# Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes

Asma Jbilou

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

Laboratoire de Mathématiques J.-A. Dieudonné
U.M.R. du C.N.R.S. N° 6621

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en SCIENCES**
de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue par

**Asma JBILOU**

## ÉQUATIONS HESSIENNES COMPLEXES SUR DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

Thèse dirigée par Philippe DELANOË
soutenue le Vendredi 19 Février 2010 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **M.** | **G. LEBEAU,** | PR, Univ. Nice-Sophia Antipolis | Président |
| **M.** | **P. CHERRIER,** | PR, Univ. Paris VI | Rapporteur |
| **M.** | **P. GAUDUCHON,** | DR, École Polytechnique | Rapporteur |
| **M.** | **J. KELLER,** | MC, Univ. Aix-Marseille I | Rapporteur |
| **M.** | **Ph. DELANOË,** | DR, Univ. Nice-Sophia Antipolis | Directeur de Thèse |

à 15 heures au laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

Laboratoire de Mathématiques J.-A. Dieudonné
U.M.R. du C.N.R.S. N° 6621

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en SCIENCES**
de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue par

**Asma JBILOU**

## ÉQUATIONS HESSIENNES COMPLEXES SUR DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

Thèse dirigée par Philippe DELANOË
soutenue le Vendredi 19 Février 2010 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **M.** | **G. LEBEAU,** | PR, Univ. Nice-Sophia Antipolis | Président |
| **M.** | **P. CHERRIER,** | PR, Univ. Paris VI | Rapporteur |
| **M.** | **P. GAUDUCHON,** | DR, École Polytechnique | Rapporteur |
| **M.** | **J. KELLER,** | MC, Univ. Aix-Marseille I | Rapporteur |
| **M.** | **Ph. DELANOË,** | DR, Univ. Nice-Sophia Antipolis | Directeur de Thèse |

à 15 heures au laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse Philippe DELANOË. Je lui adresse mes sincères remerciements pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements, sans oublier ses nombreux conseils de rédaction. Je lui suis reconnaissante de m'avoir laissé toute la liberté dont j'avais besoin pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Pascal CHERRIER (mon professeur de Master 2), Paul GAUDUCHON (mon directeur de stage de Master 2) et Julien KELLER d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis aussi très honorée que Gilles LEBEAU ait bien voulu se joindre à ce jury.

Mes pensées se tournent ensuite vers tous les membres de l'université de Nice qui m'ont accompagnée et soutenue pendant toute la durée de cette thèse.

J'ai fait partie pendant plus de trois ans de l'équipe "Géométrie et Analyse" du laboratoire Dieudonné. Je remercie tous les membres de cette équipe, qui m'a offert un accueil chaleureux et ce dès ma première année de thèse, notamment Erwann AUBRY et Frédéric ROBERT pour tous les éclaircissements qu'ils ont apportés à certaines de mes questions, Gilles LEBEAU et François ROUVIERE pour leur disponibilité, et Ludovic RIFFORD pour ses conseils relatifs à l'enseignement.

J'adresse par ailleurs mes sincères remerciements à André HIRSCHOWITZ, enseignant responsable de la plupart des TDs que j'ai assurés durant ces années à l'université de Nice, à Michel MERLE, directeur du département de mathématiques, et à Philippe MAISONOBE, directeur du laboratoire Dieudonné, sans oublier Madame MAISONOBE, pour leur disponibilité constante.

J'ai une pensée particulière pour les doctorants que j'ai côtoyés en particulier ceux qui ont partagé mon bureau : Xavier GENDRE, Hugues ZUBER, Chiara CAMERE, Luca BIANCOFIORE, Ducduy NGO, Nicolas ROUSSEAU, et aussi les anciens doctorants et post-doctorants de mon équipe : Mouhamad HOSSEIN, Julien ROTH, et Marco CASTELPIETRA. J'adresse, en outre, un remerciement particulier à Julianna ZSIDO.

Je remercie le personnel administratif du laboratoire Dieudonné, de l'école doctorale ED-SFA et du CIES Provence-Côte d'Azur-Corse pour son efficacité et son dévouement, notamment Mesdames Janine LACHKAR, Cécile YVON, Marie-France GALLORINI, Cécile MATTESI, Stéphanie FERRERO, Isabelle DE ANGELIS et Fernande ROBINI.

Merci aussi aux bibliothécaires : Isabelle LAURENT et Jean-Louis THOMIN, sans qui la recherche bibliographique serait un cauchemar, aux informaticiens Jean-Marc LACROIX et Julien MAURIN, et au responsable de reprographie Jean-Paul PRADERE.

Merci à tous les membres de l'association du Planétarium Valéri que j'ai côtoyés pendant toutes ces années de thèse, je pense notamment à Nicole ROHMER, Mireille JOURDAN, Katia FREHEL, Gilbert ROULANT, Gilbert BARTHE, Pierre DUBREUIL et Gilles KOBER.

Je tiens aussi à remercier mes voisines Mesdames ISSAURAT et SALA pour nos longues discussions et leurs conseils.

Je remercie tous les professeurs qui m'ont appris des mathématiques tout au long de mes études, et spécifiquement Michel VAUGON pour m'avoir fait découvrir la géométrie riemannienne.

Enfin, je ne saurais trouver des mots de remerciements assez chaleureux pour exprimer toute ma reconnaissance à ma famille pour son soutien constant, en particulier à ma mère.

**À ma mère,**

**À ma mère,**

**À ma mère,**

**À mon père,**

**À ma soeur et à mon frère,**

**À mes grands-parents et à ma grande-tante,**

**À ma famille,**

**Aux enfants de Gaza,**

# ÉQUATIONS HESSIENNES COMPLEXES

# SUR DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

# Table des matières

# INTRODUCTION

La résolution de l'équation de Calabi-Yau sur une variété kählérienne compacte de dimension $2m$, peut être vue comme l'extraction de la racine $m$-ième positive d'une forme volume prescrite, dans des classes de cohomologie fixées (par la donnée de la structure kählérienne). Elle se traduit par une équation de Monge-Ampère complexe de type elliptique, soluble globalement.
S. Donaldson et M. Gromov se sont intéressés à la possibilité d'étendre cette extraction de racine aux structures presque-kählériennes, où le problème peut encore être formulé. Mais, en présence de torsion, Ph. Delanoë [DEL96] a construit un contre-exemple global, en dimension (réelle) 4, à savoir une forme volume ne pouvant être l'image d'aucun potentiel qui soit elliptique pour l'EDP non-linéaire considérée.
Le projet initial de ma thèse était, après avoir étudié les résultats précédents, de chercher une variante non-obstruée du susdit problème sur les variétés presque-kählériennes compactes. Mais deux preprints sortis de l'école de Harvard consacrés à la même question ont été déposés sur le serveur arXiv fin Mars 2007 [TWY07], [WEI07]. Nous avons donc réorienté l'axe de mes recherches.

Dans cette thèse, on étudie des équations hessiennes complexes elliptiques totalement non linéaires traduisant un problème de prescription sur certaines variétés kählériennes compactes ; ces équations sont plus difficiles à résoudre que l'équation de Calabi-Yau. Il s'agit de la prescription, sur une variété kählérienne compacte connexe de dimension $2m$ et pour tout entier $1 < k < m$, de la $k$-ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres d'une 2-forme de type $(1-1)$ supposée $k$-positive et cohomologue à la forme de Kähler, relativement à cette forme de Kähler. On suppose (comme jadis, Th. Aubin pour $k = m$ [AUB70] p.408) que la variété est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, cette hypothèse étant requise seulement pour établir un pincement a priori de valeurs propres.

Les cas extrêmes sont résolus : en effet le cas $k = m$ correspond au Théorème de Calabi-Yau tel qu'obtenu dans la thèse d'Aubin [AUB70] sous l'hypothèse de courbure mentionnée ; par ailleurs, le cas $k = 1$ se résoud trivialement (équation linéaire en laplacien).

La faisabilité de ce projet était étayée par l'existence d'un travail antérieur concernant le problème de Dirichlet pour des équations "plates" analogues posées sur certains domaines bornés de $\mathbb{C}^n$ [VIN88], [LI04]. Du point de vue EDP, le cadre kählérien compact était tout à fait naturel pour tenter de généraliser le précédent travail ; toute la difficulté venait de la courbure, comme signalé auparavant.

Le résultat principale de cette thèse est le suivant :

**Théorème.0.1** ***(Equation $\sigma_k$)*** Soit $(M, J, g, \omega)$ une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geq 3$ à courbure bisectionnelle holomorphe positive ou nulle, et $2 \leq k \leq m-1$ un entier naturel fixé. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^\infty$ vérifiant $\int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m$, alors il existe une unique fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que :

1. $\int_M \varphi \omega^m = 0$
2. $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \frac{e^f}{\binom{m}{k}} \omega^m \quad (E_k)$

En outre la solution $\varphi$ est $k$-admissible.

Un problème analogue dans le cas euclidien a été traité dans la thèse de M. Hossein, étudiant de Ph. Delanoë [HOS09]. Une théorie des solutions faibles des équations dégénérées correspondantes, parallèle à celle de Bedford-Taylor pour l'équation de Monge-Ampère complexe, est abordée dans [BLO05].
Grâce à Julien Keller, que nous remercions, nous avons récemment pris connaissance d'un travail indépendant (mais incomplet) de [HOU08] visant au même résultat que le nôtre, avec une estimation de gradient différente et une estimation de valeurs propres similaire, mais sans preuve donnée pour l'estimée $C^2$.

Quelques mots sur le plan de la thèse. Nous commençons par détailler la preuve du théorème de Calabi-Yau, jusqu'à l'obtention de l'estimation uniforme du laplacien (désormais classique). A ce stade, et à la différence de la preuve classique, on établit une estimation $C^2$, et on conclut par la théorie d'Evans-Trudinger (chapitre I). Dans les chapitres suivants, on établit le principal résultat de cette thèse, énoncé plus haut. Au chapitre II, on reformule le problème en termes EDP et on prouve l'unicité. Ensuite nous mettons en place la méthode de continuité pour la preuve de l'existence d'une solution au chapitre III. Suit l'exposé de l'estimée a priori $C^0$ (chapitre IV), du pincement uniforme des valeurs propres et de l'estimée clé $C^2$ (étape ignorée dans [HOU08]) (chapitre V) puis de l'estimée $C^{2,\alpha}$ (chapitre VI, déduite par la théorie d'Evans-Trudinger) requise par la méthode. Enfin, une série de résultats auxiliaires et de preuves techniques sont rassemblés en Annexes.

Les résultats de cette thèse ont été annoncés dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris acceptée le 19 Novembre 2009 [JBI10].

# Chapitre I

# L’équation de Calabi-Yau

# I.1 Enoncé du théorème de Calabi-Yau et méthode de résolution

## I.1.1 Le théorème

Toutes les variétés considérées sont **connexes**.
Soit $(M,J)$ une variété complexe **compacte connexe** de dimension complexe $m \geq 2$, fixée. On **suppose** que $M$ admet des métriques kählériennes compatibles avec la structure complexe $J$ fixée au départ.

**DÉFINITIONI.1.1** (***première classe de Chern***) Si $(M,J,g,\omega)$ est une variété kählérienne et $\mathscr{R}$ sa forme de Ricci, la première classe de Chern de $M$, notée $C_1(M)$, est la classe de cohomologie de de Rham de la 2-forme réelle $\frac{\mathscr{R}}{2\pi}$ $(C_1(M) \in H^2_{dR}(M,\mathbb{R}))$. Elle ne dépend pas de la métrique kählérienne choisie.

Si $g$ est une métrique kählérienne sur $M$ et $\mathscr{R}$ la forme de Ricci associée, alors $\mathscr{R}$ est une forme de type $(1-1)$ fermée et $[\mathscr{R}] = 2\pi C_1(M) \in H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$. Il est naturel de se demander quelles sont les formes fermées de type $(1-1)$ qui peuvent être la forme de Ricci d'une certaine métrique kählérienne sur $M$. La conjecture de Calabi répond à cette question.

**THÉORÈMEI.1.1** (***Théorème de Calabi-Yau***) Soit $c$ une classe de cohomologie dans $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$ contenant au moins une forme de Kähler $J$-compatible (une telle classe de cohomologie est dite classe de kähler).
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des 2-formes de Kähler appartenant à la classe $c$, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des 2-formes $\mathscr{R}$ réelles fermées de type $(1-1)$ telles que $[\mathscr{R}] = 2\pi C_1(M)$.
L'application $\mathscr{C}al : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$, qui à $\omega$ associe $\mathscr{R}_\omega$ la forme de Ricci associée, est bijective.
Autrement dit pour toute 2-forme $\mathscr{R}$ réelle fermée de type $(1-1)$ appartenant à $2\pi C_1(M)$, il existe une unique forme de Kähler $\omega$ dans la classe de Kähler $c$ dont elle soit la forme de Ricci.

Cette conjecture a été posée par Calabi en 1954 et a été prouvée par Yau en 1977 dans son article [YAU78]. Entretemps Aubin avait fait des progrès significatifs autour de la preuve dans ses articles [AUB70], [AUB76] et [AUB78]. Pour prouver la conjecture, on commence par reformuler son énoncé en une équation aux dérivées partielles nonlinéaire elliptique en une fonction réelle $\varphi$. Et ce à l'aide du lemme $dd^c$ global suivant :

**LEMMEI.1.1** (***Lemme $dd^c$ global***) Soit $M$ une variété kählérienne compacte. Soit $\alpha$ une 2-forme réelle de type $(1-1)$ sur $M$. $\alpha$ est exacte si et seulement si il existe $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que $\alpha = i\partial\bar{\partial}\varphi = \frac{1}{2}dd^c\varphi$. Une telle fonction $\varphi$ est unique à une constante additive près.

**COROLLAIREI.1.1** Soit M est une variété kählérienne compacte.
Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux 2-formes fermées réelles de type $(1-1)$ dans la même classe de cohomologie i.e $[\alpha]=[\beta]\in H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$, alors il existe une fonction $f: M\to\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ unique à une constante additive près telle que $\beta=\alpha+i\partial\bar{\partial}f$ ce qui s'écrit localement $\beta_{a\bar{b}}=\alpha_{a\bar{b}}+i\partial_{a\bar{b}}f$.

On fixe $g$ une métrique kählérienne dont la forme de Kähler $\omega$ appartient à la classe $c$ : $[\omega]=c$. On note $\mathcal{R}_\omega$ sa forme de Ricci. Par définition de la première classe de Chern, $[\mathcal{R}_\omega]=2\pi C_1(M)$. Soit $\tilde{\mathcal{R}}\in\mathcal{F}$. $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{R}_\omega$ sont deux 2-formes réelles fermées de type $(1-1)$ et $[\tilde{\mathcal{R}}]=[\mathcal{R}_\omega]=2\pi C_1(M)$ donc par le lemme $dd^c$ global il existe $f: M\to\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ unique à une constante additive près telle que

$$\tilde{\mathcal{R}}=\mathcal{R}_\omega-i\partial\bar{\partial}f \tag{I.1.1}$$

Et on sait qu'on a même une équivalence : les 2-formes de $\mathcal{F}$ sont exactement les $\mathcal{R}_\omega-i\partial\bar{\partial}\psi$ avec $\psi\in C^\infty(M,\mathbb{R})$.
On effectue une première normalisation : on choisit $f$ telle que

$$\int_M e^f\omega^m=\int_M\omega^m \tag{N1}$$

On cherche une forme de Kähler $\tilde{\omega}$ telle que $\begin{cases}[\tilde{\omega}]=[\omega] & (1)\\ \mathcal{R}_{\tilde{\omega}}=\tilde{\mathcal{R}} & (2)\end{cases}$

Toujours par le lemme $dd^c$ global la condition (1) est équivalente à l'existence d'une fonction $\varphi: M\to\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ unique à une constante additive près telle que

$$\tilde{\omega}=\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi \tag{I.1.2}$$

**LEMMEI.1.2** La forme $\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi$ est de Kähler si et seulement si elle est définie positive. On dit alors que $\varphi$ est admissible pour la métrique $g$.

On effectue à présent une deuxième normalisation : On choisit $\varphi$ vérifiant

$$\int_M\varphi\omega^m=0 \tag{N2}$$

Ainsi, notre problème se ramène à chercher une fonction $\varphi\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, admissible pour $g$, d'intégrale nulle pour $g$, telle que (2) soit vérifiée. Or

$$\mathcal{R}_\omega=-i\partial\bar{\partial}Log\,det(g) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{\tilde{\omega}}=-i\partial\bar{\partial}Log\,det(\tilde{g}) \tag{I.1.3}$$

donc (2) s'écrit

$$-i\partial\bar{\partial}Log\,det(\tilde{g})=-i\partial\bar{\partial}Log\,det(g)-i\partial\bar{\partial}f \tag{I.1.4}$$

Les trois fonctions étant à valeurs réelles de classe $C^2$ sur $(M,J,g)$ kählérienne compacte, le lemme suivant s'applique :

**LEMMEI.1.3** Si $(M, J, g)$ est une variété kählérienne compacte, et $f : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $\partial\bar{\partial} f = 0$. Alors $f$ est constante.

<u>**Preuve**</u> : cf. Annexes. ■

De ce lemme on déduit que :

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow Log\, det(\tilde{g}) = Log\, det(g) + f + \mathscr{C} \quad \mathscr{C} \text{ constante réelle} \\
&\Leftrightarrow \frac{det(\tilde{g})}{det(g)} = e^{(f+\mathscr{C})} \quad \mathscr{C} \text{ constante réelle} \\
&\Leftrightarrow \tilde{\omega}^m = e^{(f+\mathscr{C})}\omega^m \quad \mathscr{C} \text{ constante réelle}
\end{aligned}$$

**LEMMEI.1.4** $\displaystyle\int_M \tilde{\omega}^m = \int_M \omega^m$

<u>**Preuve**</u> : Rappelons que $m \geq 2$. $[\tilde{\omega}] = [\omega]$ donc il existe une 1-forme réelle sur $M$ telle que $\tilde{\omega} = \omega + d\alpha$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^m = (\omega + d\alpha)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \omega^{m-k} \wedge (d\alpha)^k \quad (\Lambda^2 M \text{ est commutatif}) \\
&= \omega^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \omega^{m-k} \wedge (d\alpha)^{k-1} \wedge d\alpha
\end{aligned}$$

Par ailleurs si $\beta$ est une $p$-forme fermée alors $(-1)^p \beta \wedge d\alpha = d(\beta \wedge \alpha) - (d\beta) \wedge \alpha$ donc $\beta \wedge d\alpha = (-1)^p d(\beta \wedge \alpha)$ est exacte. Or pour $1 \leq k \leq m$, $\omega^{m-k} \wedge (d\alpha)^{k-1}$ est une $(m-1)$-forme fermée (car $\omega$ est fermée ) donc $\omega^{m-k} \wedge (d\alpha)^{k-1} \wedge d\alpha$ est exacte. Ainsi $[\tilde{\omega}^m] = [\omega^m]$ d'où le résultat par Stokes. ■

Par la première normalisation (N1), le lemme I.1.4 et (2) on déduit que $\displaystyle\int_M \omega^m = \int_M \tilde{\omega}^m = e^{\mathscr{C}} \int_M e^f \omega^m = e^{\mathscr{C}} \int_M \omega^m$ d'où $\mathscr{C} = 0$. Ainsi, sous la condition (1), la condition (2) est équivalente à l'équation

$$\tilde{\omega}^m = e^f \omega^m \tag{I.1.5}$$

On est donc ramené à chercher une fonction $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, admissible pour $g$, d'intégrale nulle pour $g$, vérifiant

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f \omega^m \tag{CY}$$

Cette équation est dite l'équation de Calabi-Yau.

**LEMMEI.1.5** Si $\varphi \in C^2(M)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\varphi$ est admissible

2. $\mathcal{M}(\varphi) := \dfrac{det(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)}{det(\omega)} > 0$

**Preuve** : Si $\varphi$ est admissible alors clairement $\mathcal{M}(\varphi) > 0$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{M}(\varphi) > 0$ et vérifions que $\varphi$ est admissible à savoir que $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est définie positive.
La fonction $\varphi$ est continue sur la variété compacte $M$ donc atteint son minimum en un point $m_0 \in M$, la matrice hessienne complexe de $\varphi$ au point $m_0$ à savoir $[\partial_{i\bar{j}}\varphi(m_0)]_{1\le i,j\le m}$ est donc positive. En outre, dans une carte $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée en $m_0$, on a $[\tilde{g}_{a\bar{b}}(m_0)]_{1\le a,b\le m} = diag(1+\partial_{1\bar{1}}\varphi(m_0),...,1+\partial_{m\bar{m}}\varphi(m_0))$. Donc du fait que $\partial_{i\bar{i}}\varphi(m_0) \ge 0$ pour tout $1 \le i \le m$, on déduit que $1+\partial_{i\bar{i}}\varphi(m_0) \ge 1 > 0$ pour tout $1 \le i \le m$, ce qui montre que $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi(m_0)$ est définie positive.
On note $\mathcal{V} := \left\{P \in M / \ \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi(P) \quad \text{est définie positive}\right\}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est non vide car contient le point $m_0$. En outre, $\mathcal{V}$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. Montrons que $\mathcal{V}$ est fermé : soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge vers $P \in M$. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $1 \le a \le m$, $\lambda_a(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P_i) > 0$ ($a$-ième valeur propre) donc par passage à la limite, on obtient $\lambda_a(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P) \ge 0$ pour tout $1 \le a \le m$. Or, on a par hypothèse $det(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P) = \lambda_1(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P) \times ... \times \lambda_m(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P) > 0$, par conséquent, $\lambda_a(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)(P) > 0$ pour tout $1 \le a \le m$, et donc $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi(P)$ est définie positive, ce qui prouve que $\mathcal{V}$ est fermé.
Finalement, on déduit par connexité de $M$ que $\mathcal{V} = M$, donc $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi(P)$ est définie positive pour tout $P \in M$, autrement dit la solution $\varphi$ est admissible. ■

On déduit de ce lemme que notre problème est ramené à chercher une fonction $\varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ d'intégrale nulle pour $g$ vérifiant (CY) : $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f \omega^m$.

**THÉORÈMEI.1.2 (*Equation de Calabi-Yau*)** Soit $(M,J)$ est une variété complexe compacte connexe de dimension complexe $m \ge 2$ qui admet des métriques kählériennes compatibles avec la structure complexe $J$ fixée au départ. Si $\omega$ est une forme de Kähler et $f : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que (N1) : $\displaystyle\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m$ alors il existe une unique fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que :

1. (N2) : $\displaystyle\int_M \varphi\omega^m = 0$
2. (CY) : $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f \omega^m$

En outre, la solution $\varphi$ est admissible.

Sous cette forme, la résolution de l'équation de Calabi-Yau peut être vue comme l'extraction de la racine $m$-ième "positive" d'une forme volume prescrite, dans des classes de cohomologie fixées. L'équation de Calabi-Yau s'écrit aussi

$$\mathcal{M}(\varphi) := \frac{det(\tilde{g})}{det(g)} = e^f \qquad \text{(CY)}$$

C'est une EDP non linéaire du second ordre elliptique (l'ellipticité de l'équation sera justifiée après le calcul du linéarisé). Il s'agit d'une équation de type Monge-Ampère complexe. La preuve de l'existence de solutions se fait par la méthode de continuité (voir la section : Mise en place de la méthode de continuité). On commence par prouver l'unicité.

### I.1.2 L'unicité

Ici, on expose l'argument de [YAU78], [Sém78]. Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux solutions de (CY) telles que $\omega_1 = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_1$ et $\omega_2 = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_2 = \omega_1 + i\partial\bar{\partial}(\varphi_2 - \varphi_1)$ sont définies positives et $\int_M \varphi_1\omega^m = \int_M \varphi_2\omega^m = 0$. On note $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. On a :

$$det(g_2) = e^f det(g) = det(g_1) \tag{I.1.6}$$

On en déduit le lemme suivant :

**Lemme I.1.6** $\triangle_{g_1}\varphi \leq 0$ (ici $\triangle_{g_1}$ désigne le laplacien réel pour la métrique $g_1$).

**Preuve** : Soit $x \in M$. On se place sur une carte $g^1$-unitaire en $x$, $g^2$-diagonale en $x$ i.e une carte telle que $g^1_{a\bar{b}}(x) = \delta_{ab}$ et $[g^2_{a\bar{b}}(x)]_{1\leq a,b\leq m}$ est diagonale. Ainsi, vu que $\omega_2 = \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\varphi$ on déduit que la matrice $[\partial_{a\bar{b}}\varphi(x)]_{1\leq a,b\leq m}$ est diagonale. On note $\partial_{a\bar{a}}\varphi(x) = \lambda_a$.
En $x$, l'égalité (I.1.6) : $det(g_2) = det(g_1)$ s'écrit : $\prod_{a=1}^{m}(1+\lambda_a) = 1$. Or pour tout $1 \leq a \leq m$, $1+\lambda_a > 0$ car $[g^2_{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m} = [\delta_{ab}(1+\lambda_a)]_{1\leq a,b\leq m}$ est définie positive. Donc l'inégalité arithmético-géométrique s'applique (cf. Annexes) et on obtient :
$1 = (\prod_{a=1}^{m}(1+\lambda_a))^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m}(1+\lambda_a) = 1 + \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m}\lambda_a$ d'où $\sum_{a=1}^{m}\lambda_a \geq 0$. Donc en $x$,

$$\triangle_{g_1}\varphi = -2g_1^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi = -2\sum_a \lambda_a \leq 0 \tag{I.1.7}$$

■

Par ailleurs, $M$ est compacte et $\varphi$ est $C^\infty$ sur $M$, il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\psi = C + \varphi \geq 0$ partout sur $M$. En outre, par le Théorème d'intégration par parties sur une variété riemanienne compacte (cf. [HEB97] page 163), on a $\int_M |d\psi|^2_{g_1} v_{g_1} = \int_M \psi\triangle_{g_1}\psi v_{g_1}$.
Or $\triangle_{g_1}\psi = \triangle_{g_1}\varphi \leq 0$ par le lemme I.1.6 et $\psi \geq 0$ on déduit donc que $\int_M |d\psi|^2_{g_1} v_{g_1} \leq 0$. Ainsi, $d\psi = 0$ sur $M$ or $M$ est connexe donc $\psi$ est constante sur $M$, par conséquent $\varphi$ est constante sur $M$. Et comme $\int_M \varphi v_g = 0$, il en résulte que $\varphi \equiv 0$ sur $M$, ce qui démontre l'unicité de la solution du théorème I.1.2 (Equation de Calabi-Yau).

### I.1.3 Mise en place de la méthode de continuité

On considère la famille à un paramètre d'équations :

$$(CY_t) \qquad \mathcal{M}(\varphi) := \frac{det(\tilde{g})}{det(g)} = e^{tf} \underbrace{\left(\frac{\int_M v_g}{\int_M e^{tf} v_g}\right)}_{=:A_t} \qquad t \in [0,1]$$

Par l'unicité juste démontrée, pour chaque $t \in [0,1]$, il existe au plus une solution de $(CY_t)$ vérifiant (N2).
L'équation de Calabi-Yau (CY) : $\frac{det(\tilde{g})}{det(g)} = e^f$ correspond à $t = 1$ vu la première normalisation (N1). Et l'équation $(CY_0)$ : $\frac{det(\tilde{g})}{det(g)} = 1$ admet la solution triviale $\varphi \equiv 0$ qui est admissible et d'intégrale nulle.

On FIXE un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 5$ et un réel $0 < \alpha < 1$. On considère

$$\text{(I.1.8)} \qquad \mathcal{A}_{r,\alpha} := \left\{ t \in [0,1] / (CY_t) \text{admet une solution} \varphi \in C^{r,\alpha}(M) \int_M \varphi\omega^m = 0 \right\}$$

Le but est de montrer que $1 \in \mathcal{A}_{r,\alpha}$. (cf. Annexes pour la définition de l'espace $C^{r,\alpha}(M)$).

### I.1.4 $\mathcal{A}_{r,\alpha}$ ouvert de $[0,1]$

Ceci résulte du Théorème d'inversion locale et du fait qu'on sait résoudre un certain problème linéaire. On note,

$$\text{(I.1.9)} \qquad E_{r,\alpha} := \left\{ \varphi \in C^{r,\alpha}(M) \int_M \varphi\omega^m = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_{r,\alpha} := \left\{ \varphi \in E_{r,\alpha} \text{admissible pour g} \right\}$$

$E_{r,\alpha}$ est un espace vectoriel et $\Omega_{r,\alpha}$ est un ouvert de $E_{r,\alpha}$.

**LEMMEI.1.7** L'opérateur $\mathcal{M} : \Omega_{r,\alpha} \to C^{r-2,\alpha}(M), \varphi \longmapsto \mathcal{M}(\varphi) = \frac{det(\tilde{g})}{det(g)}$, est différentiable et sa différentielle en un point $\varphi \in \Omega_{r,\alpha}$, $d\mathcal{M}_\varphi \in \mathcal{L}\left(E_{r,\alpha}, C^{r-2,\alpha}(M)\right)$, vaut :

$$d\mathcal{M}_\varphi = -\mathcal{M}(\varphi)\triangle_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}}$$

$\triangle_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}}$ désigne ici le Laplacien complexe correspondant à la métrique $\tilde{g}_{a\bar{b}} = g_{a\bar{b}} + \partial_{a\bar{b}}\varphi$.

**Preuve** : Soit $\varphi \in \Omega_{r,\alpha}$ et $\psi \in E_{r,\alpha}$.

$$\begin{aligned}
d\mathcal{M}_\varphi.\psi &= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{M}(\varphi+t\psi)\Big)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{det(\tilde{g}_{\varphi+t\psi})}{det(g)}\Big)_{|t=0} \\
&= \frac{1}{det(g)} \times \frac{d}{dt}\Big(det([g_{a\bar{b}}+\partial_{a\bar{b}}\varphi+t\partial_{a\bar{b}}\psi]_{1\leq a,b\leq m})\Big)_{|t=0} \\
&= \frac{1}{det(g)} \times \sum_{a,b=1}^{m} \frac{\partial(det)}{\partial B_{a\bar{b}}}\Big([\tilde{g}_{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m}\Big) \times \frac{d}{dt}\Big(\tilde{g}_{a\bar{b}}+t\partial_{a\bar{b}}\psi\Big)_{|t=0} \\
&= \frac{1}{det(g)} \times \sum_{a,b=1}^{m} \frac{\partial(det)}{\partial B_{a\bar{b}}}\Big([\tilde{g}_{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m}\Big) \times \partial_{a\bar{b}}\psi \\
&= \frac{1}{det(g)} \times \sum_{a,b=1}^{m} Cof(\tilde{g}_{a\bar{b}}) \times \partial_{a\bar{b}}\psi
\end{aligned} \tag{I.1.10}$$

On note $Com(\tilde{g})$ la comatrice de la matrice $[\tilde{g}_{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m}$ (c'est la matrice des cofacteurs). On sait que : ${}^{t}Com(\tilde{g}) = det(\tilde{g}) \times \tilde{g}^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{M}_\varphi.\psi &= \frac{1}{det(g)} \times tr\Big({}^{t}Com(\tilde{g}) \times [\partial_{a\bar{b}}\psi]_{1\leq a,b\leq m}\Big) \\
&= \frac{det(\tilde{g})}{det(g)} \times tr\Big(\tilde{g}^{-1} \times [\partial_{a\bar{b}}\psi]_{1\leq a,b\leq m}\Big) \\
&= \mathcal{M}(\varphi) \times tr\Big({}^{t}[\tilde{g}^{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m} \times [\partial_{a\bar{b}}\psi]_{1\leq a,b\leq m}\Big) \\
&= \mathcal{M}(\varphi) \times \sum_{a,b=1}^{m} \tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{a\bar{b}}\psi \\
&= -\mathcal{M}(\varphi)\,\Delta_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}}\psi
\end{aligned} \tag{I.1.11}$$

ce qui achève la preuve. ■

On déduit immédiatement du lemme précédent I.1.7 le corollaire suivant :

**COROLLAIRE I.1.2** L'opérateur non linéaire $\mathcal{M}$ est elliptique sur $\Omega_{r,\alpha}$.

**LEMME I.1.8** L'application

$$F : \Omega_{r,\alpha} \to E_{r-2,\alpha},\ \varphi \longmapsto F(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi) - 1 = \frac{det(\tilde{g})}{det(g)} - 1$$

est bien définie différentiable de différentielle $dF_\varphi = -\mathcal{M}(\varphi)\Delta_{\tilde{g}}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{r,\alpha}, E_{r-2,\alpha})$.

Soit $t_0 \in \mathscr{A}_{r,\alpha}$. Soit $\varphi_0 \in \Omega_{r,\alpha}$ la solution de $(CY_{t_0}) : \mathscr{M}(\varphi_0) = e^{t_0 f} A_{t_0}$ correspondante. On écrit cette équation différemment :

$$(CY_{t_0}) \qquad F(\varphi_0) = e^{t_0 f} A_{t_0} - 1$$

**LEMME I.1.9** $dF_{\varphi_0} : E_{r,\alpha} \longrightarrow E_{r-2,\alpha}$ est un isomorphisme.

**Preuve** : $dF_{\varphi_0} = -\mathscr{M}(\varphi_0) \triangle^{\mathbb{C}}_{\tilde{g}}$ où $\triangle^{\mathbb{C}}_{\tilde{g}}$ désigne le Laplacien complexe correspondant à la métrique $\tilde{g}_{a\bar{b}} = g_{a\bar{b}} + \partial_{a\bar{b}}\varphi_0$. On note :

$$\tilde{E}_{r-2,\alpha} := \left\{ \varphi \in C^{r-2,\alpha}(M) \int_M \varphi \tilde{\omega}^m = 0 \right\} \tag{I.1.12}$$

$\triangle^{\mathbb{C}}_{\tilde{g}} : E_{r,\alpha} \to \tilde{E}_{r-2,\alpha}$ est un isomorphisme : en effet par la théorie de Schauder on sait que si $\psi \in C^{r-2,\alpha}(M)$ avec $\int_M \psi v_{\tilde{g}} = 0$ alors il existe une unique fonction $u \in C^{r,\alpha}(M)$ d'intégrale nulle ($\int_M u v_g = 0$ ce qui fixe la constante) dépendant continûment de $\psi$ telle que $\triangle^{\mathbb{C}}_{\tilde{g}} u = \psi$. En outre, l'application $\mu : \tilde{E}_{r-2,\alpha} \to E_{r-2,\alpha}, \psi \mapsto \mathscr{M}(\varphi_0)\psi$ est clairement un isomorphisme. Ainsi $dF_{\varphi_0} = \mu \circ \triangle^{\mathbb{C}}_{\tilde{g}}$ est un isomorphisme. ■

On déduit donc par le Théorème d'Inversion Locale qu'il existe $U$ un ouvert de $\Omega_{r,\alpha}$ contenant $\varphi_0$ et $V$ un ouvert de $E_{r-2,\alpha}$ contenant $F(\varphi_0)$ tels que $F : U \to V$ est un difféomorphisme. On considère à présent un $t \in [0,1]$ très proche de $t_0$ et on montre qu'il reste dans $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ : Si $| t - t_0 | \leq \varepsilon$ est suffisament petit alors $\|(e^{tf} A_t - 1) - (e^{t_0 f} A_{t_0} - 1)\|_{C^{r-2,\alpha}(M)}$ est assez petit de sorte que $e^{tf} A_t - 1 \in V$ donc il existe $\varphi \in U \subset \Omega_{r,\alpha}$ telle que $F(\varphi) = e^{tf} A_t - 1$ donc il existe $\varphi \in C^{r,\alpha}(M)$ d'intégrale nulle pour $g$ solution de $(CY_t)$. Ce qui prouve que $t \in \mathscr{A}_{r,\alpha}$. On conclut donc que $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ est un ouvert de $[0,1]$.

### I.1.5 Schéma de la preuve pour $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ fermé de $[0,1]$

Cette partie est basée sur ce qu'on appelle des estimées a priori. Ce sont des estimées qui disent à l'avance qu'une solution doit satisfaire certaines bornes. Trouver ces estimées est la partie la plus difficile de la preuve. La plus grande contribution de Yau fut de trouver l'estimée $C^0$, Aubin ayant obtenu les autres [AUB70], [AUB76], [AUB78]. On rappelle que :

$$\mathscr{A}_{r,\alpha} := \left\{ t \in [0,1] / (CY_t) \text{admet une solution} \varphi \in C^{r,\alpha}(M) \int_M \varphi \omega^m = 0 \right\} \tag{I.1.13}$$

Soit $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ qui converge vers $\tau \in [0,1]$. Soit $(\varphi_{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions correspondante : $\varphi_{t_i}$ est $C^{r,\alpha}$ sur $M$, admissible d'intégrale nulle, solution de :

$$(CY_{t_i}) \qquad \mathscr{M}(\varphi_{t_i}) = e^{t_i f} A_{t_i}$$

Notre but consiste à montrer que $\tau \in \mathscr{A}_{r,\alpha}$.

Voici le schéma de la démonstration :

1. Réduction à une estimée $C^{2,\beta}(M)$ : Si $\{\varphi_{t_i}, i \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans un $C^{2,\beta}(M)$ avec $0<\beta<1$, l'inclusion $C^{2,\beta}(M) \subset C^2(M,\mathbb{R})$ étant compacte, on déduit que quitte à extraire $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2(M,\mathbb{R})$ vers $\varphi_\tau \in C^2(M,\mathbb{R})$. On montre par passage à la limite que $\varphi_\tau$ est solution de $(CY_\tau)$ (elle est donc admissible par le lemme I.1.5), d'intégrale nulle pour $g$. On montre finalement par un théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 que $\varphi_\tau \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (cf. [BES87] p. 467). Ce qui nous permet de déduire que $\tau \in \mathscr{A}_{r,\alpha}$. Ce qui achève la preuve du théorème I.1.2 (Equation de Calabi-Yau).

2. On montre que $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^0(M,\mathbb{R})$ : on démontre tout d'abord un lemme de positivité I.2.1 pour l'équation $(CY_t)$ (cf. [DEL96] p. 843) ; on déduit de ce lemme une inégalité fondamentale I.2.1 (Proposition 7.18 de [AUB98] p. 262) ; la suite de la preuve se poursuit par la méthode d'itération à la Moser.

3. On établit l'estimée a priori $C^2$.

4. L'ellipticité uniforme étant acquise à l'étape précédente, on obtient l'estimée $C^{2,\beta}(M)$ recherchée par la théorie d'Evans et Trudinger (cf. Annexes théorème VII.6.1).

### I.1.6 Réduction de la preuve à l'estimée a priori $C^{2,\beta}$

Supposons que $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{2,\beta}(M)$ avec $0<\beta<1$, et montrons qu'alors le théorème I.1.2 (Equation de Calabi-Yau) est démontré.
L'inclusion $C^{2,\beta}(M) \subset C^2(M,\mathbb{R})$ étant compacte, on déduit que quitte à extraire on peut supposer que $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2(M,\mathbb{R})$ vers $\varphi_\tau \in C^2(M,\mathbb{R})$. On commence par montrer par passage à la limite que $\varphi_\tau$ est solution de $(CY_\tau)$. La quantité $\mathscr{M}(\varphi)$ étant intrinsèque, il suffit d'effectuer le passage à la limite aux centres de cartes $g$-unitaires. Soit $P \in M$ fixé, et soit $(U,\phi)$ une carte $g$-unitaire en $P$. Dans cette carte, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ :

$$(CY_{t_i}) \qquad \mathscr{M}(\varphi_{t_i}) = \frac{det(g_{a\bar{b}}(P) + \partial_{a\bar{b}}\varphi_{t_i}(P))}{det(g_{a\bar{b}}(P))} = e^{t_i f(P)} \underbrace{\left(\frac{\int_M v_g}{\int_M e^{t_i f} v_g}\right)}_{=:A_{t_i}}$$

La fonction $e^{tf(P)}A_t$ est clairement continue en $t$, donc le second membre $e^{t_i f(P)}A_{t_i}$ converge vers $e^{\tau f(P)}A_\tau$ quand $i$ tend vers $+\infty$ . Pour montrer que $\mathscr{M}(\varphi_{t_i})$ converge vers $\mathscr{M}(\varphi_\tau)$ on montre que $\partial_{a\bar{b}}\varphi_{t_i}(P)$ tend vers $\partial_{a\bar{b}}\varphi_\tau(P)$. Si $v \in C^2(M,\mathbb{R})$, en regardant $\nabla^2 v$ comme tenseur complexe on a en $P$ dans la carte $(U,\phi)$ :

$$|\nabla^2 v(P)|_g^2 = 2 g^{a\bar{c}} g^{d\bar{b}} \left(\nabla_{a\bar{b}} v \, \nabla_{\bar{c}d} v + \nabla_{ad} v \, \nabla_{\bar{c}\bar{b}} v\right)(P) = 2\sum_{a,b=1}^{m} \left(|\partial_{a\bar{b}} v(P)|^2 + |\nabla_{ab} v(P)|^2\right) \tag{I.1.14}$$

donc $|\partial_{a\bar b} v(P)| \leq |\nabla^2 v(P)|_g$. Ainsi, dans la carte $(U,\phi)$ :

$$|\partial_{a\bar b}(\varphi_{t_i}-\varphi_\tau)(P)| \leq |\nabla^2(\varphi_{t_i}-\varphi_\tau)(P)|_g \leq \sum_{j=0}^{2} \sup_M |\nabla^j(\varphi_{t_i}-\varphi_\tau)|_g = \|\varphi_{t_i}-\varphi_\tau\|_{C^2(M,\mathbb{R})} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

(cf. Annexes pour la définition des normes $C^r$ sur $M$)

d'où $\partial_{a\bar b}\varphi_{t_i}(P) \xrightarrow[i\to+\infty]{} \partial_{a\bar b}\varphi_\tau(P)$, on déduit donc par passage à la limite dans $(CY_{t_i})$ que :

$$(CY_\tau) \qquad \mathcal{M}(\varphi_\tau) = \frac{det(g_{a\bar b}(P)+\partial_{a\bar b}\varphi_\tau(P))}{det(g_{a\bar b}(P))} = e^{\tau f(P)} A_\tau$$

ce qui prouve que $\varphi_\tau$ est solution de $(CY_\tau)$.
Vérifions que $\varphi_\tau$ est d'intégrale nulle pour $g$. La suite de fonctions $(\varphi_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_\tau$ dans $C^2(M,\mathbb{R})$, donc en particulier elle converge uniformément vers $\varphi_\tau$ sur $M$, on en déduit donc que $\int_M \varphi_{t_i} v_g \xrightarrow[i\to+\infty]{} \int_M \varphi_\tau v_g$. Or pour tout $i\in\mathbb{N}$, $\int_M \varphi_{t_i} v_g = 0$, ce qui montre que $\int_M \varphi_\tau v_g = 0$.

Montrons finalement par un théorème de régularité que $\varphi_\tau$ est en fait dans $C^\infty(M,\mathbb{R})$. On utilise le théorème de régularité suivant (cf. [BES87] page 467) :

**Théorème I.1.3** ***(Régularité nonlinéaire)*** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $F(x,D^p v)=0$ où $x\in\Omega$ une équation nonlinéaire d'ordre $p$ ($p$ entier $\geq 1$). Si la fonction $F(x,r)$ est de classe $C^\infty$ en toutes ses variables pour $x\in\Omega$ et pour tout $r$, et si $v\in C^p(\Omega,\mathbb{R})$ est une solution elliptique de l'équation $F(x,D^p v)=0$, alors $v\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Montrer que $\varphi_\tau\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ revient à montrer que $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}\in C^\infty(\phi(U),\mathbb{R})$ pour toute carte $(U,\phi)$ de $M$. Nous allons montrer cela en vérifiant sur $U$ les conditions d'applicabilité du théorème précédent. Soit $(U,\phi)$ une carte holomorphe de $M$ fixée. L'équation $(CY_\tau)$ s'écrit sur l'ouvert $\phi(U)\subset\mathbb{R}^{2m}$ comme suit :
$(CY_\tau)$

$$F\left(x,[D_{ij}(\varphi_\tau\circ\phi^{-1})(x)]_{1\leq i,j\leq 2m}\right) = \frac{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)+\partial_{z_a\overline{z_b}}(\varphi_\tau\circ\phi^{-1})(x)\right]}{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)\right]} - A_\tau e^{\tau f\circ\phi^{-1}(x)} = 0$$

Vu que $\partial_{z_a\overline{z_b}} = \frac{1}{4}\left(D_{ab}+D_{(a+m)(b+m)}+iD_{a(b+m)}-iD_{(a+m)b}\right)$ on déduit que la fonction $F(x,r)$ s'écrit :
(I.1.15)

$$F(x,r) = \frac{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)+\frac{1}{4}(r_{ab}+r_{(a+m)(b+m)}+ir_{a(b+m)}-ir_{(a+m)b})\right]}{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)\right]} - A_\tau e^{\tau f\circ\phi^{-1}(x)}$$

La fonction $F(x,r)$ est clairement $C^\infty$ en toutes ses variables.
Par ailleurs, la fonction $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}\in C^2(\phi(U),\mathbb{R})$ et est solution elliptique de l'équation nonlinéaire

du second ordre $F(x,D^2v)=0$. On sait bien que cette solution est elliptique puisque $\mathcal{M}$ l'est en $\varphi_\tau$ et que l'ellipticité est conservée par changement de carte, mais on effectue ici la vérification pour notre solution (on dit aussi que l'opérateur nonlinéaire $F(x,D^2v)$ est elliptique pour la fonction $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$)(cf. [BES87] pages 462-463). Ceci consiste à montrer que le linéarisé en $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$ de l'opérateur nonlinéaire $F(x,D^2v)$ est elliptique sur l'ouvert $\phi(U)$. Le linéarisé en $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$ de $F(x,D^2v)$ est l'opérateur linéaire :

$$\mathscr{P}v=\frac{d}{dt}F\Big(x,D^2(\varphi_\tau\circ\phi^{-1}+tv)\Big)_{|_{t=0}}\qquad v\in C^2(\phi(U),\mathbb{R}) \tag{I.1.16}$$

Ainsi $\mathscr{P}v=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)+\partial_{z_a\overline{z_b}}(\varphi_\tau\circ\phi^{-1}+tv)(x)\right]}{det\left[g_{a\bar b}\circ\phi^{-1}(x)\right]}\right)_{|_{t=0}}$. Le même calcul que dans la preuve du lemme I.1.8 montre que :

$$\mathscr{P}v=-\mathcal{M}(\varphi_\tau)(\phi^{-1}(x))\times\Delta^{\mathbb{C}}_{\varphi_\tau}(v\circ\phi)(\phi^{-1}(x))\quad x\in\phi(U) \tag{I.1.17}$$

or $\varphi_\tau$ est solution de $(CY_\tau)$ donc $\mathcal{M}(\varphi_\tau)(\phi^{-1}(x))=A_\tau e^{\tau f\circ\phi^{-1}(x)}$, et en particulier, $\mathcal{M}(\varphi_\tau)>0$ donc par le lemme I.1.5 on déduit que $\varphi_\tau$ est admissible donc que $\tilde g_{\varphi_\tau}$ est une métrique (cf. lemme I.1.2). Ainsi,

$$\mathscr{P}v=A_\tau e^{\tau f\circ\phi^{-1}(x)}\times\sum_{a,b=1}^{m}\tilde g^{a\bar b}_{\varphi_\tau}\big(\phi^{-1}(x)\big)\partial_{z_a\overline{z_b}}v(x) \tag{I.1.18}$$

et la matrice $\left[\tilde g^{a\bar b}_{\varphi_\tau}(\phi^{-1}(x)\right]_{1\le a,b\le m}$ est définie positive pour tout $x\in\phi(U)$. Donc le linéarisé $P$ est elliptique sur $\phi(U)$. Le théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 s'applique donc et montre que $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}\in C^\infty(\phi(U),\mathbb{R})$. Ceci vaut pour toute carte $(U,\phi)$, on déduit donc que :

$$\varphi_\tau\in C^\infty(M,\mathbb{R}) \tag{I.1.19}$$

Ainsi $\tau\in\mathscr{A}_{r,\alpha}$, ce qui achève la preuve du fait que $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ est un fermé de $[0,1]$. On conclut ensuite par connexité de $[0,1]$ ; l'ensemble non vide $\mathscr{A}_{r,\alpha}$ est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$ donc :

$$\mathscr{A}_{r,\alpha}=[0,1] \tag{I.1.20}$$

En particulier, $1\in\mathscr{A}_{r,\alpha}$ ce qui veut dire que l'équation de Calabi-Yau (CY) admet une solution $\varphi\in C^{r,\alpha}(M,\mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\int_M\varphi\omega^m=0$. Comme précédemment pour $\varphi_\tau$, l'application du théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 montre que $\varphi\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, ce qui achève la preuve du théorème I.1.2 (Equation de Calabi-Yau) donc celle du théorème I.1.1 (Théorème de Calabi-Yau).

## I.2 Estimée $C^0$

Nous suivons ici la méthode de [AUB78] et [AUB98].

### I.2.1 Lemme de positivité

On commence par prouver un lemme technique qui nous servira à établir par la suite l'inégalité fondamentale de la proposition I.2.1 sur laquelle repose l'estimée $C^0$.

**LEMME I.2.1 (*Lemme de Positivité*)** Si $\alpha$ est une 1-forme réelle sur $M$ et $k \in \{1,\dots,m-1\}$ alors la fonction $f : M \to \mathbb{R}$ définie par $f\omega^m = {}^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^{m-1-k}\wedge\tilde{\omega}^k$ est positive ou nulle.

**Preuve** : Soit $x \in M$. On se place en $x$, dans une carte $g$-unitaire en $x$ (i.e telle que la matrice $[g_{a\bar{b}}(x)]_{1\le a,b\le m} = I$) vérifiant :

(I.2.1)

$$[\tilde{g}_{a\bar{b}}(x)]_{1\le a,b\le m} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \star \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_{m-1} & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}, d_i \ge 0\, \forall i \in \{1,\dots,m-1\} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{|\alpha|_g} = \frac{dz^m + dz^{\bar{m}}}{\sqrt{2}} \text{ en } x$$

L'existence d'une telle carte est prouvée en Annexe (cf. Annexes, lemme VII.2.4). En $x$, on a :

$$\begin{aligned} {}^tJ\alpha\wedge\alpha &= \frac{|\alpha|_g^2}{2}({}^tJdz^m + {}^tJdz^{\bar{m}})\wedge(dz^m + dz^{\bar{m}}) = \frac{|\alpha|_g^2}{2}(idz^m - idz^{\bar{m}})\wedge(dz^m + dz^{\bar{m}}) \\ &= \frac{|\alpha|_g^2}{2}(idz^m\wedge dz^{\bar{m}} - idz^{\bar{m}}\wedge dz^m) \\ &= i|\alpha|_g^2\, dz^m\wedge dz^{\bar{m}} \qquad \text{(I.2.2)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, en $x$ on a $\omega = idz^a\wedge dz^{\bar{a}}$. On pose $q = m-1-k$, ainsi toujours en $x$ :

$${}^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^q\wedge\tilde{\omega}^k = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_q\in\{1,\cdots,m-1\} \\ 2\text{ à }2\neq}} i^{q+1}|\alpha|_g^2\, (dz^m\wedge dz^{\bar{m}})\wedge(dz^{a_1}\wedge dz^{\bar{a}_1})\wedge\dots\wedge(dz^{a_q}\wedge dz^{\bar{a}_q})\wedge\tilde{\omega}^k$$

Or $\tilde{\omega}^k$ modulo $(a_1,\dots,a_q,m)$ vaut :

$$\tilde{\omega}^k\, mod(a_1,\dots,a_q,m) = \sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\in\{1,\cdots,m-1\}\setminus\{a_1,\dots,a_q\} \\ 2\text{ à }2\neq}} i^k d_{b_1}\cdots d_{b_k}(dz^{b_1}\wedge dz^{\bar{b}_1})\wedge\dots\wedge(dz^{b_k}\wedge dz^{\bar{b}_k})$$

d'où
$${}^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^q\wedge\tilde{\omega}^k = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_q\in\{1,\cdots,m-1\}2\text{ à }2\neq \\ b_1,\dots,b_k\in\{1,\cdots,m-1\}\setminus\{a_1,\dots,a_q\}2\text{ à }2\neq}} i^{q+1+k}|\alpha|_g^2\, d_{b_1}\cdots d_{b_k}$$
$$(dz^m\wedge dz^{\bar{m}})\wedge(dz^{a_1}\wedge dz^{\bar{a}_1})\wedge\dots\wedge(dz^{a_q}\wedge dz^{\bar{a}_q})\wedge(dz^{b_1}\wedge dz^{\bar{b}_1})\wedge\dots\wedge(dz^{b_k}\wedge dz^{\bar{b}_k})$$

Or $a_1,...,a_q,b_1,...,b_k$ sont $m-1$ entiers 2 à 2 distincts de $\{1,\cdots,m-1\}$ et les 2-formes commutent donc :

$$^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^q\wedge\tilde{\omega}^k=\Bigg(\sum_{\substack{a_1,...,a_q\in\{1,\cdots,m-1\}2\,\text{à}\,2\neq\\ b_1,...,b_k\in\{1,\cdots,m-1\}\setminus\{a_1,...,a_q\}2\,\text{à}\,2\neq}} d_{b_1}\cdots d_{b_k}\Bigg)\mid\alpha\mid_g^2\, i^m dz^1\wedge dz^{\bar{1}}\wedge...\wedge dz^m\wedge dz^{\bar{m}}$$

$$=(m-1-k)!k!\sigma_k(d_1,...,d_{m-1})\mid\alpha\mid_g^2\quad i^m dz^1\wedge dz^{\bar{1}}\wedge...\wedge dz^m\wedge dz^{\bar{m}}\tag{I.2.3}$$

Par ailleurs, $\dfrac{\omega^m}{m!}=i^m det(g_{a\bar{b}})dz^1\wedge dz^{\bar{1}}\wedge...\wedge dz^m\wedge dz^{\bar{m}}=i^m dz^1\wedge dz^{\bar{1}}\wedge...\wedge dz^m\wedge dz^{\bar{m}}$, ce qui permet de déduire que :

$$^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^q\wedge\tilde{\omega}^k=\underbrace{\frac{(m-1-k)!k!}{m!}\sigma_k(d_1,...,d_{m-1})\mid\alpha\mid_g^2}_{:=f\geq 0}\omega^m\tag{I.2.4}$$

et achève la preuve du lemme de positivité. ■

### I.2.2 L'inégalité fondamentale

L'estimée a priori $C^0$ repose sur l'inégalité fondamentale suivante :

**PROPOSITIONI.2.1** Si $h(t)$ est une fonction de classe $C^1$ croissante sur $\mathbb{R}$, alors toute fonction $\varphi$ de classe $C^2$ admissible vérifie :

$$\int_M\Big[1-\mathcal{M}(\varphi)\Big]h(\varphi)v_g\geq\frac{1}{2m}\int_M h'(\varphi)\mid\nabla\varphi\mid_g^2\; v_g$$

<u>**Preuve**</u> *:* Vu que l'élément de volume vaut $v_g=\dfrac{\omega^m}{m!}$, on déduit que :

$$\int_M\Big[1-\mathcal{M}(\varphi)\Big]h(\varphi)v_g=\frac{1}{m!}\int_M h(\varphi)\big(\omega^m-\tilde{\omega}^m\big)\tag{I.2.5}$$

Par ailleurs, par commutativité de $\Lambda^2M$ on a :
$\tilde{\omega}^m-\omega^m=(\tilde{\omega}-\omega)\wedge\underbrace{(\omega^{m-1}+\omega^{m-2}\wedge\tilde{\omega}+...+\omega\wedge\tilde{\omega}^{m-2}+\tilde{\omega}^{m-1})}_{=:\Omega}$, ainsi $\tilde{\omega}^m-\omega^m=i\partial\bar{\partial}\varphi\wedge\Omega$, d'où :

$$\int_M\Big[1-\mathcal{M}(\varphi)\Big]h(\varphi)v_g=-\frac{1}{m!}\int_M h(\varphi)i\partial\bar{\partial}\varphi\wedge\Omega=-\frac{1}{2m!}\int_M dd^c\varphi\wedge\big(h(\varphi)\Omega\big)\tag{I.2.6}$$

Or $d\Big(d^c\varphi\wedge h(\varphi)\Omega\Big)=dd^c\varphi\wedge h(\varphi)\Omega+(-1)^1d^c\varphi\wedge d\Big(h(\varphi)\Omega\Big)$, et
$d\Big(h(\varphi)\Omega\Big)=h'(\varphi)d\varphi\wedge\Omega+(-1)^0h(\varphi)d\Omega$, mais $d\Omega=0$ car les 2-formes $\omega$ et $\tilde{\omega}$ dont fermées,

par conséquent $dd^c\varphi\wedge h(\varphi)\Omega = d^c\varphi\wedge h'(\varphi)d\varphi\wedge\Omega + d(qqchose)$. En outre, le théorème de Stokes assure que $\int_M d(qqchose)=0$, ce qui entraîne :

$$\int_M \left[1-\mathscr{M}(\varphi)\right]h(\varphi)v_g = -\frac{1}{2m!}\int_M h'(\varphi)d^c\varphi\wedge d\varphi\wedge\Omega$$

$$= \frac{1}{2m!}\Bigg(\underbrace{\int_M h'(\varphi)(-d^c\varphi)\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1}}_{T_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\int_M h'(\varphi)(-d^c\varphi)\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1-k}\wedge\tilde{\omega}^k}_{T_2}\Bigg) \tag{I.2.7}$$

Dans ce qui suit, on établit en utilisant le lemme de positivité I.2.1 que la quantité $T_2$ satisfait $T_2\geq 0$, et on montre que $T_1=(m-1)!\int_M h'(\varphi)\,|\nabla\varphi|_g^2\,v_g$.
En effet, le lemme de positivité I.2.1 appliqué à la 1-forme réelle $d\varphi$ affirme que la fonction $f: M\to\mathbb{R}$ définie par $f\omega^m = {}^tJd\varphi\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1-k}\wedge\tilde{\omega}^k$ est positive ou nulle. Or ${}^tJd\varphi = -d^c\varphi$ et $h$ est croissante, ce qui entraîne que $T_2\geq 0$.
A présent, calculons la quantité $T_1$. Soit $x\in M$, on se place en une carte $g$-unitaire en $x$ vérifiant $\frac{d\varphi}{|d\varphi|_g} = \frac{dz^m+dz^{\bar{m}}}{\sqrt{2}}$ en $x$ (cf. Annexes pour l'existence d'une telle carte) ; ainsi, toujours en $x$, la 2-forme $\omega$ vaut $\omega = i\,dz^a\wedge dz^{\bar{a}}$ et ${}^tJd\varphi\wedge d\varphi = i\,|d\varphi|_g^2\,dz^m\wedge dz^{\bar{m}}$ (même calcul que la formule (VI.2.35)), d'où :

$$\begin{aligned}{}^tJd\varphi\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1} &= \sum_{\substack{a_1,\dots,a_{m-1}\in\{1,\cdots,m-1\}\\ 2\,\text{à}\,2\neq}} i^m\,|d\varphi|_g^2\,(dz^m\wedge dz^{\bar{m}})\wedge(dz^{a_1}\wedge dz^{\bar{a}_1})\wedge\ldots\wedge(dz^{a_{m-1}}\wedge dz^{\bar{a}_{m-1}})\\ &= \Bigg(\sum_{a_1,\dots,a_{m-1}\in\{1,\cdots,m-1\}2\,\text{à}\,2\neq} 1\Bigg)\,|d\varphi|_g^2\,i^m(dz^1\wedge dz^{\bar{1}})\wedge\ldots\wedge(dz^m\wedge dz^{\bar{m}})\\ &= (m-1)!\,|d\varphi|_g^2\,\frac{\omega^m}{m!} = (m-1)!\,|\nabla\varphi|_g^2\,v_g \end{aligned} \tag{I.2.8}$$

Ce qui prouve que le terme $T_1$ vaut $T_1=(m-1)!\int_M h'(\varphi)\,|\nabla\varphi|_g^2\,v_g$, et achève la preuve de la proposition. ■

### I.2.3 Méthode d'itération de Moser

Appliquons la proposition I.2.1 à $\varphi_{t_i}$ dans le but d'obtenir une inégalité cruciale (inégalité $(IN1)$ ci-après) qui va nous permettre d'obtenir une estimée a priori de $\|\varphi_{t_i}\|_{C^0}$.
Soit $p$ un réel vérifiant $p\geq 2$. La fonction $\varphi_{t_i}$ est de classe $C^2$ admissible, on considère la fonction particulière $u\in\mathbb{R}\to h(u) := u\,|u|^{p-2}$, cette fonction est de classe $C^1$ et sa dérivée vaut $h'(u) = |u|^{p-2} + u(p-2)u\,|u|^{p-4} = (p-1)\,|u|^{p-2}\geq 0$, donc $h$ est croissante et la proposition

I.2.1 s'applique et entraîne :

$$\frac{1}{2m}\int_M h'(\varphi_{t_i})\,|\nabla\varphi_{t_i}|^2\,v_g \le \int_M \Big[1-\mathcal{M}(\varphi_{t_i})\Big]h(\varphi_{t_i})v_g$$

$$\text{(I.2.9)}\qquad \text{i.e}\quad \frac{p-1}{2m}\int_M |\varphi_{t_i}|^{p-2}|\nabla\varphi_{t_i}|^2\,v_g \le \int_M \Big[1-\mathcal{M}(\varphi_{t_i})\Big]\varphi_{t_i}\,|\varphi_{t_i}|^{p-2}\,v_g$$

Par ailleurs, on a :

$$|\nabla|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}}|^2 = 2g^{a\bar b}\partial_a|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}}\,\partial_{\bar b}|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}} = 2g^{a\bar b}\big(\frac{p}{2}\varphi_{t_i}|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}-2}\big)^2\partial_a\varphi_{t_i}\partial_{\bar b}\varphi_{t_i}$$

$$\text{(I.2.10)}\qquad = \frac{p^2}{4}|\varphi_{t_i}|^{p-2}|\nabla\varphi_{t_i}|^2$$

En combinant (I.2.9) et (I.2.10) on obtient :

$$\text{(IN1)}\qquad \int_M |\nabla|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}}|^2\,v_g \le \frac{m\,p^2}{2(p-1)}\int_M\Big[1-\mathcal{M}(\varphi_{t_i})\Big]\varphi_{t_i}\,|\varphi_{t_i}|^{p-2}\,v_g$$

Démontrons dès maintenant (à partir de l'inégalité (IN1)), une inégalité (inégalité $(IN4)$) qui nous servira dans la démonstration du lemme I.2.3.
L'inclusion continue de Sobolev $H_1^2(M)\subset L^{\frac{2m}{m-1}}(M)$ entraîne l'inégalité suivante :

$$\text{(IN2)}\qquad \||\varphi_{t_i}|^p\|_{\frac{m}{m-1}} = \||\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \le Cste\left(\int_M|\nabla|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}}|^2+\int_M|\varphi_{t_i}|^{\frac{p}{2}.2}\right)$$

où $Cste$ est indépendante de $p$.
Par ailleurs, $\mathcal{M}(\varphi_{t_i})$ est bornée uniformément, en effet :

$$\text{(IN3)}\qquad |\mathcal{M}(\varphi_{t_i})| = e^{t_i f}\frac{Vol(M)}{\int_M e^{t_i f}v_g} \le e^{2t_i\|f\|_\infty} \le e^{2\|f\|_\infty}$$

Par les résultats (IN1), (IN2) et (IN3), et vu que $\dfrac{p^2}{2(p-1)} \le p$ on déduit que :

$$\text{(IN4)}\qquad \||\varphi_{t_i}|^p\|_{\frac{m}{m-1}} \le Cste'\times p\left(\int_M|\varphi_{t_i}|^{p-1}+\int_M|\varphi_{t_i}|^p\right)\quad (p\ge 2)$$

où $Cste'$ est indépendante de $p$. On suppose que $Cste'\ge 1$.

A partir de là, on montre le lemme suivant :

**LEMME I.2.2** Il existe une constante $k$ telle que pour tout $1\le q\le \dfrac{2m}{m-1}$,

$$\|\varphi_{t_i}\|_q \le k$$

**Preuve** : M est riemannienne compacte et $\varphi_{t_i}$ est de classe $C^2$, donc par la formule de Green :

(I.2.11)
$$\varphi_{t_i}(x) = \frac{1}{Vol(M)} \underbrace{\int_M \varphi_{t_i} dv}_{=0} + \int_M G(x,y) \Delta \varphi_{t_i}(y) dv(y)$$

où $G(x,y) \geq 0$ et $\int_M G(x,y) dv(y)$ est indépendante de $x$, on en déduit que $\|\varphi_{t_i}\|_1 \leq C \|\Delta\varphi_{t_i}\|_1$. Or la norme $L^1$ vaut $\|\Delta\varphi_{t_i}\|_1 = \int_M \Delta\varphi_{t_i}^+ + \Delta\varphi_{t_i}^-$, en outre $\int_M \Delta\varphi_{t_i} = \int_M \Delta\varphi_{t_i}^+ - \Delta\varphi_{t_i}^- = 0$ ce qui entraîne $\|\Delta\varphi_{t_i}\|_1 = 2\int_M \Delta\varphi_{t_i}^+$. Par ailleurs, $\varphi_{t_i}$ est admissible donc $\Delta\varphi_{t_i} < m$ d'où $\Delta\varphi_{t_i}^+ < m$. Ainsi $\|\Delta\varphi_{t_i}\|_1 \leq 2m\ Vol(M)$. On en déduit que $\|\varphi_{t_i}\|_1 \leq 2m\ C\, Vol(M)$ (i.e $\|\varphi_{t_i}\|_1$ est uniformément bornée). A présent, prenons $p = 2$ dans l'inégalité (IN2) :

(I.2.12)
$$\|\varphi_{t_i}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste\left(\int_M |\nabla|\varphi_{t_i}||^2 + \int_M |\varphi_{t_i}|^2\right)$$

Par ailleurs, $\varphi_{t_i} \in H_1^2(M)$ d'intégrale nulle, donc par l'inégalité de Sobolev-Poincaré on a :

(I.2.13)
$$\|\varphi_{t_i}\|_2 \leq A\|\nabla\varphi_{t_i}\|_2$$

En outre, $|\nabla|\varphi_{t_i}|| = |\nabla\varphi_{t_i}|$ presque partout, donc $\|\varphi_{t_i}\|_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste \|\nabla|\varphi_{t_i}|\|_2$. En prenant $p = 2$ dans l'inégalité (IN1) et en utilisant le fait que $\mathcal{M}(\varphi_{t_i})$ est uniformément bornée on obtient :

(I.2.14)
$$\|\nabla|\varphi_{t_i}|\|_2^2 \leq Cste \|\varphi_{t_i}\|_1 \leq Cste'$$

On déduit donc que $\|\varphi_{t_i}\|_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste$.

Soit à présent $1 \leq q \leq \dfrac{2m}{m-1} =: 2\delta$. Par l'inégalité de Hölder, on a :

(I.2.15)
$$\|\varphi_{t_i}\|_q^q = \int_M |\varphi_{t_i}|^q .1 \leq \left(\int_M |\varphi_{t_i}|^{q\cdot\frac{2\delta}{q}}\right)^{\frac{q}{2\delta}} Vol(M)^{1-\frac{q}{2\delta}}$$

d'où :

(I.2.16)
$$\|\varphi_{t_i}\|_q \leq Vol(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2\delta}} \|\varphi_{t_i}\|_{2\delta}$$

or $\|\varphi_{t_i}\|_{2\delta} \leq Cste$ et $Vol(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2\delta}} = e^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{2\delta})ln(Vol(M))} \leq \begin{cases} 1 & \text{si} Vol(M) \leq 1 \\ Vol(M)^{1-\frac{1}{2\delta}} & \text{si} Vol(M) \geq 1 \end{cases}$, ce qui prouve que $\|\varphi_{t_i}\|_q \leq k := Cste \times max\left(1, Vol(M)^{1-\frac{1}{2\delta}}\right)$, $k$ est évidemment indépendante du réel $q$, ce qui achève la preuve. ■

On suppose sans restriction de généralité que la constante $k$ du lemme I.2.2 vérifie $k \geq 1$.

**LEMMEI.2.3** Il existe une constante $\gamma_2$ telle que pour tout $p \geq 2$,

$$\|\varphi_{t_i}\|_p \leq \gamma_2 \left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}},$$

où $\delta = \dfrac{m}{m-1}$ et $C = Cste'\left(1 + max(1, Vol(M)^{\frac{1}{2}})\right) \geq 1$, $Cste'$ étant la constante apparaissant dans l'inégalité (IN4).

**Preuve** *:* On va démontrer ce lemme par récurrence : on commencera par montrer qu'il est vérifié pour $2 \leq p \leq 2\delta = \dfrac{2m}{m-1}$, ensuite il s'agira de montrer que si l'inégalité est vraie pour $p$ alors elle l'est pour $\delta p$. On pose :

(I.2.17) $$\gamma_2 := k\, \delta^{m(m-1)} C^m\, e^{\frac{m}{e}}$$

Pour $2 \leq p \leq 2\delta$, on a $\|\varphi_{t_i}\|_p \leq k$, donc il suffit de vérifier que $k \leq \gamma_2\left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}}$. Cette dernière inégalité est équivalente à $\delta^{m(m-1)} C^m\, e^{\frac{m}{e}} \left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}} \geq 1$ donc équivaut à l'inégalité $\left(\delta^{m(m-1)} C^m\right) e^{\frac{m}{e}} \geq \left(\delta^{m(m-1)} C^m\right)^{\frac{1}{p}} p^{\frac{m}{p}}$. Or si $x \geq 1$ alors $x \geq x^{\frac{1}{p}}$ (car $p \geq 1$), et $\delta^{m(m-1)} C^m \geq 1$ (car $C \geq 1, m \geq 1$ et $\delta \geq 1$), donc $\delta^{m(m-1)} C^m \geq \left(\delta^{m(m-1)} C^m\right)^{\frac{1}{p}}$. Par ailleurs, $p^{\frac{m}{p}} = e^{m\frac{\ln p}{p}} \leq e^{\frac{m}{e}}$, ce qui achève la vérification.
A présent fixons un réel $p \geq 2$, supposons que $\|\varphi_{t_i}\|_p \leq \gamma_2 \left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}}$ et montrons que $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p} \leq \gamma_2 \left(\delta^{m-1} C\, \delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$. On a montré précédemment l'inégalité suivante :

(IN4) $$\|\, |\varphi_{t_i}|^p\, \|_\delta \leq Cste' \times p \left(\int_M |\varphi_{t_i}|^{p-1} + \int_M |\varphi_{t_i}|^p\right) \quad (p \geq 2)$$

où $Cste'$ est indépendante de $p$, autrement dit :

(IN4) $$\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p}^p \leq Cste' \times p \left(\|\varphi_{t_i}\|_{p-1}^{p-1} + \|\varphi_{t_i}\|_p^p\right)$$

Or $1 \leq p-1 \leq p$ donc par l'inégalité de Hölder, on a : $\|\varphi_{t_i}\|_{p-1} \leq Vol(M)^{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}} \|\varphi_{t_i}\|_p$, d'où :

(I.2.18) $$\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p}^p \leq Cste' \times p \left(Vol(M)^{\frac{1}{p}} \|\varphi_{t_i}\|_p^{p-1} + \|\varphi_{t_i}\|_p^p\right)$$

- Si $\|\varphi_{t_i}\|_p \leq 1$, alors $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p}^p \leq C \times p$ donc $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p} \leq (C p)^{\frac{1}{p}}$. Vérifions que $(C p)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma_2 \left(\delta^{m-1} C\, \delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$. Cette dernière inégalité est équivalente à l'inégalité $p^{\frac{1}{p}(1+\frac{m}{\delta})} \leq k\, \delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} e^{\frac{m}{e}} \times C^{m - \frac{m}{\delta p} - \frac{1}{p}}$, or $1 + \dfrac{m}{\delta} = m$ donc elle est équivalente à $p^{\frac{m}{p}} \leq k\, \delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} e^{\frac{m}{e}} \times C^{m(1-\frac{1}{p})}$, or $p^{\frac{m}{p}} \leq e^{\frac{m}{e}}$ et $k\, \delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} \geq 1$, donc il suffit d'avoir $C^{m(1-\frac{1}{p})} \geq 1$, et ceci est vérifié car $C \geq 1$.

– Si $\|\varphi_{t_i}\|_p \geq 1$, on déduit que $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p}^p \leq C\,p\,\|\varphi_{t_i}\|_p^p$, ce qui entraîne par hypothèse de récurrence que $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p} \leq C^{\frac{1}{p}}\,p^{\frac{1}{p}}\,\|\varphi_{t_i}\|_p \leq (C\,p)^{\frac{1}{p}}\gamma_2\left(\delta^{m-1}C\,p\right)^{\frac{-m}{p}}$, or $\dfrac{1-m}{p} = \dfrac{-m}{\delta p}$, on déduit donc que $\|\varphi_{t_i}\|_{\delta p} \leq \gamma_2\,\delta^{\frac{-m^2}{\delta p}}\,(C\,p)^{\frac{-m}{\delta p}} = \gamma_2\left(\delta^{m-1}C\,\delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$.

■

A partir du lemme I.2.3, on déduit facilement l'estimée $C^0$ recherchée :

**COROLLAIREI.2.1**

$$\|\varphi_{t_i}\|_{C^0} \leq \gamma_2$$

($\gamma_2$ est définie en (I.2.17))

<u>**Preuve**</u> *:* Par le lemme précédent I.2.3, on a $\|\varphi_{t_i}\|_p \leq \gamma_2\left(\delta^{m-1}C\right)^{\frac{-m}{p}}\,p^{\frac{-m}{p}}$ pour tout $p \geq 2$, or $\left(\delta^{m-1}C\right)^{\frac{-m}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ et $p^{\frac{-m}{p}} = e^{-m\frac{\ln p}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, de plus $\|\varphi_{t_i}\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|\varphi_{t_i}\|_{C^0}$ car $\varphi_{t_i}$ est continue sur $M$ compacte, d'où le résultat par passage à la limite. ■

## I.3 Estimée $C^2$ par estimation uniforme du Laplacien

Si $\varphi$ est une fonction de <u>classe $C^5$</u> admissible pour $g$, solution de l'équation de Calabi-Yau <u>(CY) : $\mathcal{M}(\varphi) = e^f$ $(f \in C^3)$</u> avec :

(I.3.1) $\qquad f \leq F_0 \quad$ et $\quad \Delta f \leq F_1 \quad$ (où $F_0$ et $F_1$ sont des constantes)

alors de telles estimées donnent des estimées a priori sur $\Delta\varphi$. Afin d'alléger les notations, on notera dans cette section $\Delta$ le Laplacien complexe relatif à la métrique $g$, et $\tilde{\Delta}$ le Laplacien complexe relatif à la métrique $\tilde{g}$. Tout d'abord, on dispose de façon simple d'une borne sup a priori de $\Delta\varphi$.

**PROPOSITIONI.3.1** Si $\varphi$ est une fonction de classe $C^2$ admissible pour $g$ alors :

$$\Delta\varphi < m$$

<u>**Preuve**</u> *:* En effet, $\Delta\varphi = -g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi = -g^{a\bar{b}}(\tilde{g}_{a\bar{b}} - g_{a\bar{b}}) = tr(g^{-1}g) - tr(g^{-1}\tilde{g}) = m - \underbrace{tr(g^{-1}\tilde{g})}_{>0}$.

■

Il est plus difficile d'obtenir une borne inf a priori de $\Delta\varphi$. Sous les hypothèses citées initialement (I.3.1), on commence par montrer le lemme suivant :

**LEMMEI.3.1** Il existe une constante $c$ dépendant de la courbure (de $g$) et des constantes $A$, $B$ et $C$ avec $C>0$ dépendant de $m$, $F_0$, $F_1$ et de la courbure telles que :

$$(m-\Delta\varphi)\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi)-c\varphi\Big)\leq A+B(m-\Delta\varphi)-C(m-\Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}}$$

<u>**Preuve**</u> *:* Localement l'équation de Calabi-Yau s'écrit :

(CY) $$Log\left(\frac{det(\tilde{g})}{det(g)}\right)=Log(det(\tilde{g}))-Log(det(g))=f$$

On différentie une première fois, on a : $\partial_{\bar{k}}\Big(Log(det(g))\Big)=\dfrac{\partial_{\bar{k}}\big(det(g)\big)}{det(g)}$, or $\partial_{\bar{k}}\big(det(g)\big)=d\big(det(g)\big).\partial_{\bar{k}}=\Big(d(det)_g\circ dg\Big).\partial_{\bar{k}}=d(det)_g.\partial_{\bar{k}}g$ (dans ce dernier calcul de différentielles on identifie $T\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}$), ce qui entraîne que :

(I.3.2) $$\partial_{\bar{k}}\big(det(g)\big)=det(g)\,tr\big(g^{-1}\partial_{\bar{k}}g\big)$$

Par conséquent, $\partial_{\bar{k}}\Big(Log(det(g))\Big)=tr\big(g^{-1}\partial_{\bar{k}}g\big)=g^{a\bar{b}}\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}$ d'où :

(I.3.3) $$\partial_{\bar{k}}f=\tilde{g}^{a\bar{b}}\partial_{\bar{k}}\tilde{g}_{a\bar{b}}-g^{a\bar{b}}\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}=\big(\tilde{g}^{a\bar{b}}-g^{a\bar{b}}\big)\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}+\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{k}a\bar{b}}\varphi$$

On différentie une deuxième fois :
$\partial_{j\bar{k}}f=\big(\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}-\partial_j g^{a\bar{b}}\big)\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}+\big(\tilde{g}^{a\bar{b}}-g^{a\bar{b}}\big)\partial_{j\bar{k}}g_{a\bar{b}}+\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{k}a\bar{b}}\varphi+\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{j\bar{k}a\bar{b}}\varphi$, donc
(I.3.4)
$$\Delta f=-g^{j\bar{k}}\big(\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}-\partial_j g^{a\bar{b}}\big)\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}-\big(\tilde{g}^{a\bar{b}}-g^{a\bar{b}}\big)g^{j\bar{k}}\partial_{j\bar{k}}g_{a\bar{b}}-g^{j\bar{k}}\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}\partial_{\bar{k}a\bar{b}}\varphi-\tilde{g}^{a\bar{b}}g^{j\bar{k}}\partial_{j\bar{k}a\bar{b}}\varphi$$

Soit $x\in M$. En $x$ dans une carte $g$-normale l'expression précédente se réduit à :

$$\begin{aligned}\Delta f&=0-\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{b}}+\sum_{j,a=1}^{m}\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{a}}-\sum_{j=1}^{m}\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi-\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{j\bar{j}a\bar{b}}\varphi\\ &=-\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\Big(\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{b}}+\partial_{j\bar{j}a\bar{b}}\varphi\Big)+\sum_{j,a=1}^{m}\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{a}}-\sum_{j=1}^{m}\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi\end{aligned}\qquad\text{(I.3.5)}$$

Par le lemme VII.2.5 (cf. Annexes) : $\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}=-\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\partial_j\tilde{g}_{l\bar{s}}$, donc en $x$ dans la carte $g$-normale considérée, $\partial_j\tilde{g}^{a\bar{b}}=-\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\partial_{jl\bar{s}}\varphi$, d'où un premier résultat :

(I.3.6) $$\Delta f=-\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\Big(\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{b}}+\partial_{j\bar{j}a\bar{b}}\varphi\Big)+\sum_{j,a=1}^{m}\partial_{j\bar{j}}g_{a\bar{a}}+\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\,\partial_{jl\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi$$

ce qui s'écrit à l'aide de la courbure (en utilisant le lemme VII.2.7 de l'Annexe ) :

(I.3.7) $$\Delta f=-\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\Big(R_{j\bar{j}a\bar{b}}+\partial_{j\bar{j}a\bar{b}}\varphi\Big)+\sum_{j,a=1}^{m}R_{j\bar{j}a\bar{a}}+\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\,\partial_{jl\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi$$

Calculons à présent la quantité $\tilde{\Delta}\Delta\varphi$. On a $\Delta\varphi = -g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi$ donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\Delta\varphi &= \tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_{j\bar{k}}\left(g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi\right) = \tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_j\left(\partial_{\bar{k}}g^{a\bar{b}}\,\partial_{a\bar{b}}\varphi + g^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{k}a\bar{b}}\varphi\right)\\ &= \tilde{g}^{j\bar{k}}\left(\partial_{j\bar{k}}g^{a\bar{b}}\,\partial_{a\bar{b}}\varphi + \partial_{\bar{k}}g^{a\bar{b}}\,\partial_{ja\bar{b}}\varphi + \partial_j g^{a\bar{b}}\,\partial_{\bar{k}a\bar{b}}\varphi + g^{a\bar{b}}\,\partial_{j\bar{k}a\bar{b}}\varphi\right)\end{aligned} \tag{I.3.8}$$

Or $\partial_j g^{a\bar{b}} = -g^{a\bar{s}}g^{l\bar{b}}\partial_j g_{l\bar{s}}$ (cf. Annexes lemme VII.2.5), d'où $\partial_j g^{a\bar{b}} = 0$ en $x$ dans notre carte $g$-normale, et de même on a $\partial_{\bar{k}}g^{a\bar{b}} = 0$. Ainsi, en $x$, carte $g$-normale :

$$\tilde{\Delta}\Delta\varphi = \tilde{g}^{j\bar{k}}\left(\partial_{j\bar{k}}g^{a\bar{b}}\,\partial_{a\bar{b}}\varphi + \sum_{a=1}^{m}\partial_{j\bar{k}a\bar{a}}\varphi\right) \tag{I.3.9}$$

Par ailleurs, en dérivant l'égalité $\partial_{\bar{k}}g^{a\bar{b}} = -g^{a\bar{s}}g^{l\bar{b}}\partial_{\bar{k}}g_{l\bar{s}}$, on obtient que $\partial_{j\bar{k}}g^{a\bar{b}} = -\partial_j g^{a\bar{s}}g^{l\bar{b}}\partial_{\bar{k}}g_{l\bar{s}} - g^{a\bar{s}}\partial_j g^{l\bar{b}}\partial_{\bar{k}}g_{l\bar{s}} - g^{a\bar{s}}g^{l\bar{b}}\partial_{j\bar{k}}g_{l\bar{s}}$, donc en $x$, dans notre carte $g$-normale $\partial_{j\bar{k}}g^{a\bar{b}} = -\partial_{j\bar{k}}g_{b\bar{a}} = -R_{j\bar{k}b\bar{a}}$ (cf. Annexes lemme VII.2.7), d'où un second résultat :

$$\tilde{\Delta}\Delta\varphi = -\sum_{a,b=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{k}}R_{j\bar{k}b\bar{a}}\partial_{a\bar{b}}\varphi + \sum_{a=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_{j\bar{k}a\bar{a}}\varphi \tag{I.3.10}$$

En combinant les égalités (I.3.7) et (I.3.10) on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta f + \tilde{\Delta}\Delta\varphi = &\sum_{j,a=1}^{m}R_{j\bar{j}a\bar{a}} - \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}R_{j\bar{j}a\bar{b}} - \sum_{a,b=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{k}}R_{j\bar{k}b\bar{a}}\partial_{a\bar{b}}\varphi + \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\,\partial_{jl\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi\\ &+\underbrace{\sum_{a=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_{j\bar{k}a\bar{a}}\varphi - \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\partial_{j\bar{j}a\bar{b}}\varphi}_{0}\end{aligned} \tag{I.3.11}$$

Or, en $x$ toujours dans notre carte $g$-normale : $\partial_{a\bar{b}}\varphi = \varphi_{a\bar{b}}$, $\partial_{jl\bar{s}}\varphi = \varphi_{jl\bar{s}}$ et $\partial_{\bar{j}a\bar{b}}\varphi = \varphi_{\bar{j}a\bar{b}}$ (cf. [Sém78] page 155), donc :

$$\Delta f + \tilde{\Delta}\Delta\varphi = \underbrace{\sum_{j,a=1}^{m}R_{j\bar{j}a\bar{a}} - \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}R_{j\bar{j}a\bar{b}} - \sum_{a,b=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{k}}R_{j\bar{k}b\bar{a}}\varphi_{a\bar{b}}}_{:=\mathscr{A}} + \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{s}}\tilde{g}^{l\bar{b}}\,\varphi_{jl\bar{s}}\varphi_{\bar{j}a\bar{b}} \tag{I.3.12}$$

Les deux termes de l'égalité sont des quantités intrinsèques, donc l'égalité est vraie partout.

On se place à présent, en une carte $g$-normale en $x$ diagonalisant $\tilde{g}$ en $x$. En x, $g$ et $\tilde{g}$ sont diagonales donc la matrice $[\varphi_{a\bar{b}}]_{1\le a,b\le m}$ est diagonale aussi, et $\tilde{g}^{a\bar{a}} = \dfrac{1}{\tilde{g}_{a\bar{a}}} = \dfrac{1}{1+\varphi_{a\bar{a}}}$, ainsi :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \sum_{j,a=1}^{m}R_{j\bar{j}a\bar{a}} - \sum_{j,a=1}^{m}\frac{1}{1+\varphi_{a\bar{a}}}R_{j\bar{j}a\bar{a}} - \sum_{a,j=1}^{m}\frac{\varphi_{a\bar{a}}}{1+\varphi_{j\bar{j}}}R_{j\bar{j}a\bar{a}} = \sum_{j,a=1}^{m}\frac{\varphi_{a\bar{a}}}{1+\varphi_{a\bar{a}}}R_{j\bar{j}a\bar{a}} - \sum_{a,j=1}^{m}\frac{\varphi_{a\bar{a}}}{1+\varphi_{j\bar{j}}}R_{j\bar{j}a\bar{a}}\\ &= \sum_{j,a=1}^{m}R_{j\bar{j}a\bar{a}}\varphi_{a\bar{a}}\frac{\varphi_{j\bar{j}}-\varphi_{a\bar{a}}}{(1+\varphi_{a\bar{a}})(1+\varphi_{j\bar{j}})}\end{aligned} \tag{I.3.13}$$

En échangeant $j$ et $a$, et en utilisant la symétrie de la courbure : $R_{j\bar{j}a\bar{a}} = R_{a\bar{a}j\bar{j}}$, on obtient :

$$\mathscr{A} = \sum_{j,a=1}^{m} R_{j\bar{j}a\bar{a}}\,\varphi_{j\bar{j}} \frac{\varphi_{a\bar{a}} - \varphi_{j\bar{j}}}{(1+\varphi_{a\bar{a}})(1+\varphi_{j\bar{j}})} \tag{I.3.14}$$

En sommant les égalités (I.3.13) et (I.3.14) on aboutit à : $2\mathscr{A} = \sum_{j,a=1}^{m} R_{j\bar{j}a\bar{a}} \frac{2\varphi_{j\bar{j}}\varphi_{a\bar{a}} - \varphi_{j\bar{j}}^2 - \varphi_{a\bar{a}}^2}{(1+\varphi_{a\bar{a}})(1+\varphi_{j\bar{j}})}$,

donc :

$$\mathscr{A} = -\frac{1}{2}\sum_{j,a=1}^{m} R_{j\bar{j}a\bar{a}} \frac{(\varphi_{j\bar{j}} - \varphi_{a\bar{a}})^2}{(1+\varphi_{a\bar{a}})(1+\varphi_{j\bar{j}})} = \frac{1}{2}\sum_{j\neq a\in\{1,\dots,m\}} \left(-R_{j\bar{j}a\bar{a}}\right)\frac{(\tilde{g}_{j\bar{j}} - \tilde{g}_{a\bar{a}})^2}{\tilde{g}_{j\bar{j}}\tilde{g}_{a\bar{a}}} \tag{I.3.15}$$

Ainsi, en $x$ dans une carte $g$-normale diagonalisant $\tilde{g}$ on a :

$$\mathscr{A} \geq \left[inf_{j\neq a\in\{1,\dots,m\}}\left(-R_{j\bar{j}a\bar{a}}\right)\right] \times \sum_{j,a=1}^{m} \frac{(\tilde{g}_{j\bar{j}} - \tilde{g}_{a\bar{a}})^2}{2\tilde{g}_{j\bar{j}}\tilde{g}_{a\bar{a}}} \tag{I.3.16}$$

En outre, $\sum_{j,a=1}^{m} \frac{(\tilde{g}_{j\bar{j}} - \tilde{g}_{a\bar{a}})^2}{2\tilde{g}_{j\bar{j}}\tilde{g}_{a\bar{a}}} = \sum_{j,a=1}^{m}\left(\frac{\tilde{g}_{j\bar{j}}}{2\tilde{g}_{a\bar{a}}} + \frac{\tilde{g}_{a\bar{a}}}{2\tilde{g}_{j\bar{j}}} - 1\right) = \left(\sum_{j,a=1}^{m}\frac{\tilde{g}_{j\bar{j}}}{\tilde{g}_{a\bar{a}}}\right) - m^2 = \left(\sum_{j,a=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{a}}\tilde{g}_{j\bar{j}}\right) - m^2$,
ce qui entraîne que :

$$\mathscr{A} \geq \left[inf_{j\neq a\in\{1,\dots,m\}}\left(-R_{j\bar{j}a\bar{a}}\right)\right] \times \left(\left(\sum_{j,a=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{a}}\tilde{g}_{j\bar{j}}\right) - m^2\right) \tag{I.3.17}$$

En combinant (I.3.12) et (I.3.17), on obtient :

(I.3.18)

$$\tilde{\Delta}\Delta\varphi \geq -\Delta f + \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{a}}\tilde{g}^{b\bar{b}}\varphi_{jb\bar{a}}\varphi_{\bar{j}a\bar{b}}}_{T_1} + \underbrace{\left[inf_{j\neq a\in\{1,\dots,m\}}\left(-R_{j\bar{j}a\bar{a}}\right)\right]}_{T_2} \times \left(\left(\sum_{j,a=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{a}}\tilde{g}_{j\bar{j}}\right) - m^2\right)$$

Pour finir, on calcule $\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\varphi\Big)$ où $c > 0$ est une constante qu'on choisira ultérieurement.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\varphi\Big) &= -\tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_{j\bar{k}}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\varphi\Big) = -\tilde{g}^{j\bar{k}}\partial_j\Big(-(m-\Delta\varphi)^{-1}\,\partial_{\bar{k}}(\Delta\varphi) - c\,\partial_{\bar{k}}(\varphi)\Big) \\
&= -\tilde{g}^{j\bar{k}}\Big(-(m-\Delta\varphi)^{-1}\,\partial_{j\bar{k}}(\Delta\varphi) + (m-\Delta\varphi)^{-2}\big(-\partial_j(\Delta\varphi)\big)\,\partial_{\bar{k}}(\Delta\varphi) - c\,\partial_{j\bar{k}}(\varphi)\Big) \\
&= -(m-\Delta\varphi)^{-1}\,\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) - c\,\tilde{\Delta}\varphi + (m-\Delta\varphi)^{-2}\,\tilde{g}^{j\bar{k}}\,\partial_j(\Delta\varphi)\partial_{\bar{k}}(\Delta\varphi) \qquad \text{(I.3.19)}
\end{aligned}$$

d'où en $x$, dans une carte $g$-normale diagonalisant $\tilde{g}$ :

(I.3.20)

$$(m-\Delta\varphi)\,\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\varphi\Big) = -\tilde{\Delta}\Delta\varphi - c\,\tilde{\Delta}\varphi(m-\Delta\varphi) + \underbrace{(m-\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}^{j\bar{j}}\partial_j(\Delta\varphi)\partial_{\bar{j}}(\Delta\varphi)}_{:=\mathscr{B}}$$

Or dans une telle carte $\triangle\varphi = -\sum_{a=1}^{m} \partial_{a\bar{a}}\varphi = -\sum_{a=1}^{m} \left(\tilde{g}_{a\bar{a}} - 1\right) = m - \sum_{a=1}^{m} \tilde{g}_{a\bar{a}}$, donc :

$$m - \triangle\varphi = \sum_{a=1}^{m} \tilde{g}_{a\bar{a}} \tag{I.3.21}$$

en outre, $\partial_j(\triangle\varphi) = \partial_j\left(-g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi\right) = -g^{a\bar{b}}\partial_{ja\bar{b}}\varphi = -\sum_{a=1}^{m}\partial_{ja\bar{a}}\varphi$, et $\partial_{\bar{j}}(\triangle\varphi) = \overline{\partial_j(\triangle\varphi)}$ (car $\varphi$ donc $\triangle\varphi$ est à valeurs réelles), ce qui entraîne que :

$$\mathscr{B} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}} \,|\sum_{a=1}^{m} \partial_{ja\bar{a}}\varphi\,|^2}{\sum_{a=1}^{m} \tilde{g}_{a\bar{a}}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}} \,|\sum_{a=1}^{m} (\sqrt{\tilde{g}^{a\bar{a}}}\partial_{ja\bar{a}}\varphi)(\sqrt{\tilde{g}_{a\bar{a}}})\,|^2}{\sum_{a=1}^{m} \tilde{g}_{a\bar{a}}} \tag{I.3.22}$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$\mathscr{B} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}} \left(\sum_{a=1}^{m} |\sqrt{\tilde{g}^{a\bar{a}}}\partial_{ja\bar{a}}\varphi\,|^2\right) \times \left(\sum_{a=1}^{m} |\sqrt{\tilde{g}_{a\bar{a}}}\,|^2\right)}{\sum_{a=1}^{m} \tilde{g}_{a\bar{a}}} \tag{I.3.23}$$

Par conséquent :

$$\mathscr{B} \leq \sum_{j,a=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}\tilde{g}^{a\bar{a}} \,|\partial_{ja\bar{a}}\varphi\,|^2 \leq \sum_{j,a,b=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}\tilde{g}^{a\bar{a}} \,|\partial_{jb\bar{a}}\varphi\,|^2 \quad (\text{car } \tilde{g}^{k\bar{k}} \geq 0) \tag{I.3.24}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{j,a,b=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}\tilde{g}^{a\bar{a}} \,|\partial_{jb\bar{a}}\varphi\,|^2 &= \sum_{j,a,b=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}\tilde{g}^{a\bar{a}}\, \partial_{jb\bar{a}}\varphi\,\partial_{\bar{j}\bar{b}a}\varphi = \sum_{j,a,b=1}^{m} \tilde{g}^{b\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{a}}\, \partial_{bj\bar{a}}\varphi\,\partial_{\bar{b}\bar{j}a}\varphi \\ &= \sum_{j,a,b=1}^{m} \tilde{g}^{b\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{a}}\, \partial_{jb\bar{a}}\varphi\,\partial_{\bar{j}\bar{b}a}\varphi = \sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{b\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{a}}\, \varphi_{jb\bar{a}}\,\varphi_{\bar{j}a\bar{b}} = T_1\end{aligned} \tag{I.3.25}$$

car en $x$, dans notre carte $\partial_{jb\bar{a}}\varphi = \varphi_{jb\bar{a}}$ (cf. [Sém78] page 155), ce qui montre que :

$$\mathscr{B} \leq T_1 \tag{I.3.26}$$

Par ailleurs, $\tilde{\triangle}\varphi = -\tilde{g}^{j\bar{j}}\partial_{j\bar{j}}\varphi = -\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{j}}(\tilde{g}_{j\bar{j}} - 1) = -\sum_{j=1}^{m}(1 - \tilde{g}^{j\bar{j}}) = \sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{j}} - m$, ainsi, en $x$ dans notre carte $g$-normale digonalisant $\tilde{g}$ on a en combinant (I.3.20), (I.3.18), (I.3.26) et cette dernière égalité :

$$\begin{aligned}(m - \triangle\varphi)\tilde{\triangle}\Big(Log(m - \triangle\varphi) - c\varphi\Big) &\leq \triangle f - T_1 - T_2\left(\Big(\sum_{j,a=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{a}}\tilde{g}_{j\bar{j}}\Big) - m^2\right) - c\left(\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{j}} - m\right)(m - \triangle\varphi) + T_1 \\ &\leq \left(\triangle f + m^2 T_2\right) + c\,m\,(m - \triangle\varphi) - (c + T_2)(m - \triangle\varphi)\Big(\sum_{j=1}^{m}\tilde{g}^{j\bar{j}}\Big)\end{aligned} \tag{I.3.27}$$

Il reste à minorer le terme $\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}$, pour ceci on utilise le lemme VII.1.2 (cf. Annexes). En effet, en appliquant ce lemme aux $\tilde{g}^{j\bar{j}}$ on obtient :

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\tilde{g}_{j\bar{j}}} \geq \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{g}_{j\bar{j}}\right)^{\frac{1}{m-1}} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\tilde{g}_{j\bar{j}}}\right)^{\frac{1}{m-1}} = (m-\Delta\varphi)^{\frac{1}{m-1}} e^{-f\frac{1}{m-1}} \tag{I.3.28}$$

puisque $e^f = \dfrac{det(\tilde{g})}{det(g)} = \prod_{j=1}^{m} \tilde{g}_{j\bar{j}}$ en $x$, dans notre carte $g$-normale diagonalisant $\tilde{g}$.

On note $\mathcal{U}_x(M)$ l'ensemble des bases unitaires de $T_x^{\mathbb{C}}M$, alors $\mathcal{U}(M) = \cup\,\mathcal{U}_x(M)$ est un $\mathcal{U}_{2m}(\mathbb{C})$-fibré principal de base M, où $\mathcal{U}_{2m}(\mathbb{C}) := \{A \in M_{2m}(\mathbb{C})/\ A^t\bar{A} = I\}$est le groupe unitaire d'ordre $2m$. $\mathcal{U}(M)$ est une variété compacte. Par ailleurs, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(M) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (e_1, \ldots, e_m, \overline{e_1}, \ldots, \overline{e_m}) &\longrightarrow T_2 := inf_{j\neq a\in\{1,\ldots,m\}}\left(-R_{j\bar{j}a\bar{a}}\right) \end{aligned}$$

est continue, donc $T_2$ est bornée sur $\mathcal{U}(M)$, en particulier il existe $c > 0$ et $d > 0$ tels que en chaque point et pour tout choix de base unitaire $T_2 > 1 - c$ i.e. $(c + T_2) > 1$ et $T_2 \leq d$, par conséquent :

$$(m-\Delta\varphi)\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\varphi\Big) \leq \underbrace{\left(\Delta f + m^2 T_2\right)}_{A_x} + \underbrace{cm}_{B}(m-\Delta\varphi) - \underbrace{e^{\frac{-f}{m-1}}}_{C_x}(m-\Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}} \tag{I.3.29}$$

$A_x$ et $C_x$ sont des fonctions en $x \in M$. Par ailleurs, $\Delta f \leq F_1$ et $T_2 \leq d$ donc $A_z \leq F_1 + m^2 d := A$, et $f \leq F_0$ donc $e^{\frac{-f}{m-1}} \geq e^{\frac{-F_0}{m-1}} := C > 0$, on en déduit que :

$$(m-\Delta\varphi)\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi) - c\,\varphi\Big) \leq A + B\,(m-\Delta\varphi) - C\,(m-\Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}} \tag{I.3.30}$$

$A$ dépend de $F_1, m$ et de la courbure, $B$ dépend de $m$ et de la courbure, et $C$ dépend de $F_0$ et de $m$ ; ce qui prouve le lemme. ■

Ce lemme permet de trouver une borne inf a priori de $\Delta\varphi$ ; en effet on montre à partir de ce résultat la proposition suivante :

**PROPOSITIONI.3.2** Si $\varphi$ est une fonction $C^5$ admissible pour $g$, solution de l'équation de Calabi-Yau (CY) : $\mathcal{M}(\varphi) = e^f$ $(f \in C^3)$ avec $f \leq F_0$ et $\Delta f \leq F_1$, alors on dispose de l'estimée a priori suivante de $\Delta\varphi$ : il existe une constante $c > 0$ dépendant de la courbure (pour $g$) et une constante $C_1 > 0$ dépendant de $m, F_0, F_1$ et de la courbure telles que :

$$m - C_1 e^{c(sup\,\varphi - inf\,\varphi)} \leq \Delta\varphi < m$$

**Preuve** : On se place en un point $x_0 \in M$ où la fonction $Log(m-\Delta\varphi)-c\varphi$, qui est continue sur $M$ compacte, atteint son maximum, on a donc $\tilde{\Delta}\Big(Log(m-\Delta\varphi)-c\varphi\Big)(x_0) \geq 0$, ce qui entraîne par le lemme I.3.1 que $A+B\,(m-\Delta\varphi(x_0))-C\,(m-\Delta\varphi(x_0))^{\frac{m}{m-1}} \geq 0$. Par ailleurs, la fonction $\varrho: ]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto A+B\,x-C\,x^{\frac{m}{m-1}}$ est continue et tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (car $C>0$), il existe donc $C_1>0$ (dépendant de $A$, $B$ et $C$, donc de $m$, $F_0$, $F_1$ et de la courbure) telle que $\varrho(x)<0$ pour tout $x \geq C_1$. Or $m-\Delta\varphi(x_0)>0$ et $\varrho\big(m-\Delta\varphi(x_0)\big) \geq 0$, par conséquent $m-\Delta\varphi(x_0) \leq C_1$, mais $Log(m-\Delta\varphi)-c\varphi \leq Log(m-\Delta\varphi(x_0))-c\,\varphi(x_0)$, ainsi en passant à l'exponentielle on déduit que $m-\Delta\varphi \leq C_1 e^{c(\varphi-\varphi(x_0))} \leq C_1 e^{c(sup\,\varphi - inf\,\varphi)}$ $(c>0)$, ce qui permet de conclure que $\Delta\varphi \geq m - C_1 e^{c(sup\,\varphi-inf\,\varphi)}$. ■

Vu qu'au centre d'une carte normale $\Delta\varphi = m-\sigma_1(\lambda)$, l'estimation uniforme du laplacien (proposition I.3.2) nous fournit immédiatement un pincement uniforme des valeurs propres :

**COROLLAIRE I.3.1** Il existe une constante $\gamma_3>0$ ne dépendant que de $m$, $\|f\|_\infty$, $\|f\|_{C^2}$, de la courbure de $g$ et de $\gamma_2$ (la constante de l'estimée $C^0$) telle que :

$$\forall P \in M, \quad \forall i \in \{1,..,m\}, \quad 0<\lambda_i(P) \leq \gamma_3$$

A partir de là, on obtient par le même raisonnement que pour les équations plus générales $(E_k)$ (cf. théorème du chapitre II), dont l'équation de Calabi-Yau $(CY)$ est un cas particulier, l'estimation $C^2$ recherchée (cf. Chapitre V : Estimée $C^2$). Soulignons que ce raisonnement ne fait usage d'aucune hypothèse sur la courbure.

## I.4 Estimée $C^{2,\beta}$

### La méthode d'Evans-Trudinger

On suppose qu'il existe $\gamma_4>0$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $\|\varphi_{t_i}\|_{C^2(M,\mathbb{R})} \leq \gamma_4$. Dans la suite, on ne notera plus l'indice $i$ de $\varphi_{t_i}$ afin d'alléger les notations. Dans le but de construire une estimée $C^{2,\beta}$ avec $0<\beta<1$, on va se mettre dans les conditions d'application du théorème VII.6.1 (cf. Annexes).
La famille d'équations de la méthode de continuité correspondant à l'équation de Calabi-Yau s'écrit :

$$(CY_t) \qquad \ln\left(\frac{det[g_{a\bar{b}}+\partial_{a\bar{b}}\varphi_t]_{1\leq a,b\leq m}}{det[g_{a\bar{b}}]_{1\leq a,b\leq m}}\right) = t\,f+\ln(A_t)$$

Le lemme VII.2.2 nous dit que pour tout $P \in M$ il existe $U_P$ un ouvert de $M$ contenant $P$ et une fonction $\psi^P: U_P \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ dite potentiel kählérien local telle que $\omega = i\partial\bar{\partial}\psi^P$ sur $U_P$. Quitte à considérer pour tout $P$ l'intersection avec un ouvert de carte en $P$, on obtient $(U_P,\phi_P)_{P\in M}$ un recouvrement ouvert de $M$ par des cartes sur lesquelles on a un potentiel kählérien (on continue à noter l'ouvert obtenu $U_P$), or $M$ est compacte, on peut donc extraire de $(U_P)_{P\in M}$ un recouvrement fini ; on obtient ainsi $\mathscr{R}=(U_j,\phi_j)_{1\leq j\leq N}$ un recouvrement fini de $M$ par des cartes et une famille de fonctions $(\psi^j : U_j \to \mathbb{R})_{1\leq j\leq N}$ telles que :

$$\forall j \in \{1,..,m\}, \quad \omega = \frac{1}{2} d d^c \psi^j = i\partial\bar{\partial}\psi^j \text{ sur } U_j. \tag{I.4.1}$$

Soit $\mathscr{P} = (\theta_j)_{1\leq j\leq N}$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée au recouvrement $\mathscr{R}=(U_j,\phi_j)_{1\leq j\leq N}$.

On se <u>fixe</u> une carte $(U_j,\phi_j)$ de ce recouvrement. Par (I.4.1), les coefficients de la métrique s'écrivent sur la carte $(U_j,\phi_j)$ $g_{a\bar{b}} = \partial_{a\bar{b}}\psi^j$ pour tous $a,b \in \{1,...,m\}$, donc sur $(U_j,\phi_j)$ l'équation de Calabi-Yau s'écrit :

$$(CY_t^j) \qquad \ln\left(\frac{det[\partial_{a\bar{b}}(\psi^j+\varphi_t)(P)]_{1\leq a,b\leq m}}{det[g_{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}}\right) = t\,f(P)+\ln(A_t) \quad P\in U_j$$

donc s'écrit sur $\phi_j(U_j)$ :

$(CY_t^j)$

$$\ln\left(det\left[\frac{\partial\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}\big)}{\partial z_a\partial\overline{z_b}}(x)\right]_{1\leq a,b\leq m}\right) = \underbrace{t\,f\circ\phi_j^{-1}(x)+\ln(A_t)+\ln\left(det[g_{a\bar{b}}\circ\phi_j^{-1}(x)]_{1\leq a,b\leq m}\right)}_{=:v_t^j(x)}$$

Par ailleurs, on a $\dfrac{\partial}{\partial z_a\partial\overline{z_b}} = \dfrac{1}{4}\Big(D_{ab}+D_{(a+m)(b+m)}+iD_{a(b+m)}-iD_{(a+m)b}\Big)$ où les $D_{ab}$ désignent des dérivées réelles.

<u>Remarque</u> : La matrice hermitienne $\left[\dfrac{\partial\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}\big)}{\partial z_a\partial\overline{z_b}}(x)\right]_{1\leq a,b\leq m} = \left[\tilde{g}_{a\bar{b}}^{\varphi_t}\big(\phi_j^{-1}(x)\big)\right]_{1\leq a,b\leq m}$ est définie positive pour tout $x\in\phi_j(U_j)$ ; mais rien ne dit que les matrices symétriques $D^2\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}(x)\big) = \Big[D_{ab}\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}(x)\big]_{1\leq a,b\leq 2m}$ avec $x\in\phi_j(U_j)$ soient définies positives.

On désigne par $\mathbb{R}^{2m\times 2m}$ (respectivement $\mathbb{R}_{++}^{2m\times 2m}$) l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques de taille $2m$ (respectivement celles qui sont en plus définies positives) ; et par $\mathbb{C}^{m\times m}$ (respectivement $\mathbb{C}_{++}^{m\times m}$) l'ensemble des matrices carrées complexes hermitiennes de taille $m$ (respectivement celles qui sont en plus définies positives). On considère l'application linéaire continue $p:\mathbb{R}^{2m\times 2m}\to\mathbb{C}^{m\times m}, r\mapsto \dfrac{1}{4}\Big[r_{ab}+r_{(a+m)(b+m)}+i\,r_{a(b+m)}-i\,r_{(a+m)b}\Big]_{1\leq a,b\leq m}$, et on note $\mathscr{P}^{2m} := p^{-1}(\mathbb{C}_{++}^{m\times m})$ (c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^{2m\times 2m}$).

<u>Remarque</u> : $\mathbb{R}_{++}^{2m\times 2m}\subset\mathscr{P}^{2m}$ et $D^2\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}(x)\big)\in\mathscr{P}^{2m}$ pour tout $x\in\phi_j(U_j)$.

Ainsi l'équation $(CY_t^j)$ sur $\phi_j(U_j)$ s'écrit sous la forme :

$$(CY_t^j) \qquad F\Big(D^2\big((\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1}\big)\Big)=v_t^j \quad \text{sur} \quad \phi_j(U_j)\subset\mathbb{R}^{2m}, \quad \text{où}$$

$$F:\mathscr{P}^{2m}\to\mathbb{R},\, r\mapsto F(r)=F_m\left[\frac{1}{4}\big(r_{ab}+r_{(a+m)(b+m)}+i\,r_{a(b+m)}-i\,r_{(a+m)b}\big)\right]_{1\le a,b\le m} \tag{I.4.2}$$

$$\text{et} \quad F_m=\ln det:\mathbb{C}_{++}^{m\times m}\to\mathbb{R},\, B\mapsto \ln det(B) \tag{I.4.3}$$

$$\text{On note :} \quad \psi_t^j:=(\psi^j+\varphi_t)\circ\phi_j^{-1} \tag{I.4.4}$$

Pour tout $j\in\{1,..,N\}$, on considère $\Omega_j$ un domaine borné de $\mathbb{R}^{2m}$ strictement inclus dans $\phi_j(U_j)$ :

$$\Omega_j\subset\subset\phi_j(U_j) \tag{I.4.5}$$

La notation $S'\subset\subset S$ signifie que $S'$ est strictement inclus dans $S$ à savoir que $\overline{S'}\subset S$ . On expliquera ultérieurement comment ces domaines $\Omega_j$ sont choisis. On a $F\in C^2(\mathscr{P}^{2m},\mathbb{R})$, $v_t^j\in C^2(\Omega_j,\mathbb{R})$ et la solution $\psi_t^j\in C^4(\Omega_j,\mathbb{R})$ car le potentiel kählérien $\psi^j$ est $C^\infty$ sur $U_j$ et $\varphi_t\in C^{r,\alpha}(M)$ avec $r\ge 5$. L'équation $(CY_t^j)$ sur $\Omega_j\subset\phi_j(U_j)$ est à présent écrite sous la forme correspondante au théorème VII.6.1 (cf. Annexes), il reste à vérifier les hypothèses du théorème sur $\Omega_j$, à savoir :

1. $F:\mathscr{P}^{2m}\to\mathbb{R}$ est uniformément elliptique par rapport à la solution $\psi_t^j$ sur $\Omega_j$ i.e il existe deux réels $\lambda_j,\Lambda_j>0$ tels que :
$$\forall\xi\in\mathbb{R}^{2m},\,\forall x\in\Omega_j \quad \lambda_j\,|\,\xi\,|^2\le F_{iq}(D^2\psi_t^j(x))\xi_i\xi_q\le\Lambda_j\,|\,\xi\,|^2$$
On s'imposera, en outre, de trouver des réels $\lambda_j,\Lambda_j$ indépendants de $t$.
2. $F$ est concave par rapport à $\psi_t^j$ sur $\Omega_j$ i.e $F$ est une fonction concave sur l'image de $\Omega_j$ par $D^2\psi_t^j$. Vu que $F$ est de classe $C^2$ sur l'ouvert $\mathscr{P}^{2m}$ de $\mathbb{R}^{2m\times 2m}$, cette condition de concavité est équivalente à :
$$\forall\zeta\in\mathbb{R}^{2m\times 2m},\,\forall x\in\Omega_j \quad F_{iq,ks}(D^2\psi_t^j(x))\zeta_{iq}\zeta_{ks}\le 0$$

Une fois ces deux hypothèses vérifiées, le théorème VII.6.1 nous permet de déduire l'existence de deux réels $\beta_j\in]0,\frac{1}{2}]$ et $Cste_j>0$ ne dépendant que de $m$, $\lambda_j$, $\Lambda_j$ et $|B_1|$, donc en particulier $\beta_j$ et $Cste_j$ ne dépendent pas de $t$ tels que :

$$|\,\psi_t^j\,|^*_{2,\beta_j;\Omega_j}\le Cste_j\left(|\,\psi_t^j\,|^*_{2;\Omega_j}+|\,v_t^j\,|^{(2)}_{2;\Omega_j}\right) \tag{I.4.6}$$

Choix de $\Omega_j$ :
On note $K_j$ le support de la fonction $\theta_j \circ \phi_j^{-1}$ :

$$K_j := supp(\theta_j \circ \phi_j^{-1}) = \phi_j(supp\, \theta_j) \subset \phi_j(U_j) \tag{I.4.7}$$

L'ensemble $K_j$ est un compact inclus dans l'ouvert $\phi_j(U_j)$ de $\mathbb{R}^{2m}$, et $\mathbb{R}^{2m}$ est séparé localement compact, donc par le théorème d'intercalation d'ouverts relativement compacts, appliqué deux fois, on déduit l'existence de deux ouverts relativement compacts $\Omega_j$ et $\Omega'_j$ tels que :

$$K_j \subset \Omega'_j \subset\subset \Omega_j \subset\subset \phi_j(U_j) \tag{I.4.8}$$

On aimerait que $\Omega_j$ soit connexe : pour cela, il suffit que $K_j$ soit connexe ; quitte à se restreindre à une composante connexe dans $\Omega_j$ d'un point de $K_j$ ; en effet, cette composante connexe est un ouvert de $\Omega_j$ vu que $\Omega_j$ est localement connexe (au titre d'ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$), elle est en outre bornée vu que $\Omega_j$ l'est.

Application du théorème :
Soit $\beta := min\, \beta_j$, la norme $\|.\|_{C^{2,\beta}}$ est sous-multiplicative (cf. [ZQ95]) donc :

$$\begin{aligned} \|\varphi_t\|^{\mathcal{R},\mathcal{P}}_{C^{2,\beta}(M)} &= \sum_{j=1}^{N} |(\theta_j \circ \phi_j^{-1}) \times (\varphi_t \circ \phi_j^{-1})|_{2,\beta;\Omega'_j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} |\theta_j \circ \phi_j^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_j} \times |\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_j} \end{aligned} \tag{I.4.9}$$

Par ailleurs, vu que $\Omega'_j \subset\subset \Omega_j$, on obtient par l'inégalité (VII.5.19) en notant $\delta_j := dist(\Omega'_j, \partial\Omega_j)$,

$$\min(1, \delta_j^{2+\beta})\, |\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_j} \leq |\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2,\beta;\Omega_j} \quad \text{d'où,} \tag{I.4.10}$$

$$\|\varphi_t\|^{\mathcal{R},\mathcal{P}}_{C^{2,\beta}(M)} \leq \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{|\theta_j \circ \phi_j^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_j}}{\min(1, \delta_j^{2+\beta})}}_{=:\nu_{j,\beta}} \times |\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2,\beta;\Omega_j} \tag{I.4.11}$$

Or, l'inégalité (I.4.6) s'écrit :

$$|\psi^j \circ \phi_j^{-1} + \varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2,\beta_j;\Omega_j} \leq Cste_j \left( |\psi^j \circ \phi_j^{-1} + \varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2;\Omega_j} + |v_t^j|^{(2)}_{2;\Omega_j} \right)$$

avec $v_t^j = tf \circ \phi_j^{-1} + \ln(A_t) + \ln\left(det[g_{a\bar{b}} \circ \phi_j^{-1}]_{1\leq a,b\leq m}\right)$, donc :

$$|\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2,\beta_j;\Omega_j} \leq C\tilde{st}e_j \left( |\psi^j \circ \phi_j^{-1}|^*_{2,\beta_j;\Omega_j} + |\psi^j \circ \phi_j^{-1}|^*_{2;\Omega_j} + |\varphi_t \circ \phi_j^{-1}|^*_{2;\Omega_j} + |v_t^j|^{(2)}_{2;\Omega_j} \right) \tag{I.4.12}$$

avec $C\tilde{ste}_j = max(1, Cste_j)$ d'où :

$$\|\varphi_t\|^{\mathscr{R},\mathscr{P}}_{C^{2,\beta}(M)} \leq \sum_{j=1}^{N} \nu_{j,\beta} \mid \varphi_t \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2,\beta;\Omega_j} \leq \sum_{j=1}^{N} \nu_{j,\beta} \mid \varphi_t \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2,\beta_j;\Omega_j}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \nu_{j,\beta} C\tilde{ste}_j \left( \mid \psi^j \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2,\beta_j;\Omega_j} + \mid \psi^j \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2;\Omega_j} + \mid \varphi_t \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2;\Omega_j} + \mid v_t^j \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \right) \tag{I.4.13}$$

Il reste à majorer $\mid v_t^j \mid^{(2)}_{2;\Omega_j}$ et $\mid \varphi_t \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2;\Omega_j}$ indépendamment de $t$. Par l'estimation $C^2$ uniforme, on a $\mid \varphi_t \circ \phi_j^{-1} \mid^*_{2;\Omega_j} \leq Cste \times \gamma_4$, par ailleurs :

$$\mid v_t^j \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \leq t \mid f \circ \phi_j^{-1} \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} + \mid \ln(A_t) \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} + \mid \ln \left( det[g_{a\bar{b}} \circ \phi_j^{-1}]_{1\leq a,b\leq m} \right) \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \tag{I.4.14}$$

Or $\mid \ln(A_t) \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} = \left( sup_{x\in\Omega_j} (d_x)^2 \right) \mid \ln(A_t) \mid$ et $e^{-\|f\|_\infty} \leq A_t = \dfrac{\int_M v_g}{\int_M e^{tf} v_g} \leq e^{\|f\|_\infty}$, d'où :

$$\mid \ln(A_t) \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \leq sup_{x\in\Omega_j} (d_x)^2 \|f\|_\infty \tag{I.4.15}$$

Ce qui donne une estimation indépendante de $t$ :

$$\mid v_t^j \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \leq \mid f \circ \phi_j^{-1} \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} + sup_{x\in\Omega_j} (d_x)^2 \|f\|_\infty + \mid \ln \left( det[g_{a\bar{b}} \circ \phi_j^{-1}]_{1\leq a,b\leq m} \right) \mid^{(2)}_{2;\Omega_j} \tag{I.4.16}$$

On obtient par conséquent l'estimation $C^{2,\beta}$ recherchée.
Passons à la vérification des hypothèses 1 et 2 ci-dessus.

**L'ellipticité uniforme de $F$ sur $\Omega_j$**

Soient $x \in \Omega_j$ et $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,q=1}^{2m} F_{iq} \left( D^2 \psi_t^j(x) \right) \xi_i \xi_q &= dF_{D^2\psi_t^j(x)}(M) \quad \text{avec } M = [\xi_i \xi_j]_{1\leq i,j\leq m} \in S_{2m}(\mathbb{R}) \\
&= d(F_m \circ p)_{D^2\psi_t^j(x)}(M) \\
&= \left( d(F_m)_{p(D^2\psi_t^j(x))} \circ dp_{D^2\psi_t^j(x)} \right)(M) \\
&= d(F_m)_{[\tilde{g}^{\varphi_t}_{a\bar{b}}(\phi_j^{-1}(x))]_{1\leq a,b\leq m}} (p(M))
\end{aligned} \tag{I.4.17}$$

ici les $\tilde{g}^{\varphi_t}_{a\bar{b}}$ sont exprimés dans la carte $(U_j,\phi_j)$.

On note $\tilde{M} := p(M) = [\frac{1}{4}(M_{\ell s} + M_{(\ell+m)(s+m)} + iM_{\ell(s+m)} - iM_{(\ell+m)s})]_{1\leq \ell,s\leq m}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= [\frac{1}{4}(\xi_\ell\xi_s + \xi_{\ell+m}\xi_{s+m} + i\xi_\ell\xi_{s+m} - i\xi_{\ell+m}\xi_s)]_{1\leq \ell,s\leq m}\\ &= [\frac{1}{4}(\xi_\ell - i\xi_{\ell+m})(\underbrace{\xi_s + i\xi_{s+m}}_{=:\tilde{\xi}_s})]_{1\leq \ell,s\leq m}\\ &= [\frac{1}{4}\overline{\tilde{\xi}_\ell}\tilde{\xi}_s)]_{1\leq \ell,s\leq m}\end{aligned}\tag{I.4.18}$$

Par le même calcul que dans la preuve du lemme I.1.7, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i,q=1}^{2m} F_{iq}\left(D^2\psi_t^j(x)\right)\xi_i\xi_q &= tr\left(\tilde{g}^{-1}_{\varphi_t}(\phi_j^{-1}(x))\times\tilde{M}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}_{\varphi_t}(\phi_j^{-1}(x))\overline{\tilde{\xi}_a}\tilde{\xi}_b\end{aligned}\tag{I.4.19}$$

où $\tilde{\xi}_a = \xi_a + i\xi_{a+m}$ pour tout $a\in\{1,..,m\}$. On note $\tilde{\xi} := (\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_m)\in\mathbb{C}^m$. Ainsi, l'ellipticité uniforme de $F$ par rapport à la solution $\psi_t^j$ sur $\Omega_j$ est ramenée à l'existence de deux réels $\lambda_j,\Lambda_j>0$ indépendants de $t$ tels que :

$$\forall\tilde{\xi}\in\mathbb{C}^m,\forall x\in\Omega_j\quad \lambda_j|\tilde{\xi}|^2\leq\sum_{a,b=1}^{m}\tilde{g}^{a\bar{b}}_{\varphi_t}(\phi_j^{-1}(x))\tilde{\xi}_a\overline{\tilde{\xi}_b}\leq\Lambda_j|\tilde{\xi}|^2\tag{I.4.20}$$

On considère la forme hermitienne $h$ sur $T^{1,0}$ définie par :

$$h(U,V) = g(U,\overline{V})\quad\forall U,V\in T^{1,0}\tag{I.4.21}$$

Elle s'écrit localement :

$$h(U,V) = g_{a\bar{b}}U^a\overline{V^b}\quad\forall U = U^a\partial_a, V = V^b\partial_b\in T^{1,0}\quad a,b\in\{1,..,m\}\tag{I.4.22}$$

La forme hermitienne $h$ sur $T^{1,0}$ induit une forme hermitienne $h^\star$ sur $T^{1,0\star}$ qui s'exprime localement comme suit :

$$h^\star(\gamma,\theta) = g^{a\bar{b}}\gamma_a\overline{\theta_b}\quad\forall\gamma=\gamma_a dz^a,\theta=\theta_b dz^b\in T^{1,0\star}\quad a,b\in\{1,..,m\}\tag{I.4.23}$$

De même, la forme hermitienne $\tilde{h}_{\varphi_t}$ sur $T^{1,0}$ définie à partir de la métrique $\tilde{g}_{\varphi_t}$, induit une forme hermitienne $\tilde{h}^\star_{\varphi_t}$ sur $T^{1,0\star}$.

Soient $\tilde{\xi}\in\mathbb{C}^m$ et $x\in\Omega_j$. Dans ce qui suit, on note $P=\phi_j^{-1}(x)$. On considère le covecteur $\tilde{\xi}^\star\in T_P^{1,0\star}$ dont les composantes dans la carte $(U_j,\phi_j)$ sont les $\tilde{\xi}_i$ :

$$\tilde{\xi}^\star = \tilde{\xi}_1 dz^1 + ... + \tilde{\xi}_m dz^m\quad\text{dans la carte}(U_j,\phi_j)\tag{I.4.24}$$

Donc montrer l'inégalité (VI.2.12) revient à montrer que :

(I.4.25) $$\lambda_j \mid \tilde{\xi} \mid^2 \leq \left(\tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}\right)_P (\tilde{\xi}^{\star}, \tilde{\xi}^{\star}) \leq \Lambda_j \mid \tilde{\xi} \mid^2$$

Dans ce qui suit, et afin d'alléger les notations on ne notera plus l'indice $P$ de $h^{\star}_P$ et de $\left(\tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}\right)_P$. On note $A^{\star}_P$ l'unique endomorphisme de $T^{1,0\star}_P$ tel que :

(I.4.26) $$\tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}(\gamma, \theta) = h^{\star}(\gamma, A^{\star}_P \theta) \quad \forall \gamma, \theta \in T^{1,0\star}_P$$

$A^{\star}_P$ est un endomorphisme autoadjoint/hermitien de l'espace hermitien $(T^{1,0\star}_P, h^{\star})$ (ses valeurs propres sont donc réels). On désigne par $\lambda_{min}(A^{\star}_P)$ (respectivement $\lambda_{max}(A^{\star}_P)$) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de l'endomorphisme $A^{\star}_P$. Par le principe du min-max appliqué au produit hermitien $\tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}$ relativement au produit hermitien $h^{\star}$ on a :

**LEMMEI.4.1 (*min-max principle*)**

$$\max_{\theta \in T^{1,0\star}_P, h^{\star}(\theta,\theta)=1} \tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}(\theta, \theta) = \lambda_{max}(A^{\star}_P)$$
$$\min_{\theta \in T^{1,0\star}_P, h^{\star}(\theta,\theta)=1} \tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}(\theta, \theta) = \lambda_{min}(A^{\star}_P)$$

Remarque : Les valeurs propres de $A^{\star}_P$ sont par définition les valeurs propres du produit hermitien $\tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}$ relativement au produit hermitien $h^{\star}$.

Par le lemme I.4.1 on déduit que :

(I.4.27) $$\lambda_{min}(A^{\star}_P)\, h^{\star}(\tilde{\xi}^{\star}, \tilde{\xi}^{\star}) \leq \tilde{h}^{\star}_{\varphi_t}(\tilde{\xi}^{\star}, \tilde{\xi}^{\star}) \leq \lambda_{max}(A^{\star}_P)\, h^{\star}(\tilde{\xi}^{\star}, \tilde{\xi}^{\star})$$

L'étape suivante consistera à contrôler les valeurs propres $\lambda_{min}(A^{\star}_P)$ et $\lambda_{max}(A^{\star}_P)$ indépendemment de $t$ et de $P$. Il suffit d'effectuer le contrôle dans une carte spéciale. Par un calcul simple on montre que l'endomorphisme $A^{\star}_P$ s'écrit :

(I.4.28) $$\begin{aligned} A^{\star}_P : T^{1,0\star}_P &\to T^{1,0\star}_P \\ \theta_a dz^a &\mapsto (A^{\star}_P)^a_b \theta_a dz^b = g_{c\bar{b}}(P)\, \tilde{g}^{c\bar{a}}_{\varphi_t}(P)\, \theta_a dz^b \end{aligned}$$

On se place, à présent, dans une carte $g$-unitaire en $P$, $\tilde{g}_{\varphi_t}$-adaptée en $P$. Dans une telle carte, la matrice de l'endomorphisme $A^{\star}_P$ est :

(I.4.29) $$[(A^{\star}_P)^b_a]_{1 \leq a,b \leq m} = [g_{c\bar{a}}(P)\, \tilde{g}^{c\bar{b}}_{\varphi_t}(P)]_{1 \leq a,b \leq m} = diag(\tilde{g}^{1\bar{1}}_{\varphi_t}(P), \ldots, \tilde{g}^{m\bar{m}}_{\varphi_t}(P))$$

Or $\triangle^{\mathbb{C}}_g \varphi_t(P) = -g^{a\bar{b}}(P)\partial_{a\bar{b}}\varphi_t(P) = -\sum_a \partial_{a\bar{a}}\varphi_t(P) = -\sum_a \left(\tilde{g}^{\varphi_t}_{a\bar{a}}(P) - 1\right) = m - \sum_a \dfrac{1}{\tilde{g}^{a\bar{a}}_{\varphi_t}(P)}$, et par l'estimation uniforme du laplacien (proposition I.3.2), il existe un réel $\gamma_5 > 0$ indépendant de $t$

tel que $\|\triangle_g \varphi_t\|_\infty \leq \gamma_5$, ainsi :

$$0 < \frac{1}{\tilde{g}^{a\bar{a}}_{\varphi_t}(P)} \leq \sum_b \frac{1}{\tilde{g}^{b\bar{b}}_{\varphi_t}(P)} = m - \frac{1}{2}\triangle_g \varphi_t(P) \leq m + \|\triangle_g \varphi_t\|_\infty \leq m + \gamma_5 \quad \forall a \in \{1,\dots,m\}$$

d'où $\quad \tilde{g}^{a\bar{a}}_{\varphi_t}(P) \geq \dfrac{1}{m+\gamma_5} \quad \forall a \in \{1,\dots,m\}, \quad$ ce qui prouve que :

$$\lambda_{min}(A^\star_P) \geq \frac{1}{m+\gamma_5} \tag{I.4.30}$$

Pour majorer $\lambda_{max}(A^\star_P)$ indépendamment de $P$ et de $t$, on applique le lemme VII.1.2 (cf. Annexes) aux $a_i = \tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P) \geq 0$, $i \in \{1,..,m\}$ (on a bien $m \geq 2$), ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P)} \geq \left(\sum_{i=1}^m \tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P)\right)^{\frac{1}{m-1}} \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{\tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P)}\right)^{\frac{1}{m-1}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \tilde{g}^{\varphi_t}_{i\bar{i}}(P)\right)^{m-1} \geq \left(\sum_{i=1}^m \tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P)\right)\left(\prod_{i=1}^m \tilde{g}^{\varphi_t}_{i\bar{i}}(P)\right) \tag{I.4.31}$$

Or $\sum_{i=1}^m \tilde{g}^{\varphi_t}_{i\bar{i}}(P) = m - \triangle^{\mathbb{C}}_g \varphi_t(P)$ et $\prod_{i=1}^m \tilde{g}^{\varphi_t}_{i\bar{i}}(P) = det\, \tilde{g}_{\varphi_t}(P) = \underbrace{det\, g(P)}_{=1} \times e^{tf(P)} A_t$ par l'équation ($CY_t$), en outre, $A_t \geq e^{-\|f\|_\infty}$ donc :

$\tilde{g}^{a\bar{a}}_{\varphi_t}(P) \leq \left(\sum_{i=1}^m \tilde{g}^{i\bar{i}}_{\varphi_t}(P)\right) \leq e^{-tf(P)} \dfrac{1}{A_t}\left(m - \triangle^{\mathbb{C}}_g \varphi_t(P)\right)^{m-1} \leq e^{2\|f\|_\infty}(m+\gamma_5)^{m-1}$ $\forall a \in \{1,\dots,m\}$, d'où

$$\lambda_{max}(A^\star_P) \leq e^{2\|f\|_\infty}(m+\gamma_5)^{m-1} \tag{I.4.32}$$

Par les inégalités (I.4.27), (I.4.30) et (I.4.32), on déduit que :

$$\frac{1}{m+\gamma_5} h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \leq \tilde{h}^\star_{\varphi_t}(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \leq e^{2\|f\|_\infty}(m+\gamma_5)^{m-1} h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \tag{I.4.33}$$

Il reste à contrôler la quantité $h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star)$ indépendamment de $P$ en fonction de $|\tilde{\xi}|^2 = \sum_a |\tilde{\xi}_a|^2$. Cette quantité s'écrit :

$$h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) = g^{a\bar{b}}(P)\tilde{\xi}_a \overline{\tilde{\xi}_b} \quad \text{dans la carte } (U_j,\phi_j) \tag{I.4.34}$$

Par le principe du min-max appliqué sur $\mathbb{C}^m$ à la forme hermitienne $\prec X,Y \succ_{g(P)} = g^{a\bar{b}}(P)X_a\overline{Y_b}$ relativement à la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^m$, on obtient :

$$\forall X \in \mathbb{C}^m \quad \lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}\,|X|^2 \leq \prec X,X \succ_{g(P)} \leq \lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}\,|X|^2 \tag{I.4.35}$$

En particulier pour $\tilde{\xi}$ on a :

$$\lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}\;|\tilde{\xi}|^2 \leq h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \leq \lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}\;|\tilde{\xi}|^2 \tag{I.4.36}$$

Or les fonctions $P \longmapsto \lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}$ et $P \longmapsto \lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\leq a,b\leq m}$ sont continues sur $\overline{\phi_j^{-1}(\Omega_j)} \subset U_j$ qui est compact car c'est un fermé de la variété compacte $M$ (cf. (VI.2.2) pour le choix des domaines $\Omega_j$), donc sont bornées et atteignent leurs bornes, d'où :

(I.4.37)

$$\left(\min_{Q\in\overline{\phi_j^{-1}(\Omega_j)}} \lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(Q)]_{1\leq a,b\leq m}\right)\times|\tilde{\xi}|^2 \leq h^\star(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \leq \left(\max_{Q\in\overline{\phi_j^{-1}(\Omega_j)}} \lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(Q)]_{1\leq a,b\leq m}\right)\times|\tilde{\xi}|^2$$

Par les inégalités (I.4.33) et (VI.2.18), on déduit que :

$$\begin{aligned} &\lambda_j\;|\tilde{\xi}|^2 \leq \tilde{h}^\star_{\varphi_t}(\tilde{\xi}^\star,\tilde{\xi}^\star) \leq \Lambda_j\;|\tilde{\xi}|^2 \\ &\text{avec}\quad \lambda_j := \frac{1}{m+\gamma_5}\left(\min_{Q\in\overline{\phi_j^{-1}(\Omega_j)}} \lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(Q)]_{1\leq a,b\leq m}\right) \\ &\text{et}\quad \Lambda_j := e^{2\|f\|_\infty}(m+\gamma_5)^{m-1}\left(\max_{Q\in\overline{\phi_j^{-1}(\Omega_j)}} \lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(Q)]_{1\leq a,b\leq m}\right) \end{aligned} \tag{I.4.38}$$

$\lambda_j$ dépend de $m$, $\gamma_5$, $g$, $(U_j,\phi_j)$ et $\Omega_j$. $\Lambda_j$ dépend de $\|f\|_\infty$, $m$, $\gamma_5$, $g$, $(U_j,\phi_j)$ et $\Omega_j$. En outre, les réels $\lambda_j$ et $\Lambda_j$ ne dépendent pas de $t$, $x$ et $\tilde{\xi}$ ; ce qui prouve l'ellipticité uniforme.

**La concavité de $F$**

Vérifions à présent que $F$ est concave par rapport à $\psi_t^j$ sur $\Omega_j$ à savoir que $F$ est une fonction concave sur l'image de $\Omega_j$ par $D^2\psi_t^j$. On va montrer, en fait, que $F$ est concave sur $\mathscr{P}_{2m}$ (faisons remarquer que cet ensemble $\mathscr{P}_{2m}$ est convexe au titre d'image réciproque du convexe $\mathbb{C}^{m\times m}_{++}$ par l'application linéaire $p$). L'application $F$ s'écrivant $F = F_m \circ p$ où $p$ est une application linéaire, la preuve de cette concavité de $F$ est réduite à prouver que la fonction $F_m = \ln det : \mathbb{C}^{m\times m}_{++} \to \mathbb{R}$ est concave sur le cône convexe $\mathbb{C}^{m\times m}_{++}$ (on dit que le déterminant est $\log$ concave sur les matrices hermitiennes définies positives). On suit ici la preuve de [BV04] page 74 pour la log concavité du déterminant sur les matrices symétriques définies positives, l'idée étant d'utiliser le critère de concavité sur les lignes VII.4.1 (cf.Annexes).
Soient $Z \in \mathbb{C}^{m\times m}_{++}$ et $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$. On considère la fonction :

$$f_{Z,V}(t) := F_m(Z+tV) = \ln det(Z+tV) \tag{I.4.39}$$

On restreint $f_{Z,V}$ à un intervalle de valeurs $t$ telles que $Z+tV \in \mathbb{C}^{m\times m}_{++}$. La matrice $Z \in \mathbb{C}^{m\times m}_{++}$ donc elle admet une matrice racine carrée :

$$\exists! B \in \mathbb{C}^{m\times m}_{++} \,/\quad Z = B^2 \quad \text{on note : } B = Z^{\frac{1}{2}} \tag{I.4.40}$$

La matrice racine carrée $Z^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}_{++}^{m\times m}$, elle est donc inversible, ainsi :

$$\begin{aligned} f_{Z,V}(t) &= \ln det(Z+tV) = \ln det\left(Z^{\frac{1}{2}}(I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}})Z^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \ln\left(det(I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}})\times det(Z)\right) \\ &= \ln det(I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}}) + \ln det(Z) \end{aligned} \tag{I.4.41}$$

Par ailleurs, la matrice $Z^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}}$ est hermitienne, donc par le théorème spectral :

$$\exists P \in U(n)/ \quad P^{-1}(Z^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}})P = diag(\lambda_1,...,\lambda_m) \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{I.4.42}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} det(I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}}) &= det\left(P^{-1}(I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}})P\right) \\ &= det\left(I+t\,diag(\lambda_1,...,\lambda_m)\right) \\ &= det\left(diag(1+t\lambda_1,...,1+t\lambda_m)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{m}(1+t\lambda_i) \end{aligned} \tag{I.4.43}$$

Or pour tout $i \in \{1,..,m\}$, $1+t\lambda_i > 0$ car $I+tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}} \in \mathbb{C}_{++}^{m\times m}$ (on vérifie en effet très facilement que cette matrice hermitienne est définie positive), par conséquent en utilisant (VI.2.26) et (VI.2.28) on obtient :

$$f_{Z,V}(t) = \sum_{i=1}^{m}\ln(1+t\lambda_i) + \ln det(Z) \tag{I.4.44}$$

Ainsi,

$$f'_{Z,V}(t) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i} \quad \text{et} \quad f''_{Z,V}(t) = \sum_{i=1}^{m}\frac{-(\lambda_i)^2}{(1+t\lambda_i)^2} \le 0, \tag{I.4.45}$$

ce qui prouve que la fonction $f_{Z,V}$ est concave sur son domaine de définition. En conclusion, on déduit par le critère de concavité sur les lignes VII.4.1 (cf.Annexes), que la fonction $F_m = \ln det$ est concave sur $\mathbb{C}_{++}^{m\times m}$.

Remarque : Cette preuve de concavité de $F$ peut être faite par un calcul élémentaire (cf. proposition II.4.1). On peut par ailleurs la voir comme une conséquence d'un résultat plus général (cf. théorème VII.4.2 et corollaire VII.4.30).

# Chapitre II

# L'équation de la $k$-ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres prescrite

## II.1 Introduction

Sur une variété kählérienne compacte connexe de dimension $2m$, $\omega$ étant la forme de Kähler, $\Omega$ une forme volume donnée dans $[\omega]^m$ et $k$ un entier $1 < k < m$, on cherche à résoudre de façon unique dans $[\omega]$ l'équation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$ en utilisant une notion de $k$-positivité pour $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (les cas extrêmes sont résolus : $k = m$ par Yau, $k = 1$ trivialement). Nous résolvons par la méthode de continuité l'équation hessienne d'ordre $k$ complexe elliptique correspondante sous l'hypothèse que la variété est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, ici requise seulement pour établir un pincement a priori de valeurs propres.

## II.2 Le théorème

Soit $(M, J, g, \omega)$ une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geq 3$. Fixons un entier $2 \leq k \leq m-1$.
Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, on considère la $(1,1)$-forme $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ et le 2-tenseur associé $\tilde{g}$ défini par $\tilde{g}(X,Y) = \tilde{\omega}(X, JY)$ pour tout $X, Y \in TM$. On considère en outre les formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne $h$ et $\tilde{h}$ sur $T^{1,0}$ définies par :

(II.2.1) $$h(U,V) = g(U,\overline{V}) \quad \text{et} \quad \tilde{h}(U,V) = \tilde{g}(U,\overline{V}) \quad \forall U,V \in T^{1,0}$$

On désigne par $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ le vecteur des valeurs propres de la forme sesquilinéaire $\tilde{h}$ relativement à la forme hermitienne $h$. Ce sont par définition les valeurs propres de l'unique endomorphisme $A$ de $T^{1,0}$ tel que :

(II.2.2) $$\tilde{h}(U,V) = h(U,AV) \quad \forall U,V \in T^{1,0}$$

Un calcul facile montre que cet endomorphisme $A$ s'écrit :

$$\begin{aligned} A : T^{1,0} &\to T^{1,0} \\ U^i\partial_i &\mapsto A_i^j U^i \partial_j = g^{j\bar{\ell}}\tilde{g}_{i\bar{\ell}} U^i \partial_j \end{aligned}$$

$A$ est un endomorphisme autoadjoint/hermitien de l'espace hermitien $(T^{1,0}, h)$, par conséquent $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \mathbb{R}^m$. On considère le cône $\Gamma_k = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^m / \forall 1 \leq j \leq k, \quad \sigma_j(\lambda) > 0\right\}$, où $\sigma_j$ désigne la $j$-ième fonction symétrique élémentaire.

**DÉFINITION II.2.1** On dit que $\varphi$ (resp. $\tilde{\omega}$) est $k$-admissible (resp. $k$-positive) si $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \Gamma_k$.

Notre résultat consiste en le théorème suivant :

**THÉORÈME II.2.1 (*Equation* $\sigma_k$)** Soit $(M, J, g, \omega)$ une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geq 3$ à courbure bisectionnelle holomorphe positive ou nulle, et $2 \leq k \leq m-1$ un entier naturel fixé. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^\infty$ vérifiant $\int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m$, alors il existe une unique fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telle que :

1. $\int_M \varphi \omega^m = 0$
2. $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \frac{e^f}{\binom{m}{k}} \omega^m \quad (E_k)$

En outre la solution $\varphi$ est $k$-admissible.

L'hypothèse de courbure intervient seulement à la section : Pincement des valeurs propres, dans l'estimation a priori sur $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$, comme elle le faisait dans la première résolution de la conjecture de Calabi [AUB70] p. 408 et il faudrait la lever si possible (comme Aubin l'a fait avec $k = m$ dans [AUB76]).
Le problème de Dirichlet posé dans un ouvert borné convenable de $\mathbb{C}^m$ a été résolu pour l'analogue de $(E_k)$ [LI04, VIN88] et dans ce cadre, une théorie des solutions faibles des équations dégénérées correspondantes, parallèle à celle de Bedford-Taylor pour l'équation de Monge-Ampère complexe, est abordée dans [BLO05].
Grâce à Julien Keller, que nous remercions, nous avons récemment pris connaissance d'un travail indépendant (mais incomplet) de [HOU08] visant au même résultat que le nôtre, avec une estimation de gradient différente et une estimation sur $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ similaire, mais sans preuve donnée pour l'estimée $C^2$.

Notons que la fonction $f$ apparaîssant au second membre de l'équation $(E_k)$ satisfait nécessairement la condition de normalisation :

$$(N) \qquad \int_M e^f \omega^m = \binom{m}{k} \int_M \omega^m$$

Ceci résulte en effet du lemme suivant :

**LEMMEII.2.1** $\int_M \tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \int_M \omega^m$

**Preuve** : On a $[\tilde{\omega}] = [\omega]$, il existe donc une 1-forme réelle $\alpha$ telle que $\tilde{\omega} = \omega + d\alpha$, par conséquent $\tilde{\omega}^k = (\omega + d\alpha)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (d\alpha)^\ell \wedge \omega^{k-\ell}$ et $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \omega^m + \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} (d\alpha)^{\ell-1} \wedge \omega^{m-\ell} \wedge d\alpha$.
Or la forme $(d\alpha)^{\ell-1} \wedge \omega^{m-\ell}$ est fermée donc la forme $(d\alpha)^{\ell-1} \wedge \omega^{m-\ell} \wedge d\alpha$ est exacte, d'où $[\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k}] = [\omega^m]$. Le résultat se déduit par le théorème de Stokes. ■

Remarque : 1. Le cas $k = m$ correspond à l'équation de Calabi-Yau :

$$(E_m) \quad \tilde{\omega}^m = e^f \omega^m$$

2. Le cas $k = 1$ est trivial. En effet, l'équation $(E_1)$ $\tilde{\omega} \wedge \omega^{m-1} = \frac{e^f}{m} \omega^m$ est juste une équation en Laplacien :

$$(E_1) \quad \Delta_g^{\mathbb{C}} \varphi = m - e^f \quad \text{avec ici} \quad (N) : \int_M (m - e^f) \omega^m = 0$$

Dans ce qui suit, on exprime l'équation $(E_k)$ différemment. On va en effet changer cette équation portant sur les formes en une équation portant sur les fonctions, et ce par le lemme suivant :

**LEMMEII.2.2** $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \dfrac{\sigma_k\left(\lambda(g^{-1}\tilde{g})\right)}{\binom{m}{k}}\,\omega^m$

**Preuve** : Soit $P \in M$. Il suffit de prouver l'égalité en $P$ dans une carte $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée $z$ centrée en $P$. Dans une telle carte $g_{i\bar{j}}(0) = \delta_{ij}$ et $\tilde{g}_{i\bar{j}}(0) = \delta_{ij}\lambda_i(0)$, donc en $z = 0$, on a $\omega = i\,dz^a \wedge dz^{\bar{a}}$ et $\tilde{\omega} = i\lambda_a(0)dz^a \wedge dz^{\bar{a}}$, par conséquent :

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} &= \Big(\sum_{a=1}^{m} i\lambda_a(0)dz^a \wedge dz^{\bar{a}}\Big)^k \wedge \Big(\sum_{b=1}^{m} i\,dz^b \wedge dz^{\bar{b}}\Big)^{m-k} \\
&= \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_k)\in\{1,\cdots,m\}\text{distincts} \\ (b_1,\ldots,b_{m-k})\in\{1,\cdots,m\}\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}\text{distincts}}} i^m\,\lambda_{a_1}(0)\cdots\lambda_{a_k}(0) \\
&\qquad (dz^{a_1}\wedge dz^{\bar{a}_1})\wedge\ldots\wedge(dz^{a_k}\wedge dz^{\bar{a}_k})\wedge(dz^{b_1}\wedge dz^{\bar{b}_1})\wedge\ldots\wedge(dz^{b_{m-k}}\wedge dz^{\bar{b}_{m-k}})
\end{aligned}$$

Or $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_{m-k}$ sont $m$ entiers distincts de $\{1,\cdots,m\}$et les 2-formes commutent, par conséquent :

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} &= \Big(\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_k)\in\{1,\cdots,m\}\text{distincts} \\ (b_1,\ldots,b_{m-k})\in\{1,\cdots,m\}\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}\text{distincts}}} \lambda_{a_1}(0)\cdots\lambda_{a_k}(0)\Big)\ \underbrace{i^m(dz^1\wedge dz^{\bar{1}})\wedge\ldots\wedge(dz^m\wedge dz^{\bar{m}})}_{=\frac{\omega^m}{m!}} \\
&= \Big(\sum_{(a_1,\ldots,a_k)\in\{1,\cdots,m\}\text{distincts}} (m-k)!\ \ \lambda_{a_1}(0)\cdots\lambda_{a_k}(0)\Big)\frac{\omega^m}{m!} \\
&= \frac{(m-k)!}{m!}k!\sigma_k\left(\lambda_1(0),\ldots,\lambda_m(0)\right)\omega^m = \frac{\sigma_k\left(\lambda(g^{-1}\tilde{g})\right)}{\binom{m}{k}}\,\omega^m
\end{aligned}$$

■

Par le lemme II.2.2, on déduit que l'équation $(E_k)$ s'écrit :

$$(E_k) \qquad \sigma_k\left(\lambda(g^{-1}\tilde{g})\right) = e^f$$

L'endomorphisme $A$ étant hermitien, on dispose par le théorème spectral d'une base de $T^{1,0}$, $h$-orthonormée de vecteurs propres $e_1,\ldots,e_m$ : $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \{1,\cdots,m\}$. Par $k$-admissibilité de la fonction $\varphi$, on a $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \Gamma_k$. Soit $P \in M$, en $P$ dans une carte $z$ la matrice de l'endomorphisme $A$ vaut : $Mat_{\partial_1,\ldots,\partial_m} A_P = [A^i_j(z)]_{1\le i,j\le m}$ ainsi, $\sigma_k\left(\lambda(A_P)\right) = \sigma_k\left(\lambda([A^i_j(z)]_{1\le i,j\le m})\right)$. En outre,

$$A^j_i = g^{j\bar{\ell}}\tilde{g}_{i\bar{\ell}} = g^{j\bar{\ell}}(g_{i\bar{\ell}} + \partial_{i\bar{\ell}}\varphi) = \delta^j_i + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi \qquad \text{(II.2.3)}$$

Par conséquent, l'équation s'écrit localement :

$$(E_k) \qquad \sigma_k\left(\lambda\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right)\right) = e^f$$

Vérifions dès à présent qu'une solution de l'équation $(E_k)$ est nécessairement $k$-admissible :

**PROPOSITIONII.2.1** Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$. Si $\varphi$ est une solution de l'équation $(E_k) : \sigma_k\left(\lambda\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right)\right) = e^f$ alors $\varphi$ est $k$-admissible.

**Preuve** *:* Vérifions que $\varphi$ est $k$-admissible, à savoir que $\sigma_a\lambda(g^{-1}\tilde{g}) > 0$ pour tout $1 \leq a \leq k$. Ceci est vérifié pour $k$ puisque $\varphi$ est solution de $(E_k)$ et $e^f > 0$.
La fonction $\varphi$ est continue sur la variété compacte $M$ donc atteint son minimum en un point $m_0 \in M$, la matrice hessienne complexe de $\varphi$ au point $m_0$ à savoir $[\partial_{i\bar{j}}\varphi(m_0)]_{1\leq i,j\leq m}$ est donc positive. En outre, dans une carte $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée en $m_0$, on a $\lambda(g^{-1}\tilde{g})(m_0) = (1+\partial_{1\bar{1}}\varphi(m_0),\ldots,1+\partial_{m\bar{m}}\varphi(m_0))$. Donc du fait que $\partial_{i\bar{i}}\varphi(m_0) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, on déduit que $\lambda_i(g^{-1}\tilde{g})(m_0) \geq 1 > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui montre que $\lambda(g^{-1}\tilde{g})(m_0) \in \Gamma_k$.
Soit $U_{m_0}$ un ouvert contenant $m_0$ sur lequel $\forall 1 \leq a \leq k, \sigma_a\lambda(g^{-1}\tilde{g}) > 0$ (un tel ouvert existe par continuité), donc $\forall m \in U_{m_0}, \lambda(g^{-1}\tilde{g})(m) \in \Gamma_k$. On note $\mathcal{M} := \left\{P \in M / \lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) \in \Gamma_k\right\}$.
L'ensemble $\mathcal{M}$ est non vide car contient l'ouvert $U_{m_0}$. En outre, $\mathcal{M}$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\Gamma_k$ par une application continue. Montrons que $\mathcal{M}$ est fermé : soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ qui converge vers $P \in M$. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leq a \leq k-1$, $\sigma_a\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P_i) > 0$ donc par passage à la limite, on obtient $\sigma_a\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) \geq 0$ pour tout $1 \leq a \leq k-1$. En outre, $\sigma_k\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) = e^{f(P)} > 0$. Par conséquent, les inégalités de Maclaurin (cf. Annexes lemme VII.8.1) s'appliquent et on a :

$$\text{(II.2.4)} \qquad \frac{\sigma_1\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P)}{\binom{m}{1}} \geq \ldots \geq \left(\frac{\sigma_{k-1}\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P)}{\binom{m}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq \underbrace{\left(\frac{\sigma_k\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P)}{\binom{m}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}}_{>0}$$

On déduit donc que $\forall 1 \leq a \leq k, \sigma_a\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) > 0$ à savoir que $\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) \in \Gamma_k$, ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est fermé.
Finalement, on déduit par connexité de $M$ que $\mathcal{M} = M$, à savoir que $\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P) \in \Gamma_k$ pour tout $P \in M$, autrement dit la solution $\varphi$ est $k$-admissible. ■

**PROPOSITIONII.2.2** L'ensemble des fonctions $k$-admissibles est convexe (comme pour le cas $k = m$).

**Preuve** *:* Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire VII.4.2, voir Annexes. ■

De façon équivalente l'équation $(E_k)$ s'écrit :

$$(E_k) \qquad \ln\sigma_k\left(\lambda\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right)\right) = f$$

On définit $f_k : \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ par $f_k(B) = \sigma_k\left(\lambda(B)\right)$ et $F_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ par $F_k(B) = \ln \sigma_k\left(\lambda(B)\right)$ où :

$$\lambda^{-1}(\Gamma_k) := \{B \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) / \lambda(B) \in \Gamma_k\} \tag{II.2.5}$$

Cet ensemble $\lambda^{-1}(\Gamma_k)$ est convexe (cf. Annexes corollaire VII.4.2).
La fonction $f_k$ est un polynôme en les variables $B_i^j$, plus précisément :

$$f_k(B) = \sum_{|I|=k} B_I^I \tag{II.2.6}$$

(somme des mineurs principaux d'ordre $k$ de la matrice $B$).
Ainsi, l'équation $(E_k)$ s'écrit :

$$F_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right) = f \tag{$E_k$}$$

Il s'agit d'une EDP non linéaire du second ordre elliptique (l'ellipticité de l'équation sera justifiée au chapitre III après le calcul du linéarisé). C'est une équation du type hessienne complexe. On prouve l'existence d'une solution $k$-admissible en utilisant la méthode de continuité (cf. chapitre III).

# II.3 Dérivées de $F_k$

## II.3.1 Calcul des dérivées en une diagonale

Les dérivées premières du polynôme symétrique $\sigma_k$ sont données par : $\forall 1 \leq i \leq m$, $\dfrac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \sigma_{k-1,i}(\lambda)$ où $\sigma_{k-1,i}(\lambda) := \sigma_{k-1}|_{\lambda_i=0}$. Pour $1 \leq i \neq j \leq m$, on pose $\sigma_{k-2,ij}(\lambda) := \sigma_{k-2}|_{\lambda_i=\lambda_j=0}$ et $\sigma_{k-2,ii}(\lambda) = 0$. Les dérivées secondes du polynôme $\sigma_k$ sont données par : $\dfrac{\partial^2 \sigma_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) = \sigma_{k-2,ij}(\lambda)$.

Dans cette section, on va calculer les dérivées de la fonction $F_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, B \mapsto \ln \sigma_k \lambda(B)$ en des matrices diagonales. Pour cela, on commence par calculer les dérivées de la fonction $f_k : \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, B \mapsto \sigma_k \lambda(B)$ en des matrices diagonales.

$$f_k(B) = \sigma_k \lambda(B) = \sum_{|I|=k} B_I^I$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq m} \sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma) B_{i_1}^{i_{\sigma(1)}} \ldots B_{i_k}^{i_{\sigma(k)}} \tag{II.3.1}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k\leq m} \varepsilon_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k} B_{i_1}^{j_1} \ldots B_{i_k}^{j_k} \tag{II.3.2}$$

où $\varepsilon^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1,...,i_k \text{ distincts et } j_1,...,j_k \text{ permutation paire de } i_1,...,i_k \\ -1 & \text{si } i_1,...,i_k \text{ distincts et } j_1,...,j_k \text{ permutation impaire de } i_1,...,i_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $B$ une matrice diagonale réelle : $B = diag(b_1,...,b_m)$ Soients $1 \le i,j \le m$.

$$\frac{\partial f_k}{\partial B^j_i}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{1\le i_1,...,i_k,j_1,...,j_k\le m} \varepsilon^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} \frac{\partial}{\partial B^j_i}\left(B^{j_1}_{i_1}...B^{j_k}_{i_k}\right)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\le i_1,...,i_k,j_1,...,j_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \text{ et } j_s=j}} \varepsilon^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} B^{j_1}_{i_1}...B^{j_{s-1}}_{i_{s-1}} B^{j_{s+1}}_{i_{s+1}}...B^{j_k}_{i_k} \tag{II.3.3}$$

- **CAS 1** : $i \neq j$. Dans le cas où $j_1,...,j_k$ est une permutation de $i_1...i_k$, cette permutation $\sigma$ est différente de l'identité car $i_s = i$ et $i_{\sigma(s)} = j_s = j \neq i$. Or $B$ est diagonale, donc $\frac{\partial f_k}{\partial B^j_i}(B) = 0$ dans ce cas.
- **CAS 2** : $i = j$. Les termes non nuls de la somme (II.3.3) correspondent au cas où $(j_1,...,j_k) = (i_1...i_k)$ (donc à la permutation identité), donc dans ce cas :

$$\frac{\partial f_k}{\partial B^j_i}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\le i_1,...,i_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i}} \varepsilon^{i_1...i_k}_{i_1...i_k} b_{i_1}...b_{i_{s-1}} b_{i_{s+1}}...b_{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<...<i_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i}} b_{i_1}...b_{i_{s-1}} b_{i_{s+1}}...b_{i_k}$$

$$= \frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_i}(b_1,...,b_m) = \sigma_{k-1,i}(b_1,...,b_m) \tag{II.3.4}$$

Calculons à présent les dérivées secondes de $f_k$ en des matrices diagonales.
Soient $i,j,q,o \in \{1,...,m\}$. Par (II.3.3), on a :

$$\frac{\partial f_k}{\partial B^j_i}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\le i_1,...,i_k,j_1,...,j_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \text{ et } j_s=j}} \varepsilon^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} B^{j_1}_{i_1}...B^{j_{s-1}}_{i_{s-1}} B^{j_{s+1}}_{i_{s+1}}...B^{j_k}_{i_k} \tag{II.3.5}$$

donc :

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial B^o_q \partial B^j_i}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\le i_1,...,i_k,j_1,...,j_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \text{ et } j_s=j}} \varepsilon^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} \frac{\partial}{\partial B^o_q}\left(B^{j_1}_{i_1}...B^{j_{s-1}}_{i_{s-1}} B^{j_{s+1}}_{i_{s+1}}...B^{j_k}_{i_k}\right) \tag{II.3.6}$$

- **CAS 1** : $q = i$. Dans ce cas, on trouve $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial B_i^o \partial B_i^j}(B) = 0$.
- **CAS 2** : $q \neq i$.

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial B_q^o \partial B_i^j}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\leq m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \text{ et } j_s=j \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q \text{ et } j_t=o}} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k} \frac{\partial}{\partial B_q^o}\left(B^{j_1}_{i_1}\dots B^{j_{s-1}}_{i_{s-1}} B^{j_{s+1}}_{i_{s+1}}\dots B^{j_k}_{i_k}\right)$$

$$(\text{II.3.7}) \qquad = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\leq m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \text{ et } j_s=j \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q \text{ et } j_t=o}} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k} B^{j_1}_{i_1}\dots\widehat{B^{j_s}_{i_s}}\dots\widehat{B^{j_t}_{i_t}}\dots B^{j_k}_{i_k}$$

- **Sous-cas 1** : $\{q,i\} \neq \{o,j\}$. Alors dans le cas où $j_1\dots j_k$ est une permutation de $i_1\dots i_k$, cette permutation vérifie : $\exists r \not\in \{s,t\} / j_r \neq i_r$, or $B$ est diagonale, donc $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial B_q^o \partial B_i^j}(B) = 0$ dans ce cas.
- **Sous-cas 2** : $\{q,i\} \neq \{o,j\}$.
  - **i/** : Si $q = o$, alors la seule permutation donnant un terme non nul est l'identité et

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial B_q^q \partial B_i^i}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_k\leq m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q}} b_{i_1}\dots\widehat{b_{i_s}}\dots\widehat{b_{i_t}}\dots b_{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_1<\dots<i_k\leq m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q}} b_{i_1}\dots\widehat{b_{i_s}}\dots\widehat{b_{i_t}}\dots b_{i_k}$$

$$(\text{II.3.8}) \qquad = \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q}(b_1,\dots,b_m) = \sigma_{k-2,iq}(b_1,\dots,b_m)$$

  - **ii/** : Si $q = j$, alors la seule permutation donnant un terme non nul est celle qui échange $s$ et $t$, et

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial B_q^i \partial B_i^q}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q}} (-1)\, b_{i_1}\dots\widehat{b_{i_s}}\dots\widehat{b_{i_t}}\dots b_{i_k}$$

$$= - \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_k\le m \\ \text{avec } \exists s, i_s=i \\ \text{et } \exists t\neq s, i_t=q}} b_{i_1}\dots\widehat{b_{i_s}}\dots\widehat{b_{i_t}}\dots b_{i_k}$$

$$= -\frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q}(b_1,\dots,b_m) = -\sigma_{k-2,iq}(b_1,\dots,b_m) \qquad \text{(II.3.9)}$$

Récapitulons ces résultats :

$$\frac{\partial f_k}{\partial B_i^j}\big(diag(b_1,\dots,b_m)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ \sigma_{k-1,i}(b_1,\dots,b_m) & \text{si } i=j \end{cases} \qquad \text{(II.3.10)}$$

$$\text{si } i\neq j \quad \frac{\partial^2 f_k}{\partial B_j^j \partial B_i^i}\big(diag(b_1,\dots,b_m)\big) = \sigma_{k-2,ij}(b_1,\dots,b_m)$$

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial B_j^i \partial B_i^j}\big(diag(b_1,\dots,b_m)\big) = -\sigma_{k-2,ij}(b_1,\dots,b_m) \qquad \text{(II.3.11)}$$

et toutes les autres dérivées secondes de $f_k$ en $diag(b_1,\dots,b_m)$ sont nulles.

On calcule à partir de là les dérivées secondes de $F_k = \ln f_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \to \mathbb{R}, B \mapsto \ln \sigma_k \lambda(B)$ en des matrices diagonales $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ avec $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \Gamma_k$. On trouve le résultat suivant :

$$\frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ \dfrac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} & \text{si } i=j \end{cases} \qquad \text{(II.3.12)}$$

$$\text{si } i\neq j \quad \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_j^i \partial B_i^j}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = -\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}$$

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial B_j^j \partial B_i^i}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = \frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} - \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)\sigma_{k-1,j}(\lambda)}{\big(\sigma_k(\lambda)\big)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial B_i^i \partial B_i^i}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = -\frac{\big(\sigma_{k-1,i}(\lambda)\big)^2}{\big(\sigma_k(\lambda)\big)^2} \qquad \text{(II.3.13)}$$

et que toutes les autres dérivées secondes de $F_k$ en $diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ sont nulles.

### II.3.2 L'invariance de $F_k$ et de ses différentielles première et seconde

$F_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \to \mathbb{R}$ est invariante par similitude unitaire :

$$\forall B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k), \quad \forall U \in U_m(\mathbb{C}), \quad F_k(B) = F_k({}^t\overline{U} B U) \tag{II.3.14}$$

En différentiant la formule d'invariance (II.3.14), on montre que la différentielle et la différentielle seconde de $F_k$ sont aussi invariantes par similitude unitaire au sens suivant :

$$\forall B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k), \forall \zeta \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}), \forall U \in U_m(\mathbb{C}), \quad (dF_k)_B.\zeta = (dF_k)_{{}^t\overline{U}BU}.({}^t\overline{U}\zeta U) \tag{II.3.15}$$

et $\forall B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k), \forall \zeta \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}), \forall \Theta \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C})$,

$$\forall U \in U_m(\mathbb{C}), \quad (d^2F_k)_B.(\zeta, \Theta) = (d^2F_k)_{{}^t\overline{U}BU}.({}^t\overline{U}\zeta U, {}^t\overline{U}\Theta U) \tag{II.3.16}$$

Ces formules d'invariance nous permettent de nous ramener au cas diagonal, quand cela est utile.

## II.4 Concavité de $F_k = \ln \sigma_k \lambda$

**PROPOSITIONII.4.1** La fonction :

$$F_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \to \mathbb{R}$$

$$B \mapsto F_k(B) = \ln \sigma_k \Big(\lambda(B)\Big) \tag{II.4.1}$$

$$\text{où } \lambda^{-1}(\Gamma_k) := \{C \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) / \lambda(C) \in \Gamma_k\}, \tag{II.4.2}$$

est <u>concave</u> (ceci est valable pour tout entier $k \in \{1, ..., m\}$).

<u>Remarque</u> : On montre en Annexes la concavité des fonction $u \circ \lambda$ et plus généralement $u \circ \lambda_B$ lorsque $u \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ et est symétrique (voir le théorème VII.4.2), ce qui fournit en particulier la concavité des fonctions $F_k = \ln \sigma_k \lambda$ (corollaire VII.4.30) et plus généralement $\ln \sigma_k \lambda_B$ (corollaire VII.4.29). Dans cette section, on démontre d'une façon élémentaire la concavité de la fonction $F_k = \ln \sigma_k \lambda : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ sur $\lambda^{-1}(\Gamma_k)$.

**<u>Preuve</u>** : $F_k$ étant de classe $C^2$, cette concavité est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\forall B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k), \forall \zeta \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}(B) \zeta_i^j \zeta_r^s \leq 0 \tag{II.4.3}$$

Soient $B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k)$ et $\zeta \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$. Soit $U \in U_m(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{U}BU = diag(\lambda_1,...,\lambda_m)$. On a $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m) \in \Gamma_k$ puisque $B \in \lambda^{-1}(\Gamma_k)$. On note $\tilde{\zeta} = {}^t\overline{U}\zeta U \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$.

$$
\begin{aligned}
S &:= \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}(B)\zeta_i^j \zeta_r^s \\
&= (d^2 F_k)_B.(\zeta,\zeta) \quad \text{donc par la formule d'invariance (II.4.1)} \\
&= (d^2 F_k)_{{}^t\overline{U}BU}.({}^t\overline{U}\zeta U, {}^t\overline{U}\zeta U) \\
&= \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}(diag(\lambda_1,...,\lambda_m))\tilde{\zeta}_i^j \tilde{\zeta}_r^s \\
&= \sum_{i\neq j=1}^{m} -\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\tilde{\zeta}_i^j \underbrace{\tilde{\zeta}_j^i}_{=\overline{\tilde{\zeta}_i^j}} + \sum_{i\neq j=1}^{m} \underbrace{\left(\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} - \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)\sigma_{k-1,j}(\lambda)}{\left(\sigma_k(\lambda)\right)^2}\right)}_{=:c_{ij}} \tilde{\zeta}_i^i \tilde{\zeta}_j^j + \sum_{i=1}^{m} -\frac{(\sigma_{k-1,i}(\lambda))^2}{\left(\sigma_k(\lambda)\right)^2}(\tilde{\zeta}_i^i)^2
\end{aligned}
$$

(II.4.4)
$$= \sum_{i,j=1}^{m} -\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} |\tilde{\zeta}_i^j|^2 + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\tilde{\zeta}_i^i \tilde{\zeta}_j^j$$

Or $c_{ij} = \dfrac{\partial^2(ln\,\sigma_k)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}(\lambda)$, et $\tilde{\zeta}_i^i \in \mathbb{R}$, donc $\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\tilde{\zeta}_i^i\tilde{\zeta}_j^j \leq 0$ par concavité de $\ln\sigma_k$ en $\lambda \in \Gamma_k$ (cf. [CNS85] page 269). En outre, $\sigma_{k-2,ij}(\lambda) > 0$ puisque $\lambda \in \Gamma_k$, donc $\sum_{i,j=1}^{m} -\dfrac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} |\tilde{\zeta}_i^j|^2 \leq 0$, ce qui montre que $S \leq 0$ et achève la preuve de la concavité de $F_k$ sur $\lambda^{-1}(\Gamma_k)$. ■

## II.5 Preuve de l'unicité

Nous donnons ici une preuve n'utilisant pas la convexité de l'ensemble des fonctions $k$-admissibles (cf. proposition II.2.2, celle-ci découle du corollaire VII.4.2, voir Annexes). Nous vous renvoyons à la remarque plus bas pour une simplification significative de la preuve, lorsque la proposition II.2.2 est utilisée.

Soient $\varphi_0$ et $\varphi_1$ deux solutions $k$-admissibles lisses de l'équation $(E_k)$ d'intégrales nulles : $\int_M \varphi_0\,\omega^m = \int_M \varphi_1\,\omega^m = 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, on considère la fonction :

(II.5.1)
$$\varphi_t = t\,\varphi_1 + (1-t)\varphi_0 = \varphi_0 + t\,\varphi$$

avec $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Désormais, et dans le but d'alléger les notations, on notera $[\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_1]$ au lieu de $[\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_1]_{1\leq i,j\leq m}$. Soit $P \in M$, en $P$ on a :

(II.5.2)
$$f_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_1(P)]\right) - f_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_0(P)]\right) = 0$$

On note $h_k^P(t) = f_k\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(P)]\Big)$, ainsi, l'égalité précédente s'écrit $h_k^P(1) - h_k^P(0) = 0$ ce qui équivaut à $\displaystyle\int_0^1 \frac{dh_k^P}{dt}\,dt = 0$. Or

$$\begin{aligned}\frac{dh_k^P}{dt} &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial B_i^j}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(P)]\Big)\left(\sum_{\ell=1}^m g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi(P)\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial B_i^\ell}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(P)]\Big) g^{\ell\bar{j}}(P)\right)}_{=:\alpha_{ij}^t(P)} \partial_{i\bar{j}}\varphi(P)\end{aligned}$$

$$= \Big(d\tilde{G}_{\varphi_t}.\varphi\Big)(P) \quad \text{avec} \quad \tilde{G}(\varphi) = f_k[\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi] \tag{II.5.3}$$

(Cette quantité est en particulier intrinsèque). Par conséquent, on obtient :

$$\mathscr{L}\varphi(P) := \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(P)\partial_{i\bar{j}}\varphi(P) = 0 \quad \text{avec} \quad a_{ij}(P) = \int_0^1 \alpha_{ij}^t(P)\,dt \tag{II.5.4}$$

**LEMMEII.5.1** La matrice $[a_{ij}(P)]_{1\le i,j\le m}$ est hermitienne.

**Preuve** : On a $a_{ij}(P) = \int_0^1 \alpha_{ij}^t(P)\,dt$, donc il suffit de prouver que pour tout $t \in [0,1]$, la matrice $[\alpha_{ij}^t(P)]_{1\le i,j\le m}$ est hermitienne. On fixe $t \in [0,1]$, pour prouver que $[\alpha_{ij}^t(P)]_{1\le i,j\le m}$ est hermitienne, il suffit de vérifier cet énoncé dans une carte particulière. Or en $P$ dans une carte $g$-unitaire $\tilde{g}_{\varphi_t}$-adaptée en $P$ :

$$[\alpha_{ij}^t(P)]_{1\le i,j\le m} = diag\left(\frac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_1}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(P)\big),\ldots,\frac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_m}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(P)\big)\right) \tag{II.5.5}$$

est hermitienne, ce qui achève la preuve. ■

La fonction $\varphi$ est continue sur la variété compacte $M$ donc atteint son minimum en un point $m_0 \in M$ ; la matrice hessienne complexe de $\varphi$ au point $m_0$ à savoir $[\partial_{i\bar{j}}\varphi(m_0)]_{1\le i,j\le m}$ est donc positive.

**LEMMEII.5.2** Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0) \in \Gamma_k$, autrement dit les fonctions $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ sont $k$-admissibles au point $m_0$.

**Preuve** : On note $\mathscr{W} := \{t \in [0,1] / \lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0) \in \Gamma_k\}$. Cet ensemble $\mathscr{W}$ est non vide, il contient en effet 0 ; et c'est un ouvert de $[0,1]$. Soit $t$ le plus grand réel de $[0,1]$ tel que $[0,t[\subset \mathscr{W}$. Supposons que $t < 1$ et montrons qu'on aboutit alors à une contradiction.
Soit $1 \le q \le k$, on note $h_q^{m_0}(s) = f_q\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(m_0)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_s(m_0)]\Big)$, on a :

$$\sigma_q\Big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0)\Big) - \sigma_q\Big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_0})(m_0)\Big) = h_q^{m_0}(t) - h_q^{m_0}(0) = \int_0^t \frac{dh_q^{m_0}}{ds}\,ds \tag{II.5.6}$$

Montrons que $\dfrac{dh_q^{m_0}}{ds} \geq 0$ pour tout $s \in [0,t[$. Soit $s \in [0,t[$, la quantité $\dfrac{dh_q^{m_0}}{ds}$ est intrinsèque donc il suffit de prouver l'énoncé dans une carte particulière en $m_0$. En $m_0$ dans une carte $g$-unitaire $\tilde{g}_{\varphi_s}$-adaptée en $m_0$, on a :

$$\frac{dh_q^{m_0}}{ds} = \sum_{i,j,\ell=1}^{m} \frac{\partial f_q}{\partial B_i^j}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(m_0)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_s(m_0)]\Big) g^{j\bar{\ell}}(m_0)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi(m_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \sigma_q}{\partial \lambda_i}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_s})(m_0)\big)\, \partial_{i\bar{i}}\varphi(m_0) \tag{II.5.7}$$

Or $\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_s})(m_0) \in \Gamma_k \subset \Gamma_q$ puisque $s \in [0,t[\subset \mathscr{W}$, donc :

$$\frac{\partial \sigma_q}{\partial \lambda_i}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_s})(m_0)\big) > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m \tag{II.5.8}$$

Par ailleurs, $\partial_{i\bar{i}}\varphi(m_0) \geq 0$ vu que la matrice $[\partial_{i\bar{j}}\varphi(m_0)]_{1\leq i,j\leq m}$ est positive, ce qui permet de déduire que $\dfrac{dh_q^{m_0}}{ds} \geq 0$. Par conséquent, on a $\sigma_q\Big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0)\Big) \geq \sigma_q\Big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_0})(m_0)\Big) > 0$ (puisque $\varphi_0$ est $k$-admissible). Ceci vaut pour tout $1 \leq q \leq k$, ainsi $\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0) \in \Gamma_k$, ce qui prouve que $t \in \mathscr{W}$ : c'est une contradiction, donc $\mathscr{W} = [0,1]$. ∎

**LEMMEII.5.3** La matrice hermitienne $[a_{ij}(m_0)]_{1\leq i,j\leq m}$ est définie positive .

**Preuve** : Il suffit de prouver que pour tout $t \in [0,1]$, la matrice hermitienne $[\alpha_{ij}^t(m_0)]_{1\leq i,j\leq m}$ est définie positive. Soit $t \in [0,1]$, au point $m_0$ dans une carte $g$-unitaire $\tilde{g}_{\varphi_t}$-adaptée en $m_0$, $[\alpha_{ij}^t(m_0)]_{1\leq i,j\leq m} = diag\Big(\dfrac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_1}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0)\big), \ldots, \dfrac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_m}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0)\big)\Big)$. Or par le lemme précédent II.5.2, on a $\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0) \in \Gamma_k$ d'où $\dfrac{\partial\sigma_k}{\partial\lambda_i}\big(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t})(m_0)\big) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui achève la preuve. ∎

**LEMMEII.5.4** Il existe une boule ouverte $B_{m_0}$ centrée en $m_0$ telle que pour tout $P \in B_{m_0}$ la matrice hermitienne $[a_{ij}(P)]_{1\leq i,j\leq m}$ est définie positive .

**Preuve** : Soit $(U_{m_0}, \Psi_{m_0})$ une carte centrée en $m_0$. L'application

$$P \in U_{m_0} \mapsto a_{ij}(P) = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial B_i^\ell}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(P)]\Big) g^{\ell\bar{j}}(P)\right) dt$$

est continue sur $U_{m_0}$, par conséquent, l'ensemble :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &:= \big\{P \in U_{m_0} / \ [a_{ij}(P)]_{1\leq i,j\leq m} \text{ est définie positive}\big\}\\
&:= \Big\{P \in U_{m_0} / \ \lambda\Big([a_{ij}(P)]_{1\leq i,j\leq m}\Big) \in \Gamma_m\Big\}\\
&:= \Big\{P \in U_{m_0} / \ f_s\Big([a_{ij}(P)]_{1\leq i,j\leq m}\Big) > 0 \quad \forall 1 \leq s \leq m\Big\}
\end{aligned}$$

est un ouvert qui contient $m_0$. Il existe donc une boule ouverte $B_{m_0}$ centrée en $m_0$ telle que $B_{m_0} \subset \mathscr{V}$. ∎

On déduit de ce lemme que l'opérateur $\mathscr{L}$ est elliptique sur la boule ouverte $B_{m_0}$. Or la fonction $\varphi$ est $C^\infty$, atteint son minimum en $m_0 \in B_{m_0}$ et vérifie $\mathscr{L}\varphi = 0$, donc par le principe du maximum de Hopf (cf. [HEB97]), on déduit que $\varphi(P) = \varphi(m_0)$ pour tout $P \in B_{m_0}$. On note :

$$\mathscr{S} := \{P \in M / \varphi(P) = \varphi(m_0)\} \tag{II.5.9}$$

Cet ensemble est non vide et fermé. Montrons que $\mathscr{S}$ est ouvert. Soit $m$ un point de $\mathscr{S}$, donc $\varphi(m) = \varphi(m_0)$ ainsi la fonction $\varphi$ atteint son minimum au point $m$. Par conséquent, le même raisonnement que pour $m_0$ montre l'existence d'une boule ouverte $B_m$ centrée en $m$ telle que $\varphi(P) = \varphi(m)$ pour tout $P \in B_m$, ce qui entraîne que $\varphi(P) = \varphi(m_0)$ pour tout $P \in B_m$ et permet de conclure que $B_m \subset \mathscr{S}$, ce qui prouve que $\mathscr{S}$ est un ouvert. Par connexité de la variété $M$, on déduit que $\mathscr{S} = M$ autrement dit :

$$\forall P \in M \quad \varphi(P) = \varphi(m_0) \tag{II.5.10}$$

Par ailleurs, $\int_M \varphi\omega^m = 0$, on déduit donc que $\varphi \equiv 0$ sur $M$ à savoir que $\varphi_1 \equiv \varphi_0$ sur la variété $M$, ce qui achève la preuve de l'unicité.

<u>Remarque</u> : Notons que, si l'on utilisait la convexité de l'ensemble des fonctions $k$-admissibles, la preuve précédente serait simplifiée : $m_0$ serait un point fixé <u>quelconque</u> de $M$, et seuls les lemmes II.5.1 et II.5.3 subsisteraient.

# Chapitre III

# Méthode de résolution

## III.1 Mise en place de la méthode de continuité

On note $\mathscr{F}_k$ l'opérateur non linéaire correspondant à l'équation $(E_k)$ :

$$\mathscr{F}_k[\varphi] := F_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right) \tag{III.1.1}$$

Et on considère la famille à un paramètre d'équations $(E_{k,t})$, $t \in [0,1]$ :

$$\mathscr{F}_k[\varphi_t] = tf + \ln\underbrace{\left(\frac{\binom{m}{k}\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m}\right)}_{A_t} \tag{$E_{k,t}$}$$

La fonction $\varphi_0 \equiv 0$ est une solution $k$-admissible de l'équation $(E_{k,0})$ :

$$\ln\sigma_k\left(\lambda\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_0]_{1\leq i,j\leq m}\right)\right) = \ln\binom{m}{k} \tag{$E_{k,0}$}$$

et vérifie $\displaystyle\int_M \varphi_0\,\omega^m = 0$. En outre, pour $t = 1$, $A_1 = 1$ donc $(E_{k,1})$ n'est autre que l'équation $(E_k)$.

On fixe $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 5$ et $0 < \alpha < 1$, et on considère l'ensemble non vide (contenant 0) :

$$\mathscr{T}_{\ell,\alpha} := \left\{t \in [0,1] / (E_{k,t}) \text{ admet une solution } k\text{-admissible } \varphi \in C^{\ell,\alpha}(M) \text{ telle que } \int_M \varphi\,\omega^m = 0\right\} \tag{III.1.2}$$

Les normes $C^\ell$ et $C^{\ell,\alpha}$ sur la variété compacte $M$ sont définies en Annexe. Notre but consiste à prouver que $1 \in \mathscr{T}_{\ell,\alpha}$. Pour cela, on montre par connexité de $[0,1]$, que $\mathscr{T}_{\ell,\alpha} = [0,1]$.

## III.2 $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ est un ouvert de $[0,1]$

Ceci résulte du théorème d'inversion local et du fait qu'on sait résoudre un certain problème linéaire. Considérons les ensembles suivants :

$$\tilde{S}_{\ell,\alpha} := \left\{\varphi \in C^{\ell,\alpha}(M), \int_M \varphi\,\omega^m = 0\right\}$$

$$S_{\ell,\alpha} := \left\{\varphi \in \tilde{S}_{\ell,\alpha}, k\text{-admissible pour } g\right\}$$

$\tilde{S}_{\ell,\alpha}$ est un espace vectoriel et $S_{\ell,\alpha}$ est un ouvert de $\tilde{S}_{\ell,\alpha}$. En outre, avec ces nouvelles notations l'ensemble $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ s'écrit :

$$\mathscr{T}_{\ell,\alpha} := \left\{t \in [0,1] / \exists\varphi \in S_{\ell,\alpha} \text{ solution de } (E_{k,t})\right\} \tag{III.2.1}$$

**LEMMEIII.2.1** L'opérateur $\mathscr{F}_k : S_{\ell,\alpha} \to C^{\ell-2,\alpha}(M), \varphi \mapsto \mathscr{F}_k[\varphi] = F_k\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\Big)$, est différentiable et sa différentielle en un point $\varphi \in S_{\ell,\alpha}$, $d\mathscr{F}_{k\,\varphi} \in \mathscr{L}\Big(\tilde{S}_{\ell,\alpha}, C^{\ell-2,\alpha}(M)\Big)$, vaut :

$$d\mathscr{F}_{k\,\varphi}.\psi = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]\Big) g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\psi \quad \forall \psi \in \tilde{S}_{\ell,\alpha}$$

**Preuve** : Soit $\varphi \in S_{\ell,\alpha}$ et $\psi \in \tilde{S}_{\ell,\alpha}$.

$$\begin{aligned} d\mathscr{F}_{k\,\varphi}.\psi &= \frac{d}{dt}\Big(\mathscr{F}_k[\varphi + t\psi]\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(F_k\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}(\varphi + t\psi)]_{1\leq i,j\leq m}\Big)\Big)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(F_k\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}\varphi + t\,g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}\psi]_{1\leq i,j\leq m}\Big)\Big)_{|t=0} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}[\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m} \times \left(\sum_{o=1}^{m} g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}\psi\right) \end{aligned} \tag{III.2.2}$$

■

**PROPOSITIONIII.2.1** L'opérateur non linéaire $\mathscr{F}_k$ est elliptique sur $S_{\ell,\alpha}$.

**Preuve** : Soit $\varphi \in S_{\ell,\alpha}$ une fonction fixée. Vérifions que l'opérateur non linéaire $\mathscr{F}_k$ est elliptique pour cette fonction $\varphi$(cf. [BES87] pages 462-463). Ceci consiste à montrer que le linéarisé en $\varphi$ de l'opérateur non linéaire $\mathscr{F}_k$ est elliptique. Par le lemme III.2.1, le linéarisé en $\varphi$ de $\mathscr{F}_k$ est l'opérateur linéaire :

$$d\mathscr{F}_{k\,\varphi}.v = \sum_{i,o=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}[\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\partial_{i\bar{o}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m} \times g^{j\bar{o}}\right)\partial_{i\bar{o}}v \tag{III.2.3}$$

Pour montrer que cet opérateur est elliptique, il suffit de lire l'ellipticité dans une carte particulière, par exemple au centre d'une carte $g$-normale, $\tilde{g}_\varphi$ adaptée. Au centre d'une telle carte :

$$\begin{aligned} d\mathscr{F}_{k\,\varphi}.v &= \sum_{i,o=1}^{m}\left(\frac{\partial F_k}{\partial B_i^o}\Big(diag\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})\Big)\right)\partial_{i\bar{o}}v \\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})}{\sigma_k\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})}\partial_{i\bar{i}}v \end{aligned} \tag{III.2.4}$$

Or pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ on a $\dfrac{\sigma_{k-1,i}\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})}{\sigma_k\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})} > 0$ sur $M$, car $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \Gamma_k$, ce qui prouve que l'opérateur linéarisé est elliptique et achève la preuve. ■

On note $\mathfrak{F}_k$ l'opérateur :

$$\mathfrak{F}_k[\varphi] := f_k\Big([\delta_i^j + g^{j\bar\ell}\partial_{i\bar\ell}\varphi]_{1\le i,j\le m}\Big) \tag{III.2.5}$$

De même que $\mathscr{F}_k$, l'opérateur $\mathfrak{F}_k : S_{\ell,\alpha} \to C^{l-2,\alpha}(M)$ est différentiable elliptique sur $S_{\ell,\alpha}$ de différentielle :

$$d\mathfrak{F}_{k\,\varphi}.\psi = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial B_i^j}\Big([\delta_i^j + g^{j\bar\ell}\partial_{i\bar\ell}\varphi]\Big)\, g^{j\bar\ell}\partial_{i\bar\ell}\psi \quad \forall\psi\in\tilde S_{l,\alpha}$$

On calcule ce linéarisé d'une manière différente, et ce en utilisant l'expression (II.3.1) de $f_k$. On note $a_\varphi$ la matrice $[\delta_i^j + g^{j\bar\ell}\partial_{i\bar\ell}\varphi]_{1\le i,j\le m}$. Cette notation combinée à la formule (II.3.1) nous permet d'exprimer l'opérateur $\mathfrak{F}_k$ d'une façon différente :

$$\mathfrak{F}_k[\varphi] = f_k(a_\varphi) = \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\,(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_k}_{i_k} \tag{III.2.6}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{F}_{k\,\varphi}.v &= \frac{d}{dt}\Big(\mathfrak{F}_k[\varphi+tv]\Big)_{|t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\,(a_{\varphi+tv})^{j_1}_{i_1}\dots(a_{\varphi+tv})^{j_k}_{i_k}\Big)_{|t=0}\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\Big(g^{j_1\bar s}\partial_{i_1\bar s}v\Big)(a_\varphi)^{j_2}_{i_2}\dots(a_\varphi)^{j_k}_{i_k}\\
&+\frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\,(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\Big(g^{j_2\bar s}\partial_{i_2\bar s}v\Big)\dots(a_\varphi)^{j_k}_{i_k}\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\,(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\Big(g^{j_k\bar s}\partial_{i_k\bar s}v\Big)\\
&= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\,(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\Big(g^{j_k\bar s}\partial_{i_k\bar s}v\Big) \quad \text{par symétrie}\\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\underbrace{\Big(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1},j_1,\dots,j_{k-1}\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_{k-1}i}_{j_1\dots j_{k-1}j}\,(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\Big)}_{=:\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)}\nabla^j_i v
\end{aligned} \tag{III.2.7}$$

Montrons à partir de là la proposition suivante :

**PROPOSITIONIII.2.2** Le linéarisé $d\mathfrak{F}_k$ de l'opérateur $\mathfrak{F}_k$ est de type divergence :

$$d\mathfrak{F}_{k\,\varphi} = \nabla_i\Big(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)\nabla^j\Big)$$

**Preuve** *:* Par (III.2.7) on a :

$$d\mathfrak{F}_{k\,\varphi}.v = \sum_{i,j=1}^{m} \mathscr{C}^i_j(a_\varphi)\nabla^j_i v$$

(III.2.8)
$$= \sum_{i=1}^{m} \nabla_i\left(\sum_{j=1}^{m} \mathscr{C}^i_j(a_\varphi)\nabla^j v\right) - \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \nabla_i(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi))\right)\nabla^j v$$

En outre :

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_i(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i\left(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1},j_1,\dots,j_{k-1}\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_{k-1}i}_{j_1\dots j_{k-1}j}(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\right)$$

(III.2.9)
$$= \frac{1}{(k-2)!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1},j_1,\dots,j_{k-1}\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_{k-1}i}_{j_1\dots j_{k-1}j}(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-2}}_{i_{k-2}}\nabla_i\left((a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\right)$$

Or $\nabla_i\left((a_\varphi)^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\right) = \nabla_i\left(\delta^{j_{k-1}}_{i_{k-1}} + \nabla^{j_{k-1}}_{i_{k-1}}\varphi\right) = \nabla^{j_{k-1}}_{i\,i_{k-1}}\varphi$, donc :

(III.2.10)
$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_i(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)) = \frac{1}{(k-2)!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{1\le i_1,\dots,i_{k-1},j_1,\dots,j_{k-1}\le m} \varepsilon^{i_1\dots i_{k-1}i}_{j_1\dots j_{k-1}j}(a_\varphi)^{j_1}_{i_1}\dots(a_\varphi)^{j_{k-2}}_{i_{k-2}}\nabla^{j_{k-1}}_{i\,i_{k-1}}\varphi$$

La quantité $\nabla^{j_{k-1}}_{i\,i_{k-1}}\varphi$ étant symétrique en $i, i_{k-1}$ (en effet, $\nabla^{j_{k-1}}_{i\,i_{k-1}}\varphi - \nabla^{j_{k-1}}_{i_{k-1}i}\varphi = R^{j_{k-1}}_{s\,i\,i_{k-1}}\nabla^s\varphi$ et $R^{j_{k-1}}_{s\,i\,i_{k-1}} = 0$ car $g$ est kählérienne), et $\varepsilon^{i_1\dots i_{k-1}i}_{j_1\dots j_{k-1}j}$ antisymétrique en $i, i_{k-1}$, on déduit que :

(III.2.11)
$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_i(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)) = 0$$

Par conséquent :

(III.2.12)
$$d\mathfrak{F}_{k\,\varphi}.v = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i\left(\sum_{j=1}^{m} \mathscr{C}^i_j(a_\varphi)\nabla^j v\right)$$

ce qui montre que $d\mathfrak{F}_{k\,\varphi}$ est de type divergence. ■

**COROLLAIREIII.2.1** L'application

$$F : S_{\ell,\alpha} \to \tilde{S}_{\ell-2,\alpha},\ \varphi \longmapsto F(\varphi) = \mathfrak{F}_k[\varphi] - \binom{m}{k}$$

est bien définie différentiable de différentielle $dF_\varphi = d\mathfrak{F}_{k\,\varphi} = \nabla_i\left(\mathscr{C}^i_j(a_\varphi)\nabla^j\right) \in \mathscr{L}(\tilde{S}_{\ell,\alpha}, \tilde{S}_{\ell-2,\alpha})$.

**Preuve** *:* Ce corollaire découle de la proposition III.2.2. Il reste juste à vérifier que $F$ est à valeurs dans $\tilde{S}_{\ell-2,\alpha}$. Soit $\varphi \in S_{\ell,\alpha}$, on a $\mathfrak{F}_k[\varphi] \in C_{\ell-2,\alpha}(M)$ et :

$$\int_M \mathfrak{F}_k[\varphi]\omega^m = \int_M \sigma_k\lambda(g^{-1}\tilde{g})\omega^m = \int_M \binom{m}{k}\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} \quad \text{par le lemme II.2.2}$$

(III.2.13)
$$= \binom{m}{k}\int_M \omega^m \quad \text{par le lemme II.2.1}$$

d'où $\displaystyle\int_M F(\varphi)\omega^m = 0.$ ■

Soit à présent $t_0 \in \mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ et $\varphi_0 \in S_{\ell,\alpha}$ une solution de l'équation $(E_{k,t_0}) : \mathfrak{F}_k[\varphi_0] = e^{t_0 f} A_{t_0}$ correspondante. On écrit cette équation différemment :

$$(E_{k,t_0}) \qquad F(\varphi_0) = e^{t_0 f} A_{t_0} - \binom{m}{k}$$

**LEMMEIII.2.2** $dF_{\varphi_0} : \tilde{S}_{\ell,\alpha} \longrightarrow \tilde{S}_{\ell-2,\alpha}$ est un isomorphisme.

**Preuve** : Soit $\psi \in C^{\ell-2,\alpha}(M)$ avec $\displaystyle\int_M \psi v_g = 0$. On considère l'équation :

$$\nabla_i\left(\mathscr{C}^i_j(a_{\varphi_0})\nabla^j u\right) = \psi \qquad \text{(III.2.14)}$$

On a $\mathscr{C}^i_j(a_{\varphi_0}) \in C^{\ell-2,\alpha}(M)$ et la matrice $[\mathscr{C}^i_j(a_{\varphi_0})]_{1\le i,j\le m} = \left[\dfrac{\partial f_k}{\partial B^j_i}\left([\delta^j_i + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_0]\right)\right]_{1\le i,j\le m}$ est définie positive (puisque $\mathfrak{F}_k$ est elliptique en $\varphi_0$), donc par le théorème 4.7 page 104 de [AUB98] sur les opérateurs de type divergence, on déduit qu'il existe une unique fonction $u \in C^{\ell,\alpha}(M)$ d'intégrale nulle ($\displaystyle\int_M u v_g = 0$ ce qui fixe la constante) solution de (III.2.14), donc solution de : $dF_{\varphi_0} u = \psi$. Ainsi, l'application linéaire continue $dF_{\varphi_0} : \tilde{S}_{\ell,\alpha} \longrightarrow \tilde{S}_{\ell-2,\alpha}$ est bijective, son inverse est continu par le théorème de l'application ouverte [RUD75], ce qui achève la preuve. ■

On déduit donc par le Théorème d'Inversion Locale qu'il existe $U$ un ouvert de $S_{\ell,\alpha}$ contenant $\varphi_0$ et $V$ un ouvert de $\tilde{S}_{\ell-2,\alpha}$ contenant $F(\varphi_0)$ tels que $F : U \to V$ est un difféomorphisme. On considère à présent un $t \in [0,1]$ très proche de $t_0$ et on montre qu'il reste dans $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ : Si $|t - t_0| \le \varepsilon$ est suffisament petit alors $\left\|\left(e^{tf}A_t - \binom{m}{k}\right) - \left(e^{t_0 f}A_{t_0} - \binom{m}{k}\right)\right\|_{C^{\ell-2,\alpha}(M)}$ est assez petit de sorte que $e^{tf}A_t - \binom{m}{k} \in V$ donc il existe $\varphi \in U \subset S_{\ell,\alpha}$ telle que $F(\varphi) = e^{tf}A_t - \binom{m}{k}$ donc il existe $\varphi \in C^{\ell,\alpha}(M)$ d'intégrale nulle pour $g$ solution de $(E_{k,t})$. Ce qui prouve que $t \in \mathscr{T}_{\ell,\alpha}$. On conclut donc que $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ est un ouvert de $[0,1]$.

## III.3 Schéma de la preuve de $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ fermé

### Schéma de la preuve

Cette section est basée sur les estimées a priori. Construire ces estimations sera la partie la plus difficile de la preuve (objet des chapitres IV, V et VI).

Soit $(t_s)_{s\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_{\ell,\alpha}$ qui converge vers $\tau \in [0,1]$, et soit $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions correspondante : pour tout $s \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi_{t_s}$ est une solution $C^{\ell,\alpha}$, $k$-admissible, d'intégrale nulle de l'équation :

$$(E_{k,t_s}) \qquad \mathscr{F}_k[\varphi_{t_s}] = t_s f + \ln(A_{t_s})$$

Montrons que $\tau \in \mathcal{T}_{\ell,\alpha}$.

Voici le schéma de la preuve :

1. Réduction à une estimée $C^{2,\beta}(M)$ : si $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ est bornée dans un $C^{2,\beta}(M)$ avec $0<\beta<1$, l'inclusion $C^{2,\beta}(M) \subset C^2(M,\mathbb{R})$ étant compacte, on déduit que quitte à extraire $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2(M,\mathbb{R})$ vers $\varphi_\tau \in C^2(M,\mathbb{R})$. On montre par passage à la limite que $\varphi_\tau$ est une solution de $(E_{k,\tau})$ (elle est donc $k$-admissible par la proposition II.2.1), d'intégrale nulle pour $g$. On montre finalement par le théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 que $\varphi_\tau \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (cf. [BES87] p. 467). Ce qui nous permet de déduire que $\tau \in \mathcal{T}_{\ell,\alpha}$ (fait dans la suite de ce chapitre).
2. On montre que $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^0(M,\mathbb{R})$ : on démontre tout d'abord un lemme de positivité IV.1.4 pour l'équation $(E_{k,t})$, inspiré de celui de [DEL96] p. 843 (où $k=m$), mais avec une preuve nouvelle, requise car la $k$-positivité de $\tilde{\omega}_{t_s}$ est plus faible avec $k<m$, en utilisant une méthode de polarisation de [BLO05] p. 1740 (cf. IV.1.2) et l'inégalité de Gårding IV.1.3 ; on déduit de ce lemme une inégalité fondamentale IV.2.1 à l'instar de la Proposition 7.18 de [AUB98] p. 262 (cf. proposition I.2.1) ; la suite de la preuve se poursuit par la méthode d'itération à la Moser exactement comme pour l'équation de Calabi-Yau (voir Chapitre I). Cette estimation $C^0$ est traitée au chapitre IV.
3. On montre le point clé de la preuve à savoir une estimée a priori $C^2$ (cf. Chapitre V).
4. L'ellipticité uniforme étant acquise à l'étape précédente, on obtient l'estimée $C^{2,\beta}(M)$ recherchée par la théorie d'Evans et Trudinger (cf. Annexes théorème VII.6.2). Cette estimation $C^{2,\beta}$ est prouvée au chapitre VI.

## III.4 Réduction de la preuve à l'estimée a priori $C^{2,\beta}$

Supposons que $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{2,\beta}(M)$ avec $0<\beta<1$, et montrons qu'alors notre théorème II.2.1 est démontré.
L'inclusion $C^{2,\beta}(M) \subset C^2(M,\mathbb{R})$ étant compacte, on déduit que quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^2(M,\mathbb{R})$ vers $\varphi_\tau \in C^2(M,\mathbb{R})$. Montrons par passage à la limite que $\varphi_\tau$ est une solution $k$-admissible de l'équation $(E_{k,\tau})$, d'intégrale nulle pour $g$. La quantité $\sigma_k\lambda(g^{-1}\tilde{g})$ étant intrinsèque, il suffit d'effectuer le passage à la limite aux centres de cartes $g$-unitaires. Soit $P \in M$ fixé et soit $(U,\phi)$ une carte $g$-unitaire en $P$. Dans

cette carte, on a pour tout $s \in \mathbb{N}$ :

$$(E_{k,t_s}) \qquad \sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j + \partial_{i\bar{j}}\varphi_{t_s}(P)]_{1\le i,j\le m}\Big) = e^{t_s f(P)} A_{t_s}$$

La fonction $e^{tf(P)}A_t$ est clairement continue en $t$, donc le second membre $e^{t_s f(P)}A_{t_s}$ converge vers $e^{\tau f(P)}A_\tau$ quand $s$ tend vers $+\infty$. Pour montrer que $\sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j+\partial_{i\bar{j}}\varphi_{t_s}(P)]_{1\le i,j\le m}\Big)$ converge vers $\sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j+\partial_{i\bar{j}}\varphi_\tau(P)]_{1\le i,j\le m}\Big)$, on montre que $\partial_{i\bar{j}}\varphi_{t_s}(P)$ tend vers $\partial_{i\bar{j}}\varphi_\tau(P)$. Si $v \in C^2(M,\mathbb{R})$, en regardant $\nabla^2 v$ comme tenseur complexe on a en $P$ dans la carte $(U,\phi)$ :

(III.4.1)

$$|\nabla^2 v(P)|_g^2 = 2\,g^{a\bar{c}}\,g^{d\bar{b}}\left(\nabla_{a\bar{b}}v\,\nabla_{\bar{c}d}v + \nabla_{ad}v\,\nabla_{\bar{c}\bar{b}}v\right)(P) = 2\sum_{a,b=1}^{m}\Big(|\partial_{a\bar{b}}v(P)|^2 + |\nabla_{ab}v(P)|^2\Big)$$

donc $|\partial_{i\bar{j}}v(P)| \le |\nabla^2 v(P)|_g$. Ainsi, dans la carte $(U,\phi)$ :

$$|\partial_{i\bar{j}}(\varphi_{t_s}-\varphi_\tau)(P)| \le |\nabla^2(\varphi_{t_s}-\varphi_\tau)(P)|_g \le \sum_{j=0}^{2}\sup_M|\nabla^j(\varphi_{t_s}-\varphi_\tau)|_g = \|\varphi_{t_s}-\varphi_\tau\|_{C^2(M,\mathbb{R})} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$$

(cf. Annexes pour la définition des normes $C^r$ sur $M$)

d'où $\partial_{i\bar{j}}\varphi_{t_s}(P) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \partial_{i\bar{j}}\varphi_\tau(P)$, on déduit donc par passage à la limite dans $(E_{k,t_s})$ que :

$$(E_{k,\tau}) \qquad \sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j + \partial_{i\bar{j}}\varphi_\tau(P)]_{1\le i,j\le m}\Big) = e^{\tau f(P)} A_\tau$$

ce qui prouve que $\varphi_\tau$ est solution de $(E_{k,\tau})$. Il en résulte en particulier que $\varphi_\tau$ est $k$-admissible par la proposition II.2.1.

Vérifions que $\varphi_\tau$ est d'intégrale nulle pour $g$. La suite de fonctions $(\varphi_{t_s})_{s\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_\tau$ dans $C^2(M,\mathbb{R})$, donc en particulier elle converge uniformément vers $\varphi_\tau$ sur $M$, on en déduit donc que $\int_M \varphi_{t_s}\,v_g \xrightarrow[s\to+\infty]{} \int_M \varphi_\tau\,v_g$. Or pour tout $s\in\mathbb{N}$, $\int_M \varphi_{t_s}\,v_g = 0$, ce qui montre que $\int_M \varphi_\tau\,v_g = 0$.

Montrons finalement par un théorème de régularité que $\varphi_\tau$ est en fait dans $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Pour cela, on utilise le théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 (cf. [BES87] page 467). Montrer que $\varphi_\tau \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ revient à montrer que $\varphi_\tau\circ\phi^{-1} \in C^\infty(\phi(U),\mathbb{R})$ pour toute carte $(U,\phi)$ de $M$. Soit $(U,\phi)$ une carte holomorphe de $M$ fixée. L'équation $(E_{k,\tau})$ s'écrit sur l'ouvert $\phi(U)\subset\mathbb{R}^{2m}$ comme suit :

$$\begin{aligned}(E_{k,\tau}) \quad & G\big(x,[D_{ij}(\varphi_\tau\circ\phi^{-1})(x)]_{1\le i,j\le 2m}\big) \\ &= \ln\sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\circ\phi^{-1}(x)\partial_{z_i\overline{z_o}}(\varphi_\tau\circ\phi^{-1})(x)]_{1\le i,j\le m}\Big) - \tau f\circ\phi^{-1}(x) - \ln A_\tau = 0\end{aligned}$$

Vu que $\partial_{z_a\overline{z_b}} = \frac{1}{4}\left(D_{ab} + D_{(a+m)(b+m)} + iD_{a(b+m)} - iD_{(a+m)b}\right)$ on déduit que la fonction $G(x,r)$ s'écrit :

(III.4.2)
$$G(x,r) = \ln\sigma_k\,\lambda\Big([\delta_i^j + g^{j\bar{o}}\circ\phi^{-1}(x)\frac{1}{4}(r_{io} + r_{(i+m)(o+m)} + i\,r_{i(o+m)} - i\,r_{(i+m)o})]_{1\le i,j\le m}\Big) - \tau f\circ\phi^{-1}(x) - \ln A_\tau$$

La fonction $G(x,r)$ est clairement $C^\infty$ en toutes ses variables.
Par ailleurs, la fonction $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}\in C^2(\phi(U),\mathbb{R})$ et est solution elliptique de l'équation nonlinéaire du second ordre $G(x,D^2v)=0$. On sait bien que cette solution est elliptique puisque $\mathscr{F}_k$ l'est en $\varphi_\tau$ et que l'ellipticité est conservée par changement de carte, mais on effectue ici la vérification pour notre solution (on dit aussi que l'opérateur nonlinéaire $G(x,D^2v)$ est elliptique pour la fonction $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$)(cf. [BES87] pages 462-463). Ceci consiste à montrer que le linéarisé en $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$ de l'opérateur nonlinéaire $G(x,D^2v)$ est elliptique sur l'ouvert $\phi(U)$. Cette vérification s'effectue de la même manière que pour les preuves du lemme III.2.1 et de la proposition III.2.1.
En effet, comme le lemme III.2.1, le linéarisé en $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}$ de $G(x,D^2v)$ est l'opérateur linéaire :

$$\mathscr{P}v = \frac{d}{dt}G\Big(x, D^2(\varphi_\tau\circ\phi^{-1}+tv)\Big)_{|_{t=0}} \qquad v\in C^2(\phi(U),\mathbb{R})$$

(III.4.3)
$$= \sum_{i,o=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}[\delta_i^j + g^{j\bar{o}}(\phi^{-1}(x))\partial_{i\bar{o}}\varphi_\tau(\phi^{-1}(x))]_{1\le i,j\le m}\times g^{j\bar{o}}(\phi^{-1}(x))\right)\partial_{z_i\overline{z_o}}v(x)$$

En outre, dans une carte $g$-normale, $\tilde{g}_{\varphi_\tau}$ adaptée en $P=\phi^{-1}(x)$, on a (à l'instar de la proposition III.2.1) :

$$\mathscr{P}v(x) = \sum_{i,o=1}^{m}\left(\frac{\partial F_k}{\partial B_i^o}(diag\,\lambda(g^{-1}\tilde{g})(\phi^{-1}(x)))\right)\partial_{z_i\overline{z_o}}v(x)$$

(III.4.4)
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P))}{\sigma_k(\lambda(P))}\partial_{z_i\overline{z_i}}v(x)$$

Or pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$ on a $\dfrac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P))}{\sigma_k(\lambda(P))}>0$, car $\lambda(P):=\lambda(g^{-1}\tilde{g})(P)\in\Gamma_k$, ce qui prouve que l'opérateur linéarisé $\mathscr{P}$ est elliptique en $x\in\phi(U)$. Ceci valant pour tout $x$, on déduit que $\mathscr{P}$ est elliptique sur $\phi(U)$.

Le théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 s'applique donc et montre que $\varphi_\tau\circ\phi^{-1}\in C^\infty(\phi(U),\mathbb{R})$. Ceci vaut pour toute carte $(U,\phi)$, on déduit donc que :

(III.4.5)
$$\varphi_\tau\in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

Ainsi $\tau\in\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$, ce qui achève la preuve du fait que $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ est un fermé. On conclut ensuite par connexité de $[0,1]$, l'ensemble non vide $\mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$ donc :

(III.4.6)
$$\mathscr{T}_{\ell,\alpha}=[0,1]$$

En particulier, $1 \in \mathscr{T}_{\ell,\alpha}$ ce qui veut dire que l'équation $(E_k)$ admet une solution $k$-admissible $\varphi \in C^{\ell,\alpha}(M,\mathbb{R})$ vérifiant $\int_M \varphi\omega^m = 0$. Comme précédemment pour $\varphi_\tau$, l'application du théorème de régularité nonlinéaire I.1.3 montre que $\varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, ce qui achève la preuve de notre théorème II.2.1 (Equation $\sigma_k$).

# Chapitre IV

# Estimée $C^0$

# IV.1 Lemme de positivité

Nos quatre premiers lemmes sont basés sur les idées de [BLO05] section 2.

**LEMME IV.1.1** Si $\pi$ est une $(1-1)$-forme réelle, elle s'écrit donc $\pi = i p_{a\bar{b}} dz^a \wedge dz^{\bar{b}}$, avec $p_{a\bar{b}} = p(\partial_a, \partial_{\bar{b}})$ où $p$ est le tenseur symétrique $p(U,V) = \pi(U,JV)$ ; alors :

$$\forall \ell \leq m \quad \pi^\ell \wedge \omega^{m-\ell} = \frac{\ell!(m-\ell)!}{m!} \sigma_\ell\Big(\lambda[g^{-1}p]\Big)\omega^m$$

<u>**Preuve**</u> : Ce lemme se démontre exactement comme la formule $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \dfrac{\sigma_k\Big(\lambda(g^{-1}\tilde{g})\Big)}{\binom{m}{k}}\omega^m$ du lemme II.2.2. ■

On considère pour $1 \leq \ell \leq m$ l'application $f_\ell = \sigma_\ell \circ \lambda : \mathcal{H}_m \to \mathbb{R}$ où $\mathcal{H}_m$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées hermitiennes de taille $m$. $f_\ell$ est un polynôme réel de degré $\ell$ de $m^2$ variables réelles. En outre, il est hyperbolique $I$ (cf. [GAR59] pour la preuve) et il vérifie $f_\ell(I) = \sigma_\ell(1,\cdots,1) = \begin{pmatrix} m \\ \ell \end{pmatrix} > 0$. Soit $\tilde{f}_\ell$ la forme totalement polarisée de $f_\ell$. Cette forme polarisée $\tilde{f}_\ell : \underbrace{\mathcal{H}_m \times \cdots \times \mathcal{H}_m}_{\ell fois} \to \mathbb{R}$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

- $\tilde{f}_\ell$ est $\ell$-linéaire.
- $\tilde{f}_\ell$ est symétrique.
- $\forall B \in \mathcal{H}_m \quad \tilde{f}_\ell(B,\cdots,B) = f_\ell(B)$.

En utilisant ces notations, on déduit du lemme IV.1.1 qu'au centre d'une carte $g$-unitaire (ceci garantit que la matrice $g^{-1}p$ est hermitienne), on a :

$$\pi^\ell \wedge \omega^{m-\ell} = \frac{\ell!(m-\ell)!}{m!} f_\ell\big(g^{-1}p\big)\omega^m \tag{IV.1.1}$$

Par passage à la forme polarisée dans cette égalité on obtient le lemme suivant :

**LEMME IV.1.2** Soient $1 \leq \ell \leq m$ et $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$ des $(1-1)$-formes réelles. Ces formes s'écrivent $\pi_\alpha = i(p_\alpha)_{a\bar{b}} dz^a \wedge dz^{\bar{b}}$, avec $(p_\alpha)_{a\bar{b}} = p_\alpha(\partial_a, \partial_{\bar{b}})$ où $p_\alpha$ est le tenseur symétrique $p_\alpha(U,V) = \pi_\alpha(U,JV)$. Alors, au centre d'une carte $g$-unitaire on a :

$$\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_\ell \wedge \omega^{m-\ell} = \frac{\ell!(m-\ell)!}{m!} \tilde{f}_\ell\big(g^{-1}p_1, \ldots, g^{-1}p_\ell\big)\omega^m$$

<u>**Preuve**</u> : Soient $x \in M$ et $\psi$ une carte $g$-unitaire centrée en $x$. On pose :

$$\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_\ell \wedge \omega^{m-\ell} = \psi_x\big(g^{-1}p_1, \ldots, g^{-1}p_\ell\big)\omega^m \quad \text{en } x \quad \psi_x : \mathcal{H}_m \to \mathbb{R} \tag{IV.1.2}$$

En $x$, dans notre carte $g$-unitaire centrée en $x$, les matrices $g^{-1}p_i$ s'écrivent :
$g^{-1}p_i = [g^{s\bar{\ell}}(p_i)_{r\bar{\ell}}]_{1\leq r,s\leq m} = [(p_i)_{r\bar{s}}]_{1\leq r,s\leq m}$ donc $\psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(p_l)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m = \pi_1\wedge\cdots\wedge\pi_\ell\wedge\omega^{m-\ell}$ ; ici $(p_i)_{r\bar{s}}$ désigne la matrice $[(p_i)_{r\bar{s}}]_{1\leq r,s\leq m}$. Soit $\zeta\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,\zeta(p_i)_{r\bar{s}}+(\tilde{p}_i)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m &= \pi_1\wedge\cdots\wedge(\zeta\pi_i+\tilde{\pi}_i)\wedge\cdots\wedge\pi\ell_\wedge\omega^{m-\ell}\\
&= \zeta\pi_1\wedge\cdots\wedge\pi_\ell\wedge\omega^{m-\ell}+\pi_1\wedge\cdots\wedge\tilde{\pi}_i\wedge\cdots\wedge\pi_\ell\wedge\omega^{m-\ell}\\
&= \zeta\psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m+\psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(\tilde{p}_i)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\psi_x$ est $\ell$-linéaire. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\psi_x\big((p_{\sigma(1)})_{r\bar{s}},\dots,(p_{\sigma(\ell)})_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m &= \pi_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\pi_{\sigma(\ell)}\wedge\omega^{m-\ell}\\
&= \pi_1\wedge\cdots\wedge\pi_\ell\wedge\omega^{m-\ell} \quad \text{car les 2-formes commutent}\\
&= \psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\psi_x$ est symétrique. Or $\psi_x\big((p)_{r\bar{s}},\dots,(p)_{r\bar{s}}\big)\,\omega^m = \pi^\ell\wedge\omega^{m-\ell} = \dfrac{\ell!(m-\ell)!}{m!}f_\ell(p_{r\bar{s}})\omega^m$ par le lemme IV.1.1, donc $\psi_x\big((p)_{r\bar{s}},\dots,(p)_{r\bar{s}}\big) = \dfrac{\ell!(m-\ell)!}{m!}f_\ell(p_{r\bar{s}})$, et par conséquent, on déduit qu'en $x$ on a $\psi_x\big((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}}\big) = \dfrac{\ell!(m-\ell)!}{m!}\tilde{f}_\ell((p_1)_{r\bar{s}},\dots,(p_\ell)_{r\bar{s}})$, ce qui achève la preuve.

■

Le théorème 5 de Gårding (cf. [GAR59]) s'applique à $f_\ell$ avec $2\leq\ell\leq m$ :

**LEMME IV.1.3** (***Inégalité de Gårding pour*** $f_\ell$) Soit $2\leq\ell\leq m$, pour tout $y^1,\dots,y^\ell\in\Gamma(f_\ell,I)$,

$$\tilde{f}_\ell(y^1,\dots,y^\ell)\geq f_\ell(y^1)^{\frac{1}{\ell}}\cdots f_\ell(y^\ell)^{\frac{1}{\ell}}$$

Rappelons que $\Gamma(f_\ell,I)$ est la composante connexe de $\{y\in\mathcal{H}_m\,/\,f_\ell(y)>0\}$ contenant $I$. La même preuve que dans [BAY01] pages 129-130, assure que :

$$\begin{aligned}
\Gamma(f_\ell,I) &= \Big\{y\in\mathcal{H}_m\,/\,\forall 1\leq i\leq\ell\quad f_i(y)>0\Big\} = \Big\{y\in\mathcal{H}_m\,/\,\lambda(y)\in\Gamma_\ell\Big\}\\
&= \lambda^{-1}(\Gamma_\ell)\quad \text{(cf. corollaire VII.4.1)}
\end{aligned} \tag{IV.1.3}$$

Remarque : Par passage à la limite, on voit que l'inégalité de Gårding (lemme IV.1.3) est valable sur :

$$\tilde{\Gamma}(f_\ell,I) = \Big\{y\in\mathcal{H}_m\,/\,\forall 1\leq i\leq\ell\quad f_i(y)\geq 0\Big\} \tag{IV.1.4}$$

Appliquons à présent les lemmes précédents dans le but d'établir le lemme de positivité suivant :

**LEMME IV.1.4** (***Lemme de positivité***) Soient $\alpha$ une 1-forme réelle sur $M$ et $j\in\{1,\dots,k-1\}$ alors la fonction $f:M\to\mathbb{R}$ définie par $f\omega^m = {}^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\omega^{m-1-j}\wedge\tilde{\omega}^j$ est positive ou nulle.

**Preuve** : Soit $1 \leq j \leq k-1$, donc $2 \leq \ell = j+1 \leq k$. Soit $\alpha$ une 1-forme réelle, elle s'écrit donc $\alpha = \alpha_a dz^a + \overline{\alpha_a} dz^{\bar{a}}$. Soit $\pi_1 = {}^tJ\alpha \wedge \alpha$, alors :
$\pi_1(\partial_a, \partial_{\bar{b}}) = \alpha(J\partial_a)\alpha(\partial_{\bar{b}}) - \alpha(J\partial_{\bar{b}})\alpha(\partial_a) = i\,\alpha_a \overline{\alpha_b} - (-i)\overline{\alpha_b}\alpha_a = 2i\,\alpha_a\overline{\alpha_b}$, de façon similaire, on prouve que $\pi_1(\partial_a, \partial_b) = \pi_1(\partial_{\bar{a}}, \partial_{\bar{b}}) = 0$, par conséquent :

$$\pi_1 = i\,\underbrace{2\alpha_a\overline{\alpha_b}}_{=:p_{a\bar{b}}} dz^a \wedge dz^{\bar{b}} \tag{IV.1.5}$$

Par ailleurs, on pose $\pi_2 = \ldots = \pi_{j+1} = \tilde{\omega} = i\,\tilde{g}_{a\bar{b}} dz^a \wedge dz^{\bar{b}}$. Soient à présent, $x \in M$ et $\phi$ une carte $g$-unitaire centrée en $x$. Par le lemme IV.1.2, on déduit qu'en $x$ dans la carte $\phi$ :

$${}^tJ\alpha\wedge\alpha\wedge\tilde{\omega}^j \wedge \omega^{m-(j+1)} = \pi_1\wedge\ldots\wedge\pi_{j+1}\wedge\omega^{m-(j+1)} = \frac{(m-j-1)!(j+1)!}{m!}\tilde{f}_{j+1}(g^{-1}p, g^{-1}\tilde{g}, \ldots, g^{-1}\tilde{g})\omega^m$$

Or en $x$, $g^{-1}\tilde{g} = \tilde{g} \in \Gamma(f_{j+1}, I)$ et $g^{-1}p = p \in \tilde{\Gamma}(f_{j+1}, I)$. En effet, $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) \in \Gamma_k$ puisque $\varphi$ est $k$-admissible et $\Gamma_k \subset \Gamma_{j+1}$. En outre, la matrice hermitienne $[2\alpha_a\overline{\alpha_b}]_{1\leq a,b\leq m}$ est positive puisque pour tout $\xi \in \mathbb{C}^m$, on a $\sum_{a,b=1}^{m} 2\alpha_a\overline{\alpha_b}\xi_a\overline{\xi_b} = 2|\sum_{a=1}^{m}\alpha_a\xi_a|^2 \geq 0$, on déduit donc que pour tout $1 \leq i \leq j+1$, on a en $x$, $f_i(g^{-1}p) = \sigma_i(\lambda(g^{-1}p)) \geq 0$.
Finalement, on déduit par l'inégalité de Gårding (lemma IV.1.3) qu'en $x$ dans la carte $\phi$ on a :

$$\tilde{f}_{j+1}(g^{-1}p, g^{-1}\tilde{g}, \ldots, g^{-1}\tilde{g}) \geq f_{j+1}(g^{-1}p)^{\frac{1}{j+1}} f_{j+1}(g^{-1}\tilde{g})^{\frac{j}{j+1}} \geq 0 \tag{IV.1.6}$$

ce qui prouve le lemme de positivité . ■

## IV.2 L'inégalité fondamentale

L'estimée a priori $C^0$ repose sur l'inégalité fondamentale suivante :

**PROPOSITIONIV.2.1** Soit $h(t)$ une fonction croissante de classe $C^1$ définie sur $\mathbb{R}$, et soit $\varphi$ une fonction de classe $C^2$, $k$-admissible définie sur $M$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right] h(\varphi)\omega^m \geq \frac{1}{2m}\binom{m}{k}\int_M h'(\varphi)|\nabla\varphi|_g^2\,\omega^m$$

**Preuve** : On a $\int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right] h(\varphi)\omega^m = \binom{m}{k}\int_M h(\varphi)\big(\omega^m - \tilde{\omega}^k\wedge\omega^{m-k}\big)$. Par ailleurs, vu que $\Lambda^2 M$ est commutatif, on a :

$$\omega^m - \tilde{\omega}^k\wedge\omega^{m-k} = (\omega-\tilde{\omega})\wedge\underbrace{\left(\omega^{m-1} + \omega^{m-2}\wedge\tilde{\omega} + \ldots + \omega^{m-k}\wedge\tilde{\omega}^{k-1}\right)}_{=:\Omega} = -\frac{1}{2}dd^c\varphi\wedge\Omega \tag{IV.2.1}$$

ainsi, $\int_M [\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})] h(\varphi)\omega^m = -\frac{1}{2}\binom{m}{k}\int_M dd^c\varphi \wedge (h(\varphi)\Omega)$. Or par différentiation extérieure $d\left(d^c\varphi \wedge h(\varphi)\Omega\right) = dd^c\varphi \wedge h(\varphi)\Omega - d^c\varphi \wedge d(h(\varphi)\Omega)$ et $d(h(\varphi)\Omega) = h'(\varphi)d\varphi \wedge \Omega$ (car $\Omega$ est fermée), donc $dd^c\varphi \wedge h(\varphi)\Omega = d^c\varphi \wedge h'(\varphi)d\varphi \wedge \Omega + d(qqchose)$. Par ailleurs, le théorème de Stokes assure que $\int_M d(qqchose) = 0$, par conséquent :

$$\int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right] h(\varphi)\omega^m = -\frac{1}{2}\binom{m}{k}\int_M h'(\varphi)d^c\varphi \wedge d\varphi \wedge \Omega$$

$$= \frac{1}{2}\binom{m}{k}\left(\underbrace{\int_M h'(\varphi)(-d^c\varphi)\wedge d\varphi \wedge \omega^{m-1}}_{T_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1}\int_M h'(\varphi)(-d^c\varphi)\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1-j}\wedge\tilde{\omega}^j}_{T_2}\right) \tag{IV.2.2}$$

Montrons que $T_2 \geq 0$ (et ce par le lemme IV.1.4), et que $T_1 = \frac{1}{m}\int_M h'(\varphi) \mid \nabla\varphi \mid_g^2 \omega^m$. L'application du lemme de positivité IV.1.4 à $d\varphi$ assure que : pour tout $1 \leq j \leq k-1$, la fonction $f : M \to \mathbb{R}$ définie par $f\omega^m = {}^tJd\varphi \wedge d\varphi \wedge \omega^{m-1-j}\wedge\tilde{\omega}^j$ est positive ou nulle. Or ${}^tJd\varphi = -d^c\varphi$ et $h$ est une fonction croissante, donc $T_2 \geq 0$.
Calculons à présent le terme $T_1$. On pose $\pi_0 := {}^tJd\varphi \wedge d\varphi$. On a $\pi_0 = i\underbrace{2\partial_a\varphi\overline{\partial_b\varphi}}_{=:(p_0)_{a\bar{b}}}dz^a \wedge dz^{\bar{b}}$ (voir la preuve du lemme de positivité IV.1.4), donc par le lemma IV.1.1, on déduit qu'en $x$, dans une carte $g$-unitaire centrée en $x$ on a :

$$\begin{aligned}
{}^tJd\varphi\wedge d\varphi\wedge\omega^{m-1} = \pi_0\wedge\omega^{m-1} &= \frac{1!(m-1)!}{m!}\sigma_1\left(\lambda[g^{-1}p_0]\right)\omega^m \\
&= \frac{1}{m}\sigma_1\left(\lambda[2\partial_a\varphi\overline{\partial_b\varphi}]_{1\leq a,b\leq m}\right)\omega^m \\
&= \frac{1}{m}trace\left([2\partial_a\varphi\overline{\partial_b\varphi}]_{1\leq a,b\leq m}\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{a=1}^m 2\mid\partial_a\varphi\mid^2
\end{aligned} \tag{IV.2.3}$$

Or $\mid\nabla\varphi\mid_g^2 = 2g^{a\bar{b}}\partial_a\varphi\partial_{\bar{b}}\varphi = 2\sum_{a=1}^m \mid\partial_a\varphi\mid^2$ donc $T_1 = \frac{1}{m}\int_M h'(\varphi)\mid\nabla\varphi\mid_g^2 \omega^m$. Par conséquent, $\int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right]h(\varphi)\omega^m \geq \frac{1}{2}\binom{m}{k}T_1 = \frac{1}{2m}\binom{m}{k}\int_M h'(\varphi)\mid\nabla\varphi\mid_g^2\omega^m$, ce qui achève la preuve de la proposition. ■

La proposition IV.2.1, analogue pour $k < m$ de la proposition 7.18 p.262 de [AUB98], étant acquise, nous allons pouvoir suivre dans ses grandes lignes la preuve de l'estimée $C^0$ préconisée par Aubin [AUB98] (celle de Yau est différente [YAU78]).

## IV.3 Méthode d'itération de Moser

Appliquons la proposition IV.2.1 à $\varphi_{t_s}$, ceci nous permettra en effet d'établir une inégalité fondamentale (l'inégalité $(In\,1)$ ci-dessous) delaquelle on déduira une estimée a priori de $\|\varphi_{t_s}\|_{C^0}$. Soit $p \geq 2$ un réel. La fonction $\varphi_{t_s}$ est $C^2$, $k$-admissible. On considère la fonction particulière $h(u) := u\,|\,u\,|^{p-2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cette fonction est de classe $C^1$ et sa dérivée vaut $h'(u) = |\,u\,|^{p-2} + u(p-2)u\,|\,u\,|^{p-4} = (p-1)\,|\,u\,|^{p-2} \geq 0$, la fonction $h$ est donc croissante. Par conséquent, on déduit par la proposition précédente IV.2.1 que :

$$\frac{1}{2m}\binom{m}{k}\int_M h'(\varphi_{t_s})\,|\,\nabla\varphi_{t_s}\,|_g^2\,\omega^m \leq \int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right] h(\varphi_{t_s})\omega^m \quad \text{i.e}$$

$$\text{(IV.3.1)} \qquad \frac{p-1}{2m}\binom{m}{k}\int_M |\,\varphi_{t_s}\,|^{p-2}|\,\nabla\varphi_{t_s}\,|^2\,v_g \leq \int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right]\varphi_{t_s}\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{p-2}\,v_g$$

Par ailleurs, on a :
(IV.3.2)

$$|\,\nabla\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}}\,|^2 = 2g^{a\bar{b}}\partial_a\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}}\,\partial_{\bar{b}}\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}} = 2g^{a\bar{b}}\left(\frac{p}{2}\varphi_{t_s}\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}-2}\right)^2\partial_a\varphi_{t_s}\partial_{\bar{b}}\varphi_{t_s} = \frac{p^2}{4}\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{p-2}|\,\nabla\varphi_{t_s}\,|^2$$

Donc l'inégalité précédente (IV.3.1) s'écrit :

$$\text{(In 1)} \qquad \int_M |\,\nabla\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}}\,|^2\,v_g \leq \frac{m\,p^2}{2(p-1)\binom{m}{k}}\int_M \left[\binom{m}{k} - f_k(g^{-1}\tilde{g})\right]\varphi_{t_s}\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{p-2}\,v_g$$

Dérivons dès à présent de cette inégalité (In 1) une autre inégalité (l'inégalité $(In\,4)$ ci-après) requise pour la suite de la preuve. L'inclusion continue de Sobolev $H_1^2(M) \subset L^{\frac{2m}{m-1}}(M)$, assure que :

$$\text{(In 2)} \qquad \|\,|\,\varphi_{t_s}\,|^p\,\|_{\frac{m}{m-1}} = \|\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}}\,\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste\left(\int_M |\,\nabla\,|\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}}\,|^2 + \int_M |\,\varphi_{t_s}\,|^{\frac{p}{2}.2}\right)$$

$Cste$ ne dépend pas de $p$. Par ailleurs, $f_k(g^{-1}\tilde{g})$ est uniformément bornée, en effet :

$$\text{(In 3)} \qquad |\,f_k(g^{-1}\tilde{g})\,| = e^{t_s f}\,\frac{\binom{m}{k} Vol(M)}{\int_M e^{t_s f}\,v_g} \leq \binom{m}{k} e^{2t_s\|f\|_\infty} \leq \binom{m}{k} e^{2\|f\|_\infty}$$

On déduit des inégalités (In 1), (In 2), (In 3) et $\dfrac{p^2}{2(p-1)} \leq p$ que :

$$\text{(In 4)} \qquad \|\,|\,\varphi_{t_s}\,|^p\,\|_{\frac{m}{m-1}} \leq Cste' \times p\left(\int_M |\,\varphi_{t_s}\,|^{p-1} + \int_M |\,\varphi_{t_s}\,|^p\right) \quad (p \geq 2)$$

$Cste'$ ne dépend pas de $p$. Supposons que $Cste' \geq 1$.

Remarque : On pourrait mettre la constante $Cste'$ sous la forme :

$$Cste' = Cste'' \times \left\| 1 - \frac{f_k}{\binom{m}{k}} \right\|_{L^\infty} \tag{IV.3.3}$$

où $Cste''$ ne dépend que de $m$ et de la constante de Sobolev de l'inclusion $H_1^2(M) \subset L^{\frac{2m}{m-1}}(M)$.

Démontrons à présent le lemme suivant :

**LEMMEIV.3.1** Il existe une constante $\mu$ telle que pour tout $1 \leq q \leq \dfrac{2m}{m-1}$,

$$\|\varphi_{t_s}\|_q \leq \mu$$

**Preuve** : Dans ce qui suit, et afin d'alléger les notations, on note $\triangle$ le Laplacien réel.
$M$ est une variété riemannienne compacte et $\varphi_{t_s} \in C^2$, donc par la formule de Green, on a :

$$\varphi_{t_s}(x) = \frac{1}{Vol(M)} \underbrace{\int_M \varphi_{t_s} dv}_{=0} + \int_M G(x,y) \triangle\varphi_{t_s}(y) dv(y) \tag{IV.3.4}$$

où $G(x,y) \geq 0$ et $\int_M G(x,y)dv(y)$ ne dépendent pas de $x$, on déduit donc que $\|\varphi_{t_s}\|_1 \leq C\|\triangle\varphi_{t_s}\|_1$.
Or $\|\triangle\varphi_{t_s}\|_1 = \int_M \triangle\varphi_{t_s}^+ + \triangle\varphi_{t_s}^-$ et $\int_M \triangle\varphi_{t_s} = \int_M \triangle\varphi_{t_s}^+ - \triangle\varphi_{t_s}^- = 0$ donc $\|\triangle\varphi_{t_s}\|_1 = 2\int_M \triangle\varphi_{t_s}^+$. Par ailleurs, $\triangle\varphi_{t_s} < 2m$ puisque $\varphi_{t_s}$ est $k$-admissible : en effet, en $x$ dans une carte $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée c'est-à-dire une carte telle que $g_{a\bar{b}} = \delta_{ab}$, $\tilde{g}_{a\bar{b}} = \delta_{ab}\lambda_a$ et $\partial_\nu g_{a\bar{b}} = 0$ pour tout $1 \leq a,b \leq m$, $\nu \in \{1,..,m,\bar{1},..,\bar{m}\}$, on a $\lambda(g^{-1}\tilde{g}) = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ donc $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m) \in \Gamma_k$ puisque $\varphi_{t_s}$ est $k$-admissible. Dans cette carte :

$$\triangle\varphi_{t_s} = -2g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}\varphi_{t_s} = -2\sum_{a=1}^m \partial_{a\bar{a}}\varphi_{t_s} = 2\sum_{a=1}^m (1-\lambda_a) = 2m - 2\sigma_1(\lambda) \tag{IV.3.5}$$

Or $\sigma_1(\lambda) > 0$ vu que $\lambda \in \Gamma_k$ ce qui prouve que $\triangle\varphi_{t_s} < 2m$, par conséquent, $\triangle\varphi_{t_s}^+ < 2m$ et $\|\triangle\varphi_{t_s}\|_1 \leq 4m\, Vol(M)$. On déduit donc que $\|\varphi_{t_s}\|_1$ est uniformément bornée :

$$\|\varphi_{t_s}\|_1 \leq 4m\, C\, Vol(M) \tag{IV.3.6}$$

Par ailleurs, par l'inégalité (In2) pour $p = 2$ :

$$\|\varphi_{t_s}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste\left(\int_M |\nabla|\varphi_{t_s}||^2 + \int_M |\varphi_{t_s}|^2\right) \tag{IV.3.7}$$

En outre $\varphi_{t_s} \in H_1^2(M)$, et elle est d'intégrale nulle, donc par l'inégalité de Sobolev-Poincaré $\|\varphi_{t_s}\|_2 \leq \mathscr{A}\|\nabla\varphi_{t_s}\|_2$. Or $|\nabla|\varphi_{t_s}|| = |\nabla\varphi_{t_s}|$ presque partout, donc $\|\varphi_{t_s}\|_{\frac{2m}{m-1}} \leq Cste\|\nabla|\varphi_{t_s}|\|_2$. En utilisant l'inégalité (In1) pour $p = 2$ et le fait que la quantité $f_k(g^{-1}\tilde{g})$ est uniformément bornée, on obtient que $\|\nabla \mid \varphi_{t_s} \mid \|_2^2 \leq Cste \|\varphi_{t_s}\|_1 \leq Cste'$, ce qui prouve que $\|\varphi_{t_s}\|_{\frac{2m}{m-1}}$ est uniformément bornée.

Soit $1 \leq q \leq \dfrac{2m}{m-1} =: 2\delta$. Par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\|\varphi_{t_s}\|_q^q = \int_M \mid \varphi_{t_s} \mid^q .1 \leq \left(\int_M \mid \varphi_{t_s} \mid^{q \cdot \frac{2\delta}{q}}\right)^{\frac{q}{2\delta}} Vol(M)^{1-\frac{q}{2\delta}} \tag{IV.3.8}$$

ainsi $\|\varphi_{t_s}\|_q \leq Vol(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2\delta}} \|\varphi_{t_s}\|_{2\delta}$. Or $Vol(M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2\delta}} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } Vol(M) \leq 1 \\ Vol(M)^{1-\frac{1}{2\delta}} & \text{si } Vol(M) \geq 1 \end{cases}$, et $\|\varphi_{t_s}\|_{2\delta} \leq Cste$, donc $\|\varphi_{t_s}\|_q \leq \mu := Cste \times \max\left(1, Vol(M)^{1-\frac{1}{2\delta}}\right)$, $\mu$ ne dépend pas de $q$. ■

On suppose sans perte de généralité que $\mu \geq 1$.

**LEMME IV.3.2** Il existe une constante $C_0$ telle que pour tout $p \geq 2$,

$$\|\varphi_{t_s}\|_p \leq C_0 \left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}},$$

avec $\delta = \dfrac{m}{m-1}$ et $C = Cste'\left(1 + \max\left(1, Vol(M)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \geq 1$ où $Cste'$ est la constante de l'inégalité (In4).

**Preuve** : La preuve de ce lemme se fait par récurrence : on vérifie en premier lieu que l'inégalité est vérifiée pour $2 \leq p \leq 2\delta = \dfrac{2m}{m-1}$, ensuite on montre que si l'inégalité est vraie pour $p$ alors elle est vérifiée pour $\delta p$ aussi. On pose :

$$C_0 = \mu \delta^{m(m-1)} C^m e^{\frac{m}{e}} \tag{IV.3.9}$$

Pour $2 \leq p \leq 2\delta$ on a $\|\varphi_{t_s}\|_p \leq \mu$, donc il suffit de vérifier que $\mu \leq C_0\left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}}$. Cette inégalité est équivalente à $\delta^{m(m-1)} C^m e^{\frac{m}{e}} \left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}} \geq 1$ donc à $\left(\delta^{m(m-1)} C^m\right) e^{\frac{m}{e}} \geq \left(\delta^{m(m-1)} C^m\right)^{\frac{1}{p}} p^{\frac{m}{p}}$. Or si $x \geq 1$ alors $x \geq x^{\frac{1}{p}}$ (car $p \geq 1$), et $\delta^{m(m-1)} C^m \geq 1$ (puisque $C \geq 1, m \geq 1$ et $\delta \geq 1$), ainsi $\delta^{m(m-1)} C^m \geq \left(\delta^{m(m-1)} C^m\right)^{\frac{1}{p}}$. En outre, $p^{\frac{m}{p}} = e^{m \frac{\ln p}{p}} \leq e^{\frac{m}{e}}$, ce qui prouve l'inégalité pour $2 \leq p \leq 2\delta$.

Fixons à présent un réel $p \geq 2$, supposons que $\|\varphi_{t_s}\|_p \leq C_0\left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}}$ et montrons que $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p} \leq C_0\left(\delta^{m-1} C \delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$. Rappelons l'inégalité (In4) prouvée précédemment :

$$\| \mid \varphi_{t_s} \mid^p \|_\delta \leq Cste' \times p \left(\int_M \mid \varphi_{t_s} \mid^{p-1} + \int_M \mid \varphi_{t_s} \mid^p\right) \quad (p \geq 2) \tag{In4}$$

$Cste'$ ne dépend pas de $p$, cette inégalité se réécrit $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p}^{p} \leq Cste' \times p\left(\|\varphi_{t_s}\|_{p-1}^{p-1} + \|\varphi_{t_s}\|_{p}^{p}\right)$. Or $1 \leq p-1 \leq p$, donc par l'inégalité de Hölder on a $\|\varphi_{t_s}\|_{p-1} \leq Vol(M)^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}} \|\varphi_{t_s}\|_{p}$, par conséquent :

$$\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p}^{p} \leq Cste' \times p\left(Vol(M)^{\frac{1}{p}} \|\varphi_{t_s}\|_{p}^{p-1} + \|\varphi_{t_s}\|_{p}^{p}\right) \tag{IV.3.10}$$

- Si $\|\varphi_{t_s}\|_p \leq 1$, alors $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p}^{p} \leq C \times p$ d'où $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p} \leq (Cp)^{\frac{1}{p}}$, la preuve est donc ramenée à vérifier que $(Cp)^{\frac{1}{p}} \leq C_0\left(\delta^{m-1} C\delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$. Cette inégalité est équivalente à l'inégalité $p^{\frac{1}{p}(1+\frac{m}{\delta})} \leq \mu\delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} e^{\frac{m}{e}} \times C^{m-\frac{m}{\delta p}-\frac{1}{p}}$, mais $1+\dfrac{m}{\delta} = m$, elle est donc équivalente à $p^{\frac{m}{p}} \leq \mu\delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} e^{\frac{m}{e}} \times C^{m(1-\frac{1}{p})}$. Par ailleurs, $p^{\frac{m}{p}} \leq e^{\frac{m}{e}}$ et $\mu\delta^{m(m-1)(1-\frac{1}{p})} \geq 1$ donc il suffit de vérifier que $C^{m(1-\frac{1}{p})} \geq 1$, et ceci est vrai puisque $C \geq 1$.
- Si $\|\varphi_{t_s}\|_p \geq 1$, on déduit que $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p}^{p} \leq C \times p\, \|\varphi_{t_s}\|_{p}^{p}$, donc par hypothèse de récurrence $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p} \leq C^{\frac{1}{p}} \times p^{\frac{1}{p}} \|\varphi_{t_s}\|_{p} \leq (Cp)^{\frac{1}{p}} C_0\left(\delta^{m-1} C p\right)^{\frac{-m}{p}}$. Or $\dfrac{1-m}{p} = \dfrac{-m}{\delta p}$, d'où l'inégalité recherchée $\|\varphi_{t_s}\|_{\delta p} \leq C_0 \delta^{\frac{-m^2}{\delta p}} (Cp)^{\frac{-m}{\delta p}} = C_0\left(\delta^{m-1} C\delta p\right)^{\frac{-m}{\delta p}}$.

■

**COROLLAIRE IV.3.1**

$$\|\varphi_{t_s}\|_{C^0} \leq C_0$$

<u>**Preuve**</u> *:* Par le lemme précédent IV.3.2, on a $\|\varphi_{t_s}\|_{p} \leq C_0\left(\delta^{m-1} C\right)^{\frac{-m}{p}} p^{\frac{-m}{p}}$ pour tout $p \geq 2$, or $\left(\delta^{m-1}C\right)^{\frac{-m}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ et $p^{\frac{-m}{p}} = e^{-m\frac{\ln p}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, de plus $\|\varphi_{t_s}\|_{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|\varphi_{t_s}\|_{C^0}$ car $\varphi_{t_s}$ est continue sur la variété compacte $M$, ce qui prouve le corollaire par passage à la limite. ■

<u>Remarque</u> : On a vu dans une remarque précédente que la constante $Cste'$ de l'inégalité (In4) pouvait être mise sous la forme $Cste' = Cste'' \times \left\|1 - \dfrac{f_k}{\binom{m}{k}}\right\|_{L^\infty}$ (cf. (IV.3.3)), or par (IV.3.9) $C_0 = \mu\delta^{m(m-1)} C^m\, e^{\frac{m}{e}}$, en outre $C = Cste'\left(1+\max\left(1, Vol(M)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \geq 1$, on déduit donc que l'estimée $C^0$ du corollaire IV.3.1 peut être mise sous la forme :

$$\|\varphi_{t_s}\|_{C^0} \leq \tilde{C}_0 \times \left\|1 - \frac{f_k}{\binom{m}{k}}\right\|_{L^\infty}^{m} \tag{IV.3.11}$$

# Chapitre V

# Estimée $C^2$

## V.1 Stratégie

Nous allons chercher, en premier lieu, un majorant uniforme des valeurs propres $\lambda(g^{-1}\tilde{g})$. On montrera, en effet, un pincement uniforme de ces valeurs propres sous l'hypothèse que la variété est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative. Cette hypothèse de courbure intervient seulement dans la preuve de ce pincement, comme elle le faisait dans la première résolution de la conjecture de Calabi [AUB70] p. 408 et il faudrait la lever si possible (comme Aubin l'a fait avec $k = m$ dans [AUB76]). On en déduira ensuite l'ellipicité uniforme de l'équation de continuité et une estimation uniforme du gradient.
Pour $1 \leq j \leq m$ et $z \in \mathbb{C}^m$, on note $u_j = \Re e(z_j)$ et $u_{j+m} = \Im m(z_j)$. L'exemple $\psi(z) := \frac{1}{2}K\sum_{j=1}^{m}[(u_j)^2 - (u_{j+m})^2]$, qui vérifie $\partial_{j\bar{j}}\psi = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$, mais $\partial_{u_j u_j}\psi = K >> 1$ arbitraire, illustre la difficulté rémanente à ce stade de la preuve. L'étape finale, ignorée dans [HOU08], consiste à estimer $\|\varphi\|_{C^2(M)}$. Pour cela, on commence par montrer que trouver une estimée $C^2$ se réduit à majorer uniformément une certaine quantité $\beta_1 = (\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)$, puis on majore uniformément cette quantité (cette partie de la preuve ne requiert pas l'hypothèse de positivité de la courbure bisectionelle holomorphe).

## V.2 Pincement uniforme des valeurs propres

### V.2.1 La fonctionnelle $B$

Soient $t \in \mathcal{T}_{\ell,\alpha}$ et $\varphi_t : M \to \mathbb{R}$ une solution $C^{\ell,\alpha}$, $k$-admissible de l'équation $(E_{k,t})$ telle que $\int_M \varphi_t \omega^m = 0$. On considère la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} B : UT^{1,0} &\to \mathbb{R} \\ (P,\xi) &\mapsto B(P,\xi) = \tilde{h}_P(\xi,\xi) - \varphi_t(P) \end{aligned}$$

où $UT^{1,0}$ est le fibré unitaire associé à $(T^{1,0},h)$, et $\tilde{g}$ est reliée à $g$ par : $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$ (voir début du chapitre II). $B$ est continue sur le compact $UT^{1,0}$, elle atteint donc son maximum en un point $(P_0,\xi_0) \in UT^{1,0}$. Par ailleurs, pour $P \in M$ fixé, $\xi \in UT_P^{1,0} \mapsto \tilde{h}_P(\xi,\xi)$ est continue sur le compact $UT_P^{1,0}$ (la fibre) ; par conséquent elle atteint son maximum en un vecteur unitaire $\xi_P \in UT_P^{1,0}$ et d'après le principe du min-max on peut choisir comme $\xi_P$ "la direction" de la plus grande valeur propre de $A_P$, $\lambda_{max}(A_P)$. Plus précisément, on a :

**LEMME V.2.1** (*principe du min-max*)

$$\begin{aligned} \tilde{h}_P(\xi_P,\xi_P) &= \max_{\xi \in T_P^{1,0}, h_P(\xi,\xi)=1} \tilde{h}_P(\xi,\xi) \\ &= \lambda_{max}(A_P) \end{aligned}$$

<u>**Preuve**</u> *:* Par le théorème spectral, il existe $e_1^P,...,e_m^P$ une base $h_P$-orthonormée de $(T_P^{1,0},h_P)$ constituée de vecteurs propres de $A_P$, donc :

$$\text{(V.2.1)} \qquad Mat_{e_1^P,...,e_m^P}\tilde{h}_P = Mat_{e_1^P,...,e_m^P}A_P = diag(\lambda_1,...,\lambda_m)$$

avec $(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\Gamma_k$ et $\lambda_1\geq...\geq\lambda_m$. Tout $\xi\in T_P^{1,0}$ tel que $h_P(\xi,\xi)=1$ s'écrit $\xi=\sum_{i=1}^m \xi^i e_i^P$ avec $\sum_{i=1}^m(\xi^i)^2=1$ et on a :

$$\text{(V.2.2)} \qquad \tilde{h}_P(\xi,\xi)=\sum_{i,j=1}^m \xi^i\xi^j\tilde{h}_P\left(e_i^P,e_j^P\right)=\sum_{i,j=1}^m \xi^i\xi^j\lambda_i\delta_{ij}=\sum_{i=1}^m\lambda_i\left(\xi^i\right)^2\leq\lambda_{max}(A_P)$$

Soit $\xi_P=e_1^P$ la direction de la plus grande valeur propre : $\lambda_1=\lambda_{max}(A_P)$, $A_P(\xi_P)=\lambda_{max}(A_P)\xi_P$, ainsi $h_P(\xi_P,\xi_P)=1$ et $\tilde{h}_P(\xi_P,\xi_P)=\lambda_{max}(A_P)$, ce qui prouve le lemme.

■

Pour $P$ fixé, on a $\max_{h_P(\xi,\xi)=1}B(P,\xi)=B(P,\xi_P)=\lambda_{max}(A_P)-\varphi_t(P)$, on déduit par conséquent que $\max_{(P,\xi)\in UT^{1,0}}B(P,\xi)=\max_{P\in M}B(P,\xi_P)=B(P_0,\xi_0)\leq B(P_0,\xi_{P_0})$, d'où :

$$\text{(V.2.3)} \qquad \max_{(P,\xi)\in UT^{1,0}}B(P,\xi)=B(P_0,\xi_{P_0})=\lambda_{max}(A_{P_0})-\varphi_t(P_0)$$

Au point $P_0$, on considère $e_1^{P_0},...,e_m^{P_0}$ une base $h_{P_0}$-orthonormée de $(T_{P_0}^{1,0},h_{P_0})$ constituée de vecteurs propres de $A_{P_0}$ et qui en outre est :

1. $h_{P_0}$-orthonormée : $[h_{ij}(P_0)]_{1\leq i,j\leq m}=I_m$
2. $\tilde{h}_{P_0}$-diagonale : $[\tilde{h}_{ij}(P_0)]_{1\leq i,j\leq m}=Mat\,A_{P_0}=diag(\lambda_1,...,\lambda_m)\quad \lambda\in\Gamma_k$
3. $\lambda_{max}(A_{P_0})$ est atteint dans la direction $e_1^{P_0}=\xi_{P_0}$ à savoir :
   $A_{P_0}(\xi_{P_0})=\lambda_{max}(A_{P_0})\xi_{P_0}=\lambda_1\xi_{P_0}$ et $\lambda_1\geq...\geq\lambda_m$.

Autrement dit, c'est une base telle que :

1. $[g_{i\bar{j}}(P_0)]_{1\leq i,j\leq m}=I_m$
2. $[\tilde{g}_{i\bar{j}}(P_0)]_{1\leq i,j\leq m}=Mat\,A_{P_0}=diag(\lambda_1,...,\lambda_m)\quad\lambda\in\Gamma_k$
3. $\lambda_{max}(A_{P_0})=\lambda_1\geq...\geq\lambda_m$

Soit $(U_0,\psi_0)$ une carte holomorphe normale centrée en $P_0$ telle que $\psi_0(P_0)=0$ et $\partial_i\,|_{P_0}=e_i^{P_0}\quad i=1...m$ (l'existence d'une telle carte est démontrée en Annexe). On se placera désormais, sur cette carte $(U_0,\psi_0)$ ainsi construite en $P_0$.

### V.2.2 La fonctionnelle auxiliaire locale $B_1$

La fonction $P \mapsto g_{1\bar{1}}(P)$ est continue sur $U_0$ et vaut 1 en $P_0$, il existe donc un ouvert $U_1 \subset U_0$ tel que : $g_{1\bar{1}}(P) > 0$ pour tout $P \in U_1$. Soit $B_1$ la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} B_1 : U_1 &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto B_1(P) = \frac{\tilde{g}_{1\bar{1}}(P)}{g_{1\bar{1}}(P)} - \varphi_t(P) \end{aligned}$$

Cette fonctionnelle $B_1$ atteint un maximum local en $P_0$. En effet, pour tout $P \in U_1$ on a :

$$\frac{\tilde{g}_{1\bar{1}}(P)}{g_{1\bar{1}}(P)} = \frac{\tilde{g}_P(\partial_1, \partial_{\bar{1}})}{g_P(\partial_1, \partial_{\bar{1}})} = \frac{\tilde{h}_P(\partial_1, \partial_1)}{h_P(\partial_1, \partial_1)} = \tilde{h}_P\left(\frac{\partial_1}{|\,\partial_1\,|_{h_P}}, \frac{\partial_1}{|\,\partial_1\,|_{h_P}}\right) \leq \lambda_{max}(A_P) \tag{V.2.4}$$

(cf. lemme V.2.1), donc $B_1(P) \leq \lambda_{max}(A_P) - \varphi_t(P) \leq \lambda_{max}(A_{P_0}) - \varphi_t(P_0) = B_1(P_0)$.

### V.2.3 Différentiation de l'équation

Afin d'alléger les notations, on cachera désormais l'indice $t$ de $\varphi_t$. Différentions l'équation $(E_{k,t})$ en $P$, dans une carte $z$ :

(V.2.5)

$$t\,\partial_{\bar{1}} f = \partial_{\bar{1}}\left(F_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\leq i,j\leq m}\right)\right) = dF_{k\,[\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi(P)]_{1\leq i,j\leq m}}.\left[\partial_{\bar{1}}(g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi)\right]_{1\leq i,j\leq m}$$

avec $\partial_{\bar{1}}(g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi) = \partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi$, or $dF_{k\,[a_i^j]}.[b_i^j] = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}([a_i^j])\, b_i^j$, donc :

$$t\,\partial_{\bar{1}} f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]\right) \times \left(\partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi\right) \tag{V.2.6}$$

En différentiant une deuxième fois, on obtient :

$$\begin{aligned} t\,\partial_{1\bar{1}} f =& \sum_{i,j=1}^{m} \partial_1\left(\frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi])\right) \quad (\partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi) \\ &+ \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]) \quad \partial_1\left(\partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi\right) \\ =& \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]) \quad \left(\partial_1 g^{s\bar{o}}\,\partial_{r\bar{o}}\varphi + g^{s\bar{o}}\,\partial_{1r\bar{o}}\varphi\right)\left(\partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi\right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]) \quad \left(\partial_{1\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{i\bar{\ell}}\varphi + \partial_{\bar{1}} g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{1i\bar{\ell}}\varphi + \partial_1 g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi + g^{j\bar{\ell}}\,\partial_{1\bar{1}i\bar{\ell}}\varphi\right) \end{aligned} \tag{V.2.7}$$

On se place à présent dans la carte $(U_1, \psi_0)$, par normalité au point $P_0$ on a : $g^{j\bar{\ell}} = \delta^{j\ell}$, $\partial_\alpha g_{i\bar{\ell}} = 0$ et $\partial_\alpha g^{i\bar{\ell}} = 0$. Par ailleurs, $[\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi] = [\delta_i^j + \partial_{i\bar{j}}\varphi] = [\tilde{g}_{i\bar{j}}] = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, ce qui permet de simplifier l'expression précédente (V.2.7), on obtient en effet en $P_0$, dans la carte $(U_1, \psi_0)$ que :

$$t\,\partial_{1\bar{1}} f = \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}\Big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\Big) \quad \partial_{1r\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{1}i\bar{j}}\varphi$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\Big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\Big) \quad \Big(\partial_{1\bar{1}} g^{j\bar{i}}\,\partial_{i\bar{i}}\varphi + \partial_{1\bar{1}i\bar{j}}\varphi\Big) \tag{V.2.8}$$

Or $\partial_{1\bar{1}} g^{j\bar{i}} = \partial_{\bar{1}}\big(\partial_1 g^{j\bar{i}}\big) = \partial_{\bar{1}}\big(-g^{j\bar{s}} g^{o\bar{i}}\partial_1 g_{o\bar{s}}\big)$, donc toujours par normalité, on obtient en $P_0$ que : $\partial_{1\bar{1}} g^{j\bar{i}} = -g^{j\bar{s}} g^{o\bar{i}}\partial_{1\bar{1}} g_{o\bar{s}} = -\partial_{1\bar{1}} g_{i\bar{j}} - R_{1\bar{1}i\bar{j}}$, par conséquent :

$$t\,\partial_{1\bar{1}} f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\Big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\Big) \quad \Big(\partial_{1\bar{1}i\bar{j}}\varphi - R_{1\bar{1}i\bar{j}}\,\partial_{i\bar{i}}\varphi\Big)$$

$$+\sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}\Big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\Big) \quad \partial_{1r\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{1}i\bar{j}}\varphi \tag{V.2.9}$$

### V.2.4 Usage de la concavité

On montre ici que le deuxième terme du second membre de l'égalité (V.2.9) est négatif. Remarquons que la matrice $[\zeta_i^j]_{1\le i,j\le m} = [\partial_{1i\bar{j}}\varphi]_{1\le i,j\le m}$ n'est pas hermitienne, donc le fait que ce terme soit négatif n'est pas une conséquence directe de la concavité de la fonction $F_k : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \subset \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$. Mais une démonstration similaire à celle de la concavité de $F_k$ est nécessaire (voir la preuve de la proposition II.4.1). En effet, par concavité de la fonction $\ln\sigma_k$ (cf. [CNS85]), on obtient le lemme suivant :

**Lemme V.2.2**

$$S := \sum_{i,j,r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B_r^s \partial B_i^j}\Big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\Big) \quad \partial_{1r\bar{s}}\varphi\,\partial_{\bar{1}i\bar{j}}\varphi \le 0$$

__Preuve__ : On a :

$$S = \sum_{1\le i\ne j\le m} \frac{-\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\,|\partial_{1j\bar{i}}\varphi|^2 + \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)\sigma_k(\lambda) - \sigma_{k-1,i}(\lambda)\sigma_{k-1,j}(\lambda)}{(\sigma_k(\lambda))^2}}_{=:c_{ij}}\,\partial_{1j\bar{j}}\varphi\,\underbrace{\partial_{\bar{1}i\bar{i}}\varphi}_{Z_i} \tag{V.2.10}$$

Or $\lambda \in \Gamma_k$, donc $\dfrac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} > 0$ pour tout $1 \le i \ne j \le m$, par conséquent :

$$S \le \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} Z_i \overline{Z_j} \tag{V.2.11}$$

Le nombre complexe $Z_i$ s'écrit $Z_i = a_i + i\, b_i$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et la matrice réelle $[c_{ij}]_{1\le i,j\le m}$ est symétrique donc :

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} Z_i \overline{Z_j} = \sum_{1\le i<j\le m} c_{ij}\left(Z_i\overline{Z_j} + Z_j\overline{Z_i}\right) + \sum_{i=1}^{m} c_{ii}\,|\,Z_i\,|^2$$

$$= \sum_{1\le i<j\le m} c_{ij}\, 2\left(a_i a_j + b_i b_j\right) + \sum_{i=1}^{m} c_{ii}\left((a_i)^2 + (b_i)^2\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\, a_i a_j + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\, b_i b_j \tag{V.2.12}$$

Par ailleurs, $c_{ij} = \dfrac{\partial^2 \ln \sigma_k}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j}(\lambda)$ et par concavité de $\ln\sigma_k$ en $\lambda \in \Gamma_k$ (cf. [CNS85]), on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^m \qquad \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \ln \sigma_k}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}(\lambda)\,\xi_i\,\xi_j \le 0 \tag{V.2.13}$$

Par conséquent, $\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\, a_i a_j \le 0$ et $\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\, b_i b_j \le 0$, ce qui montre que $S \le 0$. ■

Finalement, l'équation (V.2.9) combinée au lemme V.2.2 donne l'inégalité :

$$t\,\partial_{1\bar{1}} f \le \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi - R_{1\bar{1}i\bar{i}}\,\partial_{i\bar{i}}\varphi\right) \tag{V.2.14}$$

### V.2.5 Différentiation de la fonctionnelle $B_1$

On différentie deux fois la fonctionnelle $B_1$ :

$$B_1(P) = \frac{\tilde{g}_{1\bar{1}}(P)}{g_{1\bar{1}}(P)} - \varphi(P)$$

$$\partial_{\bar{i}} B_1 = \frac{\partial_{\bar{i}}\tilde{g}_{1\bar{1}}}{g_{1\bar{1}}} - \frac{\tilde{g}_{1\bar{1}}\partial_{\bar{i}} g_{1\bar{1}}}{(g_{1\bar{1}})^2} - \partial_{\bar{i}}\varphi$$

$$\partial_{i\bar{i}} B_1 = \frac{\partial_{i\bar{i}}\tilde{g}_{1\bar{1}}}{g_{1\bar{1}}} - \frac{\partial_i g_{1\bar{1}}\,\partial_{\bar{i}}\tilde{g}_{1\bar{1}} + \partial_i\tilde{g}_{1\bar{1}}\,\partial_{\bar{i}} g_{1\bar{1}} + \tilde{g}_{1\bar{1}}\partial_{i\bar{i}} g_{1\bar{1}}}{(g_{1\bar{1}})^2} + \frac{2\tilde{g}_{1\bar{1}}\partial_i g_{1\bar{1}}\partial_{\bar{i}} g_{1\bar{1}}}{(g_{1\bar{1}})^3} - \partial_{i\bar{i}}\varphi$$

Par conséquent, on obtient au point $P_0$, dans la carte $(U_1, \psi_0)$ que :

$$\partial_{i\bar{i}} B_1 = \partial_{i\bar{i}}\left(g_{1\bar{1}} + \partial_{1\bar{1}}\varphi\right) - \lambda_1\,\partial_{i\bar{i}} g_{1\bar{1}} - \partial_{i\bar{i}}\varphi = R_{1\bar{1}i\bar{i}} + \partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi - \lambda_1 R_{1\bar{1}i\bar{i}} - \partial_{i\bar{i}}\varphi \tag{V.2.15}$$

On définit :

$$L := \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\le i,j\le m}\right)\nabla_i^j \tag{V.2.16}$$

On a donc en $P_0$ :

$$L(B_1) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}\partial_{i\bar{\ell}}\varphi]_{1\le i,j\le m}\right)\partial_{i\bar{j}}B_1$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi + (1-\lambda_1)R_{1\bar{1}i\bar{i}} - \partial_{i\bar{i}}\varphi\right) \tag{V.2.17}$$

En combinant cette dernière égalité (V.2.17) avec l'inégalité (V.2.14), on obtient :
(V.2.18)

$$t\,\partial_{1\bar{1}}f - L(B_1) \le \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi - R_{1\bar{1}i\bar{i}}\partial_{i\bar{i}}\varphi\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\partial_{1\bar{1}i\bar{i}}\varphi + (1-\lambda_1)R_{1\bar{1}i\bar{i}} - \partial_{i\bar{i}}\varphi\right)$$

Les dérivées 4ièmes se simplifient, d'où :

$$t\,\partial_{1\bar{1}}f - L(B_1) \le \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}R_{1\bar{1}i\bar{i}}\left(-\partial_{i\bar{i}}\varphi + \lambda_1 - 1\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\partial_{i\bar{i}}\varphi$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}R_{1\bar{1}i\bar{i}}\left(\lambda_1 - 1 - \lambda_i + 1\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\lambda_i - 1\right) \tag{V.2.19}$$

Or $B_1$ atteint son maximum en $P_0$, donc :

$$0 \ge L(B_1) \ge \sum_{i=2}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(-R_{1\bar{1}i\bar{i}}\right)\left(\lambda_1 - \lambda_i\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(\lambda_i - 1\right) + t\,\partial_{1\bar{1}}f \tag{V.2.20}$$

Ce qui donne au final l'inégalité suivante en $P_0$ :

$$0 \ge \sum_{i=2}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(-R_{1\bar{1}i\bar{i}}\right)\left(\lambda_1 - \lambda_i\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} + t\,\partial_{1\bar{1}}f \tag{V.2.21}$$

**Hypothèse de courbure** : Désormais, on suppose que **la courbure bisectionnelle holomorphe** (cf. Annexes) est positive ou nulle en tout point $P \in M$. Ainsi, dans toute carte holomorphe normale centrée en $P$ on a :

$$R_{a\bar{a}b\bar{b}}(P) \le 0 \quad \forall a,b \in \{1,\cdots,m\} \tag{V.2.22}$$

Ceci vaut en particulier en $P_0$ dans la carte $\psi_0$.

Revenons à présent à l'inégalité (V.2.21), on a $\sigma_k(\lambda) > 0$ et $\sigma_{k-1,i}(\lambda) > 0$ puisque $\lambda \in \Gamma_k$, de plus pour tout $i \in \{2,\cdots,m\}$ on a $\left(-R_{1\bar{1}i\bar{i}}\right) \ge 0$ sous notre hypothèse de courbure. Par ailleurs, $\lambda_i \le \lambda_1$ pour tout $i \in \{1,\cdots,m\}$, ainsi :

$$\sum_{i=2}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\left(-R_{1\bar{1}i\bar{i}}\right)\left(\lambda_1 - \lambda_i\right) \ge 0 \tag{V.2.23}$$

Ce qui nous permet de nous débarrasser des termes de courbure dans l'inégalité (V.2.21), et donne finalement l'inégalité :

$$0 \ge -\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} + t\,\partial_{1\bar{1}}f \tag{V.2.24}$$

### V.2.6 Majoration de la plus grande valeur propre $\lambda_1$

On utilise dans cette section quelques identités élémentaires (cf. [LT94]) satisfaites par les $\sigma_\ell$ à savoir :

**LEMME V.2.3** $\forall\, 1 \le \ell \le m \quad \sigma_\ell(\lambda) = \sigma_{\ell,i}(\lambda) + \lambda_i\, \sigma_{\ell-1,i}(\lambda)$

**LEMME V.2.4** $\forall\, 1 \le \ell \le m \quad \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\ell-1,i}(\lambda)\,\lambda_i = \ell\,\sigma_\ell(\lambda)$,

donc en particulier : $\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}\,\lambda_i = k$

**Preuve** : Soit $1 \le \ell \le m$. Le polynôme $\sigma_\ell$ est homogène de degré $\ell$, donc vérifie l'équation d'Euler : $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \sigma_\ell}{\partial \lambda_i}(\lambda)\,\lambda_i = \ell\,\sigma_\ell(\lambda)$ ■

En combinant les lemmes V.2.3 et V.2.4, on obtient le corollaire suivant :

**COROLLAIRE V.2.1** $\forall\, 1 \le \ell \le m \quad \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\ell,i}(\lambda) = (m-\ell)\sigma_\ell(\lambda)$,

donc en particulier : $\sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} = (m-k+1)\frac{\sigma_{k-1}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)}$

Par conséquent, l'inégalité (V.2.24) s'écrit :

$$0 \ge -k + k\,\frac{(m-k+1)}{k}\,\frac{\sigma_{k-1}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} + t\,\partial_{1\bar{1}} f \tag{V.2.25}$$

soit encore :

$$q_k := \frac{(m-k+1)}{k}\,\frac{\sigma_{k-1}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} \le 1 - \frac{t}{k}\,\partial_{1\bar{1}} f \tag{V.2.26}$$

et donc, $q_k \le 1 + \frac{1}{k}\,|\,\partial_{1\bar{1}} f\,|$. Or en $P_0$ :

$$|\,\nabla^2 f\,|_g^2 = 2\,g^{a\bar{c}}\,g^{d\bar{b}}\left(\nabla_{a\bar{b}} f\,\nabla_{\bar{c}d} f + \nabla_{ad} f\,\nabla_{\bar{c}\bar{b}} f\right) = 2\sum_{a,b=1}^{m}\left(|\,\partial_{a\bar{b}} f\,|^2 + |\,\partial_{ab} f\,|^2\right) \tag{V.2.27}$$

donc $|\,\partial_{1\bar{1}} f\,| \le |\,\nabla^2 f\,|_g$, par conséquent $q_k \le 1 + \frac{1}{k}\,\|f\|_{C^2(M)} =: C_1$. Autrement dit, il existe une constante $C_1$ ne dépendant que de $k$ et $\|f\|_{C^2}$ telle que :

$$q_k \le C_1 \tag{V.2.28}$$

Pour déduire de l'inégalité (V.2.28) une majoration uniforme de la plus grande valeur propre $\lambda_1$, on utilise les inégalités de Newton (cf. Annexes lemme VII.8.2). On utilise en effet ces inégalités pour relier $q_k$ à $\sigma_1$.

Pour tout $2 \le \ell \le k$ et $\lambda \in \Gamma_k$, on a $\sigma_\ell(\lambda) > 0, \sigma_{\ell-1}(\lambda) > 0$ et $\sigma_{\ell-2}(\lambda) > 0$ $(\sigma_0(\lambda) = 1$ par convention), donc par les inégalités de Newton (lemme VII.8.2) :

$$\frac{(m-\ell+2)}{(\ell-1)}\frac{\sigma_{\ell-2}(\lambda)}{\sigma_{\ell-1}(\lambda)} \le \frac{(m-\ell+1)}{\ell}\frac{\sigma_{\ell-1}(\lambda)}{\sigma_\ell(\lambda)} \tag{V.2.29}$$

ou encore :

$$q_{\ell-1} \le q_\ell \tag{V.2.30}$$

par conséquent :

$$q_k \ge q_{k-1} \ge \ldots \ge q_2 = \frac{(m-1)\sigma_1(\lambda)}{2\sigma_2(\lambda)} \tag{V.2.31}$$

Ce qui permet de déduire par récurrence que :

$$\forall\, 2 \le \ell \le k \quad \sigma_1(\lambda) \le \frac{\ell!(m-\ell)!}{(m-1)!}\sigma_\ell(\lambda)\left(q_\ell\right)^{\ell-1} \tag{V.2.32}$$

et en particulier :

$$\sigma_1(\lambda) \le \frac{k!(m-k)!}{(m-1)!}\sigma_k(\lambda)\left(q_k\right)^{k-1} \tag{V.2.33}$$

Or $\sigma_k(\lambda) = e^{tf(P_0)}\dfrac{\binom{m}{k}\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m} \le e^{2\|f\|_\infty}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$, donc en combinant l'inégalité (V.2.33) avec cette dernière estimation et avec l'estimation (V.2.28), on obtient en $P_0$ :

$$\sigma_1(\lambda) \le m\, e^{2\|f\|_\infty}(C_1)^{k-1} =: C_2 \tag{V.2.34}$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

**THÉORÈME V.2.1** Il existe une constante $C_2 > 0$ ne dépendant que de $m, k, \|f\|_\infty$ et $\|f\|_{C^2}$ telle que :

$$\forall\, 1 \le i \le m \quad \lambda_i \le C_2$$

(ici $\lambda = \lambda(P_0)$ )

En combinant ce résultat avec l'estimée a priori $C^0$, $\|\varphi_t\|_{C^0} \le C_0$, on obtient immédiatement le théorème plus général suivant :

**THÉORÈME V.2.2** Il existe une constante $C_2' > 0$ ne dépendant que de $m, k, \|f\|_{C^2}$ et $C_0$ telle que :

$$\forall P \in M, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \lambda_i(P) \le C_2'$$

**Preuve** : Pour $P \in M$, on a $\lambda_{\max}(A_P) - \varphi_t(P) \le \lambda_{\max}(A_{P_0}) - \varphi_t(P_0)$ donc $\lambda_{\max}(A_P) \le \lambda_{\max}(A_{P_0}) + \varphi_t(P) - \varphi_t(P_0) \le C_2 + 2\|\varphi_t\|_\infty$ ce qui, combiné avec l'estimée $C^0$, donne $\lambda_{\max}(A_P) \le C_2 + 2C_0 =: C_2'$. ■

### V.2.7 Pincement uniforme des valeurs propres

**PROPOSITION V.2.1** On dispose du pincement suivant des valeurs propres :

$$\forall i \in \{1,..,m\}, \quad -(m-1)C_2 \leq \lambda_i \leq C_2,$$

où $\lambda = \lambda(P_0)$ et $C_2$ est la constante du théorème V.2.1.

**Preuve** : On a $\sigma_1(\lambda) = \sigma_{1,i}(\lambda) + \lambda_i > 0$ puisque $\lambda \in \Gamma_k$, donc $\lambda_i > -\sigma_{1,i}(\lambda) \geq -(m-1)C_2$. ■

De façon similaire, on montre la proposition plus générale suivante :

**PROPOSITION V.2.2**

$$\forall P \in M, \quad \forall i \in \{1,..,m\}, \quad -(m-1)C_2' \leq \lambda_i(P) \leq C_2'$$

où $C_2'$ est la constante du théorème V.2.2

## V.3 L'ellipticité uniforme de l'équation de continuité $E_{k,t}$

**PROPOSITION V.3.1** Il existe des constantes $0 < E \leq F$ ne dépendant que de $m, k, \|f\|_\infty$ et $C_2$ telles que :

$$E \leq \sigma_{k-1,1}(\lambda) \leq ... \leq \sigma_{k-1,m}(\lambda) \leq F$$

où $\lambda = \lambda(P_0)$.

**Preuve** : On a $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_m$ d'où $\dfrac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_1} = \sigma_{k-1,1}(\lambda) \leq ... \leq \dfrac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_m} = \sigma_{k-1,m}(\lambda) \leq \begin{pmatrix} m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} (C_2)^{k-1} =: F$, la constante $F$ ainsi définie ne dépend que de $m, k$ et $C_2$. Cherchons à présent un minorant uniforme de $\sigma_{k-1,1}(\lambda)$, et ce en utilisant l'identité : $\sigma_k(\lambda) = \lambda_1 \sigma_{k-1,1}(\lambda) + \sigma_{k,1}(\lambda)$. On distingue deux cas :

- Cas 1 : $\sigma_{k,1}(\lambda) \leq 0$. Dans ce cas on a $\sigma_k(\lambda) \leq \lambda_1 \sigma_{k-1,1}(\lambda)$ d'où $\sigma_{k-1,1}(\lambda) \geq \dfrac{\sigma_k(\lambda)}{\lambda_1}$, or :

  $$\sigma_k(\lambda) = e^{tf(P_0)} \frac{\binom{m}{k} \int_M \omega^m}{\int_M e^{tf} \omega^m} \geq e^{-2\|f\|_\infty} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \tag{V.3.1}$$

  et $0 < \lambda_1 \leq C_2$, donc $\sigma_{k-1,1}(\lambda) \geq \dfrac{e^{-2\|f\|_\infty} \binom{m}{k}}{C_2}$.
- Cas 2 : $\sigma_{k,1}(\lambda) > 0$. Pour tout $1 \leq j \leq k-1$, on a $\sigma_j(\lambda_2, ..., \lambda_m) = \sigma_{j,1}(\lambda) > 0$ puisque $j+1 \leq k$ et $\lambda \in \Gamma_k$. Par ailleurs, $\sigma_k(\lambda_2, ..., \lambda_m) = \sigma_{k,1}(\lambda) > 0$ par hypothèse, d'où :

  $$(\lambda_2, ..., \lambda_m) \in \Gamma_{k,1} = \left\{\beta \in \mathbb{R}^{m-1} / \forall 1 \leq j \leq k, \quad \sigma_j(\beta) > 0\right\} \tag{V.3.2}$$

On déduit par conséquent par les inégalités de Maclaurin (lemme VII.8.1) que :

$$\left(\frac{\sigma_k(\lambda_2,\dots,\lambda_m)}{\binom{m-1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{\sigma_{k-1}(\lambda_2,\dots,\lambda_m)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{V.3.3}$$

ou encore $\left(\frac{\sigma_{k,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{\sigma_{k-1,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ d'où $\sigma_{k,1}(\lambda) \leq \binom{m-1}{k}\left(\frac{\sigma_{k-1,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{1+\frac{1}{k-1}}$, par conséquent :

$$\sigma_k(\lambda) = \lambda_1\,\sigma_{k-1,1}(\lambda) + \sigma_{k,1}(\lambda) \leq \lambda_1\,\sigma_{k-1,1}(\lambda) + \binom{m-1}{k}\left(\frac{\sigma_{k-1,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{1+\frac{1}{k-1}}$$
$$\leq \sigma_{k-1,1}(\lambda)\left[\lambda_1 + \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{m-1}{k-1}}\left(\frac{\sigma_{k-1,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right] \tag{V.3.4}$$

A ce stade, on distingue deux sous-cas du cas 2 :

– Si $\sigma_{k-1,1}(\lambda) > \binom{m-1}{k-1}$ alors on a le minorant uniforme recherché.

– Sinon $\sigma_{k-1,1}(\lambda) \leq \binom{m-1}{k-1}$, donc $\left(\frac{\sigma_{k-1,1}(\lambda)}{\binom{m-1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \leq 1$, d'où
$\sigma_k(\lambda) \leq \sigma_{k-1,1}(\lambda)\left[\lambda_1 + \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{m-1}{k-1}}\right] = \sigma_{k-1,1}(\lambda)\left(\lambda_1 + \frac{m}{k} - 1\right)$, ce qui entraîne la minoration
$\sigma_{k-1,1}(\lambda) \geq \frac{\sigma_k(\lambda)}{\lambda_1 + \frac{m}{k} - 1} \geq \frac{e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}}{C_2 + \frac{m}{k} - 1}$.

Par conséquent, on a $\sigma_{k-1,1}(\lambda) \geq \min\left\{\frac{e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}}{C_2}, \binom{m-1}{k-1}, \frac{e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}}{C_2 + \frac{m}{k} - 1}\right\}$ et finalement :

$$\sigma_{k-1,1}(\lambda) \geq \min\left\{\binom{m-1}{k-1}, \frac{e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}}{C_2 + \frac{m}{k} - 1}\right\} =: E \tag{V.3.5}$$

La constante $E$ ainsi définie dépend uniquement de $m, k, \|f\|_\infty$ et $C_2$. ■

On prouve de façon similaire la proposition plus générale suivante :

**PROPOSITION V.3.2** Il existe des constantes $0 < E_0 \leq F_0$ ne dépendant que de $m, k, \|f\|_\infty$ et $C_2'$ telles que :

$$\forall P \in M, \forall 1 \leq i \leq m, \quad E_0 \leq \sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P)\big) \leq F_0$$

**Preuve** : Avec exactement la même preuve que la proposition , on trouve :
$F_0 = \binom{m-1}{k-1}\left(C_2'\right)^{k-1}$ et $E_0 = \min\left\{\binom{m-1}{k-1}, \frac{e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}}{C_2' + \frac{m}{k} - 1}\right\}$. ■

## V.4 Estimation uniforme du gradient

La variété $M$ est riemannienne compacte et $\varphi_t \in C^2(M)$, donc par la formule de Green :

$$\varphi_t(P) = \frac{1}{Vol(M)} \int_M \varphi_t(Q) dv_g(Q) + \int_M G(P,Q) \Delta\varphi_t(Q) dv_g(Q) \tag{V.4.1}$$

où $G(P,Q)$ est la fonction de Green du Laplacien $\Delta$. En différentiant cette égalité (V.4.1) localement sous le signe intégral, on obtient :

$$\partial_{u^i}\varphi_t(P) = \int_M \Delta\varphi_t(Q) \times (\partial_{u^i})_P G(P,Q)\, dv_g(Q) \tag{V.4.2}$$

On déduit donc qu'on a dans une carte holomorphe centrée en $P$ :

$$|\partial_{u^i}\varphi_t(P)| \leq \int_M |\Delta\varphi_t(Q)|\,|\nabla_P G(P,Q)|\, dv_g(Q) \tag{V.4.3}$$

et :

$$|(\nabla\varphi_t)_P| \leq \sqrt{2m} \int_M |\Delta\varphi_t(Q)|\,|\nabla_P G(P,Q)|\, dv_g(Q) \tag{V.4.4}$$

(cette dernière expression est intrinsèque).

Montrons le lemme suivant :

**Lemme V.4.1** Il existe une constante $C_3 > 0$ ne dépendant que de $m$ et $C_2'$ telle que :

$$\|\Delta\varphi_t\|_{\infty,M} \leq C_3$$

**Preuve** : Au point $Q \in M$, dans une carte holomorphe $g$-normale $\tilde{g}$ adaptée, on a :

$$\Delta\varphi_t(Q) = -2g^{a\bar{b}}(Q)\partial_{a\bar{b}}\varphi_t(Q) = -2\sum_a \partial_{a\bar{a}}\varphi_t(Q) = -2\sum_a(\lambda_a(Q)-1) = 2m - 2\sum_{a=1}^m \lambda_a(Q) \tag{V.4.5}$$

(on utilise ici le Laplacien réel), ce qui entraîne le résultat par le pincement uniforme des valeurs propres (proposition V.2.2). ■

En combinant l'équation (V.4.4) au lemme V.4.1, on déduit que :

$$|(\nabla\varphi_t)_P| \leq \sqrt{2m}\, C_3 \int_M |\nabla_P G(P,Q)|\, dv_g(Q) \tag{V.4.6}$$

Par ailleurs, on sait classiquement (cf. [AUB98], p.109), l'existence de constantes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ telles que :

$$|\nabla_P G(P,Q)| \leq \frac{\mathscr{C}}{d_g(P,Q)^{2m-1}} \quad \text{and} \quad \int_M \frac{1}{d_g(P,Q)^{2m-1}} dv_g(Q) \leq \mathscr{C}' \tag{V.4.7}$$

On obtient par conséquent le résultat suivant :

**PROPOSITION V.4.1** Il existe une constante $C_5 > 0$ ne dépendant que de $m$, $C_2'$ et $(M,g)$ telle que :

$$\forall P \in M \quad |(\nabla\varphi_t)_P| \leq C_5$$

Plus précisément, on peut prendre $C_5 = \sqrt{2m}\, C_3 \mathscr{C}\mathscr{C}'$.

## V.5 Estimation des dérivées secondes

Notre équation est de la forme :

$$(E) \qquad F\left(P, [\partial_{u^i u^j}\varphi]_{1\leq i,j\leq 2m}\right) = v \quad P \in M$$

### V.5.1 La fonctionnelle $\Phi$

On considère la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : UT &\to \mathbb{R} \\ (P,\xi) &\mapsto (\nabla^2\varphi)_P(\xi,\xi) + \frac{1}{2}|(\nabla\varphi)_P|_g^2 \end{aligned}$$

où $UT$ est le fibré en sphère unité associé au fibré tangent $(TM,g)$. $\Phi$ est continue sur le compact $UT$, elle atteint donc son maximum en un point $(P_1,\xi_1) \in UT$.

### V.5.2 Réduction de la preuve à la majoration de $(\nabla^2\varphi_t)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)$

Si on trouve un majorant uniforme de la quantité $(\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1,\xi_1)$, on en déduit aisément (vu que $|\nabla\varphi|_\infty \leq C_5$) l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que :

$$(V.5.1) \qquad (\nabla^2\varphi)_P(\xi,\xi) \leq C_6 \quad \forall (P,\xi) \in UT$$

Fixons $P \in M$. Soit $(U_P,\psi_P)$ une carte holomorphe $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée centrée en $P$ à savoir une carte satisfaisant $[g_{i\bar{j}}(P)]_{1\leq i,j\leq m} = I_m$, $\partial_\ell g_{i\bar{j}}(P) = 0$ et $[\tilde{g}_{i\bar{j}}(P)]_{1\leq i,j\leq m} = diag\left(\lambda_1(P),\ldots,\lambda_m(P)\right)$.

On a $|\partial_{x^j}|_g = \sqrt{2}$, on obtient donc $\partial_{x^j x^j}\varphi(P) = 2(\nabla^2\varphi)_P\left(\frac{\partial_{x^j}}{\sqrt{2}},\frac{\partial_{x^j}}{\sqrt{2}}\right) \leq 2C_6$ et de façon similaire $\partial_{y^j y^j}\varphi(P) = 2(\nabla^2\varphi)_P\left(\frac{\partial_{y^j}}{\sqrt{2}},\frac{\partial_{y^j}}{\sqrt{2}}\right) \leq 2C_6$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Par ailleurs, on a :

$$(V.5.2) \qquad \partial_{x^j x^j}\varphi(P) + \partial_{y^j y^j}\varphi(P) = 4\partial_{j\bar{j}}\varphi(P) = 4\left(\lambda_j(P) - 1\right) \geq -4\left[(m-1)C_2' + 1\right]$$

par conséquent, on obtient :

$$(V.5.3) \qquad \partial_{x^j x^j}\varphi(P) \geq -4\left[(m-1)C_2' + 1\right] - 2C_6 =: -C_7 \quad \text{et} \quad \partial_{y^j y^j}\varphi(P) \geq -C_7 \quad \forall j \in \{1,\ldots,m\}$$

Bornons à présent les dérivées secondes mixtes $\partial_{u^r u^s}\varphi_t(P)$ : Soient $1 \le r \ne s \le 2m$ , on a $|\,\partial_{x^r} \pm \partial_{x^s}\,|_g = 2$, par conséquent :

(V.5.4) $$(\nabla^2\varphi)_P\Big(\frac{\partial_{x^r} \pm \partial_{x^s}}{2}, \frac{\partial_{x^r} \pm \partial_{x^s}}{2}\Big) = \frac{1}{4}\partial_{x^r x^r}\varphi(P) + \frac{1}{4}\partial_{x^s x^s}\varphi(P) \pm \frac{1}{2}\partial_{x^r x^s}\varphi(P) \le C_6$$

ce qui entraîne $\pm\partial_{x^r x^s}\varphi(P) \le 2C_6 - \frac{1}{2}\partial_{x^r x^r}\varphi(P) - \frac{1}{2}\partial_{x^s x^s}\varphi(P)$, d'où $|\,\partial_{x^r x^s}\varphi_t(P)\,| \le 2C_6 + C_7$. On prouve de façon similaire qu'au point $P$, dans la carte $\psi_P$ on a :

(V.5.5)
$$|\,\partial_{y^r y^s}\varphi(P)\,| \le 2C_6 + C_7 \quad \forall r \ne s \in \{1,\dots,m\} \quad \text{et} \quad |\,\partial_{x^r y^s}\varphi(P)\,| \le 2C_6 + C_7 \quad \forall r,s \in \{1,\dots,m\}$$

ainsi :

(V.5.6) $$\forall 1 \le i,j \le 2m \qquad |\,\partial_{u^i u^j}\varphi(P)\,| \le 2C_6 + C_7$$

On déduit par conséquent que :

(V.5.7) $$|\,(\nabla^2\varphi)(P)\,|_g^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le 2m}\Big(\partial_{u^i u^j}\varphi(P)\Big)^2 \le m^2\big(2C_6 + C_7\big)^2$$

**THÉORÈME V.5.1** (***Estimée uniforme des dérivées secondes***) Il existe une constante $C_8 > 0$ ne dépendant que de $m$, $C_2'$ et $C_6$ telle que :

$$\forall P \in M \qquad |\,(\nabla^2\varphi)_P\,|_g \le C_8$$

Ce qui permet de déduire l'estimée $C^2$ uniforme recherchée :

(V.5.8) $$\|\varphi\|_{C^2(M,\mathbb{R})} \le C_0 + C_5 + C_8$$

### V.5.3 Choix de la carte

Pour $P \in M$ fixé, la fonction $\xi \in UT_P \mapsto (\nabla^2\varphi)_P(\xi,\xi)$ est continue sur le compact $UT_P$ (la fibre), elle atteint donc son maximum en un vecteur unitaire $\xi^P \in UT_P$. Par ailleurs, $(\nabla^2\varphi)_P$ étant une forme bilinéaire symétrique sur $T_PM$, le principe du min-max assure que :

(V.5.9) $$(\nabla^2\varphi)_P(\xi^P,\xi^P) = \max_{\xi\in T_PM,\, g(\xi,\xi)=1}(\nabla^2\varphi)_P(\xi,\xi) = \beta_{max}(P)$$

où $\beta_{max}(P)$ désigne la plus grande valeur propre de $(\nabla^2\varphi)_P$ relativement à $g_P$, on peut en outre choisir comme $\xi^P$ "la direction" de la plus grande valeur propre $\beta_{max}(P)$. Pour $P$ fixé, on a donc :

(V.5.10)
$$\max_{\xi\in T_PM,\, g_P(\xi,\xi)=1}\Phi(P,\xi) = \Phi(P,\xi^P) = (\nabla^2\varphi)_P(\xi^P,\xi^P) + \frac{1}{2}\,|\,(\nabla\varphi)_P\,|_g^2 = \beta_{max}(P) + \frac{1}{2}\,|\,(\nabla\varphi)_P\,|_g^2$$

d'où :

(V.5.11) $$\max_{(P,\xi)\in UT} \Phi(P,\xi) = \max_{P\in M} \Phi(P,\xi^P) = \Phi(P_1,\xi_1) \le \Phi(P_1,\xi^{P_1})$$

et par conséquent :

(V.5.12) $$\max_{(P,\xi)\in UT} \Phi(P,\xi) = \Phi(P_1,\xi^{P_1}) = \beta_{max}(P_1) + \frac{1}{2}\,|(\nabla\varphi)_{P_1}|_g^2$$

Au point $P_1$, on considère $\varepsilon_1^{P_1},\dots,\varepsilon_{2m}^{P_1}$ une base (réelle) de $(T_{P_1}M, g_{P_1})$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $[g_{ij}(P_1)]_{1\le i,j\le 2m} = I_{2m}$
- $[(\nabla^2\varphi)_{ij}(P_1)]_{1\le i,j\le 2m} = diag(\beta_1,\dots,\beta_{2m})$
- $\beta_1 = \beta_{max}(P_1) \ge \beta_2 \ge \dots \ge \beta_{2m}$.

Soit $(U_1',\psi_1)$ une carte réelle $C^\infty$, $g$-normale en $P_1$ obtenue à partir d'une carte holomorphe $z^1,\dots,z^m$ en posant $(u^1,\dots,u^{2m}) = (x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^m)$ où $z^j = x^j + iy^j$ (à savoir une carte telle que $[g_{ij}(P_1)]_{1\le i,j\le 2m} = I_{2m}$, $\forall 1\le i,j,l\le 2m \quad \partial_{u^l} g_{ij} = 0$) satisfaisant $\psi_1(P_1) = 0$ et $\partial_{u^i}|_{P_1} = \varepsilon_i^{P_1}$. Ainsi $\partial_{u^1}|_{P_1}$ est la "direction" de la plus grande valeur propre $\beta_{max}(P_1)$.

### V.5.4 La fonctionnelle auxiliaire locale $\Phi_1$

Désormais, on travaillera dans la carte réelle $(U_1',\psi_1)$ construite ci dessus en $P_1$. Soit $U_2 \subset U_1'$ un ouvert tel que : $\forall P\in U_2 \quad g_{11}(P) > 0$, et soit $\Phi_1$ la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &: U_2 \to \mathbb{R}\\ P &\mapsto \Phi_1(P) = \frac{(\nabla^2\varphi)_{11}(P)}{g_{11}(P)} + \frac{1}{2}\,|(\nabla\varphi)_P|_g^2\end{aligned}$$

La fonctionnelle $\Phi_1$ atteint son maximum en $P_1$. En effet :

$$\frac{(\nabla^2\varphi)_{11}(P)}{g_{11}(P)} = \frac{(\nabla^2\varphi)_P(\partial_{u^1},\partial_{u^1})}{g_P(\partial_{u^1},\partial_{u^1})} = (\nabla^2\varphi)_P\left(\frac{\partial_{u^1}}{|\partial_{u^1}|_g},\frac{\partial_{u^1}}{|\partial_{u^1}|_g}\right) \le \beta_{max}(P)$$

ainsi,

(V.5.13) $$\Phi_1(P) \le \beta_{max}(P) + \frac{1}{2}\,|(\nabla\varphi)_P|_g^2 \le \beta_{max}(P_1) + \frac{1}{2}\,|(\nabla\varphi)_{P_1}|_g^2 = \Phi_1(P_1)$$

ce qui achève la vérification.

On différentie à présent l'équation $(E)$ deux fois dans "la direction réelle" $\partial_{u^1}$ :

$(E)$ $$F\Big(P,[\partial_{u^iu^j}\varphi]_{1\le i,j\le 2m}\Big) = v$$

Au point $P$, dans une carte $u$ on obtient :

$$\partial_{u^1} v = \frac{\partial F}{\partial u^1}[\varphi] + \sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^i u^j} \varphi \tag{V.5.14}$$

En différentiant une deuxième fois, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\partial_{u^1 u^1} v =& \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^1}[\varphi] + \sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij} \partial u^1}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^i u^j} \varphi \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2m} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial r_{ij}}[\varphi] + \sum_{e,s=1}^{2m} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{es} \partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^e u^s} \varphi \right] \partial_{u^1 u^i u^j} \varphi \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^1 u^i u^j} \varphi \end{aligned} \tag{V.5.15}$$

Or au point $P_1$, pour notre fonction
$F(P,r) = F_k[\delta_i^j + \frac{1}{4} g^{j\bar{\ell}}(P)(r_{i\ell} + r_{(i+m)(\ell+m)} + i r_{i(\ell+m)} - i r_{(i+m)\ell})]_{1\le i,j\le m}$ on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij} \partial u^1}[\varphi] = 0 \tag{V.5.16}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij} \partial u^1}(P,r) = & \sum_{o,s,q=1}^{m} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial B_o^s} [\delta_i^j + \frac{1}{4} g^{j\bar{\ell}}(P)(r_{i\ell} + r_{(i+m)(\ell+m)} + i r_{i(\ell+m)} - i r_{(i+m)\ell})] \right. \\ & \left. \times \frac{1}{4}(r_{oq} + r_{(o+m)(q+m)} + i r_{o(q+m)} - i r_{(o+m)q}) \right\} \times \partial_{u^1} g^{s\bar{q}}(P) \end{aligned} \tag{V.5.17}$$

et $\partial_{u^1} g^{s\bar{q}}(P_1) = 0$. Ainsi, on obtient :
(V.5.18)
$$\partial_{u^1 u^1} v = \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^1}[\varphi] + \sum_{i,j,e,s=1}^{2m} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{es} \partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^e u^s} \varphi\, \partial_{u^1 u^i u^j} \varphi + \sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^1 u^i u^j} \varphi$$

### V.5.5 Usage de la concavité

La fonction $F$ est concave en la variable $r$. En effet :

$$\begin{aligned}
F(P,r) &= F_k[\delta_i^j + \frac{1}{4}g^{j\bar{\ell}}(P)(r_{i\ell}+r_{(i+m)(\ell+m)}+ir_{i(\ell+m)}-ir_{(i+m)\ell})]_{1\le i,j\le m}\\
&= F_k(g^{-1}(P)\tilde{r}) \quad \text{où } \tilde{r}=[g_{i\bar{j}}(P)+\frac{1}{4}(r_{ij}+r_{(i+m)(j+m)}+ir_{i(j+m)}-ir_{(i+m)j})]_{1\le i,j\le m}\\
&= F_k(\underbrace{g^{\frac{-1}{2}}(P)\tilde{r}g^{\frac{-1}{2}}(P)}_{\in\mathscr{H}_m(\mathbb{C})})
\end{aligned}$$

(V.5.19)

$$= \underbrace{F_k[\delta_i^j+\frac{1}{4}\sum_{\ell,s=1}^{m}\left(g^{\frac{-1}{2}}(P)\right)_{i\ell}\left(g^{\frac{-1}{2}}(P)\right)_{sj}(r_{\ell s}+r_{(\ell+m)(s+m)}+ir_{\ell(s+m)}-ir_{(\ell+m)s})]_{1\le i,j\le m}}_{=:\rho_P(r)}$$

or, pour $P$ fixé $r\in S_{2m}(\mathbb{R})\mapsto\rho_P(r)\in\mathscr{H}_m(\mathbb{C})$ est affine (ici $S_{2m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de taille $2m$), en outre, $F_k$ est concave sur $\lambda^{-1}(\Gamma_k)\subset\mathscr{H}_m(\mathbb{C})$ (cf. proposition II.4.1), on déduit donc que la composée $F(P,.)=F_k\circ\rho_P$ est concave sur l'ensemble $\{r\in S_{2m}(\mathbb{R})/\ \rho_P(r)\in\lambda^{-1}(\Gamma_k)\}=\rho_P^{-1}\left(\lambda^{-1}(\Gamma_k)\right)$. Ce qui montre que $F$ est concave en la variable $r$. Ainsi, vu que $[\partial_{u^1u^iu^j}\varphi]_{1\le i,j\le m}$ est une matrice symétrique, on obtient que :

$$\sum_{i,j,e,s=1}^{2m}\frac{\partial^2F}{\partial r_{es}\partial r_{ij}}[\varphi]\,\partial_{u^1u^eu^s}\varphi\,\partial_{u^1u^iu^j}\varphi\le 0 \tag{V.5.20}$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante :

$$\partial_{u^1u^1}v-\partial_{u^1u^1}F[\varphi]\le\sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\,\partial_{u^1u^1u^iu^j}\varphi \tag{V.5.21}$$

Calculons à présent la quantité $\partial_{u^1u^1}F[\varphi]$ (en $P_1$). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2F}{\partial u^1\partial u^1}(P,r) &= \sum_{o,s,q=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u^1}\left\{\frac{\partial F_k}{\partial B_o^s}[\delta_i^j+\frac{1}{4}g^{j\bar{\ell}}(P)(r_{i\ell}+r_{(i+m)(\ell+m)}+ir_{i(\ell+m)}-ir_{(i+m)\ell})]\right\}\\
&\quad\times\partial_{u^1}g^{s\bar{q}}(P)\,\frac{1}{4}(r_{oq}+r_{(o+m)(q+m)}+ir_{o(q+m)}-ir_{(o+m)q})\\
&\quad+\sum_{o,s,q=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial B_o^s}[\delta_i^j+\frac{1}{4}g^{j\bar{\ell}}(P)(r_{i\ell}+r_{(i+m)(\ell+m)}+ir_{i(\ell+m)}-ir_{(i+m)\ell})]\\
&\quad\times\partial_{u^1u^1}g^{s\bar{q}}(P)\,\frac{1}{4}(r_{oq}+r_{(o+m)(q+m)}+ir_{o(q+m)}-ir_{(o+m)q})
\end{aligned} \tag{V.5.22}$$

Or $\partial_{u^1} g^{s\bar{q}}(P_1) = 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^1}(P_1, D^2\varphi(P_1)) &= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_s^s}[diag(\lambda_1(P_1), \ldots, \lambda_m(P_1))] \times \partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}}(P_1)\, \partial_{s\bar{s}}\varphi(P_1) \\
&= \sum_{s=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}}(P_1)\, \partial_{s\bar{s}}\varphi(P_1) \qquad \text{(V.5.23)}
\end{aligned}$$

Or en $P_1$, $\partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}} = -g^{s\bar{o}} g^{q\bar{s}} \partial_{u^1 u^1} g_{q\bar{o}}$ et $[g^{i\bar{j}}]_{1\leq i,j\leq m} = 2I_m$ donc $\partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}} = -4\partial_{u^1 u^1} g_{s\bar{s}}$ d'où $\partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}} = -\partial_{u^1 u^1} g_{ss} - \partial_{u^1 u^1} g_{(s+m)(s+m)}$.
De plus on a $\Gamma^{u^r}_{u^j u^s} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^j} g_{os} + \partial_{u^s} g_{oj} - \partial_{u^o} g_{js}\right) g^{or}$, ainsi :

$$\partial_{u^i} \Gamma^{u^r}_{u^j u^s} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^i u^j} g_{rs} + \partial_{u^i u^s} g_{rj} - \partial_{u^i u^r} g_{js}\right) \qquad \text{(V.5.24)}$$

De façon similaire, on a en $P_1$ :

$$\partial_{u^i} \Gamma^{u^s}_{u^j u^r} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^i u^j} g_{rs} + \partial_{u^i u^r} g_{sj} - \partial_{u^i u^s} g_{jr}\right) \qquad \text{(V.5.25)}$$

Par conséquent, on déduit que :

$$\partial_{u^i u^j} g_{rs} = \partial_{u^i} \Gamma^{u^r}_{u^j u^s} + \partial_{u^i} \Gamma^{u^s}_{u^j u^r} \qquad \text{(V.5.26)}$$

Ainsi, on a en $P_1$ :

$$\partial_{u^1 u^1} g^{s\bar{s}} = -2\,\partial_{u^1} \Gamma^{u^s}_{u^1 u^s} - 2\,\partial_{u^1} \Gamma^{u^{s+m}}_{u^1 u^{s+m}} \qquad \text{(V.5.27)}$$

Par ailleurs, $\partial_{s\bar{s}}\varphi = \frac{1}{4}(\partial_{u^s u^s}\varphi + \partial_{u^{s+m} u^{s+m}}\varphi)$, ce qui entraîne qu'en $P_1$ :

$$\partial_{u^1 u^1} F[\varphi] = \sum_{s=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \left(-2\,\partial_{u^1} \Gamma^{u^s}_{u^1 u^s} - 2\,\partial_{u^1} \Gamma^{u^{s+m}}_{u^1 u^{s+m}}\right) \times \frac{1}{4}(\partial_{u^s u^s}\varphi + \partial_{u^{s+m} u^{s+m}}\varphi) \qquad \text{(V.5.28)}$$

Par conséquent, l'inégalité (V.5.21) devient :

$$\begin{aligned}
\partial_{u^1 u^1} v \leq &\sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\, \partial_{u^1 u^1 u^i u^j}\varphi \\
&- \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \left(\partial_{u^1} \Gamma^{u^s}_{u^1 u^s} + \partial_{u^1} \Gamma^{u^{s+m}}_{u^1 u^{s+m}}\right) \left(\partial_{u^s u^s}\varphi + \partial_{u^{s+m} u^{s+m}}\varphi\right) \qquad \text{(V.5.29)}
\end{aligned}$$

### V.5.6 Différentiation de la fonctionnelle $\Phi_1$

On différentie deux fois la fonctionnelle $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(P) = \frac{(\nabla^2\varphi)_{11}(P)}{g_{11}(P)} + \frac{1}{2} \mid (\nabla\varphi)_P \mid_g^2$$

$$\partial_{u^j}\Phi_1(P) = \frac{\partial_{u^j}(\nabla^2\varphi)_{11}}{g_{11}(P)} - \frac{(\nabla^2\varphi)_{11}\,\partial_{u^j} g_{11}(P)}{g_{11}(P)^2} + \frac{1}{2}\partial_{u^j} \mid (\nabla\varphi)_P \mid_g^2$$

$$\begin{aligned}\partial_{u^iu^j}\Phi_1(P) = {} & \frac{\partial_{u^iu^j}(\nabla^2\varphi)_{11}}{g_{11}(P)} - \frac{\partial_{u^j}(\nabla^2\varphi)_{11}\,\partial_{u^i} g_{11}(P)}{g_{11}(P)^2} \\ & - \frac{\partial_{u^i}(\nabla^2\varphi)_{11}\,\partial_{u^j} g_{11}(P) + (\nabla^2\varphi)_{11}(P)\,\partial_{u^iu^j} g_{11}(P)}{g_{11}(P)^2} \\ & - (\nabla^2\varphi)_{11}(P)\,\partial_{u^j} g_{11}(P)\,\partial_{u^i}\left(\frac{1}{g_{11}(P)^2}\right) + \frac{1}{2}\partial_{u^iu^j} \mid (\nabla\varphi)_P \mid_g^2\end{aligned} \tag{V.5.30}$$

Ainsi, en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ on obtient :

$$\partial_{u^iu^j}\Phi_1 = \partial_{u^iu^j}(\nabla^2\varphi)_{11} - (\nabla^2\varphi)_{11}(P_1)\,\partial_{u^iu^j} g_{11} + \frac{1}{2}\partial_{u^iu^j} \mid (\nabla\varphi)_P \mid_g^2 (P_1) \tag{V.5.31}$$

Calculons à présent les différents termes (en $P_1$ dans la carte $\psi_1$) :

$$\begin{aligned}\partial_{u^iu^j}(\nabla^2\varphi)_{11} &= \partial_{u^iu^j}\left(\partial_{u^1u^1}\varphi - \Gamma^{u^s}_{u^1u^1}\,\partial_{u^s}\varphi\right) \\ &= \partial_{u^iu^ju^1u^1}\varphi - \partial_{u^iu^j}\Gamma^{u^s}_{u^1u^1}\,\partial_{u^s}\varphi - \partial_{u^j}\Gamma^{u^s}_{u^1u^1}\,\partial_{u^iu^s}\varphi - \partial_{u^i}\Gamma^{u^s}_{u^1u^1}\,\partial_{u^ju^s}\varphi\end{aligned} \tag{V.5.32}$$

Par ailleurs, on a $\Gamma^{u^1}_{u^ju^1} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^j} g_{s1} + \partial_{u^1} g_{sj} - \partial_{u^s} g_{j1}\right) g^{s1}$, on déduit par conséquent que :

$$\partial_{u^i}\Gamma^{u^1}_{u^ju^1} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^iu^j} g_{s1} + \partial_{u^iu^1} g_{sj} - \partial_{u^iu^s} g_{j1}\right) g^{s1} + 0 = \frac{1}{2}\partial_{u^iu^j} g_{11} \tag{V.5.33}$$

à savoir que :

$$\partial_{u^iu^j} g_{11} = 2\,\partial_{u^i}\Gamma^{u^1}_{u^ju^1} \tag{V.5.34}$$

En outre, on a en $P_1$ :

$$\begin{aligned}\partial_{u^iu^j} \mid (\nabla\varphi)_P \mid_g^2 &= \partial_{u^iu^j}\left(\sum_{r,s=1}^{2m} g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi\right) \\ &= \partial_{u^i}\left(\sum_{r,s=1}^{2m} \partial_{u^j} g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + g^{rs}\,\partial_{u^ju^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^ju^s}\varphi\right) \\ &= \sum_{r,s=1}^{2m} \partial_{u^iu^j} g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + g^{rs}\,\partial_{u^iu^ju^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + g^{rs}\,\partial_{u^ju^r}\varphi\,\partial_{u^iu^s}\varphi \\ &\quad + g^{rs}\,\partial_{u^iu^r}\varphi\,\partial_{u^ju^s}\varphi + g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^iu^ju^s}\varphi \\ &= \sum_{r,s=1}^{2m} \partial_{u^iu^j} g^{rs}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + 2\sum_{s=1}^{2m} \partial_{u^iu^ju^s}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi + 2\sum_{s=1}^{2m} \partial_{u^iu^s}\varphi\,\partial_{u^ju^s}\varphi\end{aligned} \tag{V.5.35}$$

Or en $P_1$, $\partial_{u^iu^j}g^{rs}=-\partial_{u^iu^j}g_{rs}$, de plus par (V.5.26) on a en $P_1$ : $\partial_{u^iu^j}g_{rs}=\partial_{u^i}\Gamma^{u^r}_{u^ju^s}+\partial_{u^i}\Gamma^{u^s}_{u^ju^r}$
Ainsi, on obtient en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ :
(V.5.36)

$$\partial_{u^iu^j}\mid(\nabla\varphi)_P\mid^2_g=-2\sum_{r,s=1}^{2m}\partial_{u^i}\Gamma^{u^r}_{u^ju^s}\,\partial_{u^r}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi+2\sum_{s=1}^{2m}\partial_{u^iu^ju^s}\varphi\,\partial_{u^s}\varphi+2\sum_{s=1}^{2m}\partial_{u^iu^s}\varphi\,\partial_{u^ju^s}\varphi$$

Désormais, et afin d'alléger les notations, on notera $\partial_i$ au lieu de $\partial_{u^i}$ et $\Gamma^s_{ij}$ au lieu de $\Gamma^{u^s}_{u^iu^j}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\partial_{ij}\Phi_1=&\partial_{ij11}\varphi-\partial_{ij}\Gamma^s_{11}\,\partial_s\varphi-\partial_j\Gamma^s_{11}\,\partial_{is}\varphi-\partial_i\Gamma^s_{11}\,\partial_{js}\varphi-2\,\partial_i\Gamma^1_{j1}\,(\nabla^2\varphi)_{11}(P_1)\\ &-\sum_{r,s=1}^{2m}\partial_i\Gamma^r_{js}\,\partial_r\varphi\,\partial_s\varphi+\sum_{s=1}^{2m}\partial_{ijs}\varphi\,\partial_s\varphi+\sum_{s=1}^{2m}\partial_{is}\varphi\,\partial_{js}\varphi\end{aligned}\tag{V.5.37}$$

Considérons à présent l'opérateur linéaire du second ordre :

$$\tilde{L}=\sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\,\partial_{ij}\tag{V.5.38}$$

Puisque la fonctionnelle $\Phi_1$ atteint son maximum au point $P_1$, on a $\tilde{L}(\Phi_1)\leq 0$ en $P_1$ dans la carte $\psi_1$. Par ailleurs, en combinant l'inégalité (V.5.29) avec l'égalité (V.5.37) on obtient :

$$\begin{aligned}2\underbrace{\tilde{L}\Phi_1}_{\leq 0}-\partial_{11}v\geq&\sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\Big[\partial_{ij11}\varphi-\partial_{ij}\Gamma^s_{11}\,\partial_s\varphi-\partial_j\Gamma^i_{11}\,\partial_{ii}\varphi-\partial_i\Gamma^j_{11}\,\partial_{jj}\varphi-2\,\partial_i\Gamma^1_{j1}\,(\nabla^2\varphi)_{11}(P_1)\\ &-\sum_{r,s=1}^{2m}\partial_i\Gamma^r_{js}\,\partial_r\varphi\,\partial_s\varphi+\sum_{s=1}^{2m}\partial_{ijs}\varphi\,\partial_s\varphi+\delta^j_i\,(\partial_{ii}\varphi)^2-\partial_{11ij}\varphi\Big]\\ &+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\times\left(\partial_1\Gamma^s_{1s}+\partial_1\Gamma^{s+m}_{1(s+m)}\right)\left(\partial_{ss}\varphi+\partial_{(s+m)(s+m)}\varphi\right)\end{aligned}\tag{V.5.39}$$

Les dérivées quatrièmes se simplifient. En outre, on a en $P_1$ :

$$\partial_s v=\frac{\partial F}{\partial u^1}[\varphi]+\sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\,\partial_{sij}\varphi\tag{V.5.40}$$

avec $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial u^1}(P_1,D^2\varphi(P_1))=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial B^s_s}[diag(\lambda_1(P_1),...,\lambda_m(P_1))]\times\underbrace{\partial_{u^1}g^{s\bar{s}}(P_1)}_{=0}\,\partial_{s\bar{s}}\varphi(P_1)=0,$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}0\geq\partial_{11}v+\sum_{s=1}^{2m}\partial_s v\,\partial_s\varphi+&\sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\Big[-2\,\partial_i\Gamma^1_{j1}\,(\nabla^2\varphi)_{11}(P_1)-\partial_i\Gamma^j_{11}\,\partial_{jj}\varphi-\partial_j\Gamma^i_{11}\,\partial_{ii}\varphi\\ &-\sum_{s=1}^{2m}\partial_{ij}\Gamma^s_{11}\,\partial_s\varphi-\sum_{r,s=1}^{2m}\partial_i\Gamma^r_{js}\,\partial_r\varphi\,\partial_s\varphi+\delta^j_i\,(\partial_{ii}\varphi)^2\Big]\\ &+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\times\left(\partial_1\Gamma^s_{1s}+\partial_1\Gamma^{s+m}_{1(s+m)}\right)\left(\partial_{ss}\varphi+\partial_{(s+m)(s+m)}\varphi\right)\end{aligned}\tag{V.5.41}$$

A présent, exprimons les quantités $\partial_i\Gamma^1_{j1}, \partial_i\Gamma^j_{11}, \partial_j\Gamma^i_{11}, \partial_i\Gamma^r_{js}$ et $\partial_{ij}\Gamma^s_{11}$ en fonction des composantes de la courbure de Riemann (et ce toujours au point $P_1$ dans la carte normale $\psi_1$). Par le corollaire VII.7.2 on a :

$$\begin{aligned}
\partial_i\Gamma^1_{j1} &= \frac{1}{3}(R_{j11i} + \underbrace{R_{ji11}}_{=0}) = \frac{1}{3}R_{j11i}\\
\partial_i\Gamma^j_{11} &= \frac{1}{3}(R_{1j1i} + R_{1i1j}) = \frac{2}{3}R_{1j1i}\\
\partial_j\Gamma^i_{11} &= \frac{2}{3}R_{1i1j}\\
\partial_i\Gamma^r_{js} &= \frac{1}{3}(R_{jrsi} + R_{jisr})\\
\partial_1\Gamma^s_{1s} &= \frac{1}{3}(R_{1ss1} + \underbrace{R_{11ss}}_{=0}) = \frac{1}{3}R_{1ss1}\\
\partial_1\Gamma^{s+m}_{1(s+m)} &= \frac{1}{3}R_{1(s+m)(s+m)1}\\
\partial_{ij}\Gamma^s_{11} &= \frac{1}{4}\left(\nabla_i R_{1j1s} + \nabla_i R_{1s1j} + \nabla_j R_{1s1i} + \nabla_j R_{1i1s}\right) - \frac{1}{12}\left(\nabla_s R_{1i1j} + \nabla_s R_{1j1i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\nabla_i R_{1s1j} + \nabla_j R_{1s1i}\right) - \frac{1}{6}\nabla_s R_{1i1j}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
0 \geq \partial_{11}v + \sum_{s=1}^{2m}\partial_s v\,\partial_s\varphi + \sum_{i,j=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi]\Bigg[&\frac{-2}{3}R_{j11i}(\nabla^2\varphi)_{11}(P_1) - \frac{2}{3}R_{1j1i}\,\partial_{jj}\varphi - \frac{2}{3}R_{1i1j}\,\partial_{ii}\varphi\\
&- \sum_{s=1}^{2m}\left(\frac{1}{2}\nabla_i R_{1s1j} + \frac{1}{2}\nabla_j R_{1s1i} - \frac{1}{6}\nabla_s R_{1i1j}\right)\partial_s\varphi\\
&- \sum_{r,s=1}^{2m}\frac{1}{3}(R_{jrsi} + R_{jisr})\partial_r\varphi\,\partial_s\varphi + \delta_i^j(\partial_{ii}\varphi)^2\Bigg]\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,s}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \frac{1}{3}\Big(R_{1ss1} + R_{1(s+m)(s+m)1}\Big)\Big(\partial_{ss}\varphi + \partial_{(s+m)(s+m)}\varphi\Big)
\end{aligned} \tag{V.5.42}$$

### V.5.7 Majoration uniforme de $\beta_1 = (\nabla^2\varphi)_{P_1}(\xi_1, \xi_1)$

Par l'estimation uniforme du gradient on a :

$$\forall 1 \leq j \leq 2m \qquad |\,\partial_j\varphi_t\,| \leq C_5 \tag{V.5.43}$$

En outre, on a en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ :

$$[(\nabla^2\varphi)_{ij}(P_1)]_{1\leq i,j\leq 2m} = [\partial_{ij}\varphi(P_1)]_{1\leq i,j\leq 2m} = diag(\beta_1, ..., \beta_{2m}) \tag{V.5.44}$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
0 \geq \partial_{11} v + \sum_{s=1}^{2m} \partial_s v\, \partial_s \varphi + \sum_{i,j=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi] \Big[ \delta_{ij} (\beta_i)^2 - \frac{2}{3} R_{j11i}\, \beta_1 - \frac{2}{3} R_{1j1i}\, \beta_j - \frac{2}{3} R_{1i1j}\, \beta_i \\
- \frac{1}{3} \sum_{r,s=1}^{2m} (R_{jrsi} + R_{jisr}) \partial_r \varphi\, \partial_s \varphi - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2m} \big( \nabla_i R_{1s1j} + \nabla_j R_{1s1i} - \frac{1}{3} \nabla_s R_{1i1j} \big) \partial_s \varphi \Big] \\
+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \Big( R_{1ii1} + R_{1(i+m)(i+m)1} \Big) \Big( \beta_i + \beta_{i+m} \Big)
\end{aligned}
$$

Or pour $F[\varphi] = F_k \Big( [\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}} \partial_{i\bar{\ell}} \varphi]_{1 \leq i,j \leq m} \Big)$ puisque $\partial_{s\bar{s}} \varphi = \frac{1}{4} (\partial_{u^s u^s} + \partial_{u^{s+m} u^{s+m}})$ on obtient en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ que :

$$
\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi] = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B_s^s} \Big( diag(\lambda(P_1)) \Big) \frac{1}{4} \frac{\partial (r_{ss} + r_{(s+m)(s+m)})}{\partial r_{ij}} \tag{V.5.45}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
&\forall 1 \leq i \neq j \leq 2m \quad \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}[\varphi] = 0 \\
&\forall 1 \leq i \leq m \quad \frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi] = \frac{\partial F}{\partial r_{(i+m)(i+m)}}[\varphi] = \frac{1}{4} \frac{\partial F_k}{\partial B_i^i} \Big( diag(\lambda(P_1)) \Big) = \frac{1}{4} \underbrace{\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}}_{>0 \text{ car } \lambda(P_1) \in \Gamma_k}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
0 \geq \partial_{11} v + \sum_{s=1}^{2m} \partial_s v\, \partial_s \varphi + \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi] \Big[ (\beta_i)^2 + \frac{2}{3} R_{1i1i} (\beta_1 - 2\beta_i) \\
- \frac{1}{3} \sum_{r,s=1}^{2m} (R_{irsi} + \underbrace{R_{iisr}}_{=0}) \partial_r \varphi \partial_s \varphi - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2m} \big( \nabla_i R_{1s1i} + \nabla_i R_{1s1i} - \frac{1}{3} \nabla_s R_{1i1i} \big) \partial_s \varphi \Big] \\
+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \times \Big( R_{1ii1} + R_{1(i+m)(i+m)1} \Big) \Big( \beta_i + \beta_{i+m} \Big)
\end{aligned} \tag{V.5.46}
$$

à savoir :

$$
\begin{aligned}
0 \geq \partial_{11} v + \sum_{s=1}^{2m} \partial_s v\, \partial_s \varphi + \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi] \Big[ (\beta_i)^2 + \frac{2}{3} R_{1i1i} (\beta_1 - 2\beta_i) \\
+ \frac{1}{3} \sum_{r,s=1}^{2m} R_{iris} \partial_r \varphi \partial_s \varphi - \sum_{s=1}^{2m} \big( \nabla_i R_{1s1i} - \frac{1}{6} \nabla_s R_{1i1i} \big) \partial_s \varphi \Big] \\
+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))} \Big( R_{1ii1} + R_{1(i+m)(i+m)1} \Big) \Big( \beta_i + \beta_{i+m} \Big)
\end{aligned} \tag{V.5.47}
$$

Or en $P_1$ dans la carte $\psi_1$, $\|R\|_g^2 = g^{ai}g^{bj}g^{cr}g^{ds}R_{abcd}R_{ijrs} = \sum_{a,b,c,d=1}^{2m}(R_{abcd})^2$
donc $|R_{abcd}| \leq \|R\|_g$ pour tout $a,b,c,d \in \{1,\ldots,2m\}$, par conséquent :

$$|\frac{1}{3}\sum_{r,s=1}^{2m} R_{iris}\partial_r\varphi\,\partial_s\varphi| \leq \frac{1}{3}\sum_{r,s=1}^{2m}\|R\|_g\,(C_5)^2 = \frac{1}{3}(2m)^2\|R\|_g\,(C_5)^2 = \frac{4}{3}m^2(C_5)^2\|R\|_g \tag{V.5.48}$$

Par ailleurs, en $P_1$ dans la carte $\psi_1$, on a :

$$\|\nabla R\|_g^2 = g^{el}g^{ai}g^{bj}g^{cr}g^{ds}\nabla_e R_{abcd}\,\nabla_l R_{ijrs} = \sum_{e,a,b,c,d=1}^{2m}(\nabla_e R_{abcd})^2 \tag{V.5.49}$$

donc $|\nabla_e R_{abcd}| \leq \|\nabla R\|_g$ pour tout $e,a,b,c,d \in \{1,\ldots,2m\}$, donc :

$$|-\sum_{s=1}^{2m}\left(\nabla_i R_{1s1i} - \frac{1}{6}\nabla_s R_{1i1i}\right)\partial_s\varphi| \leq \sum_{s=1}^{2m}\frac{7}{6}\|\nabla R\|_g\,C_5 = 2m\,\frac{7}{6}\|\nabla R\|_g\,C_5 = \frac{7}{3}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g \tag{V.5.50}$$

ainsi en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ on obtient :

$$\begin{aligned}-t\,\partial_{11}f - t\sum_{s=1}^{2m}\partial_s f\,\partial_s\varphi \geq{}& \sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi]\left[(\beta_i)^2 + \frac{2}{3}R_{1i1i}(\beta_1 - 2\beta_i)\right]\\ &+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\times\left(R_{1ii1} + R_{1(i+m)(i+m)1}\right)\left(\beta_i + \beta_{i+m}\right)\\ &+\left(\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi]\right)\times\left[-\frac{4}{3}m^2(C_5)^2\|R\|_g - \frac{7}{3}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g\right]\end{aligned} \tag{V.5.51}$$

Or en $P_1$ dans la carte $\psi_1$, $|\partial_{11}f(P_1)| \leq \|f\|_{C^2(M)}$, $|\partial_s f(P_1)| \leq \|f\|_{C^2(M)}$ et $|\partial_s\varphi| \leq C_5$ pour tout $s$ donc :

$$-t\,\partial_{11}f - t\sum_{s=1}^{2m}\partial_s f\,\partial_s\varphi \leq \|f\|_{C^2(M)}(1 + 2m\,C_5) \tag{V.5.52}$$

par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi] &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi] + \frac{\partial F}{\partial r_{(i+m)(i+m)}}[\varphi] = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{4}\frac{\sigma_{k-1,i}\left(\lambda(P_1)\right)}{\sigma_k\left(\lambda(P_1)\right)} + \frac{1}{4}\frac{\sigma_{k-1,i}\left(\lambda(P_1)\right)}{\sigma_k\left(\lambda(P_1)\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\left(\lambda(P_1)\right)}{\sigma_k\left(\lambda(P_1)\right)}\end{aligned} \tag{V.5.53}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}\|f\|_{C^2(M)}(1 + 2m\,C_5) \geq{}& \frac{\partial F}{\partial r_{11}}[\varphi](\beta_1)^2 + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi]\,R_{1i1i}(\beta_1 - 2\beta_i)\\ &+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\times\left(R_{1ii1} + R_{1(i+m)(i+m)1}\right)\left(\beta_i + \beta_{i+m}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\left(\lambda(P_1)\right)}{\sigma_k\left(\lambda(P_1)\right)}\right)\times\left[-\frac{4}{3}m^2(C_5)^2\|R\|_g - \frac{7}{3}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g\right]\end{aligned} \tag{V.5.54}$$

Estimons à présent les $|\beta_i|$ pour $1 \leq i \leq m$ à l'aide de $\beta_1$. On suit la même méthode que pour la preuve du Théorème V.5.1. Pour tout couple $(P,\xi) \in UT$, on a l'inégalité $(\nabla^2\varphi_t)_P(\xi,\xi) \leq \beta_1 + \frac{1}{2}(C_5)^2$, donc en $P$ dans une carte holomorphe $g$-normale $\tilde{g}$-adaptée $\psi_P$ à savoir une carte telle que $[g_{i\bar{j}}(P)]_{1\leq i,j\leq m} = I_m$, $\partial_l g_{i\bar{j}}(P) = 0$ et $[\tilde{g}_{i\bar{j}}(P)]_{1\leq i,j\leq m} = diag\big(\lambda_1(P),\dots,\lambda_m(P)\big)$, on déduit pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$ que :

(V.5.55)

$$\partial_{x^jx^j}\varphi_t(P) = 2(\nabla^2\varphi_t)_P\left(\frac{\partial_{x^j}}{\sqrt{2}},\frac{\partial_{x^j}}{\sqrt{2}}\right) \leq 2\beta_1+(C_5)^2 \quad \text{et} \quad \partial_{y^jy^j}\varphi_t(P) = 2(\nabla^2\varphi_t)_P\left(\frac{\partial_{y^j}}{\sqrt{2}},\frac{\partial_{y^j}}{\sqrt{2}}\right) \leq 2\beta_1+(C_5)^2$$

Puisque $\lambda_j(P) \geq -(m-1)C_2'$ avec $C_2' = (C_2+2C_0)$ on déduit les inégalités suivantes :

$$\forall j \in \{1,\dots,m\} \quad \partial_{x^jx^j}\varphi_t(P) \geq -4\left[(m-1)C_2'+1\right] - 2\beta_1 - (C_5)^2 \quad \text{et}$$

$$\partial_{y^jy^j}\varphi_t(P) \geq -4\left[(m-1)C_2'+1\right] - 2\beta_1 - (C_5)^2 \tag{V.5.56}$$

Par conséquent :

$$\forall 1 \leq i,j \leq 2m \quad |\partial_{u^iu^j}\varphi_t(P)| \leq 4\beta_1 + 2(C_5)^2 + \underbrace{4\left[(m-1)C_2'+1\right]}_{=:C_9} \quad \text{dans la carte } \psi_P \tag{V.5.57}$$

Ainsi on déduit que :

$$|(\nabla^2\varphi_t)_P|_g^2 = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2m}\big(\partial_{u^iu^j}\varphi_t(P)\big)^2 \leq m^2\left[4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right]^2 \quad \forall P \tag{V.5.58}$$

Or en $P_1$ dans la carte $\psi_1$, $|(\nabla^2\varphi_t)_{P_1}|_g^2 = \sum_{i=1}^{2m}\big(\partial_{u^iu^i}\varphi_t(P_1)\big)^2 = \sum_{i=1}^{2m}(\beta_i)^2$, par conséquent on aboutit à :

$$\forall 1 \leq i \leq 2m \quad |\beta_i| \leq m\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right) \tag{V.5.59}$$

Donc :

$$|(R_{1i1i})(\beta_1-2\beta_i)| \leq |R_{1i1i}|\Big(|\beta_1|+2|\beta_i|\Big) \leq 3m\,\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right) \tag{V.5.60}$$

En outre :

$$\begin{aligned}|\big(R_{1ii1}+R_{1(i+m)(i+m)1}\big)(\beta_i+\beta_{i+m})| &\leq \big(|R_{1ii1}|+|R_{1(i+m)(i+m)1}|\big)(|\beta_i|+|\beta_{i+m}|)\\ &\leq 4m\,\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)\end{aligned} \tag{V.5.61}$$

Ainsi :

(V.5.62)

$$\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\,C_5) \geq \frac{1}{4}\,\frac{\sigma_{k-1,1}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}(\beta_1)^2 + \frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{2m}\frac{\partial F}{\partial r_{ii}}[\varphi]\right)(-3m)\,\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$+\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda(P_1))}{\sigma_k(\lambda(P_1))}\right)\times(-4m)\,\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)\left[-\frac{4}{3}m^2(C_5)^2\,\|R\|_g-\frac{7}{3}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g\right]$$

à savoir :

(V.5.63)

$$\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\,C_5) \geq \frac{1}{4}\,\frac{\sigma_{k-1,1}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}(\beta_1)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)(-m)\,\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)\left(-\frac{2}{3}m\right)\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)\left[-\frac{7}{6}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g-\frac{2}{3}m^2(C_5)^2\,\|R\|_g\right]$$

donc :

(V.5.64)

$$\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\,C_5) \geq \frac{1}{4}\,\frac{\sigma_{k-1,1}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}(\beta_1)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)\left(-\frac{5}{3}m\right)\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)}\right)\left[-\frac{7}{6}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g-\frac{2}{3}m^2(C_5)^2\,\|R\|_g\right]$$

Or en utilisant l'ellipticité uniforme (Proposition V.3.2) et les inégalités $e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k} \leq \sigma_k\big(\lambda(P)\big) \leq e^{2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}$ on obtient :

(V.5.65)
$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma_{k-1,i}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)} \leq \frac{m\,e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}$$

(V.5.66) et
$$\frac{\sigma_{k-1,1}\big(\lambda(P_1)\big)}{\sigma_k\big(\lambda(P_1)\big)} \geq \frac{e^{-2\|f\|_\infty}E_0}{\binom{m}{k}}$$

Donc en $P_1$ dans la carte $\psi_1$ on a :

(V.5.67)
$$0 \geq \frac{1}{4}\,\frac{e^{-2\|f\|_\infty}E_0}{\binom{m}{k}}(\beta_1)^2 + \frac{m\,e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\left(-\frac{5}{3}m\right)\|R\|_g\left(4\beta_1+2(C_5)^2+C_9\right)$$
$$-\frac{m\,e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\left[\frac{7}{6}m\,C_5\,\|\nabla R\|_g+\frac{2}{3}m^2(C_5)^2\,\|R\|_g\right]-\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\,C_5)$$

L'inégalité précédente signifie qu'un certain polynôme du second degré en $\beta_1$ est négatif :

$$0 \geq \frac{1}{4}\,\frac{e^{-2\|f\|_\infty}E_0}{\binom{m}{k}}(\beta_1)^2 + \frac{m\, e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\left(-\frac{20}{3}m\right)\|R\|_g\,\beta_1$$
$$-\frac{m\, e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\left[\frac{7}{6}m\, C_5\,\|\nabla R\|_g + \frac{2}{3}m^2 (C_5)^2\,\|R\|_g + \frac{5}{3}m\,\|R\|_g\left(2(C_5)^2 + C_9\right)\right] - \|f\|_{C^2(M)}(1+2m\, C_5) \tag{V.5.68}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
0 \geq &(\beta_1)^2 - \frac{80}{3}m^2 e^{4\|f\|_\infty}\frac{F_0}{E_0}\|R\|_g\,\beta_1\\
&-4m^2 e^{4\|f\|_\infty}\frac{F_0}{E_0}\left[\frac{7}{6}C_5\,\|\nabla R\|_g + \frac{2}{3}m\,(C_5)^2\,\|R\|_g + \frac{5}{3}\left(2(C_5)^2 + C_9\right)\|R\|_g\right]\\
&-\frac{4\binom{m}{k}e^{2\|f\|_\infty}}{E_0}\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\, C_5)
\end{aligned} \tag{V.5.69}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
I &:= \frac{80}{3}m^2 e^{4\|f\|_\infty}\frac{F_0}{E_0}\|R\|_g > 0\\
J &:= 4m^2 e^{4\|f\|_\infty}\frac{F_0}{E_0}\left[\frac{7}{6}C_5\,\|\nabla R\|_g + \frac{2}{3}m\,(C_5)^2\,\|R\|_g + \frac{5}{3}\left(2(C_5)^2 + C_9\right)\|R\|_g\right]\\
&\quad + \frac{4\binom{m}{k}e^{2\|f\|_\infty}}{E_0}\|f\|_{C^2(M)}(1+2m\, C_5) > 0
\end{aligned}$$

l'inégalité précédente s'écrit donc :

$$(\beta_1)^2 - I\,\beta_1 - J \leq 0 \tag{V.5.70}$$

Le discriminant de ce polynôme du second order vaut $\triangle = I^2 + 4J > 0$, par conséquent ce polynôme admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$ et on a donc :

$$\beta_1 \leq r_2 \tag{V.5.71}$$

c'est le majorant qu'on recherchait.

Par conséquent :

$$\beta_1 \leq \min\left(-\frac{1}{2}C_5^2 - \frac{1}{4}C_9, r_2\right) =: C_{10} \tag{V.5.72}$$

Notre majorant $C_{10}$ dépend de $m, k, C_5, C_8, E_0, F_0, \|f\|_\infty, \|f\|_{C^2(M)}, \|R\|_g$ et $\|\nabla R\|_g$.

# Chapitre VI

# Estimée $C^{2,\beta}$

## VI.1 Stratégie

On déduit de l'estimée $C^2$ (V.5.8), une estimée $C^{2,\beta}$ par un théorème classique d'Evans-Trudinger (théorème VII.6.2), ce qui achève la preuve du Théorème II.2.1.

## VI.2 Réduction de la preuve à l'estimée a priori $C^2$

**La méthode d'Evans-Trudinger**

On suppose qu'il existe $C_{11} > 0$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $\|\varphi_{t_i}\|_{C^2(M,\mathbb{R})} \leq C_{11}$. Dans la suite, on ne notera plus l'indice $i$ de $\varphi_{t_i}$ afin d'alléger les notations. Dans le but de construire une estimée $C^{2,\beta}$ avec $0 < \beta < 1$, on va se mettre dans les conditions d'application du théorème VII.6.2 (cf. Annexes).
Soit $\mathscr{R} = (U_j, \phi_j)_{1\leq j\leq N}$ un recouvrement fini de la variété compacte $M$ par des cartes et soit $\mathscr{P} = (\theta_j)_{1\leq j\leq N}$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée à ce recouvrement. La famille d'équations de la méthode de continuité correspondant à l'équation de la $k$-ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres s'écrit :

$$(E_{k,t}) \qquad F_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}}(P)\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(P)]_{1\leq i,j\leq m}\right) - tf(P) - \ln(A_t) = 0 \quad P \in M$$

donc dans la carte $(U_s, \phi_s)$ où $1 \leq s \leq N$ est un entier fixé, cette équation s'écrit :
$(E_{k,t})$

$$F_k\left([\delta_i^j + g^{j\bar{\ell}} \circ \phi_s^{-1}(x)\frac{\partial(\varphi_t \circ \phi_s^{-1})}{\partial z_i \partial \bar{z}_\ell}(x)]_{1\leq i,j\leq m}\right) - tf \circ \phi_s^{-1}(x) - \ln(A_t) = 0 \quad x \in \phi_s(U_s) \subset \mathbb{R}^{2m}$$

Par ailleurs, on a $\dfrac{\partial}{\partial z_a \partial \overline{z_b}} = \dfrac{1}{4}\left(D_{ab} + D_{(a+m)(b+m)} + iD_{a(b+m)} - iD_{(a+m)b}\right)$ où les $D_{ab}$ désignent des dérivées réelles, donc notre équation est de la forme :

$$(E_{k,t}) \qquad G\left(x, D^2(\varphi_t \circ \phi_s^{-1})\right) = 0 \quad x \in \phi_s(U_s) \subset \mathbb{R}^{2m} \quad \text{avec,}$$

$$\begin{aligned} G(x,r) = &F_k\left([\delta_i^j + \frac{1}{4}g^{j\bar{\ell}}(\phi_s^{-1}(x))(r_{i\ell} + r_{(i+m)(\ell+m)} + ir_{i(\ell+m)} - ir_{(i+m)\ell})]_{1\leq i,j\leq m}\right) \\ &- tf \circ \phi_s^{-1}(x) - \ln(A_t). \end{aligned}$$

(VI.2.1)

Ainsi, de même que l'application $F$ intervenant dans l'estimation $C^2$ (cf. (V.5.19)), $G$ est concave en la variable $r$ (plus précisément, pour tout $x$ fixé de $\phi_s(U_s)$, $G(x,.)$ est concave sur $\rho^{-1}_{\phi_s^{-1}(x)}\left(\lambda^{-1}(\Gamma_k)\right) \subset S_{2m}(\mathbb{R})$ ).

Pour tout $s \in \{1,..,N\}$, on considère $\Omega_s$ un domaine borné de $\mathbb{R}^{2m}$ strictement inclus dans $\phi_s(U_s)$ :

$$\Omega_s \subset\subset \phi_s(U_s) \tag{VI.2.2}$$

La notation $S' \subset\subset S$ signifie que $S'$ est strictement inclus dans $S$ à savoir que $\overline{S'} \subset S$ . On expliquera ultérieurement comment ces domaines $\Omega_s$ sont choisis. L'application $G$ est de classe $C^2$ et la solution $\psi_t^s := \varphi_t \circ \phi_s^{-1} \in C^4(\Omega_s, \mathbb{R})$ car $\varphi_t \in C^{\ell,\alpha}(M)$ avec $\ell \geq 5$. L'équation $(E_{k,t})$ sur $\Omega_s \subset \phi_s(U_s)$ est à présent écrite sous la forme correspondante au théorème VII.6.2 (cf. Annexes), il reste à vérifier les hypothèses du théorème sur $\Omega_s$, à savoir :

1. $G$ est uniformément elliptique par rapport à $\psi_t^s = \varphi_t \circ \phi_s^{-1}$ i.e il existe deux réels $\lambda_s, \Lambda_s > 0$ tels que :

   $$\forall x \in \Omega_s, \forall \xi \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \lambda_s |\xi|^2 \leq G_{ij}\big(x, D^2(\psi_t^s)(x)\big)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_s |\xi|^2$$

   On s'imposera, en outre, de trouver des réels $\lambda_s, \Lambda_s$ indépendants de $t$.
2. $G$ est concave par rapport à $\psi_t^s$ en la variable $r$. Vu que $G$ est de classe $C^2$, cette condition de concavité est équivalente à :

   $$\forall x \in \Omega_s, \forall \zeta \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}, \quad G_{ij,k\ell}\big(x, D^2(\psi_t^s)(x)\big)\zeta_{ij}\zeta_{k\ell} \leq 0$$

   Ceci a déjà été vérifié.
3. Les dérivées $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$ sont contrôlées (ces quantités étant évaluées en $(x, D^2(\psi_t^s)(x))$).

Une fois ces trois points vérifiés, et vu qu'on a une estimation $C^2$ de $\varphi_t$ par $C_{11}$, le théorème VII.6.2 nous permet de déduire que pour tout ouvert $\Omega_s' \subset\subset \Omega_s$ il existe deux réels $\beta_s \in ]0,1]$ et $Cste_s > 0$ ne dépendant que de $m$ , $\lambda_s$, $\Lambda_s$, $dist(\Omega_s', \partial\Omega_s)$, de l'estimation uniforme de $|\psi_t^s|_{2;\Omega_s'}$ et des estimations uniformes des quantités $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$ ; donc en particulier $\beta_s$ et $Cste_s$ ne dépendent pas de $t$, tels que :

$$[D^2(\psi_t^s)]_{\beta_s;\Omega_s'} \leq Cste_s \tag{VI.2.3}$$

Choix de $\Omega_s$ et $\Omega_s'$ :
On note $K_s$ le support de la fonction $\theta_s \circ \phi_s^{-1}$ :

$$K_s := supp(\theta_s \circ \phi_s^{-1}) = \phi_s(supp\, \theta_s) \subset \phi_s(U_s) \tag{VI.2.4}$$

L'ensemble $K_s$ est un compact inclus dans l'ouvert $\phi_s(U_s)$ de $\mathbb{R}^{2m}$ , et $\mathbb{R}^{2m}$ est séparé localement compact, donc par le théorème d'intercalation d'ouverts relativement compacts, appliqué deux fois, on déduit l'existence de deux ouverts relativement compacts $\Omega_s$ et $\Omega_s'$ tels que :

$$K_s \subset \Omega_s' \subset\subset \Omega_s \subset\subset \phi_s(U_s) \tag{VI.2.5}$$

On aimerait que $\Omega_s$ soit connexe : pour cela, il suffit que $K_s$ soit connexe et ce quitte à se restreindre à une composante connexe dans $\Omega_s$ d'un point de $K_s$ ; en effet, cette composante connexe est un ouvert de $\Omega_s$ vu que $\Omega_s$ est localement connexe (au titre d'ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$), elle est en outre bornée vu que $\Omega_s$ l'est.

Application du théorème :

Soit $\beta := min\,\beta_s$, la norme $\|.\|_{C^{2,\beta}}$ est sous-multiplicative (cf. [ZQ95]) donc :

$$\begin{aligned}\|\varphi_t\|^{\mathscr{R},\mathscr{P}}_{C^{2,\beta}(M)} &= \sum_{s=1}^{N} |(\theta_s\circ\phi_s^{-1})\times(\varphi_s\circ\phi_s^{-1})|_{2,\beta;\Omega'_s} \\ &\leq \sum_{s=1}^{N} |\theta_s\circ\phi_s^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_s}\times|\psi_t^s|_{2,\beta;\Omega'_s}\end{aligned} \tag{VI.2.6}$$

Or par (VI.2.3) on a $|\psi_t^s|_{2,\beta_s;\Omega'_s} = |\psi_t^s|_{2;\Omega'_s} + [D^2(\psi_t^s)]_{\beta_s;\Omega'_s} \leq |\psi_t^s|_{2;\Omega'_s} + Cste_s \leq Cste'_s$ où $Cste'_s$ ne dépend que de $m$, $\lambda_s$, $\Lambda_s$, $dist(\Omega'_s,\partial\Omega_s)$, $C_{11}$ (la constante de l'estimée $C^2$) et des estimations uniformes des quantités $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$. On obtient par conséquent l'estimation $C^{2,\beta}$ recherchée :

$$\|\varphi_t\|^{\mathscr{R},\mathscr{P}}_{C^{2,\beta}(M)} \leq \sum_{s=1}^{N} |\theta_s\circ\phi_s^{-1}|_{2,\beta;\Omega'_s}\times Cste'_s =: C_{12} \tag{VI.2.7}$$

Passons à la vérification des hypothèses 1 et 3 ci-dessus.

**L'ellipticité uniforme de $G$ sur $\Omega_s$**

Soient $x\in\Omega_s$ et $\xi\in\mathbb{R}^{2m}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2m} G_{ij}\big(x,r\big)\xi_i\xi_j &= d\Big(G(x,.)\Big)_r(M) \quad \text{avec } M = [\xi_i\xi_j]_{1\leq i,j\leq m}\in S_{2m}(\mathbb{R}) \\ &= d\Big(F_k\circ\rho_{\phi_s^{-1}(x)}\Big)_r(M) \\ &= d(F_k)_{\rho_{\phi_s^{-1}(x)}(r)}.d\Big(\rho_{\phi_s^{-1}(x)}\Big)_r(M)\end{aligned} \tag{VI.2.8}$$

Rappelons que $\rho_P(r) = \left[\delta_i^j + \frac{1}{4}\sum_{\ell,o=1}^{m}\Big(g^{\frac{-1}{2}}(P)\Big)_{i\ell}\Big(g^{\frac{-1}{2}}(P)\Big)_{oj}(r_{\ell o}+r_{(\ell+m)(o+m)}+ir_{\ell(o+m)}-ir_{(\ell+m)o})\right]_{1\leq i,j\leq m}$ (cf. (V.5.19)), on obtient par conséquent :

(VI.2.9)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2m} G_{ij}\big(x,D^2(\psi_t^s)(x)\big)\xi_i\xi_j = d(F_k)_{\rho_{\phi_s^{-1}(x)}(D^2(\psi_t^s)(x))}.&\left[\frac{1}{4}\sum_{\ell,o=1}^{m}\Big(g^{\frac{-1}{2}}(\phi_s^{-1}(x))\Big)_{i\ell}\Big(g^{\frac{-1}{2}}(\phi_s^{-1}(x))\Big)_{oj}\right. \\ &\left.(M_{\ell o}+M_{(\ell+m)(o+m)}+iM_{\ell(o+m)}-iM_{(\ell+m)o})\right]_{1\leq i,j\leq m}\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on note $\tilde{M} := [\frac{1}{4}(M_{\ell s} + M_{(\ell+m)(s+m)} + iM_{\ell(s+m)} - iM_{(\ell+m)s})]_{1\le \ell,s\le m}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= [\frac{1}{4}(\xi_\ell \xi_s + \xi_{\ell+m}\xi_{s+m} + i\xi_\ell \xi_{s+m} - i\xi_{\ell+m}\xi_s)]_{1\le \ell,s\le m} \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})\\
&= [\frac{1}{4}(\xi_\ell - i\xi_{\ell+m})\underbrace{(\xi_s + i\xi_{s+m})}_{=:\tilde{\xi}_s}]_{1\le \ell,s\le m}\\
&= [\frac{1}{4}\overline{\tilde{\xi}_\ell}\tilde{\xi}_s)]_{1\le \ell,s\le m} \qquad \text{(VI.2.10)}
\end{aligned}$$

Notons par ailleurs $d_i = \dfrac{\sigma_{k-1,i}\left[\lambda\left(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))\right)\right]}{\sigma_k\left[\lambda\left(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))\right)\right]}$ et $g^{\frac{-1}{2}}$ au lieu de $g^{\frac{-1}{2}}(\phi_s^{-1}(x))$ afin d'alléger les formules. On obtient par la formule d'invariance (II.3.15) que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2m} G_{ij}\left(x, D^2(\psi_t^s)(x)\right)\xi_i\xi_j &= d(F_k)_{[g]^{\frac{-1}{2}}\tilde{g}_{\varphi_t}[g]^{\frac{-1}{2}}}\cdot\left([g]^{\frac{-1}{2}}\tilde{M}[g]^{\frac{-1}{2}}\right)\\
&= d(F_k)_{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}\cdot\left({}^t\overline{U}[g]^{\frac{-1}{2}}\tilde{M}[g]^{\frac{-1}{2}}U\right) \quad \text{où } U \in U_m(\mathbb{C}) \text{ avec}\\
&\qquad {}^t\overline{U}[g]^{\frac{-1}{2}}\tilde{g}_{\varphi_t}[g]^{\frac{-1}{2}}U = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \quad \text{on est au point } \phi_s^{-1}(x)\\
&= \sum_{i=1}^m d_i\left({}^t\overline{U}[g]^{\frac{-1}{2}}\tilde{M}[g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ii}\\
&= \sum_{i=1}^m d_i\left({}^t\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}\tilde{M}\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)\right)_{ii}\\
&= \sum_{i,\ell,j=1}^m d_i\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}_{\ell i}\tilde{M}_{\ell j}\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\\
&= \sum_{i,\ell,j=1}^m d_i\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}_{\ell i}\frac{1}{4}\overline{\tilde{\xi}_\ell}\tilde{\xi}_j\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^m d_i\underbrace{\left(\sum_{j=1}^m\tilde{\xi}_j\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\right)}_{=:\alpha_i}\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^m\overline{\tilde{\xi}_\ell}\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}_{\ell i}\right)}_{=\overline{\alpha_i}}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^m d_i\,|\alpha_i|^2 \qquad \text{(VI.2.11)}
\end{aligned}$$

Or par la proposition V.3.2 et les inégalités $e^{-2\|f\|_\infty}\binom{m}{k} \le \sigma_k\left(\lambda(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(P))\right) \le e^{2\|f\|_\infty}\binom{m}{k}$, on a de même qu'en (V.5.65) :

$$\frac{e^{-2\|f\|_\infty}E_0}{\binom{m}{k}} \le d_i \le \frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}} \qquad \text{(VI.2.12)}$$

En combinant (VI.2.11) et (VI.2.12), on obtient :

$$\text{(VI.2.13)}\qquad \frac{1}{4}\frac{e^{-2\|f\|_\infty E_0}}{\binom{m}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^2\right)\le\sum_{i,j=1}^{2m}G_{ij}\left(x,D^2(\psi_t^s)(x)\right)\xi_i\xi_j\le\frac{1}{4}\frac{e^{2\|f\|_\infty F_0}}{\binom{m}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^2\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^2&=\sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{m}\tilde{\xi}_j\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\Big|^2\\&=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\tilde{\xi}_j\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{m}\overline{\tilde{\xi}}_\ell\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}_{\ell i}\right)\\&=\sum_{j,\ell=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)_{ji}\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}_{\ell i}\right\}\tilde{\xi}_j\overline{\tilde{\xi}}_\ell\\&=\sum_{j,\ell=1}^{m}\left(\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)\times{}^t\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}\right)_{j\ell}\tilde{\xi}_j\overline{\tilde{\xi}}_\ell\end{aligned}\qquad\text{(VI.2.14)}$$

Or $\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)\times{}^t\overline{\left([g]^{\frac{-1}{2}}U\right)}=[g]^{\frac{-1}{2}}U\,{}^t\overline{U}\,{}^t\overline{[g]^{\frac{-1}{2}}}=[g]^{\frac{-1}{2}}\,{}^t\overline{[g]^{\frac{-1}{2}}}=[g]^{\frac{-1}{2}}[g]^{\frac{-1}{2}}=[g]^{-1}$, donc :

$$\text{(VI.2.15)}\qquad \sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^2=\sum_{j,\ell=1}^{m}\left([g]^{-1}\right)_{j\ell}\tilde{\xi}_j\overline{\tilde{\xi}}_\ell=\sum_{j,\ell=1}^{m}g^{\ell\bar{j}}(\phi_s^{-1}(x))\tilde{\xi}_j\overline{\tilde{\xi}}_\ell$$

Ainsi, et vu que $|\xi|^2=|\tilde{\xi}|^2$, la vérification de l'hypothèse d'uniforme ellipticité du théorème VII.6.2 (cf. Annexes), est ramenée à trouver deux réels $\lambda_s^o,\Lambda_s^o>0$ tels que :

$$\text{(VI.2.16)}\qquad \forall x\in\Omega_s,\ \forall\tilde{\xi}\in\mathbb{C}^m,\quad \lambda_s^o|\tilde{\xi}|^2\le\sum_{j,\ell=1}^{m}g^{\ell\bar{j}}(\phi_s^{-1}(x))\tilde{\xi}_\ell\overline{\tilde{\xi}}_j\le\Lambda_s^o|\tilde{\xi}|^2$$

Par le principe du min-max appliqué sur $\mathbb{C}^m$ à la forme hermitienne $\prec X,Y\succ_{g(\phi_s^{-1}(x))}=g^{a\bar{b}}(\phi_s^{-1}(x))X_a\overline{Y}_b$ relativement à la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^m$, on a :

(VI.2.17)

$$\lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(\phi_s^{-1}(x))]_{1\le a,b\le m}\ |\tilde{\xi}|^2\le\sum_{a,b=1}^{m}g^{a\bar{b}}(\phi_s^{-1}(x))\tilde{\xi}_a\overline{\tilde{\xi}}_b\le\lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(\phi_s^{-1}(x))]_{1\le a,b\le m}\ |\tilde{\xi}|^2$$

Or les fonctions $P\mapsto\lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\le a,b\le m}$ et $P\mapsto\lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\le a,b\le m}$ sont continues sur $\overline{\phi_s^{-1}(\Omega_s)}\subset U_s$ qui est compact car c'est un fermé de la variété compacte $M$ (cf. (VI.2.2) pour le choix des domaines $\Omega_s$), donc sont bornées et atteignent leurs bornes, d'où :

(VI.2.18)

$$\underbrace{\left(\min_{P\in\overline{\phi_s^{-1}(\Omega_s)}}\lambda_{min}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\le a,b\le m}\right)}_{=:\lambda_s^o}\times|\tilde{\xi}|^2\le\sum_{a,b=1}^{m}g^{a\bar{b}}(\phi_s^{-1}(x))\tilde{\xi}_a\overline{\tilde{\xi}}_b\le\underbrace{\left(\max_{P\in\overline{\phi_s^{-1}(\Omega_s)}}\lambda_{max}[g^{a\bar{b}}(P)]_{1\le a,b\le m}\right)}_{=:\Lambda_s^o}\times|\tilde{\xi}|^2$$

Par les inégalités (VI.2.13) et (VI.2.18), on déduit que :

(VI.2.19)
$$\lambda_s \mid \tilde{\xi} \mid^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2m} G_{ij}\left(x, D^2(\psi_t^s)(x)\right)\xi_i \xi_j \leq \Lambda_s \mid \tilde{\xi} \mid^2$$
$$\text{avec} \quad \lambda_s := \frac{1}{4}\frac{e^{-2\|f\|_\infty} E_0}{\binom{m}{k}}\lambda_s^o$$
$$\text{et} \quad \Lambda_s := \frac{1}{4}\frac{e^{2\|f\|_\infty} F_0}{\binom{m}{k}}\Lambda_s^o$$

Les réels $\lambda_s$ et $\Lambda_s$ dépendent de $k$, $m$, $\|f\|_\infty$, $E_0$, $F_0$, $g$, $(U_s, \phi_s)$ et $\Omega_s$ et ne dépendent pas de $t$, $x$ et $\tilde{\xi}$ ; ce qui achève la preuve de l'ellipticité uniforme globale.

**Estimation uniforme de $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$**

Dans cette sous-section on estime uniformément les quantités $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$ (rappelons que ces quantités sont évaluées en $(x, D^2(\psi_t^s)(x))$) et ce par la même technique utilisée dans la sous-section précédente pour la preuve de l'ellipticité uniforme (VI.2.19).

Rappelons que (cf. (VI.2.1)) :

$$G(x,r) = F_k\left([\delta_i^j + \frac{1}{4}g^{j\bar{\ell}}(\phi_s^{-1}(x))(r_{i\ell} + r_{(i+m)(\ell+m)} + i\,r_{i(\ell+m)} - i\,r_{(i+m)\ell})]_{1\leq i,j\leq m}\right) - t f \circ \phi_s^{-1}(x) - \ln(A_t)$$

on a :

(VI.2.20)
$$\mid G_x \mid^2 = \mid [G_{x_i}]_{1\leq i\leq 2m} \mid^2 = \sum_{i=1}^{2m} \mid G_{x_i} \mid^2 \quad \text{où } G_{x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, D^2(\psi_t^s)(x))$$

de même que (VI.2.9), on obtient :

(VI.2.21)
$$\begin{aligned} G_{x_i} &= \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, D^2(\psi_t^s)(x)) \\ &= d(F_k)_{[g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]} \cdot \underbrace{\left(\left[\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial(g^{q\bar{\ell}} \circ \phi_s^{-1})}{\partial x_i}(x)\,\partial_{o\bar{\ell}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))\right]_{1\leq o,q\leq m}\right)}_{=:M^o} - t\,\frac{\partial(f \circ \phi_s^{-1})}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

et à l'instar de (VI.2.11), on obtient donc par la formule d'invariance (II.3.15) que :

(VI.2.22)
$$G_{x_i} = \sum_{j=1}^{m} d_j \left({}^t\overline{U} M^o U\right)_{jj} - t\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_s^{-1}(x))$$

où $U \in U_m(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{U}[g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]U = diag(\lambda_1,...,\lambda_m)$ et $d_i = \dfrac{\sigma_{k-1,i}\left[\lambda\left(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}\left(\phi_s^{-1}(x)\right)\right)\right]}{\sigma_k\left[\lambda\left(g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}\left(\phi_s^{-1}(x)\right)\right)\right]}$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} G_{x_i} &= \sum_{j,p,q=1}^{m} d_j\,\overline{U_{pj}}\,U_{qj}\,M^o_{pq} - t\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_s^{-1}(x)) \\ &= \sum_{j,p,q=1}^{m} d_j\,\overline{U_{pj}}\,U_{qj}\left(\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\partial g^{q\bar{\ell}}}{\partial x^i}(\phi_s^{-1}(x))\,\partial_{p\bar{\ell}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))\right) - t\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi_s^{-1}(x)) \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

(VI.2.23)

$$|G_{x_i}| \leq \sum_{j,p,q,\ell=1}^{m}\frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\,|\overline{U_{pj}}|\,|U_{qj}|\,\underbrace{\left(\max_{1\leq a,b\leq m,1\leq i\leq 2m}\ \max_{P\in\phi_s^{-1}(\Omega_s)}\left|\frac{\partial g^{a\bar{b}}}{\partial x^i}(P)\right|\right)}_{=:\Lambda_s^1}\|\varphi_t\|_{C^2(M,\mathbb{R})} + \|f\|_{C^1(M,\mathbb{R})}.$$

Or $U \in U_m(\mathbb{C})$ donc $|U_{qj}| \leq 1$ pour tout $1 \leq q,j \leq m$, par conséquent :

(VI.2.24) $$|G_{x_i}| \leq m^4\,\frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\,\Lambda_s^1\,\underbrace{\|\varphi_t\|_{C^2(M,\mathbb{R})}}_{\leq C_{11}\quad \text{(estimée } C^2)} + \|f\|_{C^1(M,\mathbb{R})}$$

ce qui donne l'estimation uniforme recherchée pour $G_x$ :

(VI.2.25) $$|G_x| \leq \sqrt{2m}\left(m^4\,\frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\,\Lambda_s^1\,C_{11} + \|f\|_{C^1(M,\mathbb{R})}\right)$$

De manière similaire :

(VI.2.26) $$|G_r|^2 = |[G_{pq}]_{1\leq p,q\leq 2m}|^2 = \sum_{p,q=1}^{2m}|G_{pq}|^2 \quad \text{où } G_{pq} = \frac{\partial G}{\partial r_{pq}}(x, D^2(\psi_t^s)(x))$$

et on a :

$$G_{pq} = \frac{\partial G}{\partial r_{pq}}(x, D^2(\psi_t^s)(x))$$

(VI.2.27) $$= d(F_k)_{[g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]}\cdot\underbrace{\left[\sum_{\ell=1}^{m} g^{j\bar{\ell}}(\phi_s^{-1}(x))\,(\tilde{E_{pq}})_{i\bar{\ell}}\right]_{1\leq i,j\leq m}}_{=:M^1}$$

où $E_{pq}$ est la matrice carrée de taille $m$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient $pq$ qui vaut 1, et la matrice $(\tilde{E_{pq}})$ est obtenue à partir de $E_{pq}$ par la formule : $\tilde{M} := [\frac{1}{4}(M_{\ell s} + M_{(\ell+m)(s+m)} + iM_{\ell(s+m)} - iM_{(\ell+m)s})]_{1\leq \ell,s\leq m}$, ainsi :

(VI.2.28) $$G_{pq} = \sum_{j=1}^{m} d_j\left({}^t\overline{U}M^1U\right)_{jj} \quad \text{où } U \text{ et } d_i \text{ sont comme avant pour } G_x$$

De même que pour $G_x$, et vu que $|(\tilde{E_{pq}})_{i\bar{\ell}}|\leq 1$ pour tout $1\leq i,\ell\leq m$, on obtient :

$$|G_{pq}|\leq m^4\frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\Lambda_s^2 \tag{VI.2.29}$$

où $\Lambda_s^2=\max_{1\leq a,b\leq m}\max_{P\in\overline{\phi_s^{-1}(\Omega_s)}}|g^{a\bar{b}}(P)|$, ce qui donne l'estimation uniforme recherchée pour $G_r$ :

$$|G_r|\leq 2m^5\frac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}\Lambda_s^2 \tag{VI.2.30}$$

Pour ce qui est de $G_{xx}$, on a :

$$|G_{xx}|^2=|[G_{x_px_q}]_{1\leq p,q\leq 2m}|^2=\sum_{p,q=1}^{2m}|G_{x_px_q}|^2 \quad \text{où } G_{x_px_q}=\frac{\partial^2 G}{\partial x_p\partial x_q}(x,D^2(\psi_t^s)(x)) \tag{VI.2.31}$$

Un calcul montre que :

$$\begin{aligned}
G_{x_px_q}&=\frac{\partial^2 G}{\partial x_p\partial x_q}(x,D^2(\psi_t^s)(x))\\
&=-t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^p\partial x^q}(\phi_s^{-1}(x))+\sum_{i,j,\ell=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial B_i^j}\Big([g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]\Big)\frac{\partial^2 g^{j\bar{\ell}}}{\partial x^p\partial x^q}(\phi_s^{-1}(x))\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))\\
&+\sum_{i,j,\ell,\mu,o,\nu=1}^{m}\underbrace{\frac{\partial^2 F_k}{\partial B_\mu^o\partial B_i^j}\Big([g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]\Big)}_{=:\mathscr{E}}\frac{\partial g^{o\bar{\nu}}}{\partial x^p}(\phi_s^{-1}(x))\,\frac{\partial g^{j\bar{\ell}}}{\partial x^q}(\phi_s^{-1}(x))\partial_{\mu\bar{\nu}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))\partial_{i\bar{\ell}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))
\end{aligned} \tag{VI.2.32}$$

Tous les termes sont uniformément bornés, il reste à bien justifier que le terme en dérivée seconde $\mathscr{E}$ l'est.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}&:=\frac{\partial^2 F_k}{\partial B_\mu^o\partial B_i^j}\Big([g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]\Big)\\
&=d^2(F_k)_{[g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]}.(E_{\mu o},E_{ij}) \quad \text{donc par la formule d'invariance (II.3.15)}\\
&=\sum_{a,b,c,d=1}^{m}\frac{\partial^2 F_k}{\partial B_a^b\partial B_c^d}[diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)]\left({}^t\overline{U}E_{\mu o}U\right)_{ab}\left({}^t\overline{U}E_{ij}U\right)_{cd} \quad \text{où } U\in U_m(\mathbb{C}) \text{ est comme avant}
\end{aligned} \tag{VI.2.33}$$

Or on connaît les dérivées secondes de $F_k$ en une diagonale par (II.3.13), rappelons ce résultat :

$$\begin{aligned}
\text{si}\, i \neq j \quad & \frac{\partial^2 F_k}{\partial B^i_j \partial B^j_i}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = -\frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} \\
& \frac{\partial^2 F_k}{\partial B^j_j \partial B^i_i}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = \frac{\sigma_{k-2,ij}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} - \frac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)\sigma_{k-1,j}(\lambda)}{\big(\sigma_k(\lambda)\big)^2} \\
& \frac{\partial^2 F_k}{\partial B^i_i \partial B^i_i}\big(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) = -\frac{\big(\sigma_{k-1,i}(\lambda)\big)^2}{\big(\sigma_k(\lambda)\big)^2}
\end{aligned}$$

et toutes les autres dérivées secondes de $F_k$ en $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ sont nulles.
Par ailleurs, on a $0 < \dfrac{\sigma_{k-1,i}(\lambda)}{\sigma_k(\lambda)} = d_i \leq \dfrac{e^{2\|f\|_\infty}F_0}{\binom{m}{k}}$ par (VI.2.12), et vu que $e^{-2\|f\|_\infty}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \leq \sigma_k(\lambda)$, il reste donc uniquement à contrôler les quantités $|\sigma_{k-2,ij}(\lambda)|$ avec $i \neq j$ pour prouver que $\mathscr{E}$ est uniformément bornée.
Or puisque $\lambda \in \Gamma_k$, on a $\sigma_{k-2,ij}(\lambda) > 0$. En outre, par le pincement des valeurs propres V.2.2 on déduit automatiquement que :

$$\sigma_{k-2,ij}(\lambda) \leq \begin{pmatrix} m-2 \\ k-2 \end{pmatrix} (C_2')^{k-1} =: F_1 \tag{VI.2.34}$$

ce qui achève la vérification du fait que $G_{xx}$ est uniformément borné.

On établit de même une estimation uniforme de $G_{xr}$ à partir du calcul :

$$\begin{aligned}
G_{x_o,pq} &= \frac{\partial^2 G}{\partial x_o \partial r_{pq}}(x, D^2(\psi^s_t)(x)) \\
&= \sum_{i,j,\ell=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial B^j_i}\Big([g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]\Big)\frac{\partial g^{j\bar{\ell}}}{\partial x^o}(\phi_s^{-1}(x))(\tilde{E_{pq}})_{i\bar{\ell}} \\
&+ \sum_{i,j,\ell,\nu,\mu,\gamma=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial B^\mu_\nu \partial B^j_i}\Big([g^{-1}\tilde{g}_{\varphi_t}(\phi_s^{-1}(x))]\Big)\frac{\partial g^{\mu\bar{\gamma}}}{\partial x^o}(\phi_s^{-1}(x))\partial_{\nu\bar{\gamma}}\varphi_t(\phi_s^{-1}(x))\, g^{j\bar{\ell}}(\phi_s^{-1}(x))(\tilde{E_{pq}})_{i\bar{\ell}}
\end{aligned} \tag{VI.2.35}$$

ce qui achève la preuve de l'estimée $C^{2,\beta}$.

# Chapitre VII

# Annexes

# VII.1 Quelques inégalités

On pourra se reporter par exemple au livre [HLP94].

**LEMME VII.1.1 (*Inégalité arithmético-géométrique*)** Si $x_1,...,x_m$ sont $m$ réels $\geq 0$ alors :

$$(\prod_{a=1}^{m} x_a)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{\sum_{a=1}^{m} x_a}{m}$$

**LEMME VII.1.2** Soit $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Si $a_1,...,a_m > 0$ alors :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} \geq (\sum_{i=1}^{m} a_i)^{\frac{1}{m-1}} (\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i})^{\frac{1}{m-1}}$$

**Preuve** : Par récurrence. ■

# VII.2 Géométrie kählérienne

## VII.2.1 Lemmes kählériens

**LEMME VII.2.1** Si $(M,J,g,\omega)$ est une variété kählérienne compacte et $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^2$ telle que $\partial\bar{\partial}f = 0$, alors f est constante.

**Preuve** : Pour prouver ce lemme on utilise le lemme bien connu : Si $(M,g)$ est une variété riemannienne compacte orientée et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ telle que $\triangle_g f = 0$, alors f est constante.
En effet, $(M,g)$ est en particulier une variété riemannienne compacte orientée, et le laplacien réel de $f$, $\triangle_g f = 2 \underbrace{(-g^{a\bar{b}}\partial_{a\bar{b}}f)}_{\text{Laplacien complexe}} = 0$ car $\partial\bar{\partial}f = \partial_{a\bar{b}}f\, dz^a \wedge dz^{\bar{b}} = 0$. ■

**LEMME VII.2.2 (*Potentiel kählérien local, cf. [BES87] p.85*)** La forme de kähler d'une variété kählérienne s'écrit localement $\frac{1}{2}dd^c f = i\partial\bar{\partial}f$ où $f$ est une fonction à valeurs réelles définie localement de classe $C^\infty$. $f$ est déterminée à une fonction pluriharmonique (locale) près.

## VII.2.2 Bonnes cartes en géométrie kählérienne

Soit $(M,J,g,\omega)$ une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe $m \geq 2$. On commence par prouver le fait standard suivant :

**LEMME VII.2.3** Soient $P_0 \in M$ et $e_1^{P_0},...,e_m^{P_0}$ une base de $T_{P_0}^{1,0}M$. Alors il existe une carte holomorphe normale $(U_0,\psi_0)$ en $P_0$ telle que $\psi_0(P_0) = 0$ et $\partial_i |_{P_0} = e_i^{P_0}$ $\quad i = 1...m$.

<u>**Preuve**</u> *:* Soit $\psi : P_0 \in U \to \mathbb{C}^m$ une carte holomorphe normale en $P_0$ telle que $\psi(P_0) = 0$ (une telle carte existe vu que la variété $(M, J, g, \omega)$ est kählérienne). Soit $B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ un isomorphisme de $\mathbb{C}^m$. Vu que $B$ est holomorphe, l'application $B \circ \psi : U \to \mathbb{C}^m$ est aussi une carte holomorphe. On note $\frac{\partial}{\partial z^j}$ la base de $T^{1,0}$ relative à la carte $\psi$ et $\partial_j$ la base de $T^{1,0}$ relative à la carte $B \circ \psi$. Soit $v : M \to \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\partial_j v &= \frac{\partial(v \circ (B \circ \psi)^{-1})}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(v \circ \psi^{-1})}{\partial z_i} \frac{\partial(B^{-1})^i}{\partial z_j} \qquad \text{car B est holomorphe} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial z^i} (B^{-1})^i_j \qquad \text{(VII.2.1)}
\end{aligned}
$$

d'où $\partial_j = \sum_i (B^{-1})^i_j \frac{\partial}{\partial z^i}$. Par conséquent, $Mat_{(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m})}(\partial_1, \dots, \partial_m) = B^{-1}$ (ceci vaut en tout point de $U$ ). On choisit maintenant l'isomorphisme $B$ de $\mathbb{C}^m$ dont la matrice dans la base canonique vaut :

$$
B = [B^i_j] = Mat_{e_1^{P_0}, \dots, e_m^{P_0}} \left( \frac{\partial}{\partial z^1} |_{P_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m} |_{P_0} \right) \qquad \text{(VII.2.2)}
$$

La base de $T^{1,0}$ relative à la carte $\psi_0 := B \circ \psi$ vérifie la condition recherchée à savoir $\partial_i |_{P_0} = e_i^{P_0}$. Cette carte est par ailleurs clairement normale en $P_0$ et satisfait $\psi_0(P_0) = 0$. ■

On montre à présent l'existence de cartes très particulières et ce en tout point de notre variété kählérienne $M$ (ces cartes sont utilisées dans la preuve du lemme de positivité I.2.1).

**LEMMEVII.2.4** Soit $\alpha$ une 1-forme réelle sur $M$. En tout point $x \in M$ où $\alpha_x \neq 0$, il existe une carte $g$-unitaire en $x$ (i.e telle que la matrice $[g_{a\bar{b}}(x)]_{1 \le a,b \le m} = I$) vérifiant :

$$
[\tilde{g}_{a\bar{b}}(x)]_{1 \le a,b \le m} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \star \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_{m-1} & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}, d_i \ge 0 \, \forall i \in \{1, \dots, m-1\} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{|\alpha|_g} = \frac{dz^m + dz^{\bar{m}}}{\sqrt{2}} \text{ en } x
$$

<u>**Preuve**</u> *:* Soit le champ de vecteurs réel $e_m := i_g^{-1}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|_g}\right)$ où $i_g$ est l'isomorphisme (point par point) $i_g : TM \to T^\star M, X \mapsto g(X, .)$. $Je_m$ est aussi un champ de vecteurs réel unitaire, en effet $g(e_m, e_m) = g(Je_m, Je_m) = 1$. On considère en outre le champ de vecteurs complexes $\epsilon_m = \frac{e_m - iJe_m}{\sqrt{2}} \in T^{1,0}M$ et son conjugué $\overline{\epsilon_m} = \frac{e_m + iJe_m}{\sqrt{2}} \in T^{0,1}M$. On a $g(\epsilon_m, \overline{\epsilon_m}) = \frac{1}{2} g(e_m - iJe_m, e_m + iJe_m) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 0) = 1$.

Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel complexe de $T^{\mathbb{C}}M$ engendré par $\epsilon_m$ et $\overline{\epsilon_m}$ (on raisonne point par point), et soit $\mathscr{F}^{\perp_g}$ l'orthogonal de $\mathscr{F}$ dans $T^{\mathbb{C}}M$ pour la métrique g. On affirme que :

$$
\mathscr{F}^{\perp_g} = (\mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{1,0}M) \oplus (\mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{0,1}M) \qquad \text{(VII.2.3)}
$$

En effet, soit $X \in \mathscr{F}^{\perp_g}$, il s'écrit $X = \underbrace{\frac{X - iJX}{2}}_{\in T^{1,0}M} + \underbrace{\frac{X + iJX}{2}}_{\in T^{0,1}M}$. On a clairement $g\left(\frac{X - iJX}{2}, \epsilon_m\right) = 0$ par $J$-compatibilité, par ailleurs :

(VII.2.4) $g(\frac{X - iJX}{2}, \overline{\epsilon_m}) = \frac{1}{2} g(X, \overline{\epsilon_m}) - \frac{i}{2} g(JX, \overline{\epsilon_m}) = 0 - \frac{i}{2} g(J^2X, J\overline{\epsilon_m}) = -\frac{i}{2} g(-X, -i\overline{\epsilon_m}) = 0$

ainsi, $\frac{X - iJX}{2} \in \mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{1,0}M$. De même, on vérifie que $\frac{X + iJX}{2} \in \mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{0,1}M$. Enfin, la somme est directe car $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ sont en somme directe.
Soit $f_1, \dots, f_{m-1}$ une base de $\mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{1,0}M$. $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_{m-1}}$ est alors une base de $\mathscr{F}^{\perp_g} \cap T^{0,1}M$, et $\mathscr{B} := (f_1, \dots, f_{m-1}, \overline{f_1}, \dots, \overline{f_{m-1}}, \epsilon_m, \overline{\epsilon_m})$ une base de $T^{\mathbb{C}}M$ .

Les matrices des métriques $g$ et $\tilde{g}$ dans cette base sont de la forme :

(VII.2.5) $$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}} g = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & A & 0 \\ \hline {}^t A & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

(VII.2.6) $$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}} \tilde{g} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & B & \begin{smallmatrix} 0 & \star \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \star \end{smallmatrix} \\ \hline {}^t B & 0 & \begin{smallmatrix} \star & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \star & 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \star & \cdots & \star \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

où $A$ et $B$ sont des matrices hermitiennes définies positives.
Par le théorème de diagonalisation simultanée des matrices hermitiennes (on diagonalise la matrice hermitienne $B$ dans une base $A$-orthonormée), il existe une matrice $Q \in GL_{m-1}(\mathbb{C})$ telle que :

(VII.2.7) $${}^t\overline{Q} A Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\overline{Q} B Q = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{m-1} \end{pmatrix}, \quad d_i \in \mathbb{R}, \quad d_i \geq 0$$

Ainsi :

(VII.2.8) $${}^t\left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline \overline{A} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right]$$

(VII.2.9) et $${}^t\left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline \overline{B} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{m-1} \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{m-1} \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right]$$

On note $P := \left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$, et on considère à présent la nouvelle base de $T^{\mathbb{C}}M$ :

(VII.2.10)

$$\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m-1}, \overline{\epsilon_1}, \ldots, \overline{\epsilon_{m-1}}, \epsilon_m, \overline{\epsilon_m}) := (f_1, \ldots, f_{m-1}, \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_{m-1}}, \epsilon_m, \overline{\epsilon_m})\ {}^t\!\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

On a donc :

$$\text{(VII.2.11)} \qquad \underset{\mathscr{B}'}{Mat}\, g = {}^t\!\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right] \underset{\mathscr{B}}{Mat}\, g \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

$$\text{(VII.2.12)} \quad \text{et} \quad \underset{\mathscr{B}'}{Mat}\, \tilde{g} = {}^t\!\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right] \underset{\mathscr{B}}{Mat}\, \tilde{g} \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{m-1} \end{smallmatrix} & * \\ \hline \begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{m-1} \end{smallmatrix} & 0 & * \\ \hline * & * & \begin{smallmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right]$$

On considère finalement la base $\mathscr{B}'' = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m-1}, \epsilon_m, \overline{\epsilon_1}, \ldots, \overline{\epsilon_{m-1}}, \overline{\epsilon_m})$, on a :

$$\text{(VII.2.13)} \qquad \underset{\mathscr{B}''}{Mat}\, \tilde{g} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} d_1 & & & \star \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_{m-1} & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} d_1 & & & \star \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_{m-1} & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \underset{\mathscr{B}''}{Mat}\, g = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right]$$

On se place en une carte holomorphe en $x$, telle que $\epsilon_k = \dfrac{\partial}{\partial z^k}$ pour tout $1 \leq k \leq m$.

Il reste à vérifier que $\dfrac{\alpha}{|\alpha|_g} = \dfrac{dz^m + dz^{\bar{m}}}{\sqrt{2}}$ en $x$. On a :

$$\text{(VII.2.14)} \qquad \frac{\alpha}{|\alpha|_g} = i_g(e_m) = i_g\left(\frac{\epsilon_m + \overline{\epsilon_m}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i_g\left(\frac{\partial}{\partial z^m}\right) + i_g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\bar{m}}}\right)\right]$$

Or si $X \in TM$, $X = X^k \dfrac{\partial}{\partial z^k} + X^{\bar{k}} \dfrac{\partial}{\partial z^{\bar{k}}}$, alors $g\left(\dfrac{\partial}{\partial z^m}, X\right) = X^k g(\epsilon_m, \epsilon_k) + X^{\bar{k}} g(\epsilon_m, \overline{\epsilon_k}) = X^{\bar{m}}$ d'où $i_g\left(\dfrac{\partial}{\partial z^m}\right) = dz^{\bar{m}}$. De même $i_g\left(\dfrac{\partial}{\partial z^{\bar{m}}}\right) = dz^m$, ce qui achève la vérification. ■

### VII.2.3 Quelques propriétés des métriques kählériennes

**LEMME VII.2.5** Dans une variété complexe,

$$\partial_j g^{a\bar{b}} = -g^{a\bar{s}} g^{\ell\bar{b}} \partial_j g_{\ell\bar{s}}$$

**Preuve** : S'obtient en dérivant l'égalité matricielle $(g^{a\bar{b}})^t\,(g_{a\bar{b}}) = I$ ■

**LEMME VII.2.6** Dans une variété kählérienne,

$$\Gamma^{\bar{s}}_{\bar{a}\bar{k}} = g^{\ell\bar{s}} \partial_{\bar{a}} g_{\ell\bar{k}} \quad \text{et} \quad \Gamma^{s}_{ak} = g^{s\bar{\ell}} \partial_a g_{k\bar{\ell}}$$

**Preuve** : On démontre la première identité, la deuxième s'obtient alors par conjugaison.On a $\Gamma^{\bar{s}}_{\bar{a}\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{\ell\bar{s}} (\partial_{\bar{a}} g_{\bar{k}\ell} + \partial_{\bar{k}} g_{\bar{a}\ell} - \partial_\ell g_{\bar{a}\bar{k}})$, or $g_{\bar{a}\bar{k}} = 0$ et en outre $\partial_{\bar{a}} g_{\bar{k}\ell} = \partial_{\bar{k}} g_{\bar{a}\ell}$ vu que la variété est kählérienne, d'où le résultat. ■

**LEMME VII.2.7** Dans une variété kählérienne, on a en tout point $x$, dans une carte $g$-normale centrée en $x$ :

$$R_{j\bar{k}b\bar{a}} = \partial_{j\bar{k}} g_{b\bar{a}}$$

**Preuve** : En $x$, dans une carte $g$-**normale** en $x$ i.e une carte telle que $g_{a\bar{b}} = \delta_{ab}$, $\partial_k g_{a\bar{b}} = 0$ et $\partial_{\bar{k}} g_{a\bar{b}} = 0$ en $x$, on a :

$$R_{j\bar{k}b\bar{a}} = g_{j\bar{s}} R^{\bar{s}}_{\bar{k}b\bar{a}} = g_{j\bar{s}} \left( \partial_b \Gamma^{\bar{s}}_{\bar{a}\bar{k}} - \partial_{\bar{a}} \underbrace{\Gamma^{\bar{s}}_{b\bar{k}}}_{0} + 0 \right) \tag{VII.2.15}$$

(les dérivées premières de $g$ sont nulles en $x$ pour cette carte). On obtient par conséquent que $R_{j\bar{k}b\bar{a}} = g_{j\bar{s}} \partial_b \left( g^{\ell\bar{s}} \partial_{\bar{a}} g_{\ell\bar{k}} \right) = g_{j\bar{s}} g^{\ell\bar{s}} \partial_{b\bar{a}} g_{\ell\bar{k}} = \partial_{b\bar{a}} g_{j\bar{k}}$, et on conclut par symétries du tenseur de courbure que $R_{j\bar{k}b\bar{a}} = R_{b\bar{a}j\bar{k}} = \partial_{j\bar{k}} g_{b\bar{a}}$. ■

### VII.2.4 La courbure bisectionnelle holomorphe

Soit $P \in M$. Etant donnés deux plans $J$-invariants $\pi$ et $\pi'$ dans $T_P M$, la courbure bisectionnelle holomorphe au point $P$, $H(\pi,\pi')$ est définie par (cf. [GK67]) :

$$H(\pi,\pi') = R(X, JX, X', JX') \tag{VII.2.16}$$

où $X$ (respectivement $X'$) est un vecteur unitaire du plan $\pi$ (respectivement $\pi'$). Au point $P$, dans une carte holomorphe normale, on a $[g_{i\bar{j}}]_{1\le i,j\le m} = I_m$. On désigne par $\pi^a$ et $\pi^b$ les plans suivants de $T_P M$ :

$$\pi^a = Vect(\partial_{x^a}, \partial_{y^a}) \quad \text{et} \quad \pi^b = Vect(\partial_{x^b}, \partial_{y^b}) \tag{VII.2.17}$$

Ces plans sont $J$-invariants puisque $J\partial_{x^\ell} = \partial_{y^\ell}$. On a :

$$|\partial_{x^a}|_g^2 = g(\partial_{x^a}, \partial_{x^a}) = g(\partial_a + \partial_{\bar{a}}, \partial_a + \partial_{\bar{a}}) = 2g(\partial_a, \partial_{\bar{a}}) = 2 \tag{VII.2.18}$$

donc $|\partial_{x^a}|_g = \sqrt{2}$, par conséquent :

$$\begin{aligned}
H(\pi^a, \pi^b) &= R\left(\frac{\partial_{x^a}}{\sqrt{2}}, J\left(\frac{\partial_{x^a}}{\sqrt{2}}\right), \frac{\partial_{x^b}}{\sqrt{2}}, J\left(\frac{\partial_{x^a}}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4} R(\partial_{x^a}, \partial_{y^a}, \partial_{x^b}, \partial_{y^b}) \\
&= \frac{1}{4} R\Big(\partial_a + \partial_{\bar{a}}, -i(\partial_{\bar{a}} - \partial_a), \partial_b + \partial_{\bar{b}}, -i(\partial_{\bar{b}} - \partial_b)\Big) \\
&= -\frac{1}{4} R(\partial_a + \partial_{\bar{a}}, \partial_{\bar{a}} - \partial_a, \partial_b + \partial_{\bar{b}}, \partial_{\bar{b}} - \partial_b) \\
&= -\frac{1}{4}\Big[R(\partial_a, \partial_{\bar{a}}, \partial_b, \partial_{\bar{b}}) + R(\partial_a, \partial_{\bar{a}}, \partial_{\bar{b}}, -\partial_b) + R(\partial_{\bar{a}}, -\partial_a, \partial_b, \partial_{\bar{b}}) + R(\partial_{\bar{a}}, -\partial_a, \partial_{\bar{b}}, -\partial_b)\Big] \\
&= -R_{a\bar{a}b\bar{b}}
\end{aligned} \tag{VII.2.19}$$

## VII.3 Valeurs $B$-propres et inégalité de Ky Fan généralisée

### Valeurs $B$-propres

Soit $B \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$, on impose de plus que $B$ soit définie positive. Rappelons que pour $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ fixée, pour tout $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur $B$-propre de $C$ s'il existe $x$ non nul dans $\mathbb{C}^m$ tel que $Cx = \lambda Bx$, $x$ est alors appelé vecteur $B$-propre de $C$.

**PROPOSITION VII.3.1** Si $C \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ alors :

1. Le spectre de $B^{-1}C$ (i.e le $B$-spectre de $C$) est entièrement réel.
2. La plus grande valeur propre de $B^{-1}C$ (i.e la plus grande valeur $B$-propre de $C$) est égale à $\sup_{u \neq 0} \dfrac{\langle Cu, u \rangle}{\langle Bu, u \rangle}$.
3. $B^{-1}C$ est diagonalisable.

**Preuve** : La même preuve que pour les matrices symétriques (cf. [HU09] page 32) fonctionne dans le cas des matrices hermitiennes. Le spectre de $B^{-1}C$ est constitué des racines de la fonction polynôme caractéristique $P(\lambda) = det(B^{-1}C - \lambda I_m)$, or :

$$\begin{aligned}
det(B^{-1}C - \lambda I_m) = 0 &\Leftrightarrow det(B^{-\frac{1}{2}}C - \lambda B^{\frac{1}{2}}) = 0 \\
&\Leftrightarrow det(B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}} - \lambda I_m) = 0
\end{aligned} \tag{VII.3.1}$$

donc le spectre de $B^{-1}C$ (ou encore le $B$-spectre de $C$) est le spectre de la matrice hermitienne $B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}$, il est donc entièrement réel.
De plus, par la caractérisation variationnelle de la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne, on a :

$$\begin{aligned}\lambda_{max}(B^{-1}C) = \lambda_{max}(B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}) &= \sup_{x\neq 0} \frac{< B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}x, x >}{< x, x >}\\ &= \sup_{u\neq 0} \frac{< B^{-\frac{1}{2}}Cu, B^{\frac{1}{2}}u >}{< B^{\frac{1}{2}}u, B^{\frac{1}{2}}u >} = \sup_{u\neq 0} \frac{< Cu, u >}{< Bu, u >}\end{aligned} \tag{VII.3.2}$$

ce qui prouve le second point de la proposition.
Soit finalement, $U \in U_m(\mathbb{C})$ telle que :

$$U^{-1}(B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}})U = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m) \quad \text{(ici les } \lambda_i \text{ sont les valeurs } B\text{-propres de } C) \tag{VII.3.3}$$

donc $P = B^{-\frac{1}{2}}U$ diagonalise $B^{-1}C$ :

$$\begin{aligned}P^{-1}(B^{-1}C)P = U^{-1}B^{\frac{1}{2}}(B^{-1}C)B^{-\frac{1}{2}}U &= U^{-1}B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}U\\ &= diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)\end{aligned} \tag{VII.3.4}$$

■

Remarque : – De même que dans le cas symétrique, si $C$ est semi-définie positive (resp. définie positive), il en est de même de $B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}$, et le spectre de $B^{-1}C$ (i.e le $B$-spectre de $C$) est alors constitué de réels $\geq 0$ (resp. $> 0$).
- Il revient au même dans la preuve de la proposition précédente de considérer $B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}$ ou bien la réduction de la forme quadratique associée à $C$ dans l'espace hermitien $(\mathbb{C}^m, <.,.>_B)$ avec $< u, v >_B := < Bu, v >$.

**Inégalité de Ky Fan généralisée**

On expose ici une généralisation d'une inégalité dite de Ky Fan (cf. [BL00] et [BV04]) en termes de valeurs $B$-propres qu'on a été amené à prouver dans le cadre de notre exploration des fonctions $B$-spectrales (cf. Théorème VII.4.2). La preuve qu'on présente ici est une généralisation de la preuve suggérée par [BL00] (voir pages 17-18 et exercice 12 page 20). Cette preuve fait appel aux lemmes suivants :

**THÉORÈME VII.3.1 (*Birkhoff*)** Toute matrice **bistochastique** est une combinaison convexe de matrices de permutation.

**PROPOSITION VII.3.2 (*Hardy-Littlewood-Polya [HLP94]*)** Pour tout couple de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^m$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$^t x y \leq {}^t[x][y]$$

où ici $[x]$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^m$ ayant les mêmes composantes que le vecteur $x$ ordonnées dans l'ordre décroissant (i.e $[x]_1 \geq \ldots \geq [x]_m$).

Voici l'énoncé de l'inégalité de Ky Fan généralisée qu'on démontre :

**THÉORÈME VII.3.2** (***J., Inégalité de Ky Fan généralisée***) Pour toute matrice hermitienne définie positive $B$ d'ordre $m$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\forall C, S \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C}), \quad tr(CS) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(CS) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_{B,i}(C)\lambda_{B^{-1},i}(S)$$

où $\lambda_{B,1}(C) \geq \ldots \geq \lambda_{B,m}(C)$ désignent les valeurs $B$-propres de $C$ et $\lambda_{B^{-1},1}(S) \geq \ldots \geq \lambda_{B^{-1},m}(S)$ désignent les valeurs $B^{-1}$-propres de $S$.

**Preuve** : Soit $B$ une matrice hermitienne d'ordre $m$ définie positive fixée. Soient $C, S \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$. Par la précédente sous-section sur les valeurs $B$-propres, on sait qu'il existe deux matrices $U_1, U_2 \in U_m(\mathbb{C})$ et deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$U_1^{-1}(B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}})U_1 = diag(x) \quad \text{avec} \quad [x] = (\lambda_{B,1}(C), \ldots, \lambda_{B,m}(C)) \tag{VII.3.5}$$

$$U_2^{-1}(B^{\frac{1}{2}}SB^{\frac{1}{2}})U_2 = diag(y) \quad \text{avec} \quad [y] = (\lambda_{B^{-1},1}(S), \ldots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \tag{VII.3.6}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
tr(CS) &= tr(B^{\frac{1}{2}}U_1 diag(x)U_1^{-1}B^{\frac{1}{2}} \times B^{-\frac{1}{2}}U_2 diag(y)U_2^{-1}B^{-\frac{1}{2}}) \\
&= tr(diag(x)U_1^{-1}U_2 diag(y)U_2^{-1}B^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}U_1) \\
&= tr(diag(x)U^{-1}diag(y)U) \quad \text{avec} \quad U = U_2^{-1}U_1 \in U_m(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

(VII.3.7)

$$= \ll diag(x), U^{-1}diag(y)U \gg \quad \text{où } \ll .,. \gg \text{ désigne le produit de Schur (cf. (VII.4.7))}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
tr(CS) &= tr(diag(x)^t\overline{U}diag(y)U) = \sum_{i,j} diag(x)_{ij}({}^t\overline{U}diag(y)U)_{ji} \\
&= \sum_i x_i({}^t\overline{U}diag(y)U)_{ii} = \sum_i x_i\left(\sum_j({}^t\overline{U}diag(y))_{ij}U_{ji}\right) \\
&= \sum_i x_i\left(\sum_j(\sum_s \overline{U}_{si}diag(y)_{sj})U_{ji}\right) = \sum_{i,j} x_i(\overline{U}_{ji}y_j)U_{ji} \\
&= \sum_{i,j} |U_{ji}|^2 x_i y_j \\
&= {}^t xZy \quad \text{avec} \quad Z = (Z_{ij})_{1\leq i,j\leq m} = (|U_{ji}|^2)_{1\leq i,j\leq m}
\end{aligned} \tag{VII.3.8}$$

La matrice $Z$ est bistochastique (i.e à coefficients $\geq 0$, et toutes ses lignes et colonnes sont de somme 1) car la matrice $U$ est unitaire, donc par le théorème de Birkhoff VII.3.1, on sait que $Z$ est une combinaison convexe de matrices de permutation :

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \beta_i P_i, \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1, \quad P_i \text{ matrice de permutation} \tag{VII.3.9}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} tr(CS) &= {}^t x Z y = {}^t x (\sum_{i=1}^{N} \beta_i P_i) y = \sum_{i=1}^{N} \beta_i {}^t x P_i y \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \beta_i {}^t [x][P_i y] \quad \text{par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Polya (proposition VII.3.2)} \end{aligned} \tag{VII.3.10}$$

Or $[P_i y] = [y]$ pour toute matrice de permutation et $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1$, d'où le résultat :

$$tr(CS) \leq {}^t [x][y] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{B,i}(C) \lambda_{B^{-1},i}(S) \tag{VII.3.11}$$

■

## VII.4 Concavité

### VII.4.1 Critère de concavité d'une fonction $F : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

Soit $U$ un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}, (z_1, \dots, z_n) \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ une fonction de classe $C^2$. On note $z_j = x_j + i y_j$, $x_j \in \mathbb{R}$, $y_j \in \mathbb{R}$. On voit plutôt $f$ comme fonction en la variable $(u_1, \dots, u_{2n}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in U \subset \mathbb{R}^{2n}$.
La fonction $f$ étant de classe $C^2$, sa concavité est équivalente à la condition suivante :

$$\forall z \in U, \quad \forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \quad D_{\gamma\gamma} f(z) = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(z) \gamma_i \gamma_j \leq 0 \tag{$*$}$$

Si $\xi \in \mathbb{C}^n$ on pose :

$$D_\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \overline{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tag{VII.4.1}$$

Soit $z \in U$, on a :

$$D_\xi f(z) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) + \overline{\xi_j}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z)$$
$$= Df_z.\xi \qquad \text{où} \quad Df_z \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$$
$$= \sum_{j=1}^n \xi_{j,1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) + \xi_{j,2}\frac{\partial f}{\partial y_j}(z) \quad \text{où} \quad \xi_j = \xi_{j,1} + i\xi_{j,2}$$
$$= D_{\tilde{\xi}} f(z) \quad \text{où} \quad \tilde{\xi} = (\xi_{1,1}, ..., \xi_{n,1}, \xi_{1,2}, ..., \xi_{n,2}) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{VII.4.2}$$

Ainsi :

$$D_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} f(z) = D_{\xi\xi} f(z)$$
$$= \sum_{i,j=1}^n f_{i\bar{j}}\xi_i\overline{\xi_j} + \sum_{i,j=1}^n f_{\bar{i}j}\overline{\xi_i}\xi_j + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i,j=1}^n f_{\bar{i}\bar{j}}\overline{\xi_i\xi_j}$$
$$= 2\sum_{i,j=1}^n f_{i\bar{j}}\xi_i\overline{\xi_j} + 2\Re\left(\sum_{i,j=1}^n f_{ij}\xi_i\xi_j\right) \tag{VII.4.3}$$

où on note $f_{ij} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}$, $f_{i\bar{j}} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$...etc. Par conséquent la condition de concavité de la fonction $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ s'écrit :

$$(**) \qquad \forall z \in U, \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^n \quad \sum_{i,j=1}^n f_{i\bar{j}}(z)\xi_i\overline{\xi_j} + \Re\left(\sum_{i,j=1}^n f_{ij}(z)\xi_i\xi_j\right) \le 0$$

En particulier, soit $F : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ où $\mathbb{C}^{n\times n}$ désigne les matrices carrées complexes hermitiennes de taille n. On note $[r_{i\bar{j}}]_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la variable de $F$, $F_{i\bar{j}} := \dfrac{\partial F}{\partial r_{i\bar{j}}}$ et $F_{i\bar{j},k\bar{\ell}} := \dfrac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}}\partial r_{k\bar{\ell}}}$. La fonction $F$ est concave si et seulement si :

$\forall r = [r_{i\bar{j}}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall \zeta = [\zeta_{i\bar{j}}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$S(\zeta)(r) := \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}}\partial \overline{r_{k\bar{\ell}}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\overline{\zeta_{k\bar{\ell}}} + \Re\left[\sum_{i,j,k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}}\partial r_{k\bar{\ell}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{k\bar{\ell}}\right] \le 0 \tag{VII.4.4}$$

**LEMMEVII.4.1**

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{r_{k\bar{\ell}}}} = \frac{\partial F}{\partial r_{\ell\bar{k}}}$$

**Preuve** : On note $r_{\ell\bar{k}} = x_{\ell k} + i y_{\ell k}$ avec $x_{\ell k}, y_{\ell k} \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\partial F}{\partial r_{\ell\bar{k}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_{\ell k}} - i\dfrac{\partial F}{\partial y_{\ell k}}\right)$ par définition. Or $r_{k\bar{\ell}} = \overline{r_{\ell\bar{k}}} = x_{\ell k} - i y_{\ell k} = x'_{\ell k} + i y'_{\ell k}$ d'où $\dfrac{\partial F}{\partial \overline{r_{k\bar{\ell}}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'_{\ell k}} + i\dfrac{\partial F}{\partial y'_{\ell k}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_{\ell k}} - i\dfrac{\partial F}{\partial y_{\ell k}}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial r_{\ell\bar{k}}}$. ■

Ainsi $\displaystyle\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}} \overline{\partial r_{k\bar{\ell}}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\overline{\zeta_{k\bar{\ell}}} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}} \partial r_{\ell\bar{k}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{\ell\bar{k}} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}} \partial r_{k\bar{\ell}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{k\bar{\ell}}$,
ce qui prouve au passage que $\displaystyle\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}} \partial r_{k\bar{\ell}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{k\bar{\ell}} \in \mathbb{R}$, d'où :

(VII.4.5)
$$S(\zeta)(r) = 2 \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{i\bar{j}} \partial r_{k\bar{\ell}}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{k\bar{\ell}}$$

On déduit donc qu'une fonction $F : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ est concave si et seulement si :

(VII.4.6)
$$\forall r = [r_{i\bar{j}}]_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \forall \zeta = [\zeta_{i\bar{j}}]_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} F_{i\bar{j},k\bar{\ell}}(r)\zeta_{i\bar{j}}\zeta_{k\bar{\ell}} \le 0$$

### VII.4.2 Critère de concavité sur les lignes

**THÉORÈME VII.4.1 (*Critère de concavité sur les lignes, cf.[BV04]p.81*)** Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa restriction à toute ligne qui intersecte son domaine est convexe. En d'autres termes, une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x \in dom\, f$ (le domaine de définition de $f$) et pour tout $v$, la fonction $f_{x,v}(t) = f(x+tv)$ est convexe sur son domaine de définition $\{t \in \mathbb{R} / x + tv \in dom\, f\}$.

### VII.4.3 Concavité de $u \circ \lambda_B$

On a démontré au chapitre II et d'une façon élémentaire (cf. proposition II.4.1) la concavité de la fonction $F_k = \ln \sigma_k \lambda : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \subset \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ sur $\lambda^{-1}(\Gamma_k)$.
On montre dans cette section la concavité des fonctions $u \circ \lambda$ et plus généralement $u \circ \lambda_B$ lorsque $u$ satisfait certaines conditions (voir le théorème VII.4.2), ce qui fournit en particulier la concavité des fonctions $F_k = \ln \sigma_k \lambda$ (corollaire VII.4.30) et plus généralement $\ln \sigma_k \lambda_B$ (corollaire VII.4.29).

La preuve exposée ici est plus simple que celle de [CNS85] page 277. La présente preuve est basée sur la théorie des fonctions spectrales et la conjugaison de Legendre-Fenchel, il s'agit d'une généralisation de la preuve du problème VII.20 du recueil d'exercices d'optimisation et d'analyse convexe de J-B. Hiriart-Urruty [HU09] page 300 sur l'espace des matrices réelles symétriques.
Soit $E := \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre $m$ hermitiennes. $E$ est structuré en **espace euclidien** à l'aide du produit scalaire :

(VII.4.7)
$$\ll A, B \gg = tr({}^t\overline{A}B) = tr(AB) \quad \forall A, B \in E$$

Ce produit scalaire est dit **produit de Schur**. On note $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui sont convexes, semi-continues inférieurement sur $\mathbb{R}^m$, et finies en au

moins un point de $\mathbb{R}^m$.
Etant donné $u \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ symétrique et $B \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C})$ **définie positive fixée**, on définit :

$$V_u^B : E := \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$C \mapsto V_u^B(C) := u(\lambda_{B,1}(C), ..., \lambda_{B,m}(C)) \tag{VII.4.8}$$

où $\lambda_{B,1}(C) \geq \lambda_{B,2}(C) \geq ... \geq \lambda_{B,m}(C)$ désignent les **valeurs $B$-propres** de $C$. (Rappelons que pour $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$ fixée, pour tout $C \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur $B$-propre de $C$ s'il existe $x$ non nul dans $\mathbb{C}^m$ tel que $Cx = \lambda Bx$, $x$ est alors appelé vecteur $B$-propre de $C$)(voir la section : Valeurs $B$-propres et inégalité de Ky Fan généralisée, dans les Annexes).
On appellera de telles fonctions $V_u^B$, **fonctions de valeurs $B$-propres** ou **fonctions $B$-spectrales**.
Notre premier but sera de déterminer la conjuguée de $V_u^B$ en fonction de la conjuguée de $u$. Rappelons que la conjuguée ou transformée de Legendre-Fenchel de $u$ est la fonction $u^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}^m, \quad u^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \prec s, x \succ - u(x) \right\} \tag{VII.4.9}$$

$\prec .,. \succ$ désignant le produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$.

Remarque : Cette définition s'étend sans difficulté aux $u$ définies sur un espace euclidien $(E, \ll .,. \gg)$ auquel cas $u^*$ est définie sur $E^*$ représenté par $E$ via $\ll .,. \gg$.

On prouve ici le théorème important et général suivant :

**THÉORÈMEVII.4.2** (***J., Conjugaison des fonctions de valeurs $B$-propres***) Si $u \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ est symétrique alors :

1. La conjuguée $u^*$ ($\in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$) est également symétrique.
2. Les fonctions de valeurs $B$-propres $V_u^B$ et $V_{u^*}^B$ (définies comme ci-dessus) appartiennent à $\Gamma_0(E)$ avec $V_{u^*}^{B^{-1}} = (V_u^B)^*$, donc en particulier la fonction de valeurs $B$-propres $V_u^B$ est convexe semi-continue inférieurement.

**Preuve** : Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, ..., m\}$. Soit $s \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
u^*(s_{\sigma(1)}, ..., s_{\sigma(m)}) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \prec (s_{\sigma(1)}, ..., s_{\sigma(m)}), x \succ - u(x) \right\} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \prec (s_{\sigma(1)}, ..., s_{\sigma(m)}), (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \succ - u(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \right\} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \prec s, x \succ - u(x) \right\} \quad \text{par symétrie de } u \\
&= u^*(s)
\end{aligned} \tag{VII.4.10}$$

ce qui prouve que $u^*$ ($\in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$)est également symétrique.
Il est donc possible, comme cela a été fait pour $u$, de définir la fonction de valeurs $B$-propres $V^B_{u^*}$.
Pour prouver le second point du théorème VII.4.2, on montre que :

(VII.4.11) $$\forall C \in E, \quad V^B_u(C) = \sup_{S\in E} \left\{ tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\}$$

Soit $C \in E$, on commence par prouver l'inégalité $\leq$ dans (VII.4.11) : Rappelons que les valeurs $B$-propres de $C$ sont les valeurs propres de $B^{-1}C$ et sont aussi les valeurs propres de la matrice hermitienne $B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}}$ (cf. Annexes).
Soit $U \in U_m(\mathbb{C})$ telle que :

(VII.4.12) $$U(B^{-\frac{1}{2}}CB^{-\frac{1}{2}})U^{-1} = diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))$$

donc $C = B^{\frac{1}{2}}U^{-1}diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))UB^{\frac{1}{2}}$. Soit $S \in E$, on a donc :

$$\begin{aligned} tr(CS) &= tr(B^{\frac{1}{2}}U^{-1}diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))UB^{\frac{1}{2}}S) \\ &= tr(diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))UB^{\frac{1}{2}}SB^{\frac{1}{2}}U^{-1}) \qquad \text{(VII.4.13)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\sup_{S\in E} \left\{ tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\} \\ &= \sup_{S\in E} \left\{ tr(diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))UB^{\frac{1}{2}}SB^{\frac{1}{2}}U^{-1}) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\} \qquad \text{(VII.4.14)} \end{aligned}$$

or l'application $E \to E, S \mapsto UB^{\frac{1}{2}}SB^{\frac{1}{2}}U^{-1}$ est bijective. En posant $\tilde{S} = UB^{\frac{1}{2}}SB^{\frac{1}{2}}U^{-1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{S\in E} \left\{ tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\} &= \sup_{\tilde{S}\in E} \Big\{ tr(diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))\tilde{S}) \\ &\quad - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(B^{-\frac{1}{2}}U^{-1}\tilde{S}UB^{-\frac{1}{2}}), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(B^{-\frac{1}{2}}U^{-1}\tilde{S}UB^{-\frac{1}{2}})) \Big\} \qquad \text{(VII.4.15)} \end{aligned}$$

Or les valeurs $B^{-1}$-propres de $B^{-\frac{1}{2}}U^{-1}\tilde{S}UB^{-\frac{1}{2}}$ sont les valeurs propres de $U^{-1}\tilde{S}U$ donc sont les valeurs propres de $\tilde{S}$, ainsi :

(VII.4.16)
$$\sup_{S\in E} \left\{ tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\} = \sup_{\tilde{S}\in E} \left\{ tr(diag(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))\tilde{S}) - u^*(\lambda_1(\tilde{S}), \dots, \lambda_m(\tilde{S})) \right\}$$

En se restreignant aux matrices diagonales, on déduit que :

$$\sup_{S\in E} \left\{ tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \dots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \right\}$$

(VII.4.17)

$$\geq \sup_{(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_{B,i}(C)s_i - u^*(s_1, \dots, s_m) \right\} = \underbrace{u^{**}(\lambda_{B,1}(C), \dots, \lambda_{B,m}(C))}_{=u(\lambda_{B,1}(C),\dots,\lambda_{B,m}(C))=V^B_u(C) \quad \text{car } u\in\Gamma_0(\mathbb{R}^m)}$$

Prouvons à présent l'inégalité $\geq$ dans (VII.4.11) : Soient $C, S \in E$, par l'inégalité de Ky Fan généralisée (théorème VII.3.2) mise au point dans une annexe précédente, on a :

$$tr(CS) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(CS) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_{B,i}(C)\lambda_{B^{-1},i}(S)$$

donc :

$$\begin{aligned}
& tr(CS) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \ldots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \\
& \qquad \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_{B,i}(C)\lambda_{B^{-1},i}(S) - u^*(\lambda_{B^{-1},1}(S), \ldots, \lambda_{B^{-1},m}(S)) \\
& \qquad \leq \sup_{(s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_{B,i}(C)s_i - u^*(s_1,\ldots,s_m) \right\} = u^{**}(\lambda_{B,1}(C), \ldots, \lambda_{B,m}(C)) = V_u^B(C)
\end{aligned} \tag{VII.4.18}$$

Ce qui achève la preuve de l'égalité (VII.4.11). Cette égalité dit exactement que :

$$V_u^B(C) = \sup_{S\in E} \left\{ \ll C, S \gg - V_{u^*}^{B^{-1}}(S) \right\} = \left( V_{u^*}^{B^{-1}} \right)^*(C) \tag{VII.4.19}$$

Ainsi, $V_u^B = \left( V_{u^*}^{B^{-1}} \right)^*$ ce qui permet de déduire que $\underline{V_u^B \in \Gamma_0(E)}$ (elle est <u>convexe</u> semi-continue inférieurement car c'est une conjuguée, elle est en outre finie en au moins un point car $u$ l'est). La conjuguée $u^*$ étant à son tour une fonction symétrique de $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, ce dernier résultat appliqué à $u^*$ affirme que $V_{u^*}^B \in \Gamma_0(E)$ et $V_{u^*}^B = \left( V_u^{B^{-1}} \right)^*$, ce qui achève la preuve du théorème VII.4.2. ■

**COROLLAIRE VII.4.1** La fonction :

$$\begin{aligned}
& F_k^B : \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\
& C \mapsto F_k^B(C) = \begin{cases} -\ln \sigma_k\left(\lambda_B(C)\right) & \text{si } C \in \lambda_B^{-1}(\Gamma_k) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{VII.4.20}$$

$$\text{où } \lambda_B^{-1}(\Gamma_k) := \{C \in \mathscr{H}_m(\mathbb{C}) / \ \lambda_B(C) \in \Gamma_k\}, \tag{VII.4.21}$$

est <u>convexe</u> (ceci est valable pour tout entier $k \in \{1, \ldots, m\}$). (Rappelons que $B$ est une matrice hermitienne de taille $m$ définie positive fixée.)

<u>**Preuve**</u> *:* Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$, on considère la fonction :

$$\begin{aligned}
& u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\
& x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto u(x) = \begin{cases} -\ln \sigma_k(x_1, \ldots, x_m) & \text{si } x \in \Gamma_k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{VII.4.22}$$

Rappelons que $\Gamma_k$ est le cône convexe ouvert :

$$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^m / \ \forall 1 \leq j \leq k \ \sigma_j(\lambda) > 0\} \tag{VII.4.23}$$

Cette fonction $u$ est symétrique et appartient à $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, en effet :

- Elle est clairement symétrique.
- Elle est finie en au moins un point de $\mathbb{R}^m$ car $\Gamma_k$ est non vide.
- Elle est convexe, car la fonction $(\sigma_k)^{\frac{1}{k}} : \Gamma_k \to \mathbb{R}$ est concave (cf. [CNS85] page 269).
- Elle est semi-continue inférieurement. En effet, soit $c \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble :

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^m / +\infty \geq u(x) > c\} &= \{x \in \Gamma_k / u(x) > c\} \cup \{x \notin \Gamma_k / u(x) > c\}\\ &= \{x \in \Gamma_k / -\ln \sigma_k(x) > c\} \cup \left(\mathbb{R}^m \setminus \Gamma_k\right)\end{aligned} \tag{VII.4.24}$$

  Par continuité, l'ensemble $\{x \in \Gamma_k / -\ln \sigma_k(x) > c\}$ est un ouvert de $\Gamma_k$, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^m$ puisque $\Gamma_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. En outre, le cône $\Gamma_k$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^m$ (au titre de composante connexe), donc l'ensemble $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Par conséquent, $\{x \in \mathbb{R}^m / +\infty \geq u(x) > c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Ceci étant valable pour tout $c \in \mathbb{R}$, on déduit que $u$ est semi-continue inférieurement.

Ainsi, par le théorème VII.4.2 de conjugaison des fonctions de valeurs $B$-propres, on déduit que la fonction $B$-spectrale $V_u^B = F_k^B$ est <u>convexe</u>. ■

<u>Remarque</u> : La même technique permet de prouver par exemple que les fonctions

$$\begin{aligned}&V(C) := \text{plus grande valeur } B\text{-propre de } C \quad \text{et}\\ &V_s(C) := \text{somme des } s \text{ plus grandes valeurs } B\text{-propres de } C \quad \text{avec} \quad s \in \{1, \ldots, m\},\end{aligned} \tag{VII.4.25}$$

sont convexes sur $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ (ici $B$ est une matrice hermitienne de taille $m$ définie positive fixée).

**Corollaire VII.4.2** Si $\Gamma$ est un convexe fermé (non vide) symétrique de $\mathbb{R}^m$, alors l'ensemble $\lambda_B^{-1}(\Gamma) := \{C \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) / \lambda_B(C) \in \Gamma\}$ est un convexe fermé de $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$. En particulier, $\lambda_B^{-1}(\overline{\Gamma_k})$ est un convexe fermé de $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$.

<u>**Preuve**</u> : Soit $f_0 := I_\Gamma$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}f_0 := I_\Gamma : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\\ x = (x_1, \ldots, x_m) &\mapsto I_\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned} \tag{VII.4.26}$$

De par les hypothèses faites sur $\Gamma$, $f_0 \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ et est symétrique, en effet :

- Cette fonction est clairement finie en au moins un point car $\Gamma$ est non vide.
- L'inégalité $I_\Gamma(tx + (1-t)y) \leq t I_\Gamma(x) + (1-t) I_\Gamma(y)$ est vérifiée pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$ et tout $t \in [0,1]$, puisque si $x, y \in \Gamma$ alors $tx + (1-t)y \in \Gamma$ par convexité de $\Gamma$ et les deux membres de l'inégalité de convexité valent 0 dans ce cas. Par ailleurs, si $x$ ou $y$ n'appartient pas à $\Gamma$ alors le membre de droite de l'inégalité vaut $+\infty$ et l'inégalité est donc vérifiée dans ce cas aussi, ce qui prouve que $I_\Gamma$ est convexe.

- $I_\Gamma$ est semi-continue inférieurement car pour $a \in \mathbb{R}^m$ : si $a \geq 0$ alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^m \,/\, +\infty \geq I_\Gamma(x) > a\} = \mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ est ouvert car $\Gamma$ est fermé ; et si $a < 0$, $\{x \in \mathbb{R}^m \,/\, +\infty \geq I_\Gamma(x) > a\} = \mathbb{R}^m$ est ouvert aussi.

Ainsi, par le théorème de conjugaison des fonctions $B$-spectrales VII.4.2, on déduit que la fonction de valeurs $B$-propres $V_{I_\Gamma}^B \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, donc en particulier $V_{I_\Gamma}^B$ est convexe semi-continue inférieurement. Or :

$$V_{I_\Gamma}^B : \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$C \mapsto V_{I_\Gamma}^B(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } C \in \lambda_B^{-1}(\Gamma) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} = I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(C) \tag{VII.4.27}$$

Ainsi, la fonction indicatrice $I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}$ est convexe semi-continue inférieurement. Par conséquent, $\lambda_B^{-1}(\Gamma)$ est un convexe fermé (non vide) de $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$. En effet :

- $\lambda_B^{-1}(\Gamma)$ est convexe car si $C, D \in \lambda_B^{-1}(\Gamma)$ et $t \in [0,1]$, on a par convexité de $I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}$,

$$I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(tC + (1-t)D) \leq t\, \underbrace{I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(C)}_{=0} + (1-t)\underbrace{I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(D)}_{=0} \tag{VII.4.28}$$

  donc nécessairement $I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(tC + (1-t)D) = 0$ d'où $tC + (1-t)D \in \lambda_B^{-1}(\Gamma)$.
- $\lambda_B^{-1}(\Gamma)$ est fermé car l'ensemble $\{M \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) / +\infty \geq I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}(M) > 0\} = \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) \setminus \lambda_B^{-1}(\Gamma)$ est ouvert puisque $I_{\lambda_B^{-1}(\Gamma)}$ est semi-continue inférieurement.

■

Par le corollaire VII.4.1, et vu que $\lambda_B^{-1}(\Gamma_k)$ est convexe (corollaireVII.4.2), on sait donc que :

**COROLLAIREVII.4.3** La fonction :

$$-F_k^B : \lambda_B^{-1}(\Gamma_k) \to \mathbb{R}$$

$$C \mapsto F_k^B(C) = \ln \sigma_k\left(\lambda_B(C)\right) \tag{VII.4.29}$$

est <u>concave</u> (ceci est valable pour tout entier $k \in \{1, \dots, m\}$). (Rappelons que $B$ est une matrice hermitienne de taille $m$ définie positive fixée.)

Donc en particulier, pour $B = I$ on obtient :

**COROLLAIREVII.4.4** La fonction :

$$F_k = -F_k^I : \lambda^{-1}(\Gamma_k) \to \mathbb{R}$$

$$C \mapsto F_k(C) = \ln \sigma_k\left(\lambda(C)\right) \tag{VII.4.30}$$

$$\text{où } \lambda^{-1}(\Gamma_k) := \{C \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C}) / \lambda(C) \in \Gamma_k\}, \tag{VII.4.31}$$

est <u>concave</u> (ceci est valable pour tout entier $k \in \{1, \dots, m\}$).

# VII.5 Les espaces $C^r(M,\mathbb{R})$ et $C^{r,\alpha}(M)$

## VII.5.1 L'espace $C^r(M,\mathbb{R})$

Soit $(M,g)$ une variété riemannienne compacte. Pour tout entier positif $r$ on considère sur l'espace $C^r(M,\mathbb{R})$ la norme suivante (cf. [HEB97] page 213) :

$$\|f\|_{C^r(M,\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{P\in M} |\nabla^j f(P)|_g \tag{VII.5.1}$$

On définit, par ailleurs, une autre norme sur l'espace $C^r(M,\mathbb{R})$ en utilisant une partition de l'unité. Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on notera $C_0^r(\Omega,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $C^r(\Omega,\mathbb{R})$ qui sont à support compact dans $\Omega$. Si on fixe $\mathcal{R}=(U_i,\phi_i)_{1\le i\le N}$ un recouvrement fini de $M$ par des cartes et $\mathcal{P}=(\theta_i)_{1\le i\le N}$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée à ce recouvrement, alors le support de $\theta_i\circ\phi_i^{-1}$, $supp(\theta_i\circ\phi_i^{-1})$ est égal à $\phi_i(supp\,\theta_i)$ (car $\phi_i$ est un homéomorphisme et $supp\,\theta_i\subset U_i$) or $supp\,\theta_i$ est compact (car c'est un fermé de la variété compacte $M$) on en déduit alors que $\psi_i := \theta_i\circ\phi_i^{-1}\in C_0^\infty(\phi_i(U_i),\mathbb{R})$ donc que $(\theta_i f)\circ\phi_i^{-1}\in C_0^r(\phi_i(U_i),\mathbb{R})$. On posera donc pour $f\in C^r(M,\mathbb{R})$ :

$$\|f\|^{\mathcal{R},\mathcal{P}}_{C^r(M,\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{N} \|(\theta_i\circ\phi_i^{-1})\times(f\circ\phi_i^{-1})\|_{C_0^r(\phi_i(U_i),\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{N} \|(\theta_i f)\circ\phi_i^{-1}\|_{C_0^r(\phi_i(U_i),\mathbb{R})} \tag{VII.5.2}$$

où pour $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi\in C_0^r(\Omega,\mathbb{R})$,

$$\|\varphi\|_{C_0^r(\Omega,\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{|\beta|=j} \sup_{\Omega} |D^\beta\varphi| \tag{VII.5.3}$$

ce qui définit une norme sur $C^r(M,\mathbb{R})$. $(C^r(M,\mathbb{R}),\|.\|^{\mathcal{R},\mathcal{P}}_{C^r(M,\mathbb{R})})$ est un espace de Banach.(cf. [BCP68] page 379).

Remarque : L'espace vectoriel $C^r(M,\mathbb{R})$ sera toujours muni de la topologie d'espace de Fréchet Banachisable définie par la norme $\|.\|^{\mathcal{R},\mathcal{P}}_{C^r(M,\mathbb{R})}$. On note que cette topologie ne dépend pas du système $\mathcal{R},\mathcal{P}=(U_i,\phi_i,\theta_i)_{1\le i\le N}$ choisi et que cette topologie est aussi définie par la norme $\|.\|_{C^r(M,\mathbb{R})}$ défini en (VII.5.1).

## VII.5.2 L'espace $C^{r,\alpha}(M)$

Pour les espaces de Hölder, on suit les notations de Gilbarg-Trudinger (cf. [GT01] pages 53, 61 et 90). Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ non nécessairement borné, $\alpha\in]0,1]$ et $r\in\mathbb{N}$. On note $C^r(\Omega,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f:\Omega\to\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées d'ordre $\le r$ sont continues sur $\Omega$, et on note $C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f\in C^r(\Omega,\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées d'ordre $\le r$ sont bornées sur $\Omega$ et ont des prolongements continus sur $\overline{\Omega}$.

Remarque : $-\ \left\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{uniformément continues sur}\,\Omega\right\}\subset C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})\subset C^0(\Omega,\mathbb{R})$

– Lorsque $\Omega$ est borné, $\left\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{uniformément continues sur}\,\Omega\right\}=C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})\subset C^0(\Omega,\mathbb{R})$

On désigne par $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ constitué des fonctions $f\in C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ telles que :

(VII.5.4) $$\forall\beta,\ |\beta|=r\quad [D^\beta f]_{\alpha,\Omega}=\sup_{x\neq y\in\Omega}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}<+\infty$$

Et on désigne par $C^{r,\alpha}(\Omega)$ le sous-espace de $C^r(\Omega,\mathbb{R})$ constitué des fonctions $f\in C^r(\Omega,\mathbb{R})$ telles que :

(VII.5.5) $$\forall\beta,\ |\beta|=r\quad \forall K\ \text{compact de}\,\Omega\quad [D^\beta f]_{\alpha,K}=\sup_{x\neq y\in K}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}<+\infty$$

Remarque : $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})\subset C^{r,\alpha}(\Omega)$

On introduit les quantités suivantes :

(VII.5.6) $$[f]_{r,0;\Omega}=|D^r f|_{0;\Omega}=\sup_{|\beta|=r}\sup_{\Omega}|D^\beta f|\quad \text{et}\quad [f]_{r,\alpha;\Omega}=[D^r f]_{\alpha;\Omega}=\sup_{|\beta|=r}[D^\beta f]_{\alpha;\Omega}$$

On définit en premier lieu des normes (globales) sur les espaces $C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ et $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ comme suit :

(VII.5.7) $$\|f\|_{C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})}=|f|_{r;\Omega}=|f|_{r,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{r}[f]_{j,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{r}|D^j f|_{0;\Omega}=\sum_{j=0}^{r}\sup_{|\beta|=j}\sup_{\Omega}|D^\beta f|$$

(VII.5.8) $$\|f\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})}=|f|_{r,\alpha;\Omega}=|f|_{r;\Omega}+[f]_{r,\alpha;\Omega}=|f|_{r;\Omega}+[D^r f]_{\alpha;\Omega}$$

(VII.5.9) $$=\sum_{j=0}^{r}\sup_{|\beta|=j}\sup_{\Omega}|D^\beta f|+\sup_{|\beta|=r}\sup_{x\neq y\in\Omega}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

Si $\Omega$ est borné et $d=diam\,\Omega$, on dispose des normes suivantes :

(VII.5.10) $$\|f\|'_{C^r(\overline{\Omega},\mathbb{R})}=|f|'_{r;\Omega}=\sum_{j=0}^{r}d^j\ |D^j f|_{0;\Omega}=\sum_{j=0}^{r}d^j\ \sup_{|\beta|=j}\sup_{\Omega}|D^\beta f|$$

(VII.5.11) $$\|f\|'_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})}=|f|'_{r,\alpha;\Omega}=|f|'_{r;\Omega}+d^{r+\alpha}[f]_{r,\alpha;\Omega}=|f|'_{r;\Omega}+d^{r+\alpha}[D^r f]_{\alpha;\Omega}$$

(VII.5.12) $$=\sum_{j=0}^{r}d^j\ \sup_{|\beta|=j}\sup_{\Omega}|D^\beta f|+d^{r+\alpha}\sup_{|\beta|=r}\sup_{x\neq y\in\Omega}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

On dispose par ailleurs de normes intérieures. Si $\Omega$ est un ouvert propre de $\mathbb{R}^n$ (i.e $\Omega$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$), $d_x = dist(x,\partial\Omega)$ et $d_{x,y} = \min(d_x,d_y)$. On définit les quantités suivantes :

(VII.5.13) $$[f]^*_{r,0;\Omega} = [f]^*_{r;\Omega} = \sup_{|\beta|=r}\sup_{x\in\Omega} d_x^r\ |D^\beta f(x)| \quad r=0,1,2.. \quad \text{pour} f \in C^r(\Omega,\mathbb{R})$$

(VII.5.14) $$[f]^*_{r,\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=r}\sup_{x\neq y\in\Omega} d_{x,y}^{r+\alpha}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha} \quad \text{pour} f \in C^{r,\alpha}(\Omega)$$

On définit à partir de là les normes intérieures suivantes :

(VII.5.15) $$|f|^*_{r;\Omega} = |f|^*_{r,0;\Omega} = \sum_{j=0}^r [f]^*_{j;\Omega} = \sum_{j=0}^r \sup_{|\beta|=j}\sup_{x\in\Omega} d_x^j\ |D^\beta f(x)| \quad r=0,1,2..$$

Ceci est une norme sur le sous-espace de $C^r(\Omega,\mathbb{R})$ constitué de fonctions $f\in C^r(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant $|f|^*_{r;\Omega} < +\infty$.

(VII.5.16) $$|f|^*_{r,\alpha;\Omega} = |f|^*_{r;\Omega} + [f]^*_{r,\alpha;\Omega}$$

(VII.5.17) $$= \sum_{j=0}^r \sup_{|\beta|=j}\sup_{x\in\Omega} d_x^j\ |D^\beta f(x)| + \sup_{|\beta|=r}\sup_{x\neq y\in\Omega} d_{x,y}^{r+\alpha}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

C'est une norme sur le sous-espace de $C^{r,\alpha}(\Omega)$ constitué de fonctions $f\in C^{r,\alpha}(\Omega)$ vérifiant $|f|^*_{r,\alpha;\Omega} < +\infty$.

– Si $\Omega$ est borné et $d = diam\,\Omega$ alors

(VII.5.18) $$|f|^*_{r,\alpha;\Omega} \leq \max(1,d^{r+\alpha})\ |f|_{r,\alpha;\Omega}$$

– Si $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $\delta = dist(\Omega',\partial\Omega)$ alors

(VII.5.19) $$\min(1,\delta^{r+\alpha})\ |f|_{r,\alpha;\Omega'} \leq |f|^*_{r,\alpha;\Omega}$$

Quand on contrôle la norme intérieure $*$ sur $\Omega$, on contrôle la norme globale sur tout ouvert intérieur à $\Omega$. (C'est pour cela que les normes $*$ sont dites intérieures).

On dispose de normes intérieures plus générales. Soit $\nu\in\mathbb{R}$. Toujours pour $\Omega$ un ouvert propre de $\mathbb{R}^n$, $d_x = dist(x,\partial\Omega)$, on introduit les quantités suivantes :

(VII.5.20) $$[f]^{(\nu)}_{r,0;\Omega} = [f]^{(\nu)}_{r;\Omega} = \sup_{|\beta|=r}\sup_{x\in\Omega} d_x^{r+\nu}\ |D^\beta f(x)| \quad r=0,1,2.. \quad \text{pour} f \in C^r(\Omega,\mathbb{R})$$

(VII.5.21) $$[f]^{(\nu)}_{r,\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=r}\sup_{x\neq y\in\Omega} min\left(d_x^{r+\alpha+\nu}, d_y^{r+\alpha+\nu}\right)\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha} \quad \text{pour} f \in C^{r,\alpha}(\Omega)$$

On définit à partir de là les normes intérieures suivantes :

(VII.5.22) $$|f|_{r;\Omega}^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{r} [f]_{j;\Omega}^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{r} \sup_{|\beta|=j} \sup_{x\in\Omega} d_x^{j+\nu} |D^\beta f(x)| \quad r = 0,1,2..$$

Ceci est une norme sur le sous-espace de $C^r(\Omega,\mathbb{R})$ constitué de fonctions $f \in C^r(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant $|f|_{r;\Omega}^{(\nu)} < +\infty$.

(VII.5.23) $$|f|_{r,\alpha;\Omega}^{(\nu)} = |f|_{r;\Omega}^{(\nu)} + [f]_{r,\alpha;\Omega}^{(\nu)}$$

(VII.5.24) $$= \sum_{j=0}^{r} \sup_{|\beta|=j} \sup_{x\in\Omega} d_x^{j+\nu} |D^\beta f(x)|$$

$$+ \sup_{|\beta|=r} \sup_{x\neq y\in\Omega} min\left(d_x^{r+\alpha+\nu}, d_y^{r+\alpha+\nu}\right) \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

C'est une norme sur le sous-espace de $C^{r,\alpha}(\Omega)$ constitué de fonctions $f \in C^{r,\alpha}(\Omega)$ vérifiant $|f|_{r,\alpha;\Omega}^{(\nu)} < +\infty$.

Remarque : Pour $\nu = 0$, on retrouve les normes intérieures étoile : $|\,.\,|^{(0)} = |\,.\,|^*$ et $[.]^{(0)} = [.]^*$.

$(C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}), \|.\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})})$ est un espace de Banach. On note $C_0^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions de $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ qui sont à support compact dans $\Omega$, et on note $C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ qui ont à support compact dans $\Omega$.

On considère à présent $(M,g)$ une variété riemannienne compacte. On désignera par $C^{r,\alpha}(M)$ le sous-espace vectoriel de $C^r(M,\mathbb{R})$ formé des fonctions $f \in C^r(M,\mathbb{R})$ telles que :

(VII.5.25)
$$\forall (U,\phi) \text{carte de } M, \quad f\circ\phi^{-1} \in C^r(\phi(U),\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \psi\times(f\circ\phi^{-1}) \in C_0^{r,\alpha}(\phi(U)) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\phi(U),\mathbb{R})$$

Si on fixe $\mathscr{R} = (U_i,\phi_i)_{1\le i\le N}$ un recouvrement fini de $M$ par des cartes et $\mathscr{P} = (\theta_i)_{1\le i\le N}$ une partition de l'unité de classe $C^\infty$ subordonnée à ce recouvrement, alors le support de $\theta_i\circ\phi_i^{-1}$, $supp(\theta_i\circ\phi_i^{-1})$ est égal à $\phi_i(supp\,\theta_i)$ or $supp\,\theta_i$ est compact, on en déduit alors que $\psi_i := \theta_i\circ\phi_i^{-1} \in C_0^\infty(\phi_i(U_i),\mathbb{R})$. On posera donc pour $f \in C^{r,\alpha}(M)$ :

(VII.5.26) $$\|f\|_{C^{r,\alpha}(M)}^{\mathscr{R},\mathscr{P}} = \sum_{i=1}^{N} \|(\theta_i\circ\phi_i^{-1})\times(f\circ\phi_i^{-1})\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\phi_i(U_i)})} = \sum_{i=1}^{N} \|(\theta_i f)\circ\phi_i^{-1}\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\phi_i(U_i)})}$$

ce qui définit une norme sur $C^{r,\alpha}(M)$. $(C^{r,\alpha}(M), \|.\|_{C^{r,\alpha}(M)}^{\mathscr{R},\mathscr{P}})$ est un espace de Banach.(cf. [BCP68] page 473).

Remarque : L'espace vectoriel $C^{r,\alpha}(M)$ sera toujours muni de la topologie d'espace de Fréchet Banachisable définie par la norme $\|.\|_{C^{r,\alpha}(M)}^{\mathscr{R},\mathscr{P}}$. On note que cette topologie ne dépend pas du système $\mathscr{R},\mathscr{P} = (U_i,\phi_i,\theta_i)_{1\le i\le N}$ choisi et que sur $C^{0,\alpha}(M)$, cette topologie est aussi définie par la norme :

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(M)'} = \|f\|_{\infty,M} + \sup_{x\neq y\in M} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_g(x,y)^\alpha} \tag{VII.5.27}$$

## VII.6 Estimées de Hölder pour les dérivées secondes

Dans cette section, on expose et on détaille les pages 453-456 de [GT01] pour prouver le théorème VII.6.1. Ce premier théorème nous servira à déduire une estimée $C^{2,\beta}$ à partir de l'estimée $C^2$ pour l'équation de Calabi-Yau.

Soit $\Omega$ un domaine (i.e ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$.
On s'intéresse ici aux équations de la forme :

$$F\left(D^2u\right)=f \quad F\in C^2(\mathbb{R}^{n\times n},\mathbb{R}) \quad f\in C^2(\Omega,\mathbb{R}) \quad u\in C^4(\Omega,\mathbb{R}) \tag{$E$}$$

Ici $\mathbb{R}^{n\times n}$ désigne les matrices carrées réelles symétriques de taille $n$. On note $F_{ij} := \dfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}$ et $F_{ij,ks} := \dfrac{\partial^2 F}{\partial r_{ij}\partial r_{ks}}$.

On suppose que l'équation $(E)$ admet des solutions. Soit $u$ une solution fixée de $(E)$, on suppose que la fonction $F$ vérifie les deux hypothèses suivantes :

1. $F$ est uniformément elliptique par rapport à $u$ i.e il existe deux réels $\lambda,\Lambda>0$ tels que :

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall x\in\Omega \quad \lambda|\xi|^2\leq F_{ij}\left(D^2u(x)\right)\xi_i\xi_j\leq\Lambda|\xi|^2 \tag{VII.6.1}$$

2. $F$ est concave par rapport à $u$ i.e $F$ est une fonction concave sur l'image de $D^2u$. Vu que $F$ est de classe $C^2$, cette condition de concavité est équivalente à :

$$\forall\zeta\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \forall x\in\Omega \quad F_{ij,ks}\left(D^2u(x)\right)\zeta_{ij}\zeta_{ks}\leq 0 \tag{VII.6.2}$$

Soit $\gamma\in\mathbb{R}^n$, $\|\gamma\|=1$. On différentie l'équation $(E)$ deux fois dans la direction $\gamma$ :

$$\begin{aligned} D_\gamma f &= D_\gamma\left(F(D^2u)\right)=F_{ij}(D^2u)D_\gamma(D_{ij}u)=F_{ij}(D^2u)D_{ij\gamma}u\\ D_{\gamma\gamma}f &= D_\gamma\left(F_{ij}(D^2u)D_{ij\gamma}u\right)\\ &= F_{ij}(D^2u)D_{ij\gamma\gamma}u+F_{ks,ij}(D^2u)D_{ks\gamma}u\,D_{ij\gamma}u \end{aligned} \tag{VII.6.3}$$

Or $F_{ks,ij}(D^2u)D_{ks\gamma}u\,D_{ij\gamma}u\leq 0$ par concavité de $F$, donc :

$$D_{\gamma\gamma}f\leq F_{ij}\left(D^2u\right)D_{ij}w \quad \text{sur } \Omega \quad \text{où} \quad w=D_{\gamma\gamma}u \tag{VII.6.4}$$

Soient $B_R$, $B_{2R}$ et $B_{3R}$ trois boules ouvertes concentriques de l'ouvert $\Omega$ de rayons respectifs $R$, $2R$ et $3R$, et soient $M_s := \sup_{B_{sR}} w \quad m_s := \inf_{B_{sR}} w \quad s = 1,2$. On a donc :

$$F_{ij}(D^2u)D_{ij}(M_2 - w) \leq -D_{\gamma\gamma}f \quad \text{sur } \Omega \tag{VII.6.5}$$

**LEMMEVII.6.1** (***Inégalité faible de Harnack, par Krylov et Safonov***) Soit $L$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 défini sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$Lv = a^{ij}(x)D_{ij}v + b^i(x)D_iv + c(x)v \quad , \quad a^{ij} = a^{ji}$$

- uniformément elliptique i.e il existe des réels $\lambda, \Lambda > 0$ tels que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega \quad \lambda \mid \xi \mid^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda \mid \xi \mid^2$
- à coefficients $b$ et $c$ bornés sur l'ouvert $\Omega$, ce qui nous permet de fixer des réels $\eta, \nu > 0$ tels que $\dfrac{\Lambda}{\lambda} \leq \eta$ et $\left(\dfrac{\mid b \mid}{\lambda}\right)^2, \dfrac{\mid c \mid}{\lambda} \leq \nu$.

Soit $v \in H_2^n(\Omega)$ une fonction positive ou nulle sur une boule ouverte $B_{2R}(y) \subset \Omega$ et vérifiant $Lv \leq f_0$ sur $\Omega$ pour une certaine fonction $f_0 \in L^n(\Omega)$. On note $B_{2R} = B_{2R}(y)$, $B_R = B_R(y)$ et $\mid B_R \mid$ le volume de la boule ouverte $B_R$. Alors il existe des constantes $p, C > 0$ dépendant de $n$, $\eta$ et $\nu R^2$ tels que

$$\left(\frac{1}{\mid B_R \mid}\int_{B_R} v^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\inf_{B_R} v + \frac{R}{\lambda}\|f_0\|_{L^n(B_{2R})}\right)$$

**Preuve** : Voir le théorème 9.22 à la page 246 du livre [GT01] pour la preuve. ■

On considère l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 : $Lv = F_{ij}(D^2u)(x)D_{ij}v$ défini sur l'ouvert $B_{3R}$. $L$ est uniformément elliptique car $F$ l'est par rapport à $u$ :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in B_{3R} \quad \lambda \mid \xi \mid^2 \leq F_{ij}(D^2u)(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda \mid \xi \mid^2 \tag{VII.6.6}$$

et les coefficients $b$ et $c$ de $L$ sont nuls. Par ailleurs, $M_2 - w \in H_2^n(B_{3R})$ car $M_2 - w$ est de classe $C^2$ sur le compact $\overline{B_{3R}}$, $M_2 - w$ est positive ou nulle sur la boule $B_{2R} \subset B_{3R}$, $D_{\gamma\gamma}f \in L^n(B_{3R})$ car elle est continue sur le compact $\overline{B_{3R}}$ et $L(M_2 - w) \leq -D_{\gamma\gamma}f$ sur $B_{3R}$ . Donc par le lemme VII.6.1 (Inégalité faible de Harnack) on déduit l'existence de constantes $p, C_0 > 0$ dépendant de $n$ et $\dfrac{\Lambda}{\lambda}$ tels que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mid B_R \mid}\int_{B_R} (M_2 - w)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_0\left(\inf_{B_R}(M_2 - w) + \frac{R}{\lambda}\|D_{\gamma\gamma}f\|_{L^n(B_{2R})}\right) \\ &\leq C_1\left(M_2 - M_1 + R\|D_{\gamma\gamma}f\|_{L^n(B_{2R})}\right)\end{aligned} \tag{VII.6.7}$$

$C_1$ dépend de $n$, $\lambda$ et $\Lambda$. On considère $|D^2 f|_{0;B_{2R}} := \sup_{|\beta|=2} \sup_{B_{2R}} |D^\beta f|$ (cette norme est finie car $f$ est de classe $C^2$ sur le compact $\overline{B_{2R}}$ ).

$$
\begin{aligned}
\|D_{\gamma\gamma} f\|_{L^n(B_{2R})} &= \|\sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j D_{ij} f\|_{L^n(B_{2R})} \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} |\gamma_i||\gamma_j| \|D_{ij} f\|_{L^n(B_{2R})} \\
&\le \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\gamma_i||\gamma_j|\right) |D^2 f|_{0;B_{2R}} |B_{2R}|^{\frac{1}{n}} \\
&\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} |\gamma_i|^2 + |\gamma_j|^2\right) 2R\ |B_1|^{\frac{1}{n}} |D^2 f|_{0;B_{2R}} \\
&\le n \times 2R\ |B_1|^{\frac{1}{n}} |D^2 f|_{0;B_{2R}} \quad \text{car } \|\gamma\| = 1
\end{aligned}
\tag{VII.6.8}
$$

Ainsi $\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_R} (M_2 - w)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C_1 |B_1|^{\frac{1}{p}} \left(M_2 - M_1 + 2n\ |B_1|^{\frac{1}{n}}\ R^2\ |D^2 f|_{0;B_{2R}}\right)$ donc :

$$
R^{\frac{-n}{p}} \|M_2 - w\|_{L^p(B_R)} \le C_2 \left(M_2 - M_1 + R^2\ |D^2 f|_{0;B_{2R}}\right)
\tag{VII.6.9}
$$

$C_2$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$.

Par ailleurs, si $x, y \in \Omega$ on a par concavité de $F$ par rapport à $u$, $F\left(D^2 u(x)\right) - F\left(D^2 u(y)\right) \le DF\left(D^2 u(y)\right).\left(D^2 u(x) - D^2 u(y)\right)$ c'est-à-dire :

$$
f(x) - f(y) \le \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}\left(D^2 u(y)\right) \times \left(D_{ij} u(x) - D_{ij} u(y)\right)
\tag{VII.6.10}
$$

**LEMMEVII.6.2 (*Résultat matriciel*)** Si $0 < \lambda < \Lambda$, on note $S[\lambda, \Lambda]$ l'ensemble des matrices définies positives de $\mathbb{R}^{n\times n}$ (i.e des matrices carrées réelles symétriques définies positives de taille $n$) dont les valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[\lambda, \Lambda]$. Alors, il existe un nombre fini de vecteurs unitaires $\gamma_1, ..., \gamma_N \in \mathbb{R}^n$ et des nombres $0 < \lambda^* < \Lambda^*$ ; $\gamma_1, ..., \gamma_N, \lambda^*, \Lambda^*$ ne dépendant que de $n$, $\lambda$ et $\Lambda$ ; tels que toute matrice $A = [a^{ij}]_{1\le i,j\le n} \in S[\lambda, \Lambda]$ s'écrit de la forme :

$$
a^{ij} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \gamma_{ki} \gamma_{kj} \quad \text{où} \quad \lambda^* \le \beta_k \le \Lambda^*
$$

et $(\gamma_{ki})_{1\le i\le n}$ désignent les coordonnées du vecteur $\gamma_k$ dans la base canonique $e_1, ..., e_n$ de $\mathbb{R}^n$. De plus, on peut choisir que les directions $\gamma_1, ..., \gamma_N$ contiennent les directions coordonnées $e_i, i = 1, .., n$ et les directions $\frac{e_i \pm e_j}{\sqrt{2}}, i < j$.

**Preuve** : Voir Proof of the Lemma 17.13 à la page 462 de [GT01] pour la preuve de ce résultat matriciel. ■

Appliquons ce lemme point par point à la matrice $[F_{ij}(D^2u)]_{1\le i,j\le n}$. Soit $x\in\Omega$, la matrice $[F_{ij}(D^2u(x))]_{1\le i,j\le n}$ est réelle symétrique. Si $\alpha$ est une valeur propre de $[F_{ij}(D^2u(x))]_{1\le i,j\le n}$ et $\xi$ un vecteur propre associé i.e un vecteur non nul tel que $\sum_{j=1}^{n} F_{ij}(D^2u(x))\xi_j=\alpha\xi_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, alors on déduit par uniforme ellipticité de $F$ que :

$$\lambda\,|\,\xi\,|^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}F_{ij}\big(D^2u(x)\big)\xi_j\right)\xi_i=\alpha\,|\,\xi\,|^2\le\Lambda\,|\,\xi\,|^2 \tag{VII.6.11}$$

Ainsi $0<\lambda\le\alpha\le\Lambda$, en particulier la matrice $[F_{ij}(D^2u(x))]_{1\le i,j\le n}$ est définie positive. On conclut donc que $[F_{ij}(D^2u(x))]_{1\le i,j\le n}\in S[\lambda,\Lambda]$ . Par le lemme précédent, il existe des vecteurs unitaires $\gamma_1,\dots,\gamma_N\in\mathbb{R}^n$ et des nombres $0<\lambda^*<\Lambda^*$ ne dépendant que de $n$, $\lambda$ et $\Lambda$ tels que :

$$\forall x\in\Omega\quad F_{ij}\big(D^2u(x)\big)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(x)\gamma_{ki}\gamma_{kj}\qquad 0<\lambda^*\le\beta_k(x)\le\Lambda^* \tag{VII.6.12}$$

Ainsi (VII.6.10) s'écrit :

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)\gamma_{ki}\gamma_{kj}\Big(D_{ij}u(y)-D_{ij}u(x)\Big)\le f(y)-f(x) \tag{VII.6.13}$$

Or $\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ki}\gamma_{kj}D_{ij}u=D_{\gamma_k\gamma_k}u$ donc :

$$\sum_{k=1}^{N}\beta_k(y)\Big(w_k(y)-w_k(x)\Big)\le f(y)-f(x)\quad\text{où}\quad w_k:=D_{\gamma_k\gamma_k}u \tag{VII.6.14}$$

On pose $M_{sk}:=\sup\limits_{B_{sR}}w_k$ et $m_{sk}:=\inf\limits_{B_{sR}}w_k$ $\quad s=1,2\quad k=1,\dots,N$. Chaque fonction $w_k$ satisfait (VII.6.9) ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_R}(M_{2k}-w_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le C_2\Big(M_{2k}-M_{1k}+R^2\,|\,D^2f\,|_{0;B_{2R}}\Big) \tag{VII.6.15}$$

$C_2$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|\,B_1\,|$ ; elle est par ailleurs indépendante de $k$.

Soit $q \in \{1,...,N\}$ fixé, en additionnant les inégalités (VII.6.15) pour $k \neq q$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{R^n}\int_{B_R}\Big(\sum_{k\neq q}(M_{2k}-w_k)\Big)^p\right]^{\frac{1}{p}} &= R^{\frac{-n}{p}}\,\|\sum_{k\neq q}(M_{2k}-w_k)\|_{L^p(B_R)}\\
&\leq \sum_{k\neq q} R^{\frac{-n}{p}}\,\|M_{2k}-w_k\|_{L^p(B_R)}\\
&\leq \sum_{k\neq q} C_2\quad\Big(M_{2k}-M_{1k}+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)\\
&\leq C_2\quad\Big(\sum_{k\neq q}(M_{2k}-M_{1k})+(N-1)R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)\\
&\leq C_3\quad\Big(\sum_{k\neq q}(M_{2k}-M_{1k})+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big) \qquad \text{(VII.6.16)}
\end{aligned}$$

$C_3$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$, $N$ et $|B_1|$ donc de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. On note :

$$\omega(sR):=\sum_{k=1}^{N} osc_{B_{sR}}w_k=\sum_{k=1}^{N}(M_{sk}-m_{sk}) \qquad \text{(VII.6.17)}$$

on a $\omega(2R)-\omega(R)=\sum_{k=1}^{N}(M_{2k}-M_{1k})+\sum_{k=1}^{N}(m_{1k}-m_{2k})\geq\sum_{k\neq q}(M_{2k}-M_{1k})$ d'où :

$$\left[\frac{1}{R^n}\int_{B_R}\Big(\sum_{k\neq q}(M_{2k}-w_k)\Big)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leq C_3\Big(\omega(2R)-\omega(R)+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big) \qquad \text{(VII.6.18)}$$

Par ailleurs, par (VII.6.14) : si $x\in B_{2R}$ et $y\in B_R$,

$$\begin{aligned}
\beta_q(y)\Big(w_q(y)-w_q(x)\Big) &\leq f(y)-f(x)+\sum_{k\neq q}\beta_k(y)\Big(w_k(x)-w_k(y)\Big)\\
&\leq |Df|_{0;B_{2R}}|x-y|+\sum_{k\neq q}\beta_k(y)\Big(M_{2k}-w_k(y)\Big)\\
&\leq 3R\,|Df|_{0;B_{2R}}+\Lambda^*\sum_{k\neq q}\Big(M_{2k}-w_k(y)\Big) \qquad \text{(VII.6.19)}
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure en $x\in B_{2R}$ on déduit que :

$$\beta_q(y)\Big(w_q(y)-m_{2q}\Big)\leq 3R\,|Df|_{0;B_{2R}}+\Lambda^*\sum_{k\neq q}\big(M_{2k}-w_k(y)\big) \qquad \text{(VII.6.20)}$$

Or $\beta_q(y)\geq\lambda^*>0$ donc $0\leq w_q(y)-m_{2q}\leq\frac{1}{\lambda^*}\left[3R\,|Df|_{0;B_{2R}}+\Lambda^*\sum_{k\neq q}\big(M_{2k}-w_k(y)\big)\right]$ ainsi,

$$\begin{aligned}
R^{\frac{-n}{p}}\,\|w_q-m_{2q}\|_{L^p(B_R)} &\leq \frac{3}{\lambda^*}R^{1-\frac{n}{p}}\,|Df|_{0;B_{2R}}|B_R|^{\frac{1}{p}}+\frac{\Lambda^*}{\lambda^*}R^{\frac{-n}{p}}\,\|\sum_{k\neq q}\big(M_{2k}-w_k\big)\|_{L^p(B_R)}\\
&\leq \frac{3}{\lambda^*}|B_1|^{\frac{1}{p}}\,R\,|Df|_{0;B_{2R}}+\frac{\Lambda^*}{\lambda^*}C_3\Big(\omega(2R)-\omega(R)+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big) \qquad \text{(VII.6.21)}
\end{aligned}$$

d'où,

(VII.6.22) $$R^{\frac{-n}{p}}\|w_q - m_{2q}\|_{L^p(B_R)} \leq C_4\Big(\omega(2R)-\omega(R)+R\,|Df|_{0;B_{2R}}+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)$$

$C_4$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. Par ailleurs, on dispose de l'inégalité (VII.6.15) pour $k=q$ :

(VII.6.23) $$R^{\frac{-n}{p}}\|M_{2q} - w_q\|_{L^p(B_R)} \leq C_2\Big(M_{2q}-M_{1q}+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)$$

En sommant (VII.6.22) et (VII.6.23) on obtient :

$$R^{\frac{-n}{p}}\|M_{2q} - m_{2q}\|_{L^p(B_R)} \leq C_5\quad\Big(M_{2q}-M_{1q}+\omega(2R)-\omega(R)+R\,|Df|_{0;B_{2R}}+2R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)$$

$C_5$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. Or $R^{\frac{-n}{p}}\|M_{2q}-m_{2q}\|_{L^p(B_R)} = |B_1|^{\frac{1}{p}}(M_{2q}-m_{2q})$ et $M_{2q}-M_{1q}\leq M_{2q}-m_{2q}$ donc :

(VII.6.24) $$M_{2q}-m_{2q}\leq C_6\quad\Big(M_{2q}-m_{2q}+\omega(2R)-\omega(R)+R\,|Df|_{0;B_{2R}}+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\Big)$$

$C_6\geq 1$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. En sommant sur $q$ on obtient :

(VII.6.25) $$\frac{1}{C_6}\omega(2R)\leq\omega(2R)+N\Big(\omega(2R)-\omega(R)\Big)+NR\,|Df|_{0;B_{2R}}+NR^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}$$

D'où :

(VII.6.26) $$\omega(R)\leq\delta\,\omega(2R)+R\,|Df|_{0;B_{2R}}+R^2\,|D^2f|_{0;B_{2R}}\quad\text{où}\quad\delta:=\frac{N+1}{N}-\frac{1}{C_6N}>0$$

Ainsi, si $B_{R_0}$ est une boule de $\Omega$ et si pour $R\leq R_0$ on note $B_{\frac{R}{2}}$ et $B_R$ les deux boules de rayons respectivement $\frac{R}{2}$ et $R$ concentriques de $B_{R_0}$ alors :

(VII.6.27) $$\forall R\leq R_0\quad\omega\left(\frac{R}{2}\right)\leq\delta\,\omega(R)+\underbrace{\frac{R}{2}\,|Df|_{0;B_{R_0}}+\left(\frac{R}{2}\right)^2|D^2f|_{0;B_{R_0}}}_{=:\sigma(R)}$$

**LEMMEVII.6.3** Si $\omega$ est une fonction croissante sur un intervalle $]0,R_0]$ satisfaisant :

$$\forall R\leq R_0\quad\omega(\tau R)\leq\gamma\omega(R)+\sigma(R)$$

où $\sigma$ est une fonction croissante, $\gamma>0$ et $\tau<1$, alors :

$$\forall\mu\in]0,1[\quad\forall R\leq R_0\quad\omega(R)\leq C\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega(R_0)+\sigma\Big(R^{\mu}R_0^{1-\mu}\Big)\right]$$

où $C$ est une constante $>0$ dépendant de $\gamma$ et $\tau$ ; et $\alpha$ est une constante $>0$ dépendant de $\gamma$, $\tau$ et $\mu$.

**Preuve** *:* Voir la page 201 de [GT01], preuve du lemme 8.23. ∎

Par le lemme précédent, on déduit pour $\mu = \dfrac{1}{2}$ que :

$$\forall R \le R_0 \quad \omega(R) \le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega(R_0) + \frac{C}{2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} R_0 \,|\, Df \,|_{0;B_{R_0}} + \frac{C}{4}\left(\frac{R}{R_0}\right) R_0^2 \,|\, D^2 f \,|_{0;B_{R_0}} \tag{VII.6.28}$$

où $C$ et $\alpha$ sont des constantes $> 0$ dépendant de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. Soit $\beta = \min\left(\dfrac{1}{2}, \alpha\right)$, on a donc :

$$\forall R \le R_0 \quad \omega(R) \le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\left[\omega(R_0) + R_0 \,|\, Df \,|_{0;B_{R_0}} + R_0^2 \,|\, D^2 f \,|_{0;B_{R_0}}\right] \tag{VII.6.29}$$

A partir de là, on se propose de montrer que :

$$|\, u \,|^*_{2,\beta;\Omega} \le Cste\left(|\, u \,|^*_{2;\Omega} + |\, f \,|^{(2)}_{2;\Omega}\right) \tag{VII.6.30}$$

(voir la section intitulée : L'espace $C^{r,\alpha}(M)$, pour les définitions des différentes normes : $|\,.\,|^*_{r;\Omega}$, $|\,.\,|^*_{r,\beta;\Omega}$, et $|\,.\,|^{(\nu)}_{r;\Omega}$ pour $\Omega$ un ouvert propre de $\mathbb{R}^n$ ; et $|\,.\,|'_{r;\Omega}$, $|\,.\,|'_{r,\beta;\Omega}$ pour $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$).

On rappelle que : $|\, u \,|^*_{2;\Omega} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \sup_{x\in\Omega, |\alpha|=2} d_x^j \,|\, D^\alpha u(x) \,|$

$|\, u \,|^*_{2,\beta;\Omega} = |\, u \,|^*_{2;\Omega} + \displaystyle\sup_{x,y\in\Omega,|\alpha|=2} d_{x,y}^{\beta+2} \frac{|\, D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) \,|}{|\, x-y \,|^\beta}$ où $d_x := d(x, \partial\Omega)$, $d_{x,y} := \min(d_x, d_y)$

et $|\, f \,|^{(2)}_{2;\Omega} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \sup_{z\in\Omega,|\alpha|=j} d_z^{j+2} \,|\, D^\alpha f(z) \,|$.

On commence par montrer que si $B_{R_0}(x_0) \subset B_{3R_0}(x_0) \subset \Omega$ alors :

$$|\, u \,|'_{2,\beta;B_{R_0}(x_0)} \le Cste_1 \left(|\, u \,|'_{2;B_{3R_0}(x_0)} + R_0^2 \,|\, f \,|'_{2;B_{3R_0}(x_0)}\right) \tag{VII.6.31}$$

$Cste_1$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$, en particulier elle est indépendante de $x_0$ et $R_0$. On rappelle que : $|\, u \,|'_{2;B_{3R_0}(x_0)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} (6R_0)^j \sup_{B_{3R_0}(x_0),|\alpha|=j} |\, D^\alpha u \,|$

et $|\, u \,|'_{2,\beta;B_{R_0}(x_0)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} (2R_0)^j \sup_{B_{R_0}(x_0),|\alpha|=j} |\, D^\alpha u \,| + (2R_0)^{2+\beta} \sup_{|\alpha|=2, x\neq y \in B_{R_0}(x_0)} \frac{|\, D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) \,|}{\|x-y\|^\alpha}$.

Soient $x, y \in B_{R_0}(x_0)$. On a $B_{|x-y|}(x) \subset B_{2R_0}(x) \subset B_{3R_0}(x_0) \subset \Omega$ donc :

$$|\, D_{ii}u(x) - D_{ii}u(y) \,| \le \sup_{B_{|x-y|}(x)} D_{ii}u - \inf_{B_{|x-y|}(x)} D_{ii}u$$

$$\le \omega\left(|\, x-y \,|\right) \quad \text{donc par (VII.6.29)}$$

$$\le C\left(\frac{|\, x-y \,|}{2R_0}\right)^{\beta}\left[\omega(2R_0) + 2R_0 \,|\, Df \,|_{0;B_{2R_0}(x)} + (2R_0)^2 \,|\, D^2 f \,|_{0;B_{2R_0}(x)}\right] \quad \text{d'où,} \tag{VII.6.32}$$

(VII.6.33) $$(2R_0)^{2+\beta}\frac{|D_{ii}u(x)-D_{ii}u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C\Big[(2R_0)^2\,\omega(2R_0) + (2R_0)^2\Big(2R_0\,|Df|_{0;B_{2R_0}(x)} + (2R_0)^2\,|D^2f|_{0;B_{2R_0}(x)}\Big)\Big]$$

Par ailleurs si $z \in B_{2R_0}(x)$,

(VII.6.34) $$(2R_0)^2\,|D_{\gamma_k\gamma_k}u(z)| \leq \sum_{i,j=1}^{n}|\gamma_{ki}\gamma_{kj}|\,(4R_0)^2\,|D_{ii}u(z)| \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n}|\gamma_{ki}\gamma_{kj}|\Big)|u|'_{2;B_{2R_0}(x)}$$

car $|u|'_{2;B_{2R_0}(x)} = \sum_{j=0}^{2}(4R_0)^j \sup_{B_{2R_0}(x),|\alpha|=j}|D^\alpha u|$, donc :

(VII.6.35)
$$(2R_0)^2\,\omega(2R_0) = (2R_0)^2\sum_{k=1}^{N}\Big(\sup_{B_{2R_0}(x)}D_{\gamma_k\gamma_k}u - \inf_{B_{2R_0}(x)}D_{\gamma_k\gamma_k}u\Big) \leq 2\underbrace{\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}|\gamma_{ki}\gamma_{kj}|\Big)}_{=:S}|u|'_{2;B_{2R_0}(x)}$$

En outre, $2R_0\,|Df|_{0;B_{2R_0}(x)} + (2R_0)^2\,|D^2f|_{0;B_{2R_0}(x)} \leq |f|'_{2;B_{2R_0}(x)} \leq |f|'_{2;B_{3R_0}(x_0)}$, ainsi :

(VII.6.36) $$(2R_0)^{2+\beta}\frac{|D_{ii}u(x)-D_{ii}u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C_1'\Big[\,|u|'_{2;B_{3R_0}(x_0)} + R_0^2\,|f|'_{2;B_{3R_0}(x_0)}\Big]$$

$C_1'$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$, en particulier indépendant de $R_0$. Par ailleurs, pour $i \neq j$ et $k$ tel que $\gamma_k = \dfrac{e_i+e_j}{\sqrt{2}}$, $D_{ij} = D_{\gamma_k\gamma k} - \dfrac{1}{2}D_{ii} - \dfrac{1}{2}D_{jj}$, donc :

(VII.6.37)
$$\begin{aligned}|D_{ij}u(x)-D_{ij}u(y)| &\leq \sup_{B_{|x-y|}(x)}D_{ij}u - \inf_{B_{|x-y|}(x)}D_{ij}u\\ &\leq \Big(\sup_{B_{|x-y|}(x)}D_{\gamma_k\gamma_k}u - \inf_{B_{|x-y|}(x)}D_{\gamma_k\gamma_k}u\Big)\\ &\quad+\Big(\sup_{B_{|x-y|}(x)}D_{ii}u - \inf_{B_{|x-y|}(x)}D_{ii}u\Big)+\Big(\sup_{B_{|x-y|}(x)}D_{jj}u - \inf_{B_{|x-y|}(x)}D_{jj}u\Big)\end{aligned}$$

(VII.6.38) $$\leq \omega\big(|x-y|\big)$$

Ainsi de même que pour $D_{ii}$, on a :

(VII.6.39) $$(2R_0)^{2+\beta}\frac{|D_{ij}u(x)-D_{ij}u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C_1''\Big[\,|u|'_{2;B_{3R_0}(x_0)} + R_0^2\,|f|'_{2;B_{3R_0}(x_0)}\Big]$$

$C_1''$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$, en particulier indépendant de $R_0$, d'où l'inégalité (VII.6.31).

Montrons à présent l'inégalité (VII.6.30). Si l'une des deux normes à droite est infinie alors l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, soient $x, y \in \Omega$, on suppose que $d_x \leq d_y$ et on note $R = \frac{1}{4} d_x$. On a $B_R(x) \subset B_{3R}(x) \subset \Omega$, et pour toute dérivée d'ordre 2 :

$$\text{(VII.6.40)} \quad d_{x,y}^{2+\beta} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq (4R)^{2+\beta}[D^2u]_{\beta,B_R(x)} + \frac{(4R)^{2+\beta}}{R^\beta}\Big(|D^2u(x)| + |D^2u(y)|\Big)$$

Le premier terme est un majorant lorsque $y \in B_R(x)$, le deuxième terme l'est si $y \notin B_R(x)$. Or pour toute dérivée d'ordre 2 on a $(4R)^2 |D^2u(x)| = d_x^2 |D^2u(x)| \leq |u|^*_{2;\Omega}$,
$(4R)^2 |D^2u(y)| \leq d_y^2 |D^2u(y)| \leq |u|^*_{2;\Omega}$ et $(2R)^{2+\beta}[D^2u]_{\beta,B_R(x)} \leq |u|'_{2,\beta;B_R(x)}$ donc :

$$\text{(VII.6.41)} \qquad d_{x,y}^{2+\beta} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C_2'\Big(|u|'_{2,\beta;B_R(x)} + |u|^*_{2;\Omega}\Big)$$

$C_2'$ constante. Ainsi par l'inégalité (VII.6.31) on déduit que :

$$d_{x,y}^{2+\beta} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C_3'\Big(|u|'_{2;B_{3R}(x)} + |u|^*_{2;\Omega} + R^2 |g|'_{2;B_{3R}(x)}\Big)$$

$C_3'$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. Par ailleurs, si $z \in B_{3R}(x)$ alors $d_z \geq d_x - 3R = R$ donc $R^j |D^\alpha u(z)| \leq \sup_{z \in B_{3R}(x)} d_z^j |D^\alpha u(z)|$ d'où $R^j \sup_{z \in B_{3R}(x), |\alpha|=j} |D^\alpha u(z)| \leq \sup_{z \in B_{3R}(x), |\alpha|=j} d_z^j |D^\alpha u(z)|$ d'où $|u|'_{2;B_{3R}(x)} \leq 6^2 |u|^*_{2;B_{3R}(x)} \leq 6^2 |u|^*_{2;\Omega}$. De même :

$$\begin{aligned} R^2 |f|'_{2;B_{3R}(x)} &\leq 6^2 \sum_{j=0}^{2} R^{j+2} \sup_{B_{3R}(x), |\alpha|=j} |D^\alpha f| \\ &\leq 6^2 \sum_{j=0}^{2} \sup_{z \in B_{3R}(x), |\alpha|=j} d_z^{j+2} |D^\alpha f(z)| = 6^2 |f|^{(2)}_{2;B_{3R}(x)} \\ \text{(VII.6.42)} \qquad &\leq 6^2 |f|^{(2)}_{2;\Omega} \quad \text{ainsi,} \end{aligned}$$

$$\text{(VII.6.43)} \qquad d_{x,y}^{2+\beta} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq C_4'\Big(|u|^*_{2;\Omega} + |f|^{(2)}_{2;\Omega}\Big)$$

$C_4'$ dépend de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$. Et par conséquent :

$$|u|^*_{2,\beta;\Omega} \leq Cste\Big(|u|^*_{2;\Omega} + |f|^{(2)}_{2;\Omega}\Big)$$

Nous avons démontré donc le théorème suivant :

**THÉORÈME VII.6.1** Si $\Omega$ est un domaine (i.e ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

$$(E) \quad F\big(D^2u\big) = f \quad F \in C^2(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}) \quad f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \quad u \in C^4(\Omega, \mathbb{R})$$

Ici $\mathbb{R}^{n\times n}$ désigne les matrices carrées réelles symétriques de taille $n$.
Si $u$ est une solution de $(E)$ fixée et si l'application $F$ vérifie les hypothèses suivantes :

1. $F$ est uniformément elliptique par rapport à $u$ i.e il existe deux réels $\lambda$, $\Lambda > 0$ tels que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega \quad \lambda |\xi|^2 \leq F_{ij}\big(D^2u(x)\big)\xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

2. $F$ est concave par rapport à $u$ i.e $F$ est une fonction concave sur l'image de $D^2u$. Vu que $F$ est de classe $C^2$, cette condition de concavité est équivalente à :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall x \in \Omega \quad F_{ij,k\ell}\big(D^2u(x)\big)\zeta_{ij}\zeta_{k\ell} \leq 0$$

Alors il existe $\beta \in ]0, \frac{1}{2}]$ et $Cste > 0$, $\beta$ et $Cste$ ne dépendant que de $n$, $\lambda$, $\Lambda$ et $|B_1|$, tels que :

$$|u|^*_{2,\beta;\Omega} \leq Cste\left(|u|^*_{2;\Omega} + |f|^{(2)}_{2;\Omega}\right)$$

Pour déduire une estimée $C^{2,\beta}$ à partir de l'estimée $C^2$ pour l'équation de la $k$-ième fonction symétrique des valeurs propres, on utilise plutôt le théorème 17.14 de [GT01] page 461.

**Théorème VII.6.2** Soit $\Omega$ un domaine (i.e ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. On désigne par $\mathbb{R}^{n\times n}$ l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques de taille $n$. Si $u \in C^4(\Omega, \mathbb{R})$ est une solution de :

$$(E') \quad G[u] = G\big(x, D^2u\big) = 0 \text{ sur } \Omega,$$

où $G \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$ est elliptique par rapport à $u$ et satisfait les hypothèses suivantes :

1. $G$ est uniformément elliptique par rapport à $u$ i.e il existe deux réels $\lambda$, $\Lambda > 0$ tels que :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda |\xi|^2 \leq G_{ij}\big(x, D^2u(x)\big)\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

2. $G$ est concave par rapport à $u$ en la variable $r$. Vu que $G$ est de classe $C^2$, cette condition de concavité est équivalente à :

$$\forall x \in \Omega, \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad G_{ij,ks}\big(x, D^2u(x)\big)\zeta_{ij}\zeta_{ks} \leq 0$$

Alors pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, on a l'estimée intérieure suivante :

$$[D^2u]_{\beta;\Omega'} \leq C$$

où $\beta \in ]0,1]$ ne dépends que de $n$, $\lambda$ et $\Lambda$; et $C > 0$ ne dépends que de $n$, $\lambda$, $\Lambda$, $|u|_{2;\Omega'}$, $dist(\Omega', \partial\Omega)$, $G_x$, $G_r$, $G_{xx}$ et $G_{rx}$.
Rappelons que ici la notation $G_{rx}$ désigne la matrice $G_{rx} = [G_{ij,x_\ell}]_{i,j,\ell=1\ldots n}$ évaluée en $(x, D^2u(x))$. De même pour les notations $G_x$, $G_r$ et $G_{xx}$ (cf. [GT01] page 457).

## VII.7 Développement d'une métrique Riemannienne au centre d'une carte normale

Soit $(M,g)$ une variété Riemannienne.

**LEMME VII.7.1 (*cf. [CAR46]p.243*)** Si $x$ est un système de coordonnées normales sur $M$ centré en $P$ et vérifiant $x(P)=0$ alors les développements limités des composantes du tenseur métrique rapporté aux coordonnées normales $x$ sont données par :

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{irjs} x^r x^s - \frac{1}{6} \nabla_\ell R_{irjs} x^\ell x^r x^s + o(\|x\|^3)$$

où $o(\|x\|^3)$ désigne une fonction $f$ sur $M$ telle que $\lim_{Q\to P} \frac{f(Q)}{\|x(Q)\|^3} = 0$. (attention, les $R_{ijk\ell}$ de Cartan sont égaux à nos $-R_{ijk\ell}$).

On en déduit le corollaire suivant :

**COROLLAIRE VII.7.1** Au centre du système de coordonnées normales $x$ on a bien sûr $g_{ij}(P)=\delta_{ij}$ et $\partial_r g_{ij}(P)=0$, et en outre :

$$\partial_{rs} g_{ij}(P) = \frac{-1}{3}(R_{irjs}+R_{isjr}) \quad \text{et}$$

$$\partial_{\ell rs} g_{ij}(P) = \frac{-1}{6}\left(\nabla_\ell R_{irjs} + \nabla_r R_{i\ell js} + \nabla_s R_{irj\ell} + \nabla_\ell R_{isjr} + \nabla_s R_{i\ell jr} + \nabla_r R_{isj\ell}\right)$$

<u>Remarque</u> : Une identification du type $\partial_{rs} g_{ij}(P) = -\frac{2}{3} R_{irjs}$ est fausse. En effet, cette formule impliquerait que $R_{irjs} = R_{isjr}$ en $P$. Or la première identité de Bianchi s'écrit $R_{irjs} + R_{isrj} + R_{ijsr} = 0$, et on a $R_{irjs} = R_{isjr} = -R_{isrj}$, d'où $R_{ijsr} = 0 \quad \forall 1 \le i,j,r,s \le n$ en $P$ ce qui est absurde. De même, une identification du type $\partial_{\ell rs} g_{ij}(P) = -\nabla_\ell R_{irjs}$ est fausse pour les mêmes raisons de symétrie.

<u>**Preuve**</u> *:* Le développement du lemme VII.7.1 implique qu'au centre d'un système de coordonnées normales, les égalités suivantes sont vérifiées :

(VII.7.1)
$$\sum_{r,s} \partial_{rs} g_{ij} X^r X^s = \sum_{r,s} -\frac{2}{3} R_{irjs} X^r X^s \quad \text{et} \quad \sum_{\ell,r,s} \partial_{\ell rs} g_{ij} X^\ell X^r X^s = -\sum_{\ell,r,s} \nabla_\ell R_{irjs} X^\ell X^r X^s$$

et ce quels que soient les réels $X^i$ et pour tout $1 \le i,j \le n$ (ce sont des égalités de polynômes homogènes). La première égalité des formules (VII.7.1) implique

$\sum_{r,s} \partial_{rs} g_{ij} X^r X^s = -\sum_{r,s} \frac{1}{3} R_{irjs} X^r X^s - \sum_{r,s} \frac{1}{3} R_{isjr} X^s X^r$ donc :

$$\sum_{r,s} a_{ijrs} X^r X^s = 0 \quad \text{où} \quad a_{ijrs} = \partial_{rs} g_{ij} + \frac{1}{3}(R_{irjs}+R_{isjr}) \tag{VII.7.2}$$

Montrons à partir de l'égalité (VII.7.2) que $a_{ijrs}=0 \quad \forall 1\le i,j,r,s\le n$.
En prenant $X^{\ell}=\delta_{\ell r}$ on obtient $a_{ijrr}=0 \quad \forall 1\le i,j,r\le n$. Soient $1\le r\neq s\le n$, en prenant $X^{\ell}=0 \quad \forall \ell\not\in\{r,s\}$ et $X^{r}=X^{s}=1$ on obtient $a_{ijrr}+a_{ijrs}+a_{ijsr}+a_{ijss}=0$ or $a_{ijrr}=a_{ijss}=0$ et $a_{ijsr}=a_{ijrs}$ d'où $2\,a_{ijrs}=0$, ce qui achève la vérification.
De même, la deuxième égalité des formules (VII.7.1) implique :

$$\text{(VII.7.3)}\quad \sum_{\ell,r,s}\partial_{\ell rs}g_{ij}X^{\ell}X^{r}X^{s}=\frac{-1}{6}\sum_{\ell,r,s}\big(\nabla_{\ell}R_{irjs}+\nabla_{r}R_{i\ell js}+\nabla_{s}R_{irj\ell}+\nabla_{\ell}R_{isjr}+\nabla_{s}R_{i\ell jr}+\nabla_{r}R_{isj\ell}\big)X^{\ell}X^{r}X^{s}\quad \text{donc,}$$

$$\text{(VII.7.4)}\quad \sum_{r,s}b_{ij\ell rs}X^{\ell}X^{r}X^{s}=0\quad \text{où}\quad b_{ij\ell rs}=\partial_{\ell rs}g_{ij}+\frac{1}{6}\big(\nabla_{\ell}R_{irjs}+\nabla_{r}R_{i\ell js}+\nabla_{s}R_{irj\ell}+\nabla_{\ell}R_{isjr}+\nabla_{s}R_{i\ell jr}+\nabla_{r}R_{isj\ell}\big)$$

Montrons à partir de l'égalité (VII.7.4) que $b_{ij\ell rs}=0 \quad \forall 1\le i,j,\ell,r,s\le n$. En prenant $X^{p}=\delta_{p\ell}$ on obtient $b_{ij\ell\ell\ell}=0 \quad \forall 1\le i,j,\ell\le n$. Soient $1\le \ell\neq s\le n$, en prenant $X^{p}=0 \quad \forall p\not\in\{\ell,s\}$ et $X^{\ell}=X^{s}=1$ on obtient $b_{ij\ell\ell\ell}+b_{ij\ell\ell s}+b_{ij\ell s\ell}+b_{ij\ell ss}+b_{ijs\ell\ell}+b_{ijs\ell s}+b_{ijss\ell}+b_{ijsss}=0$ or $b_{ij\ell\ell\ell}=b_{ijsss}=0$ et $b_{ij\ell\ell s}=b_{ij\ell s\ell}=b_{ijs\ell\ell}$ d'où $3b_{ij\ell\ell s}+3b_{ijss\ell}=0$ donc $b_{ij\ell\ell s}=-b_{ijss\ell}$.
Par ailleurs, en prenant $X^{p}=0 \quad \forall p\not\in\{\ell,s\}$, $X^{\ell}=1$ et $X^{s}=-1$ on obtient
$b_{ij\ell\ell\ell}-b_{ij\ell\ell s}-b_{ij\ell s\ell}+b_{ij\ell ss}-b_{ijs\ell\ell}+b_{ijs\ell s}+b_{ijss\ell}-b_{ijsss}=0$ d'où $-3b_{ij\ell\ell s}+3b_{ijss\ell}=0$ i.e $b_{ij\ell\ell s}=b_{ijss\ell}$. Ainsi, on déduit que $b_{ij\ell\ell s}=0 \quad \forall 1\le i,j,\ell,s\le n$. Soient maintenant $1\le \ell\neq r\neq s\le n$. En prenant $X^{p}=0 \quad \forall p\not\in\{\ell,r,s\}$ et $X^{\ell}=X^{r}=X^{s}=1$ on obtient
$b_{ij\ell\ell\ell}+b_{ij\ell\ell r}+b_{ij\ell\ell s}+b_{ij\ell r\ell}+b_{ij\ell rr}+b_{ij\ell rs}+b_{ij\ell s\ell}+b_{ij\ell sr}+b_{ij\ell ss}+b_{ijr\ell\ell}+b_{ijr\ell r}+b_{ijr\ell s}+b_{ijrr\ell}+b_{ijrrr}+b_{ijrrs}+b_{ijrs\ell}+b_{ijrsr}+b_{ijrss}+b_{ijs\ell\ell}+b_{ijs\ell r}+b_{ijs\ell s}+b_{ijsr\ell}+b_{ijsrr}+b_{ijsrs}+b_{ijss\ell}+b_{ijssr}+b_{ijsss}=0$,
donc par symétrie $6b_{ij\ell rs}=0$. Ainsi on conclut que $b_{ij\ell rs}=0 \quad \forall 1\le i,j,\ell,r,s\le n$. ∎

**COROLLAIRE VII.7.2** Au centre du système de coordonnées normales $x$ on a :

$$\partial_{r}\Gamma^{s}_{ij}=\frac{1}{3}(R_{isjr}+R_{irjs})\quad \text{et}$$

$$\partial_{\ell r}\Gamma^{s}_{ij}=\frac{1}{4}\big(\nabla_{\ell}R_{irjs}+\nabla_{\ell}R_{isjr}+\nabla_{r}R_{isj\ell}+\nabla_{r}R_{i\ell js}\big)-\frac{1}{12}\big(\nabla_{s}R_{irj\ell}+\nabla_{s}R_{i\ell jr}\big)$$

**Preuve** : Au centre du système de coordonnées normales $x$ :

$$\begin{aligned}
\partial_r \Gamma^s_{ij} &= \partial_r (g^{s\ell}\Gamma_{i\ell j}) = g^{s\ell}\partial_r \Gamma_{i\ell j} + 0 = \partial_r \Gamma_{isj} \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_{ri} g_{sj} + \partial_{rj} g_{si} - \partial_{rs} g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right)\left(R_{srji} + R_{sijr} + R_{srij} + R_{sjir} - R_{irjs} - R_{isjr}\right) \quad \text{par le corollaire } VII.7.1 \\
&= \frac{-1}{6}\left(-R_{srij} - R_{isjr} + R_{srij} - R_{irjs} - R_{irjs} - R_{isjr}\right) \\
&= \frac{-1}{6}\left(-2R_{isjr} - 2R_{irjs}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(R_{isjr} + R_{irjs}\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve la première formule. Démontrons à présent la deuxième formule :

$$\begin{aligned}
\partial_{\ell r}\Gamma^s_{ij} =& \partial_{\ell r}(g^{sp}\Gamma_{ipj}) = \partial_\ell\left(\partial_r g^{sp}\,\Gamma_{ipj} + g^{sp}\,\partial_r \Gamma_{ipj}\right) \\
=& g^{sp}\,\partial_{\ell r}\Gamma_{ipj} = \partial_{\ell r}\Gamma_{isj} \\
=& \frac{1}{2}\left(\partial_{\ell ri} g_{sj} + \partial_{\ell rj} g_{si} - \partial_{\ell rs} g_{ij}\right) \\
=& \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{6}\right)\Big(\nabla_\ell R_{srji} + \nabla_\ell R_{sijr} + \nabla_r R_{s\ell ji} + \nabla_r R_{sij\ell} + \nabla_i R_{s\ell jr} + \nabla_i R_{srj\ell} \\
& + \nabla_\ell R_{srij} + \nabla_\ell R_{sjir} + \nabla_r R_{s\ell ij} + \nabla_r R_{sji\ell} + \nabla_j R_{s\ell ir} + \nabla_j R_{sri\ell} \\
& - \nabla_\ell R_{irjs} - \nabla_\ell R_{isjr} - \nabla_r R_{i\ell js} - \nabla_r R_{isj\ell} - \nabla_s R_{i\ell jr} - \nabla_s R_{irj\ell}\Big) \quad \text{par le corollaire } VII.7.1 \\
=& \frac{-1}{12}\Big(-2\nabla_\ell R_{irjs} - 2\nabla_\ell R_{isjr} - 2\nabla_r R_{isj\ell} - 2\nabla_r R_{i\ell js} \\
& + \nabla_i R_{s\ell jr} - \nabla_s R_{i\ell jr} + \nabla_i R_{srj\ell} - \nabla_s R_{irj\ell} + \nabla_j R_{s\ell ir} + \nabla_j R_{sri\ell}\Big)
\end{aligned}$$

Or par la deuxième identité de Bianchi on a :

$$\nabla_i R_{jrs\ell} - \nabla_s R_{jri\ell} = -\nabla_\ell R_{jris} \quad , \quad \nabla_i R_{j\ell sr} - \nabla_s R_{j\ell ir} = -\nabla_r R_{j\ell is}$$

$$\nabla_j R_{irs\ell} = -\nabla_s R_{ir\ell j} - \nabla_\ell R_{irjs} \quad \text{et} \quad \nabla_j R_{i\ell sr} = -\nabla_s R_{i\ell rj} - \nabla_r R_{i\ell js}$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où} \quad \partial_{\ell r}\Gamma^s_{ij} =& \frac{-1}{12}\Big(-2\nabla_\ell R_{irjs} - 2\nabla_\ell R_{isjr} - 2\nabla_r R_{isj\ell} - 2\nabla_r R_{i\ell js} \\
& - \nabla_\ell R_{jris} - \nabla_r R_{j\ell is} - \nabla_s R_{ir\ell j} - \nabla_\ell R_{irjs} - \nabla_s R_{i\ell rj} - \nabla_r R_{i\ell js}\Big) \\
=& \frac{-1}{12}\Big(-3\nabla_\ell R_{irjs} - 3\nabla_\ell R_{isjr} - 3\nabla_r R_{isj\ell} - 3\nabla_r R_{i\ell js} + \nabla_s R_{irj\ell} + \nabla_s R_{i\ell jr}\Big) \\
=& \frac{1}{4}\left(\nabla_\ell R_{irjs} + \nabla_\ell R_{isjr} + \nabla_r R_{isj\ell} + \nabla_r R_{i\ell js}\right) - \frac{1}{12}\left(\nabla_s R_{irj\ell} + \nabla_s R_{i\ell jr}\right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ∎

## VII.8 Quelques propriétés des fonctions symétriques élémentaires

Rappelons des inégalités classiques (cf. [HLP94], [LT94]).

**LEMME VII.8.1** (***Inégalités de Maclaurin***) Pour tout $\lambda \in \overline{\Gamma_k} := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^m \,/\, \forall 1 \leq j \leq k \; \sigma_j(\lambda) \geq 0\right\}$ on a :

$$\forall 1 \leq q \leq s \quad \left(\frac{\sigma_s(\lambda)}{\binom{m}{s}}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{\sigma_q(\lambda)}{\binom{m}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

**LEMME VII.8.2** (***Inégalités de Newton***) Pour tout $\ell \geq 2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^m$ on a :

$$\sigma_\ell(\lambda)\,\sigma_{\ell-2}(\lambda) \leq \frac{(\ell-1)(m-\ell+1)}{\ell(m-\ell+2)}\left[\sigma_{\ell-1}(\lambda)\right]^2$$

## VII.9 Inégalité de Gårding

### VII.9.1 Polynômes hyperboliques

**DÉFINITION VII.9.1** Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ un polynôme homogène de degré $m \geq 1$. $P$ est dit hyperbolique selon $a \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $P(sa + x) = 0$ a exactement $m$ racines réelles.

**PROPOSITION VII.9.1**

1. Si $P$ et $Q$ sont hyperboliques selon $a \in \mathbb{R}^n$, alors $PQ$ l'est aussi.
2. Si $P$ est hyperbolique selon $a \in \mathbb{R}^n$, et de degré $m \geq 2$, alors $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial P}{\partial x_i}$ est hyperbolique selon $a$.
3. Si $P$ est hyperbolique selon $a \in \mathbb{R}^n$, alors les polynômes $P_1, ..., P_m$ définis par l'égalité $P(sa + x) = \sum_{i=0}^{m} s^{m-i} P_i(x)$ sont hyperboliques selon $a$.

**Preuve** : Voir [GAR59]. ∎

La précédente proposition permet de construire une large classe de polynômes hyperboliques.
Exemples :

- Si $m = 1$ alors $P$ est hyperbolique selon tout $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $P(a) \neq 0$.
- Le polynôme $P = X_1^2 - X_2^2 - ... - X_n^2$ est hyperbolique selon $(1, 0, ..., 0)$.
- Le polynôme $P = X_1 X_2 ... X_n$ est hyperbolique selon tout $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $P(a) \neq 0$.
- Les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ sont hyperboliques selon $(1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ (ceci découle immédiatement de l'application du point 3. de la proposition VII.9.1 au polynôme $P = X_1 X_2 ... X_n$ pour $a = (1, ..., 1)$).

### VII.9.2 Cônes de positivité et inégalité

**DÉFINITION VII.9.2** Si $P$ est hyperbolique selon $a \in \mathbb{R}^n$, le cône de positivité de $P$ selon $a$ est :

$$\Gamma(P,a) = \text{la composante connexe contenant } a \text{ de } \{P > 0\}$$

C'est un cône de sommet 0.

Exemple fondamental : Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. Le cône de positivité du polynôme hyperbolique $P = \sigma_k$ selon $(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\Gamma_k = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n / \forall 1 \leq j \leq k, \quad \sigma_j(\lambda) > 0\right\} \tag{VII.9.1}$$

**LEMME VII.9.1 (*Inégalité de Gårding*)** Si $P$ est hyperbolique selon $a \in \mathbb{R}^n$, de degré $m \geq 2$, et $M$ est la forme totalement polarisée de $P$ (c'est l'unique forme $m$-linéaire symétrique telle que $M(x,\ldots,x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$), alors pour tout $x^1,\ldots,x^m \in \Gamma(P,a)$,

$$M(x^1,\ldots,x^m) \geq P(x^1)^{\frac{1}{m}} \cdots P(x^m)^{\frac{1}{m}}$$

**Preuve** : Voir [GAR59]. ■

# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES


[AUB70] Th. AUBIN. Métriques riemanniennes et courbures. *J. Diff. Geom.*, 4 :383 à 424, 1970.

[AUB76] Th. AUBIN. Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 283 A :116 à 120, 1976.

[AUB78] Th. AUBIN. Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102 :63 à 95, 1978.

[AUB98] Th. AUBIN. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer, 1998.

[BAY01] P. BAYARD. *Problème de Dirichlet pour la courbure d'ordre $m$ lorentzienne*. PhD thesis, Univ. Nice Sophia Antipolis, 2 Mai 2001.

[BCP68] J-M. BONY, P. COURREGE, and P. PRIOURET. Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum. *Ann. Inst. Fourier*, 18 :369 à 521, 1968.

[BES87] A. L. BESSE. *Einstein Manifolds*. Springer, 1987.

[BL00] J. M. BORWEIN and A. S. LEWIS. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization : Theory and Examples*. Springer, 2000.

[BLO05] Z. BLOCKI. Weak solutions to the complex Hessian equation. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 55 :1735 à 1756, 2005.

[BV04] S. BOYD and L. VANDENBERGHE. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[CAR46] E. CARTAN. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, 1946.

[CNS85] L. CAFFARELLI, L. NIRENBERG, and J. SPRUCK. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III : Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math.*, 155 :261 à 301, 1985.

[DEL96] Ph. DELANOË. Sur l'analogue presque-complexe de l'équation de Calabi-Yau. *Osaka J. Math.*, 33 :829 à 846, 1996.

[GAR59] L. GARDING. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. and Mech.*, 8 :957 à 965, 1959.

[GK67] S. I. GOLDBERG and S. KOBAYASHI. Holomorphic bisectional curvature. *J. Diff. Geom.*, 1 :225 à 233, 1967.

[GT01] D. GILBARG and N. S. TRUDINGER. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer. Reprint of the 1998 Edition, 2001.

[HEB97] E. HEBEY. *Introduction à l'Analyse Non Linéaire sur les Variétés*. Diderot, 1997.

[HLP94] G. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, and G. POLYA. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Reprint of the 1952 Second Edition, 1994.

[HOS09] M. HOSSEIN. Solutions entières d'équations hessiennes dans $\mathbb{R}^n$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 347 :1047 à 1050, 2009.

[HOU08] Z. HOU. Complex Hessian equation on Kähler manifold. *Preprint*, 24 Décembre 2008.

[HU09] J-B. HIRIART-URRUTY. *Optimisation et Analyse Convexe. Exercices corrigés.* EDP Sciences, 2009.

[JBI10] A. JBILOU. Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 348 :41 à 46, 2010. DOI : 10.1016/j.crma.2009.11.011.

[LI04] S.-Y. LI. On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian. *Asian J. Math.*, 8 :87 à 106, 2004.

[LT94] M. LIN and N. TRUDINGER. On some inequalities for elementary symmetric functions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 50 :317 à 326, 1994.

[RUD75] W. RUDIN. *Analyse Réelle et Complexe*. Masson. Traduit de l'américain par N. Dhombres et F. Hoffman, 1975.

[Sém78] Séminaire Palaiseau 1978. *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi*. Astérisque 58. Société Mathématique de France, 1978.

[TWY07] V. TOSATTI, B. WEINKOVE, and S.-T. YAU. Taming symplectic forms and the Calabi-Yau equation. *Preprint*, 26 Mars 2007.

[VIN88] A. VINACUA. Nonlinear elliptic equations and the complex Hessian. *Comm. PDE*, 13 :1467 à 1497, 1988.

[WEI07] B. WEINKOVE. The Calabi-Yau equation on almost-Kähler four-manifolds. *Preprint*, 26 Mars 2007.

[YAU78] S.-T. YAU. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31 :339 à 441, 1978.

[ZQ95] C. ZUILY and H. QUEFFELEC. *Eléments d'Analyse pour l'Agrégation*. Masson, 1995.

## Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes.

**Résumé : Sur une variété kählérienne compacte connexe de dimension $2m$, $\omega$ étant la forme de Kähler, $\Omega$ une forme volume donnée dans $[\omega]^m$ et $k$ un entier $1 < k < m$, on cherche à résoudre de façon unique dans $[\omega]$ l'équation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$ en utilisant une notion de $k$-positivité pour $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (les cas extrêmes sont résolus : $k = m$ par Yau, $k = 1$ trivialement). Nous résolvons par la méthode de continuité l'équation hessienne d'ordre $k$ complexe elliptique correspondante sous l'hypothèse que la variété est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, ici requise seulement pour établir un pincement a priori de valeurs propres.**

**Mots-clés : Equations hessiennes complexes, Estimation a priori, Méthode de continuité, Equations non linéaires elliptiques, Variétés kählériennes compactes, Courbure bisectionnelle holomorphe, Valeurs propres, Fonctions symétriques.**

## Complex Hessian equations on some compact Kähler manifolds.

**Abstract : On a compact connected $2m$-dimensional Kähler manifold with Kähler form $\omega$, given a volume form $\Omega \in [\omega]^m$ and an integer $1 < k < m$, we want to solve uniquely in $[\omega]$ the equation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$, relying on the notion of $k$-positivity for $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (the extreme cases are solved : $k = m$ by Yau, $k = 1$ trivially). We solve by the continuity method the corresponding complex elliptic $k$-th Hessian equation under the assumption that the holomorphic bisectional curvature of the manifold is non-negative, required here only to derive an a priori eigenvalues pinching.**

**Keywords : Complex Hessian equations, A priori estimates, Method of continuity, Nonlinear elliptic equations, Compact Kähler manifolds, Bisectional holomorphic curvature, Eigenvalues, Symmetric functions.**

## Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes.

**Résumé : Sur une variété kählérienne compacte connexe de dimension $2m$, $\omega$ étant la forme de Kähler, $\Omega$ une forme volume donnée dans $[\omega]^m$ et $k$ un entier $1 < k < m$, on cherche à résoudre de façon unique dans $[\omega]$ l'équation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$ en utilisant une notion de $k$-positivité pour $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (les cas extrêmes sont résolus : $k = m$ par Yau, $k = 1$ trivialement). Nous résolvons par la méthode de continuité l'équation hessienne d'ordre $k$ complexe elliptique correspondante sous l'hypothèse que la variété est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, ici requise seulement pour établir un pincement a priori de valeurs propres.**

**Mots-clés : Equations hessiennes complexes, Estimation a priori, Méthode de continuité, Equations non linéaires elliptiques, Variétés kählériennes compactes, Courbure bisectionnelle holomorphe, Valeurs propres, Fonctions symétriques.**

## Complex Hessian equations on some compact Kähler manifolds.

**Abstract : On a compact connected $2m$-dimensional Kähler manifold with Kähler form $\omega$, given a volume form $\Omega \in [\omega]^m$ and an integer $1 < k < m$, we want to solve uniquely in $[\omega]$ the equation $\tilde{\omega}^k \wedge \omega^{m-k} = \Omega$, relying on the notion of $k$-positivity for $\tilde{\omega} \in [\omega]$ (the extreme cases are solved : $k = m$ by Yau, $k = 1$ trivially). We solve by the continuity method the corresponding complex elliptic $k$-th Hessian equation under the assumption that the holomorphic bisectional curvature of the manifold is non-negative, required here only to derive an a priori eigenvalues pinching.**

**Keywords : Complex Hessian equations, A priori estimates, Method of continuity, Nonlinear elliptic equations, Compact Kähler manifolds, Bisectional holomorphic curvature, Eigenvalues, Symmetric functions.**