



**HAL**  
open science

## Trois problèmes inverses en glaciologie

Vincent Rommelaere

► **To cite this version:**

Vincent Rommelaere. Trois problèmes inverses en glaciologie. Glaciologie. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00701278

**HAL Id: tel-00701278**

**<https://theses.hal.science/tel-00701278>**

Submitted on 25 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**LABORATOIRE  
DE GLACIOLOGIE  
ET GEOPHYSIQUE  
DE L'ENVIRONNEMENT**

Associé à l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I



---

**Trois Problèmes Inverses en Glaciologie**

---

**Vincent ROMMELAERE**

Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I  
(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et 30 mars 1992)

Spécialité : Géophysique

Date de la soutenance : 23 septembre 1997

Composition du jury :

M.	C. Le Provost	Président
Mme	F. Rémy	Rapporteur
M.	D.R. MacAyeal	Rapporteur
M.	J. Blum	Examineur
M.	M. Campillo	Examineur
M.	C. Ritz	Directeur de Thèse

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement - CNRS  
Tél (33) 04.76.82.42.00 - Fax (33) 04.76.82.42.01  
54, Rue Molière - BP 96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**LABORATOIRE  
DE GLACIOLOGIE  
ET GEOPHYSIQUE  
DE L'ENVIRONNEMENT**

Associé à l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I



---

**Trois Problèmes Inverses en Glaciologie**

---

**Vincent ROMMELAERE**

Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I  
(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et 30 mars 1992)

Spécialité : Géophysique

Date de la soutenance : 23 septembre 1997

Composition du jury :

M.	C. Le Provost	Président
Mme	F. Rémy	Rapporteur
M.	D.R. MacAyeal	Rapporteur
M.	J. Blum	Examineur
M.	M. Campillo	Examineur
M.	C. Ritz	Directeur de Thèse

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement - CNRS  
Tél (33) 04.76.82.42.00 - Fax (33) 04.76.82.42.01  
54, Rue Molière - BP 96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France

*« La question suivante était : qu'est-ce qui fait tourner les planètes autour du Soleil ? Au temps de Kepler il y avait des gens pour répondre qu'il y avait derrière chaque planète un ange battant des ailes et la poussant sur son orbite. Comme vous le verrez, cette réponse n'est pas très loin de la vérité. La seule différence est que les anges ont une autre position et battent des ailes vers l'intérieur de l'orbite »*

Feynman (1918-1988)

Avant tout, j'aimerais sincèrement remercier tous les membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail.

En particulier, j'ai beaucoup apprécié l'intérêt que Frédérique Rémy a montré pour cette thèse, ainsi que ses remarques critiques et constructives. Un grand merci également au second rapporteur, Douglas MacAyeal, grâce à qui j'ai visité Chicago pendant l'hiver 95. Cette expérience à Chicago a énormément influencé mon travail et je tiens à remercier Douglas de m'avoir fait découvrir une approche originale de la glaciologie. Enfin, la tâche la plus difficile a probablement été celle de Catherine Ritz, qui a su me motiver et me conseiller efficacement pendant ces trois ans.

Une partie de ce travail résulte d'une collaboration fortuite avec l'équipe « gaz » du LGGE. Ainsi, j'ai pu apprécier le dynamisme et la curiosité de Laurent Arnaud qui m'a appris le névé polaire et ses mystères. Je pense d'autre part avoir trouvé en Jean-Marc Barnola quelqu'un de plus têtu que moi et c'est sans doute pourquoi j'ai beaucoup aimé les discussions que nous avons eues ensemble. Les conseils et l'intérêt de Patricia Martinerie, Jérôme Chappellaz et Dominique Raynaud m'ont également été très agréables.

La coutume veut que l'on remercie ses camarades de bureau : j'hésite pourtant à le faire... En effet, devrais-je remercier le gros Manu de m'avoir entraîné dans des endroits où le sol était si pentu que mes genoux en cognaient de peur ? Devrais-je dire merci à Irène de m'avoir ruiné la santé en me faisant visiter tous les bistrotts de Grenoble ? Dois-je remercier Hervé de me faire systématiquement passer pour le souffredouleur du bureau ? Je me console en me disant que j'aurais pu tomber plus mal... dans le bureau d'Isabelle, par exemple. Plus sérieusement, merci à tous ceux qui participent à la bonne humeur de ce laboratoire et dont la liste serait très longue.

Merci enfin à tous ceux qui ont participé à la relecture de cette thèse, en particulier Papa, Maman et Florence.

# RESUME

Les questions que se pose le glaciologue peuvent souvent être identifiées à des problèmes inverses. C'est ce qui est illustré dans ce travail à travers trois exemples :

- Reconstruction des températures du passé : nous essayons de combiner l'information donnée par la composition isotopique de la glace et le profil de température mesuré à Vostok (Antarctique). Cette approche suggère que le profil de température ne permet pas de donner de meilleure estimation de la température du dernier stade glaciaire à Vostok que le thermomètre isotopique classique.

- Reconstruction de la composition de l'atmosphère du passé : lors de la transformation de la neige en glace, des bulles d'air de composition voisine de celle de l'atmosphère sont emprisonnées dans la porosité de la glace. Différents processus naturels peuvent altérer la composition de la bulle et l'interprétation des mesures n'est pas immédiate. Nous proposons ici une méthode de déconvolution du signal atmosphérique prenant en compte les phénomènes de diffusion et de gravitation dans le névé polaire. Nous appliquons ensuite cette méthode à l'interprétation des mesures de méthane, CFCs et rapport isotopique du méthane dans le névé et la glace.

- Reconstruction des propriétés rhéologiques de la glace à grande échelle : les ice-shelves (plates-formes de glace flottantes) constituent avec les ice-streams (fleuves de glace) les éléments dynamiques de la calotte Antarctique. Leur rhéologie est un paramètre important à prendre en compte pour prédire l'évolution de la géométrie de la calotte Antarctique. Nous montrons comment retrouver ce paramètre critique à partir d'un modèle d'écoulement et de mesures de terrain, puis nous fournissons une carte de viscosité apparente du Ross Ice Shelf (Antarctique de l'Ouest).

Les techniques d'inversion décrites dans ce travail sont classiques dans de nombreux domaines de la géophysique, mais elles sont peu connues en glaciologie. En les appliquant sous une forme simplifiée, nous nous sommes efforcés de montrer ce qu'elles peuvent apporter à la glaciologie et quelles sont leurs limites.

# ABSTRACT

Many questions of glaciological interest can be recognized as inverse problems. In this thesis, I illustrate this point through three examples :

- Reconstruction of past temperatures : I try to combine the information given by ice isotopic composition and measured temperature profile at Vostok (Antarctica). This approach suggests that the temperature profile is not able to give any better estimate of surface temperature during the last glacial period than the classical isotopic thermometer (at Vostok).
- Reconstruction of past atmospheres : air composition measured in bubbles of ice cores gives tremendous information about past atmospheres. However, the interpretation of these measurements is not immediate, because some natural phenomena can alter the composition of bubble air. I propose here a method to extract the atmospheric signal of ice cores, taking firn diffusion and gravitational separation into account. This method is then applied to interpret methane, CFCs and  $\delta^{13}\text{C}$  of  $\text{CH}_4$  measurements.
- Reconstruction of large-scale rheological properties of ice : ice-shelves and ice-streams are dynamic elements of the Antarctic ice sheet. Their rheology is an important parameter to predict the evolution of the Antarctic ice sheet. I present here a possible means to determine the effective viscosity of an ice-shelf using an ice-shelf flow model and velocity and thickness measurements. The results consist of a map of the effective viscosity of the Ross Ice Shelf.

Inverse methods used to treat these problems are well known in many fields of geophysical sciences, but they have been used occasionally in glaciology. I try to show what can be learnt from their application in glaciology, but also their limits.

<b>I. INTRODUCTION</b>	<b>13</b>
<b>I.1. LES PROBLÈMES INVERSES EN GÉOPHYSIQUE</b>	<b>13</b>
I.1.1. IL EST IMPOSSIBLE DE PARCOURIR LA TOTALITÉ DES PARAMÈTRES	15
I.1.2. LES MESURES NE SUFFISENT PAS	16
I.1.3. LES DONNÉES ET LE MODÈLE SONT INCERTAINS	16
<b>I.2. LES PROBLÈMES INVERSES EN GLACIOLOGIE</b>	<b>17</b>
I.2.1. PALÉOTHERMOMÉTRIE	17
I.2.2. INTERPRÉTATION DU SIGNAL DES CAROTTES DE GLACE	18
I.2.2.1. Datation de la glace	18
I.2.2.2. Datation de l'air des bulles	19
I.2.3. PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES DE LA GLACE	19
I.2.4. FRICTION À LA BASE DES GLACIERS	20
<b>I.3. QUELQUES TECHNIQUES D'INVERSION</b>	<b>20</b>
I.3.1. LE PROBLÈME INVERSE LINÉAIRE	21
I.3.1.1. Décomposition de Lanczos	21
I.3.1.1.1. Définition	21
I.3.1.1.2. Interprétation	23
I.3.1.1.3. Inverse de Moore-Penrose	23
I.3.1.2. Moindres carrés	24
I.3.1.3. Moindres carrés régularisés	25
I.3.1.4. Inverse stochastique	26
I.3.1.5. Equivalence des trois approches	28
I.3.2. LE CAS NON LINÉAIRE	29
I.3.2.1. Méthodes de Monte Carlo	29
I.3.2.1.1. Recherche des modèles admissibles	29
I.3.2.1.2. Recuit simulé	29
I.3.2.2. Méthode de contrôle	30
I.3.2.3. Inverse généralisée de Tarantola Valette (IGTV)	31
I.3.3. EN RÉSUMÉ	32
<b>I.4. BUTS POURSUIVIS</b>	<b>33</b>



**II. PALEOTHERMOMETRIE A VOSTOK 35**

<b>II.1. PROBLÈME.....</b>	<b>36</b>
II.1.1. TEMPÉRATURE ISOTOPIQUE.....	36
II.1.1.1. Principe du thermomètre isotopique.....	36
II.1.1.2. Limites de la température isotopique.....	37
II.1.2. APPROCHES RÉCENTES DE DÉCONVOLUTION DU SIGNAL CLIMATIQUE.....	38
II.1.2.1. Dahl-Jensen et Johnsen (1986).....	39
II.1.2.2. MacAyeal et al. (1991, 1993).....	40
II.1.2.3. Cuffey et al. (1994, 1995).....	40
II.1.2.4. Johnsen et al. (1995).....	41
II.1.2.5. Salamatin et al. (1994, 1997).....	41
<b>II.2. INTERPRÉTATION DU PROFIL DE TEMPÉRATURE MESURÉ À VOSTOK.....</b>	<b>42</b>
II.2.1. LE MODÈLE UNITAIRE.....	43
II.2.1.1. Analyse des ordres de grandeurs.....	43
II.2.1.2. Hypothèses supplémentaires.....	45
II.2.1.2.1. Vitesse verticale.....	45
II.2.1.2.2. Conductivité thermique.....	45
II.2.1.2.3. Capacité calorifique.....	46
II.2.1.3. Approche unitaire.....	46
II.2.2. PRINCIPE DE L'INVERSION.....	46
II.2.2.1. Données utilisées - covariance a priori sur les données.....	47
II.2.2.2. Covariance a priori sur les paramètres du modèle.....	48
II.2.3. RÉSULTATS.....	48
II.2.3.1. Solution retenue par l'inversion - covariances a posteriori.....	48
II.2.3.2. Gain d'information par inversion.....	50
II.2.3.3. Faut-il recommencer l'inversion ?.....	52
II.2.3.4. Discussion de l'analyse de Salamatin et al. (1994, 1997).....	53
<b>II.3. CONCLUSION.....</b>	<b>55</b>

**III. DE L'AIR DES BULLES A L'ATMOSPHERE DU PASSE****57**

<b>III.1. INTÉRÊT CLIMATIQUE DU NÉVÉ POLAIRE .....</b>	<b>57</b>
III.1.1. DE LA NEIGE À LA GLACE.....	57
III.1.2. DE L'ATMOSPHERE AUX BULLES.....	58
III.1.2.1. Interactions avec H <sub>2</sub> O liquide .....	58
III.1.2.2. Interactions avec H <sub>2</sub> O solide .....	59
III.1.2.3. Quel est « l'âge » d'une bulle ?.....	59
III.1.3. DE LA COMPOSITION DES BULLES À L'ATMOSPHERE DU PASSÉ .....	59
<b>III.2. MODÈLE DE TRANSPORT DES GAZ DANS LE NÉVÉ ET LA GLACE .....</b>	<b>60</b>
III.2.1. DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT DANS LE NÉVÉ.....	60
III.2.2. EQUATIONS DE CONSERVATION.....	62
III.2.2.1. Conservation de la glace.....	62
III.2.2.2. Pores ouverts .....	62
III.2.2.2.1. Conservation de l'air.....	63
III.2.2.2.2. Conservation du gaz trace .....	63
III.2.2.3. Pores fermés (ou bulles) .....	64
III.2.2.3.1. Première étape élémentaire : densification .....	65
III.2.2.3.2. Seconde étape : fermeture des pores.....	65
III.2.2.3.3. Identification du terme de piégeage.....	66
III.2.2.4. Résumé des équations et conditions aux limites .....	67
III.2.3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION .....	69
<b>III.3. RECONSTRUCTION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION APPARENT .....</b>	<b>70</b>
III.3.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE CONTRÔLE.....	71
III.3.2. PRINCIPE DE LA MINIMISATION PAR GRADIENTS CONJUGUÉS.....	72
III.3.3. CALCUL DU GRADIENT DE L'INDEX DE PERFORMANCE .....	74
III.3.3.1. Calcul numérique .....	74
III.3.3.2. L'équation adjointe .....	74
III.3.3.2.1. Version continue .....	74
III.3.3.2.2. Version discrète .....	78
III.3.3.2.3. Equivalence des deux approches.....	79
III.3.3.3. Détermination du gradient .....	79
III.3.3.4. En résumé.....	80
III.3.4. PROBLÈME DE NON - UNICITÉ DE LA SOLUTION .....	80

III.3.5. RÉSULTATS ET ANALYSE DE L'ERREUR.....	82
III.3.5.1. Paramètres fixes d'entrée et observations.....	82
III.3.5.2. Reconstructions .....	83
III.3.5.3. Erreur .....	84
III.3.6. DISCUSSION.....	85
<b>III.4. RECONSTRUCTION DE L'ATMOSPHÈRE DU PASSÉ.....</b>	<b>85</b>
III.4.1. MODÈLE UNITAIRE - FONCTION DE TRANSFERT AIR - NÉVÉ - GLACE .....	86
III.4.2. PRINCIPE DE L'INVERSION.....	89
III.4.3. NON-UNICITÉ DE LA SOLUTION RECONSTRUITE, FONCTION DE RÉGULARISATION .....	90
III.4.3.1. Un problème mal posé .....	90
III.4.3.2. Influence de la régularisation .....	92
III.4.4. ANALYSE DE L'ERREUR.....	93
III.4.4.1. Matrice covariance .....	93
III.4.4.2. Matrices de résolution .....	94
III.4.4.3. Compromis entre variance et résolution.....	95
III.4.5. RECONSTRUCTION DU MÉTHANE ATMOSPHERIQUE À DE08-2 ET VOSTOK ...	96
III.4.6. RECONSTRUCTION À PARTIR DE PLUSIEURS SITES DE PRÉLÈVEMENT.....	99
<b>III.5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>101</b>
III.5.1. RAPPEL DES CONDITIONS D'APPLICATION DE LA MÉTHODE .....	101
III.5.2. LES GAZ TRACES ANTHROPIQUES ET RAPPORTS ISOTOPIQUES .....	101
III.5.2.1. Les CFCs (CFC-11).....	101
III.5.2.2. $\delta^{13}\text{C}$ du méthane.....	103
III.5.3. VERS UNE DÉCONVOLUTION COMPLÈTEMENT AUTOMATISÉE DU SIGNAL DES CAROTTES ?.....	104

<b>IV. LE ROSS ICE SHELF</b>	<b>107</b>
------------------------------	------------

<b>IV.1. INTRODUCTION</b> .....	<b>107</b>
IV.1.1. SUR LA ROUTE DU PÔLE SUD .....	107
IV.1.2. INTÉRÊT CLIMATIQUE DES ICE-SHELVES .....	109
<b>IV.2. DYNAMIQUE DE L'ICE-SHELF</b> .....	<b>107</b>
IV.2.1. SPÉCIFICITÉ DE L'ICE-SHELF .....	111
IV.2.2. HISTORIQUE DE LA MODÉLISATION DE L'ICE-SHELF .....	112
IV.2.2.1. Analyse de Weertman .....	112
IV.2.2.2. Instabilité des calottes marines ? .....	115
IV.2.2.3. Solution analytique de Van der Veen .....	117
IV.2.3. DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DIAGNOSTIQUES .....	119
IV.2.3.1. Analyse adimensionnelle .....	120
IV.2.3.1.1. Théorème de Vachy - Buckingham .....	121
IV.2.3.1.2. Une maquette du Ross Ice Shelf ? .....	122
IV.2.3.1.3. Adimensionnalisation des équations du mouvement .....	123
IV.2.3.1.4. Développement en série de perturbations .....	125
IV.2.3.2. Conditions aux limites .....	127
IV.2.4. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIAGNOSTIQUES .....	129
IV.2.4.1. Les modèles de Huybrechts et Determann .....	129
IV.2.4.2. Eléments finis : le modèle de MacAyeal .....	130
IV.2.4.3. Résolution par différences finies .....	133
IV.2.4.3.1. Discrétisation .....	133
IV.2.4.3.2. Méthodes numériques de résolution .....	134
IV.2.4.3.3. Décompositions de domaines .....	136
IV.2.4.4. Equivalence des approches FDM et FEM .....	140
IV.2.4.4.1. Comparaison sur une géométrie idéale .....	140
IV.2.4.4.2. Comparaison sur le Ross Ice Shelf .....	141
IV.2.4.4.3. Avantages et inconvénients des deux méthodes .....	144
IV.2.5. L'ÉQUATION PROGNOSTIQUE .....	145
IV.2.5.1. Différences avec la calotte posée .....	145
IV.2.5.2. Schéma numérique .....	146
IV.2.6. INFLUENCE DU VÉLAGE SUR L'ÉCOULEMENT DE L'ICE-SHELF .....	147
<b>IV.3. RHÉOLOGIE À GRANDE ÉCHELLE DU ROSS ICE SHELF</b> .....	<b>151</b>

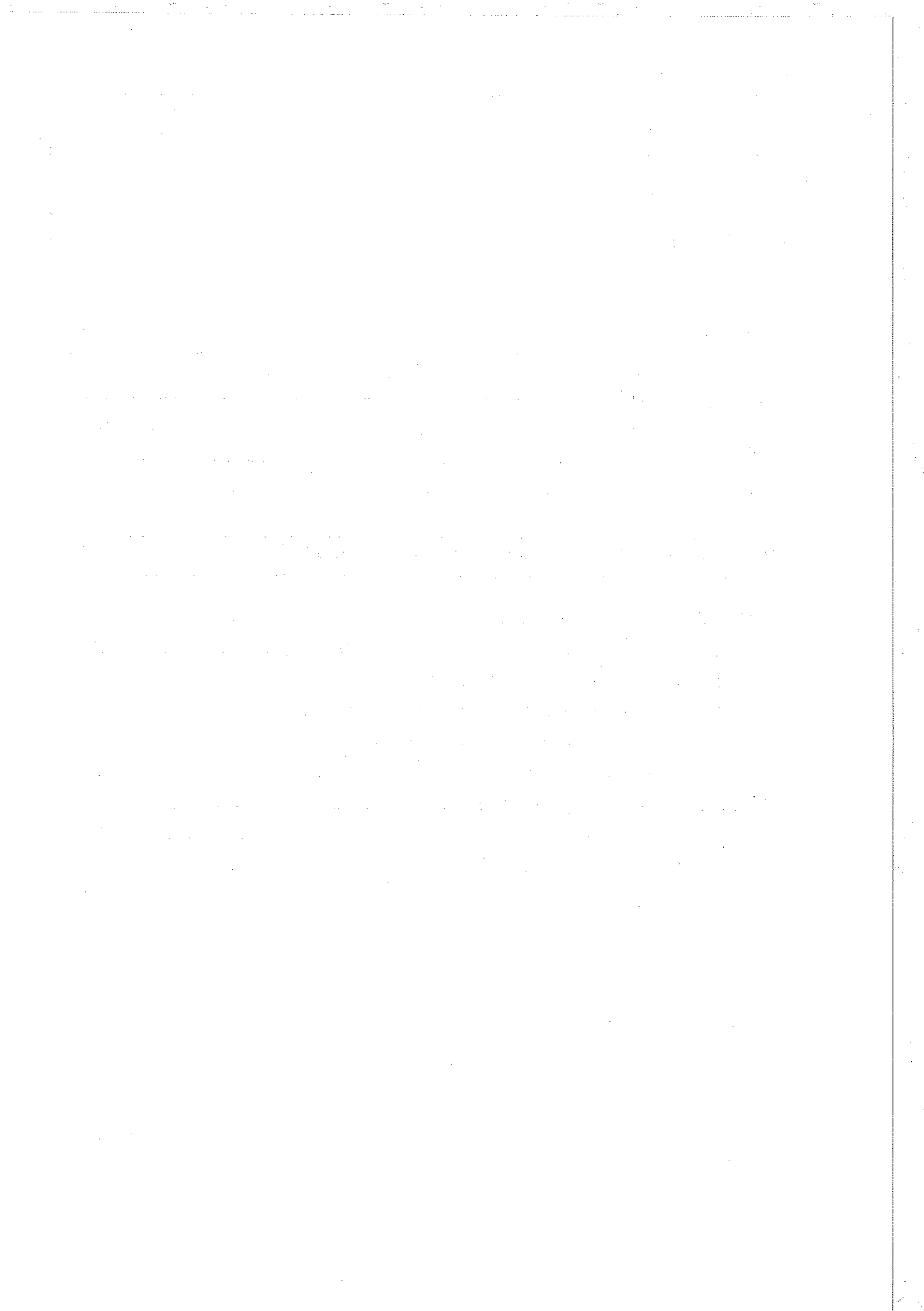
IV.3.1. PREMIÈRE CONFRONTATION MODÈLE - OBSERVATIONS.....	152
IV.3.2. DÉTERMINATION DE LA VISCOSITÉ EFFECTIVE PAR MÉTHODE DE CONTRÔLE.....	153
IV.3.2.1. Analogie avec la détermination de la friction basale des ice-streams.....	154
IV.3.2.1.1. Dynamique des ice-streams.....	154
IV.3.2.1.2. Détermination de la friction basale.....	155
IV.3.2.2. Principe de la méthode de contrôle.....	156
IV.3.2.3. Calcul du gradient de l'index de performance.....	157
IV.3.2.3.1. Equations adjointes.....	157
IV.3.2.3.2. Calcul du gradient.....	162
IV.3.2.4. Algorithme de résolution.....	162
IV.3.2.5. Différences avec l'étude précédente.....	163
IV.3.3. EFFICACITÉ DE LA MÉTHODE.....	163
IV.3.3.1. Champ d'observations idéal.....	165
IV.3.3.2. Champ de vitesses discret.....	166
IV.3.3.3. Champ de vitesses discret, bruité.....	168
IV.3.4. VISCOSITÉ EFFECTIVE DU ROSS ICE SHELF.....	170
IV.3.5. DISCUSSION.....	171
IV.3.5.1. Rhéologie et conditions à la base de l'ice-shelf.....	171
IV.3.5.2. Une signature de l'activité de Ice Stream B ?.....	174
IV.3.5.3. En résumé.....	178
<b>IV.4. VERS UN MODÈLE COMPLET 3D DE CALOTTE ANTARCTIQUE ?.....</b>	<b>180</b>

<b>V. CONCLUSIONS</b>	<b>187</b>
<b>VI. BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>189</b>
<b>VII. NOTATIONS</b>	<b>199</b>

<b>VII.1. CHAPITRE I.....</b>	<b>199</b>
<b>VII.2. CHAPITRE II.....</b>	<b>201</b>
<b>VII.3. CHAPITRE III.....</b>	<b>203</b>
<b>VII.4. CHAPITRE IV.....</b>	<b>205</b>

<b>VIII. ANNEXE : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS</b>	<b>207</b>
------------------------------------------------------	------------

<b>VIII.1. CALCUL TENSORIEL .....</b>	<b>207</b>
VIII.1.1. INVARIANTS DES TENSEURS SYMÉTRIQUES .....	207
VIII.1.2. TENSEUR DES CONTRAINTES .....	208
VIII.1.3. TENSEUR DÉVIATEUR DES CONTRAINTES .....	209
VIII.1.4. TENSEUR DES TAUX DE DÉFORMATION .....	209
VIII.1.5. DIVERGENCE D'UN TENSEUR .....	210
<b>VIII.2. LOI RHÉOLOGIQUE DE LA GLACE .....</b>	<b>211</b>
VIII.2.1. DÉFINITION DE LA VISCOSITÉ.....	211
VIII.2.2. LOI DE GLEN.....	212



# I. INTRODUCTION

Un des grands défis de la glaciologie moderne est la prévision de l'évolution du niveau des mers. En 1997, les glaciologues ne sont pas en mesure de fournir cette prévision de manière fiable, utilisable pour d'éventuelles décisions politiques. Par exemple, on est incapable d'estimer si le volume de la calotte Antarctique augmente ou diminue. Plutôt qu'une révolution dans l'art de penser les glaciers, ce sont sans doute les progrès technologiques et les nouveaux outils d'investigations qui permettront de relever ce défi.

Les méthodes inverses font partie des outils prometteurs développés pour la géophysique. Ces techniques ont été peu utilisées en glaciologie, et nous essaierons de montrer, dans le cadre de cette thèse, ce qu'elles peuvent apporter à l'étude des glaciers et quelles sont leurs limites.

## I.1. LES PROBLEMES INVERSES EN GEOPHYSIQUE

Pour étudier un système physique, une approche classique consiste à élaborer, puis à utiliser un modèle. S'il est possible de comparer les résultats de ce modèle avec des observations, alors on peut en déduire des informations sur les paramètres mal connus de ce modèle. La quantification de ces paramètres mal connus, qui constitue le *problème inverse*, est souvent un pas nécessaire dans la prévision de l'évolution du système considéré.

Pour l'analyse du système Terre, les géophysiciens et les mathématiciens ont développé des outils performants afin de tirer le meilleur parti des mesures. Ces méthodes, qui reposent sur des visions différentes du problème, traitent avec plus ou moins de panache les complications inhérentes aux problèmes inverses :

- l'impossibilité technique de parcourir la totalité des paramètres mal connus du modèle
- l'insuffisance des mesures
- l'incertitude sur les mesures et sur le modèle.

Afin d'illustrer les trois points précédents, nous allons considérer rapidement l'exemple gravimétrique. Cette réflexion est inspirée d'un exercice de Turcotte et Schubert (1982) p. 212-215.

Les anomalies de gravité à la surface de la Terre sont en partie causées par des corps de densités différentes de la croûte terrestre environnante. Ceci est une particularité très



intéressante car elle nous permet d'obtenir des informations sur ce qui se trouve sous nos pieds sans faire de forage (ou *avant* de faire un forage). Ainsi, à partir de la carte d'anomalies gravimétriques de la figure I-3, la question que l'on se pose est : « quel est le champ de densité en dessous de cette région ? ». Il n'existe aucune formule répondant exactement à cette question. Toutefois, une information qu'apporte la théorie est la loi de l'attraction universelle de Newton. Cette loi peut être appliquée afin de calculer l'anomalie gravimétrique en fonction du champ de densité : c'est cette loi qui constituera la base physique du *modèle direct*.

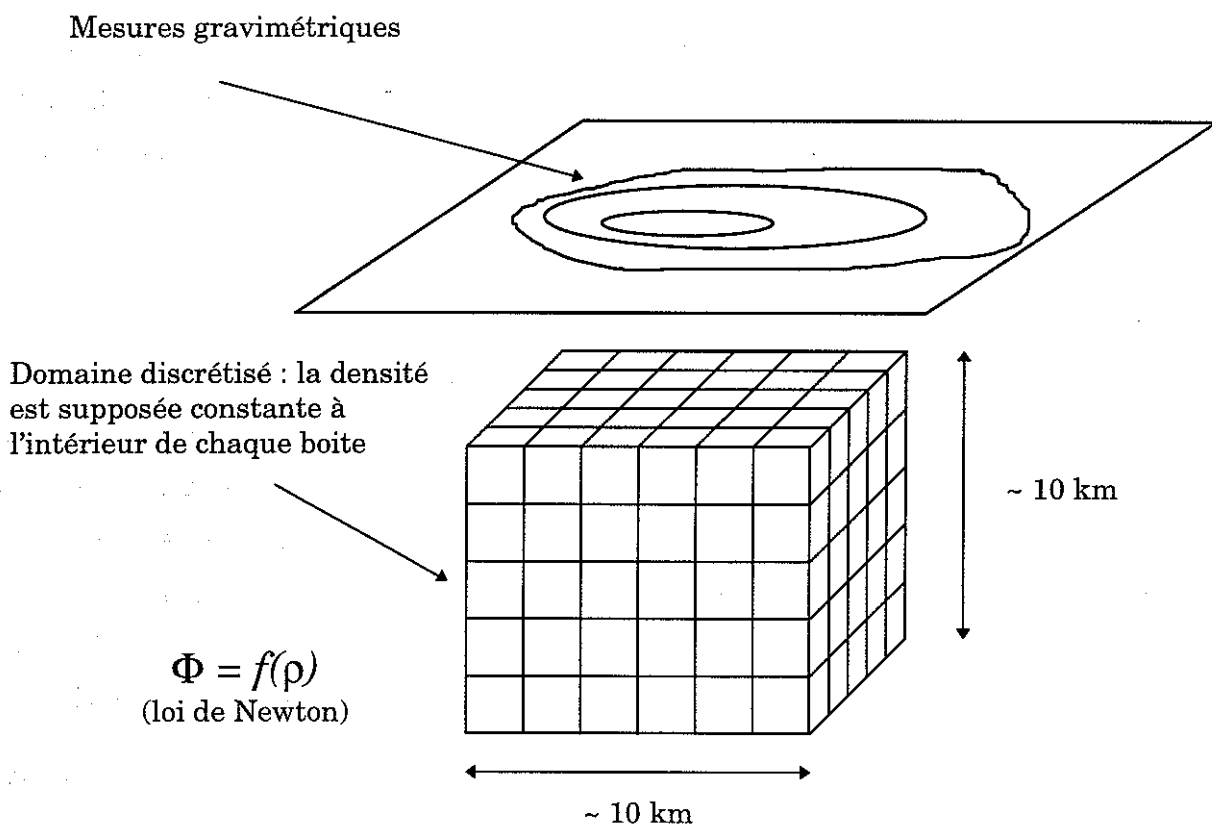


Figure I-1 : le modèle direct calcule le potentiel de gravitation  $\phi$  (et donc l'anomalie gravimétrique) en fonction du champ de densité  $\rho$ . Le sous-sol est divisé en un nombre fini de boîtes (ici 150 boîtes).

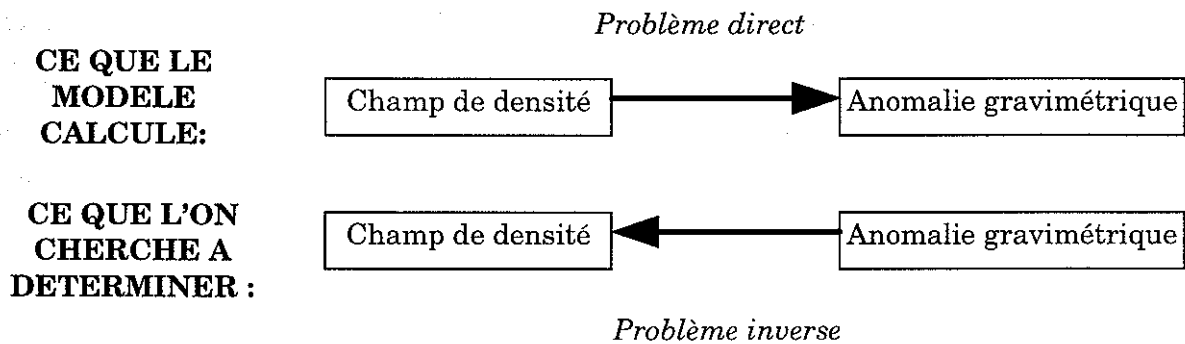


Figure I-2 : le modèle calcule l'anomalie gravimétrique en fonction du champ de densité. La détermination du champ de densité à partir des mesures gravimétriques est un problème inverse.

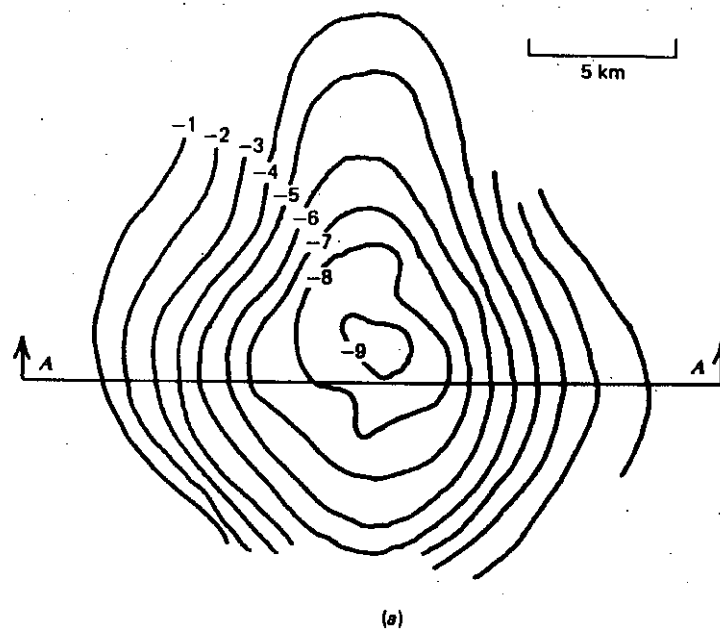


Figure I-3 : contours d'anomalies gravimétriques ( $10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ ) de surface à 200 km au sud-est de Galveston, Texas, à proximité du bord extérieur du plateau continental (d'après Nettleton, 1957). On pense que cette anomalie est due à un dôme de sel.

### I.1.1. Il est impossible de parcourir la totalité des paramètres

Dans le modèle de la figure I-1, on choisit les valeurs discrètes de densité comme paramètres libres, c'est-à-dire que l'on s'autorise à les faire varier pour reproduire au mieux les mesures gravimétriques. Le problème se réduit alors au choix d'un jeu optimal de paramètres. Pour réaliser ce choix, une idée est d'essayer toutes les combinaisons possibles de valeurs de densité, de les utiliser comme entrée du modèle direct, puis de choisir la

meilleure solution. Dans l'exemple de la figure I-1, même si l'on suppose que la densité ne peut prendre que deux valeurs à l'intérieur de chaque boîte (celle du sel ou celle des sédiments), on a alors plus de  $10^{46}$  ( $= 2^{150}$ ) combinaisons à étudier. En supposant les calculs du modèle direct très rapides (1 ms), il faudrait  $10^{34}$  ans pour traiter le problème de cette manière... Il s'agit donc d'utiliser des outils mathématiques qui permettent l'obtention rapide d'une estimation des paramètres.

### **I.1.2. Les mesures ne suffisent pas**

Un autre problème provient du fait que plusieurs champs de densité peuvent créer la même anomalie de surface : par exemple, une masse ponctuelle crée le même champ de gravité qu'une boule uniforme de rayon quelconque et de masse identique. L'unicité du jeu de paramètres optimal n'est donc pas assurée : il faut trouver des critères supplémentaires pour sélectionner la meilleure solution parmi l'infinité de solutions qui reproduisent les observations de manière satisfaisante.

### **I.1.3. Les données et le modèle sont incertains**

Tant qu'il y aura des mesures, il y aura des erreurs sur ces mesures. La distribution de ces erreurs est souvent difficile à estimer et un des seuls outils dont dispose l'expérimentateur est l'étude de reproductibilité. Les méthodes inverses doivent nous aider à déterminer comment cette erreur sur les mesures se répercute sur le choix optimal des paramètres libres (*i.e.* sur la forme de la poche qui crée l'anomalie gravimétrique). L'erreur sur le modèle est encore plus difficile à estimer que celle des mesures. Un modèle repose sur des hypothèses simplificatrices qui ne peuvent pas être vérifiées par l'expérience (mais uniquement contredites par celle-ci). Par exemple, dans le modèle gravimétrique ci-dessus, on a supposé que l'anomalie était uniquement due à des variations de densités dans les dix premiers kilomètres de la croûte terrestre. En théorie, des corps enfouis plus profondément, la topographie de régions éloignées, ou encore les astres (Lune, Soleil...) contribuent également au champ de gravité de cette région. Une des difficultés est donc de quantifier comment cette erreur sur le modèle influence l'estimation des différents paramètres.

Turcotte et Schubert (1982), pour interpréter les données de la figure I-3, suggèrent d'ajouter deux hypothèses importantes au problème :

- il s'agit de sel
- la poche est sphérique.

L'ajout de ces deux hypothèses, sans doute discutables, permet de limiter artificiellement le nombre de paramètres libres à 2 (le rayon et la profondeur de la poche de

sel), ce qui rend possible l'exploration de l'espace des paramètres. Ces nouvelles hypothèses permettent également de lever le problème de non-unicité et de fournir une réponse approximative à la question que l'on se posait : la poche de sel est située à 6 km de profondeur environ et son rayon est de 4 km.

De manière beaucoup plus générale, les méthodes d'inversion tendent à ajouter l'information manquante, sous différentes formes, afin de fournir une réponse approximative à un problème pour lequel il n'existe pas de réponse exacte. Ces méthodes ont montré leur efficacité dans des domaines très variés allant de la tomographie médicale à la localisation des foyers des tremblements de Terre.

## **I.2. LES PROBLEMES INVERSES EN GLACIOLOGIE**

Bon nombre de questions qui passionnent les glaciologues peuvent être identifiées à des problèmes inverses. Dans les cinq exemples présentés ci-dessous, il est possible de construire un modèle physique dont les paramètres mal connus sont les champs qui intéressent le glaciologue. Ce modèle calcule des quantités mesurables, ce qui fournit des informations sur les paramètres du modèle (quantités non mesurables).

### **I.2.1. Paléothermométrie<sup>1</sup>**

Notre planète a connu au cours des 2,5 derniers millions d'années une succession de périodes froides (glaciaires) et chaudes (interglaciaires), comme celle dans laquelle nous nous trouvons actuellement. Ce cycle de glaciations - déglaciations est une caractéristique importante de l'ère quaternaire. Les fluctuations de température ont été enregistrées sous plusieurs formes dans les calottes polaires. On peut les estimer d'une part grâce à l'analyse des isotopes qui constituent la glace, et d'autre part à l'aide du profil de température des calottes polaires. L'idéal serait de réussir à combiner les informations données par ces deux types d'enregistrement indépendants afin de retrouver les variations de température à la surface des calottes avec le maximum de précision. Ce problème fera l'objet du chapitre II de cette thèse.

---

<sup>1</sup> Le mot paléothermométrie est une combinaison des mots grecs palaios (ancien), thermos (chaud) et metron (mesure) : c'est l'étude de la température du passé.

## I.2.2. Interprétation du signal des carottes de glace

Les calottes glaciaires fournissent un enregistrement unique du climat et de l'atmosphère du passé. Ce constat a contribué à des développements technologiques importants, tant au niveau des méthodes de forage qu'au niveau des techniques d'extraction des gaz, d'analyse isotopique ou de mesure des éléments traces contenus dans les bulles de la glace. Un problème est que les mesures donnent la composition de la glace (ou des bulles) en fonction de la *profondeur* dans la carotte et non en fonction de l'*âge*. Cette correspondance âge de la glace (ou des bulles) - profondeur n'est pas évidente, mais on dispose de plusieurs sources d'information indépendantes permettant de l'estimer.

### I.2.2.1. Datation de la glace

Paterson (1994) fait un inventaire des différentes méthodes de datations de la glace utilisées à ce jour :

- datation à partir de modèles d'écoulement de glace
- comptage des couches annuelles, soit *de visu*, soit grâce aux variations saisonnières de certaines propriétés de la glace (*e.g.* rapport isotopique d'oxygène 18 - $\delta^{18}\text{O}$ -, de Deutérium, conductivité électrique, concentration en microparticules, etc.)
- identification de couches d'âge connu, telles que des couches acides correspondant à des éruptions volcaniques datées
- corrélation des pics de  $\delta^{18}\text{O}$  des carottes de glaces, avec d'autres enregistrements climatiques datés tels que ceux des carottes marines (ou de lacs)
- datation par analyse du radiocarbone du  $\text{CO}_2$  contenu dans les bulles de glace. La précision de cette méthode semble assez faible car, en plus d'erreurs expérimentales importantes, la conversion radiocarbone - âge est incertaine ; elle ne permet pas de remonter à plus de 30 000 ans.

Cette liste n'est pas exhaustive : des méthodes fondées sur la combinaison de deux enregistrements différents commencent à apparaître. Par exemple, Salamatin et al. (1994, 1997) ont proposé une datation utilisant les fréquences orbitales de Milankovitch ainsi que le profil de température dans le trou de forage et de mesures isotopiques. Waelbroeck et al. (1995) ont également proposé une chronologie basée sur les fréquences orbitales et sur l'analyse de l'Oxygène 18 des carottes marines et du Deutérium de la carotte de Vostok. Aucune de ces méthodes ne semble donner entière satisfaction : l'idéal serait de trouver la meilleure intersection entre ces différentes sources d'information.

Pour l'instant, on est très loin d'une datation de ce type. Les derniers résultats obtenus sur la carotte de Vostok font apparaître quatre cycles climatiques complets (Petit et al.,

1997). Ceux-ci seront tracés en fonction d'une chronologie officielle, mais celle-ci n'est pas encore entièrement déterminée.

### ***1.2.2.2. Datation de l'air des bulles***

La déconvolution du signal atmosphérique<sup>2</sup> est compliquée par l'existence d'un décalage (jusqu'à plusieurs milliers d'années) entre l'âge des gaz contenus dans les bulles et celui de la glace. Ce décalage provient des bulles qui ne se forment pas en surface de la calotte, mais à la transition névé - glace à 100 m de profondeur environ (cette profondeur pouvant varier sensiblement suivant les sites). Ce décalage dépend notamment de la masse molaire du gaz considéré, de son coefficient de diffusion dans l'air et de son histoire atmosphérique. L'interprétation du signal atmosphérique des carottes de glace sera l'objet du chapitre III.

### **1.2.3. Propriétés rhéologiques<sup>3</sup> de la glace**

La glace, dans le domaine de contraintes observées dans les glaciers, peut être considérée comme un matériau visqueux. Il est alors théoriquement possible de relier les contraintes aux déformations par l'intermédiaire d'une loi rhéologique (appelée aussi loi de comportement). Cette loi rhéologique fait intervenir un tenseur de viscosité, qui se réduit à un scalaire si la glace est supposée incompressible et isotrope (*i.e.* si la glace présente les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions) et incompressible. Les valeurs de ce tenseur de viscosité peuvent être mesurées en laboratoire à l'aide d'essais mécaniques sur des échantillons de glace de quelques centimètres. Cependant, pour des raisons techniques, les essais sont effectués sous des contraintes plus importantes que dans la réalité. Il n'est donc pas certain qu'une loi rhéologique établie en laboratoire soit valable à l'échelle des glaciers, mais elle peut fournir un bon *a priori* de la rhéologie à plus grande échelle. À l'aide d'un modèle d'écoulement de glacier et de contrôles en nombre suffisant, (*e.g.* vitesses d'écoulement, topographie, épaisseurs de glace, profils de température, etc.), il pourrait être intéressant d'étudier la loi rhéologique de la glace à grande échelle. Ce type d'approche a été

---

<sup>2</sup> On parlera d'un signal *atmosphérique* pour désigner un signal lié à la composition des bulles emprisonnées dans la glace (et donc de l'atmosphère du passé). En revanche, les isotopes de l'eau (qui sont liés à la température) fourniront un signal *climatique*.

<sup>3</sup> Rhéologie est également issu du grec : *rheô* (couler) et *logos* (discours) - ou *logia* (théorie) -. Il s'agit d'une « branche de la mécanique qui étudie le comportement de la matière en fonction de la viscosité, de l'élasticité et de la plasticité, sous le rapport des déformations et des contraintes » (Petit Robert).

tenté notamment par Rémy et al. (1996) sur la calotte posée Antarctique et sera abordé dans le chapitre IV de cette thèse sur le Ross Ice Shelf.

### **I.2.4. Friction à la base des glaciers**

La rhéologie à grande échelle n'est pas la seule inconnue de la dynamique des glaciers : les phénomènes de glissement à la base des glaciers sont également très mal quantifiés. Dans certains cas cependant, la friction basale ne pose pas de problèmes de modélisation. Par exemple, si la température basale du glacier est inférieure au point de fusion de la glace, le glacier ne glisse pas ; d'autre part, si le glacier flotte sur la mer, comme c'est le cas des ice-shelves, il n'y a pas de friction basale. En revanche, si l'on étudie les glaciers émissaires (ou ice streams) Antarctique, où la température basale est au point de fusion, alors la quantification de la friction basale est primordiale. Elle peut se faire sur les glaciers émissaires, à partir de mesures de vitesses d'écoulement, d'altitude et d'épaisseur de glace, d'un modèle d'écoulement, d'hypothèses sur la loi rhéologique et de techniques d'inversion (e.g. MacAyeal et al., 1995).

## **I.3. QUELQUES TECHNIQUES D'INVERSION**

« The techniques used today for solving inverse problems are as multivariate as the problems themselves » (Tarantola, 1987). Les études sur le sujet se sont en effet considérablement développées depuis le début des années 70. Le deuxième point sur lequel cette citation attire notre attention est que même s'il est possible de construire une théorie du problème inverse (ce que fait Tarantola dans son livre), il n'existe pas, en pratique, de méthode générique valable quel que soit le problème inverse à résoudre.

Le cas particulier le plus étudié est le problème inverse linéaire Gaussien. Dans le cas non-linéaire, il existe également des techniques, parfois basées sur la linéarisation : l'analyse de l'erreur et de la résolution est dans ce cas plus difficile. Dans cette section, nous montrons de manière non exhaustive les techniques d'inversion les plus couramment utilisées. Notre but n'est pas de faire une revue complète des méthodes inverses, mais plutôt de fournir une base de travail pour les chapitres suivants.

### I.3.1. Le problème inverse linéaire

Beaucoup de modèles physiques, une fois discrétisés, peuvent s'écrire sous forme d'un produit matriciel<sup>4</sup> :

$$\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{d}} \quad (\text{I-1})$$

où  $\underline{\mathbf{d}}$  est un vecteur colonne de dimension  $n$  contenant les données (quantités mesurables) que l'on cherche à reproduire,  $\underline{\mathbf{m}}$  est un vecteur colonne de dimension  $m$  contenant les paramètres mal connus du modèle (quantités non mesurables) que l'on cherche à déterminer et  $\underline{\mathbf{G}}$  est un opérateur linéaire (de dimension  $n \times m$ ) de l'espace des paramètres du modèle vers l'espace des données. Dans l'exemple gravimétrique, le modèle direct peut s'écrire sous cette forme, à condition de choisir astucieusement les paramètres du modèle : en effet, d'après la loi de Newton, les potentiels de gravitation de deux masses s'ajoutent.

En règle générale  $\underline{\mathbf{G}}$  n'est pas inversible : le nombre de paramètres est différent du nombre de données, la matrice  $\underline{\mathbf{G}}$  est rectangle et *a fortiori* non inversible. Les techniques présentées ci-dessous permettent quand même d'obtenir une estimation des paramètres du modèle  $\underline{\mathbf{m}}$  en fonction des données  $\underline{\mathbf{d}}$ .

#### I.3.1.1. Décomposition de Lanczos

##### I.3.1.1.1. Définition

Cette décomposition est également appelée décomposition en valeurs singulières (SVD) ou décomposition spectrale suivant les auteurs. Son principal intérêt est de permettre de distinguer les différents types de problèmes inverses linéaires, suivant l'opérateur  $\underline{\mathbf{G}}$  considéré. Lanczos (1961) a montré que toute matrice  $\underline{\mathbf{G}}$  rectangle réelle de dimension  $n \times m$  pouvait se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{U}}\underline{\mathbf{\Lambda}}\underline{\mathbf{V}}^T \quad (\text{I-2})$$

L'exposant T désigne l'opérateur transposé,  $\underline{\mathbf{U}}$  est une matrice carrée de dimension  $n \times n$ , dont les vecteurs colonnes peuvent être choisis orthonormés (ce sont les vecteurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{G}}^T$ ). De même,  $\underline{\mathbf{V}}$  est une matrice carrée de dimension  $m \times m$  dont les vecteurs sont orthonormés (ce sont les vecteurs propres de  $\underline{\mathbf{G}}^T\underline{\mathbf{G}}$ ).  $\underline{\mathbf{\Lambda}}$  est une matrice

<sup>4</sup> Par convention, dans toute la suite de cette thèse, les quantités soulignées et en gras désigneront des matrices (majuscules) ou des vecteurs colonnes (minuscules).



diagonale de dimension  $n \times m$  dont les éléments diagonaux positifs ou nuls (que l'on appelle valeurs singulières<sup>5</sup>) sont classés par ordre décroissant.

On isole ensuite les  $p$  valeurs singulières non nulles de cette matrice en la réécrivant à l'aide d'une sous-matrice diagonale  $\underline{\Lambda}_p$  de dimension  $p \times p$ .

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-3})$$

Numériquement, cette différenciation entre valeurs singulières nulles et non nulles est problématique : les valeurs singulières deviennent très petites et il s'agit de se fixer un seuil à partir duquel on les considérera comme nulles. Si l'on désigne par  $\underline{\mathbf{U}}_p$  et  $\underline{\mathbf{V}}_p$  les matrices formées des  $p$  premiers vecteurs de  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}$ , alors  $\underline{\mathbf{G}}$  peut s'écrire :

$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{U}}_p \underline{\Lambda}_p \underline{\mathbf{V}}_p^T \quad (\text{I-4})$$

On désigne par ailleurs  $\underline{\mathbf{U}}_0$  la matrice formée des  $n-p$  derniers vecteurs de  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}_0$  la matrice formée par les  $m-p$  derniers vecteurs de  $\underline{\mathbf{V}}$ .  $\underline{\mathbf{U}}_0$  est l'orthogonal de  $\underline{\mathbf{U}}_p$  et  $\underline{\mathbf{V}}_0$  l'orthogonal de  $\underline{\mathbf{V}}_p$ .

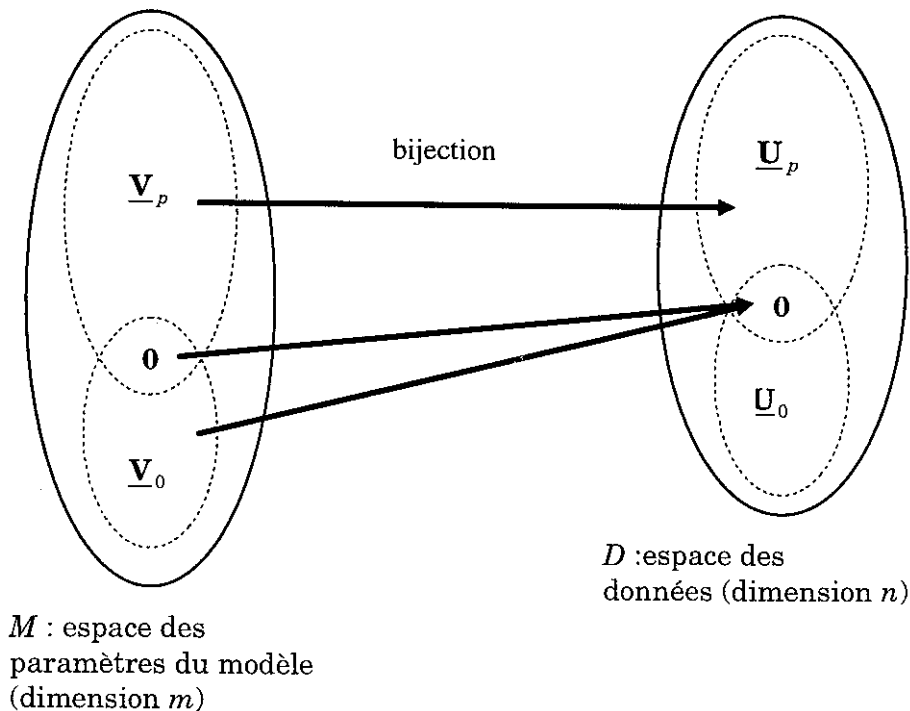


Figure I-4 : structure de l'opérateur linéaire  $\underline{\mathbf{G}}$  en fonction de sa décomposition de Lanczos.  $\underline{\mathbf{U}}_p$  définit l'image de  $\underline{\mathbf{G}}$  (toute combinaison linéaire des vecteurs de  $\underline{\mathbf{U}}_p$  a un

<sup>5</sup> Ce sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $\underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{G}}$  (ou  $\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{G}}^T$ , ce qui est équivalent).

antécédent dans l'espace des paramètres, cet antécédent étant unique dans  $\underline{V}_p$ ) et  $\underline{V}_0$  son noyau (toute combinaison linéaire des vecteurs de  $\underline{V}_0$  a une image nulle dans l'espace des données).

### 1.3.1.1.2. Interprétation

L'intérêt de la décomposition précédente est que les vecteurs de  $\underline{V}$  forment une base orthonormée de l'espace des paramètres du modèle et ceux de une  $\underline{U}$  base orthonormée de l'espace des données.

En fonction des valeurs de  $m$ ,  $n$  et  $p$ , on peut distinguer différents types de problèmes inverses linéaires :

- $m = n = p$  : il y a alors bijection de l'espace des paramètres du modèle vers l'espace des données : l'inverse de  $\underline{G}$  existe et les paramètres du modèle s'obtiennent par résolution d'un système linéaire classique. C'est un système bien posé suivant l'expression de Hadamard (alors que les trois cas décrits ci-dessous se rapportent à des problèmes mal posés).

- $p = m < n$  :  $\underline{G}$  est un opérateur injectif. Le système est alors dit *surdéterminé* (l'exemple classique est le cas d'une droite que l'on essaye de faire passer à travers un nuage de points).

- $p = n < m$  :  $\underline{G}$  est un opérateur surjectif. L'espace des paramètres est plus grand que l'espace des données : le système est alors dit *sous-déterminé*.

- $p < m$  et  $p < n$  : il s'agit du cas le plus courant en géophysique (c'est l'exemple qui est tracé sur la figure I-4) : le système est à la fois sur- et sous-déterminé.

### 1.3.1.1.3. Inverse de Moore-Penrose<sup>6</sup>

Si le vecteur  $\underline{d}$  appartient à l'image de  $\underline{G}$  (définie par  $\underline{U}_p$ ), on peut montrer que la solution du sous-espace défini par les vecteurs de  $\underline{V}_p$  vérifiant  $\underline{Gm} = \underline{d}$  est définie par :

$$\underline{m}^{\text{est}} = \underline{V}_p \underline{\Lambda}_p^{-1} \underline{U}_p^T \underline{d} = \underline{G}^+ \underline{d} \quad (\text{I-5})$$

---

<sup>6</sup>  $\underline{G}^+$  est dite inverse de Moore-Penrose d'une matrice rectangle  $\underline{G}$  si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :  $\underline{G}\underline{G}^+\underline{G} = \underline{G}$ ,  $\underline{G}^+\underline{G}\underline{G}^+ = \underline{G}^+$ ,  $(\underline{G}\underline{G}^+)^T = \underline{G}\underline{G}^+$  et  $(\underline{G}^+\underline{G})^T = \underline{G}^+\underline{G}$ . On pourra aisément s'assurer que la matrice  $\underline{G}^+$  de l'équation (I-5) vérifie ces quatre propriétés en utilisant le fait que  $\underline{V}_p^T \underline{V}_p = \underline{U}_p^T \underline{U}_p = \underline{I}_p$  (matrice identité d'ordre  $p$ ).

C'est aussi ce que l'on appelle la solution de norme minimale. Noter que n'importe quelle combinaison linéaire de  $\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}}$  et d'un vecteur du noyau  $\underline{\mathbf{V}}_0$  vérifie également l'équation du modèle direct  $\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{d}}$ . De manière plus générale, pour tout vecteur  $\underline{\mathbf{d}}$  appartenant à l'espace des données,  $\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}}$  défini par l'équation (I-5) est la solution de  $\underline{\mathbf{V}}_p$  qui minimise la norme de  $\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{d}}$ <sup>7</sup>.

L'inverse de Moore-Penrose revient à projeter orthogonalement le vecteur  $\underline{\mathbf{d}}$  dans l'image de  $\underline{\mathbf{G}}$  ( $\underline{\mathbf{U}}_p$ )<sup>8</sup>, puis à trouver son antécédent dans  $\underline{\mathbf{V}}_p$  en utilisant la bijection de  $\underline{\mathbf{V}}_p$  dans  $\underline{\mathbf{U}}_p$ . Un point faible de cette méthode provient de l'identification des  $p$  valeurs singulières non nulles : en pratique, elles sont souvent toutes non nulles, mais certaines sont très petites, ce qui rend l'inverse de Moore-Penrose (I-5) numériquement instable.

### 1.3.1.2. Moindres carrés

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où  $p = m < n$ . Le nombre de données est alors supérieur au nombre de paramètres. Si le bruit sur les mesures est supposé Gaussien<sup>9</sup> (ce qui sera le cas dans toute la suite) et si l'erreur sur tous les points de

<sup>7</sup> La norme de  $\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{d}}$  est égale à la racine carrée des écarts quadratiques entre les sorties du modèle et les observations car la norme de l'espace des données considérée ici est la norme  $L_2$  « traditionnelle ».

<sup>8</sup> Un vecteur  $\underline{\mathbf{d}}$  de l'espace des données peut s'écrire comme une combinaison des  $p$  vecteurs de la base orthogonale formant la matrice  $\underline{\mathbf{U}}_p$  ( $\underline{\mathbf{u}}_k^p$ ) et des  $n-p$  vecteurs de base formant  $\underline{\mathbf{U}}_0$  ( $\underline{\mathbf{u}}_k^0$ ):

$$\underline{\mathbf{d}} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \underline{\mathbf{u}}_k^p + \sum_{k=1}^{n-p} \beta_k \underline{\mathbf{u}}_k^0$$

Projeter orthogonalement  $\underline{\mathbf{d}}$  sur  $\underline{\mathbf{U}}_p$  revient à annuler les composantes de  $\underline{\mathbf{U}}_0$ , car  $\underline{\mathbf{U}}_p$  et  $\underline{\mathbf{U}}_0$  sont orthogonaux. Ceci s'écrit :

$$proj(\underline{\mathbf{d}}) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \underline{\mathbf{u}}_k^p$$

<sup>9</sup> Souvent, il n'existe pas de bonnes raisons de supposer une distribution normale (ou Gaussienne) des mesures autour de leur vraie valeur, si ce n'est que c'est la loi statistique la plus communément utilisée. Le succès de la loi normale est probablement dû au *théorème central limite*, qui stipule que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires ayant une distribution identique, de moyenne et de variance finies, doit être normalement distribuée. Dans les cas que nous allons étudier, le nombre d'essais de reproductibilité étant petit, ce théorème ne s'applique pas. Le

[A suivre page suivante]

mesure est identique, on est tenté de minimiser la somme des écarts quadratiques entre les sorties du modèle et les observations. Cet index à minimiser s'écrit sous forme matricielle :

$$I = (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d})^T (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad (\text{I-6})$$

On peut alors montrer que le minimum de  $I$  (il existe et il est unique car le noyau de  $\mathbf{G}$  est nul) est atteint pour  $\mathbf{d}$  vérifiant la formule matricielle suivante (voir par exemple Menke, 1989) :

$$\mathbf{m}_{MC}^{\text{est}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (\text{I-7})$$

Cette solution existe car, comme  $p = m$ , toutes les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  sont non nulles et  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  est donc inversible. On peut également remarquer que l'équation (I-7) n'est qu'un cas particulier de (I-5) car  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$  vérifie les quatre propriétés de l'inverse de Moore-Penrose.

Il existe une version légèrement différente de cette solution, adaptée au cas où le bruit sur les mesures dépend du point considéré : il s'agit de la solution des moindres carrés pondérés.

### I.3.1.3. Moindres carrés régularisés

Pour les cas plus problématiques (*i.e.*  $p < m$  et  $p < n$ ), plusieurs approches ont été proposées. La première, que l'on doit sous sa forme la plus simple (*i.e.* les moindres carrés *amortis*) à Levenberg (1944), consiste à régulariser la somme des écarts quadratiques. Ce concept a été repris et formalisé en détail par Tikhonov et Arsenin (1977). D'un point de vue mathématique, l'idée de cette technique est de choisir la meilleure solution à l'aide de critères de régularité. La régularisation permet de trouver un compromis entre adéquation modèle - observations et simplicité (ou *régularité*) de la solution reconstruite. Ce compromis repose sur le principe philosophique du rasoir d'Occam<sup>10</sup> (XIV<sup>ème</sup> siècle), qui stipule que l'on ne doit pas ajouter de complexité sans bonnes raisons : entre deux solutions acceptables en

[Suite]

---

problème a été bien résumé par G. Lippman, lors d'une conversation avec H. Poincaré : « tout le monde croit en la loi normale des erreurs : l'expérimentateur parce qu'il croit qu'elle peut être prouvée par les mathématiques, et le mathématicien parce qu'il croit qu'elle a été établie par l'observation ».

<sup>10</sup> *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* [les choses ne sont pas à multiplier sauf nécessité].

termes d'accord avec les observations, Occam suggère de choisir la plus simple. Le concept de simplicité n'est malheureusement pas évident à définir en termes mathématiques ; de plus, il dépend du problème considéré. D'après Menke (1989), les « mesures de la simplicité » (ou plutôt de complexité) les plus couramment utilisées sont :

- l'écart quadratique de la solution à un jeu de paramètres supposé *a priori*.
- la « platitude » de la solution, *i.e.* sa dérivée au carré (en supposant que les paramètres à reconstruire sont des valeurs discrètes d'une fonction continue)
- l'aspect lisse de la solution reconstruite, *i.e.* sa dérivée seconde au carré.

Il s'agit donc de minimiser un index de performance  $I$  légèrement modifié :

$$I = (\underline{\mathbf{Gm}} - \underline{\mathbf{d}})^T \underline{\mathbf{W}}_e (\underline{\mathbf{Gm}} - \underline{\mathbf{d}}) + \kappa^2 L \quad (\text{I-8})$$

où  $L$  est la mesure de la simplicité (plus  $L$  est petit, plus la solution est simple) et  $\kappa^2$  est un facteur de pondération (plus  $\kappa^2$  est grand, plus on donne d'importance à la simplicité de la solution par rapport à l'adéquation modèles - observations). On s'autorise de plus à pondérer les points de mesure en fonction de leur erreur, par le biais d'une matrice de pondération diagonale  $\underline{\mathbf{W}}_e$  (contenant l'inverse de la variance supposée sur les points de mesures). De manière générale  $L$  peut s'écrire sous forme :

$$L = (\underline{\mathbf{m}} - \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle)^T \underline{\mathbf{W}}_m (\underline{\mathbf{m}} - \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \quad (\text{I-9})$$

où  $\langle \underline{\mathbf{m}} \rangle$  désigne des valeurs de paramètres *a priori* et  $\underline{\mathbf{W}}_m$  est une matrice de pondération (elle n'est pas forcément diagonale). L'estimation des paramètres du modèle donnée par la solution des moindres carrés régularisés est alors donnée par l'une des formules suivantes (Menke, 1989) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{m}}^{\text{est}} &= \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle + \left( \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}_e \underline{\mathbf{G}} + \kappa^2 \underline{\mathbf{W}}_m \right)^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}_e (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{G}} \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \\ &= \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle + \underline{\mathbf{W}}_m^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \left( \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{W}}_m^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T + \kappa^2 \underline{\mathbf{W}}_e^{-1} \right)^{-1} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{G}} \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \end{aligned} \quad (\text{I-10})$$

On voit que le rôle mathématique de  $\kappa^2$  est d'augmenter les valeurs propres de la matrice à inverser, et donc d'augmenter la stabilité de la solution reconstruite. Les points faibles de cette méthode sont liés au choix arbitraire d'une mesure de la simplicité par le biais d'une matrice  $\underline{\mathbf{W}}_m$  et à l'importance qu'on lui donne ( $\kappa^2$ ).

#### 1.3.1.4. Inverse stochastique

L'inverse stochastique ne fait pas appel à la notion de simplicité (ou régularité) de la solution à reconstruire. Elle s'efforce plutôt de répondre à la question : « que m'apprend la confrontation modèle - observations, compte tenu de *a priori* que j'ai sur la solution à reconstruire ? ». La base mathématique de cette méthode est le concept de probabilité

conditionnelle du Révérend Bayes. Ci-dessous, nous explicitons son théorème (paru à titre posthume en 1763) à l'aide d'un exemple simple.

Considérons une urne contenant deux boules. On sait que cette urne contient soit deux boules blanches (événement  $E_1$ ), soit une boule blanche et une boule noire (événement  $E_2$ ). Si l'on n'a pas de préjugés sur ce que contient l'urne, alors les événements  $E_1$  et  $E_2$  sont équiprobables<sup>11</sup>, ce qui s'écrit :

$$P(E_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(E_2) = \frac{1}{2} \quad (\text{I-11})$$

Où  $P(E_1)$  et  $P(E_2)$  sont appelées probabilités *a priori*.

Imaginons maintenant que l'on pioche une boule dans l'urne et que l'on regarde sa couleur (c'est l'événement  $A$ ):

- si celle-ci est noire : le seul événement possible est alors  $E_2$ , puisque  $E_1$  ne contient pas de boule noire. La probabilité *a posteriori* de  $E_2$  est 1 (et celle de  $E_1$  est 0). Ceci montre que faire un tirage peut changer la probabilité des événements que l'on considère.

- si celle-ci est blanche : les deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont toujours possibles (puisque chacun d'eux contient une boule blanche), mais leur probabilité a changé : l'événement  $E_1$  est maintenant plus probable que  $E_2$ . C'est cette probabilité *a posteriori* que le théorème de Bayes<sup>12</sup> permet de calculer :

$$P(E_1 / A) = \frac{P(E_1)P(A / E_1)}{P(E_1)P(A / E_1) + P(E_2)P(A / E_2)} \quad (\text{I-12})$$

$P(E_k / A)$  est la probabilité *a posteriori* quand l'événement  $A$  s'est produit (c'est ce que l'on cherche) et  $P(A / E_k)$  est la vraisemblance de la cause  $E_k$ . Dans l'exemple considéré, la probabilité *a posteriori* de  $E_1$  est égale à  $2/3$  ( $= (1/2 \times 1) / (1/2 \times 1 + 1/2 \times 1/2)$ ). Il faut remarquer que les probabilités *a posteriori* dépendent des probabilités *a priori*.

L'inverse stochastique est une généralisation de ce théorème au cas du problème inverse linéaire Gaussien. Le principe est de se donner une densité de probabilité *a priori*

<sup>11</sup> Ceci revient à utiliser le postulat de Bayes, qui stipule que l'on a aucune raison *a priori* d'émettre des préférences sur les causes (ici  $E_1$  et  $E_2$ ).

<sup>12</sup> Le théorème de Bayes s'écrit de manière plus générale, pour  $n$  événements  $E_k$  :

$$P(E_k / A) = \frac{P(E_k)P(A / E_k)}{\sum_{i=1}^n P(E_i)P(A / E_i)}$$

sur les paramètres du modèle et sur les données. Si ces densités de probabilité sont choisies Gaussiennes, alors elles sont entièrement définies par leur maximum de vraisemblance ( $\langle \underline{\mathbf{m}} \rangle$  pour les paramètres et  $\underline{\mathbf{d}}$  pour les données), et par une matrice de covariance ( $\underline{\mathbf{C}}_m$  pour les paramètres et  $\underline{\mathbf{C}}_d$  pour les données<sup>13</sup>). L'inversion stochastique permet d'obtenir une nouvelle estimation du jeu de paramètres (c'est le jeu de paramètres le plus vraisemblable), donnée par l'une des formules suivantes (Tarantola, 1987) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{m}}^{\text{est}} &= \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle + \left( \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{C}}_d^{-1} \underline{\mathbf{G}} + \underline{\mathbf{C}}_m^{-1} \right)^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{C}}_d^{-1} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{G}} \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \\ &= \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle + \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T (\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T + \underline{\mathbf{C}}_d)^{-1} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{G}} \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \end{aligned} \quad (\text{I-13})$$

Le principal avantage de cette méthode est de pouvoir comparer les solutions *a priori* ( $\langle \underline{\mathbf{m}} \rangle$ ) et *a posteriori*  $\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}}$  en terme de covariances, pour savoir si l'inversion nous a effectivement appris quelque chose. La covariance *a posteriori* sur les paramètres du modèle retenus par l'inversion stochastique est donnée par l'une des deux relations suivantes (Tarantola, 1987) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_m^{\text{post}} &= \left( \underline{\mathbf{C}}_m^{-1} + \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{C}}_d^{-1} \underline{\mathbf{G}} \right)^{-1} \\ &= \underline{\mathbf{C}}_m - \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T (\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T + \underline{\mathbf{C}}_d)^{-1} \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{C}}_m \end{aligned} \quad (\text{I-14})$$

Noter que, tout comme pour les probabilités conditionnelles du théorème de Bayes, les covariances *a posteriori* dépendent des covariances *a priori*. Le point faible de cette méthode est donc que la solution reconstruite est conditionnée par un *a priori* (défini par un maximum de vraisemblance et une matrice de covariance).

### 1.3.1.5. Equivalence des trois approches

Dans les sections précédentes, nous avons vu trois manières différentes d'aborder le problème inverse linéaire Gaussien. La première consiste à projeter orthogonalement un vecteur d'observations dans un sous espace vectoriel image de  $\underline{\mathbf{G}}$  puis de trouver le vecteur des paramètres n'ayant aucune composante dans le noyau de cet opérateur linéaire. La seconde consiste à minimiser un index représentatif d'un compromis entre adéquation modèle - observations et simplicité de la solution reconstruite. La troisième consiste à calculer le jeu de paramètres le plus vraisemblable compte tenu des observations et d'un *a priori* sur la solution à trouver.

<sup>13</sup> Si les données sont décorréelées, alors  $\underline{\mathbf{C}}_d$  est une matrice diagonale égale à  $\underline{\mathbf{W}}_e^{-1}$ .

Ces trois approches sont pratiquement équivalentes. On peut par exemple montrer qu'éliminer les valeurs singulières inférieures à  $\kappa^2$  revient à minimiser un estimateur des moindres carrés amorti (*i.e.* régularisé par la norme minimum). On s'aperçoit par ailleurs de la forte similarité entre les équations (I-10) et (I-13) et de l'analogie entre la matrice de covariance *a priori*  $\underline{\mathbf{C}}_m$  et l'inverse de la matrice de simplicité  $\underline{\mathbf{W}}_m$ .

Ces approches ne sont pas les seules qui ont été développées : on peut par exemple mentionner l'approche originale de Backus et Gilbert (1967, 1968, 1970) adaptée aux problèmes sous déterminés, qui consiste à minimiser une combinaison de la « propagation » de la matrice de résolution (notion que nous définirons dans la suite de ce travail) et de la taille de la matrice de covariance. Un des inconvénients de cette méthode réside dans la définition de la « propagation » d'une matrice de résolution.

## I.3.2. Le cas non linéaire

### I.3.2.1. Méthodes de Monte Carlo

Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de formule analytique permettant de calculer le jeu de paramètres optimal en fonction des données, du modèle direct et des informations *a priori* ajoutées au problème. L'idéal serait d'explorer tout l'espace des paramètres libres du modèle, mais ceci est techniquement impossible quand le nombre de paramètres libres est important (*cf.* exemple gravimétrique). Les méthodes de Monte Carlo sont fondées sur la génération de nombres pseudo-aléatoires afin d'explorer une partie raisonnable de l'espace des paramètres libres du modèle.

#### I.3.2.1.1. Recherche des modèles admissibles

Une approche naturelle consiste à se définir des limites sur les paramètres libres du modèle à optimiser, puis à explorer l'espace des paramètres libres dans cette région de l'espace vectoriel. C'est ce type d'approche qui a été utilisé par exemple par Press (1968) afin de calculer la densité de la Terre et la vitesse des ondes sismiques longitudinales et transverses, à partir de mesures de vibrations caractéristiques de la Terre et de mesures de temps de propagation des ondes sismiques. Les principaux inconvénients résident dans le choix des limites et du nombre de jeu de paramètres générés aléatoirement (plus ce nombre est grand et mieux l'espace des paramètres libres est exploré).

#### I.3.2.1.2. Recuit simulé

Le recuit simulé est une méthode de recherche à la fois aléatoire et systématique. La base de cette technique est une forte analogie entre la mécanique statistique (*i.e.* le



comportement de systèmes en équilibre thermique ayant de nombreux degrés de liberté) et l'optimisation combinatoire. Cette analogie a été remarquée pour la première fois par Kirkpatrick et al. (1983) puis appliquée au problème de recherche opérationnelle du « voyageur de commerce ».

Il s'agit comme dans les cas précédents de minimiser une fonctionnelle  $I$  caractéristique de l'accord entre les sorties du modèle et les observations (des informations *a priori* peuvent également être incorporées à cette fonctionnelle). Un jeu de paramètres du modèle  $\underline{m}$  est choisi pour initialiser l'algorithme. Par génération de nombres pseudo-aléatoires, on choisit ensuite un nouvel état  $\underline{m}'$  proche de l'état initial qui sera substitué à celui-ci, à condition que :

$$I(\underline{m}') < I(\underline{m}) \quad \text{ou} \quad \zeta < \exp\left(\frac{I(\underline{m}) - I(\underline{m}')}{\theta}\right) \quad (\text{I-15})$$

où  $\zeta$  est un nombre aléatoire distribué uniformément sur l'intervalle  $[0,1]$  et  $\theta$  est un paramètre analogue à une température de recuit. L'idée de l'équation (I-15) est d'accepter le nouveau jeu de paramètres :

- soit si celui-ci est meilleur au regard de la fonctionnelle à minimiser
- soit si un nombre aléatoire est inférieur à un facteur de Boltzmann.

Le rôle de  $\zeta$  est d'introduire une part de hasard dans la recherche d'un minimum, pour empêcher  $\underline{m}$  d'être attiré par un minimum local. La minimisation est commencée à forte température  $\theta$  (la recherche est alors totalement aléatoire, le matériau est à l'état fondu), puis  $\theta$  est diminuée très progressivement, afin d'empêcher la formation d'un état métastable (*i.e.* la capture par un minimum local).

Le principal avantage des méthodes de Monte Carlo est le formalisme simple qu'elles utilisent. Elles nécessitent cependant un nombre important de résolutions du modèle direct (d'autant plus élevé que la dimension de l'espace des paramètres est importante).

### ***I.3.2.2. Méthode de contrôle***

La théorie du contrôle optimal, développée par Lions (1968), permet une exploration beaucoup plus systématique de l'espace des paramètres du modèle. La minimisation d'une fonctionnelle  $I$ , caractéristique de l'accord modèle *vs* observations et d'éventuelles informations *a priori*, utilise le gradient de  $I$  par rapport aux paramètres du modèle. Ceci permet de réduire la minimisation multivariable à une succession de minimisations à une seule variable. Le gradient de  $I$  peut être calculé de manière exacte grâce à la notion d'adjoint. Nous verrons, à travers deux exemples (l'un faisant intervenir des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) paraboliques, l'autre des EDP elliptiques), comment obtenir ces

équations adjointes à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Le formalisme associé à la minimisation est alors plus compliqué que celui des méthodes de Monte-Carlo mais l'obtention numérique d'une estimation du jeu de paramètres optimal est beaucoup plus rapide.

### 1.3.2.3. Inverse généralisée de Tarantola Valette (IGTV)

Tarantola et Valette ont proposé en 1982 une formulation très générale du problème inverse, et toutes les techniques énoncées précédemment peuvent se ramener à un cas particulier de l'IGTV. Celle-ci s'applique aussi bien aux problèmes linéaires que non linéaires, sur- que sous-déterminés ; elle tient compte de l'erreur sur les données (pas nécessairement Gaussienne), de l'*a priori* sur les paramètres du modèle et de l'imperfection du modèle direct. De même que l'inverse stochastique, l'IGTV est une approche Bayésienne du problème inverse fondée sur le concept de *conjonction* (ou *intersection*) d'états d'information. On appelle  $\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{m}}) \in D \times M$  un vecteur de l'espace joint des données et des paramètres du modèle. Supposons que l'on dispose de deux sources d'information différentes sur le vecteur  $\underline{\mathbf{x}}$  (informations *a priori* et informations apportées par la théorie), sur lesquelles on a plus ou moins de crédit. Ce crédit est représenté mathématiquement par une densité de probabilité sur chaque source d'information  $\rho(\underline{\mathbf{x}})$  (sur l'*a priori*) et  $\theta(\underline{\mathbf{x}})$  (sur la théorie). La densité de probabilité  $\sigma(\underline{\mathbf{x}})$  correspondant à la *conjonction* de ces deux états d'information est définie par Tarantola et Valette (1982) comme<sup>14</sup>:

$$\sigma(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\rho(\underline{\mathbf{x}})\theta(\underline{\mathbf{x}})}{\mu(\underline{\mathbf{x}})} \quad (\text{I-16})$$

où  $\mu(\underline{\mathbf{x}})$  est la densité de probabilité correspondant à une information nulle : en pratique, elle est souvent égale à une constante et  $\underline{\mathbf{x}}$  est alors dit cartésien (pour plus de précision, une discussion et des exemples pour lesquels cette densité de probabilité n'est pas constante sont donnés par Tarantola, 1987). On peut par exemple vérifier, à l'aide de cette définition, que la conjonction d'un événement impossible et d'un événement probable est impossible, ou que la conjonction de deux événements certains est certaine. Si les *a priori* sur les paramètres du modèle et sur les données sont indépendants, alors on peut écrire  $\rho(\underline{\mathbf{x}})$  comme un produit de deux densités de probabilités:

$$\rho(\underline{\mathbf{x}}) = \rho_D(\underline{\mathbf{d}})\rho_M(\underline{\mathbf{m}}) \quad (\text{I-17})$$

<sup>14</sup> C'est cette formule qui constitue l'axiome du livre de Tarantola (1987).

$\rho_D(\underline{\mathbf{d}})$  et  $\rho_M(\underline{\mathbf{m}})$  sont appelées densités de probabilité *marginales* de  $\rho(\underline{\mathbf{x}})$  dans l'espace des données et l'espace des paramètres du modèle. On admet que la même décomposition peut être faite sur  $\mu(\underline{\mathbf{x}})$ . On peut également écrire la densité de probabilité jointe  $\theta(\underline{\mathbf{x}})$  en fonction de sa densité de probabilité *conditionnelle* :

$$\theta(\underline{\mathbf{x}}) = \theta(\underline{\mathbf{d}} / \underline{\mathbf{m}}) \mu_M(\underline{\mathbf{m}}) \quad (\text{I-18})$$

Nous nous intéresserons surtout à ce que nous apprend la conjonction de l'*a priori* et de la théorie sur les paramètres reconstruits. Cette densité de probabilité marginale (densité de probabilité *a posteriori* sur les paramètres du modèle) peut être calculée grâce aux trois équations précédentes :

$$\sigma_M(\underline{\mathbf{m}}) = \rho_M(\underline{\mathbf{m}}) \int_D \frac{\rho_D(\underline{\mathbf{d}}) \theta(\underline{\mathbf{d}} / \underline{\mathbf{m}})}{\mu_D(\underline{\mathbf{d}})} d\underline{\mathbf{d}} \quad (\text{I-19})$$

L'avantage d'un tel formalisme est qu'il contourne de manière subtile le problème d'existence et d'unicité de la solution inverse. L'existence est prouvée si  $\sigma_M(\underline{\mathbf{m}})$  prend des valeurs non nulles dans l'espace des paramètres du modèle. L'unicité est évidente puisque l'on ne raisonne pas sur les véritables valeurs du jeu de paramètres mais sur une densité de probabilité de ce jeu de paramètres. Dans le cas le plus général il faut explorer tout l'espace joint des paramètres du modèle et des données, ce qui est souvent impossible. En pratique, une fois fixées les densités de probabilité *a priori* et de probabilité conditionnelle sur la théorie, il s'agira d'utiliser un algorithme (de type Monte-Carlo ou méthode de recherche basée sur le calcul de l'adjoint, par exemple) afin de trouver le point correspondant au maximum de vraisemblance de  $\sigma_M(\underline{\mathbf{m}})$ , puis éventuellement de linéariser le problème autour de ce point afin de trouver les valeurs des covariances.

### I.3.3. En résumé

Dans cette partie, nous avons vu quelques techniques classiques d'inversion. Certaines d'entre elles nécessitent la mise en œuvre d'un formalisme assez lourd, et, pour gagner du temps avant d'entreprendre l'inversion des données, on se posera les questions suivantes :

- Le problème est-il linéaire ? Si non, est-il linéarisable ?
- Compte tenu des données et du modèle dont on dispose, une inversion rigoureuse est-elle justifiée ? Peut-être une optimisation par essais et erreurs serait-elle suffisante. Le choix d'une méthode est avant tout un juste milieu à trouver entre rigueur mathématique que l'on s'impose et nécessité de résultats rapides : il ne faut pas oublier que la réponse obtenue par inversion sera de toute manière approximative.

## I.4. BUTS POURSUIVIS

Les données glaciologiques arrivent : par exemple, un grand projet européen de forage a été lancé à Dôme C en Antarctique (EPICA). D'autre part, les techniques d'acquisition satellitaires permettent maintenant de fournir une topographie très détaillée des calottes, des cartes de vitesses d'écoulement de certaines régions ou encore des informations sur la structure du manteau neigeux. Un réel besoin pour des outils d'analyse plus performants se fait donc sentir chez les glaciologues.

Dans le développement de cette thèse, nous examinons trois problèmes glaciologiques classiques à l'aide des méthodes de la section précédente (en particulier, inverse stochastique, moindres carrés régularisés et méthodes de contrôle). Ces trois problèmes sont les suivants :

- la paléothermométrie à partir des mesures du trou de forage de Vostok en Antarctique
- la déconvolution du signal atmosphérique récent des carottes de glace
- la détermination des propriétés rhéologiques à grande échelle des ice-shelves à partir de cartes d'épaisseurs et de mesures de vitesses.

Cette thèse n'est pas celle d'un mathématicien : elle n'apporte rien aux méthodes inverses. Celles-ci ont été appliquées sous une forme simplifiée qui constitue un compromis entre mesures disponibles, degré de sophistication de la théorie glaciologique et rigueur mathématique. A cause de ces simplifications, il est certain que toute la puissance des méthodes inverses n'a pas encore été utilisée.

Avant d'inverser des données, il faut un modèle direct adéquat. Si la diffusion de la chaleur dans les calottes polaires est un phénomène physique bien compris (et quantifié), il n'en est pas de même pour les processus des deux autres problèmes traités dans cette thèse. Les équations physiques régissant le transport des gaz dans le névé polaire ont été développées avec Laurent Arnaud (LGGE) sur la base des travaux antérieurs de Schwander et al. (1993). Quant à la dynamique de l'ice-shelf, en 1994, il n'existait pas d'accord entre les différents auteurs sur les équations à utiliser. Cette thèse fait donc également le point sur quelques aspects de la modélisation en glaciologie. Les modèles de propagation de la chaleur (chapitre II) et de transport des gaz (chapitre III) ont été développés dans une optique d'inversion, c'est-à-dire que nous avons évité d'y ajouter trop de complexité par l'intermédiaire de paramètres impossibles à contraindre. Initialement, le modèle d'ice-shelf n'a pas été conçu pour être inversé. Toutefois, comme il s'agit d'un modèle auto-adjoint, les techniques d'inversion s'y appliquent particulièrement bien.

L'ordre dans lequel j'ai abordé ces différents problèmes est inversé par rapport à celui du manuscrit. L'objectif initial de cette thèse était de développer un modèle d'écoulement d'ice-shelf adapté à l'étude de la dynamique de la calotte Antarctique. La comparaison des résultats de ce modèle avec les mesures du Ross Ice Shelf m'a naturellement amené à m'intéresser aux techniques d'inversion. Je me suis ainsi rendu compte du gouffre entre les méthodes d'investigation des glaciologues et celles des sismologues, météorologues ou océanologues ; ceci m'a également donné envie de réexaminer d'autres problèmes glaciologiques classiques à l'aide de ces nouveaux outils. Les différents chapitres pourront paraître inégaux au niveau de la rigueur des techniques d'inversion utilisées : ceci reflète simplement ma familiarisation progressive à ces méthodes entre le début et la fin de la thèse.

## II. PALEOTHERMOMETRIE A VOSTOK

La Terre a connu au cours des 2,5 derniers millions d'années une succession de périodes froides (glaciaires) et chaudes (interglaciaires). Les calottes ont gardé la trace des derniers cycles climatiques : on peut estimer les fluctuations de température du passé par l'analyse des isotopes de l'eau contenus dans la glace. On peut d'autre part les estimer en considérant le profil de température dans le trou de forage et la propagation de la chaleur dans la glace.

A la suite des forages de GRIP et GISP2 au Groenland, certaines études (Johnsen et al., 1995 ; Cuffey et al., 1995) ont montré que le profil de température<sup>1</sup> mesuré était en désaccord avec les variations de température de surface estimées par l'analyse des isotopes de l'eau. Dans ce chapitre, nous essayons de combiner les informations apportées par les deux types d'enregistrement (isotopes de l'eau et profil de température) à Vostok afin de déterminer si les mêmes conclusions s'appliquent également à un site Antarctique à faible accumulation.

Le modèle de transport de chaleur utilisé dans ce chapitre est plus simple que ceux décrits d'ordinaire dans la littérature (*e.g.* Paterson et Clarke, 1978 ; Dahl-Jensen et Johnsen, 1986 ; Ritz, 1989 ; Cuffey et al., 1994, 1995 ; Johnsen et al., 1995 ; Salamatin et al., 1994, 1997). Notre but est de montrer ici une méthode classique et efficace d'utilisation de ces modèles afin de mieux interpréter les mesures (profil de température et composition en isotope) : cette méthode, bien connue pour l'analyse du profil de température dans les sols (*e.g.* Shen et al., 1992), n'a pourtant jamais été utilisée pour interpréter celui des calottes. Ce chapitre doit donc être considéré comme une étude de faisabilité, montrant l'intérêt (ou non) d'inverser les mesures le profil de température de Vostok en vue de reconstruire les températures du passé.

Les deux principales interprétations du profil de température à Vostok ont été effectuées par Ritz (1989) et Salamatin et al. (1994, 1997). Ritz (1989) utilise le profil de température de Vostok afin d'identifier les paramètres d'écoulement de la glace sur ce site, par une méthode d'essais / erreurs. Les résultats de Salamatin et al. (1994, 1997) sont beaucoup plus spectaculaires. L'analyse simultanée du profil de température et de la composition isotopique de la glace permettrait :

- d'estimer les variations de température au cours des derniers 200 000 ans

---

<sup>1</sup> L'expression « profil de température » sera utilisée pour désigner le profil de température actuel mesuré dans le trou de forage.

- d'établir une chronologie fiable de la carotte de Vostok.

Ceci est la principale raison pour laquelle nous réexaminons le problème paléothermométrique : l'analyse du profil de température à Vostok est-elle aussi prometteuse que l'affirment Salamatin et al. (1994, 1997) ? En particulier, nous essaierons de déterminer si l'analyse du profil de température peut effectivement nous aider à mieux estimer la température du dernier stade glaciaire sur ce site.

## II.1. PROBLEME

### II.1.1. Température isotopique

#### II.1.1.1. Principe du thermomètre isotopique

La pression de vapeur saturante des isotopes lourds de l'eau est légèrement différente de celle du composant principal (de masse molaire  $M=18 \text{ g mol}^{-1}$ ). Il en résulte un fractionnement des isotopes lors des changements de phase. En particulier, les composants lourds s'évaporent plus difficilement et se condensent plus rapidement que les composants légers. Une masse d'air humide se déplaçant vers les pôles sera donc appauvrie en isotopes lourds. D'après Dansgaard et al. (1973), ce qui influence le plus la valeur des rapports isotopiques<sup>2</sup> est le refroidissement entre le moment où l'eau s'évapore de l'océan et le moment où elle tombe sur la calotte sous forme de précipitations. Comme la température de surface des mers est plus stable que celle de l'atmosphère, la valeur du rapport isotopique est fortement influencée par la température atmosphérique locale à l'époque où la neige s'est déposée. Pour les stations du Groenland, Johnsen et al. (1989) trouvent une relation linéaire entre température de surface et rapport isotopique  $\delta^{18}\text{O}$ : une diminution de 1 pour mille de  $\delta^{18}\text{O}$  correspond à un

---

<sup>2</sup> Les concentrations relatives des isotopes peuvent être mesurées de manière beaucoup plus précise que les concentrations absolues. C'est pourquoi les « isotopistes » utilisent des rapports isotopiques, exprimés en pour mille et calculés de la manière suivante :

$$\delta = 1000 \times \left( \frac{R - R_0}{R_0} \right)$$

où  $R$  est le rapport de l'isotope lourd sur l'isotope léger et  $R_0$  un « rapport standard moyen de l'océan mondial actuel » (SMOW ou « standard mean ocean water »). La valeur de  $R_0$  communément utilisée est  $155.76 \times 10^{-6}$  pour le deutérium (Hageman et al., 1970) et  $2005.2 \times 10^{-6}$  pour  $^{18}\text{O}$  (Baerstchi et Macklin, 1965).

refroidissement<sup>3</sup> de 1.5°C. Pour reconstruire les températures en Antarctique, on utilise plutôt le rapport isotopique de deutérium, moins sensible aux sources océaniques<sup>4</sup> : en Antarctique, une diminution de  $\delta D$  de 1 pour mille correspond à un refroidissement de 0.17°C environ (Lorius et Merlivat, 1977).

Sans entrer dans les détails techniques du calcul, la mesure du deutérium dans la glace des carottes n'est pas directement convertie en température du passé (e.g. Jouzel et al., 1987, 1993): le signal est préalablement lissé et corrigé des changements de deutérium de l'océan. Comme les variations de deutérium de l'océan ne sont pas connues, cette correction se fait à partir des mesures du rapport isotopique  $\delta^{18}O$  des foraminifères benthiques<sup>5</sup> des carottes marines (Martinson et al., 1987).

### II.1.1.2. Limites de la température isotopique

L'estimation de la température du passé par l'analyse des isotopes est très utile, mais il faut être conscient de ses limites. Cette analyse est avant tout basée sur l'hypothèse implicite que la relation empirique trouvée entre le rapport isotopique du présent et la température sur différents sites peut être extrapolée pour obtenir la température du passé sur un seul site. De plus, les grands forages tels que ceux de Vostok, GRIP ou GISP2 ont été effectués aux points les plus froids des calottes. Par exemple, la température moyenne de GRIP est de -32°C environ et les points de mesures utilisés pour l'établissement de la relation empirique  $\delta^{18}O-T$  (Johnsen et al., 1989) proviennent de sites dont la température varie entre -16°C et -32°C. De même, la relation empirique de deutérium utilisée pour estimer la température des climats passés à Vostok (Lorius et Merlivat, 1977) a été établie à partir de sites dont la température moyenne varie entre -20°C et -56°C (i.e. la température actuelle de Vostok). La plupart des valeurs de rapports isotopiques mesurées dans ces carottes, provenant en grande partie de précipitations en périodes glaciaires, n'ont donc aucun équivalent actuel, même en d'autre lieu

<sup>3</sup> Cette relation empirique est la suivante ( $T$  étant en degrés Celsius et le rapport isotopique en pour mille)

$$T = 15 \times \delta^{18}O + 20.3$$

<sup>4</sup> Jouzel et Merlivat (1984) ont montré que le gradient isotopique du deutérium était moins perturbé que celui de l'oxygène 18 à cause d'effets cinétiques. Cet argument devrait également s'appliquer pour la calotte du Groenland et on peut se demander pourquoi le deutérium n'a pas été utilisé pour l'étude des températures de GRIP (GREENLAND Ice core Project).

<sup>5</sup> Les foraminifères benthiques se développent dans les eaux profondes de l'océan, où l'on estime que la température a peu varié. La composition des foraminifères benthiques devrait donc être proche de celle de la composition moyenne de l'océan.



de la calotte. L'extrapolation à la base du paléothermomètre isotopique est, en quelque sorte, à la fois spatiale et temporelle.

Paterson (1994), détaille par ailleurs 9 bonnes raisons de se méfier de la température isotopique. J'en reprends quelques unes ci-dessous :

- Si le forage n'est pas effectué sur un dôme, alors la glace en profondeur provient de l'amont de la calotte. Ainsi, il est possible d'interpréter une tendance générale au refroidissement sans réels changements climatiques (les températures sont généralement plus basses en altitude, bien que ce ne soit pas le cas pour la ligne de courant passant par Vostok). Pour les mêmes raisons, les variations d'altitude de la surface de la calotte au cours du temps peuvent perturber le rapport isotopique.

- Le rapport isotopique contient un fort signal saisonnier. Ainsi, un changement dans le rapport des précipitations entre hiver et été pourra être interprété à tort comme un changement de température moyenne annuelle.

- La conversion rapport isotopique - température est biaisée du fait que les précipitations ont plutôt lieu quand la température est supérieure à la température moyenne.

- Les changements de circulation atmosphérique, de température de surface des océans ou d'extension de la glace de mer peuvent changer la région de provenance des précipitations

- Dans la partie inférieure des carottes, des irrégularités de l'écoulement de la glace peuvent entraîner des discontinuités de l'enregistrement isotopique, telles que celles observées dans la carotte de GRIP au Groenland (Grootes et al., 1993).

## **II.1.2. Approches récentes de déconvolution du signal climatique**

Conscients des problèmes liés au thermomètre isotopique, quelques glaciologues ont cherché d'autres méthodes afin d'estimer la température des climats passés. L'analyse du profil de température en fonction de la température est une source supplémentaire d'information. Ainsi, on assiste depuis le forage de Dye 3 au Groenland et, plus récemment, depuis ceux de GRIP et GISP2, à un regain d'intérêt pour l'analyse du profil de température dans le trou de forage. Certaines études suggèrent en effet que la différence de température entre l'Holocène et le dernier stade glaciaire est deux fois plus importante (soit plus de 20°C) que celle estimée de manière classique par le thermomètre isotopique. Ci-dessous, nous passons en revue les analyses qui semblent les plus significatives<sup>6</sup> à ce sujet.

---

<sup>6</sup> Cette liste n'est pas exhaustive et ne concerne que les études effectuées dans les calottes. On pourra par exemple consulter un numéro spécial de *Palaeogeography, palaeoclimatology, palaeoecology*

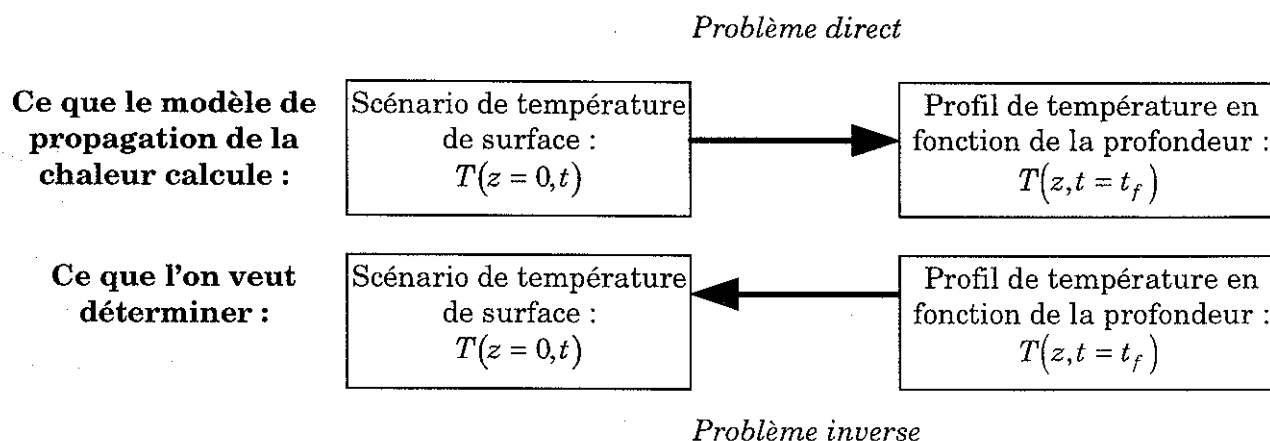


Figure II-1 : l'interprétation du profil de température en fonction de la profondeur est un problème inverse.

### II.1.2.1. Dahl-Jensen et Johnsen (1986)

A l'aide d'un modèle unidimensionnel de propagation de la chaleur et du profil de température mesuré à Dye 3 au Groenland, cette étude s'efforce d'estimer, indépendamment du rapport isotopique, la différence de température moyenne sur ce site. Pour effectuer cette estimation, les auteurs imposent la forme de l'évolution temporelle de la température : une température égale à la température actuelle pendant l'Eémien, un stade glaciaire dont la température est un paramètre libre du modèle, et l'Holocène ayant pratiquement la température actuelle de -20 000 ans à nos jours<sup>7</sup>. En calibrant ce paramètre libre du modèle de manière à minimiser les écarts quadratiques entre la température simulée et la température dans le trou de forage, ils trouvent que l'âge glaciaire doit être approximativement de 12°C plus froid que l'époque actuelle sur ce site. Ces résultats sont en bon accord avec le thermomètre isotopique classique qui prédit 11°C de différence.

(1992) consacré à l'analyse paléothermométrie dans les sols. En particulier, on peut remarquer que les articles de Mareschal et Vasseur (1992), Beck et al. (1992), Shen et al. (1992), Wang et al. (1992) et Kakuta (1992) décrivent des méthodes de déconvolution du profil de température comparables à celles utilisées dans cette thèse.

<sup>7</sup> En fait, cette courbe schématique de l'évolution de la température est probablement inspirée du profil d'oxygène 18 mesuré à Dye 3 (Dansgaard et al., 1982). Noter donc que la différence de température glaciaire-interglaciaire n'est pas totalement indépendante de l'information isotopique.

### **II.1.2.2. MacAyeal et al. (1991, 1993)**

MacAyeal et al. (1991, 1993) ont repris l'étude précédente, avec les données de Dye 3, en utilisant un formalisme mathématique plus élaboré, similaire aux méthodes décrites dans cette thèse. Le principe de base est de minimiser une fonctionnelle représentative d'un compromis entre d'une part, adéquation entre sorties du modèle (de propagation de la chaleur) et observations, et d'autre part, accord entre scénario en température *a priori* (celui trouvé par Dahl-Jenssen et Johnsen, 1986) et température de surface reconstruite. La minimisation de cette fonctionnelle se fait à l'aide d'un modèle adjoint.

Cette étude a été critiquée pour plusieurs raisons (Dahl-Jenssen et al., 1993) : par exemple, ses auteurs affirment que « l'incertitude » de leur reconstruction peut être déterminée quantitativement, ce qui est discutable. Une autre raison est qu'elle essaie de dater l'événement froid récent du Younger Dryas. En fait, Firestone (1995), en utilisant la même technique, a montré à l'aide de tests plus systématiques qu'il est très délicat de retrouver cet événement froid dans le profil de température de Dye 3. Les résultats de cette étude sont donc certainement contestables. Cependant, la méthodologie employée était unique à l'époque en glaciologie.

### **II.1.2.3. Cuffey et al. (1994, 1995)**

Les études de Cuffey et al. (1994, 1995) ont porté sur le site de GISP2 au Groenland. Elles prennent explicitement en compte à la fois le rapport isotopique  $\delta^{18}\text{O}$  et la température dans le trou de forage. L'idée de base qui conditionne les résultats de toute l'étude est que la température est une fonction affine de l'isotope, mais ce gradient isotopique n'est pas contraint par les observations actuelles : le gradient est considéré comme un paramètre libre du modèle, calibré de manière à reproduire au mieux le profil de température en fonction de la profondeur.

L'intervalle de confiance à 90% du gradient isotopique, calculé dans l'étude de 1994, suggère une valeur entre 0.45 et 0.66 pour mille/°C pour les 500-600 dernières années (les mesures de températures proviennent d'un trou de 216 m), ce qui est en assez bon accord (toutefois un peu inférieur) avec la valeur empirique de Johnsen et al. (1989). La seconde étude (Cuffey et al., 1995), réalisée après une série complète de mesures de température dans le trou de forage (*i.e.* sur plus de 3000 m), montre que la valeur du gradient isotopique serait plutôt de 0.327 à 0.335 pour mille/°C (soit deux fois plus faible que la valeur empirique actuelle). Les auteurs font alors des simulations supplémentaires en autorisant le gradient

isotopique à varier en fonction du temps<sup>8</sup> (noter que la relation isotope - température n'est alors plus linéaire). Leur valeur optimale du gradient isotopique est d'environ 0.33 pour mille/°C pendant la déglaciation, 0.25 pour mille/°C pendant la majeure partie de l'Holocène et 0.46 pour mille/°C pendant les derniers siècles. Il en résulte une différence de température entre la période la plus froide du glaciaire et l'époque actuelle de 21°C (soit environ deux fois plus que la température prédite par le thermomètre isotopique classique).

#### **II.1.2.4. Johnsen et al. (1995)**

Les données de température et d'oxygène 18 de GRIP (à 28 km de GISP2) ont été analysées par Johnsen et al. (1995), pratiquement en même temps que Cuffey et son équipe. Le principe de la méthode est très similaire : la température est supposée suivre une loi parabolique de l'isotope ( $T = \alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2$ ) au lieu d'une loi linéaire. Les 3 coefficients de la loi parabolique  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont calibrés par essais et erreurs de manière à reproduire au mieux les mesures de température dans le trou de GRIP. Les valeurs optimales des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  seraient -211.4°C, -11.88°C/pour mille et -0.1925°C/(pour mille)<sup>2</sup>. Cette étude suggère une différence de température glaciaire / interglaciaire de 22°C, en bon accord avec l'estimation indépendante de Cuffey et al. (1995). Il faut toutefois remarquer que la relation calibrée  $\delta$ -T de Johnsen est en désaccord avec la relation empirique trouvée au Groenland (voir figure II-2).

#### **II.1.2.5. Salamatin et al. (1994, 1997)**

L'insolation à la surface de la Terre est fonction de sa position par rapport au Soleil. Sur la base des travaux de Milankovitch dans les années 1930, des périodes caractéristiques du mouvement de la Terre par rapport au Soleil, correspondant à la précession des équinoxes (~20 000 ans), à l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre (~ 41 000 ans) et à l'excentricité de l'orbite (~100 000 ans) ont pu être identifiées.

Pour analyser le profil de température mesuré à Vostok en Antarctique, Salamatin et al. (1994, 1997) supposent que la température atmosphérique répond directement aux fréquences orbitales. Il s'agit d'une hypothèse importante car le climat de la Terre peut contenir des modes qui lui sont propres. Salamatin et al. (1994, 1997) obtiennent l'évolution au cours du temps de la température de surface en calibrant l'amplitude et la phase de quatre

---

<sup>8</sup> La manière dont ils procèdent quand ce paramètre dépend du temps n'est pas explicitée dans leur article. Elle est pourtant loin d'être évidente. Il y a forcément une hypothèse supplémentaire à ce stade du calcul car si le gradient isotopique est autorisé à prendre n'importe quelle valeur en fonction du temps, le problème inverse n'est plus assez contraint : il devient sous-déterminé et la température reconstruite n'est plus unique.

harmoniques par minimisation des écarts quadratiques entre valeurs prédites par un modèle de propagation de la chaleur et profil de température mesuré. Le scénario de température atmosphérique montre un stade glaciaire à Vostok 15°C plus froid que la température actuelle, alors que l'estimation de cette différence par le rapport isotopique de deutérium est de 10°C environ. Salamatin et al. (1994, 1997) comparent ensuite pics à pics le scénario en température reconstruit (qu'ils considèrent comme un « métronome ») et le signal isotopique de deutérium pour obtenir une chronologie de la carotte.

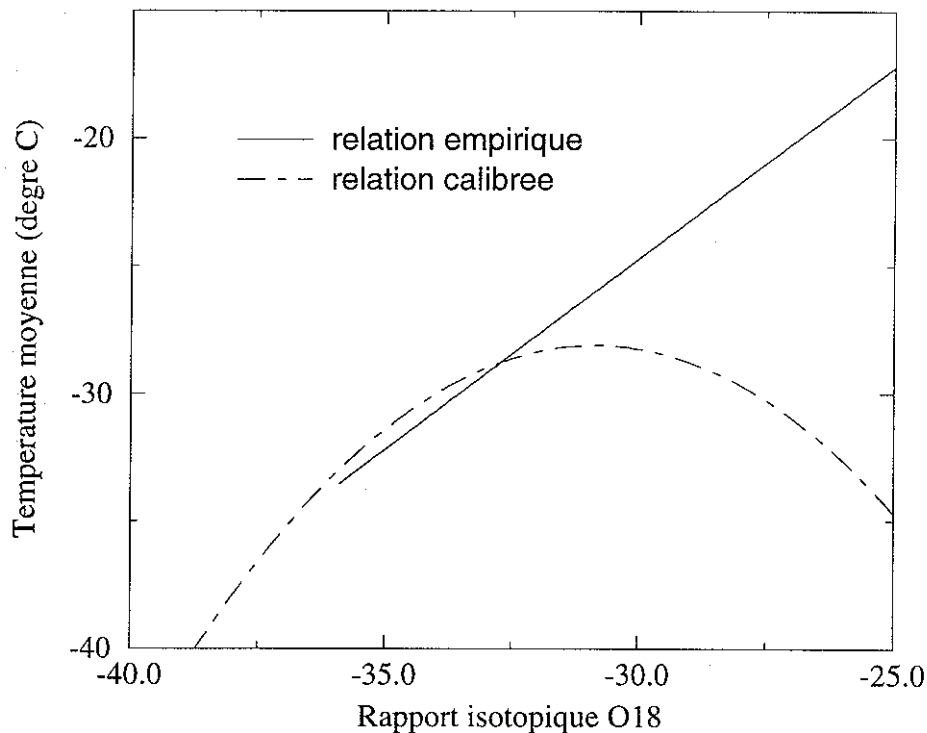


Figure II-2 : les deux relations de Johnsen donnant  $\delta^{18}\text{O}$  (en pour mille) en fonction de la température de surface. L'une est basée sur des mesures de température d'oxygène 18 sur différents sites (empirique), l'autre sur l'analyse du profil de température et d'oxygène 18 dans le trou de forage de GRIP (calibrée).

## II.2. INTERPRÉTATION DU PROFIL DE TEMPÉRATURE MESURE A VOSTOK

L'approche décrite ci dessous est un peu différente des cinq études citées ci-dessus : nous essayons de combiner les informations données par les isotopes de l'eau et le profil de température mesuré à Vostok, en utilisant le concept de conjonction des états d'information de Tarantola et Valette (1982). Cette approche du problème paléothermométrique n'est pas nouvelle, mais elle n'a jamais été utilisée pour l'interprétation du profil de température des

calottes : elle a montré son efficacité pour l'analyse du profil de température dans les sols (e.g. Shen et al., 1992). Dans un premier temps, il s'agit de construire un modèle de propagation de la chaleur adapté à ce site.

### II.2.1. Le modèle unitaire

Le modèle de propagation de la chaleur à Vostok utilisé est une version linéarisée de celui de Ritz (1989). L'équation de conservation de la chaleur dans les calottes polaires peut s'écrire de manière générale, en coordonnées Eulériennes, le long d'une ligne d'écoulement<sup>9</sup> :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} - \rho c u \frac{\partial T}{\partial x} - \rho c w \frac{\partial T}{\partial z} + Q \quad (\text{II-1})$$

Dans l'équation précédente,  $\rho$  désigne la masse volumique de la glace,  $c$  sa capacité calorifique,  $K$  sa conductivité thermique,  $u$  et  $w$  sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse et  $Q$  est la production de chaleur par déformation. Dans le membre de droite de l'équation de conservation de la chaleur (II-1) apparaît la diffusion horizontale et verticale de chaleur (premier et second terme), l'advection horizontale et verticale de chaleur (troisième et quatrième terme) et la production de chaleur *in situ* par déformation (dernier terme).

#### II.2.1.1. Analyse des ordres de grandeurs

Afin d'identifier les termes prépondérants de l'équation (II-1) sur le site de Vostok, nous analysons ici l'ordre de grandeur des différents termes de cette équation. Comme l'échelle verticale des variations de température est environ 1000 fois plus petite que l'échelle horizontale, la diffusion horizontale de chaleur (premier terme du membre de droite) peut raisonnablement être négligée devant la diffusion verticale (second terme). La chaleur produite par déformation est égale à deux fois le produit du second invariant du tenseur du taux de déformation avec le second invariant du tenseur des contraintes (voir annexe). L'ordre de grandeur de cette production de chaleur est donnée par l'équation suivante :

$$Q \sim \rho g H \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \sim 10^3 \times 10 \times 4 \times 10^3 \times 10^{-3} \times \frac{2}{(3600 \times 24 \times 365) \times 4 \times 10^3} \quad (\text{II-2})$$

$$\sim 5 \times 10^{-7} \text{ Wm}^{-3}$$

Pour le calcul de cet ordre de grandeur, on a choisi une épaisseur de glace de 4000 m, une vitesse horizontale de 2 m a<sup>-1</sup> et une pente de 10<sup>-3</sup>, ce qui correspond aux conditions de Vostok. Cette quantité peut être comparée à l'advection verticale de chaleur à Vostok :

<sup>9</sup> Pour une analyse plus complète de la conservation de la chaleur dans les calottes polaires on pourra par exemple se reporter à Lliboutry (1987) ou Ritz (1992).

$$\rho c w \frac{\partial T}{\partial z} \sim 2 \times 10^6 \times \frac{2 \times 10^{-2}}{3600 \times 24 \times 365} \times \frac{50}{4000} \sim 10^{-5} \text{ Wm}^{-3} \quad (\text{II-3})$$

Cet ordre de grandeur a été calculé avec une vitesse verticale égale à  $2 \times 10^{-2} \text{ m a}^{-1}$  (ce qui correspond à l'accumulation en surface) et une température de surface de  $-50^\circ\text{C}$ . La comparaison de la production de chaleur par déformation et de l'advection verticale montre donc que  $Q$  peut être négligé dans l'équation (II-1). Par ailleurs, l'advection horizontale de chaleur peut être estimée de la même manière :

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} \sim 2 \times 10^6 \times \frac{2}{3600 \times 24 \times 365} \times \frac{50}{4000} \times 10^{-3} \sim 10^{-6} \text{ Wm}^{-3} \quad (\text{II-4})$$

Pour l'étude simple présentée ici, nous négligerons donc l'advection horizontale de chaleur. Cette approximation, très utile puisqu'elle permet de réduire le système à un modèle unidimensionnel, devra être reconsidérée pour l'analyse d'autres sites. Enfin, le dernier ordre de grandeur à considérer est celui de la diffusion verticale de chaleur :

$$\frac{\partial \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} \sim 3 \times \frac{50}{(4000)^2} \sim 10^{-5} \text{ Wm}^{-3} \quad (\text{II-5})$$

Ce qui suggère que la diffusion verticale de chaleur est du même ordre de grandeur que l'advection verticale. Compte tenu des ordres de grandeurs estimés dans cette section, une équation de conservation de la chaleur simplifiée sera considérée :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} - \rho c w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{II-6})$$

Les trois hypothèses sous-jacentes à l'établissement de cette équation sont :

- la diffusion horizontale de chaleur est négligée par rapport à la diffusion verticale de chaleur.
- la chaleur produite *in situ* par déformation est négligée par rapport à l'advection verticale de chaleur.
- l'advection horizontale de chaleur est négligée par rapport à l'advection verticale de chaleur.

La condition à la limite supérieure est  $T = T_s$  (température de surface) ; on fixe d'autre part la température basale à la température de fusion de la glace<sup>10</sup> (la présence d'un lac sous

<sup>10</sup> La température de fusion de la glace diminue avec la pression (loi de Clapeyron). La température basale ( $\theta_b$ , en  $^\circ\text{C}$ ) sera calculée par la formule suivante (voir Ritz, 1992):

$$\theta_b = -0.0074 \rho g H - 0.024$$

glaciaire a été détectée à Vostok); la condition initiale (au temps de début de simulation) est la température de l'état stationnaire.

### II.2.1.2. Hypothèses supplémentaires

Quelques paramétrisations supplémentaires sont nécessaires pour l'établissement du modèle direct de propagation de la chaleur.

#### II.2.1.2.1. Vitesse verticale

Le modèle simple utilisé ici ne calcule pas l'écoulement de la glace. La vitesse verticale doit donc être prescrite. Lliboutry (1981) suggère la formulation suivante, adaptée aux calottes froides :

$$\rho w = \rho_{\text{glace}} \left[ w_s + (w_s - w_b) \left( \frac{(m+1)z}{(m+2)H} \left( 1 - \frac{(z/H)^{m+2}}{m+2} \right) \right) \right] \quad (\text{II-7})$$

où  $w_s$  est la vitesse verticale en surface et  $w_b$  la vitesse verticale au fond ;  $m$  est un paramètre de forme du profil de vitesse. D'après le modèle de Lliboutry  $m$  serait de l'ordre de 12 dans la région de Vostok. La formulation de Lliboutry n'étant valable que dans la glace, nous l'avons adapté afin de prescrire la vitesse dans le névé également (*i.e.* sur les 105 premiers mètres) : c'est ce qui justifie la masse volumique de la glace dans le membre de droite et celle du névé ou de la glace dans celui de gauche. Le profil de densité dans le névé de Vostok que nous utilisons a été mesuré par J-M Barnola. Pour la simulation standard, les valeurs des trois paramètres sont les suivantes :

- $w_s = 2 \times 10^{-2} \text{ m a}^{-1}$ ; cette valeur est environ de 80% inférieure à l'accumulation en surface estimée actuellement. Cette valeur inférieure est justifiée car  $w_s$  est une valeur moyennée sur la période interglaciaire et glaciaire (l'accumulation était alors plus faible).
- $w_b = 10^{-3} \text{ m a}^{-1}$ : c'est l'estimation de la fusion à Vostok en supposant un flux géothermique de  $53 \text{ mW m}^{-2}$  (*i.e.* la valeur de Salamatin et al., 1994).
- $m=12$ .

#### II.2.1.2.2. Conductivité thermique

La conductivité thermique de la glace dépend de la température, ce qui est une source de non linéarité du modèle direct. Afin de linéariser le problème (et d'utiliser les outils développés pour le problème inverse linéaire), on prescrit la conductivité en fonction de la profondeur et non de la température : la température mesurée dans le trou de forage ( $\theta_{\text{mes}}$  en °C) est donc utilisée pour calculer cette conductivité :



$$K = \frac{\rho}{\rho_{\text{glace}}} [2.22(1 - 0.0067 \times \theta_{\text{mes}})] \quad (\text{II-8})$$

où l'unité de  $K$  est  $\text{N s}^{-1} \text{K}^{-1}$ . Cette relation empirique, trouvée par Weller et Schwerdtfeger (1971), est modifiée ici pour calculer la conductivité dans le névé (en supposant une diffusivité constante).

### II.2.1.2.3. Capacité calorifique

La capacité calorifique massique a été mesurée par Yen (1981) : elle dépend également de la température et, pour les mêmes raisons que la conductivité thermique, on la prescrit en fonction de la profondeur :

$$c = 2110 + 7.41 \times \theta_{\text{mes}} \quad (\text{II-9})$$

où l'unité de  $c$  est  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

### II.2.1.3. Approche unitaire

On peut vérifier que le modèle ainsi construit est linéaire par rapport à une perturbation de température de surface : on peut le réécrire sous forme matricielle :

$$\underline{\mathbf{Gm}} = \underline{\mathbf{d}} \quad (\text{II-10})$$

où  $\underline{\mathbf{m}}$  est un vecteur contenant les valeurs discrètes de la différence entre la température de surface en fonction du temps et une température de référence (que l'on choisira voisine de la température actuelle mesurée en surface, *i.e.* 217 K).  $\underline{\mathbf{d}}$  contient alors les valeurs discrètes de la différence entre la température du trou de forage et le profil stationnaire de température correspondant à la température de référence que l'on a choisie. En pratique, le profil stationnaire de température est calculé en intégrant numériquement l'équation (II-6) sur 500 000 ans, la matrice  $\underline{\mathbf{G}}$  est obtenue en calculant la réponse du modèle à une impulsion d'amplitude  $1^\circ\text{C}$ . Le schéma numérique utilisé est de type différences finies, implicite en temps pour des raisons de stabilité numérique<sup>11</sup>.

## II.2.2. Principe de l'inversion

La paléothermométrie sur le site de Vostok entre idéalement dans le cadre de l'inverse stochastique décrite dans l'introduction de cette thèse, pour deux raisons :

- Un modèle linéaire permet de simuler de manière réaliste la propagation de la chaleur sur le site de Vostok.

---

<sup>11</sup> Le même type de schéma numérique est utilisé (et explicité) dans le chapitre III.

• On dispose d'un *a priori* sur l'évolution de la température de surface sur le site de Vostok. Cet *a priori* est donné par les rapports isotopiques des isotopes de l'eau mesurés dans les carottes de glace et une relation empirique  $\delta$ -T. L'incertitude sur cet *a priori* est à peu près quantifiable.

### II.2.2.1. Données utilisées - covariance *a priori* sur les données

Les mesures de température proviennent du trou de forage 3G (2040 m de profondeur) ; plusieurs profils de température sont disponibles (Vostretsov et al., 1984 ; Salamatin et al., 1994). Dans la première étude (Vostretsov et al., 1984), l'erreur sur les mesures est estimée à  $0.05^{\circ}\text{C}$  pour les 900 premiers mètres et  $0.1^{\circ}\text{C}$  en dessous. Salamatin et al. (1994) estiment l'erreur absolue de leurs mesures à  $0.05^{\circ}\text{C}$ . Ce sont ces dernières données, un peu plus précises, que nous utiliserons ; ceci permettra de plus de comparer notre reconstruction à celle de Salamatin et al. (1994). Ces données, comportant 92 points de mesure, ont été tracées sur la figure II-3.

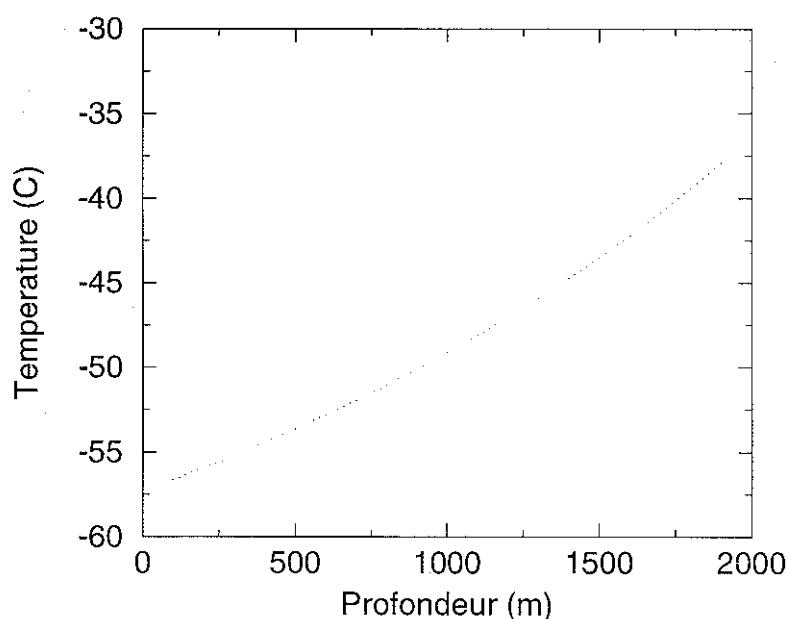


Figure II-3 : profil de température mesuré dans le trou de forage de Vostok.

La matrice de covariance *a priori* sur les données que nous choisirons sera une matrice diagonale (on fait l'hypothèse que les erreurs sur les données sont indépendantes deux à deux). La valeur ( $\sigma_d^2$ ) des éléments de cette matrice diagonale sera fixée à  $25 \times 10^{-3} \text{C}^2$  ( $= 0.05 \times 0.05$ ) :

$$\underline{C}_d = \sigma_d^2 \underline{I} \quad (\text{II-11})$$

### II.2.2.2. Covariance a priori sur les paramètres du modèle

On choisit la température donnée par le thermomètre isotopique ( $\delta D$ ) comme *a priori* sur les valeurs de paramètres à reconstruire (valeurs discrètes de température de surface en fonction du temps). La matrice de covariance *a priori* est choisie diagonale, de variance constante<sup>12</sup> :

$$\underline{\mathbf{C}}_m = \sigma_m^2 \mathbf{I} \quad (\text{II-12})$$

Dans l'inversion standard qui suit, la racine carrée de la variance ( $\sigma_m$ ) sur la température isotopique sera fixée à 5°C, ce qui correspond à 50% de la différence de température entre stade glaciaire et interglaciaire donnée par le deutérium.

## II.2.3. Résultats

### II.2.3.1. Solution retenue par l'inversion - covariances a posteriori

Le scénario le plus vraisemblable ( $\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}}$ ), s'obtient par conjonction des états d'information de l'*a priori* et de la théorie, à partir du modèle unitaire ( $\underline{\mathbf{G}}$ ), des données ( $\underline{\mathbf{d}}$ ), du scénario a priori ( $\langle \underline{\mathbf{m}} \rangle$ ) et des matrices de covariances a priori sur les données ( $\underline{\mathbf{C}}_d$ ) et sur les paramètres ( $\underline{\mathbf{C}}_m$ ), à l'aide de l'équation suivante (voir introduction):

$$\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}} = \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle + \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T (\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{C}}_m \underline{\mathbf{G}}^T + \underline{\mathbf{C}}_d)^{-1} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{G}} \langle \underline{\mathbf{m}} \rangle) \quad (\text{II-13})$$

L'intérêt d'utiliser cette équation, par rapport à l'autre formulation proposée dans le chapitre d'introduction, est que la dimension de la matrice à inverser est nettement moins importante (c'est le nombre de données, c'est à dire 92 dans notre cas). L'inverse de cette matrice est calculée numériquement à l'aide d'un algorithme adapté aux matrices symétriques définies positives : on utilise la factorisation de Choleski, qui consiste à écrire la matrice à inverser sous la forme  $\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{U}}$ ,  $\underline{\mathbf{U}}$  étant une matrice triangulaire supérieure. De même la

<sup>12</sup> Des calculs ont également été effectués avec une matrice de covariances *a priori* du type :

$$\forall (i, j) \quad c_m(i, j) = \sigma_m^2 \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2l^2}\right)$$

où  $l$  est une longueur de corrélation. Ces calculs ne changent pas les conclusions de l'étude et, pour plus de clarté, nous avons choisi de montrer les tests réalisés avec la matrice de covariances *a priori* la plus simple possible.

matrice des covariances *a posteriori* ( $\underline{C}_m^{post}$ ) sur les paramètres est calculée numériquement à partir de l'équation suivante :

$$\underline{C}_m^{post} = \underline{C}_m - \underline{C}_m \underline{G}^T (\underline{G} \underline{C}_m \underline{G}^T + \underline{C}_d)^{-1} \underline{G} \underline{C}_m \quad (\text{II-14})$$

Dans l'inversion standard présentée ci-dessous, les paramètres de l'inversion sont  $\sigma_d = 0.05^\circ\text{C}$  et  $\sigma_m = 5^\circ\text{C}$ .

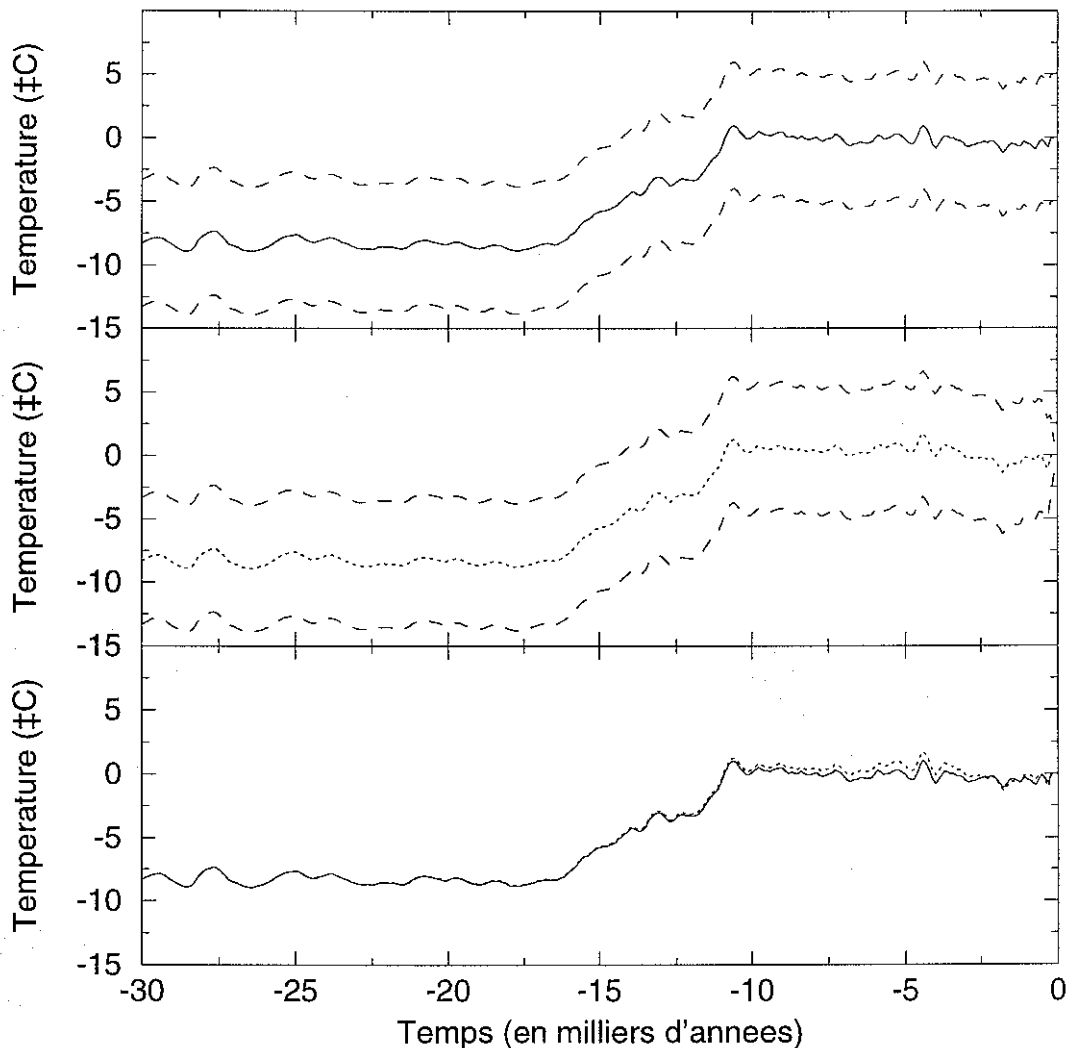


Figure II-4 : résultats de l'inversion standard. Le panneau du haut montre le scénario de température de surface *a priori* (signal de deutérium de Vostok); les enveloppes (tirets) désignent l'incertitude que l'on se donne sur ce scénario *a priori* ( $1\sigma = 5^\circ\text{C}$ ). Sur le panneau du milieu est tracé le maximum de vraisemblance suggéré par l'inversion stochastique (pointillés), ainsi que l'écart type *a posteriori* sur ce scénario (tirets). Sur le panneau du bas sont comparés les scénarios *a priori* (trait plein) et maximum de vraisemblance (pointillés).

Le résultat principal de la figure II-4 est que le scénario en température retenu par l'inversion est très proche du scénario *a priori*. Ceci ne signifie pas que ce scénario est bon, mais que, compte tenu des informations dont elle dispose, l'inversion stochastique n'est pas en mesure d'en proposer de meilleur.

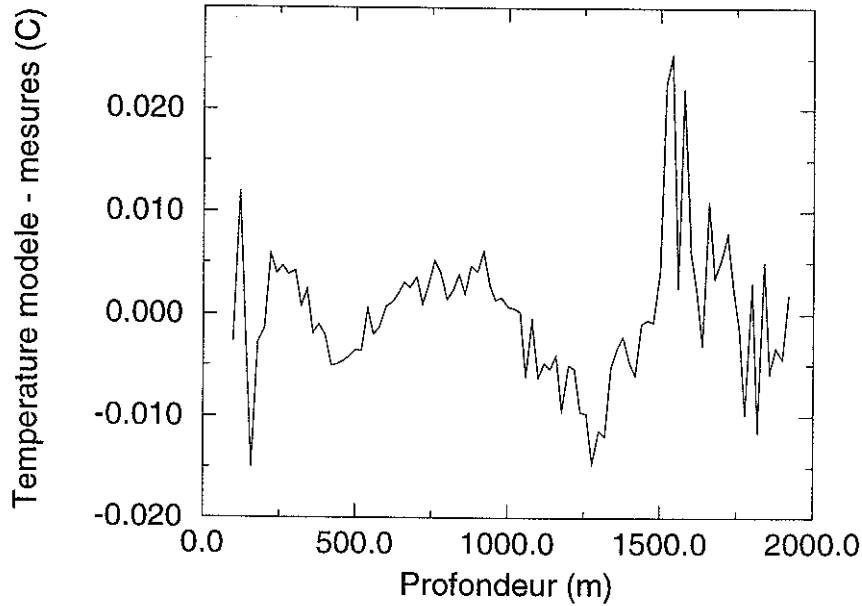


Figure II-5 : différence entre la température calculée par le modèle et températures mesurées dans le trou de forage (ou différence entre données a posteriori et données a priori). On voit que l'accord modèle / observations est très bon, compte tenu de l'erreur absolue que l'on a sur la mesure ( $0.05^{\circ}\text{C}$ ).

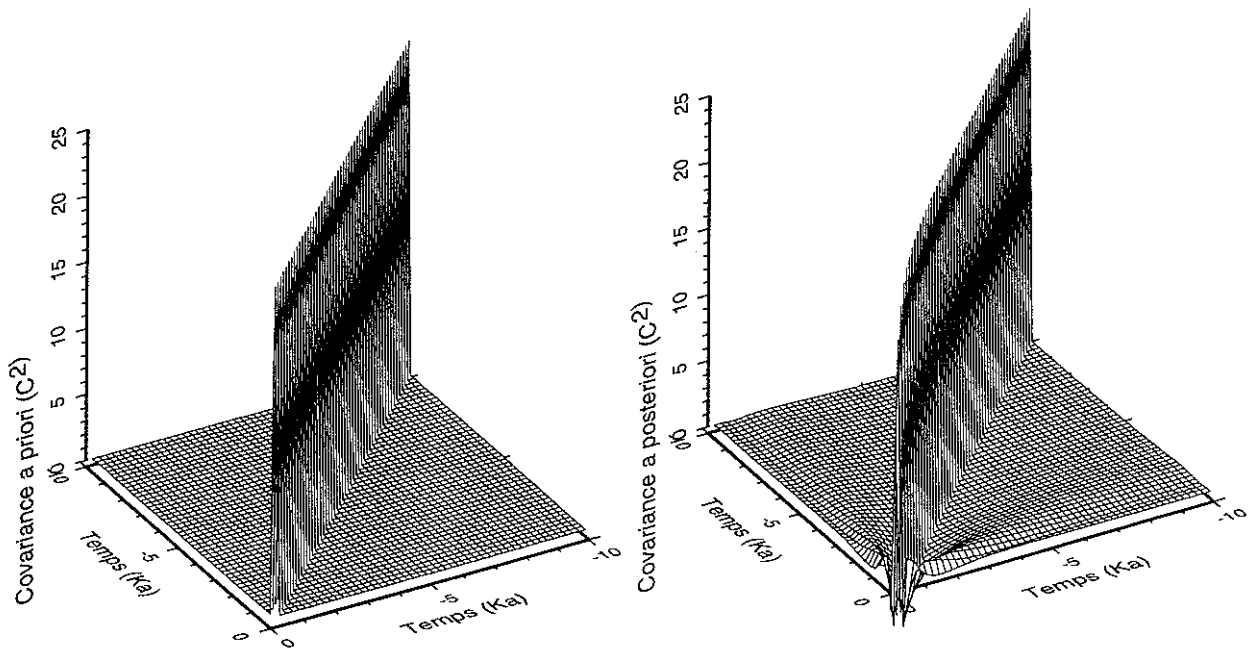


Figure II-6 : comparaison des covariances a priori et a posteriori pour les 10000 dernières années. Noter que les variances a posteriori correspondant au passé récent sont légèrement inférieures aux variances a priori. Noter également l'apparition de termes croisés dans la matrice de covariances a posteriori (la matrice de covariance a posteriori n'est plus diagonale).

### II.2.3.2. Gain d'information par inversion

L'analyse de la section précédente suggère que l'inversion du profil de température nous a appris peu de choses. Il est également possible d'interpréter les résultats de l'inversion en

terme de gain d'information plutôt qu'en terme de réduction de barres d'erreurs (ou de covariance). Cette approche permet de mieux quantifier d'où vient l'information (*i.e.* des données de température ou de l'*a priori* sur le scénario de température de surface). Pour cela, il faut définir le concept de quantité d'information relative d'une densité de probabilités  $f(\underline{\mathbf{m}})$  par rapport à une densité de probabilité non-informative  $g(\underline{\mathbf{m}})$ , notée ici  $I(f;g)$ . On utilise la définition de Tarantola (1987)<sup>13</sup> :

$$I(f;g) = \int_M f(\underline{\mathbf{m}}) \ln \left( \frac{f(\underline{\mathbf{m}})}{g(\underline{\mathbf{m}})} \right) d\underline{\mathbf{m}} \quad (\text{II-15})$$

L'intégration se fait sur l'espace des paramètres du modèle  $M$ . L'unité du contenu d'information est le nep (ou le bit si la base du logarithme est 2). La quantité d'information possède quelques propriétés remarquables : elle est toujours positive (éventuellement nulle si  $f$  et  $g$  sont identiques) et invariante par changement de variables bijectif sur  $\underline{\mathbf{m}}$ . Il est par ailleurs possible de montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux densités de probabilités Gaussiennes, alors il existe une formule analytique donnant la quantité d'information relative de  $f$  par rapport à  $g$  (Tarantola, 1987) :

$$I(f;g) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \underline{\mathbf{C}}_f}{\det \underline{\mathbf{C}}_g} \right) + \frac{1}{2} (\langle \underline{\mathbf{m}}_f \rangle - \langle \underline{\mathbf{m}}_g \rangle)^T \underline{\mathbf{C}}_f^{-1} (\langle \underline{\mathbf{m}}_f \rangle - \langle \underline{\mathbf{m}}_g \rangle) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\underline{\mathbf{C}}_g \underline{\mathbf{C}}_f^{-1} - \mathbf{I}) \quad (\text{II-16})$$

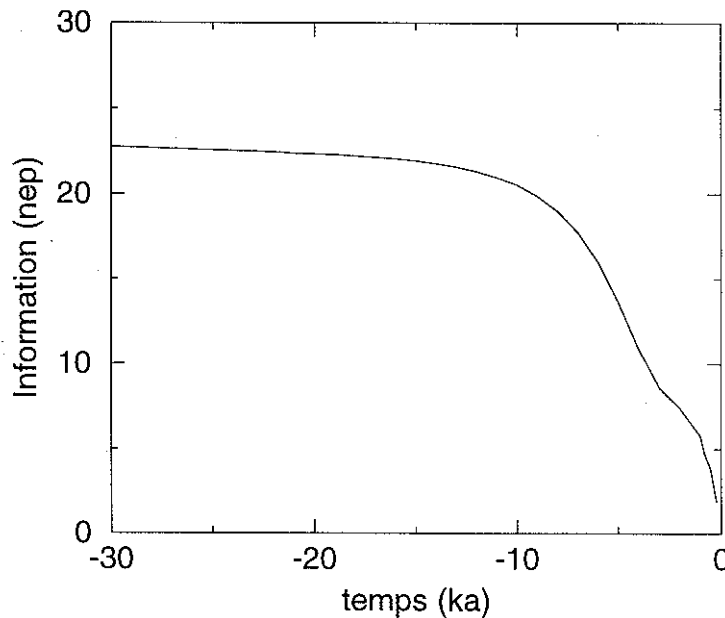


Figure II-7 : gain d'information obtenu par inversion sur la période allant de  $x$  (en ka) à nos jours, en fonction de  $x$ .

<sup>13</sup> Cette définition est une généralisation du contenu d'information défini par Shannon (1948) pour des probabilités discrètes.

où  $Tr$  et  $\det$  désignent respectivement les opérateurs « trace » et « déterminant » ;  $\langle \underline{\mathbf{m}}_f \rangle$  (respectivement  $\langle \underline{\mathbf{m}}_g \rangle$ ) est le maximum de vraisemblance de la densité de probabilité  $f$  (respectivement  $g$ ) ;  $\underline{\mathbf{C}}_f$  et  $\underline{\mathbf{C}}_g$  sont les matrices covariances des densités de probabilités  $f$  et  $g$ ,  $\underline{\mathbf{I}}$  est la matrice identité. Dans notre cas il est intéressant de calculer la quantité d'information relative de la densité de probabilité associée au scénario en température *a posteriori* par rapport au scénario *a priori*.

Si l'on considère la période allant de -30 000 ans à nos jours, le gain d'information obtenu par inversion du profil de température en fonction de la profondeur est de 22.8 nep : ceci est une valeur faible. A titre de comparaison, l'information relative d'une Gaussienne sans corrélation, de variance 4°C (soit 1°C de moins que l'*a priori*) et ayant le même maximum de vraisemblance que l'*a priori* est de 36.9 nep. Afin d'estimer la partie du scénario de température de surface où de l'information a été gagnée, on a tracé sur la figure II-7 l'information gagnée sur période allant de  $x$  (en ka) à aujourd'hui, en fonction de  $x$ . Cette figure montre que plus de 50% de l'information a été gagnée sur le scénario de température des 4500 dernières années et 75% sur les 6000 dernières années. Moins de 5% de l'information a été gagnée sur le scénario de la période glaciaire (*i.e.* de -30 000 ans, temps de début de simulation, à -15 000 ans).

### **II.2.3.3. Faut-il recommencer l'inversion ?**

On dispose maintenant d'un scénario de température de surface *a posteriori* un peu plus précis que le scénario *a priori* donné par le deutérium. On peut se demander si une seconde inversion, en utilisant ce scénario plus précis comme *a priori*, permettrait de réduire encore un peu les barres d'erreurs sur la température de surface. Une telle itération n'a pas été faite et ne doit pas être faite : le principe de base de l'inverse stochastique est en effet que l'*a priori* sur les paramètres et sur les données sont indépendants, ce qui est vérifié pour la première inversion, mais plus pour la seconde. On peut seulement recommencer l'inversion si un nouveau jeu de mesures de température, indépendant du précédent, est utilisé.

### II.2.3.4. Discussion de l'analyse de Salamatin et al. (1994, 1997)

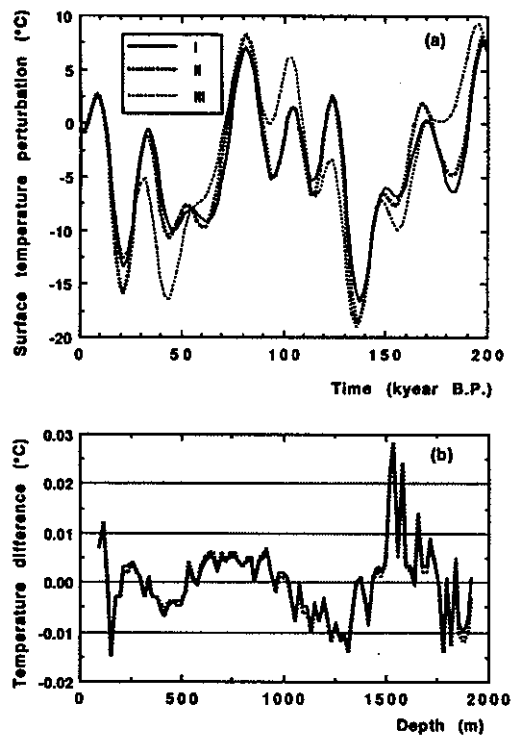


Figure II-8 : résultats obtenus par Salamatin et al. (1994). Sur le panneau du haut sont présentées trois reconstructions admissibles de température de surface en fonction du temps (le présent est à gauche, -200 000 ans à droite). Sur le panneau du bas est tracée la différence entre les températures calculées par leur modèle et les observations. Noter la similarité entre ce panneau et la figure II-5.

L'idée à la base de l'inversion du profil de température de Salamatin et al. (1994, 1997) est que les variations de température de surface sont décrites par quatre harmoniques de périodes caractéristiques 19 000, 23 000, 41 000 et 100 000 ans. Ce point est en lui-même discutable, mais nous nous contenterons ici de montrer que l'erreur sur l'amplitude et la phase de ces quatre harmoniques reconstruites est trop importante pour pouvoir en déduire des informations sur le gradient isotopique, la température du dernier stade glaciaire ou sur la datation de la carotte de Vostok. L'inversion stochastique suggère en effet que le profil de température dans le trou de forage ne permet pas de remonter à plus de 5000 ans et l'ajustement d'une période caractéristique de 100 000 ans paraît donc très contestable. Salamatin et al. (1994, 1997) supposent que les perturbations de température de surface  $\theta_s$  (normalisée par la différence entre la température de fusion et la température stationnaire) sont décrites par l'équation suivante :



$$\tilde{\theta}_s = \sum_{i=1}^4 \left\{ A_i \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_i}(t+t_0)\right) + B_i \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_i}(t+t_0)\right) \right\} \quad (\text{II-17})$$

où  $t_0$  est le temps de début de simulation<sup>14</sup> (-300 000 ans),  $\tau_i$  sont les différentes périodes caractéristiques,  $A_i$  et  $B_i$  sont les amplitudes des harmoniques à calibrer. L'ajustement des coefficients  $A_i$  et  $B_i$  se fait par minimisation des écarts quadratiques entre températures simulées et mesurées dans le trou de forage. La même procédure peut être effectuée avec notre modèle simple de propagation de la chaleur à Vostok, en remarquant que ce dernier est linéaire par rapport à  $A_i$  et  $B_i$ . On classe ces 8 paramètres à calibrer dans un vecteur  $\underline{\mathbf{m}}$  et le modèle direct de propagation de la chaleur peut alors se réécrire :

$$\underline{\mathbf{G}}' \underline{\mathbf{m}}' = \underline{\mathbf{d}} \quad (\text{II-18})$$

où  $\underline{\mathbf{G}}$  est une matrice de dimension  $92 \times 8$  (il y a 92 points de mesures) qui s'obtient en calculant la réponse unitaire du modèle aux différentes harmoniques. On peut alors calculer la matrice de covariance sur les harmoniques reconstruites par Salamatin et al. (1994), indépendamment des données (voir par exemple Menke, 1989) :

$$\underline{\mathbf{C}}_{m'} = \sigma_d^2 (\underline{\mathbf{G}}'^T \underline{\mathbf{G}}')^{-1} \quad (\text{II-19})$$

La matrice de covariance  $\underline{\mathbf{C}}_{m'}$  est de dimension  $8 \times 8$  : on a reporté la racine carrée des valeurs de ses éléments diagonaux (c'est à dire la racine carrée des variances sur  $A_i$  et  $B_i$ ) dans le tableau suivant :

Harmonique (sans dimension)	Estimation de Salamatin et al. (1994) (K) <sup>15</sup>	Racine carrée de la variance estimée par (II-19) (K)
$A_1$ (cosinus, 100 000 ans)	0.0835 ~ 0.0880	73
$A_2$ (cosinus, 41 000 ans)	-0.0505 ~ -0.0566	32
$A_3$ (cosinus, 23 000 ans)	-0.0677 ~ -0.0638	133
$A_4$ (cosinus, 19 000 ans)	0.0082 ~ 0.0142	91
$B_1$ (sinus, 100 000 ans)	0.0358 ~ 0.0614	15

<sup>14</sup> Comme la condition initiale de leur modèle au temps de début de simulation est l'état stationnaire, Salamatin et al. (1994, 1997) introduisent ainsi une contrainte artificielle sur les coefficients des harmoniques, à savoir que  $\sum_{i=1}^4 A_i = 0$  (au sens des moindres carrés). Cette particularité se retrouve par l'analyse de leurs résultats.

<sup>15</sup> Il s'agit des estimations des paramètres des deux premières reconstructions présentées dans leur article.

$B_2$ (sinus, 41 000 ans)	0.0546 ~ 0.0577	161
$B_3$ (sinus, 23 000 ans)	-0.0239 ~ -0.0345	149
$B_4$ (sinus, 19 000 ans)	0.0241 ~ 0.0366	52

Comme les incertitudes sur les paramètres des différentes harmoniques sont environ 1000 fois plus importantes que les valeurs reconstruites, la validité des reconstructions de température de surface proposées par Salamatin et al. (1994) semble douteuse. Il en est de même pour la datation de la carotte de Vostok qui en découle.

### II.3. CONCLUSION

L'analyse du profil de température à Vostok donne des résultats décevants. Elle n'apporte que peu (ou pas) d'éléments nouveaux par rapport au thermomètre isotopique classique. En particulier, l'analyse du profil de température est incapable de donner une meilleure estimation de la température du dernier stade glaciaire à Vostok : il s'agit là du principal résultat de cette étude. Les difficultés ne proviennent pas de la méthode inverse employée, mais de la nature du problème inverse considéré. Par ailleurs, il est peu probable que des mesures plus précises de température dans le trou de forage de Vostok puissent apporter des renseignements supplémentaires, car la limitation serait alors au niveau de la connaissance approximative de certains paramètres du modèle direct de propagation de la chaleur<sup>16</sup> (e.g. profil de vitesse verticale) et des hypothèses utilisées pour établir ce modèle (on a, par exemple, négligé l'advection horizontale de chaleur, ce qui serait discutable pour une étude plus fine).

Les résultats présentés dans ce chapitre ne sont valables que pour le site de Vostok, et ne remettent pas en cause les résultats de Cuffey et al. (1995) ou de Johnsen et al. (1995) qui ont utilisé des données provenant de sites où l'accumulation est dix fois plus importante. Le même type d'approche que celle décrite ici pourrait néanmoins très bien s'appliquer aux sites Groënlandais (e.g. GRIP ou GISP2), à condition de modifier le modèle direct de propagation de la chaleur (en particulier la condition à la limite à la base de la calotte est différente car la glace basale n'est pas au point de fusion sur ces sites).

---

<sup>16</sup> Une inversion plus complète comprenant comme paramètres la vitesse verticale et le scénario de température de surface nous apprendrait sans doute que le profil de température permet de mieux contraindre la vitesse verticale : il n'est donc pas inutile de mesurer la température dans le trou de forage de Vostok.



### **III. DE L'AIR DES BULLES A L'ATMOSPHERE DU PASSE**

Le travail présenté dans ce chapitre a été effectué en collaboration avec Laurent Arnaud dont on pourra lire la thèse (Arnaud, 1997) pour une vision plus détaillée du névé polaire. Ce chapitre concerne essentiellement la description de la méthode élaborée pour déconvoluer le signal atmosphérique des carottes de glace, mais des redondances avec le travail de Laurent sont inévitables.

#### **III.1. INTERET DU NEVE POLAIRE**

L'étude des carottes de glace a connu un essor formidable grâce aux informations contenues dans les bulles emprisonnées dans la glace, qui nous renseignent sur l'évolution atmosphérique de la Terre. L'air de la bulle étant représentatif de l'atmosphère du passé, il suffit de connaître l'âge de cette bulle pour en déduire l'évolution de la composition atmosphérique. Le schéma n'est en fait pas aussi simple, et différents phénomènes naturels peuvent altérer la composition des bulles.

##### **III.1.1. De la neige à la glace<sup>1</sup>**

Les processus qui régissent la transformation de la neige en glace sont très similaires aux phénomènes de frittage dans les céramiques. On distingue généralement, comme pour les poudres céramiques, trois mécanismes successifs de compaction de la neige sèche. Près de la surface, jusqu'à une dizaine de mètres de profondeur, les gradients de températures peuvent être importants et des différences d'énergie de surface entre les zones concaves et les zones convexes des cristaux de neige entraînent des phénomènes d'évaporation, puis de recondensation de l'eau. L'eau des branches (zones convexes) des flocons est alors déplacée vers les zones concaves, ce qui rend les grains de neige plus arrondis. Les grains se tassent sous l'action de leur propre poids et le matériau (que l'on appelle alors névé) atteint une densité voisine de 0.55.

---

<sup>1</sup> Cette section est une synthèse de Barnola et Duval (1992).

Dans le névé, c'est à dire en dessous de 10 mètres de profondeur, on n'observe plus de fluctuations saisonnières de température, et le transport de matière en phase vapeur devient négligeable. La densification se poursuit alors par glissement des dislocations sous l'effet des pressions s'exerçant aux joints de grains. Dans une gamme de densité allant de 0.80 à 0.84, à 100 m de profondeur environ, les pores du névé (qui étaient jusqu'à ce stade connectés à la surface) se pincent pour donner naissance à des bulles (ou pores fermés). Cette zone de transition, appelée « close-off », correspond à l'isolement de l'air dans les pores du névé par rapport à l'atmosphère. L'identification de cette zone est donc primordiale pour l'interprétation de la composition des bulles contenues dans les carottes.

En dessous de cette zone de fermeture des pores, c'est-à-dire dans la glace, les bulles sont mises sous pression sous l'action du poids de la colonne (neige, névé et glace). Arrivées à une profondeur variant de 800 à 1000 mètres suivant les sites, les bulles disparaissent dans le réseau cristallin de la glace et forment des cristaux d'hydrate d'air.

### **III.1.2. De l'atmosphère aux bulles**

#### ***III.1.2.1. Interactions avec H<sub>2</sub>O liquide***

En fonction de la température de surface, on peut distinguer trois types de zone glaciaire. Tout d'abord, les glaciers dits tempérés sont au point de fusion, à l'exception d'une couche de surface dans laquelle la température est en dessous de 0°C pendant une partie de l'année. Un réseau de veines et de capillaires existe entre les grains de glace et les gaz sont emportés par l'eau circulant dans ces capillaires. Des réactions chimiques en milieu aqueux peuvent également se produire et agir comme source ou puits de certaines espèces. Par conséquent, si l'étude des glaciers tempérés peut fournir des informations glaciologiques et climatologiques importantes, elle n'est pas adaptée à la reconstruction de l'atmosphère du passé.

Les autres types de zones glaciaires que l'on rencontre sont les glaciers froids possédant ou non une zone de fonte en surface. De manière générale, on observe une couche de fonte occasionnelle dans les régions possédant des températures annuelles au dessus de -25°C. Cependant il arrive, même dans la partie centrale du Groenland où la température moyenne annuelle est de l'ordre de -30°C, que la calotte fonde en surface. La présence d'eau liquide pouvant avoir une influence importante sur la composition de l'air des bulles (par le biais de solubilité de certaines espèces gazeuses) nous nous intéresserons ici uniquement aux glaciers froids sans fonte, tels que ceux des régions centrales Antarctiques.

### **III.1.2.2. Interactions avec $H_2O$ solide**

Des phénomènes de physisorption et chimisorption de certaines espèces gazeuses peuvent avoir lieu à l'intérieur du réseau poreux. Ces phénomènes jouent un rôle mineur pour la plupart des gaz atmosphériques que l'on désire étudier. Toutefois, avant d'adapter la méthode décrite dans ce chapitre à d'autres gaz que le méthane (qui sera l'exemple utilisé pour illustrer la méthode), il faudra d'abord se poser la question de l'adsorption éventuelle de cette molécule sur les parois des pores du névé.

### **III.1.2.3. Quel est « l'âge » d'une bulle ?**

Les deux phénomènes précédents étant mis à part, peut-on parler de l'âge d'une bulle ? Si l'on peut raisonnablement bien dater la glace environnante (du moins dans la partie haute de la carotte), il est beaucoup plus difficile de dater chacun des composants de la bulle. En effet, l'air de la bulle n'est pas représentatif de l'air de l'atmosphère, mais de l'air qui se trouvait dans le pore au moment où celui-ci s'est fermé. Or on observe une différence entre la composition de l'air à la profondeur du close-off et celle de l'atmosphère. Ceci est dû aux phénomènes de transport des gaz dans le névé polaire (par advection, diffusion et gravitation) qui ne sont pas instantanés. D'autre part, la diffusion et la gravitation dépendent du gaz considéré : chacun des gaz composant la bulle a donc un âge différent. De plus, à cause de la nature même du phénomène de diffusion, il serait plus rigoureux de parler d'une *distribution* d'âge associée à un gaz de la bulle.

### **III.1.3. De la composition des bulles à l'atmosphère du passé**

Le fait qu'on ne puisse pas à proprement parler définir l'âge d'une bulle complique le travail d'interprétation des carottes. Cependant on connaît assez bien ces processus qui empêchent une interprétation instantanée des mesures. Il est donc possible de construire un modèle de transport des gaz dans le névé qui calcule le profil de concentration dans le névé et dans la glace en fonction de la profondeur à partir de la composition de l'atmosphère passée. Ce modèle nous permet d'obtenir une quantité directement mesurable en fonction d'une quantité que l'on cherche à obtenir. C'est en « mode inverse » que ce modèle peut nous renseigner sur l'atmosphère du passé.

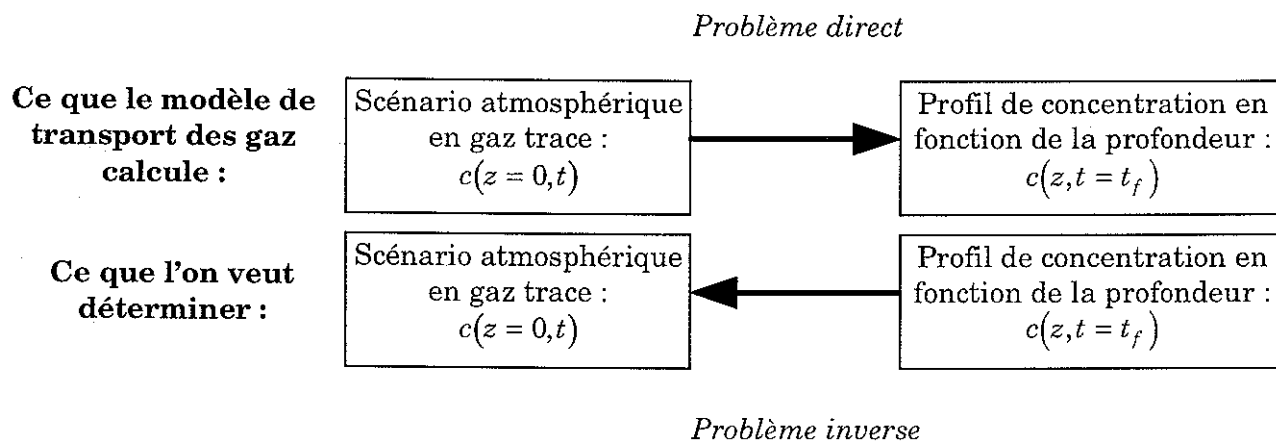


Figure III-1 : l'interprétation du profil de concentration en fonction de la profondeur est un problème inverse.

## III.2. MODELE DE TRANSPORT DES GAZ DANS LE NEVE ET LA GLACE

### III.2.1. Description des phénomènes de transport dans le névé

La figure III-2 montre les différents flux d'air et de gaz traces qui contribuent à la composition de l'air des pores et des bulles. On divise le névé en trois zones : la première, juste en dessous de l'interface air - neige, est une zone de mélange (par le vent, les variations de pression atmosphérique et les gradients thermiques) où les échanges gazeux sont presque instantanés. L'épaisseur de cette zone, qui peut être estimée à l'aide d'analyses isotopiques de l'azote et de l'oxygène, varie en fonction des sites entre 13 mètres à Vostok (Bender et al., 1994) et zéro mètre à Law Dome (Trudinger et al., 1997). Tous les gaz ont la même concentration dans cette zone que dans l'atmosphère au-dessus. En-dessous de cette couche de mélange, on observe une zone où le transport des gaz est limité par la diffusion et la gravitation. Enfin, dans la zone de fermeture des pores (ou région du « close-off ») l'air est emprisonné dans les bulles : la composition de ces bulles, qui s'enfoncent à la même vitesse que la glace, ne varie plus dans le temps. L'air qui est « pompé » du névé vers les bulles lors de cette opération crée un flux d'air dans toute la colonne de névé.

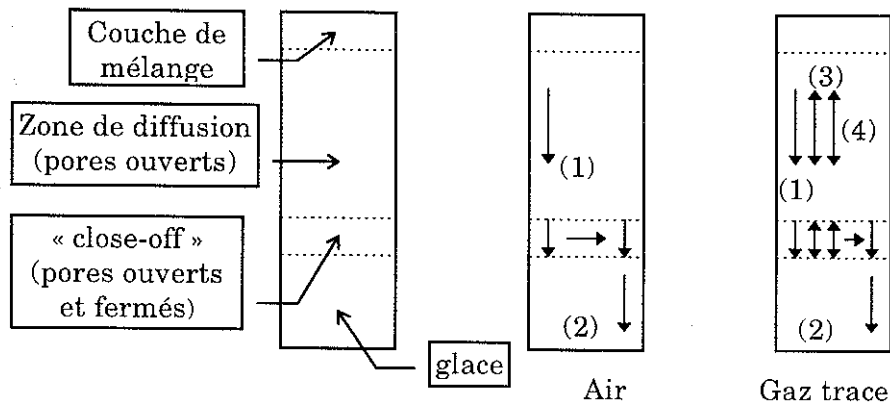


Figure III-2 : Vue schématique du névé polaire, des différents flux d'air et de gaz trace. (1) flux d'advection dans les pores ouverts, (2) flux d'air par advection avec les bulles, (3) diffusion dans les pores ouverts et (4) séparation par effet gravitationnel. Le piégeage de l'air des pores ouverts dans l'air des bulles est représenté par les flèches horizontales. La taille des flèches n'est pas représentative de l'intensité des flux.

A l'heure actuelle, deux modèles simples de transport des gaz dans le névé polaire ont été publiés : il s'agit de l'analyse de Schwander et al. (1993) et celle de Trudinger et al. (1997). Tous deux sont basés sur la même équation de diffusion, le premier négligeant les variations de coefficients de diffusion et de porosité ouverte avec la profondeur. Une autre différence importante entre ces deux analyses provient de la résolution numérique de cette équation. Si l'on étudie de manière plus attentive ces deux modèles, plusieurs problèmes, d'ordre mathématique et physique, apparaissent :

- L'équation aux dérivées partielles résolue numériquement est de type parabolique. Mathématiquement, l'unicité de la solution d'une telle équation est assurée par l'existence d'une condition initiale (condition à la limite au temps de début de simulation), d'une condition à la limite au sommet et d'une condition au fond du névé. Les deux premières sont bien décrites dans ces travaux, mais la condition à la limite au fond n'est pas mentionnée (dans la pratique, cette condition à la limite est sans doute appliquée à l'infini).

- Cette équation de diffusion a été établie en faisant l'hypothèse d'interactions négligeables entre les molécules gazeuses et les parois des pores. Pourtant l'air est supposé descendre à la même vitesse que les couches de névé. Ces deux hypothèses sont donc fortement contradictoires.

- Dans les deux modèles, le problème de la conservation de l'air n'a pas été étudié.

Ces constatations nous ont amené à réécrire le modèle de transport sous forme d'équations de conservation plus rigoureuses, en prenant toutefois exactement les mêmes processus physiques en considération, et en tenant compte des lacunes des deux modèles précédents. La principale hypothèse faite ici concerne la stationnarité des variables



structurelles du névé (porosité, densité, tortuosité...). Cette hypothèse est sans doute justifiée si l'on souhaite étudier comment a varié notre atmosphère pendant les cinq mille dernières années, mais elle empêche une déconvolution totale des carottages profonds car le névé (son épaisseur par exemple) a probablement changé de façon non négligeable entre les périodes glaciaires et interglaciaires.

### III.2.2. Equations de conservation

Toutes les équations présentées dans cette partie sont écrites en coordonnées *Eulériennes* (*i.e.* le repère est fixe par rapport à l'interface air - neige), et l'axe vertical est orienté vers le bas, ce qui entraîne des vitesses d'écoulement et des flux d'advection positifs. Dans un tel système de coordonnées une équation de conservation quelconque (masse, quantité de mouvement, chaleur...) s'écrit comme la somme de la dérivée temporelle de la quantité à conserver, de la divergence du flux de cette même quantité et éventuellement d'un terme puits, cette somme devant être nulle. Les différentes notations mathématiques sont définies lors de leur première apparition dans le texte, et une table de notation chapitre par chapitre est disponible à la fin du manuscrit.

#### III.2.2.1. Conservation de la glace

C'est l'équation de continuité du milieu étudié. Ici, le névé est un matériau compressible, et la conservation de H<sub>2</sub>O solide s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0 \quad (\text{III-1})$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du névé,  $\underline{v}$  le vecteur vitesse d'enfoncement des couches et  $t$  le temps. Cette équation peut être intégrée directement si l'on s'intéresse aux variations récentes de la composition atmosphérique (5000 dernières années environ) : pendant cette période le névé peut raisonnablement être considéré comme stationnaire et l'accumulation de neige en surface, constante.

$$\rho v = \alpha_s \quad (\text{III-2})$$

où  $\alpha_s$  désigne l'accumulation en surface en kg m<sup>-2</sup>a<sup>-1</sup>. Cette accumulation varie fortement entre les sites côtiers Antarctiques et les zones centrales (désertiques) comme Vostok.

#### III.2.2.2. Pores ouverts

Par définition, une molécule gazeuse se situe dans un pore ouvert s'il existe un chemin à l'intérieur de la porosité du névé reliant cette molécule à l'atmosphère. Si ce n'est pas le cas, alors la molécule est dans une bulle, appelée aussi pore fermé.

### III.2.2.2.1. Conservation de l'air

La conservation de l'air dans les pores ouverts traduit mathématiquement le fait que les bulles piégées de façon continue au niveau de la zone de fermeture créent un mouvement d'air dans toute la colonne de névé. Ceci s'écrit :

$$\frac{\partial q_{air}}{\partial t} + \nabla(\underline{w}q_{air}) + P_{air} = 0 \quad (\text{III-3})$$

avec  $q_{air}$  la quantité d'air dans les pores ouverts,  $\underline{w}$  la vitesse du flux d'air dans les pores ouverts et  $P_{air}$  la quantité d'air piégée dans les bulles par unité de temps. Cette équation montre clairement que la vitesse du flux d'air  $\underline{w}$  dépend du piégeage et n'a aucune raison d'être égale à la vitesse d'enfoncement des couches  $\underline{v}$  comme supposé dans les deux précédentes études. La quantité d'air dans la porosité ouverte peut d'autre part être estimée à l'aide de l'équation d'état d'un gaz parfait et de l'hypothèse hydrostatique (le névé est supposé isotherme) :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P}{\rho_{air}} = \frac{RT}{M_{air}} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \rho_{air}g \end{array} \right\} \Rightarrow P = P(z=0, t) \exp\left(\frac{M_{air}gz}{RT}\right) \quad (\text{III-4})$$

$P$  désigne la pression atmosphérique,  $\rho_{air}$  la masse volumique de l'air,  $T$  la température absolue du névé,  $M_{air}$  la masse molaire de l'air ( $29 \times 10^{-3}$  kg mol<sup>-1</sup>),  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $R$  la constante des gaz parfaits. L'équation (III-4) peut se réécrire en fonction de la quantité d'air dans les pores ouverts, ce qui donne :

$$q_{air} = f(z)c_{air}(z=0, t) \exp\left(\frac{M_{air}gz}{RT}\right) \quad (\text{III-5})$$

$f$  est la porosité ouverte du névé,  $c_{air}$  la concentration en air. Aux échelles de temps considérées ici (de l'ordre de l'année, c'est à dire bien supérieures aux échelles de temps météorologiques), on peut négliger les variations de pression atmosphérique et donc considérer la concentration en air en surface comme stationnaire. Ceci implique une quantité d'air dans la porosité ouverte du névé indépendante du temps, quelle que soit la profondeur. Il est alors possible de simplifier l'équation (III-3), ce qui donne :

$$\frac{\partial(wq_{air})}{\partial z} + P_{air} = 0 \quad (\text{III-6})$$

Le terme de piégeage dû aux bulles sera évalué à l'aide de l'équation de conservation de l'air dans les bulles.

### III.2.2.2.2. Conservation du gaz trace

L'équation de conservation du gaz trace dans la porosité ouverte du névé s'obtient de façon analogue. Deux différences sont toutefois à signaler :

- Le flux de gaz trace dans la porosité ouverte a trois composantes au lieu d'une seule (voir figure III-2). Il s'agit de l'advection du gaz avec le flux d'air, de la diffusion due aux gradients de concentration entre le haut et le bas du névé et de l'entraînement par effet gravitationnel (les molécules plus lourdes se trouvant préférentiellement dans le bas du névé)
- Le puits de gaz trace est dû, comme pour l'air, au piégeage dans les bulles, mais pour certaines espèces radioactives, il faut y ajouter une décroissance naturelle.

Ceci s'écrit formellement :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( wq - fD \left( \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{Mgc}{RT} \right) \right) + P_g + \lambda q = 0 \quad (\text{III-7})$$

$q$  et  $c$  sont respectivement la quantité et la concentration en gaz trace des pores ouverts,  $P_g$  le terme de piégeage du gaz trace dans les bulles,  $\lambda$  la décroissance radioactive éventuelle du gaz trace,  $M$  la masse molaire du gaz et  $D$  le coefficient de diffusion apparent de ce gaz dans le névé. Ce dernier dépend à la fois du gaz considéré (les molécules légères diffusent plus vite que les lourdes) et du milieu dans lequel les particules diffusent. En effet, les gaz diffusent d'autant moins vite que les pores sont tortueux. Une bonne évaluation de ce paramètre constituera une des étapes essentielles de la méthode de déconvolution du signal atmosphérique.

### **III.2.2.3. Pores fermés (ou bulles)**

La figure III-3 montre comment le processus de piégeage des bulles peut être divisé par l'esprit en deux étapes élémentaires : une densification pure et une fermeture des pores à porosité totale constante.

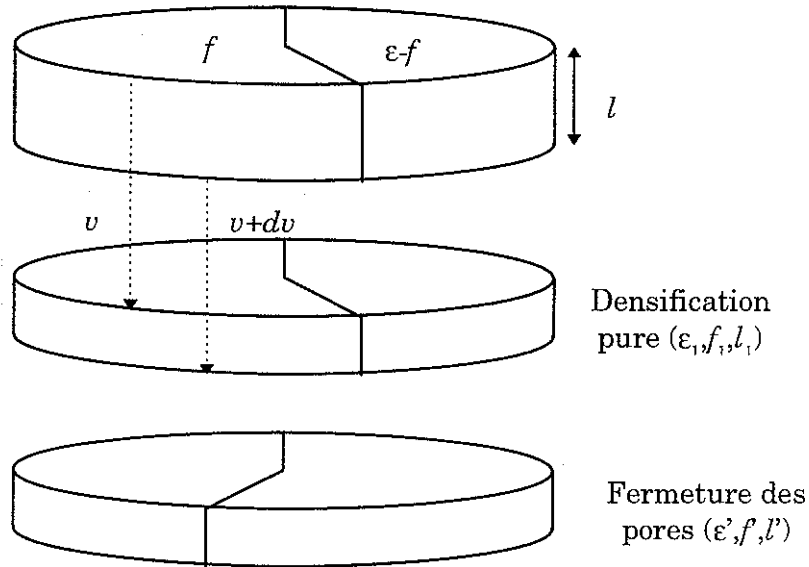


Figure III-3 : les deux étapes élémentaires lors du piégeage de l'air dans les bulles. Lors de la première étape la porosité totale du névé diminue, mais le rapport porosité ouverte sur porosité totale reste inchangé : il n'y a donc pas de piégeage pendant cette étape. Lors de la seconde, la porosité totale reste constante mais le rapport porosité ouverte sur porosité totale diminue. Il y a piégeage d'air pendant cette étape.  $\epsilon$  et  $f$  désignent les porosités totale et ouverte du névé,  $l$  est l'épaisseur de l'échantillon élémentaire que l'on considère.

### III.2.2.3.1. Première étape élémentaire : densification

D'après les définitions des deux étapes élémentaires données ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} \frac{f_1}{\epsilon_1} = \frac{f}{\epsilon} \\ l_1 = l \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial z} dt \right) \end{cases} \quad (\text{III-8})$$

Ce qui traduit mathématiquement le fait que la proportion de pores ouverts n'a pas changé et que la densification est due aux variations de la vitesse verticale d'enfoncement des couches. La conservation de l'air des bulles durant cette phase s'obtient simplement en écrivant que la quantité d'air emprisonné n'a pas changé :

$$l(\epsilon - f)c_{air}^b = l_1(\epsilon_1 - f_1)c_{air1}^b \quad (\text{III-9})$$

où  $c_{air}^b$  est la concentration en air dans les bulles. Dans les deux équations précédentes, les variables indexées d'un « 1 » sont considérées à la fin de la phase de densification.

### III.2.2.3.2. Seconde étape : fermeture des pores

La porosité totale reste inchangée, ce qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} \epsilon' = \epsilon_1 \\ l' = l_1 \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

La quantité d'air emprisonné sera plus importante à la fin qu'au début de cette phase et il est raisonnable de penser que l'apport d'air provient de pores ouverts se situant à proximité de la bulle qui vient de se créer :

$$l'(\varepsilon' - f')c_{air}^b = l_1(\varepsilon_1 - f_1)c_{air1}^b + l'(\varepsilon' - f' - (\varepsilon_1 - f_1))c_{air1} \quad (\text{III-11})$$

Ce qui revient à dire que la quantité d'air piégé à la fin de l'étape de fermeture des pores est égale à la quantité d'air piégé à la fin de la densification ajoutée à la différence de volume fermé multipliée par la concentration en air dans les pores ouverts à la profondeur considérée.

### III.2.2.3.3. Identification du terme de piégeage

Dans cette partie, nous faisons appel aux outils du calcul infinitésimal (*i.e.* le développement de Taylor au premier ordre) afin de transformer les équations (III-8), (III-9), (III-10) et (III-11) en une équation aux dérivées partielles plus facile à utiliser. En effet, comme l'on considère des transformations élémentaires, les quantités en début et en fin de première ou seconde phase doivent être très voisines. Dans un premier temps, on remplace les variables intermédiaires  $\varepsilon_1$ ,  $f_1$  et  $l_1$  de l'équation (III-11) :

$$l'(\varepsilon' - f')c_{air}^b = \frac{(\varepsilon - f)c_{air}^b}{1 + \frac{\partial v}{\partial z} dt} + \left( \frac{f\varepsilon'}{\varepsilon} - f' \right) c_{air1} \quad (\text{III-12})$$

On fait ensuite un développement de Taylor de cette équation, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$d[(\varepsilon - f)c_{air}^b] = -(\varepsilon - f)c_{air}^b \frac{\partial v}{\partial z} dt + \left( \frac{fd\varepsilon}{\varepsilon} - df \right) c_{air} \quad (\text{III-13})$$

En divisant les deux membres de cette équation par  $dt$ , on obtient une formulation de l'équation de conservation en coordonnées *Lagrangiennes* (*i.e.* le repère est fixé aux couches de névé). Dans le cas unidimensionnel qui nous intéresse ici, le passage de coordonnées Lagrangiennes à un système de coordonnées Eulériennes se fait à l'aide de la formule suivante, valable pour toute fonction  $\phi$  du modèle (en pratique, on remplace la fonction  $\phi$  par les porosités et la concentration en air) :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{III-14})$$

Si on utilise de plus l'hypothèse de stationnarité des variables structurelles du névé, on obtient :

$$\frac{\partial [(\varepsilon - f)c_{air}^b]}{\partial t} + \frac{\partial [v(\varepsilon - f)c_{air}^b]}{\partial z} = -vc_{air}\varepsilon \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} \quad (\text{III-15})$$

Il faut noter que l'ordre des deux étapes élémentaires considéré n'a pas d'importance pour l'établissement de l'équation (III-15). Si on avait supposé que les pores se fermaient avant que le névé se densifie, un raisonnement analogue aurait conduit à la même formulation. Le premier terme du membre de gauche de (III-15) représente la dérivée temporelle de la quantité d'air piégée dans les bulles et le second est la divergence du flux de cette même quantité. En raisonnant uniquement sur la forme de l'équation de conservation, on s'aperçoit donc que le membre de droite est le terme dû à l'apport d'air des pores ouverts vers les pores fermés. C'est le terme  $P_{air}$  qui a été utilisé pour l'établissement de l'équation (III-6). Il est possible de simplifier (III-15) : comme la température et la vitesse d'enfoncement des couches sont supposées stationnaires, la dérivée temporelle de la quantité piégée dans les bulles doit s'annuler. Ceci entraîne :

$$\frac{\partial [vq_{air}^b]}{\partial z} = -vq_{air} \frac{\varepsilon}{f} \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} \quad (\text{III-16})$$

Le même calcul théorique peut être développé pour le calcul de la concentration en gaz trace dans les bulles, ce qui aboutit à une équation similaire à (III-15) (la dérivée temporelle ne pouvant pas, dans ce cas, être négligée).

#### III.2.2.4. Résumé des équations et conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{\partial (wq_{air})}{\partial z} - vq_{air} \frac{\varepsilon}{f} \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} = 0 \\ \text{(b)} \quad wq_{air}(z = z_f) = 0 \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -fD \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{f} \right) - \frac{Mgq}{fRT} \right) + wq \right] - vq \frac{\varepsilon}{f} \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} + \lambda q = 0 \\ \text{(d)} \quad q(z = 0, t) = f(z = 0)c_s(t) \quad q(z = z_f, t) = 0 \quad q(z, t = 0) = f(z)c_s(t = 0) \\ \text{(e)} \quad \frac{\partial (vq_{air}^b)}{\partial z} + vq_{air} \frac{\varepsilon}{f} \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} = 0 \\ \text{(f)} \quad q_{air}^b(z = 0) = 0 \\ \text{(g)} \quad \frac{\partial q^b}{\partial t} + \frac{\partial (vq^b)}{\partial z} + vq \frac{\varepsilon}{f} \frac{\partial \left[ \frac{f}{\varepsilon} \right]}{\partial z} + \lambda q^b = 0 \\ \text{(h)} \quad q^b(z = 0) = 0 \quad q^b(z, t = 0) = (\varepsilon - f)c_s(t = 0) \end{array} \right. \quad (\text{III-17})$$

$c_s$  désigne la concentration atmosphérique en gaz trace et  $z_f$  est la profondeur de la fin de la zone de fermeture (*i.e.* la profondeur pour laquelle il n'existe plus de porosité ouverte). Le nombre de conditions aux limites permettant la résolution numérique de ce système doit être choisi en fonction du type de l'équation aux dérivées partielles considérée. Ainsi, une équation parabolique telle que (III-17-c) nécessite une condition initiale au temps de début de simulation et deux conditions aux limites (une en haut, et une en bas du domaine), alors qu'une équation différentielle du premier ordre comme (III-17-e) est entièrement définie avec une seule condition à la limite. La figure suivante montre comment ces équations sont prises en compte pour calculer les rapports de mélange dans le névé et la glace, à partir d'un profil de coefficient de diffusion donné et d'un scénario atmosphérique en gaz trace.

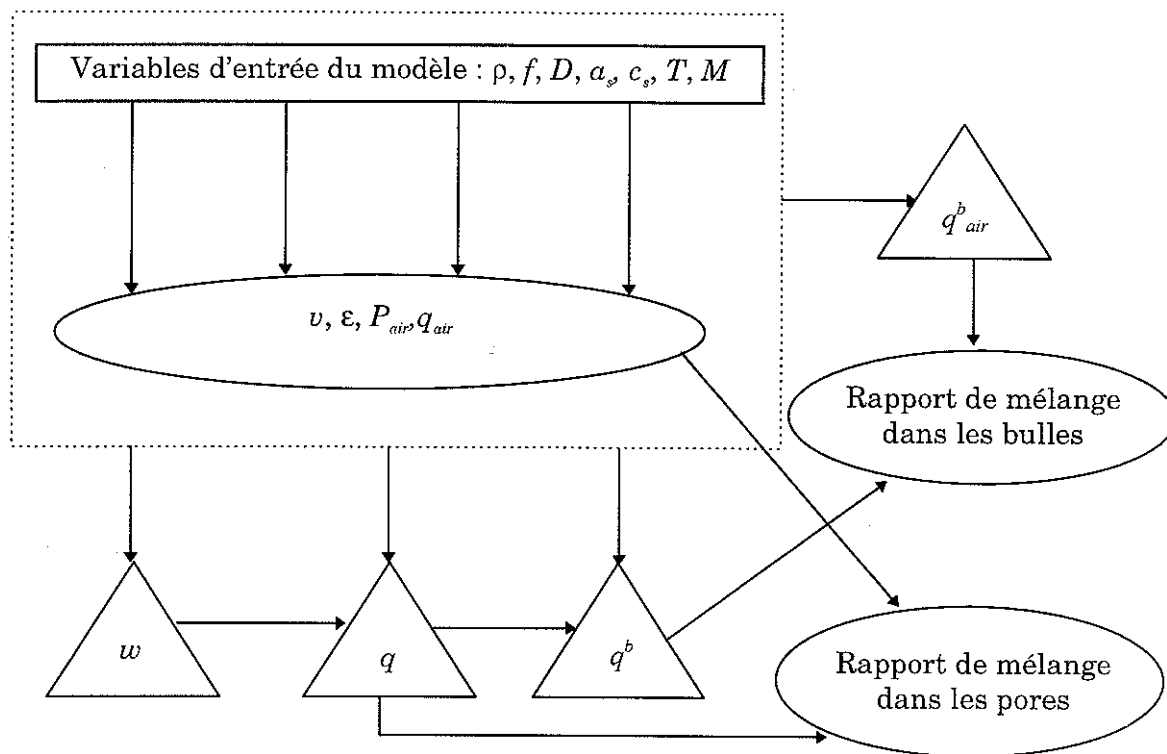


Figure III-4 : schéma de résolution du modèle de transport montrant l'imbrication dans le calcul des différentes variables. Dans le rectangle figurent les paramètres d'entrée du modèle, dans les ellipses les variables obtenues par calcul rapide (un rapport par exemple) et dans les triangles les quantités obtenues par résolution numérique d'une équation différentielle du système (III-17).

Les différences avec les deux modèles précédents (Schwander et al., 1993 ; Trudinger et al., 1997) sont les suivantes. Tout d'abord, le terme de piégeage d'air est explicitement estimé à l'aide d'un calcul de bilan d'air dans la porosité fermée. Ce calcul montre qu'un flux d'air ayant une vitesse différente de l'enfoncement des couches doit être pris en compte dans les équations. D'autre part, les conditions aux limites semblent moins artificielles et mieux

adaptées au problème. Enfin, la résolution numérique du système (III-17) se fait par une méthode de type différences finies, utilisant une discrétisation implicite en temps<sup>2</sup>.

### III.2.3. Méthodes numériques de résolution

Par souci de brièveté, on décrira uniquement la résolution des équations (III-17-c, d), qui sont les équations majeures du modèle de transport. Les solutions des trois autres équations différentielles sont estimées de manière analogue.

Le système (III-17-c) est réécrit en ordonnant les différents termes de l'équation aux dérivées partielles de la manière suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial q}{\partial z} + \beta q \quad (\text{III-18})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{Mg}{RT} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \alpha = \frac{\partial D}{\partial z} - D \left( \frac{Mg}{RT} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - w = \frac{\partial D}{\partial z} - D\chi - w \\ \beta = -D \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial D}{\partial z} \left( \frac{Mg}{RT} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \lambda + \frac{v\varepsilon}{f} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial w}{\partial z} \\ = -D \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial z} \chi - \lambda + \frac{v\varepsilon}{f} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{III-19})$$

Dans les équations suivantes, l'indice  $i$  se rapporte à la profondeur ( $i = 1$  en surface,  $i = nz$  au fond). La discrétisation implicite en temps de (III-18) s'obtient en considérant tous les termes du membre de droite au pas de temps  $j+1$  et la dérivée temporelle entre le pas  $j$  et le pas  $j+1$  :

$$\frac{q_i^{j+1} - q_i^j}{\Delta t} = D_i \frac{q_{i+1}^{j+1} - 2q_i^{j+1} + q_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} + \alpha_i \frac{q_{i+1}^{j+1} - q_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} + \beta_i q_i^{j+1} \quad (\text{III-20})$$

En regroupant les termes de même indice, on obtient un système tridiagonal. La résolution numérique de ce système permet d'obtenir les  $q^{j+1}$  en fonction des  $q^j$  :

<sup>2</sup> Les travaux précédents de Schwander (1993) et Trudinger et al. (1997) utilisent des schémas explicites, ce qui nécessite des pas de temps de quelques heures à peine. La discrétisation implicite permet de prendre des pas de temps de 1 an.



$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \frac{-D_1}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_1}{2\Delta x} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2D_1}{\Delta x^2} & \frac{-D_1}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_1}{2\Delta x} & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & 0 & \frac{-D_i}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_i}{2\Delta x} & \frac{1}{\Delta t} + \frac{2D_i}{\Delta x^2} & \frac{-D_i}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_i}{2\Delta x} & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_1^{j+1} \\
 \vdots \\
 q_i^{j+1} \\
 \vdots \\
 q_n^{j+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_1 c_s^{j+1} \\
 \vdots \\
 \frac{q_i^j}{\Delta t} \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (\text{III-21})$$

Des méthodes efficaces sont disponibles pour résoudre de tels systèmes d'équations (*e.g.* Press et al., 1992). L'avantage du schéma implicite, qui n'est pas le plus naturel au premier abord, est sa stabilité numérique pour de larges pas de temps, ce qui permet d'avoir un modèle direct rapide (en moyenne moins d'une seconde de temps CPU sur un HP9000 pour une simulation). On utilisera par la suite l'équation matricielle (III-21) sous deux formes différentes. Tout d'abord une forme réduite :

$$\underline{\mathbf{A}}\mathbf{q}^{(j+1)} - \underline{\mathbf{B}}\mathbf{q}^{(j)} = q_s^{j+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{q}}_s^{(j+1)} \quad (\text{III-22})$$

Et une forme développée :

$$q_{i+1}^{j+1} \cdot \sum_{k=i-1}^{i+1} a_{i,k} \cdot D_k + q_i^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} (a'_{i,k} \cdot D_k + b_i) + q_{i-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} a''_{i,k} \cdot D_k = q_i^j \quad (\text{III-23})$$

### III.3. RECONSTRUCTION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION

#### APPARENT

Nous avons montré dans la section précédente comment il est possible de déterminer les rapports de mélange dans le névé et la glace à partir des rapports de mélange atmosphériques et de la connaissance de certains paramètres physiques liés à la structure du névé. Parmi ces paramètres, le coefficient de diffusion est mal connu. Il n'existe pour le moment que peu de mesures, et celles-ci posent des problèmes expérimentaux (*cf.* thèse L. Arnaud). Une idée est donc de calibrer le modèle ci-dessus à l'aide d'un gaz trace dont le scénario atmosphérique est relativement bien contraint. L'enregistrement le plus long (*i.e.* une quarantaine d'années de

mesures dans l'atmosphère) connu étant celui du dioxyde de carbone, c'est ce dernier que l'on a choisi comme traceur pour ajuster le profil de coefficient de diffusion. Cet ajustement se fait par méthode inverse, en remarquant que les outils développés pour l'inversion d'un problème linéaire ne s'appliquent pas ici (par exemple, si l'on multiplie par 2 le coefficient de diffusion  $D$ , on n'a aucune raison de trouver un rapport de mélange en gaz trace deux fois plus important dans le névé).

### III.3.1. Principe de la méthode de contrôle

Le profil de coefficients de diffusion ne peut pas s'obtenir de façon immédiate (voir figure III-5). Il s'agit donc de mettre en place une méthode améliorée d'essais et d'erreurs afin de trouver le meilleur jeu de paramètres libres possible.

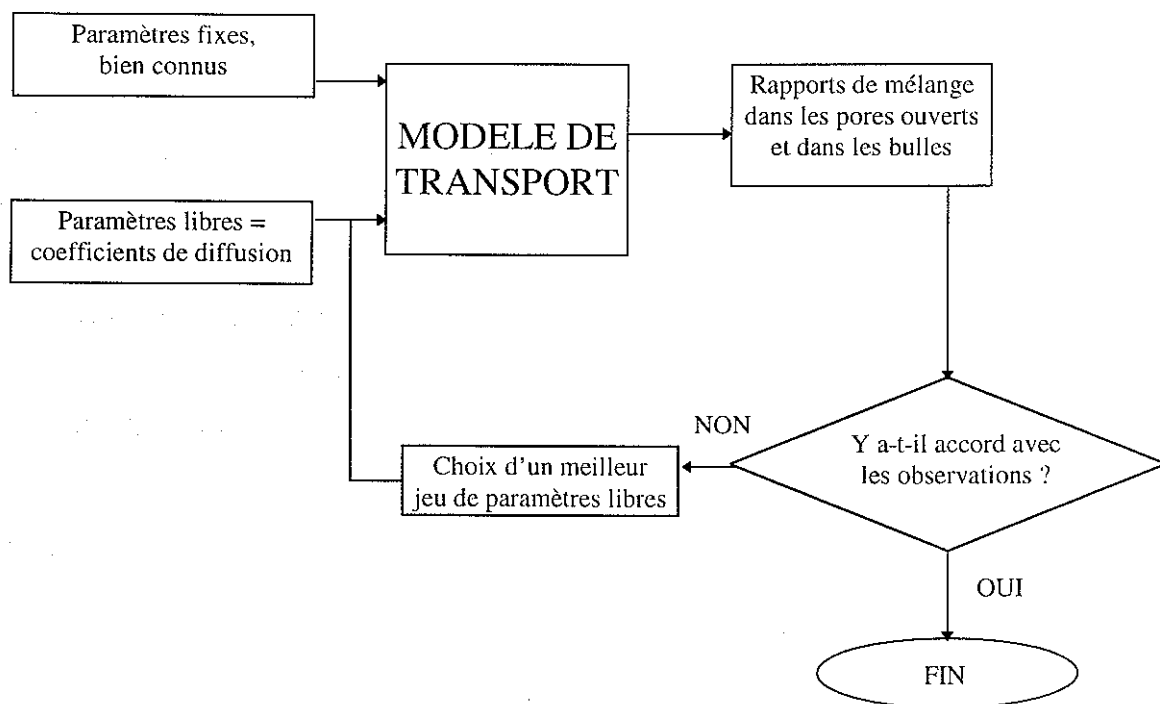


Figure III-5 : L'ajustement des coefficients de diffusion n'est pas une procédure directe.

Une des clés d'une telle méthode est l'évaluation de l'accord entre les rapports de mélange calculés et les observations. L'accord (ou plutôt le désaccord) modèle *vs* observations est assez bien représenté mathématiquement par la somme des écarts quadratiques entre les valeurs de rapport de mélange observées ( $d_{\gamma(i)}^{obs}$ ) et les valeurs prédites par le modèle aux points de mesure correspondants ( $d_{\gamma(i)}^{pre}$ ). Sans entrer dans le détail, cette fonction est bien adaptée au cas où le bruit sur les mesures est de type Gaussien.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d_{\gamma(i)}^{pre} - d_{\gamma(i)}^{obs})^2 \quad (\text{III-24})$$

C'est cette quantité  $J$  que nous essayons de minimiser afin de rendre le modèle de transport le plus fidèle possible aux observations.

### III.3.2. Principe de la minimisation par gradients conjugués

La plupart des algorithmes de minimisation multivariable utilisent l'information contenue dans le gradient de la fonction à minimiser pour atteindre rapidement la solution souhaitée. La connaissance d'une direction de descente permet en effet de restreindre la recherche à une région de l'espace des paramètres libres du modèle dans laquelle on sait qu'il existe de meilleures solutions que celle précédemment estimée. L'information fournie par le gradient permet donc de transformer un problème de minimisation à plusieurs variables en une succession de minimisations unidimensionnelles. On présente ici très rapidement l'algorithme des gradients conjugués qui est utilisé dans ce chapitre (pour plus d'informations, cf. Press et al., 1992). Cet algorithme a été inventé de manière indépendante par Hestenes et par Stiefel, qui ont ensuite collaboré pour l'amélioration de leur méthode en 1952.

On suppose que la fonction à minimiser est une forme quadratique symétrique définie positive (nous n'avons pas montré que l'index de performance défini par l'équation (III-24) était de ce type, mais, de façon générale, on admettra qu'une somme d'écartés quadratiques est proche d'une forme quadratique). Cette fonction s'écrit :

$$J(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{M}}\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}) - (\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{x}}) + c \quad (\text{III-25})$$

où  $\underline{\mathbf{M}}$  est une matrice symétrique définie positive de dimensions  $n \times n$ ,  $\underline{\mathbf{b}}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $c$  un scalaire,  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire<sup>3</sup> dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Le gradient de cette fonction quadratique est :

$$\nabla J(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{M}}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}} \quad (\text{III-26})$$

Cette équation permet l'observation suivante (qui sera utilisée pour l'étude de la dynamique de l'ice-shelf) : trouver les points critiques d'une forme quadratique (*i.e.* les points

<sup>3</sup> Le produit scalaire dans l'espace dual est une généralisation du produit scalaire classique utilisé par les physiciens. Il vérifie quatre propriétés élémentaires : la *positivité* (le produit scalaire d'un vecteur  $\underline{\mathbf{x}}$  par lui-même est positif ou nul, le produit scalaire étant nul si et seulement si  $\underline{\mathbf{x}}$  est nul), la *symétrie*  $((\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = (\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}))$ , la *linéarité*  $((\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}) = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) + (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}}))$  et la *continuité*  $((\alpha \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \alpha (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}))$  pour tout scalaire  $\alpha$ . En pratique, le produit scalaire  $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})$  est égal au produit matriciel  $\underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{y}}$ .

où son gradient s'annule, ce qui inclut les minima) est très similaire à la résolution d'un système linéaire. Le principe de l'algorithme est la minimisation le long de vecteurs de recherche  $\underline{r}_k$ , que l'on construit par récurrence. On part d'un vecteur  $\underline{x}_0$  arbitraire et le premier vecteur de recherche est donné par la direction du gradient de  $J$  correspondant à ce vecteur (si celui est non nul) : ceci permet de définir une meilleure estimation de la solution  $\underline{x}_1$ .

$$\begin{aligned} \underline{r}_0 &= \nabla J(\underline{x}_0) \\ r_0 &= \frac{(\nabla J(\underline{x}_0), \underline{r}_0)}{(\underline{M}\underline{r}_0, \underline{d}_0)} \\ \underline{x}_1 &= \underline{x}_0 - r_0 \underline{r}_0 \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

Si la nouvelle estimation ne correspond pas à un point critique de la fonction  $J$ , alors on construit de proche en proche les différents vecteurs de recherche à l'aide des formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(\nabla J(\underline{x}_k), \nabla J(\underline{x}_k))}{(\nabla J(\underline{x}_{k-1}), \nabla J(\underline{x}_{k-1}))} \\ \underline{r}_k &= \nabla J(\underline{x}_k) + \alpha_k \underline{r}_{k-1} \\ r_k &= \frac{(\nabla J(\underline{x}_k), \underline{r}_k)}{(\underline{M}\underline{r}_k, \underline{r}_k)} \\ \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_k - r_k \underline{r}_k \end{aligned} \quad (\text{III-28})$$

Différentes versions de cet algorithme existent, suivant la formule choisie pour  $\alpha_k$ . L'algorithme décrit par les récurrences (III-28) correspond à la forme Fletcher et Reeves (1964) des gradients conjugués, qui sera utilisée par la suite. Signalons que d'autres critères tels que celui de Hestenes et Stiefel (1952) ou Polack et Ribière (1969) ont été proposés. Dans le cas où la fonction à minimiser est une forme quadratique, les vecteurs de recherche construits par les équations (III-28) sont deux à deux orthogonaux et l'algorithme converge en  $n$  (ordre de la matrice  $\underline{M}$ ) itérations au plus. D'un point de vue numérique, cet algorithme utilise des opérations simples, à savoir :

- le produit d'une matrice par un vecteur,
- le produit scalaire de deux vecteurs,
- la somme d'un vecteur et d'un scalaire multiplié par un vecteur.

Dans le cas plus général qui nous intéresse, les vecteurs de recherche ne sont pas nécessairement orthogonaux mais la convergence de l'algorithme est assez rapide.

### III.3.3. Calcul du gradient de l'index de performance

Nous avons vu qu'un point important de la calibration des coefficients de diffusion était la détermination du gradient de  $J$  par rapport aux paramètres libres du modèle. Si  $J$  peut s'écrire sous la forme (III-25), alors le calcul du gradient est immédiat. Ce chapitre montre comment on peut calculer ce gradient, dans le cas où  $J$  est défini par (III-24).

#### III.3.3.1. Calcul numérique

Si l'on dispose de moyens de calcul puissants, la solution qui semble naturelle est d'estimer ce gradient comme une dérivée numérique classique à l'aide, par exemple, d'un schéma aux différences finies centré. Il existe deux inconvénients majeurs à ce type de calcul :

- Le choix du pas de discrétisation n'est pas aisé : comment le choisir suffisamment petit pour que l'approximation des différences finies soit cohérente, sans que les erreurs de troncatures affectent le résultat ? De plus il est tout à fait possible que la valeur optimale du pas dépende de la composante du gradient que l'on veut calculer.

- Si le modèle de transport comporte  $nz$  paramètres libres, le calcul du gradient par cette méthode nécessitera alors  $2 \times nz$  résolutions du modèle direct, ce qui peut vite devenir très contraignant, au niveau des temps de calcul.

Dans les parties suivantes, nous montrons comment il est possible de calculer le gradient de l'index de performance de manière exacte et plus rapide (le temps de résolution est alors indépendant du nombre de paramètres libres du modèle). Le calcul numérique du gradient sera donc utilisé uniquement comme un moyen de tester le calcul exact qui fait appel au formalisme mathématique plus élaboré, décrit ci-dessous.

#### III.3.3.2. L'équation adjointe

Dans un premier temps, il s'agit d'incorporer les équations du modèle direct de transport des gaz, comme contraintes de l'index de performance. Deux possibilités s'offrent alors à nous : on introduit les équations du modèle soit sous forme *continue* (i.e. donnée par le système (III-17)), soit sous forme *discrète* (i.e. donnée par (III-20)). Cette transformation se fait par l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange soit continu (fonction de l'espace et du temps), soit matriciel. Dans cette partie, nous verrons que ces deux approches, bien que faisant appel à des outils mathématiques un peu différents, sont équivalentes.

##### III.3.3.2.1. Version continue

La seule équation du modèle de transport où apparaissent explicitement les paramètres libres du modèle, c'est à dire les valeurs du coefficient de diffusion apparent, est (III-17-c) ou

(III-18) (qui est la même équation écrite différemment). C'est cette dernière que nous introduisons dans l'index de performance :

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( d_{\gamma(i)}^{pre} - d_{\gamma(i)}^{obs} \right)^2 \\
 &+ \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial q}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial q}{\partial z} - \beta q \right) \mu(z, t) . dz . dt \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} \int_0^{z_f} \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - mix^{obs} \right)^2 \mathbf{1}_{\gamma}(z) . dz \\
 &+ \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial q}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial q}{\partial z} - \beta q \right) \mu(z, t) . dz . dt
 \end{aligned} \tag{III-29}$$

Il faut remarquer que l'index de performance ainsi transformé est exactement le même que celui défini dans (III-24) car la double intégrale est nulle quel que soit le multiplicateur de Lagrange  $\mu(z, t)$ . Le passage de la somme discrète de l'index de performance à l'intégrale continue se fait par l'utilisation d'une fonction porte  $\mathbf{1}_{\gamma}(z)$  qui vaut 1 si la valeur de  $z$  correspond à la profondeur du point de mesure, au pas d'espace  $\Delta x$  près. En pratique, le multiplicateur de Lagrange n'est pas choisi de manière quelconque : il est au moins deux fois dérivable en  $z$  et une fois en temps. De plus, il est choisi de façon à satisfaire la condition d'Euler - Lagrange, associée au problème :

$$\frac{\partial J}{\partial q} = 0 \tag{III-30}$$

Nous verrons par la suite les implications de cette condition. La différentiation de l'index de performance par rapport à toutes les variables du problème donne :

$$\begin{aligned}
 \delta J = & \frac{1}{\Delta x} \int_0^{z_f} \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - d^{obs} \right) \frac{1_\gamma(z)}{q_{air}} \cdot \delta q(t=t_f) \cdot dz \\
 & + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial q}{\partial t} - D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial q}{\partial z} - \beta q \right) \delta \mu \cdot dz \cdot dt \\
 & + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \delta \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right) \cdot \mu \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} D \delta \left( \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \cdot \mu \cdot dz \cdot dt - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \delta D \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \cdot \mu \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \alpha \delta \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right) \cdot \mu \cdot dz \cdot dt - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \delta \alpha \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \mu \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \beta \delta q \cdot \mu \cdot dz \cdot dt - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \delta \beta \cdot q \cdot \mu \cdot dz \cdot dt
 \end{aligned} \tag{III-31}$$

L'intégrale double de la seconde ligne est nulle par construction ( $q$  est solution du modèle direct). D'autre part, les autres intégrales sont transformées à l'aide d'intégrations par parties<sup>4</sup>, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \delta J = & \frac{1}{\Delta x} \int_0^{z_f} \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - d^{obs} \right) \frac{1_\gamma(z)}{q_{air}} \cdot \delta q(t=t_f) \cdot dz \\
 & + \int_0^{z_f} [\mu \cdot \delta q]_0^{t_f} dz - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \cdot \delta q \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \left[ \mu D \cdot \delta \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right]_0^{z_f} dt + \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial(\mu D)}{\partial z} \delta q \right]_0^{z_f} dt - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial^2(\mu D)}{\partial z^2} \cdot \delta q \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \delta D \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \cdot \mu \cdot dz \cdot dt - \int_0^{t_f} [\mu \alpha \cdot \delta q]_0^{z_f} dt + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial(\mu \alpha)}{\partial z} \cdot \delta q \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \delta \left( \frac{\partial D}{\partial z} \right) - \chi \cdot \delta D \right) \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \mu \cdot dz \cdot dt \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \mu \beta \delta q \cdot dz \cdot dt + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \delta D + \chi \delta \left( \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right) \cdot \mu q \cdot dz \cdot dt
 \end{aligned} \tag{III-32}$$

En regroupant ensuite les différents termes, en intégrant à nouveau par parties pour éliminer les termes  $\delta \left( \frac{\partial D}{\partial z} \right)$ , et en supprimant les termes nuls, on obtient :

<sup>4</sup> L'idée de ce calcul est de transformer les différentielles des dérivées (spatiale et temporelle) de  $q$  en différentielle de  $q$ .

$$\begin{aligned}
 \delta J = & \int_0^{z_f} \left( \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - d^{obs} \right) \frac{\mathbf{1}_\gamma(z)}{q_{air} \Delta x} - \mu(t=t_f) \right) \delta q(t=t_f) dz \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial^2(\mu D)}{\partial z^2} - \frac{\partial(\mu \alpha)}{\partial z} + \mu \beta \right) \delta q dz dt \\
 & - \int_0^{t_f} \left[ \mu D \delta \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right]_0^{z_f} dt \\
 & + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \mu \delta D \left( -\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{\partial(\chi q)}{\partial z} \right) dz dt \\
 & - \int_0^{t_f} \left[ \mu \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \delta D \right]_0^{z_f} dt + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial q}{\partial z} \right) \delta D dz dt \\
 & + \int_0^{t_f} \left[ \mu \chi q \cdot \delta D \right]_0^{z_f} dt - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial(\mu \chi q)}{\partial z} \delta D dz dt
 \end{aligned} \tag{III-33}$$

Et finalement, après quelques simplifications :

$$\begin{aligned}
 \delta J = & \int_0^{z_f} \left( \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - d^{obs} \right) \frac{\mathbf{1}_\gamma(z)}{q_{air} \Delta x} - \mu(t=t_f) \right) \delta q(t=t_f) dz \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial^2(\mu D)}{\partial z^2} - \frac{\partial(\mu \alpha)}{\partial z} + \mu \beta \right) \delta q dz dt \\
 & - \int_0^{t_f} \left[ \mu D \delta \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right]_0^{z_f} dt \\
 & + \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial \mu}{\partial z} \delta D \left( \frac{\partial q}{\partial z} - \chi q \right) dz dt + \int_0^{t_f} \left[ \left( \chi q - \frac{\partial q}{\partial z} \right) \mu \delta D \right]_0^{z_f} dt
 \end{aligned} \tag{III-34}$$

C'est à ce stade du calcul que l'on fait appel à la condition d'Euler - Lagrange (III-30). Cette condition nous permet d'exprimer la différentielle de  $J$  en fonction des paramètres libres (coefficients de diffusion apparent) et du multiplicateur de Lagrange qui vérifie désormais l'équation adjointe du problème, à savoir :

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial^2(\mu D)}{\partial z^2} - \frac{\partial(\mu \alpha)}{\partial z} + \mu \beta = 0 \\
 \left( \frac{q(t=t_f)}{q_{air}} - d^{obs} \right) \frac{\mathbf{1}_\gamma(z)}{q_{air} \Delta x} - \mu(t=t_f) = 0 \\
 \mu(z=0) = 0 \\
 \mu(z=z_f) = 0
 \end{cases} \tag{III-35}$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique, similaire à l'équation de diffusion du modèle direct. Une analyse un peu plus approfondie montre qu'il s'agit d'une



équation de diffusion rétrograde<sup>5</sup> n'ayant aucune signification physique. Ceci est confirmé par le fait que la condition à la limite en temps n'est pas une condition *initiale*, mais une condition *finale* (en  $t = t_p$ ). Sous ces conditions, la différentielle de l'index de performance (III-34) se simplifie :

$$\delta J = \int_0^{t_f} \int_0^{z_f} \frac{\partial \mu}{\partial z} \delta D \cdot \left( \frac{\partial q}{\partial z} - \chi q \right) \cdot dz \cdot dt \quad (\text{III-36})$$

Le calcul exact du gradient de l'index de performance s'obtient donc par l'intermédiaire de la résolution d'une équation aux dérivées partielles, puis par le calcul d'une intégrale double.

### III.3.3.2.2. Version discrète

Si, au lieu d'introduire les équations du modèle direct sous leur forme continue, on les introduit sous forme discrète, on obtient des informations supplémentaires sur la façon optimale de discrétiser l'équation adjointe. Ceci se fait en utilisant quelques règles de calcul matriciel. On augmente donc l'index de performance d'une somme de termes nuls de façon tout à fait analogue à (III-29) :

$$J = \frac{1}{2} \left( \underline{\mathbf{d}}_\gamma^{(nt)} - \underline{\mathbf{d}}_\gamma^{obs} \right)^T \left( \underline{\mathbf{d}}_\gamma^{(nt)} - \underline{\mathbf{d}}_\gamma^{obs} \right) + \sum_{j=2}^{nt} \underline{\mu}^{(j)T} \left( \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{q}}^{(j)} - \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{q}}^{(j-1)} - \underline{\mathbf{q}}_s^{(j)} \right) \quad (\text{III-37})$$

$\underline{\mu}$  et  $\underline{\mathbf{d}}$  sont des vecteurs colonnes contenant respectivement les valeurs discrètes du multiplicateur de Lagrange et des rapports de mélange.  $\underline{\mathbf{A}}$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  sont les matrices qui ont été définies dans la section *Méthodes numériques de résolution*. Pour choisir de façon astucieuse le multiplicateur de Lagrange, on utilise, comme pour la version continue, la condition d'Euler - Lagrange, qui s'écrit ici :

$$\forall (t, j) \in \{1..nz\} \times \{1..nt\} \quad \frac{\partial J}{\partial q_i^j} = 0 \quad (\text{III-38})$$

<sup>5</sup> On peut faire cette constatation à chaque fois que l'on cherche l'équation adjointe d'une équation de diffusion : ceci provient des changements de signe induits par l'intégration par parties. Ainsi l'équation adjointe d'une équation de diffusion sous sa forme la plus simple  $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$  sera

$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}$  car l'on a dans le membre de gauche une dérivée au premier ordre et une dérivée seconde dans le membre de droite. Ce type d'équation n'a aucune signification physique, au sens où il serait vraiment étonnant qu'elle découle d'une équation de conservation : elle provient uniquement de la logique variationnelle de la minimisation.

Ce qui génère l'équation adjointe suivante<sup>6</sup> :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^T \underline{\mu}^{(j-1)} - \mathbf{B}^T \underline{\mu}^{(j)} = 0 \\ \mathbf{A}^T \underline{\mu}^{(m)} = \underline{\psi} \end{cases} \quad (\text{III-39})$$

On peut remarquer que, tout comme pour la version continue de l'équation adjointe, la condition à la limite en temps est une condition *finale*. Les composantes non - nulles du vecteur colonne  $\underline{\psi}$  sont fonction de la différence modèle *vs* observations :

$$\forall i \in \{1..n\} \quad \psi_{\gamma(i)} = \frac{a_{\gamma(i)}^{obs}}{q_{\gamma(i)air}} - \frac{q_{\gamma(i)}^{(nt)}}{q_{\gamma(i)air}^2} \quad (\text{III-40})$$

### III.3.3.2.3. Equivalence des deux approches

Les deux approches, continue et discrète, décrites précédemment, sont à peu près équivalentes, et les multiplicateurs de Lagrange trouvés dans les deux cas ont des valeurs identiques, aux erreurs numériques près. Si la première méthode permet sans doute d'appréhender la méthode variationnelle d'une façon plus physique, elle possède le principal inconvénient de ne pas tenir compte de la discrétisation du modèle direct. D'autre part, l'approche discrète nous montre que suivant le type de schéma numérique utilisé au départ (explicite ou implicite, par exemple) la résolution numérique de l'équation adjointe doit être modifiée. En effet, la discrétisation de l'adjoint n'est pas forcément égale à l'adjoint de la forme discrète qui nous intéresse ici.

### III.3.3.3. Détermination du gradient

La forme discrète du gradient de l'index de performance s'obtient en différenciant l'équation (III-37) :

$$\begin{aligned} \delta J &= \sum_{j=2}^{nt} \sum_{i=2}^{nz-1} \mu_i^j \sum_{k=i-1}^{i+1} \delta D_k (a_{i,k} q_{i+1}^j + a'_{i,k} q_i^j + a''_{i,k} q_{i-1}^j) \\ &= \sum_{j=2}^{nt} \sum_{i=2}^{nz-1} \mu_i^j \sum_{k=1}^3 \zeta_{i,j,k} \delta D_{i+k-2} \end{aligned} \quad (\text{III-41})$$

Après quelques manipulations sur les indices de sommation, en intervertissant les signes sommes et en imposant  $\zeta_{i,j,k}$  nuls pour  $i = 1$  et  $i = n$ , on obtient :

<sup>6</sup> Ce calcul repose sur la constatation simple suivante, qui découle des règles de base du calcul matriciel : soit  $\underline{\mathbf{a}}$  et  $\underline{\mathbf{b}}$  deux vecteurs colonne de dimension  $nz$ , on a alors (l'indice  $i$  indique la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur considéré) :  $\forall i \in \{1..nz\} \quad \frac{\partial}{\partial b_i} [\underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}}] = a_i$ . Pour s'en persuader, on pourra développer le scalaire  $\underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}}$ .

$$\delta J = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{nt} \sum_{k=1}^3 \mu_{i-k+2}^j \zeta_{i-k+2,j,k} \delta D_i \quad (\text{III-42})$$

Comme, d'autre part, on peut écrire la différentielle de l'index de performance sous la forme :

$$\delta J = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial D_i} \delta D_i \quad (\text{III-43})$$

On obtient donc, par identification, les composantes du gradient par rapport aux paramètres libres du modèle :

$$\frac{\partial J}{\partial D_i} = \sum_{j=2}^{nt} \sum_{k=1}^3 \mu_{i-k+2}^j \zeta_{i-k+2,j,k} \quad (\text{III-44})$$

#### III.3.3.4. En résumé...

Dans ce chapitre, nous avons fait la majeure partie du travail associé à la mise en place d'une méthode de contrôle. Nous avons appliqué des outils mathématiques classiques, sous forme de recette, afin d'extraire le gradient d'un index de performance qui nous est nécessaire pour atteindre rapidement une estimation correcte des coefficients de diffusion apparents. Le principal avantage de ce formalisme est la rapidité du calcul du gradient : la résolution de l'équation adjointe (III-39) nécessite à peu près le même nombre d'opérations que la résolution du modèle direct, puis chaque composante du gradient (III-44) s'obtient par une somme de  $3 \times nt$  termes.

### III.3.4. Problème de non - unicité de la solution

Si l'on applique l'algorithme précédent tel quel, en partant d'une supposition initiale sur les coefficients de diffusion apparents, on s'aperçoit de l'inadéquation de la méthode. Le coefficient de diffusion peut prendre des valeurs complètement irréalistes, souvent même supérieures à la valeur théorique du coefficient de diffusion moléculaire du dioxyde de carbone dans l'air, ce qui physiquement n'est pas acceptable (par exemple, a-t-on spécifié quelque part que le coefficient de diffusion ne pouvait pas être négatif?). Le plus surprenant est que ces profils sont tout à fait capables de reproduire les observations. L'algorithme de minimisation est donc correct, mais il n'a pas les informations nécessaires pour trouver la solution qui nous intéresse. Pour ajouter les informations supplémentaires nécessaires à la résolution du problème inverse, on pourrait se donner, comme dans le cas du chapitre II, une matrice de covariance *a priori* sur les paramètres à reconstruire. On pourrait également régulariser l'index de performance comme on le montrera dans la section suivante pour la reconstruction

du scénario atmosphérique. L'approche décrite ici est moins élégante, mais l'expérience semble montrer qu'elle donne des résultats satisfaisants. On impose au coefficient de diffusion :

- d'être positif,
- d'être une fonction croissante de la porosité ouverte (et, *a fortiori*, une fonction décroissante de la profondeur),
- de s'annuler au fond du névé, puisque la porosité ouverte devient nulle.

Toutes ces propriétés sont vérifiées si l'on effectue le changement de variables suivant<sup>7</sup> :

$$D_i = D_{ref} \sum_{l=i}^{nz-1} \exp(\varphi_l) \quad (\text{III-45})$$

$D_{ref}$  est un coefficient de diffusion de référence<sup>8</sup> pris égal à  $1 \text{ m}^2 \text{ a}^{-1}$ . Si maintenant on ajuste les  $\varphi_l$  et non plus les  $D_i$ , l'espace des solutions se restreint à des fonctions ayant les trois caractéristiques précédentes (leur nombre peut se restreindre à deux car la première est une conséquence directe des deux autres). Le gradient de l'index de performance par rapport aux nouveaux paramètres libres du modèle ( $\varphi_l$ ) s'obtient alors en combinant les équations (III-44) et (III-45).

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_i} = \exp(\varphi_i) \sum_{l=2}^i \sum_{j=2}^{nt} \sum_{k=1}^3 \mu_{l-k+2}^j \zeta_{l-k+2,j,k} \quad (\text{III-46})$$

Ce changement de variables comme ajout d'information *a priori* est une liberté que je me permet par rapport à la théorie des problèmes inverses. Il n'a pas été prouvé par exemple que la solution ainsi reconstruite était unique mais des reconstructions sur quatre sites (Vostok et DE08-2, Pôle Sud et GISP2 - seuls Vostok et DE08-2 figurent dans cette thèse) semblent être cohérentes à condition de ne pas sous estimer le bruit sur les données dans le critère d'arrêt. Cet ajout d'information *a priori* est un point qui devrait sans doute être réexaminé pour l'amélioration de la méthode, en utilisant par exemple les concepts décrits dans l'introduction de cette thèse ou, beaucoup mieux, ceux développés par Tarantola (1987).

<sup>7</sup> On utilise ici uniquement la positivité de l'exponentielle. On choisit l'exponentielle par rapport à une puissance ou une valeur absolue, car c'est une fonction positive, infiniment dérivable et ne possédant pas de points où la dérivée s'annule.

<sup>8</sup> L'exponentielle d'une quantité dimensionnelle n'est pas définie : c'est la seule raison pour laquelle on utilise  $D_{ref}$ .

### III.3.5. Résultats et analyse de l'erreur

L'algorithme de minimisation par gradients conjugués a été appliqué à la reconstruction du coefficient de diffusion de deux sites Antarctique, l'un à forte accumulation de surface (DE08) et l'autre à très faible accumulation (Vostok).

#### III.3.5.1. Paramètres fixes d'entrée et observations

La procédure d'ajustement nécessite la connaissance de paramètres bien connus :

- Un scénario CO<sub>2</sub> sur les deux cents dernières années. Des mesures directes dans l'atmosphère ont été effectuées de 1957 à nos jours (Keeling and Worth, 1994) et les valeurs antérieures proviennent d'un scénario qui a été proposé par Etheridge et al. (1996), basé sur des mesures dans les carottes DE08, DE08-2 et DSS. Il faut donc être conscient que le scénario antérieur à 1957 contient une incertitude beaucoup plus importante, et ce pour deux raisons. Premièrement la mesure en elle même est beaucoup plus imprécise (de l'ordre de 1.2 ppmv d'erreur, par rapport à environ 0.1 ppmv pour la mesure directe dans l'atmosphère). La seconde raison est que la déconvolution de ce signal « glace » a été effectuée à l'aide d'une méthode beaucoup moins élaborée que celle décrite ici, sans prendre en compte la diffusion dans le névé polaire.

- Les paramètres de structure du névé : profil de densité et porosité ouverte, la porosité totale et fermée se déduisant de ces profils à l'aide de formules simples. Ces paramètres ont été mesurés avec précision par J-M. Barnola dans les deux névés étudiés ici (DE08 et Vostok).

- Les données climatiques : température et accumulation de surface du site considéré.

- Les constantes physiques : constante des gaz parfaits, masse molaire du dioxyde de carbone, accélération de la pesanteur...

- La composition en dioxyde de carbone des prélèvements d'air effectués dans les deux névés. En ce qui concerne DE08, ces données ont été publiées par Trudinger et al. (1997). Les données non publiées de Vostok nous ont été aimablement fournies par E. Dlugokencky et P. Tans (NOAA/CMDL). Dans les deux cas l'incertitude sur ces mesures est d'environ 0.3 ppmv, ce qui prend en compte l'erreur chromatographique et l'erreur d'échantillonnage<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> La quantité d'air prélevée n'étant pas négligeable, la mesure n'est pas représentative d'une profondeur donnée, mais d'une zone de 1 à 2 mètres d'épaisseur, ce qui est une source supplémentaire d'incertitude.

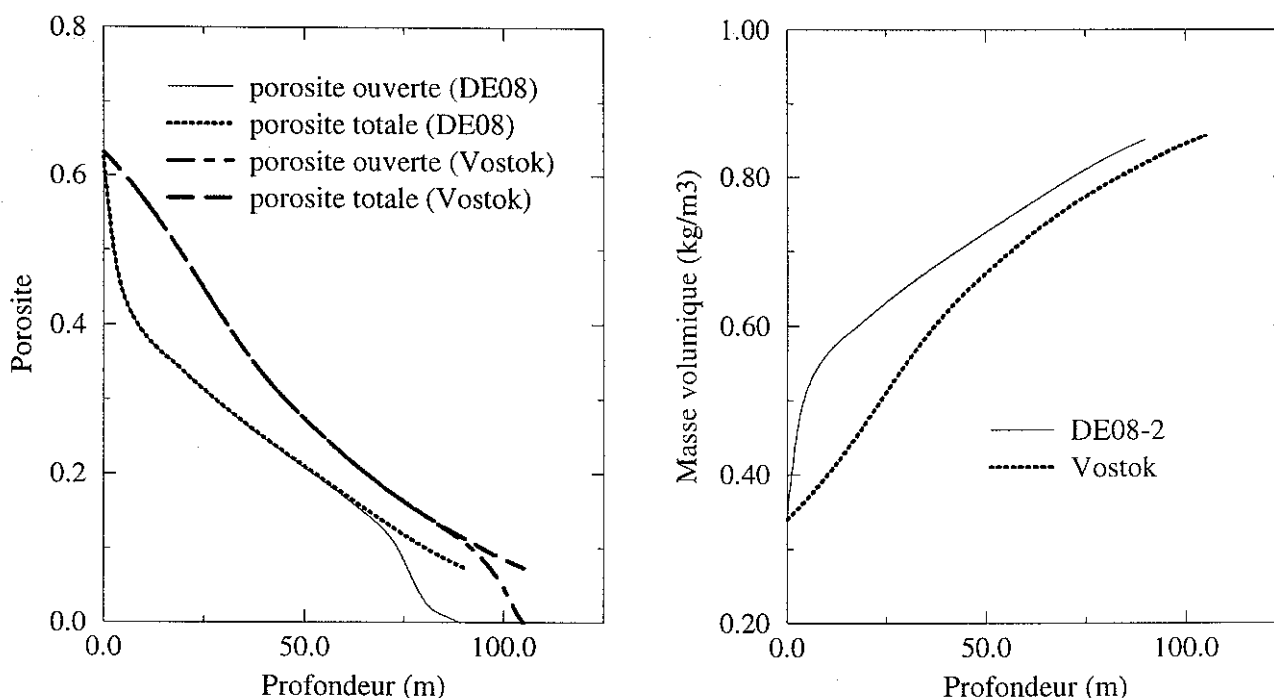


Figure III-6 : Profils de porosité ouverte et totale et de densité à Vostok et à DE08, utilisés comme entrées du modèle de transport de gaz. Ces courbes proviennent de splines effectuées sur les mesures de J-M Barnola (communication personnelle).

### III.3.5.2. Reconstructions

On utilise l'algorithme de minimisation par gradients conjugués à partir d'un état initial simple ( $\varphi_i$  nul pour tout  $i$ ) jusqu'à ce que l'accord modèle *vs* observations soit jugé acceptable. Dans la pratique on arrête la minimisation quand l'index de performance est inférieur à une valeur tabulée de la loi de Pearson, ce qui revient à faire un test du  $\chi^2$ , pour savoir si les valeurs données par le modèle et par les mesures ont des chances d'appartenir à la même distribution normale<sup>10</sup>. On peut être tenté de sous-estimer les erreurs sur les points de mesure, et de stopper la minimisation lorsque l'index de performance est très inférieur à la valeur du  $\chi^2$ : dans ce cas, l'algorithme peut donner des profils de coefficients de diffusion irréalistes (très fort gradient de coefficients de diffusion, par exemple). Un moyen plus élégant d'éviter ce problème de sur-interprétation des données serait l'utilisation d'une régularisation similaire à

<sup>10</sup> Le test du  $\chi^2$  est un test qui doit être utilisé afin de rejeter éventuellement une hypothèse. Le principe de base est de se fixer une probabilité de « condamner à tort un innocent », généralement prise égale à 5%. Si l'index de performance est supérieur à une valeur tabulée (loi de Pearson), alors on peut raisonnablement (*i.e.* à 5% près) dire que les observations et le modèle ne suivent pas la même distribution Gaussienne. Si, en revanche, la valeur de l'index est inférieure à la valeur tabulée, alors, en toute rigueur, on ne peut rien conclure... Dans la pratique (et ici en particulier) on suppose souvent que si l'hypothèse n'est pas rejetée, c'est qu'elle est acceptable.

celle utilisée pour la reconstruction de la composition atmosphérique. Néanmoins, au vu des profils de coefficients reconstruits, un tel ajout de complexité à la méthode ne semble (dans un premier temps) pas nécessaire. En choisissant un critère d'arrêt basé sur le test du  $\chi^2$ , la méthode converge vers une solution proche de l'état initial. Il est donc important de tester l'influence de l'état initial sur la reconstruction.

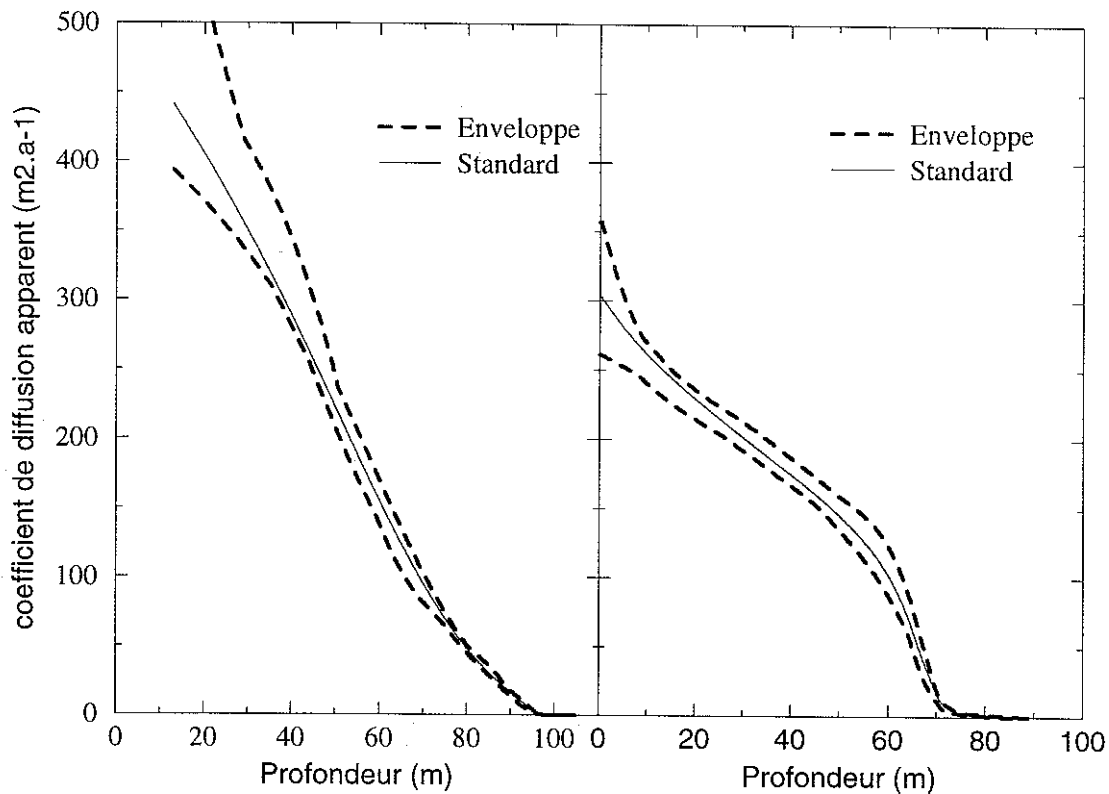


Figure III-7 : Profils standards et enveloppes de coefficients de diffusion reconstruits à l'aide de la méthode de contrôle, pour chacun des sites d'observation (Vostok et DE08-2).

### III.3.5.3. Erreur

Sur la figure III-7 sont également représentées des enveloppes autour des valeurs de coefficients de diffusion reconstruits. Ces enveloppes ont été obtenues en bruitant les mesures de  $\text{CO}_2$  dans le névé avec un bruit Gaussien<sup>11</sup> ayant un écart-type de 0.3 ppmv, ce qui correspond à l'erreur donnée par l'expérimentateur sur sa mesure. On réutilise alors l'algorithme de la méthode de contrôle dans les mêmes conditions, avec ces nouvelles « observations » ; on recommence 60 fois l'opération pour chaque site, avec différents champs

<sup>11</sup> En pratique, ce bruit Gaussien a été généré par la fonction FORTRAN (HP) GRAN : il ne s'agit pas à proprement parler d'une suite de nombres aléatoires, mais d'une suite de nombres « pseudo-aléatoires ».

d'observation bruités et différents états initiaux. On fait varier  $\phi$  de l'état initial de -1 à 1, ce qui représente des variations importantes sur le coefficient de diffusion (d'un facteur  $e^2$ , *i.e.* supérieur à 7). Des enveloppes contenant les valeurs inférieures et supérieures de tous les profils de coefficients de diffusion peuvent alors être construites. La largeur de ces enveloppes montre que le profil de coefficient de diffusion est relativement bien contraint, mais il n'est pas exclu que ceci soit un artefact dû au changement de variables (III-45).

### III.3.6. Discussion

Les reconstructions, bien que d'allures similaires, semblent montrer une dépendance du coefficient de diffusion en fonction du site. Ces différences sont dues à des effets de température et de pression (des formules existent pour corriger les coefficients de ces effets, *cf.* Arnaud, 1997), mais sans doute aussi aux différences de structure des deux névés étudiés (*i.e.* de tortuosité des pores).

Des mesures directes de coefficients de diffusion apparents dans le névé polaire ont été effectuées sur quelques sites (Schwander et al., 1988 ; Arnaud, 1997). L'expérience consiste à faire diffuser un gaz trace dans un gaz porteur (s'écoulant à différentes vitesses) à l'intérieur d'un échantillon de névé. Le coefficient de diffusion qui nous intéresse s'obtient alors par extrapolation des coefficients mesurés à vitesse nulle. Ces mesures sont loin d'être idéales :

- des problèmes importants sont liés aux « volumes morts » au niveau des raccords entre le porte-échantillon et les tuyaux d'alimentation en gaz
- l'interprétation des courbes de perçage mesurées par cette expérience nécessite également l'utilisation en mode inverse d'un modèle simple de diffusion.

## III.4. RECONSTRUCTION DE L'ATMOSPHERE DU PASSE

Le modèle de transport des gaz dans le névé est maintenant calibré à l'aide d'un gaz trace bien connu : le dioxyde de carbone. Le modèle peut alors s'appliquer à n'importe quel gaz trace atmosphérique n'ayant pas d'interactions avec  $H_2O$  solide, à condition de connaître le rapport du coefficient de diffusion de ce gaz par rapport à  $CO_2$  dans l'air (dans les conditions de température et de pression du névé). On peut en effet raisonnablement supposer que ce rapport est le même dans le névé et dans l'air : ceci revient à dire que le coefficient de diffusion apparent d'un gaz dans le névé est égal au produit d'une fonction dépendant uniquement du gaz trace considéré et d'une fonction spécifique au névé (c'est cette fonction spécifique qui a été calée dans la partie précédente).



### III.4.1. Modèle unitaire - fonction de transfert air - névé - glace

Il est possible de montrer que le modèle de transport des gaz dans le névé est *linéaire* par rapport aux rapports de mélange atmosphériques. On peut s'en rendre compte de la façon suivante (ce n'est pas une démonstration, mais un moyen simple de voir ce que signifie ici la linéarité) : si l'on multiplie par deux toutes les valeurs de rapports de mélange atmosphériques en dioxyde de carbone pendant les mille dernières années, alors on retrouvera des rapports de mélange en CO<sub>2</sub> deux fois plus importants dans le névé et dans les bulles de glace du haut de la carotte. Plus rigoureusement, cette linéarité peut être montrée par récurrence sur la forme discrétisée des équations de conservation du modèle direct. Mathématiquement, cette linéarité peut se traduire par une opération matricielle :

$$\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{d}} \quad (\text{III-47})$$

Le vecteur m contient les valeurs discrètes au cours du temps des rapports de mélange atmosphériques du gaz trace considéré, d contient les mesures de rapports de mélange effectuées dans le névé et dans la glace et G est un opérateur linéaire : on l'appellera abusivement fonction de transfert air - névé - glace. Cette matrice dépend du gaz par l'intermédiaire de sa masse molaire et de son rapport de coefficient de diffusion par rapport au dioxyde de carbone. Dans la pratique, on obtient cet opérateur linéaire en calculant numériquement la réponse du névé à un Dirac en temps du gaz considéré (c'est la réponse impulsionnelle du névé).

Les avantages que l'on tire de la réécriture du modèle sous forme unitaire sont nombreux : tout d'abord, il est numériquement beaucoup plus avantageux de faire une multiplication matricielle que de résoudre un système de quatre équations différentielles. Deuxièmement, il est intéressant de constater que les fonctions de transfert définissent entièrement la réponse d'un névé à un gaz donné : c'est la signature d'un névé à ce gaz. Le troisième avantage est lié à l'utilisation des méthodes inverses (voir introduction ou chapitre II).

L'analyse de coupes dans la fonction de transfert peut également s'avérer intéressante pour la comparaison quantitative des deux sites de prélèvement. Ainsi, si l'on considère l'intersection de la surface définie par la fonction de transfert avec une surface  $t = t_0$ , on obtient une courbe en cloche qui est la réponse du névé à une impulsion (Dirac) en  $t = t_0$ . La profondeur correspondant au maximum de la courbe en cloche est l'endroit où est localisée la composante principale de l'impulsion initiale qui a été transportée dans le névé à partir de  $t = t_0$ . D'autre part, la largeur de cette courbe en cloche est représentative de la largeur de la

zone affectée par l'impulsion initiale. Par exemple la composante principale d'une impulsion initiale de dioxyde de carbone en 1950 est à une profondeur de 125 m à DE08-2 et contribue à la concentration des bulles dans une zone allant de 100 m à 140 m environ.

On peut également considérer l'intersection des fonctions de transfert avec une surface  $z = z_0$ . On obtient alors à nouveau une courbe en cloche qui représente une distribution en âge de gaz à la profondeur  $z_0$  considérée. Si cette courbe a une largeur importante, ceci signifie que le signal que l'on retrouve à la profondeur  $z_0$  a été lissé par le névé, qui a moyenné les rapports de mélange atmosphériques sur plusieurs années. Cette caractéristique est très importante car un événement atmosphérique ayant une période caractéristique bien plus courte que la largeur de cette courbe en cloche a peu de chances d'être détecté dans les données de la carotte de glace. On peut donc vérifier à l'aide des fonctions de transfert qu'un site à forte accumulation tel que DE08-2 permet une reconstruction plus fine (ce névé a le potentiel de garder la trace d'événements atmosphériques beaucoup plus brefs) que les sites à faible accumulation comme Vostok qui permettent de remonter très loin dans le temps mais de façon peu précise. L'intersection d'une fonction de transfert avec une surface  $z = z_0$  peut également être interprétée comme une courbe de « perçage », c'est à dire la réponse temporelle à une impulsion initiale (l'axe des temps doit alors être inversé). L'asymétrie des courbes en cloche, beaucoup plus prononcée pour le site de Vostok que pour DE08-2 est due à la vitesse du « courant d'air » dans les pores ( $w$ ). Ce phénomène est par exemple décrit dans une étude analytique de Levenspiel et Smith (1957) : la distorsion de la réponse temporelle lorsqu'on étudie les phénomènes de diffusion dans un gaz porteur augmente avec le nombre de Peclet réciproque (ici,  $D/wz_f$ ). Les coefficients de diffusion et la profondeur du close-off sont à peu près égaux pour les deux sites, donc la distorsion dépend essentiellement de la vitesse du gaz porteur (c'est à dire l'air dans notre cas). Cette caractéristique est donc en accord avec les résultats du modèle.

Une dernière information fournie par la fonction de transfert est l'histoire gaz contenue dans la porosité ouverte du névé, c'est à dire le temps maximum qu'un gaz est capable de rester dans la porosité ouverte, avant d'être piégé dans les bulles. Ce point est crucial car il justifie le raisonnement utilisé pour la calibration du coefficient de diffusion apparent. En particulier, on s'aperçoit que « l'histoire dioxyde de carbone » du névé de DE08-2 est d'environ 30 ans et de l'ordre de 40 ans pour les 95 premiers mètres du névé de Vostok (mais plus de 200 ans si l'on considère les 105 m du névé). Il faut être conscient que le coefficient de diffusion reconstruit dans les derniers mètres du névé de Vostok contient certainement une plus grande incertitude car le scénario  $\text{CO}_2$  utilisé n'est très précis que pour les quarante dernières années (car provenant de mesures directes atmosphériques).

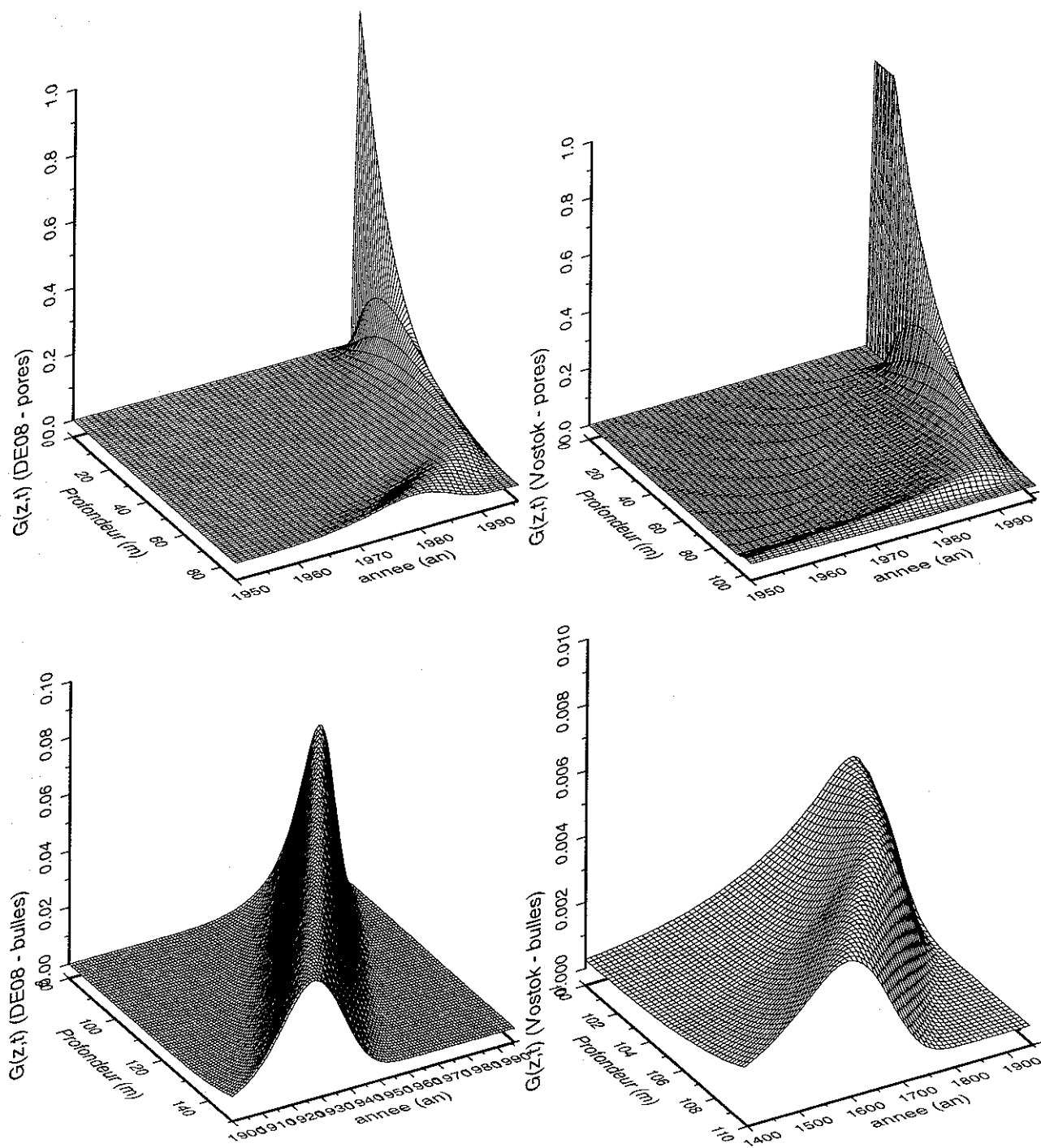


Figure III-8 : Fonction de transfert air - neige - glace pour le dioxyde de carbone pour les pores de Vostok (haut, droite) et DE08 (haut, gauche) et dans les bulles à Vostok (bas, gauche) et DE08 (bas, droite).

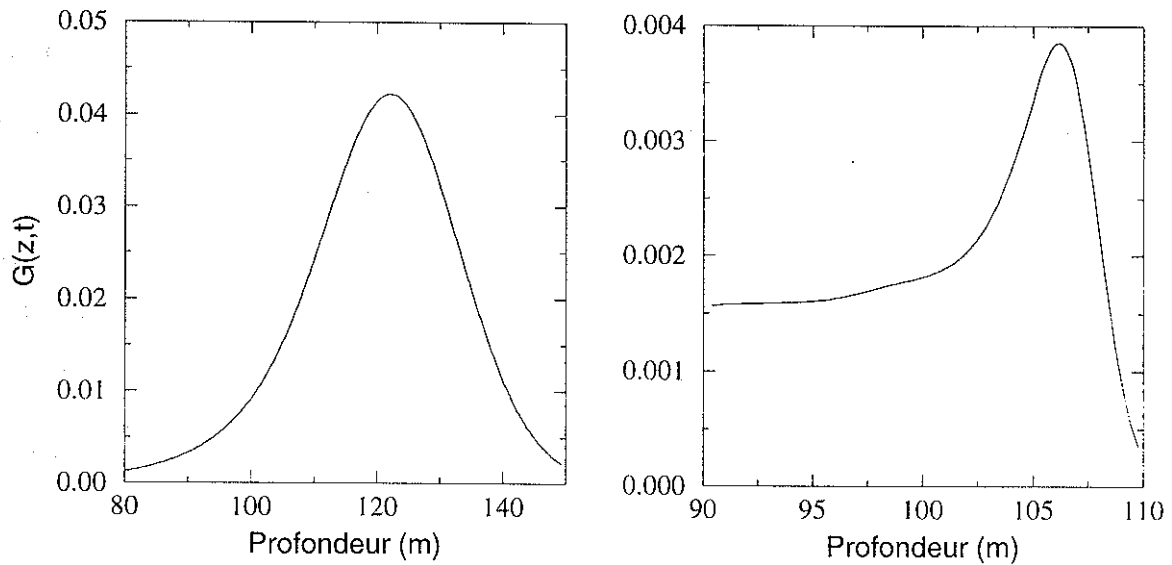


Figure III-9 : intersection de la fonction de transfert  $\text{CO}_2$  bulles avec  $t = \text{constante } t_0$  (a) pour DE08-2 et  $t_0 = 1950$ , (b) pour Vostok et  $t_0 = 1750$ . Ces courbes représentent la réponse spatiale du système à une impulsion initiale en  $t_0$ .

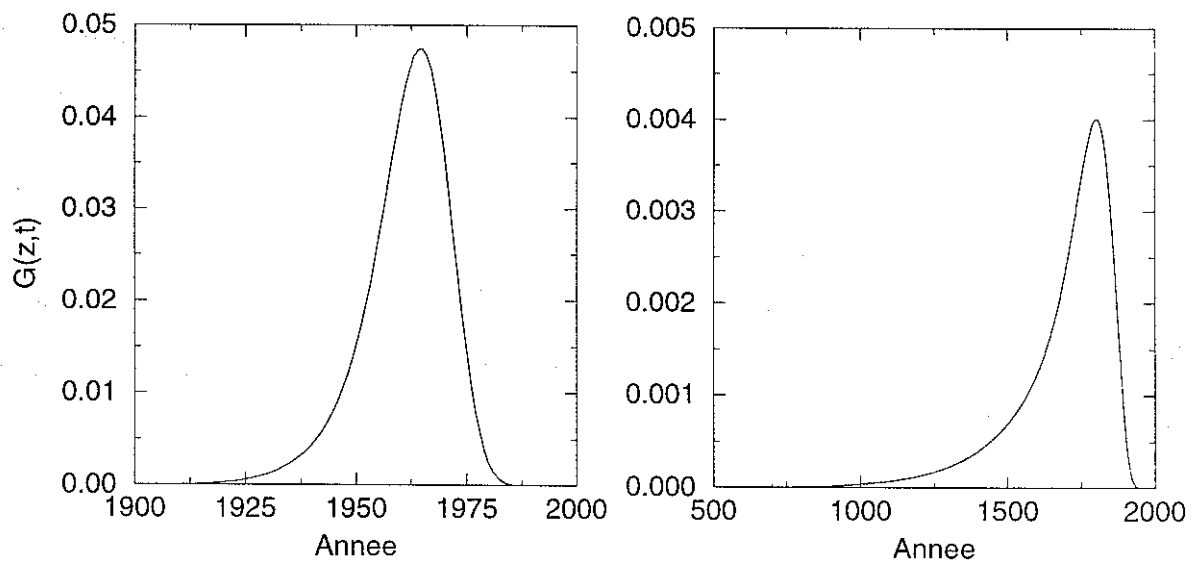


Figure III-10 : intersection de la fonction de transfert  $\text{CO}_2$  bulles avec  $z = \text{constante } z_0$  (105m) pour (a) DE08-2 (b) Vostok. Ces courbes peuvent être interprétées soit comme une distribution d'âge en  $\text{CO}_2$  à la profondeur  $z_0$ , soit comme une courbe de perçage à la profondeur  $z_0$  (l'axe des temps doit alors être renversé,  $t$  devenant  $1996-t$ ).

### III.4.2. Principe de l'inversion

Comme pour la reconstruction du coefficient de diffusion apparent, le principe de base de l'inversion est de minimiser la somme des écarts quadratiques entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs effectivement observées. Cette procédure est adaptée au cas où l'erreur sur les mesures est de type Gaussien, ce que l'on suppose ici. L'index de performance que l'on essaie de minimiser est donc le suivant :

$$I_s = (\mathbf{Gm} - \mathbf{d}^{obs})^T \mathbf{W}_e (\mathbf{Gm} - \mathbf{d}^{obs}) \quad (\text{III-48})$$

$\mathbf{d}^{obs}$  est un vecteur colonne contenant les valeurs de rapports de mélange observés dans le névé et dans la glace,  $\mathbf{W}_e$  est une matrice diagonale de pondération sur les points de mesure. Ces poids sont pris égaux à l'inverse des variances supposées sur les points de mesure. Ceci permet de donner plus d'importance aux observations effectuées dans le névé car elles sont plus précises que dans la glace (d'un facteur 4 environ en ce qui concerne le  $\text{CO}_2$ ).

### III.4.3. Non-unicité de la solution reconstruite, fonction de régularisation

#### III.4.3.1. Un problème mal posé

On veut reconstruire un scénario atmosphérique sur les cinquante dernières années environ, ce qui signifie cinquante paramètres à reconstruire si l'on désire une valeur par an. Or, on ne dispose que de vingt à trente mesures dans le névé et la glace : il y a donc plus de paramètres à reconstruire que de données, ce qui pose une fois de plus le problème de non-unicité de la reconstruction. Pour lever la sous-détermination et obtenir une réponse approximative, il faut ajouter les informations manquantes. Une procédure classique (Menke, 1989) pour ajouter ces informations au problème est de minimiser un estimateur des moindres carrés régularisés<sup>12</sup>. Ainsi, au lieu de chercher un des minima de  $I_s$ , on cherche le minimum de  $I_s + \kappa^2 L$ ,  $L$  étant une norme artificielle destinée à choisir la solution la plus simple parmi l'infinité de solutions reproduisant les observations et  $\kappa^2$  un facteur de pondération destiné à donner plus ou moins d'importance à cette norme.

On choisit la rugosité du scénario atmosphérique reconstruit comme norme  $L$  caractérisant la simplicité de la solution : un scénario sera considéré comme simple s'il oscille peu. Le choix d'une telle norme de régularisation est lié aux éléments que l'on connaît sur l'histoire du gaz à reconstruire : dans le cas du méthane, on se doute que l'amplitude des variations est restée modérée, compte tenu du cycle du méthane et des échelles de temps que l'on considère. Toutefois, le choix d'une autre norme est envisageable et la méthode d'inversion peut alors être facilement adaptée à d'autres régularisations (platitude du scénario, accord

<sup>12</sup> Noter que la technique d'inversion suggérée dans ce chapitre est différente de l'inverse stochastique utilisée pour l'étude de la paléothermométrie à Vostok. Il s'agit ici d'une vision du problème inverse un peu différente de celle de Tarantola (1987).

avec les observations récentes,...). La rugosité d'une solution est décrite par la norme suivante :

$$L = \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\mathbf{W}}_m \underline{\mathbf{m}} \quad (\text{III-49})$$

avec

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-50})$$

Il est alors possible de montrer (Menke, 1989) que le minimum de  $I_s + \kappa^2 L$  s'obtient par les opérations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{m}}^{est} &= \left[ \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}_e \underline{\mathbf{G}} + \kappa^2 \underline{\mathbf{W}}_m \right]^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \underline{\mathbf{W}}_e \underline{\mathbf{d}}^{obs} \\ &= \underline{\mathbf{W}}_m^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T \left[ \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{W}}_m^{-1} \underline{\mathbf{G}}^T + \kappa^2 \underline{\mathbf{W}}_e^{-1} \right]^{-1} \underline{\mathbf{d}}^{obs} \\ &= \underline{\mathbf{G}}^{-g} \underline{\mathbf{d}}^{obs} \end{aligned} \quad (\text{III-51})$$

Dans l'équation précédente, qui donne deux formulations équivalentes pour atteindre une estimation des rapports de mélange atmosphériques, apparaît l'inverse d'une matrice symétrique. Il est possible que cette matrice soit numériquement singulière pour certaines valeurs du facteur de pondération  $\kappa^2$ , et dans ce cas il faudra augmenter la valeur de  $\kappa^2$  afin de rendre la matrice inversible. Des algorithmes efficaces sont disponibles pour inverser ce type de matrice : on utilise la décomposition de Choleski (*i.e.* la matrice est mise sous la forme  $\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{U}}$ ,  $\underline{\mathbf{U}}$  étant une matrice triangulaire supérieure) pour l'inversion.  $\underline{\mathbf{G}}^{-g}$  apparaissant dans (III-51) est aussi appelée l'inverse généralisée de  $\underline{\mathbf{G}}$  par analogie aux matrices inverses classiques. Il ne faut toutefois pas oublier que cette matrice inverse généralisée dépend d'une norme artificielle  $L$  et de l'importance qu'on lui donne  $\kappa^2$ .

## III.4.3.2. Influence de la régularisation

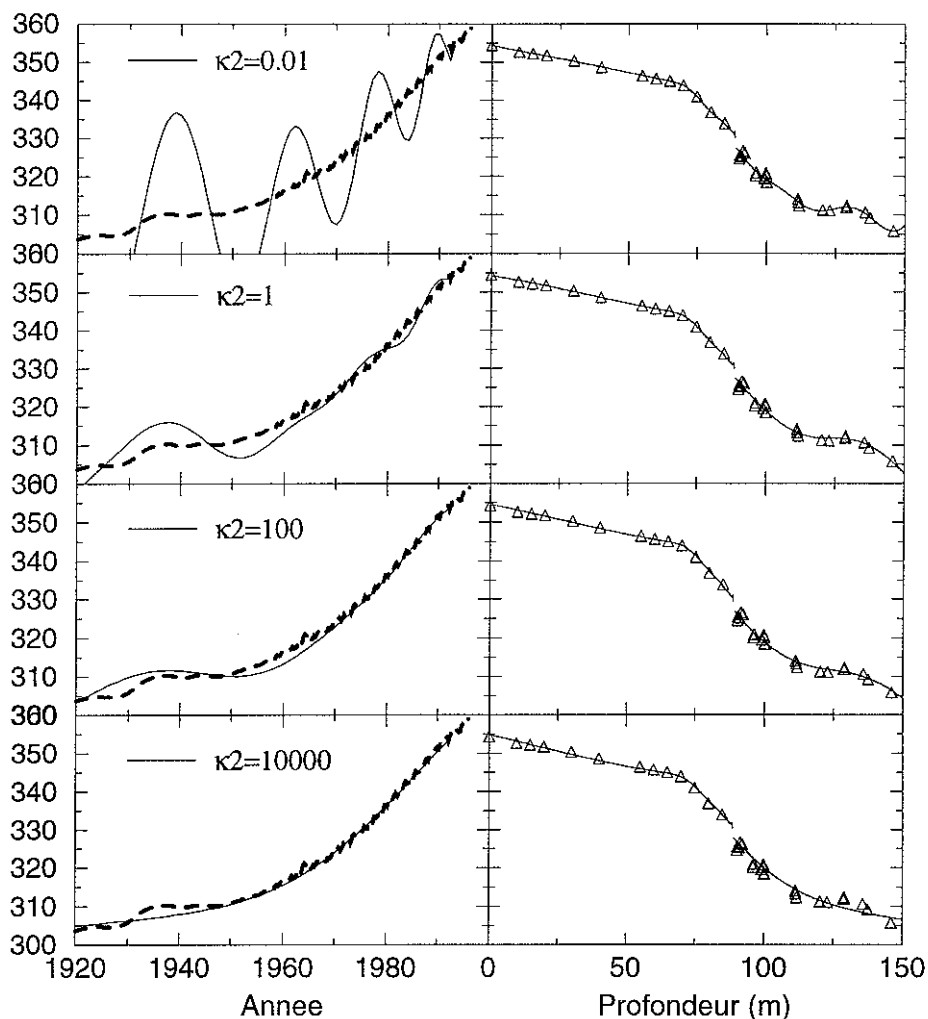


Figure III-11 : reconstruction en CO<sub>2</sub> atmosphérique en ppmv (à gauche) effectuée en utilisant (III-51) et comparaison entre les valeurs de rapports de mélange prédits par le modèle et les observations de DE08-2 (à droite). Quatre valeurs différentes de  $\kappa^2$  sont utilisées pour montrer l'effet de la norme artificielle introduite dans l'index de performance. Si  $\kappa^2$  est choisi trop petit, les sorties du modèle et les données sont en très bon accord, mais le scénario reconstruit présente des oscillations peu réalistes. Si, au contraire,  $\kappa^2$  est choisi trop grand, le scénario reconstruit est lisse, mais les valeurs prédites sont trop éloignées des mesures (le test du  $\chi^2$  n'est pas satisfait pour  $\kappa^2=10000$ ). En tirets (gauche) est tracé le scénario de référence utilisé pour calibrer le coefficient de diffusion apparent (c'est ce scénario que l'on devrait reproduire).

Dans un premier temps, nous avons essayé de reconstruire le scénario CO<sub>2</sub> à partir des données névé et glace de DE08-2. Bien entendu, il s'agit d'un exercice académique puisque le scénario CO<sub>2</sub> est bien connu sur cette période, et qu'il a été utilisé pour la calibration du coefficient de diffusion : ces simulations ne peuvent donc être considérées que comme un test de validité de la méthode et non comme une véritable reconstruction. Les opérations matricielles de l'équation (III-51) ont été effectuées pour plusieurs valeurs de  $\kappa^2$ .

Cette figure illustre les difficultés liées à la non-unicité de la solution reconstruite. Ces difficultés ne sont pas spécifiques à la méthode inverse utilisée, mais sont inhérentes au problème inverse de reconstruction de l'atmosphère à partir des bulles. Les scénarios correspondant à  $\kappa^2 = 0.01$ , 1 et 100 sont tous trois capables de reproduire de façon satisfaisante les mesures dans le névé et la glace. Afin de choisir la solution (c'est à dire la valeur optimale de  $\kappa^2$ ) parmi l'infinité proposée, on applique le principe du rasoir d'Occam (afin d'éviter une sur - interprétation des données), en supposant qu'un scénario simple est un scénario lisse. On choisira donc  $\kappa^2$  de façon à retenir le scénario soit le plus lisse possible et que les sorties du modèle de transport reproduisent les mesures de manière satisfaisante. Toutes les reconstructions atmosphériques figurant dans la suite de cette thèse sont présentées pour un  $\kappa^2$  maximal, tel que l'accord modèle - observations soit dans les critères du test du  $\chi^2$  (ici  $\kappa^2 = 100$ ).

### III.4.4. Analyse de l'erreur

Dans le cas des problèmes inverses linéaires, on dispose de deux outils d'analyse de la précision de la reconstruction : la matrice de covariance et la matrice de résolution du modèle.

#### III.4.4.1. Matrice de covariance

Lorsque l'on interprète des résultats expérimentaux, on travaille souvent, non pas avec une seule mesure, mais avec un jeu de données ( $d_1, d_2, \dots, d_n$ ). On a alors besoin de quantifier la probabilité qu'a un jeu de variables aléatoires d'avoir une valeur donnée. La distribution jointe  $P(\underline{\mathbf{d}})$  est la probabilité que la première donnée soit dans le voisinage de  $d_1$ , que la seconde soit dans le voisinage de  $d_2$ , et ainsi de suite... Si les données sont *indépendantes*, alors cette distribution jointe se réduit au produit des distributions individuelles. Dans notre cas, les mesures dans le névé et la glace peuvent raisonnablement être considérées comme indépendantes, mais il y a de fortes chances pour que les valeurs reconstruites de rapport de mélange atmosphérique dépendent les unes des autres. Il est alors pratique d'utiliser les matrices de covariances (écrites ici pour un vecteur de l'espace des données) :

$$[\text{cov } \underline{\mathbf{d}}]_{i,j} = \int_D (d_i - \langle d \rangle_i) (d_j - \langle d \rangle_j) P(\underline{\mathbf{d}}) d\underline{\mathbf{d}} \quad (\text{III-52})$$

Les éléments diagonaux de la matrice de covariance sont une mesure de la largeur de la distribution des données, et les éléments non-diagonaux indiquent le degré avec lequel les paires de données sont corrélées. La matrice de covariance des paramètres du modèle dépend à la fois de l'erreur sur les données (c'est à dire la matrice de covariance sur les données qui ici se réduit à une matrice diagonale) et de la manière dont cette erreur est transmise des



données aux paramètres du modèle. Cette transmission de l'erreur ne dépend que de la fonction de transfert et de l'inverse généralisée, mais pas des données. On peut montrer que la covariance sur les paramètres reconstruits s'obtient à l'aide des opérations matricielles suivantes (Menke, 1989) :

$$[\text{cov } \underline{\mathbf{m}}] = \underline{\mathbf{G}}^{-s} [\text{cov } \underline{\mathbf{d}}] (\underline{\mathbf{G}}^{-s})^T \quad (\text{III-53})$$

Il faudra faire attention à ne pas confondre covariance et covariance *unitaire* qui peut être utilisée dans certaines études. La covariance unitaire est normalisée et caractérise le degré d'amplification de l'erreur des données sur les paramètres reconstruits. Quand on veut comparer quantitativement les erreurs sur deux reconstructions (effectuées à l'aide de données de sites différents par exemple), il est délicat de travailler directement sur les matrices covariances. Une mesure couramment utilisée (Menke, 1989) pour comparer ces matrices covariances est la suivante (*size*) :

$$\text{size}([\text{cov } \underline{\mathbf{m}}]) = \left\| [\text{var } \underline{\mathbf{m}}]^{1/2} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{nt} [\text{cov } \underline{\mathbf{m}}]_{ii} \quad (\text{III-54})$$

Un des inconvénients d'une telle mesure est qu'elle ne prend pas en compte les éléments non-diagonaux de la matrice de covariance.

#### III.4.4.2. Matrices de résolution

La matrice de résolution du modèle a pour but de déterminer si les paramètres du modèle peuvent être estimés (ou *résolus*) de manière indépendante. Pour répondre à cette question, on considère que les vraies valeurs des paramètres  $\underline{\mathbf{m}}^{true}$  (qui ne sont connues que des dieux) vérifient également :

$$\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{m}}^{true} = \underline{\mathbf{d}}^{obs} \quad (\text{III-55})$$

Il est alors intéressant de savoir si l'estimation proposée par la méthode inverse, c'est à dire par l'équation (III-51), est voisine ou non de la vraie valeur des paramètres. Pour le savoir, on combine (III-51) et (III-55), ce qui donne :

$$\underline{\mathbf{m}}^{est} = \underline{\mathbf{G}}^{-g} \underline{\mathbf{d}}^{obs} = \underline{\mathbf{G}}^{-g} [\underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{m}}^{true}] = [\underline{\mathbf{G}}^{-g} \underline{\mathbf{G}}] \underline{\mathbf{m}}^{true} = \underline{\mathbf{R}}^{mod} \underline{\mathbf{m}}^{true} \quad (\text{III-56})$$

Si  $\underline{\mathbf{R}}^{mod}$  est la matrice identité (ce qui arrive rarement), alors chaque paramètre du modèle est déterminé de façon unique. En règle générale,  $\underline{\mathbf{R}}^{mod}$  est différente de  $\underline{\mathbf{I}}$  et les paramètres estimés sont une pondération des vraies valeurs. De même que pour la matrice de covariance, la résolution du modèle ne dépend que de la fonction de transfert et de l'inverse généralisée (qui elle-même ne dépend que de la fonction de transfert et des informations *a priori* ajoutées au problème). Cette particularité est très intéressante car la matrice de résolution peut être calculée avant même de faire les mesures (parfois coûteuses) de

composition des gaz du névé Antarctique (à condition toutefois de connaître la structure du névé et la météorologie du site, *i.e.* température et accumulation de surface).

Le même type d'outils existe pour savoir si les données peuvent être prédites (ou *résolues*) de manière indépendante : il s'agit de la matrice de résolution des données  $\underline{\mathbf{N}}$ . Supposons que nous ayons réussi à trouver des estimations des paramètres du modèle à l'aide d'une inverse généralisée, on peut se demander rétrospectivement avec quelle précision ces estimations de paramètres sont capables de reproduire les données :

$$\underline{\mathbf{d}}^{pre} = \underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{m}}^{est} = \underline{\mathbf{G}}[\underline{\mathbf{G}}^{-g}\underline{\mathbf{d}}^{obs}] = [\underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{G}}^{-g}]\underline{\mathbf{d}}^{obs} = \underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{d}}^{obs} \quad (\text{III-57})$$

Si  $\underline{\mathbf{N}}$  est la matrice identité, alors les valeurs prédites sont égales aux valeurs observées. Ainsi, à partir de la fonction de transfert et des informations *a priori* uniquement, il est possible de connaître la pondération qui lie les sorties du modèle direct aux rapports de mélange observés.

De même que pour l'analyse des covariances, il est utile (pour comparer la résolution de deux sites de prélèvement, par exemple) d'avoir une mesure des matrices résolution. La mesure de la résolution que l'on choisit est la « propagation » (*spread*) de la matrice de résolution au sens de Backus et Gilbert (1967, 1968) :

$$spread(\underline{\mathbf{R}}^{mod}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nt} (i-j)^2 [R_{ij}^{mod}]^2 \quad (\text{III-58})$$

Noter que cette mesure ne prend en compte que les éléments non-diagonaux de la matrice.

### III.4.4.3. Compromis entre variance et résolution

Dans les outils (covariance et résolution) qui ont été introduits ci-dessus apparaît explicitement l'inverse généralisée  $\underline{\mathbf{G}}^{-g}$ . Rappelons que cette inverse dépend de la quantité d'information *a priori* ajoutée au problème, via un paramètre  $\kappa^2$ . Résolution et variance sont donc étroitement liées par l'intermédiaire de ce paramètre. Prenons le cas d'une reconstruction effectuée avec un  $\kappa^2$  petit : la régularisation est faible, ce qui permet théoriquement de détecter des événements atmosphériques de courtes périodes (la résolution est donc très bonne). Seulement, une telle approche conduit à un scénario oscillant (voir figure III-11), parfois peu réaliste et donc incertain (forte variance sur les points). Ceci est une règle très générale des problèmes inverses linéaires : on ne peut augmenter la résolution d'une reconstruction qu'au prix d'une augmentation de la variance (ou l'erreur) sur ces estimations et réciproquement.

Au lieu de choisir le jeu optimal de paramètres grâce à un compromis entre adéquation modèle observations et simplicité de ce jeu de paramètres, il est également possible de minimiser une combinaison de la taille de la matrice de covariance et de la « propagation » de la matrice résolution du modèle. L'index de performance à minimiser est alors de la forme :

$$\alpha'.spread(\underline{\mathbf{R}}^{mod}) + (1-\alpha').size([\text{cov } \underline{\mathbf{m}}]) \quad (\text{III-59})$$

Ces approches sont pratiquement équivalentes (Menke, 1989) : dans la première (moindres carrés régularisés) il s'agit de trouver un compromis entre oscillations raisonnables du scénario et bon accord avec les observations et dans la seconde, le compromis se fait directement entre variance et résolution du modèle. Le choix final de la reconstruction se fait dans les deux cas par l'intermédiaire d'un paramètre, soit  $\kappa^2$ , soit  $\alpha'$ .

### III.4.5. Reconstruction du méthane atmosphérique à DE08-2 et Vostok

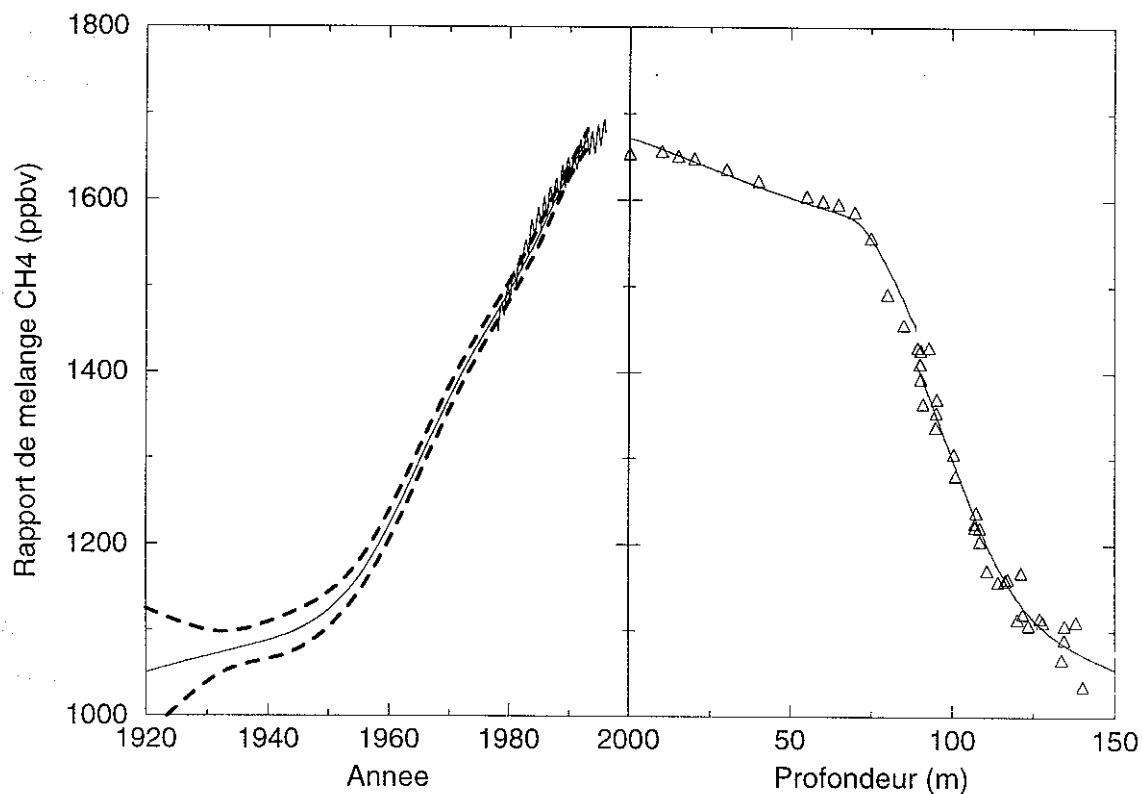


Figure III-12 : Reconstruction standard et enveloppes (calculées à partir de la matrice de covariance) du scénario en méthane atmosphérique à DE08 (gauche) et accord entre les sorties du modèle direct et les points mesurés sur ce site (à la fois dans le névé et dans la glace). Les mesures directes de méthane atmosphérique (depuis 1983) sont superposées au scénario reconstruit, à titre de comparaison.

Les variations en méthane atmosphérique ont été reconstruites à partir d'observations effectuées dans le névé et dans la glace pour DE08-2 et uniquement à partir de données du névé pour Vostok. Les données de Vostok, mesurées à l'UCI (Université de Californie) ont été diminuées de 16 ppbv pour calibrer ces mesures avec le standard NOAA/CMDL (D. Blake et E. Dlugokencky, communication personnelle). La masse molaire du méthane est  $16 \text{ g mol}^{-1}$ , et le rapport des coefficients de diffusion est pris égal à 1.427 à Vostok et 1.415 à DE08-2 (la différence entre les deux sites étant due à la température). Ces valeurs ont été obtenues à l'aide de la théorie cinétique des gaz et des données d'intégrale de collision de Bzowski et al. (1990). Les erreurs expérimentales que nous supposons sur les points sont de 10 ppbv dans les pores ouverts et 22 ppbv dans les bulles (Etheridge et al., 1992). La valeur moyenne de 10 ppbv utilisée pour les pores ouverts prend en compte l'erreur de l'analyse chromatographique (4.3 ppbv selon Etheridge et al., 1992) et l'erreur de prélèvement, principalement due à la largeur de la zone de prélèvement (environ 5 ppbv d'après les pentes des profils de rapports de mélange dans les pores ouverts). Ces erreurs sont utilisées pour construire la matrice diagonale des facteurs de pondération  $\underline{W}_e$  de l'index de performance et pour le test du  $\chi^2$  (qui nous permet de voir si l'accord modèle *vs* observations est satisfaisant).

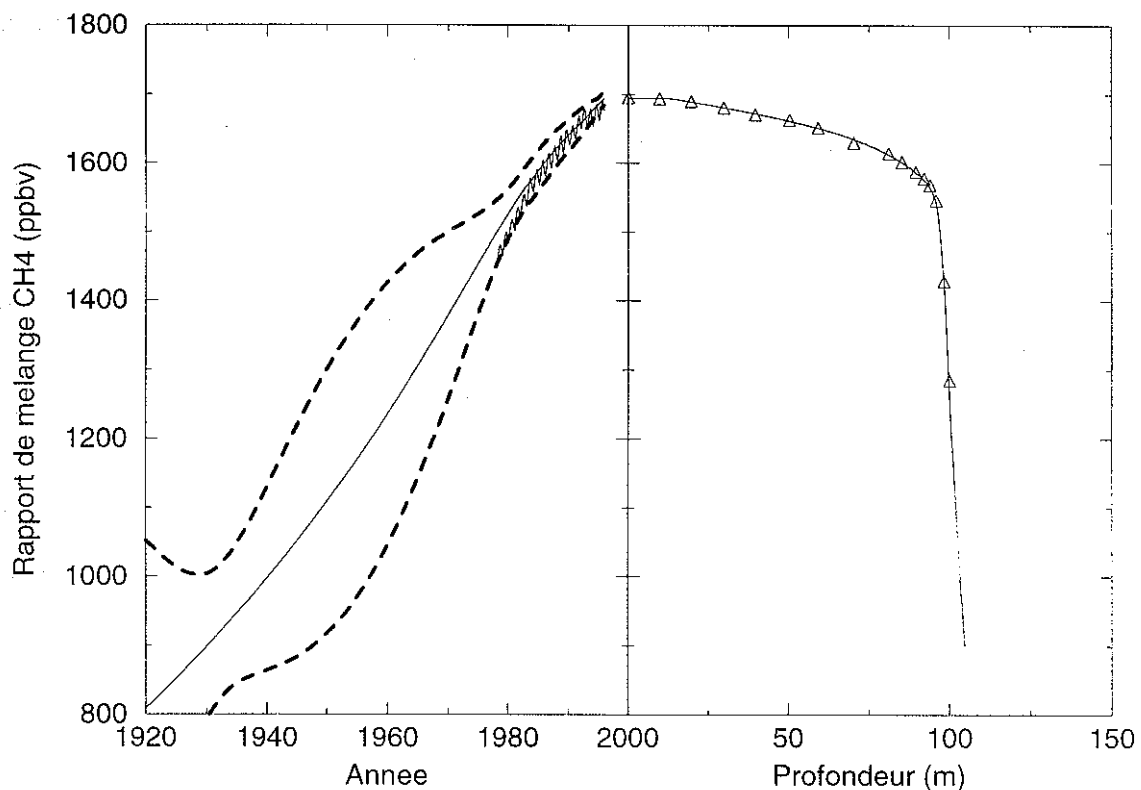


Figure III-13 : Reconstruction du méthane à partir des données de Vostok. Ici, seules des mesures prélevées dans le névé sont utilisées.

Les deux figures précédentes montrent les reconstructions effectuées sur le méthane atmosphérique et l'accord entre les sorties du modèle de transport et les rapports de mélange

mesurés dans le névé. Les enveloppes tracées ici sont déterminées à partir de la reconstruction standard en y ajoutant plus ou moins deux fois l'écart type, calculé à l'aide de la matrice de covariance. Cette enveloppe signifie que si le modèle est exact et que le bruit autour des mesures est bien Gaussien, alors une pondération<sup>13</sup> des vraies valeurs de rapports de mélange atmosphériques a une probabilité de 95% environ de se trouver dans l'enveloppe. Puisqu'il existe des incertitudes associées avec la théorie (principalement dues au coefficient de diffusion reconstruit et aux variations avec le temps de la température et de l'accumulation de surface), la largeur de ces enveloppes est probablement sous-estimée. Néanmoins, la largeur des enveloppes suggère fortement que le meilleur site pour reconstruire les évolutions atmosphériques récentes avec précision est DE08. Il y a deux raisons principales à ceci : la première est que plus de points de mesure ont été utilisés pour la reconstruction de DE08 (les mesures dans la glace ont été prises en compte). Deuxièmement, la diffusion est beaucoup plus importante par rapport à l'advection, à Vostok qu'à DE08-2. Les flux dus à la diffusion sont en effet du même ordre de grandeur dans les deux sites, mais l'advection (flux d'air) est liée à l'accumulation de surface : elle est donc plus importante à DE08-2. Diffusion signifie perte, dispersion d'information, contrairement à l'advection. La largeur des enveloppes est donc fortement liée au nombre de Peclet réciproque ( $D/wz_f$ , i.e. le rapport des flux de diffusion sur advection).

On remarque un assez bon accord entre les reconstructions standards et les mesures directes de méthane atmosphérique entre 1983 et 1993 (Dlugokencky et al., 1994). Elles sont également en bon accord avec les archives d'air de Cape Grim<sup>14</sup> qui commencent en 1978 (Langenfelds et al., 1996). Une caractéristique intéressante suggérée par la reconstruction de DE08-2 est un taux de croissance en méthane plus bas avant 1950. Si l'on se fie aux enveloppes tracées sur la figure (III-12 cet événement atmosphérique semble être significatif et non induit par des erreurs de mesure. Ce faible taux de croissance dans les années 1920-1945 avait déjà été remarqué et mentionné par Etheridge et al. (1992). Notre déconvolution qui prend en compte l'effet lissant du névé suggère cependant un événement atmosphérique un peu plus marqué.

---

<sup>13</sup> Cette pondération est déterminée par la matrice de résolution du modèle.

<sup>14</sup> Il s'agit de bouteilles d'air collectées à intervalles réguliers à partir de 1978 par un groupe de chercheurs Australiens. Ces archives qui commencent à être dépouillées sont des mines d'information pour les atmosphériciens.

### III.4.6. Reconstruction à partir de plusieurs sites de prélèvement

Le mélange du méthane dans les régions Antarctiques est à peu près instantané aux échelles de temps qui nous intéressent (plusieurs mois, voire quelques années). Par conséquent, le scénario en méthane qui a laissé sa signature dans le névé de Vostok doit être le même à DE08-2. Au lieu de reconstruire *séparément* un scénario à Vostok et un autre à DE08-2, il peut être intéressant de reconstruire un seul scénario capable d'expliquer les mesures des deux sites *simultanément*. L'intérêt d'une telle approche serait de réduire les incertitudes de la reconstruction en utilisant plus de données (donc plus d'information). La méthode de reconstruction du scénario décrite dans les parties précédentes donne une telle possibilité. Il suffit pour cela de changer légèrement la nature de l'index de performance à minimiser :

$$I_s = I_s^{vos} + I_s^{DE08} \quad (\text{III-60})$$

L'index de performance est maintenant la somme des index de performance utilisés pour chacun des sites. Noter que, par l'intermédiaire des vecteurs  $\underline{W}_e$ , cet index permet de privilégier un site par rapport à l'autre, suivant la confiance que l'on a dans les mesures. Il est possible, en combinant les matrices, de réécrire cet index sous la même forme que l'équation (III-48), et la solution générale du problème inverse linéaire est alors donnée par (III-51).

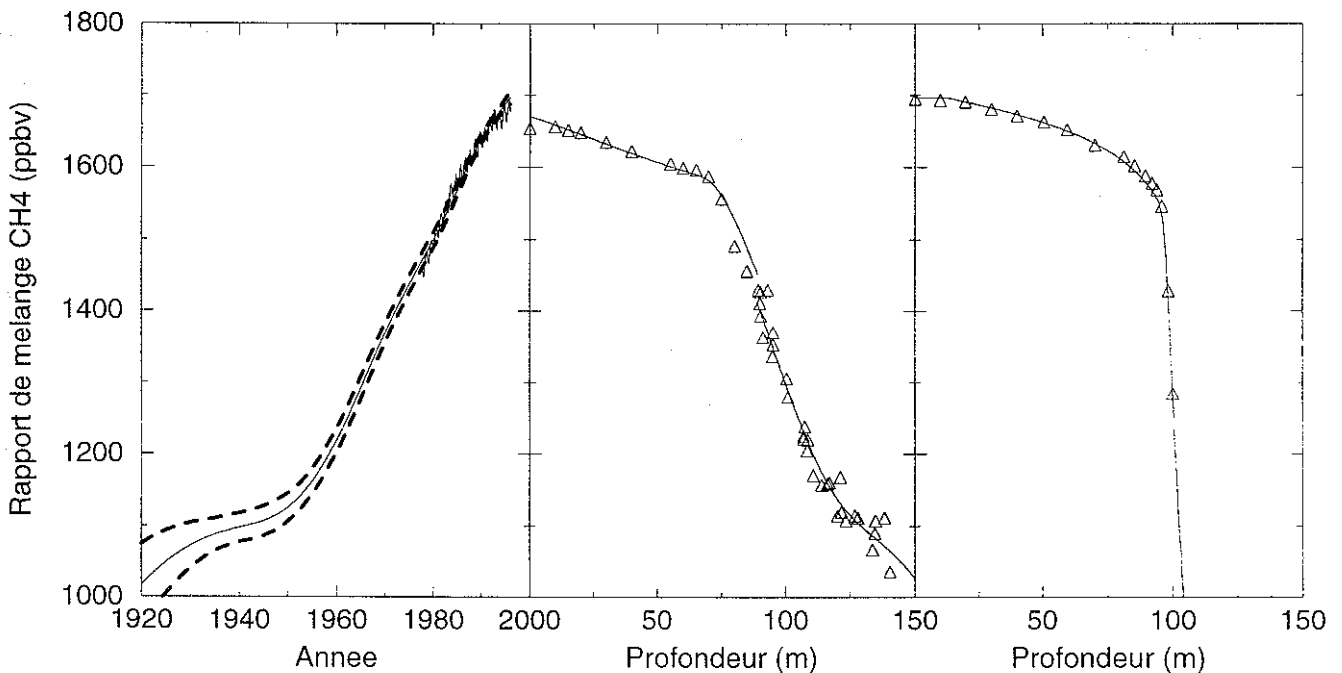


Figure III-14 : reconstruction des rapports de mélange de méthane atmosphérique au cours du temps en utilisant simultanément les données des sites de Vostok et DE08 (gauche). Le cadre du milieu montre l'accord entre les sorties du modèle direct et les données à DE08 (et à Vostok,

cadre de droite). Les enveloppes sur le scénario sont calculées à partir de la matrice de covariance, et les mesures directes de méthane à la station de Pôle Sud sont tracées à titre de comparaison.

Le gain en terme de précision de la reconstruction peut être quantifié grâce aux notions de taille de la matrice de covariance et de « propagation » de la matrice de résolution du modèle (équations (III-54) et (III-58)). Les résultats sont reportés dans la table ci-dessous :

	DE08-2	Vostok	DE08-2 & Vostok
« propagation » de la			
matrice résolution du modèle	135	5268	121
Taille de la matrice de covariance (ppbv <sup>2</sup> )	1137	41040	856

Ce tableau montre que cette approche permet d'augmenter à la fois la résolution et la précision par rapport au meilleur des deux sites. Si l'on n'avait réussi à diminuer qu'un seul de ces deux indicateurs, on n'aurait pas pu conclure quant au gain apporté par cette méthode, étant donné le compromis entre variance et résolution. Ceci est intéressant car, jusqu'à maintenant, pour gagner en précision, les méthodes employées étaient, soit un échantillonnage plus fin des prélèvements (ce qui atteint rapidement ses limites, notamment dans le névé), soit une amélioration du dispositif expérimental d'analyse. L'étude simultanée de deux trous de forage, dont les conditions climatiques en surface peuvent être complètement différentes, fournit une alternative simple pour augmenter la précision des reconstructions.

La figure (III-14) permet également de constater que le ralentissement de la croissance de méthane atmosphérique avant 1950, suggéré par la reconstruction à DE08-2, est compatible avec les données des deux sites. Cette caractéristique, qui aurait sans doute des implications climatiques importantes, nécessite probablement des études complémentaires. En particulier, il faudrait évaluer dans quelle mesure un changement brutal (et hypothétique) d'accumulation dans les années 1950 pourrait affecter nos résultats et induire la méthode en erreur. En effet, dans le modèle de transport, l'accumulation est supposée constante durant toute la période étudiée.

### **III.5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

#### **III.5.1. Rappel des conditions d'application de la méthode**

On dispose maintenant au LGGE d'un outil de déconvolution du signal atmosphérique des glaces polaires. Cet outil a été principalement développé pour étudier les variations *récentes* de la composition atmosphérique et il faudra être très prudent si on souhaite l'appliquer dans des conditions différentes. Les hypothèses les plus restrictives sont celles liées à la stationnarité de la structure du névé, de la température de surface et de l'accumulation.

Il est possible d'adapter rapidement la méthode à l'interprétation de données plus profondes correspondant à des périodes climatiques stables (si l'on connaît bien la climatologie du site, grâce à des mesures isotopiques de la glace et une analyse stratigraphique par exemple). Cependant, la méthode ne permet pas d'étudier les phases de transition entre cycles glaciaire et interglaciaire, à cause des fluctuations importantes de température, d'accumulation et donc de structure du névé. Ceci est dommage car ce sont ces périodes de fortes variations qui sont sans doute le plus à même de nous renseigner sur les mécanismes du système climatique. Pour adapter le modèle de transport de gaz à l'interprétation des périodes de transition, il faudra prendre en compte la diffusion de la chaleur, coupler avec un modèle physique simulant l'évolution de la fermeture des pores et de la densification, et surtout réécrire toutes les équations de conservation du modèle direct sans les hypothèses de stationnarité. Une difficulté supplémentaire proviendrait de la perte de la linéarité du modèle par rapport aux concentrations atmosphériques. La reconstruction des scénarios atmosphériques ne pourrait plus se faire en utilisant les inverses généralisées (spécifiques aux problèmes inverses *linéaires*): il faudrait, par exemple, mettre en œuvre une méthode variationnelle semblable à celle qui a été développée pour la reconstruction du coefficient de diffusion apparent.

#### **III.5.2. Les gaz traces anthropiques et rapports isotopiques**

##### **III.5.2.1. Les CFCs (CFC-11)**

Le dioxyde de carbone et le méthane ne sont pas les seuls gaz traces dont la concentration atmosphérique a été affectée par l'activité humaine. Par exemple, on s'est aperçu récemment que les émissions humaines de chloro-fluoro-carbures (CFCs) détruisaient la couche d'ozone stratosphérique, ce qui pouvait mettre en péril la survie de l'espèce humaine. A la suite du



protocole de Montréal en 1988, la production des CFCs, ainsi que celle des chloro-carbones, a été progressivement stoppée à partir de 1990. L'histoire atmosphérique des CFCs se trouve presque intégralement dans le névé polaire, car l'émission de ces gaz a commencé il y a moins de quarante ans. Notre méthode de déconvolution devrait donc bien s'appliquer.

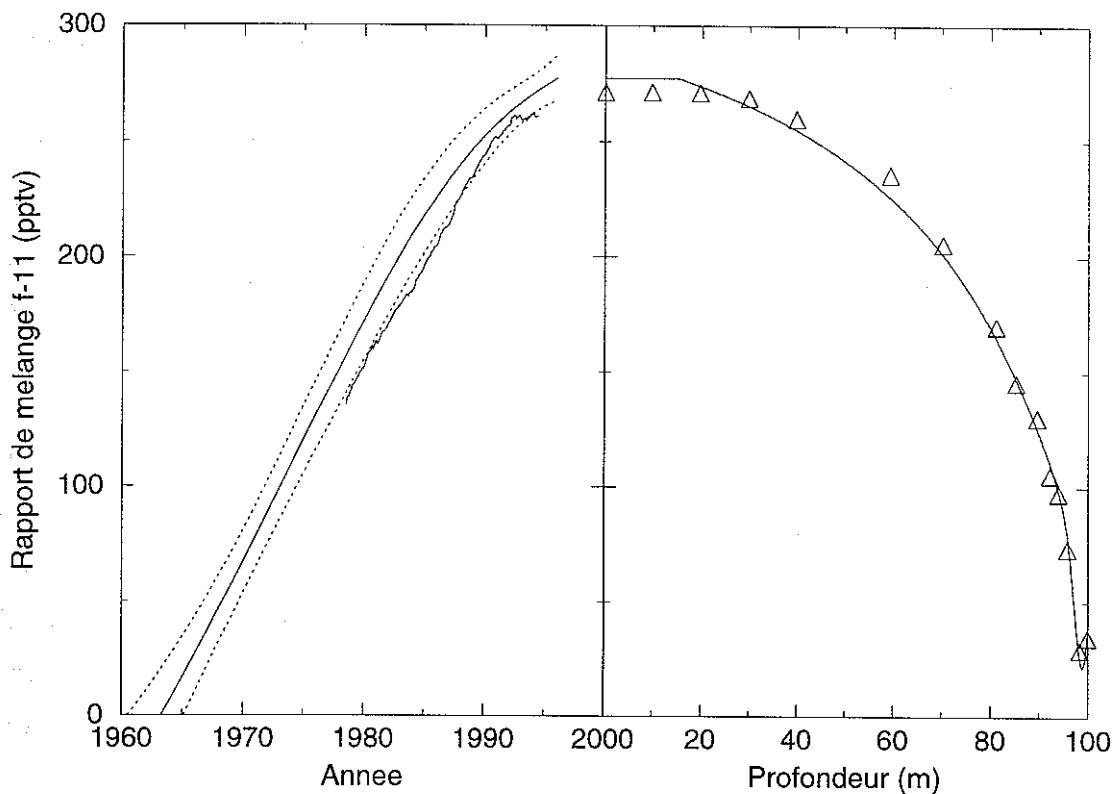


Figure III-15 : reconstruction du rapport de mélange de CFC-11 atmosphérique à Vostok (gauche), et incertitude sur ce scénario ( $2\sigma$  calculé avec la matrice de covariance, en supposant une erreur sur les mesures dans le névé de 10 pptv). A titre de comparaison, on a superposé les mesures directes atmosphériques de Cape Grim. Dans l'encart de droite sont comparées les mesures dans le névé de Vostok et les rapports de mélange prédits par le modèle.

La masse molaire du CFC-11 est  $137 \text{ g mol}^{-1}$ , le rapport des coefficients de diffusion de CFC-11 par rapport au dioxyde de carbone est pris égal à 0.568 (cf. Arnaud, 1997, pour le calcul des coefficients de diffusion). Les mesures de concentration dans le névé sont celles de la campagne d'été 96 à Vostok (le CFC-11 n'a malheureusement pas été mesuré dans le névé de DE08-2). Tous les autres paramètres du modèle sont ceux utilisés pour la reconstruction du méthane atmosphérique de Vostok. Les mesures directes atmosphériques tracées pour comparaison ont été effectuées à Cape Grim ( $41^\circ\text{S}$ ,  $145^\circ\text{E}$ ) qui est le site d'observation le plus proche de Vostok. Comme les CFCs présentent des variations latitudinales importantes, comparées à celles du méthane par exemple, il n'est pas sûr que cette courbe soit représentative de la concentration observée à Vostok. Néanmoins, on s'attendrait plutôt à trouver un scénario en dessous des mesures atmosphérique de Cape Grim, Vostok étant

beaucoup plus éloigné des régions sources de CFC-11. Cette particularité nécessite sans doute des investigations plus poussées. Il faut noter également que l'enveloppe sur le scénario CFC-11 est plus étroite que pour le méthane (voir Figure III-13), conséquence d'un coefficient de diffusion plus faible.

### III.5.2.2. $\delta^{13}\text{C}$ du méthane

Une application majeure du modèle de transport sera l'interprétation des rapports isotopiques mesurés dans l'air du névé et dans les bulles de la glace. D'un point de vue climatique, la connaissance de l'évolution des rapports isotopiques dans l'atmosphère permet de mieux contraindre les réservoirs des gaz dont la concentration atmosphérique a changé<sup>15</sup>. Pour le moment, la méthode de reconstruction n'est pas adaptée à l'interprétation des rapports isotopiques : en effet, le modèle direct est linéaire pour les rapports de mélange atmosphérique, mais pas pour les rapports isotopiques.

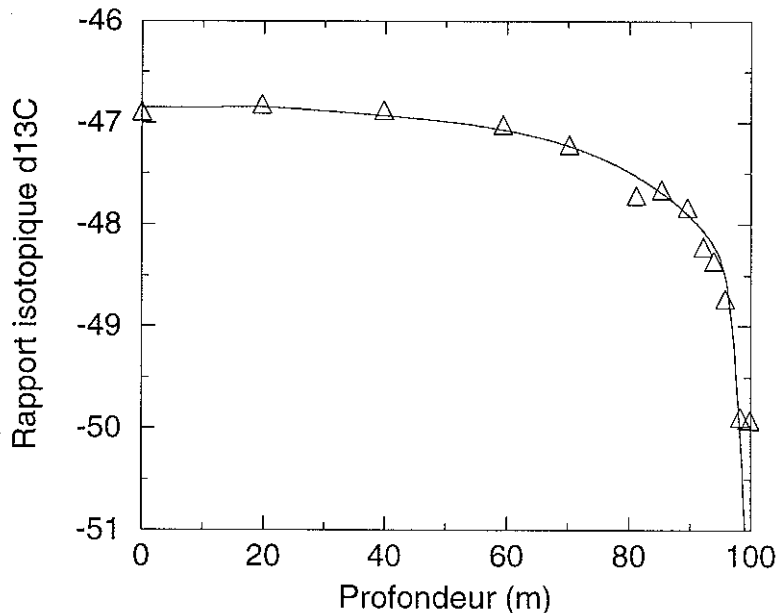


Figure III-16 : rapport isotopique  $\delta^{13}\text{C}$  du méthane simulé dans le névé à Vostok, comparé aux mesures de J. Chappellaz. Le scénario de méthane atmosphérique utilisé est celui de la reconstruction sur deux sites (figure III-14), le rapport isotopique en surface est supposé constant au cours du temps.

Le modèle direct de transport des gaz a été appliqué dans les conditions de Vostok, pour le méthane et son isotope lourd ( $^{13}\text{CH}_4$ ) en supposant que le rapport de ses deux composants n'a pas varié au cours du temps. Le rapport des coefficients de diffusion ( $\sim 1.019$ ) entre ces deux

<sup>15</sup> Pour le  $\text{CO}_2$ , par exemple, des processus de fractionnement ont lieu lors de son passage dans les différents réservoirs (océan, atmosphère, biosphère et rochers). La quantité totale de  $\text{CO}_2$  et de ses isotopes devant être globalement conservée, l'analyse des rapports isotopiques permet d'avoir une idée de l'importance relative des différents réservoirs.

espèces est calculé à partir des masses moléculaires<sup>16</sup> (voir Arnaud, 1997). Les résultats de cette simulation sont en bon accord avec les données expérimentales de J. Chappellaz. Ceci montre que la décroissance du rapport isotopique dans le névé en fonction de la profondeur, qui suggérait au premier abord une augmentation du rapport isotopique  $\delta^{13}\text{C}$  avec le temps, peut entièrement s'expliquer par un scénario constant de  $\delta^{13}\text{C}$  en surface. Ceci est un effet de la diffusion plus rapide de l'isotope léger  $^{12}\text{CH}_4$  majoritaire par rapport à l'isotope lourd  $^{13}\text{CH}_4$  dans le névé polaire.

Cet exemple montre l'intérêt d'étendre la méthode de déconvolution aux rapports isotopiques, afin d'obtenir le maximum d'informations climatiques des mesures.

### III.5.3. Vers une déconvolution complètement automatisée du signal des carottes ?

La méthode développée dans ce chapitre peut théoriquement s'appliquer à de nombreux gaz trace ayant des caractéristiques très différentes. Par exemple, des reconstructions de chloro-carbones,  $\text{SF}_6$ , isotopes lourds de  $\text{CO}_2$  peuvent être effectuées en utilisant la même technique. Le but n'était pas de fournir ici un catalogue de reconstructions, mais plutôt de montrer l'outil tel qu'il pourra être utilisé à l'avenir, pour mieux interpréter les mesures (existantes et à venir) de concentration de gaz trace dans les bulles et les pores ouverts du névé.

Ce qui peut apparaître comme un maillon faible de la méthode est le choix plus ou moins arbitraire d'un paramètre  $\kappa^2$ , destiné à introduire la quantité suffisante d'informations *a priori* (et donc subjectives) pour pouvoir traiter le problème. Il est sans doute possible de trouver de meilleurs critères de choix de ce paramètre (*e.g.* validation croisée<sup>17</sup>) mais le but de  $\kappa^2$  restera d'introduire une dose de subjectivité au problème sous-déterminé de reconstruction des atmosphères du passé.

---

<sup>16</sup> La formule suivante fournit une bonne estimation des rapports de coefficients de diffusion en fonction de la masse molaire des deux isotopes et celle de l'air (Bzowski et al., 1990):

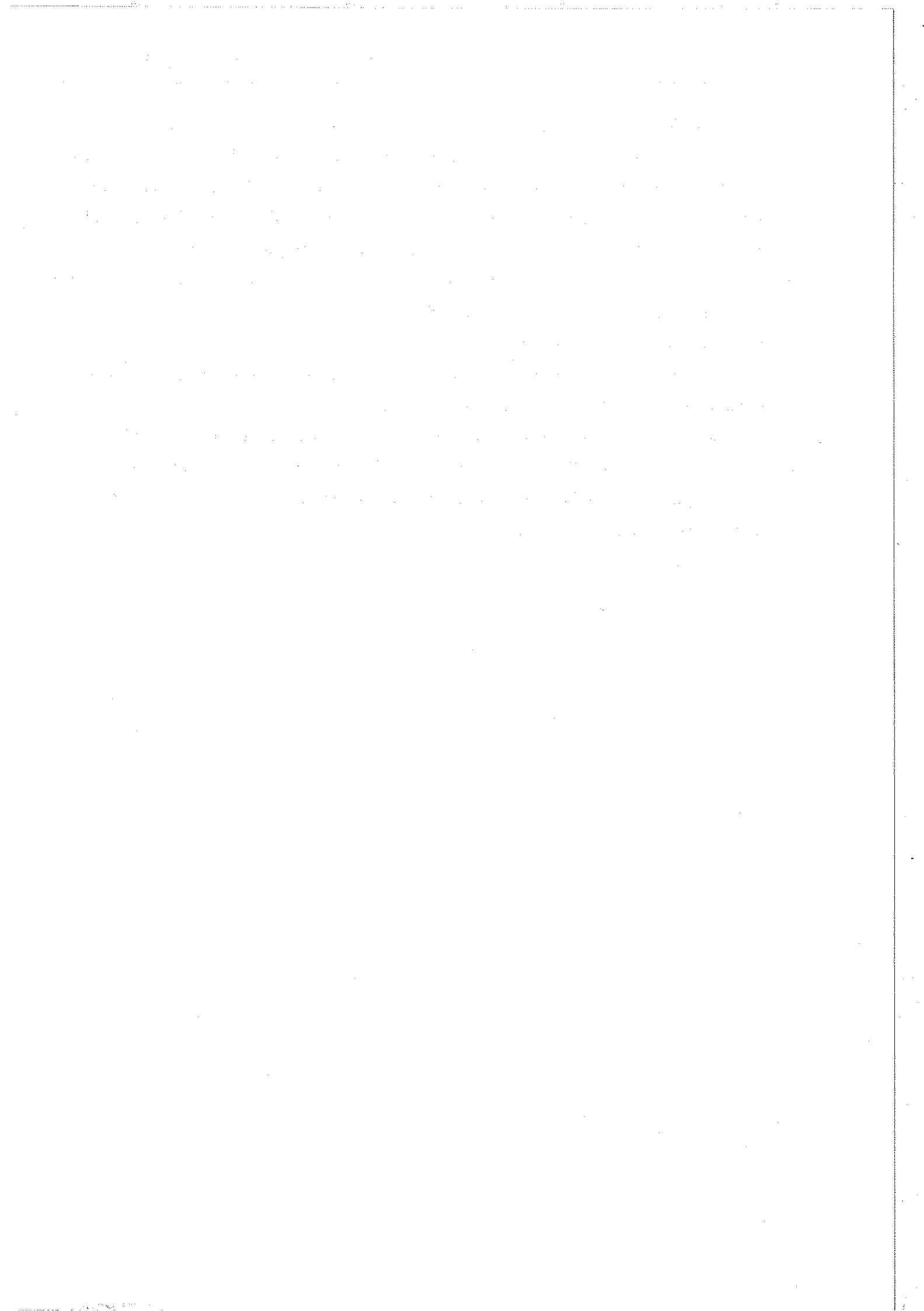
$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2(M_1 + M_{\text{air}})}{M_1(M_2 + M_{\text{air}})}}$$

<sup>17</sup> L'avantage de la validation croisée est de ne pas nécessiter la connaissance de l'erreur sur les points de mesures. On pourra se reporter à Dousteysier (1995) pour une revue des techniques de choix de paramètres régularisant (*i.e.*  $\kappa^2$ ).

Enfin, le lecteur sera sans doute étonné, qu'après avoir fait l'éloge de l'inverse stochastique dans le chapitre II, j'utilise une méthode de type moindres carrés régularisés dans le chapitre III. La principale raison de ce choix est simple. L'outil développé dans ce chapitre est destiné à être réutilisé par les expérimentateurs du LGGE (Jean-Marc Barnola et Jérôme Chappelaz) afin d'obtenir des séries paléoclimatiques de haute résolution, éventuellement utilisables comme entrées de modèles climatiques. Certaines discussions avec JMB m'ont permis de me rendre compte de la difficulté :

- de quantifier l'erreur expérimentale
- de quantifier ses préjugés sur le scénario atmosphérique (*i.e. l'a priori*) par une matrice de covariance complètement indépendante des mesures.

C'est pourquoi l'outil développé dans ce chapitre, qui repose sur le compromis adéquation modèle - observations et simplicité de la solution reconstruite me semble plus adapté. L'utilisateur garde ainsi facilement le contrôle de la solution reconstruite par l'intermédiaire d'un paramètre ajustable unique  $\kappa^2$ .



## IV. LE ROSS ICE SHELF

### IV.1. INTRODUCTION

Le troisième et dernier problème inverse glaciologique présenté dans cette thèse concerne la dynamique des ice-shelves (plates-formes de glace flottantes rattachées à la calotte posée). Nous verrons comment les mêmes techniques d'analyse que celles présentées dans les chapitres précédents permettent de remonter à la rhéologie à grande échelle du Ross Ice Shelf.

#### IV.1.1. Sur la route du Pôle Sud

L'exploration du Ross Ice Shelf est étroitement liée à la conquête des pôles qui a passionné les Européens pendant les premières années du vingtième siècle. C'est une histoire de grands explorateurs à laquelle sont liés les noms de personnages illustres tels que Amundsen, Scott ou Shackleton. En leur hommage, leurs noms figurent aujourd'hui sur la carte du Ross Ice Shelf.

L'histoire commence avec Robert Falcon Scott qui est le premier à organiser une expédition d'envergure en Antarctique entre 1901 et 1904. Il construit une cabane sur l'île de Ross, qui sert de camp de base à un travail scientifique et d'exploration. Scott, Wilson et Shackleton entreprennent le premier voyage vers l'intérieur du continent: ils marchent pendant plus de 300 kilomètres vers le sud, sur le Ross Ice Shelf. Ils font demi-tour, Shackleton étant atteint de scorbut.

En 1907, Shackleton retourne sur l'île de Ross à la tête de sa propre expédition. Ses hommes sont les premiers à réussir l'ascension du Mont Erebus (Volcan de 3795 m); ils découvrent également le Pôle Sud magnétique, mais surtout, ils ouvrent la route du Pôle Sud géographique aux futures expéditions. Shackleton, Wild, Adams, Marshall et quatre poneys partent en Octobre 1908, avec pour objectif le Pôle Sud (Shackleton avait un mauvais souvenir des chiens de traîneaux qu'il avait utilisés lors de l'expédition de 1901-1904). Les poneys traînent des charges considérables, mais ils tombent et meurent un à un. Il apparaît assez vite que, pour atteindre leur objectif, il faut traverser une chaîne de montagnes gigantesques sur leur droite (chaîne Transantarctique). Finalement, Shackleton et ses compagnons trouvent un passage à travers les montagnes : ils remontent un glacier sur plus

de 150 kilomètres (ils le baptisent glacier Beardmore), puis arrivent à un plateau glacé gigantesque. A ce stade, les hommes tirent eux-mêmes les traîneaux (le dernier poney est tombé dans une crevasse). Shackleton décide de faire demi-tour le 6 Janvier 1909, après 1100 kilomètres de marche : ils sont alors à 175 kilomètres à peine du Pôle Sud, mais ils n'ont plus assez de vivres pour l'atteindre.

Deux ans après l'expédition de Shackleton, Scott est de retour en Antarctique, avec comme objectifs le Pôle Sud, mais aussi de nombreuses études scientifiques. A peu près au même moment, le Norvégien Amundsen y est également...

Le rêve d'Amundsen était de devenir célèbre en atteignant le premier le pôle Nord, rêve brisé par l'Américain Robert Peary. Quand Amundsen quitte la Norvège en 1910, il annonce au monde entier qu'il part explorer plus amplement l'Arctique. Une fois en mer, il confie à ses hommes leur véritable destination : le Pôle Sud ! Ils naviguent donc vers le sud et établissent une base sur le Ross Ice Shelf, à l'est et 140 km plus au sud que la base de Scott. Amundsen et ses équipiers sont beaucoup mieux préparés que Scott : avec leurs chiens de traîneaux et leurs skis, ils avancent en moyenne de 40 kilomètres par jour. Le 8 décembre 1911, Amundsen passe au point le plus au sud atteint par Shackleton. Le 14 décembre 1911, Amundsen, Hassel, Hanssen, Wisting, Bjaaland et 19 chiens de traîneaux atteignent le Pôle Sud. Ils y restent trois jours, laissent un message et une partie de leur matériel pour l'expédition de Scott, puis retournent au bateau sans encombres.

Pendant ce temps, l'expédition de Scott prend une tournure tout à fait différente. Scott part le 24 octobre 1911 avec des poneys et deux tracteurs. Les tracteurs tombent en panne les premiers jours et les poneys meurent avant d'atteindre le glacier Beardmore. L'équipe se compose alors de douze hommes tirant derrière eux les traîneaux. La progression sur le glacier Beardmore est très lente, les hommes ayant peu l'habitude des skis. Le 4 Janvier, le dernier support logistique fait demi-tour et seuls Scott, Wilson, Bowers, Oates et Evans continuent vers le Pôle. Le 16 Janvier, Bowers remarque un drapeau flottant à l'horizon : ils savent maintenant qu'ils ont été battus dans la course par les Norvégiens... Ils atteignent le Pôle le 17 Janvier 1912, par -22°C.

Leur retour est un cauchemar tristement célèbre. Evans se blesse à la main et sa blessure s'infecte ; le 17 février, il s'écroule au pied du glacier Beardmore, ses équipiers le portent jusqu'à la tente et il meurt dans la nuit. Un mois plus tard, alors qu'il reste encore plus de deux cent kilomètres à parcourir, Oates est à bout de force. Le matin du 17 mars, il quitte la tente et ne revient pas. La dernière note du carnet de bord de Scott est datée du 29 mars.

### IV.1.2. Intérêt climatique des ice-shelves

Les premiers explorateurs ont donc vu dans le Ross Ice Shelf une région d'accès relativement facile, permettant une progression rapide vers le Pôle Sud. En effet, le Ross Ice Shelf est une immense plate-forme flottante de superficie comparable à la France (465 000 km<sup>2</sup>) et dont l'épaisseur varie peu (de 300 mètres environ sur le front à 1000 mètres, ce qui correspond à des variations d'altitude de la surface de moins de cent mètres). Aujourd'hui, les scientifiques s'intéressent à ces glaciers flottants car ils les suspectent d'avoir un rôle actif dans les mécanismes du système climatique.

La calotte Antarctique comporte un autre ice-shelf de superficie équivalente : il s'agit du Ronne-Filchner Ice Shelf (500 000 km<sup>2</sup>) en mer de Weddell. Citons également deux ice-shelves plus modestes, l'Amery Ice Shelf (Antarctique de l'Est) et le Larsen Ice Shelf (Péninsule Antarctique). Durant l'été austral 1995, ce dernier s'est en partie disloqué (voir figures suivantes IV-2) ; il a alors été suggéré que cette désintégration était liée à une augmentation des températures de surface dans cette région<sup>1</sup>. La même explication avait été avancée pour expliquer la désintégration du Wordie Ice Shelf un peu plus tôt (Doake et Vaughan, 1991). Cet exemple spectaculaire montre que les ice-shelves ne sont pas des structures stationnaires et qu'ils peuvent changer de géométrie sur des échelles de temps très courtes.

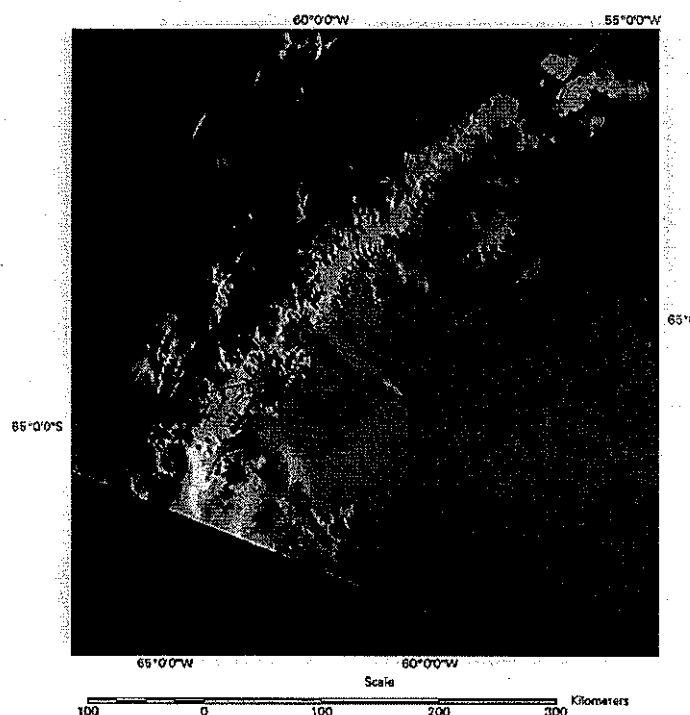


Figure IV-1 : photographie satellite de la partie Nord Larsen Ice Shelf prise le 9 Janvier 1995. On distingue clairement au milieu de la photographie la limite entre l'ice-shelf (à gauche) et la glace de mer (à droite).

<sup>1</sup> Voir : Breakaway iceberg due to warming, *Nature*, 374, 108.



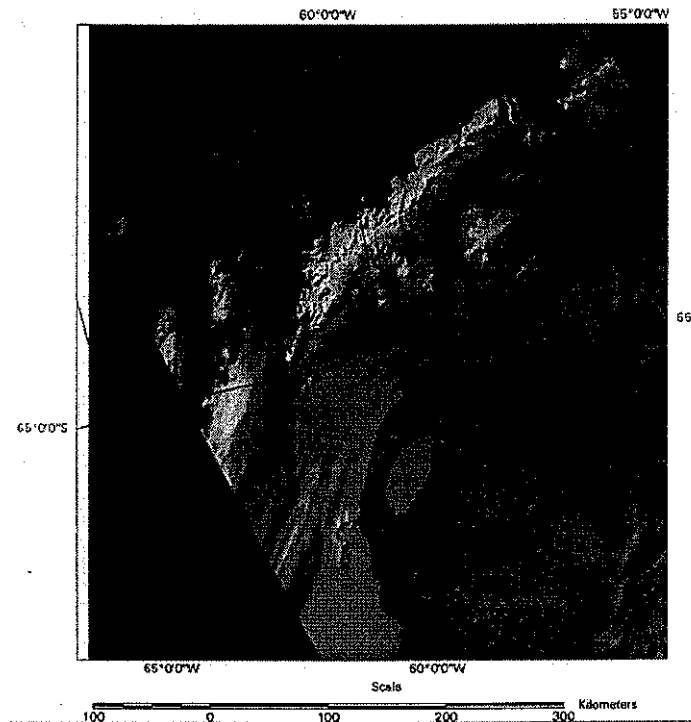


Figure IV-2 : photographie satellite de la même région prise six semaines plus tard (27 février 1995). La glace de mer a presque entièrement fondu, un iceberg de 2600 km<sup>2</sup> (i.e. la superficie du Luxembourg) s'est détaché de l'ice-shelf et une partie du glacier, plus au Nord, s'est désagrégée, formant ainsi une armada de petits icebergs.

Les ice-shelves possèdent des interactions à la fois avec l'océan et l'atmosphère. Par exemple, la circulation océanique sous les ice-shelves est très particulière. Dans la zone de transition entre la calotte posée et l'ice-shelf (qui sera appelée « grounding zone », « grounding line » ou « ligne d'échouage ») l'ice shelf fond à sa base. Cette fusion basale est initiée par les marées qui perturbent la stratification naturelle de l'océan et apporte de ce fait de la chaleur à la base de l'ice-shelf (MacAyeal, 1984). L'eau douce ainsi formée, plus légère que l'eau salée environnante remonte à une vitesse de dix centimètres par seconde environ le long de la base de l'ice shelf (Jenkins, 1991). Ce panache d'eau douce, dévié vers la gauche par la force de Coriolis, échange masse, énergie et sel avec le milieu environnant. Quand la densité de l'eau de fonte devient égale à celle de l'eau de mer, ce panache se sépare de la base d'ice-shelf.

La raison principale pour laquelle nous nous intéresserons aux ice-shelves est qu'ils constituent, avec les ice-streams, les composantes dynamiques de la calotte Antarctique : leur vitesse d'écoulement peut être très élevée (parfois plus de 1000 m/an !) et ils ont de ce fait des temps de réponse caractéristiques beaucoup plus faibles que ceux de la calotte posée. Il est donc probable qu'en cas de changements climatiques importants, ce soient les premiers éléments de la calotte à réagir.

## IV.2. DYNAMIQUE DE L'ICE-SHELF

### IV.2.1. Spécificité de l'ice-shelf

Les seules différences entre une calotte posée et un ice-shelf résident dans les conditions aux limites, en particulier à la base du glacier. Dans le premier cas, soit la glace est ancrée au sol (lorsque la température de la base de la calotte est inférieure au point de fusion), soit elle glisse avec frottements sur le socle rocheux (la glace est alors au point de fusion). Dans le cas de l'ice-shelf, l'eau de mer à la base du glacier n'exerce pas de frottements (du moins l'énergie dissipée par ceux-ci est inférieure, de plusieurs ordres de magnitude, aux énergies mises en œuvre dans l'écoulement de l'ice-shelf) ; la pression de l'eau de mer doit également compenser le poids de la colonne de glace au-dessus. Cette particularité entraîne deux régimes dynamiques complètement opposés suivant la partie de la calotte que l'on étudie : la calotte posée est caractérisée par un régime de cisaillement vertical, alors que dans l'ice-shelf les contraintes normales et les cisaillements horizontaux sont prédominants.

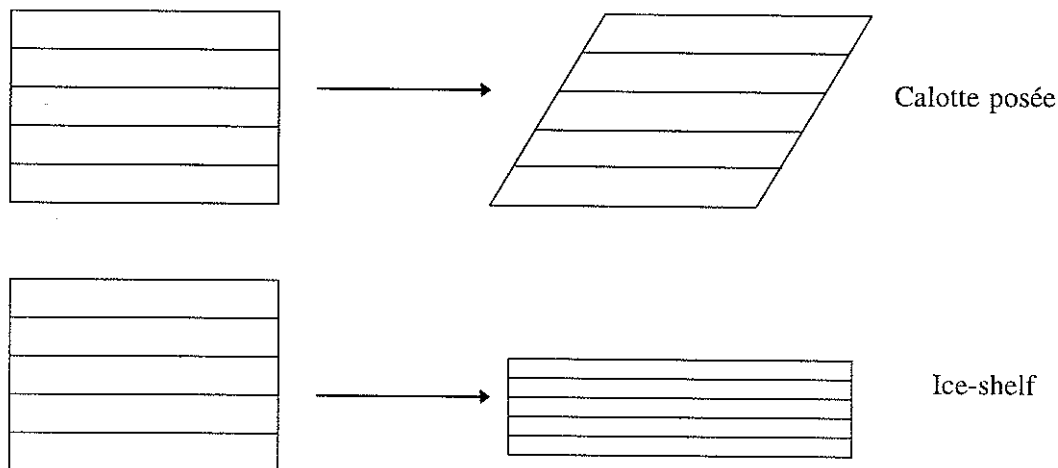


Figure IV-3 : vue schématique des deux régimes dynamiques de la calotte : la calotte posée est caractérisée par des cisaillements verticaux, alors que l'ice-shelf s'amincit sous l'effet de contraintes normales.

Une seconde caractéristique intéressante provient de la condition à la limite sur le front de l'ice-shelf (voir figure suivante). Sur le front, la pression hydrostatique de la glace est en partie compensée par la pression hydrostatique de l'eau de mer. Il en résulte une « force nette », proportionnelle au carré de l'épaisseur de glace sur le front (les deux pressions sont linéaires avec la profondeur), qui a tendance à tirer l'ice-shelf vers la mer. On observe généralement des vitesses d'écoulement plus élevées près du front que dans les zones centrales, ce qui confirme, au moins qualitativement, ce schéma. Il faut aussi noter que cette « force nette » induit un porte-à-faux au niveau du front qui a tendance à créer des crevasses en surface.

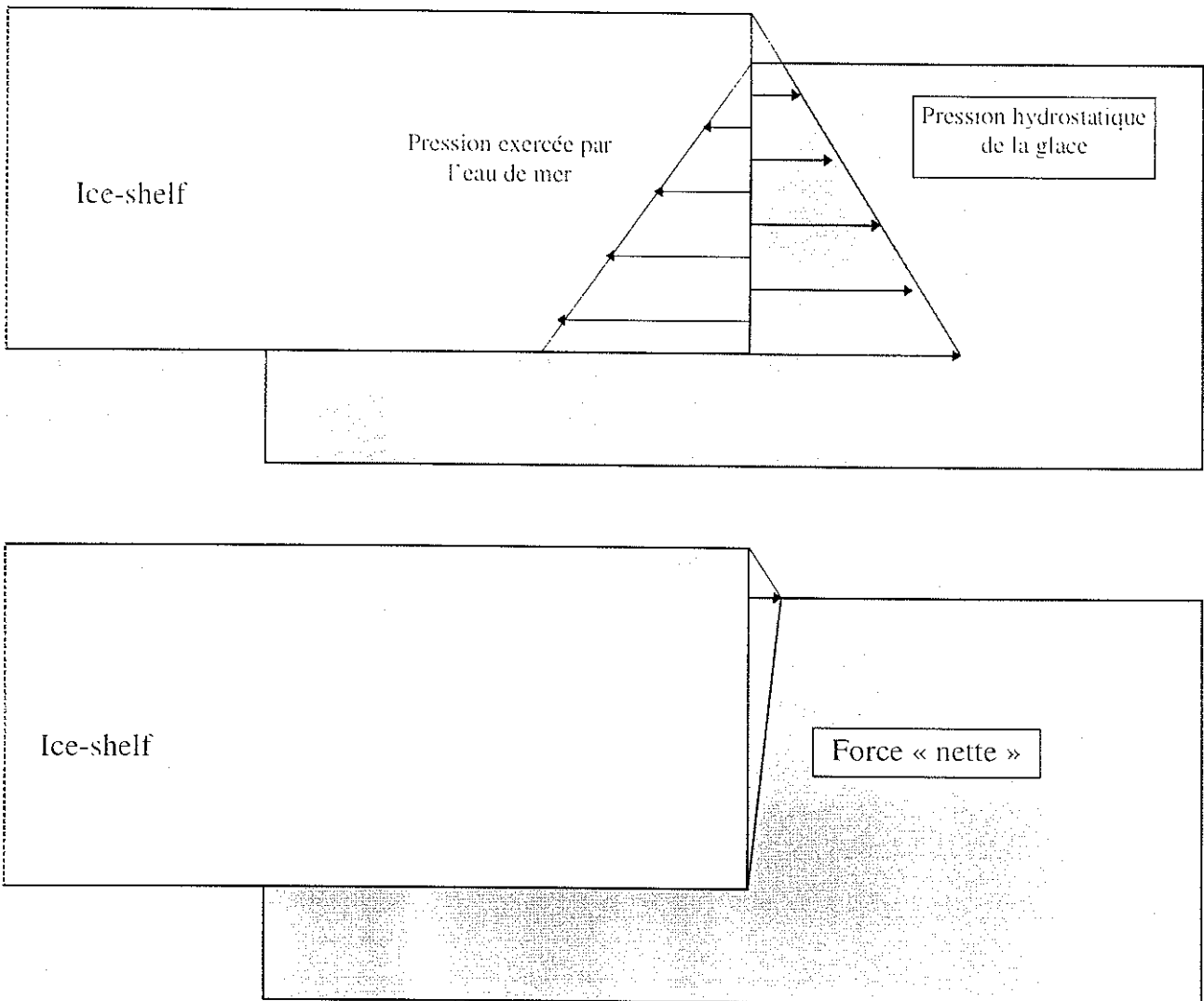


Figure IV-4 : bilan de force sur le front de l'ice-shelf (figure adaptée de MacAyeal, 1996). La force « nette » est proportionnelle au carré de l'épaisseur de glace sur le front.

Ces deux caractéristiques essentielles de la dynamique de l'ice-shelf font que la construction d'un modèle d'écoulement de l'ice-shelf est plus difficile qu'une simple adaptation de modèle de calotte posée (tel que celui qui existait déjà lors de mon arrivée au LGGE, *i.e.* Fabre et al., 1995).

## IV.2.2. Historique de la modélisation de l'ice-shelf

### IV.2.2.1. Analyse de Weertman

Weertman fut le pionnier dans le domaine de la modélisation des ice-shelves. En 1957, il propose une solution analytique décrivant l'écoulement d'une langue de glace flottante. Il considère un ice-shelf d'épaisseur constante  $H$  et il calcule sa vitesse d'écoulement en

supposant que la glace est isotrope, que sa loi rhéologique peut être décrite par une loi visqueuse non linéaire (loi de Glen) et que les composantes horizontales de la vitesse d'écoulement sont indépendantes de la profondeur (une justification mathématique de ce dernier point sera donnée dans la suite de ce chapitre, dans la partie *Analyse adimensionnelle*)

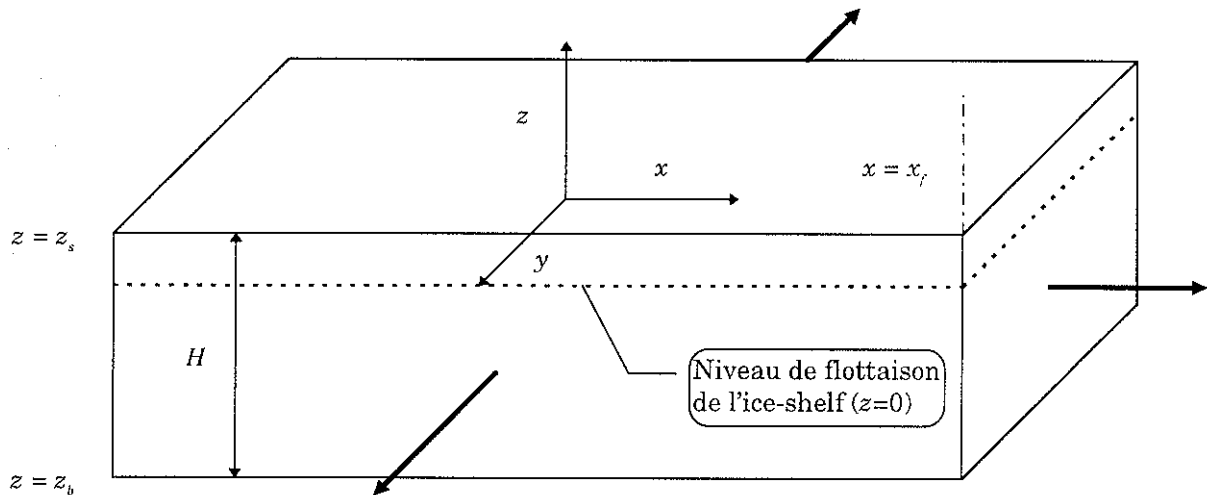


Figure IV-5 : l'ice-shelf de Weertman, d'épaisseur constante, peut se répandre librement suivant les deux directions horizontales (on choisit le bord gauche fixe et le front en  $x=x_f$ ). Sur cette figure sont indiqués le repère et les principales notations utilisées.

La glace est considérée comme un fluide incompressible, dont l'équation de continuité s'écrit (noter que  $x$  et  $y$  jouent le même rôle dans notre problème)<sup>2</sup>:

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \Rightarrow 2\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (\text{IV-1})$$

où  $\underline{\underline{\epsilon}}$  désigne le tenseur des taux de déformation (par convention, les quantités tensorielles seront doublement soulignées). Par ailleurs, la loi rhéologique nous fournit une relation entre ce tenseur des taux de déformation, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la pression octaédrale  $P$  (i.e. le tiers de l'opposé du premier invariant du tenseur des contraintes):

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\eta \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - P \underline{\underline{I}} \quad (\text{IV-2})$$

où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité et  $\eta$  la viscosité. Le troisième outil dont on dispose pour résoudre ce problème est le système des équations d'équilibre quasi-statique (ces équations peuvent se retrouver par un bilan de forces sur un volume élémentaire en équilibre).

<sup>2</sup> En annexe figure un formulaire de mécanique des milieux continus adapté à l'étude de la dynamique de la glace. Ce formulaire reprend les différentes notions (contraintes, déformations, loi rhéologique, formulation des conditions aux limites... etc.) utilisées dans ce chapitre.

$$\text{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \end{cases} \quad (\text{IV-3})$$

Ici, ce système se réduit à une forme beaucoup plus simple : on utilise le fait que  $x$  et  $y$  jouent le même rôle, que l'ice-shelf peut se répandre librement, et que l'échelle horizontale de variation des contraintes est beaucoup plus grande que l'échelle verticale (la justification et l'implication de ces approximations seront expliquées plus en détail dans la partie *Analyse adimensionnelle*) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

La première équation de ce système s'intègre sur toute l'épaisseur de l'ice-shelf (noter qu'en surface et à la base, le cisaillement vertical est nul), la seconde est intégrée entre la surface ( $z_s$ ) et un niveau quelconque  $z$ .

$$\begin{cases} H \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} = 0 \\ \bar{\sigma}_{zz} = \rho g (z - z_s) \end{cases} \quad (\text{IV-5})$$

Par la suite, les quantités surlignées d'une barre sont moyennées sur toute l'épaisseur de l'ice-shelf. En combinant les équations (IV-5) avec la loi rhéologique (IV-2), et en utilisant l'hypothèse que les vitesses horizontales sont indépendantes de la profondeur, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \left[ \bar{\sigma}_{xx} \right]_{x=x_f} = 2\bar{\eta} \dot{\epsilon}_{xx} - \bar{P} \\ &= 2\bar{\eta} \dot{\epsilon}_{xx} + \frac{1}{3} (2\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{zz}) \\ &= 6\bar{\eta} \dot{\epsilon}_{xx} - \rho g \frac{H}{2} \end{aligned} \quad (\text{IV-6})$$

Il reste donc à déterminer autrement la contrainte normale moyenne sur le front pour obtenir le taux de déformation correspondant. Si on désigne par  $\underline{\underline{n}}$  la normale au front pointant vers l'extérieur, alors cette condition à la limite s'écrit sous forme tensorielle (l'ice-shelf est entièrement retenu par la pression hydrostatique de l'eau de mer) :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{x=x_f} \underline{\underline{n}} = \left[ \sigma_{xx} \right]_{x=x_f} \underline{\underline{n}} = -\rho_w g z \underline{\underline{n}} \times \mathbf{1}(z < 0) \quad (\text{IV-7})$$

où  $\mathbf{1}(z < 0)$  est une fonction égale à 1 si  $z$  est négatif et nulle si  $z$  est positif (c'est la fonction de Heaviside de  $-z$ ). On projette cette condition à la limite sur la normale, on l'intègre sur toute l'épaisseur, puis on utilise la condition de flottabilité :

$$H\bar{\sigma}_{xx} = \rho_w g \frac{z_h^2}{2} \Rightarrow \bar{\sigma}_{xx} = -\rho g \frac{z_h}{2} \quad (\text{IV-8})$$

Il ne reste plus qu'à utiliser cette équation dans (IV-6) pour obtenir le taux de déformation horizontal :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\rho g z_s}{12\eta} \quad (\text{IV-9})$$

La viscosité apparente moyenne dépend de l'état de contrainte, et si l'on considère la loi de Glen<sup>3</sup> (utilisée couramment en glaciologie), celle-ci s'écrit en fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation (qui se calcule à l'aide de l'équation de continuité):

$$2\bar{\eta} = \frac{\bar{B}}{\dot{\epsilon}^{2/3}} = \frac{\bar{B}}{(3\dot{\epsilon}_{xx}^2)^{1/3}} \quad (\text{IV-10})$$

$\bar{B}$  est un coefficient spécifique de la loi de Glen et  $\dot{\epsilon}$  est le second invariant du tenseur des déformations (ces deux paramètres sont définis en annexe). On obtient finalement, le taux horizontal de déformation :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{1}{72} \left( \frac{\rho g z_s}{\bar{B}} \right)^3 = \frac{H^3}{72} \left( \frac{\rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) g}{\bar{B}} \right)^3 \quad (\text{IV-11})$$

Ce calcul peut également se faire dans le cas d'un ice-shelf confiné dans un canal, sans friction sur les bords. La solution est alors très similaire (voir Paterson, 1994, par exemple) : le dénominateur 72 est simplement remplacé par 64.

#### IV.2.2.2. *Instabilité des calottes marines ?*

Ce qu'il est important de constater dans la solution analytique de Weertman, c'est que le taux horizontal de déformation est proportionnel à l'épaisseur de l'ice-shelf élevée au cube. C'est cette proportionnalité qui a amené Weertman à définir le concept d'instabilité des calottes marines, en 1974<sup>4</sup>. L'idée est la suivante (voir figure IV-6) : si la pente du socle rocheux est orientée vers l'intérieur de la calotte (ce qui est le cas en Antarctique de l'Ouest, à

<sup>3</sup> Une annexe est consacrée à la formulation de la loi de Glen.

<sup>4</sup> Voir Weertman (1974) pour l'analyse théorique du problème et Weertman (1976), pour une revue du « grand problème glaciologique non résolu ». En plus de vingt ans, ce problème n'a pas été résolu. Une excellente revue sur le mécanisme d'instabilité lié aux ice-shelves a également été écrite par Thomas (1979).

cause de la déflexion isostatique), alors un retrait, même faible, de la ligne d'échouage<sup>5</sup> entraîne une augmentation de l'épaisseur de l'ice-shelf à la jonction avec la calotte posée, donc une augmentation importante du taux de déformation (dépendance en  $H^3$ ). Cette augmentation du taux de déformation se traduit par une augmentation de la vitesse d'écoulement au niveau de la ligne d'échouage, donc un flux de glace plus important à ce niveau (une partie plus importante de glace posée se met alors à flotter, et la calotte s'amincit encore) et le retrait de la ligne d'échouage peut continuer. Il est donc possible de mettre en évidence un mécanisme d'instabilité de l'Antarctique de l'Ouest, une rétroaction positive, qui pourrait entraîner une augmentation rapide du niveau des mers de 5 à 6 mètres (si tout l'Antarctique se mettait à flotter).

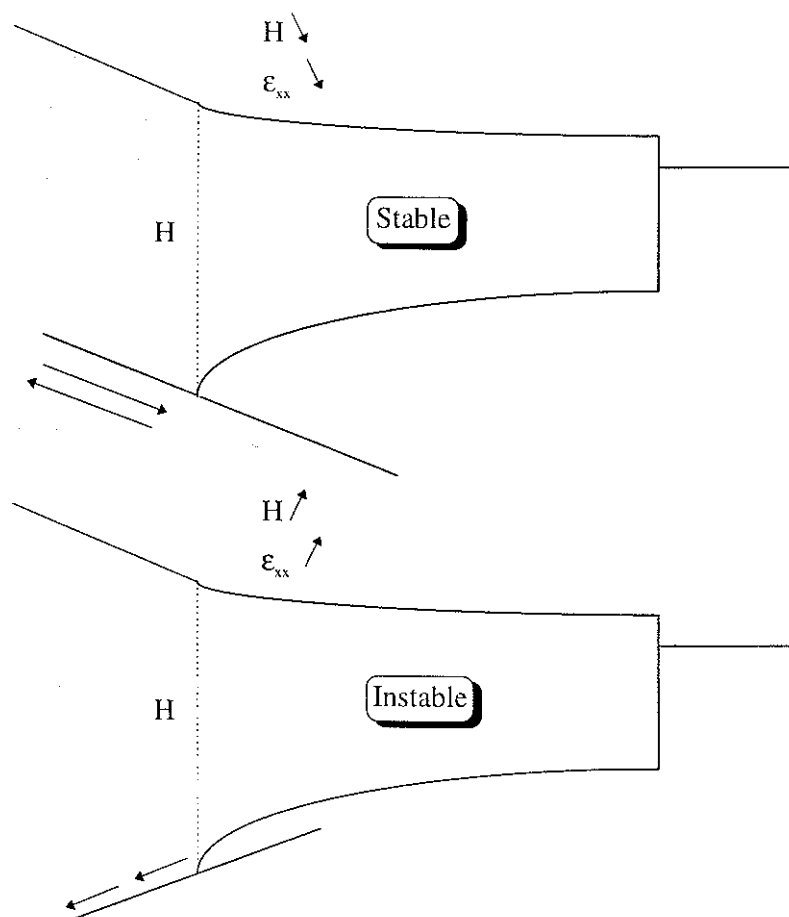


Figure IV-6 : le mécanisme d'instabilité des calottes marines.

<sup>5</sup> Un tel retrait de la ligne d'échouage peut être causé par une augmentation du niveau des mers lors de la déglaciation des calottes de l'hémisphère nord. Cela s'est par exemple produit il y a 10000 ans environ.

Il faut signaler que les ice-shelves sont généralement confinés dans des baies qui restreignent leur écoulement et qui limitent fortement ce mécanisme d'instabilité ; les ice-shelves comportent également des points d'ancrage stabilisateurs, tels que des îles ou des « ice-rises », qui ne sont pas pris en compte dans l'étude de Weertman. Mercer (1978) affirme par ailleurs que l'augmentation de la concentration des gaz à effet de serre dans l'atmosphère pourrait prochainement faire fondre les ice-shelves, diminuer leur effet stabilisateur et provoquer la désintégration de la Calotte Antarctique de l'Ouest. Cette analyse préliminaire doit être interprétée avec beaucoup de prudence mais elle montre l'intérêt d'étudier de manière plus approfondie la dynamique des ice-shelves.

#### IV.2.2.3. Solution analytique de Van der Veen

En utilisant le même type d'approche que Weertman, Van der Veen (1986) a développé une solution analytique adaptée au cas d'un ice-shelf stationnaire confiné, sans frottement sur les bords. Cette solution permet de calculer la forme (alors que l'ice-shelf de Weertman a une épaisseur constante) et la vitesse de l'ice-shelf en fonction de l'accumulation, de la fusion éventuelle et du flux de glace à la ligne d'échouage (noté  $q_0$ ). La différence accumulation - fusion ( $\alpha$ ) est supposée constante sur tout le domaine. En plus de l'équation de continuité, des équations d'équilibre quasistatique et de la loi rhéologique, Van der Veen introduit la conservation de la masse, dans l'hypothèse stationnaire :

$$\frac{\partial(uH)}{\partial x} = \alpha \Rightarrow uH = q_0 + \alpha x \quad (\text{IV-12})$$

Où  $u$  désigne la vitesse horizontale d'écoulement. Dans les équations d'équilibre quasistatique, comme pour l'ice-shelf de Weertman, le terme  $\partial\sigma_{xz}/\partial x$  est négligeable par rapport à  $\partial\sigma_{zz}/\partial z$  (ce qui se conçoit assez facilement car les termes déviateurs sont nettement inférieurs aux contraintes normales ; on donnera une justification rigoureuse de cette approximation dans l'analyse adimensionnelle des équations diagnostiques). On part donc des équations (IV-4), que l'on intègre verticalement sur toute l'épaisseur pour la projection sur  $x$  (première équation) et on intègre la seconde entre la surface et un niveau quelconque  $z$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} dz + [\sigma_{xz}]_{z=z_s} - [\sigma_{xz}]_{z=z_b} = 0 \\ \sigma_{zz} = \rho g(z - z_s) \end{array} \right. \quad (\text{IV-13})$$

La résolution de ces équations nécessite donc la connaissance des conditions aux limites à la base et en surface. On écrit donc que la surface est libre et que la base est soumise à la



pression de l'eau de mer ( $\underline{n}_s$  et  $\underline{n}_b$  sont les normales à la surface et à la base, pointant vers l'extérieur)

$$\begin{aligned} [\underline{\sigma}]_{z=z_s} \underline{n}_s = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \underline{n}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial z_s}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \\ [\underline{\sigma}]_{z=z_b} \underline{n}_b = -\rho g H \underline{n}_b \quad \text{avec} \quad \underline{n}_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-14})$$

Noter également que les bornes de l'intégrale figurant dans l'équation (IV-13) varient en fonction de l'abscisse. La permutation de l'intégrale et des dérivées n'est donc pas automatique. Il faut utiliser la règle de Leibnitz qui s'écrit ici :

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{\sigma}_{xx}) - [\sigma_{xx}]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + [\sigma_{xx}]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{IV-15})$$

En combinant (IV-13), les conditions aux limites en surface et à la base (IV-14) et la règle de Leibnitz (IV-15), les équations se simplifient pour donner (les vitesses horizontales étant supposées indépendantes de la profondeur, comme pour l'analyse de Weertman):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{\sigma}_{xx}) = \rho g H \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \sigma_{zz} = \rho g (z - z_s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (H (2\bar{\eta} \dot{\epsilon}_{xx} - \bar{P})) = \rho g H \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \bar{\sigma}_{zz} = -2\bar{\eta} \dot{\epsilon}_{xx} - \bar{P} = -\rho g \frac{H}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \dot{\epsilon}_{xx} = \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) g \frac{H}{8\eta} + cste \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

On peut montrer à l'aide de la condition à la limite sur le front de glace (IV-7) que la constante d'intégration de l'équation précédente est nulle. Il ne reste plus qu'à combiner cette équation avec la conservation de la masse (IV-12). Pour y arriver, on remplace d'abord la viscosité par sa valeur donnée par la loi de Glen :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) g \frac{H}{4} \frac{\dot{\epsilon}_{xx}^{2/3}}{B} = \frac{H^3}{64} \left( \frac{\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) g}{B} \right)^3 = \lambda H^3 \quad (\text{IV-17})$$

On multiplie le membre de gauche et le membre de droite par  $u^3 dx$  et on intègre par rapport à  $x$ , ce qui permet de calculer les variations horizontales de la vitesse :

$$u^3 du = \lambda (q_0 + ax)^3 dx \Rightarrow u = \left[ u_0^4 - \frac{q_0^4 \lambda}{a} + \frac{\lambda}{a} (q_0 + ax)^4 \right]^{1/4} \quad (\text{IV-18})$$

Et on peut alors en déduire l'épaisseur en fonction de  $x$  à l'aide de la conservation de la masse. Cette solution analytique ne prend pas non plus en compte le frottement sur les bords,

mais elle permet un test facile des schémas numériques utilisés dans les modèles d'écoulement d'ice-shelf. Cette solution analytique reproduit qualitativement la forme des ice-shelves (cf. figure suivante).

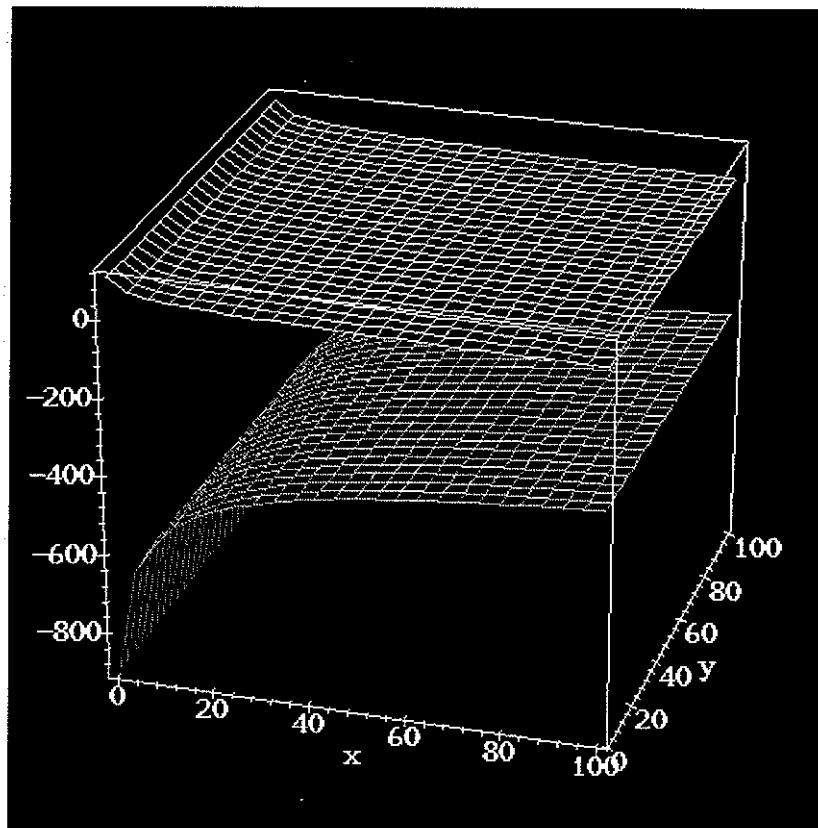


Figure IV-7 : « L'ice-shelf de Van der Veen » ( $x$  est en km, l'altitude est en m). L'altitude de la surface et de la base ont été calculées à l'aide de la solution analytique, en choisissant les paramètres suivants :  $\bar{B}=5.6 \times 10^5 \text{ Pa a}^{1/3}$  (coefficient rhéologique correspondant à une température de  $-20^\circ\text{C}$ ),  $a=0.3 \text{ m a}^{-1}$ ,  $H_0=1000\text{m}$ ,  $u_0=400\text{m a}^{-1}$ ,  $\rho=920 \text{ kg m}^{-3}$  et  $\rho_w=1028 \text{ kg m}^{-3}$ .

### IV.2.3. Dérivation des équations diagnostiques<sup>6</sup>

Les deux solutions analytiques précédentes permettent d'appréhender les éléments de mécanique à utiliser pour simuler les vitesses d'écoulement d'un ice-shelf. Il est délicat de résoudre numériquement les équations d'équilibre quasistatique complètes (en trois dimensions), avec une rhéologie non linéaire : on est donc amené à identifier les termes prépondérants qui interviennent dans la dynamique de l'ice-shelf.

<sup>6</sup> Les équations du mouvement de l'ice-shelf sont dites *diagnostiques*, car le temps n'intervient pas explicitement (on a négligé les termes d'accélération et d'inertie dans les équations de conservation de la quantité de mouvement). Une équation qui permet de prédire l'évolution du système (e.g. conservation de la masse) sera dite *prognostique*.

Les équations du mouvement que nous utiliserons sont celles du modèle réduit de Morland (Morland, 1987 ; Morland et Zainuddin, 1987). Elles reposent sur l'identification d'un petit paramètre, le rapport d'aspect (rapport de l'échelle verticale caractéristique sur l'échelle horizontale), et sur un développement en série de perturbations par rapport à ce paramètre<sup>7</sup>. D'autres auteurs ont essayé, avec plus ou moins de réussite, de dériver ces équations de manière indépendante.

#### IV.2.3.1. Analyse adimensionnelle

Le but de cette partie est de dériver les équations du mouvement de l'ice-shelf de façon rigoureuse, en montrant que certaines des hypothèses faites par Weertman ou Van der Veen (telles que l'indépendance de la vitesse horizontale en fonction de la profondeur) découlent du faible rapport d'aspect. Le résultat de l'analyse dimensionnelle est que les équations du mouvement de l'ice-shelf ont la forme suivante (la glace étant supposée isotrope) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{IV-19})$$

Les deux raisons pour lesquelles je détaille ce calcul ici sont les suivantes:

- Lors de mon arrivée en thèse, fin 1994, l'expérience EISMINT<sup>8</sup> a montré qu'il n'y avait pas d'accord sur les équations à utiliser. Il est donc important de justifier le mieux possible les équations de base des modèles numériques.
- L'approche que je choisis de décrire ici est légèrement différente de celle de Morland (1987) et sans doute plus abordable (elle donne néanmoins exactement les mêmes résultats). On la doit à MacAyeal (1989).

<sup>7</sup> Cette approche, qui consiste à prendre en considération l'ordre 0 et l'ordre 1 des équations d'équilibre quasistatique, est très similaire à celle utilisée en météorologie pour l'établissement de l'approximation quasi - géostrophique (dans ce cas, les équations de Navier - Stokes sont développées par rapport au nombre de Rossby)

<sup>8</sup> Il s'agissait d'un programme européen ayant pour but de faire le point sur les modèles de calotte et d'ice-shelves. Des simulations simples ont été définies afin de tester les modèles. Lors de cette expérience, 15 modèles d'écoulement de calotte posée ont été présentés et 5 modèles d'ice-shelf. Alors qu'un bon accord était trouvé entre les modèles de calotte posée (Huybrechts et al., 1996), les résultats des modèles d'ice-shelf étaient en désaccord complet.

#### IV.2.3.1.1. Théorème de Vachy - Buckingham

En mécanique des fluides, l'analyse de l'ordre de grandeur des quantités considérées fournit des indications précieuses sur les systèmes étudiés. C'est dans cette optique que les physiciens ont été amenés à définir des nombres sans dimension caractéristique (nous avons par exemple introduit le nombre de Peclet dans les chapitres précédents, et d'autres nombres tels que celui de Reynolds, Rossby, Froude ou Richardson sont utilisés couramment en géophysique).

Le théorème de Vachy - Buckingham permet de déterminer combien de nombres sans dimension sont suffisants pour décrire notre système. Pour cela, il faut faire le bilan des quantités qui interviennent, des relations (lois physiques) entre ces quantités et des unités fondamentales utilisées. En vrac, les quantités caractéristiques sont les suivantes :  $L$  et  $Z$  (échelles horizontale et verticale de variation),  $U$  et  $W$  (vitesses horizontale et verticale),  $\eta_0$  (viscosité de la glace),  $\rho$ ,  $\rho_w$  (masses volumiques de la glace et de l'eau de mer),  $g$  (accélération de la pesanteur) et  $P$  (pression octaédrale), soit 9 quantités au total. Les relations entre ces différentes échelles caractéristiques sont au nombre de trois : l'équation de continuité et deux contraintes dues aux projections horizontale et verticale des équations d'équilibre quasistatique.

Les unités fondamentales dont on a besoin ici sont la longueur (m), le temps (s) et la masse (kg). L'application du théorème de Vachy - Buckingham nous indique donc qu'il existe  $9-3-3=3$  nombres sans dimension indépendants caractérisant le problème. On choisit donc d'utiliser les suivants :

- le *rapport d'aspect*  $Z/L$  : il est important de remarquer qu'il s'agit d'un petit nombre, *i.e.* très inférieur à 1. On le notera  $\delta$ . Remarquer que l'équation de continuité entraîne :

$$\frac{U}{L} + \frac{W}{Z} \sim 0 \Rightarrow W \sim U \frac{Z}{L} \sim U\delta \quad (\text{IV-20})$$

- Le *nombre d'Argand*  $\Gamma$  : c'est le rapport entre l'échelle de pression et l'échelle du déviateur des contraintes ; on ne fait pas d'hypothèse particulière sur l'ordre de grandeur de ce nombre sans dimension.

$$\Gamma = \frac{\rho g Z}{\eta_0 \frac{U}{L}} \quad (\text{IV-21})$$

- Le rapport des masses volumiques glace sur eau de mer (ou densité de la glace par rapport à l'eau de mer). Ce nombre est important si l'on souhaite construire une maquette (cf. partie suivante) mais dans notre cas, il s'agit simplement d'une constante<sup>9</sup>.

#### IV.2.3.1.2. Une maquette du Ross Ice Shelf<sup>10</sup> ?

L'utilisation de modèles numériques n'est pas la seule façon d'étudier ou de prédire l'évolution d'un système physique. Une alternative consiste à construire un modèle réduit de ce système, puis d'observer son comportement (en espérant que les mesures sur la maquette sont plus facilement réalisables que dans la réalité). Afin de relier les observations sur maquette aux véritables quantités physiques que l'on cherche à déterminer (par exemple la vitesse horizontale d'écoulement du Ross Ice Shelf), il est nécessaire que les nombres sans dimension caractéristiques des deux systèmes (le « vrai » et la maquette) soient identiques.

Imaginons que l'on veuille construire une maquette de taille raisonnable du Ross Ice Shelf. On choisit par exemple de faire une maquette au 1/20000, ce qui nécessite une pièce (et une piscine) de plus de cinq mètres de côté. Le rapport d'aspect devant rester inchangé, l'épaisseur de la maquette devra varier entre 5 cm (1000 m / 20000) dans sa partie la plus épaisse et 1.5 cm sur le front. Ceci fournit déjà une contrainte technique très importante et difficilement surmontable.

Pour construire cette maquette, on peut choisir un matériau ayant la même densité et viscosité que la glace (en réalité, la viscosité de la glace dépend de l'état de contrainte, ce qui complique encore l'analyse). Le milieu dans lequel la maquette flotte devra avoir la même densité que l'eau de mer (invariance du rapport des masses volumiques). L'ordre de grandeur des vitesses d'écoulement de la maquette peut alors être estimé grâce à l'invariance du nombre d'Argand. Ainsi l'équivalent d'une vitesse d'écoulement de 400 m/an sur le Ross Ice Shelf sera de  $400/(20000)^2 = 1 \mu\text{m}/\text{an}$  sur la maquette ! En pratique une telle vitesse n'est pas mesurable avec précision.

Afin de surmonter le problème de précision de la mesure de vitesse, on peut choisir un matériau moins visqueux et/ou plus dense (en changeant en conséquence la densité du milieu

---

<sup>9</sup> En fait, on n'est pas obligé d'introduire ce nombre sans dimension : une alternative consiste à adimensionnaliser la masse volumique de l'eau de mer par celle de la glace. Notre but ici est uniquement de montrer que ce rapport est important si l'on souhaite construire une maquette.

<sup>10</sup> Des structures ressemblant à des ice-shelves auraient été observées par Galileo sur Europe (un satellite glacé de Jupiter). En utilisant une approche similaire à la théorie des maquettes, les nombres sans dimension permettraient sans doute des analogies intéressantes entre ce que l'on observe sur Terre et sur un astre où les conditions (gravité, viscosité du matériau...) sont complètement différentes.

dans lequel la maquette flotte). Si l'on arrive à mettre au point un appareillage capable de mesurer avec précision des vitesses d'écoulement de l'ordre du m/an sur la maquette, alors il faut choisir de construire la maquette dans un matériau tel que son rapport densité sur viscosité apparente soit un million de fois supérieur à celui de la glace (invariance du nombre d'Argand). De plus, il faudrait que ce matériau ait une loi rhéologique similaire à celle de la glace. La grande difficulté réside donc dans le choix du matériau de la maquette.

#### IV.2.3.1.3. Adimensionnalisation des équations du mouvement

Dans cette section, nous réécrivons les équations d'équilibre quasistatique et leurs conditions aux limites sous forme adimensionnelle. Comme  $x$  et  $y$  jouent le même rôle, par souci de simplicité, on calcule uniquement les projections suivant  $x$  et  $z$  de ces équations ; la projection suivant  $y$  s'obtiendra à partir de la projection suivant  $x$  par permutation de  $x$  et  $y$ ,  $u$  et  $v$  :

$$\text{Div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - P \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - P \right) = \rho g \end{cases} \quad (\text{IV-22})$$

La surface de l'ice-shelf est une surface libre (la pression atmosphérique et la friction du vent peuvent raisonnablement être négligées), ce qui donne la condition à la limite en surface suivante :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{z=z_s} \underline{\underline{n}}_s = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \begin{cases} \left( 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - P \right)_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_{z=z_s} = 0 \\ \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left( \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \left( 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - P \right)_{z=z_s} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

La base de l'ice shelf est soumise à la pression de l'eau de mer, ce qui donne la condition à la limite basale suivante :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] \underline{\underline{n}}_b = \rho_w g z_b \underline{\underline{n}}_b \Rightarrow \begin{cases} \left( 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - P \right)_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_{z=z_b} = \rho_w g z_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \left( \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \left( 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} - P \right)_{z=z_b} = -\rho_w g z_b \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

Le passage des variables dimensionnelles aux quantités adimensionnelles (notées  $\sim$ ) correspondantes se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (u, v, w) &= U(\tilde{u}, \tilde{v}, \delta \tilde{w}) \\
 (x, y) &= L(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
 (H, z_s, z_b) &= Z(\tilde{H}, \tilde{z}_s, \tilde{z}_b) \\
 P &= \rho g Z \tilde{P} \\
 \eta &= \eta_0 \tilde{\eta}
 \end{aligned}
 \tag{IV-25}$$

On réécrit les équations d'équilibre quasistatique en utilisant les transformations (IV-25):

$$\begin{cases}
 \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( 2 \frac{\eta_0 U}{L} \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \rho g Z \tilde{P} \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\eta_0 U}{L} \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\eta_0 U}{Z} \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) = 0 \\
 \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\eta_0 U}{Z} \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\eta_0 U}{Z} \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right) \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( 2 \frac{\eta_0 U}{L} \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - \rho g Z \tilde{P} \right) = \rho g
 \end{cases}
 \tag{IV-26}$$

Il est possible de simplifier le système (IV-26) en utilisant uniquement le rapport d'aspect et le nombre d'Argand (ceci est une conséquence du théorème de Vachy - Buckingham):

$$\begin{cases}
 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) + \delta^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( 2 \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \Gamma \tilde{P} \right) \right) + \delta^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) \right) = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( 2 \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - \Gamma \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} + 1 \right) \right) = 0
 \end{cases}
 \tag{IV-27}$$

Les équations (IV-27) sont valables à l'intérieur de l'ice-shelf, mais pas aux limites supérieure et inférieure. On écrit de la même façon (*i.e.* sous forme adimensionnelle) la condition à la limite supérieure.

$$\begin{cases}
 \delta^2 \left( 2 \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \Gamma \tilde{P} \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} - \frac{\partial \tilde{z}_s}{\partial \tilde{x}} + \delta^2 \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} - \frac{\partial \tilde{z}_s}{\partial \tilde{y}} - \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} = 0 \\
 \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right) \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} - \frac{\partial \tilde{z}_s}{\partial \tilde{x}} + \left( \tilde{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} + \delta^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right) \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} - \frac{\partial \tilde{z}_s}{\partial \tilde{y}} - \left( 2 \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - \Gamma \tilde{P} \right) \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_s} = 0
 \end{cases}
 \tag{IV-28}$$

Et de même pour la condition à la base :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta^2 \left( 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \Gamma \bar{P} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{x}} + \delta^2 \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{y}} - \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \delta^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} &= \frac{\rho_w}{\rho} \Gamma \delta^2 \bar{z}_b \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{x}} \\ \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \delta^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{x}} + \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \delta^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{y}} - \left( 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \Gamma \bar{P} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} &= -\frac{\rho_w}{\rho} \Gamma \bar{z}_b \end{aligned} \right. \quad (\text{IV-29})$$

IV.2.3.1.4. Développement en série de perturbations

Une technique classique pour étudier les équations adimensionnelles établies plus haut, consiste à écrire les variables adimensionnelles sous forme de développement en série de perturbations par rapport à un petit paramètre, ici le rapport d'aspect élevé au carré. Comme il est difficile de calculer tous les termes de cette série, on la tronque en ne retenant que les ordres prépondérants. Le développement en série de perturbations s'écrit formellement :

$$\left( \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{P} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^{2i} \left( \bar{u}^{[i]}, \bar{v}^{[i]}, \bar{w}^{[i]}, \bar{P}^{[i]} \right) \quad (\text{IV-30})$$

Il faut remarquer que  $\delta$  est petit, mais arbitraire, puisqu'il résulte du choix d'une échelle de longueur caractéristique. Ainsi, un polynôme en  $\delta$  sera nul, si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : c'est cette propriété élémentaire que nous utilisons pour identifier les termes prépondérants des équations d'équilibre quasistatique. Dans un premier temps, on se limite à un développement d'ordre 0 ; la combinaison de (IV-27), (IV-28), (IV-29) et (IV-30) donne, pour la projection sur  $x$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}^{[0]}}{\partial \bar{z}} \right) &= 0 \\ \left( \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}^{[0]}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_x} &= 0 \\ \left( \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}^{[0]}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}^{[0]}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{IV-31})$$

Ce qui confirme ce que Weertman ou Van der Veen avaient supposé, à savoir que les vitesses horizontales sont « à peu près » (*i.e.* à l'ordre 0) indépendantes de la profondeur. La même analyse peut être faite pour la projection verticale, en utilisant l'indépendance des vitesses horizontales à l'ordre 0 en fonction de la profondeur :



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) - \Gamma \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + 1 \right) = 0 \\ \left( 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \Gamma \bar{P} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_s} = 0 \\ \left( 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \Gamma \bar{P} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} = \frac{\rho_w}{\rho} \Gamma \bar{z}_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{P} = \bar{z}_s - \bar{z} - \frac{2\bar{\eta}}{\Gamma} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\ \bar{z}_b = -\frac{\rho}{\rho_w} \bar{H} \end{cases} \quad (IV-32)$$

En résumé, l'étude de l'ordre 0 nous indique seulement que l'ice-shelf flotte en équilibre hydrostatique avec l'eau de mer et que les vitesses horizontales sont indépendantes de la profondeur. Pour obtenir des informations supplémentaires sur la vitesse d'écoulement il faut développer les séries de perturbations à l'ordre supérieur<sup>11</sup>. L'introduction de l'ordre 1 dans la projection horizontale des équations du mouvement donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right) = -2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \Gamma \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \\ \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_s} = - \left( \Gamma \bar{P} - 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_s} \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial \bar{x}} + \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_s} \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial \bar{y}} \\ \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} = \left( \Gamma \left( \bar{H} - \bar{P} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{x}} + \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{\bar{z}=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{y}} \end{cases} \quad (IV-33)$$

Toute l'astuce du calcul consiste ensuite à intégrer verticalement la première équation de (IV-33) pour éliminer l'ordre 1 des équations. On utilise les conditions aux limites fournies par les deux autres équations (IV-33):

<sup>11</sup> Ceci est une différence importante par rapport à la dynamique de la calotte posée, où l'ordre 0 de l'approximation « couche mince » permet de calculer de manière approchée les vitesses d'écoulement de la calotte (cf. Hutter, 1983, pour une analyse adimensionnelle détaillée des équations de la calotte posée).

$$\begin{aligned}
 & \left( \Gamma \bar{P}^{[0]} - 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)_{z=\bar{z}_s} \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial \bar{x}} - \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{z=\bar{z}_s} \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial \bar{y}} \\
 & + \left( \Gamma \left( \bar{H} - \bar{P}^{[0]} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)_{z=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{x}} + \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right)_{z=\bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{y}} \\
 & = \int_{\bar{z}_b}^{\bar{z}_s} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) - \Gamma \frac{\partial \bar{P}^{[0]}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \right] d\bar{z}
 \end{aligned} \tag{IV-34}$$

A partir de là, les équations du mouvement (sous forme adimensionnelle) se déduisent à l'aide de la règle de Leibnitz, afin d'invertir les signes intégrale et dérivée. On utilise (IV-32) pour éliminer la pression et l'équation (IV-34) se simplifie de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( 2\bar{\eta} \bar{H} \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{\eta} \bar{H} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \right) = \Gamma \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} \tag{IV-35}$$

L'équation du mouvement suivant  $y$  se trouve par permutation de  $x$  et  $y$ ,  $u$  et  $v$ . En conclusion, l'analyse adimensionnelle montre que, au premier ordre près, les composantes de la vitesse horizontale sont régies par un système d'équations aux dérivées partielles de type elliptique qui s'écrit, sous forme dimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \tag{IV-36}$$

L'intérêt de l'analyse adimensionnelle est de montrer de manière rigoureuse que le problème tridimensionnel de départ peut-être réduit à un problème 2D dans le plan horizontal, grâce à l'analyse des ordres de grandeur intervenant dans l'ice-shelf.

#### IV.2.3.2. Conditions aux limites

L'hypothèse principale du raisonnement précédent (l'indépendance des vitesses horizontales avec la profondeur) n'est probablement pas valide au niveau des limites de l'ice-shelf. Par exemple la ligne d'échouage peut être une zone de transition où l'écoulement passe d'un régime de cisaillement vertical à un régime de contraintes longitudinales. Ce problème (l'un des plus intéressants et des plus difficiles de la dynamique des calottes) a été traité analytiquement par Barcilon et MacAyeal (1993) dans l'hypothèse d'une rhéologie Newtonienne (*i.e.* linéaire) et numériquement par Lestringant (1994). Dans les deux cas, il

s'agit d'études bi-dimensionnelles dans le plan vertical. Ici, on supposera que les limites du domaine étudié sont suffisamment éloignées de la ligne d'échouage et du front de glace (où l'on rencontre le même genre de problème, cf. Morland, 1987) pour que nos hypothèses restent valables.

Les conditions aux limites des problèmes mécaniques sont généralement de deux types : cinématique (la vitesse est spécifiée sur cette limite) ou dynamique (la force est imposée). Bien entendu cette distinction est artificielle et dépend du domaine que l'on étudie. Comme les phénomènes de glissement sur les côtés (*i.e.* sur le bord des baies) ne sont pas très bien compris quantitativement, on choisit de les décrire par une condition à la limite cinématique (vitesse nulle). Cette approche est cohérente avec les observations sur les grands ice-shelves (le Ross Ice Shelf, le long de la chaîne Transantarctique par exemple) mais une paramétrisation plus appropriée serait nécessaire pour des études à plus petite échelle. Un des inconvénients d'une telle approche est sa tendance à surestimer la force qui retient l'ice-shelf dans la baie (MacAyeal et al., 1986). Les glaciers émissaires qui alimentent l'ice-shelf sont également prescrits par des conditions aux limites cinématiques : leurs vitesses d'écoulement sont des paramètres d'entrée du modèle. En revanche, on connaît le bilan de force sur le front de glace (voir figure IV-4) et on peut donc y appliquer une condition à la limite dynamique.

La condition à la limite est écrite sous forme intégrée pour être cohérente avec les équations diagnostiques (IV-36),  $\underline{n}_f$  étant la normale au front, pointée vers l'extérieur :

$$\int_{z_b}^{z_s} [\underline{\sigma}]_{x=x_f} \underline{n}_f dz = - \int_{z_b}^0 \rho_w g z \underline{n}_f dz \quad (\text{IV-37})$$

On choisit  $\underline{x}$  colinéaire avec l'axe de la normale ; si on projette l'expression précédente sur les deux axes horizontaux, et que l'on calcule la pression à l'aide de l'équation de continuité, on obtient :

$$\begin{cases} 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) g \frac{H^2}{2} \\ \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-38})$$

On peut remarquer la similarité entre ces conditions aux limites sur le front et la forme des équations diagnostiques.

## IV.2.4. Résolution numérique des équations diagnostiques

Il n'est pas possible de résoudre analytiquement les équations diagnostiques et leurs conditions aux limites avec une géométrie réaliste : les seules solutions analytiques connues à ce jour sont celles de Weertman et Van der Veen décrites en début de chapitre. Ce chapitre décrit donc les méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour résoudre ces équations.

### IV.2.4.1. Les modèles de Huybrechts et Determann

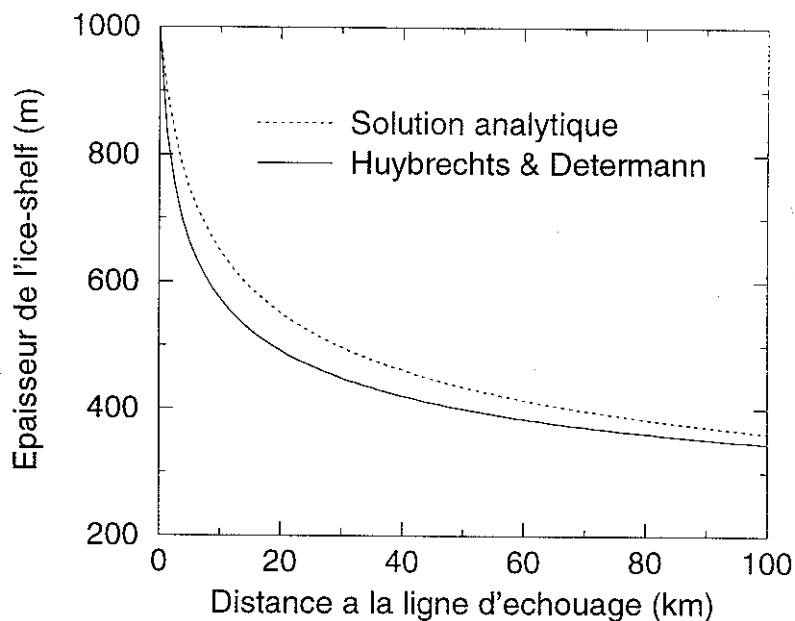


Figure IV-8 : Confrontation<sup>12</sup> des modèles de Huybrechts (1992) et Determann (1991) avec la solution analytique de Van der Veen. Les paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure IV-7, sauf le coefficient rhéologique  $\bar{B} = 5.85 \times 10^5 \text{ Pa a}^{113}$  (paramètres correspondant à la première phase de l'expérience EISMINT).

Le seul modèle tridimensionnel de calotte Antarctique prenant en compte l'interaction dynamique des ice-shelves est celui de Huybrechts (1990, 1992)<sup>13</sup>. Nous nous sommes donc intéressés à la partie « ice-shelf » de ce modèle, qui est bi-dimensionnelle et très similaire à l'étude de Determann (1991). Les équations diagnostiques utilisées comme base de ces deux modèles sont différentes de (IV-36) : elles proviennent de l'hypothèse, douteuse d'après l'étude adimensionnelle, que les gradients verticaux de cisaillements verticaux sont négligeables par

<sup>12</sup> Les modèles que je compare ici ne sont pas les modèles originaux mais des modèles que j'ai reconstitués à partir de ces deux thèses.

<sup>13</sup> Un nouveau modèle de ce type est développé par Catherine Ritz et son équipe au LGGE. Le modèle d'ice-shelf développé dans cette thèse est un élément du modèle 3D Antarctique.

rapport aux autres termes des équations d'équilibre quasistatique. De plus, dans les deux études, les gradients horizontaux de viscosité moyenne apparente sont négligés.

Comme ces hypothèses sont différentes de celles suggérées par l'analyse adimensionnelle ci-dessus, nous les avons testées en confrontant leur solution unidimensionnelle stationnaire à la solution analytique de Van der Veen qui, elle, est communément admise.

La différence entre la solution analytique et les résultats du modèle de Huybrechts (1992) ou de Determann (1991) est sensible (cette différence est encore plus marquée sur les vitesses d'écoulement). L'expérience montre que les hypothèses faites par ces deux auteurs sur les gradients verticaux de cisaillements verticaux et sur les gradients horizontaux de viscosité moyenne influencent les résultats de manière significative. Signalons que les deux modèles présentés dans les parties suivantes reproduisent la solution analytique.

Nous avons tout de même essayé de résoudre les équations (IV-36), avec le même type de méthodes numériques : différences finies centrées avec résolution d'un système linéaire par relaxation (cf. Press et al., 1992). La relaxation est une méthode de résolution adaptée aux matrices à diagonale principale dominante, ce qui n'est pas tout à fait le cas ici (à cause des conditions aux limites). Dans certaines configurations, ce type d'algorithme ne converge pas. Dans la suite, on montrera donc d'autres algorithmes possibles de résolution des équations diagnostiques.

#### ***IV.2.4.2. Eléments finis : le modèle de MacAyeal<sup>14</sup>***

Le premier modèle numérique bi-dimensionnel d'écoulement d'ice-shelf utilisant les équations (IV-36) est celui de MacAyeal. On considérera par la suite ce modèle comme une référence pour notre modèle de type différences finies, moins élaboré mais sans doute mieux adapté à l'étude d'une calotte marine. Plusieurs versions du modèle de MacAyeal existent et nous décrivons ici une des plus récentes (cf. MacAyeal, 1996 pour plus de détails).

La différence majeure entre une méthode de type différences finies et de type éléments finis se situe au niveau de la forme des équations aux dérivées partielles considérées. En différences finies, les équations doivent être satisfaites localement sur certains points de la grille, alors que l'approche éléments finis utilise la forme faible des équations aux dérivées partielles. La seconde approche fait appel à un formalisme plus compliqué et souvent plus coûteux en temps de calcul, mais il permet de mieux traiter des domaines géométriques compliqués, et de mieux conserver globalement les quantités physiques importantes (énergie ou masse par exemple).

---

<sup>14</sup> La description du modèle est tirée des notes de cours de Douglas MacAyeal.

Le point de départ de cette méthode de résolution consiste à transformer les équations diagnostiques (IV-36) à l'aide d'une méthode de Galerkin. Par exemple la première équation diagnostique (projection sur l'axe  $x$ ) peut s'écrire, pour toute fonction poids  $\psi(x,y)$  arbitraire<sup>15</sup>

$$\iint_{(\Gamma)} \psi(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{IV-39})$$

On suppose  $\psi(x,y)$  suffisamment dérivable (c'est possible puisque cette fonction est arbitraire) et on modifie l'expression précédente en utilisant le théorème de la divergence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \iint_{(\Gamma)} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \frac{H^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy \\ & - \oint_{(\delta\Gamma)} \psi \left( \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \frac{H^2}{2} \right) \mathbf{n}_x + \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{n}_y \right) d\mathbf{l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-40})$$

Ce que l'on retrouve dans l'intégrale simple n'est autre qu'une formulation faible de la condition à la limite sur le front (IV-38). Pour annuler cette intégrale il suffit de spécifier  $\psi = 0$  au niveau des conditions aux limites *cinématiques* (i.e. sur les bords du domaine où l'on fixe la vitesse). Le même type de transformation peut être effectué avec la seconde équation diagnostique.

La seconde étape du calcul consiste à discrétiser le domaine en  $N$  triangles (pas forcément identiques, ce qui permet d'augmenter la résolution dans les zones sensibles du domaine) : cette étape peut être fastidieuse si elle est faite manuellement, mais il existe maintenant des logiciels performants pour générer des grilles adaptées aux études de type éléments finis. La fonction arbitraire, ou fonction poids, et les vitesses sont supposées varier linéairement à l'intérieur de chaque triangle (ceci est spécifique au modèle de MacAyeal, la méthode des éléments finis pouvant s'appliquer de manière plus générale, avec des fonctions quadratiques par exemple) : dans chaque élément, la fonction poids et les vitesses horizontales s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} \psi(x,y) \\ u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} \Psi_k^e \\ u_k^e \\ v_k^e \end{pmatrix} (\alpha_k^e x + \beta_k^e y + \gamma_k^e) \quad (\text{IV-41})$$

<sup>15</sup> On pourra remarquer la similarité entre la fonction poids  $\psi(x,y)$  et les multiplicateurs de Lagrange utilisés pour la reconstruction de la viscosité apparente.

L'exposant  $e$  renvoie à l'élément correspondant à  $x$  et  $y$ . Les  $\psi_k^e$  désignent les valeurs de la fonction poids aux différents noeuds du triangle considéré. Les valeurs des coefficients  $\alpha_k^e$ ,  $\beta_k^e$  et  $\gamma_k^e$  dépendent uniquement de la discrétisation choisie : ils sont calculés à partir de la position des sommets des triangles, en remarquant que la fonction d'interpolation (qui est entre parenthèses dans l'équation (IV-41)) doit être égale à 1 au noeud correspondant à l'indice  $k$  et être nulle pour les deux autres noeuds. Ces 9 coefficients s'obtiennent donc par inversion d'une matrice de rang 3 :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^e & \alpha_2^e & \alpha_3^e \\ \beta_1^e & \beta_2^e & \beta_3^e \\ \gamma_1^e & \gamma_2^e & \gamma_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{IV-42})$$

D'autre part, les valeurs d'épaisseur de glace et de viscosité sont choisies constantes sur chaque élément. On doit donc affiner la grille aux endroits où l'on suppose que les gradients d'épaisseur ou de viscosité jouent un rôle important. Il s'agit maintenant de réécrire l'équation (IV-40) et son analogue (projection sur l'axe  $y$ ) en tenant compte de (IV-41), ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^N \eta^e H^e \sum_{k=1}^3 \psi_k^e \left( \alpha_k^e \sum_{j=1}^3 (4\alpha_j^e u_j^e + 2\beta_j^e v_j^e) + \beta_k^e \sum_{j=1}^3 (\beta_j^e u_j^e + \alpha_j^e v_j^e) \right) \\ & - \frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \sum_{e=1}^N (H^e)^2 \sum_{k=1}^3 \alpha_k^e \psi_k^e = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

L'expression précédente doit être vérifiée *quelles que soient les valeurs de  $\psi_k^e$*  à chaque noeud, ce qui signifie que chacun des facteurs de la fonction poids doit être nul (sauf sur les conditions aux limites cinématiques où l'on impose une fonction poids nulle). Le nombre d'équations à résoudre est alors égal au nombre d'inconnues (*i.e.* vitesses horizontales aux différents noeuds) et si l'on suppose la viscosité connue, les vitesses horizontales s'obtiennent par résolution numérique d'un système linéaire. Les temps de calcul peuvent être considérablement réduits en remarquant que le système est symétrique, défini positif (on peut alors utiliser la factorisation de Choleski). En pratique on utilise souvent une loi de comportement non linéaire (*e.g.* loi de Glen avec un exposant 3) et la viscosité dépend du champ de vitesses. Le calcul des vitesses horizontales se fait alors par itérations successives : on se donne une viscosité arbitraire avec laquelle on calcule le champ de vitesses, puis une nouvelle valeur de viscosité est estimée à partir du champ de vitesses de l'itération précédente. Cette procédure, appelée itération de Picart, converge rapidement dans le cas d'une loi de Glen classique.

### IV.2.4.3. Résolution par différences finies

Le modèle d'ice-shelf présenté ci-dessous utilise une approche un peu différente de celle de MacAyeal. Il n'est pas meilleur dans l'absolu et une discussion sur l'équivalence des deux méthodes est donnée dans la sous-partie suivante. La principale raison du choix d'une méthode de type différences finies est historique : le modèle d'ice-shelf est destiné, à terme, à être incorporé au modèle de calotte posée développé au LGGE (Fabre et al., 1995 ; Ritz et al., 1997), pour étudier de manière plus précise la dynamique de la calotte Antarctique. Le modèle de calotte posée étant de type différences finies, c'est cette méthode qui a été adoptée afin d'assurer l'homogénéité du modèle Antarctique final.

#### IV.2.4.3.1. Discrétisation

Les équations diagnostiques (IV-36) sont discrétisées sans transformation préalable, c'est à dire sous forme *locale*. La grille utilisée est alternée (voir figure suivante), ce qui permet d'estimer les flux de glace avec une bonne précision.

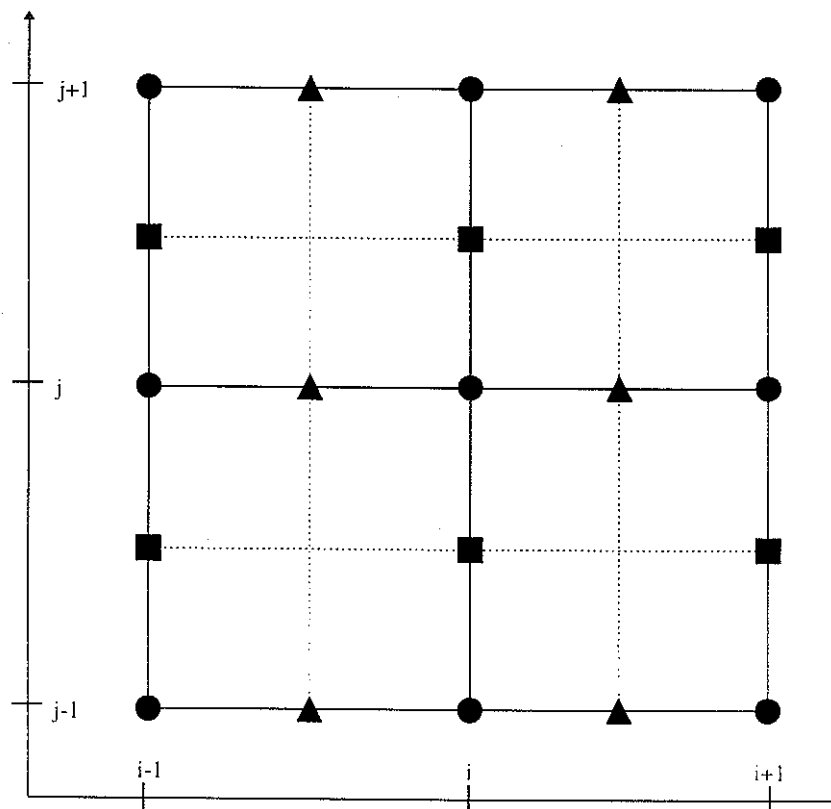


Figure IV-9 : grille alternée utilisée pour la discrétisation. On calcule les viscosités moyennes et les épaisseurs de glace au niveau des cercles, la vitesse horizontale  $u$  au niveau des triangles et  $v$  sur les carrés. L'utilité d'une telle discrétisation est de mieux conserver les flux et d'être plus stable qu'une discrétisation classique (Patankar, 1980).

La forme discrète de la première équation diagnostique (IV-36) s'écrit localement au point de coordonnées  $(i-1/2, j)$  :



$$\begin{aligned}
& \frac{2\bar{\eta}_{i,j} H_{i,j}}{\Delta x} \left( 2 \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \\
& - \frac{2\bar{\eta}_{i-1,j} H_{i-1,j}}{\Delta x} \left( 2 \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta x} + \frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \\
& + \frac{\bar{\eta}_{i-1,j} H_{i-1,j} + \bar{\eta}_{i,j} H_{i,j} + \bar{\eta}_{i-1,j+1} H_{i-1,j+1} + \bar{\eta}_{i,j+1} H_{i,j+1}}{4\Delta y} \left( \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\bar{\eta}_{i-1,j} H_{i-1,j} + \bar{\eta}_{i,j} H_{i,j} + \bar{\eta}_{i-1,j-1} H_{i-1,j-1} + \bar{\eta}_{i,j-1} H_{i,j-1}}{4\Delta y} \left( \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \\
& = \rho g \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \frac{H_{i,j}^2 - H_{i-1,j}^2}{2\Delta x}
\end{aligned}
\tag{IV-44}$$

La seconde équation diagnostique est discrétisée au point  $(i,j-1/2)$  : elle s'obtient par permutation de  $x$  et  $y$ ,  $u$  et  $v$ ,  $i$  et  $j$  dans l'équation précédente (on conserve ainsi la symétrie des équations de départ). La forme discrète des conditions aux limites s'obtient de manière analogue. On a alors autant d'équations à résoudre que d'inconnues : si la viscosité est connue, la vitesse s'obtient par résolution numérique d'un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues ( $N$  étant le nombre de points de grille actifs). Comme pour la résolution par éléments finis, une simple itération de Picart permet de traiter le cas où la loi de comportement est non linéaire (e.g. loi de Glen)

#### IV.2.4.3.2. Méthodes numériques de résolution

On s'aperçoit que, quel que soit le type de discrétisation utilisé, le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{IV-45}$$

$\mathbf{u}$  est un vecteur contenant les valeurs discrètes de vitesses horizontales (que l'on cherche à déterminer),  $\mathbf{b}$  est un vecteur connu et  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée, que l'on espère numériquement inversible et qui dépend de la viscosité. Il faut remarquer que la matrice  $\mathbf{A}$  est exceptionnellement large : si le domaine d'étude comporte  $100 \times 100$  points de grille (précision que l'on souhaite atteindre), la matrice  $\mathbf{A}$  comporte alors  $20000 \times 20000$ , soit 400 millions d'éléments. Le stockage complet d'une telle matrice nécessite donc plus de 3 000 Mo (Mega-octets) de mémoire<sup>16</sup>. L'ordinateur sur lequel j'effectue tous les calculs ne comportant

<sup>16</sup> Un réel « double précision » est codé sur 8 octets en FORTRAN.

que 80 Mo de mémoire, il n'est pas possible de stocker la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$  entièrement. Une manière classique de contourner ce problème est de remarquer qu'environ 99.9% des éléments de la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$  sont nuls ( $\underline{\mathbf{A}}$  est dite matrice creuse) : on peut ne stocker que les éléments non nuls et leur position (numéro de ligne et de colonne) dans la matrice.

Deux types d'algorithmes existent pour résoudre des systèmes linéaires de cette taille :

- des méthodes *directes* : le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  est déterminé de manière exacte grâce à des méthodes de pivot.
- des méthodes *itératives* qui, à partir d'une estimation de la solution, convergent plus ou moins bien et plus ou moins rapidement vers une meilleure solution. De manière générale ces méthodes sont plus rapides, mais moins robustes que les méthodes directes.

#### IV.2.4.3.2.1. Résolution directe

Plusieurs algorithmes de résolution directe de systèmes linéaires larges sont disponibles dans des bibliothèques informatiques. Deux d'entre eux se sont révélés particulièrement efficaces pour la résolution de notre problème.

- Nous avons testé la routine Y12M développée par Zlatev (1981). Seuls les éléments non nuls de la matrice creuse sont stockés en mémoire. La résolution du système se fait par factorisation  $\underline{\mathbf{LU}}$ ,  $\underline{\mathbf{L}}$  étant une matrice triangulaire inférieure,  $\underline{\mathbf{U}}$  triangulaire supérieure. Cette routine est rapide et requiert des tableaux de travail de taille mémoire raisonnable. Elle n'est malheureusement pas vectorisée et ses performances sur CRAY C90 sont modestes<sup>17</sup>.

- La librairie LAPACK contient des routines d'algèbre linéaire performants, spécialement adaptées aux machines à calcul vectoriel ou parallèle. La routine de résolution de système à bandes que nous avons employée s'appelle DGBSV (ou SGBSV pour sa version simple précision). Comme les bandes du système généré par différences finies sont espacées, l'inconvénient de cet algorithme est de stocker un nombre important de valeurs nulles. Cette routine requiert donc plus de mémoire, mais elle est plus rapide que Y12M (la différence de temps de calcul étant particulièrement importante sur CRAY C90).

Toutes ces routines (écrites en FORTRAN 77) sont disponibles gratuitement sur Internet à l'adresse suivante: <http://www.netlib.org/index.html>.

#### IV.2.4.3.2.2. Méthodes itératives

---

<sup>17</sup> Il existe également des routines de résolution de matrices creuses sur CRAY C90, mais nous n'avons pas les fichiers sources de ces routines, ce qui limite la portabilité et le test du code sur station de travail.

Deux méthodes itératives de résolution ont été testées :

- La *relaxation* ou méthode de Gauss Seidel (cf. Press et al., 1992) : une condition suffisante de convergence de cet algorithme est que la matrice  $\mathbf{A}$  soit à diagonale dominante (i.e. la valeur absolue de la diagonale principale est supérieure à la somme des valeurs absolues des termes de la même ligne), ce qui n'est pas tout à fait le cas ici. L'avantage de cet algorithme est son implémentation facile, le peu de mémoire qu'il requiert et sa convergence rapide si l'état initial n'est pas trop éloigné de la solution finale. L'inconvénient majeur est le manque de fiabilité de cette méthode, qui peut diverger de manière imprévisible pour certaines valeurs d'épaisseur et de viscosité.

- La méthode des *gradients bi-conjugués* (cf. Press et al., 1992) : nous avons vu dans le chapitre précédent que la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif pouvait se faire par minimisation d'une forme quadratique, grâce à l'algorithme des gradients conjugués. Les gradients bi-conjugués sont une adaptation de cette méthode à une matrice quelconque. Malheureusement il n'existe pas de critère assurant la convergence de l'algorithme. Si l'état initial est très différent de la solution finale, cet algorithme n'est pas avantageux en terme de temps de calcul par rapport à l'utilisation d'une routine de résolution directe.

Les méthodes itératives sont donc efficaces si l'on dispose d'une bonne estimation de la solution du système linéaire. Elles peuvent par exemple être appréciables lors de la simulation de l'évolution de la calotte, si l'on se trouve proche d'un état stationnaire (la solution de l'itération temporelle précédente peut alors servir de bon état initial). Cependant, leur manque de fiabilité nécessite l'utilisation d'une méthode de résolution directe de remplacement, au cas où la convergence serait trop lente.

#### IV.2.4.3.2.3. Réarrangement matriciel

La performance des algorithmes ci dessus dépend beaucoup de l'ordre dans lequel on classe les vitesses horizontales dans le vecteur  $\mathbf{u}$ . Les différents tests que nous avons faits montrent que le temps de calcul CPU que nécessite la résolution est influencé par la largeur de la bande principale de la matrice  $\mathbf{A}$ . Dans ces conditions il est avantageux de classer le vecteur  $\mathbf{u}$  en alternant les vitesses horizontales suivant  $x$  et suivant  $y$ , plutôt que de stocker les valeurs de  $u$  dans les  $N$  premières lignes de  $\mathbf{u}$ , puis  $v$  dans les  $N$  dernières.

Une permutation de l'ordre des lignes de  $\mathbf{u}$  permet de réduire un peu plus la largeur de la bande de la matrice  $\mathbf{A}$ . L'algorithme de réduction que nous utilisons est celui de Gibbs, Poole et Stockmeyer (également disponible à l'adresse Internet mentionnée).

#### IV.2.4.3.3. Décompositions de domaines

L'idée des décompositions de domaines est simple et bien adaptée aux problèmes elliptiques. Elle consiste à diviser le domaine d'étude en sous-domaines se recouvrant partiellement, et à résoudre les équations diagnostiques discrètes sur chacun des sous-domaines. Les conditions aux limites sur les bords fictifs sont inconnues et un choix naturel consiste à prendre le champ de vitesses du sous domaine voisin (méthode dite de Schwarz), puis à procéder par itérations successives, jusqu'à convergence. La rapidité de cette convergence dépend du taux de recouvrement que l'on choisit. Des tests effectués par Debreu (1995) sur l'équation de Poisson (*i.e.* l'EDP elliptique la plus simple) montrent qu'un taux de recouvrement de 20% est un bon compromis entre la taille des sous-domaines et la rapidité de convergence.

Pour montrer le principe de cette méthode, nous avons résolu les équations diagnostiques pour un ice-shelf idéal carré de 200 km de côté et de 500 m d'épaisseur. La viscosité de la glace est supposée constante, égale à 25 MPa a. Sur les bords gauche, haut et droit, la vitesse est prise égale à zéro, et le front de glace est situé en bas du domaine. Noter qu'un tel ice-shelf est assez irréaliste, car il n'est alimenté par aucun glacier émissaire : cette expérience n'est destinée qu'à tester la décomposition de domaines adaptée à la dynamique de l'ice-shelf. La densité de la glace est prise égale à  $917 \text{ kg m}^{-3}$ , celle de l'eau de mer à  $1028 \text{ kg m}^{-3}$  et l'accélération de la pesanteur est de  $9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .

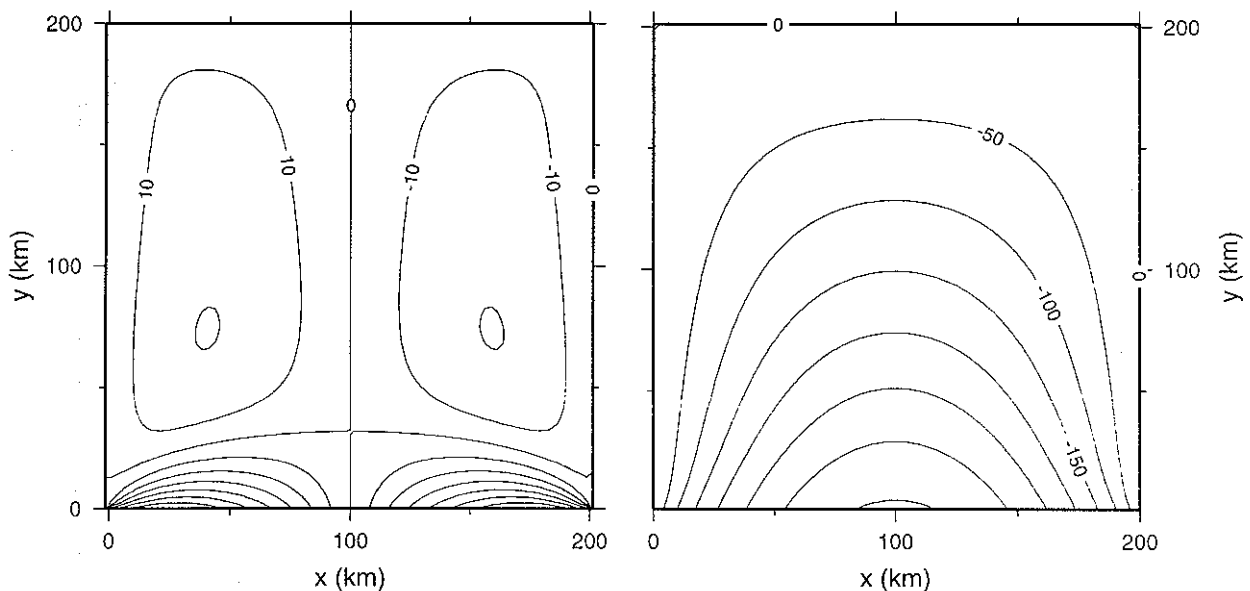


Figure IV-10 : solution des équations diagnostiques de l'ice-shelf idéal, calculée avec Y12M. Les vitesses suivant l'axe  $x$  (cadre de gauche) et suivant  $y$  (à droite) sont exprimées en  $\text{m a}^{-1}$ . On peut remarquer que la vitesse augmente avec la proximité du front de glace, ce qui est un phénomène très bien observé dans la nature. Une autre caractéristique intéressante est la convergence des lignes de courant dans le centre de l'ice-shelf et une divergence à proximité du front. Cette simulation a été faite sans décomposition de domaine. La grille utilisée comporte  $81 \times 81$  points de grille.

On divise ensuite l'ice-shelf en deux parties, dans le sens de la verticale, et on applique la méthode de Schwarz avec un recouvrement de l'ordre de 20%, à partir d'un état initial nul.

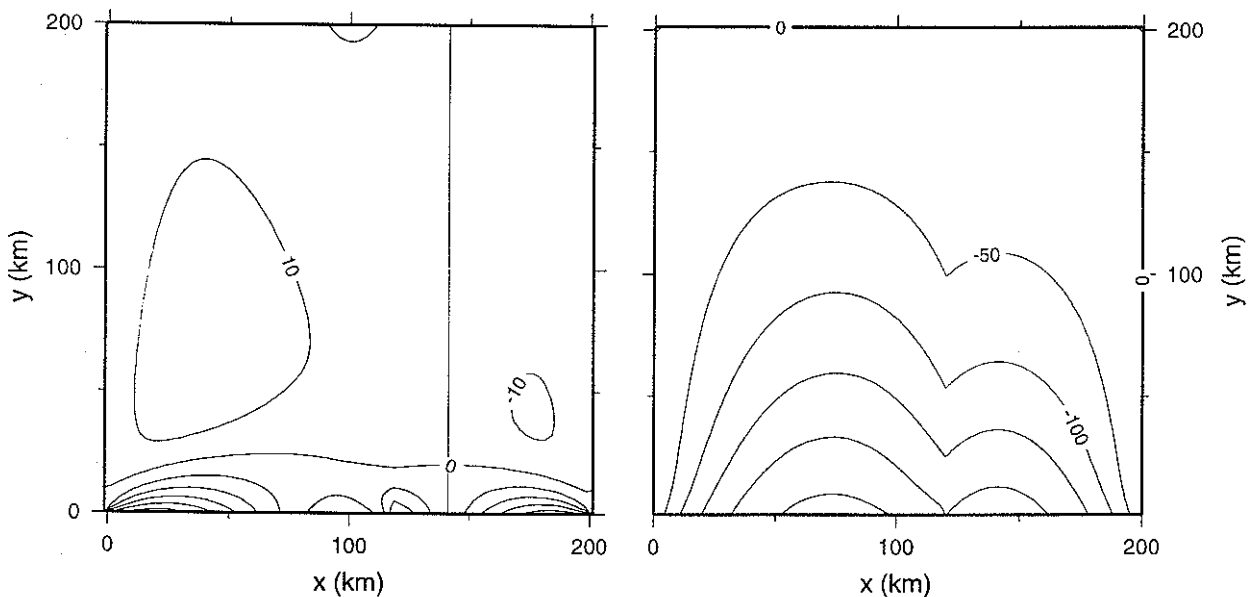


Figure IV-11 : résultats obtenus après la première itération ( $u$  à gauche et  $v$  à droite en  $m a^{-1}$ ) la symétrie de la solution finale n'est pas conservée, mais l'ordre de grandeur des vitesses simulées est correct.

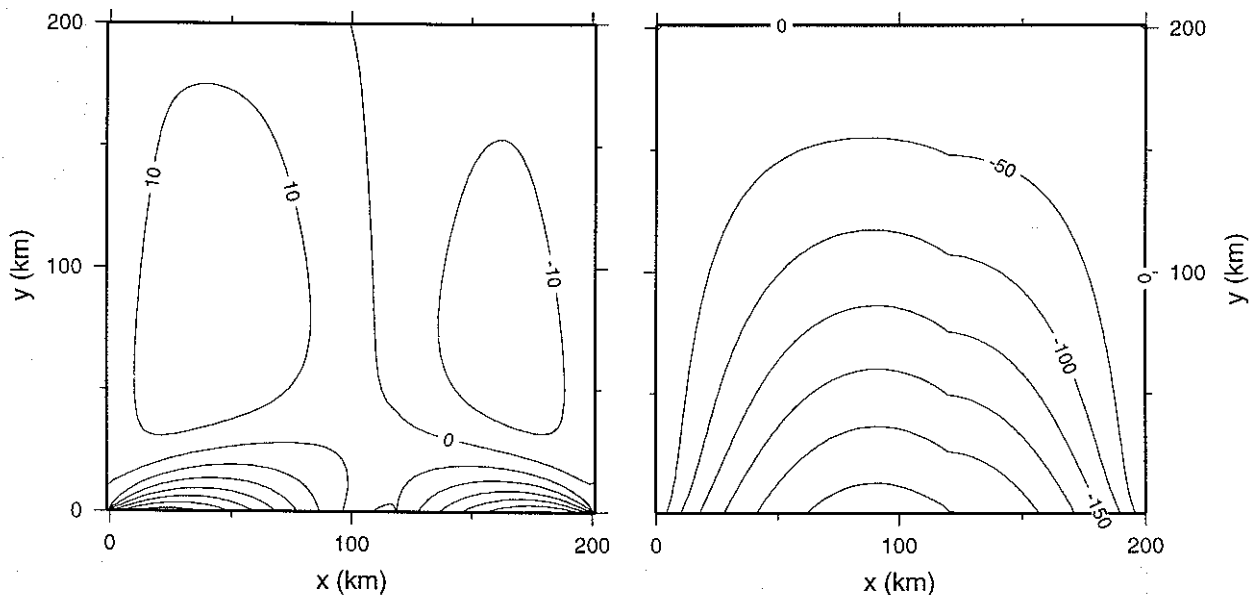


Figure IV-12 : après la seconde itération...

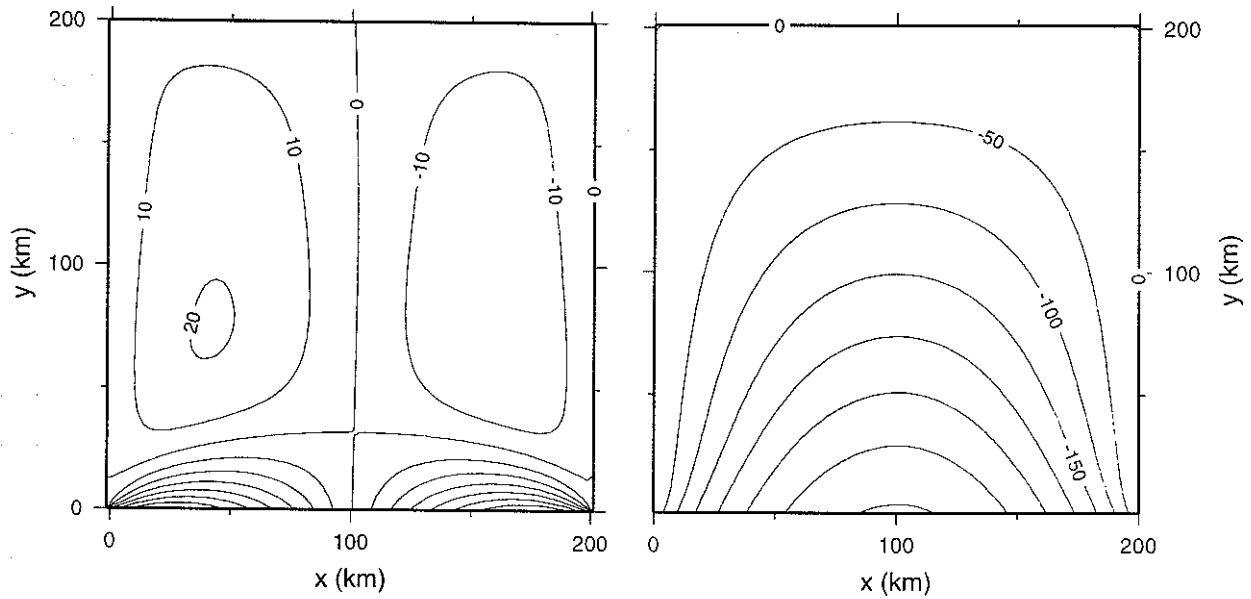


Figure IV-13 : après dix itérations... Noter que la symétrie n'est pas parfaite sur le champ  $u$  (cadre de gauche). Ce champ de vitesses est néanmoins une bonne approximation de la solution exacte de la figure IV-10.

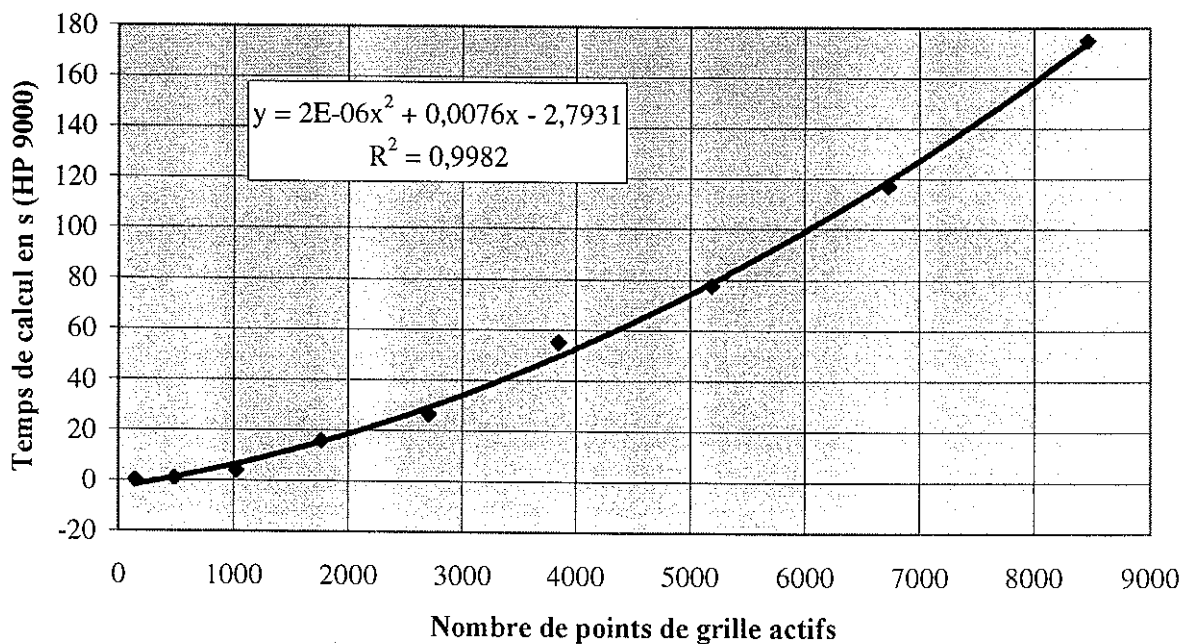


Figure IV-14 : temps de calcul CPU en fonction du nombre de points de grille actifs pour 9 domaines discrets différents (Le problème traité est l'ice-shelf idéal des figures IV-10, IV-11, IV-12 et IV-13 ; l'algorithme de résolution est Y12M). Cette fonction est bien approximée par un arc de parabole.

La décomposition de domaines est particulièrement adaptée au calcul sur machine parallèles : c'est son intérêt majeur. Un autre avantage réside dans le fait que le temps de calcul nécessaire à la résolution du système n'est pas proportionnel au nombre de points de

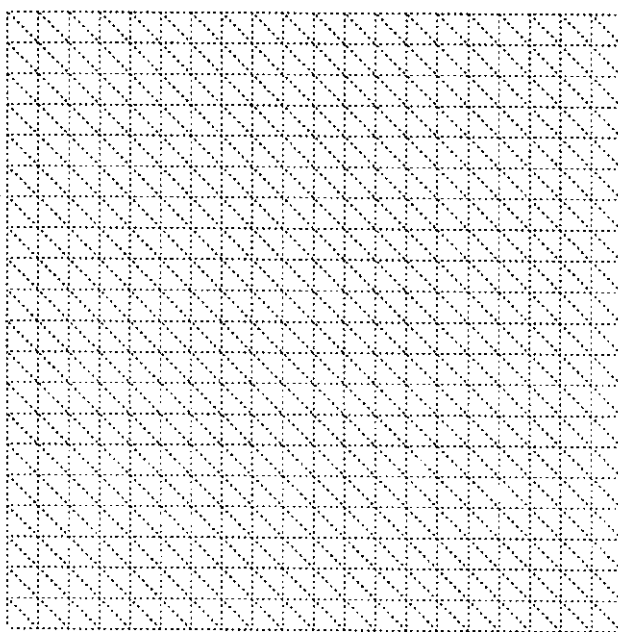
grille actifs (voir figure précédente), et il est donc intéressant de travailler sur des petits domaines (quitte à faire quelques itérations). Cette technique a été utilisée pour l'application du modèle d'ice-shelf à la calotte Antarctique : la décomposition de domaine est alors assez naturelle puisque chaque ice-shelf a un régime dynamique pratiquement indépendant.

#### ***IV.2.4.4. Equivalence des approches FDM et FEM***

Le but de cette partie est de montrer que les méthodes de résolution par différences finies (FDM) et par éléments finis (FEM) donnent des résultats similaires. Ces tests ne permettent pas de valider notre modèle, mais ils fournissent l'indication suivante : si un désaccord notable avec les observations est constaté, alors celui-ci sera dû à la *physique* du problème et non pas aux méthodes numériques employées.

##### *IV.2.4.4.1. Comparaison sur une géométrie idéale*

Dans un premier temps, nous avons programmé le modèle de MacAyeal en FORTRAN 77 dans le cas idéal illustré par la figure IV-10, avec les mêmes paramètres d'entrée. La grille triangulaire utilisée est présentée sur la figure suivante.



*Figure IV-15 : grille utilisée pour le test du modèle d'ice-shelf FEM sur géométrie idéale. Cette grille comporte 800 éléments triangulaires.*

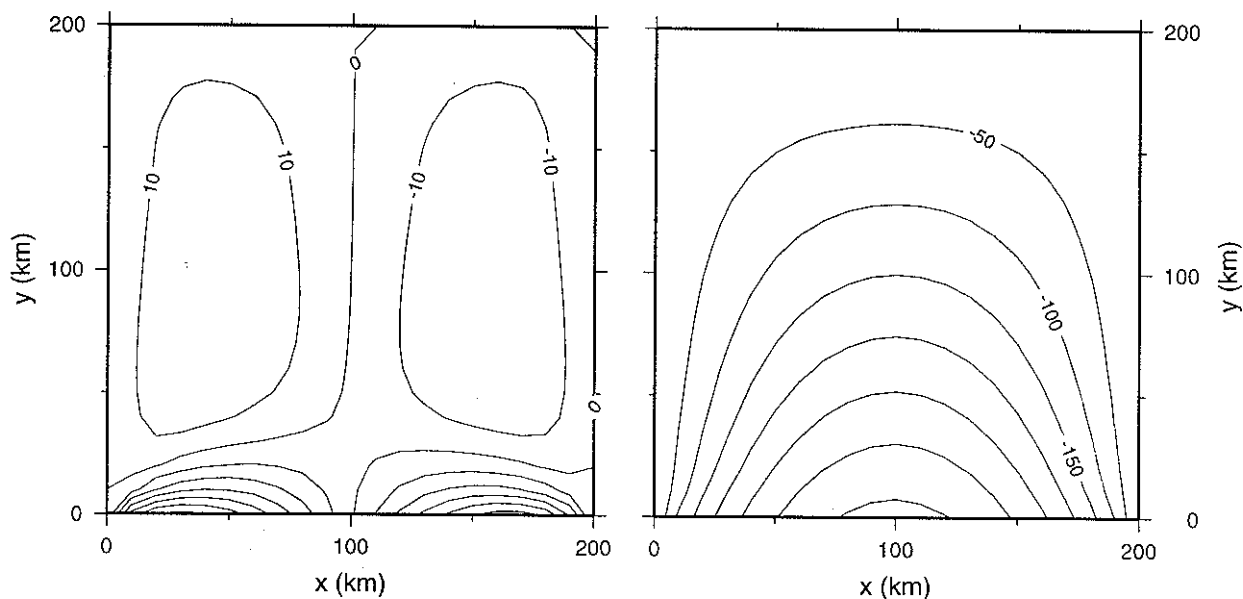


Figure IV-16 : champ de vitesses obtenu par résolution des équations diagnostiques par FEM ( $u$  à gauche,  $v$  à droite). Le système linéaire a été résolu numériquement à l'aide de la routine Y12M. Ces résultats doivent être comparés à ceux de la figure IV-10, en remarquant toutefois que la grille est plus fine dans la simulation FDM.

On remarque que la symétrie du champ de vitesses final n'est pas parfaite, en particulier sur le champ  $u$ . Ceci est dû à la grille triangulaire qui n'est pas symétrique par rapport à la droite  $x=100$  km. Cette asymétrie du champ de vitesses diminue avec la finesse du maillage. Une autre particularité, spécifique à l'exercice traité ici, est la vitesse nulle de l'élément en haut et à droite du domaine. Ceci est normal car chacun des noeuds de cet élément vérifie une condition à la limite cinématique ; cette caractéristique peut entraîner des problèmes numériques délicats lors de la simulation de l'évolution de la géométrie de l'ice-shelf avec le temps.

La comparaison des figures IV-10 et IV-16 montre que les deux méthodes numériques donnent des résultats très similaires : les différences entre les deux champs de vitesses simulés sont essentiellement dues à des différences de résolution (à résolution égale, les éléments finis demandent des temps de calcul plus importants car le système linéaire à résoudre est plus dense).

#### IV.2.4.4.2. Comparaison sur le Ross Ice Shelf



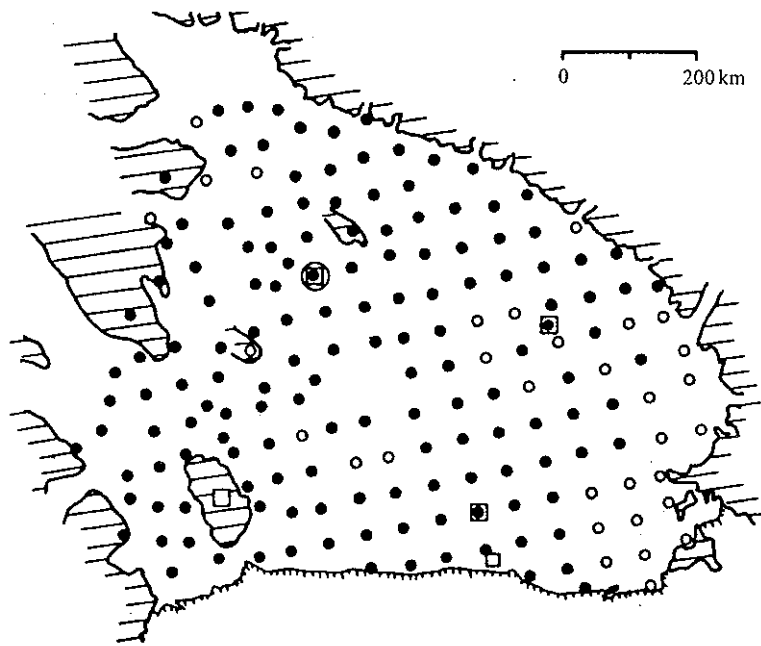


Figure IV-17 : carte du Ross Ice Shelf montrant la localisation des stations de mesures RIGGS (d'après Thomas, 1979)

Des mesures géophysiques et glaciologiques ont été effectuées sur le Ross Ice Shelf à partir du début du XX<sup>ème</sup> siècle (Scott et Shackleton avaient commencé à faire des observations lors de leurs premières missions d'exploration). En particulier, une campagne intensive de mesures a été menée entre 1973 et 1979 dans le cadre du projet RIGGS (Ross Ice Shelf Geophysical and Glaciological Survey). Nous avons compilé toutes ces observations sous forme d'une base de données standard, utilisable à des fins de modélisation (MacAyeal et al., 1996). Ce jeu de données, accessible au World Data Center for Glaciology A, à Boulder (Colorado, USA), comprend :

- Le champ d'épaisseur de l'ice-shelf mesuré par écho radar (Bentley et al., 1979 ; MacAyeal et al., 1987).
- Les vitesses horizontales d'écoulement mesurées par balises (Thomas et MacAyeal, 1982, Thomas et al., 1984, MacAyeal et al., 1987).
- La température mesurée à 10 m de profondeur (Thomas et al., 1984) : cette température est un bon indicateur de la température moyenne annuelle du site.
- L'accumulation en surface (Thomas et al., 1984).
- L'épaisseur de la colonne d'eau en dessous de l'ice-shelf (Bentley et Jezek, 1981).
- Les vitesses et épaisseurs des glaciers émissaires qui alimentent le Ross Ice Shelf (MacAyeal et Thomas, 1986 ; MacAyeal et al., 1987).

Tous ces champs ont été interpolés sur une grille régulière haute résolution de 111 x 147 points, utilisable par les modèles de type FDM et sur une grille triangulaire (FEM) de 30639 éléments. La résolution de la grille FDM est 6822 m et la résolution FEM varie entre 500 m (près des bords du domaine) et 20 km. Dans le cadre de l'expérience européenne EISMINT de comparaison des modèles de calottes, P. Huybrechts (PH), J. Determann (JD), C. Hulbe et D. MacAyeal (CHDM) ainsi que C. Ritz et moi-même (CRVR) avons comparé les résultats de nos modèles, en utilisant ce jeu de données standard. Le principal résultat de cette étude (MacAyeal et al., 1996) est que les modèles sont capables de produire une carte des vitesses qualitativement en accord avec les tendances observées (e.g. une vitesse plus élevée sur le front de glace) ; cependant on constate que les modèles sont quantitativement en mauvais accord entre eux (principalement à cause des différences dans les équations diagnostiques considérées et dans les conditions aux limites). Le meilleur accord est trouvé entre CHDM et CRVR qui utilisent pourtant des techniques numériques différentes.

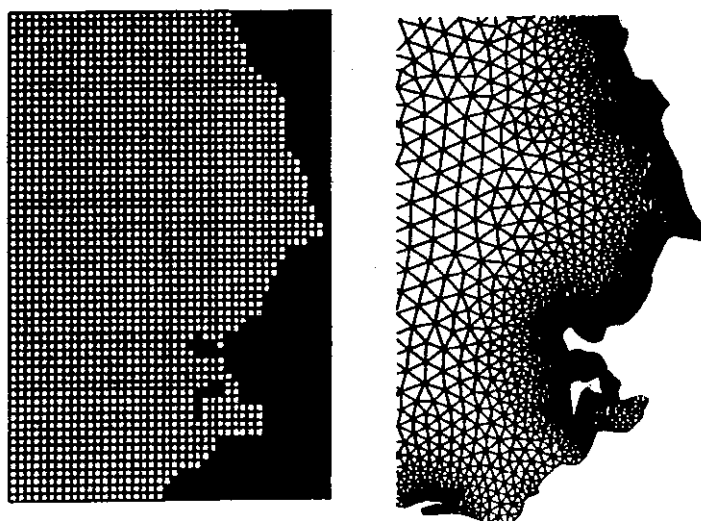


Figure IV-18 : comparaison des grilles différences finies et éléments finis du jeu de données standard.

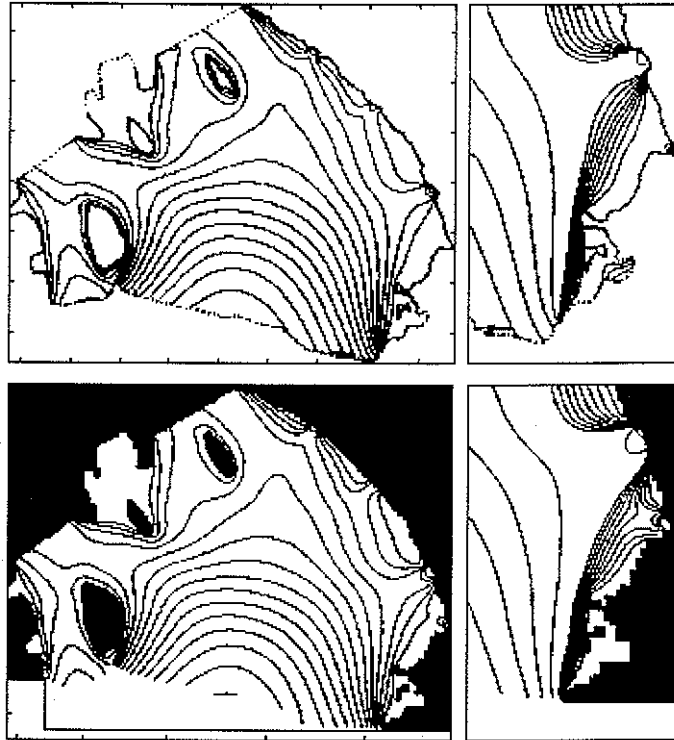


Figure IV-19 : magnitude de la vitesse simulée par CHDM (haut, modèle FEM) et CRVR (bas, modèle FDM). Les panneaux de droite montrent un zoom dans la région du glacier Byrd. L'intervalle des contours est de  $100 \text{ m a}^{-1}$  sur les panneaux de gauche et  $25 \text{ m a}^{-1}$  pour le zoom. Cette simulation a été faite en utilisant le champ d'épaisseur du jeu standard et une loi de comportement de type Glen, avec un exposant 3 et un coefficient  $\bar{B}$  égal à  $1.9 \cdot 10^8 \text{ Pa s}^{1/3}$ .

Dans les conditions de la simulation, aucun des modèles n'est capable de reproduire quantitativement les mesures de vitesses, ce qui est probablement lié au choix de la loi de comportement et à ses paramètres. Ce point sera discuté dans la partie *Rhéologie à grande échelle du Ross Ice Shelf*.

#### IV.2.4.4.3. Avantages et inconvénients des deux méthodes

Nous avons donc vu à travers deux exemples que les approches FEM et FDM étaient à peu près équivalentes : le choix d'une méthode dépend surtout de l'utilisation du modèle. Le modèle développé dans cette thèse est destiné à être couplé à un modèle FDM de calotte posée : c'est donc cette méthode qui a été retenue. Il faut également signaler que l'approche FDM est plus souple pour le traitement de l'équation de conservation de la masse.

FEM	FDM
La condition à la limite sur le front de glace peut être spécifiée de manière rigoureuse, quelle que soit la forme de celui-ci.	L'étude d'un ice-shelf réaliste nécessite l'ajout d'un domaine de glace fictif (pour le Ross Ice Shelf, l'épaisseur de ce domaine a été fixée à 1 m). La condition à la limite est alors spécifiée sur les bords de la grille.
L'étude de domaines géométriques compliqués est possible ; la grille triangulaire permet d'augmenter facilement la résolution dans les régions où l'on suspecte de fortes variations des quantités considérées (vitesses horizontales d'écoulement, viscosité...).	Dans la version actuelle du modèle, les zooms haute résolution ne sont pas possibles.
Si les limites de l'ice-shelf varient au cours du temps, il faut refaire la grille et recalculer les fonctions d'interpolation, ce qui nécessite des calculs importants.	La grille n'est pas modifiée en cas de changement de la géométrie de l'ice-shelf.

## IV.2.5. L'équation prognostique

### IV.2.5.1. Différences avec la calotte posée

Si l'on considère l'ordre 0 des équations d'équilibre quasistatique dans un modèle de calotte posée, alors la vitesse horizontale dépend *localement* de la géométrie. En d'autres termes, la vitesse horizontale est fonction de la pente et de l'épaisseur de la calotte, et il est possible de combiner les équations diagnostiques avec l'équation de conservation de la masse : l'équation d'évolution à traiter est alors une équation de diffusion (voir par exemple Ritz, 1992). Cette manipulation mathématique, extrêmement utile dans le cas des calottes posées, n'est pas possible pour l'ice-shelf, car les équations du mouvement ne sont pas locales (le flux de glace n'est pas fonction de l'épaisseur au point considéré, mais de la géométrie complète du domaine et des conditions aux limites) : par exemple un point d'ancrage (île ou ice-rise) peut influencer le régime d'écoulement de l'ice-shelf sur quelques centaines de kilomètres.

Dans l'ice-shelf, il faudra donc traiter la conservation de la masse (que l'on appelle aussi équation d'évolution ou équation prognostique) indépendamment des équations du mouvement. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla_h(\underline{\mathbf{v}}H) = a \quad (\text{IV-46})$$

$a$  désigne l'accumulation en surface (en mètre de glace par unité de temps) diminuée de la fusion basale éventuelle,  $\underline{\mathbf{v}}$  le vecteur vitesse (il ne contient que les deux composantes horizontales) et  $\nabla_h$  l'opérateur divergence horizontale. Les conditions aux limites sur les bords du domaine sont de deux sortes : on spécifie l'état initial (champs d'épaisseur en début de simulation), le flux d'entrée aux conditions aux limites cinématiques (correspondant aux glaciers émissaires, ou aux bords de la baie par exemple) et, sur le front de glace, on applique une condition de type radiation libre pour empêcher que la glace ne s'y accumule. Sur le front, on impose donc que le gradient de la projection du flux de glace sur la normale soit nul ( $\underline{\mathbf{n}}$  désigne la normale sortante au front) :

$$[\nabla(H\underline{\mathbf{v}}\underline{\mathbf{n}})]_{\text{gr}_f} = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{IV-47})$$

Cette condition à la limite est peu réaliste, car elle ne prend pas en considération le vèlage des icebergs au niveau du front. Dans l'état actuel de nos connaissances, il est en effet impossible de prévoir de manière déterministe la formation des icebergs à l'échelle de plusieurs années. Il est donc important de vérifier que cette impossibilité de prédire la position exacte du front, influence peu l'écoulement en amont : ce sont les vitesses et les déformations au niveau de la ligne d'échouage qui sont importantes pour la stabilité d'une calotte marine. Cette vérification est faite dans la partie *influence du vèlage sur l'écoulement de l'ice-shelf*

#### IV.2.5.2. Schéma numérique

L'équation (IV-46) et ses conditions aux limites sont discrétisées sur la grille alternée de la figure IV-9 : la discrétisation choisie est de type implicite, pour des raisons de stabilité numérique :

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^k (H_{i,j}^{k+1} + H_{i+1,j}^{k+1}) - u_{i-\frac{1}{2},j}^k (H_{i,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1})}{2\Delta x} \\ & + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^k (H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}) - v_{i,j-\frac{1}{2}}^k (H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1})}{2\Delta y} = a_{i,j}^k \end{aligned} \quad (\text{IV-48})$$

L'équation (IV-48) décrit un schéma de type « centré », mais un schéma « amont » est également envisageable. Il s'agit dans les deux cas de résoudre un système linéaire de type  $\underline{\mathbf{A}}'\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{b}}'$  à chaque itération temporelle. La matrice  $\underline{\mathbf{A}}'$  comporte une diagonale principale, deux diagonales supérieures et deux diagonales inférieures. On utilise un algorithme de relaxation (Press et al., 1992) pour la résolution numérique de ce système. Il est en effet toujours possible de construire une matrice  $\underline{\mathbf{A}}'$  à diagonale dominante (condition suffisante de convergence de la méthode de relaxation), en choisissant un pas de temps suffisamment petit.

Ce schéma donne des résultats satisfaisants : en faisant un bilan global des flux entrant et sortant de l'ice-shelf, on s'aperçoit que la perte (ou le gain) de masse due aux erreurs numériques est de l'ordre du pour cent (Rommelaere et Ritz, 1996). Cette erreur pourra sans doute être réduite à l'avenir en utilisant des algorithmes plus élaborés de type volumes finis (mieux adaptés au traitement des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique).

#### **IV.2.6. Influence du vêlage sur l'écoulement de l'ice-shelf**

Dans l'état actuel de nos connaissances sur les phénomènes de fissuration et de rupture du matériau glace, il n'est pas possible de prévoir avec précision la position du front des ice-shelves sur de longues périodes. Afin de connaître l'influence de la position du front sur l'écoulement de la calotte en amont, nous avons procédé à quelques tests simples à l'aide du modèle ci dessus. L'approche numérique la plus adaptée à cet exercice est la FEM car elle permet d'appliquer la condition à la limite sur le front de manière plus rigoureuse. Trois cas ont été étudiés :

- l'iceberg se forme dans une extension non confinée de l'ice-shelf
- l'iceberg se forme dans la baie retenant l'ice-shelf (zone confinée)
- l'iceberg se forme en amont d'une petite île, point d'ancrage de l'ice-shelf.

Ces trois simulations ont été faites avec une viscosité apparente de la glace de 25 MPa a sur géométrie idéale.

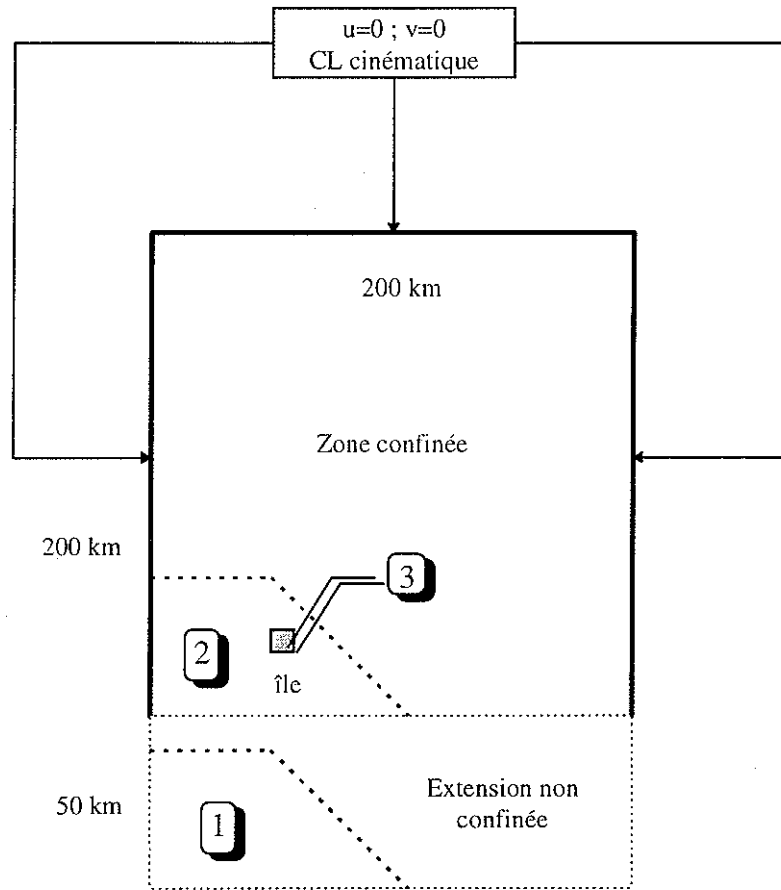


Figure IV-20 : vue schématique de l'ice-shelf idéal considéré pour l'étude de l'influence du vèlage.

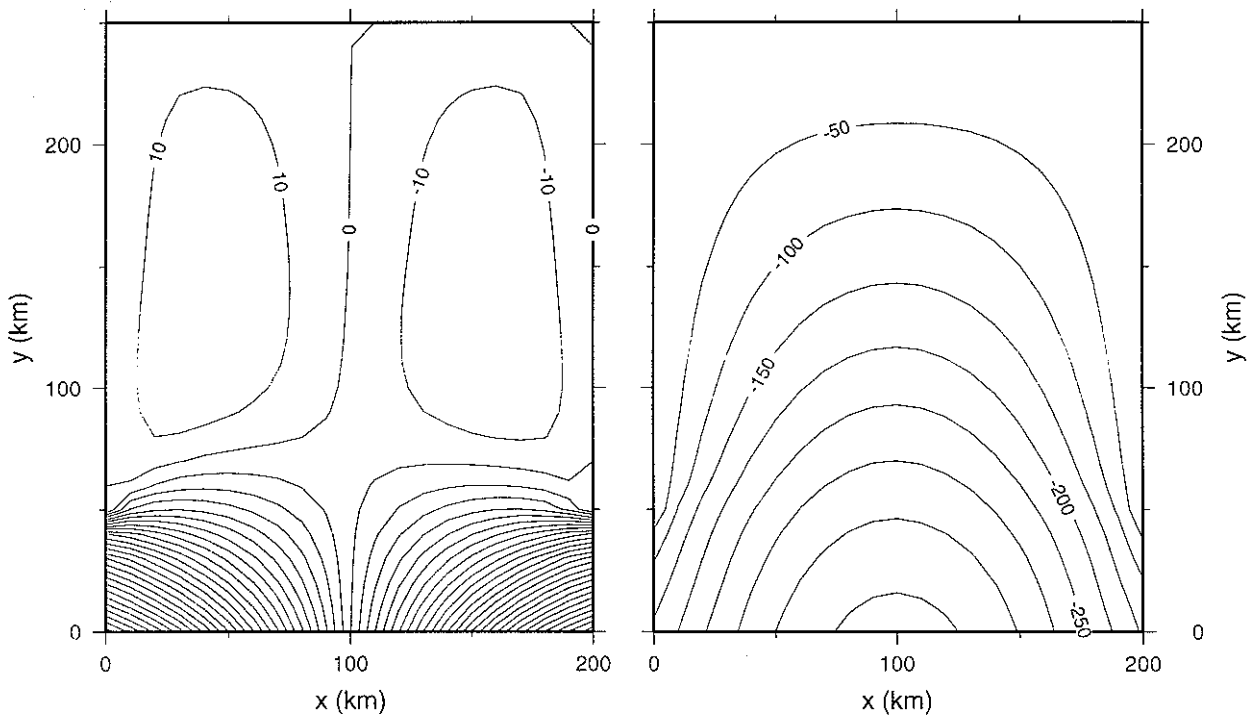


Figure IV-21 : champ de vitesses ( $u$  à gauche,  $v$  à droite en  $m a^{-1}$ ) simulé avant le vèlage de l'iceberg. La méthode utilisée est de type éléments finis (la grille utilisée comporte 1000 éléments). L'écoulement dans la partie confinée est similaire à celui de la figure IV-10 (p 137).

Dans le premier exemple, nous avons considéré un ice-shelf de même géométrie que sur la figure IV-10 (p 137), en y ajoutant une langue de glace libre de 200 km x 50 km.

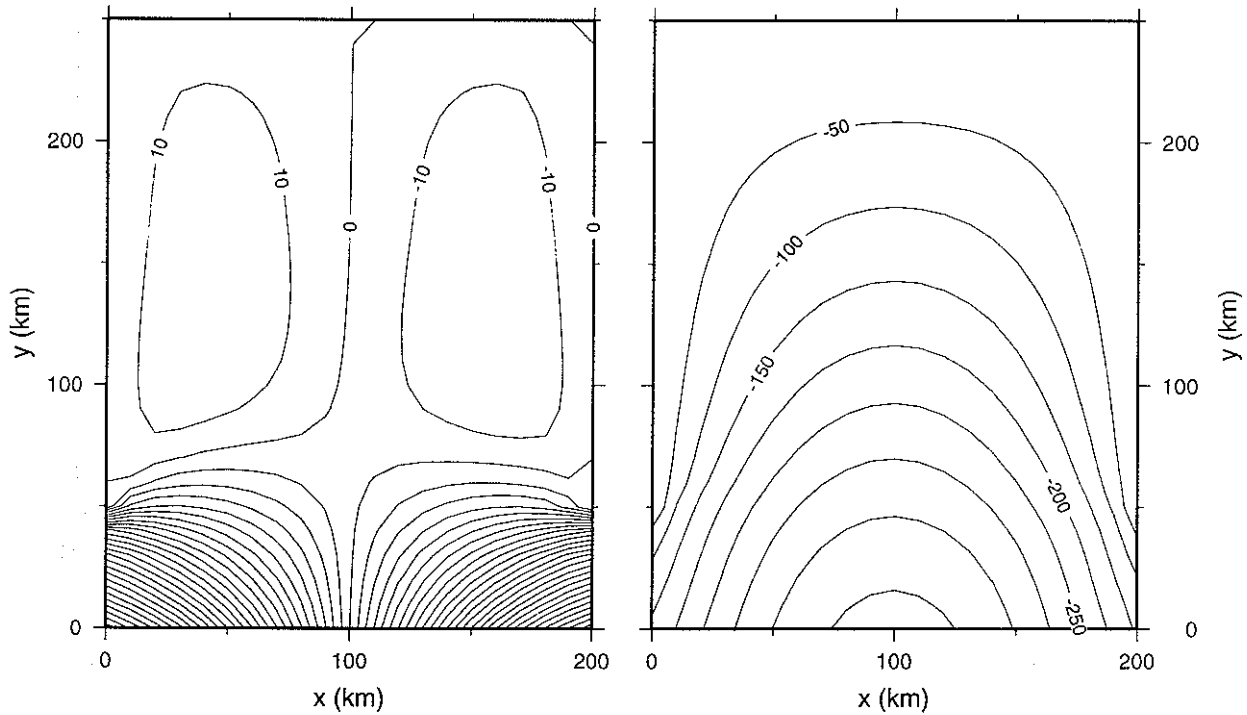


Figure IV-22 : champ de vitesses ( $u$  à gauche,  $v$  à droite en  $m a^{-1}$ ) simulé avant le vèlage de l'iceberg. La méthode utilisée est de type éléments finis (la grille utilisée comporte 1000 éléments). L'écoulement dans la partie confinée est similaire à celui de la figure IV-10 (p 137).

La comparaison de la figure précédente et de la figure IV-10 montre que l'ajout d'une langue de glace libre influence peu l'écoulement de l'ice-shelf en amont. Ce résultat préliminaire suggère que la formation d'un iceberg dans cette région est peu importante pour la dynamique de l'ice-shelf.



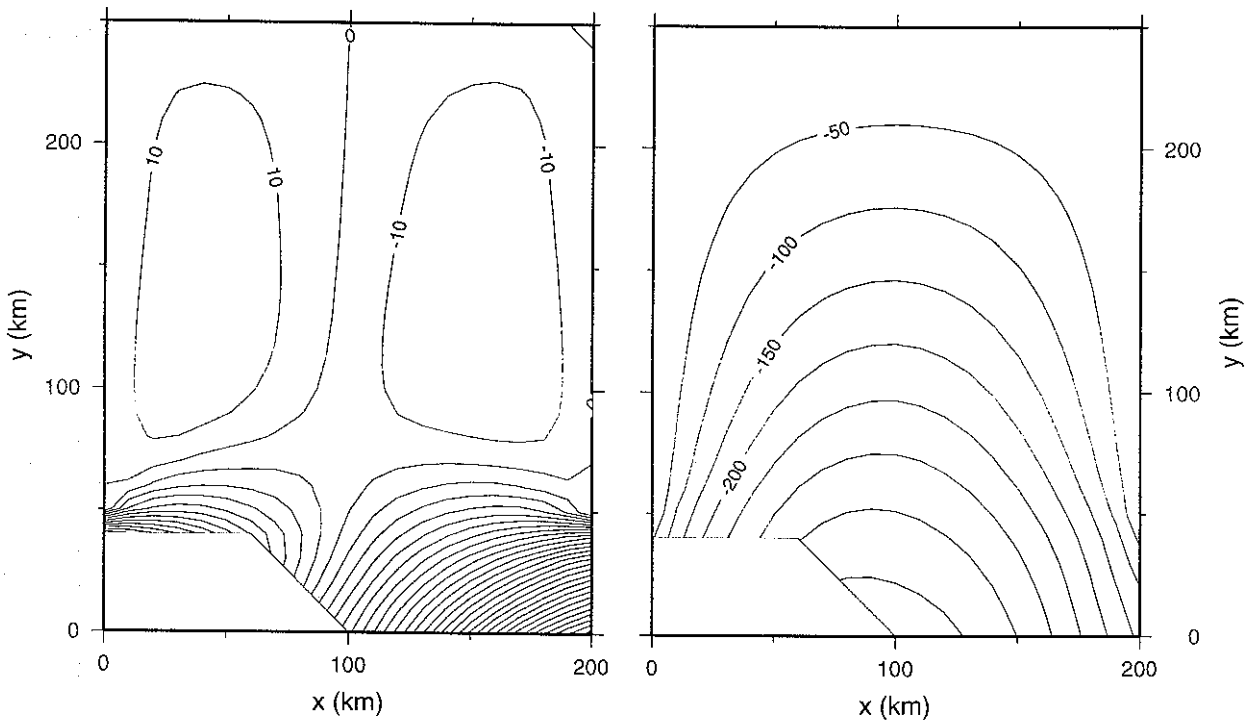


Figure IV-23 : champ de vitesses simulé après vèlage d'un iceberg de  $3200 \text{ km}^2$ . Le champ  $v$  (à droite), qui constitue la composante principale de la vitesse horizontale, n'a pas été modifié dans la partie confinée.

La première simulation de vèlage (figure IV-23) suggère que, pour l'étude de la dynamique d'une calotte marine, il n'est pas nécessaire de connaître avec précision la position du front de glace, si celui-ci se trouve dans une zone non confinée. La notion de confinement n'est malheureusement pas évidente si l'on étudie des ice-shelves de géométrie plus complexe.

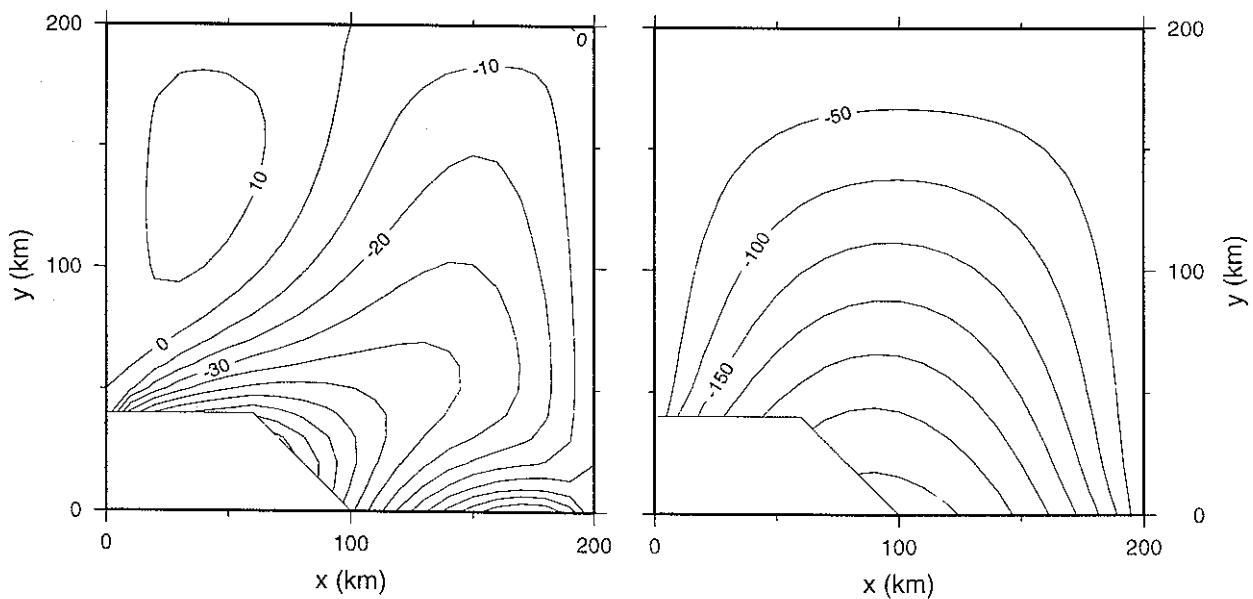
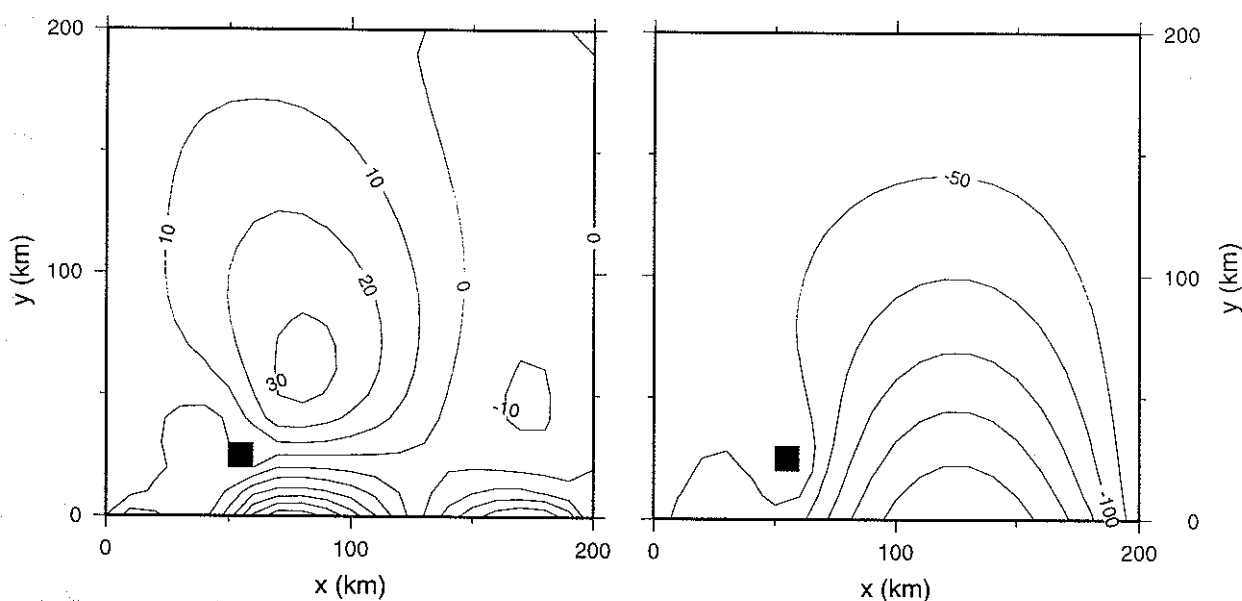


Figure IV-24 : champ de vitesses simulé après vèlage d'un iceberg de  $3200 \text{ km}^2$  dans la partie confinée de l'ice-shelf. Le champ  $v$  (composante principale de la vitesse horizontale) est

*légèrement modifié dans le voisinage du nouveau front de glace. Le champ  $u$  montre que l'azimut de la vitesse s'adapte de manière à combler l'espace libre où s'est formé l'iceberg.*

Dans la seconde simulation de vêlage (figure IV-25), la disparition d'une partie de l'ice-shelf entraîne une diminution de la surface de frottement sur les bords, et donc de la force qui maintient l'ice-shelf dans sa baie. Ceci entraîne une légère accélération de l'écoulement et une modification de l'azimut de la vitesse.



*Figure IV-25 : champ de vitesses simulé dans l'ice-shelf ancré, avant vêlage de l'iceberg. L'île influence de manière significative l'écoulement dans l'ensemble de l'ice-shelf ; en particulier elle diminue la vitesse maximale d'écoulement (sur le front) de plus de 100 m a<sup>-1</sup>.*

Pour la troisième simulation de vêlage, la fracturation de l'ice-shelf se produit en amont d'une petite île qui limite l'écoulement. Le champ de vitesse avant vêlage, présenté sur la figure IV-25, est à comparer aux résultats de la figure IV-24 (après vêlage). Les vitesses d'écoulement sont nettement plus importantes après vêlage (jusqu'à 100 m a<sup>-1</sup> de plus). Cette expérience simple montre le rôle primordial des îles et des ice-rises dans la dynamique des ice-shelves. Le même type de simulation a été réalisé par Hulbe (communication personnelle) avec la géométrie du Larsen Ice Shelf (après sa désintégration partielle de février 1995) : les simulations montrent qu'en cas de vêlage autour de l'île de Robertson, la vitesse d'écoulement augmenterait de 50% (ce qui correspond à l'ordre de grandeur des résultats présentés dans cette partie).

### IV.3. RHEOLOGIE A GRANDE ECHELLE DU ROSS ICE SHELF

Paterson, dans la troisième édition de *The physics of glaciers* (1994), a choisi la citation suivante pour introduire son chapitre sur l'écoulement des ice-shelves et des ice-streams : « it's

a capital mistake to theorize without data » (Sir Cornan Doyle). Il est évident que le manque d'une couverture de données suffisante est un facteur limitant de la modélisation en glaciologie. Heureusement, le perfectionnement des techniques d'acquisition de données par satellite devrait permettre de fournir des jeux de données de plus en plus fiables utilisables par les modèles.

A l'heure actuelle, on dispose d'une base de données standard provenant des mesures effectuées durant la campagne RIGGS (1973-78), maintenant accessible au World Data Center for Glaciology A (Boulder, Colorado). Dans ce chapitre, nous essayons de trouver des points communs entre le modèle développé dans la section précédente et ces observations. Tous les résultats présentés dans ce chapitre dépendent de ce jeu de données, âgé de 20 ans. La méthode spécialement développée afin de valider le modèle est indépendante des observations, elle pourra être réutilisée dès que des mesures plus précises seront disponibles. En particulier, afin d'augmenter la précision des résultats, nous espérons que des techniques prometteuses telles que l'interférométrie radar<sup>18</sup> fourniront bientôt des cartes précises de vitesses d'écoulement sur les ice-shelves ; pour l'instant, l'interférométrie n'est pas adaptée aux ice-shelves à cause de difficultés liées aux marées (Rignot, communication personnelle).

### IV.3.1. Première confrontation Modèle - observations

La figure IV-19 (p. 144) montre l'écoulement de l'ice-shelf calculé avec une loi de comportement de type Glen (avec un exposant 3 et un coefficient  $\bar{B} = 1.9 \times 10^9 \text{ Pa s}^{1/3}$ , *i.e.* valeur théorique correspondant à  $-20^\circ\text{C}$  environ). Cette loi de comportement, utilisée couramment en glaciologie, a ses limites : elle ne permet pas de prendre en compte les variations de densités, les concentrations en impuretés (*e.g.* sel de mer), l'orientation des axes C, et d'autres facteurs qui influencent la déformation de la glace. Il n'est pas non plus évident que cette loi de déformation, établie à partir d'expériences sur des petits échantillons, soit valable à l'échelle de contraintes des calottes : les mesures de laboratoire, en général effectuées à des contraintes supérieures à 1 bar, suggèrent une valeur de 3 pour l'exposant de la loi de Glen. En revanche, pour des contraintes plus faibles, les résultats de l'inclinométrie à Dye 3 (Pimienta, 1987) et la topographie actuelle de l'Antarctique seraient plus en accord avec un exposant voisin de 1 (Rémy et al., 1996). Paterson (1994) remarque par ailleurs que les mesures du coefficient de la loi de Glen peuvent varier de manière importante suivant les auteurs.

La comparaison des isocontours de la figure IV-19 (p 144) avec les mesures de vitesse présentées sur la figure suivante montre que l'accord entre le modèle et les observations n'est

---

<sup>18</sup> Le potentiel de cette technique appliquée au Nord de la calotte du Groenland pourra, par exemple, être apprécié dans Rignot et al. (1997).

pas satisfaisant. Par exemple, la vitesse maximale simulée par notre modèle (sur le front) est  $1508 \text{ m a}^{-1}$ , alors que les valeurs mesurées n'excèdent pas  $1100 \text{ m a}^{-1}$ . Nous pensons que ce désaccord est dû aux incertitudes sur les paramètres de la loi rhéologique employée. En particulier, dans les simulations précédentes, le coefficient de la loi de Glen est supposé constant alors que celui-ci peut varier avec la température. En effet, le modèle ne nous permet pas de déterminer avec précision le champ de température 3D de l'ice-shelf : celui-ci dépend trop fortement de la fusion et de l'accrétion à la base de l'ice-shelf, et des conditions de température sur les autres limites du domaine, qui sont mal connues.

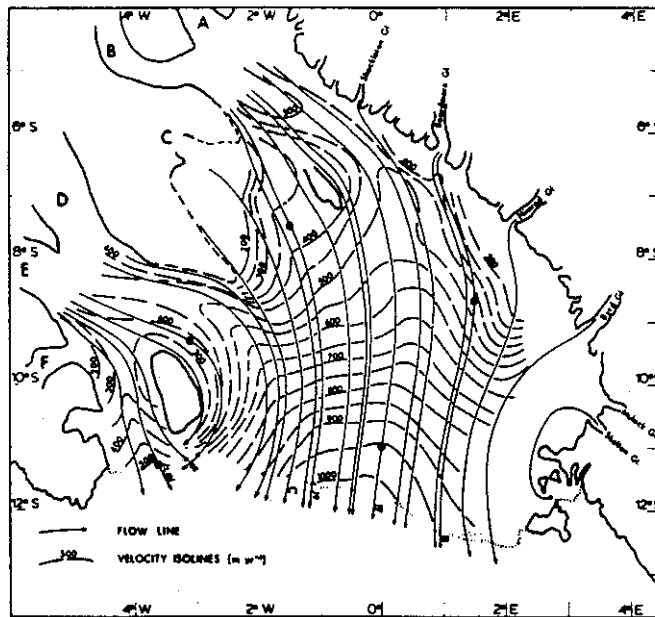


Figure IV-26 : carte de l'amplitude des vitesses d'écoulement observées sur le Ross Ice Shelf, d'après Thomas et MacAyeal (1982). Les vitesses d'écoulement observées sont nettement inférieures (de presque 50% sur le front) aux vitesses simulées figure IV-19 (p. 144).

### IV.3.2. Détermination de la viscosité effective par méthode de contrôle

Dans cette partie, nous montrons comment il est possible d'appliquer le modèle d'écoulement en mode inverse afin de déterminer la distribution spatiale de la viscosité apparente du Ross Ice Shelf. La glace est supposée isotrope dans cette étude, ce qui permet de définir la viscosité comme une quantité scalaire (et non tensorielle). Reconstruire la viscosité apparente du Ross Ice Shelf présente les intérêts suivants :

- Cette reconstruction permet de voir si les relations entre tenseurs des contraintes et déformations sont en adéquation avec la loi de Glen.

- La viscosité de la glace contient des informations sur la température de la colonne de glace, et donc sur la fonte ou l'accrétion éventuelle à la base de l'ice-shelf. Par conséquent, il est peut-être possible de détecter les régions de forte fonte (ou d'accrétion) grâce à cette analyse.

- Les propriétés rhéologiques de la glace dépendent de son histoire mécanique. La reconstruction de la viscosité apparente pourrait être un moyen de trouver des régions dont la glace a une histoire singulière. En particulier, on sait que les ice-streams qui alimentent le Ross Ice Shelf sont des structures transitoires et il serait intéressant de retrouver des signes de leur variabilité temporelle dans le signal de viscosité du Ross Ice Shelf.

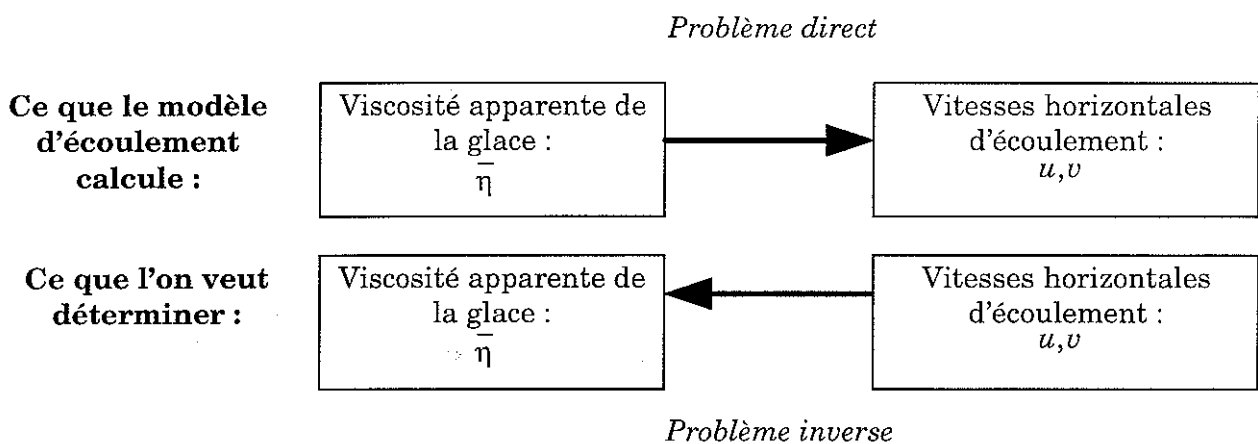


Figure IV-27 : la détermination de la viscosité apparente de l'ice-shelf est un problème inverse.

#### IV.3.2.1. Analogie avec la détermination de la friction basale des ice-streams

L'approche décrite ici utilise un formalisme mathématique similaire à celui développé par MacAyeal (1993c), MacAyeal et al. (1995) afin de déterminer la friction basale des ice-streams à partir de mesures topographiques et de mesures de vitesses d'écoulement en surface : les techniques satellitaires actuelles permettent en effet de fournir des cartes très précises de vitesses d'écoulement sur les ice-streams (Bindschadler et al., 1996). Nous rappelons ici brièvement la problématique de la friction basale des ice-streams.

##### IV.3.2.1.1. Dynamique des ice-streams

Les ice-shelves et les ice-streams sont des structures dynamiques très similaires. Deux différences essentielles sont toutefois à signaler :

- Un ice-stream ne flotte pas : il n'existe pas de relation entre l'altitude de sa surface et son épaisseur (*i.e.* pas de condition de flottabilité).
- Contrairement à l'ice-shelf, il existe du frottement à la base de l'ice-stream : cette friction est à prendre en compte pour simuler l'écoulement.

Pour l'analyse adimensionnelle du problème, il faut considérer l'ordre de grandeur de la friction basale : un nombre sans dimension supplémentaire est alors à considérer (*cf.* théorème de Vachy - Buckingham) par rapport à l'analyse adimensionnelle des ice-shelves<sup>19</sup> :

$$\frac{[\tau_b]}{\eta_0 \frac{U}{Z}} \quad (\text{IV-49})$$

où  $[\tau_b]$  représente l'échelle caractéristique de la friction basale. Ce nombre sans dimension est similaire au nombre d'Argand utilisé lors de l'établissement des équations diagnostiques de l'ice-shelf (la pression a été remplacée par la friction basale, l'échelle horizontale par l'échelle verticale). Dans les régions que l'on appelle traditionnellement ice-streams ce nombre est de l'ordre de  $10^{-2}$ , y compris dans les régions de « sticky spots » où la friction basale peut atteindre 1 bar (MacAyeal, 1996). La reconnaissance de ce petit paramètre permet de distinguer différents ordres dans les équations d'équilibre quasistatique. On peut montrer que, comme pour l'ice-shelf, les vitesses horizontales sont indépendantes de la profondeur à l'ordre 0. L'intégration des équations à l'ordre 1 et l'utilisation d'outils mathématiques (*e.g.* règle de Leibnitz) permettent d'établir les équations diagnostiques suivantes, valables pour l'écoulement de l'ice-stream (elles prennent en compte l'ordre 0 et l'ordre 1 des équations d'équilibre quasistatique) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} - \tau_{bx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial y} - \tau_{by} \end{cases} \quad (\text{IV-50})$$

où  $\tau_{bx}$  et  $\tau_{by}$  désignent les deux composantes du vecteur de friction basale.

#### IV.3.2.1.2. Détermination de la friction basale

Si l'on dispose de mesures d'épaisseur de glace, d'altitude de la surface, de vitesse d'écoulement, et que l'on suppose la rhéologie connue (ce point sera discuté par la suite), alors il est raisonnable de penser que les équations (IV-50) permettent de calculer la friction à la base du glacier. Whillans et Van der Veen (1993) ont traité ce problème à l'aide de mesures de

<sup>19</sup> Par ailleurs, la densité de l'eau de mer n'intervient plus (il n'y a plus de condition de flottabilité) : le rapport  $\rho_w/\rho$  n'intervient plus.

vitesse sur Ice Stream B et d'une approche directe, c'est à dire en calculant la friction basale à partir des différents d'observation, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tau_{bx} = \rho g H^d \frac{\partial z_s^d}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta}^d H^d \left( 2 \frac{\partial u^d}{\partial x} + \frac{\partial v^d}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta}^d H^d \left( \frac{\partial u^d}{\partial y} + \frac{\partial v^d}{\partial x} \right) \right) \\ \tau_{by} = \rho g H^d \frac{\partial z_s^d}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta}^d H^d \left( 2 \frac{\partial v^d}{\partial y} + \frac{\partial u^d}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta}^d H^d \left( \frac{\partial v^d}{\partial x} + \frac{\partial u^d}{\partial y} \right) \right) \end{cases} \quad (IV-51)$$

L'exposant  $d$  (data) se rapporte aux variables mesurées. Le résultat le plus surprenant obtenu par Whillans et Van der Veen (1993) est que la friction basale peut devenir négative<sup>20</sup> sur certaines régions. Cette approche présente également d'autres inconvénients. Tout d'abord, les dérivées premières et secondes d'un champ de mesures interpolé est souvent très bruité et peu fiable. D'autre part, les équations (IV-50) représentent uniquement l'écoulement à grande échelle de l'ice-stream (l'établissement de ces équations nécessite un petit rapport d'aspect) : l'approche de Whillans et Van der Veen (1993) qui consiste à interpréter des structures de vitesse à petite échelle n'est pas forcément compatible avec les équations diagnostiques (IV-50) utilisées. Enfin un troisième problème est que la friction basale ainsi calculée n'est pas nécessairement colinéaire à la vitesse d'écoulement du glacier.

L'approche inverse préconisée par MacAyeal (1993c) consiste à trouver le meilleur accord, au sens des moindres carrés, entre les vitesses simulées par un modèle d'ice-stream défini par les équations diagnostiques (IV-50) et les vitesses observées. Il s'agit donc de minimiser un index de performance en fonction des valeurs de friction basale : cette minimisation se fait à l'aide d'une méthode de contrôle similaire à celle qui sera décrite pour reconstruire la viscosité du Ross Ice Shelf. Le point faible de la méthode de MacAyeal (1993c) est la rhéologie de la glace supposée connue : les paramètres libres du modèle d'écoulement se limitent donc aux valeurs de friction basale. Il serait intéressant d'essayer de combiner cette méthode de reconstruction avec la méthode ci-dessous afin de remonter à la fois à la rhéologie et à la friction basale des ice-streams.

#### IV.3.2.2. Principe de la méthode de contrôle

La reconstruction de la rhéologie à grande échelle du Ross Ice Shelf a été réalisée à l'aide d'une méthode de contrôle, similaire en de nombreux points à la reconstruction du coefficient de diffusion apparent du chapitre III. Le principe est la minimisation de l'écart quadratique modèle *vs* observations, par rapport à la distribution spatiale de viscosité :

<sup>20</sup> Une friction négative indique que le frottement fournit de l'énergie à l'écoulement au lieu d'en dissiper sous forme de chaleur. Ce résultat est incompatible avec le concept même de frottement.

$$I = \frac{1}{2} \iint_{(\Gamma)} \left[ (u - u^d)^2 + (v - v^d)^2 \right] dx dy \quad (\text{IV-52})$$

L'algorithme choisi transforme la minimisation multivariable en une succession de minimisations univariables le long de vecteurs de recherche. La construction de ces vecteurs de recherche utilise l'information contenue dans le gradient de l'estimateur par rapport aux paramètres libres du modèle (*i.e.* les valeurs discrètes de viscosité apparente). Dans la partie suivante, nous montrons comment il est possible de calculer ce gradient de manière exacte et rapide, grâce à la notion d'adjoint.

### IV.3.2.3. Calcul du gradient de l'index de performance

Le calcul numérique du gradient de  $I$  par rapport à la viscosité est très limitant au niveau des temps de calcul : la discrétisation du Ross Ice Shelf que nous utilisons comporte 5738 points de grille actifs et donc 5738 valeurs de viscosité à calibrer. Le calcul numérique du gradient par différences finies nécessiterait donc 11476 fois la résolution du modèle direct, c'est à dire environ 8 jours de calcul<sup>21</sup>. Sachant que la minimisation nécessite plusieurs centaines de fois le calcul du gradient, il faut envisager une méthode plus rapide.

#### IV.3.2.3.1. Equations adjointes

La démarche décrite ci-dessous est très similaire à celle présentée chapitre III pour la reconstruction du coefficient de diffusion apparent. Les deux différences majeures sont les suivantes :

- il s'agit ici d'un problème bidimensionnel
- les équations du modèle direct d'écoulement sont des équations aux dérivées partielles de type elliptique, et non parabolique comme dans le cas de la reconstruction du coefficient de diffusion apparent.

##### IV.3.2.3.1.1. Version continue

La technique employée consiste à introduire les équations du mouvement de l'ice-shelf et ses conditions aux limites<sup>22</sup> sous forme de contraintes de l'index de performance, par le biais de deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda(x, y)$  et  $\mu(x, y)$  ; on impose dès maintenant  $\lambda = \mu = 0$  sur les conditions aux limites *cinématiques* du domaine (*i.e.* les limites où l'on spécifie la vitesse et non la force) :

<sup>21</sup> La résolution du modèle direct sur le Ross Ice Shelf se fait en une minute environ.

<sup>22</sup> L'incorporation des conditions aux limites dynamiques dans l'index de performance constitue une amélioration de la méthode de Rommelaere et MacAyeal, 1997.



$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \iint_{(\Gamma)} \left[ (u - u^d)^2 + (v - v^d)^2 \right] dx dy \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \lambda(x, y) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \right\} dx dy \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \mu(x, y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial y} \right\} dx dy \quad (IV-53) \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \lambda \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g \frac{H z_s}{2} \right) \underline{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_y \right\} d\mathbf{l} \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \mu \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho g \frac{H z_s}{2} \right) \underline{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_x \right\} d\mathbf{l}
\end{aligned}$$

Il faut remarquer que les intégrales ajoutées à l'index de performance sont nulles, si  $u$  et  $v$  sont solutions des équations diagnostiques. La différentiation de  $I$  par rapport à toutes les variables (*i.e.*  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $u$ ,  $v$  et  $\bar{\eta}$ ) donne :

$$\begin{aligned}
\delta I &= \iint_{(\Gamma)} \left[ (u - u^d) \delta u + (v - v^d) \delta v \right] dx dy \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \delta \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \right\} dx dy \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \delta \mu \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial y} \right\} dx dy \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \delta \lambda \cdot \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g \frac{H z_s}{2} \right) \underline{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_y \right\} d\mathbf{l} \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \delta \mu \cdot \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho g \frac{H z_s}{2} \right) \underline{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_x \right\} d\mathbf{l} \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \lambda \cdot \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right\} dx dy \\
&+ \iint_{(\Gamma)} \mu \cdot \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right\} dx dy \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \lambda \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \underline{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_y \right\} d\mathbf{l} \quad (IV-54) \\
&- \oint_{(\delta\Gamma)} \mu \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \underline{n}_x \right\} d\mathbf{l}
\end{aligned}$$

Comme  $u$  et  $v$  satisfont les équations diagnostiques du mouvement, les intégrales doubles de la seconde et troisième ligne sont nulles par construction ; les intégrales simples de la

quatrième et cinquième ligne sont nulles pour les mêmes raisons. On applique ensuite le théorème de la divergence sur les deux intégrales doubles restantes :

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \iint_{(\Gamma)} [(u - u^d)\delta u + (v - v^d)\delta v] dx dy \\
 &- \iint_{(\Gamma)} \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right\} dx dy \\
 &+ \oint_{(\delta\Gamma)} \lambda \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \mathbf{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y \right\} d\mathbf{l} \\
 &- \iint_{(\Gamma)} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial y} \delta \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \delta \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right\} dx dy \\
 &+ \oint_{(\delta\Gamma)} \mu \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_x \right\} d\mathbf{l} \\
 &- \oint_{(\delta\Gamma)} \lambda \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \mathbf{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y \right\} d\mathbf{l} \\
 &- \oint_{(\delta\Gamma)} \mu \cdot \delta \left\{ \left( 2\bar{\eta} H \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_x \right\} d\mathbf{l} \tag{IV-55}
 \end{aligned}$$

On s'aperçoit donc que les quatre intégrales simples se simplifient. On continue la différentiation, puis on regroupe les termes en  $\delta \bar{\eta}$  de ces deux intégrales, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \iint_{(\Gamma)} [(u - u^d)\delta u + (v - v^d)\delta v] dx dy \\
 &- \iint_{(\Gamma)} \left\{ 2\frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial y} \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \delta \bar{\eta} \cdot H dx dy \\
 &- \iint_{(\Gamma)} \left\{ 2\bar{\eta} H \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \bar{\eta} H \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy \\
 &- \iint_{(\Gamma)} \left\{ 2\bar{\eta} H \frac{\partial \mu}{\partial y} \delta \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{\eta} H \frac{\partial \mu}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy \tag{IV-56}
 \end{aligned}$$

On applique de nouveau le théorème de la divergence sur les intégrales doubles de la troisième et quatrième ligne de l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
 \delta I = & \iint_{(\Gamma)} \left[ (u - u^d) \delta u + (v - v^d) \delta v \right] dx \cdot dy \\
 & - \iint_{(\Gamma)} \left\{ 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \cdot \delta \bar{\eta} \cdot H \cdot dx \cdot dy \\
 & + \iint_{(\Gamma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \right\} \cdot \delta u \cdot dx \cdot dy \\
 & + \iint_{(\Gamma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \right\} \cdot \delta v \cdot dx \cdot dy \\
 & - \oint_{(\delta \Gamma)} \delta u \cdot \left\{ \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right) \mathbf{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y \right\} \cdot d\mathbf{l} \\
 & - \oint_{(\delta \Gamma)} \delta v \cdot \left\{ \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_x \right\} \cdot d\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{IV-57}$$

En pratique, on choisit les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$  de manière à satisfaire les conditions d'Euler - Lagrange associées au problème, *i.e.* :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \end{cases} \tag{IV-58}$$

Ce qui génère l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \right] = u^d - u \\ \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \right] = v^d - v \end{cases} \tag{IV-59}$$

Avec  $\lambda = \mu = 0$  au niveau des conditions aux limites *cinématiques*. Les conditions aux limites sur le front pour les multiplicateurs de Lagrange sont les suivantes :

$$\begin{cases} \left[ \left[ \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right) \mathbf{n}_x + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y \right] \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl} = 0 \\ \left[ \left[ \left( 2 \bar{\eta} H \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_y + \left( \bar{\eta} H \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right) \mathbf{n}_x \right] \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl} = 0 \end{cases} \tag{IV-60}$$

On remarque donc que les multiplicateurs de Lagrange s'obtiennent par résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques, très similaires<sup>23</sup> aux équations

<sup>23</sup> Cette similarité montre que le modèle de dynamique de l'ice-shelf que nous utilisons appartient à la catégorie particulière des modèles *auto adjoints*.

diagnostiques du modèle direct. Cette spécificité est intéressante, car elle permet d'utiliser le même type d'algorithme que pour le calcul des vitesses d'écoulement.

Si les multiplicateurs de Lagrange vérifient les équations adjointes ((IV-59) et (IV-60)), la différentielle de l'index de performance s'écrit en fonction de  $\delta \bar{\eta}$  uniquement (*i.e.* de la différentielle des paramètres libres) :

$$\delta I = - \iint_{(\Gamma)} \left\{ 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \cdot \delta \bar{\eta} \cdot H \cdot dx \cdot dy \quad (IV-61)$$

Ce qui permet d'obtenir le gradient de l'index de performance par rapport aux paramètres libres du modèle.

#### IV.3.2.3.1.2. Version discrète

En pratique, les valeurs de  $u$ ,  $v$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $H$ , *etc.* sont représentées par des valeurs discrètes sur le domaine ( $\Gamma$ ) étudié. Nous montrons dans cette section qu'il est également possible d'obtenir l'équation adjointe (et donc le gradient de  $I$ , qui constitue l'objectif final de ce calcul), à l'aide de la forme discrète des équations diagnostiques. L'avantage de l'approche discrète est qu'elle fournit directement la discrétisation de l'équation adjointe.

Quelle que soit la méthode numérique utilisée (différences finies ou éléments finis), le modèle direct peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (IV-62)$$

Le vecteur colonne  $\mathbf{u}$  contient les valeurs nodales de la vitesse horizontale (de dimension  $2N$ ,  $N$  étant le nombre de points de grille actifs en FDM, et le nombre d'éléments en FEM) ; le vecteur colonne  $\bar{\eta}$  contient les valeurs discrètes de viscosités (dimension  $N$ ).  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée inversible de dimension  $2N$ .

L'index de performance que l'on choisit de minimiser s'écrit, sous forme matricielle :

$$I = \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^T \mathbf{W}_c (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d) \quad (IV-63)$$

où le vecteur  $\mathbf{u}^d$  contient les valeurs des vitesses d'écoulement observées. Afin de traiter le cas où les erreurs sur les mesures de vitesses d'écoulement sont différentes, on choisit de pondérer les écarts quadratiques par l'inverse de la variance des mesures. Cette pondération se fait par l'intermédiaire d'une matrice diagonale  $\mathbf{W}_c$  ; l'introduction de cette matrice constitue une légère amélioration par rapport à la minimisation de l'index de la version continue. Si  $\mathbf{W}_c$  est choisit égal à la matrice identité, alors on retrouve la somme des écarts quadratiques « classique ».

On introduit les équations du mouvement (IV-62) sous forme de contraintes dans l'index de performance (IV-63), à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange qui s'écrit ici sous la forme d'un vecteur colonne  $\underline{\mu}$  de dimension  $2N$  :

$$I = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^d)^T \underline{\mathbf{W}}_e (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^d) + \underline{\mu}^T (\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{b}}) \quad (\text{IV-64})$$

En pratique, on choisit  $\underline{\mu}$  de manière à satisfaire la condition d'Euler - Lagrange associée au problème, *i.e.* :

$$\forall i \in \{1..2N\} \quad \frac{\partial I}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{IV-65})$$

Cette condition génère l'équation adjointe suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mu} = (\underline{\mathbf{u}}^d - \underline{\mathbf{u}}) \underline{\mathbf{W}}_e \quad (\text{IV-66})$$

La version discrète (IV-66) et la version continue des équations adjointes (IV-59) et (IV-60) sont très similaires : noter par exemple que, dans les deux cas, la différence modèle *vs* observations apparaît dans le membre de droite comme forçage des trajectoires adjointes. Si la méthode de résolution des équations diagnostiques est de type éléments finis, alors la matrice  $\underline{\mathbf{A}}$  est symétrique, donc égale à sa transposée, ce qui est une propriété intéressante pour la résolution de l'équation adjointe (IV-66).

#### IV.3.2.3.2. Calcul du gradient

Si le multiplicateur satisfait l'équation adjointe (IV-66), alors la différentielle de  $I$  dépend uniquement de la différentielle des paramètres libres (*i.e.* valeurs discrètes de viscosité effective). Afin de calculer les composantes du gradient de  $I$  par rapport aux valeurs de viscosité, on utilise une forme matricielle différente des équations diagnostiques, à savoir :

$$\underline{\mathbf{D}}\bar{\underline{\eta}} = \underline{\mathbf{b}} \quad (\text{IV-67})$$

$\underline{\mathbf{D}}$  est une matrice rectangle de dimension  $N \times 2N$ . On pourra par exemple vérifier que l'équation (IV-44), p. 134 se met sous cette forme. Le gradient de l'index de performance s'obtient alors à l'aide des opérations matricielles suivantes :

$$\nabla_{\bar{\underline{\eta}}} I = \underline{\mathbf{D}}^T \underline{\mu} \quad (\text{IV-68})$$

L'algèbre linéaire permet donc d'obtenir une écriture plus compacte de l'équation adjointe et du gradient de l'index de performance.

#### IV.3.2.4. Algorithme de résolution

La minimisation multivariable se fait à l'aide de la forme Fletcher-Reeves de la méthode des gradients conjugués (Press et al., 1992). Pendant la minimisation, des problèmes peuvent

provenir de valeurs discrètes de viscosité négatives, ce qui est impossible physiquement. Afin de s'affranchir de ce problème, nous avons choisi d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_{ref} \exp(\varphi) \quad (IV-69)$$

Où  $\bar{\eta}_{ref}$  désigne une viscosité de référence, prise égale à la viscosité de l'état initial dans les reconstructions ci-dessous. Le choix de ce changement de variable par rapport à une valeur absolue ou une puissance paire de  $\varphi$  est dû aux conditions de dérivabilité de la fonction exponentielle. En particulier, le gradient de l'index de performance par rapport à ces nouveaux paramètres libres s'obtient alors par une multiplication de deux vecteurs colonnes :

$$\nabla_{\varphi} I = \bar{\eta} \nabla_{\bar{\eta}} I \quad (IV-70)$$

#### ***IV.3.2.5. Différences avec l'étude précédente***

La méthode de reconstruction présentée ci-dessus est une version améliorée de celle de Rommelaere et MacAyeal (1997) : les améliorations portent essentiellement sur les deux points suivants : d'une part, le calcul du gradient se fait désormais à l'aide d'une approche discrète, ce qui permet de s'affranchir des problèmes de discrétisation de l'adjoint. D'autre part, l'algorithme de minimisation multivariable par méthode de gradient a été remplacé par une minimisation par gradients conjugués. Enfin, le changement de variable (IV-69) augmente la convergence de la minimisation de manière significative.

### **IV.3.3. Efficacité de la méthode**

Afin de tester l'efficacité et la précision de la méthode, nous avons considéré l'ice-shelf idéal, d'épaisseur constante, utilisé pour la comparaison éléments finis *vs* différences finies. La viscosité de cet ice-shelf idéal a été prescrite, puis tracée sur la figure IV-28.

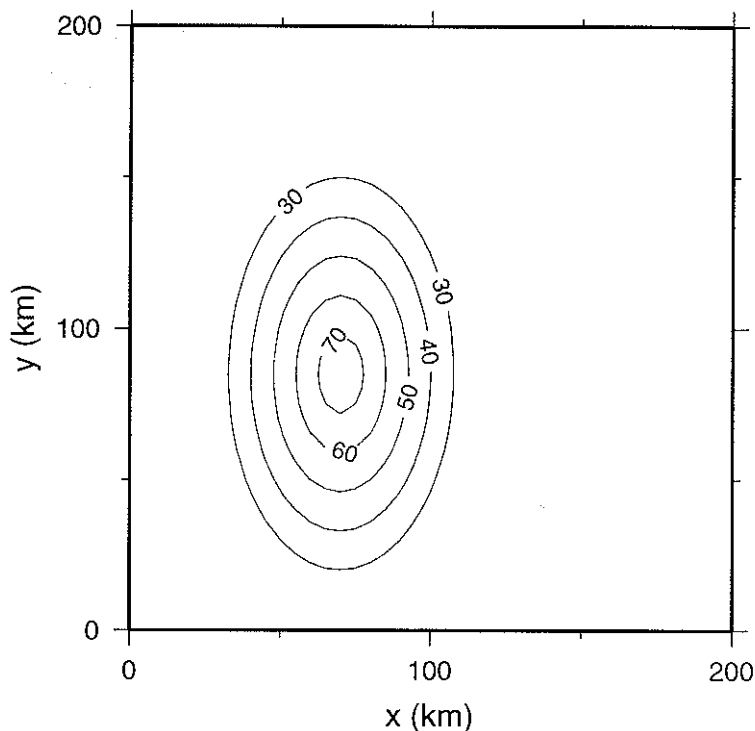


Figure IV-28 : champ de viscosité effective « réelle » en MPa a. La performance de la méthode de contrôle sera évaluée par l'écart entre ce champ et la viscosité reconstruite. En dehors de l'ellipse la viscosité de l'ice-shelf est fixée à 20 MPa a.

La résolution des équations diagnostiques fournit le champ de vitesses correspondant à cette viscosité (figure IV-29).

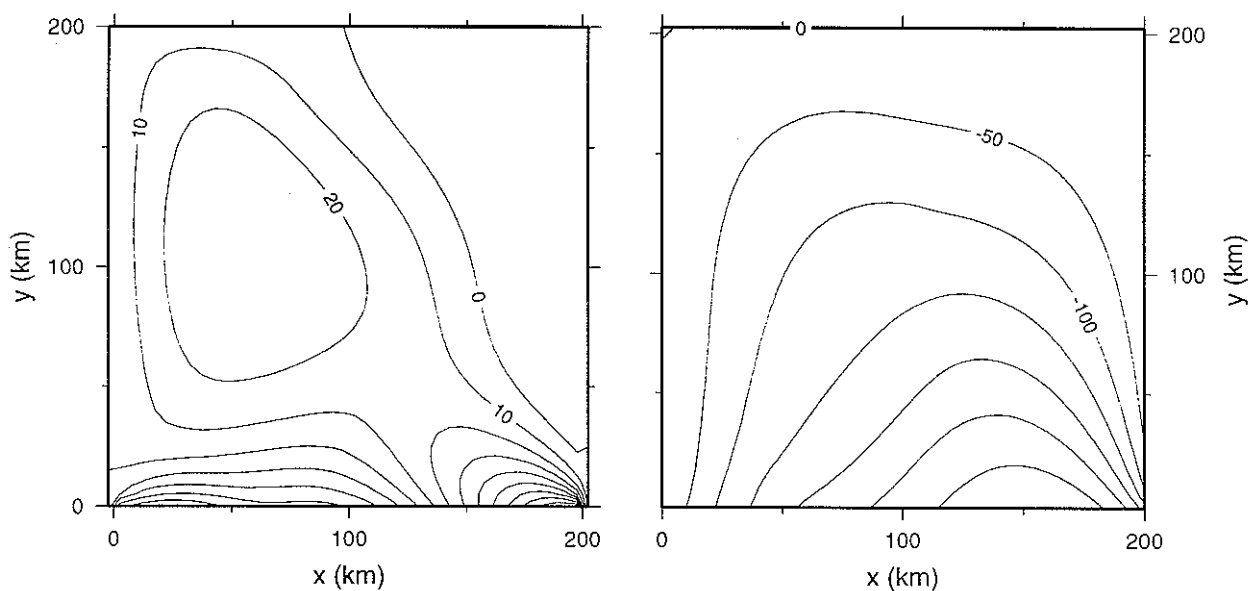


Figure IV-29 : champ de vitesses « réel » en  $m a^{-1}$  calculé par résolution des équations diagnostiques avec la viscosité de la figure IV-28. La grille utilisée comporte  $41 \times 41$  points de grille actifs. Une légère asymétrie sur le champ de vitesses provient du maximum du signal de viscosité décalé par rapport à l'axe de symétrie.

### IV.3.3.1. Champ d'observations idéal

Dans un premier temps, on suppose que les vitesses d'écoulement peuvent être mesurées avec une précision excellente, sur chacun des 1681 points de la grille. La méthode de contrôle est alors lancée à partir de quatre états initiaux différents de 15, 30, 50 et 70 Mpa a. Les poids de  $\underline{W}_e$  sont fixés égaux à 1. La minimisation est arrêtée pour  $I < \chi_{2N}^2 / 8$ , c'est à dire à l'aide d'un test du  $\chi^2$  en supposant un écart-type de  $1/2 \text{ m a}^{-1}$  sur les points de mesure (en théorie, on devrait être capable de reproduire parfaitement le champ de viscosité, puisque le champ d'observations n'a pas été bruité, mais la convergence de l'algorithme devient très lente quand l'index de performance est faible).

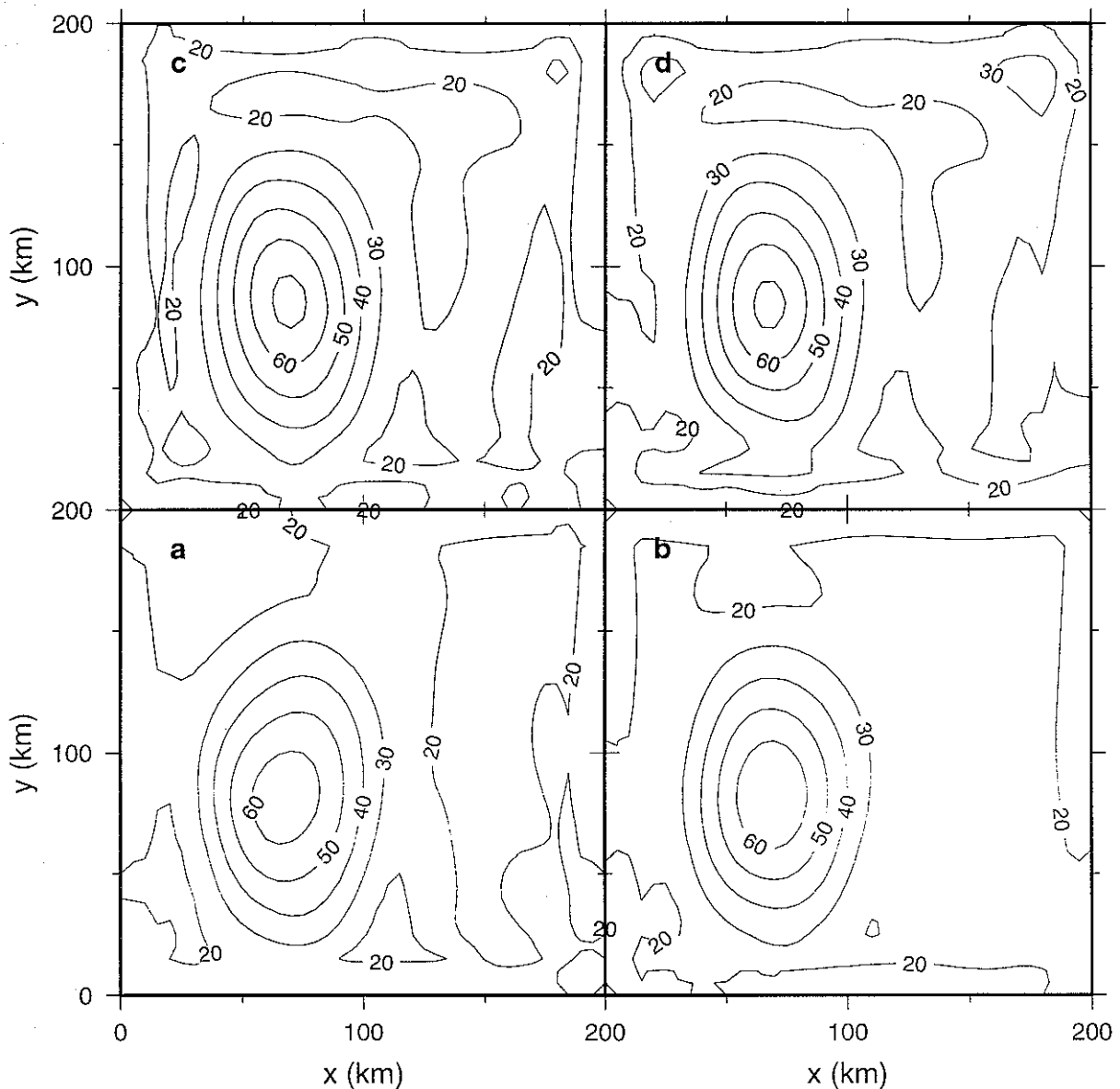


Figure IV-30 : viscosité reconstruite par méthode de contrôle à partir d'un état initial de viscosité constante (a- 15 Mpa a, b- 30 Mpa a, c- 50 Mpa a et d- 70 Mpa a). On suppose qu'une mesure exacte de vitesse est faite à chaque point de grille (soit 1681 mesures). Pour chacune des



reconstructions l'erreur sur la vitesse d'écoulement ne dépasse pas  $1 \text{ m a}^{-1}$ . Chacune de ces reconstructions est obtenue après une heure de temps de calcul CPU environ (sur HP9000).

Ces premiers résultats sont encourageants, mais ils montrent qu'il est illusoire de vouloir calculer le champ de viscosité de manière exacte. Ces premières reconstructions suggèrent qu'avec des mesures de vitesses et d'épaisseurs de bonne qualité, la méthode est capable de détecter le signal de viscosité (forme et amplitude) de manière tout à fait satisfaisante.

### IV.3.3.2. Champ de vitesses discret

Les techniques satellitaires permettront peut-être d'obtenir bientôt un champ de vitesses tel que celui utilisé dans l'inversion précédente. Toutefois, les données sur le Ross Ice Shelf que nous allons exploiter proviennent de mesures discrètes de vitesse, effectuées par repérage de balises. Dans cette sous-partie, on suppose qu'il n'y a eu que 90 points de mesure (sans erreur) de vitesse sur l'ice-shelf et on cherche à savoir comment ce manque d'information affecte notre résultat. Les points de mesure sont régulièrement espacés, tous les 20 km (*i.e.* quatre points de grille) à partir du haut de l'ice-shelf. Il n'y a pas de mesure à moins de 40 km du front de glace.

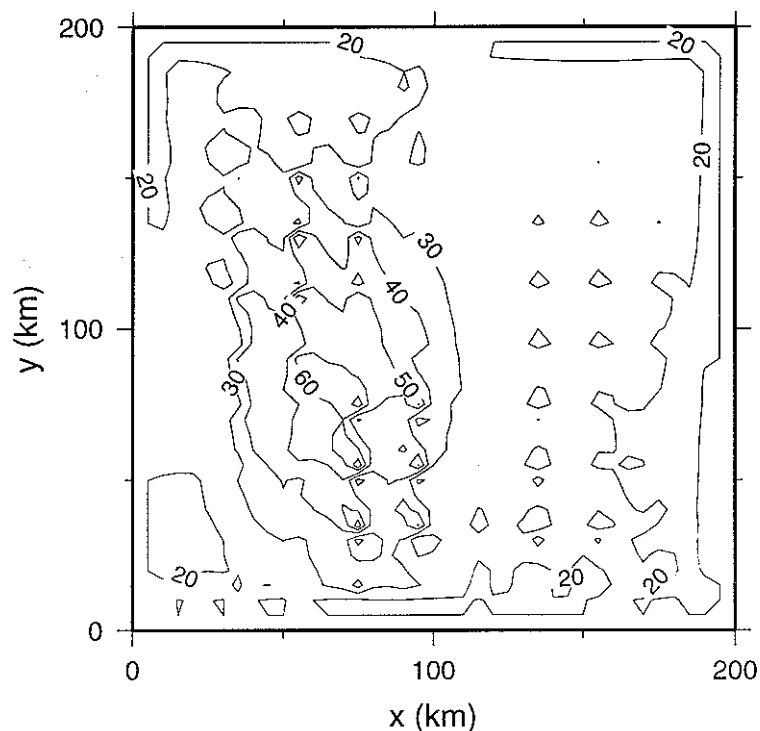


Figure IV-31 : champ de viscosité reconstruit en  $\text{Mpa a}$  à partir des données « brutes » de vitesses (obtenue après une heure de temps de calcul CPU sur HP9000). Noter que la viscosité reconstruite dépend de l'emplacement des points de mesure de vitesse.

Les résultats de la reconstruction par méthode de contrôle montrent que les 90 points de mesure ne fournissent pas une information suffisante pour reconstruire le véritable champ de

viscosité : le problème est devenu *sous-déterminé* (par rapport aux expériences précédentes avec 1600 points de mesure). Il s'agit donc d'ajouter des informations *a priori*, sous la forme d'une régularisation ou d'une matrice de covariance sur la viscosité *a priori*, par exemple. La méthode choisie ici est moins élégante que ces deux dernières, mais peut sembler plus naturelle, étant donnés les résultats précédents<sup>24</sup>. Au lieu de calibrer le modèle sur les mesures brutes uniquement, on modifie l'index de performance afin de reproduire un champ de vitesses interpolé. En faisant cela, on augmente de manière artificielle la dimension de l'espace des données, ce qui permet de lever l'indétermination. Le formalisme décrit plus haut permet éventuellement de donner plus d'importance aux véritables mesures par le biais du vecteur poids  $\underline{W}_e$  (les reconstructions effectuées plus bas affectent un poids égal à chaque point de grille).

A partir des points de mesure, on crée une carte de vitesses par triangulation de Delauney et interpolation linéaire, puis on utilise cette carte pour l'inversion de la viscosité. La reconstruction est satisfaisante, excepté près du front, où l'on ne dispose pas de mesures de vitesse (toutes les mesures sont à 40 km du front).

---

<sup>24</sup> Le meilleur moyen pour améliorer cette méthode semble être l'introduction de matrices de covariances *a priori* sur les paramètres (viscosités) et sur les données (vitesses), telles que dans l'exemple du chapitre II. Un algorithme de minimisation adapté (et surtout d'implémentation rapide étant donné l'algorithme actuel) serait alors les gradients conjugués *préconditionnés* par ces matrices de covariances (voir Tarantola, 1987). Cette technique ne m'était pas familière au moment où cette étude a été faite.

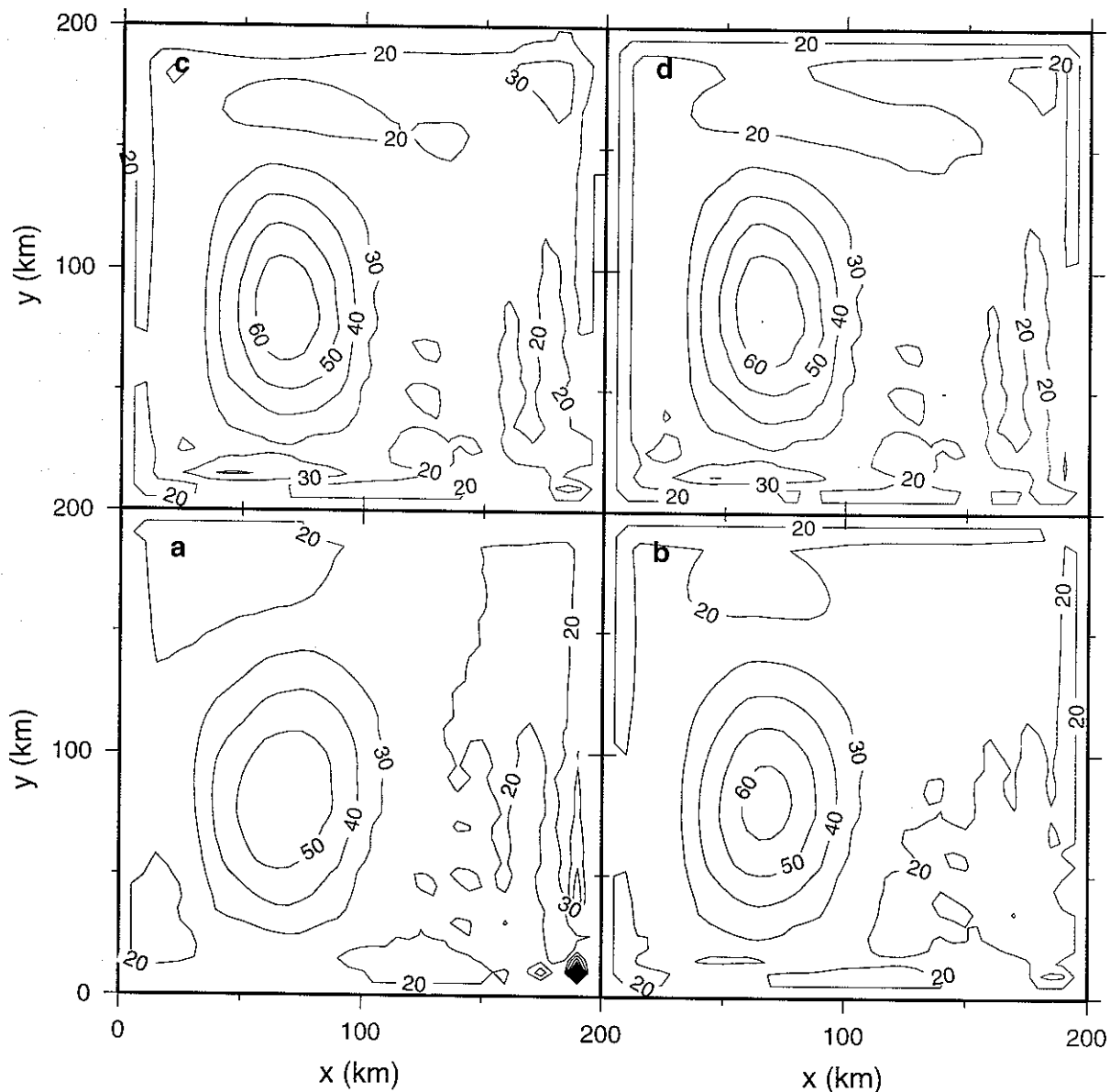


Figure IV-32 : champ de viscosité reconstruit à partir du champ de vitesses interpolé. Les calculs sont effectués à partir de quatre états initiaux différents de viscosité (a-15 Mpa a, b-30 Mpa a, c-50 Mpa a et d-70 Mpa a). Le test d'arrêt est un test du  $\chi^2$  avec  $\sigma = 1 \text{ m a}^{-1}$ .

#### IV.3.3.3. Champ de vitesses discret, bruité

Une source supplémentaire d'incertitude provient du bruit sur les mesures. Dans le test suivant, on a repris les 90 mesures de vitesse de l'exemple précédent. Ces mesures ont ensuite été bruitées (bruit Gaussien d'écart type égal à  $20 \text{ m a}^{-1}$ , ce qui correspond à un bruit assez fort comparé aux vitesses d'écoulement de la figure IV-29), puis interpolées par triangulation de Delauney. La méthode de contrôle est ensuite appliquée jusqu'à satisfaction du critère du  $\chi^2$  ( $\sigma=20 \text{ m a}^{-1}$ ) sur les points de mesure.

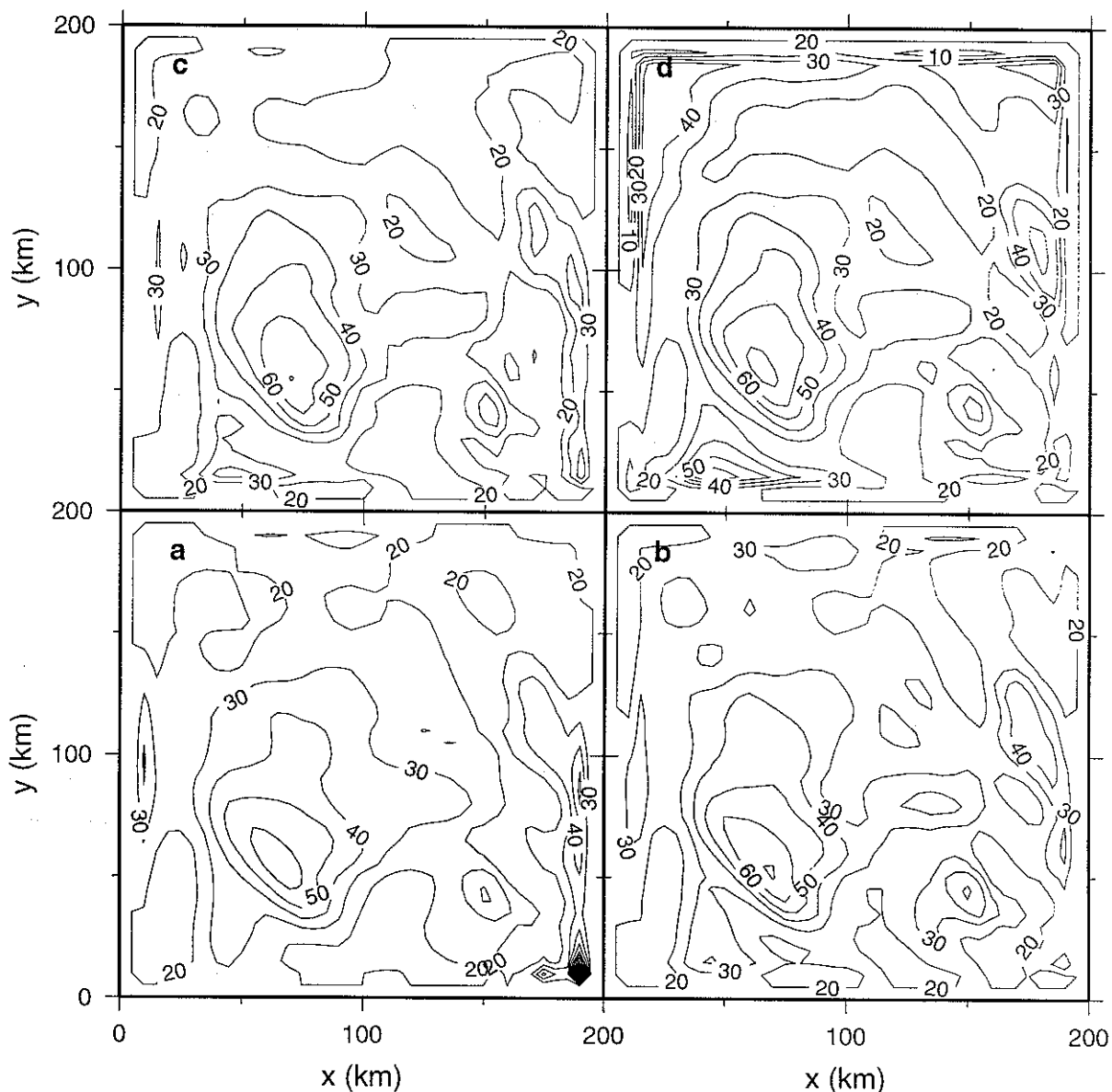


Figure IV-33 : champ de viscosité reconstruite à partir d'un champ d'observations discret et bruité (différents états initiaux sont considérés : a-15 Mpa a, b-30 Mpa a, c-50 Mpa a, d-70 Mpa a). Les reconstructions sont sensibles à la forte variance du bruit ajouté aux données. Toutefois, la méthode de contrôle est capable de détecter qualitativement la région de forte viscosité.

Ces résultats nous montrent qu'il est illusoire de vouloir reconstruire le champ de viscosité exact du Ross Ice Shelf : on peut toutefois espérer détecter les régions de forte variation de viscosité effective, mais il faudra rester prudent pour l'interprétation quantitative des résultats.

#### IV.3.4. Viscosité effective du Ross Ice Shelf

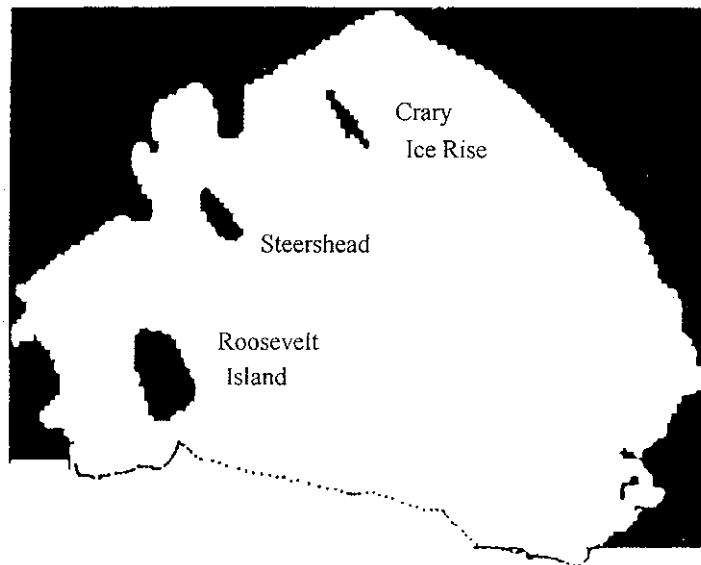


Figure IV-34 : carte simplifiée du Ross Ice Shelf, montrant l'emplacement des îles et des ice-rises. Le Nord est en bas et l'ouest à droite.

Les données d'entrée pour l'analyse de la viscosité du Ross Ice Shelf contiennent une carte numérisée d'épaisseur de glace (Bentley et al., 1979 ; MacAyeal et al., 1987) et des vitesses horizontales de surface (Thomas et MacAyeal, 1982 ; Thomas et al., 1984 ; MacAyeal et al., 1987). Les valeurs d'épaisseur ont été converties en mètres équivalents glace (pour tenir compte de la quantité d'air dans glace), en enlevant 14 m à la valeur effectivement mesurée par radar. La valeur de 14 m a été estimée à partir du profil de densité de la station J9 sur le Ross Ice Shelf. Le front du Ross Ice Shelf est fixé à sa position mesurée en 1972. On restreint l'analyse à la partie centrale du Ross Ice Shelf, à l'Ouest de Roosevelt Island. Des simulations préliminaires ont en effet montré que nous étions incapable de reproduire de manière satisfaisante les données plus à l'Est : ces difficultés sont probablement dues à une mauvaise prise en compte des conditions aux limites sur les bords de Roosevelt Island.

Le domaine d'étude a une superficie de 267 000 km<sup>2</sup> : la résolution spatiale de la grille étant de 6822 m, le domaine discret est constitué de 5738 points de grille actifs. Il s'agit donc de calibrer 5738 valeurs discrètes de viscosité. Les cartes de viscosités du Ross Ice Shelf calculées à l'aide du nouvel algorithme de minimisation (voir figure IV-35) sont qualitativement similaires à celles obtenues précédemment (Rommelaere et MacAyeal, 1997). La principale différence est que l'on ne retrouve plus de faibles valeurs de viscosité près du front de glace (ces faibles valeurs de viscosité apparente étaient probablement dues à une mauvaise application des conditions aux limites de l'équation adjointe sur le front du Ross Ice

Shelf). Une des caractéristiques importantes de ces cartes est le maximum de viscosité dans la partie Nord Ouest du Ross Ice Shelf. Cette caractéristique était également observée dans l'étude antérieure.

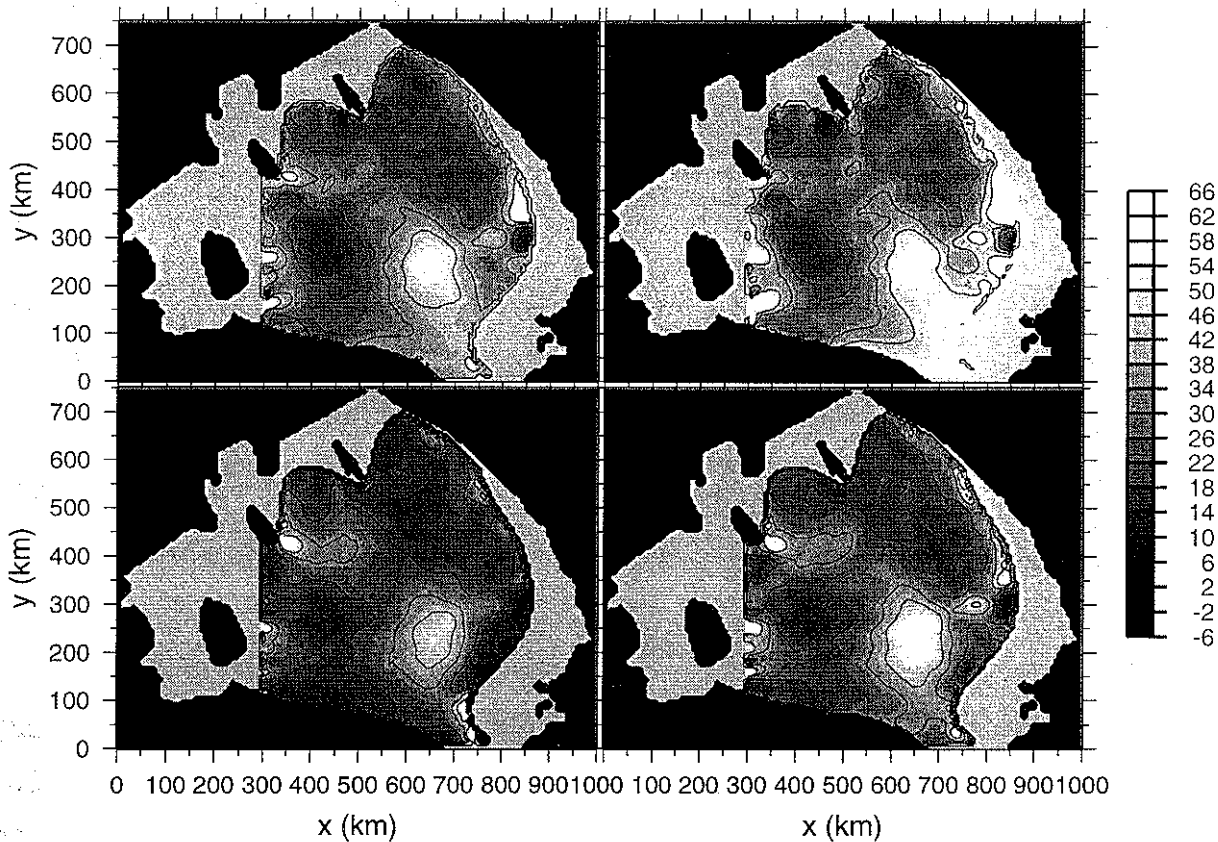


Figure IV-35 : cartes de viscosité effective (MPa a) du Ross Ice Shelf calculées par méthode de contrôle. La minimisation est stoppée à l'aide d'un test du  $\chi^2$  avec une erreur de  $20 \text{ m a}^{-1}$  supposée sur les données. Différents états initiaux ont été considérés : 20 Mpa a (a- bas - gauche), 30 Mpa a (b- bas - droite), 40 Mpa a (c- haut - gauche) et 50 Mpa a (d- haut - droite). Les isocontours 20, 30, 40 et 50 MPa a ont été tracés sur la figure.

### IV.3.5. Discussion

#### IV.3.5.1. Rhéologie et conditions à la base de l'ice-shelf

La viscosité du matériau glace dépend essentiellement des variations de température et de l'état de contrainte. Ainsi, la loi de Glen indique qu'un bloc de glace froid ou soumis à de faibles contraintes est plus visqueux. La plupart des variations de viscosité observées ici sont probablement dues à l'effet combiné de la température et des contraintes. Afin d'essayer de différencier ces deux facteurs, on a tracé le second invariant du tenseur des taux de déformation (indépendant de la profondeur d'après l'analyse adimensionnelle) sur la figure IV-36.

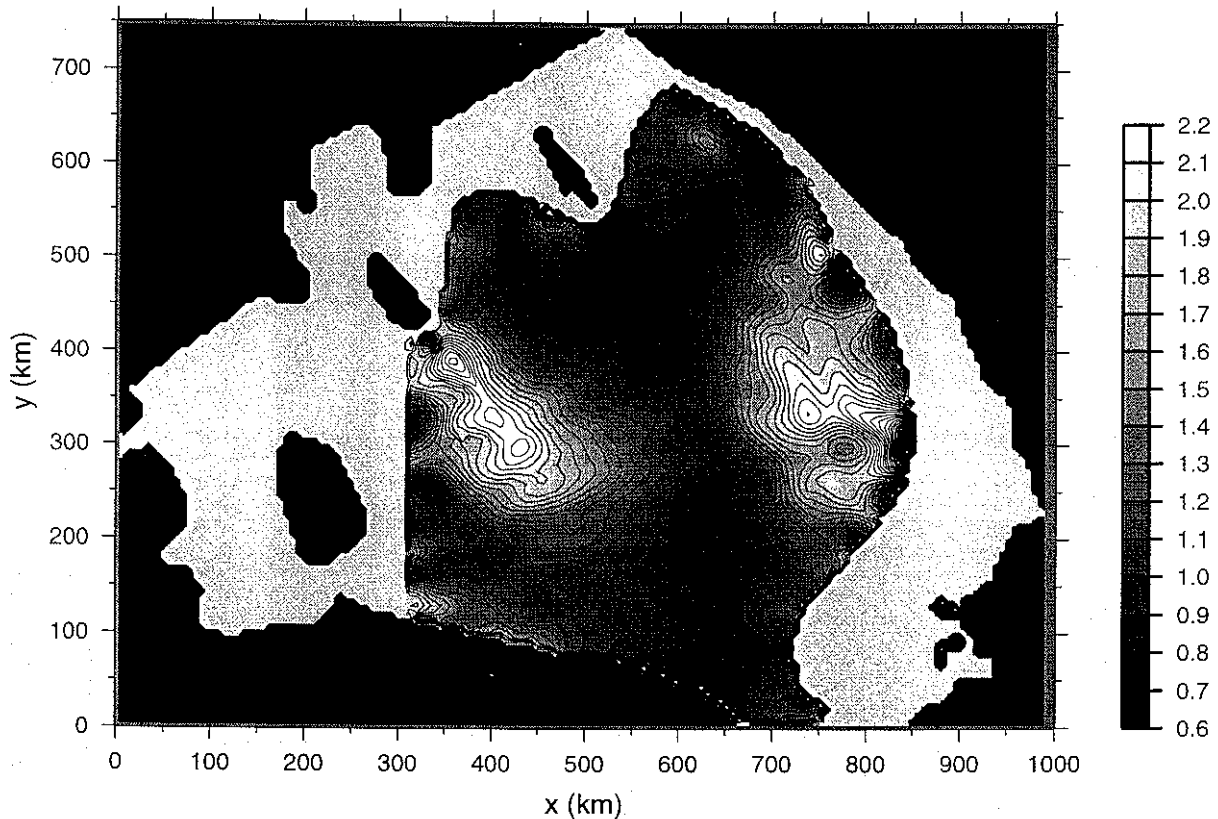


Figure IV-36 : carte du second invariant du tenseur des taux de déformation ( $10^{-3} \text{ an}^{-1}$ ) calculé à partir du champ de vitesse correspondant à la carte de viscosité  $b$  de la figure IV-35 (état initial 30 Mpa  $a$ )<sup>25</sup>. Quatre structures sont identifiables : deux régions de faible déformation au sud (en aval de Crary Ice Rise) et au Nord Ouest, et deux régions de forte déformation à l'est (en aval de Steershead) et à l'Ouest.

La loi de Glen ( $n=3$ ) indique que la viscosité apparente de la glace devrait être liée à cet invariant par la relation :

$$2\bar{\eta} = \bar{B}\bar{\epsilon}^{-2/3} \quad (\text{IV-71})$$

où  $\bar{B}$  est un coefficient dépendant de la température de la colonne de glace (voir annexe). La comparaison des figures IV-35 et IV-36 suggère que trois des quatre structures observées sur la carte d'invariant du tenseur des taux de déformation sont effectivement anticorrélées avec les variations de viscosité (dans la partie Nord Ouest du Ross Ice Shelf, ainsi que dans les régions Est et Ouest). En revanche, la faible déformation en aval de Crary Ice Rise ne correspond pas à une région de forte viscosité. On peut donc supposer qu'il s'agit là d'un fort

<sup>25</sup> La raison pour laquelle on n'utilise pas le champ de vitesses mesuré et interpolé est que la dérivée d'un champ interpolé est extrêmement bruitée. En revanche les champs de vitesses simulés par le modèle (correspondant aux différentes cartes de viscosité reconstruite par la méthode de contrôle) sont lisses, ce qui permet d'avoir une meilleure estimation des dérivées des vitesses (et donc des taux de déformation).

effet de température (*i.e.* lié aux variations spatiales de  $\bar{B}$ ). La figure IV-37 montre qualitativement comment l'accrétion basale peut diminuer la valeur de  $\bar{B}$ .

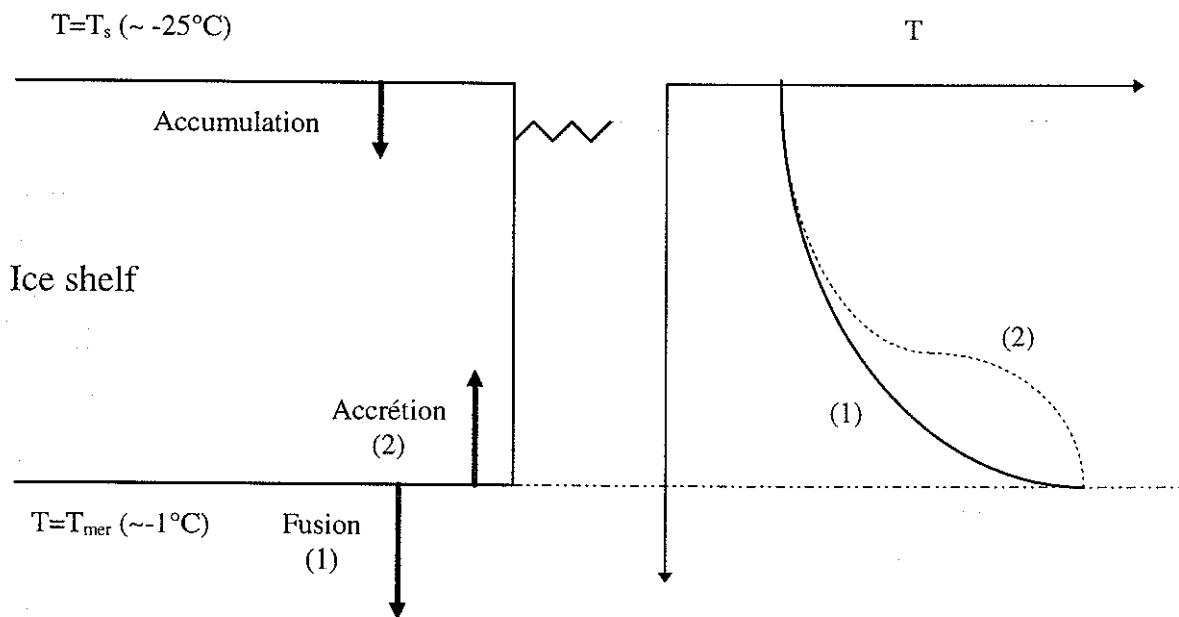


Figure IV-37 : influence de la fusion (ou de l'accrétion) basale sur la vitesse verticale de la glace et donc sur le profil de température dans l'ice-shelf en fonction de la profondeur (en condition d'accrétion, une vitesse verticale à la base de l'ice-shelf, dirigée vers le haut, amène de la chaleur au système). Le coefficient  $\bar{B}$  étant moyenné sur toute l'épaisseur, celui-ci est représentatif d'une température « moyenne » de la colonne de glace. Cette température « moyenne » devrait être plus froide dans les régions de forte fusion et plus chaude dans les régions d'accrétion basale<sup>26</sup>.

Cette analyse rapide suggère donc une forte accrétion dans la région Sud du Ross Ice Shelf, en aval de Crary Ice Rise. Cette observation est en accord avec l'analyse de la carotte de J9, qui fait apparaître de la glace basale d'origine marine (voir Grootes et Stuiver, 1986, pour l'analyse isotopique de cette carotte). Cependant on peut difficilement donner une estimation de cette accrétion car :

<sup>26</sup> Une région dont la base fond devrait apparaître plus visqueuse qu'une région où l'on a de l'accrétion basale (l'état de contrainte étant le même) : ce phénomène, expliqué ici avec l'analyse du profil de température en fonction de la profondeur, est sans doute accentué par la présence de contaminants chimiques (*e.g.* sel de mer) dans la glace de mer condensée à la base de l'ice shelf. En effet des tests mécaniques sur la glace salée montrent que la présence de sel dans la glace peut fortement diminuer sa viscosité.



- le modèle d'ice-shelf présenté ici n'inclue pas le traitement de la conservation de la chaleur<sup>27</sup>.
- les incertitudes sur la loi de Glen et sur la viscosité reconstruite sont probablement trop importantes.

#### ***IV.3.5.2. Une signature de l'activité de Ice Stream B ?***

La méthode de contrôle détecte une région de viscosité exceptionnellement forte au Nord Ouest du RIS. L'analyse comparative des cartes IV-35 et IV-36 indique que cette forte viscosité est probablement liée à un faible état de contrainte. La viscosité reconstruite (70 Mpa a) est toutefois très supérieure à la valeur prédite par la loi de Glen ( $n=3$ ) : 70 Mpa a est la viscosité d'un bloc de glace isotherme à la température de  $-35^{\circ}\text{C}$  environ (le coefficient de la loi de Glen utilisé pour ce calcul rapide étant celui figurant dans l'annexe de Ritz, 1992), soumis à un taux déformation de  $10^{-3} \text{ an}^{-1}$  (taux de déformation observé dans la région étudiée). Cette température de « l'ice-shelf isotherme équivalent », dont la valeur devrait logiquement se situer entre la température de surface ( $\sim -25^{\circ}\text{C}$ ) et la température basale ( $\sim -1^{\circ}\text{C}$ ), paraît beaucoup trop froide.

Cette observation suggère que la glace de la région NW du Ross Ice Shelf possède des caractéristiques différentes de la glace environnante. L'analyse des lignes d'écoulement dans l'ice shelf indique que la glace qui se trouve dans cette région était à la jonction entre ice-stream A ou B et le RIS il y a 1000-1100 ans environ, période correspondant probablement à la formation de Crary Ice Rise et, peut-être, au début de forte activité de ice-stream B (Bindschadler et al., 1990 ; Shabtaie et al., 1988)<sup>28</sup>. Les glaciologues pensent en effet que les ice-streams de l'Antarctique de l'Ouest sont des structures transitoires : Ice-stream C par exemple s'est complètement arrêté il y a 200 ans environ (Shabtaie et Bentley, 1987). Le signal de forte viscosité détecté dans l'ice-shelf peut-il être lié à un sursaut d'activité de ice-stream B ?

Le scénario que nous avons envisagé est le suivant : Ice Stream B emporte avec lui une quantité importante de sédiments au début de son sursaut d'activité, il y a 1000-1100 ans. Du

---

<sup>27</sup> Il existe au LGGE une version de ce modèle d'ice-shelf prenant en compte la conservation 3D de la chaleur (voir Rommelaere et Ritz, 1996). La raison pour laquelle cette version n'a pas été utilisée ici est qu'elle nécessite la connaissance de conditions aux limites sur les bords du domaine considéré. Ici ces conditions aux limites sur la température sont complètement inconnues et l'utilisation du code thermodynamique apporterait peu d'informations.

<sup>28</sup> L'âge de Crary Ice Rise (*i.e.* la période à laquelle l'ice-shelf s'est posé dans cette région) a été déterminé à l'aide d'un profil de température.

fait de l'écoulement de l'ice-shelf, une partie de ces sédiments est aujourd'hui mélangée à la glace basale de la région NW du RIS. Des impuretés auraient tendance à rendre la glace moins visqueuse, ce qui, au premier abord, est contradictoire avec les résultats de notre reconstruction. Toutefois, l'existence de glace basale sale perturberait le bilan de force dans l'ice-shelf, et serait en contradiction avec l'hypothèse que la glace flotte en équilibre hydrostatique avec l'eau de mer. Il est donc possible que le maximum de viscosité de la région NW corresponde à un endroit où le modèle d'écoulement est faux. La figure suivante montre comment une couche basale de glace plus lourde (épaisseur  $x$ , masse volumique  $\rho_s$ ) peut modifier le bilan de force d'un ice-shelf unidimensionnel.

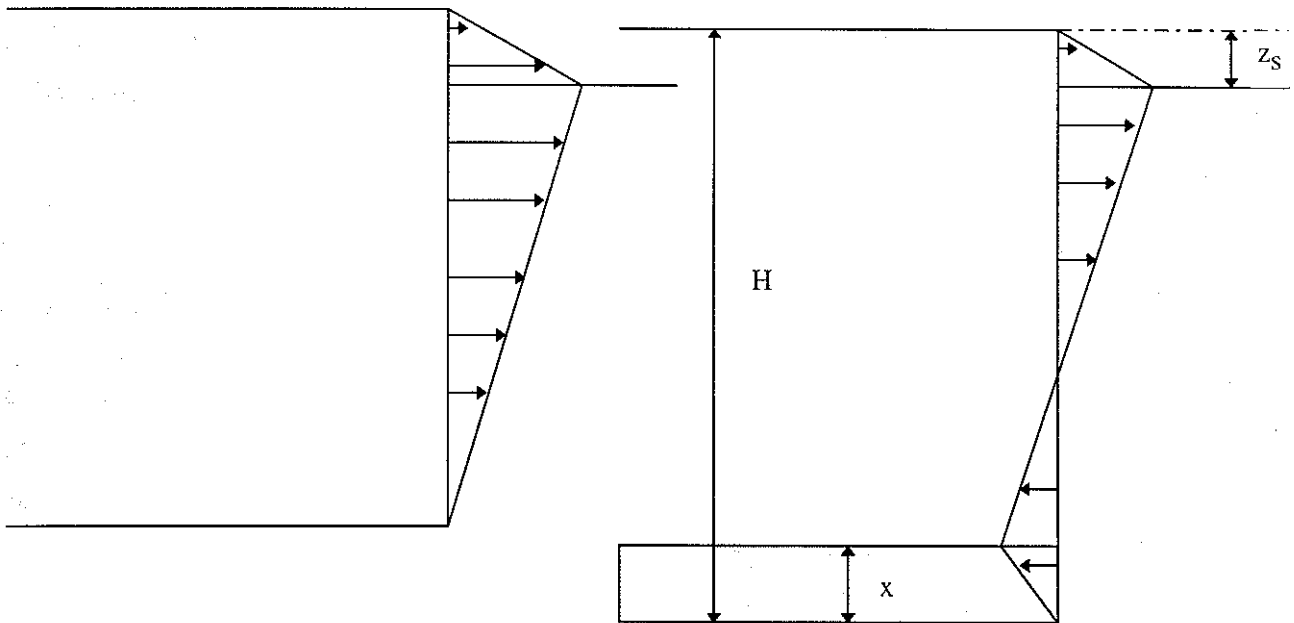


Figure IV-38 : schéma montrant la modification du bilan de force de l'ice-shelf, si des sédiments sont mélangés à la glace basale. Noter que la ligne de flottaison de l'ice-shelf est alors modifiée et que peu de sédiments permettent d'expliquer une forte diminution de la « force nette » qui entraîne l'ice-shelf vers la mer.

A l'aide du schéma ci-dessus, on peut calculer le rapport des forces nettes entre un ice-shelf « sale » et un ice-shelf « propre ». Ce calcul simple est destiné fournir des ordres de grandeur, pour étudier le réalisme du scénario proposé : noter par exemple que ce raisonnement repose sur une vision unidimensionnelle de l'ice-shelf, alors que le problème est bidimensionnel. On applique le principe d'Archimède et on intègre la différence de pression sur l'épaisseur de l'ice-shelf afin de trouver la force nette qui entraîne l'ice-shelf vers la mer :

$$\frac{F^{sale}}{F^{propre}} = \frac{(\rho - \rho_w)(H - x)^2 - \rho_w \left( \frac{\rho}{\rho_w} H + x \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho_w} \right) \right)^2 + \rho_w H^2}{\rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) H^2} \quad (IV-72)$$

Que la méthode de contrôle trouve une viscosité environ deux fois trop importante peut également s'expliquer par une surévaluation de la force nette par le modèle (*i.e.* la force nette calculée par le modèle d'écoulement, qui fait l'hypothèse que l'ice-shelf ne contient pas de sédiments à la base, est deux fois plus importante que la force nette réelle). La question que l'on se pose est donc la suivante : quelle épaisseur de couche sale permettrait d'expliquer une réduction de la force nette d'un facteur 2 ? Une réponse approximative est fournie par la résolution de l'équation du second degré (IV-72) avec les paramètres suivants :  $\rho_w = 1028 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho = 917 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho_s = 1500 \text{ kg m}^{-3}$  et  $H = 300 \text{ m}$ . On élimine la racine négative de cette équation qui n'est physiquement pas acceptable, ce qui donne une épaisseur de couche basale sale ( $x$ ) de 15 m environ. Ce raisonnement grossier doit être pris avec précaution : il montre simplement qu'une couche basale plus lourde, d'une dizaine de mètres, peut induire notre méthode en erreur de manière significative en lui faisant suggérer à tort une trop forte viscosité.

Quelques arguments complémentaires rendent ce scénario plausible. Comme indiqué sur la figure IV-38, une couche plus lourde à la base de l'ice-shelf perturbe le niveau de flottaison de l'ice-shelf. Cette anomalie pourrait se retrouver par l'étude de l'altitude de la surface de l'ice-shelf. Dans le cas d'une couche basale sale de 15 m, l'anomalie de flottaison serait de 7 m environ.

## ERS-1 Geodetic Mission

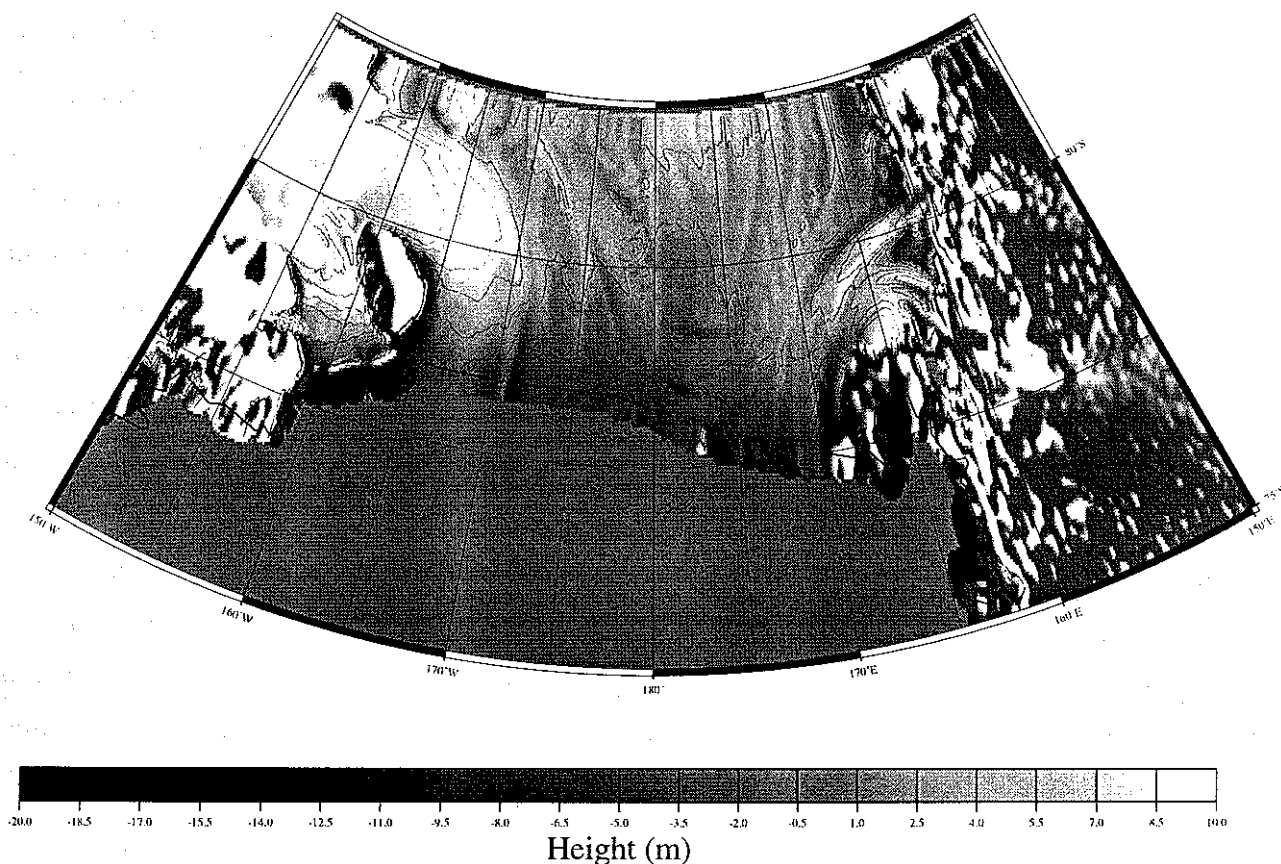


Figure IV-39 : altitude du Ross Ice Shelf mesuré par ERS-1. La géométrie de Ross Ice Shelf est différente que celle de nos reconstructions. Cette différence provient des projections utilisées (ici polaire stéréographique et plate carrée dans nos reconstructions). Cette carte m'a été fournie par F. Rémy.

Cette carte d'altitude fait apparaître deux creux de 3-4 m environ dans la région que l'on considère. Cette anomalie est inférieure à l'estimation grossière de 7 m faite ci-dessus mais rend toutefois plausible le scénario proposé. Une anomalie de flottabilité a également été remarquée dans cette région par Bamber et Bentley (1994), par l'analyse comparative des cartes d'épaisseur et d'altitude. D'après Bentley (1981), la carte d'épaisseur pourrait être faussée dans cette région par la présence d'un réflecteur dans la glace, situé quelques dizaines de mètres au dessus de la base de l'ice-shelf<sup>29</sup>. Ces problèmes de réflecteurs dans la glace sont traditionnellement interprétés comme la présence ou non de glace marine à la base de l'ice-shelf (Neal, 1979). Toutefois, la présence de glace marine (chaude) à la base de l'ice-shelf n'est

<sup>29</sup> L'épaisseur du Ross Ice Shelf a été mesurée à l'aide d'échos radar. La technique détecte les interfaces entre deux milieux de densité différente : ainsi la détection des interfaces atmosphère - glace et glace - océan permet de mesurer l'épaisseur de l'ice-shelf. L'analyse peut donc être faussée si la base de l'ice-shelf contient de la glace marine (ou de la glace sale).

pas en accord avec les résultats de la reconstruction de la viscosité apparente (*cf.* raisonnement sur l'effet de l'accrétion sur le profil de température dans la glace, et donc sur la viscosité). Il est donc concevable que les problèmes d'échos radar rencontrés par Bentley et al. (1979) dans cette région soient dus à de la glace basale sale plutôt qu'à de la glace marine.

Ce qui nous incite à proposer ce scénario est la découverte assez récente de décharges massives d'icebergs périodiques dans l'océan Atlantique Nord durant les 130 000 dernières années (Heinrich, 1988 ; Broecker et al., 1992). Ces décharges d'icebergs (connues sous le nom d'événements de Heinrich) se matérialisent dans les carottes marines par des couches reconnaissables, riches en carbonate détritique. Plusieurs processus ont été proposés pour expliquer ces décharges massives : les changements d'insolation (Heinrich, 1988), les variations du niveau de la mer (Bond et Lotti, 1994), les variations de la température moyenne de la Terre (Bond et Lotti, 1995) ou des modes propres d'oscillation de calotte Laurentide (MacAyeal, 1993a, b, Alley et MacAyeal, 1994, Verbitsky et Saltzman, 1995).

Il est certain que le signal de forte viscosité détecté dans la région NW peut avoir d'autres explications que celle proposée ici. Ce scénario mérite sans doute d'être pris en considération : s'il était vérifié, il s'agirait du seul endroit au monde où l'on pourrait observer et mieux comprendre l'analogie d'un petit événement de Heinrich resté bloqué dans le Ross Ice Shelf.

### ***IV.3.5.3. En résumé***

- Le Ross Ice Shelf est un peu plus visqueux que ne le prédit la loi de Glen.
- La méthode de reconstruction suggère une région de forte accrétion basale en aval de Crary Ice Rise. Toutefois, la quantification de cette accrétion basale reste difficile.
- Plus au Nord, les variations de viscosité apparente semblent être liées à l'état de contrainte de la glace.
- Un signal de viscosité exceptionnellement fort est détecté dans la partie Nord Ouest du Ross Ice Shelf. Ce signal pourrait être lié à un changement de dynamique de ice-stream B il y a 1000-1100 ans.

Les résultats et les conclusions de cette étude sont fortement limités par le nombre de mesures de vitesse d'écoulement dont on dispose sur le Ross Ice Shelf. Les données utilisées ici ont plus de vingt ans mais il n'existe pas de données plus récentes.

Il serait intéressant d'appliquer la méthode de contrôle aux autres ice-shelves importants de la calotte Antarctique (Ronne Filchner Ice Shelf, Larsen Ice Shelf et Amery Ice Shelf), afin de détecter d'éventuelles différences de régime dynamique entre ces ice-shelves. Actuellement, une telle étude n'est pas possible, faute d'une couverture de mesures de vitesses suffisante. A

titre d'illustration, on a reporté sur la figure suivante l'emplacement de toutes les mesures de vitesses d'écoulement effectuées sur le Ronne Filchner Ice Shelf (Antarctique de l'Ouest).

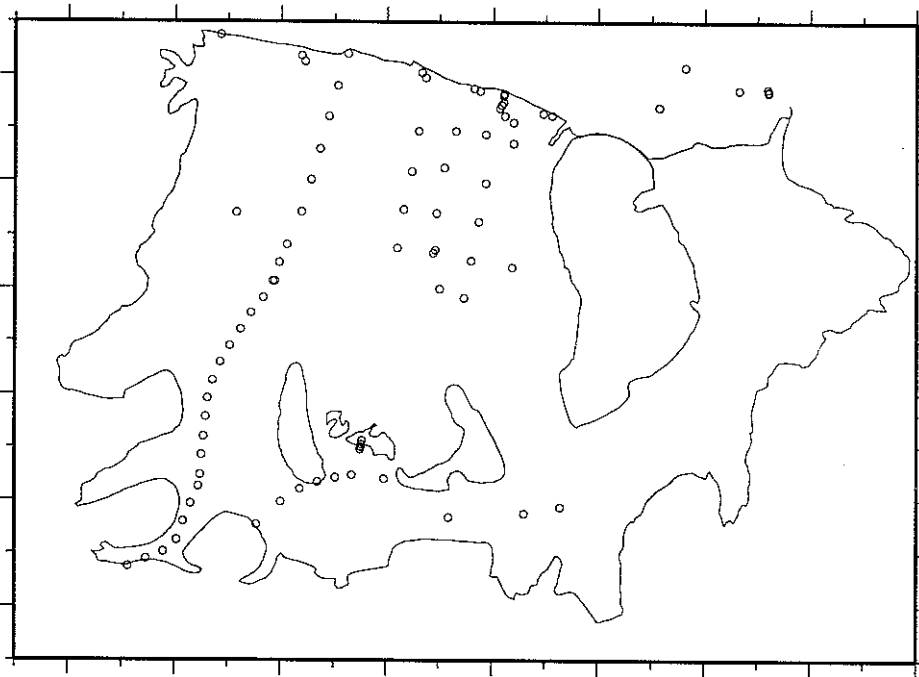


Figure IV-40 : emplacement des mesures de vitesses effectuées sur le Ronne Filchner Ice Shelf<sup>30</sup> (le front de l'ice-shelf, au Nord, est placé en haut du croquis). Noter que la couverture est beaucoup moins dense que celle du Ross Ice Shelf -RIGGS-(voir figure IV-17, p. 142): ces données sont insuffisantes pour reconstruire la rhéologie à grande échelle. Un vèlage d'icebergs important a eu lieu entre 1985 et 1986 dans la partie Est de l'ice shelf (Filchner Ice Shelf), ce qui explique les points en haut à droite de la carte (aujourd'hui au milieu de la mer de Wedell).

Dès que les techniques satellitaires fourniront des cartes plus précises d'écoulement sur les ice-shelves, l'utilisation de cette méthode permettra certainement une meilleure compréhension de la dynamique des ice-shelves et une meilleure prise en compte des interactions avec l'océan dans les modèles d'écoulement de glace.

<sup>30</sup> Les données de vitesses proviennent d'une compilation aimablement fournie par David Vaughan. La géométrie de l'ice-shelf a été numérisée à partir de la carte de Sievers et al. (1994).

## IV.4. VERS UN MODELE COMPLET 3D DE CALOTTE ANTARCTIQUE ?

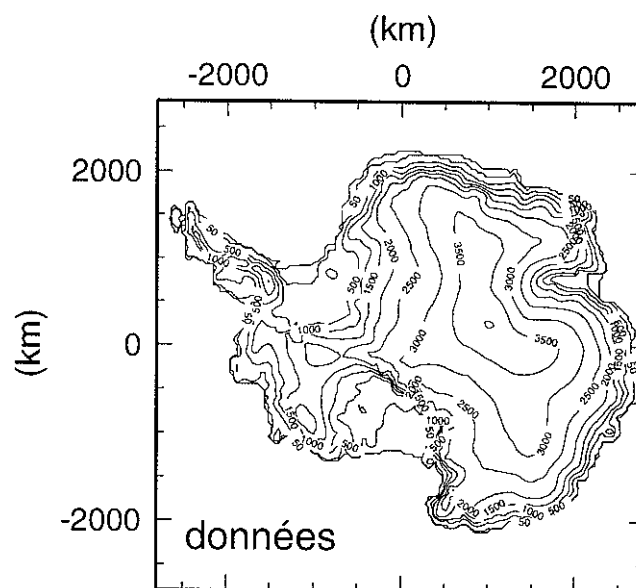


Figure IV-41 : Altitude actuelle de la calotte Antarctique, mesurée par Drewry (1988).

Le modèle d'ice-shelf décrit dans ce chapitre a été couplé au modèle de calotte posée du LGGE (Ritz et al., 1997) puis appliqué à l'étude de la calotte Antarctique<sup>31</sup>. Le modèle Antarctique possède les caractéristiques suivantes :

- il traite des équations d'équilibre quasistatique (ordre 0 pour la calotte posée, ordre 0+1 pour l'ice-shelf) ; la loi rhéologique utilisée est la loi de Glen ( $n = 3$ ) dans la calotte posée ; la viscosité effective de l'ice-shelf est fixée (elle provient de l'étude de la rhéologie du Ross Ice Shelf).

- Le champs de température 3D est couplé au calcul des vitesses afin d'estimer le coefficient de la loi de Glen et les conditions basales de la calotte (ce qui est important pour le glissement basal de la calotte).

- La zone de transition est traitée comme des ice-streams (voir équation (IV-50), p. 155). La friction basale est paramétrisée par une relation du type  $\tau = fN$ , où  $\tau$  est la friction basale,  $N$  la pression effective à la base du glacier et  $f$  un coefficient de frottement solide.

<sup>31</sup> Nous avons dans un premier temps effectué ce couplage sur une calotte idéale, puis Catherine Ritz a appliqué le modèle à la calotte Antarctique. Il s'agit donc ici des résultats de Catherine, qui m'autorise à les reprendre afin de montrer une autre application du modèle d'écoulement d'ice-shelf.

• la position de la ligne d'échouage découle de la conservation de la masse ; elle n'est pas fixée, mais calculée à chaque pas de temps.

Sur les figures suivantes (IV-42 et IV-43) sont présentés les résultats préliminaires obtenus pour des simulations d'évolution de la calotte Antarctique au cours des deux derniers cycles climatiques. Ces simulations correspondent aux expériences (niveau 3) définies par P. Huybrechts et M. Verbitsky pour la seconde phase du programme Européen EISMINT.

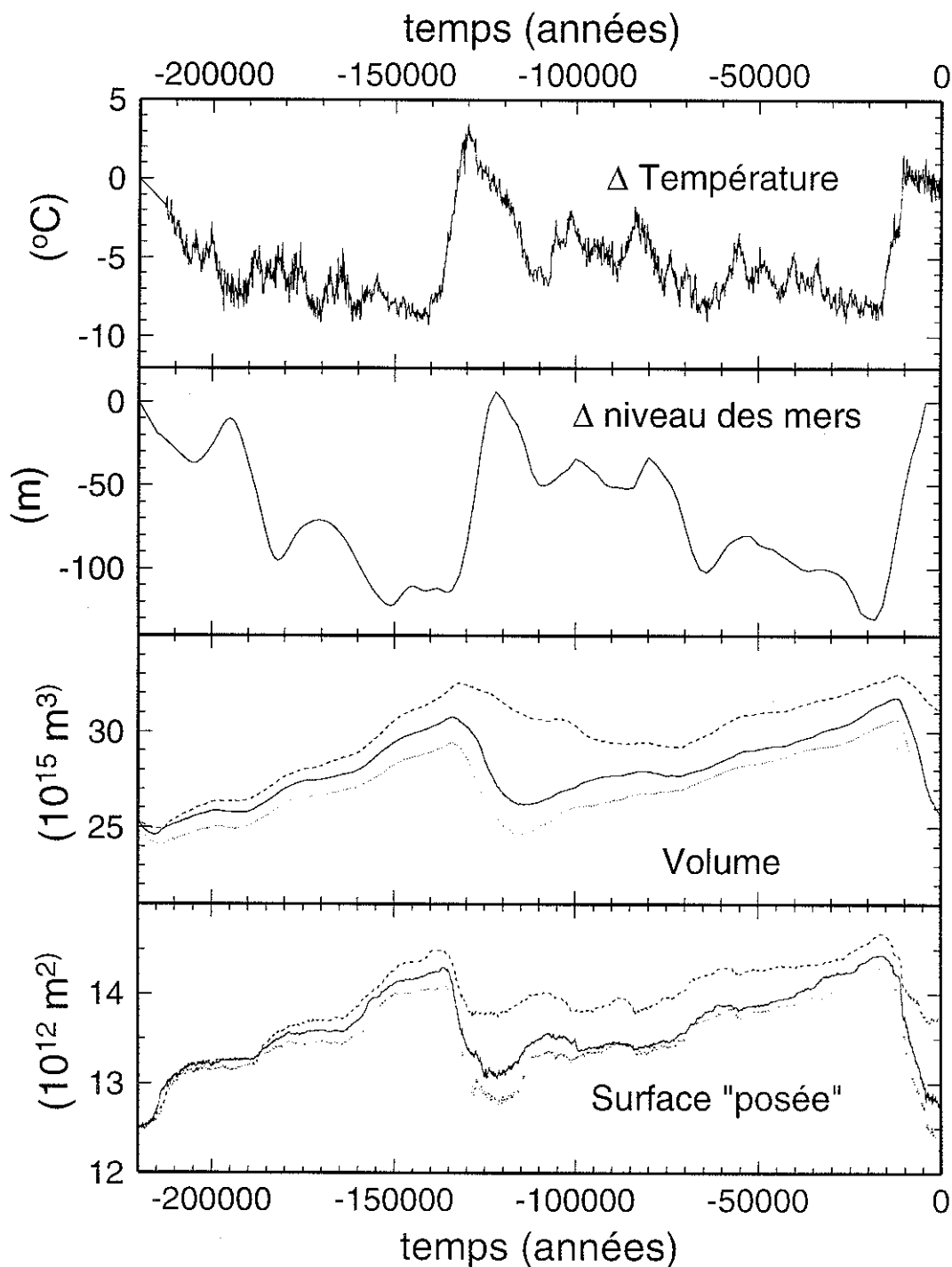


Figure IV-42 : simulations sur les deux derniers cycles climatiques effectuées avec le modèle 3D Antarctique. Sur les deux panneaux du haut sont tracés les deux paramètres d'entrée principaux du modèle, respectivement la température de surface (d'après le signal de Deutérium



*de Vostok, Jouzel et al., 1993) et le niveau des mers (adapté de Martinson et al., 1987). Les deux panneaux du bas représentent les sorties du modèle (en volume de glace et surface posée), pour des valeurs différentes du coefficient de frottement solide utilisé à la base de la calotte (a-  $f=0.03$ , en tirets ; b-  $f=0.025$ , en trait plein ; c-  $f=0.02$ , en pointillé).  $10^{15} \text{ m}^3$  de glace correspondent à 3m de niveau des mers environ.*

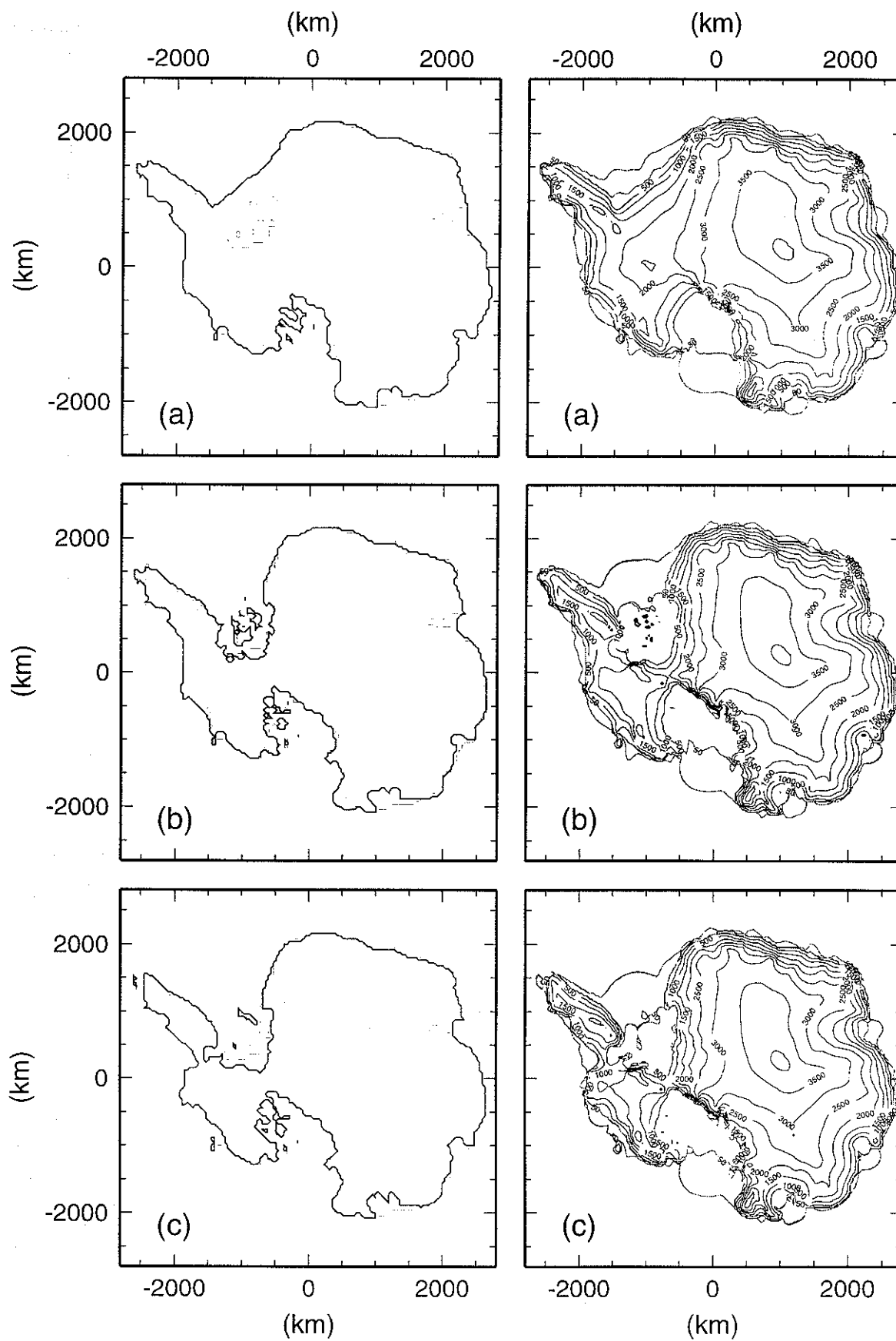


Figure IV-43 : état actuel pour chacune des simulations a, b et c. Sur les panneaux de gauche la position actuelle de la ligne d'échouage est comparée à la position simulée ; à droite est tracée l'altitude de la surface simulée dans les différentes configurations. Noter que les

différences les plus importantes sont observées en Antarctique de l'Ouest, i.e. au niveau des ice-shelves les plus importants de la calotte (Ronne-Filchner Ice Shelf et Ross Ice Shelf).

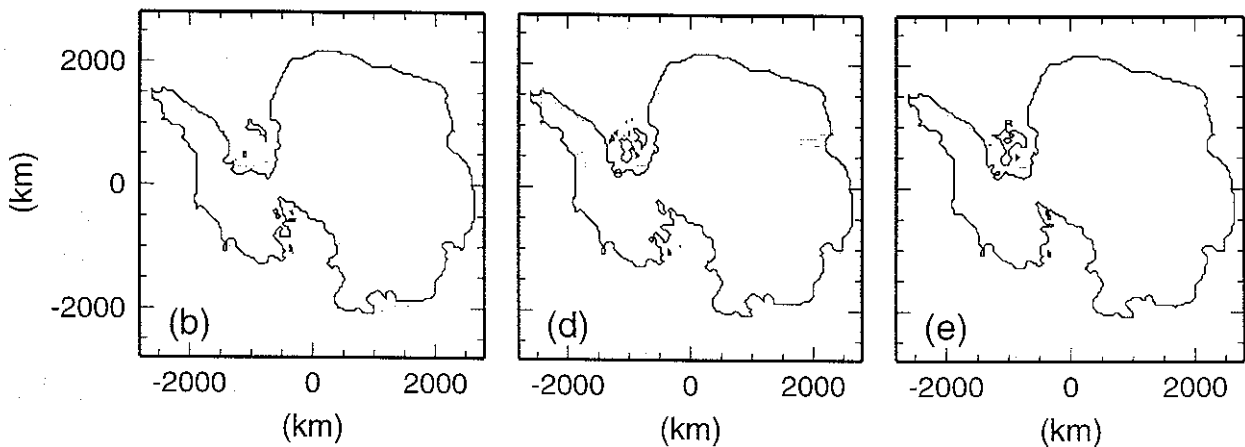
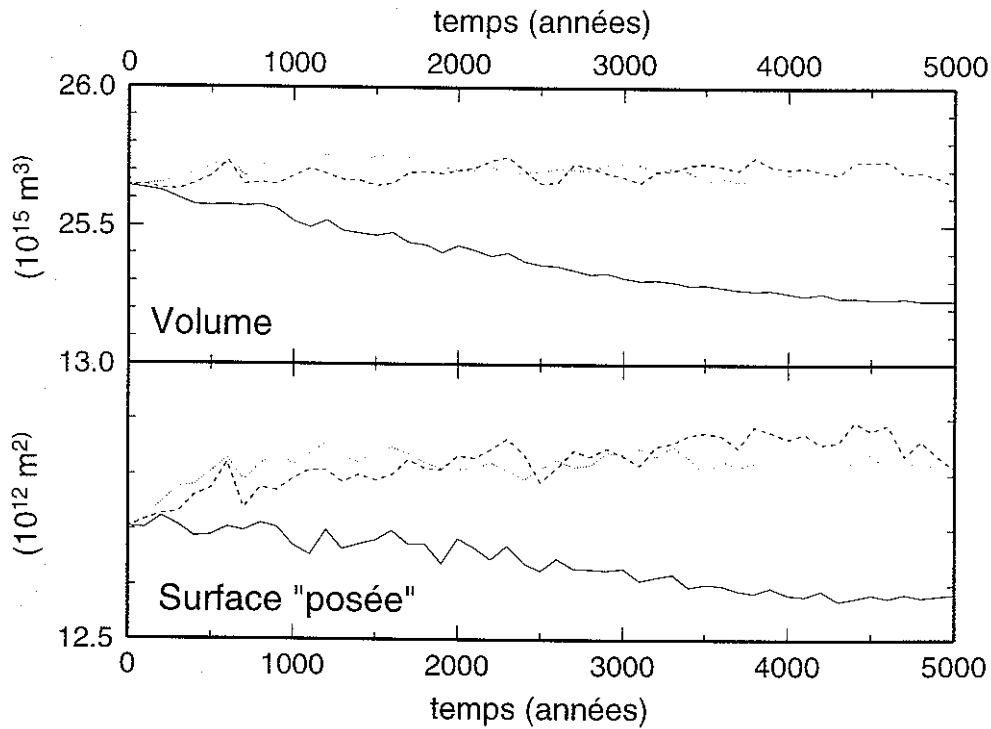


Figure IV-44 : étude de sensibilité aux autres paramètres du modèle (fusion basale, rhéologie des ice-shelves). L'état de départ est l'état actuel de la simulation b des figures IV-42 et IV-43. L'expérience b (trait plein) consiste à laisser les paramètres inchangés et regarder l'évolution du système sur 5000 ans. Expérience d (tirets) et e (pointillés) : idem en diminuant la fusion sous les ice-shelves de 25% (d) et en augmentant la viscosité des ice-shelves de 20% (e). Noter que dans les simulations d et e, des îles se forment au milieu du Ronne-Filchner Ice Shelf, qui a tendance à se poser.

Les figures IV-42, et IV-43 montrent à quel point le coefficient de frottement utilisé dans la loi de glissement peut avoir de l'influence sur la géométrie de l'Antarctique de l'Ouest. Seule la simulation b permet d'obtenir une géométrie actuelle réaliste. C'est cette simulation qui a servi à quelques tests supplémentaires de sensibilité (figure IV-44) : à partir de l'état actuel simulé pour l'expérience b, on a laissé évoluer le système sur 5000 ans<sup>32</sup>:

- sans modifier les paramètres d'entrées (expérience b, figure IV-44)
- en diminuant la fusion de 25% sous les ice-shelves (expérience d)
- en augmentant de 20% la viscosité des ice-shelves (expérience e)

Les résultats montrent à quel point le volume de glace de la calotte est sensible à ces paramètres mal connus. Noter également que l'augmentation de la viscosité de l'ice-shelf a approximativement le même effet que la fusion à la base de l'ice-shelf.

En résumé, les observations préliminaires qui découlent de cette série d'expériences sont les suivantes :

- La géométrie de la calotte Antarctique semble très sensible à la friction à la base de la calotte, à la rhéologie des ice-shelves et au bilan de masse en dessous des ice-shelves. Ces trois paramètres conditionnent en grande partie la géométrie de la calotte Antarctique de l'Ouest. La géométrie de la calotte Antarctique de l'Est semble au contraire peu influencée par la dynamique des ice-streams et des ice-shelves.

- Le comportement dynamique des deux ice-shelves majeurs de l'Antarctique de l'Ouest (Ronne Filchner Ice Shelf et Ross Ice Shelf) semble être différent. En particulier, le modèle suggère que le Ronne Filchner est plus sensible aux variations de niveau des mers que le Ross Ice Shelf. Ceci est dû à une topographie différente du plateau continental en dessous des deux ice-shelves. Ces simulations montrent qu'une bonne connaissance de la topographie sous les ice-shelves (et donc du phénomène d'isostasie<sup>33</sup>) est importante pour la simulation de la géométrie de la calotte Antarctique de l'Ouest.

Avant de fournir des estimations fiables de l'évolution du niveau des mers pour les 1000-2000 ans à venir, il faudra dans un premier temps contraindre de manière plus appropriée les

---

<sup>32</sup> Ces simulations ne peuvent pas être considérées comme des prédictions de la géométrie de la calotte Antarctique : ils s'agit uniquement de tests de sensibilité du modèle.

<sup>33</sup> Les simulations présentées dans cette partie utilisent un modèle « régional relaxé » d'isostasie (voir Le Meur, 1996). Une des améliorations sera le couplage avec le modèle complet « viscoélastique auto-gravitant » (Le Meur, 1996 ; Le Meur et Huybrechts, 1996).

paramètres libres des modèles d'écoulement des calottes (essentiellement friction basale et paramètres rhéologiques de la glace). Le travail de ce chapitre est une petite contribution vers l'établissement d'une loi rhéologique de la glace, valable à grande échelle. Une étape ultérieure consistera à coupler le modèle d'écoulement de glace avec des modèles de circulation atmosphérique et océanique, afin de mieux prescrire le bilan de masse (accumulation en surface, fusion sous les ice-shelves).

## V. CONCLUSIONS

A travers trois exemples, nous nous sommes efforcés de montrer ce que les méthodes inverses pouvaient apporter à l'étude des glaciers. Même appliquées sous une forme simplifiée, ces méthodes semblent avoir un potentiel énorme en glaciologie ; elles ont aussi leurs limites :

- quelle que soit la sophistication du formalisme mathématique utilisé, il est illusoire de vouloir reconstruire un signal qui n'existe plus. Ainsi, à Vostok, il n'est pas raisonnable de reconstruire la température du dernier stade glaciaire à partir du profil de température du trou de forage. Le principal avantage des méthodes inverses est d'indiquer à leur utilisateur quelles sont leurs limites.

- elles ne fournissent pas de réponses absolues aux vraies questions que l'on se pose : par exemple, elles permettent de détecter un signal de forte viscosité dans la région NW du Ross Ice Shelf, mais elles sont incapables de l'expliquer. Le problème dans ce cas n'est pas résolu, mais simplement déplacé : une question en a remplacé une autre.

Des trois problèmes inverses abordés dans cette thèse, le plus prometteur à court terme me semble être la déconvolution du signal atmosphérique abordée au chapitre III : c'est en effet le domaine où l'on dispose pour le moment du plus de données. Il paraît nécessaire d'étendre rapidement la méthode à la déconvolution des rapports isotopiques, puis d'améliorer le modèle direct de transport des gaz afin de mieux interpréter le signal des périodes de transition.

La méthode de reconstruction de la rhéologie des ice-shelves (chapitre IV) peut également être améliorée, notamment au niveau de l'introduction des informations *a priori*. Toutefois, je doute que cela apporte beaucoup de résultats supplémentaires, tant que de nouvelles mesures de vitesses d'écoulement ne seront pas effectuées<sup>1</sup>. Les résultats des simulations préliminaires avec le modèle 3D de dynamique de la calotte Antarctique suggèrent que des contraintes plus

---

<sup>1</sup> Pour étudier la *dynamique* des calottes, il faut des mesures de vitesses d'écoulement. Pourtant, à ma connaissance, aucune balise de vitesse française n'a jamais été plantée sur les ice-shelves (qui sont des zones critiques des calottes) : le Ross Ice Shelf a été étudié par des équipes anglaises et américaines, le Ronne-Filchner Ice Shelf par les Anglais et les Allemands, l'Amery Ice Shelf par les Australiens, le Larsen Ice Shelf par les Anglais et les Italiens mesurent les vitesses d'écoulement du Nansen Ice Shelf et de l'Hellsgate (cette liste n'étant pas exhaustive).

importantes sur la friction basale, sur la fusion des ice-shelves et sur leur rhéologie sont indispensables pour fournir des prévisions utiles sur le volume des glaces, et indirectement sur le niveau des mers, en cas de réchauffement de la planète. Des mesures de vitesses d'écoulement de la calotte Antarctique permettraient d'obtenir une partie de ces contraintes.

L'analyse du profil de température à Vostok en vue de reconstruire la température du dernier stade glaciaire a été un effort vain (chapitre II). Ce ne sont ni les données, ni les méthodes inverses employées qui sont en cause : les difficultés proviennent entièrement de la nature très sous déterminée du problème inverse. Toutefois, notre étude porte uniquement sur le site de Vostok, où l'accumulation en surface est beaucoup plus faible que sur les sites où ont été effectuées les autres analyses paleothermométriques de ce genre (GRIP, GISP2, Dye 3). Il pourrait donc être intéressant de transposer cette étude aux sites Groenlandais.

## VI. BIBLIOGRAPHIE

- Alley, R.B., and D.R. MacAyeal, 1994. Ice rafted debris associated with binge/purge oscillations of the Laurentide ice sheet, *Paleoceanography*, **9**(4), 503-511.
- Arnaud, A., 1997. Modélisation de la transformation de la neige en glace à la surface des calottes polaires ; étude du transport des gaz dans ces milieux poreux, *Thèse UJF*, 297 p.
- Backus, G.E. and F. Gilbert, 1967. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems, *Geophys. J. R. astron. Soc.*, **13**, 247-276.
- Backus, G.E. and F. Gilbert, 1968. The resolving power of gross Earth data, *Geophys. J. R. astron. Soc.*, **16**, 169-205.
- Backus, G.E. and F. Gilbert, 1970. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, *Philos. Trans. R. Soc.*, **266**, 123-192.
- Baertstchi, I.H. and W.C. Macklin, 1965. Absolute <sup>18</sup>O content of Standard Mean Ocean Water, *Earth planet. Sci. Lett.*, **31**, 341-344.
- Bamber, J.L., and C.R. Bentley, 1994. A comparison of satellite-altimetry and ice-thickness measurements of the Ross Ice Shelf, Antarctica, *Ann. Glaciol.*, **20**, 357-364.
- Barnola, J-M. et P. Duval, 1992. La transformation de la neige en glace à la surface des calottes polaires, *CNRS « Images de la physique »*, Supp. du n°79 du *courrier du CNRS*, p 52-57.
- Barcilon, V. and D.R. MacAyeal, 1993. Steady flow of a viscous ice stream across a no-slip/free-slip transition at the bed, *J. Glaciol.*, **39**(131), 167-185.
- Bayes, T., 1763 (1958). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, *Philos. Trans. R. Soc.*, **53**, 370-418.
- Beck, A.E. and 7 others, 1992. A comparison of five different analyses in the interpretation of five borehole temperature data sets, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4), 101-112.
- Bender, M.L., T. Sowers, J.M. Barnola and J. Chappelaz, 1994. Changes in the O<sub>2</sub>/N<sub>2</sub> ratio of the atmosphere during recent decades reflected in the composition of air in the firm at Vostok. *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 189-192.
- Bentley, C.R., 1981. Variations in valley glacier activity in the Transantarctic Mountains as indicated by associated flow bands in the Ross Ice Shelf, *IAHS*, **131**, 247-251.
- Bentley, C.R., J.W. Clough, K.C. Jezek and S. Shabtaie, 1979. Ice thickness patterns and the dynamics of the Ross Ice Shelf, Antarctica, *J. Glaciol.*, **24**(90), 287-294.



- Bentley, C.R. and K.C. Jezek, 1981. RISS, RISP and RIGGS : post-IGYglaciological investigations of the Ross Ice Shelf in the U.S. programme, *J. R. Soc. N.Z.*, **11**(4), 355-372.
- Bindschadler, R.A., E.P. Roberts and A. Iken, 1990. Age of Crary Ice Rise, Antarctica, determined from temperature-depth profiles, *Ann. Glaciol.*, **14**, 13-16.
- Bindschadler, R., P. Vornberger, D. Blankenship, T. Scambos and R. Jacobel, 1996. Surface velocity and mass balance of Ice Stream D and E, West Antarctica, *J. Glaciol.*, **42**(142), 461-475.
- Bond, G.C. and R. Lotti, 1994. Heinrich events : a consequence of sea level rises ?, *EOS Trans. AGU*, **75**(16), 54.
- Bond, G.C. and R. Lotti, 1995. Iceberg discharges into the North Atlantic on millennial time scales during the last glaciation, *Science*, **267**, 1005-1010.
- Broecker, W., G.C. Bond, M. Klas, E. Clark, and J. McManus, 1992. Origin of the northern Atlantic's Heinrich events, *Climate Dynamics*, **6**, 265-273.
- Bzowski, J., J. Kestin, E.A. Mason and F.J. Uribe, 1990. Equilibrium and transport properties of gas mixtures at low density : eleven polyatomic gases and five noble gases, *J. Phys. Chem. Ref. data*, **19**, 1179-1232.
- Cuffey, K.M., R.B. Alley, P.M. Grootes, J.M. Bolzan, S. Anandakrishnan, 1994. Calibration of the  $\delta^{18}\text{O}$  isotopic paleothermometer for central Greenland, using boreholes temperatures, *J. Glaciol.*, **40**(135), 341-349.
- Cuffey, K.M., G.D. Clow, R.B. Alley, M. Stuiver, E.D. Waddington, R.W. Saltus, 1995. Large Artic temperature change at the Wisconsin-Holocene glacial transition, *Science*, **270**, 455-458.
- Dahl-Jensen D. and S.J. Johnsen, 1986. Paleotemperatures still exist in the Greenland ice sheet, *Nature*, **320**, 250-252.
- Dahl-Jensen D., S.J. Johnsen, W.S.B. Paterson and C. Ritz, 1993. Comments on « Paleothermometry by control methods » by MacAyeal and others, *J. Glaciol.*, **39**(132), 421-423.
- Dansgaard W., S. Johnsen, H.B. Clausen and N. Gundestrup, 1973. Stable isotope glaciology, *Medd. Groen.*, **197**(2), 1-53.
- Dansgaard W., H.B. Clausen, N. Gundestrup, C.U. Hammer, S. Johnsen, P.M. Kristinsdottir and N. Reeh, 1982. A new Greenland deep ice core, *Science*, **218**, 1273-1277.
- Debreu, L., 1995. Décomposition de domaine pour un modèle océanique, rapport DEA UJF-ENSIMAG.
- Determann, J., 1991. Das fließen von shelveisen - numerische simulationen mit der methode der finiten differenzen, PhD thesis, *Ber. Polarforsch.*, **83**, 83 p.

- Doake C.S.M. and D.G. Vaughan, 1991. Rapid disintegration of the Wordie Ice Shelf in response to atmospheric warming, *Nature*, **350**, 328-330.
- Dousteyssier, H., 1995. Sur des techniques déterministes et stochastiques appliquées aux problèmes d'identification, *Thèse UJF*, 211p.
- Drewry, D.J., 1983. The surface of the Antarctic ice sheet, *Antarctica: glaciological and geophysical folio*, Scott Polar research institute (Cambridge).
- Duglokencky, E.J., P.M. Lang, K.A. Masarie and L.P. Steele, 1994, Atmospheric CH<sub>4</sub> records from sites in the NOAA/CMDL air sampling network, South Pole. *Trends '93: a compendium of data on global change*, ed. T.A. Boden, D.P. Kaiser, R.J. Sepanski and F.W. Stoss, 274-350.
- Etheridge, D.M., G.I. Pearman and P.J. Fraser, 1992. Changes in tropospheric methane between 1841 and 1978 from a high accumulation-rate Antarctic ice core, *Tellus*, **44B**, 282-294.
- Etheridge, D.M., L.P. Steele, R.L. Langenfelds and R.J. Francey, 1996. Natural and anthropogenic changes in atmospheric CO<sub>2</sub> over the last 1000 years from air in Antarctic ice and firn. *J. Geophys. Res.*, **101(D2)**, 4115-4128.
- Fabre A., A. Letréguilly, C. Ritz and A. Mangeney, 1995. Greenland under changing climates: sensitivity experiments with a new three-dimensional ice-sheet model, *Ann. Glaciol.*, **21**, 1-7.
- Ferrandon, J., 1961. *Cours de mécanique*, Eyrolles, Paris, 370p.
- Firestone J., 1995. Resolving the Younger Dryas event through borehole thermometry, *J. Glaciol.*, **41(137)**, 39-50.
- Fletcher R. and C.M. Reeves, 1964. Function minimization by conjugate gradients, *The computer Journal*, **7**, 149-154.
- Grootes, P.M., M. Stuiver, 1986. Ross Ice Shelf oxygen isotopes and West Antarctic climate history, *Quat. Res.*, **26**, 49-67.
- Grootes, P.M., M. Stuiver, J.W.C. White, S. Johnsen and J. Jouzel, 1993. Comparison of oxygen isotope records from the GISP2 and GRIP Greenland ice cores, *Nature*, **366**, 552-554.
- Hageman, R., G. Nief and E. Roth, 1970. Absolute isotopic scale for Deuterium analysis. Absolute D/H ratio for SMOW, *Tellus*, **22**, 712-715.
- Heinrich, H., 1988. Origin and consequences of cyclic ice rafting in the northwest Atlantic Ocean during the past 130,000 years, *Quaternary Research*, **29**, 142-152.
- Hestenes M. and E. Stiefel, 1952. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *NBS J. Research*, **49**, 409-436.
- Hutter, K., 1983. *Theoretical Glaciology*, Reidel, Dordrecht.

- Huybrechts, P., 1990. A 3-D model for the Antarctic ice sheet : a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. *Climate Dyn*, **5**(2), 79-92.
- Huybrechts, P., 1992. The Antarctic ice sheet and environmental change : a three dimensional modelling study, PhD thesis, *Ber. Polarforsch.*, **99**, 241 p.
- Huybrechts, P., Payne T. and the EISMINT Intercomparison group, 1996. The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models, *Ann. Glaciol.*, **23**, 1-12.
- Jenkins, A., 1991. A one-dimensional model of ice shelf-ocean interaction, *J. Geophys. Res.*, **96**(C11), 20671-20677.
- Johnsen S.J., W. Dansgaard and J.W. White, 1989. The origin of Arctic precipitation under present and glacial conditions, *Tellus*, **41**, 452-469.
- Johnsen S.J., D. Dahl-Jensen, W. Dansgaard and N.S.Gundestrup, 1995. Greenland temperatures derived from GRIP bore hole temperature and ice core isotope profiles, *Tellus*, **47b**, 624-629.
- Jouzel J., and L. Merlivat, 1984. Deuterium and oxygen 18 in precipitation : modeling of the isotopic effects during snow formation, *J. Geophys. Res.*, **89**, 11749-11757.
- Jouzel J., C. Lorius, J.R. Petit, C. Genthon, N.I. Barkov, V.M. Kotlyakov and V.M. Petrov, 1987. Vostok ice core : a continuous isotope record over the last climatic cycle (160 000 years), *Nature*, **329**, 408-408.
- Jouzel J., and 13 others, 1993. Extending the Vostok ice-core record of paleoclimate to the penultimate glacial period, *Nature*, **364**, 407-412.
- Jouzel, J., R.B. Alley, K.M. Cuffey, W. Dansgaard, P. Grootes, G. Hoffman, S.J. Johnsen, R.D. Koster, D. Peel, C.A. Shuman, M. Stievenard, M. Stuiver and J. White, 1997. On the validity of the temperature reconstruction from water isotopes in ice cores, *J. Geophys. Res.*, sous presse.
- Kakuta, S., 1992. Surface-temperature history during the last 1000 years near Prudhoe Bay, Alaska : applying control theory to the inversion of borehole temperature profiles, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4), 225-244.
- Keeling, C.D. and T.P. Whorf, 1994. Atmospheric CO<sub>2</sub> records from sites in the SIO air sampling network, South Pole, *Trends '93 : a compendium of data on global change*, ed. T.A. Boden, D.P. Kaiser, R.J. Sepanski and F.W. Stoss, 16-26.
- Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt and M.P. Vecchi, 1983. Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**, 671-680.
- Lanczos, C., 1961. *Linear differential operators*, Van Nostrand, New York, 564p.

- Langenfelds, F.L., P.J. Fraser, R.J. Francey, L.P. Steele, L.W. Porter and C.E. Allison, 1996. *The cape grim air archive : the first seventeen years, 1978-1995, in Baseline atmospheric program (Australia) 1994-1995*, 53-70.
- Le Meur, E., 1996. Spécificité de l'isostasie en contexte glaciaire. Présentation et application d'un modèle de réponse terrestre, *Thèse UJF*, 325p.
- Le Meur, E. and P. Huybrechts, 1996. A comparison of different ways of dealing with isostasy : examples from modelling the Antarctic ice sheet during the last glacial cycle, *Ann. Glaciol.*, **23**, 309-317.
- Lestringant, R., 1994. A two dimensional finite-element study of flow in the transition zone between an ice sheet and an ice shelf, *Ann. Glaciol.*, **20**, 67-72.
- Levenberg, K., 1944. A method for the solution of certain non linear problems in least squares, *Quart. Appl. Math.*, **2**, 164-168.
- Levenspiel, O. and W.K. Smith, 1957. Notes on the diffusion-type model for the longitudinal mixing of fluids in flow. *Chemical Engineering Science*, **6**, 227-223.
- Lions, J.L., 1968. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod (Paris).
- Lliboutry, L., 1981. A critical review of analytical approximate solutions for steady state velocities and temperatures in cold ice sheets, *Z. Gletscherkd. Glazialgeol.*, **15**(2), 135-148.
- Lliboutry, L., 1987. *Very slow flow of solids : basics of modeling in geodynamics and glaciology*. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- Lorius, C. and L. Merlivat, 1977. Distribution of mean surface stable isotope values in East Antarctica : observed changes in the costal area, *IAHS*, **118**, 127-137.
- MacAyeal, D.R., 1984. Thermohaline circulation below the Ross Ice Shelf : a consequence of tidally induced vertical mixing and basal melting, *J. Geophys. Res.*, **89**, 597-606.
- MacAyeal, D.R. and R.H. Thomas, 1986. The effects of basal melting on the present flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica, *J. Glaciol.*, **32**(110), 72-86.
- MacAyeal, D.R., S. Shabtaie, C.R. Bentley and S.D. King, 1986. Formulation of ice-shelf dynamic boundary conditions in terms of a Coulomb rheology, *J. Geophys. Res.*, **91**(B8), 8177-8191.
- MacAyeal, D.R., R.A. Bindshadler, S. Shabtaie, S. Stephenson and C.R. Bentley, 1987. Force, mass and energy budgets of the Crary Ice Rise complex, Antarctica, *J. Glaciol.*, **33**(114), 218-230.
- MacAyeal, D.R., 1989. Large scale ice flow over a viscous basal sediment : theory and application to Ice Stream B, Antarctica, *J. Geophys. Res.*, **94**(B4), 4071-4087.

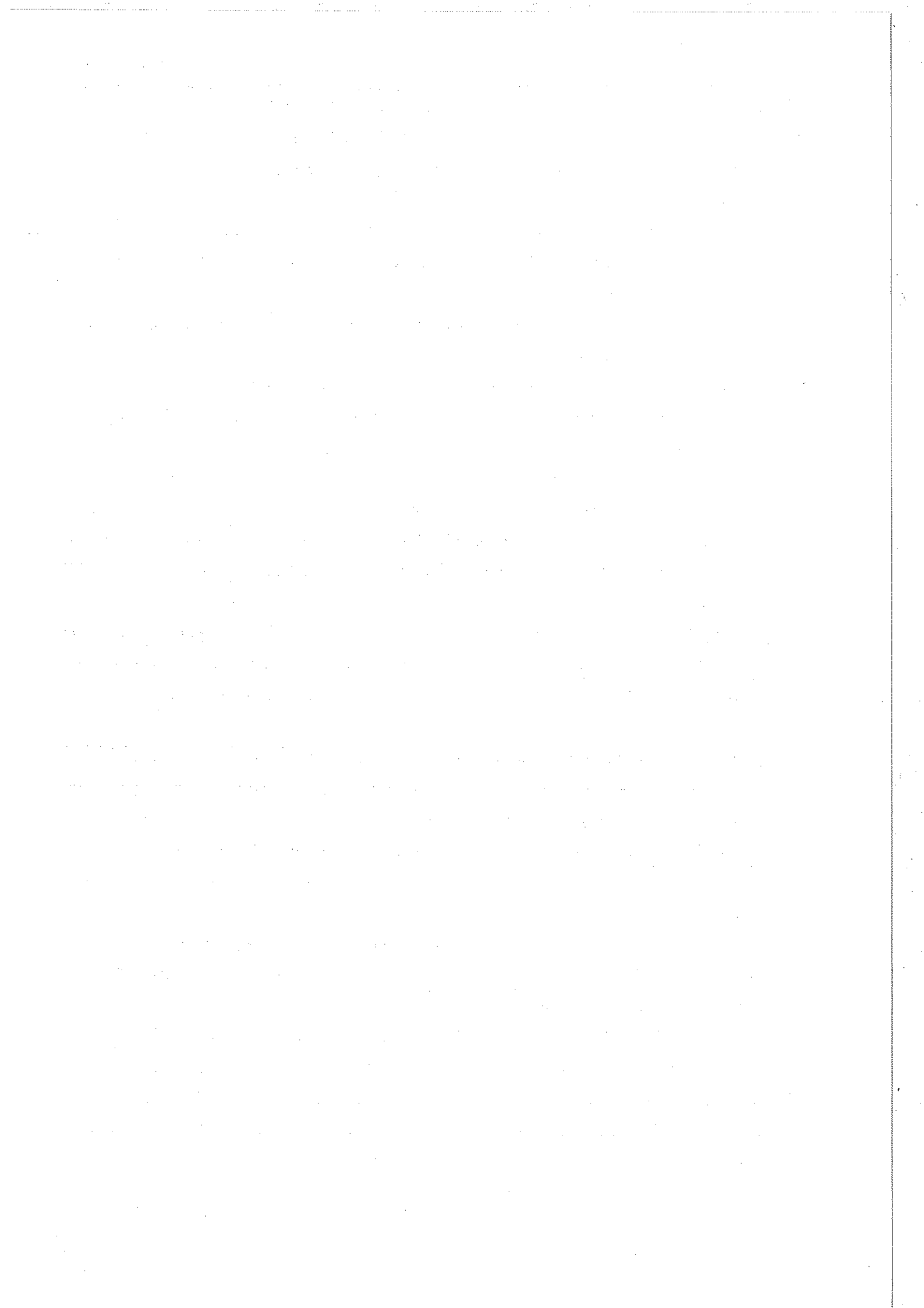
- MacAyeal, D.R., J. Firestone and E. Waddington, 1991. Paleothermometry by control methods, *J. Glaciol.*, **37**(127), 326-338.
- MacAyeal, D.R., J. Firestone and E. Waddington, 1993. Paleothermometry redux, *J. Glaciol.*, **39**(131), 423-431.
- MacAyeal, D.R., 1993a. A low order model of the Heinrich event cycle, *Paleoceanography*, **8**(6), 767-773.
- MacAyeal, D.R., 1993b. Binge/purge oscillations of the Laurentide ice sheet as a cause of the Northern Atlantic's Heinrich events, *Paleoceanography*, **8**(6), 775-784.
- MacAyeal, D.R., 1993c. A tutorial on the use of control methods in ice sheet modeling, *J. Glaciol.*, **39**(131), 91-98.
- MacAyeal D.R., R.A. Bindshadler and T.A. Scambos, Basal friction of ice stream E, 1995. West Antarctica, *J. Glaciol.*, **41**(138), 247-262.
- MacAyeal, D.R., V. Rommelaere, P. Huybrechts, C.L. Hulbe, J. Determann and C. Ritz, 1996. An ice-shelf model test based on the Ross Ice Shelf, Antarctica, *Ann. Glaciol.*, **23**, 46-51.
- MacAyeal, D.R., 1996. *Lessons in ice-sheet modeling*, University of Chicago, Department of Geophysical Sciences (notes de cours).
- Mandel, J., 1966. *Cours de mécanique des milieux continus* (tome I et II), Gauthier-Villars, Paris, 848p.
- Mareschal, J.-C., and G. Vasseur, 1992. Ground temperature history from two deep boreholes in central France, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4), 185-192.
- Martinson, D.G., N.G. Pisias, J.D. Hays, J. Imbrie, T.C. Moore (Jr) and N. Shackleton, 1987. Age dating and the orbital theory of ice ages : development of a high resolution 0 to 300,000 year chronostratigraphy. *Quat. Res.*, **27**, 1-29.
- Menke, W., 1989. *Geophysical Data Analysis : discrete inverse theory. Revised edition*. New York, Academic Press. [International Geophysics Series 45.], 289p.
- Mercer J.H., 1978. West Antarctic ice sheet and CO<sub>2</sub> greenhouse effect : a threat of disaster, *Nature*, **271**, 321-325.
- Morland, L.W., 1987. Unconfined ice-shelf flow, *Dynamics of the West Antarctic ice sheet*, ed. C.J. Van der Veen and J. Oerlemans (Dordrecht, etc.), 99-116.
- Morland, L.W. and R. Zainuddin, 1987. Plane and radial ice-shelf flow with prescribed temperature profile, *Dynamics of the West Antarctic ice sheet*, ed. C.J. Van der Veen and J. Oerlemans (Dordrecht, etc.), 117-140.
- Neal, C.S., 1979. Dynamics of the Ross Ice Shelf as revealed by radio-echo sounding, *J. Glaciol.*, **24**(90), 295-307.

- Nettleton, L.L., 1957. Gravity survey over a Gulf Coast continental shelf mound, *Geophysics*, **22**, 630-642.
- Palaeogeography, palaeoclimatology, palaeoecology, 1992. Climatic change inferred from underground temperatures, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4).
- Patankar, S.V., 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*, ed. Minkowycz and Sparrow, 197 p.
- Paterson, W.S.B., 1994. *The physics of glaciers. Third edition*. Oxford, etc., Elsevier Science Ltd.
- Paterson, W.S.B. and G.K.C. Clarke, 1978. Comparison of theoretical and observed temperature profiles in Devon Island ice cap, Canada, *Geophys. J. R. Soc.*, **55**, 615-632.
- Petit J.R. and 12 others, 1997, Four climate cycles in Vostok ice core, *Nature*, **387**, 359-360.
- Pimienta, P., 1987. Etude du comportement mécanique des glaces polycristallines aux faibles contraintes ; application aux glaces des calottes polaires, *Thèse UJF*, 176 p.
- Polack, E. et G. Ribièrre, 1969. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées, *Revue Fr. Inf. Rech Oper.*, **16**(R1), 35-43.
- Press, F., 1968. Earth models obtained by Monte-Carlo inversion, *J. Geophys. Res.*, **73**(16), 5223-5234.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolski and W.T. Vetterling, 1986. *Numerical recipes : the art of scientific computing*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Rémy, F., C. Ritz and L. Brisset, 1996. Ice sheet flow features and rheological parameters derived from precise altimetric topography, *Ann. Glaciol.*, **23**, 277-283.
- Rignot, E.J., S.P. Gogineni, W.B. Krabill and S. Ekholm, 1997. North and northeast Greenland ice discharge from satellite radar interferometry, *Science*, **276**, 934-937.
- Ritz, C., 1989. Interpretation of the temperature profile measured at Vostok, East Antarctica. *Ann. Glaciol.*, **12**, 138-144.
- Ritz, C., 1992. Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-glacier Byrd : sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus, Thèse d'état UJF - Grenoble 1, 377 p.
- Ritz, C., A. Fabre and A. Letrégilly, 1997. Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters : consequences for the evolution through the last climatic cycle, *Climate Dynamics*, **13**(1), 11-24.
- Rommelaere V., and C. Ritz, 1996. A thermomechanical model of ice-shelf flow, *Ann. Glaciol.*, **23**, 13-20.
- Rommelaere V., and D.R. MacAyeal, 1997. Large-scale rheology of the Ross Ice Shelf, Antarctica, computed by a control method, *Ann. Glaciol.*, **24**, accepté.

- Rommelaere V., L. Arnaud and J-M. Barnola, 1997. Reconstructing recent atmospheric trace gas concentrations from polar firn and bubbly ice data by inverse methods, *J. Geophys. Res.*, accepté.
- Salamatin, A.N., V.Y. Lipenkov, K.V. Blinov, 1994. Vostok (Antarctica), 1994. Climate record time-scale deduced from the analysis of a borehole temperature profile, *Ann. Glaciol.*, **20**, 207-214.
- Salamatin, A.N., V.Y. Lipenkov, N.I. Barkov, J. Jouzel, J.R. Petit and D. Raynaud, 1997. Ice core age dating and paleothermometer calibration on the basis of isotopes and temperature profiles from deep boreholes at Vostok station (East Antarctica), *J. Geophys. Res.*, accepté.
- Schwander J., B. Stauffer and A. Sigg, 1988. Air mixing in firn and the age of the air at pore close-off, *Ann. Glaciol.*, **10**, 141-145, 1988.
- Schwander, J., J.M. Barnola, C. Andrie, M. Leuenberger, A. Ludin, D. Raynaud and B. Stauffer, 1993. The age of the air and in the ice at Summit, Greenland. *J. Geophys. Res.*, **98D**, 2831-2838.
- Shabtaie, S. and C.R. Bentley, 1987. West Antarctic ice streams draining into the Ross Ice Shelf: configuration and mass balance, *J. Geophys. Res.*, **92**(B2), 1311-1336.
- Shabtaie, S., C.R. Bentley, R.A. Bindschadler and D.R. MacAyeal, 1988. Mass balance studies of ice stream A, B, and C, and possible surging behavior of ice stream B, *Ann. Glaciol.*, **11**, 137-149.
- Shannon, C.E., 1948. A mathematical theory of communication, *Bell system tech. J.*, **27**, 379-423.
- Shen, P.Y., K. Wang, H. Beltrami and J.-C. Mareschal, 1992. A comparative study of inverse methods for estimating climatic history from borehole temperature data, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4), 113-127.
- Sievers J. and 8 others, 1994. Validating and improving elevation data of a satellite-image map of Filchner-Ronne Ice Shelf, Antarctica, with results from ERS-1., *Ann. Glaciol.*, **20**, 347-352.
- Tarantola, A., 1987. *Inverse problem theory, methods for data fitting and model parameter estimation*, Oxford etc. Elsevier Science Ltd., 613 p.
- Tarantola, A. and B. Valette, 1982. Inverse Problems = Quest for information, *J. Geophys.*, **50**, 159-170.
- Thomas, R.H., 1979. The dynamics of marine ice sheets, *J. Glaciol.*, **24**(90), 167-177.
- Thomas, R.H. and D.R. MacAyeal, 1982. Derived characteristics of the Ross Ice Shelf, Antarctica, *J. Glaciol.*, **28**(100), 397-412.

- Thomas, R.H., D.R. MacAyeal, D.H. Eilers and D.R. Gaylord, 1984. Glaciological studies on the Ross Ice Shelf, Antarctica. *J. Glaciol.*, **28**(100), 397-412.
- Tikhonov, A.N. and V.Y. Arsenin, 1977. Solutions of ill-posed problems. John Wiley (New York).
- Trudinger, C.M., I.G. Enting, D.M. Etheridge, R.J. Francey, V. Levchenko, L.P. Steele, D. Raynaud and L. Arnaud, 1997. Modelling air movement and bubble trapping in firn. *J. Geophys. Res.*, **102**(D6), 6747-6763.
- Turcotte, D.L. and G. Schubert, 1982. *Geodynamics, applications of continuum physics to geological problems*. John Wiley (New York), 450 p.
- Van der Veen, C.J., 1986. Ice sheets, atmospheric CO<sub>2</sub> and sea level, *PhD thesis*, 185p.
- Verbitsky, M., and B. Saltzman, 1995. A diagnostic analysis of Heinrich glacial surge events, *Paleoceanography*, **10**(1), 59-65.
- Vostretsov, R.N., D.N. Dmitriyev, O.F. Putikov, K.V. Blinov and S.V. Mitin, 1984. Osnovnyye resul'taty geofizicheskikh issledovaniy glubokikh skvazhlin i ledyanogo kerna v Vostochnoy Antarktide [Principaux résultats des études géophysiques menées sur les trous de forage profonds et sur la carotte d'Antarctique de l'Est], *Mater. Glyatsiol. Issled.*, **51**, 172-178.
- Waelbroeck C., J. Jouzel, L. Labeyrie, C. Lorius, M. Labracherie, M. Stiévenard, N.I. Barkov, 1995, A comparison of the Vostok ice deuterium record and series from Southern Ocean core MD 88-770 over the last two glacial-interglacial cycles, *Climate Dynamics*, **12**, 113-123.
- Wang, K., T.J. Lewis and A.M. Jessop, 1992. Climatic changes in central and eastern Canada inferred from deep borehole temperature data, *Palaeogeogr., palaeoclimatol., palaeoecol. (Global and Planetary change section)*, **98**(2/4), 129-141.
- Weertman, J., 1957. Deformation of floating ice shelves, *J. Glaciol.*, **3**(21), 38-42.
- Weertman, J., 1974. Stability of the junction of an ice sheet and an ice-shelf, *J. Glaciol.*, **13**(67), 3-11.
- Weertman, J., 1976. Glaciology's grand unsolved problem, *Nature*, **260**, 284-286.
- Weller, G.E. and P. Schwerdtfeger, 1971. New data on the thermal conductivity of natural snow, *J. Glaciol.*, **10**(59), 309-311.
- Whillans, I.M. and C.J. Van der Veen, 1993. Patterns of calculated basal drag on Ice Stream B and C, Antarctica, *J. Glaciol.*, **39**(133), 437-446.
- Yen, Y-C., 1981. Review of thermal properties of snow, ice and sea ice. *CRREL Report*, **81-10**.
- Zlatev Z., 1981. Y12M solution of large and sparse systems of linear algebraic equations, *Lecture Notes in Computer Science*, **121**, Springer.





## VII. NOTATIONS

Dans tout le manuscrit, les quantités notées en gras et soulignées désignent soit des vecteurs (minuscules), soit des matrices (majuscules). Les tenseurs sont soulignés deux fois. Les quantités scalaires sont notées en italique.

### VII.1. CHAPITRE I

Notation	Description
<u><b>C</b></u> <sub><i>d</i></sub>	Matrice de covariance a priori sur les données
<u><b>C</b></u> <sub><i>m</i></sub>	Matrice de covariance a priori sur les paramètres du modèle
<u><b>C</b></u> <sub><i>m</i></sub> <sup>post</sup>	Matrice de covariance a posteriori sur les paramètres du modèle
<u><b>d</b></u>	Vecteur de l'espace des données
<i>D</i>	Espace des données
<u><b>G</b></u>	Opérateur linéaire de l'espace des paramètres vers l'espace des données
<u><b>G</b></u> <sup>+</sup>	Inverse de Moore-Penrose de <u><b>G</b></u>
<i>I</i>	Index de performance à minimiser
<i>L</i>	Norme de simplicité
<i>M</i>	Espace des paramètres du modèle
<i>m</i>	Dimension de <i>M</i>
<u><b>m</b></u>	Vecteur de <i>M</i>
⟨ <u><b>m</b></u> ⟩	Valeur de <u><b>m</b></u> la plus vraisemblable a priori
<u><b>m</b></u> <sup>est</sup>	Estimation de <u><b>m</b></u>
<i>n</i>	Dimension de l'espace des données
<i>p</i>	Dimension de l'image de <u><b>G</b></u> ou nombre de valeurs singulières non nulles de <u><b>G</b></u>
<i>P</i> ( <i>E</i> <sub><i>k</i></sub> / <i>A</i> )	Probabilité conditionnelle de <i>E</i> <sub><i>k</i></sub> quand l'événement <i>A</i> s'est produit
<u><b>U</b></u>	Matrice constituée de vecteurs de base orthonormés de l'espace des

### Trois problèmes inverses en glaciologie

	données, obtenue par décomposition de Lanczos
$\underline{U}_0$	Matrice formée par les $n-p$ vecteurs de base de $\underline{U}$ , n'appartenant pas à l'image de $\underline{A}$ : ses vecteurs forment une base orthonormée de l'orthogonal de l'image de $\underline{A}$
$\underline{U}_p$	Matrice définissant l'image de $\underline{A}$
$\underline{V}$	Matrice constituée de vecteurs de base orthonormés de l'espace des paramètres du modèle, obtenue par décomposition de Lanczos
$\underline{V}_0$	Matrice définissant le noyau de $\underline{A}$
$\underline{V}_p$	Matrice formée par les $m-p$ vecteurs de base de $\underline{V}$ , n'appartenant pas à l'image de $\underline{A}$ : ses vecteurs forment une base orthonormée de l'orthogonal du noyau de $\underline{A}$
$\underline{W}_e$	Matrice diagonale de pondération sur les points de mesures
$\underline{W}_m$	Matrice de simplicité
$\underline{x}$	Vecteur de l'espace joint de l'espace des données et des paramètres ( $n \times M$ )
$\kappa^2$	Facteur régularisant
$\underline{\Lambda}$	Matrice des valeurs singulières de $\underline{A}$
$\underline{\Lambda}_p$	Sous-matrice de $\underline{\Lambda}$ contenant les valeurs singulières non nulles de $\underline{A}$
$\mu(\underline{x})$	Densité de probabilité non-informative de l'espace joint ( $n \times M$ )
$\mu_M(\underline{m})$	Densité de probabilité non-informative marginale de l'espace des paramètres
$\rho(\underline{x})$	Densité de probabilité sur l'a priori dans l'espace joint ( $n \times M$ )
$\rho_D(\underline{d})$	Densité de probabilité marginale sur l'a priori dans l'espace des données
$\rho_M(\underline{m})$	Densité de probabilité marginale sur l'a priori dans l'espace des paramètres
$\sigma(\underline{x})$	Densité de probabilité correspondant à la conjonction de la théorie et de l'a priori
$\theta(\underline{x})$	Densité de probabilité sur la théorie dans l'espace joint ( $n \times M$ )
$\theta(\underline{d}/\underline{m})$	Densité de probabilité conditionnelle sur la théorie
$\theta$	« Température de recuit »
$\zeta$	nombre aléatoire distribué uniformément sur $[0;1]$

## VII.2. CHAPITRE II

Notation	Description
$A_i, B_i$	Amplitude du cosinus et du sinus de la $i^{\text{ème}}$ harmonique calée dans l'étude de Salamatin et al. (1994, 1997)
$c$	Capacité calorifique de la glace ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$\underline{C}_d$	Matrice de covariance sur les données
$\underline{C}_m$	Matrice de covariance a priori sur les paramètres du modèle
$\underline{C}_m^{\text{post}}$	Matrice de covariance a posteriori sur les paramètres du modèle
$\underline{C}_m$	Matrice de covariance sur les paramètres des harmoniques reconstruites par Salamatin et al. (1994 ; 1997)
$\underline{d}$	Vecteur de l'espace des données : il contient les valeurs de la différence entre températures mesurées en fonction de la profondeur et profil stationnaire de température calculé pour une température de référence (217K).
$f(\underline{m}), g(\underline{m})$	Densités de probabilité Gaussiennes dans l'espace des paramètres du modèle
$g$	Accélération de la pesanteur ( $\text{m s}^{-2}$ )
$\underline{G}$	Modèle unitaire de propagation de la chaleur ; opérateur linéaire de l'espace des paramètres vers l'espace des données
$\underline{G}'$	Projection de $\underline{G}$ sur les harmoniques de Salamatin et al. (1994, 1997)
$H$	Epaisseur de la calotte (m)
$\underline{I}$	Matrice identité
$I(f;g)$	Quantité d'information relative de la densité de probabilité $f(\underline{m})$ par rapport à $g(\underline{m})$ (nep)
$K$	Conductivité thermique de la glace ( $\text{N s}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$\underline{m}$	Vecteur de l'espace des paramètres du modèle (valeurs discrètes de la différence entre température de surface en fonction du temps et la température de référence (217K))
$\langle \underline{m} \rangle$	Maximum de vraisemblance a priori de $\underline{m}$ (donné par le rapport isotopique de Deutérium)

### Trois problèmes inverses en glaciologie

$\underline{\mathbf{m}}^{\text{est}}$	Maximum de vraisemblance a posteriori de $\underline{\mathbf{m}}$
$\underline{\mathbf{m}}'$	Vecteur de l'espace des paramètres des harmoniques (contenant les valeurs de $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$ , pour $i$ variant de 1 à 4)
$m$	Paramètre de forme du profil de vitesse verticale
$Q$	Chaleur produite par déformation ( $\text{W m}^{-3}$ )
$T$	Température absolue de la glace (K)
$t$	Temps (s)
$u, w$	Composantes horizontale et verticale de la vitesse ( $\text{m a}^{-1}$ )
$w_b, w_s$	Vitesse verticale à la base et en surface de la calotte ( $\text{m a}^{-1}$ )
$x, z$	Coordonnée horizontale et verticale (m)
$\rho$	Masse volumique de la glace ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\sigma_d^2$	Variance sur les températures mesurées en fonction de la profondeur ( $\text{K}^2$ )
$\sigma_m^2$	Variance sur le scénario de température de surface donné par le Deutérium ( $\text{K}^2$ )
$\tau_i$	Périodes caractéristiques de Milankovitch (s)
$\theta_{\text{mes}}$	Profil de température mesuré en fonction de la profondeur

## VII.3. CHAPITRE III

Notation	Description
<b>A</b>	Matrice de discrétisation du modèle direct de transport
$a_s$	Accumulation de surface ( $\text{kg m}^2\text{a}^{-1}$ )
<b>B</b>	Matrice de discrétisation du modèle direct de transport
$c, c_{air}, c^b, c_{air}^b$	Concentration en gaz trace (ou en air) dans la porosité ouverte (ou fermée si exposant $b$ ) du névé ( $\text{mol m}^{-3}$ )
$c_s$	Concentration atmosphérique en gaz trace ( $\text{mol m}^{-3}$ )
$D$	Coefficient de diffusion du gaz trace dans l'air de la porosité ouverte du névé ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$d_{\gamma(i)}^{obs}, \underline{d}_{\gamma}^{obs}$	Rapport de mélange mesuré dans le névé mesuré et vecteur correspondant
$d_{\gamma(i)}^{pre}, \underline{d}_{\gamma}^{(nt)}$	Rapport de mélange calculé par le modèle à l'instant est effectuée la mesure et vecteur correspondant
$f$	Porosité ouverte du névé
<b>G</b>	Matrice décrivant le modèle unitaire de transport des gaz : elle définit la fonction de transfert air-névé-glace
<b>G</b> <sup>-g</sup>	Inverse généralisée de <b>G</b>
$g$	Accélération de la pesanteur ( $\text{m s}^{-2}$ )
<b>I</b>	Matrice identité
$I_s, J$	Index de performance (utilisé pour la reconstruction du scénario atmosphérique ou pour la reconstruction du coefficient de diffusion apparent)
$L$	Norme de simplicité
$M, M_{air}$	Masse molaire du gaz trace considéré et de l'air ( $\text{kg mol}^{-1}$ )
<b>m</b>	Vecteur de l'espace des paramètres du modèle, contenant les valeurs discrètes de rapport de mélange atmosphérique en fonction du temps
<b>N</b>	Matrice de résolution des données
$n$	Nombre de mesures de rapport de mélange dans le névé
$nz, nt$	Nombre de points de grille en profondeur ; nombre de points de grille en temps
$P$	Pression atmosphérique (Pa)
$P_g, P_{air}$	Nombre de mol piégée dans la porosité fermée par unité de temps, pour un

### Trois problèmes inverses en glaciologie

	volume de névé unitaire ( $\text{mol m}^{-3} \text{s}^{-1}$ )
$q, q_{air}, q^b, q_{air}^b$	Quantité de gaz trace (ou d'air) dans la porosité ouverte (ou fermée si exposant $b$ ) par volume unitaire de névé ( $q = fc$ ) ( $\text{mol m}^{-3}$ )
$\underline{q}^{(j)}$	Vecteur colonne contenant les valeurs discrètes de $q$ en fonction de la profondeur au pas de temps $j$ .
$\underline{R}^{\text{mod}}$	Matrice de résolution des paramètres du modèle
$R$	Constante des gaz parfaits ( $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$T$	Température absolue du névé (K)
$t$	Temps (s)
$t_f$	Temps de fin de simulation (s) : c'est l'instant où l'on fait la mesure de rapport de mélange dans le névé
$\underline{v}, v$	Vitesse verticale d'enfoncement du névé ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{w}, w$	Vitesse verticale du flux d'air ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{W}_e$	Matrice de pondération diagonale sur les points de mesure
$\underline{W}_m$	Matrice de simplicité
$z_f$	Profondeur à laquelle la porosité ouverte s'annule (m)
$\Delta x, \Delta t$	Pas d'espace (m), pas de temps (s)
$\varepsilon$	Porosité totale du névé
$\kappa^2$	Paramètre régularisant
$\lambda$	Décroissance radioactive du gaz trace ( $\text{s}^{-1}$ )
$\underline{\mu}(z, t), \underline{\mu}$	Multiplicateur de Lagrange ( $\text{mol}^{-1} \text{m}^3 \text{s}$ ) et vecteur correspondant
$\underline{\psi}$	Vecteur définissant la condition à la limite en fin de simulation sur le multiplicateur de Lagrange
$\rho, \rho_{air}$	Masse volumique de la glace ou de l'air ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\alpha, \beta, \chi$	Variables de travail utilisées pour la réécriture sous forme plus condensée de l'équation de conservation du gaz trace dans les pores ouverts

## VII.4. CHAPITRE IV

Par convention, les quantités surlignées d'une barre sont moyennées sur toute l'épaisseur de l'ice-shelf. Les quantités notées ~ sont des variables adimensionnelles.

Notation	Description
$a$	Différence accumulation - fusion ( $m s^{-1}$ )
$\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{D}}$	Matrices de discrétisation des équations diagnostiques de l'ice-shelf
$\underline{\mathbf{A}}'$	Matrice de discrétisation de l'équation prognostique de l'ice-shelf
$B$	Paramètre de la loi rhéologique ( $Pa s^{1/3}$ )
$\underline{\mathbf{b}}$	Vecteur utilisé pour la discrétisation des équations diagnostiques de l'ice-shelf
$\underline{\mathbf{b}}'$	Vecteur utilisé pour la discrétisation de l'équation prognostique de l'ice-shelf
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m s^{-2}$ )
$H$	Épaisseur de l'ice-shelf (m)
$\underline{\mathbf{h}}$	Vecteur contenant les valeurs discrètes d'épaisseur de l'ice-shelf
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Tenseur identité
$I$	Index de performance ( $m^4 s^{-2}$ )
$P$	Pression octaédrale (Pa)
$q_0$	Flux de glace à la ligne d'échouage ( $m^2 s^{-1}$ )
$u, v, w$	Composantes de la vitesse suivant $x, y$ et $z$ ( $m s^{-1}$ )
$\underline{\mathbf{u}}$	Vecteur contenant les valeurs discrètes de vitesses horizontales ( $u$ et $v$ )
$u_0$	Vitesse de la glace à la ligne d'échouage ( $m s^{-1}$ )
$u^d, v^d$	Vitesses mesurées suivant $x$ et $y$ ( $m s^{-1}$ )
$\underline{\mathbf{v}}$	Vecteur vitesse ( $m s^{-1}$ )
$\underline{\mathbf{W}}_e$	Matrice de pondération diagonale
$x, y, z$	Coordonnées (m)
$z_s, z_b$	Altitude de la surface (m); altitude de la base (m)
$\delta$	Rapport d'aspect
$\Delta x, \Delta t$	Pas d'espace (m), pas de temps (s)
$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	Tenseur des taux de déformations ( $s^{-1}$ )



### Trois problèmes inverses en glaciologie

$\eta$	Viscosité de la glace (Pa s)
$\Gamma$	Nombre d'Argand
$\lambda(x,y), \mu(x,y)$	Multiplicateur de Lagrange ( $N^{-1} m^4 s^{-2}$ )
$\psi(x,y)$	Fonction poids ( $N^{-1}$ )
$\rho, \rho_w$	Masse volumique de la glace ou de l'eau de mer ( $kg m^{-3}$ )
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes (Pa)
$\tau_b$	Friction basale (Pa)

## VIII. ANNEXE : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Le but de cette annexe est d'introduire les notions utilisées pour l'analyse de la dynamique de l'ice-shelf. La plupart des formules sont présentées ici sans réelles explications : elle pourront être retrouvées dans un cours de mécanique des milieux continus (e.g. Mandel, 1966 ou Ferrandon, 1961).

Tous les éléments de mécanique utilisés dans cette étude (comme implicitement dans la plupart des développements de la mécanique) sont fondées sur *l'hypothèse de continuité* du milieu étudié : les propriétés physiques du milieu sont supposées varier d'une façon continue d'un point à un autre. Cette hypothèse, nécessaire pour développer les calculs théoriques, a ses limites pour l'étude des glaciers. Par exemple, une caractéristique bien connue des glaciers est l'apparition de crevasses : ces phénomènes de fissuration violent l'hypothèse de continuité et ne pourront donc pas être étudiés dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Dans toute cette annexe, le système de coordonnées  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  est choisi cartésien.

### VIII.1. CALCUL TENSORIEL

#### VIII.1.1. Invariants des tenseurs symétriques

Ce que nous appellerons tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ , ou tenseur du second ordre, est une matrice carrée réelle de dimension  $3 \times 3$ . On peut montrer que toute matrice de ce type se décompose sous la forme de la somme d'une matrice symétrique  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T)$  et d'une matrice antisymétrique

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T)$  (i.e. égale à l'opposé de sa transposée) :

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad (\text{VIII-1})$$

Nous utiliserons essentiellement le produit d'un tenseur par un vecteur (identique au produit d'une matrice par un vecteur). Il est possible de montrer que le produit du tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  et d'un vecteur est équivalent au produit vectoriel de deux vecteurs (remarquer en effet que  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  ne contient que trois coefficients indépendants non nuls). Comme

le tenseur  $\underline{\underline{S}}$  est symétrique, celui est diagonalisable : ses trois valeurs propres  $\lambda_i$  s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique :

$$\det(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad (\text{VIII-2})$$

où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité et  $\det$  l'opérateur déterminant. Cette équation caractéristique n'est autre qu'un polynôme de degré 3 qui peut s'écrire :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{VIII-3})$$

Quelle que soit la base considérée, l'équation caractéristique (VIII-3) doit conserver les mêmes racines (qui sont les valeurs propres de  $\underline{\underline{S}}$ ). C'est pourquoi  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont appelés invariants du tenseur symétriques  $\underline{\underline{S}}$ . Il n'existe que trois invariants indépendants du tenseur  $\underline{\underline{S}}$  : toutes les autres quantités invariantes par changement de base sont des combinaisons de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Dans l'équation (VIII-3),  $I_1$  est la trace du tenseur  $\underline{\underline{S}}$  et  $I_3$  est le déterminant de  $\underline{\underline{S}}$ . Les invariants utilisés dans le chapitre IV (combinaisons de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ ) sont les suivants :

- premier invariant :  $tr(\underline{\underline{S}})$
- second invariant :  $\left( tr(\underline{\underline{S}}^2) \right)^{1/2}$
- troisième invariant :  $\left( tr(\underline{\underline{S}}^3) \right)^{1/3}$

Nous utiliserons uniquement les premier et second invariants des tenseurs (symétriques) des contraintes et des taux de déformation.

### VIII.1.2. Tenseur des contraintes

Les forces extérieures s'appliquant sur l'élément d'un milieu continu sont de deux types :

- des forces à distance. C'est le cas du poids pour l'étude des glaciers : cette force est proportionnelle à la masse de l'élément considéré.

- des forces de contact, qui sont produites sur la surface de l'élément par des éléments voisins. Pour un élément plan, ces forces sont proportionnelles à la surface de cet élément. On définit ainsi un *vecteur contrainte*  $\underline{\tau}$  définie pour une facette de surface  $ds$ , tel que :

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\tau} \times ds \quad (\text{VIII-4})$$

où  $\underline{\mathbf{f}}$  désigne la force de contact appliquée à cette facette. Le vecteur contrainte dépend de l'orientation de la facette considérée. Si par convention on désigne par  $\sigma_{ij}$  la projection sur l'axe  $Ox_i$  en un point sur la facette de normale positive parallèle à l'axe  $Ox_j$  en un point P, on peut montrer que les coordonnées du vecteur contrainte  $\tau_i$  sur une facette quelconque de normale  $\underline{\mathbf{n}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  sont données par l'équation :

$$\tau_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{i,j} \alpha_j \quad (\text{VIII-5})$$

Cette relation peut également s'écrire sous la forme d'un produit d'un tenseur par un vecteur normal :

$$\underline{\tau} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\mathbf{n}} \quad (\text{VIII-6})$$

On définit ainsi le *tenseur des contraintes*  $\underline{\underline{\sigma}}$  en un point P. Il est possible de montrer à l'aide de la loi fondamentale de la mécanique que le tenseur des contraintes est symétrique dans les cas qui nous intéressent<sup>2</sup>.

### VIII.1.3. Tenseur déviateur des contraintes

Un tenseur dont la trace est nulle est appelé tenseur *déviateur*. En glaciologie, on décompose généralement le tenseur des contraintes en un tenseur moyen isotrope  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  et un tenseur déviateur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma'}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-7})$$

$$+ \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma'}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

Cette décomposition se justifie par le fait que les termes diagonaux du tenseur de contraintes dans les calottes sont beaucoup plus importants que les termes croisés. Le tiers de l'opposé du premier invariant du tenseur des contraintes est également appelé pression réversible, pression octaédrale, ou plus simplement pression.

### VIII.1.4. Tenseur des taux de déformation

Pour traiter un problème de mécanique, une étape essentielle consiste à choisir un système de coordonnées. Deux choix sont possibles : soit on attache les grandeurs à déterminer au point matériel (formulation de *Lagrange*), soit on les attache au point fixe

<sup>2</sup> Le tenseur des contraintes est symétrique si il n'y a pas de *couple de masse* dans le milieu étudié. Ce couple de masse peut être créé par l'action de forces à distance magnétiques (ou électriques) sur un élément ayant une aimantation (ou une polarisation) permanente.

géométrique (formulation d'Euler). Ces deux formulations sont en théorie équivalentes, mais pour la majorité des problèmes, la formulation d'Euler est la plus commode<sup>3</sup>.

Dans un système de coordonnées Eulériennes, la déformation subie par un élément matériel entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$  est donnée par :

$$\underline{\text{grad}}(\mathbf{u})dt \quad (\text{VIII-8})$$

Noter qu'il s'agit là du gradient d'un vecteur (et non d'une quantité scalaire comme utilisé plus couramment en physique). Le gradient du vecteur vitesse est un tenseur défini par :

$$\underline{\text{grad}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-9})$$

Ce tenseur peut s'écrire sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique (voir équation (VIII-1)). La partie antisymétrique de ce tenseur est un pseudo-vecteur égal à la moitié du rotationnel du vecteur vitesse (appelé vorticité en mécanique des fluides). La partie symétrique de ce tenseur ( $\underline{\dot{\epsilon}}$ ) est appelée tenseur des taux de déformations :

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-10})$$

Si le matériau est incompressible (ce qui est supposé pour la glace), alors le tenseur des taux de déformations est un déviateur car l'équation de continuité indique que la trace de ce tenseur est nulle.

### VIII.1.5. Divergence d'un tenseur

De même que l'on peut définir le gradient d'un vecteur, on peut définir la divergence d'un tenseur symétrique<sup>4</sup>  $\underline{\mathbf{S}}$  est un vecteur défini par :

<sup>3</sup> Ce point, discuté par Mandel (1966), se trouve illustré chapitre III de cette thèse. Les deux modèles précédents de transport des gaz (Schwander et al., 1993 ; Trudinger et al., 1997) utilisent une formulation de Lagrange : il apparaît que ces deux modèles ne traitent pas correctement la conservation de l'air dans les pores, car elle est beaucoup plus compliquée dans ce système de coordonnées. La formulation d'Euler que nous avons utilisée permet d'écrire plus facilement les équations de conservation.

$$\text{Div}(\underline{\mathbf{T}}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII-11})$$

## VIII.2. LOI RHEOLOGIQUE DE LA GLACE

Un fluide est dit parfait si les contraintes sont indépendantes des vitesses de déformation : en mouvement comme au repos, le tenseur des contraintes de ce fluide se réduit à un tenseur diagonal dont les éléments non nuls sont égaux à l'opposé de la pression. De toute évidence, une telle définition n'est pas adaptée à l'étude du matériau glace. Dans la gamme de contraintes observées dans les glaciers, le matériau glace sera considéré comme un fluide visqueux.

### VIII.2.1. Définition de la viscosité

La notion de viscosité est liée à l'irréversibilité de certains phénomènes observés dans les fluides réels. Newton est le premier, au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, à introduire ce concept sous la forme de l'analogie d'une force de frottement dans les fluides. Plus d'un siècle plus tard, Navier, Saint-Venant et Stokes reprennent cette idée et la formalisent par une relation entre contraintes et taux de déformation. Navier admet que les déviateurs de contraintes sont fonctions linéaires des taux de déformation, ce que l'on peut écrire :

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{VIII-12})$$

où les coefficients  $a_{ijkl}$  sont des coefficients fonction du matériau, de la densité et de la température. En fait, il ne s'agit là que d'une approximation, bien vérifiée par l'expérience. Si le matériau est isotrope, alors les 81 coefficients<sup>5</sup> de  $a_{ijkl}$  se réduisent à 2 coefficients indépendants, appelés coefficients de viscosité de Navier. Si de plus le milieu est incompressible, alors la relation (VIII-12) s'écrit simplement :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{VIII-13})$$

<sup>4</sup> Si le tenseur n'est pas symétrique, alors on peut définir un vecteur divergence à gauche et un vecteur divergence à droite.

<sup>5</sup> Uniquement à l'aide de considérations sur la symétrie des tenseurs de contraintes et de taux de déformation, on peut montrer que  $a_{ijkl}$  ne contient en fait que 21 coefficients indépendants.

où  $\eta$  est appelée viscosité *dynamique* (par opposition à la viscosité *cinématique* qui est divisée par la masse volumique du matériau).

Pour la glace, l'approximation linéaire de l'équation (VIII-12) est trop restrictive. D'une manière plus générale, on peut montrer, à l'aide de considérations thermodynamiques, que les déviateurs des contraintes dérivent d'une *fonction dissipatrice* positive<sup>6</sup> en vertu du Principe de Carnot. Si le milieu est isotrope, alors au cours d'une transformation le travail des forces résistantes est indépendant de l'orientation de la matière : la fonction dissipatrice est donc invariante par changement de base. La fonction dissipatrice dépend uniquement de la densité, de la température et des trois invariants du tenseur des taux de déformation. Comme la glace sera supposée incompressible, le premier invariant du tenseur des taux de déformation est nul et la fonction dissipatrice ne dépend plus que de la température, du second et du troisième invariant.

### VIII.2.2. Loi de Glen

La loi de comportement utilisée le plus couramment en modélisation glaciologique est la loi de Glen, qui s'écrit souvent :

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{A_T \tau^{n-1}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{VIII-14})$$

Où  $A_T$  est un coefficient dépendant de la température (loi de type Arrhenius),  $n$  est un coefficient voisin de 3 et  $\tau$  est le second invariant du tenseur déviateur des contraintes. Cette formulation n'est pas adaptée à l'étude de la dynamique de l'ice-shelf, et nous utiliserons plutôt la relation suivante, qui est équivalente :

$$\sigma'_{ij} = B \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{VIII-15})$$

où  $B$  est un coefficient dépendant de la température,  $\dot{\epsilon}$  est le second invariant du tenseur des taux de déformation. Bien que la forme de cette équation puisse s'expliquer par des considérations thermodynamiques et par la théorie des dislocations, les paramètres de cette loi ( $B$  et  $n$ ) sont calibrés à partir d'expériences de laboratoire : cette loi n'est donc pas forcément représentative de la rhéologie de la glace à grande échelle. De plus, la loi de Glen est une loi décrivant le comportement isotrope de la glace. En réalité, la loi de comportement de la glace dépend de son histoire mécanique et peut être anisotrope.

---

<sup>6</sup> Cette fonction dissipatrice est une forme quadratique à 21 coefficients dans le cas particulier envisagé par Navier.