initiales:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}(x,0) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \hat{d}_{\pm a}^{(k)}(x,0) = \frac{\partial \hat{d}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\pm}^\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{II.84})$$

La condition de compatibilité pour le problème (II.78), (II.80) avec les conditions aux bords et les conditions initiales (II.81), (II.83), (II.84) est donnée par:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} d_\varepsilon^{(k)} dx &= \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{d}_{+a}^{(k)}(x_1, \varepsilon, t) - \hat{d}_{-a}^{(k)}(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1 \\ &+ \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{d}_{+a}^{(k)}(\varepsilon, x_2, t) - \hat{d}_{-a}^{(k)}(-\varepsilon, x_2, t) \right) dx_2 \\ &+ \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(x_1, \varepsilon, t) - A_{+\varepsilon}^k(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1 \\ &+ \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(\varepsilon, x_2, t) - A_{+\varepsilon}^k(-\varepsilon, x_2, t) \right) dx_2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que les conditions aux bords pour  $\hat{u}_a^{(k)}$  et  $\hat{d}_{\pm a}^{(k)}$  ne sont pas du même type que ceux pour  $\mathbf{u}$  et  $d_\pm$ , respectivement; donc nous ne pouvons pas appliquer directement les estimations (II.27) qui sont vraies pour un second membre différents dans les équations, mais pour des conditions aux bords différentes. De plus, la solution asymptotique d'ordre  $K$  pour la vitesse n'est pas de divergence nulle. Pour aller au delà de cette égalité, nous définissons des nouvelles fonctions  $\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}$  et  $\hat{D}_{\pm a}^{(k)}$  dans le but d'obtenir pour  $(\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}, \hat{p}_{\pm a}^{(k)}, \hat{D}_{\pm a}^{(k)})$  un problème du même type que (II.1).

Construction de  $\hat{D}_{\pm a}^{(k)}$  Pour cette construction nous utilisons quelques idées de [31]. Nous définissons d'abord  $D_\pm^{(k)} : F_\pm^\varepsilon \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\pm^{(k)}(1, \pm \varepsilon, t) = 0, \quad \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial x_1}(1, \pm \varepsilon, t) = \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^1}{\partial x_1}(1, t), \\ D_\pm^{(k)}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial x_1}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = 0, \\ D_\pm^{(k)}(\pm \varepsilon, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial x_1}(\pm \varepsilon, 1, t) = \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^2}{\partial x_2}(1, t), \\ D_\pm^{(k)}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial x_2}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = 0, \\ D_\pm^{(k)}(x, t) = 0 \quad (x_1, x_2) \in \widehat{A_+^\varepsilon B_+^\varepsilon}, \\ D_\pm^{(k)}(x, 0) = \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.85})$$

et

$$\begin{aligned}
W_\varepsilon^k(t) &:= \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( D_+^{(k)}(x_1, \varepsilon, t) - D_-^{(k)}(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1 \\
&+ \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( D_+^{(k)}(\varepsilon, x_2, t) - D_-^{(k)}(-\varepsilon, x_2, t) \right) dx_2 \\
&= \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} d_\varepsilon^{(k)} dx - \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(x_1, \varepsilon, t) - A_{-\varepsilon}^k(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1 \\
&- \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(\varepsilon, x_2, t) - A_{-\varepsilon}^k(-\varepsilon, x_2, t) \right) dx_2
\end{aligned} \tag{II.86}$$

Considérons

$$D_\pm^{(k)}(x, t) = \begin{cases} (x_1 - 1)(x_1 - 2\varepsilon)^2 \left( a_\pm^{(k)1}(t)(x_1 - 1) + \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^1}{\partial x_1}(1, t) \right) \\ \quad \text{dans } (2\varepsilon, 1) \times \{\pm\varepsilon\}, \\ (x_2 - 1)(x_2 - 2\varepsilon)^2 \left( a_\pm^{(k)2}(t)(x_2 - 1) + \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \varepsilon^{k+\gamma} \frac{\partial d_{\pm k}^2}{\partial x_2}(1, t) \right) \\ \quad \text{dans } \{\pm\varepsilon\} \times (2\varepsilon, 1), \\ 0 \\ \quad \text{sur } \widehat{A_\pm^\varepsilon B_\pm^\varepsilon}, \end{cases}$$

avec  $a_\pm^{(k)i}$ ,  $i = 1, 2$  quatre fonctions qui sont déterminées en imposant quelques conditions, comme signalé auparavant. Il est clair que les fonctions  $D_\pm^{(k)}$  satisfont (II.85)<sub>1,2,3,4</sub> sans aucune condition sur  $a_\pm^{(k)i}$ .

Nous introduisons ensuite les notations suivantes:

$$\begin{aligned}
W_\varepsilon^{k,1}(t) &= \int_{D_\varepsilon^1} d_\varepsilon^k dx - \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(x_1, \varepsilon, t) - A_{-\varepsilon}^k(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1, \\
W_\varepsilon^{k,2}(t) &= \int_{D_\varepsilon^2} d_\varepsilon^k dx - \int_{2\varepsilon}^1 \left( A_{+\varepsilon}^k(\varepsilon, x_2, t) - A_{-\varepsilon}^k(-\varepsilon, x_2, t) \right) dx_2.
\end{aligned}$$

Notons que de (II.79) nous obtenons  $W_\varepsilon^k(t) = W_\varepsilon^{k,1}(t) + W_\varepsilon^{k,2}(t)$ . Une relation entre les fonctions  $a_+^{(k)1}$  et  $a_-^{(k)1}$  suit de  $\frac{d}{dt} \int_{2\varepsilon}^1 \left( D_+^{(k)}(x_1, \varepsilon, t) - D_-^{(k)}(x_1, -\varepsilon, t) \right) dx_1 = W_\varepsilon^{k,1}(t)$ , avec les conditions initiales (II.85)<sub>6</sub>. De la même manière nous établissons une relation entre  $a_+^{(k)2}$  et  $a_-^{(k)2}$ . Alors nous avons prouvé qu'il existe une infinité de possibilités pour choisir les fonctions  $D_\pm^{(k)}$  qui satisfont (II.85) et (II.86).

Nous définissons ensuite

$$\hat{D}_{\pm a}^{(k)} = \hat{d}_{\pm a}^{(k)} - D_\pm^{(k)} \tag{II.87}$$

et nous vérifions que  $\hat{D}_{\pm a}^{(k)}$  satisfait les mêmes conditions aux bords que  $d_\pm$ .

Construction de  $\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}$ : Nous cherchons une fonction  $\mathbf{U}^{(k)} : \mathcal{B}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaisant le problème

suisant pour  $t \in (0, T)$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{U}^{(k)}(t) \in (H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2, & \\ \operatorname{div}_x \mathbf{U}^{(k)}(t) = d_\varepsilon^{(k)}(t) & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \mathbf{U}^{(k)}(t) = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \cap \{x_i < 2\varepsilon\}, \\ \mathbf{U}^{(k)}(1, x_2, t) = \varepsilon^{k+3} u_{2,k}^1(1, \xi_2, t) \mathbf{e}_2 & \text{sur } F_1^\varepsilon, \\ \mathbf{U}^{(k)}(x_1, 1, t) = \varepsilon^{k+3} u_{1,k}^2(\xi_1, 1, t) \mathbf{e}_2 & \text{sur } F_2^\varepsilon, \\ \mathbf{U}^{(k)}(x_1, \pm \varepsilon, t) = \left( \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial t} \pm A_{\pm\varepsilon}^k \right) (x_1, \pm \varepsilon, t) \mathbf{e}_2 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon^1, \\ \mathbf{U}^{(k)}(\pm \varepsilon, x_2, t) = \left( \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial t} \pm A_{\pm\varepsilon}^k \right) (\pm \varepsilon, x_2, t) \mathbf{e}_1 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \cap \partial D_\varepsilon^2. \end{array} \right. \quad (\text{II.88})$$

**Remarque II.5.1.** La fonction  $\mathbf{U}^{(k)}$  satisfait deux conditions de compatibilité séparées: une pour  $D_\varepsilon^1$  et la deuxième pour  $D_\varepsilon^2$ . Ces conditions sont satisfaites par la construction de  $D_\pm^{(k)}$ .

Nous pouvons prouver que

**Proposition II.5.1.** Le problème (II.88) admet au moins une solution, avec la propriété

$$\|\mathbf{U}^{(k)}(t)\|_{(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} = O(\varepsilon^{k+\frac{3}{2}}). \quad (\text{II.89})$$

*Démonstration.* Étant donné (II.88)<sub>3</sub>, nous considérons le problème (II.88) comme deux problèmes séparés: un dans  $D_\varepsilon^1$  et le second dans  $D_\varepsilon^2$ , chaque problème avec sa condition de compatibilité. Donc, nous pouvons obtenir l'estimation (II.89) seulement pour  $D_\varepsilon^1$ . Pour tout  $(x_1, x_2) \in D_\varepsilon^1 \cap \{x_1 > 2\varepsilon\}$  nous introduisons la nouvelle variable  $(y_1, y_2) = (\frac{x_1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ ; clairement  $(y_1, y_2) \in (0, 1) \times (-1, 1)$ . Nous définissons une nouvelle fonction  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)} : (0, 1) \times (-1, 1) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , par  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(y_1, y_2, t) = \left( \frac{1}{1-2\varepsilon} U_1^{(k)}(x_1, x_2, t), \frac{1}{\varepsilon} U_2^{(k)}(x_1, x_2, t) \right)$ . Des calculs simples donnent le problème suivant pour  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(t) = d_\varepsilon^{(k)}((1-2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon, \varepsilon y_2, t) & \text{dans } (0, 1) \times (-1, 1), \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(0, y_2, t) = \mathbf{0} & \text{dans } (-1, 1), \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(1, y_2, t) = \varepsilon^{k+2} u_{2,k}^1(1, y_2, t) \mathbf{e}_2 & \text{dans } (-1, 1), \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(y_1, \pm 1, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial D_\pm^{(k)}}{\partial t} \pm A_{\pm\varepsilon}^k \right) ((1-2\varepsilon)y_1 + 2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) \mathbf{e}_2 & \text{dans } (0, 1). \end{array} \right. \quad (\text{II.90})$$

Le second membre de (II.90)<sub>1,4</sub> contient des correcteurs (qui sont d'ordre  $O(\exp(\frac{-\sigma}{\varepsilon}))$ , avec  $\sigma$  indépendante de  $\varepsilon$ ), ou des termes d'ordre  $O(\varepsilon^{k+2})$ . En appliquant le résultat de

[10], Chap. III, p. 127 nous obtenons:

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(t)\|_{(H^1((0,1)\times(-1,1)))^2} = O(\varepsilon^{k+2}). \quad (\text{II.91})$$

Nous exprimons ensuite le norme de  $\mathbf{U}^{(k)}$  par rapport à la norme de  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}$  et nous obtenons alors  $\|\mathbf{U}^{(k)}(t)\|_{(H^1(D_\varepsilon^1 \cap \{x_1 > 2\varepsilon\}))^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon^{1(k)}(t)\|_{(H^1((0,1)\times(-1,1)))^2}$ , i.e.  $\|\mathbf{U}^{(k)}(t)\|_{(H^1(D_\varepsilon^1 \cap \{x_1 > 2\varepsilon\}))^2} = O(\varepsilon^{k+\frac{3}{2}})$ . Avec les mêmes types de calcul nous obtenons la même estimation pour  $\|\mathbf{U}^{(k)}(t)\|_{(H^1(D_\varepsilon^2 \cap \{x_2 > 2\varepsilon\}))^2}$ , et la preuve est achevée.  $\square$

Notons que de (II.89) et de la régularité des seconds membres dans (II.90) nous avons  $\|\mathbf{U}^{(k)}\|_{L^2(0,T;(H^1(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{k+\frac{3}{2}})$ .

La fonction

$$\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)} = \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} - \mathbf{U}^{(k)} \quad (\text{II.92})$$

satisfait le même type de conditions aux bords que  $\mathbf{u}$  sur  $\partial\mathcal{B}^\varepsilon$ . De plus  $\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}(x,0) = 0$ , dû à (II.28)<sub>3</sub>. Une des conséquences des constructions précédentes, nous obtenons pour  $(\hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}, \hat{p}_a^{(k)}, \hat{D}_{\pm a}^{(k)})$  le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}}{\partial t} - 2 \operatorname{div}_x (\nu(x) D_x \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}) + \nabla_x \hat{p}_a^{(k)} = \mathbf{f} + \mathcal{F}_\varepsilon^{(k)} & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \times (0,T), \\ \operatorname{div}_x \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \times (0,T), \\ \rho h \frac{\partial^2 \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \frac{\partial^4 \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_i^4} + \mu \frac{\partial^5 \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_i^4 \partial t} = g_\pm \pm \hat{p}_a^{(k)}|_{\hat{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon} + \mathcal{G}_{\pm\varepsilon}^{(k)} & \text{sur } F_\pm^\varepsilon \times (0,T), \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)} = 0 & \text{sur } \widehat{A_\pm^\varepsilon B_\pm^\varepsilon} \times (0,T), \\ \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)} = \boldsymbol{\psi}_\varepsilon & \text{sur } (\partial\mathcal{B}^\varepsilon \setminus (\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon)) \times (0,T), \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)}(1, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(1, \pm \varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_1}(2\varepsilon, \pm \varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)}(\pm \varepsilon, 1, t) = \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_2}(\pm \varepsilon, 1, t) = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial x_2}(\pm \varepsilon, 2\varepsilon, t) = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t}, \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon \times (0,T), \\ \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)}(x,0) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon, \\ \hat{D}_{\pm a}^{(k)}(x,0) = \frac{\partial \hat{D}_{\pm a}^{(k)}}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (\text{II.93})$$

avec  $\mathcal{F}_\varepsilon^{(k)} = \mathbf{F}_\varepsilon^{(k)} - \rho_f \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial t} + 2 \operatorname{div}_x (\nu(x) D_x \mathbf{U}^{(k)})$ ,  $\mathcal{G}_{\pm\varepsilon}^{(k)} = G_{\pm\varepsilon}^{(k)} - \rho h \frac{\partial^2 D_\pm^{(k)}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \frac{\partial^4 D_\pm^{(k)}}{\partial x_i^4} - \mu \frac{\partial^5 D_\pm^{(k)}}{\partial x_i^4 \partial t}$ . Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer (II.27) pour établir l'erreur entre la solution exacte de (II.1) et son approximation donnée par (II.33).

**Théorème II.5.1.** *Soit  $(\hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}, \hat{p}_a^{(k)}, \hat{d}_{\pm a}^{(k)})$  la solution asymptotique d'ordre  $k$  donnée par (II.33) et  $(\mathbf{u}, p, d)$  la solution exact du problème physique. Nous avons les estimations suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) & \text{pour } K \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}}) & \text{pour } K \geq 4, \end{cases} \\ \|\mathbf{D}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)})\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) & \text{pour } K \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}}) & \text{pour } K \geq 4, \end{cases} \\ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (d_\pm - \hat{d}_{\pm a}^{(K)}) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) & \text{pour } K \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}}) & \text{pour } K \geq 4, \end{cases} \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (d_\pm - \hat{d}_{\pm a}^{(K)}) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}}) & \text{pour } K \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}+\frac{\gamma}{2}}) & \text{pour } K \geq 4, \end{cases} \\ \|\nabla(p - \hat{p}_a^{(k)})\|_{L^\infty(0,T;(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{5}{2}-\frac{\gamma}{2}}) & \text{pour } K \in \{0,1,2,3\}, \\ O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}-\frac{\gamma}{2}}) & \text{pour } K \geq 4. \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{II.94})$$

*Démonstration.* Obtenons l'estimation (II.94)<sub>2</sub>. De (II.89) et (II.92) il s'ensuit que

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)})\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} \leq \|\mathbf{D}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{U}}_a^{(k)})\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} + O(\varepsilon^{k+\frac{3}{2}}).$$

Il reste à estimer la première partie du second membre de l'inégalité précédente. Pour cela nous estimons en premier  $\min\left(\|\mathcal{F}_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)}, \|\mathcal{G}_{\pm\varepsilon}^{(k)}\|_{L^2((\bar{D}_\varepsilon^i \cap \Gamma_\pm^\varepsilon) \times (0,T))}\right)$  et après nous appliquons (II.27)<sub>2</sub>. Cette estimation est donnée par  $G_{\pm\varepsilon}^{(k)}$  ou par  $\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \frac{\partial^4 D_\pm^{(k)}}{\partial x_i^4}$ , les autres termes sont d'ordre supérieure à celles là. Comme les coefficients de  $D_\pm^{(k)}$  sont définis à partir des couches limites pour le déplacement qui sont nuls si  $l \leq 4$  prenant en compte (II.40) et (II.43) et le second membre correspondant;  $\|\frac{1}{\delta^\varepsilon} \frac{\partial^4 D_{a\pm}^{(k)}}{\partial x_i^4}\| = O(\varepsilon^{\min\{K+4, K+\gamma\}})$ . En suivant les idées de [28] nous obtenons (II.94)<sub>2</sub>; les autres estimations de (II.94) sont prouvées avec les mêmes techniques et la preuve est achevée.  $\square$

Pour améliorer les estimations (II.94) nous analysons l'ordre du premier terme de la solution asymptotique. Nous prouvons que :

**Proposition II.5.2.** *Pour le premier terme de la solution asymptotique nous avons les*



estimations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\hat{\mathbf{u}}_a^{(0)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}), \\ \|D\hat{\mathbf{u}}_a^{(0)}\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \hat{d}_{\pm a}^{(0)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon))} = O(\varepsilon^\gamma), \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} \hat{d}_{\pm a}^{(0)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_{\pm}^\varepsilon))} = O(\varepsilon^\gamma), \\ \|\nabla \hat{p}_a^{(0)}\|_{L^\infty((0,T);(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \end{array} \right. \quad (\text{II.95})$$

*Démonstration.* Établissons (II.95)<sub>1</sub>. De (II.67)<sub>1,2</sub> (pour  $\gamma > 3$ ) et de (II.75)<sub>1,2</sub> (pour  $\gamma = 3$ ) nous obtenons pour la vitesse régulière correspondant à  $D_\varepsilon^1$

$$\|\mathbf{u}_1^{(0)} \chi\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}). \quad (\text{II.96})$$

Ceci signifie que la partie régulière de la vitesse asymptotique dans la norme de (II.96) est  $O(\varepsilon^{\frac{5}{2}})$ . Ils reste à estimer dans la même norme les fonctions type couche limite. Pour les correcteurs correspondants à  $x_1 = 1$  nous avons:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{bl}^{(0)1} \eta\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} &\leq \varepsilon^3 \left( \int_{-\frac{1}{4\varepsilon}}^0 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{u}_0^{(1)}(\xi_1, \xi_2, t) \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \varepsilon^3 \left( \int_{-\infty}^0 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{u}_0^{(1)}(\xi_1, \xi_2, t) \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\mathbf{u}_{bl}^{(0)1} \eta\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^3). \quad (\text{II.97})$$

Finalement, pour le correcteur en  $x = \mathbf{0}$  nous avons

$$\|\mathbf{u}_{bl}^{(0)0} \eta \cdot \eta\|_{(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2} \leq \varepsilon^3 \left( \int_{\mathcal{B} \cap \{\xi_1 < \frac{1}{\varepsilon^4}, \xi_2 < \frac{1}{\varepsilon^4}\}} \left( \mathbf{u}_0^{(0)}(\xi_1, \xi_2, t) \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = O(\varepsilon^3),$$

qui donne une estimation du même type que (II.97). Alors, nous obtenons (II.95)<sub>1</sub> comme une conséquence de (II.96) et (II.97). (II.95)<sub>3,4</sub> sont une conséquence du fait que  $d_{bl}^{(0)i}$  sont

nuls. Enfin pour établir (II.95)<sub>5</sub> remarquons que

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x(p_{bl}^{(0)0}\eta\eta)\|_{(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2}^2 \leq \varepsilon^2 \|\nabla_x(p_0^{(0)}\eta\eta)\|_{(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2}^2 \\ & = \left( \sup \left\{ \frac{\int_{\mathcal{B}^\varepsilon} p_0^{(0)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right)\eta\eta \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi} dx_1 dx_2}{\|\nabla_x \varphi\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon)}} : \varphi \in H^1(\mathcal{B}^\varepsilon), \varphi \neq 0 \right\} \right)^2 \\ & \leq C\varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}^\varepsilon} \left(p_0^{(0)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right)\eta\eta\right)^2 dx_1 dx_2 \leq C\varepsilon^4 \int_{\mathcal{B} \cap \{\xi_1 < \frac{1}{\varepsilon^4}, \xi_2 < \frac{1}{\varepsilon^4}\}} \left(p_0^{(0)}(\xi_1, \xi_2, t)\right)^2 d\xi \leq C\varepsilon^4 \end{aligned}$$

De même  $\|\nabla_x(p_{bl}^{(0)i}\eta\eta)\|_{(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2}^2 = O(\varepsilon^2)$ , or de (II.67)<sub>1,2</sub> (pour  $\gamma > 3$ ) et de (II.75)<sub>1,2</sub> (pour  $\gamma = 3$ ), nous avons l'expression de la partie régulière de la pression et

$$\|p_1^{(0)}\chi\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

et la preuve est achevée.  $\square$

La proposition précédente nous permet d'améliorer les estimations données par le théorème 5.1 dans le sens suivant :

**Théorème II.5.2.** *Soit  $(\hat{\mathbf{u}}_a^{(j)}, \hat{p}_a^{(j)}, \hat{d}_{\pm a}^{(j)})$  la solution asymptotique d'ordre  $j$  et  $(\mathbf{u}, p, d)$  la solution exacte du problème physique. Nous avons alors les estimations suivantes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(j)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{j+\frac{7}{2}}), \\ \|\mathbf{D}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(j)})\|_{L^2((0,T);(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^4)} = O(\varepsilon^{j+\frac{5}{2}}), \\ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (d_\pm - \hat{d}_{\pm a}^{(j)}) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} = O(\varepsilon^{j+\gamma+1}), \\ \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (d_\pm - \hat{d}_{\pm a}^{(j)}) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_\pm^\varepsilon))} = O(\varepsilon^{j+\gamma+1}), \\ \|\nabla(p - \hat{p}_a^{(j)})\|_{L^\infty((0,T);(H^{-1}(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} = O(\varepsilon^{j+\frac{3}{2}}). \end{array} \right. \quad (\text{II.98})$$

*Démonstration.* Soit  $j \geq 0$  un entier naturel fixé et  $k \gg j$ . De (II.94)<sub>1</sub> et (II.95)<sub>1</sub> nous obtenons:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(j)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} & \leq \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(k)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} + \|\hat{\mathbf{u}}_a^{(k)} - \hat{\mathbf{u}}_a^{(j)}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{B}^\varepsilon))^2)} \\ & = O(\varepsilon^{\min\{k-\frac{5}{2}, k+4-\gamma\}}) + O(\varepsilon^{j+\frac{7}{2}}) = O(\varepsilon^{j+\frac{7}{2}}). \end{aligned}$$

Les autres estimations de (II.98) sont obtenues de manière similaire, et la preuve est achevée.  $\square$



---

# Étude d'un écoulement stationnaire d'un fluide non-newtonien dans un tube mince

---

## III.1 Introduction

Nous considérons un flux de Stokes stationnaire dans un canal avec une viscosité variable dépendant du tenseur des déformations. La viscosité dépendant de la variable longitudinale est perturbée par une fonction lipschitzienne, dépendant du tenseur des déformations, multipliée par un petit paramètre positif. Nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnelle en fonction de ce petit paramètre, ainsi qu'une construction de la solution asymptotique dans le cas périodique.

Soit  $\varepsilon$  un petit paramètre,  $\varepsilon = \frac{1}{q}$  où  $q \in \mathbb{N}$ , nous définissons alors un domaine mince :

$$D_\varepsilon := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} : 0 < x_1 < 1, -\frac{\varepsilon}{2} < x_2 < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Nous supposons qu'un fluide incompressible remplit le domaine  $D_\varepsilon$ . Soit  $f$  la force extérieure appliquée au fluide.

Considérons le problème de Stokes stationnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\operatorname{div}(\nu \mathcal{D}(u_\varepsilon) + \mu \Phi(x_1, \mathcal{D}u_\varepsilon)) + \nabla p_\varepsilon = f & \text{dans } D_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 & \text{dans } D_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x_1, \pm \frac{\varepsilon}{2}) = 0 & \text{sur } x_1 \in (0, 1) \\ u_\varepsilon(0, x_2) = g_0(\frac{x_2}{\varepsilon}) & \text{sur } x_1 \in (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \\ u_\varepsilon(1, x_2) = g_1(\frac{x_2}{\varepsilon}) & \text{sur } x_1 \in (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Les inconnues de ce système sont la vitesse  $u_\varepsilon$  et la pression  $p_\varepsilon$  du fluide.

Les conditions aux bords non homogènes pour la vitesse sont données par les fonctions  $g_0$

et  $g_1$  dont la deuxième composante est nulle, et la première satisfait :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_{01}(\xi_2) d\xi_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_{11}(\xi_2) d\xi_2$$

où  $g_{i1} \in \mathcal{C}^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ .

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2} (\nabla(u) + (\nabla(u))^T),$$

$\nu(x_1) = \nu_0 + \nu_1(x_1)$  est la viscosité tel que  $\nu \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$ . De plus ils existent  $\bar{\kappa} > \kappa > 0$  tel que  $\bar{\kappa} > \nu(x_1) > \kappa$  pour tout  $x \in (0,1)$ .

$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$  est continue sur son domaine de définition et est L-lipschitzienne par rapport a la deuxième variable. De plus  $\Phi(x_1, Du_\varepsilon) = 0$  pour tout  $x_1 \in (0, \rho) \times (1 - \rho, 1)$ .  $\mu$  une constante positive strictement inférieure à  $\mu_0 = \min\left(\frac{\kappa}{4L}, \frac{\kappa}{C_k LC_{PF}}\right)$ , où  $C_k$  et  $C_{PF}$  sont la constante de Korn et la constante de Poincaré Friedrichs respectivement.  $f$  une fonction vectorielle de  $(L^2(D_\varepsilon))^2$ .

## III.2 Formulation variationnelle

A.g = 0.

Supposons tout d'abord que  $g = 0$ , pour obtenir la formulation variationnelle du problème (III.1), nous introduisons l'espace :

$$H = \{v \in (H_0^1(D_\varepsilon))^2 \mid \text{div}(v) = 0\}.$$

L'espace  $H_{\text{div}}^1$  muni de la norme  $\| \cdot \|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}$  est un sous-espace de Hilbert de  $((H_0^1(D_\varepsilon))^2, \| \cdot \|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2})$  et nous assumons que  $f$  est une fonction vectorielle de  $(L^2(D_\varepsilon))^2$ .

**Théorème III.2.1.** *Il existe  $\mu_0$  tel que pour tout  $\mu < \mu_0$  le système (III.1) admet une unique solution  $u \in H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon)$ .*

Pour démontrer le théorème III.2.1 il faut tout d'abord prouver le théorème suivant:

**Théorème III.2.2.** *On considère  $F : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tel que  $F_{ij} \in L^2(D_\varepsilon)$ . Sous les mêmes hypothèses, le système suivant :*

$$\begin{cases} -2\text{div}(\nu \mathcal{D}(u)) + \nabla p = f + \text{div} F & \text{sur } D_\varepsilon \\ \text{div} u = 0 & \text{sur } D_\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur } \partial D_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

admet une unique solution  $u \in H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon)$  dans le sens qui suit:

Pour tout  $v \in H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon)$

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) dx = \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v(x) dx - \int_{D_\varepsilon} F(x) : \mathcal{D}(v(x)) dx$$

De plus,

$$\|\mathcal{D}(u)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^n} \leq \frac{1}{2\kappa} \times (C_K C_{PF} \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} + \|F\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}).$$

*Démonstration.*

### 1. Formulation variationnelle :

La formulation variationnelle du problème (III.2) est la suivante :

Trouver  $u \in H_{\text{div}}^1$  tel que pour tout  $v \in H_{\text{div}}^1$

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) dx = \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v(x) dx - \int_{D_\varepsilon} F(x) : \mathcal{D}(v(x)) dx$$

D'autre part ,

$$\int_{D_\varepsilon} \text{div}(F(x)) \cdot v(x) dx = - \int_{D_\varepsilon} F(x) : \mathcal{D}(v(x)) dx$$

et

$$\int_{D_\varepsilon} \nabla(p(x)) \cdot v(x) dx = - \int_{D_\varepsilon} p(x) : \text{div}(v(x)) dx + \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\partial p(x)}{\partial n} \cdot v(x) dx = 0$$

.

### 2. Existence et unicité de la solution

Notons  $I_{D_\varepsilon}(u, v) := 2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) dx$ .

$I_{D_\varepsilon}$  définit alors un produit scalaire. En effet :  $I_{D_\varepsilon} : H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon) \times H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$  est clairement bilinéaire symétrique.

De plus  $I_{D_\varepsilon}(u, u) = 2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}(u) : \mathcal{D}(u) dx \geq \kappa \int_{D_\varepsilon} \mathcal{D}(u) : \mathcal{D}(u) dx \geq 0$ .

Si  $\int_{D_\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(u(x)) dx = 0$  alors  $\mathcal{D}(u(x)) = 0$ , alors  $u$  est constante. Or  $u$  est nul sur  $\partial D_\varepsilon$ , d'où  $u = 0$ .

Définissons une nouvelle norme sur  $H_{\text{div}}^1(D_\varepsilon)$  comme ce qui suit :

$$\|u\|_{I_{D_\varepsilon}} = \left( 2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) dx \right)^{1/2}.$$

La norme  $\|u\|_{I_{D_\varepsilon}}$  est équivalente à la norme  $(H_0^1(D_\varepsilon))^2$ , de plus

$$\kappa \min \left( 1, \frac{1}{(C_{PF})^2} \right) \|u\|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}^2 \leq I_{D_\varepsilon}(u, u) \leq 2 \max_{x \in D_\varepsilon} \nu(x_1) \|u\|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}^2.$$

Considérons l'application suivante:

$$\varphi : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto - \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v \, dx + \int_{D_\varepsilon} F(x) : \mathcal{D}(v(x)) \, dx \end{array}$$

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &\leq \int_{D_\varepsilon} |f(x) \cdot v(x)| \, dx + \int_{D_\varepsilon} |F(x) : \mathcal{D}(v(x))| \, dx \\ &\leq (C_{PF} \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} + \|F\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}) \|v\|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz il existe une unique  $u \in H_1^{\text{div}}(D_\varepsilon)$  tel que  $\varphi(v) = I_{D_\varepsilon}(u, v)$ .

### 3. Estimation a priori

Pour tout  $v \in H_1^{\text{div}}(D_\varepsilon)$   $\varphi(v) = I_{D_\varepsilon}(u, v)$ , en particulier pour  $u = v$

$$\begin{aligned} I_{D_\varepsilon}(u, u) &= - \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v(x) \, dx + \int_{D_\varepsilon} F(x) : \mathcal{D}(v(x)) \, dx \\ &\leq (C_K C_{PF} \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} + \|F\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}) \|\mathcal{D}(u)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}. \end{aligned}$$

Or  $2\kappa \|\mathcal{D}(u)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}^2 \leq I_{D_\varepsilon}(u, u)$ .

D'où

$$\|\mathcal{D}(u)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4} \leq \frac{1}{2\kappa} (C_K C_{PF} \|f\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} + \|F\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4})$$

.

□

*Démonstration.* théorème III.2.1

#### 1. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (III.1) est la suivante :

Trouver  $u \in H_{\text{div}}^1$  tel que pour tout  $v \in H_{\text{div}}^1$

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) \, dx = \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v(x) \, dx - 2\mu \int_{D_\varepsilon} \Phi(x_1, \mathcal{D}(u(x))) : \mathcal{D}(v(x)) \, dx.$$

## 2. Existence et unicité de la solution

Considérons l'application suivante:

$$\mathcal{R} : \begin{array}{ccc} (H_0^1(D_\varepsilon))^2 & \longrightarrow & (L^2(D_\varepsilon))^2 \\ v & \longmapsto & u \quad \text{tel que} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\operatorname{div}(\nu\mathcal{D}(u) + \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}v)) + \nabla p = f & \text{sur } D_\varepsilon \\ \operatorname{div}u = 0 & \text{sur } D_\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur } \partial D_\varepsilon \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \|R(v_1) - R(v_2)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} &= \|u_1 - u_2\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} \\ &\leq C_{PF} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} \\ &\leq C_K \times C_{PF} \|\mathcal{D}(u_1) - \mathcal{D}(u_2)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4} \\ &\leq \frac{C_{PF}C_K}{\kappa} \mu \|\Phi(x_1, \mathcal{D}(v_1)) - \Phi(x_1, \mathcal{D}(v_2))\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4} \\ &\leq \frac{C_{PF}C_K L(x_1)}{\kappa} \mu \|\mathcal{D}(v_1) - \mathcal{D}(v_2)\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2} \\ &\leq \frac{C_{PF}C_K L}{\kappa} \mu \|v_1 - v_2\|_{(H_0^1(D_\varepsilon))^2}. \end{aligned}$$

Or  $\mu_0 \leq \frac{\kappa}{C_k L C_{PF}}$ . D'où pour tout  $\mu \in ]0, \mu_0[$   $\mathcal{R}$  est contractante et par conséquent, d'après le théorème de point fixe de Banach;  $\mathcal{R}$  admet un unique point fixe. Ainsi pour tout  $\mu \in ]0, \mu_0[$  le problème (III.1) admet une unique solution.

□

**Proposition III.2.1.** *Si  $u_\varepsilon$  est une solution faible de (III.1), alors il existe une distribution  $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'(D_\varepsilon)$  tel que  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  satisfait le problème au sens des distributions.*

*Démonstration.* Nous avons que

$$\langle 2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon - \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}(u(x)))) + f, \psi \rangle = 0, \forall \psi \in H(D_\varepsilon)$$

Du lemme de De Rham, il s'ensuit qu'il existe une distribution  $p_\varepsilon \in \mathcal{D}'(D_\varepsilon)$ , unique à une constante additive près, tel que

$$-2\operatorname{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u_\varepsilon + \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}(u(x)))) - f = -\nabla p.$$

Le système (III.1) est donc satisfait par  $u_\varepsilon$  et  $p_\varepsilon$ .

□

### B. $g \neq 0$



Il existe alors un prolongement  $G$  (voir [15]) tel que  $\operatorname{div}G = 0$  et  $G|_{x_1=0} = g_0$  et  $G|_{x_1=1} = g_1$ . En remplaçant la fonction inconnue  $u_\varepsilon$  par  $T = u_\varepsilon - G$ , on obtient pour l'inconnue  $T$  le problème suivant :

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu\mathcal{D}(T) + \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}(T) + \mathcal{D}(G))) + \nabla p = f + 2\operatorname{div}(\nu\mathcal{D}(G)) & \text{sur } D_\varepsilon \\ \operatorname{div}T = 0 & \text{sur } D_\varepsilon \\ T = 0 & \text{sur } \partial D_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

qui est du même type que (III.1) avec une légère modification du terme non linéaire  $-2\operatorname{div}(\mu\Phi(x_1, \mathcal{D}(T) + \mathcal{D}(G)))$ ,  $G$  étant connue. En appliquant le théorème III.2.1 on prouve l'existence et l'unicité de la solution  $T$  du problème (III.3) et par conséquent on a l'existence et l'unicité de  $u_\varepsilon$  solution du problème (III.1).

Nous simplifions le problème pour ce qui suit (III.1), en remplaçant les conditions (III.1)<sub>5</sub> et (III.1)<sub>6</sub> par la condition de périodicité par rapport à  $x_1$ .

Nous introduisons l'espace de Sobolev suivant :

$$H_{\text{per}}(D_\varepsilon) = \{(H_{\text{per},1,0}^1(D_\varepsilon))^2 : \operatorname{div}u = 0\}$$

$H_{\text{per},1,0}^1(D_\varepsilon)$  est la complétion (par rapport à la norme de  $H^1(D_\varepsilon)$ ) de l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}])$  nulles en  $x_2 = \pm\frac{\varepsilon}{2}$  et périodiques en  $x_1$ . Comme au début de cette section  $f \in (L^2(D_\varepsilon))^2$ , de plus  $\Phi$  est périodique en  $x_1$ .  $u_\varepsilon$  est une solution de  $H_{\text{per}}(D_\varepsilon)$  est une solution faible du problème

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu\mathcal{D}(u_\varepsilon) + \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}(u_\varepsilon))) + \nabla p = f & \text{sur } D_\varepsilon \\ \operatorname{div}u_\varepsilon = 0 & \text{sur } D_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{pour } x_2 = \pm\frac{\varepsilon}{2} \\ u_\varepsilon \text{ est 1-périodique en } x_1 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

si et seulement si elle satisfait l'inégalité intégrale :

$$2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1)\mathcal{D}(u(x)) : \mathcal{D}(v(x)) dx = \int_{D_\varepsilon} f(x) \cdot v(x) dx - 2\mu \int_{D_\varepsilon} \Phi(x_1, \mathcal{D}(u(x))) : \mathcal{D}(v(x)) dx$$

$$\forall \psi \in H_{\text{per}}(D_\varepsilon)$$

L'existence et l'unicité de ce problème peuvent être obtenues en suivant la démonstration du théorème III.2.1.

### III.3 Analyse Asymptotique

Construisons le développement asymptotique pour la solution de problème périodique (III.1). Définissons le domaine infini

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, -\frac{\varepsilon}{2} < x_2 < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Supposons que  $\nu \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $f = f_1 e_1$ ,  $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2 \times 2})$ ,  $\nu$ ,  $f_1$  et  $\Phi$  sont 1-périodiques en  $x_1$ . Notons  $\langle \psi \rangle_1 = \int_0^1 \psi(x_1, x_2) dx_1$ ,  $\langle \psi \rangle_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(x_1, x_2) dx_2$ .

Nous proposons deux approximations asymptotiques de la solution :

1. Une solution asymptotique est donnée par:

$$\begin{cases} u_1^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{1,j} \left( x_1, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \\ u_2^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+3} u_{2,j} \left( x_1, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \\ p^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} p_j \left( x_1, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \sum_{j=0}^k \varepsilon^j q_j(x_1), \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

avec  $u_{1,j}, u_{2,j}, p_j$  et  $q_j$  fonctions 1-périodiques en  $x_1$ , tel que  $\langle p_j \rangle_2 = 0$ . Nous développons en série de Taylor au voisinage de  $\mathbf{0}$ , comme  $\Phi(x_1, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  :

$$\begin{aligned} (\Phi(x_1, Du^k))_{hk} &= \sum_{h,k=1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \sum_{\substack{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}) \\ i_{11} + i_{12} + i_{21} + i_{22} = j}} D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \mathbf{0}) d_{11}^{i_{11}} d_{12}^{i_{12}} d_{21}^{i_{21}} d_{22}^{i_{22}} \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \sum_{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \eta(Du^k)) d_{11}^{i_{11}} d_{12}^{i_{12}} d_{21}^{i_{21}} d_{22}^{i_{22}} \\ &\quad i_{11} + i_{12} + i_{21} + i_{22} = N + 1 \end{aligned}$$

où  $Du^k = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  et  $D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \mathbf{0}) = \frac{\partial \Phi_{hk}}{\partial x_{11}^{i_{11}} \partial x_{12}^{i_{12}} \partial x_{21}^{i_{21}} \partial x_{22}^{i_{22}}}(x_1, \mathbf{0})$ . En notant

$$\Phi(x_1, Du^k) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x_1, Du^k) & \Phi_{12}(x_1, Du^k) \\ \Phi_{21}(x_1, Du^k) & \Phi_{22}(x_1, Du^k) \end{pmatrix}$$

Notons  $M_1$  le premier terme du développement en série de Taylor de  $\Phi(x_1, Du^k)$ .

$M_1$  est donné par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_{ij}}(x_1, 0) d_{ij} & \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{ij}}(x_1, 0) d_{ij} \\ \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_{ij}}(x_1, 0) d_{ij} & \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{ij}}(x_1, 0) d_{ij} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(M_1)_1 &= \sum_{l=0}^K \varepsilon^l \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,l} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + \right. \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial x_1} u_{1,l-1} \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_{21}}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{11}}(x_1, \mathbf{0}) \right) + \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{2,l-1} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{22}}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} u_{1,l-1} \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_1 \partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{1,l-2} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_{11}}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_{1,l-2} \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_{22} \partial x_1}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} u_{2,l-2} \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_1 \partial x_{22}}(x_1, \mathbf{0}) \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial x_1} u_{2,l-2} \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_{22}}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) \right) + \\ &\quad \left. \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{2,l-3} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_{2,l-3} \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_1 \partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) \right] \end{aligned}$$

Et nous avons une expression similaire pour  $\operatorname{div}(M_1)_2$ .

Nous notons  $\bar{\Phi}_{1,j}$  et  $\bar{\Phi}_{2,j}$  la première et deuxième composante de  $\operatorname{div}(\Phi(x_1, \mathcal{D}u^k))$  respectivement, contenant des sommes de produits de termes d'indice inférieur ou égal à  $j$  et de leurs dérivées.

En introduisant la solution asymptotique dans (III.4), et en identifiant les coefficients

d'ordre  $\varepsilon$  en notant  $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$  nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{1,j}}{\partial \xi_2^2} - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} \\ \quad - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,j} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) - 2\mu \bar{\Phi}_{1,j-1} + \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_j}{\partial x_1} = f_1 \delta_{j0}, \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,j-1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,j-3}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}}{\partial \xi_2^2} \\ \quad + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,j} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + 2\mu \bar{\Phi}_{2,j-1} - \frac{\partial p_j}{\partial \xi_2} = 0, \\ \\ \frac{\partial u_{1,j}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,j}}{\partial \xi_2} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

avec les conditions aux bords :

$$u_{1,j} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0, u_{2,j} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0.$$

### Étude de régularité

Montrons par récurrence sur  $j$  la régularité de  $u_{1,j}$ ,  $u_{2,j}$ ,  $p_j$  et  $q_j$  satisfaisants le système d'équations (III.6). Pour  $j = 0$ , nous obtenons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2} + \frac{dq_0}{dx_1} = f_1 \\ u_{1,0} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial \xi_2} = 2\mu \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, 0) \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2} \\ \frac{\partial u_{2,0}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_1} \\ u_{1,0} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0, u_{2,0} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

De (III.7)<sub>(3,4)</sub> nous avons que  $q_0 \in H_{per}^1(0,1)$  est l'unique solution 1-périodique de l'équation variationnelle :

$$\int_0^1 \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, 0)} \frac{\partial q_0}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, 0)} f_1(x_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 \quad \forall z \in H_{per}^1(0,1)$$

de plus

$$\left\| \frac{\partial q_0}{\partial x_1} \right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{8}{(4\bar{\kappa} + \kappa)\kappa} \|f_1\|_{L^2(0,1)}$$

La régularité de  $q_0$  est obtenue en se basant sur le fait que  $\bar{\kappa} + \frac{\kappa}{4} > \nu(x_1) + 2\mu \frac{\Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, 0) > \frac{\kappa}{2} > 0$  et  $f_1$  sont  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . La démonstration est du même type que celle qui va suivre pour  $u_{0,1}$  dans les espaces adéquats.

Nous définissons l'opérateur  $\mathcal{L}_\nu$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu : H_0^1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &\longrightarrow H^{-1} \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ u_{1,0} &\longmapsto -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Soit  $s$  fixé dans  $\mathbb{R}$ ;  $u(s, \cdot) \in H_0^1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  est solution du problème faible suivant :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( f_1 - \frac{dq_0}{dx_1} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi_2}$$

Ainsi

$$\left\| \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} \leq \frac{\kappa}{2} (1 + \mathcal{C}_{PF}) \left\| f_1 - \frac{dq_0}{dx_1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Soit  $s$  fixé dans  $\mathbb{R}$  et  $h$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , alors d'après ce qui précède  $u_{1,0}(s + h, \cdot) \in H_0^1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  et

$$\left\| \frac{\partial u_{1,0}(s + h, \cdot)}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} \leq \frac{\kappa}{2} (1 + \mathcal{C}_{PF}) \left\| f_1 - \frac{dq_0}{dx_1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

On soustrait l'équation (III.7)<sub>1</sub> de la même équation écrite au point  $(s + h, \xi)$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_{1,0}(s, \xi)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u_{1,0}(s + h, \xi)}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} &\leq \frac{\kappa}{2} (1 + \mathcal{C}_{PF}) \left( \|f_1(s) - f_1(s + h)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{dq_0(s + h)}{dx_1} - \frac{dq_0(s)}{dx_1} \right\|_{L^\infty(0,1)} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les fonctions  $f_1$  et  $\frac{dq_1(s)}{ds}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial u(s, \xi)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u(s + h, \xi)}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} = 0$$

Et alors  $u_{1,0}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Soit  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) u_{1,0} \right)$  la dérivée formelle de  $\left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) u_{1,0}$

Alors

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right) \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{d^2 q_0}{dx_1^2} = \frac{d}{dx_1} f_1$$

Notons  $u_j^*(s, \xi_2) = \left( \nu(s) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(s, 0) \right) \frac{\partial u_{1,j}(s, \xi)}{\partial \xi_2}$

Soit  $s$  fixé dans  $\mathbb{R}$  et  $h$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u_0^*(s+h, \xi_2) - u_0^*(s, \xi_2)}{h} - \frac{\partial}{\partial s} u_0^*(s, \xi_2) \right\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \\ & \leq (1 + \mathcal{C}_{PF}) \left( \left\| \frac{f_1(s) - f_1(s+h)}{h} - \frac{d}{dx_1} f_1 \right\|_{L^\infty(0,1)} + \left\| \frac{\frac{dq_1(s+h)}{dx_1} - \frac{dq_1(s)}{ds}}{h} - \frac{d^2 q_0}{ds^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les fonctions  $f_1$  et  $\frac{dq_1(s)}{ds}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u_0^*(s+h, \xi_2) - u_0^*(s, \xi_2)}{h} - \frac{\partial}{\partial s} u_0^*(s, \xi_2) \right\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 0$$

De plus  $\nu(s) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(s, 0) > \frac{\kappa}{2} > 0$  est  $C^\infty(\mathbb{R})$ , alors  $u_{1,0}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

En remplaçant  $u_j^*(s, \xi_2)$  et  $\frac{\partial}{\partial s} u_0^*(s, \xi_2)$  par  $\frac{\partial^i}{\partial s^i} u_0^*(s, \xi_2)$  et  $\frac{\partial^{i+1}}{\partial s^{i+1}} u_0^*(s, \xi_2)$  respectivement, de même pour le second membre en ce qui concerne  $q_0$  et  $f_1$  nous obtenons une régularité supplémentaire pour  $u_{0,1}$  sur  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

La régularité de  $u_{1,0}$  en  $\xi_2$  peut être démontrée en suivant le même raisonnement que pour la régularité par rapport à la première variable  $x_1$ , en fixant cette fois  $\xi_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Nous démontrons de la même manière la régularité de  $u_{2,0}$  et de  $p_0$ .

Supposons que  $u_{1,j}$ ,  $u_{2,j}$ ,  $p_j$  et  $q_j$  sont régulières montrons que  $u_{1,j+1}$ ,  $u_{2,j+1}$ ,  $p_{j+1}$  et  $q_{j+1}$ .

En remplaçant  $j$  par  $j+1$  dans (III.6), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,j+1} = - \frac{\partial q_{j+1}}{\partial x_1} + \mathcal{G}_j^1(x_1, \xi_2), \\ \frac{\partial p_{j+1}}{\partial \xi_2} = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,j+1} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + \mathcal{G}_j^2(x_1, \xi_2), \\ \frac{\partial u_{1,j+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,j+1}}{\partial \xi_2} = 0, \\ u_{1,j+1} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0, u_{2,j+1} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

Où  $\mathcal{G}_j^1(x_1, \xi_2)$  et  $\mathcal{G}_j^2(x_1, \xi_2)$  sont des fonctions connues des approximations précédentes, contenant des sommes de produits de termes d'indice inférieur ou égal à  $j$  et de leurs dérivées, et sont donc régulières sous l'hypothèse de récurrence.

Nous récupérons donc des équations du même type que (III.7), et en appliquant le même type de calculs nous obtenons la régularité désirée pour les approximations d'ordre  $j + 1$ .

Ainsi les termes de la solution asymptotique sont régulières.

### Détermination de la solution asymptotique

Cette partie est dédiée à la résolution des équations satisfaites par les termes du développement asymptotique.

Nous introduisons les fonctions:

$$N_1(\xi_2) = \frac{1}{2} \left( \xi_2^2 - \frac{1}{4} \right),$$

qui satisfait  $N_1'' = 1$ ,  $N_1(\pm \frac{1}{2}) = 0$  et

$$N_2(\xi_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_2} N_1(\tau) d\tau,$$

avec  $N_2(\frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N_1(\tau) d\tau = -\frac{1}{12}$ . Nous utiliserons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} D^{-1} : F &\longrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_2} F(x_1, \tau) d\tau, \\ \tilde{D}^{-1} : F &\longrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_2} F(x_1, \tau) d\tau - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta, \\ D^{-2} : F &\longrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi_2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta - \left(\xi_2 + \frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\theta} F(x_1, \tau) d\tau d\theta. \end{aligned}$$

**Théorème III.3.1.** *Les inconnues du système précédent  $u_{1,j}, u_{2,j}, p_j, q_j$  sont données par les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= -D^{-2} \left\{ \frac{\nu(x_1)}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} + \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + 2\mu \bar{\Phi}_{1,j-1} \right) \right\} + \frac{1}{\nu(x_1) + \mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} N_1(\xi_2) \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right), \\ u_{2,j} &= D^{-1} D^{-2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\nu(x_1)}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + 2\mu \bar{\Phi}_{1,j-1} \right) \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right) \right) N_2(\xi_2), \end{aligned} \tag{III.10}$$

$$\begin{aligned} p_j &= \tilde{D}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,j-1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,j-3}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}}{\partial \xi_2^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u_{1,j} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) + 2\mu \bar{\Phi}_{2,j-1} \right\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme  $\mu < \mu_0$  alors  $\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} > \frac{\kappa}{2} > 0$ , en suivant le même raisonnement que le premier chapitre on retrouve facilement ces équations. Sauf que les résoudre n'est pas de la même simplicité. Ceci est dû aux termes issus du développement en série de Taylor de  $\Phi$ .

□

Pour trouver la  $j$ -ième approximation, il faut que la condition  $u_{2,j}(x_1, \frac{1}{2}) = 0$  soit satisfaite, ce qui nous donnera l'inconnue  $q_j$ . En effet, les conditions (III.6)<sub>4</sub> et



$u_{2,j}(x_1, -\frac{1}{2}) = 0$  sont satisfaites par la définition de  $D^{-2}$  et  $D^{-1}$ . Pour satisfaire  $u_{2,j}(x_1, \frac{1}{2}) = 0$  nous devons avoir:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12 \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right)} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_1} - f_1 \delta_{j0} \right) \right) = \\ & D^{-1} D^{-2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\nu(x_1)}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + 2\mu \bar{\Phi}_{1,j-1} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

En particulier pour  $j = 0$  nous avons l'équation suivante pour  $q_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{12 \left( \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right)} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \right) = 0 \quad (\text{III.11})$$

Alors  $q_0$  est la fonction 1-périodique donnée par la formule

$$q_0(x_1) = \int_0^{x_1} f_1(\tau) d\tau + C_1 \int_0^{x_1} \left( \nu(\tau) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(\tau, \mathbf{0}) \right) d\tau + C_2$$

Comme  $\mu < \mu_0$  alors

$$\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} > \frac{\kappa}{2} > 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} q_0(x_1, t) = & \int_0^{x_1} f_1(\tau) d\tau - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} \int_0^{x_1} \left( \nu(\tau) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(\tau, \mathbf{0}) \right) d\tau \\ & - \left\langle \int_0^{x_1} f_1(\tau) d\tau - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} \int_0^{x_1} \left( \nu(\tau) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(\tau, \mathbf{0}) \right) d\tau \right\rangle_1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_{1,0}(x_1, \xi_2) = \frac{1}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) N_1(\xi_2),$$

$u_{2,0} = 0$   $p_0 = \tilde{D}^{-1} \left\{ \mu \frac{2}{\nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}} \left( \frac{\partial q_0}{\partial x_1} - f_1 \right) \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) \right\}$  Nous avons ainsi la proposition suivante

**Proposition III.3.1.** *Le terme principal de la solution asymptotique du problème*

(III.4) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,0}(x_1, \xi_2) = -\varepsilon^2 \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} N_1(\xi_2) \\ u_{2,0}(x_1, \xi_2) = 0 \\ p_{1,0}(x_1, \xi_2) = 2\mu \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_{12}}(x_1, \mathbf{0}) \left( \xi_2 - \frac{1}{2} \right) \\ q_0(x_1, t) = \int_0^{x_1} f_1(\tau) d\tau - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu(x_1) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} \int_0^{x_1} \left( \nu(\tau) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(\tau, \mathbf{0}) \right) d\tau \\ \quad - \left\langle \int_0^{x_1} f_1(\tau) d\tau - \frac{\langle f_1 \rangle_1}{\left\langle \nu + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}} \right\rangle_1} \int_0^{x_1} \left( \nu(\tau) + 2\mu \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_{12}}(\tau, \mathbf{0}) \right) d\tau \right\rangle \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

### Estimation d'erreur

**Théorème III.3.2.** Soit  $(u^k, p^k)$  la solution asymptotique donnée par (III.5) et  $(u, p)$  la solution de (III.4) tel que  $\mu < \mu_0$ . Alors les estimations suivantes sont vraies :

$$\|u^k - u_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon)^2} = O\left(\varepsilon^{k+\frac{5}{2}}\right).$$

$$\|\nabla(p^k - p_\varepsilon)\|_{H_{per,1,0}^{-1}(D_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{k+\frac{5}{2}}\right)$$

*Démonstration.* Nous obtenons le problème suivant pour  $(u^k, p^k)$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2\text{div}(\nu(x_1)\mathcal{D}u^k + \mu\Phi(x_1, \mathcal{D}u^k)) + \nabla p^k = F^k(x_1, x_2) + \Phi^k & \text{dans } D_\varepsilon, \\ \text{div}U^k = 0 & \text{dans } D_\varepsilon, \\ U^k(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ U^k(x_1, -\frac{\varepsilon}{2}) = 0 & \text{pour } x_1 \in (0,1), \\ U^k \text{ est 1-périodique en } x_1 & \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

Où

$$\begin{aligned}
F^k(x_1, x_2) &= -\varepsilon^{k+1} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,k-1}}{\partial x_1} \right) + \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k-1}}{\partial x_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial p_k}{\partial x_1} \right) e_1 \\
&- \varepsilon^{k+1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,k}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,k-2}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k}}{\partial \xi_2^2} \right) e_2 \\
&- \varepsilon^{k+2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_1} \right) + \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,k}}{\partial x_1 \partial \xi_2} \right) e_1 + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,k-1}}{\partial x_1} \right) \right) e_2 \\
&- \varepsilon^{k+3} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_1} \right) \right) e_2.
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Et  $\Phi^k$  est le résidu du développement de  $2\text{div}(\mu\Phi(x, \mathcal{D}u^k))$ , il contient des sommes de dérivées de  $\Phi$  d'ordre supérieur ou égal à  $\varepsilon^{k+1}$ . Nous avons alors que :

$$\|\mathcal{D}u^k - \mathcal{D}u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{2\kappa} C_{PF} \|F^k + \Phi^k\|_{L^2(D_\varepsilon)^2} + \frac{\mu L}{\kappa} \|\mathcal{D}u^k - \mathcal{D}u_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon)^4}$$

D'où

$$\|\mathcal{D}u^k - \mathcal{D}u_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon)^4} \leq \frac{C_{PF}}{2(\kappa - \mu L)} \|F^k + \Phi^k\|_{L^2(D_\varepsilon)^2}$$

Ainsi

$$\|u^k - u_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon)^2} \leq \frac{\mathcal{C}(\kappa, C_{PF}, L, \mu)}{\min(1, \frac{1}{C_{PF}})} \|F^k + \Phi^k\|_{L^2(D_\varepsilon)^2} = O\left(\varepsilon^{k+\frac{5}{2}}\right)$$

et

$$\|\nabla(p^k - p_\varepsilon)\|_{H^{-1}(D_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{k+\frac{5}{2}}\right).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\sup_{\psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|\int_{D_\varepsilon} p^k - p \text{div} \psi|}{\|\nabla \psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} &= \sup_{\psi \in (H_{per,1,0}^1(D_\varepsilon))^2} \frac{|2 \int_{D_\varepsilon} \nu(x_1) \mathcal{D}(u^k - u_\varepsilon) : \mathcal{D} \psi|}{\|\nabla \psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} \\
&- \frac{2\mu \int_{D_\varepsilon} (\Phi(x_1, (\mathcal{D}u^k)) - \Phi(x_1, (\mathcal{D}u_\varepsilon))) : \mathcal{D} \psi - \int_{D_\varepsilon} (F^k + \Phi) \cdot \psi|}{\|\nabla \psi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^4}} \\
&\leq (\mathcal{C}(C_{PF}, C_K, L, \mu) + C_{PF}) \|F^k + \Phi\|_{(L^2(D_\varepsilon))^2}
\end{aligned}$$

□

2. Considérons toujours dans le cas périodique les ansatz suivant :

$$\begin{cases} \hat{u}^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+1} u_{1,j}(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \vec{e}_1 + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j+2} u_{2,j}(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \vec{e}_2 \\ \hat{p}^k(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^k \varepsilon^j p_j(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) + \sum_{j=0}^k \varepsilon^{j-1} q_j(x_1) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Dans ce cas nous développons  $\Phi$  en série de Taylor au voisinage de :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Phi(x_1, Du^k))_{hk} &= (\Phi(x_1, \mathbf{B}))_{hk} + \sum_{h,k=1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \sum_{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \mathbf{B}) \hat{d}_{11}^{i_{11}} \hat{d}_{12}^{i_{12}} \hat{d}_{21}^{i_{21}} \hat{d}_{22}^{i_{22}} \\ &\quad (i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}) \\ &\quad i_{11} + i_{12} + i_{21} + i_{22} = j \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \sum_{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \eta(Du^k)) \hat{d}_{11}^{i_{11}} \hat{d}_{12}^{i_{12}} \hat{d}_{21}^{i_{21}} \hat{d}_{22}^{i_{22}} \\ &\quad (i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}) \\ &\quad i_{11} + i_{12} + i_{21} + i_{22} = N + 1 \end{aligned}$$

$$\text{où } Du^k - \mathbf{B} = \left( \hat{d}_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \text{ et } D^{(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22})} \Phi_{hk}(x_1, \mathbf{B}) = \frac{\partial \Phi_{hk}}{\partial x_{11}^{i_{11}} \partial x_{12}^{i_{12}} \partial x_{21}^{i_{21}} \partial x_{22}^{i_{22}}} (x_1, \mathbf{B}).$$

$$\text{div}(\Phi(x_1, \mathbf{B})) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial Z_{12}} \Big|_{Z=\mathbf{B}} \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_1}(x_1, \mathbf{B}) + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial Z_{ij}} \Big|_{Z=\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial Z_{12}} \Big|_{Z=\mathbf{B}} \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_1}(x_1, \mathbf{B}) + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial Z_{ij}} \Big|_{Z=\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Nous notons  $\hat{\Phi}_{1,j}$  et  $\hat{\Phi}_{2,j}$  la première et deuxième composante de  $\text{div}(\Phi(x_1, Du^k))$  respectivement, contenant des sommes de produits des termes d'indice inférieur ou égal à  $j$  et de leur dérivées.

En injectant les ansatz dans le problème (III.1) nous obtenons :

Pour  $j = 0$

$$\begin{cases} -\nu(x_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_{1,0} + \frac{\partial}{\partial x_1} q_0 = 2\mu \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathcal{F}(x_1, \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2}) \\ u_{1,0}(x_1, \pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_1} d\xi_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Où  $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathcal{F} \left( x_1, \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \right)$  sont les éléments de  $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \Phi_{12}(x_1, \mathbf{B})$ . Explicitement

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathcal{F} \left( x_1, \frac{\partial u_{1,0}}{\partial \xi_2} \right) = \frac{\partial}{\partial Z_{12}} \Phi_{12}(x_1, Z) |_{Z=\mathbf{B}} \times \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2}$$

et pour  $j \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu(x_1) \frac{\partial u_{1,j-2}}{\partial x_1} \right) - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{1,j}}{\partial \xi_2^2} - \nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-2}}{\partial \xi_2 \partial x_1} - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial Z_{12}^2} \Phi_{12}|_{Z=\mathbf{B}} \times \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2} \\ -2\mu \hat{\Phi}_{1,j-1} + \frac{\partial p_{j-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_j}{\partial x_1} = f_1 \delta_{j0}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \nu(x_1) \left( \frac{\partial u_{1,j-1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{2,j-3}}{\partial x_1} \right) \right] + 2\nu(x_1) \frac{\partial^2 u_{2,j-1}}{\partial \xi_2^2} \\ + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial Z_{22}^2} \Phi_{12}|_{Z=\mathbf{B}} \times \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial \xi_2^2} + 2\mu \hat{\Phi}_{2,j-1} - \frac{\partial p_j}{\partial \xi_2} = 0, \\ \frac{\partial u_{1,j}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,j}}{\partial \xi_2} = 0, \\ u_{1,j} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0, \\ u_{2,j} \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

Sous réserve de la régularité de la solution, pour résoudre le problème pour  $j = 0$  considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu(x_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} v + \frac{\partial}{\partial x_1} q = 0 \\ v \left( x_1, \pm \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x_1} d\xi_2 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

Nous avons prouvé (Chapitre I) l'existence et l'unicité de la solution  $(v, q)$  du problème (III.18).

Considérons l'espace suivant :

$$\mathbf{H} := \left\{ \varphi \in L^2_{per} \left( 0,1; H_0^1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) \text{ tel que } \forall q \in \mathcal{C}_{per}^1 : \int_0^1 q'(x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi d\xi_2 dx = 0 \right\}$$

On munit  $\mathbf{H}$  de produit scalaire :

$$(u,v)_{\mathbf{H}} = \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} dx d\xi_2$$

**Proposition III.3.2.** *La norme issue de  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}}$  est équivalente à la norme  $L^2_{per} (0,1; H_0^1 (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ , de plus  $\mathbf{H}$  munie de cette norme est un espace complet.*

*Démonstration.*

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)^2 dx d\xi_2 \leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2 \leq \|u\|_{L^2(0,1; H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))}^2$$

et

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)^2 dx d\xi_2 \geq \frac{1}{2} \min(1, C_{PF}) \|u\|_{L^2(0,1; H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))}^2$$

D'où l'équivalence entre les deux normes. De plus, soit  $(\varphi_n)_n \in \mathbf{H}$  tel que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ; on a

$$\forall n \quad \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_n q'(x) dx d\xi_2 = 0 \quad \forall q \in \mathcal{C}_{per}^1$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\varphi_n - \varphi) q'(x) dx d\xi_2 \right| &\leq \left( \int_0^1 q'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\varphi_n - \varphi) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|q'(x)\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(0,1; H_0^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))} \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi q'(x) dx d\xi_2 = 0$$

ainsi  $\mathbf{H}$  est complet. □

La formulation variationnelle de (III.16) est donnée par :

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} dx d\xi_2 = 2\mu \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} \left( x, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} dx d\xi_2 \quad \forall \varphi \in \mathbf{H} \quad (\text{III.19})$$

**Théorème III.3.3.** *Si  $\mu < \frac{\kappa}{L}$ , alors le problème (III.19) admet une unique solution.*

*Démonstration.* Considérons l'opérateur suivant :

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \mathbf{H} & \longrightarrow L^2_{per}(0,1) \times L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ u & \longmapsto v \quad \text{tel que} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\nu(x_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} v + \frac{\partial}{\partial x_1} q_0 = 2\mu \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathcal{F} \left( x_1, \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \\ v(x_1, \pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v \int_0^1 q'_0 dx d\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|R(u_1) - R(u_2)\|_{\mathbf{H}} &= \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq 2\frac{\mu}{\kappa} \left\| \mathcal{F} \left( x_1, \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right) - \mathcal{F} \left( x_1, \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) \right\|_{L^2_{per}(0,1) \times L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \\ &\leq 2\frac{\mu}{\kappa} L \left\| \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right\|_{L^2_{per}(0,1) \times L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \\ &\leq 2\frac{\mu}{\kappa} L \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

$R$  est contractante si et seulement si  $\mu < 2\frac{\kappa}{L}$ . □

### III.4 Exemple pour $\Phi$

Considérons le problème de Stokes stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}(\nu \mathcal{D}u + \mu \Phi(x_1, \mathcal{D}u_\varepsilon)) + \nabla p = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\varepsilon) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\varepsilon) \\ u(x_1, 0) = u(x_1, \varepsilon) = 0 & \text{sur } (0,1) \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Où  $\nu \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$ . De plus ils existent  $\bar{\kappa} > \kappa > 0$  tel que  $\bar{\kappa} > \nu(x_1) > \kappa \forall x_1 \in (0,1)$ .

$$\Phi(x_1, \mathcal{D}u) = \frac{1}{(1 + |\lambda y|^2)^{\frac{1-\beta}{2}}} \mathcal{D}u$$

Où  $\mu_0, \lambda, \beta$  sont des constantes dépendant du fluide et  $0 \leq \beta < 1$ . On rappelle que la norme choisie est  $|y|^2 = \sum_{i,k} y_{ik} y_{ik}$ .

**Théorème III.4.1.** *Considérons l'application:*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ y &\longmapsto \frac{1}{(1+|\lambda y|^2)^\alpha} y \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un coefficient positif et  $\alpha$  un coefficient strictement positif.

Il existe une constante non nulle  $L > 0$  telle que  $\Phi$  définie ci-dessus est  $L$ -lipschitzienne.

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème 4.1 il nous faut l'égalité d'accroissements finis vectorielle:

$$\text{Nous notons } \Phi_{em} = \frac{1}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} y_{em}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{em}}{\partial y_{pq}} &= \frac{1}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} \delta_{em}^{pq} + \frac{-2\alpha \lambda^2 y_{pq} (1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^{\alpha-1}}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^{2\alpha}} y_{em} \\ &= \frac{\delta_{em}^{pq}}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} - \frac{2\alpha \lambda^2}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^{\alpha+1}} y_{em} y_{pq} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi_{em}}{\partial y_{pq}} \right| &\leq \left| \frac{\delta_{em}^{pq}}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} \right| + \frac{2\alpha \lambda^2}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^{\alpha+1}} |y_{em} y_{pq}| \\ &\leq \frac{1}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} + \frac{\alpha \lambda^2}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^{\alpha+1}} \sum_{ik} y_{ik} y_{ik} \\ &\leq \frac{1}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} + \frac{\alpha}{(1 + \lambda^2 \sum_{ik} y_{ik} y_{ik})^\alpha} \\ &\leq 1 + \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } |\nabla_y \Phi|^2 = \sum_{m,n,p,q} \frac{\partial \Phi_{em}}{\partial y_{pq}}^2 \leq \sum_{m,n,p,q} (1 + \alpha)^2 = n^4 (1 + \alpha)^2.$$

Conclusion:  $\Phi$  étant clairement  $C^1$  et que  $|\nabla \Phi(y)| \leq n^4 (1 + \alpha)^2 = L$ ; d'après le théorème d'accroissements finis vectoriels:

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq L|u - v| \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ie  $\Phi$  est  $L$ -lipschitzienne. □

D'où  $\Phi$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième composante.



Supposons que  $\nu = \mu_\infty$ ,  $\mu = \mu_0 - \mu_\infty$  and  $\Phi(x_1, \mathcal{D}u_\varepsilon) = \frac{1}{(1 + \lambda^2 |\mathcal{D}u|^2)^{\frac{1-\beta}{2}}} \mathcal{D}u$ .

Alors

$$\nu \mathcal{D}u + \mu \Phi(x_1, \mathcal{D}u_\varepsilon) = \mu_\infty \mathcal{D}u + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1}{(1 + |\lambda \mathcal{D}u|^2)^{\frac{1-\beta}{2}}} \mathcal{D}u$$

est la loi de Carreau pour la viscosité. En utilisant les approximations (III.12) nous avons

$$u_{0,1} = \varepsilon^2 \frac{1}{\nu + 2\mu} \frac{x_2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$$

En résolvant numériquement le problème pour  $\mu_0 = 3$ ,  $\mu_\infty = 1$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\beta = 0.5$ :

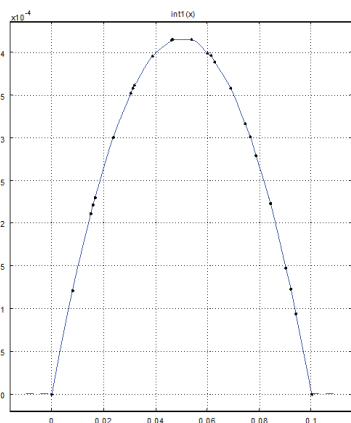


FIG. III.1 – *Profile de la vitesse pour  $x_1 = 0.5$*

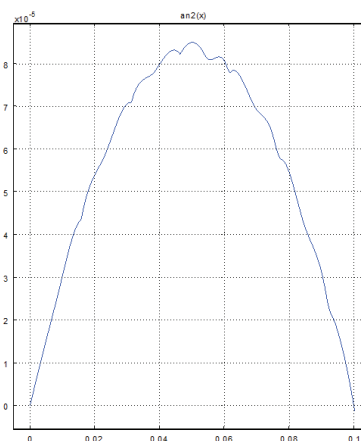


FIG. III.2 – *L'erreur pour la vitesse*

L'erreur entre les résultats numériques et le terme principal de la solution asymptotique est d'ordre  $\varepsilon^5$ .

---

---

# Bibliographie

---

---

- [1] Blanc F., Gipouloux O., Panasenko G., Zine A.M., *Asymptotic Analysis and Partial Asymptotic Decomposition of the Domain for Stokes Equation in Tube Structure*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 1999, Vol.9, 9, 1351-1378.
- [2] S. Canic, G. Guidoboni, A. Mikelic, *Fluid-structure interaction in a pre-stressed tube with thick elastic walls I: the stationary Stokes problem* Networks and Heterogeneous Media, vol. 2(3), (2007), p.397-423.
- [3] S. Canic, A. Mikelic, *Effective equations describing the flow of viscous incompressible fluid through a long elastic tube* Comptes Rendus Mécanique, Volume 330 (2002), Issue 10, Pages 661-666.
- [4] S. Canic, A. Mikelic, *Homogenization closure for a two-dimensional effective model describing fluid-structure interaction in blood flow* "Math Everywhere"; Deterministic and Stochastic Modelling in Biomedicine, economics and Industry, Dedicated to the 60th Birthday of Vincenzo Capasso, G. Aletti, M. Burger, A. Micheletti, D. Morale (ed.) , Springer Heidelberg, 2007, p. 193-205., 2008.
- [5] S. Canic, A. Mikelic, Josip Tambaca *Homogenization closure for a two-dimensional effective model describing fluid-structure interaction in blood flow: analysis, simulation and experimental validation* Comptes Rendus Mécanique, Volume 333 (2005), Issue 12, Pages 867-883.
- [6] Cardone G., Corbo Esposito A., Panasenko G.P., *Asymptotic partial decomposition for diffusion with sorption in thin structures*, Nonlinear Analysis 65, 2006, 79-106.
- [7] Cardone G., Panasenko G.P., Sirakov Y., *Asymptotic analysis and numerical modeling of mass transport in tubular structures*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS) 20, n. 4 (2010) 1-25.
- [8] B. Desjardins, M. J. Esteban, C. Grandmont and P. le Talec, *Weak solutions for a fluid-structure interaction model*, Rev. Mat. Comput., **14** (2001), 523-538.
- [9] B. Desjardins and M. J. Esteban, *Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid*, Arch. Rational Mech. Anal., **146** (1999), 59-71.
- [10] G.P. Galdi "An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations," Springer-Verlag, New York, 1994.

- 
- [11] C. Grandmont , *Existence et unicité de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel stationnaire*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **326**(1998),651-656.
- [12] C. Grandmont and Y. Maday, *Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem*, M<sup>2</sup>AN Math. Model. Numer. Anal., **34** (2000), 609-636.
- [13] Y. Guénil , J-P Monassier *Cardiologie interventionnelle chez l'adulte*, Doin éditeurs, Paris, 1996.
- [14] B.M.Haine,I.S. Aranson,L. Berlyand and D.A.Karpeev, *Effective viscosity of dilute bacterial suspensions: A two dimensional problem*, Physi.Biol.,**5** (2008),1-9.
- [15] Girault V., Raviart P.A., "Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations" Springer-Verlag, Berlin,1986.
- [16] Jikov V.V. (Zhikov), Kozlov S.M., and Oleinik O.A., " Homogenization of Partial Differential Operators and Integral Functionals," Springe, Berlin,1994.
- [17] Ladyzhenskaya O.A., "The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow", Gordon and Breach Sc. Publ, New York, 1969.
- [18] E.M. Landis, G.P.Panasenko *A theorem on the asymptotics of solutions of elliptic equations with coefficients periodic in all variables except one*, DAN SSSR, 1977, 235,6(in Russian); English trans. in Soviet. Math. Dokl, 1977,vol.18,no.4,1140-1143.
- [19] Nazarov S.A., *Asymptotique solution of Navier-Stokes problem on the flow in thin layer fluid* Siberian Math.J.31 (1990) 296-307.
- [20] Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., "Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries," Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1994.
- [21] Lapshin A.E., Panasenko G.P., *An asymptotic solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation on a nonperiodic frame [in Russian]* Tr. Semin. Im. I.G. Petrovskogo **19**, 99-108 (1996); English transl. : I. Math. Sc., New York **85**, No. 6,2302-2307 (1997).
- [22] Panasenko G.P., *Asymptotic expansion of the solution of Navier-Stokes equation in a tube structure*, C.R.Acad.Sci.Paris, t. 326, Série IIb, 1998, pp. 867-872.
- [23] Panasenko G.P., *Averaging processes in frame constructions with random properties [in Russian]* Zh. Vych. Mat. Fiz. **23**, No.5, 1098-1109 (1983); English transl. ; USSR Comput. Maths. Math. Phys. **23**, No.5, 48-55 (1983).
- [24] Panasenko G.P., *Homogenization of lattice-like domains : L-convergence*, In: Nonlinear Partial Differential equations and their Applications College de France seminar. Vol. 13, pp. 259-280, Longman, Harlow (1998).
- [25] Panasenko G.P., *Macroscopic permeability of the system of thin fissures filled by material with random permeability tensor* In: Proceedings of International Conference on

- Mathematical Modelling of Flow through Porous Media, pp. 483-494. World Scientific Publ. (1995).
- [26] G.P. Panasenko: "Multi-scale Modeling for Structures and Composites", Springer, Dordrecht, 2005.
- [27] G. P. Panasenko and R. Stavre, *Asymptotic analysis of a periodic flow in a thin channel with visco-elastic wall*, J. Math. Pures Appl. **85** (2006), 558-579.
- [28] G. P. Panasenko and R. Stavre, *Asymptotic analysis of a non-periodic flow in a thin channel with visco-elastic wall*, Networks and Heterogeneous Media, **3** (2008), 651-673.
- [29] G. P. Panasenko and R. Stavre, *Asymptotic expansion of the solution to the Stokes flow problem in a thin cylindrical elastic tube*, submitted.
- [30] G. P. Panasenko and R. Stavre, *Well posedness and asymptotic expansion of solution of Stokes equation set in a thin cylindrical elastic tube*, Around the Research of Vladimir Maz'ya II/International Mathematical Series, **12**, editori: Ari Laptev, Springer 2010.
- [31] G. P. Panasenko and R. Stavre, *Asymptotic analysis of a non-periodic flow with variable viscosity in a thin elastic channel*, Networks and Heterogeneous Media, **5** (2010), 783-812.
- [32] D. Serre, *Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence.*, Japan J. Appl. Math., **4** (1987), 99-110.
- [33] R. Temam, "Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis," North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [34] V. Volpert "Elliptic partial differential equations. Volume 1" Fredholm theory of elliptic problems in unbounded domains. Birkhauser, 2011, 639+xvii.

Roula FARES

26 ans

Nationalité Franco-Libanaise

### **Education et Diplômes**

2011-présent    Attaché temporaire d'enseignement et de recherche (ATER)  
Faculté des sciences et techniques  
Université Jean Monnet - Saint-Etienne, France

2008-2011      Thèse de doctorat de Mathématiques Appliquées  
Institut Camille Jordan UMR du 5208 du CNRS / LAMUSE  
Université Jean Monnet - Saint-Etienne, France  
Titre: Etude asymptotique et numérique d'écoulements de fluides  
non newtoniens dans des structures tubulaires minces.  
Direction:    Pr. Grigory Panasenko, Pr. Laurent Carraro  
Soutenue:    le 21 Novembre 2011.

2008            Master Modélisation Mathématique et Applications Mention Bien  
Université Jean Monnet - Saint-Etienne, France

2006            Licence de Mathématiques  
Université Jean Monnet - Saint-Etienne, France

### **Activité de Recherche et dEnseignement**

Publications    Asymptotic analysis of the steady Stokes equation with randomly  
perturbed viscosity in a thin tube structure.  
G.Cardone, L. Carraro, R.Fares, G.P.Panasenko  
Journal of Mathematical Sciences, Vol. 176, No. 6,797-817, August, 2011.

2011-présent    ATER, Université Jean Monnet, Saint-Etienne.  
Animation de cours magistraux et de travaux dirigés en mathématiques,  
Deuxime année BTS Opticien Lunettier.  
Animation de travaux dirigés en Math-Physique, niveau licence 1.  
Animation de travaux dirigés en Analyse approfondie, niveau licence 2.  
Animation de cours magistraux et de travaux dirigés en traitement  
mathématique des données, niveau licence 2.

2008 - 2011 Moniteur, Université Jean Monnet, Saint-Etienne.

Tuteur : François Foucault.

Animation de cours magistraux et de travaux dirigés en mathématiques,

Deuxième année BTS Opticien Lunettier

### **Exposés Scientifiques**

- Groupe de travail sur les problèmes spectraux en physique mathématique Orsay, 2 Novembre 2011, Paris.
- International Workshop on the Multiscale Modelling and Methods (MMM) 10-11 Octobre 2011, Saint-Etienne.
- Groupe de travail Homogénéisation et Échelles Multiples Paris 6, 30 mai 2011, Paris.
- 5ème Biennale Française des mathématiques Appliquées et Industriels 23-27 Mai 2011, Guidel, Bretagne.
- Journées EDP Equation aux Dérivées Partielles Université Joseph Fourier, 12-13 Novembre 2011 Grenoble, France.

### **Conférences et Séminaires**

2011 Groupe de travail I sur les problèmes spectraux en physique mathématique Orsay  
2 Novembre 2011, Paris.

International Workshop on the Multiscale Modelling and Methods (MMM)  
10-11 Octobre, Saint-Etienne.

Groupe de travail Homogénéisation et Échelles Multiples Paris 6, 30 mai, Paris.

5ème Biennale Française des mathématiques Appliquées et Industriels  
23-27 Mai, Guidel, Bretagne.

2010 First Franco-Brazilian Fluids Summer School  
Dynamique des fluides et EDP 13-22 Juillet, Campinas, Brazil

Second Franco-Brazilian Fluids Summer School  
Dynamique des fluides et EDP 15-24 Juillet, Lyon, France

Journées EDP Equation aux Dérivées Partielles  
Ecole Normale Supérieure 24-26 Novembre Lyon, France

2009 Journées EDP Equation aux Dérivées Partielles  
Université Joseph Fournier 12-13 Novembre Grenoble, France

2008 La méthode des éléments finis en mécanique des fluides - Saint-Etienne, France  
**Compétences Linguistiques et Informatiques**

Trilingue Français, Anglais et Arabe

Microsoft Word, Excel, PowerPoint, Latex, Comsol, GeoGebra.

**Loisirs et Intérêts personnels**

Tourisme et Voyages : Italie, Espagne, Portugal, Brésil, Liban, Syrie, Turquie. Politiques internationales, Scoutisme, Internet, Cinéma, Cuisine.





## Asymptotic and numerical study of Non-Newtonian fluid flow in thin tube structures

**Summary :** In order to model the blood flow through vessels, the Stokes equation with the nonconstant viscosity is considered in a thin tube structure, i.e., in a connected union of thin rectangles with heights of order  $\varepsilon$  and bases of order 1 with smoothed boundary. An asymptotic expansion of the solution is constructed. In the case of random perturbations of the constant viscosity, we prove that the leading term for the velocity is deterministic, while for the pressure it is random, but the expectations of the pressure satisfies the deterministic Darcy equation. Estimates for the difference between the exact solution and its asymptotic approximation are proved. Finally, we give some numerical results. We extend the results for a thin tube structure composed by two thin rectangles with lateral elastic boundaries which are connected by a domain with rigid boundaries. After a variational approach of the problem which gives us existence, uniqueness, regularity results and some a priori estimates, we construct an asymptotic solution. We present and solve the problems for all the terms of the asymptotic expansion. For two different cases, we describe the order of steps of the algorithm of solving the problem and we construct the main term of the asymptotic expansion. And finally, we present a variational and an asymptotic analysis for a more general case where the viscosity depends on the infinitesimal strain tensor in a thin channel. By means of the a priori estimates, we justify our asymptotic constructions, by obtaining a small error between the exact and the asymptotic solutions.

**Key Words :** Stokes equation, thin tubular structure, asymptotic expansion, variable viscosity, boundary layers, Sophie Germain equation, non newtonian fluid, mixed boundary (rigid-elastic).

## Étude asymptotique et numérique d'écoulements de fluides non Newtoniens dans des structures tubulaires minces

**Resumé :** Afin de modéliser le flux sanguin dans les vaisseaux, l'équation de Stokes avec une viscosité variable est considérée dans une structure tubulaire mince, c'est à dire, dans une union de rectangles minces avec des hauteurs d'ordre  $\varepsilon$  et des bases d'ordre 1. Un développement asymptotique de la solution est construit. Dans le cas des perturbations aléatoires de la viscosité constante, nous prouvons que le premier terme de la vitesse est déterministe, alors que pour la pression, il est aléatoire, mais les espérances de la pression satisfont l'équation déterministe de Darcy. Les estimations pour la différence entre la solution exacte et son approximation asymptotique sont prouvées. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques. Nous étendons les résultats à une structure tubulaire mince composée de deux rectangles minces avec des parois élastiques qui sont reliés par un domaine dont les parois sont rigides. Après une approche variationnelle du problème qui nous donne des résultats d'existence, d'unicité, de régularité, et certaines estimations, a priori, nous construisons une solution asymptotique. Nous présentons et résolvons les problèmes de tous les termes du développement asymptotique. Pour deux cas différents, nous décrivons l'ordre des étapes de résolution de l'algorithme du problème et nous construisons le terme principal du développement asymptotique. Et enfin, nous présentons une analyse variationnelle et asymptotique pour un cas plus général où la viscosité dépend du tenseur des déformations dans un canal mince. Par le biais des estimations a priori, nous justifions nos constructions asymptotiques, par l'obtention d'une petite erreur entre les solutions exactes et asymptotiques.

**MOTS-CLÉS :** équation de Stokes, structure tubulaire, étude asymptotique, viscosité variable, couches limites, équation de Sophie Germain, fluides non newtonien, domaine a parois mixtes.