



**HAL**  
open science

# Pistage de cibles manoeuvrantes en radar passif par filtrage à particules gaussiennes

Khalil Jishy

► **To cite this version:**

Khalil Jishy. Pistage de cibles manoeuvrantes en radar passif par filtrage à particules gaussiennes. Autre [cs.OH]. Institut National des Télécommunications, 2011. Français. NNT : 2011TELE0010 . tel-00697130

**HAL Id: tel-00697130**

**<https://theses.hal.science/tel-00697130>**

Submitted on 14 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale EDITE

# THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de  
Docteur de Télécom & Management SudParis

*Doctorat conjoint Télécom & Management SudParis et Université Pierre et  
Marie Curie*

**Spécialité**  
INFORMATIQUE ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

Par  
Khalil JISHY

## Pistage de cibles manoeuvrantes en radar passif par filtrage à particules gaussiennes

soutenue le 22 mars 2011 devant le jury composé de :

<i>Président</i>	: Monsieur Jean-luc ZARADER	- ISIR/UPMC
<i>Rapporteurs</i>	: Madame Sylvie MARCOS	- LSS/SUPELEC
	: Monsieur Jean-Charles NOYER	- LISIC/ULCO
<i>Directeur de thèse</i>	: Monsieur Gérard SALUT	- LAAS/CNRS
<i>Encadrant</i>	: Monsieur Frédéric LEHMANN	- Télécom SudParis
<i>Examineur</i>	: Monsieur François GOSSELIN	- THALES Air Systems
<i>Invités</i>	: Monsieur Jacques BLANC-TALON	- DGA/DS/QIS
	: Monsieur Anis ZIADI	- DSI

**Thèse n° 2011TELE0010**



## Remerciements

*Je remercie M. Gérard Salut de m'avoir soumis ce sujet de thèse. Merci à l'encadrant de ma thèse M. Frédéric Lehmann, enseignant-chercheur à Telecom SudParis pour la confiance, la disponibilité, la patience et la générosité qu'il m'a montrés durant ma thèse.*

*Merci au Centre National de Recherche Scientifique (CNRS) d'avoir financé cette thèse et à Thalès Air Systems d'avoir soutenu ces travaux.*

*Merci au département de Communications, Images et Traitement de l'Information (CITI) à Telecom SudParis pour m'avoir fourni d'excellentes conditions de travail.*

*Merci à M. Jean-Luc Zarader d'avoir accepté d'être le président de jury. Merci aux rapporteurs, M. Jean-Charles Noyer et Mme Sylvie Marcos.*

*J'aimerais par ailleurs souligner l'importance de la contribution de M. Michel Morruzis et M. François Gosselin, Experts Amont Radar au département Surface Radar à Thales Air Systems, Limours. Leurs conseils et leurs commentaires m'ont été fort utiles.*

*Je remercie à Mlle Nagham Doghman de m'avoir supporté et soutenu pendant les moments difficiles tout le long de cette thèse.*

*Ce mémoire n'aurait pas vu le jour sans la prière de Mme Inaam Jishy ma mère et l'encouragement de M. Hassan Jishy mon père, que je veux vivement remercier.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Principe du Radar Passif</b>	<b>3</b>
2.1	Principe et Fonctionnement d'un Radar Passif . . . . .	3
2.2	Avantages et Inconvénients . . . . .	4
2.3	Configuration géométrique d'un PBR . . . . .	5
2.3.1	Mesure élémentaire de la distance bistatique . . . . .	5
2.3.2	Mesure élémentaire du décalage Doppler . . . . .	7
2.4	Equation Radar . . . . .	8
2.5	Notion de Rapport Signal sur Bruit . . . . .	9
2.5.1	Définition . . . . .	9
2.5.2	Ouales de Cassini . . . . .	9
2.6	Surface équivalente radar . . . . .	10
2.7	Réception Passive . . . . .	11
2.7.1	Propagation des Signaux . . . . .	11
2.7.2	Modèle de Réception . . . . .	11
2.7.3	Interférence du signal direct . . . . .	12
2.7.4	Fouillis . . . . .	12
2.7.5	Annulation des perturbations . . . . .	13
2.8	Corrélation - Fonction d'ambiguïté . . . . .	14
2.8.1	Le bruit après la corrélation . . . . .	15
2.9	Théorie de la détection . . . . .	16
2.9.1	détection radar . . . . .	16
2.9.2	principe TFAC . . . . .	16
2.10	Radar Multistatique . . . . .	17
2.10.1	Motivation . . . . .	17
2.10.2	Localisation d'une cible à partir d'un Radar Multistatique . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Estimation d'état</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Processus Markovien et modèle d'état . . . . .	20
3.3	Équations du filtrage non-linéaire . . . . .	22
3.4	Algorithmes Bayésiens récursifs exacts . . . . .	23
3.4.1	Modèle de Markov caché (HMM) . . . . .	23
3.4.2	Filtre de Kalman (KF) . . . . .	24
3.5	Algorithmes Bayésiens récursifs sous-optimaux . . . . .	27
3.5.1	Filtre de Kalman étendu (EKF) . . . . .	27
3.5.2	Filtre de Kalman sans parfum (UKF) . . . . .	28
3.5.3	Filtre à somme de gaussiennes (GSF) . . . . .	29
3.6	Conclusion . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Méthodes de Monte-Carlo pour le filtrage bayésien</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction . . . . .	33
4.2	Mise en oeuvre . . . . .	34
4.3	Intégration de Monte-Carlo (MC) . . . . .	34
4.3.1	Échantillonnage d'importance . . . . .	35
4.4	Échantillonnage d'importance séquentiel (SIS) . . . . .	37
4.4.1	Dégénérescence de l'algorithme SIS . . . . .	39
4.5	Ré-échantillonnage . . . . .	40
4.6	Filtrage Particulaire Générique . . . . .	42
4.7	Choix de la densité d'importance . . . . .	42
4.8	Versions du Filtrage Particulaire . . . . .	44
4.8.1	Filtre particulaire SIR . . . . .	44
4.8.2	Filtre Particulaire Rao-Blackwellisé (RBPF) . . . . .	45
4.9	Conclusion . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Modélisation</b>	<b>49</b>
5.1	Modèle de trajectoire de la cible . . . . .	49
5.2	Estimation pour des modèles cinétiques . . . . .	51
5.2.1	Modèle cinématique du second ordre : accélération aléatoire . . . . .	52
5.2.2	Modèle cinématique du troisième ordre . . . . .	53
5.3	Sources d'opportunité . . . . .	54
5.3.1	Radio FM . . . . .	55
5.3.2	Digital Video Broadcasting - Terrestrial (DVB-T) . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Approche conventionnelle</b>	<b>61</b>
6.1	Introduction . . . . .	61
6.2	Hypothèses . . . . .	61
6.3	Implémentation Pratique de la méthode . . . . .	62
6.3.1	Batterie de Filtres Adaptés . . . . .	63
6.3.2	Seuillage et Détection des pistes . . . . .	64
6.3.3	Association de Données . . . . .	65
6.3.4	Poursuite d'une cible par un Filtre de Kalman étendu . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Poursuite d'une cible par filtrage particulaire</b>	<b>69</b>
7.1	Introduction . . . . .	69
7.2	Implémentation pratique de la méthode proposée . . . . .	70
7.2.1	Choix des observations . . . . .	70
7.2.2	Équation d'état . . . . .	71
7.2.3	Équation de mesure . . . . .	72
7.2.4	Correction de l'instant d'observation . . . . .	74
7.2.5	Algorithme Particulaire . . . . .	74
7.3	Application Numérique en mode poursuite . . . . .	75
7.3.1	Poursuite par filtrage particulaire pour un signal FM . . . . .	75
7.3.2	Poursuite par filtrage particulaire pour un signal DVB-T . . . . .	78
7.3.3	Comparaison entre la poursuite utilisant le signal FM et le signal DVB-T - conclusion . . . . .	80
7.4	Initialisation du filtre de poursuite - Phase de détection . . . . .	81
7.4.1	Principe de détection . . . . .	81

7.4.2	Détection/poursuite des cibles . . . . .	85
7.4.3	Comparaison avec la technique classique . . . . .	86
7.5	Conclusion Générale . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Nouvelle approche de détection sur un Radar Passif</b>	<b>93</b>
8.1	Introduction . . . . .	94
8.2	Hypothèses . . . . .	95
8.3	Choix des observations . . . . .	95
8.4	Modèle dynamique d'état . . . . .	97
8.4.1	Grille retard/Doppler . . . . .	98
8.5	Équation d'observation locale . . . . .	98
8.6	Équations générales du filtrage non-linéaire . . . . .	99
8.6.1	Approximations importantes . . . . .	100
8.7	Implémentation par filtrage à somme de gaussiennes . . . . .	100
8.7.1	Principe . . . . .	100
8.7.2	Equations du filtre . . . . .	100
8.7.3	Redistribution des gaussiennes . . . . .	107
8.7.4	Initialisation du filtre à somme de gaussiennes . . . . .	108
8.8	Implémentation par filtrage particulaire . . . . .	109
8.8.1	Principe . . . . .	109
8.8.2	Équations du filtre . . . . .	110
8.8.3	Redistribution des particules . . . . .	114
8.8.4	Initialisation du filtre particulaire . . . . .	116
8.9	Extraction des modes . . . . .	117
8.9.1	Critère de l'entropie . . . . .	117
8.9.2	Seuil de détection . . . . .	118
8.9.3	Critère de détection pour le GSF . . . . .	118
8.9.4	Critère de détection pour le FP . . . . .	119
8.9.5	Association de données . . . . .	119
8.10	Étude de performances du filtre avec un signal carré . . . . .	120
8.10.1	Cas d'une cible unique . . . . .	121
8.10.2	Cas de l'absence de cible . . . . .	123
8.10.3	Cas multi-cible . . . . .	124
8.11	Annulation Successive d'interférence . . . . .	126
8.11.1	Remodulation des cibles détectées . . . . .	128
8.12	Simulation avec un signal FM . . . . .	129
8.12.1	Comparaison GSF/FP . . . . .	140
8.13	Conclusion Générale . . . . .	141
<b>9</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>143</b>
9.1	Contributions principales . . . . .	143
9.2	Perspectives . . . . .	144
<b>A</b>	<b>Méthodes de classification</b>	<b>145</b>
A.1	classification ad hoc . . . . .	145
A.2	Classification des particules par la méthode K-means . . . . .	146



# Liste des tableaux

4.1	Pseudo-code du filtrage par SIS . . . . .	39
4.2	Pseudo-code du ré-échantillonnage systématique . . . . .	42
4.3	Pseudo-code du filtre particulière générique . . . . .	43
5.1	Pseudo-code pour simuler une trajectoire à sauts aléatoires d'accélération . . . . .	51
5.2	Paramètres du signal des sources typiques pour le radar passif . . . . .	55
5.3	Les valeurs numériques de paramètres d'OFDM en modes $2k$ et $8k$ pour des canaux de $8MHz$ . . . . .	58
5.4	Durée utile du symbole pour les différents intervalles gardes pour des canaux de $8MHz$ . . . . .	59
7.1	Fréquences porteuses et lieux géométriques des stations FM . . . . .	76
7.2	Incertitudes sur la position, la vitesse et la phase de propagation en utilisant le signal FM . . . . .	77
7.3	Les fréquences porteuses des stations DVB-T . . . . .	78
7.4	Incertitudes sur la position, la vitesse et la phase de propagation en utilisant le signal DVB-T . . . . .	78
7.5	La racine de l'erreur quadratique moyenne de la position et de la vitesse avec FP et TC en utilisant le signal DVB-T en mode $2k$ avec un $RSB = -40dB$ avant corrélation . . . . .	90
7.6	Le temps de simulation sur matlab pour les deux méthodes FP et TC en utilisant le signal DVB-T en mode $2k$ . . . . .	91
8.1	Caractéristiques de la cible . . . . .	121
8.2	Caractéristiques de 8 cibles . . . . .	124
8.3	Caractéristiques de 8 cibles . . . . .	130
8.4	Caractéristiques de 3 cibles . . . . .	140
8.5	La racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse avec FP et GSF en utilisant le signal FM avec un $RSB = -20dB$ et $RSB = -30dB$ avant corrélation . . . . .	141



# Table des figures

2.1	Configuration bistatique . . . . .	5
2.2	Ellipse bistatique . . . . .	6
2.3	Ellipses d'Equidistance . . . . .	7
2.4	Géométrie pour le décalage Doppler bistatique . . . . .	8
2.5	Ovales de Cassini . . . . .	10
2.6	Valeurs typiques de SER mesurées à l'aide d'un radar à ondes centimétriques . . . . .	10
2.7	Surface équivalent Radar . . . . .	11
2.8	Réception passive. . . . .	13
2.9	Relation entre $P_{fa}$ , $P_d$ et le seuil $\lambda$ . . . . .	17
2.10	Localisation d'une cible à partir l'intersection des trois ellipsoïdes . . . . .	18
3.1	Graphe de dépendance de la chaîne de Markov cachée du premier ordre constituée par les processus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ . . . . .	21
3.2	Représentation schématique du modèle d'état . . . . .	22
3.3	Algorithme du filtre de Kalman . . . . .	26
4.1	Représentation schématique du ré-échantillonnage systématique . . . . .	41
4.2	Représentation schématique d'un filtre particulière SIR . . . . .	45
5.1	Exemple d'un saut d'accélération : $\mu = 1s$ , $G_0 = 0g$ , $G = 10g$ . . . . .	50
5.2	Description Schématique de la simulation de trajectoire . . . . .	50
5.3	Densité spectrale de puissance (DSP) du signal FM en dB . . . . .	56
5.4	Fonction d'ambiguïté du signal FM . . . . .	57
5.5	Fonction d'auto- corrélation du signal FM . . . . .	57
5.6	Fonction d'ambiguïté du signal DVB-T mode $8k$ . . . . .	60
5.7	Fonction d'auto- corrélation du signal DVBT-T mode $8k$ . . . . .	60
6.1	Chaîne de traitement radar passif classique . . . . .	62
6.2	Technique du filtrage adapté . . . . .	64
6.3	Représentation schématique de la phase de détection, où $N_{pst}$ désigne le nombre des couples retard/Doppler extraits. . . . .	65
6.4	Représentation schématique de la méthode classique . . . . .	68
7.1	Représentation schématique du corrélateur . . . . .	71
7.2	Coupe à Doppler nul de la fonction d'ambiguïté correspondant à la position réelle de la cible non bruitée (trait plein) et à la position de la cible fournie par la $i^{\text{ème}}$ hypothèse particulière (trait discontinu) . . . . .	73
7.3	Une représentation schématique globale de la technique PF propose pour la poursuite . . . . .	75
7.4	Configuration Géométrique - poursuite utilisant le signal FM . . . . .	76
7.5	Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal FM . . . . .	77
7.6	Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal DVB-T - mode $2k$ . . . . .	79
7.7	Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal DVB-T - mode $8k$ . . . . .	80
7.8	Initialisation de la poursuite particulière par une méthode de triangulation utilisant 4 émetteurs . . . . .	81
7.9	Scénario de localisation des cibles par un système multi-émetteurs . . . . .	82

7.10	Représentation schématique de la méthode de détection/poursuite . . . . .	86
7.11	Représentation schématique de la méthode de détection/poursuite multi-cible . . . . .	87
7.12	Estimation des paramètres de la 1 <sup>ème</sup> cible pour une détection/poursuite par la méthode particulière (FP) et la technique conventionnelle (TC); $RSB = -40dB$ avant corrélation. . . . .	88
7.13	Estimation des paramètres de la 2 <sup>ème</sup> cible pour une détection/poursuite par la méthode particulière (FP) et la technique conventionnelle (TC); $RSB = -40dB$ avant corrélation. . . . .	89
7.14	Racine de l'erreur quadratique moyenne sur la position avec la technique détection/poursuite particulière . . . . .	90
8.1	Observations non bruitées : sorties du corrélateur au rythme $1/\Delta\tau$ . . . . .	97
8.2	Grille retard/Doppler . . . . .	98
8.3	Opérations du filtre à somme de gaussiennes dans la case retard/Doppler $(m, n)$ . . . . .	106
8.4	Fusion de plusieurs gaussiennes . . . . .	107
8.5	Diagramme de Voronoi associé à la case retard/Doppler $(m, n)$ . . . . .	112
8.6	La redistribution dans la case retard/Doppler $(m, n)$ . . . . .	116
8.7	Description de la détection des cible en sortie de GSF . . . . .	119
8.8	Fonction d'auto-corrélation du signal carré . . . . .	120
8.9	Entropie des poids des cases en présence d'une cible unique avec une implémentation par un GSF et par un FP en utilisant un signal carré. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende. . . . .	121
8.10	Estimation du retard bistatique et du décalage Doppler d'une cible unique à $RSB = -7dB$ après corrélation avec GSF et FP en utilisant un signal carré. Les courbes de couleur vert foncé représentent la vraie trajectoire de la cible et les courbes de couleur bleu représentent la trajectoire estimée. . . . .	122
8.11	REQM sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec GSF et FP en utilisant un signal carré. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende. . . . .	123
8.12	Entropie des poids des cases en l'absence de cible avec une implémentation par un GSF (a) et par un FP (b) en utilisant un signal carré . . . . .	124
8.13	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le GSF . . . . .	125
8.14	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le FP . . . . .	126
8.15	Une représentation de la méthode d'annulation d'interférence proposée. . . . .	128
8.16	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par 5 étages successifs de GSF avec annulation d'interférence . . . . .	131
8.17	Résultat des estimations de la partie réelle de l'amplitude complexe en présence de huit cibles par le GSF . . . . .	132
8.18	Racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec un GSF en utilisant un signal FM. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende. . . . .	133
8.19	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le FP . . . . .	135
8.20	Résultat des estimations de la partie réelle de l'amplitude complexe en présence de huit cibles par le PF . . . . .	136

---

8.21	La racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec un FP en utilisant un signal FM. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende. . . . .	137
8.22	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de 3 cibles par le GSF . . . . .	138
8.23	Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de 3 cibles par le GSF en agrandissant la partie où les cibles se coincident. . . . .	139
A.1	Description du problème de la représentation d'une cible par des particules localisées dans plusieurs cases retard/Doppler . . . . .	146



# Acronymes

**AM** Amplitude Modulation  
**APF** Auxiliary Particle Filter  
**CFAR** Constant False Alarm Rate  
**CMA** Constant Modulus Algorithm  
**CME** contre-mesures électroniques  
**COFDM** Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing  
**DAB** Digital Audio Broadcasting  
**DSI** Direct Signal Interference  
**DVB** Digital Video Broadcasting  
**DVB-T** Digital Video Broadcasting - Terrestrial  
**DVB-S** Digital Video Broadcasting - Satellite  
**ECA** Extensive Cancellation Algorithm  
**EKF** Extended Kalman Filter  
**FA** fonction d'ambiguïté  
**FFT** Fast Fourier Transformer  
**FM** Frequency Modulation  
**FP** filtrage particulière  
**GNNDA** Global Nearest Neighbour Data Association  
**GNSS** Global Navigation Satellite System  
**GSF** Gaussian Sum Filter  
**GSM** Global System for Mobile Communications  
**HF** High Frequency  
**HMM** Hidden Markov Model  
**JPDA** Joint Probabilistic Data Association  
**KF** Kalman Filter  
**MC** Monte-Carlo  
**MDA** Multidimensional Assignment  
**MHT** Multiple Hypothesis Tracking  
**MSMC** méthode séquentielle de Monte Carlo  
**MTI** Moving Target Indicator  
**NCTR** Non-Cooperative Target Recognition  
**NNDA** Nearest Neighbour Data Association  
**OFDM** Orthogonal Frequency Division Multiplexing  
**PBR** Passive Bistatic Radar  
**PCL** Passive Coherent Location  
**PCR** Passive Covert Radar

**PDA** Probabilistic Data Association  
**QAM** Quadrature Amplitude Modulation  
**RBPF** Rao-Blackwellised Particle Filter  
**RCS** Radar Cross Section  
**REQM** racine de l'erreur quadratique moyenne  
**RPF** Regularized Particle Filter  
**RSB** rapport signal sur bruit  
**RSI** rapport signal sur interférence  
**RV** rapport de vraisemblance  
**SCA** Sequential Cancellation Algorithm  
**SER** surface équivalente radar  
**SFN** Single Frequency Network  
**SIR** Sequential Importance Resampling  
**SIS** Sequential Importance Sampling  
**LLN** Strong Law of Large Numbers  
**SMC** Sequential Monte Carlo Methods  
**SNR** Signal-to-Noise Ratio  
**SOKM** Second Order Kinematic Model  
**TBD** track-before-detect  
**TC** technique classique  
**TFAC** taux de fausse alarme constant  
**TOKM** Third Order Kinematic Model  
**UKF** Unscented Kalman Filter  
**UMTS** Universal Mobile Telecommunications System  
**UT** Unscented Transform  
**VHF** Very High frequency  
**WiFi** Wireless Fidelity  
**WiMAX** Worldwide Interoperability for Microwave Access

# Introduction

---

Le radar passif est une technique utilisant la réflexion des ondes radio ambiantes sur une cible afin de localiser celle-ci. Nous nous intéresserons au radar passif qui utilise les rayonnements civils existants par opposition au radar actif qui génère lui-même l'impulsion radio qui permet d'écouter l'écho produit par la cible. Dans le cas du radar passif on peut utiliser les émissions radio, de télévision, de téléphones portables, mais aussi les radars ennemis ainsi que les transmissions des satellites de télécommunication ou de géolocalisation. Dans le cas le plus simple (cas bistatique), un émetteur envoie un signal radiodiffusé, souvent avec une puissance rayonnée importante, et une antenne réceptrice distante reçoit ce signal en trajet direct, ainsi qu'une copie réfléchi sur la cible. La position de l'antenne émettrice et réceptrice étant parfaitement connue, après corrélation du signal réfléchi avec le signal émis, il est possible de localiser la cible en mesurant le délai de transmission et l'angle d'arrivée. De plus, le décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler renseigne sur la vitesse radiale de la cible. L'une des difficultés inhérentes de ce type de radar consiste à éviter le masquage du signal désiré réfléchi sur la cible par le trajet direct. Il existe également des systèmes avec plusieurs antennes émettrices (cas multistatique) permettant la localisation par la mesure de plusieurs temps d'arrivée.

Alors que la portée des radars basée sur les signaux GSM ne dépasse pas  $20km$ , des études récentes ont montré que l'utilisation de la radio HF permet une localisation de cibles jusqu'à  $100km$  avec une précision inférieure à  $15km$ , et l'utilisation de la télévision analogique permet une localisation de cibles jusqu'à  $80km$  avec une précision inférieure à  $5km$ . Récemment, un intérêt particulier a été porté aux modulations numériques COFDM (Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing) de type DAB (Digital Audio Broadcasting) et DVB (Digital Video Broadcasting). Les bonnes propriétés de leur fonction d'ambiguïté permettent une localisation de cibles jusqu'à  $80km$  avec une précision inférieure à  $100m$ .

Le traitement du signal radar se fait actuellement par des techniques basées sur la décomposition de l'espace Distance/Doppler en cellules afin de générer les détections du décalage Doppler et du retard des cibles après une pré-corrélation de l'ordre de plusieurs dizaines ou centaines de millisecondes en associant chaque distance bistatique et chaque décalage Doppler dont le niveau a dépassé un seuil adaptatif, à une piste. La poursuite de chaque cible est assurée par un filtre non linéaire tel que le filtre de Kalman étendu (EKF). Cette approche présente deux difficultés de grande importance. Le premier inconvénient est que la détection avant la poursuite génère des fausses alarmes. L'autre inconvénient est que le rapport signal sur bruit (RSB) doit être suffisamment élevé pour que la poursuite avec les techniques de Kalman soit possible. Ceci implique une durée de pré-corrélation de l'ordre de plusieurs dizaines ou centaines de millisecondes, qui entraîne une poursuite assez grossière de la dynamique des cibles fortement manoeuvrantes.

Récemment, un grand intérêt s'est manifesté pour une technique de filtrage bayésien dite particulière. Cette technique, conduit à des traitements capables de tirer le meilleur parti d'un rapport signal/bruit faible, en présence de cibles mobiles dont l'évolution peut être à la fois rapide et imprévisible (missiles, avions de chasse, etc.). Il s'agit ici de faire l'étude du traitement particulière sur l'application originale du radar passif.

On propose, dans un premier temps, un système de filtrage particulière pour la poursuite

d'une cible. Le filtre étudié utilise directement les sorties des corrélateurs contrairement aux méthodes classiques qui utilisent des données seuillées. La durée de pré-corrélation est diminuée afin d'assurer une poursuite fine de la dynamique de cible. Le faible rapport signal sur bruit résultant de cette méthode est compensé par le fait que le filtre de Kalman étendu est remplacé par un algorithme approprié basé sur le filtrage particulaire. Les performances du filtre particulaire proposé sont comparées à celles des techniques classiques en utilisant les signaux FM et les signaux DVB-T. Le traitement particulaire permet une amélioration de la précision de la localisation et une diminution du rapport signal de bruit limite opérationnel et offre la possibilité de poursuivre finement la dynamique de la cible. En combinant un étage de poursuite particulaire avec un étage de détection radar classique, un système de détection/poursuite multi-cible est mis au point. Les performances de ce système sont comparées au système classique en utilisant les signaux DVB-T.

Dans un deuxième temps, nous exposerons comment obtenir un système complet et homogène de détection/poursuite multi-cible en partant des équations générales du filtrage non-linéaire. Une implémentation utilisant le filtrage à somme de gaussiennes (GSF) sera comparée à une implémentation basées sur le filtrage particulaire (FP). Cette partie constitue la contribution novatrice de cette thèse. Les performances de ce système sont étudiées pour un radar passif utilisant les émissions FM.

En guise d'avertissement, il est utile de mentionner que l'objet de ce mémoire de cette n'est pas d'introduire de nouvelles méthodes de filtrage statistique. Il s'agit plutôt de montrer l'apport du filtrage statistique pour le problème du pistage multi-cible, dans le cas d'une application difficile comme le radar passif.

Cette thèse multi-disciplinaire regroupe plusieurs secteurs d'activité : le traitement du signal, la télécommunication, la défense, les mathématiques appliquées.

# Principe du Radar Passif

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Principe et Fonctionnement d'un Radar Passif</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2.2</b>	<b>Avantages et Inconvénients</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>2.3</b>	<b>Configuration géométrique d'un PBR</b> . . . . .	<b>5</b>
2.3.1	Mesure élémentaire de la distance bistatique . . . . .	5
2.3.2	Mesure élémentaire du décalage Doppler . . . . .	7
<b>2.4</b>	<b>Equation Radar</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2.5</b>	<b>Notion de Rapport Signal sur Bruit</b> . . . . .	<b>9</b>
2.5.1	Définition . . . . .	9
2.5.2	Ouales de Cassini . . . . .	9
<b>2.6</b>	<b>Surface équivalente radar</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2.7</b>	<b>Réception Passive</b> . . . . .	<b>11</b>
2.7.1	Propagation des Signaux . . . . .	11
2.7.2	Modèle de Réception . . . . .	11
2.7.3	Interférence du signal direct . . . . .	12
2.7.4	Fouillis . . . . .	12
2.7.5	Annulation des perturbations . . . . .	13
<b>2.8</b>	<b>Corrélation - Fonction d'ambiguïté</b> . . . . .	<b>14</b>
2.8.1	Le bruit après la corrélation . . . . .	15
<b>2.9</b>	<b>Théorie de la détection</b> . . . . .	<b>16</b>
2.9.1	détection radar . . . . .	16
2.9.2	principe TFAC . . . . .	16
<b>2.10</b>	<b>Radar Multistatique</b> . . . . .	<b>17</b>
2.10.1	Motivation . . . . .	17
2.10.2	Localisation d'une cible à partir d'un Radar Multistatique . . . . .	18

---

L'objectif de ce chapitre est de fournir une compréhension de base du fonctionnement d'un radar passif.

## 2.1 Principe et Fonctionnement d'un Radar Passif

La plupart des systèmes radar fonctionnent activement en éclairant l'environnement de la cible par une forme d'onde d'énergie appropriée et en mesurant l'énergie diffusée par cette cible afin de déterminer ses paramètres, tels que la distance monostatique, le décalage Doppler ou l'azimut. Il existe un système alternatif qui ne déploie pas d'émetteur dédié au radar, mais qui utilise plutôt des sources civiles comme la radiodiffusion et la radiocommunication. C'est le cas du radar passif bistatique (Passive Bistatic Radar (PBR) en anglais).

La définition exacte d'un radar passif est la suivante : un radar qui n'émet pas de signaux, mais utilise les signaux d'émetteurs non coopératifs. L'adjectif bistatique se rapporte au fait

que l'émetteur et le récepteur ne sont pas localisés au même endroit. Dans les journaux et les ouvrages on désigne aussi le radar passif par : Localisation Passive Cohérente (Passive Coherent Location (**PCL**) en anglais), ou même Radar Passif Secret (Passive Covert Radar (**PCR**) en anglais). Toutes ces dénominations désignent une classe de systèmes radar qui exploitent des émetteurs existants comme sources pour effectuer la détection et la localisation des cibles.

Les signaux qu'un PBR peut utiliser peuvent être classés en différentes catégories :

- Diffusion Audio : Radio **AM**, Radio **FM**, Radio numérique **DAB**.
- Diffusion Vidéo : Télévision analogique, Télévision numérique terrestre (**DVB-T**)
- Réseaux téléphoniques mobiles : **WiFi**, **WiMAX**.
- Réseaux métropolitains et locaux : **GSM**, **UMTS**.
- Émetteurs satellites pour la télécommunication et la géo-localisation : **GNSS**, Télévision numérique par satellite (**DVB-S**).

## 2.2 Avantages et Inconvénients

Un radar passif utilise un émetteur d'opportunité. Un tel système présente des avantages majeurs. Les avantages essentiels d'un radar passif sont les suivants :

- L'avantage principale d'un radar passif réside dans sa capacité à opérer sans être détectable, puisque la cible ne perçoit rien de plus que le rayonnement civil habituel. Du coup, le radar passif fonctionne en mode couvert et secret, d'où son immunité aux menaces de contre-mesures électroniques (**CME**). Cet avantage le rend plus attractif qu'un radar actif conventionnel dans certaines missions liées à la défense.
- En raison de l'absence d'émetteur, le coût initial et de maintenance est également moins élevé par rapport à un radar bistatique conventionnel.
- Il n'est pas nécessaire de demander une allocation supplémentaire de ressources dans le spectre électromagnétique pour émettre un quelconque signal.
- Un radar passif admet une petite taille, du coup son déploiement est plus facile surtout dans des endroits où un radar conventionnel ne peut pas être installé.
- La surface équivalente radar (**SER**) est potentiellement supérieure, d'où sa capacité contre la furtivité qui est due non seulement à la géométrie intrinsèquement bistatique, mais aussi à l'accès aux bandes de basse fréquence souvent exploitées.
- Un léger impact sur l'environnement et une pollution électromagnétique plus réduite qu'un radar conventionnel comportant une source émettrice de signaux électromagnétiques.

Les systèmes radar passif présentent aussi des inconvénients plus et moins importants, dont voici les plus importants :

- La dépendance aux émetteurs tiers dont on n'a pas la maîtrise : la forme d'onde utilisée n'est pas optimale pour le fonctionnement du radar. Ce signal émis n'est pas contrôlé par le radar et ses caractéristiques peuvent présenter des changements inattendus durant le temps d'émission.
- Un autre inconvénient résultant de la dépendance aux émetteurs tiers est que le site et les propriétés radiatives des émetteurs ne peuvent pas être configurés.
- Une interférence du signal direct (Direct Signal Interference (**DSI**) en anglais) à forte puissance et une contribution importante des trajets multiples dans le système de surveillance.
- Le besoin d'un système de réception séparé et dédié pour collecter le signal émis, potentiellement affecté par des trajets multiples.

## 2.3 Configuration géométrique d'un PBR

Un système radar passif est formé d'une antenne de référence dirigée vers l'émetteur dont le rôle est de collecter le signal reçu en trajet direct, et d'une antenne de surveillance pointée dans la direction de la région à surveiller. Les deux antennes sont usuellement colocalisées (Voir la figure 2.1).

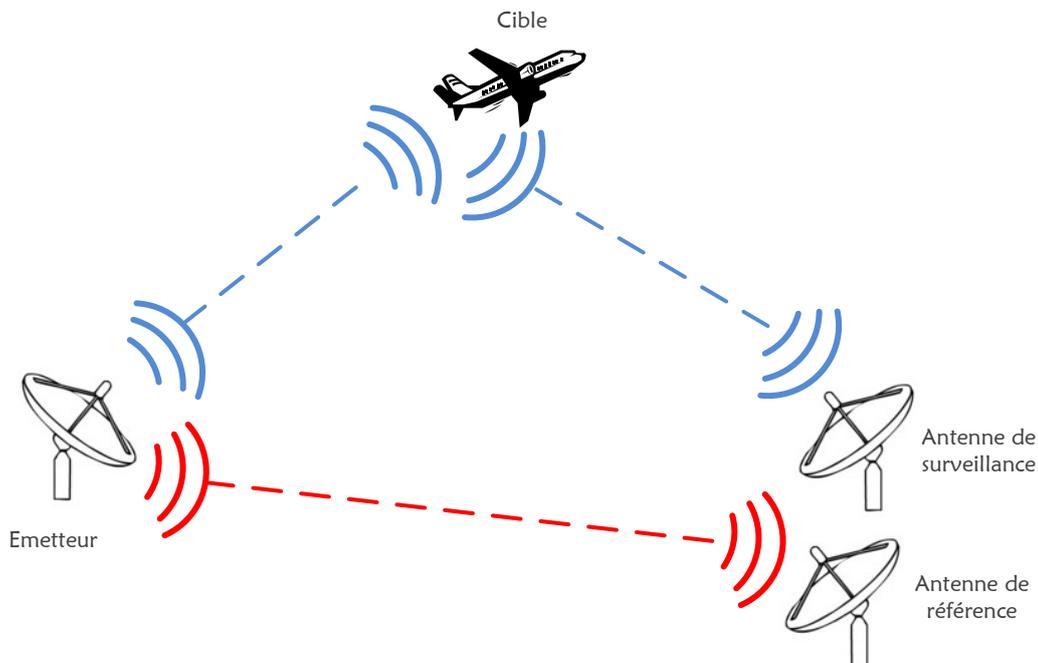


FIGURE 2.1 – Configuration bistatique

Le récepteur mesure la différence de marche entre le signal qu'il reçoit en trajet direct de l'émetteur, et le signal réfléchi par la cible. Cette mesure permet de déterminer la distance bistatique de l'objet. En plus de la distance bistatique, un radar passif permet de mesurer le décalage de fréquence de l'écho par effet Doppler et dans certaines configurations son azimut. Ces informations étant connues on peut calculer la position et la vitesse de la cible.

Dans certains cas on peut utiliser plusieurs émetteurs et/ou plusieurs récepteurs et augmenter ainsi la pertinence et la précision de la mesure. On parle alors de multistatisme. Dans les paragraphes suivants on va définir la distance bistatique et le décalage Doppler, la localisation par un radar multistatique étant décrite dans le paragraphe 2.10.

### 2.3.1 Mesure élémentaire de la distance bistatique

En se propageant sur une distance  $d$ , une onde électromagnétique subit un retard  $\tau$  défini comme le temps que met l'onde pour parcourir cette distance :

$$\tau = \frac{d}{c} \quad (2.1)$$

où  $c$  est la célérité de la lumière dans le milieu de propagation. La distance parcourue par l'onde en se propageant de l'émetteur au récepteur, tout en se réfléchissant sur la cible, est la distance bistatique. Cette distance  $R_b$  est donnée par :

$$R_b = R_T + R_R \quad (2.2)$$

où  $R_T$  est la distance émetteur-à-cible et  $R_R$  est la distance récepteur-à-cible. Le retard bistatique est alors donné par :

$$\tau = \frac{R_T + R_R}{c}. \quad (2.3)$$

Le retard peut s'exprimer en fonction du vecteur de position de la cible,  $\mathbf{X}$  :

$$\tau = \frac{1}{c} (\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_R\| + \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_T\|) \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{X}_R$  et  $\mathbf{X}_T$  sont respectivement le vecteur de position du récepteur et de l'émetteur. La distance bistatique localise la cible sur la surface d'une ellipsoïde dont les foyers sont les lieux d'émission et de réception séparés par la ligne de base  $L$ , et dont la longueur du grand axe est  $2a = R_R + R_T$ . L'ellipsoïde d'équi-distance (*isorange* en anglais) est complètement définie par les deux paramètres  $a$  et  $L$ . La figure 2.2 montre une coupe de l'ellipsoïde dans le plan bistatique formé par l'émetteur  $TX$ , le récepteur  $RX$  et la cible  $C$ , et la figure 2.3 montre les ellipsoïdes d'équi-distance pour des différentes valeurs de distance bi-statique.

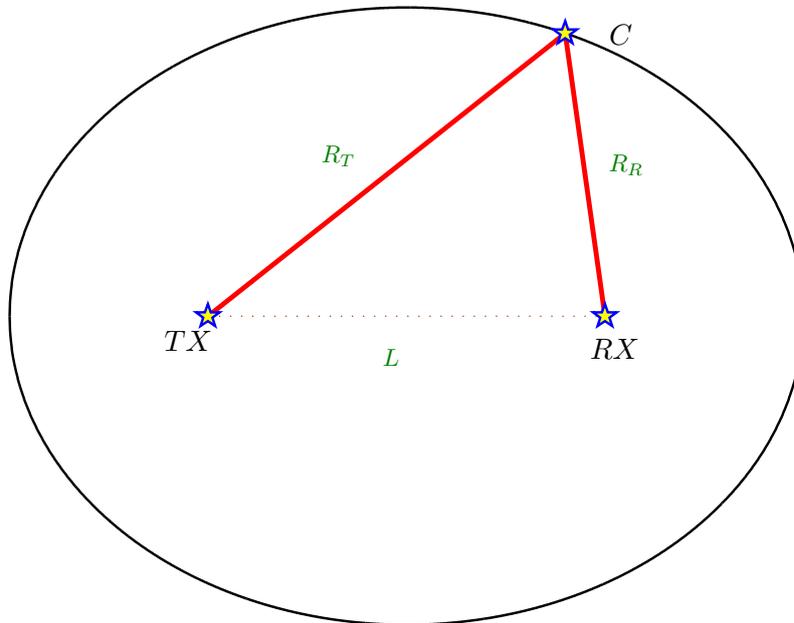


FIGURE 2.2 – Ellipse bistatique

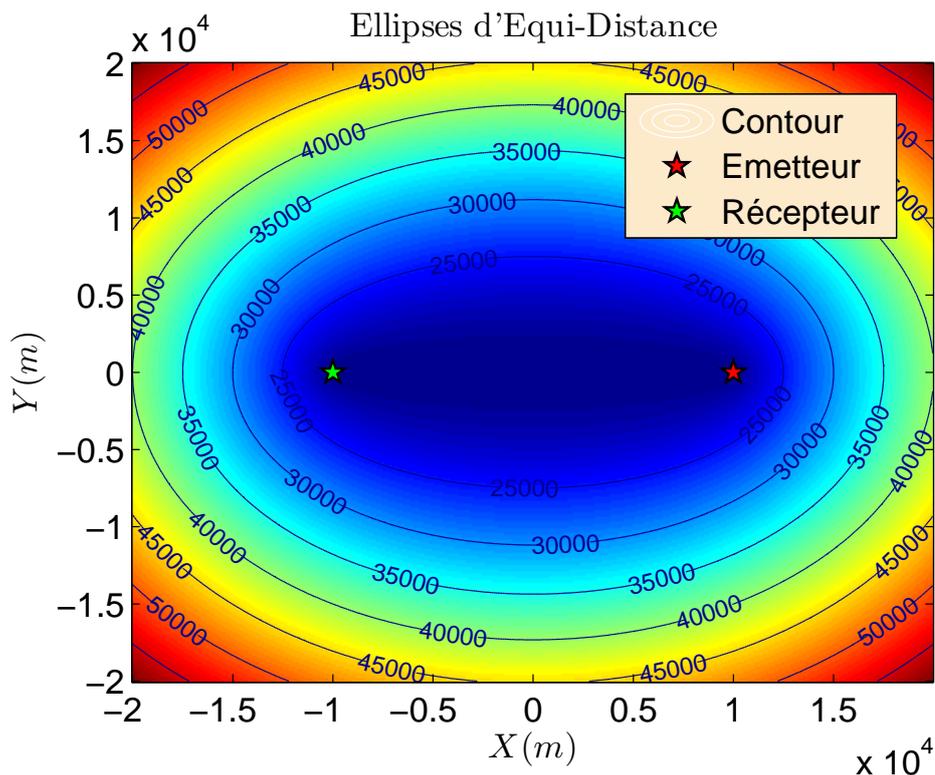


FIGURE 2.3 – Ellipses d'Equidistance

### 2.3.2 Mesure élémentaire du décalage Doppler

Lorsque la distance bistatique entre l'émetteur et le récepteur en passant par la cible varie au cours du temps, un effet de décalage de fréquence de l'onde électromagnétique apparaît. On appelle cet effet, largement lié à la vitesse de la cible, effet Doppler.

Par conséquent, le décalage Doppler  $\nu$  est défini comme proportionnel au taux de variation de la distance bistatique par unité du temps. Il est donné par :

$$\nu = -\frac{f_c}{c} \left[ \frac{d}{dt} (R_T + R_R) \right] \quad (2.5)$$

où  $f_c$  est la fréquence de propagation. Le décalage Doppler peut s'exprimer en fonction des vitesses radiales entre l'émetteur et la cible d'une part et le récepteur et la cible d'un autre part. Ce décalage est donné comme une projection de la vitesse relative sur la direction de propagation :

$$\nu = -\frac{f_c}{c} \left[ (\mathbf{V} - \mathbf{V}_T) \cdot \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_T}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_T\|} + (\mathbf{V} - \mathbf{V}_R) \cdot \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_R}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_R\|} \right] \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{V}_R$ ,  $\mathbf{V}_T$  et  $\mathbf{V}$  sont respectivement les vecteurs vitesse du récepteur, de l'émetteur et de la cible. Lorsque l'émetteur et le récepteur sont supposés immobiles, l'équation 2.6 s'écrit :

$$\nu = -\frac{f_c}{c} \mathbf{V} \cdot \left( \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_T}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_T\|} + \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_R}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_R\|} \right) \quad (2.7)$$

Par projection, le décalage Doppler s'écrit aussi [Willis 2005] :

$$\nu = 2\frac{f_c}{c} V \cos(\delta) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (2.8)$$

où  $V$  est la module de la vitesse de la cible,  $\delta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec la bissectrice bistatique et  $\beta$  est l'angle bistatique (cf Fig. 2.4)

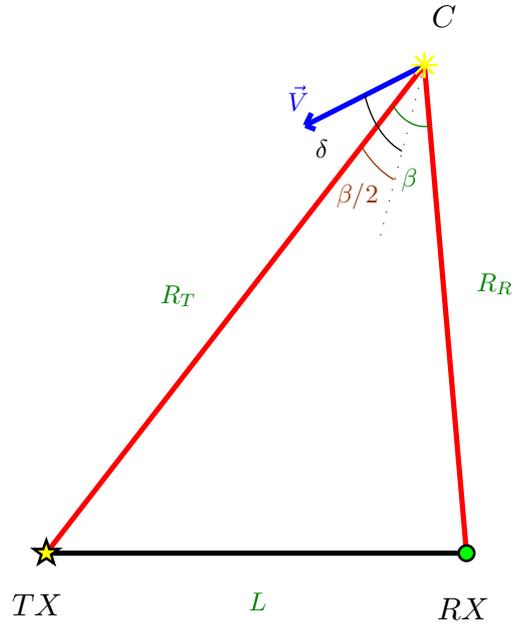


FIGURE 2.4 – Géométrie pour le décalage Doppler bistatique

## 2.4 Equation Radar

Le bilan de puissance pendant la propagation d'onde est résumé par l'équation radar [Kingsley 1992] qui exprime la puissance reçue par le récepteur en fonction de la puissance émise et les paramètres du système :

$$P_R = \frac{P_T G_T F_T G_R F_R \lambda^2 \sigma_e}{(4\pi)^3 \mathcal{L}_T \mathcal{L}_R (R_T R_R)^2} \quad (2.9)$$

Avec :

- $P_T$  : puissance émise par l'émetteur.
- $P_R$  : puissance reçue par l'émetteur.
- $G_T$  : gain de l'antenne émettrice.
- $F_T$  : diagramme de transmission de l'antenne émettrice.
- $G_R$  : gain de l'antenne réceptrice.
- $F_R$  : diagramme de transmission de l'antenne réceptrice.
- $\lambda$  : longueur d'onde de propagation.
- $\mathcal{L}_T$  : perte ( $>1$ ) sur le chemin émetteur-cible.
- $\mathcal{L}_R$  : perte ( $>1$ ) sur le chemin cible-récepteur.
- $\sigma_e$  : surface équivalente radar de la cible.

## 2.5 Notion de Rapport Signal sur Bruit

### 2.5.1 Définition

Dans le cadre de cette thèse, le rapport signal sur bruit (**RSB**) (Signal-to-Noise Ratio (**SNR**) en anglais) à la réception est défini comme le rapport entre la puissance du signal reçu  $P_R$  et la puissance du bruit  $P_n$  :

$$RSB = \frac{P_R}{P_n} \quad (2.10)$$

Ce rapport est très bas à la réception, mais une intégration cohérente filtre le bruit et augmente le niveau du rapport signal sur bruit. Après l'intégration cohérente, le rapport signal sur bruit est donné par :

$$RSB_i = RSB \times G_{int} \quad (2.11)$$

où  $G_{int}$  est le gain dû à l'intégration. Le gain est égal au nombre des échantillons utilisés dans l'intégration, soit :

$$G_{int} = \frac{T}{T_s} \quad (2.12)$$

où  $T$  est la durée d'intégration et  $T_s$  la période d'échantillonnage à la réception. Le rapport signal sur bruit est donné souvent en  $dB$  par la relation suivante :

$$RSB_{dB} = 10 \log_{10} RSB \quad (2.13)$$

L'équation 2.9 donne :

$$RSB = \frac{P_T G_T F_T G_R F_R \lambda^2 \sigma_e}{(4\pi)^3 \mathcal{L}_T \mathcal{L}_R (R_T R_R)^2 P_n} \quad (2.14)$$

### 2.5.2 Ovals de Cassini

Dans une configuration mono-statique on parle de la portée maximale  $R_{max}$  qui représente la distance maximale entre la cible et le radar pour laquelle la cible est toujours détectable. Dans le cas bistatique, on parle d'une portée bistatique maximale  $\kappa = (R_T R_R)_{max}$ . Ce produit est donné par l'équation de la portée bistatique maximale déduite de l'équation 2.14 :

$$\kappa^2 = \frac{K}{RSB_{min}} \quad (2.15)$$

où  $K$  est la constante de Radar bistatique, donnée par :

$$K = \frac{P_T G_T F_T G_R F_R \lambda^2 \sigma_e}{(4\pi)^3 \mathcal{L}_T \mathcal{L}_R P_n} \quad (2.16)$$

Même si ce n'est pas souvent le cas, en pratique  $K$  sera supposée constante. L'expression générale du produit  $R_T R_R$  est donné par :

$$R_T R_R = \kappa \sqrt{\frac{RSB_{min}}{RSB}} \quad (2.17)$$

A un rapport signal sur bruit donné, on peut tracer l'ovale de Cassini qui donne le lieu géométrique de la cible où le produit  $R_T R_R$  est constante. La figure 2.5 montre les ovales de Cassini pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit.

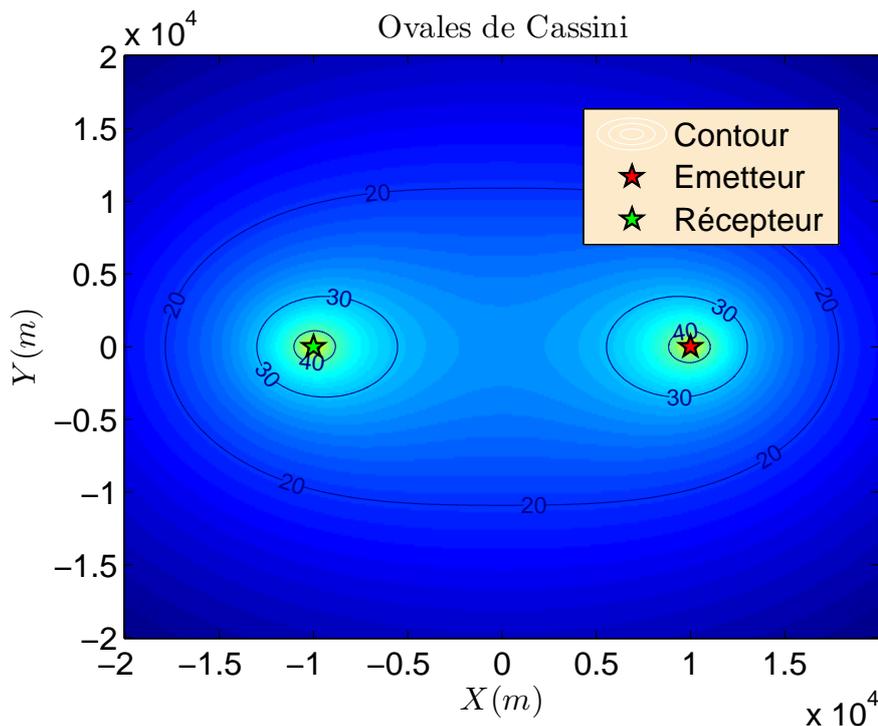


FIGURE 2.5 – Ovale de Cassini

## 2.6 Surface équivalente radar

La surface équivalente radar (**SER**) ou (Radar Cross Section (**RCS**) en anglais), ou surface efficace radar, est une propriété physique inhérente des objets indiquant l'importance relative de la surface de réflexion d'un faisceau électromagnétique qu'ils provoquent. La surface équivalente radar est fonction de la forme de l'objet, de la nature de son (ses) matériau(x) constitutif(s), ainsi que de la longueur d'onde et des angles d'incidence et de réflexion du rayonnement.

La **SER** est un paramètre spécifique à un objet quelconque (véhicule, avion ou navire) influant grandement sur sa susceptibilité d'être détecté par un radar. Présenter une **SER** faible est une qualité essentielle pour un engin militaire qui lui permettra d'échapper d'autant mieux à un radar adverse. Des technologies de furtivité ont par conséquent été mises au point dans le but de réduire la **SER**. La **SER** d'un objet est en règle générale un secret militaire et n'est pas divulguée.

La **SER** d'un objet se mesure typiquement à l'aide de radars. Cela peut s'effectuer en plein air ou dans une chambre anéchoïque absorbant dans leur totalité les ondes électromagnétiques de la fréquence émise.

avions furtifs	0,01 à 0,02m <sup>2</sup>
missiles anti-aériens	environ 0,1m <sup>2</sup>
avions de chasse	0,1 à 1m <sup>2</sup>
bombardiers	1 à 2m <sup>2</sup>
avions de transport lourds	jusqu'à 50m <sup>2</sup>
avions commerciaux civils	jusqu'à 50m <sup>2</sup>

FIGURE 2.6 – Valeurs typiques de **SER** mesurées à l'aide d'un radar à ondes centimétriques

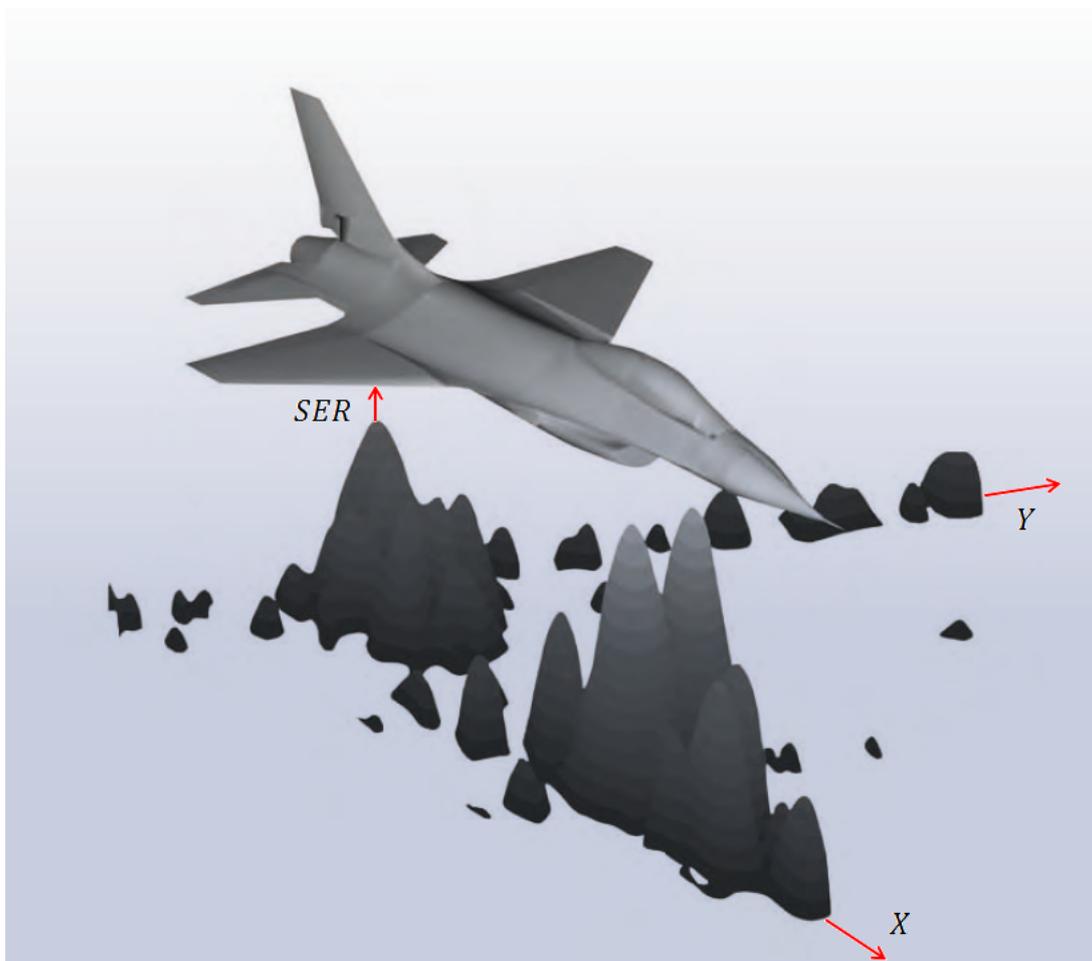


FIGURE 2.7 – Surface équivalent Radar

## 2.7 Réception Passive

### 2.7.1 Propagation des Signaux

En se propageant dans le milieu, le signal reçu subit un retard temporel  $\tau(t)$  et un déphasage  $\Phi(t)$  proportionnel à la distance parcourue. La variation du déphasage due à la variation de la distance de propagation produit un décalage fréquentiel  $\nu(t)$  (effet Doppler). L'amplitude  $\mathcal{A}(t)$  subit des fluctuations dues à l'atténuation le long de la chaîne de propagation et au gain des antennes à l'émission et à la réception. Si on appelle  $S_T(t)$  le signal émis par l'émetteur d'opportunité, alors le signal reçu par l'antenne réceptrice  $S_R(t)$  est donné par la relation suivante :

$$S_R(t) = \mathcal{A}(t) S_T(t - \tau(t)) e^{-j2\pi f_c \tau(t)}. \quad (2.18)$$

### 2.7.2 Modèle de Réception

Le radar passif utilise des sources d'opportunité afin de réaliser la détection et la localisation des cibles. Afin d'obtenir le gain de traitement nécessaire pour détecter les échos dans un contexte de faible rapport signal sur bruit et de faible rapport signal sur interférences, il faut procéder à un traitement équivalent au filtre adapté optimal utilisé dans le système radar conventionnel.

Comme le signal transmis n'est pas disponible directement sur le récepteur, un canal dédié recueille le signal direct pour être utilisé comme référence pour le filtrage adapté.

En raison de la géométrie du système, il est probable que les échos de la cible soient masqués par : (i) la petite fraction du signal direct reçu par le côté ou en arrière du lobe de l'antenne du récepteur (qui pourrait être plus importante que l'écho de fouillis), (ii) l'encombrement fort et les échos des trajets multiples, et (iii) les échos des autres cibles fortes localisées à une courte distance bi-statique, même en présence de grandes séparations Retard/Doppler, [IEE 2005, Griffiths 2005].

L'effet de l'interférence du signal direct et la contribution des fouillis et des trajets multiples est exacerbé par les caractéristiques des formes d'ondes des sources exploitées. Dans un système radar conventionnel, la forme d'onde transmise est soigneusement conçue pour offrir une fonction d'ambiguïté avec des propriétés appropriées (par exemple un pic étroit en portée et en Doppler et des lobes secondaires faibles). Par contre dans un PBR, la forme d'onde transmise n'est pas sous le contrôle du concepteur du radar et présente des caractéristiques variables et imprévisibles.

Les trajets multiples et les fouillis sont modélisés comme un ensemble de petits diffuseurs discrets. En se basant sur cette hypothèse, l'enveloppe complexe du signal total collecté au niveau du canal de surveillance est donnée par (cf. Fig 2.8) :

$$S_R(t) = \mathcal{A}_d^s S_T(t - \tau_d^s) + \sum_{l=1}^{N_T} \mathcal{A}_l e^{-j2\pi f_c \tau_l} S_T(t - \tau_l) + \sum_{m=1}^{N_C} \mathcal{C}_m S_T(t - \tau_{C_m}) + \mathbf{n}(t) \quad (2.19)$$

où :

- $\mathcal{A}_d^s$  et  $\tau_d^s$  sont l'amplitude complexe et le retard du signal direct reçu via les lobes latéraux de l'antenne de surveillance
- $\mathcal{A}_l$  et  $\tau_l$  sont l'amplitude complexe et le retard bistatique de la  $l^{\text{ème}}$  cible.
- $\mathcal{C}_m$  et  $\tau_{C_m}$  sont l'amplitude complexe et le retard du  $m^{\text{ème}}$  fouillis.
- $\mathbf{n}(t)$  est la contribution du bruit thermique au niveau de l'antenne de surveillance.

### 2.7.3 Interférence du signal direct

L'interférence du signal direct (Direct Signal Interference (DSI) en anglais) est l'un des problèmes majeurs dans le système radar bi-statique à signal continu. Le signal direct est le signal reçu directement de l'émetteur par le canal de surveillance dédiée à la réception des échos des cibles. La DSI et le signal réfléchi sont cohérents et ont une structure similaire à l'exception du retard bi-statique et du décalage Doppler. Le rapport rapport signal sur interférence (RSI) est donné comme le rapport de la puissance du signal reçu à la sortie du canal de surveillance  $P_R$  (donnée par la relation 2.9) et de la puissance du signal direct  $P_D$ , soit [Griffiths 1986] :

$$RSI = \frac{F_T F_R}{F_T^d F_R^d} \left( \frac{L}{R_T R_R} \right)^2 \frac{\sigma_e}{4\pi} \quad (2.20)$$

où  $F_T^d$  et  $F_R^d$  sont respectivement les diagrammes de transmission de l'antenne émettrice dans la direction du récepteur et de l'antenne réceptrice dans la direction de l'émetteur et  $L$  est distance entre l'émetteur et le récepteur.

### 2.7.4 Fouillis

Le fouillis (ou clutter en anglais) est défini comme des échos indésirables, venant typiquement de la terre, de la mer, de la pluie et des autres précipitations, des paillettes, des oiseaux, des insectes et l'aurore. Il existe différents types des fouillis, parmi lesquels : (1) les fouillis de surface,

regroupant des échos de la terre et de la mer, et (2) les paillettes utilisées pour brouiller les mesures d'un radar.

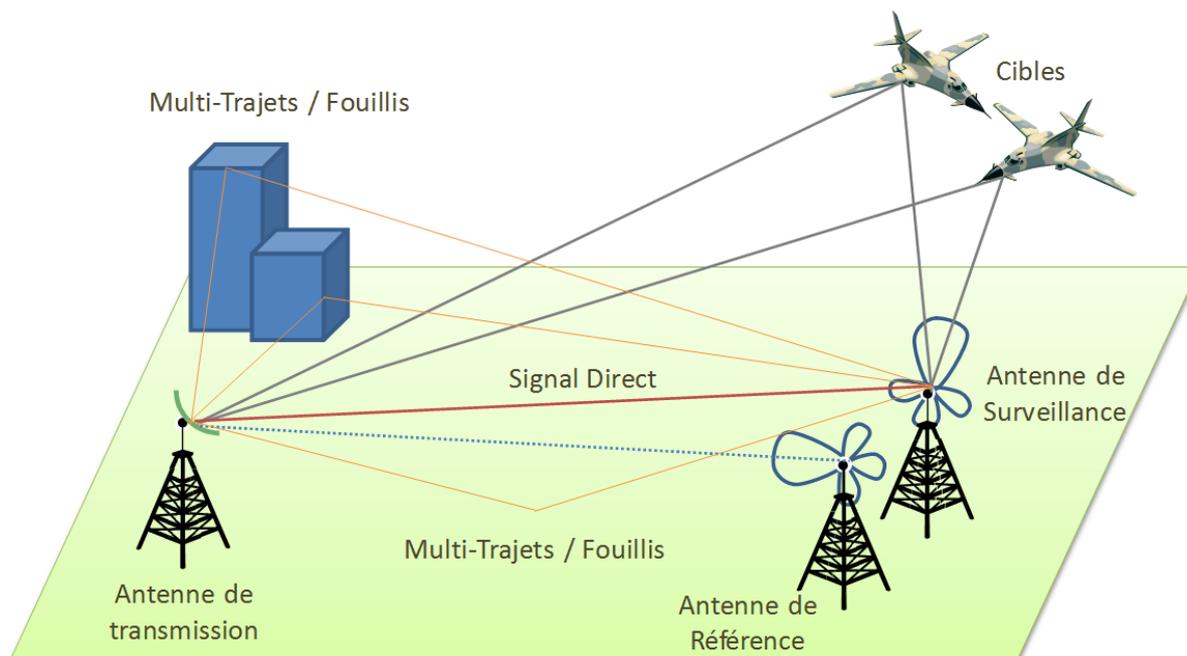


FIGURE 2.8 – Réception passive.

### 2.7.5 Annulation des perturbations

L'annulation du signal direct, des échos des fouillis et des trajets multiples est un enjeu crucial pour la détection de cible. L'utilisation des antennes directives permet d'atténuer partiellement la DSI. Cependant, des techniques de traitement du signal efficaces sont nécessaires afin de réduire davantage la DSI, [Gunner 2003, Howland 2005, Cardinali 2007a, Colone 2009, Haykin 2002].

En utilisant le signal recueilli à l'antenne de référence et en supposant qu'il s'agit d'une réplique retardée du signal transmis, les algorithmes d'annulation appropriés peuvent être conçus pour éliminer les échos indésirables affectant le signal recueilli à l'antenne de surveillance. L'effet de masquage, dû aux lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté, ne peut être enlevé par les techniques classiques d'indicateur de cible en mouvement (Moving Target Indicator (MTI) en anglais). Ainsi, de nouveaux filtres adaptatifs d'annulation ont dû être conçus à cet effet [Howland 2005, Kulpa 2004, Axelsson 2005, Gunner 2003, Kulpa 2005, Cardinali 2007a, Colone 2006, Colone 2009]. En particulier, le problème a été abordé dans [Axelsson 2005] et [Kulpa 2005] en utilisant une approche itérative qui annule progressivement les trajets multiples forts et les échos des cibles (tout en conservant en mémoire la localisation des cibles à fort SER).

L'algorithme d'annulation séquentielle (Sequential Cancellation Algorithm (SCA) en anglais), dans [Colone 2006], et l'algorithme d'annulation extensif (Extensive Cancellation Algorithm (ECA) en anglais), dans [Colone 2009], ont été présentés par Colone et al. Le principe est d'exploiter un nombre variable d'itérations adaptatives identifiées à partir des données mesurées elle-mêmes. L'approche a été conçue pour donner la priorité à l'annulation de la plus grande perturbation jusqu'à atteindre un niveau d'annulation désiré et prédéterminé.

Toutefois, si le signal de référence est lui-même affecté par des trajets multiples non éliminés, la capacité d'annulation de ces algorithmes peut être fortement réduite et la performance,

en terme de détection de cibles, sera amoindrie. L'algorithme de forçage à module constante (Constant Modulus Algorithm (CMA) en anglais) peut être appliqué afin d'obtenir une égalisation adaptative du signal de référence [Cardinali 2007b, Larimore 1983, Traichler 1983].

Par la suite, nous supposons que le canal de référence est parfaitement synchronisé avec l'émetteur et que le trajet direct ainsi que les trajets multiples ont été supprimés par les techniques pré-citées. Ainsi, le signal reçu  $S_R(t)$  venant de la région de surveillance est donné en fonction du signal émis  $S_T(t)$  en prenant en considération la présence d'un seul émetteur, soit :

$$S_R(t) = \sum_{l=1}^{N_T} \mathcal{A}_l e^{-j2\pi f_c \tau_l} S_T(t - \tau_l) + \mathbf{n}(t) \quad (2.21)$$

L'amplitude  $\mathcal{A}_l$  de la  $l^{\text{ème}}$  cible décrit l'atténuation due à la propagation. Le bruit additif  $\mathbf{n}(t)$  est modélisé par un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $N_0$ .

## 2.8 Corrélation - Fonction d'ambiguïté

Après soustraction du signal direct et des trajets multiples d'une manière adaptative, il est nécessaire de rechercher les échos décalés en fréquence et retardés en temps correspondant aux cibles. Cette étape de traitement est assurée par la corrélation croisée qui vise deux objectifs distincts dans le radar : (1) agir comme un filtre adapté pour le système radar et fournir le gain d'intégration nécessaire pour permettre la détection de l'écho de la cible, et (2) estimer le retard bistatique et le décalage Doppler de la cible.

Du fait que la cible n'est pas au repos, un décalage Doppler est imposé sur l'écho, ce qui implique que l'écho ne se corrèle pas avec le signal direct (corrélation dans le domaine temporel), sauf si on applique le même décalage fréquentiel sur le signal référence. Ainsi, la corrélation consiste à implémenter une batterie de filtres adaptés, chacun étant réglé sur un décalage Doppler différent. Le filtre adapté réglé à la fréquence  $\nu$  et évalué au retard  $\tau$  pour une durée d'intégration cohérente  $T$ , est donné par :

$$\Gamma(\tau, \nu) = \frac{1}{T} \int_0^T S_R(t) S_T^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (2.22)$$

En prenant en compte la forme du signal reçu  $S_R(t)$  donnée par la relation 2.21 et en supposant que les décalages de fréquence correspondant aux différentes cibles sont constants pendant la durée d'intégration cohérente, le filtre adapté s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \nu) &= \sum_{l=1}^{N_T} \mathcal{A}_l \frac{1}{T} \int_0^T S_T(t - \tau_l) S_T^*(t - \tau) e^{-j2\pi(\nu - \nu_l)t} dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{n}(t) S_T^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \\ &= \sum_{l=1}^{N_T} \mathcal{A}_l \cdot \chi(\tau - \tau_l, \nu - \nu_l) + \eta(\tau, \nu) \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $\eta(\tau, \nu)$  désigne le terme du bruit après corrélation. La fonction  $\chi$  s'appelle la fonction d'ambiguïté (FA). La FA du signal émis, limitée à une durée d'intégration  $T$  est définie par :

$$\chi(\tau, \nu) = \frac{1}{T} \int_0^T S_T(t) S_T^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (2.24)$$

Pour un décalage Doppler nul, la fonction d'ambiguïté se réduit à la fonction d'auto-corrélation, soit :

$$\chi(\tau, 0) = \frac{1}{T} \int_0^T S_T(t) S_T^*(t - \tau) dt \quad (2.25)$$

Le module de la fonction d'ambiguïté atteint son maximum pour le couple  $(\tau, \nu) = (0, 0)$ . La valeur maximal est égale à la puissance du signal émis  $P_T$ , soit :

$$|\chi(0, 0)| = \frac{1}{T} \int_0^T |S_T(t)|^2 dt = P_T \quad (2.26)$$

Le signal radar idéal est celui qui produit une fonction d'ambiguïté de la forme :

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \begin{cases} P_T & \text{pour } (\tau, \nu) = (0, 0) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.27)$$

Malheureusement, on peut montrer qu'un tel signal n'existe pas. En effet, la largeur du lobe principal (central) de la fonction d'ambiguïté autour de l'origine bistatique  $(\tau, \nu) = (0, 0)$  est de l'ordre de l'inverse de la largeur de bande du signal émis dans l'axe temporel et de l'ordre de l'inverse de la durée d'intégration dans l'axe fréquentiel. Ainsi, la résolution en Doppler  $\Delta\nu$ , qui est la séparation minimale en fréquence Doppler entre les échos de deux cibles, est une fonction du temps d'intégration, ce qui signifie qu'elle peut être améliorée avec des temps d'intégration plus longs. Par contre, la résolution en retard  $\Delta\tau$ , qui est la séparation minimale en retard entre les échos de deux cibles, dépend de la largeur de bande de cette forme d'onde, qui ne peut pas être modifiée. De plus, selon le signal d'opportunité et selon la durée d'intégration, la fonction d'ambiguïté peut avoir des lobes secondaires ayant potentiellement une structure variable dans le temps et pouvant être à un niveau pas très inférieur à celui du lobe principal (cas d'un signal FM avec une courte durée d'intégration).

### 2.8.1 Le bruit après la corrélation

On désigne par  $\eta(\tau, \nu)$ , le bruit de mesure obtenu après une corrélation évaluée au retard  $\tau$  et à la fréquence  $\nu$ . La covariance du bruit  $\eta$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R_{\tau, \nu} &= \mathbb{E}[\eta(a + \tau, b + \nu) \eta^*(a, b)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{n}(t) S_T^*(t - a - \tau) e^{-j2\pi(b+\nu)t} dt \right) \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{n}(t') S_T^*(t' - a) e^{-j2\pi b t'} dt' \right)^* \right] \\ &= \left( \frac{1}{T} \right)^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T \mathbf{n}(t) \mathbf{n}^*(t') S_T(t' - a) S_T^*(t - a - \tau) e^{-j2\pi(bt + \nu t - bt')} dt dt' \right] \\ &= \left( \frac{1}{T} \right)^2 \int_0^T \int_0^T N_0 \delta(t - t') S_T(t' - a) S_T^*(t - a - \tau) e^{-j2\pi(bt + \nu t - bt')} dt dt' \\ &= \frac{N_0}{T} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_T(t - a) S_T^*(t - a - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \right) = \frac{N_0}{T} \chi(\tau, \nu) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où la troisième ligne provient du fait que le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est supposé gaussien blanc de densité spectrale de puissance  $N_0$  et de covariance :

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(t + \tau) \mathbf{n}^*(t)] = N_0 \delta(\tau) \quad (2.29)$$

Notons que le bruit  $\eta$  est un bruit coloré de largeur de bande égale à celle du signal  $S_T(t)$ . Pour un signal  $S_T(t)$  ayant une fonction d'ambiguïté idéale la covariance du bruit  $\eta$  s'écrit :

$$R_{\tau,\nu} = \frac{N_0}{T} P_T \delta(\tau, \nu) \quad (2.30)$$

## 2.9 Théorie de la détection

### 2.9.1 détection radar

L'objectif d'un radar est de détecter une cible ainsi que d'estimer sa distance. En fait le mot radar est un acronyme de l'expression anglaise "radio detection and ranging".

Le fouillis, le brouillage et le bruit du récepteur sont des variables aléatoires évoluant dans le temps. Par exemple, nous ne pouvons jamais prévoir avec précision la puissance exacte de fouillis. Par contre, nous pouvons décrire la distribution statistique des fouillis, du brouillage et du bruit thermique du récepteur. De même les fluctuations d'amplitude de la cible peuvent être décrites comme une variable aléatoire, en utilisant les modèles de Swerling [Swerling 1954]. En raison de la nature aléatoire de l'environnement signal radar, il existe une ambiguïté quant à savoir si une cible est présente ou non. Le but de la théorie de détection est de fournir une procédure rationnelle pour déterminer, au sens statistique, laquelle de deux hypothèses possibles - *cible présente* ou *cible absente* - a généré une observation donnée. La théorie de la détection est basée sur le test d'hypothèses.

Pour une case d'analyse (i.e. case distance-Doppler) fixée, le vecteur d'observation  $\mathcal{Y}$  est corrompu par un bruit  $\eta$  additif. le problème de détection se formalise de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \mathcal{Y} = \eta \\ H_1 : \mathcal{Y} = z + \eta \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $z$  est un signal complexe connu caractérisant une cible. L'hypothèse  $H_0$  correspond à l'absence d'une cible, le signal complexe  $\mathcal{Y}$  reçu par le radar est supposé ne contenir que les échos (fouillis) indésirables, ainsi que le bruit thermique. Ces parasites sont supposés admettre une certaine densité de probabilité notée  $p_\eta$ , et la densité de probabilité du signal reçu sera  $p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_0) = p_\eta(\mathcal{Y}/H_0)$

Sous l'hypothèse  $H_1$ , le signal reçu  $\mathcal{Y}$  est supposé contenir le signal  $z$  provenant des échos de la cible mais noyé parmi les mêmes échos parasites que sous  $H_0$ . Sa densité de probabilité est alors notée  $p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_1)$ .

L'objectif de la détection est de déterminer laquelle des deux hypothèses est la plus vraisemblable, tout en minimisant les deux erreurs suivantes [Kingsley 1992] :

- Décider  $H_0$  alors que  $H_1$  est vraie. Dans ce cas, on parle de non-détection, avec la probabilité  $P_{nd} = P(H_0/H_1) = 1 - P(H_1/H_1) = 1 - P_d$ , où  $P_d$  représente la probabilité de détection ;
- Décider  $H_1$  alors que  $H_0$  est vraie. Dans ce cas, on parle de fausse alarme, avec la probabilité  $P_{fa} = P(H_1/H_0)$ .

### 2.9.2 principe TFAC

Dans la pratique, il est très difficile de s'affranchir totalement de ces erreurs, à moins de connaître parfaitement la statistique de l'environnement du radar ainsi que la nature de la cible à détecter. Un bon compromis est donné par le critère de Neymann-Pearson qui vise à maximiser la probabilité de détection  $P_d$  pour un taux de fausses alarmes  $P_{fa} = \alpha$  fixé. Dans la pratique, ce taux est donné par l'utilisateur et, en général, est très faible. C'est le principe de taux de fausse

alarme constant (TFAC) (ou Constant False Alarm Rate (CFAR) en anglais), [Nitzberg 1999]. Le test du rapport de vraisemblance (RV), donné par :

$$\Lambda(\mathcal{Y}) = \frac{p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_1)}{p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda, \quad (2.32)$$

est alors le test optimal pour le critère de Neymann-Pearson. Dans ce test,  $\lambda$ , le seuil de détection, est déterminé pour avoir une probabilité de fausse alarme  $P_{fa} = \alpha$  fixée, et se calcule en résolvant l'équation suivante :

$$P_{fa} = \int_{D_1} p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_0) d\mathcal{Y}, \quad (2.33)$$

où  $D_1$  désigne l'ensemble des  $\mathcal{Y}$  contenus dans le domaine de décision de l'hypothèse  $H_1$ . Il est souvent difficile d'obtenir une expression analytique de ces équations, et le calcul de  $\lambda$  s'effectue soit en résolvant numériquement 2.33, soit par des techniques de Monte-Carlo.

Une fois le seuil de détection déterminé, le calcul de  $P_d$  peut s'effectuer de la manière suivante :

$$P_d = \int_{D_1} p_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}/H_1) d\mathcal{Y}, \quad (2.34)$$

Comme précédemment, il est très rare d'obtenir une expression analytique de  $P_d$ .

Dans le cas d'un bruit blanc gaussien complexe de variance  $N_\eta$ , soit  $\eta \sim \mathcal{N}(0, N_\eta)$ , on obtient :

$$P_{fa} = P\{|\mathcal{Y}| > \lambda \mid H_0\} = P\{|\eta| > \lambda\} = e\left(-\frac{\lambda^2}{N_\eta}\right) \quad (2.35)$$

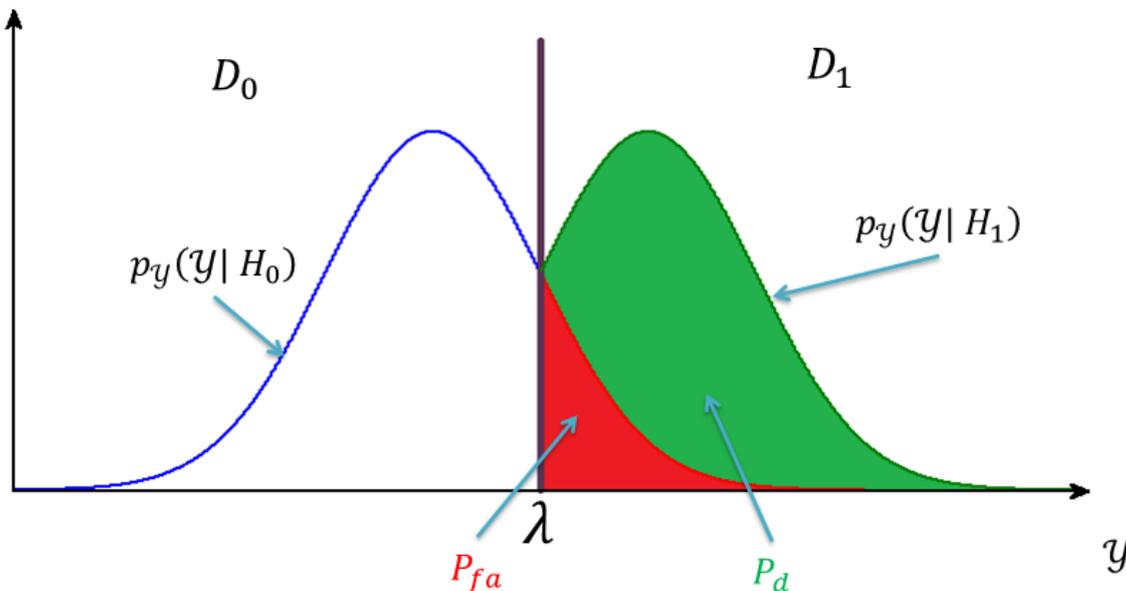


FIGURE 2.9 – Relation entre  $P_{fa}$ ,  $P_d$  et le seuil  $\lambda$ .

## 2.10 Radar Multistatique

### 2.10.1 Motivation

Une configuration bistatique comprenant un émetteur d'opportunité et un récepteur passif, donne des performances potentiellement bonnes en ce qui concerne la détection, mais sa capacité

de localisation reste limitée. En général, la résolution angulaire est gravement dégradée après une longue durée d'intégration. En plus, l'utilisation d'une large antenne poutre implique une faible précision sur la mesure angulaire.

Une configuration multistatique rend la détection plus robuste et augmente la précision de localisation. Les nouveaux systèmes numériques d'émission transmettent typiquement par des réseaux d'émetteurs, ce qui rend l'exploitation conjointe de plusieurs émetteurs et récepteurs un choix naturel. D'autre part, le fait que seuls les récepteurs soient implémentés rend les systèmes multistatiques abordables du point de vue du coût de mise en oeuvre.

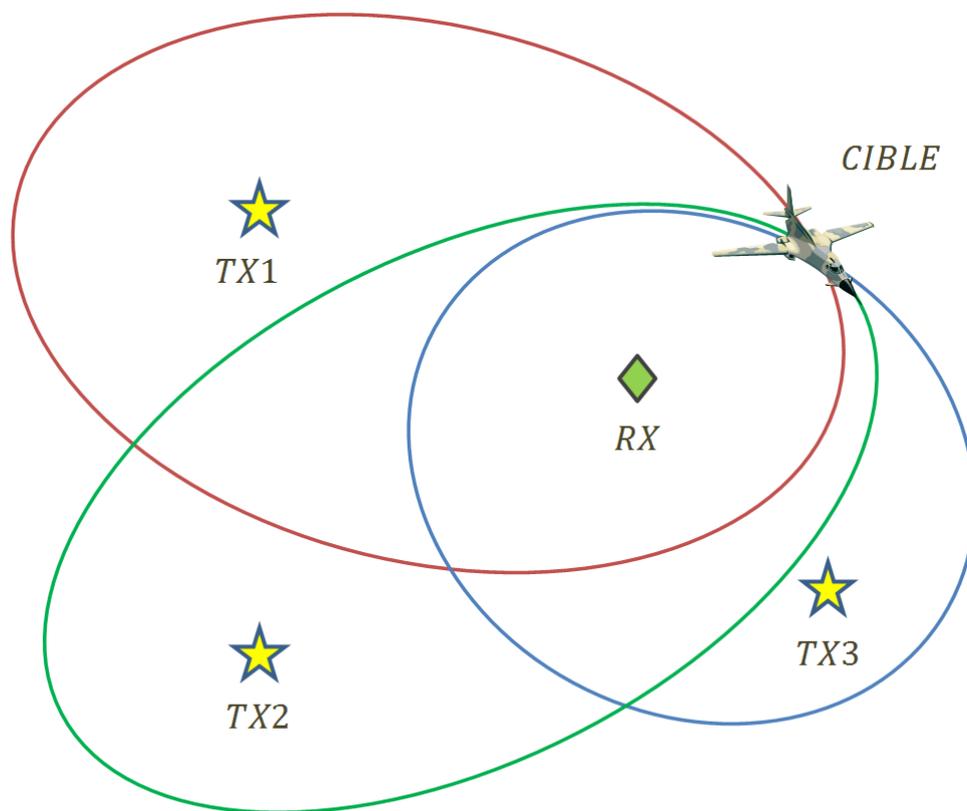


FIGURE 2.10 – Localisation d'une cible à partir l'intersection des trois ellipsoïdes

### 2.10.2 Localisation d'une cible à partir d'un Radar Multistatique

Avec une configuration multistatique, on peut déterminer le vecteur position et le vecteur vitesse de la cible. En fait la connaissance des retards (voire distances bistatiques) subis par les signaux de trois émetteurs en se réfléchissant sur la cible permettent de déterminer les coordonnées de la position de cette cible (intersection de trois ellipsoïdes de révolution, comme la figure 2.10 le montre).

De plus si on connaît les décalages Doppler des signaux, on peut déterminer explicitement les composantes du vecteur vitesse de la cible. On peut noter que si l'on dispose d'au moins trois géométries différentes de couples émetteur-récepteur non liés, alors le vecteur vitesse obtenu est un vecteur vitesse absolu et non un simple vecteur radial comme dans un radar monostatique ou bistatique.

# Estimation d'état

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>3.2</b>	<b>Processus Markovien et modèle d'état</b>	<b>20</b>
<b>3.3</b>	<b>Équations du filtrage non-linéaire</b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>Algorithmes Bayésiens récursifs exacts</b>	<b>23</b>
3.4.1	Modèle de Markov caché (HMM)	23
3.4.2	Filtre de Kalman (KF)	24
<b>3.5</b>	<b>Algorithmes Bayésiens récursifs sous-optimaux</b>	<b>27</b>
3.5.1	Filtre de Kalman étendu (EKF)	27
3.5.2	Filtre de Kalman sans parfum (UKF)	28
3.5.3	Filtre à somme de gaussiennes (GSF)	29
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>

---

## 3.1 Introduction

L'estimation d'un signal utile  $\mathcal{X}(t)$  appelé l'état à partir de l'observation d'un autre signal,  $\mathcal{Y}(t)$ , avec lequel le premier est corrélé, est un des problèmes les plus importants en traitement de signal et en automatique. Dans de nombreuses applications, le signal  $\mathcal{Y}(t)$  est une version bruitée ou distordue de  $\mathcal{X}(t)$ , mais il peut aussi être un signal différent qui contient de l'information sur  $\mathcal{X}(t)$ . Pour illustrer notre propos, donnons un exemple : *Dans l'application Radar, les observations bruitées de la distance bi-statique et du décalage fréquentiel obtenues après seuillage par le filtrage adapté peuvent être utilisées en conjonction avec une observation angulaire pour estimer la position et la vitesse radiale de la cible.*

Dans ce chapitre, nous commençons par exposer le problème du filtrage dans le cas général. Différentes approches classiques utilisées pour résoudre ce genre de problème sont décrites en distinguant les approches exactes et les approches sous-optimales. Nous montrerons aussi les performances et les limitations de ces méthodes.

En 1949, N. Wiener pose explicitement le problème du filtrage d'un signal stochastique. Afin de résoudre ce problème, il propose une méthode basée sur des filtres linéaires minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le signal estimé et le signal utile. Le filtre de Wiener [Wiener 1966] est valable dans le cas où les signaux considérés  $\mathcal{X}(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  sont conjointement stationnaires. On constate que le filtre de Wiener est un cas particulier du filtre de Kalman [Kalman 1960] qui utilise une approche temporelle dans le but de déterminer un système optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur. Le filtre de Kalman permet de traiter directement le cas d'un système non stationnaire multi-variable.

Le problème de l'estimation consiste à déterminer des estimateurs des variables d'un système dynamique (variables d'états) sujet à des perturbations et observées partiellement. Dans ce cadre

on peut classer les problèmes d'estimation suivant la quantité d'information disponible. Supposons qu'on cherche à estimer l'état  $\mathcal{X}$  du système à l'instant  $t$  à partir d'observations bruitées  $\mathcal{Y}(t_0, t_f)$  disponibles entre les instants  $t_0$  (instant initial) et  $t_f$  (instant final). Selon l'intervalle d'observation (i.e. la valeur de  $t_f$ ), le problème porte un nom différent :

- jusqu'à l'instant  $t_f = t$ , il s'agit d'un problème de filtrage.
- jusqu'à un instant antérieur  $t_f < t$ , il s'agit d'un problème de prédiction.
- jusqu'à un instant postérieur  $t_f > t$ , il s'agit d'un problème de lissage.

## 3.2 Processus Markovien et modèle d'état

Le concept d'état est très important pour des systèmes déterministes. Cela signifie que l'état  $\mathcal{X}(t)$  d'un système à un instant  $t$ , et l'équation d'état qui lui est associée, contiennent toute l'information sur le passé qui est nécessaire pour prédire la réponse future du système. En d'autres mots, l'état contient l'ensemble des conditions initiales qui sont nécessaires pour calculer la réponse de ce système. Pour des processus stochastiques, on peut définir un état lorsque le processus est Markovien.

Par définition, le processus stochastique  $\mathcal{X}(t)$  est markovien si pour tout  $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ , la densité de probabilité conditionnelle a la propriété suivante :

$$p_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}(t) | \mathcal{X}(t_1), \mathcal{X}(t_2), \dots, \mathcal{X}(t_k)) = p_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}(t) | \mathcal{X}(t_k))$$

Donc, même si plusieurs valeurs antérieures de la réalisation du processus sont connues, seule la plus récente apporte de l'information sur la densité de probabilité de  $\mathcal{X}(t)$ . Si de plus,  $\mathcal{X}(t)$  est une séquence aléatoire qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, on parle d'une chaîne de Markov. Dans cette étude on s'intéresse aux processus de Markov non-linéaires en temps discret  $(\mathcal{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Leurs équations d'état sont décrites par le modèle suivant :

$$\mathcal{X}_k = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \quad (3.1)$$

où  $k \in \mathbb{N}$  est l'instant temporel,  $\mathcal{X}_k$  est un processus stochastique vectoriel,  $\mathcal{X}_k \in \mathbb{R}^{N_x}$ ,  $\mathbf{f}$  est une application de  $\mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$  et où  $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{N_x}$  est un vecteur de bruit blanc de moyenne nulle indépendant de  $\mathcal{X}_k$ , et de matrice de covariance  $Q$ , telle que :

$$E[\varepsilon_k \varepsilon_j^T] = Q \delta_{kj} \quad (3.2)$$

Notons que  $Q$  est une matrice symétrique semi-définie positive. Dans le modèle Markovien 3.1,  $\mathcal{X}_k$  est l'état du système, la fonction  $\mathbf{f}$  est la fonction d'état et  $\varepsilon_k$  est souvent appelé le bruit de processus.

Afin d'analyser un système dynamique, outre l'équation d'état donnée par 3.1 qui décrit l'évolution de l'état en fonction du temps, on a besoin d'un autre modèle reliant le processus stochastique d'observations  $\mathcal{Y}_k$  au processus Markovien d'état  $\mathcal{X}_k$ . Ce modèle est décrit par l'équation de mesure suivante :

$$\mathcal{Y}_k = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k) + \eta_k \quad (3.3)$$

où  $\mathcal{Y}_k$  est un processus stochastique vectoriel,  $\mathcal{Y}_k \in \mathbb{R}^{N_y}$ ,  $\mathbf{h}$  est une application de  $\mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$  et où  $\eta_k \in \mathbb{R}^{N_y}$  est un vecteur de bruit blanc de moyenne nulle indépendant de  $\mathcal{Y}_k$ , non corrélé au bruit de processus. Sa matrice de covariance  $R$  est telle que :

$$E[\eta_k \eta_j^T] = R \delta_{kj} \quad (3.4)$$

Notons que  $R$  est une matrice symétrique semi-définie positive. Dans le modèle 3.3,  $\mathcal{Y}_k$  est l'observation du système, la fonction  $\mathbf{h}$  est la fonction de mesure et  $\eta_k$  est souvent appelé le bruit de mesure. Les variables  $\mathcal{Y}_k$  sont supposées indépendantes conditionnellement au processus d'état et leur distribution dépend uniquement de l'état courant. Un tel processus est alors appelé processus à représentation Markovienne. Les propriétés d'indépendance conditionnelle des mesures et la structure markovienne du processus d'état conduisent à une structure de chaîne de Markov cachée, illustrée dans la figure 3.1.

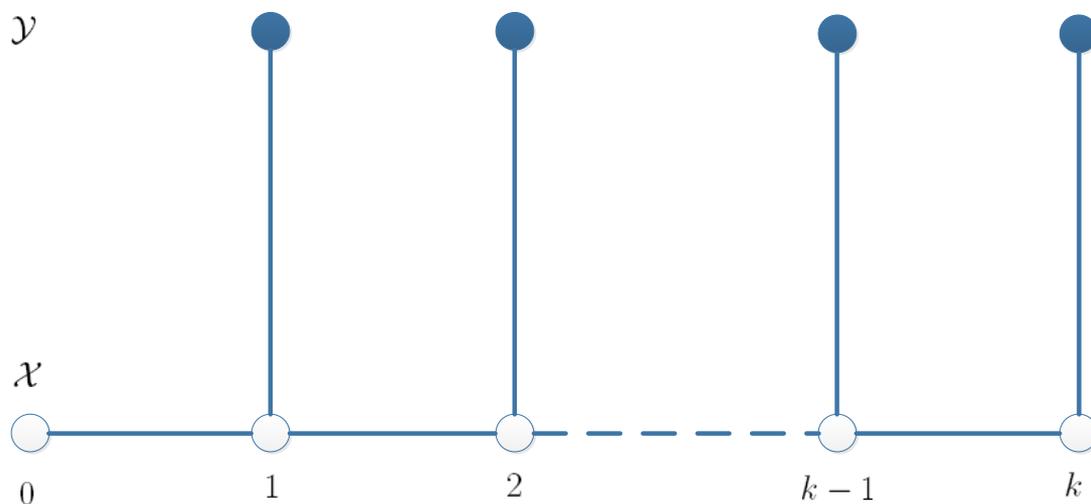


FIGURE 3.1 – Graphe de dépendance de la chaîne de Markov cachée du premier ordre constituée par les processus  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$

Le modèle décrit par les relations 3.1 et 3.3 est appelé le modèle d'état. Pour que ce modèle décrive complètement la densité de probabilité de  $\mathcal{X}_k$  pour tout  $k \geq 0$  et la densité de probabilité de  $\mathcal{Y}_k$  pour tout  $k > 0$ , il faut encore donner une information sur l'état initial  $\mathcal{X}_0$ , sur la densité de probabilité du bruit  $\varepsilon_k$  et la densité de probabilité du bruit  $\eta_k$ . Ces densités sont considérées comme gaussiennes dans de nombreux cas. Si on se limite à la connaissance des moments d'ordre 1 et 2 du processus  $\mathcal{X}_k$  (moyenne, fonction de covariance, densité spectrale) il suffit de donner ces moments pour  $\mathcal{X}_0$ . La moyenne et la fonction de covariance de  $\mathcal{Y}_k$  s'obtiennent facilement à partir de celles de  $\mathcal{X}_k$ . La figure 3.2 donne une illustration du modèle d'état en dimensions finies.

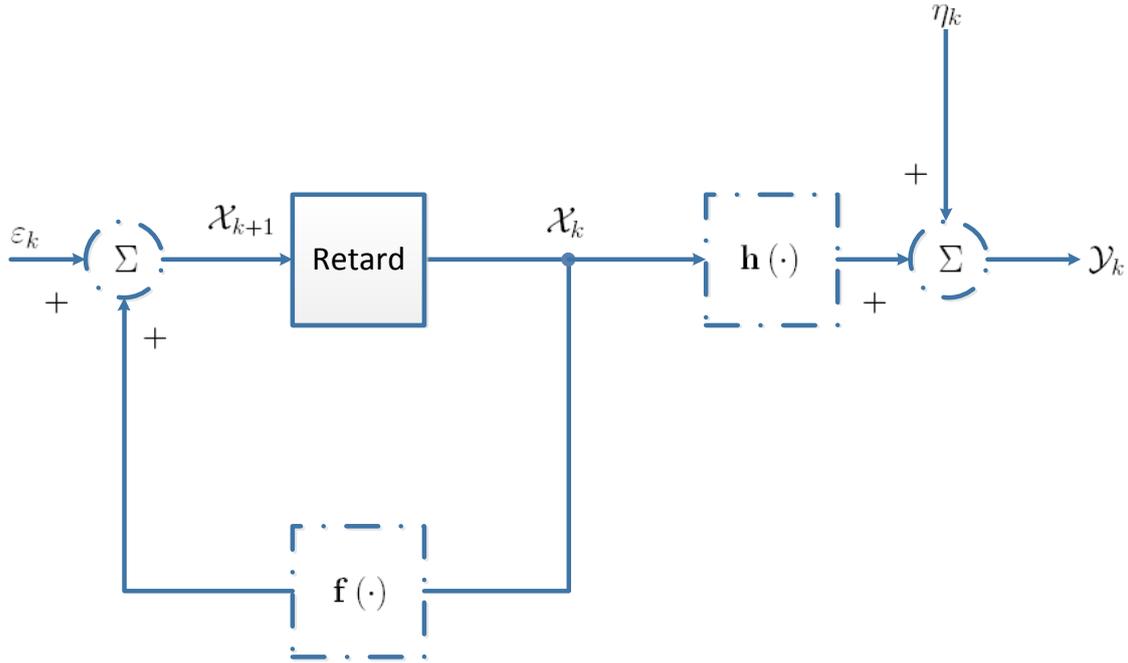


FIGURE 3.2 – Représentation schématique du modèle d'état

### 3.3 Équations du filtrage non-linéaire

On cherche des estimations filtrées de  $\mathcal{X}_k$  en se basant sur la séquence de toutes les mesures disponibles  $\mathcal{Y}_{1:k} = \{\mathcal{Y}_i, i = 1, \dots, k\}$  jusqu'à l'instant  $k$ . En adoptant classiquement une approche bayésienne, le problème est de quantifier récursivement un degré de confiance sur l'état  $\mathcal{X}_k$  à l'instant  $k$ , étant donné les observations  $\mathcal{Y}_{1:k}$ . Ainsi, il est nécessaire de construire la loi a posteriori  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$ . La densité de probabilité initiale du vecteur d'état est  $p(\mathcal{X}_0)$ . Ainsi, en principe, la densité de probabilité  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  peut s'obtenir récursivement en deux phases : la prédiction et la correction.

On suppose que la densité désirée  $p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  à l'instant  $k-1$  est connue. La phase de prédiction implique l'utilisation du modèle d'état décrit par la relation 3.1 pour obtenir la densité de prédiction à l'instant  $k$  via la formule des probabilités totales :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_{k-1}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \quad (3.5)$$

Si  $\mathcal{X}_k$  est un processus Markovien du premier ordre, alors on a :  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1})$ , et la densité de prédiction sera donnée par l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_{k-1}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \quad (3.6)$$

Notons que le modèle probabiliste d'évolution d'état, appelé la densité de transition et notée  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1})$ , est définie par l'équation d'état 3.1 et les statistiques connues de  $\varepsilon_k$ , soit :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) = p_\varepsilon(\mathcal{X}_k - \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1})) \quad (3.7)$$

A l'instant  $k$ , quand la mesure  $\mathcal{Y}_k$  sera disponible, la phase de correction (mise-à-jour) aura lieu. Cela exige une mise à jour de la densité de prédiction selon la loi de Bayes conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k}$  afin d'obtenir la loi a posteriori à l'instant  $k$  :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \quad (3.8)$$

La relation 3.6 donne la prédiction récursive bayésienne et la relation 3.8 donne le filtrage récursif bayésien.  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est appelée la vraisemblance conditionnelle. Notons que pour une observation modélisée par l'équation 3.3, la vraisemblance conditionnelle est donnée par  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k)$ , et elle est définie par les statistiques connues de  $\eta_k$ ,

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) = p_\eta(\mathcal{Y}_k - \mathbf{h}(\mathcal{X}_k)) \quad (3.9)$$

De plus  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est donnée par formule des probabilités totales :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_k} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_k \quad (3.10)$$

Dans le cas où les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  sont linéaires et les densités de probabilité des bruits  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont gaussiennes, le filtre de Kalman donne la solution optimale au problème. Un filtre de Kalman étendu peut résoudre ce problème, dans le cas non-linéaire en linéarisant les équations des systèmes, tout en conservant l'hypothèse gaussienne. Le filtre de Kalman étendu est un filtre sous-optimal surtout pour une densité multimodale. Une extension naturelle consiste à utiliser une approche à somme de gaussiennes dans le cas non linéaire lorsque le bruit de processus et le bruit de mesure ont pour loi de probabilité un mélange de gaussiennes. Il existe par ailleurs des approches numériques tel que le filtrage particulaire (FP) qui donne une bonne approximation de la solution optimale au problème du filtrage bayésien dans le cas non-linéaire, non gaussien quand le nombre de particules couvrant l'espace d'état tend vers l'infini.

## 3.4 Algorithmes Bayésiens récursifs exacts

### 3.4.1 Modèle de Markov caché (HMM)

Il existe toujours une solution conceptuelle au problème de filtrage bayésien récursif. Malheureusement, le processus en deux étapes représenté par 3.6 et 3.8 n'admet pas, en général, une solution analytique. Cependant, si  $\mathcal{X}_k$  appartient à un espace d'état qui est à la fois discret et fini, on obtient un modèle de Markov caché (Hidden Markov Model (HMM) en anglais). Les intégrales dans 3.6 et 3.8 deviennent des sommes simples à calculer. Plus précisément, si l'espace d'état, noté  $\Omega$  et de cardinal  $N$ , est donnée par  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , l'équation de prédiction devient :

$$Pr(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \sum_{j=1}^N Pr(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{X}_{k-1} = x_j) Pr(\mathcal{X}_{k-1} = x_j | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \quad (3.11)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, N$ . Le terme  $Pr(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{X}_{k-1} = x_j)$  est un élément de la matrice Markovienne de transition. De la même manière, on peut simplifier l'équation de correction comme suit :

$$Pr(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k = x_i) p(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\sum_{j=1}^N p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k = x_j) Pr(\mathcal{X}_k = j | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \quad (3.12)$$

Ainsi, la récursivité dans les équations 3.11 et 3.12 ne requiert que la capacité d'évaluer les probabilités de transition  $Pr(\mathcal{X}_k = x_i | \mathcal{X}_{k-1} = x_j)$  et la fonction de vraisemblance  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k = x_i)$ . Ce type de filtres est largement utilisé dans la reconnaissance vocale. Bien que les filtres HMM aient révolutionné ce domaine, ils sont seulement applicables pour des espaces d'état discrets, ou pouvant être raisonnablement approximatés en tant que discrets. Pour notre application, cette hypothèse n'est pas valide. Dans la prochaine section, nous présentons un autre algorithme récursif bayésien exact, qui s'applique pour des espaces d'état continus.

### 3.4.2 Filtre de Kalman (KF)

Le modèle d'état est supposé linéaire, avec un bruit de processus additif gaussien, et l'observation est une fonction linéaire de l'état entachée d'un bruit de mesure additif gaussien :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k = F_k \mathcal{X}_{k-1} + \varepsilon_k \\ \mathcal{Y}_k = H_k \mathcal{X}_k + \eta_k \end{cases} \quad (3.13)$$

où

- $F_k$ , de dimension  $(N_x, N_x)$  et  $H_k$ , de dimension  $(N_y, N_x)$  sont des matrices déterministes et connues.
- Les bruits de processus et d'observation  $\varepsilon_k$  et  $\eta_k$  sont des bruits blancs gaussiens de matrices de covariance respectives  $Q_k$  et  $R_k$ . Ces bruits sont mutuellement indépendants et indépendants de la condition initiale  $\mathcal{X}_0$ .
- la loi initiale  $p(\mathcal{X}_0)$  est gaussienne de moyenne  $E[\mathcal{X}_0] = \mathcal{X}_{0|0}$  et de matrice de covariance  $P_{0|0}$ .

Avec les hypothèses mentionnées, on montre que le couple  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est gaussien et la loi a posteriori  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  est gaussienne. Cette dernière densité à l'instant  $k$  est représentée par :

- sa moyenne :  $\mathcal{X}_{k|k} = E[\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}]$
- sa matrice de covariance  $P_{k|k} = E[(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k})(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k})^T | \mathcal{Y}_{1:k}]$

Ces paramètres sont calculés de manière récursive suivant les étapes de prédiction et de correction du filtre Kalman. On note  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  une distribution gaussienne de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ . De même, la densité de probabilité en une valeur  $x$  est notée par  $\mathcal{N}(x, \mu, \Sigma)$ . Ainsi, avec l'hypothèse gaussienne du filtre de Kalman, on peut écrire  $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ ,  $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$  et  $\mathcal{X}_0 \sim \mathcal{N}(\mathcal{X}_{0|0}, P_{0|0})$ . Supposons que l'estimation est faite à l'instant  $k-1$  alors les paramètres  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$  et  $P_{k-1|k-1}$  sont connus et la loi a posteriori à l'instant  $k-1$  est de la forme :

$$p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \quad (3.14)$$

A partir de l'équation d'état dans 3.13 et de la distribution gaussienne du bruit  $\varepsilon_k$ , la densité de transition est gaussienne et donnée par :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, F_k \mathcal{X}_{k-1}, Q_k) \quad (3.15)$$

La prédiction récursive bayésienne représentée par la relation 3.6 donne :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_{k-1}} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, F_k \mathcal{X}_{k-1}, Q_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \quad (3.16)$$

L'intégrale représentée par l'équation 3.16 peut se calculer de la manière suivante [Tanizaki 1996] :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \triangleq \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, F_k \mathcal{X}_{k-1|k-1}, F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k) \equiv \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (3.17)$$

Ainsi les équations de prédiction sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k-1} = F_k \mathcal{X}_{k-1|k-1} \\ P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans l'étape de correction, l'équation 3.8 est calculée de la manière suivante :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\int_{\mathcal{X}_k} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_k} \quad (3.19)$$

A partir de l'équation d'observation dans 3.13 et de la distribution gaussienne du bruit  $\eta_k$ , la vraisemblance conditionnelle s'écrit :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) = \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, H_k \mathcal{X}_k, R_k) \quad (3.20)$$

Ainsi, la loi a posteriori sera donnée par :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{\mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, H_k \mathcal{X}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1})}{\int_{\mathcal{X}_k} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, H_k \mathcal{X}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) d\mathcal{X}_k} \quad (3.21)$$

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{\mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}, G_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}), P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1})}{\mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}, G_k)} \quad (3.22)$$

Enfin :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}), P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1}) \equiv \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k}, P_{k|k}) \quad (3.23)$$

où  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est définie par sa moyenne  $\mathcal{Y}_{k|k-1}$  et sa matrice de covariance  $G_k$  :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_{k|k-1} = H_k \mathcal{X}_{k|k-1} \\ G_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \end{cases} \quad (3.24)$$

et le gain de Kalman est donné par :

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T G_k^{-1} \quad (3.25)$$

Ainsi les équations de correction sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k} = \mathcal{X}_{k|k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}) \\ P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \end{cases} \quad (3.26)$$

Notons que le filtre fut développé par Kalman en 1960 pour le cas discret [Kalman 1960], et repris en 1961 par Kalman et Bucy pour le cas continu [Kalman 1961]. Version moderne et probabiliste de la méthode des moindres carrés, le filtre de Kalman optimise également le critère du maximum de vraisemblance. Le filtre de Kalman est, également, la projection du processus d'état sur l'espace des mesures de bases orthonormale constituée par les innovations  $[\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}]$  comme démontré par Anderson et Moore [Anderson 1979]. Il est utile de mentionner que la plupart des problèmes de poursuite en radar passif sont assurés par un filtre de Kalman ou un filtre de Kalman étendu. Dans le cas où les matrices  $F_k$  et  $H_k$  dépendent des observations passées, le modèle est dit "conditionnellement gaussien". Le processus  $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k)$  n'est pas un processus gaussien mais les lois conditionnelles  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1})$  et  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k)$  restent gaussiennes et le filtre de Kalman fonctionne toujours.

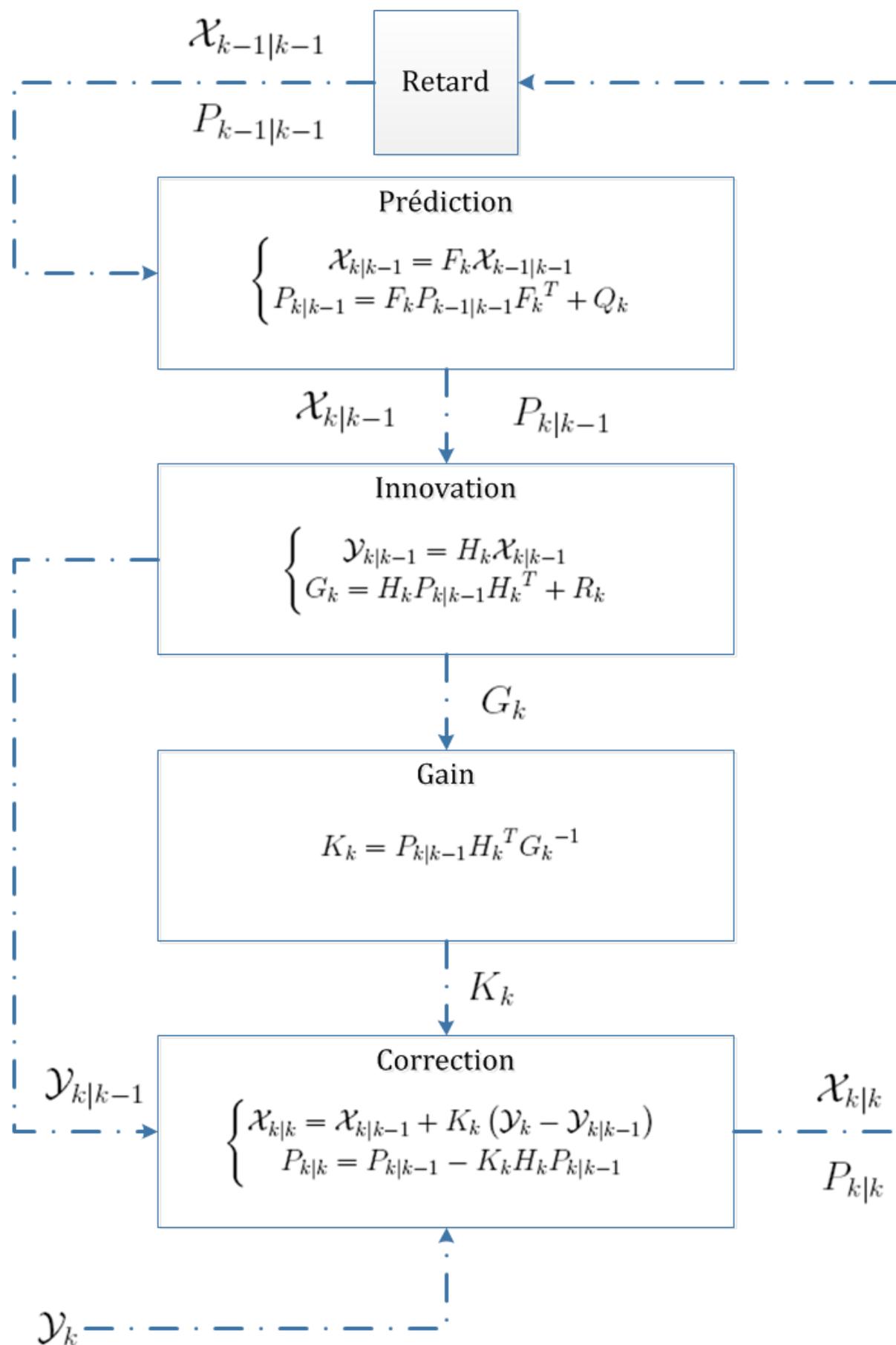


FIGURE 3.3 – Algorithme du filtre de Kalman

## 3.5 Algorithmes Bayésiens récursifs sous-optimaux

### 3.5.1 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Certains filtres bayésiens sous-optimaux tombent dans la catégorie des filtres utilisant une approximation à une gaussienne unique. Tous les filtres de cette classe, approximent la vraie densité a posteriori comme une distribution gaussienne. Le filtre le plus populaire dans cette classe est le filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter (EKF) en anglais). Le filtre de Kalman étendu utilise une linéarisation de la fonction dynamique du système et de la fonction de mesure en utilisant un développement en série de Taylor du premier ordre. Pour cette raison l'EKF est un filtre non-linéaire du premier ordre. L'hypothèse gaussienne est conservée. Afin de résoudre le problème du filtrage, l'équation d'état est linéarisée autour  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) \approx \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}) + \tilde{F}_k (\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}) \quad (3.27)$$

et l'équation de mesure est linéarisée autour  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{h}(\mathcal{X}_k) \approx \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}) + \tilde{H}_k (\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}) \quad (3.28)$$

où  $\tilde{F}_k$  et  $\tilde{H}_k$  sont les matrices jacobiniennes,

$$\tilde{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \right|_{\mathcal{X}=\mathcal{X}_{k-1|k-1}} \quad (3.29)$$

$$\tilde{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \right|_{\mathcal{X}=\mathcal{X}_{k|k-1}} \quad (3.30)$$

Les équations de prédiction de l'estimé de l'état  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  et de sa matrice de covariance  $P_{k|k-1}$ , à l'instant  $k$ , deviennent :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}) \\ P_{k|k-1} = \tilde{F}_k P_{k-1|k-1} \tilde{F}_k^T + Q_k \end{cases} \quad (3.31)$$

Les équations de correction deviennent :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k} = \mathcal{X}_{k|k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1})) \\ P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k \tilde{H}_k P_{k|k-1} \end{cases} \quad (3.32)$$

où le gain de Kalman est donné par :

$$K_k = P_{k|k-1} \tilde{H}_k^T G_k^{-1} \quad (3.33)$$

et la matrice de covariance de l'innovation est donnée par :

$$G_k = \tilde{H}_k P_{k|k-1} \tilde{H}_k^T + R_k \quad (3.34)$$

Pour un filtre de Kalman linéaire, on remarque que les matrices de covariance  $(P_{k|k})_{k \geq 0}$ ,  $(P_{k|k-1})_{k \geq 0}$  et le gain  $(K_k)_{k \geq 0}$  ne dépendent pas des observations  $(\mathcal{Y}_k)_{k \geq 1}$ . On peut donc les pré-calculer afin de diminuer la quantité de calculs à effectuer en temps réel. Par contre, dans le cas d'un filtre de Kalman étendu, les matrices de covariance et de gain ne peuvent plus être calculées hors ligne car  $\tilde{H}_k$  et  $\tilde{F}_k$  sont fonction de l'état courant et de l'état prédit estimé.

### 3.5.2 Filtre de Kalman sans parfum (UKF)

Récemment, on a montré qu'approximer une densité de probabilité est plus facile qu'approximer une fonction arbitraire non linéaire. Ainsi, au lieu de linéariser les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$ , la transformation **UT** (Unscented Transform en anglais) génère d'une façon déterministe un ensemble de points dont la moyenne et la covariance sont égales à  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$  et  $P_{k-1|k-1}$ , respectivement. Les fonctions non-linéaires sont ensuite appliquées à chacun de ces points, les points obtenus servant à calculer la moyenne et la matrice covariance prédite. Le filtre récursif utilisant les points générés par la transformation **UT** est introduit par Julier et Uhlmann [Julier 1996, Julier 2000]. Ce filtre est appelé filtre de Kalman "sans parfum" (Unscented Kalman Filter (**UKF**) en anglais).

Supposons que la densité a posteriori à l'instant  $k - 1$  soit gaussienne :  $p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$ . Cette densité est représentée par un ensemble de  $(2N_{\mathcal{X}} + 1)$  points  $\mathcal{X}_{k-1}^i$  et leurs poids  $w_{k-1}^i$ ,  $i = 0, \dots, 2N_{\mathcal{X}}$ , où  $N_{\mathcal{X}}$  est la dimension de l'espace d'état. Ces points sont soigneusement choisis selon la transformation **UT** de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k-1}^0 = \mathcal{X}_{k-1|k-1} & w_{k-1}^0 = \frac{\kappa}{N_{\mathcal{X}} + \kappa} & i = 0 \\ \mathcal{X}_{k-1}^i = \mathcal{X}_{k-1|k-1} + \left( \sqrt{(N_{\mathcal{X}} + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_i & w_{k-1}^i = \frac{1}{2(N_{\mathcal{X}} + \kappa)} & i = 1, \dots, N_{\mathcal{X}} \\ \mathcal{X}_{k-1}^i = \mathcal{X}_{k-1|k-1} - \left( \sqrt{(N_{\mathcal{X}} + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_i & w_{k-1}^i = \frac{1}{2(N_{\mathcal{X}} + \kappa)} & i = N_{\mathcal{X}} + 1, \dots, 2N_{\mathcal{X}} \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $\kappa$  est un facteur d'échelle choisi tel que  $\kappa + N_{\mathcal{X}} \neq 0$ , et  $\left( \sqrt{(N_{\mathcal{X}} + \kappa) P_{k-1|k-1}} \right)_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $L$  racine carrée de  $(N_{\mathcal{X}} + \kappa) P_{k-1|k-1}$ , telle que  $(N_{\mathcal{X}} + \kappa) P_{k-1|k-1} = L^T L$ . Ces sigma-points se propagent grâce à la vraie équation dynamique non-linéaire du système,

$$\mathcal{X}_{k|k-1}^i = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^i) \quad (3.36)$$

La loi prédite, supposée gaussienne et représentée par l'ensemble pondéré de points  $\{\mathcal{X}_{k|k-1}^i\}$ , aura comme moyenne  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  et comme matrice de covariance  $P_{k|k-1}$  :

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2N_{\mathcal{X}}} w_{k-1}^i \cdot \mathcal{X}_{k|k-1}^i \quad (3.37)$$

$$P_{k|k-1} = Q_k + \sum_{i=0}^{2N_{\mathcal{X}}} w_{k-1}^i \cdot \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^i - \mathcal{X}_{k|k-1} \right) \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^i - \mathcal{X}_{k|k-1} \right)^T \quad (3.38)$$

A leur tour, les points  $\mathcal{X}_{k|k-1}^i$  se propagent grâce à la vraie équation de mesure non-linéaire. Ainsi, l'observation prédite est donnée par :

$$\mathcal{Y}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2N_{\mathcal{X}}} w_{k-1}^i \cdot \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) \quad (3.39)$$

La matrice de covariance de l'innovation est donnée par :

$$G_k = R_k + \sum_{i=0}^{2N_{\mathcal{X}}} w_{k-1}^i \left( \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) - \mathcal{Y}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) - \mathcal{Y}_{k|k-1} \right)^T \quad (3.40)$$

La moyenne et la variance de correction sont données par les équations suivantes :

$$\mathcal{X}_{k|k} = \mathcal{X}_{k|k-1} + K_k (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}) \quad (3.41)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k G_k K_k^T \quad (3.42)$$

où le gain de Kalman est donné par :

$$K_k = P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} G_k^{-1} \quad (3.43)$$

et la matrice de covariance  $P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$  est donnée par :

$$P_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \sum_{i=0}^{2N_{\mathcal{X}}} w_{k-1}^i \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^i - \mathcal{X}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{h} \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^i \right) - \mathcal{Y}_{k|k-1} \right)^T \quad (3.44)$$

Le filtre de Kalman sans parfum a deux avantages par rapport à l'EKF. Tout d'abord, l'estimation de la moyenne et de la covariance prévue par l'UKF est correcte jusqu'au second ordre, alors que, pour l'EKF, elle n'est correcte que jusqu'au premier ordre. Deuxièmement, l'UKF n'utilise pas de matrices jacobiniennes ( $\tilde{F}_k$  ou  $\tilde{H}_k$ ), ce qui évite d'avoir à calculer des dérivées partielles.

### 3.5.3 Filtre à somme de gaussiennes (GSF)

Dans tous les filtres précédents, on a approximé la densité a posteriori en utilisant une distribution gaussienne unique. Pour des applications telles que la poursuite et la détection multi-cible, la densité a posteriori est multimodale. Dans ces cas, l'approximation gaussienne réduit la quantité d'information disponible d'une manière significative. En fait, pour les densités multimodales, l'EKF fonctionne davantage comme un estimateur du maximum de vraisemblance qu'un estimateur à variance minimale, et l'estimation de la moyenne conditionnelle peut suivre l'un des modes de la vraie densité a posteriori en négligeant les autres modes significatifs. Pour modéliser une loi multimodale, l'approche à une gaussienne unique sera généralisée à une approche à somme de fonctions de base. Le filtre à somme de gaussiennes (GSF en anglais) est une extension naturelle de l'approximation gaussienne du filtre de Kalman, à une somme pondérée de fonctions gaussiennes afin d'approximer la distribution a posteriori d'un état complexe. La loi a posteriori sera donc décrite par un mélange gaussien [Alspach 1972, Ito 2000, Anderson 1979, Sayadi 2005, Amara 2005]. Le filtre à somme de gaussiennes utilise une batterie d'EKF qui fonctionnent parallèlement, chaque EKF correspondant à une composante du mélange gaussien.

Supposons que la densité a posteriori à l'instant  $k - 1$  s'écrive comme une somme de gaussiennes pondérées par  $\{w_{k-1}^i\}_{i=1}^N$  :

$$p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \sum_{i=0}^N w_{k-1}^i \mathcal{N} \left( \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i \right) \quad (3.45)$$

où l' $i^{\text{ème}}$  atome gaussien est pondéré par  $w_{k-1}^i$  et représenté par sa moyenne  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i$  et sa matrice de covariance  $P_{k-1|k-1}^i$ . La prédiction bayésienne récursive donne la densité prédite  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  à partir de l'équation 3.6 :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_{k-1}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \\ &= \int_{\mathcal{X}_{k-1}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N} \left( \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i \right) d\mathcal{X}_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En permutant l'ordre de l'intégrale et de la somme dans l'équation 3.46 on peut écrire :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \int_{\mathcal{X}_{k-1}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i) d\mathcal{X}_{k-1} \quad (3.47)$$

L'hypothèse gaussienne sur le bruit de processus nous permet d'écrire la loi de transition donnée par 3.7 de la manière suivante :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}), Q_k) \quad (3.48)$$

En linéarisant la fonction  $\mathbf{f}(\cdot)$  autour  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i$  comme la relation 3.27 montre, on peut écrire :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \approx \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i) + \tilde{F}_k^i (\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i), Q_k) \quad (3.49)$$

ainsi la densité prédite s'écrit :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \int_{\mathcal{X}_{k-1}} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i) + \tilde{F}_k^i (\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i), Q_k) \\ &\quad \times \mathcal{N}(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i) d\mathcal{X}_{k-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

où le jacobien  $\tilde{F}_k^i = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial x} \Big|_{x=\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i}$ . L'intégrale représentée par la relation 3.50 admet une solution analytique donnée par :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i), \tilde{F}_k^{iT} P_{k-1|k-1}^i \tilde{F}_k^{iT} + Q_k) \\ &= \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i) \end{aligned} \quad (3.51)$$

où la moyenne prédite et la matrice de covariance prédite de la  $i^{\text{ème}}$  gaussienne sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k-1}^i = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^i) \\ P_{k|k-1}^i = \tilde{F}_k^i P_{k-1|k-1}^i \tilde{F}_k^{iT} + Q_k \end{cases} \quad (3.52)$$

Afin de déterminer la densité a posteriori  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  à l'instant  $k$ , il faut passer à l'étape de correction donnée par la relation 3.8 :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\int_{\mathcal{X}_k} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_k} \\ &\approx \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)}{\int_{\mathcal{X}_k} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i) d\mathcal{X}_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)}{\int_{\mathcal{X}_k} \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i) d\mathcal{X}_k} \end{aligned} \quad (3.53)$$

L'hypothèse gaussienne sur le bruit de mesure nous permet d'écrire la vraisemblance conditionnelle des observations donnée par 3.9 de la manière suivante :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) = \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k-1}), R_k) \quad (3.54)$$

En linéarisant la fonction  $\mathbf{h}(\cdot)$  autour  $\mathcal{X}_{k|k-1}^i$  comme la relation 3.28 le montre, on peut écrire :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{k|k-1}^i) \approx \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) + \tilde{H}_k^i (\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^i), R_k) \quad (3.55)$$

où le jacobien  $\tilde{H}_k^i = \frac{\partial \mathbf{h}(x)}{\partial x} |_{x=\mathcal{X}_{k|k-1}^i}$ . La relation 3.53 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) \\ \approx & \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) + \tilde{H}_k^i (\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^i), R_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)}{\int_{\mathcal{X}_k} \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) + \tilde{H}_k^i (\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^i), R_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i) d\mathcal{X}_k} \\ = & \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i), P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i)}{\int_{\mathcal{X}_k} \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i), P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i) d\mathcal{X}_k} \\ & (3.56) \\ = & \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i) \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i), P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i)}{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i)} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i)}{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i)} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i), P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i) \quad (3.58)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^N w_k^i \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k}^i, P_{k|k}^i) \quad (3.59)$$

le dénominateur de l'équation 3.57 est obtenu en permutant l'ordre de l'intégrale et de la somme, et en tenant compte de  $\int_{\mathcal{X}_k} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i), P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i) d\mathcal{X}_k = 1$ . La moyenne  $\mathcal{Y}_{k|k-1}^i$  et la matrice de covariance  $G_k^i$  pour la  $i^{\text{ème}}$  gaussienne ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_{k|k-1}^i = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}^i) \\ G_k^i = \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i \tilde{H}_k^{iT} + R_k \end{cases} \quad (3.60)$$

et le gain de Kalman correspondant est donné par :

$$K_k^i = P_{k|k-1}^i \tilde{H}_k^{iT} G_k^{i-1} \quad (3.61)$$

Ainsi les équations de correction pour la  $i^{\text{ème}}$  gaussienne sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k}^i = \mathcal{X}_{k|k-1}^i + K_k^i (\mathcal{Y}_k - \mathcal{Y}_{k|k-1}^i) \\ P_{k|k}^i = P_{k|k-1}^i - K_k^i \tilde{H}_k^i P_{k|k-1}^i \end{cases} \quad (3.62)$$

Tous les filtres parallèles utilisent la même observation pour estimer la moyenne  $\mathcal{X}_{k|k}^i$  et la matrice de covariance  $P_{k|k}^i$  de l' $i^{\text{ème}}$  atome gaussien. De plus, les poids à l'instant courant  $w_k^i$  sont mis à jour à partir des poids estimés à l'étape précédente  $w_{k-1}^i$  selon la relation suivante :

$$w_k^i = \frac{w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i)}{\sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k|k-1}^i, G_k^i)} \quad (3.63)$$

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème du filtrage non-linéaire concernant l'estimation d'un processus markovien observé à partir d'un processus conditionnellement indépendant. On a ensuite décrit les différents approches analytiques pour résoudre ce problème. Il existe des méthodes optimales : pour un espace discret et fini (**HMM**), pour un modèle linéaire et gaussien (**KF**). Par ailleurs, il existe aussi des méthodes sous optimales : L'**EKF** utilise une linéarisation d'un système gaussien et donne de très bons résultats dans le cadre des systèmes faiblement non-linéaires ; l'**UKF** échantillonne le système non-linéaire d'une manière déterministe et donne une petite amélioration dans le cas d'un système fortement non-linéaire ; le **GSF** remplace l'hypothèse gaussienne par une somme de gaussienne tout en gardant les approximations de linéarisation introduites par l'**EKF**. Il donne de très bons résultats dans le cadre des systèmes faiblement non-linéaires faisant apparaître une multimodalité. Une nouvelle catégorie de méthodes sera présentée dans le chapitre suivant : les méthodes séquentielles de Monte Carlo. Elles sont mieux adaptées au problème du filtrage non-linéaire non-gaussien. Nous appliquerons ce type de méthodes, appelées filtrage particulaire (ou méthode séquentielle de Monte Carlo (**MSMC**)) aux problèmes de pistage pour un radar passif.

# Méthodes de Monte-Carlo pour le filtrage bayésien

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Mise en oeuvre</b>	<b>34</b>
<b>4.3</b>	<b>Intégration de Monte-Carlo (MC)</b>	<b>34</b>
4.3.1	Échantillonnage d'importance	35
<b>4.4</b>	<b>Échantillonnage d'importance séquentiel (SIS)</b>	<b>37</b>
4.4.1	Dégénérescence de l'algorithme SIS	39
<b>4.5</b>	<b>Ré-échantillonnage</b>	<b>40</b>
<b>4.6</b>	<b>Filtrage Particulaire Générique</b>	<b>42</b>
<b>4.7</b>	<b>Choix de la densité d'importance</b>	<b>42</b>
<b>4.8</b>	<b>Versions du Filtrage Particulaire</b>	<b>44</b>
4.8.1	Filtre particulaire SIR	44
4.8.2	Filtre Particulaire Rao-Blackwellisé (RBPF)	45
<b>4.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté l'approche Bayésienne pour le filtrage, qui consiste à estimer un processus de Markov observé à travers une équation d'observation. Afin d'éviter de stocker la séquence passée de mesures  $\mathcal{Y}_{1:k}$ , nous avons obtenu une solution récursive donnée par les équations 3.6 et 3.8. La connaissance de cette récursion est la solution du filtrage non linéaire optimal qui existe si  $\mathcal{X}_{1:k}$  est markovien et  $\mathcal{Y}_{1:k}$  est indépendant conditionnellement à  $\mathcal{X}_{1:k}$ . Toutefois, pour obtenir des estimateurs implantables, il faut se trouver dans l'un des cas suivants : (1) des espaces d'état discrets et finis (2) le système est linéaire et gaussien. Malheureusement, dès que l'équation d'état et/ou l'équation d'observation sont non linéaires et/ou non gaussiens, le calcul analytique des intégrales et des multiplications donnant les estimateurs est en général impossible. Dans le cas d'un espace d'état continu et d'un modèle d'état non linéaire, nous avons ensuite examiné plusieurs extensions sous-optimales de l'algorithme de filtrage de Kalman. Nous avons constaté qu'ils souffrent de certains inconvénients : ils approchent  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  par une distribution gaussienne et supposent le cas échéant la connaissance des matrices jacobiennes  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  et  $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$ . La première hypothèse est inappropriée pour les applications de poursuite impliquant des fouillis ou plusieurs cibles, car dans ce cas la densité  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  peut être multimodale. De plus, les hypothèses de linéarisation locale implicites dans les méthodes mettant en jeu des calculs de jacobiens ne sont pas valides à faible rapport signal sur bruit et en présence d'une forte dynamique.

Au delà de tous les filtres présentés dans le chapitre précédent, il existe des approches numériques radicalement différentes : parmi celles-ci, les techniques dites de Monte-Carlo (MC) (filtrage particulière). Dans ce chapitre, nous allons explorer les approches du filtrage bayésien récursif basées sur l'échantillonnage de Monte-Carlo. Nous constatons que leur souplesse leur permet de réussir là où le filtre de Kalman et ses dérivés ont échoué.

## 4.2 Mise en oeuvre

L'idée d'utiliser les méthodes Monte-Carlo pour résoudre des problèmes de physique date de la seconde guerre mondiale. Pendant le projet Manhattan, qui devait conduire à la réalisation de la première bombe atomique, von Neumann, Stanislaw, Fermi et Ulam utilisèrent la simulation Monte Carlo. Pour simuler les réactions nucléaires, ils décidèrent de déterminer aléatoirement ce qui allait se passer pendant la collision d'un neutron avec un atome (s'il était absorbé ou s'il rebondissait). Cette méthode a nécessité la mise au point d'un générateur aléatoire pour simuler la réaction en chaîne. Cette méthode tient son nom "Monte Carlo" du célèbre quartier de la principauté de Monaco dans lequel se situe le casino. Depuis, cette technique s'est généralisée dans divers domaines : physique, sciences économiques, sondages, etc...

Les idées de bases de l'estimation séquentielle de Monte Carlo (SMC), sous la forme d'un échantillonnage d'importance récursif sont introduites en statistique dès les années 50 [Hammersley 1954]. Bien que, ces idées ont continué d'être exploitées d'une façon sporadique dans les années 60 [Handschin 1969] et 70 [Akashi 1977], elles ont été largement négligées et ignorées. Cela était probablement dû à la puissance modeste de calcul disponible à cette époque, et au fait que toutes les premières implémentations ont été basées sur un échantillonnage d'importance séquentiel simple, qui, comme nous allons le décrire plus tard, dégénère au fil du temps. La contribution majeure au développement de la méthode de SMC a été l'inclusion de l'étape de ré-échantillonnage, qui, couplé avec des ordinateurs toujours plus rapides, a donné son utilité pratique au filtrage particulière [Salut 1989]. Le filtrage particulière a été redécouvert et étudié par de nombreux auteurs depuis le début des années 90 [Gordon 1993, Doucet 2001]. Une présentation unifiée est faite dans la suite de ce chapitre en utilisant la notion d'échantillonnage d'importance.

## 4.3 Intégration de Monte-Carlo (MC)

Dans cette section, nous fournissons les connaissances théoriques nécessaires à l'algorithme de filtrage particulière introduit plus tard dans ce chapitre. Le principe de Monte-Carlo consiste à utiliser des échantillons discrets obtenus par simulation pour approximer une distribution de probabilité que l'on ne sait pas calculer analytiquement. Par exemple, cet échantillonnage pourra être utilisé pour approximer les intégrales de grande dimension apparaissant dans le filtrage récursif bayésien en 3.6. Une fois la densité a posteriori  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  connue, on peut évaluer des estimateurs de la forme

$$I(\mathbf{f}) = \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\mathcal{X}) | \mathcal{Y}] = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{f}(\mathcal{X}) p(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) d\mathcal{X} \quad (4.1)$$

L'approche de Monte-Carlo pour évaluer cette intégrale consiste à utiliser des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi a posteriori  $\{\mathcal{X}^{(i)} : i = 1, \dots, N_p\}$  pour calculer des moyennes empiriques :

$$I_{N_p}(\mathbf{f}) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}(\mathcal{X}^{(i)}) \quad (4.2)$$

La validité de cette approximation est garantie par la loi forte des grands nombres (SLLN), qui énonce que la moyenne de différentes variables aléatoires d'espérance commune et de variance finie, converge presque sûrement vers leur espérance commune :

$$\lim_{N_p \rightarrow \infty} I_{N_p}(\mathbf{f}) = I(\mathbf{f}) \quad (4.3)$$

de plus, si la variance  $\sigma_{\mathbf{f}}^2$  de  $\mathbf{f}(\mathcal{X})$  par rapport à  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  :

$$\sigma_{\mathbf{f}}^2 = \int (\mathbf{f}(\mathcal{X}) - \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\mathcal{X}) | \mathcal{Y}])^2 p(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) d\mathcal{X} \quad (4.4)$$

est finie, le théorème de limite central s'applique et l'erreur d'estimation converge en distribution :

$$\sqrt{N_p} (I_{N_p}(\mathbf{f}) - I(\mathbf{f})) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\mathbf{f}}^2) \quad (4.5)$$

L'erreur de l'approximation MC qui échantillonne aléatoirement l'espace d'état,  $e = I_{N_p}(\mathbf{f}) - I(\mathbf{f})$  est de l'ordre  $\mathcal{O}(N_p^{-\frac{1}{2}})$ . Contrairement aux intégrales numériques déterministes, ce taux de convergence de l'estimation est indépendant de la dimension de l'espace d'état sur lequel on intègre. Cette propriété utile et importante est due au choix des échantillons  $\{\mathcal{X}^{(i)}\}$ , parce qu'ils viennent essentiellement des régions de l'espace d'état les plus potentielles pour le résultat d'intégration. Malheureusement, le nombre de tirages  $N_p$  n'est qu'une partie du problème dans 4.5 ;  $\sigma_{\mathbf{f}}^2$  peut augmenter considérablement quand la dimension de l'espace d'état croît.

Étant une technique d'échantillonnage aléatoire, l'approximation MC est intéressante dès que l'on sait générer des échantillons indépendants  $\{\mathcal{X}^{(i)}\}$  selon la loi a posteriori  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$ . Malheureusement, il est rarement qu'on sache échantillonner directement. Une densité  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  non-standard, à plusieurs variables ou connue à une constante de proportionnalité près, peut présenter une difficulté considérable pour l'intégration MC. En revanche, il existe plusieurs approches indirectes qu'on utilise typiquement. Ces méthodes utilisent une autre densité arbitraire  $q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$ , dite densité instrumentale (*proposal distribution* en anglais), dont le support contient celui de  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  et selon laquelle il est facile d'échantillonner.

La méthode d'échantillonnage d'acceptation/rejet proposée par [von Neumann 1951] consiste à accepter ou rejeter les échantillons générées selon la loi  $q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  avec une probabilité d'acceptation bien déterminée. Voir [Devroye 1986] pour plus d'informations. En filtrage particulière [Ristic 2004], cette méthode a l'inconvénient d'être très coûteuse en temps de calcul, puisqu'on risque de rejeter beaucoup d'échantillons. Cette méthode est typiquement inefficace et présume la connaissance de  $\max_{\mathcal{X}} \{p(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) / q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})\}$ . L'algorithme Metropolis-Hasting est une autre méthode d'échantillonnage proposée par Metropolis et al. [Metropolis 1953] et étendue plus tard par Hastings [Hastings 1970]. Cette méthode consiste à simuler une chaîne de Markov dans l'espace d'état de façon à ce que la distribution stationnaire de la chaîne soit  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$ . L'algorithme Metropolis-Hasting est inapproprié pour plusieurs applications en temps réel. Cet algorithme nécessite une longue période d'établissement (*burn-in period*) afin que la chaîne atteigne sa distribution stationnaire. De plus, il génère des échantillons dépendants.

### 4.3.1 Échantillonnage d'importance

Dans cette section on va introduire et détailler une troisième approche pour l'intégration de Monte Carlo, la méthode d'échantillonnage d'importance [Marshall 1956], et on va démontrer qu'elle est bien adaptée à notre application. Comme on l'a précisé précédemment, l'échantillonnage idéal se fait directement selon la loi a posteriori afin d'estimer  $\mathbb{E}_p(\mathbf{f}(\mathcal{X}) | \mathcal{Y})$  en utilisant

4.1. On suppose qu'on sait simuler seulement selon une densité d'importance  $q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$ . Une pondération correcte de l'ensemble des échantillons rend l'estimation MC encore possible. La densité d'importance doit avoir un support contenant celui de loi a posteriori c-à-d cette densité satisfait la condition suivante :

$$p(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) > 0 \Rightarrow q(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) > 0, \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N_x} \quad (4.6)$$

La condition 4.6 est nécessaire pour que la théorie de l'échantillonnage d'importance soit valide et dans ce cas l'intégrale donnée par 4.1 peut s'exprimer de la manière suivante :

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{f}(\mathcal{X}) p(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) d\mathcal{X} = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{f}(\mathcal{X}) \frac{p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})}{q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})} q(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) d\mathcal{X} \quad (4.7)$$

en assurant que

$$\frac{p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})}{q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})}$$

admet une borne supérieure. Une estimation Monte-Carlo de  $I(\mathbf{f})$  consiste à générer  $N_p \gg 1$  échantillons indépendants  $\{\mathcal{X}^{(i)}; i = 1, \dots, N_p\}$  selon la densité  $q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  et former la somme pondérée :

$$I_{N_p}(\mathbf{f}) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}(\mathcal{X}^{(i)}) \tilde{w}^{(i)} \quad (4.8)$$

où les poids d'importance  $\tilde{w}^{(i)}$  sont donnés par :

$$\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\mathcal{X}^{(i)} | \mathcal{Y})}{q(\mathcal{X}^{(i)} | \mathcal{Y})} \quad (4.9)$$

Si le facteur de normalisation de la densité désirée  $p(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  est inconnu, on a besoin de normaliser les poids d'importance. Dans ce cas on estime  $I(\mathbf{f})$  comme suit :

$$I_{N_p}(\mathbf{f}) = \frac{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}(\mathcal{X}^{(i)}) \tilde{w}^{(i)}}{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{w}^{(i)}} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}(\mathcal{X}^{(i)}) w^{(i)} \quad (4.10)$$

où les poids d'importance normalisés sont donnés par :

$$w^{(i)} = \frac{\tilde{w}^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_p} \tilde{w}^{(j)}} \quad (4.11)$$

Avant de poursuivre, il est utile de réécrire l'approximation  $I_{N_p}(\mathbf{f})$  donnée par l'échantillonnage d'importance d'une façon légèrement différente. En se basant sur les propriétés de la fonction de Dirac, on peut exprimer l'équation 4.10 de la manière suivante :

$$I_{N_p}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{N_p} \left( \int \mathbf{f}(\mathcal{X}) \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}^{(i)}) d\mathcal{X} \right) w^{(i)} = \int \mathbf{f}(\mathcal{X}) \sum_{i=1}^{N_p} \left( w^{(i)} \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}^{(i)}) \right) d\mathcal{X} \quad (4.12)$$

Ainsi, on définit une mesure aléatoire  $p_{N_p}(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  de la densité a posteriori, générée par les échantillons  $\{\mathcal{X}^{(i)}\}$  tirés selon la loi  $q(\mathcal{X} | \mathcal{Y})$  comme suit :

$$p_{N_p}(\mathcal{X} | \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^{N_p} w^{(i)} \delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}^{(i)}) \quad (4.13)$$

On a donc une approximation pondérée discrète de la vraie densité a posteriori.

## 4.4 Échantillonnage d'importance séquentiel (SIS)

L'échantillonnage d'importance est une méthode générale d'intégration MC que l'on applique afin de résoudre récursivement le problème du filtrage non-linéaire cité dans le chapitre 3. L'algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel (SIS en anglais) est une méthode de Monte Carlo qui forme la base de la majorité des filtres MC séquentiels développés durant la dernière décennie. Cette approche séquentielle de Monte-Carlo a d'abord été popularisée sous le nom de filtrage particulaire (FP) [Salut 1989], mais est également mentionnée dans la littérature sous nom de "Bootstrap filtering" [Gordon 1993] et "condensation algorithm" [MacCormick 2000]. Il s'agit d'une technique implémentant un filtre bayésien récursif par les approximations de Monte Carlo. L'idée clé est de représenter la densité a posteriori par un ensemble d'échantillons aléatoires pondérés afin de calculer les estimateurs désirés. Quand le nombre d'échantillons devient très grand, cette approximation de Monte-Carlo devient une représentation équivalente à la description fonctionnelle usuelle de la densité a posteriori, et le filtre SIS approxime l'estimateur bayésien optimal.

On note  $\left\{ \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}$  une mesure aléatoire caractérisant la densité conjointe a posteriori  $p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$ , où  $w_k^{(i)}$  est le poids d'importance normalisé correspondant à l'échantillon  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)}$ . La densité conjointe a posteriori à l'instant  $k$  est alors approximée par :

$$p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_p} w_k^{(i)} \delta(\mathcal{X}_{0:k} - \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}) \quad (4.14)$$

Les poids normalisés  $w_k^{(i)}$  sont choisis en utilisant le principe d'échantillonnage d'importance décrit dans le paragraphe précédent. Si les échantillons  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)}$  sont générés selon une densité d'importance  $q(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$ , l'équation 4.9 nous permet d'écrire :

$$\tilde{w}^{(i)} \propto \frac{p(\mathcal{X}_{0:k}^{(i)} | \mathcal{Y}_{1:k})}{q(\mathcal{X}_{0:k}^{(i)} | \mathcal{Y}_{1:k})} \quad (4.15)$$

Ainsi, jusqu'à la réception de l'observation courante  $\mathcal{Y}_k$ , l'extension séquentielle de l'algorithme d'échantillonnage d'importance doit transformer la mesure aléatoire  $\left\{ \mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}$  en  $\left\{ \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}$ . Si la loi d'importance se factorise de la manière suivante :

$$q(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) = q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{0:k-1}, \mathcal{Y}_{1:k}) \times q(\mathcal{X}_{0:k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \quad (4.16)$$

un échantillon  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)} \sim q(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$  est obtenu alors à partir la procédure simple suivante :

1. Générer  $\mathcal{X}_k^{(i)} \sim q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{0:k-1}, \mathcal{Y}_{1:k})$ .
2. Effectuer la concaténation  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)} = \left\{ \mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathcal{X}_k^{(i)} \right\}$ .

Sans la factorisation dans 4.16, on aurait besoin d'échantillonner l'état précédent entier  $\mathcal{X}_{0:k}$  afin d'avoir des échantillons selon la loi  $q(\mathcal{X}_{0:k}^{(i)} | \mathcal{Y}_{1:k})$ . Il est clair que lorsque  $k$  croît, cela devient infaisable pour toute application en temps réel. Cependant, avec la factorisation dans 4.16, il suffit de générer  $N_p$  vecteurs d'état à chaque nouvelle mesure. Cette factorisation de la distribution d'importance simplifie aussi la forme des poids d'importance. Afin de calculer l'équation de mise

à jour des poids, la densité  $p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$  est exprimée selon la loi de Bayes :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{0:k-1}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_{0:k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour un processus markovien  $\mathcal{X}$ , observé à partir du processus  $\mathcal{Y}$ , l'équation 4.17 s'écrit :

$$p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} p(\mathcal{X}_{0:k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \quad (4.18)$$

En substituant 4.16 et 4.18 dans 4.15, on montre que l'équation de mise à jour des poids s'écrit :

$$\begin{aligned} w_k^{(i)} &\propto \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) p(\mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)} | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) q(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k}) q(\mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)} | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\ &\propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) q(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k})} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si les observations sont indépendants conditionnellement au processus d'état et leur distribution ne dépendent que de l'état courant on peut écrire  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) \triangleq p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k^{(i)})$ . En plus, si  $q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{0:k-1}, \mathcal{Y}_{1:k}) = q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_k)$ , alors la densité d'importance ne dépend que de  $\mathcal{X}_{k-1}$  et  $\mathcal{Y}_k$ . Cela a son importance dans le cas commun où il suffit d'établir une estimation filtrée à partir de la densité a posteriori marginale  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  à chaque instant. Dans un tel scénario, on a besoin de stocker  $\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}$  seulement, et ainsi on peut négliger le trajectoire  $\mathcal{X}_{0:k-2}$  et l'historique des observations  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$ . Les poids modifiés sont alors donnés par :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k^{(i)}) p(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)} \quad (4.20)$$

Puisque la densité d'importance  $q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_k)$  n'est plus conditionnée aux observations  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$ , l'équation 4.20 est convenable pour une implémentation récursive. L'algorithme SIS approxime la densité a posteriori marginale de la manière suivante :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_p} w_k^{(i)} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_k^{(i)}) \quad (4.21)$$

où  $\{w_k^{(i)}\}$  sont les poids d'importance normalisés donnés par 4.20. On peut montrer que lorsque  $N_p \rightarrow \infty$ , l'approximation 4.21 se rapproche de la vraie densité a posteriori. Le filtrage par l'algorithme SIS consiste à propager récursivement les poids d'importance  $w_k^{(i)}$  et les points de support  $\mathcal{X}_k^{(i)}$  à l'arrivée de chaque observation. Un pseudo-code de cet algorithme est donné dans la table 4.1.

Cet algorithme général et simple forme la base de la plupart des filtres particulières. Le choix de la densité d'importance joue un rôle critique.

---


$$\left[ \left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right] = SIS \left[ \left\{ \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}, \mathcal{Y}_k \right]$$

- POUR  $i = 1 : N_p$ 
  - Générer  $\mathcal{X}_k^{(i)} \sim q \left( \mathcal{X}_k \mid \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k \right)$
  - Calculer les poids d'importance à une constante de normalisation près à partir de 4.20 :

$$\tilde{w}_k^{(i)} \propto \tilde{w}_{k-1}^{(i)} \frac{p \left( \mathcal{Y}_k \mid \mathcal{X}_k^{(i)} \right) p \left( \mathcal{X}_k^{(i)} \mid \mathcal{X}_{k-1}^{(i)} \right)}{q \left( \mathcal{X}_k^{(i)} \mid \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k \right)}$$

- FIN POUR
  - Calculer la somme totale des poids :  $t = SOMME \left[ \left\{ \tilde{w}_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right]$
  - POUR  $i = 1 : N_p$ 
    - Normaliser :  $w_k^{(i)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i)}}{t}$
  - FIN POUR
- 

TABLE 4.1 – Pseudo-code du filtrage par SIS

#### 4.4.1 Dégénérescence de l'algorithme SIS

Dans le paragraphe précédent on a présenté l'extension séquentielle de l'algorithme d'échantillonnage d'importance. Bien que l'algorithme SIS représente une approche statistique viable pour approximer le filtrage bayésien récursif, il présente un défaut significatif venant du fait que la variance inconditionnelle des vrais poids d'importance ne peut pas décroître avec le temps. L'accroissement de variance a un effet indésirable sur la pertinence et conduit à un problème grave : le phénomène de dégénérescence. Pratiquement, la dégénérescence se traduit par le fait qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, toutes les particules sauf une, vont avoir des poids normalisés négligeables. Cela est néfaste pour deux raisons : Premièrement, la qualité de la mesure aléatoire  $\sum_{i=1}^{N_p} w_k^{(i)} \delta \left( \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_k^{(i)} \right)$  peut se dégrader plus les poids deviennent égaux à zéro. Deuxièmement, d'un point de vue calculatoire, il est inefficace d'étendre les ressources en calculant des points de support et leurs poids  $\left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}$ , dont la contribution aux estimations produites par le filtre sont négligeables. Il est impossible d'empêcher la dégénérescence dans un filtre SIS, ce qui a été pendant longtemps le point d'achoppement de méthodes MC séquentielles. Une mesure convenable de la dégénérescence de l'algorithme est la taille effective d'échantillons  $N_{eff}$  introduite par Kong et Liu [Kong 1994] et estimée de la manière suivante :

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_p} \left( w_k^{(i)} \right)^2} \quad (4.22)$$

où  $w_k^{(i)}$  est le poids d'importance normalisé. Il est simple de vérifier que

$$1 \leq N_{eff} \leq N_p$$

avec ces deux cas extrêmes suivants : (1) si les poids sont uniformes,  $w_k^{(i)} = \frac{1}{N_p}$  alors  $N_{eff} = N_p$  ; et (2) si  $\exists j \in \{1, \dots, N_p\}$  tel que  $w_k^{(j)} = 1$  et  $w_k^{(i)} = 0$  pour tout  $i \neq j$ , alors  $N_{eff} = 1$ . Donc, une petite valeur de  $N_{eff}$  indique une dégénérescence sévère et vice versa. Ainsi,  $\hat{N}_{eff}$  est un indicateur efficace pour surveiller la dégénérescence de l'algorithme SIS. Après chaque mise à

jour de mesure,  $\hat{N}_{eff}$  est calculé et comparé à un certain seuil  $N_{Th}$ . Un ré-échantillonnage a lieu quand  $N_{eff}$  tombe au dessous du seuil  $N_{Th}$ .

Un autre critère de ré-échantillonnage a été proposé par Pham [Pham 2001]. Le critère est basé sur le calcul de l'entropie des poids :

$$\mathcal{E} = - \sum_{i=1}^{N_p} w_k^{(i)} \log_2 w_k^{(i)} \quad (4.23)$$

On montre que

$$0 \leq \mathcal{E} \leq \log_2 N_p.$$

Le critère vaut  $\log_2 N_p$  si tous les poids sont égaux ( $w_k^{(i)} = \frac{1}{N_p}$ ) et est nul si l'un des poids vaut 1 et tous les autres sont nuls. Le ré-échantillonnage n'est enclenché que si  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{Th}$ , avec  $\mathcal{E}_{Th}$  est un seuil fixé selon l'application. Dans le paragraphe suivant on va présenter l'étape du ré-échantillonnage afin de surmonter la dégénérescence des échantillons dans l'algorithme SIS.

## 4.5 Ré-échantillonnage

Le ré-échantillonnage est nécessaire dans l'algorithme SIS, chaque fois qu'une dégénérescence significative est observée. L'étape de ré-échantillonnage consiste à redistribuer les particules de manière à multiplier les particules lourdes pour remplacer les particules de poids faibles. Le ré-échantillonnage rend l'estimation plus pertinente ; cela est dû au fait qu'après redistribution, il existe plus de particules pour décrire la région pertinente de l'espace d'état. Cette étape est une fonction de la forme

$$\left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \longrightarrow \left\{ \mathcal{X}_k^{(i*)}, 1/N_p \right\}_{i=1}^{N_p} \quad (4.24)$$

Le nouvel ensemble d'échantillons est généré par  $N_p$  tirages indépendants selon l'approximation discrète de la densité  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  donnée par :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_p} w_k^{(i)} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_k^{(i)}) \quad (4.25)$$

de sorte que l'on a

$$Pr(\mathcal{X}_k^{(i*)} = \mathcal{X}_k^{(i)}) = w_k^{(i)} \quad (4.26)$$

Puisque l'échantillonnage se fait ( dans un sens approximatif ) selon la vraie densité a posteriori, les poids d'importance ré-échantillonnés sont uniformes, comme la relation 4.24 le montre. Ainsi, le ré-échantillonnage empêche la dégénérescence de l'algorithme SIS en construisant une nouvelle mesure aléatoire dont les points de support ont  $1/N_p$  comme poids.

Il existe différentes méthodes pour implémenter l'opération du ré-échantillonnage en respectant la relation 4.26. Définissons la variable aléatoire discrète  $N_k^{(i)}$  correspondant au nombre des fois que  $\mathcal{X}_k^{(i)}$  est sélectionné pendant le ré-échantillonnage. Ainsi,  $\sum_{i=1}^{N_p} N_k^{(i)} = N_p$ . On sait que  $\left\{ N_k^{(i)} \right\}$  obéit à une loi de probabilité multinomiale. En tant que tel, le ré-échantillonnage direct de la fonction de pondération  $\left\{ w_k^{(i)} \right\}$  va donner  $\mathbb{E} \left\{ N_k^{(i)} | w_k^{(i)} \right\} = N_p w_k^{(i)}$  et  $var \left\{ N_k^{(i)} | w_k^{(i)} \right\} = N_p w_k^{(i)} (1 - w_k^{(i)})$  pour chaque  $i$ . Cependant, comme il est mentionné dans [Liu 1998], il est préférable d'utiliser un ré-échantillonnage réduisant les variances  $var \left\{ N_k^{(i)} | w_k^{(i)} \right\}$ . Cela réduit, à son tour, la chance de la dégénérescence résultant de la sélection des états à poids négligeables. Une implémentation directe du ré-échantillonnage consisterait à générer  $N_p$  variables

aléatoires i.i.d. selon une loi uniforme, les trier dans un ordre croissant et les comparer à la somme cumulée des poids normalisés. Le meilleur algorithme de tri a une complexité de l'ordre  $\mathcal{O}(N_p \log N_p)$  et constitue une limitation majeure dans les applications pratiques. Dans le cadre de cette thèse, on va implémenter un algorithme connu sous le nom de "ré-échantillonnage systématique" [Noyer 1996, Kitagawa 1996]. Il est simple à implémenter, a une complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(N_p)$  et minimise la variance de MC. Le pseudo-code du ré-échantillonnage systématique est décrit dans le tableau 4.2. On note  $\{c_k^{(i)}\}_{i=1}^{N_p}$  la fonction cumulative de la densité discrète (fcd) correspondant aux poids normalisés,

$$c_k^{(i)} = \sum_{j=1}^i w_k^{(j)} \quad (4.27)$$

L'algorithme systématique consiste à générer des valeurs  $u_i$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  et à choisir  $i^* = \min_j \{j : c_k^{(j)} \geq u_i\}$ . Il est important de remarquer que le seul élément aléatoire dans l'algorithme du ré-échantillonnage systématique est la génération de  $u_1$  : les autres points de sélection  $\{u_i\}_{i=2}^{N_p}$  sont liés à  $u_1$  de façon déterministe.

Bien que le ré-échantillonnage atténue les effets de la dégénérescence, il introduit plusieurs nouveaux problèmes : premièrement, d'un point de vue pratique, le ré-échantillonnage limite la capacité de paralléliser l'algorithme SIS parce que tous les poids  $w_k^{(i^*)}$  doivent être combinés. Deuxièmement, d'un point de vue théorique, les échantillons  $\mathcal{X}_k^{(i^*)}$  ne seront pas statistiquement indépendants après le ré-échantillonnage. Troisièmement, les particules à poids élevés sont statistiquement sélectionnées plusieurs fois. Cela conduit à une perte de la diversité parmi les particules puisque la distribution obtenue contiendra de nombreux points répétés. Ce problème, connu comme l'appauvrissement d'échantillonnage, est sévère dans le cas d'un faible bruit de processus.

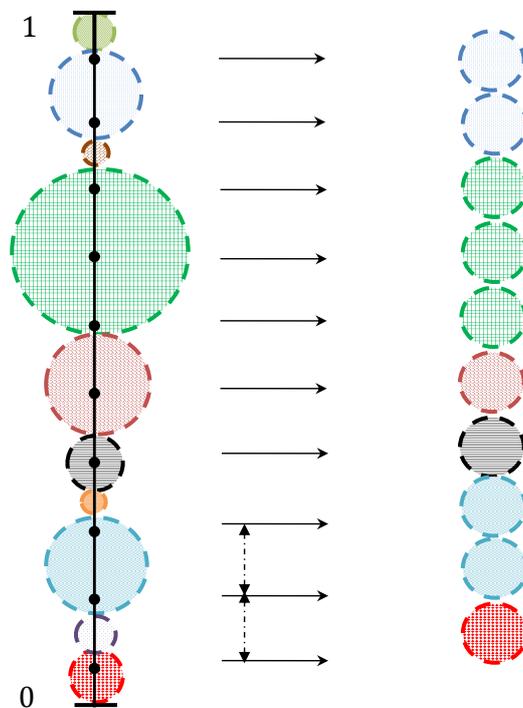


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du ré-échantillonnage systématique

---

$\left[ \left\{ \mathcal{X}_k^{(j*)}, w_k^{(j*)}, i^j \right\}_{i=1}^{N_p} \right] = REECHANTILLONAGE \left[ \left\{ \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right]$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Initialiser la fdc : <math>c_k^{(1)} = w_k^{(1)}</math></li> <li>• POUR <math>i = 2 : N_p</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Construire la fcd : <math>c_k^{(i)} = c_k^{(i-1)} + w_k^{(i)}</math></li> </ul> </li> <li>• FIN POUR</li> <li>• Commencer du bas de la fcd : <math>i = 1</math></li> <li>• Générer un point de départ : <math>u_1 \sim \mathbb{U}[0, N_p^{-1}]</math></li> <li>• POUR <math>j = 1 : N_p</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se déplacer le long de fdc : <math>u_j = u_1 + N_p^{-1}(j - 1)</math></li> <li>- TANT QUE <math>u_j \geq c_k^{(i)}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>i = i + 1</math></li> </ul> </li> <li>- FIN TANT QUE</li> <li>- Assigner une échantillon : <math>\mathcal{X}_k^{(j)} = \mathcal{X}_k^{(i)}</math></li> <li>- Assigner une échantillon : <math>w_k^{(j)} = N_p^{-1}</math></li> <li>- Assigner le parent : <math>i^j = i</math></li> </ul> </li> <li>• FIN POUR</li> </ul>	
---	--

---

TABLE 4.2 – Pseudo-code du ré-échantillonnage systématique

## 4.6 Filtrage Particulaire Générique

Avec  $\hat{N}_{eff}$  comme indicateur de la dégénérescence et le ré-échantillonnage systématique en tant que mesure corrective, nous pouvons maintenant définir une extension de l'algorithme SIS. La table 4.3 contient une description pseudo-code d'un algorithme qui intègre à la fois l'échantillonnage d'importance et le ré-échantillonnage. Cet algorithme est devenu de plus en plus populaire au cours de la dernière décennie et est connu sous le nom de filtrage particulaire. Le filtre particulaire approxime la distribution  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k})$  par un grand ensemble de  $N_p$  échantillons, dites particules,  $\left\{ \mathcal{X}_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}$ , chaque particule représente un état possible du système, et on assigne un poids  $w_k^{(i)}$  pour chaque particule. L'emplacement et le poids d'une particule reflètent la valeur de la densité de probabilité dans telle région de l'espace d'état. La première étape du filtrage particulaire est de prendre  $N_p$  échantillons de la distribution initiale. Pour déterminer l'emplacement de l'état à l'instant  $k$ , on génère  $N_p$  particules selon la densité d'importance  $q(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)$ . La mise à jour des poids d'importance courants se fait selon l'équation 4.20. Pour éviter la divergence du filtre, la fonction de ré-échantillonnage est indispensable. Elle consiste à redistribuer les particules de telle manière qu'on multiplie les particules lourdes pour remplacer les particules de poids faibles.

## 4.7 Choix de la densité d'importance

Le choix de la densité d'importance  $q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)$  est l'un des problèmes les plus critiques dans l'algorithme particulaire. Le bon fonctionnement de l'algorithme dépend fortement de ce choix. En effet, la méthode d'échantillonnage pondérée repose sur la génération de particules à partir de la densité d'importance, qui va permettre d'évaluer les poids dans un second temps. La densité optimale est choisie pour qu'elle minimise la variance de ces poids et satisfasse les conditions suivantes :

---


$$\left[ \left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right] = \text{FP} \left[ \left\{ \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}, \mathcal{Y}_k \right]$$

- Filtrage via SIS (table 4.1) :

$$\left[ \left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right] = \text{SIS} \left[ \left\{ \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p}, \mathcal{Y}_k \right]$$

- Calculer  $\hat{N}_{eff}$  en utilisant 4.22
- SI  $\hat{N}_{eff} < N_{th}$ 
  - Ré-échantillonner en utilisant l'algorithme dans la table 4.2 :

$$\left[ \left\{ \mathcal{X}_k^{(i)}, w_k^{(i)}, - \right\}_{i=1}^{N_p} \right] = \text{REECHANTILLONAGE} \left[ \left\{ \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \right\}_{i=1}^{N_p} \right]$$

- FIN SI
- 

TABLE 4.3 – Pseudo-code du filtre particulaire générique

- le support de la densité d'importance doit recouvrir le support de la densité conditionnelle.
- la densité d'importance doit tenir compte de l'observation courante.

On montre que la densité optimale est égale à [Doucet 2000] :

$$\begin{aligned} q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^i, \mathcal{Y}_k)_{opt} &= p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k) \\ &= \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)})} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Reprenons l'équation 4.20, on aura :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) \quad (4.29)$$

Ainsi, pour la densité d'importance optimale, le poids  $w_k^{(i)}$  est conditionnellement indépendant du tirage actuel de l'état courant. Ce poids peut être calculé (et éventuellement ré-échantillonné si nécessaire) avant que la particule correspondante ne se propage à l'instant  $k$ . Afin d'utiliser la densité d'importance optimale, il est indispensable de : (1) échantillonner selon  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)$ , une distribution qui peut être atypique, et (2) évaluer l'intégrale

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) = \int_{\mathcal{X}_k} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) d\mathcal{X}_k \quad (4.30)$$

une tâche qui peut être impossible à traiter analytiquement. D'une manière similaire à notre discussion sur les algorithmes bayésiens récurrents exacts dans la section 3.4, il existe deux cas où l'utilisation de la densité optimale est possible [Arulampalam 2002]. Le premier cas est lorsque l'espace d'état est fini discret. Dans ce cas, l'intégrale 4.30 devient une somme et l'échantillonnage à partir de 4.28 est possible. Le second cas est lorsque le système dynamique est couplé avec un bruit de processus gaussien additif et un équation de mesure linéaire. Avec ce modèle, l'intégrale 4.30 peut être calculée analytiquement, car les deux termes dans l'intégrale sont gaussiens. En

outre, parce que le processus de mesure est linéaire,  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)$  est également gaussienne et peut être échantillonnée. En général, ces évaluations analytiques ne sont pas possibles pour la densité d'importance optimale.

Outre les solutions optimales, il existe des choix sous-optimaux. Le choix sous-optimal très courant est de prendre la densité a priori de transition :

$$q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k) = p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) \quad (4.31)$$

dans ce cas l'observation courante n'est pas prise en compte. En substituant 4.31 dans 4.20, on obtient :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k^{(i)}) \quad (4.32)$$

Ce choix facilite l'implémentation de l'algorithme. Contrairement au cas d'une densité d'importance optimale, le poids  $w_k^{(i)}$  ne peut pas se calculer avant l'étape de prédiction.

## 4.8 Versions du Filtrage Particulaire

L'algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel présenté dans le paragraphe 4.4 forme la base pour la plupart de filtres particuliers développés plus tard. Les différentes versions sont dérivées de l'algorithme de SIS en choisissant judicieusement la densité d'importance et/ou modifiant l'étape de ré-échantillonnage. Une grande partie de la recherche dans le domaine est passée dans le développement des approximations de la distribution d'importance optimale (voir [Doucet 1998] pour un résumé). Certaines approches récentes introduisent le filtre particulaire auxiliaire (APF) [Pitt 1999] qui réalise l'étape d'échantillonnage à l'instant  $k-1$  en utilisant l'observation disponible à l'instant  $k$ , avant que les particules ne se propagent à l'instant  $k$ . De cette manière, l'APF intègre la mesure courante dans sa densité d'importance. La vraisemblance est utilisée pour sélectionner les échantillons précédents qui sont susceptibles de générer des échantillons actuels bien adaptés à l'observation. Musso et Oudjane ont proposé le filtre particulaire régularisé (RPF) [Musso 1998, Oudjane 2000]. Le RPF remplace la distribution empirique 4.21 par une densité lissée en remplaçant la fonction de dirac dans le filtre particulaire classique par un noyau vérifiant : (1) le noyau est symétrique par rapport aux différentes composantes du vecteur d'état, (2) le noyau est une fonction de densité de probabilité. Il existe également d'autres approximations basées sur la transformation "sans parfum" (UT) [van der Merwe 2000] et l'algorithme de Metropolis-Hastings [Gilks 2001, Hue 2002]. Par ailleurs, des techniques particulières déterministes (c'est à dire ne faisant pas appel à des tirages aléatoires de type Monte-Carlo) ont permis de réduire considérablement le nombre des particules nécessaires pour atteindre un certain niveau de performances pour des application de type télécommunications [BenSalem 2002] de type radar et GPS [Ziadi 2007] et de type communications aérospatiales, radar de veille/poursuite et sonar [Kazem 2008]. Dans le paragraphe suivant nous allons détailler le filtre particulaire SIR et le filtre particulaire Rao-Blackwellisé.

### 4.8.1 Filtre particulaire SIR

Le filtrage particulaire a été introduit dans [Salut 1989] et breveté dans [Salut 1994]. D'autres chercheurs ont développés des idées similaires sous le nom de "Bootstrap filter" [Gordon 1993] ou filtre du ré-échantillonnage d'importance séquentielle (Sequential Importance Resampling (SIR) en anglais).

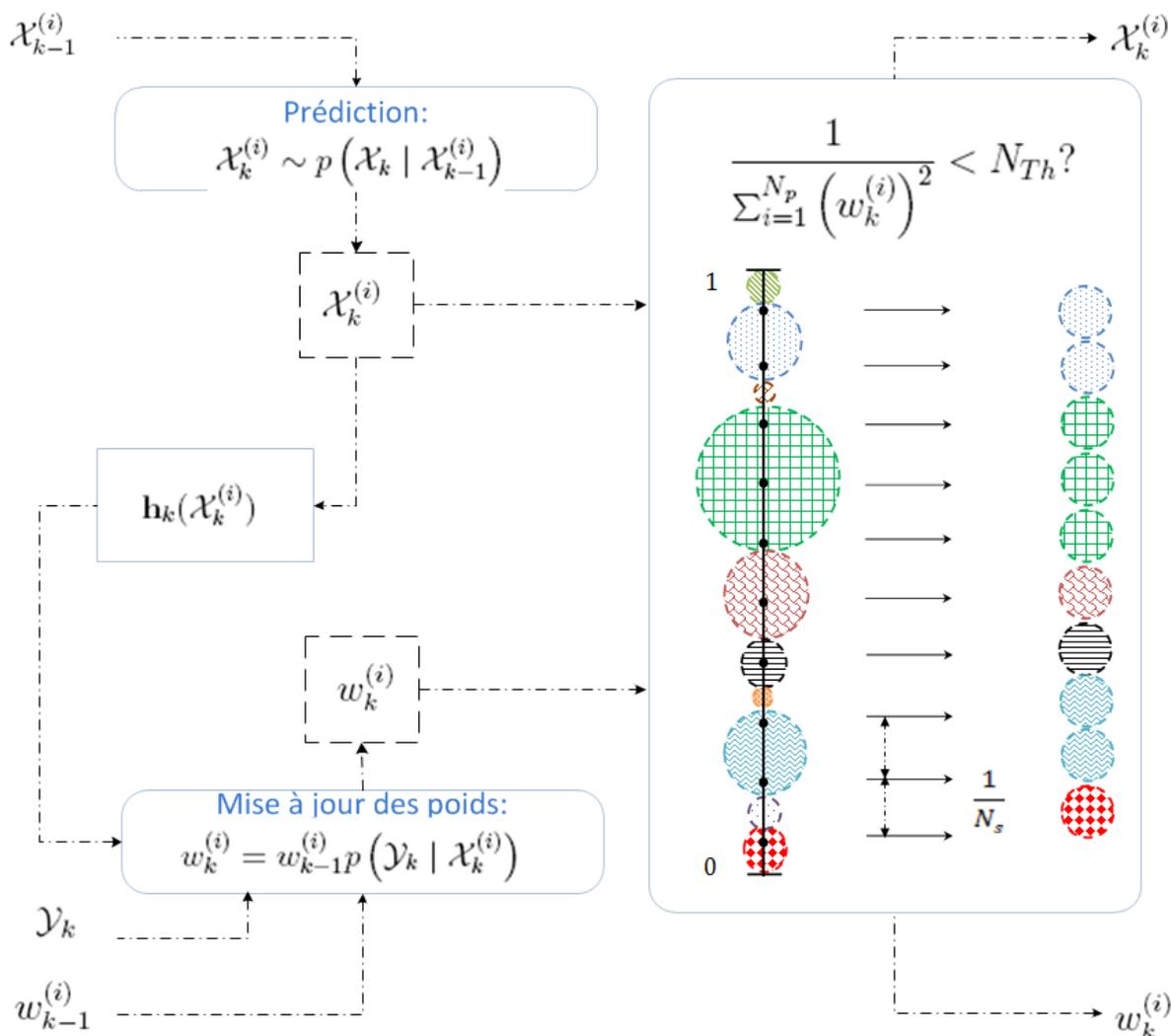


FIGURE 4.2 – Représentation schématique d'un filtre particulaire SIR

Les hypothèses nécessaires pour utiliser le filtre **SIR** sont très faibles : (1) la fonction d'état  $\mathbf{f}$  et la fonction de mesure  $\mathbf{h}$  doivent être connues, et (2) il est nécessaire de savoir échantillonner selon la distribution du bruit de processus. Enfin, la fonction de vraisemblance doit être disponible pour les évaluations ponctuelles. L'algorithme **SIR** est obtenu à partir de l'algorithme **SIS** en choisissant la densité de transition comme densité d'importance. Pour ce choix particulier de la densité d'importance, il est évident que les poids sont donnés par la relation 4.32. La figure 4.2 montre les différentes étapes de l'algorithme du filtre **SIR**.

#### 4.8.2 Filtre Particulaire Rao-Blackwellisé (RBPF)

Toutes les méthodes particulières présentées précédemment s'appliquent sur des modèles généraux non-linéaires. Cependant, dans certains cas, le vecteur d'état peut être décomposé en 2 sous vecteurs  $(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{l_k})$  de sorte que le modèle est linéaire par rapport à  $\mathcal{X}_{l_k}$  conditionnellement à  $\mathcal{X}_k$ . La partie linéaire du vecteur d'état  $\mathcal{X}_{l_k}$  sera intégrée analytiquement via un filtre de Kalman. Quant à l'autre partie non-linéaire du modèle  $\mathcal{X}_k$ , elle sera simulée via un filtre particulaire. Ce filtre est appelé filtre particulaire Rao-Blackwellisé (Rao-Blackwellised Particle Filter (**RBPF**) en anglais) [Casella 1996]. Ce filtre fut introduit sous le nom de filtre particulaire pour modèles conditionnellement linéaires-gaussiens [Rigal 1993, Noyer 1996]. Le système dynamique corres-

pondant s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \\ \mathcal{X}_{l_k} = \mathcal{F}_k(\mathcal{X}_k) \mathcal{X}_{l_{k-1}} + \varepsilon_{l_k} \\ \mathcal{Y}_k = \mathcal{H}_k(\mathcal{X}_k) \mathcal{X}_{l_k} + \eta_k \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $\varepsilon_k$  est le bruit de processus de matrice de covariance  $Q_k$ , couplé à la partie non-linéaire de l'état  $\mathcal{X}_k$ ,  $\varepsilon_{l_k}$  est le bruit de processus de matrice de covariance  $Q_{l_k}$ , couplé à la partie linéaire de l'état  $\mathcal{X}_{l_k}$ ,  $\eta_k$  est le bruit de mesure de matrice de covariance  $R_k$ ,  $\mathcal{F}_k$  et  $\mathcal{H}_k$  sont des matrice dépendant de l'état non-linéaire courant. L'idée principale du **RBPF** est d'exploiter la linéarité de certaines composantes du vecteur d'état du modèle de façon à réduire la dimension de l'espace d'état particulière. Ainsi, on aura besoin d'utiliser le filtre particulière seulement sur la partie du vecteur d'état non linéaire. L'autre partie est traitée par un filtre de Kalman, ce qui permet de réduire le nombre de particules et donc de réduire le temps de calcul. La densité a posteriori s'écrit à l'instant  $k$  :

$$p(\mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) = p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k}) p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) \quad (4.34)$$

La partie  $p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k})$  peut se déterminer d'une manière exacte par un filtre de Kalman, comme détaillé dans le chapitre 3. Le calcul de la deuxième partie  $p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$  se fait par un filtrage particulière. Les échantillons  $\{\mathcal{X}_k^{(i)}\}_{i=1}^{N_p}$  sont générés selon la densité d'importance, soit :

$$\mathcal{X}_k^{(i)} \sim q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k) \quad (4.35)$$

les poids courants sont calculés à partir de la relation 4.19 en prenant en compte que  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est indépendante des particules, soit :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) q(\mathcal{X}_k^{(i)} | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}, \mathcal{Y}_k)} \quad (4.36)$$

La vraisemblance conditionnellement à  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)}$  est calculée en intégrant par rapport à la partie linéaire, soit :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{l_k} \\ &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{(i)}) p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{l_k} \end{aligned} \quad (4.37)$$

La densité de vraisemblance  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{(i)})$  est déterminé à partir de l'équation d'observation donnée par la relation 4.33, soit :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathcal{H}_k^{(i)} \mathcal{X}_{l_k}, R_k) \quad (4.38)$$

où la matrice d'observation est donnée par :  $\mathcal{H}_k^{(i)} = \mathcal{H}_k(\mathcal{X}_k^{(i)})$ . La densité  $p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est donnée par la prédiction de Kalman associé à l'historique des particules  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)}$ , soit :

$$p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{l_k|k-1}^{(i)}, P_{k|k-1}^{(i)}) \quad (4.39)$$

où  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{(i)}$  et  $P_{k|k-1}^{(i)}$  sont la moyenne et la matrice de covariance prédites de l'état linéaire par le filtre de Kalman associé à l'historique des particules  $\mathcal{X}_{0:k}^{(i)}$ . Ainsi, l'intégrale donnée par 4.37 s'écrit :

$$\begin{aligned} p\left(\mathcal{Y}_k \mid \mathcal{X}_{0:k}^{(i)}, \mathcal{Y}_{1:k-1}\right) &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_k, \mathcal{H}_k^{(i)} \mathcal{X}_{l_k}, R_k\right) \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{l_k|k-1}^{(i)}, P_{k|k-1}^{(i)}\right) d\mathcal{X}_{l_k} \\ &= \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_k, \mathcal{H}_k^{(i)} \mathcal{X}_{l_k|k-1}^{(i)}, \mathcal{H}_k^{(i)} P_{k|k-1}^{(i)} \mathcal{H}_k^{(i)T} + R_k\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes particulières classiques, auxiliaires et régularisées. Dans le cas général, les méthodes particulières donnent une bonne approximation du filtre optimal. Cependant, dans le cas de bruits de dynamique faibles, le filtre particulière classique peut diverger.



# Modélisation

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Modèle de trajectoire de la cible</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>Estimation pour des modèles cinétiques</b>	<b>51</b>
5.2.1	Modèle cinématique du second ordre : accélération aléatoire	52
5.2.2	Modèle cinématique du troisième ordre	53
<b>5.3</b>	<b>Sources d'opportunité</b>	<b>54</b>
5.3.1	Radio FM	55
5.3.2	Digital Video Broadcasting - Terrestrial (DVB-T)	58

## 5.1 Modèle de trajectoire de la cible

Pour les besoins de nos vérifications expérimentales, nous aurons à simuler des cibles manoeuvrantes. Pour simplifier on suppose que le mouvement de la cible a deux modes. Dans le mode non manoeuvrant, la cible se déplace avec une vitesse constante. Dans le mode manoeuvrant l'accélération s'accroît brutalement pour atteindre une valeur choisie aléatoirement dans l'intervalle  $[-10g; 10g]$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Après une durée courte de l'ordre de quelques secondes, l'accélération retombe à zéro. Afin de basculer d'une accélération  $G_0$  à une autre  $G$ , on utilise le modèle suivant :

$$a(t) = G_0 + \frac{G - G_0}{1 + \left(\frac{\mu}{t-t_0}\right)^E} \quad (5.1)$$

où  $\mu$  désigne le demi-temps d'établissement du saut d'accélération. Le paramètre  $E$  est un facteur d'élasticité décrivant le comportement du saut. Plus la valeur du paramètre  $E$  est élevée plus l'accélération change brutalement de  $G_0$  à  $G$ .

Dans l'exemple de la figure 5.1 l'accélération est simulée avec un saut à partir d'une accélération initiale nulle. Une cible non-manoeuvrante aura à instant donné  $t_i$  un vecteur vitesse  $\mathbf{V}(t_i)$ . Si une manoeuvre survient entre l'instant  $t_i$  et  $t_i + T_m$ , le vecteur s'évolue comme suit :

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t_i) + \int_{t_i}^t \mathbf{a}(u) du \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{a}(t)$  représente le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes dont chaque coordonnée suit le modèle 5.1. L'accélération de la cible, initialement nulle, croît selon la relation 5.1. Après un certain temps, elle retombe à zéro selon le même modèle. Les valeurs de demi temps de saut à la montée  $\mu_m$  et celui à la descente  $\mu_d$  sont générés aléatoirement tout en respectant la faisabilité de sauts réalistes.

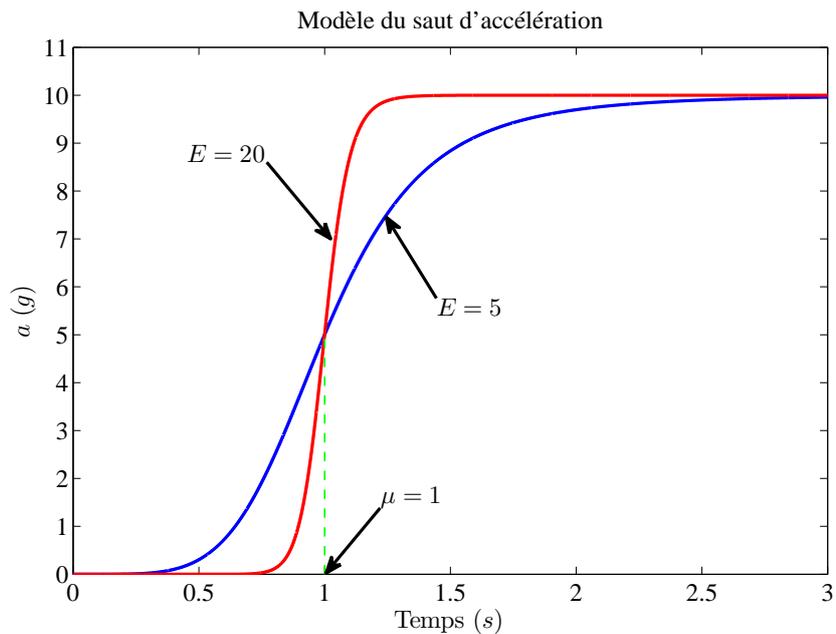


FIGURE 5.1 – Exemple d’un saut d’accélération :  $\mu = 1s$ ,  $G_0 = 0g$ ,  $G = 10g$

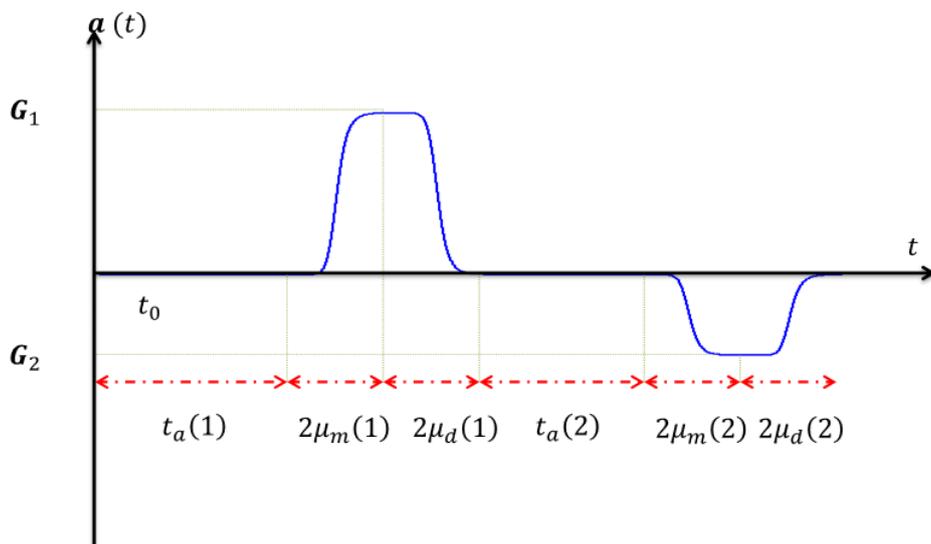


FIGURE 5.2 – Description Schématique de la simulation de trajectoire

Le tableau 5.1 montre le pseudo-code pour générer une trajectoire à multiples sauts d’accélération selon le modèle donné par 5.1. Deux sauts d’accélération sont séparés par la durée  $t_a$ .

---

$[\mathbf{X}(t_0 : t_f), \mathbf{V}(t_0 : t_f)] = \text{TRAJECTOIRE}[\mathbf{X}(t_0), \mathbf{V}(t_0), T_s, N_{\text{saut}}]$

- $t_c = t_0$
- POUR  $i = 1 : N_{\text{saut}}$ 
  - Générer la durée :  $t_a(i) \sim \mathcal{U}[0; 5]$
  - Générer la durée :  $\mu_m(i) \sim \mathcal{U}[1; 2]$
  - Générer la durée :  $m_d(i) \sim \mathcal{U}[1; 2]$
  - Générer l'accélération :  $\mathbf{G}(i) \sim \mathcal{U}[-10; 10]$
  - POUR  $t = t_c : T_s : (t_c + t_a(i))$ 
    - calculer l'accélération :  $\mathbf{a}(t) = 0$
    - calculer la vitesse :  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t - T_s)$
    - calculer la position :  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t - T_s) + \mathbf{V}(t - T_s) T_s$
  - FIN POUR
  - POUR  $t = (t_c + t_a(i)) : T_s : (t_c + t_a(i) + 2\mu_m(i))$ 
    - calculer l'accélération :  $\mathbf{a}(t) = \text{ACCELERATION}[0, \mathbf{G}(i), \mu_m(i), t - t_c - t_a(i)]$
    - calculer la vitesse :  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t - T_s) + \mathbf{a}(t - T_s) T_s$
    - calculer la position :  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t - T_s) + \mathbf{V}(t - T_s) T_s$
  - FIN POUR
  - POUR  $t = (t_c + t_a(i) + 2\mu_m(i)) : T_s : (t_c + t_a(i) + 2\mu_m(i) + 2\mu_d(i))$ 
    - calculer l'accélération :  $\mathbf{a}(t) = \text{ACCELERATION}[\mathbf{G}(i), 0, \mu_d(i), t - t_c - t_a(i) - 2\mu_m(i)]$
    - calculer la vitesse :  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t - T_s) + \mathbf{a}(t - T_s) T_s$
    - calculer la position :  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t - T_s) + \mathbf{V}(t - T_s) T_s$
  - FIN POUR
  - $t_c = t_c + t_a(i) + 2\mu_m(i) + 2\mu_d(i)$
- FIN POUR

---

$\mathbf{a} = \text{ACCELERATION}[\mathbf{G}_0, \mathbf{G}, \mu, t]$

- Calculer :  $\mathbf{a} = \mathbf{G}_0 + \frac{\mathbf{G} - \mathbf{G}_0}{1 + (\frac{\mu}{t})^E}$
- 

TABLE 5.1 – Pseudo-code pour simuler une trajectoire à sauts aléatoires d'accélération

## 5.2 Estimation pour des modèles cinétiques

Dans ce paragraphe on discute une classe de modèles, basés sur la cinématique de la cible, largement utilisés dans les filtres estimateurs [Bar-Shalom 1993]. Ces modèles sont déterminés à partir des équations simples du mouvement. On distingue deux modèles différents : (1) à vitesse constante, et (2) à accélération constante. Les modèles cinétiques d'état sont définis en mettant à zéro une certaine dérivée de la position. En absence d'entrée aléatoire, le mouvement est décrit par une approche temporelle polynomiale. Ainsi, ces modèles sont appelés modèles polynomiaux, et les filtres d'estimation correspondants sont appelés filtres polynomiaux. Puisque il n'est pas réaliste de supposer l'absence de perturbations, on peut les modéliser comme des entrées aléatoires. Une façon de modéliser ce bruit se fait via un processus blanc continu dans le temps. Puisque la poursuite se fait en temps discret, les équations discrètes d'état sont nécessaires. Le paragraphe 5.2.1 présente le modèle d'état à accélération de type bruit blanc, qui est en deux dimensions par coordonnée. Le modèle d'état à accélération de type processus de Wiener, qui est en trois dimensions par chaque coordonnée, est présenté dans le paragraphe 5.2.2.

Dans de nombreuses applications, le même modèle est utilisé pour chaque coordonnée. Dans certaines applications, nous pouvons utiliser un modèle pour certains coordonnées et un autre

modèle pour les autres coordonnées. En général, le mouvement le long de chaque coordonnée est supposé découplé des deux autres coordonnées. Les bruits entrant dans les différentes coordonnées sont également supposés être indépendants les uns aux autres, avec des variances potentiellement différentes. Dans ce paragraphe, on traitera les modèles cinématiques dans une coordonnée générique.

### 5.2.1 Modèle cinématique du second ordre : accélération aléatoire

Soit  $X(t)$  la position de l'objet,  $V(t) = \dot{X}(t)$  sa vitesse, et  $a(t) = \ddot{X}(t)$  son accélération. Le mouvement d'une cible se déplaçant à vitesse constante est décrit par l'équation suivante :

$$a(t) = 0 \quad (5.3)$$

Dans la pratique, la vitesse subit au moins de légères modifications. Ces manoeuvres sont modélisées par un bruit blanc continu à moyenne nulle, comme suit :

$$a(t) = \tilde{\varepsilon}(t) \quad (5.4)$$

où

$$\mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}(t)] = 0 \quad (5.5)$$

et

$$\mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}(t)\tilde{\varepsilon}(\tau)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau) \quad (5.6)$$

L'intensité du bruit de processus continu  $\tilde{q}(t)$  est, en général, un paramètre de design pour les filtres d'estimation basés sur ce modèle. Le vecteur d'état correspondant à 5.4 est à deux dimensions par coordonnée. Il est donné par :

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

On désigne un tel modèle par le modèle cinématique du second ordre (Second Order Kinematic Model (SOKM) en anglais). Il est utile de mentionner que dans ce modèle, la vitesse est un processus de Wiener, c'est l'intégrale d'un bruit blanc. L'équation continue d'état s'écrit :

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = A\mathcal{X}(t) + D\tilde{\varepsilon}(t) \quad (5.8)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

et

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

L'équation discrète d'état avec une période d'échantillonnage  $T$  s'écrit alors à l'instant  $t_k = kT$  :

$$\mathcal{X}(t_k) = e^{A(t_k - t_{k-1})}\mathcal{X}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_k - \tau)}D\tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (5.11)$$

L'équation 5.11 peut s'écrire :

$$\mathcal{X}_k = F\mathcal{X}_{k-1} + \varepsilon_k \quad (5.12)$$

où  $\mathcal{X}_k = \mathcal{X}(t_k)$  désigne l'état à l'instant temporel  $k$ . La matrice de transition  $F$  est définie par :

$$F = e^{A(t_k - t_{k-1})} = e^{AT} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

et le bruit du processus discret  $\varepsilon_k$  est donné par :

$$\varepsilon_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} D \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (5.14)$$

La matrice de covariance  $Q_k$  du bruit de processus discret  $\varepsilon_k$ , est donnée en supposant que  $\tilde{q}(t) = \tilde{q}_k$  est constante entre les deux instants  $t_k$  et  $t_{k-1}$ , soit :

$$Q_k = \mathbb{E} [\varepsilon_k \varepsilon_k^T] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{bmatrix} t_k - \tau \\ 1 \end{bmatrix} [t_k - \tau \quad 1] \tilde{q}_k d\tau \triangleq \begin{pmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \tilde{q}_k \quad (5.15)$$

D'après 5.15, les variations de la vitesse durant une période  $T$  sont de l'ordre de :

$$\sqrt{Q_{k22}} = \sqrt{T \tilde{q}_k} \quad (5.16)$$

Le choix de  $\tilde{q}_k$  pour le bruit de processus se fait en se basant sur les variations maximales de la vitesse.

Un modèle légèrement différent du modèle précédent peut s'obtenir à partir de l'équation 5.4 en supposant que le bruit est constant entre deux instants d'échantillonnage successifs. Cette approximation nous permet d'écrire directement le système discret, soit :

$$\mathcal{X}_k = F \mathcal{X}_{k-1} + \Gamma \varepsilon_k \quad (5.17)$$

Le bruit de processus discret  $\varepsilon_k$  est un bruit blanc mono-dimensionnel par coordonnée, sa covariance est donnée par :

$$\mathbb{E} [\tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_j] = \sigma_\varepsilon^2 \delta_{kj} \quad (5.18)$$

La matrice de transition  $F$  est donnée par la relation 5.13. Le gain  $\Gamma$  est donné par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

La matrice de covariance du bruit discret est donné par :

$$Q_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 \end{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.20)$$

Dans ce modèle,  $\sigma_\varepsilon$  doit être de l'ordre de la valeur maximale d'accélération.

### 5.2.2 Modèle cinématique du troisième ordre

Le mouvement d'un objet se déplaçant à une accélération constante dans une coordonnée générique  $X$  est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{a}(t) = 0 \quad (5.21)$$

L'accélération n'est pas exactement constante et ses variations peuvent être modélisées par un bruit continu blanc de moyenne nulle comme suit :

$$\dot{a}(t) = \tilde{\varepsilon}(t) \quad (5.22)$$

où

$$\mathbb{E} [\tilde{\varepsilon}(t)] = 0 \quad (5.23)$$

et

$$\mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}(t)\tilde{\varepsilon}(\tau)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau) \quad (5.24)$$

où  $\tilde{q}(t)$  désigne l'intensité du bruit de processus continu. Dans ce modèle, l'accélération est un processus de Wiener, d'où le nom du modèle à accélération en processus de Wiener. Ce modèle est aussi connu sous le nom de modèle cinématique de troisième ordre (Third Order Kinematic Model (TOKM) en anglais). Le vecteur d'état correspondant du modèle est :

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ V(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

et son équation continue d'état s'écrit :

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = A\mathcal{X}(t) + D\tilde{\varepsilon}(t) \quad (5.26)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

et

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

L'équation discrète d'état avec une période d'échantillonnage  $T$  s'écrit alors :

$$\mathcal{X}_k = F\mathcal{X}_{k-1} + \varepsilon_k \quad (5.29)$$

La matrice de transition  $F$  est définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

L'intensité du bruit continu est supposée constante  $\tilde{q}(t) = \tilde{q}_k$ . Ainsi, la matrice de covariance  $Q_k$  du bruit de processus discret  $\varepsilon_k$  est donnée par :

$$Q_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}T^5 & \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{6}T^3 \\ \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \tilde{q}_k \quad (5.31)$$

D'après 5.15, les variations de l'accélération durant une période  $T$  sont de l'ordre de :

$$\sqrt{Q_{k33}} = \sqrt{T\tilde{q}_k} \quad (5.32)$$

### 5.3 Sources d'opportunité

Parmi tous les émetteurs disponibles dans l'environnement, les émetteurs de radiodiffusion représentent les choix les plus attractifs pour des objectifs de surveillance, en raison de leur excellente couverture [Griffiths 1986, Howland 1999, Howland 2005]. Dans ce paragraphe nous allons aborder deux sources d'opportunité très attractives : la radio FM et la télévision numérique. Le tableau 5.2 résume les paramètres des signaux FM, DAB et DVB-T.

Émission	VHF FM (analogique)	DAB (numérique)	DVB-T (numérique)
Fréquence centrale	$\sim 100MHz$	$\sim 220MHz$	$\sim 750MHz$
Modulation	FM	OFDM	OFDM
Largeur de bande	$50kHz$	$220kHz$	$8kHz$
$P_T G_T$	$250kW$	$10kW$	$8kW$
Densité de puissance ( $dBW.m^{-2}$ ) $P = (P_T G_T)/(4\pi R_T^2)$ avec $R_T = 100km$	-57	-71	-72

TABLE 5.2 – Paramètres du signal des sources typiques pour le radar passif

### 5.3.1 Radio FM

Les émetteurs radios de la "bande FM" émettent, comme leur nom l'indique, en modulation de fréquence FM sur la bande VHF II, [Ventre 1991]. Contrairement à la modulation d'amplitude AM, la FM garde l'amplitude de la porteuse constante. C'est la fréquence de la porteuse qui varie en fonction de l'amplitude du signal modulant. Ceci présente un énorme avantage. En effet les divers bruits parasites qui perturbent une onde électromagnétique ont le plus souvent comme conséquence d'en perturber l'amplitude.

#### 5.3.1.1 Modulation de Fréquence

Le message basse-fréquence  $m(t)$  à transmettre module la fréquence instantanée de la porteuse. Cette fréquence dépend alors du temps et s'écrit :

$$f(t) = f_c + k_f m(t) \quad (5.33)$$

où  $f_c$  est la fréquence centrale de la porteuse et  $k_f$  est la constante de déviation de fréquence. On passe aisément à la phase en intégrant la fréquence :

$$\Phi(t) = \Phi(0) + 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \quad (5.34)$$

où  $\Phi(0)$  est la phase à l'origine. Le signal modulé en fréquence est un signal sinusoïdal de fréquence  $f(t)$  et d'amplitude  $\mathcal{A}$  liée à la puissance du signal émis. Son expression mathématique est donc la suivante :

$$S_{FM}(t) = \Re \left\{ \mathcal{A} e^{j(\Phi(0) + 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du)} \right\} \quad (5.35)$$

Si le signal modulant  $m(t)$  varie entre les valeurs extrêmes  $-M_{max}$  et  $+M_{max}$ , la fréquence varie au rythme du signal modulant entre les deux valeurs extrêmes :  $f_{min} = f_c - k_f M_{max}$  et  $f_{max} = f_c + k_f M_{max}$ . La grandeur  $k_f M_{max}$  est appelée excursion en fréquence et notée  $\Delta f = k_f M_{max}$ .

En radiodiffusion, la valeur standard de l'excursion en fréquence est :  $\Delta f = 75kHz$ , lorsque le signal est aléatoire. Cette valeur correspond à une excursion en fréquence moyenne. On définit l'indice de modulation  $\beta$  par :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_w} \quad (5.36)$$

Où  $f_w$  représente la largeur de la bande du signal modulant. Le spectre d'un signal FM ne peut pas en général s'écrire sous une forme analytique simple. La bande occupée  $B$  peut être lue sur

le tracé du spectre ou calculée par la formule de Carson (correspondant à 98% de la puissance totale), [Laneman 2001] :

$$B \cong 2(\Delta f + f_w) \quad (5.37)$$

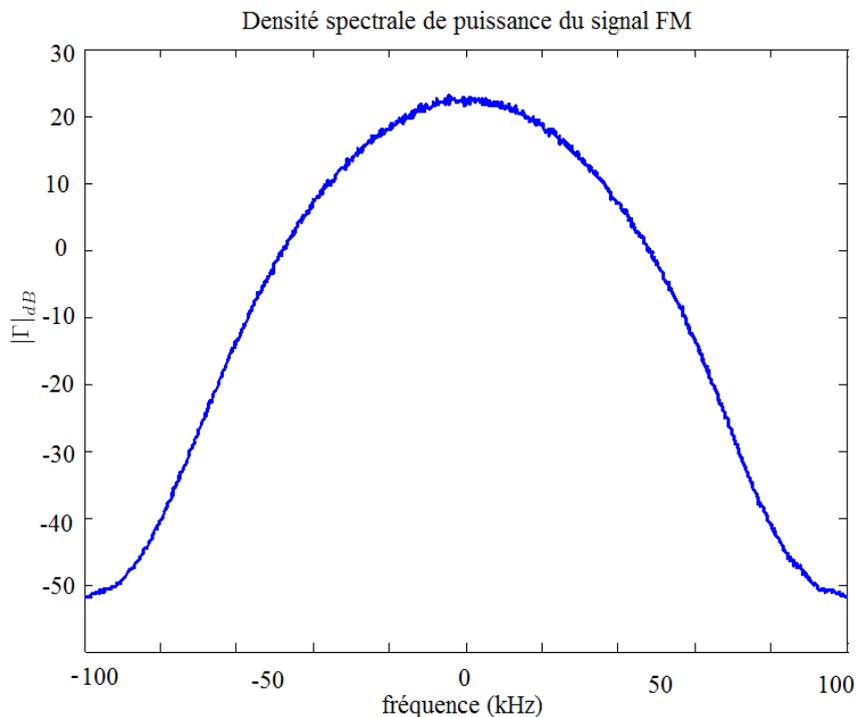


FIGURE 5.3 – Densité spectrale de puissance (DSP) du signal FM en dB

### 5.3.1.2 La radio FM comme source d'opportunité pour un radar passif

Aujourd'hui, les stations commerciales de Radio FM sont les sources non-coopératives les plus utilisées pour les PBRs, car ils offrent un bon compromis entre la performance et les coûts globaux de développement du système [Howland 2005, Griffiths 2005]. En particulier, les hautes puissances d'émission disponibles auprès des émetteurs de radiodiffusion FM permettent des portées de détection d'environ 250km [Howland 2005].

La fonction d'ambiguïté d'un signal FM est donnée dans la figure 5.4 pour une durée d'intégration de  $T = 1ms$ . Le signal modulant est un bruit coloré gaussien de largeur de bande 15kHz. La variance du signal modulant  $\sigma_m^2$  est choisi de manière à avoir une déviation maximale de fréquence de 75kHz. La largeur de bande du signal modulé  $B$  de l'ordre de 100kHz (voir Figure 5.3). La résolution Doppler est une fonction du temps d'intégration, ce qui signifie qu'elle peut être améliorée avec des intégrations plus longues. Cependant la résolution en retard dépend de la largeur de bande de cette forme d'onde, qui ne peut pas être modifiée. On constate la présence de lobes secondaires importants très gênants dans la problématique radar. En effet, une cible de SER faible peut aisément être masquée par les lobes secondaires d'une autre cible ou d'un fouillis.

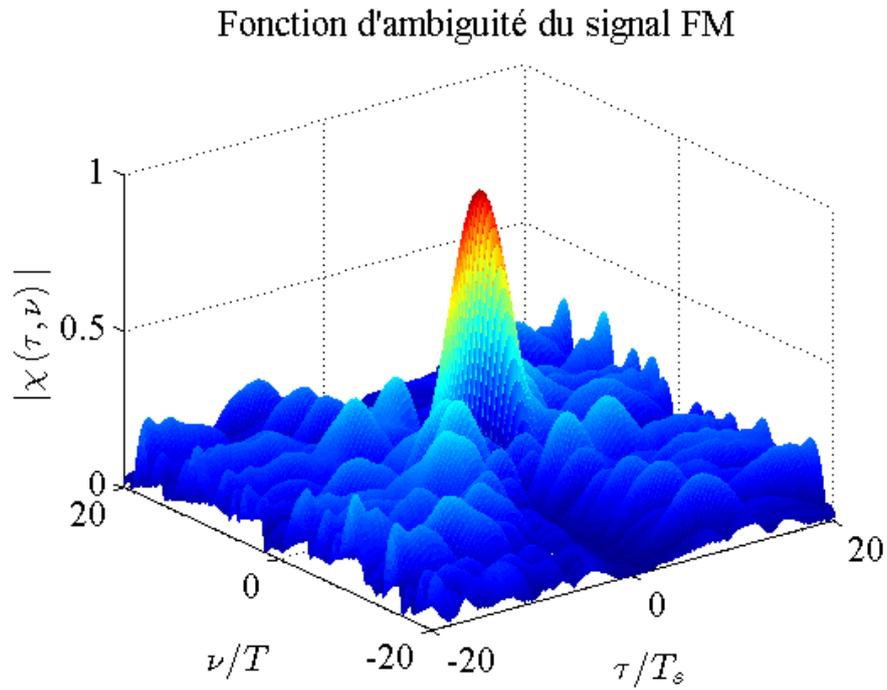


FIGURE 5.4 – Fonction d'ambiguïté du signal FM

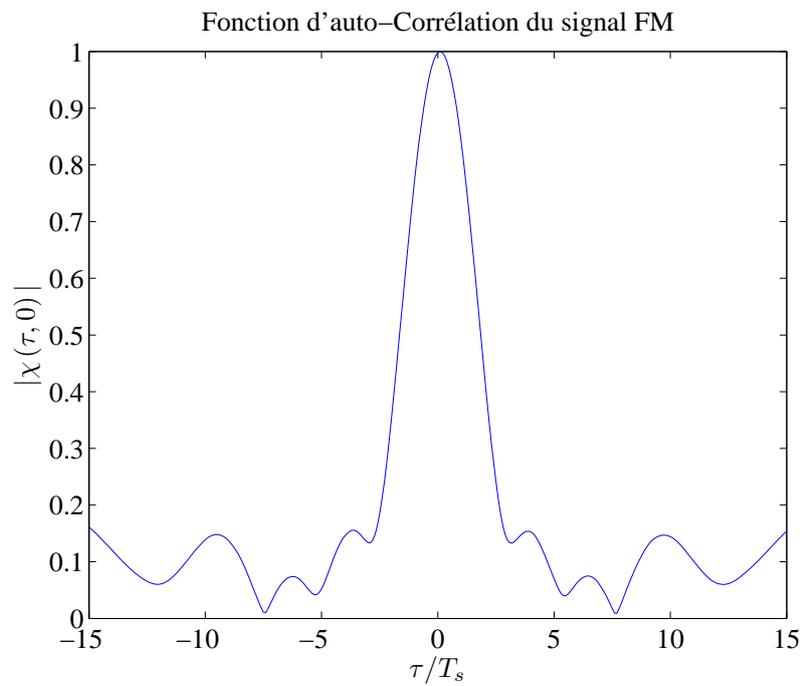


FIGURE 5.5 – Fonction d'auto- corrélation du signal FM

### 5.3.2 Digital Video Broadcasting - Terrestrial (DVB-T)

La télévision numérique terrestre est un système de télévision numérique utilisé dans plusieurs pays européens, y compris la France. La DVB-T utilise une modulation numérique utilisant de multiples sous-porteuses orthogonales (OFDM). Dans cette section, nous allons présenter la forme du signal DVB-T et ses propriétés. Nous montrerons aussi la structure d'un émetteur DVB-T, et toutes autres informations pertinentes sur la DVB-T comme source illuminante pour un radar passif.

#### 5.3.2.1 signal DVB-T

Dans une modulation OFDM, un grand nombre de sous-porteuses (sous-canaux) orthogonales, émises en parallèle, divisent la bande de fréquence disponible. La norme [ETS 2009] décrit la structure de trame OFDM à utiliser pour les modes de transmission  $2k$  et  $8k$ . Le signal transmis est organisé en trames. Chaque trame a une durée  $T_F$ , et se compose de 68 symboles OFDM. Quatre trames constituent une super-trame. Chaque symbole est constitué par un ensemble de  $K = 6817$  porteuses dans le mode  $8k$  et  $K = 1705$  porteuses dans le mode  $2k$  et transmis avec une durée  $T_S$ . Il est composé de deux parties : une partie utile de durée  $T_U$  et un intervalle de garde de durée  $\Delta$ . L'intervalle de garde consiste en un préfixe cyclique. Quatre valeurs d'intervalles de garde peuvent être utilisés selon le tableau 5.4. Les symboles dans une trame OFDM sont numérotés de 0 à 67. Tous les symboles contiennent des données et des informations de référence. Les porteuses sont indexées par  $k \in [K_{min}; K_{max}]$  avec  $K_{min} = 0$  et  $K_{max} = 1704$  en mode  $2k$  et  $K_{max} = 6816$  en mode  $8k$ , respectivement. L'espacement entre les porteuses adjacentes est  $\frac{1}{T_U}$ , tandis que l'espacement entre la porteuse d'indice  $K_{min}$  et celle d'indice  $K_{max}$  est donnée par  $\frac{(K-1)}{T_U}$ . Les valeurs numériques des paramètres OFDM pour les modes  $2k$  et  $8k$  sont donnés dans les tableaux 5.3 et 5.4 pour des canaux de largeur  $8MHz$ . Les valeurs des différents paramètres liés au temps sont donnés comme multiples de la période élémentaire  $T_e$ . La période élémentaire  $T_e$  est égale à  $7/64\mu s$  pour les canaux de largeur  $8MHz$ .

Paramètres	mode $8k$	mode $2k$
Nombre de porteuses $K$	6817	1705
Valeur de la porteuse d'indice $K_{min}$	0	0
Valeur de la porteuse d'indice $K_{max}$	6816	1704
La durée $T_U$	$896\mu s$	$224\mu s$
Espacement inter-porteuse $\frac{1}{T_U}$	$1116Hz$	$4464Hz$
Espacement entre les porteuses $K_{min}$ et $K_{max} : \frac{(K-1)}{T_U}$	$7,61MHz$	$7,61MHz$

TABLE 5.3 – Les valeurs numériques de paramètres d'OFDM en modes  $2k$  et  $8k$  pour des canaux de  $8MHz$

Le signal émis est donné par la relation suivante :

$$s(t) = \Re \left( e^{j2\pi f_c t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{67} \sum_{k=K_{min}}^{K_{max}} c_{m,l,k} \cdot \Psi_{m,l,k}(t) \right) \quad (5.38)$$

où :

$$\Psi_{m,l,k}(t) = \begin{cases} e^{j2\pi \frac{k'}{T_U}(t-\Delta-t_{m,l})} & t_{m,l} \leq t \leq t_{m,l} + T_S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $k' = k - \frac{K_{max} + K_{min}}{2}$  désigne l'indice de la  $k^{\text{ème}}$  porteuse relativement à la fréquence centrale, et le temps  $t_{m,l}$  est égal à  $t_{m,l} = (l + 68m)T_S$ ,  $c_{m,l,k}$  désigne le symbole complexe pour la  $k^{\text{ème}}$  porteuse du  $l^{\text{ème}}$  symbole OFDM dans le trame numéro  $m$ , et  $f_c$  désigne la fréquence centrale de porteuse.

mode	mode $8k$				mode $2k$			
$\frac{\Delta}{T_U}$	1/4	1/8	1/16	1/32	1/4	1/8	1/16	1/32
$T_U$	8192 $T_e$ 96 $\mu s$				2048 $T_e$ 224 $\mu s$			
$\Delta$	2048 $T_e$ 224 $\mu s$	1024 $T_e$ 112 $\mu s$	512 $T_e$ 56 $\mu s$	256 $T_e$ 28 $\mu s$	512 $T_e$ 56 $\mu s$	256 $T_e$ 28 $\mu s$	128 $T_e$ 14 $\mu s$	64 $T_e$ 7 $\mu s$
$T_S$	10240 $T$ 1120 $\mu s$	1120 $T$ 1008 $\mu s$	8704 $T_e$ 952 $\mu s$	8448 $T_e$ 924 $\mu s$	2560 $T_e$ 280 $\mu s$	2304 $T_e$ 252 $\mu s$	2176 $T_e$ 238 $\mu s$	2112 $T_e$ 231 $\mu s$
	$\frac{\Delta}{T_U}$ : intervalle de garde				$T_U$ : durée utile du symbole			
	$\Delta$ : durée de garde				$T_S$ : durée du symbole			

TABLE 5.4 – Durée utile du symbole pour les différents intervalles gardes pour des canaux de 8MHz

Une implémentation pratique d'un système OFDM est basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT), [Sun 2001].

### 5.3.2.2 Le signal DVB-T comme source d'opportunité pour un radar passif

Les signaux de type DVB-T offrent à la fois une excellente couverture et une largeur de bande importante entraînant une augmentation considérable en terme de résolution en distance bistatique. Les lobes secondaires dans le domaine du retard et le domaine de la fréquence sont faibles par rapport au lobe principal. L'étude de la fonction d'ambiguïté du signal OFDM montre que le signal DVB-T est très approprié pour le radar. Toutefois, certains problèmes découlent de l'utilisation des signaux DVB-T en tant que forme d'onde dans les systèmes passifs. Fondamentalement, la présence de caractéristiques spécifiques du signal DVB-T, comme les intervalles de garde et les pilotes [ETS 2009], introduit un certain nombre de pics indésirables déterministes dans la fonction d'ambiguïté (FA) de ce signal, qui pourraient apporter un effet de masquage sur le signal utile et produire des fausses alarmes. Le niveau de ces pics ne peut pas être réduit en augmentant le temps d'intégration [Saini 2005]. Différentes techniques ont été proposées afin de supprimer ces pics indésirables dans la FA du signal DVB-T. Dans [Saini 2005], une suppression de l'intervalle de garde dans le signal de référence est proposée pour éliminer les pics dus à l'intervalle de garde. Deux stratégies complémentaires pour atténuer les pics dûs aux pilotes sont introduites : l'égalisation de puissance des porteuses pilotes dans le signal de référence, et la suppression d'éléments porteuse pilote dans le signal de référence avant de corrélation. Dans [Gao 2006], d'une part la suppression de l'intervalle de garde est appliquée pour éliminer les pics dûs à l'intervalle de garde, puis les pilotes sont modifiés directement sur les porteuses pilotes, afin d'éliminer les pics de pilote dans la FA. Cette approche présente deux avantages : (1) la réduction de la charge de calcul et (2) la réalisation pratique par rapport aux filtres classiques et aux égaliseurs. Dans le cadre de cette thèse, on suppose que l'intervalle de garde est supprimée et les pilotes sont modifiés. La figure 5.6 montre la fonction d'ambiguïté du signal DVB-T et la figure 5.7 montre sa fonction d'auto-corrélation ; le signal DVB-T utilisé est en mode  $8k$ . L'intervalle de garde est de  $\Delta = \frac{T_U}{4}$ . Le signal OFDM utilise une modulation 4-QAM. Les symboles complexes

sont aléatoires. La période d'échantillonnage est égale à la moitié de la durée élémentaire de symbole  $T_s = \frac{T_e}{2}$ . La durée d'intégration cohérente est égale à la durée d'un symbole OFDM, soit :  $T = T_S = 1120\mu s$ .

Fonction d'ambiguïté du signal DVB-T

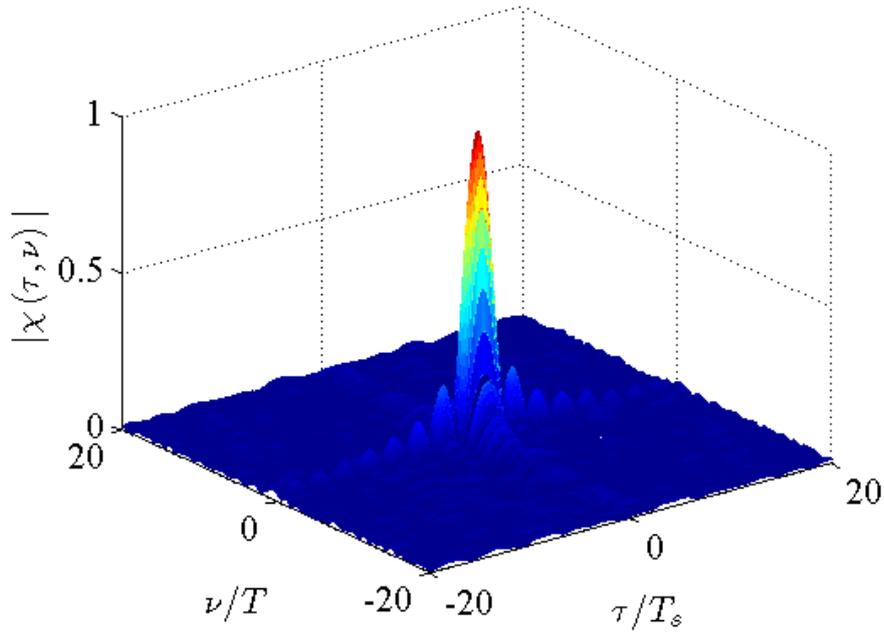


FIGURE 5.6 – Fonction d'ambiguïté du signal DVB-T mode 8k

Fonction d'auto-Corrélation du signal DVB-T

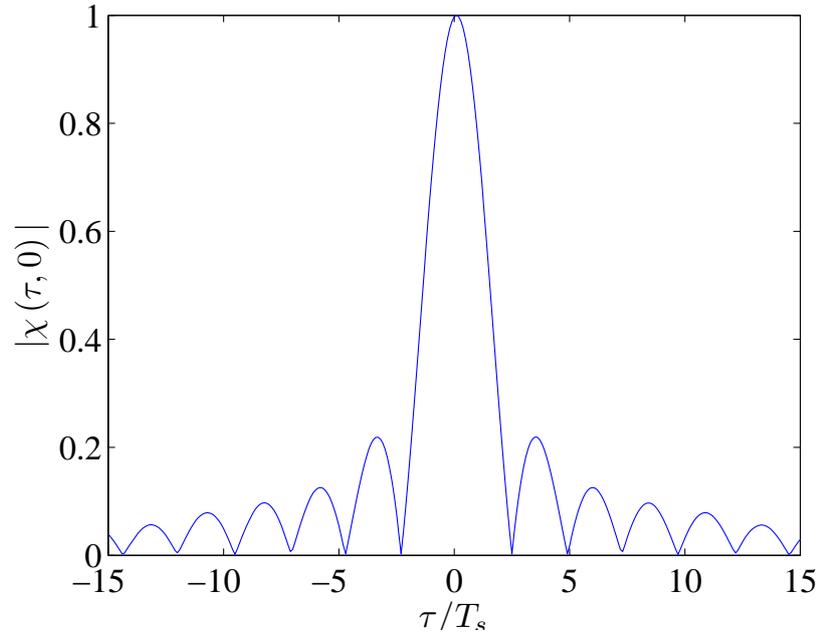


FIGURE 5.7 – Fonction d'auto- corrélation du signal DVBT-T mode 8k

# Approche conventionnelle

---

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>6.2</b>	<b>Hypothèses</b>	<b>61</b>
<b>6.3</b>	<b>Implémentation Pratique de la méthode</b>	<b>62</b>
6.3.1	Batterie de Filtres Adaptés	63
6.3.2	Seuillage et Détection des pistes	64
6.3.3	Association de Données	65
6.3.4	Poursuite d'une cible par un Filtre de Kalman étendu	66

---

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente la méthode conventionnelle de détection et poursuite pour un radar passif. En principe, la localisation passive est basée sur la corrélation croisée entre le signal de référence et le signal reçu. Cette étape est héritée de l'architecture des systèmes radar conventionnels. La plupart des approches conventionnelles utilisent deux extractions bistatiques venant de deux différents corrélateurs afin de fournir une estimation d'angle de gisement (*Bearing* en anglais). Les deux mesures retard/Doppler et le gisement estimé servent à estimer la position de cible. Notre implémentation de la méthode conventionnelle se fait à partir d'une configuration multi-statique à trois émetteurs. Ainsi, la chaîne de traitement du signal comporte trois corrélateurs différents, chacun correspond à une source d'opportunité différente. Dans ce cas, à chaque balayage, le seuillage fournit jusqu'à trois détections bistatiques pour chaque cible.

## 6.2 Hypothèses

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices ont été prises de façon à se concentrer en priorité sur les aspects algorithmiques théoriques. Parmi ces hypothèses on cite les suivantes :

- Le récepteur passif est supposé en visibilité de trois (et même quatre) émetteurs (FM ou DVB-T selon l'application).
- L'association entre les signaux reçus et les antennes émettrices est supposée parfaite. Aucune réseau iso-fréquence (Single Frequency Network (SFN) en anglais) n'est présent dans notre configuration multi-statique. Chaque émetteur de radio ou de télévision opère donc sur une bande de fréquence différente.
- On suppose que la réception et la construction du signal de référence se fait parfaitement, et que le signal de surveillance ne contient aucune trace gênante ni du trajet direct, ni de fouillis terrestre.

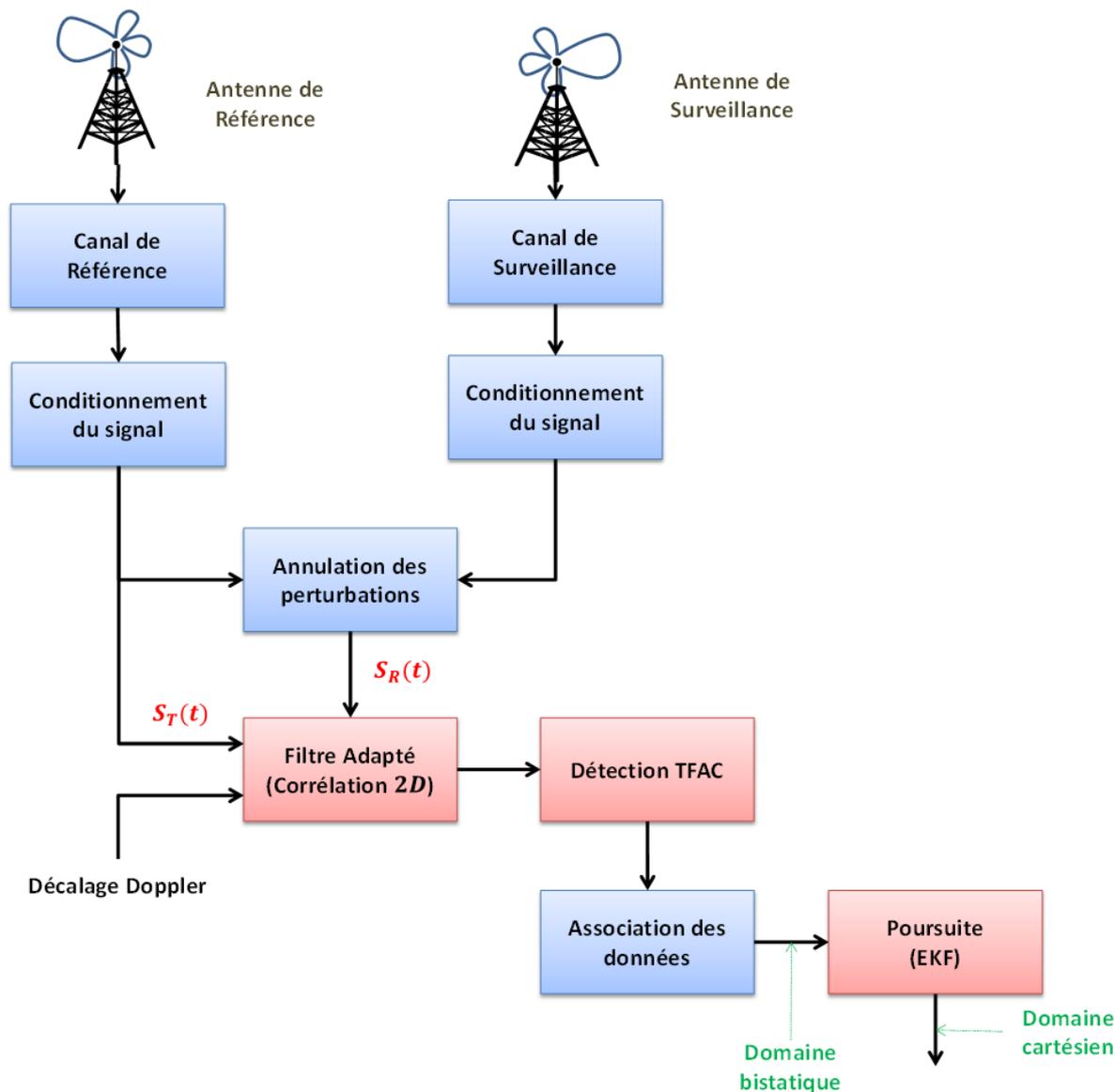


FIGURE 6.1 – Chaîne de traitement radar passif classique

### 6.3 Implémentation Pratique de la méthode

En résumé l'approche conventionnelle comporte les étapes traditionnelles principales suivantes :

- Le filtre adapté, c'est-à-dire une corrélation entre le signal reçu et le signal de référence avec différents décalages Doppler, (cf. section 2.8).
- Le seuillage de la sortie du filtre adapté avec extraction des couples retard/Doppler, (cf. section 2.9).
- L'initialisation des pistes et l'association des nouvelles observations aux pistes existantes, (cf. section 6.3.3).
- La localisation par un filtrage de type Kalman avec passage du domaine bistatique au domaine cartésien, (cf. chapitre 3).

Il est utile de mentionner que dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéresse pas aux algorithmes sophistiqués d'association. Pour cela il faut supposer que la probabilité de fausse alarme est fixée à une valeur très faible. Cette restriction est justifiée par le fait que cette thèse se focalise sur les aspects détection et poursuite. La figure 6.1 montre les différentes étapes dans une chaîne du traitement de signal radar passif ; les blocs en rouge correspondent aux étapes auxquelles on s'intéresse plus particulièrement dans le cadre de cette thèse.

### 6.3.1 Batterie de Filtres Adaptés

Le signal reçu  $S_R(t)$  et le signal de référence  $S_T(t)$ , échantillonnés à une cadence  $\frac{1}{T_s}$ , sont décomposés en fenêtres de durée  $T$ . A chaque balayage du temps sur une durée  $T$ , on calcule la corrélation croisée de la fenêtre courante du signal reçu avec la fenêtre courante du signal de référence en appliquant différents retards et différents décalages en fréquence. Le filtre adapté ainsi obtenu admet des pics correspondant aux cibles et d'autres correspondant aux fausses alarmes.

L'intégration cohérente, assurée par la corrélation croisée, augmente le rapport signal du bruit. Une longue durée d'intégration est nécessaire afin d'obtenir un rapport signal sur bruit raisonnable permettant d'avoir une probabilité de détection suffisante. Malheureusement, les durées d'intégration étendues sont limitées par la migration prévue de la cible d'une case à une autre pendant la période d'intégration d'une part, et d'autre part par la charge de calcul. La variation  $dR_b$  de la distance bistatique  $R_b$ , pendant la durée d'intégration  $T$ , est donnée par :  $dR_b = VT$ , avec  $V$  est la vitesse de la cible. La durée d'intégration maximale désigne le temps maximal pendant lequel la cible reste dans une case distance, soit :

$$T = \frac{dR_b}{V_{max}} = \frac{cd\tau}{V_{max}} = \frac{c\Delta\tau}{V_{max}} \quad (6.1)$$

où  $c$  est la célérité de lumière dans le vide,  $V_{max}$  est la vitesse maximale que la cible peut atteindre et  $d\tau$  désigne la variation du retard bistatique pendant la durée d'intégration. Pour une durée d'intégration maximale, cette variation est égale à la largeur d'une case retard  $\Delta\tau$ . Une valeur typique de la durée d'intégration pour un radar exploitant un signal FM est de l'ordre de la centaine de millisecondes. Par contre la durée est de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour le signal DVB-T.

La largeur d'une case retard  $\Delta\tau$  est déterminée par la résolution maximale obtenue dans le domaine du retard. Cette résolution dépend de la largeur du lobe principal de la fonction d'auto-corrélation du signal exploité, qui, à son tour, dépend de la largeur de bande du signal. La résolution fréquentielle  $\Delta\nu$  ne dépend pas du signal utilisé, mais de la durée d'intégration cohérente, soit :

$$\Delta\nu = \frac{1}{T} \quad (6.2)$$

Le domaine du retard dépend de la région de surveillance désirée, donc l'intervalle du retard bistatique est  $[\tau_d; \tau_{max}]$  où  $\tau_d$  est le retard correspondant au trajet direct entre l'émetteur et le récepteur, et  $\tau_{max}$  dépend de la portée maximale du radar. L'intervalle du décalage fréquentiel est  $[-\nu_{max}; \nu_{max}]$ , où  $\nu_{max}$  représente le décalage Doppler maximal. Cette valeur est donnée par :

$$\nu_{max} = 2f_c \frac{V_{max}}{c} \quad (6.3)$$

Par exemple, pour un signal FM de fréquence porteuse  $f_c = 100MHz$  et pour une valeur maximale de vitesse égale à  $V_{max} = 1Mach$ , le décalage Doppler maximal est de l'ordre de

250Hz. Pour un signal DVB-T de fréquence porteuse  $f_c = 700MHz$  et pour la même valeur maximale de vitesse, le décalage Doppler maximal est de l'ordre de 1600Hz.

A l'instant  $t = kT$ , la sortie du filtre adapté est donnée en fonction du décalage fréquentiel  $\nu$  et du retard temporel  $\tau$  par l'équation suivante :

$$\Gamma_k(\tau, \nu) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_R(kT + pT_s) S_T(kT + pT_s - \tau)^* e^{-2\pi\nu pT_s} \quad (6.4)$$

où  $T_s$  désigne la période d'échantillonnage, et  $M$  désigne le nombre d'échantillons dans une fenêtre, soit  $M = T/T_s$ . La figure 6.2 illustre l'implémentation de l'équation 6.4.

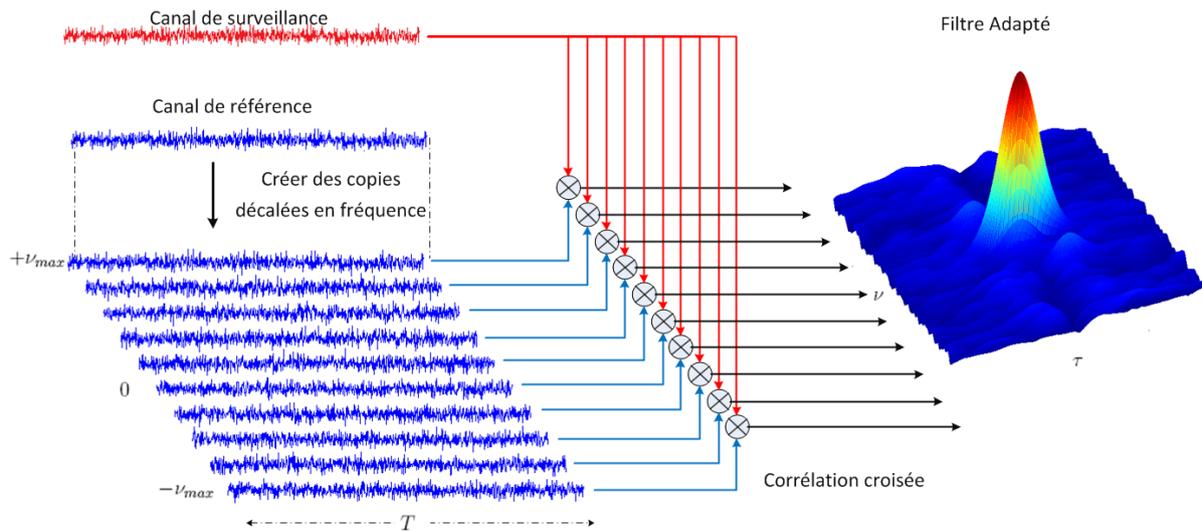


FIGURE 6.2 – Technique du filtrage adapté

### 6.3.2 Seuillage et Détection des pistes

Nous avons vu, dans le chapitre 2, que la détection se fait par le jeu des tests sur l'ensemble des cases retards et Doppler, en cherchant laquelle au deux hypothèses suivantes est la plus probable : (1)  $H_0$  correspondant au fait que la valeur I/Q en sortie du filtre adapté dans la case sous test ne correspond à aucune cible mais uniquement à du bruit. (2)  $H_1$  correspondant au fait que la valeur I/Q dans la case, reflète l'écho d'une cible. La détection des cibles se fait par l'extraction des couples retard et décalage Doppler dont le niveau de corrélation dépasse un certain seuil adaptatif  $\lambda$ . Le seuil est établi en vue d'obtenir une probabilité de fausse alarme désirée  $P_{fa}$ , régie par la densité de probabilité du bruit après corrélation  $\eta(t)$ .

A la réception, le signal est couplé avec un bruit thermique complexe blanc gaussien  $\mathbf{n}(t)$  de densité spectrale de puissance  $N_0$ . On suppose que la densité spectrale de puissance du signal utile est normalisée, le bruit  $\eta(t)$  est donc un bruit coloré gaussien de variance  $\sigma_\eta^2 = N_0 \frac{T_s}{T}$ . Dans ce cas la probabilité de fausse alarme est donnée par [Kingsley 1992] :

$$P_{fa} = p\{|\Gamma_k(\tau, \nu)| > \lambda \mid H_0\} = P\{|\eta| > \lambda\} = e\left(-\frac{\lambda^2}{\sigma_\eta^2}\right) \quad (6.5)$$

Choisir un faible seuil revient à augmenter le taux de fausse alarme et complique d'autant la phase d'association de données en augmentant la charge de calcul. En revanche, un faible seuil favorise potentiellement la détection des cibles à faible rapport signal sur bruit. La figure 6.3

montre les différentes étapes de la méthode de détection classique telle qu'elle est implémentée dans le cadre de cette thèse.

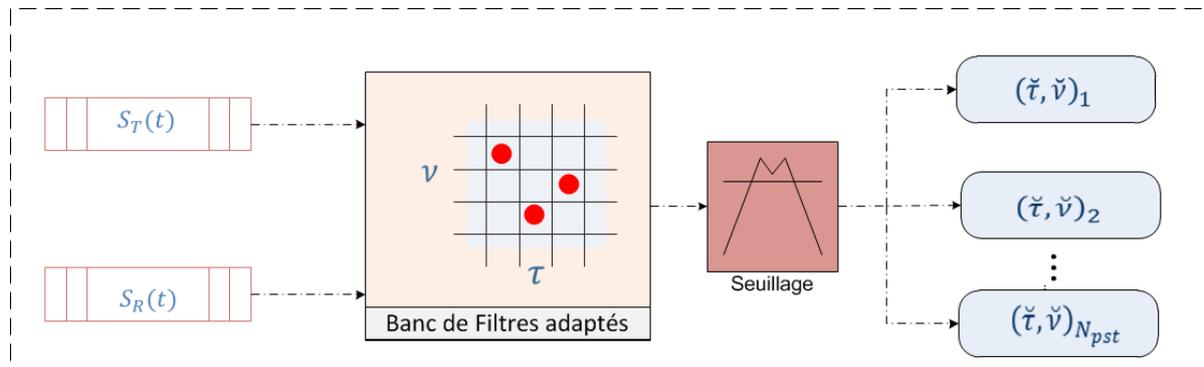


FIGURE 6.3 – Représentation schématique de la phase de détection, où  $N_{pst}$  désigne le nombre des couples retard/Doppler extraits.

### 6.3.3 Association de Données

L'association de données est un problème important et difficile dans les systèmes de poursuite multi-cible. L'objectif des techniques d'association est de déterminer l'origine de chaque mesure en l'associant à une piste existante, à une nouvelle piste ou la déclarer comme une fausse alarme. Il existe plusieurs méthodes d'association de données, mais elles suivent les mêmes règles générales : (1) Toute détection non-associée initie une piste provisoire. (2) Si, dans les balayages ultérieurs, une piste provisoire est associée à certaines mesures (qui tombent dans sa région de validation), alors la piste provisoire est promue au rang de piste confirmée. Sinon, la piste provisoire est supprimée. (3) Une piste confirmée est supprimée si elle n'est pas mise à jour par des mesures pendant plusieurs balayages (ou durant une certaine période de temps). On distingue deux catégories d'association de données :

**Les méthodes à un seul balayage :** Elles considèrent uniquement les mesures du radar venant du dernier ensemble de données et affectent ces données aux pistes. Parmi ces méthodes, il existe les méthodes adaptées à la poursuite d'une seule cible, telle l'association probabiliste de données (Probabilistic Data Association (PDA) en anglais) et la méthode du plus proche voisin (Nearest Neighbour Data Association (NNDA) en anglais) [Bar-Shalom 1988, Schulz 2001]. La méthode d'association probabiliste conjointe de données (Joint Probabilistic Data Association (JPDA) en anglais) et la méthode du plus proche voisin global (Global Nearest Neighbour Data Association (GNND) en anglais) sont des méthodes d'association à un seul balayage adaptées aux problèmes multi-cible. Le principal avantage des méthodes à un seul balayage est qu'elles ne nécessitent pas une grande charge de calcul. L'inconvénient majeur est l'irrévocabilité des affectations plots-pistes précédentes.

**Les méthodes à balayages multiples :** une série d'ensembles de données collectées pendant plusieurs instants, sont maintenues et utilisées pour réaliser l'affectation des plots aux pistes. La méthode MHT (Multiple Hypothesis Tracking en anglais) [Reid 1979, Cox 1996] et la méthode MDA (Multidimensional Assignment en anglais) [Poore 1994] sont des méthodes à balayages multiples. Le principal avantage des méthodes à balayages multiples est que l'affectation plots-pistes peut être ré-évaluée à la réception des nouvelles mesures. L'inconvénient majeur est que la charge de calcul augmente lorsque le nombre des balayages stockés augmente.

### 6.3.4 Poursuite d'une cible par un Filtre de Kalman étendu

Dans les paragraphes précédents, nous avons décrit l'étage d'extractions des plots retards bistatiques/décalages Doppler à partir d'un corrélateur générique. Notre chaîne de traitement comporte trois corrélateurs similaires, couplés à des trois émetteurs de radiodiffusion. Nous avons, alors à chaque instant  $t = kT$  jusqu'à trois détections bistatiques par cible. Pour une cible donnée, les détections de décalage Doppler et du retard venant de trois corrélateurs sont fusionnées, afin de former une séquence d'observations bruitées alimentant un filtre de Kalman étendu qui estime la position et la vitesse de la cible en coordonnées cartésiennes. Si on désigne par  $(\tau_k^n, \nu_k^n)$  le couple bistatique extrait du  $n^{\text{ème}}$  corrélateur, alors le vecteur des observations à l'instant discret  $k$  est donné par :

$$\mathcal{Y}_k = \begin{cases} \tau_k^1 \\ \tau_k^2 \\ \tau_k^3 \\ \nu_k^1 \\ \nu_k^2 \\ \nu_k^3 \end{cases} \quad (6.6)$$

La poursuite d'une cible par la méthode classique est illustrée par la figure 6.4.

#### 6.3.4.1 Equation d'état

Le vecteur d'état contient le vecteur position  $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$  et le vecteur vitesse  $\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z]^T$ . L'équation d'état est modélisée par un modèle cinématique du second ordre [Bar-Shalom 1993] décrit dans le chapitre 5, avec une vitesse constante et un bruit gaussien pour chaque variable d'état. Dans ce cas, on obtient, à l'instant discret  $k$ , un modèle d'état pour le vecteur de position  $\mathbf{X}_k$  et le vecteur vitesse  $\mathbf{V}_k$  en coordonnées cartésiennes de la forme :

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \\ V_{xk} \\ V_{yk} \\ V_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{k-1} + V_{xk-1}T \\ Y_{k-1} + V_{yk-1}T \\ Z_{k-1} + V_{zk-1}T \\ V_{xk-1} \\ V_{yk-1} \\ V_{zk-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{Xk} \\ \varepsilon_{Yk} \\ \varepsilon_{Zk} \\ \varepsilon_{V_{xk}} \\ \varepsilon_{V_{yk}} \\ \varepsilon_{V_{zk}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \quad (6.7)$$

où  $\varepsilon_{\mathbf{X}_k} = [\varepsilon_{Xk}, \varepsilon_{Yk}, \varepsilon_{Zk}]^T$  est le vecteur de bruit de processus gaussien couplé avec la position et  $\varepsilon_{\mathbf{V}_k} = [\varepsilon_{V_{xk}}, \varepsilon_{V_{zk}}, \varepsilon_{V_{zk}}]^T$  est le vecteur de bruit de processus gaussien couplé avec la vitesse. Par conséquent, la fonction d'état est linéaire et donnée par la matrice :

$$\tilde{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

#### 6.3.4.2 Equation de mesure

Les équation 2.4 et 2.7, liant respectivement le retard bistatique au vecteur position, et le décalage Doppler aux vecteurs position et vitesse, sont fortement nonlinéaires.

L'équation de mesure est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \tau_k^n \\ \nu_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\| + \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|}{c} \\ -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{\mathbf{v}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{\mathbf{v}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \end{bmatrix} + \eta_k = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k) + \eta_k \quad (6.9)$$

où  $n = 1, 2, 3$  est l'indice du  $n^{\text{ème}}$  émetteur,  $\mathbf{X}_T^n$  est le vecteur position du  $n^{\text{ème}}$  émetteur,  $\mathbf{X}_R$  le vecteur position du récepteur et  $f_c^n$  la fréquence porteuse du  $n^{\text{ème}}$  émetteur. Le bruit d'observation  $\eta_k$  est un bruit de quantification de loi de probabilité uniforme sur  $[-\frac{\Delta\tau}{2}; \frac{\Delta\tau}{2}]^3 \times [-\frac{\Delta\nu}{2}; \frac{\Delta\nu}{2}]^3$ . Par identification des moments d'ordre 1 et 2,  $\eta_k$  peut être approximé par un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R_k$  donnée par :

$$R_k = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\tau^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\tau^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta\tau^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta\nu^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta\nu^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta\nu^2}{12} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

La matrice jacobienne  $\tilde{H}_k$  de la fonction d'observation  $\mathbf{h}$  est donnée par :

$$\tilde{H}_k = \frac{d\mathbf{h}}{d\mathcal{X}_k} = \begin{pmatrix} \frac{d\tau_k^1}{dX_k} & \frac{d\tau_k^1}{dY_k} & \frac{d\tau_k^1}{dZ_k} & \frac{d\tau_k^1}{dV_{xk}} & \frac{d\tau_k^1}{dV_{yk}} & \frac{d\tau_k^1}{dV_{zk}} \\ \frac{d\tau_k^2}{dX_k} & \frac{d\tau_k^2}{dY_k} & \frac{d\tau_k^2}{dZ_k} & \frac{d\tau_k^2}{dV_{xk}} & \frac{d\tau_k^2}{dV_{yk}} & \frac{d\tau_k^2}{dV_{zk}} \\ \frac{d\tau_k^3}{dX_k} & \frac{d\tau_k^3}{dY_k} & \frac{d\tau_k^3}{dZ_k} & \frac{d\tau_k^3}{dV_{xk}} & \frac{d\tau_k^3}{dV_{yk}} & \frac{d\tau_k^3}{dV_{zk}} \\ \frac{d\nu_k^1}{dX_k} & \frac{d\nu_k^1}{dY_k} & \frac{d\nu_k^1}{dZ_k} & \frac{d\nu_k^1}{dV_{xk}} & \frac{d\nu_k^1}{dV_{yk}} & \frac{d\nu_k^1}{dV_{zk}} \\ \frac{d\nu_k^2}{dX_k} & \frac{d\nu_k^2}{dY_k} & \frac{d\nu_k^2}{dZ_k} & \frac{d\nu_k^2}{dV_{xk}} & \frac{d\nu_k^2}{dV_{yk}} & \frac{d\nu_k^2}{dV_{zk}} \\ \frac{d\nu_k^3}{dX_k} & \frac{d\nu_k^3}{dY_k} & \frac{d\nu_k^3}{dZ_k} & \frac{d\nu_k^3}{dV_{xk}} & \frac{d\nu_k^3}{dV_{yk}} & \frac{d\nu_k^3}{dV_{zk}} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

où les dérivées partielles du  $n^{\text{ème}}$  retard par rapport aux composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du vecteur position sont respectivement données par :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_k^n}{dX_k} = \frac{1}{c} \left( \frac{X_k - X_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{X_k - X_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \\ \frac{d\tau_k^n}{dY_k} = \frac{1}{c} \left( \frac{Y_k - Y_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{Y_k - Y_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \\ \frac{d\tau_k^n}{dZ_k} = \frac{1}{c} \left( \frac{Z_k - Z_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{Z_k - Z_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \end{cases} \quad (6.12)$$

Les dérivées partielles du  $n^{\text{ème}}$  retard par rapport aux composantes  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  du vecteur vitesse sont respectivement données par :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_k^n}{dV_{xk}} = 0 \\ \frac{d\tau_k^n}{dV_{yk}} = 0 \\ \frac{d\tau_k^n}{dV_{zk}} = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

les dérivées partielles du  $n^{\text{ème}}$  décalage Doppler par rapport aux composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du

vecteur position sont respectivement données par :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_k^n}{dX_k} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{V_{xk}}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} - (X_k - X_T^n) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|^3} + \frac{V_{xk}}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} - (X_k - X_R) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|^3} \right) \\ \frac{d\nu_k^n}{dY_k} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{V_{yk}}{\|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_T^n\|} - (Y_k - Y_T^n) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|^3} + \frac{V_{yk}}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} - (Y_k - Y_R) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|^3} \right) \\ \frac{d\nu_k^n}{dZ_k} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{V_{zk}}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} - (Z_k - Z_T^n) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|^3} + \frac{V_{zk}}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} - (Z_k - Z_R) \frac{\mathbf{V}_k \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R)}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|^3} \right) \end{cases} \quad (6.14)$$

et les dérivées partielles du  $n^{\text{ème}}$  décalage Doppler par rapport aux composantes  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  du vecteur vitesse sont respectivement données par :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_k^n}{dV_{xk}} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{X_k - X_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{X_k - X_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \\ \frac{d\nu_k^n}{dV_{yk}} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{Y_k - Y_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{Y_k - Y_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \\ \frac{d\nu_k^n}{dV_{zk}} = -\frac{f_c^n}{c} \left( \frac{Z_k - Z_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{Z_k - Z_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \end{cases} \quad (6.15)$$

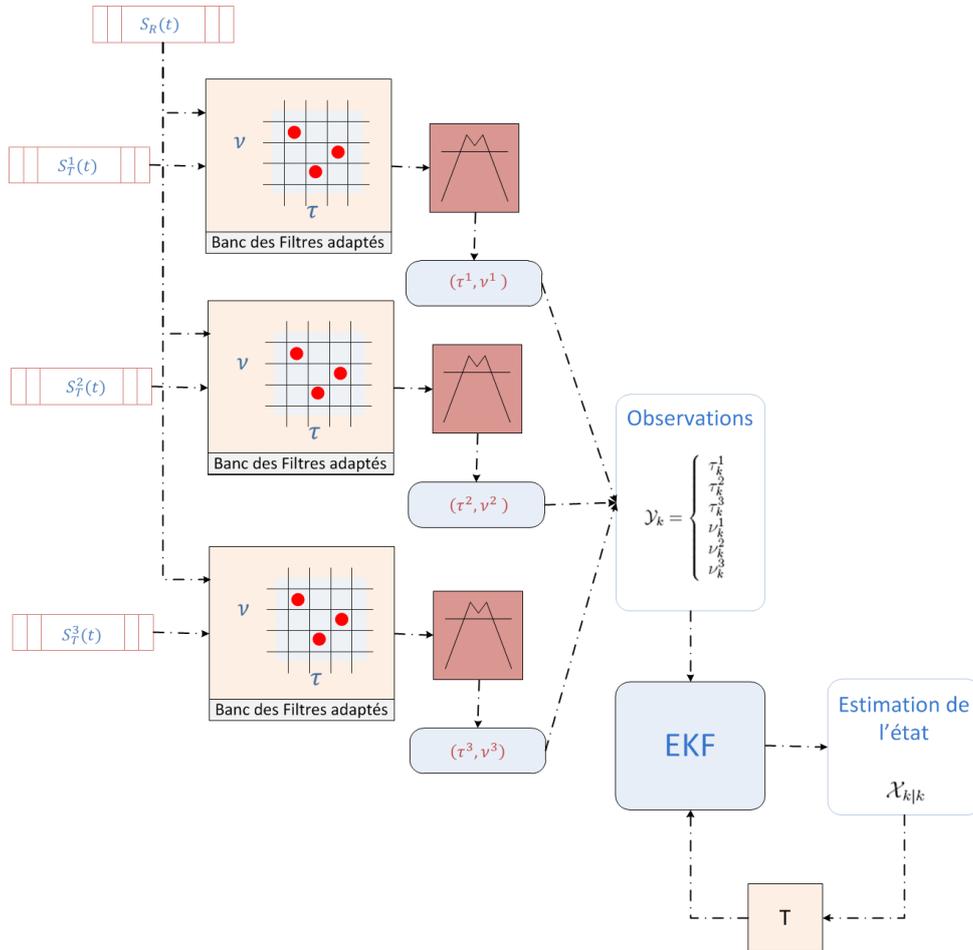


FIGURE 6.4 – Représentation schématique de la méthode classique

# Poursuite d'une cible par filtrage particulaire

---

## Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>69</b>
<b>7.2</b>	<b>Implémentation pratique de la méthode proposée</b>	<b>70</b>
7.2.1	Choix des observations	70
7.2.2	Équation d'état	71
7.2.3	Équation de mesure	72
7.2.4	Correction de l'instant d'observation	74
7.2.5	Algorithme Particulaire	74
<b>7.3</b>	<b>Application Numérique en mode poursuite</b>	<b>75</b>
7.3.1	Poursuite par filtrage particulaire pour un signal FM	75
7.3.2	Poursuite par filtrage particulaire pour un signal DVB-T	78
7.3.3	Comparaison entre la poursuite utilisant le signal FM et le signal DVB-T - conclusion	80
<b>7.4</b>	<b>Initialisation du filtre de poursuite - Phase de détection</b>	<b>81</b>
7.4.1	Principe de détection	81
7.4.2	Détection/poursuite des cibles	85
7.4.3	Comparaison avec la technique classique	86
<b>7.5</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>89</b>

---

## 7.1 Introduction

Les filtres particulaires présentent des performances intéressantes dans l'estimation des systèmes non linéaires et/ou non gaussiens. En raison de leur souplesse et de leur facilité de mise en oeuvre, ils sont devenus populaires pour la poursuite des cibles. Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une méthode classique de pistage pour un radar passif, qui utilise un filtre de Kalman étendu de poursuite après extraction des couples bistatiques. Le filtre particulaire peut remplacer le filtre de Kalman étendu en gardant la même chaîne conventionnelle de traitement du signal radar passif [Benavoli 2010]. Dans ce cas, le filtre particulaire diminue l'erreur d'estimation introduite par l'EKF à cause de la forte non-linéarité de l'équation d'observation. Mais l'erreur d'estimation reste dominée par la quantification due à la décomposition du domaine retard/Doppler en cases de taille  $\Delta\tau$  et  $\Delta\nu$ . Afin d'améliorer les performances de la poursuite particulaire en radar passif, nous proposons d'éliminer l'étape de seuillage (cf. 6.3.2) qui est responsable de la quantification.

Pour ce faire, nous proposons d'appliquer le filtrage particulaire directement sur la sortie non seuillée d'un corrélateur calée sur la case distance correspondant à la cible à poursuivre. Dans une telle approche, aucune quantification n'est alors introduite au niveau des observations. De plus,

la durée d'intégration est diminuée afin de poursuivre le mouvement de la cible d'une manière quasi continue. Avec cette approche, on peut négliger les variations de la phase de propagation dans la fenêtre d'intégration lors d'une corrélation à Doppler nul, et la pré-connaissance du décalage Doppler initial n'est plus nécessaire. Le faible rapport signal sur bruit résultant de cette courte durée d'intégration cohérente est compensé par l'intégration cohérente longue fournie par le filtrage particulière. Nous montrerons également que l'approche à longue durée d'intégration est encore possible. Dans ce cas, la corrélation ne se fait pas à Doppler nul mais à Doppler pré-détectée proche de celui de la cible.

## 7.2 Implémentation pratique de la méthode proposée

### 7.2.1 Choix des observations

Comme nous l'avons vu, dans le chapitre précédent, le filtre adapté implémente une batterie de corrélations croisées, chacune étant adaptée à un décalage temporel différent, en exploitant tous les valeurs possibles du décalage Doppler que le signal d'opportunité permet. Le filtre approprié de poursuite, introduit dans ce chapitre, utilise la sortie du filtre adapté entre le signal reçu et le signal de référence, évalué à un couple retard/Doppler adaptatif, soit  $(\tau = \theta_k, \nu = \xi_k)$  à l'instant  $t = kT$ . Il est bien connu que le maximum de la fonction de corrélation croisée tombe exactement au couple bistatique correspondant au vrai retard de propagation et au vrai décalage Doppler correspondant à la réflexion sur la cible. La largeur de bande du signal émis (FM ou DVB-T) détermine la largeur de corrélation utile à  $-3dB$ . La poursuite de la cible reste possible tant que l'échantillon de la corrélation est pris à l'intérieur de la bande utile définie ci-dessus. Idéalement, l'instant  $\theta_k$  et la fréquence  $\xi_k$  de corrélation sont établies à partir du retard bistatique et du décalage Doppler initiaux de la cible à poursuivre. Cela suppose que la position initiale et la vitesse initiale de la cible sont connues.

Le radar utilise une configuration multistatique avec trois émetteurs de radiodiffusion. Les signaux reçus et les signaux de référence sont divisés en fenêtres de durée  $T$ , qui désigne la durée d'intégration cohérente. Chaque fenêtre contient  $M$  échantillons du signal échantillonné à une cadence  $\frac{1}{T_s}$  en respectant le théorème de Shannon [Shannon 1948]. A chaque instant  $t = kT$  les fenêtres courantes du signal reçu et du signal de référence passent par un filtre adapté. La figure 7.1 montre le principe de la corrélation évaluée pour un couple retard/Doppler déterminé.

Le vecteur d'observation est formé par la fusion des trois valeurs de corrélation. La corrélation  $\Gamma_k^n(\theta_k^n, \xi_k^n)$  correspondant au  $n^{\text{ème}}$  émetteur est évaluée au couple bistatique  $(\theta_k^n, \xi_k^n)$ . Rappelons que la sortie du filtre adapté correspondant au  $n^{\text{ème}}$  émetteur à l'instant  $t = kT$  est donnée par :

$$\mathcal{Y}_k^n = \Gamma_k^n(\tau = \theta_k^n, \nu = \xi_k^n) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_R^n(kT + pT_s) S_T^n(kT + pT_s - \theta_k^n)^* e^{-j2\pi\xi_k^n pT_s} \quad (7.1)$$

où  $T_s$  désigne la période d'échantillonnage. Ainsi le vecteur d'observations non seuillées, à l'instant discret  $k$ , est donné par :

$$\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_k^1 = \Gamma_k^1(\theta_k^1, \xi_k^1) \\ \mathcal{Y}_k^2 = \Gamma_k^2(\theta_k^2, \xi_k^2) \\ \mathcal{Y}_k^3 = \Gamma_k^3(\theta_k^3, \xi_k^3) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

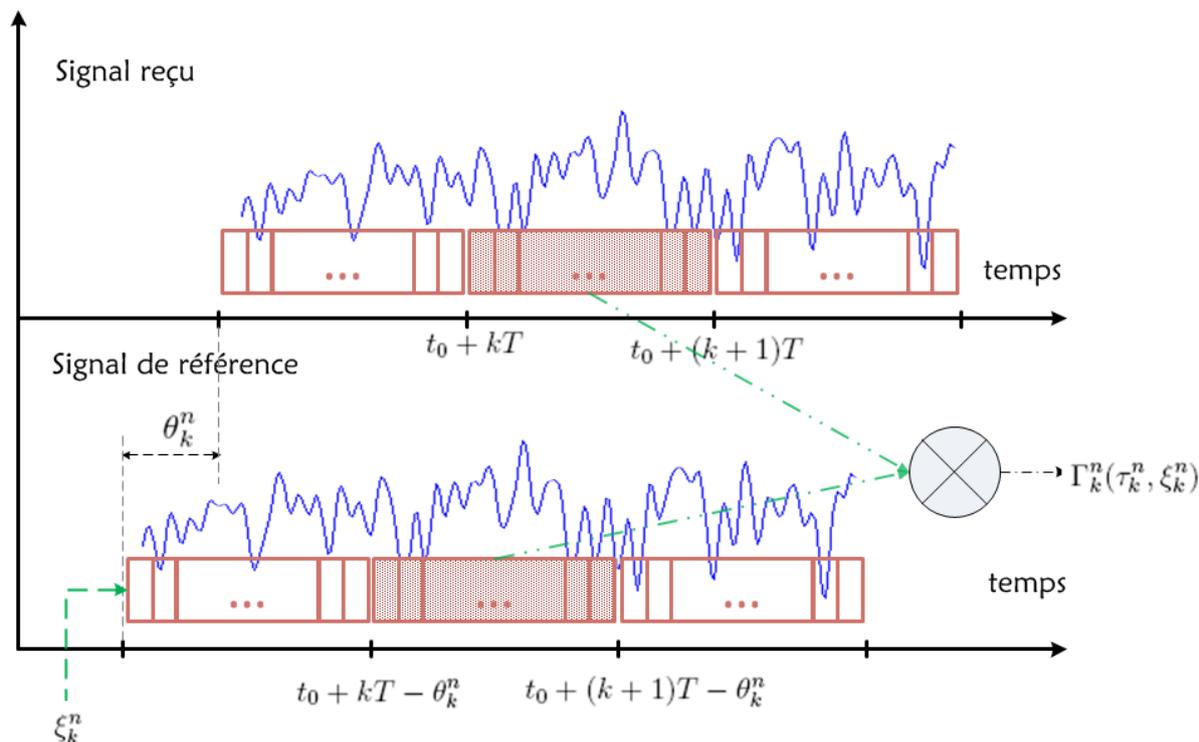


FIGURE 7.1 – Représentation schématique du corrélateur

En utilisant ces observations, à chaque instant discret  $k$ , un filtre particulière donne une estimation du vecteur position et du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes en suivant l'amplitude complexe et la position de pic de trois fonctions d'ambiguïté correspondant aux échos des signaux des trois émetteurs sur la cible. Le principe de la poursuite est représenté dans la figure 7.2. Pour plus de précision sur l'implémentation de cet algorithme voir [Jishy 2009, Jishy 2010b].

### 7.2.2 Équation d'état

L'avantage principal de la fusion des mesures venant des différents corrélateurs dans l'équation 7.2 est d'implémenter un filtre capable de donner une estimation directe du vecteur position et du vecteur vitesse de la cible. De plus, les observations sont une fonction de l'amplitude de propagation et de la phase de propagation. En résumé le vecteur d'état à l'instant  $k$  contient les variables suivantes :

- $\mathbf{A} = [A^1, A^2, A^3]^T$ , les amplitudes des signaux reçus en présence de 3 émetteurs décrivant les atténuations au cours de la propagation.
- $\mathbf{\Phi} = [\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3]^T$ , les phases de propagation des signaux reçus en présence de 3 émetteurs.
- $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$ , le vecteur cartésien de la position de la cible.
- $\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z]^T$ , le vecteur vitesse de la cible.

Le vecteur vitesse et le vecteur position sont modélisés par un modèle du second ordre à vitesse constante déjà décrit. Les variations de l'amplitude et de la phase sont modélisées par un bruit de processus gaussien. Toutefois, il est possible d'utiliser d'autres modèles plus pertinents. La dérive de la phase de propagation, due au Doppler, est supposée constante tout au long de la durée d'intégration  $T$ . Ce décalage Doppler est une fonction de la cinétique de cible. Pour le  $n^{\text{ème}}$  émetteur, le décalage Doppler  $\nu_k^n$  s'exprime en fonction du vecteur position et du vecteur vitesse

comme suit :

$$\nu_k^n = -\frac{f_c}{c_0} \mathbf{V}_k \cdot \left( \frac{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|} + \frac{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R}{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\|} \right) \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{X}_R$  et  $\mathbf{X}_T^n$  représentent respectivement le vecteur position du récepteur et du  $n^{\text{ème}}$  émetteur. Ainsi, le modèle d'état à l'instant  $t = kT$  est donné par :

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \Phi_k \\ \mathbf{X}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} \\ \Phi_{k-1} + 2\pi\nu_{k-1}T \\ \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{V}_{k-1}T \\ \mathbf{V}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{A_k} \\ \varepsilon_{\Phi_k} \\ \varepsilon_{X_k} \\ \varepsilon_{V_k} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \quad (7.4)$$

où  $\varepsilon_k = [\varepsilon_{A_k}, \varepsilon_{\Phi_k}, \varepsilon_{X_k}, \varepsilon_{V_k}]^T$ , est le bruit de processus qui est considéré comme un bruit blanc gaussien avec une matrice de covariance  $\mathbf{Q}_k$  diagonale et  $\nu_{k-1} = [\nu_{k-1}^1, \nu_{k-1}^2, \nu_{k-1}^3]^T$  est un vecteur contenant les décalages Doppler obtenus grâce à l'équation 7.3.

### 7.2.3 Équation de mesure

Dans le scénario d'une cible unique dont le décalage Doppler évolue lentement et les fluctuations d'amplitude sont négligées dans une fenêtre de pré-corrélation de durée  $T$ , le signal reçu venant du  $n^{\text{ème}}$  émetteur correspondant à l'instant discret  $k$  s'écrit pour  $t \in [0; T]$  :

$$S_R^n(t + kT) = \mathcal{A}^n(t + kT) S_T^n(t + kT - \tau^n(t + kT)) e^{j(\Phi^n(kT) + 2\pi\nu_{k-1}^n t)} + \mathbf{n}(t + kT) \quad (7.5)$$

avec :

$$\Phi^n(kT) = \Phi^n(kT - T/2) + \pi\nu_{k-1}^n T = \Phi_{k-1}^n + \pi\nu_{k-1}^n T \quad (7.6)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{A}^n(t + kT) \approx \mathcal{A}^n(kT + T/2) = \mathcal{A}_k^n & k \in [0, T] \\ \tau^n(t + kT) \approx \tau^n(kT + T/2) = \tau_k^n & k \in [0, T] \end{cases} \quad (7.7)$$

où l'on a posé  $\Phi_{k-1}^n = \Phi^n(kT - T/2)$  soit la phase du signal reçu au milieu de la  $(k-1)^{\text{ème}}$  fenêtre de corrélation. La fonction de corrélation évaluée pour le couple  $(\theta_k^n, \xi_k^n)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^n &= \Gamma_k^n(\theta_k^n, \xi_k^n) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_R^n(kT + pT_s) S_T^n(kT + pT_s - \theta_k^n)^* e^{-j2\pi\xi_k^n pT_s} \\ &= \mathcal{A}_k^n e^{j(\Phi_{k-1}^n + \pi\nu_{k-1}^n T)} \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_T^n(kT + pT_s - \tau_k^n) S_T^n(kT + pT_s - \theta_k^n)^* e^{-j2\pi(\xi_k^n - \nu_{k-1}^n) pT_s} + \eta_k^n \end{aligned} \quad (7.8)$$

où  $\eta_k^n$  est le bruit de mesure après la corrélation. Lorsque  $|(\xi_k^n - \nu_{k-1}^n)T| \ll 1$ , alors la rotation de la phase intervenant dans la sommation dans 7.8 est négligeable et donc on peut procéder à l'approximation :

$$e^{-j2\pi(\xi_k^n - \nu_{k-1}^n) pT_s} \simeq e^{-j\pi(\xi_k^n - \nu_{k-1}^n) T} \quad (7.9)$$

ce qui revient à approcher la rotation de phase pendant la fenêtre d'intégration par sa valeur au milieu de la fenêtre d'intégration. Par conséquent, la corrélation entre le signal reçu et le signal de

référence peut s'exprimer en fonction de la fonction d'auto-corrélation  $\chi_k^n(\tau_k^n - \theta_k^n, 0)$  du signal émis par le  $n^{\text{ème}}$  émetteur, soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^n &= \mathcal{A}_k^n e^{j(\Phi_{k-1}^n + \pi(2\nu_{k-1}^n - \xi_k^n)T)} \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_T^n(kT + pT_s - \tau_k^n) S_T^n(kT + pT_s - \theta_k^n)^* + \eta_k^n \\ &= \mathcal{A}_k^n e^{j(\Phi_k^n - \pi\xi_k^n T)} \chi_k^n(\theta_k^n - \tau_k^n, 0) + \eta_k^n \end{aligned} \quad (7.10)$$

La relation 7.10 montre que le calcul des observations prédites pour les différentes particules se font en interpolant la fonction d'auto-corrélation du signal émis aux instants  $\theta_k^n - \tau_k^n$ . Si la fonction d'auto-corrélation admet (ou peut être approchée par) par une forme analytique, la phase de mise-à-jour des poids des particules en sera grandement simplifiée. Le retard bi-statique  $\tau_k^n$  est exprimé en fonction du vecteur de position comme suit :

$$\tau_k^n = \frac{1}{c} (\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_R\| + \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_T^n\|) \quad (7.11)$$

Ainsi, la fonction d'observation est donnée par :

$$\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_k^1 \\ \mathcal{Y}_k^2 \\ \mathcal{Y}_k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_k^1 e^{j(\Phi_k^1 - j\pi\xi_k^1 T)} \chi_k^1(\theta_k^1 - \tau_k^1, 0) \\ \mathcal{A}_k^2 e^{j(\Phi_k^2 - j\pi\xi_k^2 T)} \chi_k^2(\theta_k^2 - \tau_k^2, 0) \\ \mathcal{A}_k^3 e^{j(\Phi_k^3 - j\pi\xi_k^3 T)} \chi_k^3(\theta_k^3 - \tau_k^3, 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_k^1 \\ \eta_k^2 \\ \eta_k^3 \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k) + \eta_k \quad (7.12)$$

où  $\eta_k = [\eta_k^1, \eta_k^2, \eta_k^3]^T$ , est le bruit de mesure qui est considéré comme un bruit gaussien avec une matrice de covariance  $\mathbf{R}_k$  diagonale.

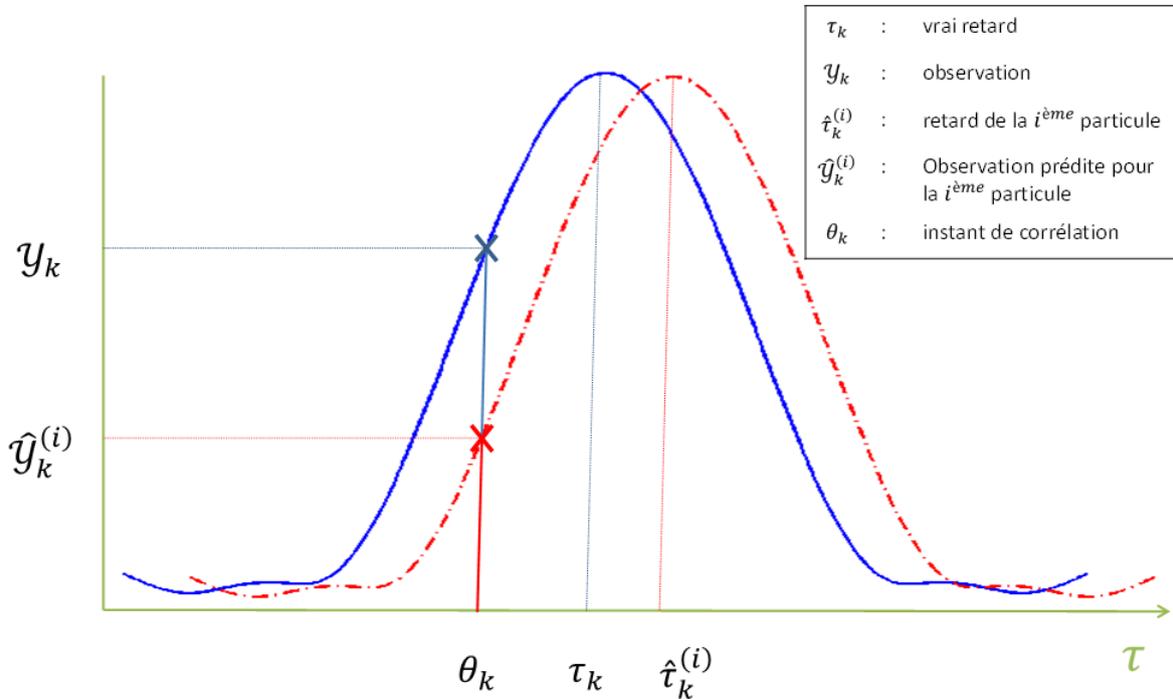


FIGURE 7.2 – Coupe à Doppler nul de la fonction d'ambiguïté correspondant à la position réelle de la cible non bruitée (trait plein) et à la position de la cible fournie par la  $i^{\text{ème}}$  hypothèse particulière (trait discontinu)

### 7.2.3.1 Approche à Doppler nul

La corrélation du signal reçu avec le signal de référence pendant une courte durée d'intégration évite les variations significatives de la phase de propagation dans la fenêtre de pré-corrélation. Dans cette approche, on n'a plus besoin d'effectuer la corrélation à différentes fréquences. Cela signifie qu'il est suffisant de faire une corrélation dans le domaine temporel avec une vitesse nulle. Par conséquent, la pré-connaissance du décalage Doppler n'est pas nécessaire. A la sortie du  $n^{\text{ème}}$  corrélateur, la fonction de corrélation évaluée au retard  $\tau = \theta_k^n$  et au Doppler  $\xi_k^n = 0$ , est donc donnée par :

$$\Gamma_k^n(\theta_k^n, 0) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} S_R^n(kT + pT_s) S_T^n(kT + pT_s - \theta_k^n)^* \quad (7.13)$$

Avec cette approche, l'implémentation du filtre adapté est moins compliqué, puisque toutes les corrélations se font à Doppler nul. La durée d'intégration maximale autorisant une corrélation à Doppler nul est déterminée par la valeur du décalage fréquentiel maximal  $\nu_{max}$ . Typiquement, on choisit  $T$  de manière que la variation de la phase de propagation dans la fenêtre d'intégration ne dépasse pas  $\frac{\pi}{2}$ , soit :

$$T < \frac{1}{4\nu_{max}} \quad (7.14)$$

### 7.2.4 Correction de l'instant d'observation

La corrélation est établie à partir du couple bistatique initial de la cible, soit  $(\theta_0^n, \xi_0^n) = (\tau_0^n, \nu_0^n)$ . A cause du mouvement de la cible, il est possible que le couple où on relève la mesure de corrélation soit loin du vrai couple bistatique de manière que la mesure est prise à l'extérieur de la bande de corrélation utile déjà définie. Ainsi, il faut compenser la variation du retard et du décalage Doppler. Ce réglage se fait en utilisant les estimations du filtre. On distingue plusieurs approches de correction : (1) dans le cas d'une faible résolution en retard et d'une courte durée d'intégration cohérente, le couple bistatique varie légèrement entre deux instants successifs. Ainsi la correction du couple se fait périodiquement tous les  $m$  instants, avec  $T_c = mT$  le temps minimal durant lequel la mesure reste à l'intérieur de la bande de corrélation utile. Les équations du réglages sont alors données par :

$$\begin{cases} \xi_k^n = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \hat{\nu}_{k-p}^n \\ \theta_k^n = \theta_{k-m}^n - m \frac{\xi_k^n}{f_c^n} T \end{cases} \quad (7.15)$$

où  $\hat{\nu}_k^n$  désigne le décalage Doppler de la cible par rapport au  $n^{\text{ème}}$  émetteur estimé par le filtre particulaire. (2) Dans le cas d'une grande résolution en retard et d'une longue durée d'intégration cohérente, le couple bistatique varie considérablement entre deux instants successifs. Ainsi la correction du couple doit se faire à tous les instants, soit :

$$\begin{cases} \xi_k^n = \hat{\nu}_{k-1}^n \\ \theta_k^n = \theta_{k-1}^n - \frac{\xi_k^n}{f_c^n} T \end{cases} \quad (7.16)$$

### 7.2.5 Algorithme Particulaire

Notre système de poursuite utilise un algorithme particulaire standard de type **SIR**. La densité initiale  $p(\mathcal{X}_0)$  est supposée uniforme. L'intervalle, où les particules initiales  $\{\mathcal{X}_0^{(i)}\}_{i=0}^{N_p}$  sont générées, est déterminée par la valeur initiale  $\mathcal{X}_0$  de l'état et par l'incertitude initiale  $\Delta\mathcal{X}_0$  sur cette valeur. Comme l'on a vu dans le chapitre 4, le filtre **SIR** choisit la densité de transition

comme densité d'importance. La densité de probabilité du bruit de processus est gaussienne centrée et de matrice de covariance  $\mathbf{Q}_k$ . Ainsi, les particules  $\{\mathcal{X}_k^{(i)}\}_{i=0}^{N_p}$  à l'instant  $k$  sont générées à partir des particules précédentes comme suit :

$$\mathcal{X}_k^{(i)} \sim p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_k^{(i)}), \mathbf{Q}_k) \quad (7.17)$$

La phase de mise-à-jour du poids  $w_k^{(i)}$  de la  $i^{\text{ème}}$  particule est fait selon la relation 4.32. La densité gaussienne du bruit de mesure nous permet d'écrire :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_k, \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{(i)}), \mathbf{R}_k) \quad (7.18)$$

Le filtre implémente une phase du ré-échantillonnage éventuelle en utilisant la taille effective d'échantillons comme indicateur de dégénérescence (cf. 4.4.1).

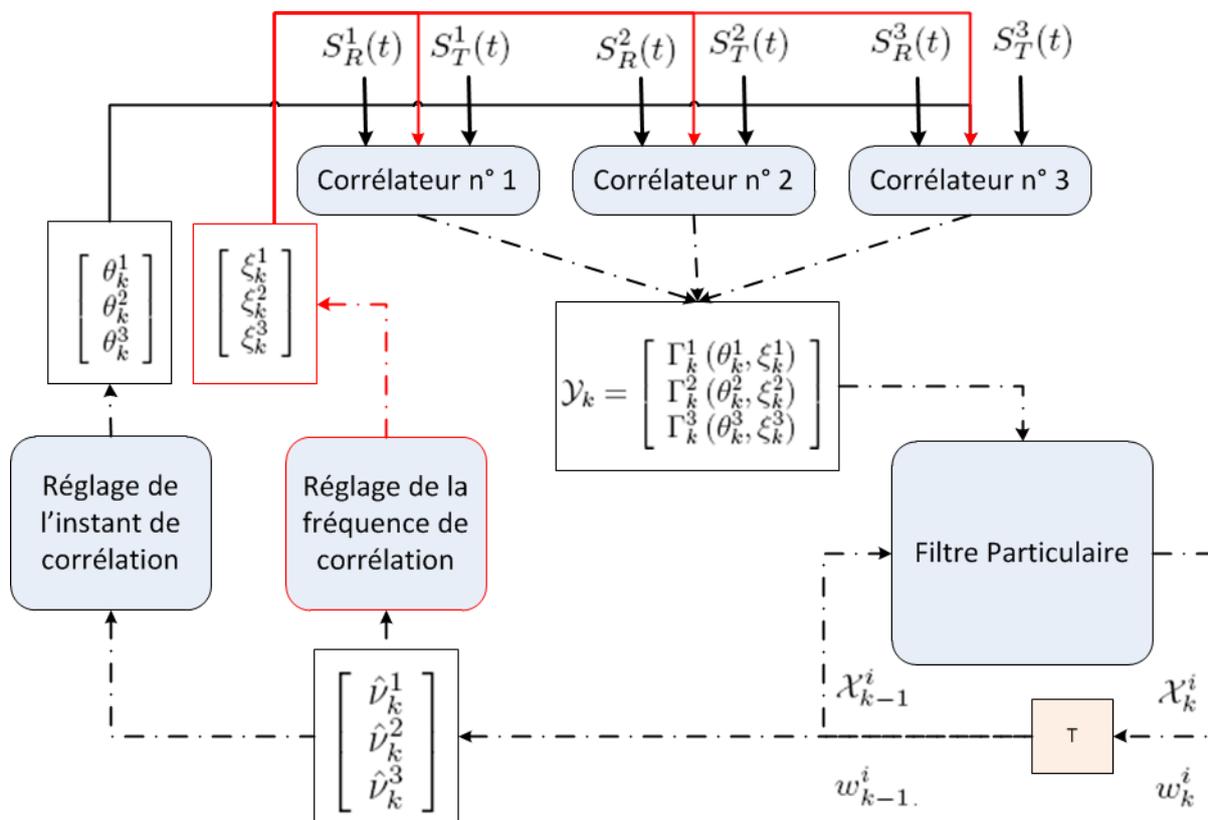


FIGURE 7.3 – Une représentation schématique globale de la technique PF proposée pour la poursuite

La figure 7.3 montre les différentes étapes de la méthode de poursuite proposée. Dans le cas particulier où l'on force  $(\xi_k^1, \xi_k^2, \xi_k^3)$  à  $(0, 0, 0)$  le mécanisme est inchangé, sauf pour le réglage de la fréquence de corrélation qui disparaît.

## 7.3 Application Numérique en mode poursuite

### 7.3.1 Poursuite par filtrage particulaire pour un signal FM

L'exemple suivant illustre les résultats d'estimation de la trajectoire d'une cible unique par la méthode particulaire introduite dans ce chapitre en utilisant trois stations FM dont les émissions

réfléchies sur la cible sont reçues par un radar passif. La fréquence porteuse et le lieu géométrique de chaque station FM par rapport au récepteur sont donnés par le tableau 7.1 :

	Fréquence Porteuse $f_c^n (MHz)$	Vecteur position $\mathbf{X}_T^n (m)$
Station FM $n \doteq 1$	80	$[-50000, -30000, -3]^T$
Station FM $n \doteq 2$	90	$[-10000, -20000, 2]^T$
Station FM $n \doteq 3$	100	$[30000, 0, 10]^T$

TABLE 7.1 – Fréquences porteuses et lieux géométriques des stations FM

Les trois émetteurs diffusent des signaux modulés à partir de bruits blanc colorés de largeur de bande  $f_w = 15kHz$  et d'écart-type  $\sigma_m \approx \frac{1}{3.5}$ , ce qui permet une excursion fréquentielle de l'ordre de  $75kHz$  (cf. 5.3.1.2). Les signaux reçus et les signaux de référence sont échantillonnés avec une période  $T_s = 5\mu s$ . Le rapport signal sur bruit (RSB) en sortie de l'échantillonneur avant l'intégration cohérente est égal à :

$$SNR = -30dB$$

qui correspond au RSB limite de fonctionnement des méthodes classiques employées chez THALES Air Systems.

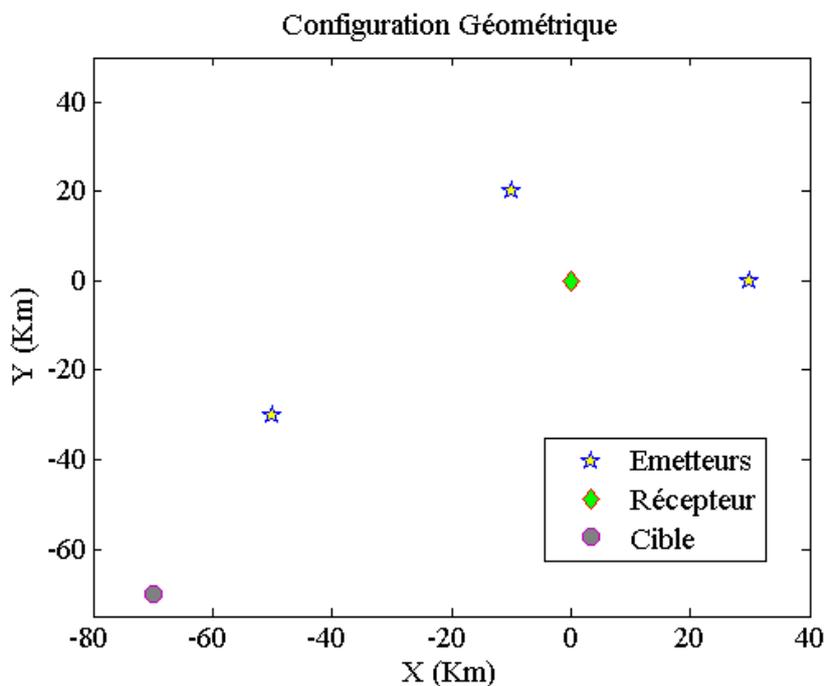


FIGURE 7.4 – Configuration Géométrique - poursuite utilisant le signal FM

L'objectif du filtre est de poursuivre la cible, la position initiale de la cible étant supposée imparfaitement connue à partir d'un système de détection préliminaire. Les incertitudes initiales sur la position, la vitesse et les phases de propagation sont donnée par le tableau 7.2 :

Variable	Incertitude initiale
$X, Y$ ou $Z$	$1500m$
$V_x, V_y$ ou $V_z$	$500m/s$
$\Phi^1, \Phi^2$ ou $\Phi^3$	$\pi/2$

TABLE 7.2 – Incertitudes sur la position, la vitesse et la phase de propagation en utilisant le signal FM

Le nombre de particules  $N_s$  qui couvrent l'espace d'état est de l'ordre de 500 particules, ce nombre étant relativement faible. En fait, le vecteur d'état contient un grand nombre des variables (12 variables), d'où la nécessité d'augmenter le nombre des particules pour que l'approximation de la densité de probabilité soit satisfaisante. Par contre, choisir un trop grand nombre des particules pourrait aboutir à une complexité de calcul trop importante et une surcharge de la mémoire. Le seuil  $N_{Th}$  du nombre effectif des particules est fixé à 60% du nombre de particules, soit :  $N_{Th} = 300$ .

Les figures 7.5 illustrent les résultats de l'estimation de la composante  $X$  (7.5(a)) du vecteur position, de la composante  $V_x$  (7.5(b)) du vecteur vitesse, de la distance bistatique (7.5(c)) et du décalage Doppler (7.5(d)) selon un canal d'émission. La courbe en bleu correspond à la vraie trajectoire et la courbe en rouge correspond à l'estimé du FP.

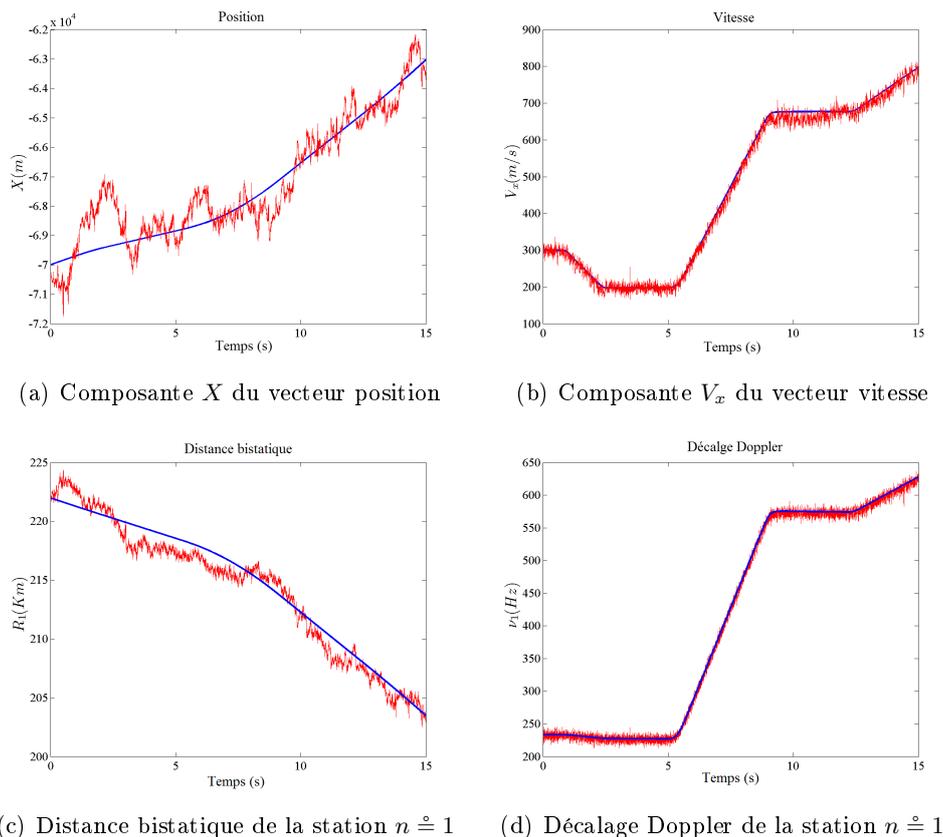


FIGURE 7.5 – Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal FM

Les échantillons à la sortie des corrélateurs sont pris tous les  $T = 1ms$ . Cette durée d'intégration est relativement courte :  $\nu_{max}T < 1/4$ . Ainsi, la corrélation à Doppler nul est possible sans

dégrader la forme du pic de corrélation. Puisque la largeur de bande du signal FM n'est pas très importante, la correction de l'instant de corrélation se fait selon l'équation 7.15 en choisissant un pas  $m = 1000$ . Après la corrélation, le rapport signal sur bruit devient :

$$SNR_T = -30 + 10 \log_{10} \frac{T}{T_s} \simeq -7dB.$$

### 7.3.2 Poursuite par filtrage particulière pour un signal DVB-T

Dans ce paragraphe, nous montrons les résultats de la méthode de poursuite particulière en utilisant des signaux de type DVB-T. La configuration spatiale des émetteurs et du récepteur est identique à celle appliquée dans les simulations avec les signaux FM. Les trois émetteurs diffusent des signaux modulés en QAM et modulés en OFDM avec une largeur de bande de 8MHz. Les signaux reçus et les signaux de référence sont échantillonnés avec une période égale à la moitié de la période élémentaire du signal OFDM en bande de base, soit :

$$T_s = \frac{1}{2}T_e = \frac{1}{2} \frac{7}{64} \mu s \approx 54.6ns.$$

Les fréquences porteuses de trois stations DVB-T sont données par :

	Fréquence porteuse $f_c^n (MHz)$
Station DVB-T $n \doteq 1$	400
Station DVB-T $n \doteq 2$	350
Station DVB-T $n \doteq 3$	320

TABLE 7.3 – Les fréquences porteuses des stations DVB-T

Le rapport signal sur bruit (RSB) avant l'intégration cohérente est égal à :

$$SNR = -40dB$$

qui correspond au RSB limite de fonctionnement des méthodes classiques employées chez THALES Air Systems. Les incertitudes initiales sur la position, la vitesse et les phases de propagation sont donnée par le tableau 7.4 :

Variable	Incertitude initiale
$X, Y$ ou $Z$	100m
$V_x, V_y$ ou $V_z$	500m/s
$\Phi^1, \Phi^2$ ou $\Phi^3$	$\pi/2$

TABLE 7.4 – Incertitudes sur la position, la vitesse et la phase de propagation en utilisant le signal DVB-T

Le nombre de particules  $N_s$  qui couvrent l'espace d'état est de l'ordre de 500 particules, comme dans l'exemple du signal FM.

Les figures 7.6 illustrent les résultats de l'estimation de la composante  $X$  du vecteur position (7.6(a)), de la composante  $V_x$  du vecteur vitesse (7.6(b)), de la distance bistatique (7.6(c)) et du décalage Doppler (7.6(d)) selon un canal d'émission. La courbe en bleu correspond à la vraie trajectoire et la courbe en rouge correspond à l'estimée du FP. Les signaux DVB-T sont émis en mode  $2k$ . La durée d'intégration est égale à la durée d'un symbole OFDM, soit :  $T = T_s = 224\mu s$ .

Cette durée d'intégration est relativement courte :  $\nu_{max}T < 1/4$ . Ainsi la corrélation est faite à Doppler nul. Puisque la largeur de bande du signal DVB-T est assez importante, le filtre devra corriger l'instant de corrélation selon l'équation 7.15. La compensation du décalage de l'instant de corrélation se fait tous les  $m = 100$  itérations. Après la corrélation, le rapport signal sur bruit devient :

$$SNR_T \approx -4dB.$$

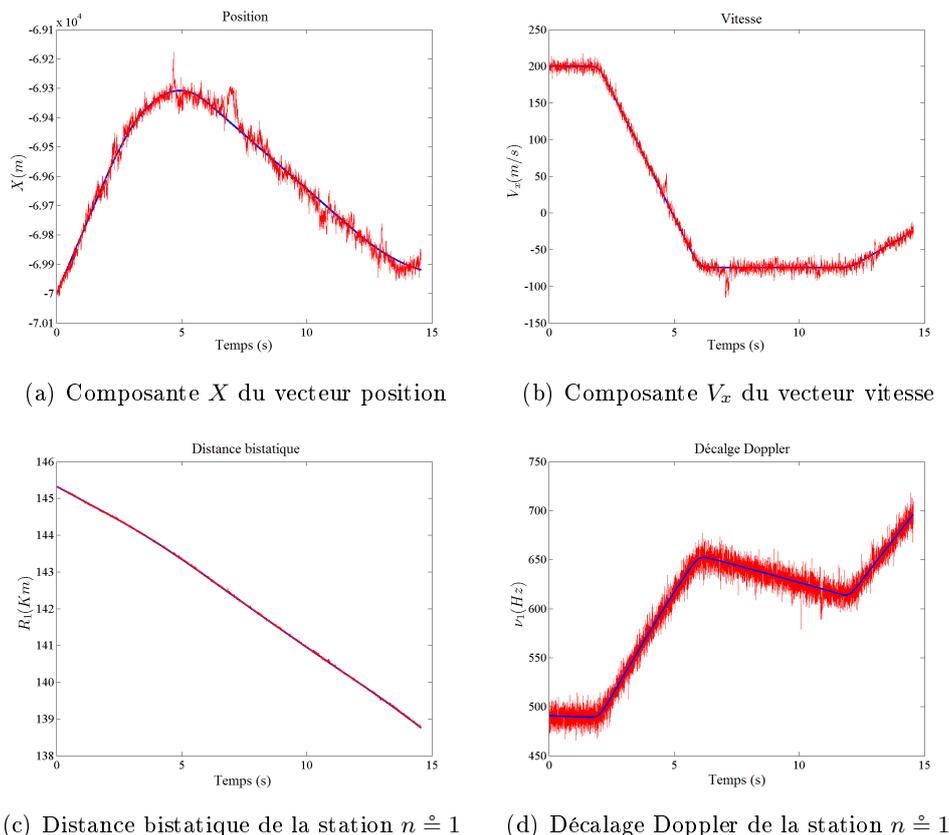
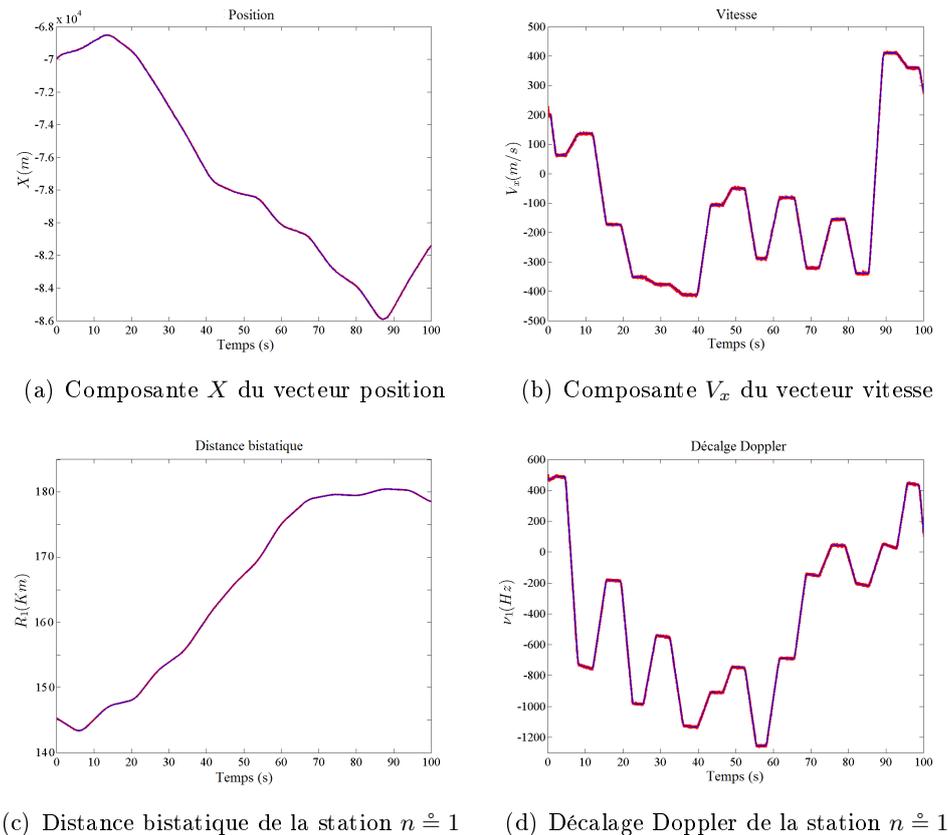


FIGURE 7.6 – Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal DVB-T - mode  $2k$

Les figures 7.7 illustrent les résultats de l'estimation de la composante  $X$  du vecteur position (7.7(a)), de la composante  $V_x$  du vecteur vitesse (7.7(b)), de la distance bistatique (7.7(c)) et du décalage Doppler (7.7(d)) en utilisant des signaux DVB-T en mode  $8k$ . La courbe en bleu correspond à la vraie trajectoire et la courbe en rouge correspond à l'estimée du FP. Le nombre des particules est égale  $N_p = 500$ . La durée d'intégration est égale à la durée d'un symbole OFDM, soit :  $T = T_S = 1120\mu s$ . Cette durée d'intégration est relativement longue :  $\nu_{max}T > 1$ . Ainsi, la corrélation à Doppler nul dégrade la forme du pic de corrélation. Donc, le corrélateur opère à un décalage Doppler non nul, mais proche du vrai Doppler de la cible. Le fait que la durée d'intégration est longue et que la résolution en retard bistatique est assez grande, l'instant et la fréquence de corrélation varient rapidement. Le filtre devra corriger cet instant et cette fréquence. La correction se fait à chaque instant en utilisant l'équation 7.16. Après la corrélation, le rapport signal sur bruit devient :

$$SNR_T \simeq 3dB.$$

FIGURE 7.7 – Estimation de la trajectoire d'une cible en utilisant le signal DVB-T - mode  $8k$ 

### 7.3.3 Comparaison entre la poursuite utilisant le signal FM et le signal DVB-T - conclusion

Les résultats déjà montrés révèlent les bonnes performances de la technique de filtrage particulaire en exploitant les signaux de la radio FM et les signaux de la télévision numérique. On constate que l'algorithme particulaire poursuit le mouvement de la cible avec une précision satisfaisante dans le deux cas (FM ou DVB-T) même en présence de manoeuvres sévères (jusqu'à une accélération de  $10g$ ). Du fait que le FP poursuit une cible avec une incertitude initiale raisonnable, le temps de convergence est relativement faible (de l'ordre de la dizaine d'itérations). La racine de l'erreur quadratique moyenne est de l'ordre de la centaine de mètres pour une poursuite avec un signal FM, et de l'ordre de la dizaine de mètres seulement pour une poursuite avec un signal numérique DVB-T aux RSB considérés. Ces résultats étaient prévisibles du fait que l'erreur quadratique moyenne est directement liée à l'inverse de largeur de la bande du signal.

L'avantage principal de la technique du filtrage particulaire présentée est qu'elle assure un traitement complet et homogène du signal en partant du niveau I& Q jusqu'au niveau de poursuite. De plus, l'élimination de l'étape de seuillage, qui est un traitement non-linéaire entraînant une perte d'informations, supprime la nécessité d'intégrer des techniques de filtrage des fausses alarmes et de prise en compte des non-détections, comme c'est le cas dans les méthodes classiques décrites dans le chapitre 6. On peut conjecturer que le FP offrira une solution très attractive au niveau de l'architecture pour les futurs systèmes de détection et de poursuite en radar passif.

## 7.4 Initialisation du filtre de poursuite - Phase de détection

Dans ce qui précède, nous avons démontré les bonnes performances du filtrage particulaire dans la poursuite d'une cible unique, même en présence de manoeuvres et à faible rapport signal sur bruit. Il reste à traiter le problème d'initialisation et le cas multi-cible. Dans ce paragraphe, nous présentons un système de détection intégrant l'algorithme particulaire de poursuite développé dans les paragraphes précédents, précédé d'une extraction par seuillage des couples bistatiques en considérant une corrélation à durée d'intégration longue. Les couples extraits servent à initialiser des filtres de poursuite. Ainsi, le système permet une détection conjointe de plusieurs cibles, puis réalise une poursuite avec un filtre particulaire par cible.

### 7.4.1 Principe de détection

Le traitement est divisé en deux étapes : (1) l'étape de détection consiste à extraire les retards bistatiques et les décalages Doppler dont la corrélation dépasse un seuil adaptatif fixé pour un taux de fausse alarme constant comme dans les techniques classiques présentées dans le chapitre 6. La corrélation des signaux se fait en intégrant sur une longue durée  $T_{Dtc} = N_{Dtc}T_s$ . (2) L'étape de poursuite est réalisée par l'algorithme particulaire avec une durée  $T_{Trk}$  subdivisée en durées d'intégration  $T$  assez courtes comme dans les paragraphes 7.2 et 7.3.

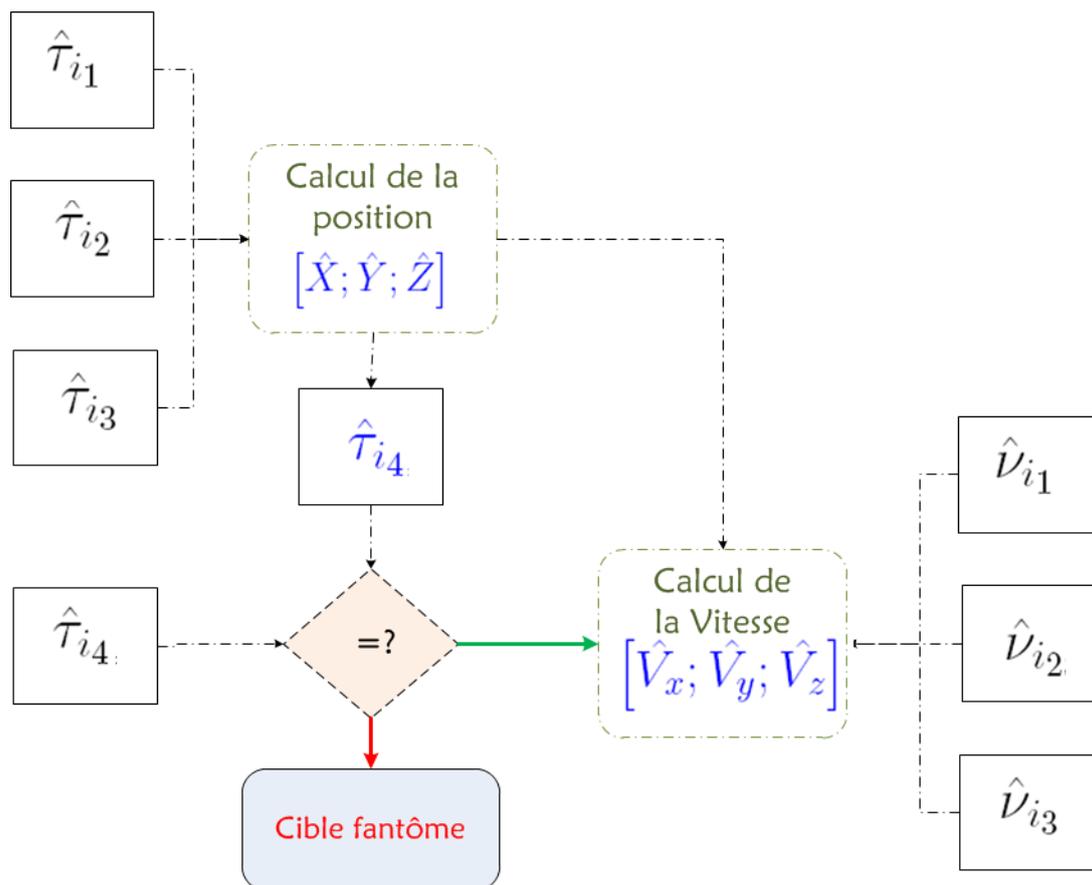


FIGURE 7.8 – Initialisation de la poursuite particulaire par une méthode de triangulation utilisant 4 émetteurs

On note  $L_n$  le nombre d'extractions correspondant à des dépassements de seuil dans le filtre adapté au  $n^{\text{ème}}$  émetteur. Ces extractions seront notées par :  $\{(\tilde{\tau}_{i_n}, \tilde{\nu}_{i_n})\}_{i_n=1}^{L_n}$ . La méthode d'initialisation consiste à localiser la cible sachant le triplet  $(\tilde{\tau}_{i_1}, \tilde{\tau}_{i_2}, \tilde{\tau}_{i_3})$  correspondant à trois bases bistatiques. Soit  $N_T$  le nombre de cibles, on aura alors  $L_1 \times L_2 \times L_3$  triplets de type  $(\tilde{\tau}_{i_1}, \tilde{\tau}_{i_2}, \tilde{\tau}_{i_3})$  à examiner, parmi lesquels  $N_T$  correspondent à des cibles effectives et les autres correspondent à ce qu'on appelle des "cibles fantômes". Une façon de filtrer les cibles fantômes consiste à rajouter des détections en provenance d'autres émetteurs.

Une fois qu'une cible détectée est classifiée comme une vraie cible, les trois décalages Doppler  $(\tilde{\nu}_{i_1}, \tilde{\nu}_{i_2}, \tilde{\nu}_{i_3})$  sont utilisés pour déterminer son vecteur vitesse. La figure 7.8 illustre l'initialisation de la poursuite particulière par une méthode de triangulation qui utilise un quatrième émetteur pour filtrer les cibles fantômes. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer comment déterminer analytiquement le vecteur position et le vecteur vitesse à partir des mesures bistatiques.

#### 7.4.1.1 Localisation d'une cible à partir d'un radar bi-statique

La relation entre la distance bistatique et les composantes du vecteur position est une relation non-linéaire. Plusieurs approches consistent à linéariser ces équations et déterminer des solutions par des méthodes numériques. Cependant il existe une méthode analytique qui fournit la solution exacte sans aucune linéarisation ni aucune approximation [Mojarrabi 2003].

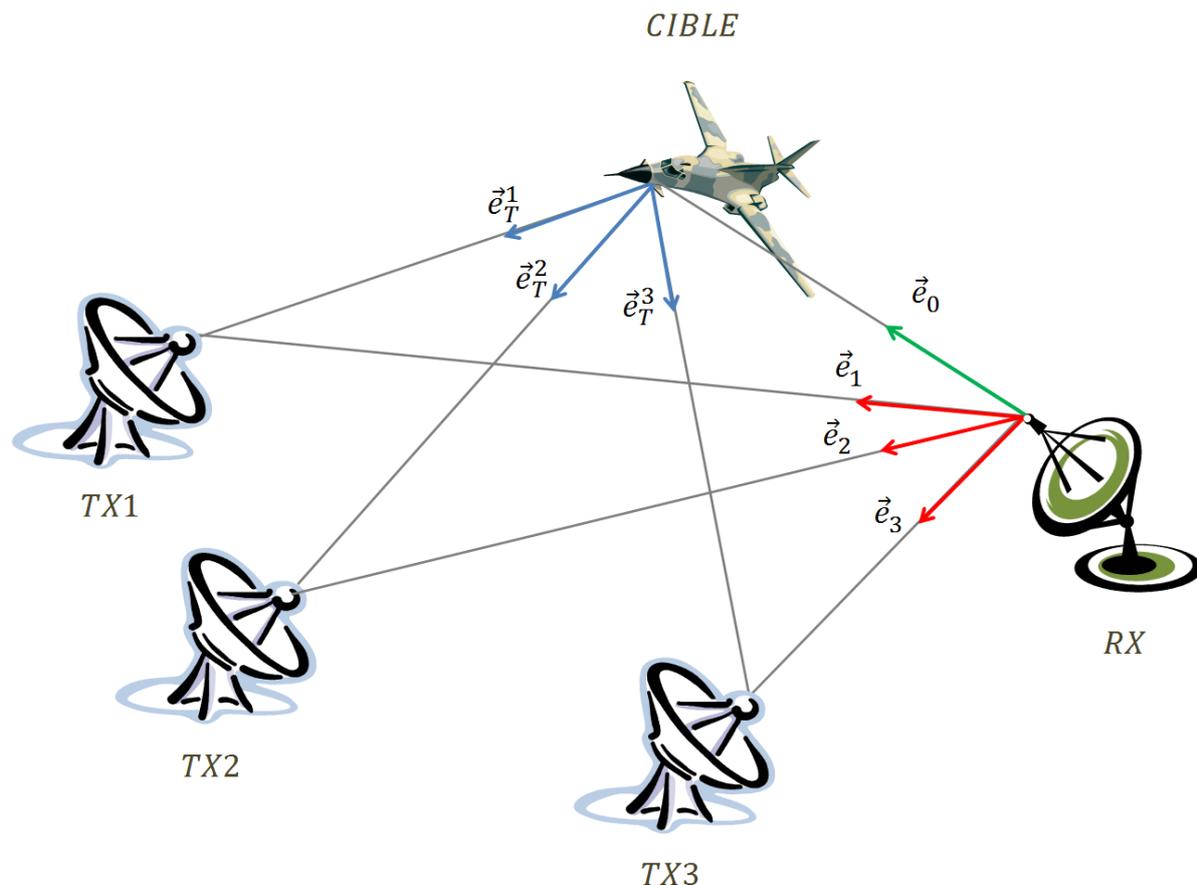


FIGURE 7.9 – Scénario de localisation des cibles par un système multi-émetteurs

L'origine du repère cartésien est localisé au lieu de la réception. On note (voir Figure 7.9) :

- $\vec{e}_0$  : vecteur unitaire dans la direction récepteur-cible ;  
 $\vec{e}_n$  : vecteur unitaire dans la direction récepteur- $n^{\text{ème}}$  émetteur ;  
 $\vec{e}_{T,n}$  : vecteur unitaire dans la direction cible- $n^{\text{ème}}$  émetteur ;  
 $R_R$  : distance directe récepteur-cible ;  
 $L_n$  : distance directe récepteur- $n^{\text{ème}}$  émetteur ;  
 $R_{T,n}$  : distance directe cible- $n^{\text{ème}}$  émetteur ;  
 $R_{b,n}$  : distance bistatique récepteur-cible- $n^{\text{ème}}$  émetteur ;  
 $\vec{e}_V$  : vecteur unitaire de la vitesse de la cible ;  
 $V$  : norme du vecteur vitesse de la cible.

Dans un premier temps nous déterminerons le vecteur position, noté  $\mathbf{X}$ , à partir de trois distances bistatiques obtenues à l'aide de trois différentes configurations bistatiques. Le vecteur position est donné par :

$$\mathbf{X} = R_R \vec{e}_0 \quad (7.19)$$

Dans un second temps, nous allons détailler la détermination de la solution exacte du vecteur vitesse, noté  $\mathbf{V}$ , en utilisant le résultat du vecteur position et les trois décalages Doppler que subissent les signaux dans les différentes configurations bistatiques, publiée dans [Jishy 2010a]. Le vecteur vitesse de la cible est donné par :

$$\mathbf{V} = V \vec{e}_V \quad (7.20)$$

La distance bi-statique dans le triangle bistatique défini par le trajet  $n^{\text{ème}}$  émetteur-cible-récepteur est donnée par :

$$R_{b,n} = R_R + R_{T,n} \quad (7.21)$$

La relation de Chasles nous permet d'écrire la relation suivante :

$$R_R \vec{e}_0 + R_{T,n} \vec{e}_{T,n} = L_n \vec{e}_n. \quad (7.22)$$

Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle bistatique considéré donne :

$$R_{T,n}^2 = R_R^2 + L_n^2 - 2R_R L_n \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_n. \quad (7.23)$$

En combinant les équations 7.21 et 7.23, on obtient :

$$(R_{b,n} - R_R)^2 = L_n^2 + R_R^2 - 2R_R L_n \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_n. \quad (7.24)$$

L'équation 7.24 est valide pour  $n = 1, 2, 3$ . La position du récepteur et celles des trois émetteurs sont supposées connues. Ce système d'équations admet deux solutions différentes. Chaque solution peut s'écrire en fonction de  $R_R$  et  $\vec{e}_0$ . En réarrangeant l'équation 7.24 on peut exprimer  $R_R$  en fonction de  $\vec{e}_0$  :

$$R_R = \frac{1}{2} \frac{L_n^2 - R_{b,n}^2}{L_n \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_n - R_{b,n}} \quad (7.25)$$

Éliminons  $R_R$  en égalisant les membres de droite dans l'équation 7.25 pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , répétons le même procédure pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , on obtient l'équation suivante qui est valide pour  $n = 1, 2$  :

$$\left[ \frac{L_n}{L_n^2 - R_{b,n}^2} \vec{e}_n - \frac{L_{n+1}}{L_{n+1}^2 - R_{b,n+1}^2} \vec{e}_{n+1} \right] \cdot \vec{e}_0 = \frac{R_{b,n}}{L_n^2 - R_{b,n}^2} - \frac{R_{b,n+1}}{L_{n+1}^2 - R_{b,n+1}^2} \quad (7.26)$$

En utilisant une abréviation appropriée, on peut écrire 7.26 sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 \cdot \vec{e}_0 = U_1 \\ \vec{F}_2 \cdot \vec{e}_0 = U_2 \end{cases} \quad (7.27)$$

où :

$$\begin{cases} \vec{F}_n = \frac{L_n}{L_n^2 - R_{b,n}^2} \vec{e}_n - \frac{L_{n+1}}{L_{n+1}^2 - R_{b,n+1}^2} \vec{e}_{n+1} \\ U_n = \frac{R_{b,n}}{L_n^2 - R_{b,n}^2} - \frac{R_{b,n+1}}{L_{n+1}^2 - R_{b,n+1}^2} \end{cases} \quad (7.28)$$

L'équation 7.27 représente un système d'équations aux produits scalaires constants. La résolution de ce système est détaillée dans [Mojarrabi 2003]. On note  $\vec{G} = \vec{F}_1 \times \vec{F}_2$  et  $\vec{H} = U_2 \vec{F}_1 - U_1 \vec{F}_2$ , alors les valeurs  $\vec{e}_0$  solutions de 7.27 sont données par la relation suivante :

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{\vec{G} \cdot \vec{G}} \left[ (\vec{G} \times \vec{H}) \pm \vec{G} \sqrt{\vec{G} \cdot \vec{G} - \vec{H} \cdot \vec{H}} \right] \quad (7.29)$$

On peut alors déterminer la distance  $R_R$  en utilisant 7.25. Les deux vecteurs  $\vec{G}$  et  $\vec{H}$  peuvent s'exprimer en fonction des données bistatiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \left( \frac{L_1}{L_1^2 - R_{b,1}^2} \vec{e}_1 - \frac{L_2}{L_2^2 - R_{b,2}^2} \vec{e}_2 \right) \times \left( \frac{L_2}{L_2^2 - R_{b,2}^2} \vec{e}_2 - \frac{L_3}{L_3^2 - R_{b,3}^2} \vec{e}_3 \right) \\ &= \frac{L_1}{L_1^2 - R_{b,1}^2} \frac{L_2}{L_2^2 - R_{b,2}^2} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \frac{L_2}{L_2^2 - R_{b,2}^2} \frac{L_3}{L_3^2 - R_{b,3}^2} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \frac{L_3}{L_3^2 - R_{b,3}^2} \frac{L_1}{L_1^2 - R_{b,1}^2} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\vec{H} = \frac{R_{b,2} L_1 \vec{e}_1 - R_{b,1} L_2 \vec{e}_2}{(L_1^2 - R_{b,1}^2)(L_2^2 - R_{b,2}^2)} + \frac{R_{b,3} L_2 \vec{e}_2 - R_{b,2} L_3 \vec{e}_3}{(L_2^2 - R_{b,2}^2)(L_3^2 - R_{b,3}^2)} + \frac{R_{b,1} L_3 \vec{e}_3 - R_{b,3} L_1 \vec{e}_1}{(L_3^2 - R_{b,3}^2)(L_1^2 - R_{b,1}^2)} \quad (7.31)$$

Dans le cas où le récepteur et les émetteurs sont coplanaires, une des deux solutions admet une composante en  $z$  négative. Cette solution est éliminée. Une fois la cible localisée, les trois décalages Doppler sont utilisés pour déterminer son vecteur vitesse. A partir de l'équation 2.7, le décalage Doppler  $\nu_n$  que subit le signal émis par le  $n^{\text{ème}}$  émetteur est donné par :

$$\nu_n = -\frac{f_c^n}{c} \frac{dR_{b,n}}{dt} = -\frac{V f_c^n}{c} \vec{e}_V \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_{T,n}) \quad (7.32)$$

où  $f_c^n$  est la fréquence porteuse du  $n^{\text{ème}}$  émetteur. L'équation 7.32 est valide pour  $n = 1, 2, 3$ . La norme de la vitesse de la cible est donnée par la relation suivante :

$$V = -\frac{c \nu_n}{f_c^n} \frac{1}{\vec{e}_V \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_{T,n})} \quad (7.33)$$

Éliminons  $V$  en égalisant les membres de droite dans l'équation 7.33 pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , répétons le même procédure pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , on obtient l'équation suivante qui est valide pour  $n = 1, 2$  :

$$\frac{\nu_n}{f_c^n} \frac{1}{\vec{e}_V \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_{T,n})} = \frac{\nu_{n+1}}{f_c^{n+1}} \frac{1}{\vec{e}_V \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_{T,n+1})} \quad (7.34)$$

L'équation 7.34 peut s'arranger de la manière suivante :

$$\left[ \vec{e}_0 \left( \frac{f_c^n}{\nu_n} - \frac{f_c^{n+1}}{\nu_{n+1}} \right) + \frac{f_c^n}{\nu_n} \vec{e}_{T,n} - \frac{f_c^{n+1}}{\nu_{n+1}} \vec{e}_{T,n+1} \right] \cdot \vec{e}_V = 0 \quad (7.35)$$

En utilisant une abréviation appropriée, on peut écrire 7.35 à la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{B}_1 \cdot \vec{e}_V = 0 \\ \vec{B}_2 \cdot \vec{e}_V = 0 \end{cases} \quad (7.36)$$

où :

$$\vec{B}_n = \vec{e}_0 \left( \frac{f_c^n}{\nu_n} - \frac{f_c^{n+1}}{\nu_{n+1}} \right) + \frac{f_c^n}{\nu_n} \vec{e}_{T,n} - \frac{f_c^{n+1}}{\nu_{n+1}} \vec{e}_{T,n+1} \quad (7.37)$$

L'équation 7.36 représente un système d'équations aux produits scalaires nuls. Les solutions  $\vec{e}_V$  sont données par la relation suivante :

$$\vec{e}_V = \pm \frac{\vec{B}_1 \times \vec{B}_2}{\|\vec{B}_1 \times \vec{B}_2\|} \quad (7.38)$$

Parmi les deux vecteurs unitaires opposés donnés par l'équation 7.38, on retient celui qui, intégré à la relation 7.33, donne une valeur positive à la norme  $V$  du vecteur vitesse  $\mathbf{V}$ . Ainsi la norme  $V$  est donnée par :

$$V = \left| \frac{c\nu_n}{f_c^n} \frac{\|\vec{B}_1 \times \vec{B}_2\|}{(\vec{B}_1 \times \vec{B}_2) \cdot (\vec{e}_0 + \vec{e}_{T,n})} \right| \quad (7.39)$$

#### 7.4.2 Détection/poursuite des cibles

Lorsqu'une cible est détectée, les extractions bistatiques sont fusionnées afin de localiser cette cible avec la méthode introduite au paragraphe 7.4.1.1. La position et la vitesse initiale et une mesure des phases de propagation initiales servent à initialiser le filtre particulaire approprié de poursuite, en couvrant avec des particules la partie de l'espace d'état autour de l'emplacement détecté de la cible. A l'instant initial, le filtre particulaire utilise comme observations la sortie d'un corrélateur réglé au retard bistatique détecté, soit  $\theta_0^n = \hat{\tau}_{i_n}$ , et s'il y a lieu au décalage Doppler détecté, soit  $\xi_0^n = \hat{\nu}_{i_n}$  (c'est-à-dire lorsqu'on utilise pas un corrélateur à Doppler nul). La phase de propagation initiale correspondant au  $n^{\text{ème}}$  émetteur est estimée en faisant une intégration cohérente au couple bistatique extrait avec une durée d'intégration baissée au quart de la durée d'intégration du filtre adapté, soit :

$$\hat{\Phi}_0^n = \text{Arg} \left( \frac{4}{N_{Dtc}} \sum_{p=0}^{\frac{N_{Dtc}}{4}} S_R(pT_s) S_T^*(pT_s - \hat{\tau}_{i_n}) e^{-j2\pi\hat{\nu}_{i_n}pT_s} \right) \quad (7.40)$$

Avec cette approche, l'erreur sur la phase initiale sera au maximum :

$$\Delta\Phi = 2\pi\Delta\nu \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (7.41)$$

où  $\Delta\nu = \frac{1}{T}$  désigne la largeur d'une case Doppler. Un filtre particulaire est initialisé pour chaque extraction. Les filtres qui divergent au bout d'un certain temps sont éliminés. L'algorithme de détection/poursuite global est décrit par les étapes suivantes :

- Déterminer le seuil à partir d'une probabilité de fausse alarme fixée.
- Réaliser un filtre adapté pour chaque émetteur en couvrant entièrement l'espace bistatique en retard et en Doppler.
- Pour chaque filtre adapté extraire les couples  $(\tau, \nu)$  dont le niveau de corrélation a dépassé le seuil.
- Associer et fusionner les différents couples bistatiques. Localiser les différentes cibles par la méthode décrite par la figure 7.8 .
- Initialiser un filtre particulaire pour chaque cible détectée.
- Faire tourner les filtres de poursuite en parallèle selon la technique présentée au paragraphe 7.2.

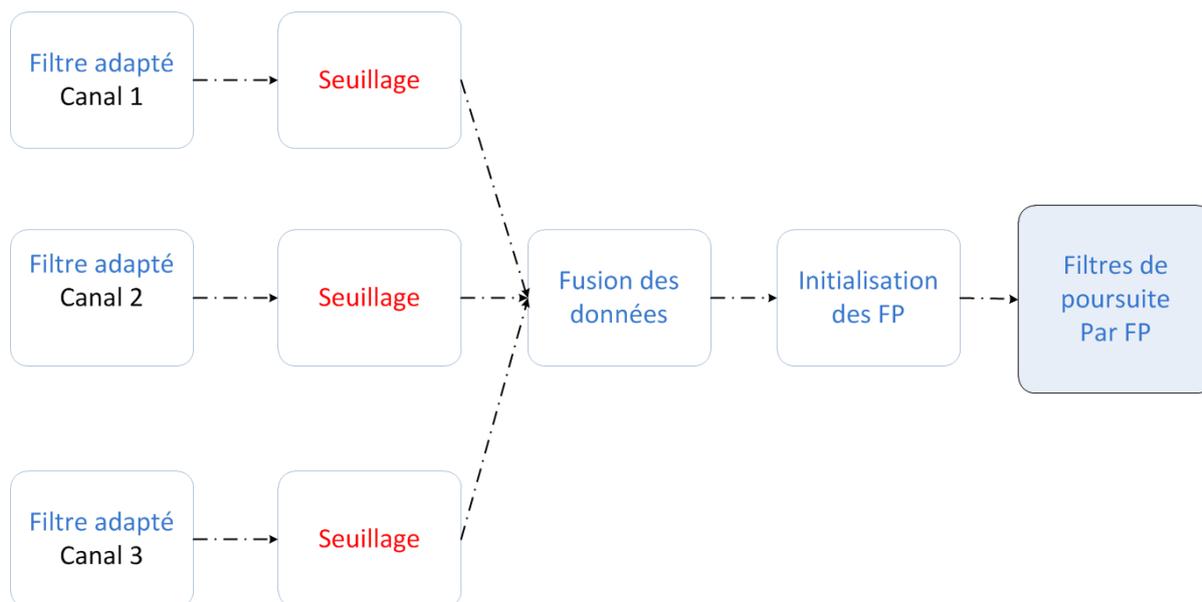


FIGURE 7.10 – Représentation schématique de la méthode de détection/poursuite

### 7.4.3 Comparaison avec la technique classique

Dans ce paragraphe, les performances de la méthode proposée sont étudiées à partir d'une simulation en utilisant les signaux DVB-T en mode  $2k$ . On utilise les paramètres du signal DVB-T utilisé dans la simulation en mode poursuite au paragraphe 7.3.2. Le système comporte 3 cibles à  $RSB = -40dB$  avant corrélation dans la région de surveillance du radar. L'estimation de la trajectoire se fait par deux techniques : (1) la technique classique présentée dans le chapitre 6, (2) la technique particulière introduite dans ce chapitre.

Dans la technique classique (TC), nous utilisons les extractions bistatiques à la sortie de trois corrélateurs couplés aux trois stations DVB-T. Le seuillage est ensuite suivi par un filtre de Kalman étendu qui assure le passage du domaine bistatique au domaine cartésien (cf. Fig.6.4). La durée d'intégration cohérente pour chaque détection est égale à  $T_{Dtc} = 200T_s \approx 45ms$ . Le taux de fausse alarme est fixé à  $P_{fa} = 5 \times 10^{-7}$ . La résolution en retard bistatique est égale à  $\Delta\tau = T_s = 54.9ns$  et la résolution du décalage Doppler est égale à  $\Delta\nu = 20Hz$ . Le filtre adapté est évalué dans  $(16384 \text{ cases retard}) \times (160 \text{ cases Doppler})$ . A chaque instant du temps  $t = kT_{Dtc}$ , les EKF's fournissent une estimation des trajectoires des cibles.

Dans la méthode particulière FP, on a deux phases : (1) une phase détection de durée  $T_{Dtc}$ , équivalente à un bloc de traitement classique, (2) une phase de poursuite de durée globale  $T_{Trk}$  subdivisée en durées d'intégration  $T$  assez courte (voir Fig. 7.11). La phase de détection est la même pour toutes les cibles. Cette phase fournit les valeurs initiales des filtres particuliers selon la méthode décrite aux paragraphes 7.4.1 et 7.4.2. L'étape de poursuite est réalisée par l'algorithme particulière décrit au paragraphe 7.2.

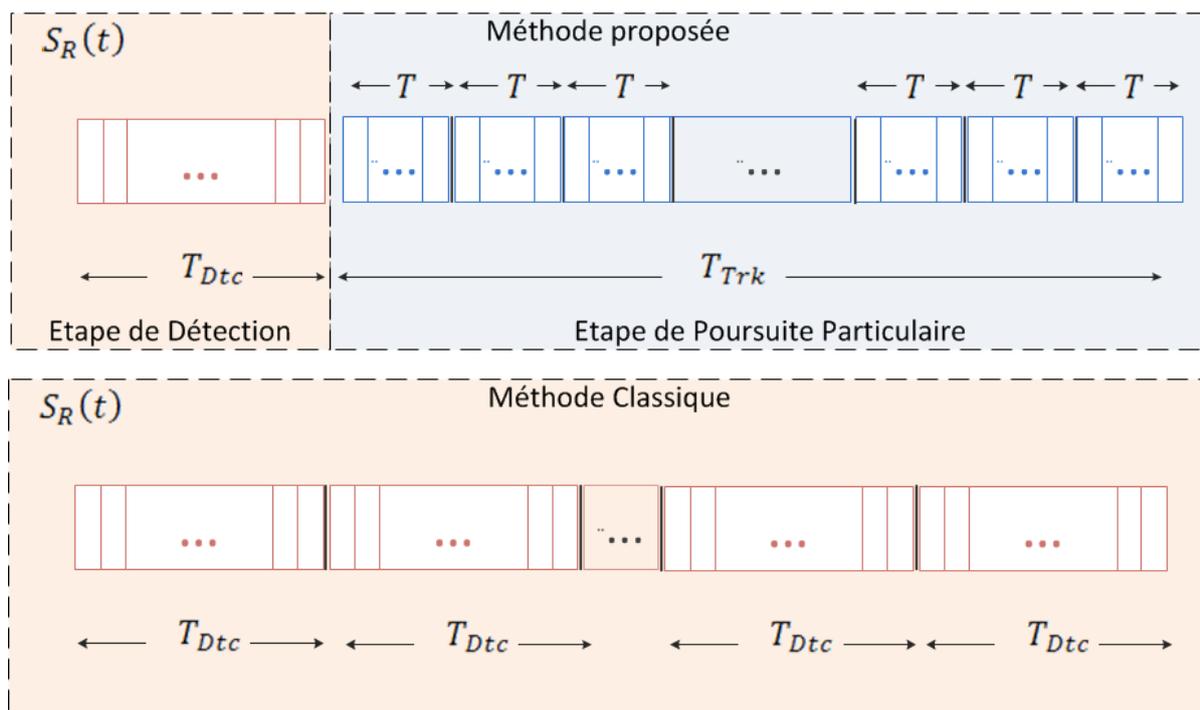


FIGURE 7.11 – Représentation schématique de la méthode de détection/poursuite multi-cible

Pour chaque cible détectée dans la phase de détection, on a un filtre particulière de poursuite. La durée d'intégration élémentaire pendant la phase de poursuite est égale à la durée du symbole OFDM,  $T = T_U = 224\mu s$  pour un signal DVB-T en mode  $2k$ . Cette durée d'intégration est relativement courte :  $\nu_{max}T \ll 1$ . Donc, le corrélateur opère à un décalage Doppler nul. Les caractéristiques du filtre particulière sont exactement les mêmes que celles de la simulation de poursuite avec un signal DVB-T en mode  $2k$  déjà montrée au paragraphe 7.3.2, avec un  $RSB = -40dB$  avant corrélation.

Les figures 7.12 illustrent les résultats de l'estimation de la composante  $X$  du vecteur position (7.12(a)) et de la composante  $V_x$  du vecteur vitesse (7.12(b)) correspondant à la 1<sup>ère</sup> cible. Les figures 7.13 illustrent les résultats de l'estimation de la composante  $X$  du vecteur position (7.12(a)) et de la composante  $V_x$  du vecteur vitesse (7.12(b)) correspondant à la 2<sup>ème</sup> cible. La courbe en bleu correspond à la vraie trajectoire, la courbe en rouge correspond à l'estimé par la technique particulière FP et la courbe en vert correspond à l'estimé par la technique classique (TC).

En se référant aux figures 7.12 et 7.13, on constate que l'erreur d'estimation par la technique classique (TC) est quantifiée. Ce problème de quantification est dû au seuillage appliqué à la sortie du filtre adapté dans la technique classique. Par ailleurs, Le problème de quantification ne se manifeste pas dans les courbes correspondant à la méthode particulière (FP) qui consomme les sorties bruitées non-seuillées des corrélateurs.

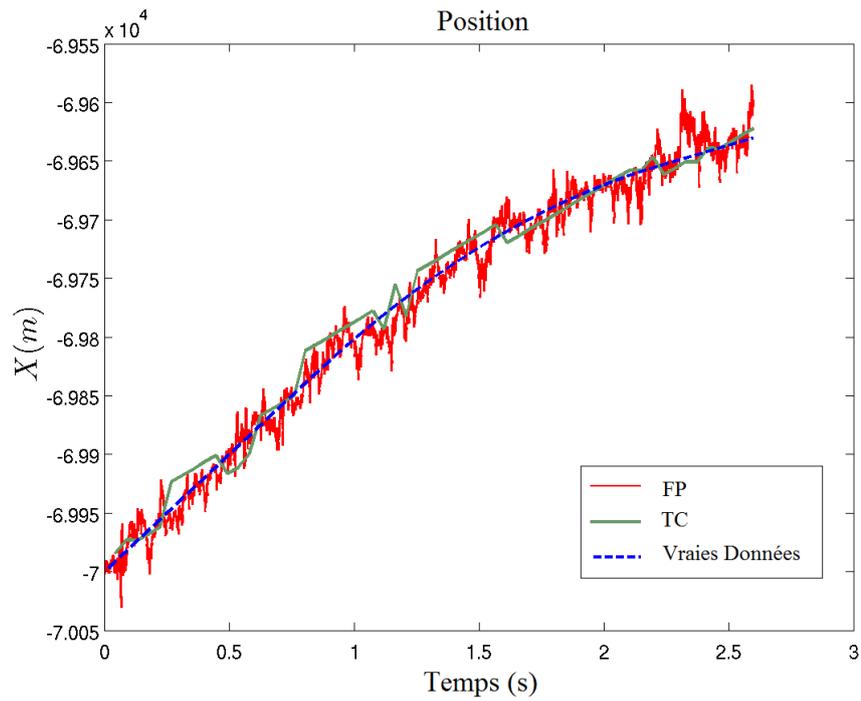
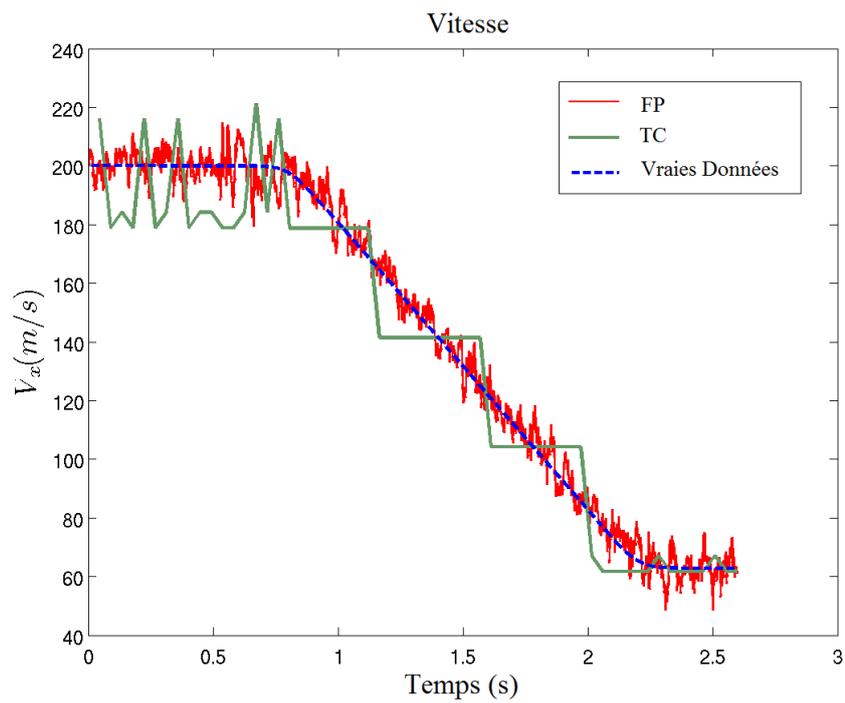
(a) Composante  $X$  du vecteur position(b) Composante  $V_x$  du vecteur vitesse

FIGURE 7.12 – Estimation des paramètres de la 1<sup>ème</sup> cible pour une détection/poursuite par la méthode particulaire (FP) et la technique conventionnelle (TC);  $RSB = -40dB$  avant corrélation.

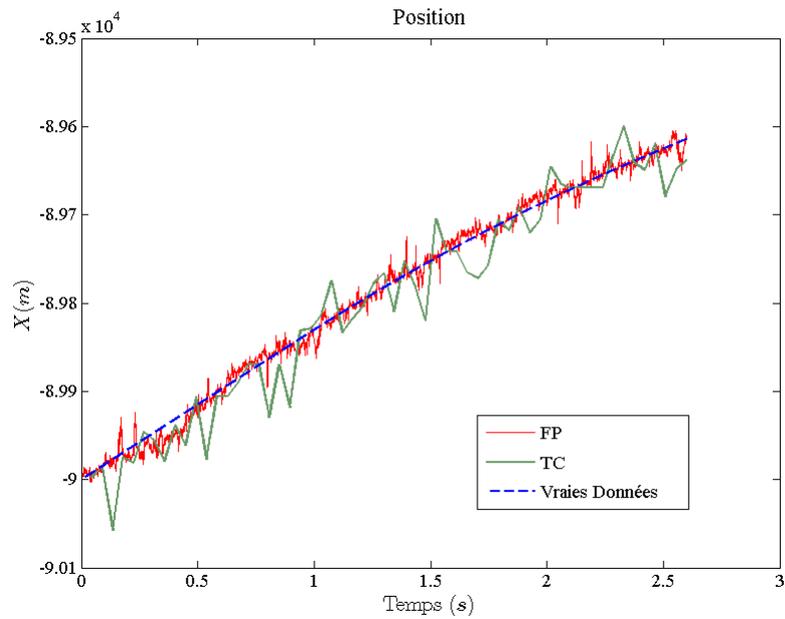
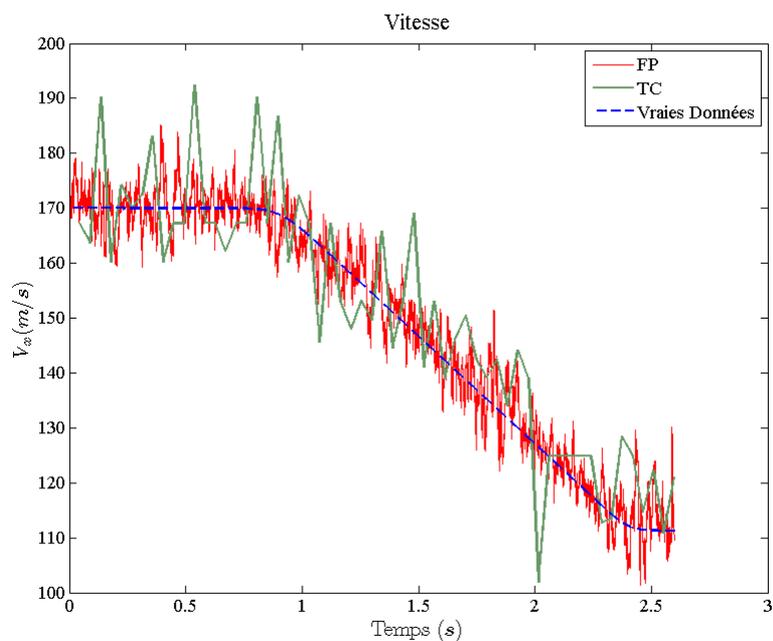
(a) Composante  $X$  du vecteur position(b) Composante  $V_x$  du vecteur vitesse

FIGURE 7.13 – Estimation des paramètres de la 2<sup>ème</sup> cible pour une détection/poursuite par la méthode particulière (FP) et la technique conventionnelle (TC) ;  $RSB = -40dB$  avant corrélation.

## 7.5 Conclusion Générale

Dans ce chapitre on a implémenté un algorithme particulière qui utilise directement les séquences des sorties des corrélateurs pour estimer et poursuivre la trajectoire des cibles. En com-

parant les estimations du filtrage particulaire avec celles de la méthode classique, on constate que les deux filtres peuvent poursuivre le mouvement de la cible de façon satisfaisante même en présence de manoeuvres. Le tableau 7.5 montre les valeurs de la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) pour les deux méthodes. La racine de l'erreur quadratique moyenne obtenue par la technique particulaire est légèrement plus faible que celle obtenue par la méthode conventionnelle.

Méthode	REQM sur la position	REQM sur la vitesse
FP	14m	5m/s
MC	17m	10m/s

TABLE 7.5 – La racine de l'erreur quadratique moyenne de la position et de la vitesse avec FP et TC en utilisant le signal DVB-T en mode 2k avec un  $RSB = -40dB$  avant corrélation

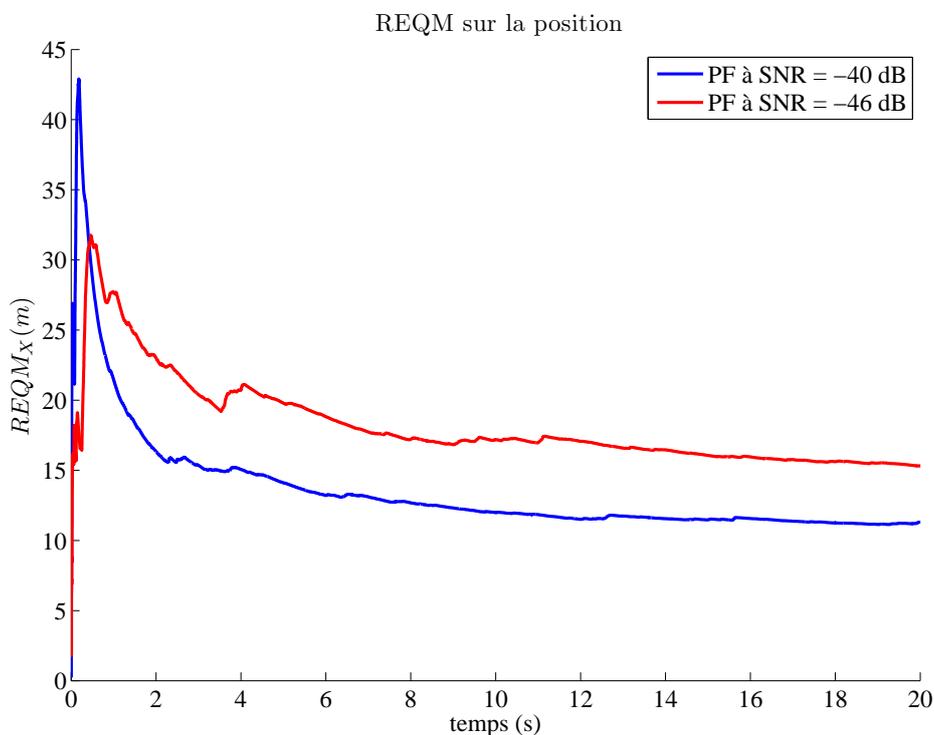


FIGURE 7.14 – Racine de l'erreur quadratique moyenne sur la position avec la technique détection/poursuite particulaire

L'algorithme particulaire reste opérationnel jusqu'à  $6dB$  au dessus du seuil de validité de la méthode classique soit  $-46dB$  avant corrélation tout en gardant une erreur quadratique moyenne sur la position ayant le même ordre de grandeur (voir Fig. 7.14). De plus, on peut observer que la REQM sur la position converge vers  $17m$  pour la méthode particulaire à  $-46dB$ , soit la valeur obtenue pour la technique classique à  $-40dB$ .

La comparaison du temps de simulation sur matlab est donnée par le tableau 7.6. On constate que le filtrage particulaire n'est pas nécessairement plus exigeant en charge de calcul qu'une méthode classique dans un contexte de poursuite de cible manoeuvrante pour un radar passif. Cela vient du fait que la méthode particulaire présente une architecture naturellement parallélisable. De plus, en mode de poursuite le FP associé à chaque cible ne consomme qu'une corrélation

(cf. équation 7.1) à chaque mise à jour là où la technique classique recalcule l'ensemble des corrélations associées à chaque case retard/Doppler.

Méthode	Simuler 2.688ms
FP	12min
TC	3h

TABLE 7.6 – Le temps de simulation sur matlab pour les deux méthodes FP et TC en utilisant le signal DVB-T en mode 2k

Par ailleurs la figure 7.12 montre clairement un meilleur suivi des manoeuvres pour la technique particulière. Malgré l'EKF présent dans la technique classique, la quantification des observations inhérente à cette méthode ne permet pas d'obtenir des estimées lissées de la trajectoire. Cette propriété de la méthode particulière est assez importante pour les fonctions de la reconnaissance de cibles non-coopératives (Non-Cooperative Target Recognition (NCTR) en anglais), [Souty 2004a, Souty 2004b] qui discriminent la nature des cibles en fonction de leurs manoeuvres autorisées.

La technique de la détection/poursuite multi-cible décrite au paragraphe 7.4.2 restant tributaire d'une étape de détection de durée  $T_{Dtc}$  effectuée régulièrement, un filtre particulière de poursuite est initialisé avec une fausse alarme avec une probabilité  $P_{fa}$ . Heureusement, lorsque ceci se produit, le filtre particulière de poursuite ainsi initialisé ne tarde pas à adopter un comportement incompatible avec la dynamique d'une cible et peut donc être supprimé. Il en résulte que la technique de détection poursuite multi-cible proposée fonctionne correctement aux rapports signal sur bruit très bas testés et ce sans nécessité de mettre en oeuvre des mécanismes complexes de réduction des fausses alarmes, de type JPDA ou MHT évoquées au paragraphe 6.3.3.



# Nouvelle approche de détection sur un Radar Passif

---

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>94</b>
<b>8.2</b>	<b>Hypothèses</b>	<b>95</b>
<b>8.3</b>	<b>Choix des observations</b>	<b>95</b>
<b>8.4</b>	<b>Modèle dynamique d'état</b>	<b>97</b>
8.4.1	Grille retard/Doppler	98
<b>8.5</b>	<b>Équation d'observation locale</b>	<b>98</b>
<b>8.6</b>	<b>Équations générales du filtrage non-linéaire</b>	<b>99</b>
8.6.1	Approximations importantes	100
<b>8.7</b>	<b>Implémentation par filtrage à somme de gaussiennes</b>	<b>100</b>
8.7.1	Principe	100
8.7.2	Equations du filtre	100
8.7.3	Redistribution des gaussiennes	107
8.7.4	Initialisation du filtre à somme de gaussiennes	108
<b>8.8</b>	<b>Implémentation par filtrage particulaire</b>	<b>109</b>
8.8.1	Principe	109
8.8.2	Équations du filtre	110
8.8.3	Redistribution des particules	114
8.8.4	Initialisation du filtre particulaire	116
<b>8.9</b>	<b>Extraction des modes</b>	<b>117</b>
8.9.1	Critère de l'entropie	117
8.9.2	Seuil de détection	118
8.9.3	Critère de détection pour le GSF	118
8.9.4	Critère de détection pour le FP	119
8.9.5	Association de données	119
<b>8.10</b>	<b>Étude de performances du filtre avec un signal carré</b>	<b>120</b>
8.10.1	Cas d'une cible unique	121
8.10.2	Cas de l'absence de cible	123
8.10.3	Cas multi-cible	124
<b>8.11</b>	<b>Annulation Successive d'interférence</b>	<b>126</b>
8.11.1	Remodulation des cibles détectées	128
<b>8.12</b>	<b>Simulation avec un signal FM</b>	<b>129</b>
8.12.1	Comparaison GSF/FP	140
<b>8.13</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>141</b>

---

## 8.1 Introduction

La détection et la poursuite multi-cible sont un problème essentiel dans les systèmes radar. Comme on l'a vu dans le chapitre 6, les systèmes de localisation passive cohérente, utilisent jusqu'à maintenant des techniques basées sur le seuillage afin de générer les détections du décalage Doppler et du retard bi-statique de chaque cible, en implémentant un banc de filtres adaptés (sous-entendu adapté à une valeur différente du décalage Doppler). Les détections fournies par le seuillage sont suivies par des algorithmes dérivés de Kalman pour estimer la position et la vitesse des cibles. Dans une approche classique, un seuil bas est indispensable afin d'assurer une probabilité suffisante de détection permettant de détecter les cibles à faible RSB. Cependant, un seuil bas donne également un taux élevé de fausses détections aboutissant à des fausses pistes. Une autre approche, appelée track-before-detect (TBD), consiste à fournir au système de poursuite l'ensemble des données sans application d'un seuil. Le TBD est une méthode qui combine la détection de cibles et l'estimation de leurs paramètres en supprimant le seuillage et en fournissant directement la sortie des corrélateurs au système de poursuite. Cela améliore la précision de poursuite sans perte d'information et favorise la poursuite des cibles à faible RSB. La principale difficulté dans les systèmes TBD est que la mesure, qui correspond à l'ensemble des corrélations, est une fonction fortement non linéaire de l'état visé. En règle générale, l'état décrit l'évolution cinématique de la cible, et peut également comprendre son amplitude. Une façon de faire face à cette non-linéarité est de discrétiser l'espace d'état. Lorsque l'état est discret, la linéarité n'est pas pertinente, et les techniques d'estimation comme le modèle de Markov caché (Baum-Welsh) [Rabiner 1986] et l'algorithme de Viterbi [Viterbi 1967] peuvent être appliquées. Plusieurs approches de type TBD ont été développées en utilisant cette méthode [Pohlig 1989, Bar 1990, Tonbsen 1998, Stone 1999, Bruno 2001]. Le problème d'un espace d'état discret est qu'il aboutit à une grande charge du calcul. Une approche ultérieure consiste à utiliser le filtrage particulaire pour résoudre le problème d'estimation non linéaire [Salmond 2001, Boers 2001, Ristic 2004]. Le filtrage particulaire a été utilisé par un certain nombre d'auteurs pour le problème de TBD, par exemple, [Bruno 2004, Driessen 2001, Rutten 2005].

Afin d'évaluer le potentiel des méthodes de type Monte-Carlo pour la détection et la poursuite sur un radar passif, on a proposé dans le chapitre 7, un système de filtrage particulaire pour la poursuite d'une cible pré-détectée à l'aide d'une corrélation seuillée classique. Le filtre étudié utilise directement la sortie non seuillée d'un corrélateur calée sur une case retard/Doppler, contrairement aux méthodes classiques qui utilisent comme observations les valeurs de retard et de Doppler correspondant à toutes les cases pour lesquelles le filtre adapté dépasse en module un certain seuil. La durée d'intégration est diminuée afin de pouvoir négliger les variations de la phase dans la fenêtre d'intégration lors d'une corrélation à Doppler nul. On a vu comment le faible rapport signal sur bruit résultant de cette méthode est compensé par le fait que le filtre de Kalman étendu est remplacé par un algorithme approprié basé sur le filtrage particulaire. Dans le cas où une intégration de longue durée est nécessaire, la corrélation ne sera pas à Doppler nul mais à Doppler également pré-détecté proche de celui de la cible.

Dans ce chapitre on développe un système intégré et homogène qui assure la détection aveugle et la poursuite multi-cible sans recourir au seuillage classique. Ce système de type TBD est alimenté directement par la sortie du corrélateur, considérée comme observation bruitée. Ces observations sont générées pour un nombre suffisant de cases retard correspondant à la région de surveillance entière. L'objectif est d'adapter les méthodes de filtrage statistique aux configurations multi-cible et pouvoir gérer de manière aveugle l'étape de détection. La première étape consiste à concevoir le modèle du système :

- Choisir les observations à utiliser : la corrélation est faite avec une courte durée d'intégra-

tion, donc à Doppler nul, pour un nombre suffisant de valeurs du retard bistatique.

- Choisir l'espace d'état : retard, Doppler et amplitude complexe.
- Écrire l'équation d'état et l'équation d'observation.

La deuxième étape consiste à écrire les équations du filtrage non-linéaire correspondant à la problématique. La troisième étape consiste à résoudre les équations du filtrage bayésien à l'aide d'une approximation de type somme de gaussiennes ou de type filtrage particulaire. Pour simplifier le propos, nous ne présentons que l'approximation basée sur le filtre particulaire Rao-Balckwellisé du paragraphe 4.8.2. Une généralisation évidente aux autres versions plus élaborées de filtrage particulaire mentionnées au début du paragraphe 4.8 est bien entendu possible. Enfin, les deux filtres proposés sont testés avec des signaux carré et FM.

## 8.2 Hypothèses

Contrairement à la méthode proposée dans le chapitre 7 qui estime le vecteur position et le vecteur vitesse des cibles détectées, la méthode introduite dans ce chapitre effectue la détection/poursuite conjointe des cibles pour un seul émetteur en estimant uniquement le retard bistatique et le Doppler des cibles détectées. La triangulation permettant d'obtenir le vecteur position et le vecteur vitesse à partir des détections obtenues pour plusieurs émetteurs est effectuée a posteriori par un module externe.

La corrélation est faite pendant une courte période d'intégration. Cela permet d'éviter de faire fonctionner le corrélateur pour d'autres valeurs que le Doppler nul, ce qui diminue considérablement le nombre d'observations à traiter. Pour ce faire, il faut respecter la contrainte suivante, à savoir choisir une durée d'intégration cohérente assez courte pour que la variation de la phase due au décalage Doppler ne dépasse pas  $\frac{\pi}{2}$  dans la fenêtre de pré-corrélation. C'est à cette condition que l'on peut se dispenser de régler le corrélateur à des fréquences Doppler différentes. On décompose l'axe du retard bistatique en cases de largeur  $\Delta\tau$  égale à la moitié du lobe principal de la fonction d'auto-corrélation du signal reçu. Le filtre adapté est échantillonné aux instants correspondant aux multiples de  $\Delta\tau$ .

## 8.3 Choix des observations

Si on appelle  $S_T(t)$  le signal émis par l'émetteur d'opportunité, alors le signal reçu par l'antenne réceptrice  $S_R(t)$  venant de la région de surveillance est donné par la relation suivante :

$$S_R(t) = \sum_{l=1}^{N_T} \mathcal{A}_l(t) e^{j\Phi_l(t)} S_T(t - \tau_l(t)) + \mathbf{n}(t) \quad (8.1)$$

où  $\tau_l$  and  $\Phi_l$  sont le retard bi-statique et la phase dus à la réflexion sur la  $l^{\text{ème}}$  cible. L'amplitude  $\mathcal{A}_l$  de la  $l^{\text{ème}}$  cible décrit l'atténuation due à la propagation et/ou aux trajets multiples. Le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est considéré comme un bruit complexe blanc gaussien additif de densité spectrale de puissance  $N_0$ .

La méthode consiste à diviser le signal émis et le signal reçu échantillonnés à une cadence  $f_s = \frac{1}{T_s}$ , en des trames de durée  $T = N_e T_s$ . On désigne par  $S_T^k(t) = S_T(t + kT)$  la trame du signal émis à l'instant  $t = kT$  et par  $S_R^k(t) = S_R(t + kT)$  celle du signal reçu pour  $0 \leq t \leq T$ . Du fait que la cible n'est pas au repos, un décalage Doppler est imposé sur l'écho, ce qui implique qu'en principe il ne se corrèle pas avec le signal émis (corrélation dans le domaine temporel) sauf si on applique le même décalage fréquentiel sur le signal référence. Cependant, si le signal reçu

est corrélé avec le signal émis durant une durée d'intégration courte, les variations de la phase dans la fenêtre d'intégration sont négligeables. Dans cette approche, on n'a pas besoin d'adapter le corrélateur aux différentes valeurs du décalage Doppler. Typiquement, on prend  $T \leq \frac{1}{4\nu_{max}}$ , où  $\nu_{max}$  est la valeur maximale du décalage Doppler. Cette valeur dépend de la vitesse maximale qu'une cible peut atteindre et de la fréquence porteuse du signal d'opportunité. La sortie du corrélateur à Doppler nul, à l'instant discret  $k$  est donnée par :

$$y_k(t) = \frac{1}{T} \int_0^T S_R^k(\theta) S_T^k(\theta - t)^* d\theta \quad (8.2)$$

En négligeant les variations de la phase sur la fenêtre d'intégration, on peut approcher cette corrélation de la manière suivante :

$$y_k(t) = \sum_{l=1}^{N_T} \left( a_{l\ k}^I + j a_{l\ k}^Q \right) \Gamma(t - \tau_{lk}) + \eta_k(t) \quad (8.3)$$

où  $\Gamma$  est la fonction d'auto-corrélation du signal émis,  $\tau_{lk}$  est le retard bi-statique de la  $l^{\text{ème}}$  cible,  $\left( a_{l\ k}^I + j a_{l\ k}^Q \right) = \mathcal{A}_{lk} e^{j\Phi_{lk}}$  est l'amplitude complexe de la  $l^{\text{ème}}$  cible après la corrélation et  $\eta_k(t)$  est un bruit complexe additif. Avant l'intégration cohérente, le bruit  $\mathbf{n}(t)$  est supposé être un bruit blanc gaussien avec une variance  $N_0$ . L'auto-corrélation de  $\eta_k(t)$  est donc donnée par :

$$E[\eta_k(t) \eta_k^*(t - \tau)] \cong \frac{N_0}{T} \Gamma(\tau) \quad (8.4)$$

Notons qu'avec une intégration cohérente de courte durée, la phase  $\Phi_{lk}$  qui apparait dans l'équation 8.3 correspond à la phase au milieu de fenêtre d'intégration  $[kT, (k+1)T]$ , pour la  $l^{\text{ème}}$  cible, soit :

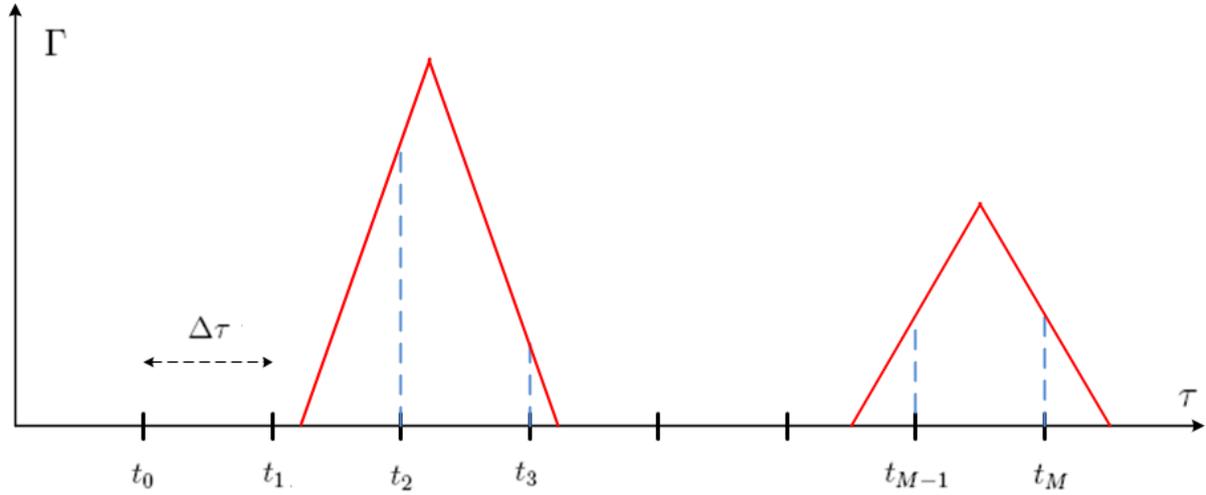
$$\Phi_{lk} = \Phi_l(kT + T/2) \quad (8.5)$$

La période d'échantillonnage du corrélateur  $\Delta\tau$  dépend de la largeur du lobe principal de la fonction d'auto-corrélation du signal d'opportunité, qui a son tour dépend de  $B$ , la largeur de la bande du signal, soit :  $\Delta\tau = \frac{1}{2B}$ . Les instants de corrélation sont donc donnés par :  $\{t_m = \tau_{dir} + m\Delta\tau\}_{m=0}^M$ , où  $\tau_{dir}$  est le retard correspondant au trajet direct entre l'émetteur et le récepteur. Ainsi, on forme le vecteur d'observations qui alimente le filtre statistique de la manière suivante :

$$\mathcal{Y}_k = \left\{ \begin{array}{c} y_k(t_0) \\ y_k(t_1) \\ \vdots \\ y_k(t_M) \end{array} \right\} \quad (8.6)$$

Considérons une fonction d'auto-corrélation  $\Gamma$  idéale au sens où nous l'avons vu dans la section 2.8. Dans ce cas  $\Gamma$  est une forme d'onde non-nulle sur un support temporel restreint à deux cases retard au maximum. Ceci présuppose que l'on traite uniquement des cibles dites ponctuelles ou non étendues. Une illustration d'une telle fonction  $\Gamma$  est donnée par la figure 8.1 qui représente la sortie non-bruitée du corrélateur en présence d'une cible dans les cases retard  $m = 3$  et  $m = M$ . En prenant en compte les considérations introduites à la section 2.8, cela revient à négliger l'effet des lobes secondaires sur la forme d'onde  $\Gamma$ . Nous verrons au paragraphe 8.11 comment s'affranchir de la présence de lobes secondaires importants.

Avec ces hypothèses, il devient évident d'après 8.4 que les éléments du vecteur  $\mathcal{Y}_k$  sont des variables aléatoires non-corrélées, ce qui implique qu'elles sont indépendantes puisqu'elles sont par ailleurs gaussiennes.

FIGURE 8.1 – Observations non bruitées : sorties du corrélateur au rythme  $1/\Delta\tau$ 

La valeur de  $M$  est choisie de telle sorte que l'ensemble des cibles présentes dans le volume de surveillance contribuent au vecteur d'observations  $\mathcal{Y}_k$ .

## 8.4 Modèle dynamique d'état

Le vecteur d'état à l'instant  $k$  contient les variables suivantes :

- $\tau$ , retard bi-statique.
- $\nu$ , décalage Doppler.
- $a^I$ , partie réelle de l'amplitude complexe après corrélation.
- $a^Q$ , partie imaginaire de l'amplitude complexe après corrélation.

Les variations de l'amplitude complexe en fonction du décalage Doppler peuvent être modélisées par :

$$\begin{bmatrix} a_k^I \\ a_k^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \cos(\Phi_k) \\ \mathcal{A} \sin(\Phi_k) \end{bmatrix} + \varepsilon_{\mathcal{A}k} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \cos(2\pi\nu_{k-1}T + \Phi_{k-1}) \\ \mathcal{A} \sin(2\pi\nu_{k-1}T + \Phi_{k-1}) \end{bmatrix} + \varepsilon_{\mathcal{A}k} \quad (8.7)$$

où  $\varepsilon_{\mathcal{A}k}$  désigne le bruit de processus sur l'amplitude complexe. En utilisant les relations trigonométriques, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} a_k^I \\ a_k^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k-1}^I \cos(2\pi\nu_{k-1}T) - a_{k-1}^Q \sin(2\pi\nu_{k-1}T) \\ a_{k-1}^I \sin(2\pi\nu_{k-1}T) + a_{k-1}^Q \cos(2\pi\nu_{k-1}T) \end{bmatrix} + \varepsilon_{\mathcal{A}k} \quad (8.8)$$

Le retard bi-statique  $\tau_k$  et le décalage Doppler  $\nu_k$  évoluent selon :

$$\begin{bmatrix} \tau_k \\ \nu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{k-1} - \frac{\nu_{k-1}}{f_c}T \\ \nu_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\tau k} \\ \varepsilon_{\nu k} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

où  $\varepsilon_{\tau k}$  et  $\varepsilon_{\nu k}$  désignent respectivement le bruit de processus sur le retard bistatique et sur le décalage Doppler, et  $f_c$  est la fréquence porteuse du signal émis. Finalement, en combinant 8.8 et 8.9 on obtient une équation d'état de période  $T$  sous forme vectorielle :

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} a_k^I \\ a_k^Q \\ \tau_k \\ \nu_k \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \quad (8.10)$$

où  $\varepsilon_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathcal{A}k} \\ \varepsilon_{\tau k} \\ \varepsilon_{\nu k} \end{bmatrix}$ . Le bruit de processus  $\varepsilon_k$  sera supposé gaussien blanc, centré et de matrice de covariance  $Q_k = E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T]$ .

### 8.4.1 Grille retard/Doppler

La région de surveillance matérialisée par les axes retard/Doppler est divisée en cases de dimensions :  $(\Delta\tau, \Delta\nu)$ . La largeur d'une case retard  $\Delta\tau$  est celle de la période d'échantillonnage de la fonction de corrélation. La largeur d'une case Doppler  $\Delta\nu$  est choisie de telle sorte que l'on puisse linéariser localement la fonction d'état et la fonction d'observation autour d'une valeur de la variable de fréquence.

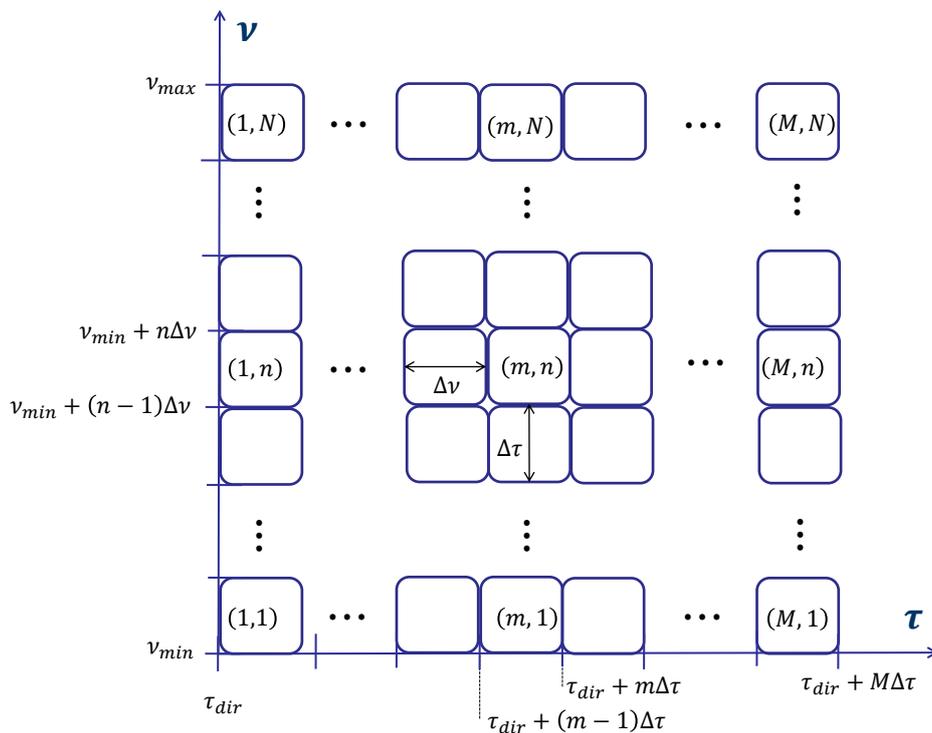


FIGURE 8.2 – Grille retard/Doppler

Les valeurs extrêmes du décalage Doppler  $\nu_{min}$  et  $\nu_{max}$  sont déterminées par la valeur maximale du décalage fréquentiel qu'une cible peut atteindre. On appellera  $N$  le nombre total total de cases Doppler. La figure 8.2 illustre la grille retard/Doppler ainsi obtenue. Ainsi, la case retard/Doppler d'indice  $(m, n)$  correspondent aux échantillons  $t_{m-1}$  et  $t_m$  de la sortie du corrélateur et aux valeurs de fréquence Doppler comprises entre  $\nu_{min} + (n-1)\Delta\nu$  et  $\nu_{min} + n\Delta\nu$ . De plus, nous ferons l'hypothèse standard qu'une case retard/Doppler ne contient pas plus d'une cible.

## 8.5 Équation d'observation locale

Nous considérons une fonction d'auto-corrélation  $\Gamma$  idéale au sens où nous l'avons vu dans la section 2.8, à savoir que le support temporel de  $\Gamma$  est au maximum de deux cases retard. Autrement dit,  $\Gamma$  est la fonction nulle au-delà de ce support temporel. Sous l'hypothèse qu'il

existe une cible dans la case retard/Doppler  $(m, n)$ , on aura :

$$\begin{cases} \Gamma(t_i - \tau_k) \neq 0 & \text{pour } i \in \{m, m-1\} \\ \Gamma(t_i - \tau_k) = 0 & \text{pour } i \notin \{m, m-1\} \end{cases} \quad (8.11)$$

La fonction d'observation correspondante vérifie :

$$\mathcal{Z}_k^m = \begin{bmatrix} \Re(y_k(t_{m-1})) \\ \Im(y_k(t_{m-1})) \\ \Re(y_k(t_m)) \\ \Im(y_k(t_m)) \end{bmatrix} = \mathbf{h}_k^m(\mathcal{X}_k) + \eta_k^m \quad (8.12)$$

où

$$\mathbf{h}_k^m(\mathcal{X}_k) = \begin{bmatrix} \Re\left(\left(a_k^I + ja_k^Q\right)\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)\right) \\ \Im\left(\left(a_k^I + ja_k^Q\right)\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)\right) \\ \Re\left(\left(a_k^I + ja_k^Q\right)\Gamma^k(t_m - \tau_k)\right) \\ \Im\left(\left(a_k^I + ja_k^Q\right)\Gamma^k(t_m - \tau_k)\right) \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

et

$$\eta_k^m = \begin{bmatrix} \Re(\eta_k(t_{m-1})) \\ \Im(\eta_k(t_{m-1})) \\ \Re(\eta_k(t_m)) \\ \Im(\eta_k(t_m)) \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Après corrélation, le bruit  $\eta_k^m$  a pour matrice de covariance :  $R_k = E[\eta_k^m \eta_k^{mT}] = \frac{N_0}{2T} \mathcal{I}_4$ .

## 8.6 Équations générales du filtrage non-linéaire

Comme nous l'avons rappelé au chapitre 3, le problème d'estimation bayésienne récursive est formulé comme une mise-à-jour de la densité a posteriori au cours du temps en exploitant les observations successives. L'équation de prédiction bayésienne s'écrit :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{N_x}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \quad (8.15)$$

L'équation de correction bayésienne s'écrit :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \quad (8.16)$$

où  $\mathcal{Y}_{1:k} = \{\mathcal{Y}_m\}_{m=1}^k$ .

Comme nous l'avons déjà indiqué au paragraphe 3.3, la non-linéarité de l'équation d'état 8.10 et de l'équation d'observation 8.12 empêche d'obtenir la récursion formée par les équations 8.15 et 8.16 sous une forme analytique.

La solution envisagée dans le paragraphe 3.3 consistait à approcher efficacement la densité a posteriori désirée soit par une somme de gaussiennes, soit par un filtre particulière Rao-Blackwellisé. Ce sont les approches développées dans les paragraphes 3.5.3 et 4.8.2, respectivement. Malheureusement, les EKF's intervenants dans ces deux techniques approchées nécessitent des inversions de matrices dont la dimension est égale à la taille du vecteur  $\mathcal{Y}_k$ , soit  $M + 1$  (ou si l'on préfère le nombre de cases retard +1). Or il est évident que pour couvrir la région de surveillance avec les signaux utilisés au chapitre 7, la valeur de  $M$  devra être de l'ordre de

plusieurs dizaines voire plusieurs centaines d'échantillons. Il en résulte qu'une application directe des méthodes dans les paragraphes 3.5.3 et 4.8.2 aurait une complexité prohibitive.

Néanmoins, en utilisant les hypothèses introduites dans la section 8.3, une exploitation judicieuse des indépendances conditionnelles au niveau des observations va nous permettre de trouver une solution élégante à ce problème.

### 8.6.1 Approximations importantes

D'après la discussion de la fin de la section 8.3, les observations sont indépendantes deux à deux conditionnellement aux observations précédentes. On peut donc écrire :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \prod_{m=0}^M p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \quad (8.17)$$

Avec les hypothèses introduites à la section 8.3 et sous l'hypothèse qu'il n'existe pas plus d'une cible par case retard  $m$ , alors conditionnellement à l'état  $\mathcal{X}_k$  et aux anciennes observations, seules les observations proches, prises aux instants  $t_{m-1}$  et  $t_m$  dépendent de  $\mathcal{X}_k$  et les autres observations sont indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathcal{X}_k$  :

$$p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = p(y_k(t_m), y_k(t_{m-1}) | \mathcal{X}_k) \prod_{i \neq \{m-1, m\}} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \quad (8.18)$$

Une exploitation judicieuse des factorisations et 8.17 et 8.18 va nous permettre d'obtenir au paragraphe 8.7 une implémentation du filtre à somme de gaussiennes et au paragraphe 8.8 une implémentation du filtre particulière Rao-Blackwellisé, faisant intervenir des inversions matricielles de taille  $4 \times 4$  au lieu de  $(M+1) \times (M+1)$ .

Cette simplification est la solution au problème de complexité évoqué plus haut et donne un intérêt pratique aux techniques proposées qui resteraient sans cela à l'état de curiosités mathématiques.

## 8.7 Implémentation par filtrage à somme de gaussiennes

### 8.7.1 Principe

La densité probabilité a posteriori 8.16 est multimodale à cause de la présence de plusieurs cibles. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 3.5.3, dans le cas multi-cible la densité 8.16 ne saurait être approximée par une gaussienne unique comme dans un problème de détection/poursuite mono-cible. Une extension naturelle consiste à approximer cette densité par une somme de gaussiennes, chaque gaussienne évoluant selon un filtre de Kalman étendu qui surveille une partie de l'espace d'état. La méthode consiste à surveiller chaque case retard/Doppler par une gaussienne. La gaussienne existant dans la case  $(m, n)$  est représentée à l'instant  $k$  par sa moyenne  $\mathcal{X}_{k|k}^{m,n}$ , sa matrice de covariance  $P_{k|k}^{m,n}$  et son poids  $w_k^{m,n}$ . La moyenne et la covariance évoluent selon un filtre de Kalman étendu et les poids sont déterminés par une équation détaillée plus tard. La présence d'une cible dans un endroit de l'espace d'état entraîne l'augmentation du poids de la gaussienne ; ces poids résument la contribution de chaque gaussienne dans la reconstitution de la loi a posteriori.

### 8.7.2 Equations du filtre

Comme décrit dans le chapitre 3, l'approche à somme de gaussiennes consiste à approcher la densité a posteriori sous la forme d'une somme pondérée de gaussiennes. Supposons que la densité

a posteriori soit connue à l'instant  $k - 1$  et s'écrit comme une somme pondérée de gaussiennes réparties dans la grille retard/Doppler :

$$p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}, P_{k-1|k-1}^{m,n}\right) \quad (8.19)$$

### 8.7.2.1 La prédiction

l'étape de prédiction s'obtient en injectant 8.19 dans 8.15 :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathbb{R}^{N_x}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) p(\mathcal{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{k-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N_x}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \left( \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}, P_{k-1|k-1}^{m,n}\right) \right) d\mathcal{X}_{k-1} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \int_{\mathbb{R}^{N_x}} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}, P_{k-1|k-1}^{m,n}\right) d\mathcal{X}_{k-1} \end{aligned} \quad (8.20)$$

En linéarisant la fonction d'état 8.10 localement autour de  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}$  :

$$\mathcal{X}_k \cong \mathbf{f}\left(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right) + F_k^{m,n} \left(\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right) + \varepsilon_k \quad (8.21)$$

avec :

$$F_k^{m,n} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathcal{X}_k)}{\partial \mathcal{X}_k} \right|_{\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}} \quad (8.22)$$

et en se basant sur la nature gaussienne du bruit de processus  $\varepsilon_k$ , on peut écrire localement autour de  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}$  :

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \simeq \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}\left(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right) + F_k^{m,n} \left(\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right), Q_k\right) \quad (8.23)$$

En injectant 8.23 dans 8.20, on obtient :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \int_{\mathbb{R}^{N_x}} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}, P_{k-1|k-1}^{m,n}\right) \\ &\quad \times \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}\left(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right) + F_k^{m,n} \left(\mathcal{X}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right), Q_k\right) d\mathcal{X}_{k-1} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}\left(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right), F_k^{m,n} P_{k-1|k-1}^{m,n} F_k^{m,nT} + Q_k\right) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}\right) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Ainsi la moyenne et la covariance prédites de la gaussienne correspondant à la case retard/Doppler  $(m, n)$  sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n} = \mathbf{f}\left(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{m,n}\right) \\ P_{k|k-1}^{m,n} = F_k^{m,n} P_{k-1|k-1}^{m,n} F_k^{m,nT} + Q_k \end{cases} \quad (8.25)$$

tandis que le poids  $w_{k-1}^{m,n}$  reste inchangé.

### 8.7.2.2 La correction et la mise à jour des poids

La correction se fait en déterminant la densité a posteriori. En prenant en compte la prédiction, on peut exprimer la densité a posteriori de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) &\simeq \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

En appliquant les approximations fondamentales données par les équations 8.17 et 8.18, on peut obtenir localement autour de  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}$  :

$$\frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} = \frac{p(y_k(t_m), y_k(t_{m-1}) | \mathcal{X}_k) \prod_{i \neq \{m-1, m\}} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\prod_{i=0}^M p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \tag{8.27}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) &\simeq \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) \\
&\quad \times \frac{p(y_k(t_m), y_k(t_{m-1}) | \mathcal{X}_k) \prod_{i \neq \{m-1, m\}} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\prod_{i=0}^M p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \frac{\mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) p(y_k(t_m), y_k(t_{m-1}) | \mathcal{X}_k)}{p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(y_k(t_{m-1}) | \mathcal{Y}_{1:k-1})}
\end{aligned} \tag{8.28}$$

En linéarisant l'équation d'observation 8.12 localement autour de  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}$  :

$$\mathcal{Z}_k^m \simeq \mathbf{h}_k^m(\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}) + H_k^{m,n}(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}) + \eta_k^m \tag{8.29}$$

avec :

$$H_k^{m,n} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k^m(\mathcal{X}_k)}{\partial \mathcal{X}_k} \right|_{\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}} \tag{8.30}$$

et en se basant sur la nature gaussienne du bruit de mesure  $\eta_k^m$ , on peut approcher localement la vraisemblance conditionnelle des observations autour de  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}$  de la manière suivante :

$$p(y_k(t_m), y_k(t_{m-1}) | \mathcal{X}_k) = \mathcal{N}(\mathcal{Z}_k^m, \mathbf{h}_k^m(\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}) + H_k^{m,n}(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}), R_k) \tag{8.31}$$

Alors la densité a posteriori est donnée par :

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{1:k}) &\simeq \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \frac{\mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}\right)}{p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(y_k(t_{m-1}) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\
&\quad \times \mathcal{N}\left(\mathcal{Z}_k^m, \mathbf{h}_k^m\left(\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}\right) + H_k^{m,n}\left(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}\right), R_k\right) \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \frac{\mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k}^{m,n}, P_{k|k}^{m,n}\right)}{p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(y_k(t_{m-1}) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\
&\quad \times \mathcal{N}\left(\mathcal{Z}_k^m, \mathbf{h}_k^m\left(\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}\right), H_k^{m,n} P_{k|k-1}^{m,n} H_k^{m,nT} + R_k\right) \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_k^{m,n} \mathcal{N}\left(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k}^{m,n}, P_{k|k}^{m,n}\right)
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Les équations de correction de la gaussienne associée à la case retard/Doppler  $(m, n)$  sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{k|k}^{m,n} = \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n} + K_k^{m,n} \left( \mathcal{Z}_k^m - \mathbf{h}_k^m \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n} \right) \right) \\ P_{k|k}^{m,n} = P_{k|k-1}^{m,n} - K_k^{m,n} H_k^{m,n} P_{k|k-1}^{m,n} \end{cases} \tag{8.33}$$

L'observation prédite  $\mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n}$  et la matrice de covariance de l'innovation  $G_k^{m,n}$  associées à la case retard/Doppler  $(m, n)$  sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n} = \mathbf{h}_k^m \left( \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n} \right) \\ G_k^{m,n} = H_k^{m,n} P_{k|k-1}^{m,n} H_k^{m,nT} + R_k \end{cases} \tag{8.34}$$

Notons que  $\mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n}$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$\mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{1|k-1}^{m,n} \\ \mathcal{Z}_{2|k-1}^{m,n} \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

où  $\mathcal{Z}_{1|k-1}^{m,n}$  est la prédiction concernant l'observation  $y_k(t_{m-1})$  et  $\mathcal{Z}_{2|k-1}^{m,n}$  est la prédiction concernant  $y_k(t_m)$ . De même  $G_k^{m,n}$  s'écrit :

$$G_k^{m,n} = \begin{pmatrix} G_{11k}^{m,n} & G_{12k}^{m,n} \\ G_{21k}^{m,n} & G_{22k}^{m,n} \end{pmatrix} \tag{8.36}$$

Le gain du  $(m, n)$ <sup>ème</sup> filtre de Kalman étendu est donné par :

$$K_k^{m,n} = P_{k|k-1}^{m,n} H_k^{m,nT} G_k^{m,n-1} \tag{8.37}$$

Les poids à l'instant  $k$  sont exprimés en fonction des poids précédents par la relation suivante :

$$w_k^{m,n} = w_{k-1}^{m,n} \frac{\mathcal{N}\left(\mathcal{Z}_k^m, \mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n}, G_k^{m,n}\right)}{p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(y_k(t_{m-1}) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \tag{8.38}$$

Notons que dans le filtre à somme de gaussiennes classique présenté au paragraphe 3.5.3, le terme  $p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  apparaît au dénominateur de la mise à jour des poids dans 3.63, mais est le même pour toutes les gaussiennes et n'intervient donc qu'à titre de facteur de normalisation.

Comme la relation 8.38 le montre, afin de déterminer les poids à l'instant  $k$ , il faut connaître la vraisemblance marginale pour les différentes observations  $\{y_k(t_i)\}_{i=0}^M$  conditionnellement aux anciennes observations.

Supposons qu'on veut déterminer la loi marginale  $p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  d'une observation donnée  $y_k(t_i)$ . On note  $\mathcal{H}_{i,j}$  l'événement " $y_k(t_i)$  provient d'une cible localisée dans la case retard/Doppler  $(i, j)$ ",  $\mathcal{H}'_{i,j}$  l'événement " $y_k(t_i)$  provient d'une cible localisée dans la case retard/Doppler  $(i+1, j)$ " et  $\mathcal{H}_0$  l'événement " $y_k(t_i)$  est un bruit", autrement dit il n'y a pas de cible dans les cases retard  $i$  et  $i+1$ . En faisant l'hypothèse standard qu'un corrélateur à Doppler nul échantillonné toutes les cases retard ne peut pas résoudre plusieurs cibles à l'intérieur d'une même case retard, les événements  $\{\mathcal{H}_{i,j}\}_{j=1}^N$ ,  $\{\mathcal{H}'_{i,j}\}_{j=1}^N$  et  $\mathcal{H}_0$  forment une partition de l'événement certain conditionnellement aux anciennes observations, on peut alors écrire :

$$\sum_{j=1}^N p(\mathcal{H}_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) + \sum_{j=1}^N p(\mathcal{H}'_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) + p(\mathcal{H}_0 | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = 1 \quad (8.39)$$

De plus, la vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement aux anciennes observations  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{j=1}^N p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_{i,j}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \\ &+ \sum_{j=1}^N p(y_k(t_i) | \mathcal{H}'_{i,j}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}'_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \\ &+ p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_0, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}_0 | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Le probabilité de l'événement  $\mathcal{H}_{i,j}$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{H}_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i,j)} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathcal{X}_k \\ &= \int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i,j)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) d\mathcal{X}_k \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{k-1}^{m,n} \int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i,j)} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) d\mathcal{X}_k \end{aligned} \quad (8.41)$$

La masse de probabilité de  $\mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{i,j}, P_{k|k-1}^{i,j})$  reste en quasi-totalité dans la case retard/Doppler  $(m, n)$ . Alors pour  $m = i$  et  $n = j$ , on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i,j)} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{i,j}, P_{k|k-1}^{i,j}) d\mathcal{X}_k \approx 1 \quad (8.42)$$

et pour  $m \neq i$  ou  $n \neq j$ , on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i,j)} \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n}, P_{k|k-1}^{m,n}) d\mathcal{X}_k \approx 0 \quad (8.43)$$

Ainsi 8.41 peut être approché par :

$$p(\mathcal{H}_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \approx w_{k-1}^{i,j} \quad (8.44)$$

Avec le même raisonnement, on peut montrer que la probabilité de l'événement  $\mathcal{H}'_{i,j}$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  peut être approchée par :

$$p(\mathcal{H}'_{i,j} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_k \in \text{case}(i+1,j)} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathcal{X}_k \approx w_{k-1}^{i+1,j} \quad (8.45)$$

D'après la relation 8.39 probabilité de l'événement  $\mathcal{H}_0$  s'écrit :

$$p(\mathcal{H}_0 | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \approx 1 - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i,j} - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i+1,j} \quad (8.46)$$

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}_{i,j}$  est déterminée par l'innovation à l'instant  $k$  dans la case  $(i, j)$  :

$$p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_{i,j}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{2k|k-1}^{i,j}, G_{22k}^{i,j}) \quad (8.47)$$

où  $\mathcal{Z}_{2k|k-1}^{i,j}$  et  $G_{22k}^{i,j}$  sont la moyenne prédite et matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_i)$  calculées par la gaussienne correspondant à la case retard/Doppler  $(i, j)$ .

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}'_{i,j}$  est déterminée par l'innovation à l'instant  $k$  dans la case  $(i+1, j)$  :

$$p(y_k(t_i) | \mathcal{H}'_{i,j}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{1k|k-1}^{i+1,j}, G_{11k}^{i+1,j}) \quad (8.48)$$

où  $\mathcal{Z}_{1k|k-1}^{i+1,j}$  et  $G_{11k}^{i+1,j}$  sont la moyenne prédite et la matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_i)$  calculées par la gaussienne correspondant à la case retard/Doppler  $(i+1, j)$ .

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}_0$  est déterminée par la densité de probabilité du bruit d'observation :

$$p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_0, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T} \mathcal{I}_2) \quad (8.49)$$

où  $\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Il en résulte que la vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &\simeq \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i,j} \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{2k|k-1}^{i,j}, G_{22k}^{i+1,j}) \\ &+ \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i+1,j} \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{1k|k-1}^{i+1,j}, G_{11k}^{i+1,j}) \\ &+ \left( 1 - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i,j} - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{i+1,j} \right) \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T} \mathcal{I}_2) \end{aligned} \quad (8.50)$$

La relation 8.50 est valide pour  $i \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ . Pour les deux extrêmes  $i = 0$  et  $i = M$ , le calcul est légèrement différent. Pour  $i = 0$ , les événements  $\{\mathcal{H}_{0,j}\}_{j=1}^N$  n'existent plus, alors la vraisemblance de  $y_k(t_0)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit :

$$p(y_k(t_0) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \simeq \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{1,j} \mathcal{N}(y_k(t_0), \mathcal{Z}_{1_{k|k-1}}^{1,j}, G_{11_{k-1}}^{1,j}) + \left(1 - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{1,j}\right) \mathcal{N}\left(y_k(t_0), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T} \mathcal{I}_2\right) \quad (8.51)$$

Pour  $i = M$ , les événements  $\{\mathcal{H}'_{M,j}\}_{j=1}^N$  n'existent plus, alors la vraisemblance de  $y_k(t_M)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit :

$$p(y_k(t_M) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \simeq \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{M,j} \mathcal{N}(y_k(t_M), \mathcal{Z}_{2_{k|k-1}}^{M,j}, G_{22_{k-1}}^{M,j}) + \left(1 - \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{M,j}\right) \mathcal{N}\left(y_k(t_M), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T} \mathcal{I}_2\right) \quad (8.52)$$

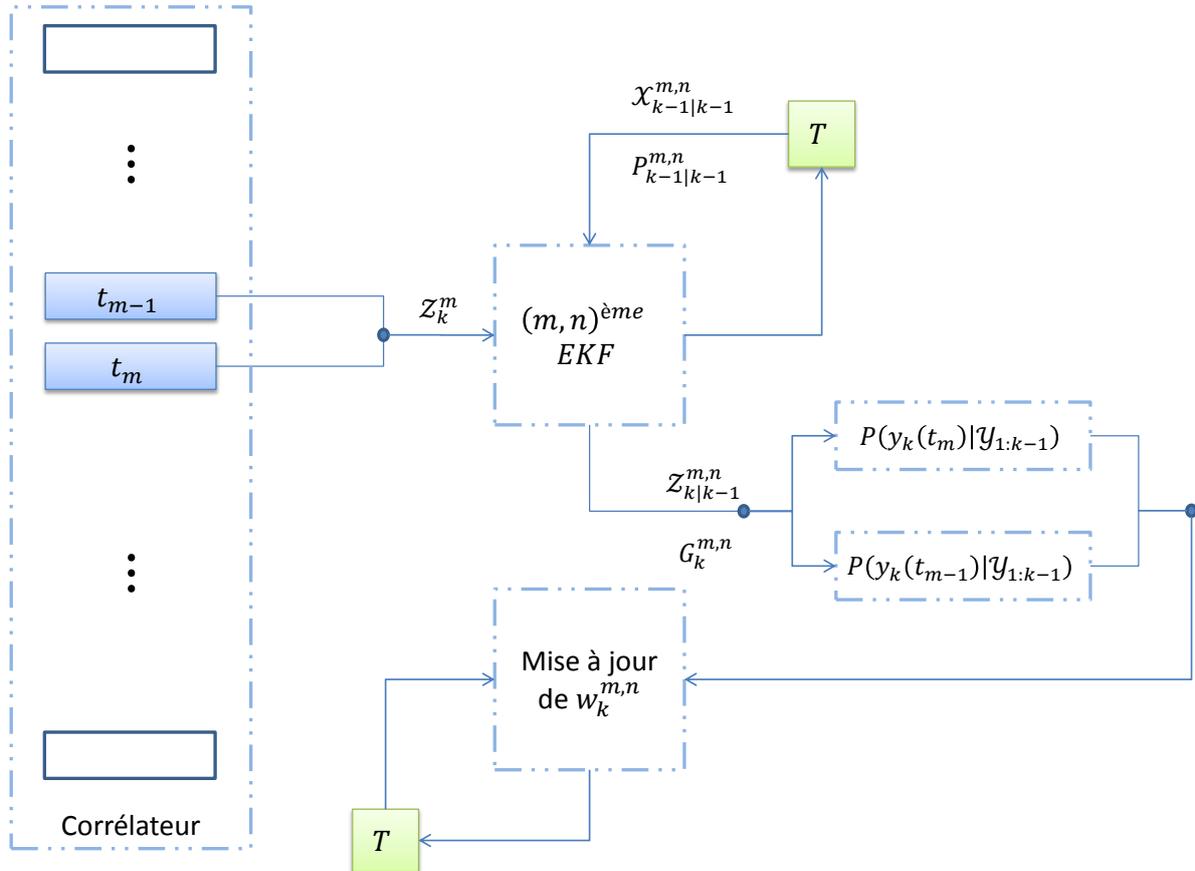


FIGURE 8.3 – Opérations du filtre à somme de gaussiennes dans la case retard/Doppler  $(m, n)$

## 8.7.3 Redistribution des gaussiennes

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, de temps à autre, sous l'effet de la dynamique des cibles, l'estimateur du retard (respectivement du Doppler) de la gaussienne associée à la case retard/Doppler  $(m, n)$  peut franchir les frontières de la  $m^{\text{ème}}$  case retard (respectivement de la  $n^{\text{ème}}$  Doppler) lors de l'étape de prédiction ou de correction bayésienne à l'instant  $k$ .

Afin d'assurer qu'à l'instant  $k + 1$  il y ait exactement une gaussienne associée à chaque case retard/Doppler, ainsi que le prévoit l'équation 8.19, nous proposons la procédure suivante qui fonctionne correctement en simulations sans être nécessairement optimale :

- Chaque case retard/Doppler  $(m, n)$  comptabilise les gaussiennes dont le retard et le Doppler estimés tombent à l'intérieur de cette case et les fusionne en une gaussienne unique.
- Toute case retard/Doppler dépourvue de gaussienne pour cause de migration vers une case retard ou une case Doppler adjacente est pourvue d'une gaussienne centrée au milieu de cette case retard/Doppler affectée d'un poids résiduel à priori (surveillance). Ce poids ne devra pas modifier significativement la densité de probabilité a posteriori, mais ne devra pas être négligeable pour autant, afin d'assurer la surveillance de la case retard/Doppler en question aux instants suivants.

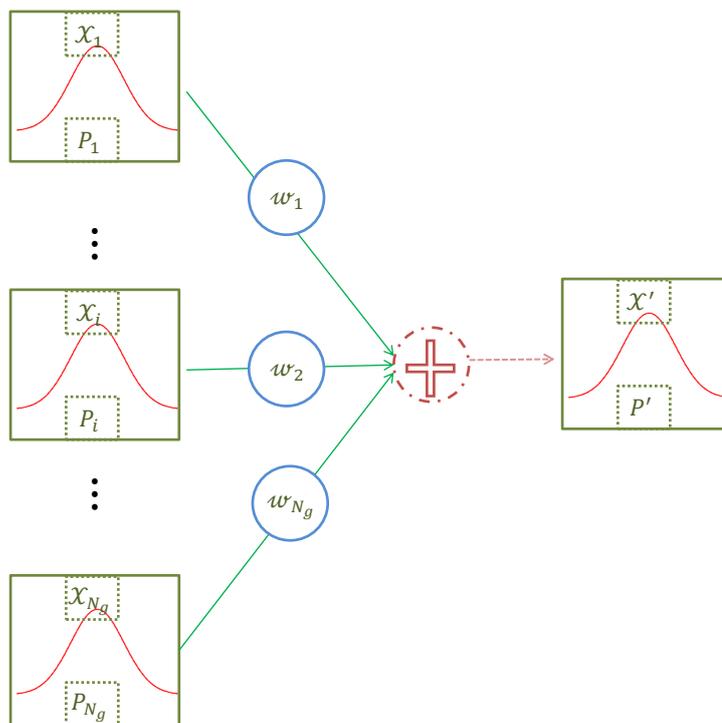


FIGURE 8.4 – Fusion de plusieurs gaussiennes

Supposons qu'il y a  $N_g$  gaussiennes dont le retard et le Doppler estimés sont dans la même case retard/Doppler après l'étape de correction bayésienne, et ayant respectivement des moyennes  $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{N_g}$ , des covariances  $\{P_i\}_{i=1}^{N_g}$  et des poids  $\{w_i\}_{i=1}^{N_g}$ . Ces gaussiennes peuvent être fusionnées en une gaussienne unique [Tanizaki 1996] de moyenne  $\mathcal{X}'$  :

$$\mathcal{X}' = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} w_i \mathcal{X}_i}{\sum_{i=1}^{N_g} w_i} \quad (8.53)$$

de matrice de covariance  $P'$  :

$$P' = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} w_i \left( P_i + (\mathcal{X}' - \mathcal{X}_i) (\mathcal{X}' - \mathcal{X}_i)^T \right)}{\sum_{i=1}^{N_g} w_i} \quad (8.54)$$

et de poids  $w'$  donné par :

$$w' = \sum_{i=1}^{N_g} w_i \quad (8.55)$$

#### 8.7.4 Initialisation du filtre à somme de gaussiennes

Afin de résoudre la récursivité dans les équations du filtre, on a besoin de connaître la loi de probabilité initiale de l'état  $p(\mathcal{X}_0)$ . En l'absence d'information a priori, la loi de probabilité initiale  $p(\mathcal{X}_0)$  est une loi uniforme. Avec l'approximation à base de somme de gaussiennes introduite dans cette section, la loi de probabilité initiale  $p(\mathcal{X}_0)$  s'écrit :

$$p(\mathcal{X}_0) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_0^{m,n} \mathcal{N} \left( \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{0|0}^{m,n}, P_{0|0}^{m,n} \right) \quad (8.56)$$

où  $\mathcal{X}_{0|0}^{m,n}$ ,  $P_{0|0}^{m,n}$  et  $w_0^{m,n}$  sont la moyenne, la matrice de covariance et le poids de la gaussienne qui se trouve dans la  $(m, n)^{\text{ème}}$  case retard/Doppler à l'instant discret initial  $k = 0$ . Les paramètres initiaux  $\mathcal{X}_{0|0}^{m,n}$ ,  $P_{0|0}^{m,n}$  et  $w_0^{m,n}$  sont déterminés de manière à couvrir l'ensemble de l'espace d'état et avoir une loi proche de la distribution uniforme. Les poids  $w_0^{m,n}$  pour  $m = 1, \dots, M$  et  $n = 1, \dots, N$  sont tous égaux. Or par définition :

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_0^{m,n} = 1 \quad (8.57)$$

alors, le poids de la case retard/Doppler  $(m, n)$  est donné par :

$$w_0^{m,n} = \frac{1}{MN} \quad (8.58)$$

La gaussienne qui se trouve dans la case retard/Doppler  $(m, n)$  est centrée au milieu de la case. Alors le retard bistatique  $\tau_{0|0}^{m,n}$  et le décalage Doppler moyens correspondants à la  $(m, n)^{\text{ème}}$  case retard/Doppler sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \tau_{0|0}^{m,n} \\ \nu_{0|0}^{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{dir} + (m-1)\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2} \\ \nu_{min} + (n-1)\Delta\nu + \frac{\Delta\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.59)$$

où  $\Delta\tau$  et  $\Delta\nu$  désignent la largeur d'une case retard et la largeur d'une case Doppler, respectivement,  $\nu_{min}$  désigne la valeur minimale du décalage de Doppler et  $\tau_{dir}$  désigne le retard correspondant au trajet direct.

A priori, aucune information sur l'amplitude complexe n'est connue initialement. Alors, la moyenne de l'amplitude complexe initiale est supposée nulle, soit :

$$\{a^I + ja^Q\}_{0|0}^{m,n} = 0 + j0 \quad (8.60)$$

La matrice de covariance initiale  $P_{0|0}^{m,n}$  correspond à la gaussienne qui se trouve dans la case retard/Doppler du rang  $(m, n)$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{aI_0}^{m,n})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{aQ_0}^{m,n})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{\tau_0}^{m,n})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sigma_{\nu_0}^{m,n})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\Delta T}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{\Delta \nu}{2})^2 \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

où  $\sigma_{\tau_0}^{m,n}$  et  $\sigma_{\nu_0}^{m,n}$  désignent l'écart-type initial du retard et l'écart-type du Doppler, respectivement.  $\sigma_{aI_0}^{m,n}$  et  $\sigma_{aQ_0}^{m,n}$  désignent l'écart-type initial de la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude complexe, respectivement. Typiquement on choisit pour  $S$  une valeur de l'ordre de 100 afin de refléter une large incertitude initiale sur la SER initiale des cibles.

## 8.8 Implémentation par filtrage particulière

Afin de mieux traiter la non-linéarité du problème, nous proposons également une implémentation particulière. Nous montrerons dans la partie simulations que cela permet d'améliorer l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation d'état.

### 8.8.1 Principe

Dans ce paragraphe, on détaille la résolution de la problématique du filtrage bayésien introduite dans le paragraphe 8.6 par le filtrage particulière classique. En adaptant l'idée qui consiste à utiliser une gaussienne par case dans la technique présentée dans la section 8.7, la méthode consiste à utiliser  $N_p$  particules dans chaque case retard/Doppler. La  $p^{\text{ème}}$  particule existant dans la case  $(m, n)$  est représentée à l'instant  $k$  par son état  $\mathcal{X}_k^{m,n,p} = \begin{bmatrix} \tau_k \\ \nu_k \end{bmatrix}^{m,n,p}$  et son poids  $w_k^{m,n,p}$ .

On désigne par  $\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} \tau_k \\ \nu_k \end{bmatrix}$  la partie non-linéaire de l'espace d'état et  $\mathcal{X}_{lk} = \begin{bmatrix} a_k^I \\ a_k^Q \end{bmatrix}$  les parties réelle et imaginaire de l'amplitude complexe. Les équations 8.8, 8.9 et 8.13 nous permettent d'écrire le système dynamique de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k &= \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}) + \varepsilon_k \\ \mathcal{X}_{lk} &= \mathcal{F}_k(\mathcal{X}_{k-1}) \mathcal{X}_{lk-1} + \varepsilon_{lk} \\ \mathcal{Z}_k^m &= \mathcal{H}_k(\mathcal{X}_k) \mathcal{X}_{lk} + \eta_k \end{cases} \quad (8.62)$$

où la matrice  $\mathcal{F}_k \left( \begin{bmatrix} \tau_{k-1} \\ \nu_{k-1} \end{bmatrix} \right)$  est donnée par :

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{X}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\nu_{k-1}T) & -\sin(2\pi\nu_{k-1}T) \\ \sin(2\pi\nu_{k-1}T) & \cos(2\pi\nu_{k-1}T) \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

et la matrice  $\mathcal{H}_k \left( \begin{bmatrix} \tau_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \right)$  est donnée par :

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{X}_k) = \begin{pmatrix} \Re(\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)) & -\Im(\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)) \\ \Im(\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)) & \Re(\Gamma^k(t_{m-1} - \tau_k)) \\ \Re(\Gamma^k(t_m - \tau_k)) & -\Im(\Gamma^k(t_m - \tau_k)) \\ \Im(\Gamma^k(t_m - \tau_k)) & \Re(\Gamma^k(t_m - \tau_k)) \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

On constate que les deux dernières équations dans 8.62 forment un sous-système linéaire gaussien conditionnellement à  $\mathcal{X}_{0:k}$ . Donc il est possible d'utiliser un filtre de Kalman pour estimer la composante linéaire  $\mathcal{X}_{l_k}$  et sa matrice de covariance. D'où la possibilité de réduire la partie de l'espace d'état où l'on aura vraiment besoin d'utiliser des particules. Dans ce cas, l'approximation particulaire prend la forme :

- d'un système de particules sur la partie non-linéaire de l'espace d'état  $\mathcal{X}_k$ .
- à chaque particule est attaché un filtre de Kalman, dont dépendent
  - la distribution gaussienne de la partie linéaire de l'espace d'état  $\mathcal{X}_{l_k}$
  - le poids de la particule.

### 8.8.2 Équations du filtre

Comme nous l'avons exposé dans la section 4.8, la densité a posteriori à l'instant  $k$  est donnée par :

$$p(\mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) = p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k}) p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k}) \quad (8.65)$$

La partie  $p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}, \mathcal{Y}_{1:k})$  peut se déterminer d'une manière exacte par un filtre de Kalman et le calcul de la deuxième partie  $p(\mathcal{X}_{0:k} | \mathcal{Y}_{1:k})$  se fait par le filtrage particulaire. Dans les sous-paragraphes suivants, on va détailler comment générer chaque particule, déterminer les équations du filtrage de Kalman associé et calculer le poids de cette particule.

#### 8.8.2.1 Génération des particules

Dans notre filtre, on choisit par commodité la densité de transition comme densité d'importance :

$$q(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{0:k-1}, \mathcal{Y}_{1:k}) = p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \quad (8.66)$$

Alors dans une case retard/Doppler donnée  $(m, n)$ , les  $N_p$  échantillons  $\{\mathcal{X}_k^{m,n,p}\}_{p=1}^{N_p}$  sont générées selon la densité de transition :

$$\mathcal{X}_k^{m,n,p} \sim \mathcal{N}(\mathcal{X}_k, \mathbf{f}(\mathcal{X}_k^{m,n,p}), Q_k) \quad (8.67)$$

#### 8.8.2.2 Mise à jour des poids

On a vu dans le chapitre 4 que le poids  $w_k^{m,n,p}$  est donné par la relation 4.36 :

$$w_k^{m,n,p} \propto w_{k-1}^{m,n,p} \frac{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(\mathcal{Y}_k | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \quad (8.68)$$

Les deux approximations données par les relations 8.17 et 8.18 nous permettent d'écrire la relation 8.68 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w_k^{m,n,p} &\propto w_{k-1}^{m,n,p} \frac{p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) \prod_{i \neq \{m-1, m\}} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})}{\prod_{i=0}^N p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \\ &\propto w_{k-1}^{m,n,p} \frac{p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1})}{p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(y_k(t_{m-1}) | \mathcal{Y}_{1:k-1})} \end{aligned} \quad (8.69)$$

Conditionnellement à la séquence  $\mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}$ , seules les deux observations  $y_k(t_m)$  et  $y_k(t_{m-1})$  dépendent de cette séquence et des observations précédentes. Les autres observations ne dépendent que des observations précédentes.

La relation 8.69 ressemble à celle de la mise à jour des poids des gaussiennes dans le GSF. La vraisemblance conditionnelle  $p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est calculée en intégrant la partie linéaire  $\mathcal{X}_{l_k}$  :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{l_k} \\ &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{m,n,p}) p(\mathcal{X}_{l_k} | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) d\mathcal{X}_{l_k} \end{aligned} \quad (8.70)$$

La vraisemblance conditionnelle  $p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{m,n,p})$  est déterminée à partir de l'équation d'observation donnée par la relation 8.62, soit :

$$p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_k^{m,n,p}) = \mathcal{N}(\mathcal{Z}_k^m, \mathcal{H}_k^{m,n,p} \mathcal{X}_{l_k}, R_k) \quad (8.71)$$

où la matrice d'observation donnée par  $\mathcal{H}_k^{m,n,p} = \mathcal{H}_k(\mathcal{X}_k^{m,n,p})$  est définie par la relation 8.64. La densité  $p(\mathcal{X}_{kl} | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1})$  est donnée par la prédiction de Kalman associée à la particule  $\mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}$ , soit :

$$p(\mathcal{X}_{kl} | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{X}_{kl}, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}, P_{k|k-1}^{m,n,p}) \quad (8.72)$$

où  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}$  et  $P_{k|k-1}^{m,n,p}$  sont la moyenne et la matrice de covariance prédites de l'état linéaire par le filtre de Kalman associé à la particule  $\mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}$ . Ainsi, l'intégrale donnée par 8.70 s'écrit :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{Z}_k^m | \mathcal{X}_{0:k}^{m,n,p}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_{l_k}} \mathcal{N}(\mathcal{Z}_k^m, \mathcal{H}_k^{m,n,p} \mathcal{X}_{l_k}, R_k) \mathcal{N}(\mathcal{X}_{l_k}, \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}, P_{k|k-1}^{m,n,p}) d\mathcal{X}_{l_k} \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{Z}_k^m, \mathcal{H}_k^{m,n,p} \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}, \mathcal{H}_k^{m,n,p} P_{k|k-1}^{m,n,p} \mathcal{H}_k^{m,n,pT} + R_k) \end{aligned} \quad (8.73)$$

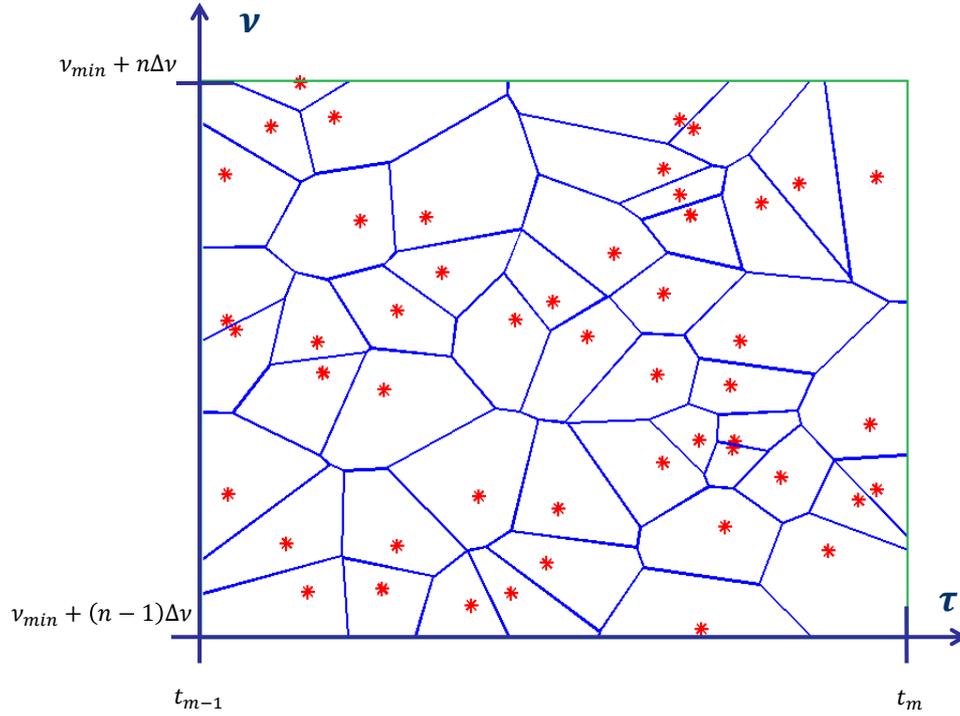
On définit la moyenne  $\mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n,p}$  et la matrice de covariance  $G_k^{m,n,p}$  de l'innovation par :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n,p} = \mathcal{H}_k^{m,n,p} \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p} \\ G_k^{m,n,p} = \mathcal{H}_k^{m,n,p} P_{k|k-1}^{m,n,p} \mathcal{H}_k^{m,n,pT} + R_k \end{cases} \quad (8.74)$$

Notons que la moyenne s'écrit  $\mathcal{Z}_{k|k-1}^{m,n,p} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{1k|k-1}^{m,n,p} \\ \mathcal{Z}_{2k|k-1}^{m,n,p} \end{bmatrix}$  et la matrice de covariance s'écrit  $G_k^{m,n,p} =$

$\begin{bmatrix} G_{11k}^{m,n,p} & G_{12k}^{m,n,p} \\ G_{21k}^{m,n,p} & G_{22k}^{m,n,p} \end{bmatrix}$ , où  $\mathcal{Z}_{1k|k-1}^{m,n,p}$  et  $G_{11k}^{m,n,p}$  désignent la moyenne et la matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_{m-1})$ , et  $\mathcal{Z}_{2k|k-1}^{m,n,p}$  et  $G_{22k}^{m,n,p}$  désignent la moyenne et la matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_m)$  associés à la  $p^{\text{ème}}$  particule de la case  $(m, n)$ .

Afin de déterminer les poids, il nous reste à calculer la vraisemblance marginale  $p(y_k(t_m) | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  pour les différentes valeurs de  $m \in \{0, 1, \dots, M\}$ . En appliquant le diagramme de Voronoi sur les particules existant dans une case  $(m, n)$  quelconque, on obtient une décomposition de l'espace retard/Doppler en régions de Voronoi comme l'illustre la figure 8.5. A l'instant discret  $k$ , la région  $\mathcal{D}_k^{m,n,p}$  est associée à la  $p^{\text{ème}}$  particule de la  $(m, n)^{\text{ème}}$  case. Cette région représente l'ensemble des points de la case retard/Doppler  $(m, n)$  qui sont plus proches en distance euclidienne de la  $p^{\text{ème}}$  particule que de toute autre particule. D'une manière similaire à celle utilisée pour le filtre à somme des gaussiennes dans la section 8.7.2.2, nous allons déterminer la loi marginale  $p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1})$  d'une observation donnée  $y_k(t_i)$ .

FIGURE 8.5 – Diagramme de Voronoi associé à la case retard/Doppler  $(m, n)$ 

On note  $\mathcal{H}_{i,j,q}$  l'événement " $y_k(t_i)$  provient d'une cible localisée dans la case retard/Doppler  $(i, j)$  et plus précisément dans  $\mathcal{D}_k^{i,j,q}$ ",  $\mathcal{H}'_{i,j,q}$  l'événement " $y_k(t_i)$  provient d'une cible localisée dans la case retard/Doppler  $(i+1, j)$  et plus précisément dans  $\mathcal{D}_k^{i+1,j,q}$ ", et  $\mathcal{H}_0$  l'hypothèse " $y_k(t_i)$  est du bruit", autrement dit il n'y a pas de cible dans les cases retard  $i$  et  $i+1$ . En faisant comme dans le paragraphe 8.7.2.2, l'hypothèse standard pour un corrélateur à Doppler nul qu'une observation provient au maximum d'une seule cible, ce qui revient à dire qu'il y a au mieux une seule cible par case retard, les événements  $\left\{ \left\{ \mathcal{H}_{i,j,q} \right\}_{q=1}^{N_p} \right\}_{j=1}^N$ ,  $\left\{ \left\{ \mathcal{H}'_{i,j,q} \right\}_{q=1}^{N_p} \right\}_{j=1}^N$  et  $\mathcal{H}_0$  forment une partition de l'événement certain conditionnellement aux anciennes observations, on peut alors écrire :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} p(\mathcal{H}_{i,j,q} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} p(\mathcal{H}'_{i,j,q} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) + p(\mathcal{H}_0 | \mathcal{Y}_{1:k-1}) = 1 \quad (8.75)$$

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_{i,j,q}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}_{i,j,q} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} p(y_k(t_i) | \mathcal{H}'_{i,j,q}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}'_{i,j,q} | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \\ &+ p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_0, \mathcal{Y}_{1:k-1}) p(\mathcal{H}_0 | \mathcal{Y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (8.76)$$

La probabilité de l'événement  $\mathcal{H}_{i,j,q}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{H}_{i,j,q} \mid \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{i,j,q}} p(\mathcal{X}_k \mid \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathcal{X}_k \\
&= \int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{i,j,q}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{N_p} w_{k-1}^{m,n,p} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}) d\mathcal{X}_k \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{N_p} w_{k-1}^{m,n,p} \int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{i,j,q}} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p}) d\mathcal{X}_k
\end{aligned} \tag{8.77}$$

Par définition de la région de Voronoi  $\mathcal{D}_k^{m,n,p}$ , on a  $\mathcal{X}_{k|k-1}^{m,n,p} \subset \mathcal{D}_k^{m,n,p}$ . Par conséquent, pour  $m = i$ ,  $n = j$  et  $p = q$ , on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{i,j,q}} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{i,j,q}) d\mathcal{X}_k = 1 \tag{8.78}$$

et pour  $m \neq i$  ou  $n \neq j$  ou  $p \neq q$ , on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{m,n,p}} \delta(\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k|k-1}^{i,j,q}) d\mathcal{X}_k = 0 \tag{8.79}$$

Ainsi, la relation 8.77 s'écrit :

$$p(\mathcal{H}_{i,j,q} \mid \mathcal{Y}_{1:k-1}) = w_{k-1}^{i,j,q} \tag{8.80}$$

Avec le même raisonnement, on peut montrer que la probabilité de l'événement  $\mathcal{H}'_{i,j,q}$  s'écrit :

$$p(\mathcal{H}'_{i,j,q} \mid \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}_k \in \mathcal{D}_k^{i+1,j,q}} p(\mathcal{X}_k \mid \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathcal{X}_k = w_{k-1}^{i+1,j,q} \tag{8.81}$$

D'après la relation 8.75 probabilité de l'événement  $\mathcal{H}_0$  s'écrit :

$$p(\mathcal{H}_0 \mid \mathcal{Y}_{1:k-1}) = 1 - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i,j,q} - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i+1,j,q} \tag{8.82}$$

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}_{i,j,q}$  est déterminée par l'innovation à l'instant  $k$  donnée par le filtre de Kalman lié à la particule  $(i, j, q)$  :

$$p(y_k(t_i) \mid \mathcal{H}_{i,j,q}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{2k|k-1}^{i,j,q}, G_{22k}^{i,j,q}) \tag{8.83}$$

où  $\mathcal{Z}_{2k|k-1}^{i,j,q}$  et  $G_{22k}^{i,j,q}$  sont la moyenne et la matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'historique de la particule  $(i, j, q)$ . La moyenne et la matrice de covariance sont déterminées par marginalisation par la relation 8.73 en extrayant les parties correspondant à l'observation  $y_k(t_i)$ .

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}'_{i,j,q}$  est déterminée par l'innovation à l'instant  $k$  donnée par le filtre de Kalman lié à la particule  $(i+1, j, q)$  :

$$p(y_k(t_i) \mid \mathcal{H}'_{i,j,q}, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{1k|k-1}^{i+1,j,q}, G_{11k}^{i+1,j,q}) \tag{8.84}$$

où  $\mathcal{Z}_{1k|k-1}^{i+1,j,q}$  et  $G_{11k}^{i+1,j,q}$  sont la moyenne et la matrice de covariance de l'observation  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'historique de la particule  $(i+1, j, q)$ .

La vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à l'événement  $\mathcal{H}_0$  est déterminée par la densité de probabilité du bruit d'observation :

$$p(y_k(t_i) | \mathcal{H}_0, \mathcal{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}\left(y_k(t_i), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T}\mathcal{I}_2\right) \quad (8.85)$$

Il en résulte que la vraisemblance de  $y_k(t_i)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_i) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i,j,q} \mathcal{N}\left(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{2_{k|k-1}}^{i,j,q}, G_{22_k}^{i,j,q}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i+1,j,q} \mathcal{N}\left(y_k(t_i), \mathcal{Z}_{1_{k|k-1}}^{i+1,j,q}, G_{11_k}^{i+1,j,q}\right) \\ &+ \left(1 - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i,j,q} - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{i+1,j,q}\right) \mathcal{N}\left(y_k(t_i), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T}\mathcal{I}_2\right) \end{aligned} \quad (8.86)$$

La relation 8.86 est valide pour  $i \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ . Pour les deux extrêmes  $i = 0$  et  $i = M$ , le calcul est légèrement différent. Pour  $i = 0$ , les événements  $\{\{\mathcal{H}_{0,j,p}\}_{p=1}^{N_p}\}_{j=1}^N$  n'existent plus. Ainsi, la vraisemblance de  $y_k(t_0)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_0) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{1,j,q} \mathcal{N}\left(y_k(t_0), \mathcal{Z}_{1_{k|k-1}}^{1,j,q}, G_{11_k}^{1,j,q}\right) \\ &+ \left(1 - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{1,j,q}\right) \mathcal{N}\left(y_k(t_0), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T}\mathcal{I}_2\right) \end{aligned} \quad (8.87)$$

Pour  $i = M$ , les événements  $\{\{\mathcal{H}'_{M,j,p}\}_{p=1}^{N_p}\}_{j=1}^N$  n'existent plus. Ainsi, la vraisemblance de  $y_k(t_M)$  conditionnellement à  $\mathcal{Y}_{1:k-1}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} p(y_k(t_M) | \mathcal{Y}_{1:k-1}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{M,j,q} \mathcal{N}\left(y_k(t_M), \mathcal{Z}_{2_{k|k-1}}^{M,j,q}, G_{22_k}^{M,j,q}\right) \\ &+ \left(1 - \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^{N_p} w_{k-1}^{M,j,q}\right) \mathcal{N}\left(y_k(t_M), \mathcal{O}_2, \frac{N_0}{2T}\mathcal{I}_2\right) \end{aligned} \quad (8.88)$$

### 8.8.3 Redistribution des particules

De même qu'une étape de redistribution introduite en 8.7.3 était nécessaire pour le GSF, une étape de redistribution est nécessaire pour le filtre particulaire que nous venons d'introduire en partie pour les mêmes raisons :

- la dynamique des cibles provoque des franchissements de case retard ou Doppler lors de l'étape de prédiction 8.67,

- pour être conforme à ce qui a été dit au début du paragraphe 8.8.1, c'est-à-dire après chaque étape de correction bayésienne, le nombre des particules dans chaque case retard/Doppler doit revenir à la valeur  $N_p$ ,

pour éviter le phénomène de dégénérescence expliqué en 4.4.1. Appelons  $N_k^{m,n}$  le nombre de particules présentes à l'instant discret  $k$  dans la case retard/Doppler  $(m, n)$  à la fin de l'étape de correction bayésienne. Le poids total de la case retard/Doppler  $(m, n)$  sera donné par :

$$w_k^{m,n} = \sum_{p=1}^{N_k^{m,n}} w_k^{m,n,p} \quad (8.89)$$

en supposant que l'on a procédé à la normalisation

$$\sum_m \sum_n \sum_p w_k^{m,n,p} = 1. \quad (8.90)$$

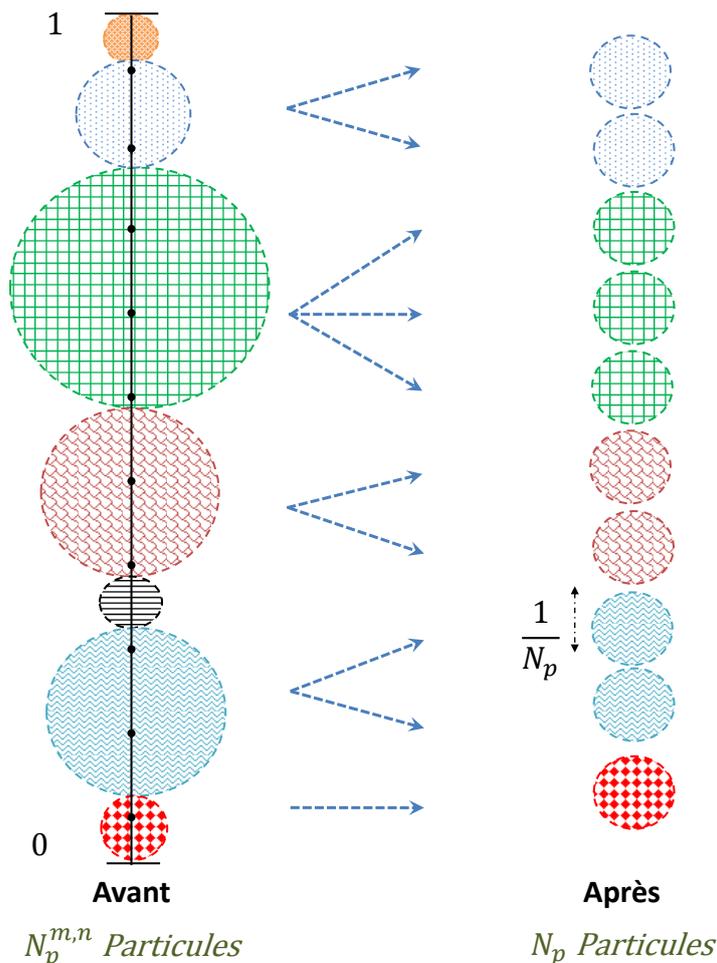
Le ré-échantillonnage de  $N_p$  particules dans la case retard/Doppler  $(m, n)$  qui ne compte que  $N_k^{m,n}$  particules s'effectuera donc en modifiant la procédure décrite en 4.5 de la façon suivante :

- Tirer  $N_p$  particules  $\mathcal{X}_k^{m,n,(i^*)}$ ,  $i^* = 1, \dots, N_p$  avec

$$Pr \left( \mathcal{X}_k^{m,n,(i^*)} = \mathcal{X}_k^{m,n,p} \right) = \frac{w_k^{m,n,p}}{w_k^{m,n}} \quad (8.91)$$

- et leur assigner comme poids la valeur  $\frac{w_k^{m,n}}{N_p}$  de sorte que le poids total de la case retard/Doppler  $(m, n)$  soit conservé.

La figure 8.6 illustre cette procédure de redistribution case par case. Tout comme pour la redistribution en GSF, les cases vacantes (i.e. telles que  $N_k^{m,n} = 0$ ) sont pourvues de  $N_p$  particules tirées selon une loi uniforme sur le support de la case et de poids résiduels.

FIGURE 8.6 – La redistribution dans la case retard/Doppler  $(m, n)$ 

#### 8.8.4 Initialisation du filtre particulaire

De même qu'une étape d'initialisation introduite en 8.7.4 était nécessaire pour le GSF, une étape d'initialisation est nécessaire pour le filtre particulaire que nous venons d'introduire. Avec l'approximation à base de filtrage particulaire, la loi de probabilité initiale de la partie non-linéaire  $\mathcal{X}_0$  s'écrit :

$$p(\mathcal{X}_0) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{N_p} w_0^{m,n,p} \delta(\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}_0^{m,np}) \quad (8.92)$$

où  $\mathcal{X}_0^{m,n}$ ,  $w_0^{m,n,p}$  sont la moyenne et le poids de la  $p^{\text{ème}}$  particule qui se trouve dans la  $(m, n)^{\text{ème}}$  case retard/Doppler à l'instant discret initial  $k = 0$ . Les paramètres initiaux  $\mathcal{X}_0^{m,n,p}$  et  $w_0^{m,n,p}$  sont déterminés de manière couvrir quasiment l'ensemble de l'espace d'état et avoir une loi proche de la distribution uniforme. Les poids  $w_0^{m,n,p}$  pour  $m = 1, \dots, M$ ,  $n = 1, \dots, N$  et  $p = 1, \dots, N_p$  sont tous égaux. Or par définition :

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{N_p} w_0^{m,n,p} = 1 \quad (8.93)$$

alors, le poids initial de la particule  $p$  dans la case retard/Doppler  $(m, n)$  est donné par :

$$w_0^{m,n,p} = \frac{1}{MNN_p} \quad (8.94)$$

Les  $N_p$  particules qui se trouvent dans la case retard/Doppler  $(m, n)$  sont tirées selon une loi uniforme de support  $[\tau_{dir} + (m-1)\Delta\tau, \tau_{dir} + m\Delta\tau] \times [\nu_{min} + (n-1)\Delta\nu, \nu_{min} + n\Delta\nu]$ .  $\Delta\tau$  et  $\Delta\nu$  désignent la largeur d'une case retard et la largeur d'une case Doppler, respectivement,  $\nu_{min}$  désigne la valeur minimale du décalage de Doppler et  $\tau_{dir}$  désigne le retard correspondant au trajet direct.

La Rao-Blackwellisation dans l'approximation à base de FP, consiste à approximer la densité de probabilité initiale de l'amplitude complexe, correspondant à la particule  $p$  de la case retard/Doppler  $(m, n)$ , par une gaussienne. Les paramètres de cette gaussienne sont les mêmes que ceux utilisés pour l'approximation à base de somme de gaussiennes présentée en 8.7.4.

## 8.9 Extraction des modes

### 8.9.1 Critère de l'entropie

Nous introduisons un système qui assure la détection/poursuite d'une manière aveugle. Ainsi aucune information sur les cibles n'est connue a priori. Le système doit estimer : (1) le nombre des cibles, (2) la position de chaque cible, et (3) le niveau de puissance de chaque cible. Les modes de la densité de probabilité a posteriori  $p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Y}_1 : k)$  correspondent aux cibles. Nous avons donc besoin d'un critère fiable permettant :

- de décider de la présence ou de l'absence de cibles dans le signal reçu,
- d'estimer le nombre de cibles s'il y'a lieu.

Pour réaliser ces deux tâches, nous proposons d'étudier le comportement de l'entropie des poids des cases retard/Doppler à l'instant discret  $k$  définis aux paragraphes 8.7.3 et 8.8.3

$$H_k = - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_k^{m,n} \log_2 w_k^{m,n} \quad (8.95)$$

exprimée en bits. Par ailleurs, appelons  $N_T$  le nombre de cibles. L'interprétation traditionnelle de la quantité  $H_k$  en théorie de l'information [Cover 2006] est que  $H_k$  mesure l'incertitude moyenne liée à la position des cibles dans les cases retard/Doppler. A la convergence, on sait également [Cover 2006] que  $H_k$  est majoré par le log en base 2 du nombre de possibilités, soit à la convergence :

$$H_k \leq \log_2 N_T \quad (8.96)$$

$$\Rightarrow 2^{H_k} \leq N_T \quad (8.97)$$

Un bon estimateur du nombre de cibles est donc obtenu en calculant

$$N_T = \lceil 2^{H_k} \rceil \quad (8.98)$$

où  $\lceil \alpha \rceil$  désigne l'entier immédiatement supérieur à  $\alpha$ , et  $H_k$  désigne l'entropie obtenue à la convergence.

#### 8.9.1.1 Convergence de l'entropie

Nous proposons de fixer un temps d'attente afin d'établir la convergence. L'entropie a un comportement différent selon le niveau de rapport signal sur bruit. Le temps de convergence de l'entropie est relativement court à fort rapport signal sur bruit. Ce temps croît considérablement pour les scénarios à faible rapport signal sur bruit. Dans le cadre de cette thèse, nous ne tenterons pas de déterminer automatiquement le temps de convergence de l'entropie. En prenant le cas du RSB limite, nous proposons de déterminer le temps de convergence pire cas  $t_{conv}$ . Par exemple,

dans le cas d'un signal FM, le rapport signal sur bruit limite en dessous duquel aucune cible ne peut être détectée est de  $-30dB$  avant corrélation.

### 8.9.2 Seuil de détection

En l'absence de cible,  $H_k$  converge vers une valeur élevée. Ceci permet de fixer un seuil de détection  $\Lambda$  analogue au seuil de détection utilisé dans la méthode classique rappelée au chapitre 6. Si à la convergence  $H_k < \Lambda$ , on décide qu'on est en présence d'une ou plusieurs cibles et si  $H_k \geq \Lambda$ , on décide qu'il n'y a pas de cible. En général, le seuil est déterminé en fixant un taux de fausse alarme constant (cf. principe de TFAC décrit au paragraphe 2.9.2). L'établissement du seuil par TFAC nécessite la connaissance de la distribution de l'entropie des poids. Ainsi il n'est pas si facile de déterminer le seuil analytiquement. De plus, les simulations Monte-Carlo du seuil exigent une grande charge de calcul. Par exemple, si le taux de fausse alarme est fixé à :  $P_{fa} = 10^{-7}$ , la détermination du seuil nécessite de faire tourner le filtre au minimum  $10^7$  fois en supposant que le signal reçu ne contient aucun écho de cible et que le bruit est au plus haut niveau possible (i.e. à un rapport signal sur bruit minimal permettant la détection). Pour simplifier, nous déterminerons le seuil comme étant la valeur minimale de l'entropie des poids des cases en l'absence de cible. Cette valeur sera établie empiriquement par simulation.

### 8.9.3 Critère de détection pour le GSF

Dans le cas d'une implémentation par un GSF, les simulations révèlent un comportement instable de l'entropie instantanée des poids des cases avec un large écart-type. Cela se traduit par une incertitude sur le nombre des modes. Cette incertitude qui peut atteindre jusqu'à 3 modes, est due à l'approximation du filtre de Kalman étendu et du fait qu'il n'y a qu'une particule gaussienne unique dans une case retard/Doppler. Ainsi, il est indispensable de moyenner l'entropie au cours de quelques itérations afin d'obtenir une estimation lisse du nombre des modes. Nous appelons  $T_M$  la durée pendant laquelle l'entropie moyenne est calculée. Ainsi l'entropie moyenne  $\bar{H}$  est donnée par :

$$\bar{H} = \sum_{k=k_c+1}^{k_c+K_M} H_k \quad (8.99)$$

où  $K_M = T_M/T$  est le nombre d'itérations dans l'intervalle de durée  $T_M$ ,  $k_c = t_{conv}/T$  désigne l'instant discret de convergence. Le nombre de pistes est donc estimé par :  $N_T = \lceil 2^{\bar{H}} \rceil$ . On désigne par  $\left\{ \hat{\mathcal{X}}_{l,k} \right\}_{l=1}^{N_T}$  les estimées des  $N_T$  gaussiennes de poids le plus élevé aux instants discrets  $k \geq k_c + K_M$  correspondant aux modes de la loi de probabilité a posteriori.

Afin de déterminer la valeur initiale  $\hat{\mathcal{X}}_{k_c+K_M}^l$  de la  $l^{\text{ème}}$  piste, nous déterminons le pourcentage de l'apparition de chaque mode dans la liste des modes dominants tout le long de la durée  $T_M$ . A noter que la région de validation d'un mode est égale à la largeur d'une case retard/Doppler. Ainsi, les pistes sont initialisées à partir des modes qui montrent un pourcentage de présence dépassant 50% pendant la durée  $T_M$ .

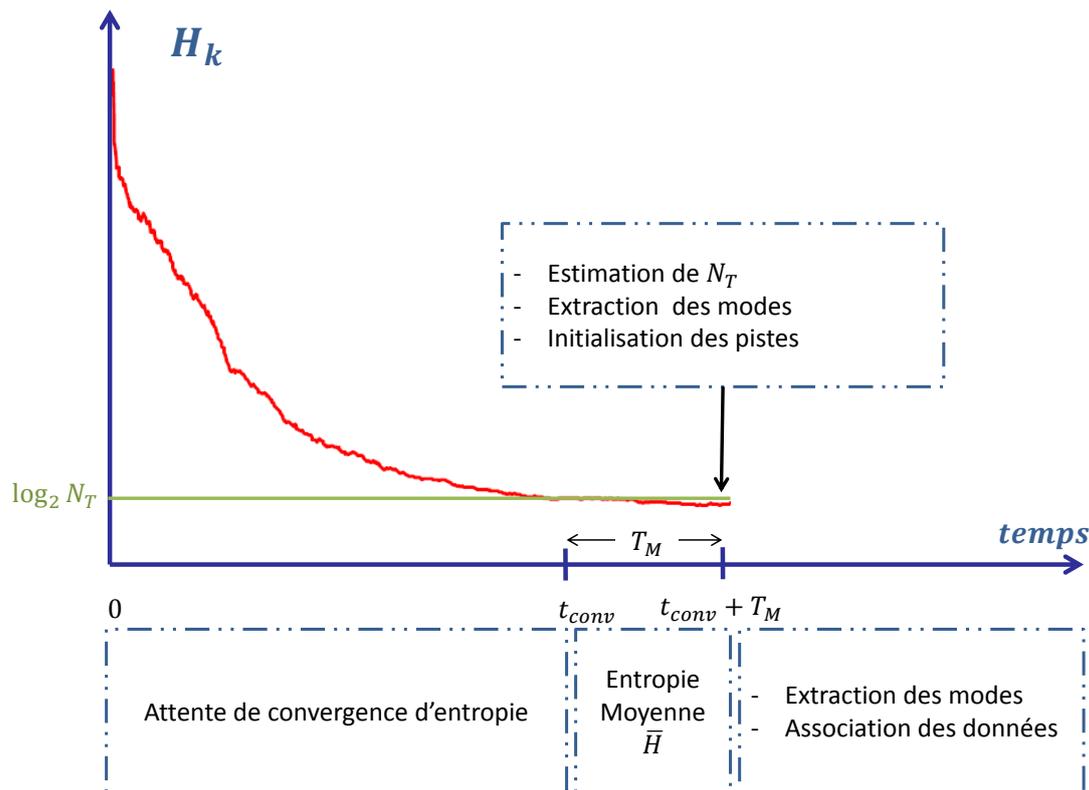


FIGURE 8.7 – Description de la détection des cibles en sortie de GSF

#### 8.9.4 Critère de détection pour le FP

Dans le cas d'une implémentation par un FP, les simulations révèlent un comportement plus stable de l'entropie des poids des cases. Cependant, le nombre des modes déterminé par le critère d'entropie ne correspond pas forcément au nombre des cibles dominantes. Ce problème se manifeste fortement dans le cas où il existe des cibles à la frontière de deux cases retard ou Doppler adjacentes. Contrairement à une implémentation avec un GSF où il n'y a qu'une particule gaussienne unique, l'implémentation avec un FP exige de mettre  $N_p$  particules par case retard/Doppler. Ainsi, lorsqu'une cible est proche d'une frontière, un certain nombre de particules franchissent la frontière. Cela se traduit par le fait que plusieurs cases distance/Doppler de poids élevés correspondent en réalité à une seule cible comme dans la figure A.1.

Nous avons donc besoin d'une méthode fiable permettant : (1) d'estimer le nombre des cibles, et (2) de regrouper les cases retard/Doppler adjacentes correspondant à la même cible. Pour réaliser ces deux tâches, nous proposons de classifier les particules après filtrage par des méthodes de classification (clustering) classiques. Les algorithmes employés pour atteindre ces objectifs sont expliqués en détail dans l'appendice A.

#### 8.9.5 Association de données

C'est après l'étape d'initialisation des pistes décrite dans les paragraphes 8.9.3 et 8.9.4 que la phase d'estimation des pistes démarre. A chaque instant discret  $k$ , les modes (classes) extraits(es) à partir du critère de l'entropie avec GSF (ou par la classification avec FP) sont associés(es) aux pistes existantes. On désigne par  $\hat{\mathcal{X}}_{q,k-1}$  l'état validé de la  $q^{\text{ème}}$  piste à l'instant discret  $k-1$  et  $\bar{\mathcal{X}}_{q,k}$  la prédiction par rapport à l'état validé de la  $q^{\text{ème}}$  piste à l'instant discret  $k$ . On définit une

région de validation de la  $q^{\text{ème}}$  piste dans le plan bistatique du retard/Doppler. Cette région est centrée à l'état prédit  $\bar{\mathcal{X}}_{k,q}$  et de largeur égale à 4 fois l'écart-type estimé du retard  $\hat{\sigma}_{q,k}^{\tau}$  dans l'axe du retard et 4 fois l'écart-type estimé du Doppler  $\hat{\sigma}_{q,k}^{\nu}$  dans l'axe du Doppler. Ainsi, si  $\hat{\mathcal{X}}_{l,k}$ , l'estimation par le filtre (GSF ou FP) du  $l^{\text{ème}}$  mode (ou classe) à l'instant discret  $k$ , tombe à l'intérieur de la région de validation de la  $q^{\text{ème}}$  piste, soit :

$$\begin{aligned} |\hat{\tau}_{l,k} - \bar{\tau}_{q,k}| &< 2\hat{\sigma}_{q,k}^{\tau} \\ \text{et} \\ |\hat{\nu}_{l,k} - \bar{\nu}_{q,k}| &< 2\hat{\sigma}_{q,k}^{\nu} \end{aligned} \quad (8.100)$$

le  $l^{\text{ème}}$  mode est associée à la  $q^{\text{ème}}$  piste. Dans le cas où une piste ne correspond à aucun mode, la piste est alimentée par l'état prédit. Si la piste n'est pas rafraîchie pendant plusieurs balayages, la piste est supprimée.

## 8.10 Étude de performances du filtre avec un signal carré

Dans ce paragraphe, nous présentons des simulations avec un signal carré, de durée utile  $T_u = 25\mu s$ . Avec cette durée, la fonction d'auto-corrélation du signal carré utilisé a une largeur utile de l'ordre de celle du signal FM. La fonction d'auto-corrélation du signal carré utilisé est illustrée dans la figure 8.8.

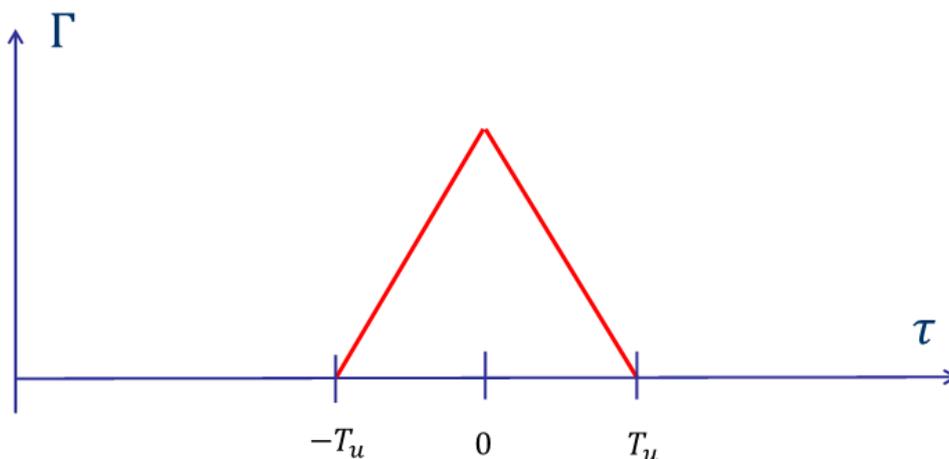


FIGURE 8.8 – Fonction d'auto-corrélation du signal carré

La fréquence porteuse de l'émetteur est égale à  $f_c = 88MHz$ , son vecteur position relatif au récepteur passif est  $\mathbf{X}_T = [-50000, -30000, -3]^T$  mètres. La durée d'intégration est égale à l'intervalle séparant deux impulsions du signal, soit  $T = 1ms$ . La fréquence d'échantillonnage avant la corrélation croisée est  $f_s = 200kHz$ . La largeur d'une case retard est égale  $\Delta\tau = 5T_s = 25\mu s$  et la largeur d'une case Doppler est égale à  $\Delta\nu = 10Hz$  dans le cas d'un GSF. Cette valeur est indépendante de la durée d'intégration cohérente ; elle est choisie de manière à pouvoir linéariser l'équation 8.10 dans une case retard/Doppler. Dans le cas du FP, la largeur d'une case Doppler est choisie égale à  $\Delta\nu = 20Hz$ . Dans le cas d'un GSF, un bon calcul des jacobiens du Kalman étendu donnés par les équations 8.22 et 8.30 exige une discrétisation fine de l'axe Doppler. Ce problème ne se manifeste pas dans le cas d'un FP. Cependant une case Doppler trop petite peut gêner l'étape du redistribution en rendant les cibles instables dans une case Doppler. La largeur de l'axe Doppler dans la grille retard/Doppler est fixée à  $[-400, 400]$  (Hz), ce qui

correspond à  $N = 80$  cases Doppler dans le cas du GSF et  $N = 40$  dans le cas du FP. La largeur de l'axe retard est fixée à  $[\tau_{dir}, \tau_{max}] = [32T_s, 182T_s]$ , ce qui correspond à  $M = 30$  cases retard.

### 8.10.1 Cas d'une cible unique

Dans cette simulation, le signal reçu ne contient que l'écho d'une cible unique. Le retard bistatique initial  $\tau_l$ , le décalage Doppler initial  $\nu_l$ , la dérive sur le décalage Doppler de la cible sont donnés dans le tableau 8.1 :

Retard bistatique $\tau_l/T_s$	Décalage Doppler $\nu_l(Hz)$	Dérive de $\nu_l(Hz/s)$
156.5	5	0.5

TABLE 8.1 – Caractéristiques de la cible

La figure 8.9(a) illustre le comportement de l'entropie des poids des cases en utilisant une implémentation par un GSF en présence d'une cible unique à différentes valeurs de RSB après corrélation : (1)  $RSB = 3dB$  et (2)  $RSB = -7dB$ . Notons que dans le cas d'un signal FM, le RSB à  $-30dB$  (resp.  $-20dB$ ) avant corrélation devient  $-7dB$  (resp.  $3dB$ ) après une intégration cohérente de durée  $T = 1ms$ . Les courbes correspondent à l'entropie moyennée 60 fois. Une valeur typique du temps de convergence pire cas  $t_{conv}$  est de l'ordre de  $500ms$  qui correspond au temps de convergence de l'entropie en-dessous de la valeur 1 bit, à un  $RSB = -7dB$  après corrélation. Ceci s'interprète de la manière suivante : le temps nécessaire pour être sûr que la cible est localisée à une case distance/Doppler près est au pire égal à  $t_{conv} = 500ms$ . Les simulations nous permettent de fixer une durée raisonnable  $T_M$  qui est de l'ordre de  $150ms$  pendant laquelle l'entropie est moyennée. La figure 8.9(b) illustre le comportement de l'entropie des poids des cases en utilisant une implémentation par un FP en présence d'une cible unique à différentes valeurs de RSB : (1)  $RSB = 3dB$  et (2)  $RSB = -7dB$ . Le nombre de particules dans une case retard/Doppler est égal à  $N_p = 60$  particules. Les courbes correspondent à l'entropie moyennée 10 fois.

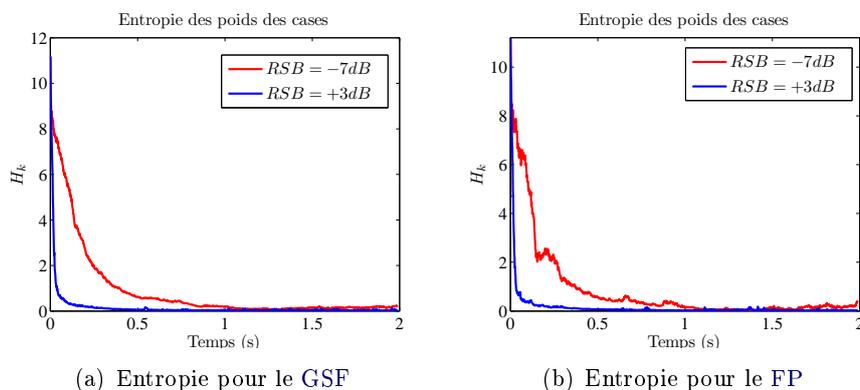


FIGURE 8.9 – Entropie des poids des cases en présence d'une cible unique avec une implémentation par un GSF et par un FP en utilisant un signal carré. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende.

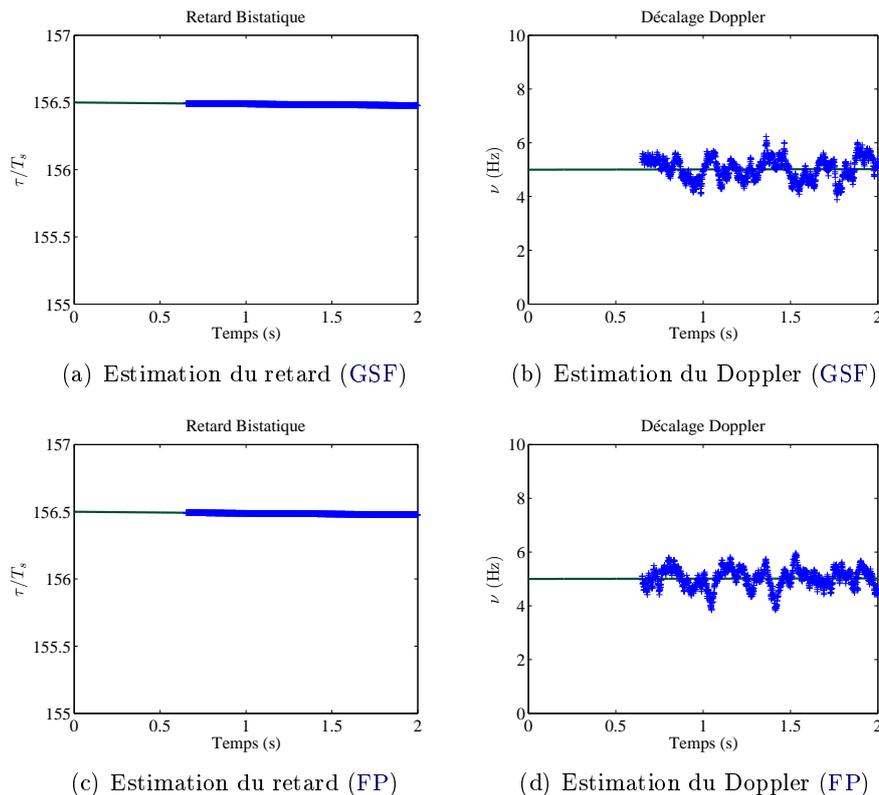
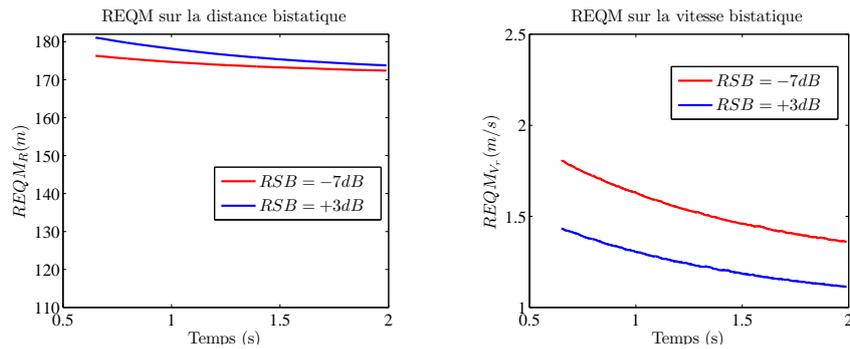


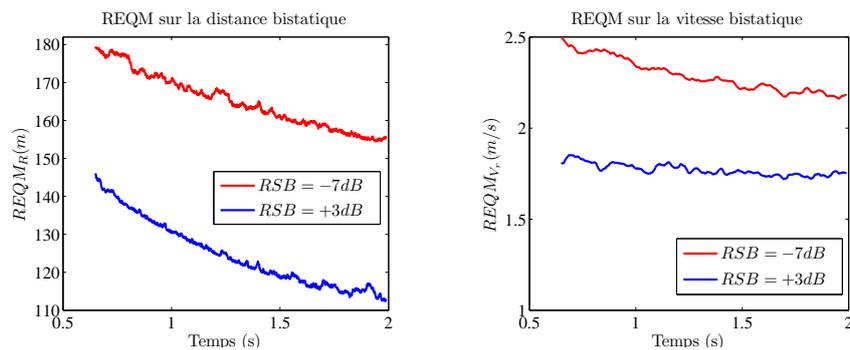
FIGURE 8.10 – Estimation du retard bistatique et du décalage Doppler d’une cible unique à  $RSB = -7dB$  après corrélation avec GSF et FP en utilisant un signal carré. Les courbes de couleur vert foncé représentent la vraie trajectoire de la cible et les courbes de couleur bleu représentent la trajectoire estimée.

Les figures 8.10(a) et 8.10(b) illustrent les résultats de l’estimation du retard bistatique et du décalage Doppler de l’écho correspondant à la cible en utilisant un filtre GSF. Les figures 8.10(c) et 8.10(d) illustrent les résultats de l’estimation du retard bistatique et du décalage Doppler de l’écho correspondant à la cible en utilisant un filtre FP. Le rapport signal sur bruit est égal à  $RSB = -7dB$  après corrélation.

Les figures 8.11(a) et 8.11(b) illustrent les résultats de la racine de l’erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique à 2 rapports signal sur bruit après corrélation différents :  $RSB = 3dB$  et  $RSB = -7dB$  en utilisant un filtre GSF. Les figures 8.11(c) et 8.11(d) illustrent les résultats de la racine de l’erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique à 2 rapports signal sur bruit après corrélation différents :  $RSB = 3dB$  et  $RSB = -7dB$  en utilisant un filtre FP.



(a) REQM sur la distance bistatique (GSF) (b) REQM sur la vitesse bistatique (GSF)



(c) REQM sur la distance bistatique (FP) (d) REQM sur la vitesse bistatique (FP)

FIGURE 8.11 – REQM sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec GSF et FP en utilisant un signal carré. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende.

Les figures 8.11 révèlent que la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique obtenue par une implémentation avec un FP est beaucoup plus petite que celle obtenue par implémentation avec un GSF au même niveau de RSB. La différence entre les deux REQM atteint 50m pour  $RSB = -7dB$  après corrélation. Cependant, la différence entre les REQMs sur la vitesse bistatique est moins importante.

### 8.10.2 Cas de l'absence de cible

La figure 8.12(a) illustre le comportement de l'entropie des poids des cases en utilisant une implémentation par un GSF en l'absence de cible et la figure 8.12(b) illustre le comportement de l'entropie des poids des cases en utilisant une implémentation par un FP en l'absence de cible. Dans les deux cas, le rapport signal sur bruit vaut  $RSB = -7dB$  après corrélation. La courbe rouge correspond à la moyenne de l'entropie sur l'intervalle  $[t_{conv}, t_{conv} + T_M]$ . Dans le cadre de cette thèse, nous fixons le seuil de détection défini au paragraphe 8.9.2 à la valeur  $\Lambda = 5$ . D'après les figures 8.12, on constate que la moyenne de l'entropie en l'absence de cible reste au dessus du seuil. Cela signifie d'après l'équation 8.97 que le nombre maximum de cibles que l'on peut estimer en parallèle est limité à 32.

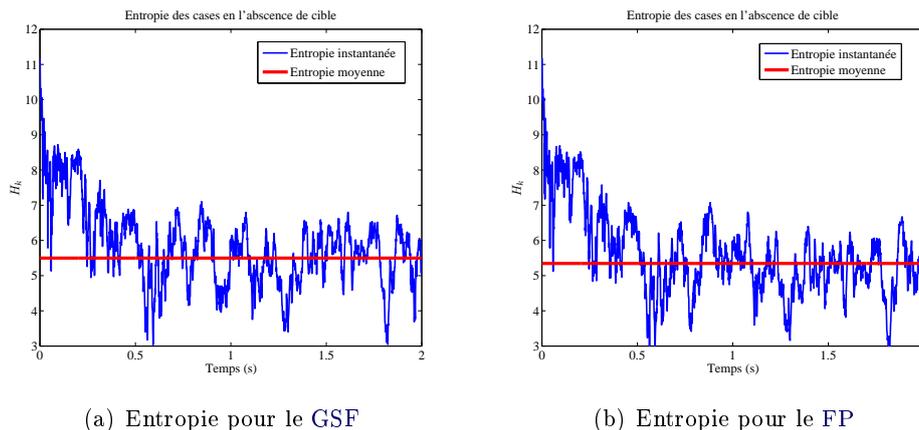


FIGURE 8.12 – Entropie des poids des cases en l'absence de cible avec une implémentation par un GSF (a) et par un FP (b) en utilisant un signal carré

### 8.10.3 Cas multi-cible

Le système comporte 8 cibles dans la région de surveillance du radar. Le retard bistatique initial  $\tau_l$ , le décalage Doppler initial  $\nu_l$ , la dérive sur le décalage Doppler et le rapport signal sur bruit (RSB) après corrélation des 8 cibles sont indiqués dans le tableau 8.2 :

Cible	Retard bistatique $\tau_l/T_s$	Décalage Doppler $\nu_l(Hz)$	Dérive de $\nu_l(Hz/s)$	RSB(dB) après corrélation
Cible $\doteq$ 1	156.5	-70	0.01	-7
Cible $\doteq$ 2	145.87	-50	-15	-1
Cible $\doteq$ 3	131.43	-30	5	5
Cible $\doteq$ 4	112.56	-10	-8	8.5
Cible $\doteq$ 5	101.01	10	20	11
Cible $\doteq$ 6	85.45	30	-13	13
Cible $\doteq$ 7	64.57	50	-1	14.5
Cible $\doteq$ 8	52.3	70	7	17

TABLE 8.2 – Caractéristiques de 8 cibles

Les figures 8.13 illustrent les résultats de l'estimation du retard bistatique (8.13(a)) et du décalage Doppler (8.13(b)) des échos correspondant aux 5 cibles ayant les plus forts rapport signal sur bruit par le GSF introduit à la section 8.7. Le nombre de cibles est estimé grâce à la technique décrite dans la section 8.9.3. Les figures 8.14 illustrent les résultats de l'estimation du retard bistatique (8.14(a)) et du décalage Doppler (8.14(b)) des échos correspondant aux 6 cibles ayant les plus forts rapport signal sur bruit par le FP introduit à la section 8.8. Le nombre de cibles est estimé par la technique décrite dans la section 8.9.4. On constate que le FP peut détecter et poursuivre de façon fiable une cible de plus que le GSF.

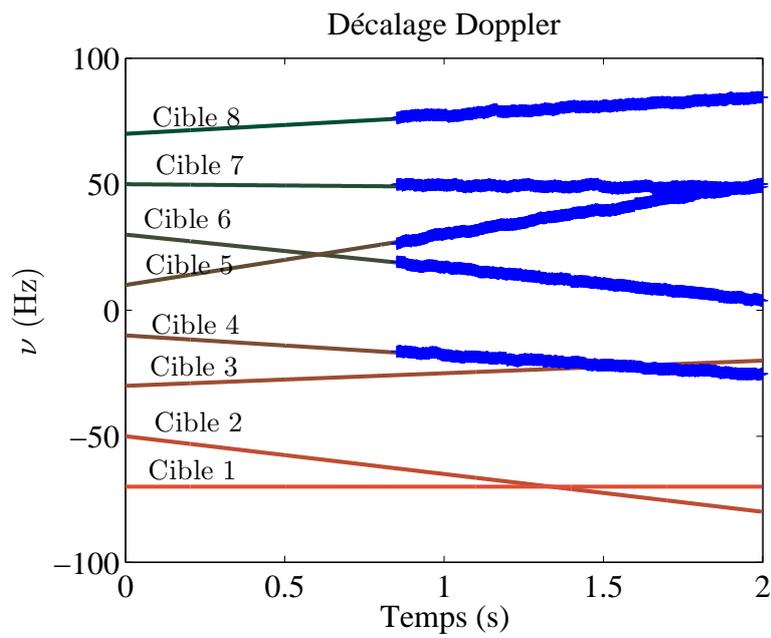
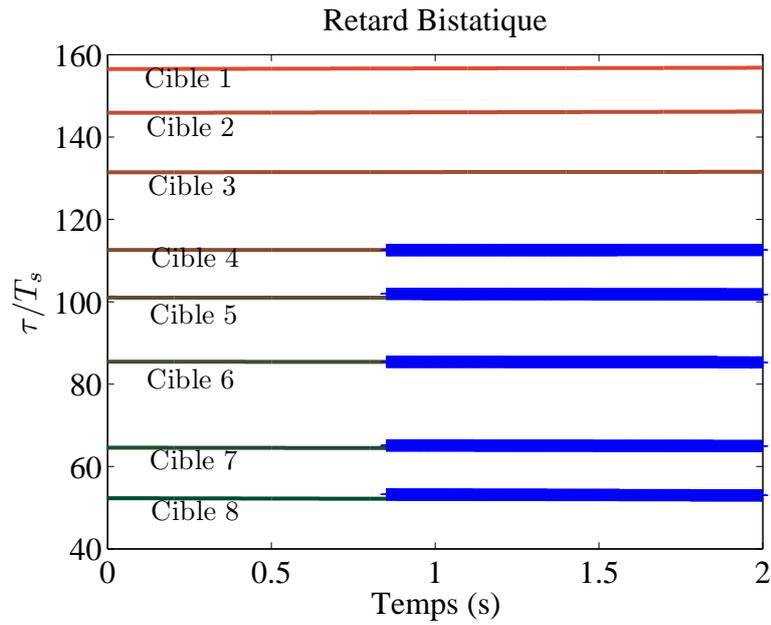


FIGURE 8.13 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le GSF

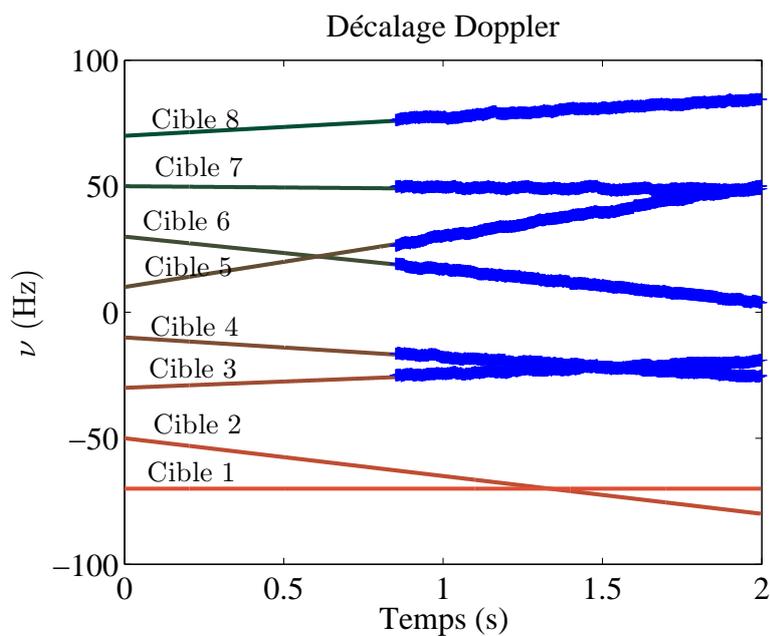
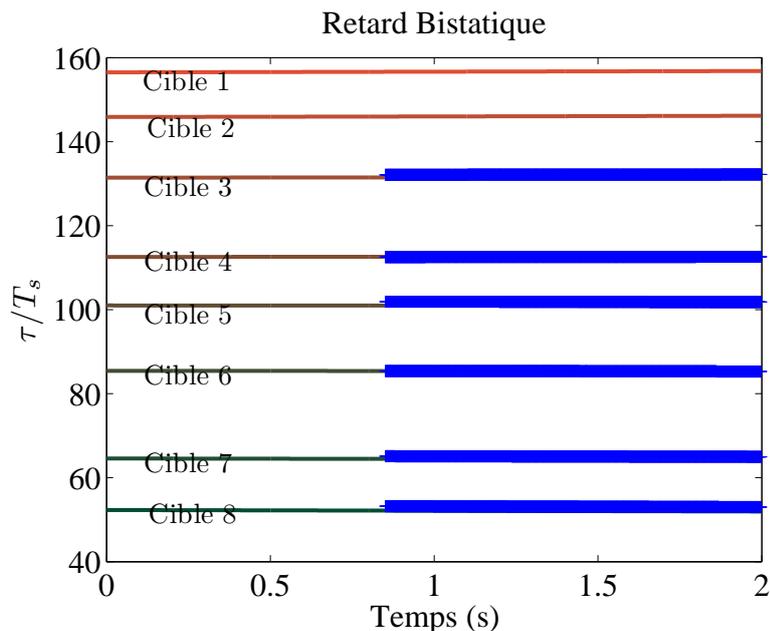


FIGURE 8.14 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le FP

### 8.11 Annulation Successive d'interférence

Rappelons que ce sont les factorisations 8.17 et 8.18 qui ont permis d'obtenir une implémentation sous forme de GSF ou de FP à complexité raisonnable (car les filtres KF et EKF qui interviennent n'ont besoin que d'une inversion matricielle  $4 \times 4$ ). Rappelons également que ces factorisations ont été obtenues en faisant l'hypothèse que la fonction d'auto-corrélation du

signal émis est idéalisée au sens de la discussion 8.3, c'est-à-dire que les lobes secondaires sont négligeables comme l'illustre la figure 8.1. Cette hypothèse bien que raisonnable pour des émetteurs dont on contrôle le signal émis, n'est pas vérifiée pour les signaux FM et DVB-T, comme le montre le chapitre 5. C'est d'autant plus vrai pour un signal FM lorsque la durée d'intégration est courte, soit de l'ordre de la milliseconde comme l'exige la technique de corrélation à Doppler nul à la section 8.3 pour limiter le nombre d'observations à traiter.

Il faut donc trouver une solution au problème de l'existence de lobes secondaires non négligeables, sans quoi le système de détection/poursuite ne pourrait fonctionner que pour des émetteurs contrôlés. Nous nous inspirons pour cela de travaux antérieurs concernant le masquage de cibles de faible RSB par des trajets multiples ou par des cibles de RSB élevé [Axelsson 2005, Kulpa 2005]. Nous avons constaté expérimentalement que le filtre proposé (sous sa forme GSF en 8.7 ou sa forme FP en 8.8) avec estimateur intégré de variance du bruit se comporte de la manière suivante :

- les cibles de RSB élevé sont détectées
- l'estimateur de variance du bruit converge vers la variance du niveau des lobes secondaires prédominants.

Ainsi les cibles de faible RSB sont masquées car noyées dans les lobes secondaires des cibles de RSB élevés.

La méthode d'annulation d'interférences ci-dessous permet de remédier à ce problème :

- **Première Étape** : le filtre de détection/poursuite (sous sa forme GSF ou FP) est alimenté par les sorties du corrélateur, soit  $\mathcal{Y}_k^1 = \mathcal{Y}_k$  défini par l'équation 8.6. Après extraction des modes (cf. 8.9) et association de données (cf. 8.9.5) on obtient des pistes non seulement pour la cible de RSB la plus élevée, mais également pour toutes les cibles ayant une différence de RSB inférieure à 10dB par rapport à la cible dominante.
- **q<sup>ème</sup> étape** : Les contributions des pistes obtenues à l'étape  $q - 1$  sur les sorties du corrélateur sont sommées dans un vecteur appelé  $I_k^{q-1}$  à l'aide d'une technique de remodulation définie en 8.11.1. Un nouveau filtre de détection/poursuite est alors enclenché en l'alimentant avec les observations  $\mathcal{Y}_k^q = \mathcal{Y}_k^{q-1} - I_k^{q-1}$ . Comme  $I_k^{q-1}$  estime la contribution des pistes estimées à l'étape  $q - 1$  sur les sorties du corrélateur, lobes secondaires compris, ce nouvel étage permet de révéler des cibles noyées dans les lobes secondaires aux étages précédents.
- **Condition d'arrêt** : on réalise autant d'étages qu'il est nécessaire jusqu'à ce que : (1) soit l'entropie 8.95 ne converge plus, car il n'y a plus de nouvelles cibles à détecter, (2) soit les nouvelles pistes estimées coïncident avec des pistes déjà estimées aux étapes précédentes. Dans ce cas, les observations courantes contiennent des résidus des cibles déjà estimées à cause de l'incertitude inhérente à la méthode de reconstruction présentée en 8.11.1.

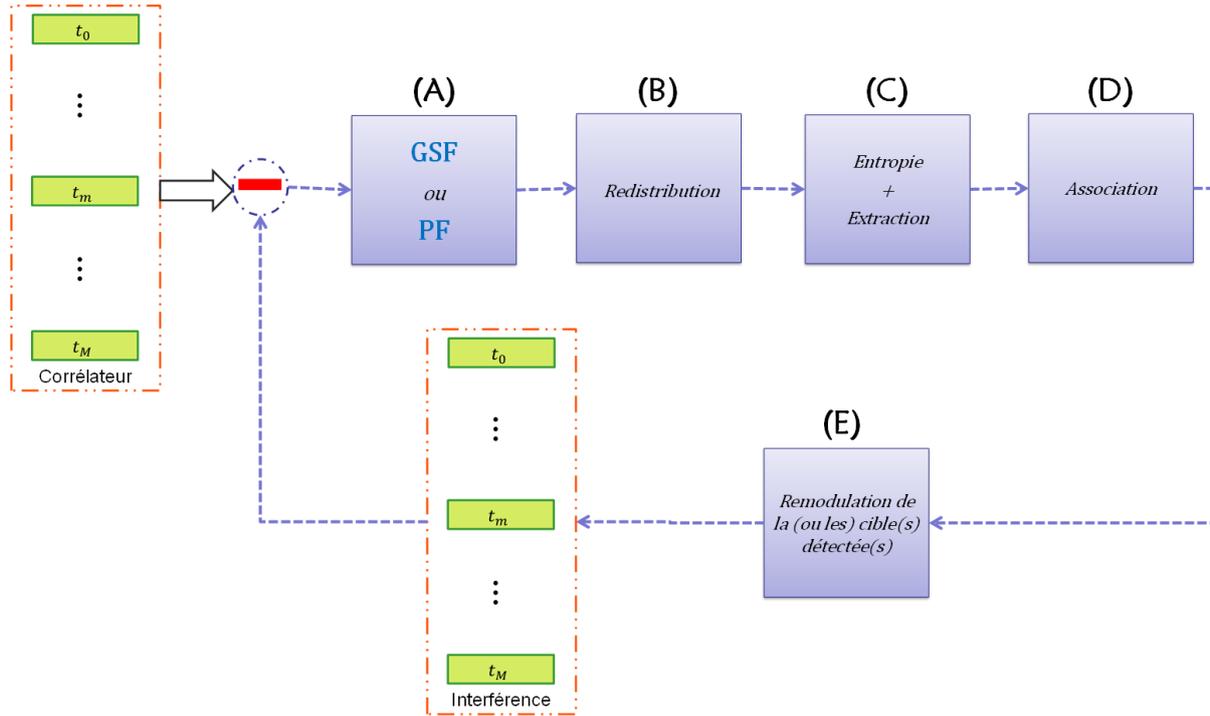


FIGURE 8.15 – Une représentation de la méthode d'annulation d'interférence proposée.

### 8.11.1 Remodulation des cibles détectées

Soit la contribution de la réflexion du signal émis sur la  $l^{\text{ème}}$  cible dans le canal de référence :

$$S_R(t) = \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l t} S_T(t - \tau_l) \quad (8.101)$$

où les paramètres  $\mathcal{A}_l$ ,  $\phi_l$ ,  $\nu_l$  et  $\tau_l$  sont supposés constants sur une fenêtre d'intégration de durée  $T$ .

A l'instant discret  $k$ , la contribution de la  $l^{\text{ème}}$  cible sur la sortie du corrélateur s'écrit ( en ignorant les autres cibles et le terme de bruit ) :

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T S_R^k(\theta) S_T^k(\theta - t)^* d\theta \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l(\theta + kT)} S_T(\theta + kT - \tau_l) S_T(\theta + kT - t)^* d\theta \end{aligned} \quad (8.102)$$

Soit le changement de variable  $u = \theta - t$ , on a :

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \frac{1}{T} \int_{-t}^{T-t} \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l(u + kT + t)} S_T(u + kT - (\tau_l - t)) S_T(u + kT)^* du \\ &= \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l(kT + t)} \frac{1}{T} \int_{-t}^{T-t} e^{j2\pi\nu_l u} S_T(u + kT - (\tau_l - t)) S_T(u + kT)^* du \\ &= \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l(kT + t)} \chi_k(t - \tau_l, -\nu_l) \end{aligned} \quad (8.103)$$

où  $\chi(\cdot, \cdot)$  désigne la fonction d'ambiguïté du signal émis à l'instant discret  $k$ . Or par définition,

$$\chi(\tau, \nu) = \frac{1}{T} \int_0^T S_T(t) S_T(t - \tau)^* e^{-j2\pi\nu t} dt$$

En supposant que  $\nu T \ll 1$ , la rotation de phase à l'intérieur de l'intégrale peut être approximée par sa valeur au milieu de la fenêtre d'intégration, soit :

$$e^{-j2\pi\nu t} \simeq e^{-j\pi\nu T} \quad \forall t \in [0, T] \quad (8.104)$$

alors

$$\chi(\tau, \nu) \simeq e^{-j2\pi\nu \frac{T}{2}} \Gamma^k(\tau) \quad (8.105)$$

où  $\Gamma^k(\tau)$  désigne la fonction d'auto-corrélation du signal émis à l'instant discret  $k$ . Ainsi,

$$y_k(t) \simeq \mathcal{A}_l e^{j\phi_l} e^{j2\pi\nu_l(kT + \frac{T}{2} + t)} \Gamma^k(t - \tau_l) \quad (8.106)$$

Notons  $\hat{\mathcal{A}}_{k,l}^q$ ,  $\hat{\Phi}_{k,l}^q$ ,  $\hat{\nu}_{k,l}^q$  et  $\hat{\tau}_{k,l}^q$  l'amplitude, la phase, le Doppler et le retard bistatique estimés pour la  $l^{\text{ème}}$  cible en sortie de l'algorithme de pistages de cibles décrit à la section 8.9.5 pour le  $q^{\text{ème}}$  étage du GSF ou du FP.

La phase de la  $l^{\text{ème}}$  cible correspond à la phase de  $y_k(t)|_{t=\tau_l}$ . D'après 8.106 on aura donc :

$$\hat{\Phi}_{k,l}^q \simeq \phi_l + 2\pi\nu_l \left( kT + \frac{T}{2} + \tau_l \right) \quad (8.107)$$

d'où

$$\begin{aligned} \phi_l + 2\pi\nu_l(kT + t) &\simeq \hat{\Phi}_{k,l}^q + 2\pi\nu_l \left( -\frac{T}{2} - \tau_l + t \right) \\ &\simeq \hat{\Phi}_{k,l}^q + 2\pi\hat{\nu}_{k,l}^q \left( -\frac{T}{2} - \hat{\tau}_{k,l}^q + t \right) \end{aligned} \quad (8.108)$$

En injectant 8.108 dans 8.103, la contribution de la  $l^{\text{ème}}$  cible sur les sorties de l'échantillonneur à l'instant discret  $k$  peut être approchée par remodulation à l'aide de  $\hat{\mathcal{A}}_{k,l}^q$ ,  $\hat{\Phi}_{k,l}^q$ ,  $\hat{\nu}_{k,l}^q$  et  $\hat{\tau}_{k,l}^q$  par

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \hat{\mathcal{A}}_{k,l}^q e^{j\hat{\Phi}_{k,l}^q} e^{j2\pi\hat{\nu}_{k,l}^q(-\frac{T}{2} - \hat{\tau}_{k,l}^q + t)} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{N_e-1} S_T^k(pT_s - \hat{\tau}_{k,l}^q) S_T^k(pT_s - t)^* e^{j2\pi\hat{\nu}_{k,l}^q pT_s} \end{aligned} \quad (8.109)$$

avec  $N_e = T/T_s$ . Il suffira alors de sommer les contributions de toutes les cibles estimées par le  $q^{\text{ème}}$  étage du GSF ou du FP en échantillonnant aux instants  $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_M\}$  pour obtenir l'interférence  $I_k^q$  définie dans la section 8.11.

## 8.12 Simulation avec un signal FM

Dans ce paragraphe, nous montrons un exemple de simulation de la méthode statistique de détection introduite dans le chapitre présent. Le système est formé de notre radar passif et d'un émetteur FM de fréquence porteuse :  $f_c = 88MHz$  et de vecteur position relatif au récepteur

passif :  $\mathbf{X}_T = [-50000, -30000, -3]^T$  mètres. Le système comporte 8 cibles dans la région de surveillance du radar. Le retard bistatique initial  $\tau_l$ , le décalage Doppler initial  $\nu_l$ , la dérive sur le décalage Doppler et le rapport signal sur bruit (RSB) avant corrélation des 8 cibles sont indiqués dans le tableau 8.3 :

Cible	Retard bistatique $\tau_l/T_s$	Décalage Doppler $\nu_l(Hz)$	Dérive de $\nu_l(Hz/s)$	RSB(dB) avant corrélation
Cible $\doteq$ 1	162.45	10	0.5	-30
Cible $\doteq$ 2	145.87	-110	-15	-24
Cible $\doteq$ 3	131.43	-150	5	-18
Cible $\doteq$ 4	112.56	70	-8	-14.5
Cible $\doteq$ 5	101.01	170	20	-12
Cible $\doteq$ 6	85.45	10	-13	-10
Cible $\doteq$ 7	64.57	-30	-1	-8.5
Cible $\doteq$ 8	52.3	-200	7	-6

TABLE 8.3 – Caractéristiques de 8 cibles

Le signal FM utilisé est généré à partir d'un bruit blanc coloré avec la méthode proposée en 5.3.1.2. La fréquence d'échantillonnage avant la corrélation croisée est  $f_s = 200kHz$ . Les observations sont formées avec une durée d'intégration  $T = 1ms$ .

Les figures 8.16 illustrent les résultats de l'estimation du retard bistatique (8.16(a)) et du décalage Doppler (8.16(b)) des échos correspondant aux 8 cibles en utilisant plusieurs (5) étages du GSF introduit à la section 8.7. La largeur d'une case retard est égale  $\Delta\tau = 5T_s = 25\mu s$  et la largeur d'une case Doppler est égale à  $\Delta\nu = 10Hz$ . Cette valeur est indépendante de la durée d'intégration cohérente ; elle est choisie de manière pouvoir linéariser l'équation 8.10 dans une case retard/Doppler.

La largeur de l'axe Doppler dans la grille retard/Doppler est fixée à  $[-400, 400] (Hz)$ , ce qui correspond à  $N = 80$  cases Doppler dans le cas de GSF. La largeur de l'axe retard est fixée à  $[\tau_{dir}, \tau_{max}] = [32T_s, 182T_s]$ , ce qui correspond à  $M = 30$  cases retard.

Dans la simulation des figures 8.16, un seul étage ne suffit pas pour extraire toutes les 8 cibles. A l'instant  $t = 0$ , le premier filtre GSF est lancé. Le premier étage utilise les observations sans aucune soustraction. L'entropie moyenne est calculée sur l'intervalle  $[0.5s, 0.65s]$ . L'extraction des 3 premières pistes se fait à l'instant  $t = 0.65s$ . Ces pistes correspondent aux cibles ayant les rapports signal sur bruit les plus forts. La couleur bleue foncée correspond aux estimées au 1<sup>er</sup> étage qui démarre à  $t = 0s$ . A l'instant  $t = 0.65s$ , un autre étage du GSF est lancé. Cette fois, le nouveau GSF utilise les observations en soustrayant les interférences des trois cibles déjà détectées. La couleur bleue plus claire correspond aux estimées au 2<sup>ème</sup> étage.

Le filtre répète la même procédure 5 fois. Au dernier étage, on constate que l'entropie ne converge pas (condition d'arrêt). Les étages sont repérés sur la figure par leur intensité des couleurs et leur instant de déclenchement de l'extraction. Le  $n^{\text{ème}}$  étage démarre son filtre à l'instant  $t = (n - 1) \times 0.65s$  et commence son extraction à l'instant  $t = n \times 0.65s$ . Le premier étage correspond à la couleur bleue la plus foncée et à l'instant d'extraction  $t = 0.65s$  et le 5<sup>ème</sup> étage correspond à la couleur bleue la plus claire et à l'instant d'extraction  $t = 3.25s$ .

Les figures 8.17 illustrent les résultats de l'estimation de la partie réelle de l'amplitude complexe de la cible  $\doteq$  1 (8.17(a)) et celle de la cible  $\doteq$  4 (8.17(b)). Les courbes en couleur rouge correspondent à la vraie trajectoire des cibles et les courbes en couleur bleue correspondent aux estimées du filtre GSF.

Les figures 8.18 illustrent la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique (8.18(a)) et sur la vitesse bistatique (8.18(b)) à 2 rapports signal sur bruit différents :  $RSB = -20dB$  et  $RSB = -30dB$  avant corrélation pour le filtre GSF.

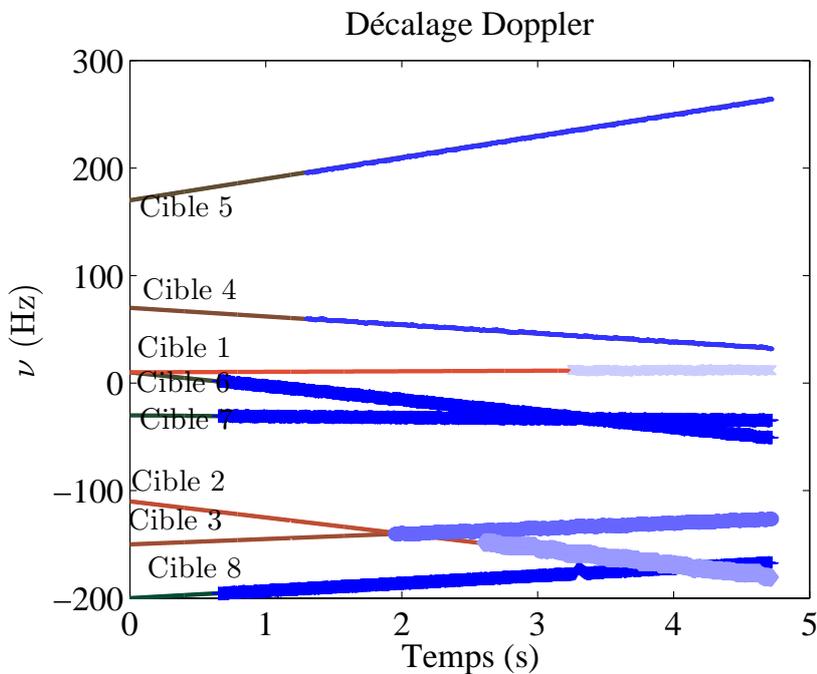
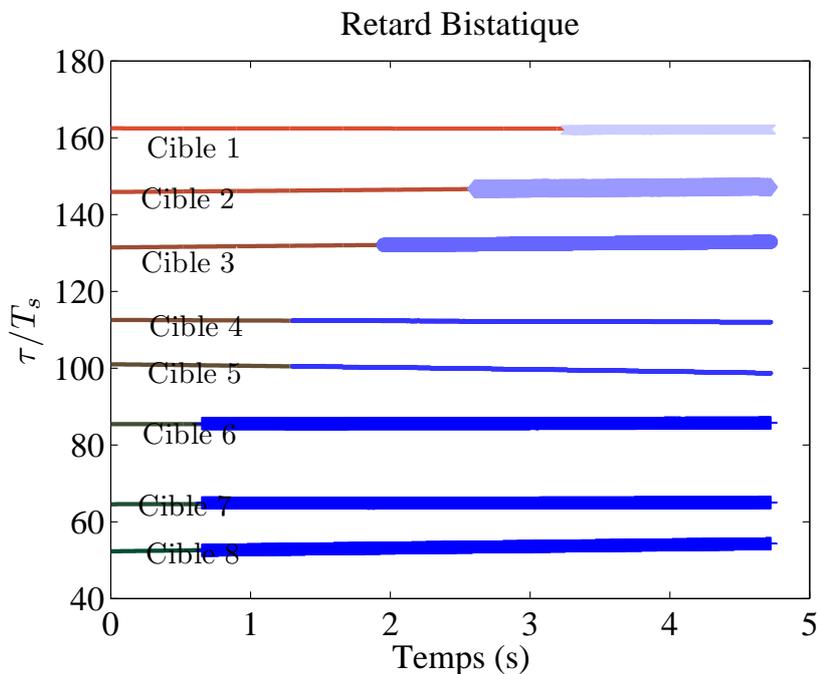


FIGURE 8.16 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par 5 étages successifs de GSF avec annulation d'interférence

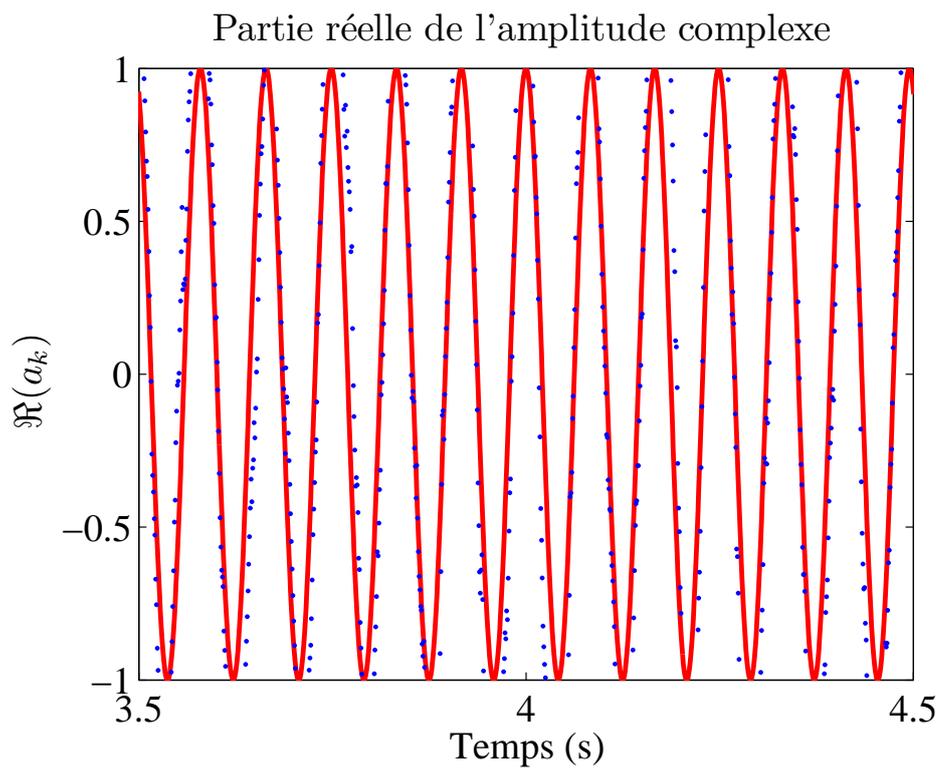
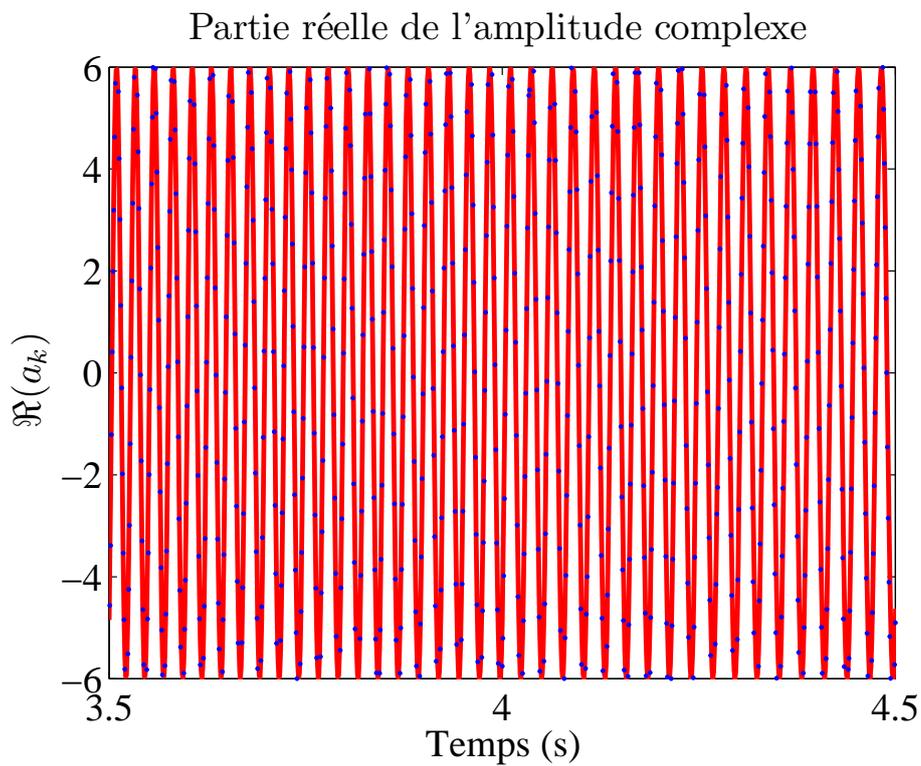
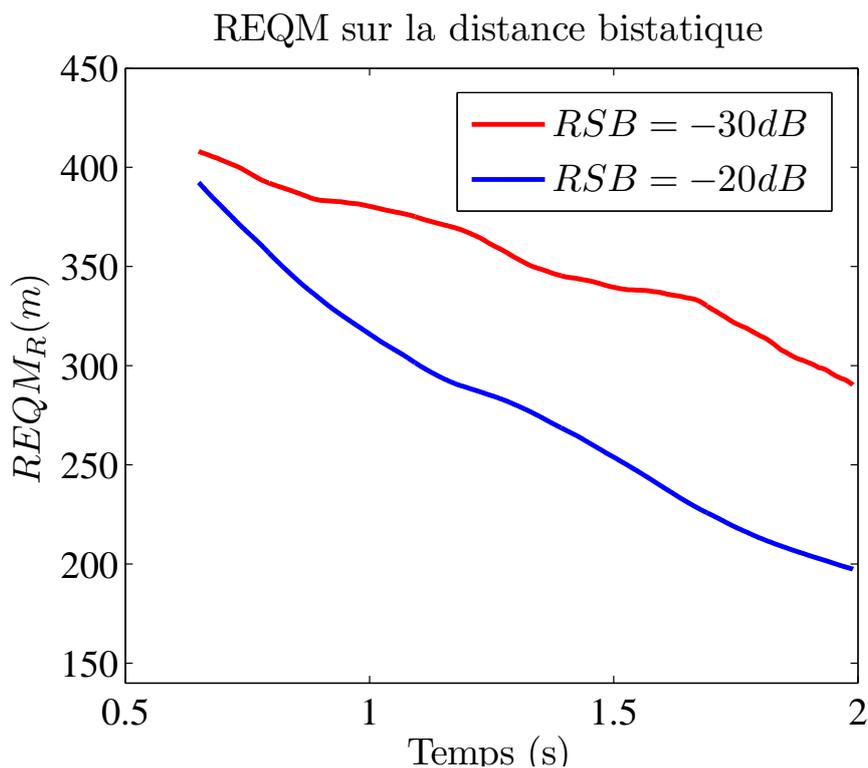
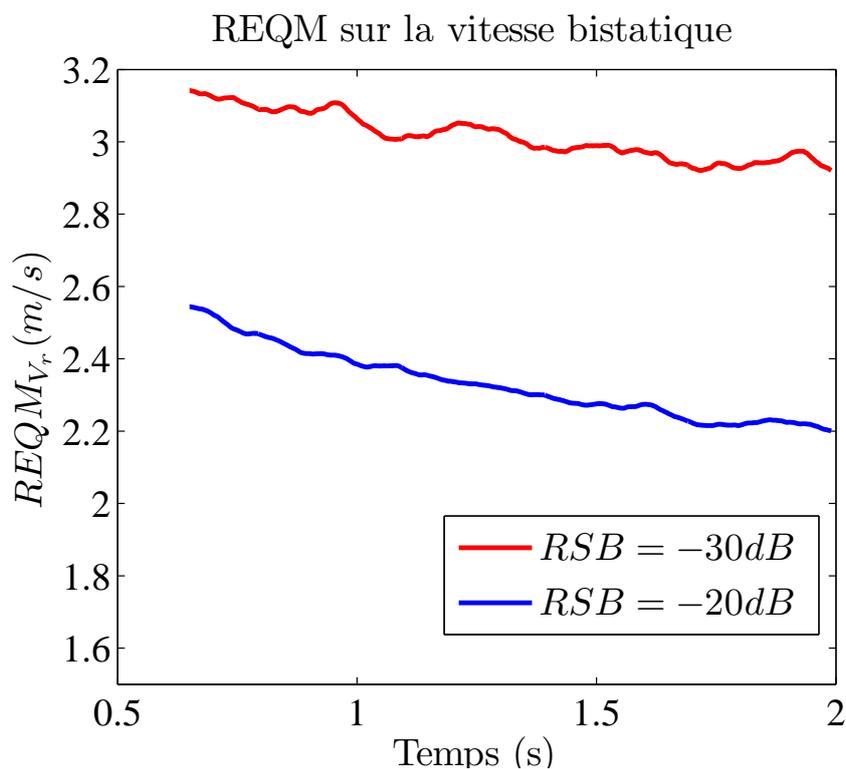
(a) Cible à  $RSB = -30dB$  avant corrélation(b) Cible à  $RSB = -14.5dB$  avant corrélation

FIGURE 8.17 – Résultat des estimations de la partie réelle de l'amplitude complexe en présence de huit cibles par le GSF



(a) REQM sur la distance bistatique



(b) REQM sur la vitesse vitesse

FIGURE 8.18 – Racine de l’erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec un GSF en utilisant un signal FM. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende.

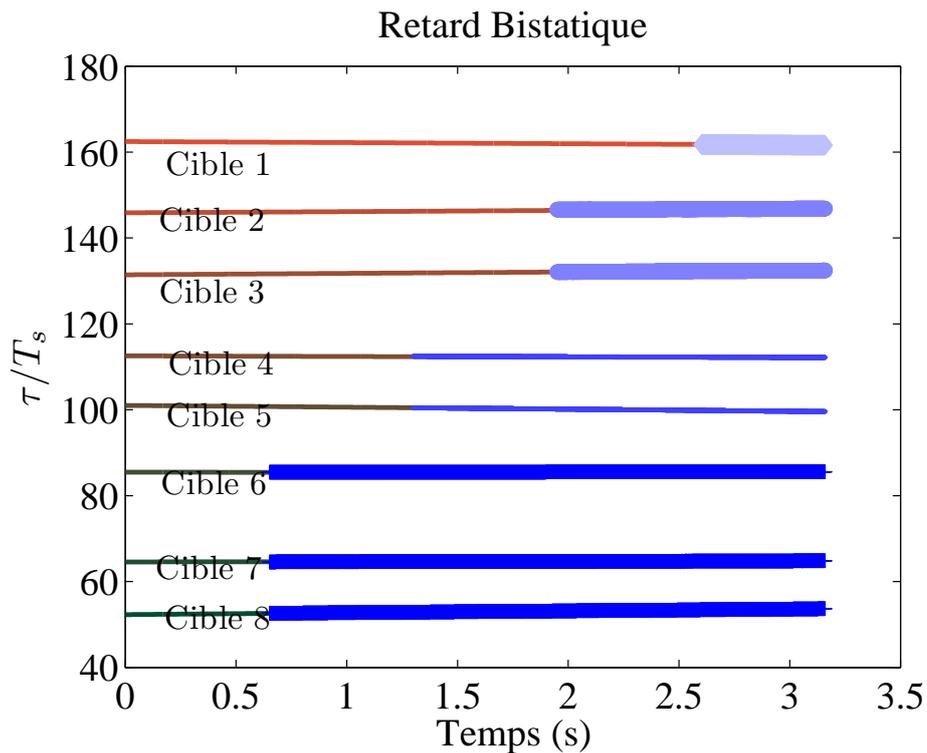
Les figures 8.19 illustrent les résultats de l'estimation du retard bistatique (8.19(a)) et du décalage Doppler (8.19(b)) des échos correspondant aux 8 cibles en utilisant plusieurs (4) étages de FP. La largeur d'une case retard est égale  $\Delta\tau = 5T_s = 25\mu s$  et la largeur d'une case Doppler est choisie  $\Delta\nu = 20Hz$  afin de soulager le problème de franchissement intempestif des frontières de cases retard/Doppler. La largeur de l'axe Doppler dans la grille retard/Doppler est fixée à  $[-400, 400]$  (Hz), ce qui correspond à  $N = 40$  dans le cas du FP. La largeur de l'axe retard est fixée à  $[\tau_{dir}, \tau_{max}] = [32T_s, 182T_s]$ , ce qui correspond à  $M = 30$  cases retard. Le nombre des particules par case retard/Doppler est égal à  $N_p = 60$ .

Dans la simulation des figures 8.19, un seul étage FP ne suffit pas pour extraire toutes les 8 cibles. A l'instant  $t = 0$ , le premier filtre FP est lancé. Le premier étage utilise les observations sans aucune soustraction. La classification des cases commence à l'instant  $t = 0.5s$ . Le nombre effectif des cibles est obtenu en moyennant le nombre des classes sur l'intervalle  $[0.5s, 0.65s]$ . L'extraction des 3 premières cibles se fait à l'instant  $t = 0.65s$ . Ces pistes correspondent aux cibles ayant les rapports signal sur bruit les plus forts. La couleur bleue foncée correspond aux estimées au 1<sup>er</sup> étage qui démarre à  $t = 0s$ . A l'instant  $t = 0.65$ , un autre étage du FP est lancé. Cette fois, le nouveau FP utilise les observations en soustrayant les interférences de trois cibles déjà détectées et soustraites.

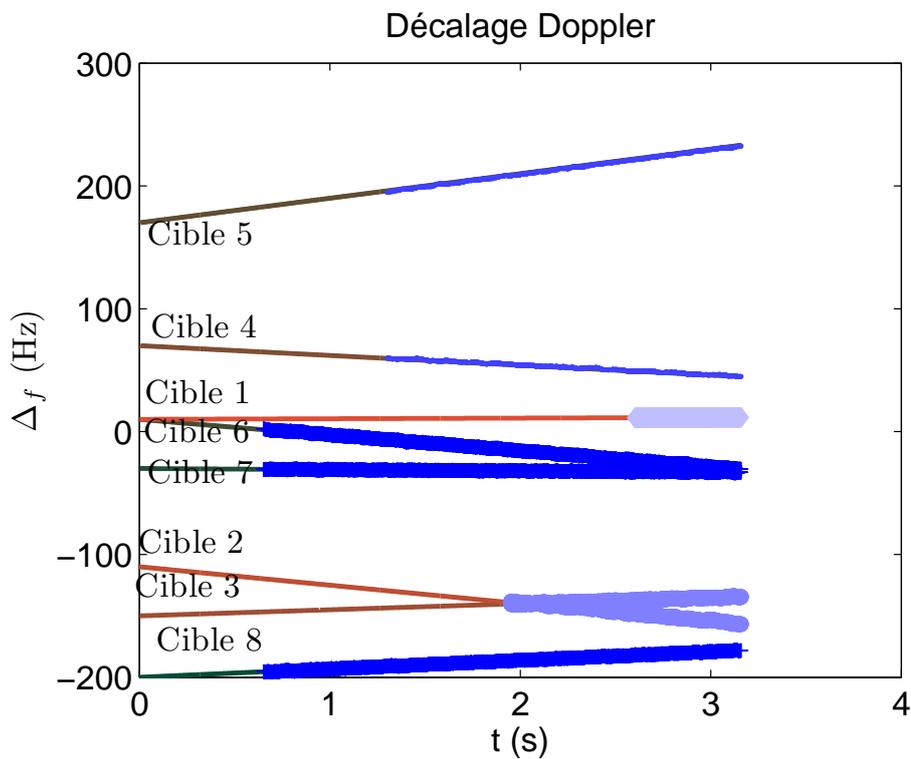
Le filtre répète la même procédure 4 fois (c-à-dire avec 4 étages de FP). La couleur bleue plus claire correspond aux estimées au 2<sup>ème</sup> étage. Au dernier étage, on constate que l'entropie ne converge pas (condition d'arrêt). Les étages sont repérés sur la figure par leur intensité des couleurs et l'instant de déclenchement de l'extraction. Le  $n^{\text{ème}}$  étage démarre son filtre à l'instant  $t = (n - 1) \times 0.65s$  et commence son extraction à l'instant  $t = n \times 0.65s$ . Le premier étage correspond à la couleur bleue la plus foncée et à l'instant d'extraction  $t = 0.65s$  et le 4<sup>ème</sup> étage correspond à la couleur bleue la plus claire et à l'instant d'extraction  $t = 2.6s$ .

Les figures 8.20 illustrent les résultats de l'estimation de la partie réelle de l'amplitude complexe de la cible  $\hat{= 1}$  (8.20(a)) et celle de la cible  $\hat{= 4}$  (8.20(b)). Les courbes en couleur rouge correspondent à la vraie trajectoire des cibles et les courbes en couleur bleue correspondent aux estimées du filtre FP.

Les figures 8.21 illustrent la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique (8.21(a)) et sur la vitesse bistatique(8.21(b)) à 2 rapports signal sur bruit différents :  $RSB = -20$  et  $RSB = -30$  avant corrélation pour le filtre FP.



(a) Estimation du retard



(b) Estimation du Doppler

FIGURE 8.19 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de huit cibles par le FP

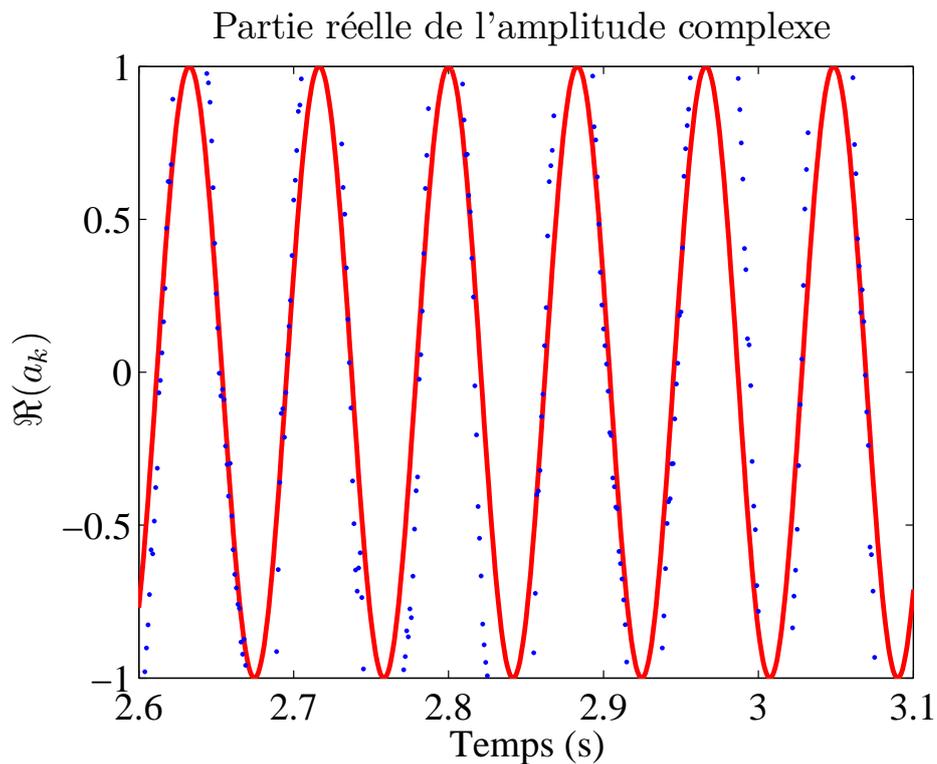
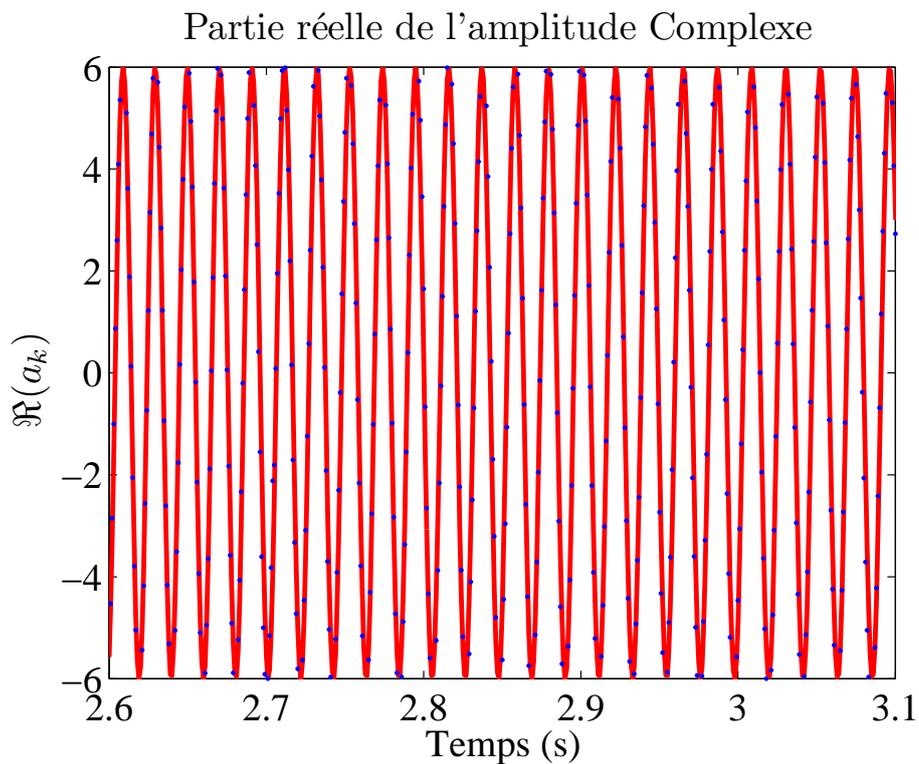
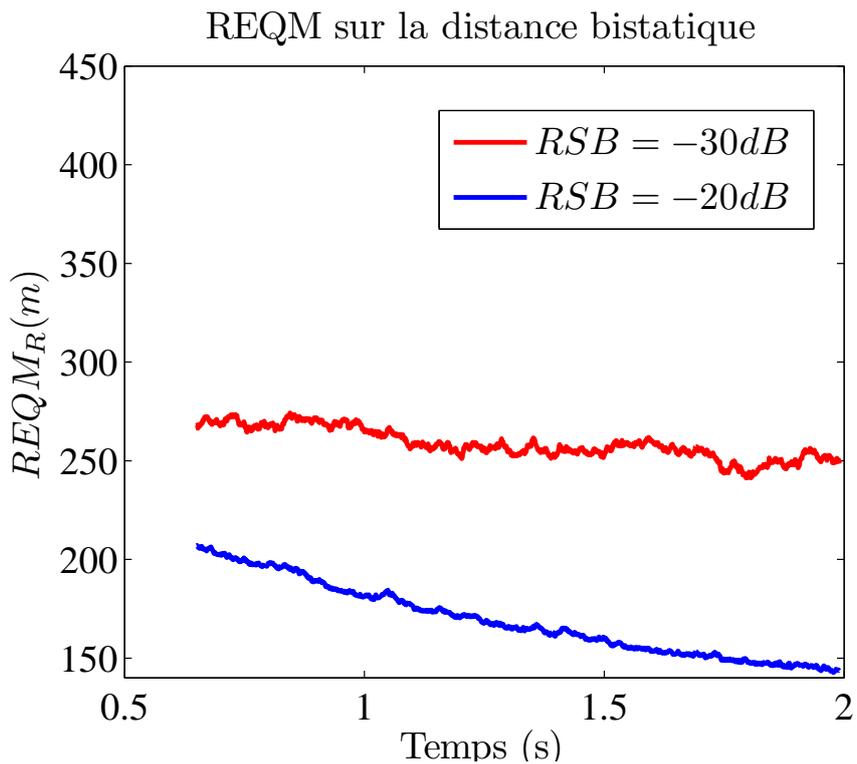
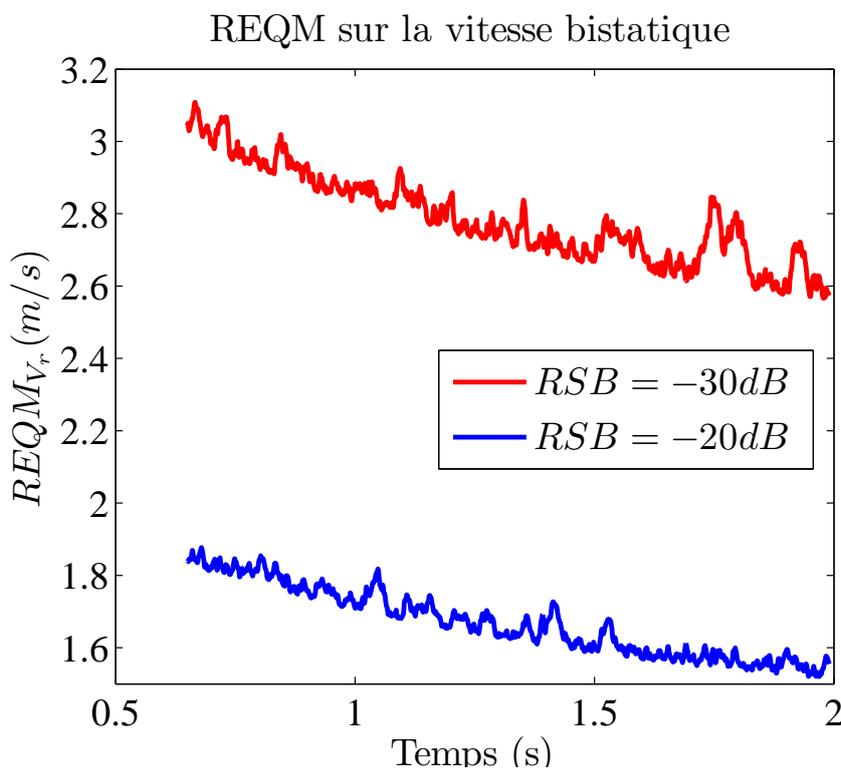
(a) Cible à  $RSB = -30dB$  avant corrélation(b) Cible à  $RSB = -14.5dB$  avant corrélation

FIGURE 8.20 – Résultat des estimations de la partie réelle de l'amplitude complexe en présence de huit cibles par le PF



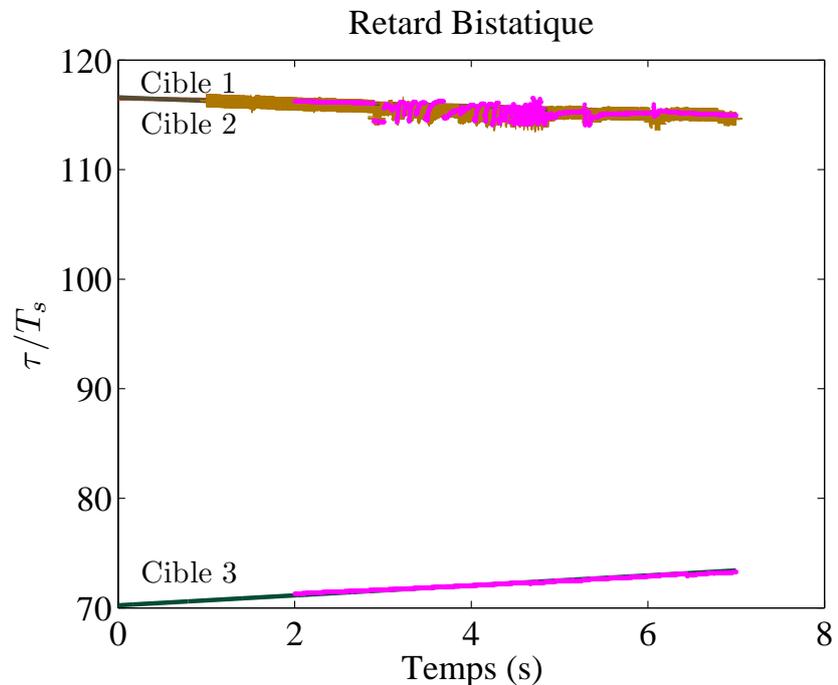
(a) REQM sur la distance bistatique



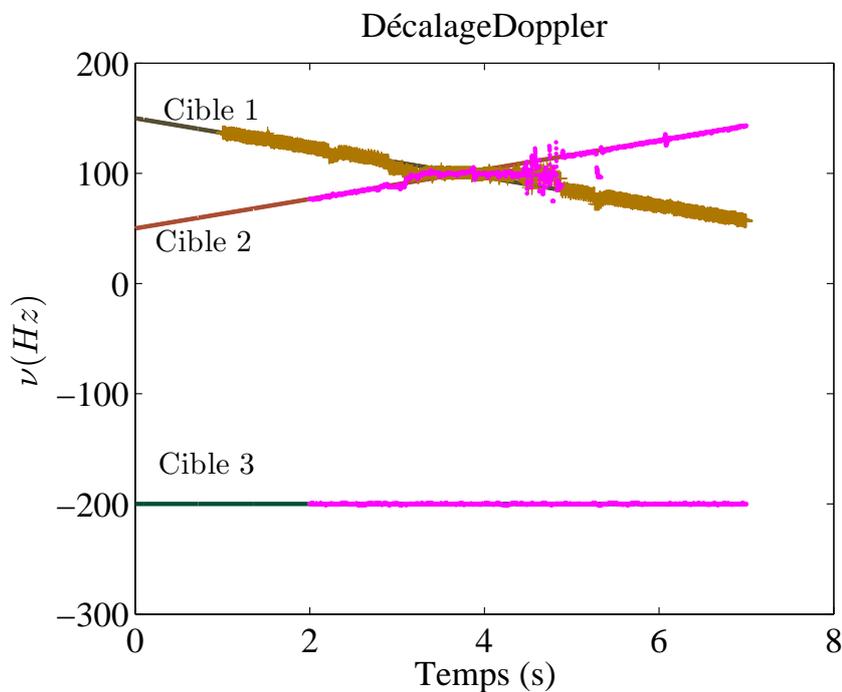
(b) REQM sur la vitesse bistatique

FIGURE 8.21 – La racine de l’erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse bistatique avec un FP en utilisant un signal FM. Le RSB avant corrélation est indiqué par la légende.

Bien que le calcul du dénominateur de la mise à jour des poids pour le GSF et le FP nécessitent l'hypothèse qu'une case distance soit occupée au plus par une seule cible, nous montrons expérimentalement que notre technique de détection/poursuite est robuste à l'apparition de plusieurs cibles dans la même case retard, mais sur des cases Doppler différentes.

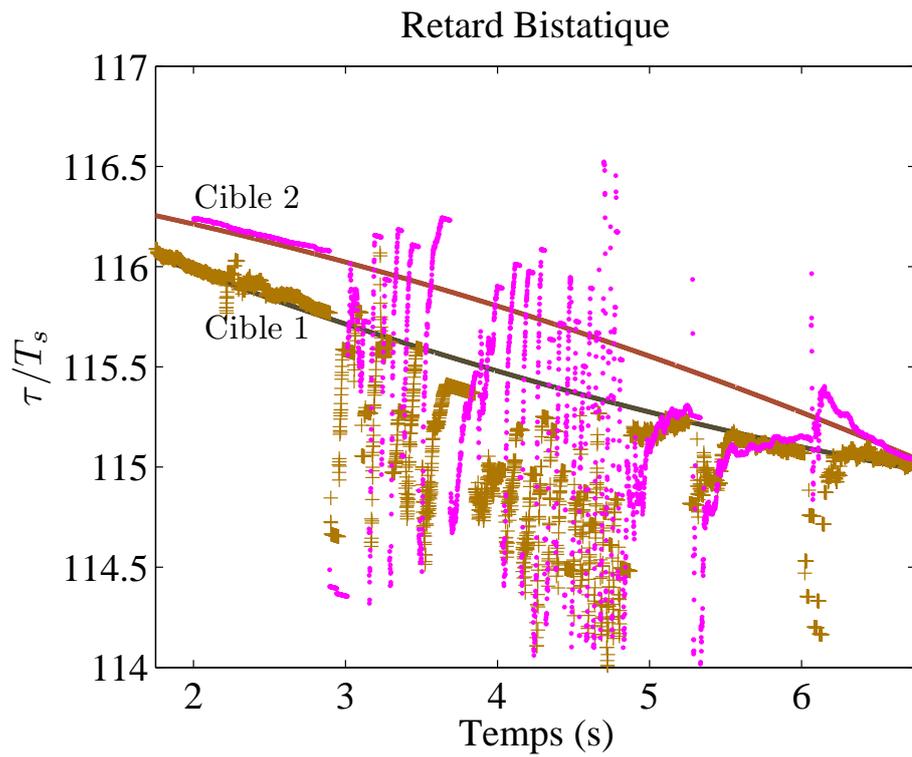


(a) Estimation du retard

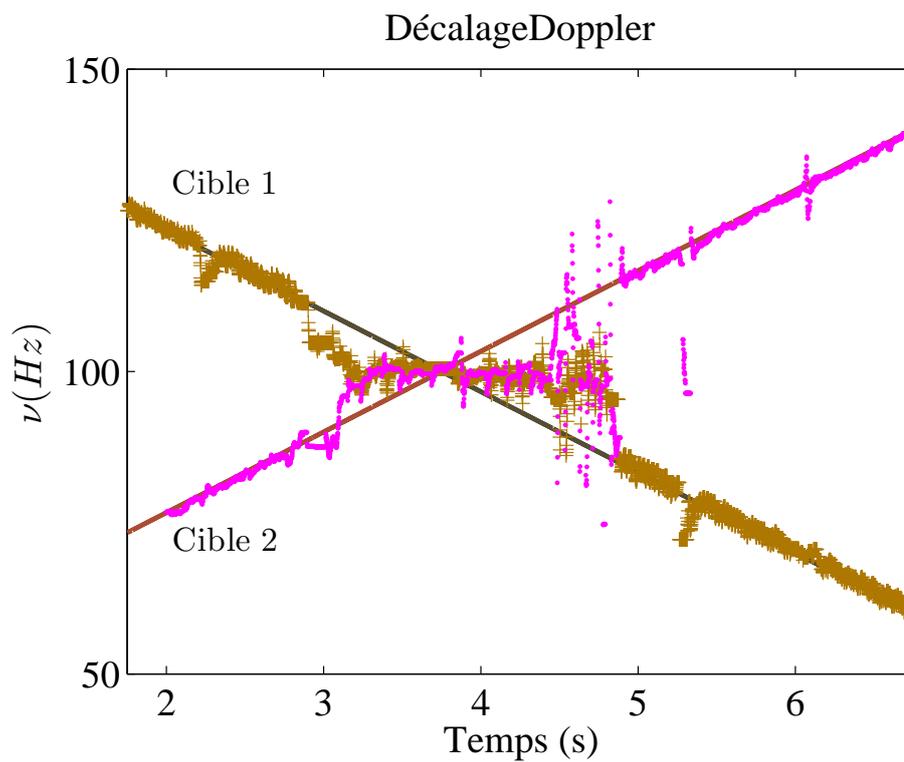


(b) Estimation du Doppler

FIGURE 8.22 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de 3 cibles par le GSF



(a) Estimation du retard



(b) Estimation du Doppler

FIGURE 8.23 – Résultat des estimations du retard bistatique et du décalage Doppler en présence de 3 cibles par le GSF en agrandissant la partie où les cibles se coincident.

Les figures 8.22 illustrent les résultats de l'estimation du retard bistatique (8.22(a)) et du décalage Doppler (8.22(b)) des échos correspondant à 3 cibles dont deux partagent la même case retard en utilisant 2 étages de GSF.

Le retard bistatique initial  $\tau_l$ , le décalage Doppler initial  $\nu_l$ , la dérive sur le décalage Doppler et le rapport signal sur bruit (RSB) avant corrélation des 3 cibles sont indiqués dans le tableau 8.4 :

Cible	Retard bistatique $\tau_l/T_s$	Décalage Doppler $\nu_l(Hz)$	Dérive de $\nu_l(Hz/s)$	RSB(dB) avant corrélation
Cible $\doteq$ 1	116.6	100	-10	-20
Cible $\doteq$ 2	116.5	-100	10	-20
Cible $\doteq$ 3	70.24	10	1	-24

TABLE 8.4 – Caractéristiques de 3 cibles

La figure 8.22 montre que le filtre estime au premier étage une cible parmi les deux qui partagent la même case retard. La deuxième cible dans la case commune est estimée dans le deuxième étage. La troisième cible qui existe loin des deux autres cibles est estimée dans le deuxième étage. L'estimation du premier étage est représentée par la couleur marron et l'estimation du deuxième étage est représentée par la couleur rose. Les deux cibles qui partagent la même case retard ont un RSB égal à  $-20dB$  et l'autre cible est à un  $RSB = -24dB$  avant corrélation. Les figures 8.23 illustrent une vue agrandie de l'instant de coïncidence des cibles 1 et 2. Le seul endroit où l'estimation fonctionne mal correspond aux instants où les deux cibles qui partagent la même case retard, partagent également la même case Doppler. En radar classique, ce problème lié à la résolution en retard et en Doppler, existerait aussi. Or par définition, la résolution en retard bistatique (resp. Doppler) est la séparation minimale en retard (resp. Doppler) entre les échos de deux cibles, alors il est difficile de séparer les échos de deux cibles qui partagent la même case retard/Doppler. Néanmoins, l'estimation des cibles reprend correctement après que les deux cibles qui partageaient la même case retard/Doppler se séparent suffisamment en terme de décalage Doppler, soit un décalage minimum de  $20Hz$  correspondant à 2 cases Doppler.

### 8.12.1 Comparaison GSF/FP

Les résultats déjà montrés révèlent les bonnes performances de la technique de type TBD introduite dans ce chapitre de détection/poursuite avec une implémentation par un GSF ou par un FP en exploitant les signaux de la radio FM. On constate que l'algorithme particulière FP montre un avantage par rapport à l'algorithme à somme de gaussiennes GSF en termes de nombre des cibles éliminées par étage. Le filtre poursuit le mouvement de la cible avec une précision satisfaisante dans le deux cas (FP ou GSF) même en présence de manoeuvres. Le temps de démarrage d'estimation reste lié au temps de convergence de l'entropie pire cas, défini dans le paragraphe 8.9.1.1.

Le tableau 8.5 montre les valeurs de la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et la vitesse bistatique pour les deux méthodes GSF et FP. La racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique obtenue par une implémentation avec un FP est beaucoup plus petite que celle obtenue par implémentation avec un GSF au même niveau de RSB. Cependant, la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) sur la vitesse bistatique obtenue par une implémentation avec un FP est du même ordre de grandeur que celle obtenue par implémentation avec un GSF au même niveau de RSB.

Méthode	REQM sur la position bistatique		REQM sur la vitesse bistatique	
RSB	$-20dB$	$-30dB$	$-20dB$	$-30dB$
FP	$150m$	$250m$	$1.6m/s$	$2.6m/s$
GSF	$200m$	$300m$	$2.2m/s$	$2.9m/s$

TABLE 8.5 – La racine de l’erreur quadratique moyenne (REQM) sur la distance bistatique et sur la vitesse avec FP et GSF en utilisant le signal FM avec un  $RSB = -20dB$  et  $RSB = -30dB$  avant corrélation

### 8.13 Conclusion Générale

En observant les performances de la méthode sur des signaux FM, on constate qu’un seul étage ne suffit pas pour extraire toutes les cibles, et que le nombre des cibles éliminées par un étage est plus grand pour un FP que pour un GSF. Le filtre élimine du fur au mesure les cibles ayant les échos les plus puissants et ainsi de suite. Nous pensons que le filtre innovant introduit dans ce chapitre représente le premier pas vers la mise en oeuvre de méthodes particulières dans un traitement radar complet incluant une phase de détection aveugle. Les travaux menés autour ce système nous amènent vers une nouvelle architecture radar remplaçant la chaîne conventionnelle typique héritée des systèmes radar actifs basée sur les matériels analogiques qui comporte plusieurs étapes entre le niveau du signal I&Q et le niveau de poursuite. Par ailleurs, la nouvelle chaîne de traitement particulière est un système complet, homogène et naturellement parallélisable.



# Conclusion Générale

## Sommaire

<b>9.1 Contributions principales . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>9.2 Perspectives . . . . .</b>	<b>144</b>

L'objectif principal de cette thèse était d'appliquer les techniques avancées de filtrage statistique à un problème difficile, à savoir le radar passif. La difficulté du problème vient :

- de l'estimation de cibles fortement manoeuvrantes à rapport signal sur bruit pouvant être très faible,
- de la présence de lobes secondaires non-maîtrisés dans la fonction d'ambiguïté du signal utilisé,
- de l'aspect multi-cible.

## 9.1 Contributions principales

Les chapitres 1 à 6 récapitulent l'état de l'art dans le domaine du radar passif, du filtrage statistique et des approches conventionnelles de pistage radar à base de données seuillées. Le chapitre 7 explore l'apport du filtrage particulière en radar passif. Avec une modélisation convenable du problème de poursuite d'une cible sous la forme d'un système dynamique non-linéaire, nous montrons comment le filtrage particulière, appliqué sur les sorties bruitées (non-seuillées) du corrélateur, permet d'obtenir un gain de l'ordre de  $6dB$  en termes de rapport signal sur bruit par rapport aux approches conventionnelles à performances égales. L'ingrédient essentiel de l'algorithme de poursuite proposé est l'intégration d'un système de synchronisation de l'instant d'échantillonnage ( et le cas échéant de la fréquence de corrélation) qui permet à l'algorithme particulière de générer les observations qui conviennent, afin de compenser automatiquement la dynamique des cibles. Une extension au cas multi-cible est également traitée. D'un point de vue pratique, de nombreuses simulations ont permis de valider cette méthode avec des signaux FM et DVB-T.

L'apport principal de cette thèse est exposé dans le chapitre 8 :

- Une contribution théorique nouvelle fournit un cadre bayésien général permettant d'appréhender le problème du pistage radar multicible avec la méthodologie dite "track-before-detect".
- Afin d'obtenir des solutions algorithmiques ayant un sens du point de vue de la complexité d'implémentation, nous avons introduit des approximations, l'une à base de sommes de gaussiennes et l'autre basée sur le filtrage à particules gaussiennes.
- D'un point de vue pratique, nous avons également proposé une technique d'annulation successive d'interférence qui permet de gérer la présence de lobes secondaires importants, comme c'est le cas en radar passif. Des simulations, utilisant un signal radio FM, ont permis de confirmer le potentiel du système de détection/poursuite proposé.

## 9.2 Perspectives

Différentes extensions de ce travail sont envisageables. En premier lieu, il serait intéressant d'étendre les techniques proposées aux réseaux d'émetteurs de type SFN (Single Frequency Network) et d'étudier l'apport du traitement d'antenne dans le canal de surveillance. De plus, il serait utile de comparer la technique proposée au chapitre 8 avec :

- les techniques de pistage radar conventionnelles à données seuillées. En particulier, une technique de filtrage statistique multi-cible connue sous le nom de "PHD filter" en anglais [Clark 2007], introduite récemment, permet un filtrage efficace des fausses alarmes. Cependant, les hypothèses simplificatrices inhérentes à cette méthode, en particulier le fait que chaque cible produit une observation unique avec une probabilité de détection importante, ne semblent pas réalistes dans le cas du radar passif, où les lobes secondaires des cibles de SER élevé sont susceptibles de masquer des cibles de SER faible.
- les techniques particulières déterministes au sens du minimum de variance introduites dans [Kazem 2008]. Ces techniques sont actuellement à l'étude dans le cadre d'un contrat DGA sur des données radar multi-cible réelles.

# Méthodes de classification

Dans la section 8.9.4, on cherche à extraire les modes de la loi a posteriori de l'état des cibles approchée par la méthode particulière. Le principe retenu consiste à employer des techniques de classification des particules.

## A.1 classification ad hoc

Nous proposons dans un premier temps une méthode de classification ad hoc qui a pour restriction que toutes les particules appartenant à une même case distance/Doppler se trouvent dans la même classe. De façon équivalente, on pourrait dire que ce sont les cases distance/Doppler que l'on classifie. La contrepartie de cette restriction est la très grande simplicité de l'algorithme.

Soit  $H_k$  la valeur de l'entropie des poids des cases distance /Doppler définis par l'équation 8.89, où l'instant discret  $k$  est supposé suffisamment grand pour que la convergence de l'entropie soit atteinte. Si chaque mode de la loi a posteriori reste à l'intérieur d'une case distance/Doppler, la quantité  $N_m = \lceil 2^{H_k} \rceil$  est un bon estimateur du nombre des modes. Malheureusement, comme le montre la figure A.1, un mode peut s'étaler sur plusieurs cases distance/Doppler (en réalité jusqu'à 4 cases adjacentes). Nous allons donc extraire les  $4N_m$  cases distance/Doppler de poids le plus élevé en les triant par ordre décroissant de poids. Nous appellerons  $[\tau_m, \nu_m]^T$  la somme pondérée des particules de ces cases pour  $m = 1, \dots, 4N_m$ .

Nous cherchons à classifier ces cases distance/Doppler en  $N_c$  classes. Nous appellerons  $[\tau_c, \nu_c]^T$  la somme pondérée des particules de la  $c^{\text{ème}}$  classe. De plus  $\sigma_c^\tau$  et  $\sigma_c^\nu$  désignent l'écart-type des particules appartenant à la  $c^{\text{ème}}$  classe.

L'algorithme de classification proposé suit les étapes suivantes :

- **Étape 1** : parmi les cases distance/Doppler préalablement triées, repérer la première non associée à une classe. Soit  $m_0$  l'indice de cette case, une nouvelle classe d'indice  $c$  est initialisée avec  $[\tau_c, \nu_c]^T = [\tau_{m_0}, \nu_{m_0}]^T$  et  $\sigma_c^\tau$  et  $\sigma_c^\nu$  sont choisis comme les écart-types de particules dans la case  $m_0$ .
- **Étape 2** : on agrège à la  $c^{\text{ème}}$  classe nouvellement créée à l'étape 1, toutes les cases distance/Doppler non encore classifiées d'indice  $m$  telles que

$$\begin{cases} |\tau_c - \tau_m| < 2\sigma_c^\tau \\ \text{et} \\ |\nu_c - \nu_m| < 2\sigma_c^\nu \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

- **Étape 3** : recalculer les paramètres  $\tau_c, \nu_c, \sigma_c^\tau, \sigma_c^\nu$  de la  $c^{\text{ème}}$  classe.

On répète les étapes 1 à 3 jusqu'à épuisement des cases distance/Doppler non classifiées.

Appelons  $w_c$  la somme des poids des particules de la  $c^{\text{ème}}$  classe. Le nombre de modes  $N_T$  de la loi a posteriori sera estimé comme étant le plus petit entier positif tel que la somme des  $w_c$  dépasse 95% en supposant les classes triées par ordre de poids décroissants.

À l'instant discret  $k$ , les modes de la loi a posteriori  $\left\{ \hat{\mathcal{X}}_{c,k} \right\}_{c=1}^{N_T}$  seront obtenus en choisissant  $\hat{\mathcal{X}}_{c,k} = [\tau_c, \nu_c]^T$ , soit la somme pondérée des particules de la  $c^{\text{ème}}$  classe.

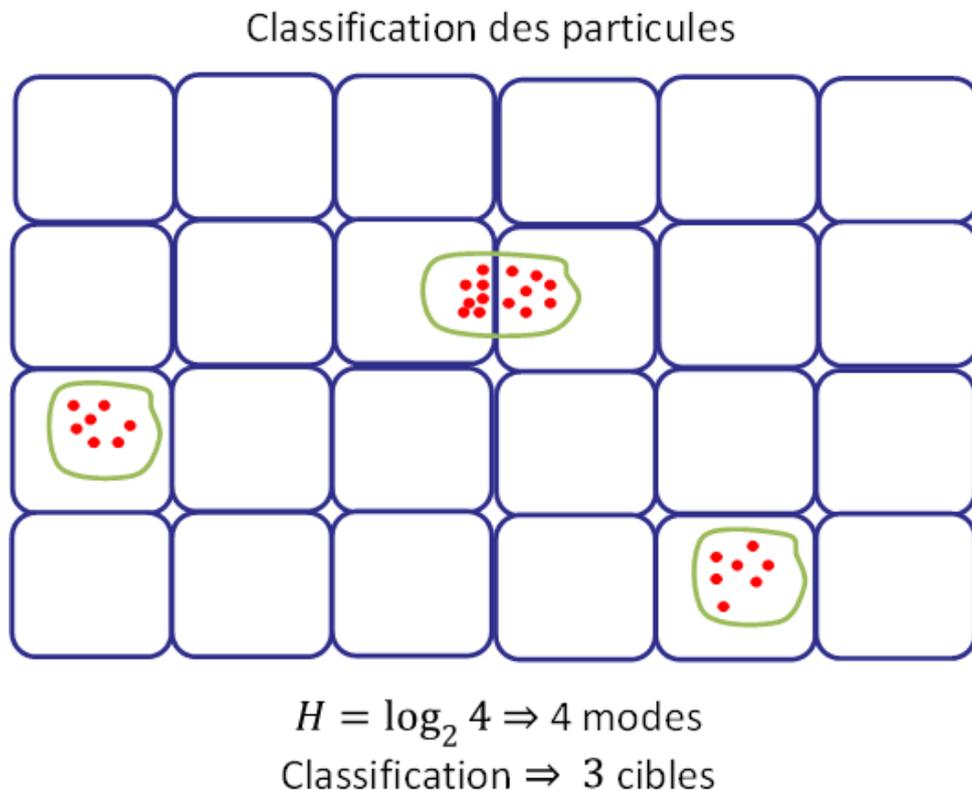


FIGURE A.1 – Description du problème de la représentation d’une cible par des particules localisées dans plusieurs cases retard/Doppler

## A.2 Classification des particules par la méthode K-means

Une autre façon de faire consiste à classifier directement les particules individuellement, sans tenir compte de la case distance/Doppler à laquelle elles appartiennent. Pour ce faire, on procède en deux étapes à l’instant discret  $k$  :

- **Étape 1** : l’ensemble des particules  $\{\mathcal{X}_k^{m,n,p}, w_k^{m,n,p}\}$ , pour  $1 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq n \leq N$  et  $1 \leq p \leq N_p$ , subissent une redistribution globale (et non plus case par case) selon la procédure de ré-échantillonnage de la section 4.5. Cette étape a pour conséquence de faire apparaître des nuages de particules (de poids identiques) correspondant à la classification recherchée.
- **Étape 2** : les particules obtenues sont classifiées par l’algorithme K-means [MacQueen 1967] pour différentes valeurs du nombre de classes  $N_c$ . L’estimé du nombre  $N_T$  de modes de la loi a posteriori sera choisi comme la valeur de  $N_c$  qui minimise la distance euclidienne intra-classe et qui maximise la distance euclidienne inter-classe.

A l’instant discret  $k$ , les modes de la loi a posteriori  $\{\hat{\mathcal{X}}_{c,k}\}_{c=1}^{N_T}$  seront obtenues comme la somme pondérée des particules de la  $c^{\text{ème}}$  classe.

# Bibliographie

- [Akashi 1977] H. Akashi et H. Kumamoto. *Random sampling approach to state estimation in switching environments*. Automatica, vol. 13, pages 429–434, 1977. 34
- [Alspach 1972] D. Alspach et H. Sorenson. *A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 17, pages pp. 439–448, Aout 1972. 29
- [Amara 2005] R. Amara et S. Marcos. *Parallel Kalman filtering for optimal symbol-by-symbol estimation in an equalization context*. Signal Processing Elsevier, vol. 85, no. 6, pages 1125–1138, Juin 2005. 29
- [Anderson 1979] Brian Anderson et John Moore. Optimal filtering. Prentice Hall, Dedham, MA, 1979. 25, 29
- [Arulampalam 2002] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, et T. Clapp. *A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, pages 174–188, Février 2002. 43
- [Axelsson 2005] S. R. J. Axelsson. *Improved clutter suppression in random noise radar*. In Commission F Symposium. URSI, 2005. 13, 127
- [Bar-Shalom 1988] Y. Bar-Shalom et T. E. Fortmann. Tracking and data association. Academic Press, Boston, 1988. 65
- [Bar-Shalom 1993] Yaakov Bar-Shalom et Xiao-Rong Li. Estimation and tracking : principles, techniques and software. Artech House, Englewood Cliffs, NJ, 1993. 51, 66
- [Bar 1990] Multitarget- multisensor tracking : advanced applications, chapitre Chap 4 : dynamic programming algorithm for detecting dim moving targets. Artech House, Norwood Mass USA, 1990. 94
- [Benavoli 2010] A. Benavoli et A. Di Lallo. *Why should we use particle filtering in FM band passive radars*. In 5th European Radar Conference. IEEE, 2010. 69
- [BenSalem 2002] F. BenSalem. *Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles*. Thèse de Doctorat, LAAS/CNRS, 2002. 44
- [Boers 2001] Y. Boers et J. N. Driessen. *Particle filter based detection for tracking*. In American Control Conference. Arlington, VA, 2001. 94
- [Bruno 2001] M. G. S. Bruno et J. M. F. Moura. *Multiframe detector/tracker : optimal performance*. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, vol. 37, no. 3, pages 925–945, 2001. 94
- [Bruno 2004] M. Bruno. *Bayesian methods for multiaspect target tracking in image sequences*. IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 52, no. 7, pages 1848–1861, 2004. 94
- [Cardinali 2007a] R. Cardinali, F. Colone, C. Ferretti et P. Lombardo. *Comparison of clutter and multipath cancellation techniques for passive radar*. In Radar Conference. IEEE, 2007. 13
- [Cardinali 2007b] R. Cardinali, F. Colone, P. Lombardo, O. Crognale et A. Cosmi. *Multipath cancellation on reference antenna for passive radar which exploits FM transmission*. In International Radar Conference. IET, 2007. 14
- [Casella 1996] G. Casella et C. P. Robert. *Rao Blackwellisation of sampling schemes*. Biometrika, vol. 83, no. 1, pages 81–94, 1996. 45

- [Clark 2007] D. E. Clark et J. Bell. *Multi-target state estimation and track continuity for particle PHD filter*. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, vol. 43, no. 4, pages 1441–1453, 2007. 144
- [Colone 2006] F. Colone, R. Cardinali et P. Lombardo. *Cancellation of clutter and multipath in passive radar using a sequential approach*. In Radar Conference. IEEE, 2006. 13
- [Colone 2009] F. Colone, D. W. Ohagan, P. Lombardo et C. J. Baker. *A multistage processing algorithm for disturbance removal and target detection in passive bistatic radar*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 45, no. 2, pages 698–722, Avril 2009. 13
- [Cover 2006] T. Cover et J. Thomas. Elements of information theory. Wiley-Interscience, 2006. 117
- [Cox 1996] I. Cox et S. Hingorani. *An Efficient Implementation of Reid's Multiple Hypothesis Tracking Algorithm and Its Evaluation for the Purpose of Visual Tracking*. IEEE PAMI, vol. 18, no. 2, pages 138–150, 1996. 65
- [Devroye 1986] L. Devroye. Non-uniform random variate generation. Berlin, New York, 1986. 35
- [Doucet 1998] A. Doucet. *On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering*. Cambridge University Engineering Department Tech. Rep. CUED/FINFENG/ TR-310, 1998. 44
- [Doucet 2000] A. Doucet, S. Godsill, et N.J. Andrieu. *On Sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian Filter*. Statistics and Computing, vol. 10, no. 3, pages 197–208, 2000. 43
- [Doucet 2001] A. Doucet, N. De Freitas et editors N. Gordon. Sequential Monte Carlo methods in practice. Springer, New York, 2001. 34
- [Driessen 2001] H. Driessen et Y. Boers. *An efficient particle filter for non-linear jump markov systems*. In Seminar on Target Tracking : Algorithms and Applications, UK. IEEE, 2001. 94
- [ETS 2009] *Digital broadcasting systems for television, sound and data services ; framing structure, channel coding, and modulation for digital terrestrial television*. Etsi 300 744, European Standard (Telecommunications series), 2009. 58, 59
- [Gao 2006] Z. Gao, R. Tao, Y. Ma et T. Shao. *DTV signal ambiguity function analysis for radar application*. International Conference on Radar, pages 1–19, 2006. 59
- [Gilks 2001] W. R. Gilks et C. Berzuini. *Following a moving target-Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 63, no. 1, pages 127–146, 2001. 44
- [Gordon 1993] N. Gordon, D. Salmond et A. F. Smith. *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation*. IEE Proc. F, Radar Signal Process., vol. 140, no. 2, pages 107–113, 1993. 34, 37, 44
- [Griffths 1986] H.D. Griffths et N.R.W. Long. *Television based bistatic radar*. IEE Proc. Communication Radar Signal Processing, vol. 133, no. 7, pages 649–657, 1986. 12, 54
- [Griffths 2005] H.D. Griffths et D.J. Baker. *Passive coherent location radar systems. Part 1 : performance prediction*. IEE Proc. Radar Sonar Navig., vol. 152, no. 3, pages 153–159, 2005. 12, 56

- [Gunner 2003] A. Gunner, M. A. Temple et R.J. Claypoole. *Direct-path filtering of DAB waveform from PCL receiver target channel*. Electronics Letters, vol. 39, no. 1, pages 1005–1007, 2003. 13
- [Hammersley 1954] J. M. Hammersley et K. W. Morton. *Poor man's Monte Carlo*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 16, pages 23–38, 1954. 34
- [Handschin 1969] J. Handschin et D. Mayne. *Monte Carlo techniques to estimate the conditional expectation in multi-stage non-linear filtering*. International Journal of Control, vol. 9, no. 5, pages 547–559, 1969. 34
- [Hastings 1970] W. K. Hastings. *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*. Biometrika, vol. 57, pages 97–109, 1970. 35
- [Haykin 2002] S. Haykin. Adaptive filter theory. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002. 13
- [Howland 1999] P.E. Howland. *Target tracking using television-based bistatic radar*. IEE Proc. Radar Sonar Navig., vol. 146, no. 3, pages 166–174, 1999. 54
- [Howland 2005] P.E. Howland, D. Maksimiuk et G. Reitsma. *FM radio based bistatic radar*. IEE Proc. Radar Sonar Navig., vol. 152, no. 3, pages 107–115, 2005. 13, 54, 56
- [Hue 2002] C. Hue, J.-P. Le Cadre et P. Pérez. *Sequential Monte Carlo methods for multiple target tracking and data fusion*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, pages 309–325, 2002. 44
- [IEE 2005] *Special Issue on Passive Radar Systems*. IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation, vol. 152, no. 3, pages 106–233, Juin 2005. 12
- [Ito 2000] K. Ito et K. Xiong. *Gaussian filters for nonlinear filtering problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, pages pp. 910–927, Mars 2000. 29
- [Jishy 2009] Khalil Jishy, Frederic Lehmann, Michel Morruzis et Gerard Salut. *Particle Filter Algorithm for Tracking Manoeuvring Target Using FM Signal*. In ISSPIT. IEEE, 2009. 71
- [Jishy 2010a] Khalil Jishy, Frederic Lehmann, François Gosselin, Michel Morruzis et Gerard Salut. *Passive Detection and Tracking of Manoeuvring Targets with Particle Filter Using DVBT Signals*. In EuRad. IEEE, 2010. 83
- [Jishy 2010b] Khalil Jishy, Frederic Lehmann, Michel Morruzis, François Gosselin et Gerard Salut. *Tracking Maneuvering Target with Particle Filter Techniques on Passive Radar Using FM and DVBT Broadcasting Signals*. In RADAR. IEEE, 2010. 71
- [Julier 1996] S. Julier et J. Uhlmann. *A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems*. University of Oxford, 1996. Robotics Research Group, Tech. Rep. 28
- [Julier 2000] S. Julier, J. Uhlmann et H. F. Durrant-Whyte. *A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, pages pp. 477–482, Mars 2000. 28
- [Kalman 1960] R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Trans. ASME, J.Basic Engineering, vol. 82, pages pp. 34–45, 1960. 19, 25
- [Kalman 1961] R.E. Kalman. *New results in linear filtering and prediction theory*. Trans. ASME, J.Basic Engineering, vol. 83, pages pp. 95–108, 1961. 25
- [Kazem 2008] A. Kazem. *Particules déterministes généralisées en filtrage non-linéaire : applications défense et télécommunications*. Thèse de Doctorat, LAAS/CNRS, 2008. 44, 144

- [Kingsley 1992] Simon Kingsley et Shaun Quegan. *Understanding radar systems*. SciTech Publishing, Mendham, NJ, 1992. 8, 16, 64
- [Kitagawa 1996] G. Kitagawa. *Monte Carlo filter and smother for non-Gaussian non-linear state space models*. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 5, no. 1, pages 1–25, 1996. 41
- [Kong 1994] A. Kong, J. S. Liu et W. H. Wong. *Sequential imputations and Bayesian missing data problems*. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, no. 425, pages 278–288, 1994. 39
- [Kulpa 2004] K.S. Kulpa et Z. Czekaja. *Ground clutter suppression in noise radar*. In *International Conference on Radar Systems*. IEEE, 2004. 13
- [Kulpa 2005] K.S. Kulpa et Z. Czekaja. *Masking effect and its removal in PCL radar*. *IEE Proc. Radar Sonar Navig.*, vol. 152, no. 3, pages 174–178, 2005. 13, 127
- [Laneman 2001] J. Nicholas Laneman. *Soft Selection Combining for Terrestrial Digital Audio Broadcasting in the FM Band*. *IEEE Transaction on Broadcasting*, vol. 47, no. 2, Juin 2001. 56
- [Larimore 1983] M. G. Larimore et J.R. Traichler. *Convergence behavior of constant modulus algorithm*. In *ICASSP*. IEEE, 1983. 14
- [Liu 1998] J. S. Liu et R. Chen. *Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems*. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 93, pages 1032–1044, Septembre 1998. 40
- [MacCormick 2000] J. MacCormick et A. Blake. *A Probabilistic Exclusion Principle for Tracking Multiple Objects*. *International Journal of Computer Vision*, vol. 39, no. 1, pages 57–71, 2000. 37
- [MacQueen 1967] J. B. MacQueen. *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations*. In *Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 281–297. University of California Press, 1967. 146
- [Marshall 1956] A. W. Marshall. *The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations*. *Symposium on Monte Carlo Methods*, New York, pages 123–140, 1956. 35
- [Metropolis 1953] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller et E. Teller. *Equations of state calculations by fast computing machines*. *Journal of Chemical Physics*, vol. 21, pages 1087–1091, 1953. 35
- [Mojarrabi 2003] B. Mojarrabi, J. Homer, K. Kubik, LD. Longstaff et J. Palmer. *Analytical Solution for target location using Bistatic Multi-transmitter and Multi-receiver techniques*. In *International Radar Conference*. IEEE, 2003. 82, 84
- [Musso 1998] C. Musso et N. Oudjane. *Regularisation schemes for branching particle systems as a numerical solving method of the nonlinear filtering problem*. *Irish Signals Systems Conference*, Dublin, Juin 1998. 44
- [Nitzberg 1999] R. Nitzberg. *Radar signal processing and adaptive systems*. Artech House, Boston, London, 1999. 17
- [Noyer 1996] J.-C. Noyer. *Traitement non-linéaire du signal radar par filtrage particulaire*. Thèse de Doctorat, LAAS/CNRS, 1996. 41, 45
- [Oudjane 2000] N. Oudjane. *Stabilité et Approximations Particulaires en Filtrage non linéaire, Application au pistage*. Thèse de Doctorat, L'Université de Rennes 1, France, Décembre 2000. 44

- [Pham 2001] D. T. Pham. *Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems*. Monthly Weather Review, vol. 129, no. 5, pages 1194–1207, 2001. 40
- [Pitt 1999] M. Pitt et N. Shephard. *Filtering via simulation : Auxiliary particle filters*. Journal of the American Statistical Association, vol. 94, no. 446, pages 590–599, 1999. 44
- [Pohlig 1989] S. C. Pohlig. *An algorithm for detection of moving optical targets*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 25, no. 1, pages 56–63, 1989. 94
- [Poore 1994] A. B. Poore. *Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 3, pages 27–57, 1994. 65
- [Rabiner 1986] L. Rabiner et B. Jang. *An introduction to hidden markov models*. IEEE ASSP Magazine, vol. 3, no. 1, pages 4–16, 1986. 94
- [Reid 1979] D. Reid. *An algorithm for tracking multiple targets*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 24, no. 6, pages 843–854, 1979. 65
- [Rigal 1993] G. Rigal. *Filtrage non-linéaire, résolution particulière et applications au traitement du signal*. Thèse de Doctorat, LAAS/CNRS, 1993. 45
- [Ristic 2004] Branko Ristic, Sanjeev Arulapalam et Neil Gordon. *Beyond the kalman filter : Particle filters for tracking applications*. Artech House, Boston, London, 2004. 35, 94
- [Rutten 2005] M. Rutten, N. Gordon et S. Maskell. *Recursive track-before-detect with target amplitude fluctuations*. IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation, vol. 152, no. 5, pages 305–322, 2005. 94
- [Saini 2005] R. Saini et M. Cherniakov. *DTV signal ambiguity function analysis for radar application*. IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation, vol. 152, no. 3, pages 133–142, 2005. 59
- [Salmond 2001] D. J. Salmond et H. Birch. *A particle filter for track-before-detect*. In American Control Conference. Arlington, VA, 2001. 94
- [Salut 1989] G. Salut. *Le thème non-linéaire en automatique et traitement du signal*. Journées Nationales du traitement du signal et images, Chantilly, vol. 50, pages 346–348, Septembre 1989. 34, 37, 44
- [Salut 1994] G. Salut. *Procédé et système pour l'estimation non-linéaire optimale des processus dynamiques en temps réel*. Brevet INPI : 94/07274 (Extensions Europe 95595256.5 - 5.2206, US Patent 5933352), 1994. 44
- [Sayadi 2005] B. Sayadi et S. Marcos. *A network of Kalman filters for MAI and ISI compensation in non-Gaussian environment*. EURASIP Journal On Applied Signal Processing, pages 635–648, Avril 2005. 29
- [Schulz 2001] D. Schulz, W. Burgard, D. Fox et A. Cremers. *Multiple object tracking with a mobile robot*. In CVPR, pages 371–377, 2001. 65
- [Shannon 1948] C. E. Shannon. *A mathematical theory of communication*. Bell System Technical Journal, vol. 27, pages 379–423, Juin 1948. 70
- [Souty 2004a] Marie-Christine Souty, Jérémie Guy et Christophe Cognasson. *NCTR performance assessment methodology*. In RADAR. IEEE, 2004. 91
- [Souty 2004b] Marie-Christine Souty, Pierre Saulais, Tan Hock Tat et Tong Cherng Huei. *Automatic Target Classification for Naval Radars*. In RADAR. IEEE, 2004. 91
- [Stone 1999] L. D. Stone, C. A. Barlow et T. L. Corwin. *Bayesian multiple target tracking*. Artech House, Norwood, Mass, USA, 1999. 94

- [Sun 2001] Yi Sun. *Bandwidth-Efficient Wireless OFDM*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 19, no. 11, pages pp. 346–348, Novembre 2001. 59
- [Swerling 1954] P. Swerling. *Probability of Detection for Fluctuating Targets*. Trans on Information Theory, vol. 6, pages pp. 269–308, Avril 1954. 16
- [Tanizaki 1996] H. Tanizaki. *Nonlinear filters : Estimation and applications*. Springer, Berlin, 1996. 24, 107
- [Tonbsen 1998] S. M. Tonbsen et Y. Bar-Shalom. *Maximum Likelihood track-before-detect for fluctuating target amplitude*. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, vol. 34, no. 3, pages 796–809, 1998. 94
- [Traichler 1983] J.R. Traichler et B. G. Agee. *A new approach to multipath correction of constant modulus signal*. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 31, no. 2, pages 459–472, 1983. 14
- [van der Merwe 2000] R. van der Merwe, A. Doucet, N. de Freitas, et E. Wan. *The unscented particle filter*. Cambridge University Engineering Department, Tech. Rep. CUED/FINFENG/TR-380, August 2000. 44
- [Ventre 1991] D. Ventre. *Communications analogiques*. Ellipses, 1991. 55
- [Viterbi 1967] A. J. Viterbi. *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 13, no. 2, pages 260–269, 1967. 94
- [von Neumann 1951] J. von Neumann. *Various techniques used in connection with random digits*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, vol. 12, pages 36–38, 1951. 35
- [Wiener 1966] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*. M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets, 1966. 19
- [Willis 2005] Nicholas J. Willis. *Bistatic radar*. SciTech Publishing, Inc., Raleigh, NC, 2005. 7
- [Ziadi 2007] A. Ziadi. *Particules gaussiennes déterministes en maximum de vraisemblance non-linéaire : application au filtrage optimal des signaux radar et GPS*. Thèse de Doctorat, LAAS/CNRS, 2007. 44

---

**Résumé :** Cette thèse porte sur l'application des techniques de filtrage statistiques au radar passif. L'objectif de cette thèse est d'adapter les méthodes à somme de gaussiennes et les méthodes particulières pour la détection et/ou la poursuite dans un contexte multi-cible. Nous nous intéressons aux problématiques liées à des cibles fortement manoeuvrantes à rapport signal sur bruit pouvant être très faible. En guise d'application, la radio FM et la télévision numérique DVB-T seront exploitées comme sources d'opportunité par le système de localisation passive.

Dans un premier temps, cette thèse récapitule l'état de l'art dans le domaine du radar passif, du filtrage statistique et des approches conventionnelles de pistage radar à base de données seuillées.

Dans un deuxième temps, cette thèse explore l'apport du filtrage particulière en radar passif. Avec une modélisation convenable du problème de poursuite d'une cible sous la forme d'un système dynamique non-linéaire, nous montrons comment le filtrage particulière, appliqué sur les sorties bruitées (non-seuillées) du corrélateur, améliore les performances en terme de poursuite par rapport aux approches conventionnelles. Une extension au cas multi-cible est également traitée. L'ingrédient essentiel de l'algorithme proposé est l'intégration d'un système de synchronisation de l'instant d'échantillonnage du corrélateur (et le cas échéant de la fréquence de corrélation) qui permet à l'algorithme particulière de compenser automatiquement la dynamique des cibles.

Dans un troisième temps, nous exposons un nouveau système de détection/poursuite multi-cible basé sur le filtrage bayésien avec la méthodologie "track-before-detect". Ce système est implémenté par une approximation à base de somme de gaussiennes ou une approximation à base de filtrage particulière. Nous proposons également une technique d'annulation successive d'interférence qui permet de gérer la présence de lobes secondaires importants. Des simulations utilisant un signal radio FM, ont permis de confirmer le potentiel du système de détection/poursuite proposé.

**Mots clés :** Radar passif, détection, poursuite, cibles manoeuvrantes, filtrage à somme de gaussiennes, filtrage particulière, modulation de fréquence, télévision numérique.

---

---

**Abstract :** The subject of this thesis is the application of statistical filtering techniques to passive radar. The objective of this thesis is to adapt Gaussian sum filtering and particle filtering methods to the detection and/or tracking in a multi-target context. Highly manoeuvring targets, at potentially very low signal-to-noise ratios, will be of particular interest. As an application, FM radio and terrestrial digital video broadcasting (DVB-T) will be exploited as illuminators of opportunity by the passive localization system.

First, this thesis recapitulates the state-of-the-art in the domain of passive radar, statistical filtering and conventional radar tracking approaches based on the thresholded data.

Second, this thesis explores the benefits of particle filtering in passive radar. With an appropriate modeling of the problem of target tracking as a non-linear dynamical system, we show how particle filtering, fed with the noisy unthresholded matched filter outputs, outperforms conventional tracking approaches. An extension to the multi-target case is also treated. The essential ingredient of the proposed algorithm is the inbuilt synchronization system of the correlator sampling instants (and potentially also of the correlation frequency), which allows the particle filter to compensate the dynamics of the targets automatically.

Third, we present a new multi-target detection/tracking system, based on Bayesian filtering, using the track-before-detect methodology. This system is implemented with an approximation based on Gaussian sum filtering or an approximation based on particle filtering. We also propose a successive interference cancellation technique, which allows to handle the presence of large sidelobes. Simulations using FM radio confirmed the potential of the proposed detection/tracking system.

**Keywords :** Passive radar, detection, tracking, manoeuvring targets, Gaussian sum filtering, particle filtering, frequency modulation, digital television.

---