# Approximation faible et principe local-global pour certaines variétés rationnellement connexes

Yong Hu

N° d'ordre :

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

HU Yong
胡 勇

# Approximation faible et principe local-global pour certaines variétés rationnellement connexes

Soutenue le 4 avril 2012 devant la commission d'examen :

| | | |
|---|---|---|
| M. | Antoine CHAMBERT-LOIR | |
| M. | Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE | Directeur de thèse |
| M. | Olivier DEBARRE | |
| M. | Bruno KAHN | |
| M. | Yves LASZLO | |
| M. | Qing LIU | |

Rapporteurs non présents à la soutenance :

M. David HARBATER
M. Brendan HASSETT

# Résumé

Cette thèse se concentre sur l'étude de quelques propriétés arithmétiques de certaines variétés algébriques qui sont "les plus simples" en un sens géométrique et qui sont définies sur des corps de type géométrique. Elle se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, indépendant des deux autres, on s'intéresse à la propriété d'approximation faible pour une variété projective lisse rationnellement connexe $X$ définie sur le corps de fonctions $K = k(C)$ d'une courbe algébrique $C$ sur un corps $k$. Supposons que $X$ possède un $K$-point rationnel. En utilisant des méthodes géométriques, on démontre que $X(K)$ est Zariski dense dans $X$ si $k$ est un corps fertile, et que l'approximation faible en un certain ensemble de places de bonne réduction vaut pour $X$ sous des hypothèses supplémentaires convenables. Lorsque $k$ est un corps fini, on obtient l'approximation faible en une place quelconque de bonne réduction pour une surface cubique lisse sur $K$ ainsi qu'un résultat sur l'approximation faible d'ordre zéro pour des hypersurfaces cubiques de dimension supérieure sur $K$.

Les deux autres chapitres forment la seconde partie de la thèse, où on travaille sur le corps des fractions $K$ d'un anneau intègre local $R$, hensélien, excellent de dimension 2 dont le corps résiduel $k$ est souvent supposé fini et où on emploie des outils plus algébriques. On étudie d'abord la ramification et la cyclicité des algèbres à division sur un tel corps $K$. On démontre en particulier que toute classe de Brauer d'ordre $n$ premier à la caractéristique résiduelle sur $K$ est d'indice divisant $n^2$ et que la cyclicité d'une classe de Brauer d'ordre premier peut être testée localement sur les corps complétés par rapport aux valuations discrètes de $K$. Ces résultats sont appliqués dans le dernier chapitre pour étudier l'arithmétique des formes quadratiques sur $K$. On montre que toute forme quadratique de rang $\geq 9$ sur $K$ possède un zéro non trivial. Si $K$ est le corps des fractions d'un anneau de séries formelles $A[\![t]\!]$ sur un anneau de valuation discrète complet $A$, on a prouvé le principe local-global pour toute forme quadratique de rang $\geq 5$ sur $K$. Pour $K$ général on a établi le principe local-global pour les formes de rang 5. Le cas des formes de rang 6, 7 ou 8 est ouvert.

**Mots clés :** Variétés rationnellement connexes, approximation faible, principe local-global, hypersurfaces cubiques, anneau local hensélien de dimension 2, ramification des algèbres à division, formes quadratiques, $u$-invariant.

# Abstract

This thesis is concerned with the study of some arithmetic properties of certain algebraic varieties which are "simplest" in some geometric sense and which are defined over fields of geometric type. It consists of three chapters. In the first chapter, which is independent of the other two, we consider the weak approximation property for a smooth projective rationally connected variety $X$ defined over the function field $K = k(C)$ of an algebraic curve $C$ over a field $k$. Suppose that $X$ admits a $K$-rational point. Using geometric methods we prove that $X(K)$ is Zariski dense in $X$ if $k$ is a large field, and that under suitable hypotheses weak approximation with respect to a set of places of good reduction holds for $X$. When $k$ is a finite field, we obtain weak approximation at any given place of good reduction for a smooth cubic surface over $K$ as well as a zero-th order weak approximation result for higher dimensional cubic hypersurfaces over $K$.

The second part of the thesis consists of the last two chapters, where we work over the fraction field $K$ of a 2-dimensional, excellent, henselian local domain $R$ whose residue field $k$ is often assumed to be finite, and where we use more algebraic tools. We first study the ramification and the cyclicity of division algebras over such a field $K$. We show in particular that every Brauer class over $K$ of order $n$, which is prime to the residue characteristic, has index dividing $n^2$, and that the cyclicity of a Brauer class of prime order can be tested locally over the completions of $K$ with respect to discrete valuations. These results are used in the last chapter to study the arithmetic of quadratic forms over $K$. We prove that every quadratic form of rank $\geq 9$ over $K$ has a nontrivial zero. When $K$ is the fraction field of a power series ring $A[\![t]\!]$ over a complete discrete valuation ring $A$, we prove the local-global principle for quadratic forms of rank $\geq 5$ over $K$. For general $K$ we prove the local-global principle for quadratic forms of rank 5. The local-global principle for quadratic forms of rank 6, 7 or 8 is still open in the general case.

**Key words :** Rationally connected varieties, weak approximation, local-global principle, cubic hypersurfaces, 2-dimensional local henselian domain, ramification of division algebras, quadratic forms, $u$-invariant.

# Remerciements

Il y a une infinité de personnes à qui je suis reconnaissant...

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Jean-Louis Colliot-Thélène, pour tout ce qu'il a apporté dans ma vie dès le premier jour où il m'a connu. Il m'a proposé des sujets de recherche avec ses expériences. Il a été toujours volontaire et disponible à répondre toutes mes questions. Il a partagé avec générosité ses connaissances et idées mathématiques et son savoir culturel. Il a montré une très grande patience pendant de nombreuses heures de discussions, qui ont été essentielles pour bien des étapes de cette thèse. Il a consacré beaucoup de temps à lire et relire, annoter et commenter un grand nombre de mes textes mathématiques et non mathématiques. Il n'arrête jamais d'encourager et aider avec enthousiasme un étudiant étranger comme moi, qui parle encore un piètre français, à améliorer son français. Et enfin, il a appris à reconnaître mon nom en caractères chinois. Je lui suis donc très sincèrement reconnaissant, et par toutes les expériences que j'ai eues durant les cinq dernières années, je sens vivement que j'ai eu une grande chance et l'honneur de pouvoir faire mes études et travaux de recherche en mathématiques avec lui.

Je suis très honoré que David Harbater et Brendan Hassett, dont les travaux scientifiques ont été pour moi une grande source d'apprentissage et d'inspiration, aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Ils ont contribué par leurs questions et remarques judicieuses à rendre ce mémoire plus agréable. Je les remercie profondément pour leur travail précieux.

Je tiens à remercier chaleureusement Antoine Chambert-Loir, Olivier Debarre, Bruno Kahn, Yves Laszlo, et Qing Liu (刘青) de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Certaines communications (par courriers électroniques ou discussions directes) que j'ai eu la chance d'avoir avec quelques mathématiciens à l'extérieur de France, à savoir János Kollár, Raman Parimala, Shuji Saito, Venapally Suresh, ont haussé manifestement la qualité de cette thèse. J'adresse à ces mathématiciens des remerciements très sincères. Je me suis intéressé à certains des problèmes considérés dans ce travail quand j'ai participé à l'atelier "Deformation theory, patching, quadratic forms, and the Brauer group" qui a eu lieu à l'American Institute of Mathematics (AIM) en janvier, 2011. Je souhaite remercier l'AIM et les organisateurs de cet atelier pour l'accueil aimable et le soutien généreux. Je remercie aussi Philippe Gille et Olivier Wittenberg de m'avoir invité à faire un exposé au séminaire « Variétés Rationnelles » à l'ENS, et Emmanuel Peyre de m'avoir donné l'occasion de présenter un exposé à l'école d'été à Grenoble en 2010.

C'est grâce au programme Erasmus ALGANT que j'ai eu l'occasion de poursuivre mes études en Europe. Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma gratitude à tous ceux qui y ont participé, surtout les professeurs dont j'ai reçu l'enseignement pendant les deux ans de Master, y compris David Harari et Guy Henniart à Orsay et Franck Doray et Bas Edixhoven à Leiden.

Cette thèse est effectuée au sein du département de mathématiques d'Orsay. J'en remercie tous les membres pour y ont créé d'excellentes conditions scientifiques, humaines et matérielles. En particulier, c'est Emmanuel Ullmo qui m'a aidé réaliser mon rêve d'étudier dans un département si célèbre. Un remerciement tout particulier va aussi à David Harari, qui avec sa sympathie m'a aidé en affaires administratives ainsi que pour des financements pour plusieurs missions que j'ai effectuées. Beaucoup d'autres professeurs d'Orsay ont visité Pékin pendant les années 2005–2006, leurs cours et les groupes de travail qu'ils ont organisés à l'Université de Tsinghua m'ont donné un aperçu très stimulant de divers sujets avancés en arithmétique et géométrie algébrique. C'est aussi en cette période que j'ai vu pour la première fois M. Colliot-Thélène, qui faisait un exposé sur les variétés rationnellement connexes dans son style privilégié.

Je sais gré à Mesdames Valérie Blandin-Lavigne et Martine Thouvenot de leur aide administrative considérable.

Il va sans dire que cette thèse ne se serait pas accomplie sans le soutien énorme dont j'ai bénéficié de plusieurs professeurs chinois. Ce sont les cours des professeurs Keqin Feng (冯克勤), Yi Ouyang (欧阳毅) et Linsheng Yin (印林生) qui m'ont amené à la route de recherche mathématique. Une répétition tout spéciale et tout reconnaissante pour M. Linsheng Yin (印林生), qui a apporté un bonheur très particulier à ma vie.

Prof. Xiaonan Ma (麻小南), qui avec sa grande gentillesse a beaucoup aidé tous les étudiants chinois dans les études et dans la vie, est plutôt un grand ami à mes yeux. C'est chez lui qu'on a passé joyeusement plusieurs veilles de fêtes chinoises traditionnelles. Les cartes de voeux de Prof. Zhiying Wen (文志英), qui arrivent chaque fin de l'année d'un endroit lointain, me mettent toujours en grande joie.

Je profite cette occasion pour remercier vivement Mme Ping Yang (杨萍), mon institutrice de maths à l'école primaire, qui a encouragé un garçon de 12 ans à choisir comme métier un mathématicien.

Je voudrais remercier mes amis et collègues, Ramla, Arno, Chengyuan (陆程远), Huajun (吕华军), Alena, Shu (申述), Xu (申旭), Arne, Fei (孙飞), Zhe (孙哲) et bien d'autres, pour leur amitié et divers échanges mathématiques. Je remercie Chunhui (汪春晖) pour m'avoir assisté dans l'organisation du « Séminaire Mathjeunes ». L'enthousiasme et l'attitude active et non utilitaire pour l'étude mathématique de Shenghao (孙晟昊) m'ont beaucoup encouragé. J'adresse des remerciements à Lois, Zongbin (陈宗彬), Ting-Yu (李庭谕), Wenwei (李文威), Shoumin (刘守民) et Yih-Dar (谢易达), qui m'ont accompagné pendant mes années de Master.

Ce sont de nombreux amis qui ont rendu ma vie en France beaucoup plus colorée. De sincères remerciements vont à Ke (陈柯), Miaofen (陈苗芬), Yongquan (胡永泉), Peng (单芃), Yichao (田一超), Jilong (童纪龙), Shanwen (王善文), Han (吴涵), Weizhe (郑维喆) et Guodong (周国栋), qui m'ont aidé depuis (ou même depuis avant) ma première année en France. Je remercie chaleureusement beaucoup d'autres amis chinois pour leur sympathie et tous les souvenirs que nous avons eus ensemble, des jeux, du sport, des excursions, des visites touristiques, des bavardages, etc. Je pense notamment à Yinshan (常寅山), Li (陈丽), Lingbing (何凌冰), Zhi (江智), Xiangyu (梁湘玉), Yongqi (梁永祺), Hui (彭慧), Shun (唐舜), Haoran (王浩然), Jian (王俭), Hao (吴昊), Li (徐丽), etc.

Je voudrais aussi remercie Madame et Monsieur Farges, l'habitation chez eux pendant ces dernières années a créé pour moi une ambiance tranquille et très amicale de travail et de vie. J'ai eu aussi de la chance de faire la connaissance de voisins sympas, à savoir, Ni (丁妮), Jibo (何吉波), Juan (贾娟), Bo (刘博), Limin (孟立民) et Qingshan (汤青山).

Tout particulièrement, j'exprime ma gratitude du fond du coeur à toute ma famille, surtout mes parents. Je ne pourrai jamais exprimer exactement tout ce que je leur dois. Enfin, ma reconnaissance la plus émue à Siqi (思琦), pour sa compréhension et ses soins attentifs à travers ces longues années et pour tous les moments difficiles ou joyeux que nous avons partagés. C'est toi, Siqi (思琦), mon trésor inestimable dans la vie.

Pour conclure, permettez-moi de répéter que, la taille du papier est toujours limitée alors que la liste des personnes auxquelles je suis reconnaissant devrait en réalité être infiniment longue...

*À la mémoire de mes grands-parents et mon grand-père-maternel*

# Table des matières

# Introduction générale

*Ce que nous savons n'est pas grande chose ;*
*ce que nous ignorons est immense.*

—— Pierre Simon Laplace

Pendant des millénaires, les mathématiciens ont été fascinés par ce que nous appelons maintenant équations diophantiennes, dont les développements de l'étude moderne ont été les racines de plusieurs branches mathématiques très influentes, par exemple, la théorie des nombres algébriques, la géométrie diophantienne et la géométrie algébrique arithmétique. Formulé dans le langage traditionnel des mathématiques, l'un des problèmes fondamentaux est de chercher des solutions à un système d'équations polynomiales à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Alors que les approches modernes de ce problème sont multiples, une première approche naturelle sur le côté algébrique, suggérée par la théorie algébrique moderne des nombres, est de commencer par chercher des solutions dans une collection de surcorps de $\mathbb{Q}$, par exemple, dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et dans les corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres $p$-adiques. Ces surcorps sont connus comme les complétés locaux de $\mathbb{Q}$. Si des solutions sont connues sur tous les complétés locaux, il faut déterminer si cela est suffisant pour l'existence de solutions globales sur $\mathbb{Q}$. Si c'est le cas pour un système, alors nous disons que le *principe local-global* ou le *principe de Hasse* vaut pour le système. Le premier exemple est le fameux théorème de Hasse–Minkowski, qui affirme que le principe local-global vaut pour tout équation quadratique à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement dans un corps de nombres).

Une des raisons de s'attendre au principe local-global peut être l'observation simple que $\mathbb{Q}$ est topologiquement dense dans chacun de ses complétés locaux. En fait, une propriété plus forte vaut : comme le classique *théorème d'approximation faible* assure, $\mathbb{Q}$ est dense dans le produit topologique $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Q}_p$. Ainsi, une question naturellement liée demande si la propriété d'approximation faible vaut pour les solutions d'un système polynomial. La validité pour une équation quadratique est toujours bien connue.

Dès l'invention de la géométrie en coordonnées de Descartes au dix-septième siècle, l'aspect géométrique dans l'étude des équations algébriques a pris une grande importance. Dans le langage de la géométrie arithmétique moderne, le problème de résoudre des systèmes d'équations polynomiales se traduit en le problème de trouver des points rationnels des variétés algébriques. Principe local-global et approximation faible peuvent alors être reformulés dans un contexte plus général comme suit :

**(0.0.1)** Soit $K$ un corps et $X$ une variété algébrique sur $K$. Soit $\Omega$ un ensemble de places * de $K$. Pour chaque place $v$ de $K$, on note $K_v$ le complété correspondant de $K$ et on munit l'ensemble $X(K_v)$ des $K_v$-points de $X$ de la topologie induite par la topologie $v$-adique de $K_v$. On note $\prod_{v\in\Omega} X(K_v)$ l'espace topologique produit. On dit que

(1) $X$ satisfait au *principe local-global* ou au *principe de Hasse* (PH) par rapport aux places dans $\Omega$, si l'implication suivante est vérifiée :

$$\prod_{v\in\Omega} X(K_v)\neq\emptyset \implies X(K)\neq\emptyset\,.$$

(2) $X$ satisfait l'*approximation faible* (AF) aux places dans $\Omega$ si l'image de l'application diagonale $X(K)\to\prod_{v\in\Omega} X(K_v)$ est dense.

Malgré l'exemple de soutien donné par les quadriques, de nombreux contre-exemples à (PH) ou (AF) existent sur les corps de nombres. Par exemple, la courbe de Selmer, c'est à dire, la courbe plane cubique définie par l'équation

$$3x^3+4y^3+5z^3=0\,,$$

viole le principe de Hasse. Sur les corps de nombres, le phénomène de l'échec de (PH) ou (AF) peut être mieux expliqué à l'aide de l'obstruction dite de Brauer-Manin (voir [Sko01] ou [Har04] pour une introduction). Donc en général, afin d'avoir un espoir de validité de (PH) ou (AF), on se limite naturellement à une classe plus petite de variétés (qui devrait au moins exclure la courbe de Selmer) et/ou travaille sur un corps de nature différente dans un certain sens. C'est essentiellement le point où se trouve cette thèse.

Le thème général de cette thèse est d'étudier approximation faible et principe local-global pour certaines variétés qui sont "les plus simples" dans certains sens géométriques et qui sont définies sur des corps de certains types géométriques. Les trois chapitres de cette thèse se divisent en deux parties, selon la dépendance logique et la saveur des techniques impliquées. Le premier chapitre, indépendant des deux autres, concerne le problème d'approximation faible (ou ses formes faibles) pour les variétés sur des corps de fonctions de courbes, et fait usage de beaucoup de méthodes géométriques. Dans les deux autres chapitres, nous travaillons sur les corps de fonctions de surfaces henséliennes

∗. Par une place $v$ d'un corps $K$, nous entendons généralement une classe d'équivalence de valuations discrètes non triviales de $K$. Comme nous parlerons parfois de corps de nombres, nous permettons également à $v$ d'être un plongement de $K$ dans $\mathbb{C}$ en ce cas, comme il est d'usage dans la théorie des nombres.

locales et employons des outils plus algébriques. Le dernier chapitre, qui est consacré au principe local-global pour les quadriques ainsi que l'isotropie des formes quadratiques, repose en partie sur les résultats du second, où la ramification des algèbres à division et un principe local-global pour cyclicité sont discutés.

Décrirons maintenant en plus de détails le contenu de la thèse, chacun des trois chapitres séparément.

## Connexité rationnelle et approximation faible

Il est assez clair que parmi toutes les courbes algébriques celles qui sont (géométriquement) rationnelles sont les plus simples dans de nombreux aspects (géométrique, arithmétique, etc.). En géométrie algébrique, le meilleur analogue géométrique en dimension supérieure, à partir d'un point de vue de la classification et la déformation, est la notion de variété *rationnellement connexe*, qui a été introduite au début des années quatre-vingt-dix par Kollár, Miyaoka et Mori, et indépendamment par Campana. Grosso modo, les variétés rationnellement connexes sont des variétés qui contiennent beaucoup de courbes géométriquement rationnelles, afin que presque chaque paire de points géométriques puisse être reliée par une courbe géométriquement rationnelle. Une notion étroitement liée, qui semble cependant plus intéressante sur le côté arithmétique, est celle de $R$-équivalence (cf. Définition 1.2.7). Pour une variété projective lisse $X$ sur $\mathbb{C}$, dire que $X$ est rationnellement connexe revient à dire qu'il y a une seule classe de $R$-équivalence sur $X(\mathbb{C})$. En général, la classe des variétés rationnellement connexes comprend les variétés géométriquement unirationnelles (par exemple les quadriques), les espaces homogènes projectifs lisses sous des groupes linéaires algébriques et les hypersurfaces cubiques lisses de dimension $\geq 2$.

En plus d'un rôle très important qu'elles ont joué et continuent à jouer dans la géométrie algébrique complexe, les techniques géométriques attachées aux variétés rationnellement connexes se répercutent bientôt en géométrie arithmétique. Un premier résultat frappant est le théorème de Kollár sur la finitude de la $R$-équivalence sur les variétés rationnellement connexes sur les corps locaux ([Kol99]). Quant à la propriété d'approximation faible, le cas des courbes rationnelles étant classique, les mathématiciens se demandent ce qui peut être dit pour les variétiés rationnellement connexes de dimension supérieure. Les corps sur lesquels les méthodes géométriques s'appliquent le mieux à ce problème sont les corps de fonctions de courbes. Sur ces corps, les variétés rationnellement connexes semblent être la seule classe raisonnable de variétés pour laquelle on peut s'attendre à la propriété d'approximation faible ([Has10, Thm. 2.14]).

Dans un exposé à l'American Institute of Mathematics en décembre 2002, Hassett a posé la question sur l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes définies sur des corps de fonctions. Le contexte général est le suivant :

**(0.0.2)** Soit $k$ un corps, $C$ une courbe projective lisse sur $k$ de corps de fonctions $K = k(C)$ et $X$ une variété projective, lisse, *séparablement rationnellement connexe* (i.e. rationallement connexe plus certaine condition de séparabilité, voir Définition 1.2.2) sur $K$. Supposons

(1) $X(K) \neq \emptyset$ (C'est toujours le cas si $k$ est algébriquement clos, par les théorèmes principaux de [GHS03] et [dS03].) ;

et

(2) $X$ admet un modèle projectif lisse, i.e., il existe un morphisme surjectif $\pi : \mathcal{X} \to C$ d'une $k$-variété projective lisse $\mathcal{X}$ vers $C$ avec fibre générique $X/K$. (Cette condition est automatique en caractéristique 0, par résolution des singularités et la propreté des schémas de Hilbert).

Dans ce contexte, les points rationnels de la $K$-variété $X$ correspondent bijectivement aux sections de $\pi : \mathcal{X} \to C$ et l'approximation faible aux places données par les points fermés de $C$ équivaut à l'existence de sections passant par les points prescrits dans les fibres avec des jets prescrits (cf. §§1.3.1, 1.3.2).

Dans [HT06], Hassett and Tschinkel ont prouvé l'approximation faible aux places de bonne réduction dans le cas où $k$ est algébriquement clos. Ce théorème, ainsi que quelques autres cas traités dans [CTG03], les amène à poser la conjecture suivante, au sujet de laquelle on pourra consulter l'excellent article de synthèse [Has10].

**Conjecture 0.0.3** (Hassett–Tschinkel)**.** *Soit $K = k(C)$ le corps de fonctions d'une courbe $C$ projective lisse sur un corps algébriquement clos $k$ et soit $X$ une variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe sur $K$. Alors $X$ satisfait à l'approximation faible en toutes les places données par les points fermés de $C$.*

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous discutons la situation où le corps de base $k$ dans (0.0.2) n'est pas nécessairement algébriquement clos, et nous montrons que certaines affirmations arithmétiques sont toujours valables sous des hypothèses convenables.

Avec les notations et hypothèses comme dans (0.0.2), les résultats principaux du chapitre 1 peuvent être énoncés comme suit :

• (Théorème 1.1.4) *La $K$-variété $X$ satisfait à l'approximation faible aux places de bonne réduction si $k$ est une extension algébrique infinie d'un corps fini.*

• (Théorème 1.1.5) *Soit $k$ un corps local non archimédien. Si pour un point $p \in C(k)$ la $R$-équivalence sur la fibre $\mathcal{X}_p$ est triviale, alors il existe un ouvert non vide pour la $k$-topologie $W$ de $C(k)$ (qui est forcément Zariski dense dans $C$) tel que $X$ satisfait à l'approximation faible aux places dans $W$.*

• (Théorème 1.1.6) *Si $k$ est un corps fertile* (cf. Définition 1.2.5), *alors $X(K)$ est Zariski dense dans $X$. Ceci répond à une question de Wittenberg dans un cas spécial* (cf. Remarque 1.4.4).

• (Théorème 1.1.7) *Si $k$ est un corps fini de cardinal $\geq 11$ et $X$ est une hypersurface cubique lisse de dimension $\geq 2$, alors le cas d'ordre zéro d'approximation faible aux places de bonne réduction est valable pour $X$, i.e., étant donné un ensemble fini $\{ p_1, \ldots, p_n \}$ de points fermés de bonne réduction de $C$ et des points rationnels $r_i \in \mathcal{X}_{p_i}$ dans les fibres du modèle $\pi : \mathcal{X} \to C$, il existe une section $s : C \to \mathcal{X}$ telle que $s(p_i) = r_i$ pour chaque $i$.*

• (Théorème 1.1.8) *Si $k$ est un corps fini de cardinal $> 47$ et de caractéristique $\geq 5$, et si $X$ est une surface cubique lisse, alors pour toute place $v$ de bonne réduction, $X$ vérifie l'approximation faible en $v$.*

Pour plus de discussions sur l'arithmétique des variétés rationnellement connexes, le lecteur est renvoyé aux notes excellentes [Wit10] et [CT11].

## Algèbres à division sur les surfaces henséliennes

Soit $R$ un anneau intègre local, hensélien, excellent de dimension 2 de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. L'objectif du deuxième chapitre est de démontrer certains résultats sur le déploiement et la cyclicité des classes de Brauer sur $K$, qui seront utilisés au chapitre 3. Les approches que nous suivons deviennent plus algébriques à partir du chapitre 2.

Supposons que $k$ est un corps fini, $n > 0$ un entier inversible dans $k$ et $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$. Alors les résultats principaux du chapitre 2 comprennent les suivants :

• (Théorème 2.1.2 (i)) *Toute classe de Brauer d'indice $q$ sur $K$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$.*

• (Théorème 2.1.2 (ii)) *Toute classe de Brauer d'ordre $n$ sur $K$ a un indice qui divise $n^2$.*

• (Théorème 2.1.3) *Pour toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'ordre divisant $q$, si $\alpha \otimes_K K_v \in \mathrm{Br}(K_v)$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur le corps complété $K_v$ pour toute valuation discrète $v$ de $K$, alors $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $K$.*

Les deux premiers résultats sont des variantes de théorèmes de Saltman dans le contexte d'un corps de fonctions $p$-adique. La troisième affirmation, répondant à une question dans [CTOP02, Remark 3.7], sera appliquée au chapitre 3 pour obtenir un principe local-global pour les formes quadratiques de rang 5 sur $K$.

On remarque que la deuxième assertion ci-dessus est typiquement liée au problème de période-indice (cf. §2.4). Avec des résultats similaires ([CTOP02, Thm. 2.1], [HHK09, Coro. 5.6], [HHK11b, Thm. 4.6], [Lie11, Thm. 6.3], etc.), ceci nous amène à poser la question suivante.

**Question 0.0.4** (=**Question 2.4.10).** Soit $K$ le corps des fractions d'un anneau $R$ local intègre, hensélien, excellent de dimension 2 de corps résiduel $k$ de caractéristique $p = \mathrm{car}(k) \geq 0$. Supposons qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : pour toute extension de type fini de corps $k'/k$ de degré de transcendance $t \leq 1$, on a $\mathrm{ind}(\beta) \mid \mathrm{per}(\beta)^{d-1+t}$ pour toute classe de Brauer $\beta \in \mathrm{Br}(k')$ de période non divisible par $p$.

*Est-ce que la relation* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$ *est vraie pour toute classe de Brauer* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période non divisible par* $p$ *? Est-ce que la relation plus faible* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+2}$ *est vraie pour toute* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période non divisible par* $p$ *?*

## Formes quadratiques sur les surfaces henséliennes

Travaillant à nouveau sur le corps des fractions $K$ d'un anneau $R$ intgre local, hensélien, excellent de dimension 2 (de corps résiduel $k$), nous nous concentrons au chapitre 3 sur le principe local-global et l'isotropie des formes quadratiques. On suppose jusqu'à la fin de cette introduction que $k$ est de caractéristique $\neq 2$.

Les résultats locaux-globaux que nous avons obtenus sont les suivants :

• (Théorème 3.1.2) Le principe local-global par rapport aux valuations divisorielles de $K$ vaut pour les formes quadratiques de rang 3 ou 4 (en supposant simplement que le corps résiduel $k$ est de caractéristique $\neq 2$).

• (Théorème 3.1.3) *Soit $K$ le corps des fractions d'un anneau de séries formelles $R = A[\![t]\!]$ sur un anneau de valuation discrète complet $A$. Supposons que pour toute extension finie $k'/k$, toute forme quadratique de rang $> d$ sur $k'$ a un zéro non trivial. Alors le principe local-global par rapport aux valuations divisorielles de $K$ vaut pour les formes quadratiques de rang $> 2d$ sur $K$. En particulier, si le corps résiduel $k$ de $A$ est fini, alors on obtient le principe local-global pour les formes quadratiques de rang $\geq 5$.*

• (Théorème 3.1.5) *Supposons que $k$ est fini* (*avec $R$ général*)*. Alors les formes quadratiques de rang 5 sur $K$ satisfont au principe local-global par rapport aux valuations divisorielles.*

Les méthodes dans les preuves conduisent aux principes locaux-globaux suivants pour les torseurs :

• (Théorème 3.2.3) L'application naturelle

$$\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \prod_v \mathrm{Br}(K_v)$$

où $v$ parcourt toutes les valuations divisorielles de $K$, est injective (sans hypothèse supplémentaire sur $k$). En d'autres termes, le principe local-global est valable pour les $\mathrm{PGL}_n$-torseurs.

• (Théorème 3.4.13 et Remarque 3.4.15) Soit $\phi$ une forme quadratique non singulière de rang $r$ sur $K$. Si $r = 2$ ou 3, le principe local-global par rapport aux valuations divisorielles vaut pour les $\mathrm{SO}(\phi)$-torseurs sur $K$. Si $k$ est fini, le même est valable pour tout $r \geq 2$.

En utilisant les résultats du chapitre 2, nous obtenons également le théorème suivant.

• (Théorème 3.1.8) *Supposons $k$ fini. Alors le $u$-invariant de $K$ est $u(K) = 8$, c'est à dire, toute forme quadratique de rang $\geq 9$ a un zéro non trivial sur $K$.*

Nous finissons l'introduction en mentionnant un résultat récent de Harbater, Hartmann et Krashen, qui a une intersection non vide avec notre théorème 3.1.8 :

([HHK11b, Coro. 4.2]) Si $K$ est une extension finie séparable de $k((x, y))$, alors $u(K) \leq 4u_s(k)$, où $u_s(k)$ désigne le $u$-invariant strict de $k$ (cf. (3.1.7)).

# Chapitre 1

# Approximation faible sur les corps de fonctions de courbes

Soit $K = k(C)$ le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur un corps $k$. Soit $X$ une variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe (cf. Définition 1.2.2) sur $K$ avec $X(K) \neq \emptyset$. Lorsque le corps de base $k$ est algébriquement clos, un théorème très intéressant de Hassett–Tschinkel a confirmé l'approximation faible aux places de bonne réduction pour $X$.

L'objet général de ce chapitre est d'étudier la propriété d'approximation faible pour $X$ dans le cas où $k$ n'est plus forcément algébriquement clos. Sous des hypothèses convenables, nous prouvons la densité de Zariski de $X(K)$ ainsi que quelques analogues du théorème de Hassett–Tschinkel quand $k$ est un corps fertile (cf. Définition 1.2.5). Dans le cas où $k$ est fini, on obtient un résultat pour l'approximation faible à l'ordre 0 pour les hypersurfaces cubiques et on démontre pour les surfaces cubiques l'approximation faible en une place donnée de bonne réduction. Les preuves combinent des techniques développées par Hassett et Tschinkel avec quelques résultats de Kollár et Szabó. Une idée de Swinnerton-Dyer sur la descente des points rationnels sur les cubiques a été également utilisée.

Tous les résultats dans ce chapitre ont été publiés dans [Hu10b].

**Convention.** Dans tout ce chapitre, par ***variété*** on entend un schéma séparé de type fini et géométriquement intègre sur un corps. De façon un peu incohérente, une ***courbe*** signifie un schéma séparé, de type fini, géométriquement connexe et géométriquement réduite, et de dimension 1 sur un corps. Les mots "***fibré vectoriel***" seront utilisés de façon interchangeable comme "faisceau localement libre de rang constant fini".

## 1.1 Introduction

**(1.1.1)** Étant donnée une variété sur un corps topologique $F$, la topologie de $F$ induit une topologie sur l'ensemble des points rationnels de cette variété. On l'appelle la ***F-topologie***. Si $K \subseteq F$ est un sous-corps et $X$ est une $K$-variété, l'ensemble $X(F)$ des $F$-points est muni d'une $F$-topologie via l'identification naturelle $X(F) = X_F(F)$, où $X_F = X \times_K F$ est la $F$-variété obtenue par extension de base de la $K$-variété $X$.

**(1.1.2)** Soit $K$ un corps de nombres ou le corps de fonctions d'une courbe. Le complété $K_v$ en chaque place $v$ de $K$ est un corps topologique contenant $K$. Les $K_v$-topologies seront appelées aussi ***topologies v-adiques***. Étant donné un ensemble $\Omega$ de places de $K$, on dit qu'une $K$-variété $X$ satisfait à l'***approximation faible*** aux places dans $\Omega$ si l'image de l'application diagonale

$$X(K) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega} X(K_v)$$

est dense, où $\prod_{v \in \Omega} X(K_v)$ est muni de la topologie produite des topologies $v$-adiques. Le théorème d'approximation classique affirme que la droite projective $\mathbb{P}^1$ satisfait à l'approximation faible en toutes les places. En dimension supérieure et sur le corps de fonctions d'une courbe définie sur un corps algébriquement clos, il est attendu que l'approximation faible vaut pour les variétés ***séparablement rationnellement connexes***. Grosso modo, ce sont des variétés contenant de nombreuses courbes rationnelles géométriques qui peuvent être déformées "très librement". (Voir Définition 1.2.2 pour la définition précise.)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème suivant.

**Problème 1.1.3.** Soient $k$ un corps, $C$ une courbe (sous-entendu géométriquement connexe) projective lisse sur $k$, $K = k(C)$ le corps de fonctions de $C$, et $X$ une $K$-variété projective, lisse et séparablement rationnellement connexe. Supposons que $X$ admet un modèle projective lisse, i.e., il existe un morphism surjectif $\pi : \mathcal{X} \to C$ d'une $k$-variété projective lisse $\mathcal{X}$ vers $C$ dont la fibre générique est isomorphe à $X/K$. Dans ce contexte, les points rationnels de $X$ correspondent aux sections de $\pi : \mathcal{X} \to C$ et l'approximation faible revient à l'existence de sections passant par les points prescrits dans les fibres avec des jets prescrits.

Considérons les questions suivantes :

(EX) (Existence de sections) L'ensemble $X(K)$ est-il non vide ? Ou ce qui est équivalent, le morphisme $\pi$ admet-il une section $\sigma : C \to \mathcal{X}$ ?

(SP) (Surjectivité de l'application de spécialisation) Supposons que $\pi$ admet une section $\sigma : C \to \mathcal{X}$. Soit $P = \{ p_1, \ldots, p_n \}$ un ensemble fini de points fermés de $C$ tel que chaque fibre $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{p_i}$ est lisse et séparablement rationnellement connexe (un point avec cette propriété sera dit ***de bonne réduction***). Étant donnés des points rationnels $r_i \in \mathcal{X}_i(\kappa(p_i))$ dans les fibres, existe-t-il une section $s : C \to \mathcal{X}$ de $\pi$ telle que $s(p_i) = r_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ ?

(AF) (Approximation faible) Supposons $X(K) \neq \emptyset$. Est-ce que la fibre générique $X$ satisfait à l'approximation faible en une certaine collection de places ?

Lorsque $k$ est algébraiquement clos, une série de résultats ont été établis. Premièrement, Kollár, Miyaoka et Mori [KMM92a] ont prouvé que la question (SP) a une réponse positive dans ce cas. Plus tard, la question (EX) a été résolue par Graber, Harris et Starr [GHS03] en caractéristique 0 et bientôt généralisée à la caractéristique positive par de Jong et Starr [dS03]. Quant à la question (AF), Colliot-Thélène et Gille [CTG03] démontrent que si $X$ appartient à une classe spéciale de variétés, y compris les surfaces fibrées en coniques et les surfaces de del Pezzo de degré $\geq 4$, alors $X$ satisfait à l'approximation faible en toutes les places. Pour les variétés séparablement rationnellement connexes en général, Hassett et Tschinkel [HT06] ont démontré l'approximation faible aux places de bonne réduction, généralisant le cas des surfaces cubiques obtenu auparavant par Madore [Mad06a]. Dans le même article, ils ont conjecturé que l'approximation faible aux places de mauvaise réduction vaut également. Cette conjecture est ouverte même pour les surfaces cubiques. L'article [HT08] de Hassett et Tschinkel confirme l'approximation faible pour les surfaces cubiques avec pas trop mauvaise réduction. Un résultat similaire a été obtenu par Knecht [Kne] pour les surfaces de del Pezzo de degré 2. Aussi inspiré par les méthodes de Hassett et Tschinkel [HT08], Xu [Xu] a prouvé l'approximation faible pour les surfaces de del Pezzo de degré $\leq 2$ qui admettent un modèle avec une certaine bonne propriété. Pour les surfaces de del Pezzo quelconques de degré $\leq 3$, la question est encore ouverte. Pour plus d'informations sur la conjecture de Hassett–Tschinkel, nous renvoyons le lecteur au très bon article de survol [Has10].

Quant au cas où $k$ n'est plus algébriquement clos, des résultats particuliers pour quelques corps spéciaux (par exemple, les réels $\mathbb{R}$) ont été établis par des méthodes un peu différentes (cf. [CT96], [Sch96], [Duc98]).

Dans ce chapitre, nous étudions le cas où le corps de base $k$ est un corps fertile ("large" en anglais, cf. Définition 1.2.5) ou un corps fini. L'approche que nous suivons a été suggérée par Colliot-Thélène et Hassett en 2005. Elle s'appuie fortement sur la méthode de Hassett et Tschinkel [HT06] ainsi que sur certains résultats de Kollár et Szabó ([Kol02], [Kol99], [KS03]).

Nos résultats principaux sont les suivants.

**Théorème 1.1.4.** *Avec les notations de* (1.1.3)*, soit $k$ un corps, extension infinie algébrique d'un corps fini. Supposons $X(K) \neq \emptyset$.*

*Alors la $K$-variété $X$ satisfait à l'approximation faible aux places de bonne réduction.*

**Théorème 1.1.5.** *Avec les notations de* (1.1.3)*, soit $k$ un corps local non archimédien. Supposons que $\pi : \mathcal{X} \to C$ possède une section.*

*Si pour un point $p \in C(k)$, la $R$-équivalence* (*cf. Définition* 1.2.7) *sur les points rationnels de la fibre $\mathcal{X}_p$ est triviale, alors il existe un ouvert non vide $W \subseteq C(k)$ pour la $k$-topologie* (*qui est forcément Zariski dense dans $C$*) *tel que la $K$-variété $X$ satisfait à l'approximation faible aux places dans $W$.*

**Théorème 1.1.6.** *Avec les notations de* (1.1.3), *soit $k$ un corps fertile. Si $X(K) \neq \emptyset$, alors $X(K)$ est Zariski dense dans la $K$-variété $X$.*

Les démonstrations des trois théorèmes ci-dessus se trouvent au §1.4. Les méthodes que nous avons utilisées dans les preuves donnent aussi les théorèmes suivants.

**Théorème 1.1.7.** *Soit $k = \mathbb{F}$ un corps fini, $C$ une courbe projective lisse* (*géométriquement connexe*) *sur $k$, $K = k(C)$ son corps de fonctions, et $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^N_k \times_k C$ une sous-variété fermée lisse telle que la projection canonique $\pi : \mathcal{X} \to C$ est un morphisme surjectif dont la fibre générique est une hypersurface cubique lisse $X \subseteq \mathbb{P}^N_K$ de dimension $\geq 2$. Supposons $X(K) \neq \emptyset$.*

*Alors pour tout ensemble fini $P$ de points fermés de bonne réduction de $C$ avec*

$$|\kappa(p)| > 10\,, \quad \forall\, p \in P\,,$$

*l'application de spécialisation*

$$X(K) \longrightarrow \prod_{p \in P} \mathcal{X}_p(\kappa(p)) \tag{1.1.7.1}$$

*est surjective. En particulier, si $|k| > 10$, alors la question* (SP) *a une réponse affimative dans cette situation.*

Pour prouver le théorème ci-dessus, on utilise certaines idées de Swinnerton-Dyer, qui a prouvé un résultat analogue pour les surfaces cubiques sur les corps de nombres (cf. [SD01, Thm. 5]). En particulier, sa méthode de descente à partir d'une tour d'extensions quadratiques du corps de base a trouvé une application significative dans notre preuve. Encore un autre ingrédient important est un résultat de Kollár sur la géométrie des hypersurfaces cubiques sur un corps fini ([Kol08, Lemma 9.4]).

En conséquence, nous obtenons un théorème d'approximation faible pour les surfaces cubiques, ce qui est analogue à un résultat de Swinnerton-Dyer ([SD01, Corollary to Theorem 5]).

**Théorème 1.1.8.** *Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique ne divisant pas 6 et de cardinal $q > 47$, $C$ une courbe projective lisse* (*sous-entendu géométriquement connexe*) *sur $k$, $K = k(C)$ son corps de fonctions, et $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^3_k \times_k C$ une sous-variété fermée lisse telle que la projection canonique $\pi : \mathcal{X} \to C$ est un morphisme surjectif dont la fibre générique est une surface cubique lisse $X \subseteq \mathbb{P}^3_K$ avec $X(K) \neq \emptyset$. Soit $v$ une place de bonne réduction correspondant à un point fermé $p \in C$.*

*Alors $X(K)$ est $v$-adiquement dense dans $X(K_v)$. Plus précisément, pour tout $x \in \mathcal{X}_p(\kappa(p))$ il existe une classe $\mathscr{C}$ de $R$-équivalence sur $X(K)$ telle que $\mathscr{C}$ est $v$-adiquement dense dans l'image réciproque de $x$ par l'application de spécialisation $X(K_v) \to \mathcal{X}_p(\kappa(p))$.*

Ces deux derniers théorèmes seront démontrés au §1.5.

## 1.2 Rappels sur certaines notions de base

### 1.2.1 Connexité rationnelle séparable

**Définition 1.2.1** ([Deb01, Definition 4.5])**.** Soit $X$ une variété lisse et $r \geq 0$ un entier. Une ***courbe rationnelle*** $r$***-libre*** sur $X$ est un morphisme non constant $f : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que

$$f^*T_X \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$$

avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq r$. (D'après un théorème de Grothendieck ([Har77, p.384, Exercise 2.6]), tout fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ est isomorphe à une somme directe $\oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ et la suite $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ est uniquement déterminée par le fibré vectoriel.) On dira ***libre*** (resp. ***très libre***) au lieu de 0-libre (resp. 1-libre).

**Définition 1.2.2** ([Kol96], IV.3.2)**.** Soit $k$ un corps et $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$. Une $k$-variété propre lisse $X$ est appelée ***séparablement rationnellement connexe*** si elle a la propriété suivante :

(1) Il existe un $k$-schéma algébrique séparé intègre $Z$ et un morphisme $g : \mathbb{P}^1 \times_k Z \to X$ tel que le morphisme

$$g^{(2)} : \ \mathbb{P}^1 \times_k \mathbb{P}^1 \times_k Z \longrightarrow X \times_k X \, ; \ \ (t_1\,,\, t_2\,,\, z) \mapsto (g(t_1\,,\, z)\,,\, g(t_2\,,\, z))$$

soit dominant et *lisse au point générique*.

Lorsque $\dim X > 0$, ceci équivaut à chacune des deux propriétés suivantes :

(2) Il existe une courbe rationnelle très libre $\mathbb{P}^1_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ définie sur $\bar{k}$.

(3) Pour toute collection finie de points fermés $x_1, \dots, x_m \in X_{\bar{k}}$ et toutes directions tangentes $\xi_i$ aux points $x_i$, il existe une courbe très libre $f : \mathbb{P}^1_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ définie sur $\bar{k}$ telle que $f$ est un morphisme non ramifié dont l'image contient tous les points $x_i$ comme points lisses et a directions tangentes $\xi_i$ en ces points.

Pour une preuve des équivalences ci-dessus, voir [Kol96, IV.3.7 et 3.9] et [Deb03, Théorème 2.2].

***Remarque*** 1.2.3.

(1) Si la condition sur la lissité générique de $g^{(2)}$ est enlevée dans la définition 1.2.2 (1), alors on obtient la notion de variété ***rationnellement connexe***. En caractéristique 0, il est clair que la connexité rationnelle coïncide avec la connexité rationnelle séparable.

(2) Si $k$ est un corps algébriquement clos non dénombrable de caractéristique 0, alors une $k$-variété propre lisse $X$ est rationnellement connexe si et seulement si tous deux points de $X(k)$ peuvent être reliés par une courbe rationnelle.

(3) Dans la définition 1.2.2 (3), on peut prendre $f$ une immersion fermée si $\dim X \geq 3$.

**Exemple 1.2.4.**

(1) Une $k$-variété lisse $X$ est séparablement rationnellement connexe si elle est géométriquement séparablement unirationnelle (i.e., sur $\bar{k}$ il existe une application rationnelle dominante séparable d'un $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ vers $X_{\bar{k}}$).

(2) En caractéristique 0, les variétés lisses de Fano sont séparablement rationnellement connnexes (Campana, [Cam92], ou indépendamment Kollár–Miyaoka–Mori, [KMM92b]). En particulier, une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^n$ de degré $d \leq n$ est séparablement rationnellement connexe en caractéristique 0.

(3) Les espaces homogènes projectfs lisses sous des groupes algébriques linéaires connexes lisses sont rationnellement connexes ([BBK96]).

(4) En caractéristique $p > 0$, les hypersurfaces cubiques lisses de dimension $\geq 2$ sont séparablement rationnellement connexes (cf. [Mad06b]). L'unirationalité séparable pour les hypersurfaces cubiques lisses a été étudiée par Conduché dans sa thèse [Con06].

### 1.2.2 Corps fertiles et $R$-équivalence

**Définition 1.2.5** ([FJ86, Chap. 10] et [Pop96])**.** Un corps $k$ est dit

(1) ***pseudo-algébriquement clos*** (PAC), si toute $k$-variété (géométriquement intègre) a un point rationnel ;

(2) ***fertile*** (***large*** en anglais), si pour toute $k$-variété (géométriquement intègre) $X$ ayant un $k$-point lisse, $X(k)$ est Zariski dense dans $X$.

**Exemple 1.2.6.**

(1) Les corps PAC sont des corps fertiles. Les extensions algébriques des corps PAC (resp. fertiles) sont PAC (resp. fertiles). (cf. [FJ86, Chap. 10] et [Pop96, Prop. 1.2].)

(2) Les extensions algébriques infinies des corps finis sont PAC. (cf. [FJ86, Chap. 10].)

(3) La classe des corps fertiles contient tous les corps locaux (i.e., extensions finies de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ ou corps des séries de Laurent $\mathbb{F}_p((t))$ sur un corps fini $\mathbb{F}_p$). Plus généralement, un corps qui est complet par rapport à une valeur absolue non triviale est fertile.

(4) Tous les corps réellement clos et tous les corps $p$-adiquement clos (i.e., corps dont le groupe de Galois absolu est isomorphe à celui de $\mathbb{R}$ ou celui d'un corps $p$-adique) sont fertiles (cf. [PR84, Thm. 7.8]).

**Définition 1.2.7** (Manin)**.** Soit $X$ un schéma algébrique sur un corps $k$. Deux points rationnels $x$, $y \in X(k)$ sont dits ***directement $R$-équivalent*** s'il existe un application $k$-rationnelle $f : \mathbb{P}^1_k \dashrightarrow X$ telle que $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$. La ***$R$-équivalence*** sur $X(k)$ est la relation d'équivalence engendrée par la $R$-équivalence directe. Nous écrirons $X(k)/R$ pour l'ensemble des classes de $R$-équivalence sur $X(k)$. Quand $X(k)/R$ a un seul élément, nous écrivons $X(k)/R = 1$ et disons que la $R$-equivalence est triviale sur $X$.

La $R$-équivalence est étroitement liée à la connexité rationnelle séparable. Dans [Kol99], Kollár a démontré la finitude des classes de $R$-équivalence sur les variétés séparablement rationnellement connexes sur les corps locaux. Il a ensuite généralisé le théorème principal de [Kol99] comme suit.

**Théorème 1.2.8** (Kollár, [Kol04, Thm. 23]). *Soit $k$ un corps fertile et soit $X$ une $k$-variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe de dimension $\geq 3$. Soit $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in X(k)$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une immersion fermée $f : \mathbb{P}^1 \to X$ qui est $(n+1)$-libre telle que $x_1, \ldots, x_n \in f(\mathbb{P}^1(k))$.*

(ii) *Tous les points $x_i \in X(k)$ sont dans la même classe de $R$-équivalence.*

On remarque qu'en général il peut arriver qu'il n'y ait aucune courbe rationnelle lisse passant par un ensemble fini donné de points rationnels sur une variété $X$ comme dans le théorème précédent. Une condition suffisante pour cela est que le corps de base $k$ est PAC (cf. [KS03, Theorem 19] et [Wit10, Corollaire 3.2]). Si $k = \mathbb{F}$ est un corps fini, on a le résultat suivant.

**Théorème 1.2.9** (Kollár et Szabó, [KS03, Theorems 2 and 7]).

(i) *Il existe une fonction $\Phi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : Soit $X \subseteq \mathbb{P}^N$ une variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe et de dimension $\geq 3$ sur un corps fini $\mathbb{F}$, et soit $S \subseteq X$ un sous-schéma lisse de dimension zéro. Si $|\mathbb{F}| > \Phi(\deg X, \dim X, \deg S)$, alors il existe une immersion fermée $f : \mathbb{P}^1 \to X$ qui est $(\deg S + 1)$-libre dont l'image contient $S$.*

(ii) *Il existe une fonction $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : Soit $X \subseteq \mathbb{P}^N$ une variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$. Si $|\mathbb{F}| > \Psi(\deg X, \dim X)$, alors $X(\mathbb{F})/R = 1$.*

Dans les deux théorèmes précédents l'hypothèse $\dim X \geq 3$ n'est pas essentielle. Elle nous permet de prendre pour $f$ une immersion fermée. Si $\dim X = 2$, on peut appliquer le théorème à $X \times_k \mathbb{P}^1$ pour obtenir une courbe rationnelle passant par les points donnés.

***Remarque*** 1.2.10. Dans le théorème 1.2.9 (ii), si on se restreint au cas où $X \subseteq \mathbb{P}^N$ est une hypersurface cubique lisse de dimension $\geq 2$, alors [Kol08, Theorem 1.1] donne une meilleure borne inférieure pour $|\mathbb{F}|$ : on a $X(\mathbb{F})/R = 1$ dès que $|\mathbb{F}| \geq 11$. *

## 1.3 Approximation faible sur les corps de fonctions

Pour établir l'approximation faible, nous utilisons la méthode initiée par Hassett et Tschinkel dans [HT06]. Dans ce numéro nous rappelons brièvement

*. La borne inférieure $|\mathbb{F}| \geq 8$ initialement donnée dans [Kol08] doit être remplacée par $|\mathbb{F}| \geq 11$. Voir aussi la note attachée au lemme 1.5.4.

leur méthode.

### 1.3.1 Interprétation géométrique

Soit $K = k(C)$ le corps de fonctions d'une courbe projective lisse et soit $X$ une variété propre lisse sur $K$. Un résultat de Nagata ([Nag62]) garantit que $X$ admet toujours un ***modèle propre***, c'est à dire, un espace algébrique $\pi : \mathcal{X} \to C$ qui est plat et propre sur $C$ avec fibre générique $X$. Les points rationnels de $X$ correspondent bijectivement et d'une manière naturelle aux sections de $\pi : \mathcal{X} \to C$.

Nous supposons pour simplifier que $X$ *est projective et admet un modèle projectif et lisse* $\pi : \mathcal{X} \to C$ comme dans le problème 1.1.3.

Pour tout point fermé $p \in C$, soit $\mathcal{X}_p = \mathcal{X} \times_C \mathrm{Spec}(\kappa(p))$ la fibre sur $p$. Soit $\widehat{\mathscr{O}}_{C,p}$ l'anneau local complété en $p$, avec idéal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}_{C,p}$. Si $v$ désigne la place de $K$ correspondant à $p$, alors $K_v$ est le corps des fractions de $\widehat{\mathscr{O}}_{C,p}$. Soient $\widehat{C}_p = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{C,p})$, $\mathcal{X}_{\widehat{C}_p} = \mathcal{X} \times_C \widehat{C}_p$ et $\widehat{\pi}_p : \mathcal{X}_{\widehat{C}_p} \to \widehat{C}_p$ la projection naturelle. Les sections de $\widehat{\pi}_p$ correspondent bijectivement aux points de $X$ à valeurs dans $K_v$. Supposons qu'un point $M_v \in X(K_v)$ correspond à une section $\widehat{s}_p : \widehat{C}_p \to \mathcal{X}_{\widehat{C}_p}$. Alors les voisinages $v$-adiques ouverts fondamentaux de $M_v$ se composent des sections de $\widehat{\pi}_p$ qui coïncident avec

$$\widehat{C}_{p,N} := \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{C,p}/\widehat{\mathfrak{m}}_{C,p}^{N+1}) \hookrightarrow \widehat{C}_p \xrightarrow{\widehat{s}_p} \mathcal{X}_{\widehat{C}_p}$$

quand on se restreint à $\widehat{C}_{p,N} \subseteq \widehat{C}_p$, pour certain $N \in \mathbb{N}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on dit qu'un morphisme

$$j : \quad \widehat{C}_{p,N} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{C,p}/\widehat{\mathfrak{m}}_{C,p}^{N+1}) \longrightarrow \mathcal{X}_{\widehat{C}_p} = \mathcal{X} \times_C \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{C,p})$$

est un $N$-***jet*** en le point fermé $p \in C$ si $\widehat{\pi}_p \circ j$ coïncide avec l'inclusion naturelle $\widehat{C}_{p,N} \hookrightarrow \widehat{C}_p = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{C,p})$. Une section de $\widehat{\pi}_p$ détermine naturellement un $N$-jet.

Ainsi l'approximation faible sur les corps de fonctions admet une reformulation géométrique de la façon suivante : pour tout ensemble fini de points fermés $\{p_i\}$ dans $C$, toutes sections $\widehat{s}_i$ de $\widehat{\pi}_{p_i}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une section $s$ de $\pi$ telle que pour chaque $i$, les $N$-jets déterminés par $s$ et $\widehat{s}_i$ coïncident.

### 1.3.2 Éclatement itéré et approximation faible

Nous conservons la notation ci-dessus. Pour développer la méthode de Hassett et Tschinkel sur un corps de base arbitraire $k$, nous supposons que les places dans les discussions ci-dessous sont donnés par des *points séparables* (i.e. des points dont les corps résiduels sont séparables sur $k$).

Soit $\{ p_i \} \subseteq C$ un ensemble fini de points fermés séparables de bonne réduction et soit $J = \{ j_i \}$ des $N$-jets en ces points donnés par des sections formelles $\widehat{s}_i$ de $\widehat{\pi}_{p_i} : \mathcal{X}_{\widehat{C}_{p_i}} \to \widehat{C}_{p_i}$. En considérant l'***éclatement itéré*** associé à $J$, dont nous rappelons la construction ci-dessous, Hassett et Tschinkel ont pu ramener le problème de trouver une section passant par les points donnés avec les données de jets prescrits à trouver simplement une section passant par des points donnés sur l'éclatement itéré.

Voici la construction de cet éclatement itéré $\beta(J) : \mathcal{X}(J) \to \mathcal{X}$ associé à $J$. Il est obtenu par la suite suivante d'éclatements :

$$\mathcal{X}(J) = \mathcal{X}_{(N)} \to \mathcal{X}_{(N-1)} \to \cdots \to \mathcal{X}_{(1)} \to \mathcal{X}$$

où $\mathcal{X}_{(1)} \to \mathcal{X}$ est l'éclatement de $\mathcal{X}$ en $\{\, \widehat{s}_i(p_i) \,\}$ et pour tout $n = 1, \ldots, N-1$, $\mathcal{X}_{(n+1)} \to \mathcal{X}_{(n)}$ est l'éclatement aux points où le transformé propre de $\widehat{s}_i$ rencontre la fibre sur $p_i$.

Écrirons $d = \dim X$. Pour tout $i$ la fibre $\mathcal{X}(J)_{p_i}$ se décompose en certaines composantes irréductibles :

$$\mathcal{X}(J)_{p_i} = E_{i,0} \cup \cdots \cup E_{i,N}$$

où

(i) $E_{i,0}$ est le transformé propre de $\mathcal{X}_{p_i}$, isomorphe à l'éclatement de $\mathcal{X}_{p_i}$ en le $\kappa(p_i)$-point $r_{i,0} := \widehat{s}_i(p_i)$ ;

(ii) pour $n = 1, \ldots, N-1$, $E_{i,n}$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^d_{\kappa(p_i)}$ en le $\kappa(p_i)$-point $r_{i,n}$ où le transformé propre de $\widehat{s}_i$ rencontre la fibre sur $p_i$ du $n$-ième éclatement ;

(iii) $E_{i,N} \cong \mathbb{P}^d_{\kappa(p_i)}$.

Désignons par $r_i \in E_{i,N} \setminus E_{i,N-1}$ le point où le transformé propre de $\widehat{s}_i$ rencontre $E_{i,N}$. Les sections $s'$ of $\mathcal{X}(J) \to C$ avec $s'(p_i) = r_i$ donnent des sections de $\pi : \mathcal{X} \to C$ avec $N$-jets $j_i$ en les points $p_i$. On a ainsi le critère suivant :

**Proposition 1.3.1** ([HT06], Proposition 11)**.** *Soient $X$, $C$ et $\pi : \mathcal{X} \to C$ comme ci-dessus. Considérons toutes les données $(\{\, p_i \,\},\ J = \{\, j_i \,\},\ \{\, r_i \,\})$ constituées d'une collection finie de points fermés séparables $\{\, p_i \,\} \subseteq C$ de bonne réduction, des $N$-jets $\{\, j_i \,\}$ en ces points et des $\kappa(p_i)$-points $\{\, r_i \,\}$ sur l'éclatement itéré correspondant $\mathcal{X}(J)$ avec $r_i \in E_{i,N} \setminus E_{i,N-1}$.*

*Si pour chaque donnée, il existe une section $s'$ de $\mathcal{X}(J) \to C$ avec $s'(p_i) = r_i$ pour tout $i$, alors $X$ satisfait à l'approximation faible aux places données par les points fermés séparables de bonne réduction.*

### 1.3.3 Déformations des peignes

Les étapes principales de la construction de sections passant par des points prescrits impliquent des techniques de lissage de peignes.

**Définition 1.3.2** ([HT06], Definition 18)**.** Soit $k$ un corps quelconque et soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$. Un ***peigne avec*** $m$ ***dents*** (***réductibles***) sur $k$ est une courbe projective $C^*$ sur $k$ avec une composante irréductible distinguée $D \subseteq C^*$ définie sur $k$ telle que les conditions suivantes sont remplies :

(1) $D$ est une courbe lisse (sous-entendu géométriquement connexe) sur $k$, dite ***manche*** du peigne ;

(2) $\overline{C}^* = C^* \times_k \bar{k}$ est la réunion de $\overline{D} = D \times_k \bar{k}$ et de $m$ autres courbes $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_m$ qui sont appelées ***dents*** du peigne ;

(3) chaque $\overline{T}_j$ est une une chaîne de $\mathbb{P}^1$ ;

(4) les courbes $\overline{T}_j$ sont disjointes les unes des autres et chacune d'elles rencontre $\overline{D}$ transversalement en un seul point.

Soit $X$, $C, \pi : \mathcal{X} \to C, \{ p_i \}$ et ainsi de suite comme dans la proposition 1.3.1. Rappelons que l'espace total $\mathcal{X}$ est projectif lisse et que les $p_i$ sont des points séparables. Puisque $X$ satisfait à l'approximation faible si et seulement si $X \times_K \mathbb{P}^1_K$ le fait, on peut, sans perte de généralité, supposer que $d = \dim X \geq 3$.

Supposons que nous sommes donnés une section $\sigma : C \to \mathcal{X}(J)$. Soit $I'$ (resp. $I''$) l'ensemble des indices avec $q_i := \sigma(p_i) \neq r_i$ (resp. $q_i = r_i$).

Travaillant sur un corps de base algébriquement clos $k$, la plupart des parties techniques de [HT06] montre qu'une section $C \to \mathcal{X}(J)$ passant par $r_i$ peut être trouvée dès que les deux tâches suivantes (A) et (B) peuvent être accomplies :

(A). Dans le cas $N = 0$, trouver un peigne $C^*$ avec manche $D = \sigma(C)$ et dents lisses $T_1, \ldots, T_m$ et une immersion fermée $f : C^* \to \mathcal{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) les dents $T_j$ sont des courbes rationnelles très libres contenues dans des fibres générales distinctes de $\pi$ ;

(ii) pour chaque $i \in I'$, il existe une dent $T_i$ dont l'image contient $r_i$ comme un point lisse ;

(iii) si $\mathfrak{r}$ désigne l'ensemble des points sur $C^*$ qui s'envoient sur les points $r_i$, $i \in I = I' \cup I''$ et si $N_f = N_{C^*/\mathcal{X}}$ désigne le fibré normal de $C^*$ dans $\mathcal{X}$, alors la restriction de $N_f \otimes \mathscr{O}_{C^*}(-\mathfrak{r})$ à chaque composante irréductible de $C^*$ est engendrée par ses sections globales et n'a aucune cohomologie en degré supérieur.

(B). Dans le cas $N \geq 1$, supposons $q_i \in E_{i,N} \setminus E_{i,N-1}$. Trouver un peigne $C^*$ avec manche $D = \sigma(C)$ et des dents réductibles $T_1, \ldots, T_m$ et une immersion fermée $f : C^* \to \mathcal{X}(J)$ ayant les propriétés suivantes :

(i) pour chaque $i \in I'$, il existe une dent $T_i$ qui est envoyée dans $\mathcal{X}(J)_{p_i}$ et qui contient $r_i$ ;

(ii) pour chaque $i \in I'$, $f(C^*)$ contient $r_i$ comme un point lisse, et donc il existe une composante irréductible unique $T_{i,N} \subseteq C^*$ dont l'image contient $r_i$ ;

(iii) les autres dents $T_j$, $j = |I'| + 1, \ldots, m$ sont des courbes rationnelles très libres contenues dans des fibres générales distinctes de $\mathcal{X}(J) \to C$ ;

(iv) si $\mathfrak{r}$ est l'ensemble de points sur $C^*$ qui s'envoient sur les points $r_i$, $i \in I = I' \cup I''$ et si $N_f = N_{C^*/\mathcal{X}(J)}$ désigne le fibré normal de $C^*$ dans $\mathcal{X}(J)$, alors la restriction de $N_f \otimes \mathscr{O}_{C^*}(-\mathfrak{r})$ à chaque composante irréductible de $C^*$ est engendré par ses sections globales et n'a aucune cohomologie en degré supérieur.

Dans [HT06], (A) et (B) sont faites dans [HT06, Lemmas 25 and 26], en supposant bien sûr que la fibre générique $X$ est séparablement rationnellement connexe. La section désirée est une courbe lisse déformée du peigne $C^*$, ce qui est obtenue en appliquant [HT06, Proposition 24].

La condition clé ici est l'annulation de la cohomologie en degré supérieur du fibré normal tordu $N_f \otimes \mathscr{O}_{C^*}(-\mathfrak{r})$. Nous considérons cette condition sur chaque composante irréductible de $C^*$. Pour une composante dans une dent $T_j$, la condition est facile à vérifier car une telle courbe est en général une courbe très libre. La partie difficile est la restriction au manche $D = \sigma(C)$. Heureusement, le faisceau $N_f \otimes \mathscr{O}_D$ a une belle interprétation en tant qu'une sorte de transformé élémentaire de $N_\sigma$, où $N_\sigma$ désigne le fibré normal de $D$ dans $\mathcal{X}(J)$. Soit $D^c$ l'adhérence de $C^* \setminus D$ dans $C^*$ et $S = D \cap D^c$ le lieu où le manche $D$ rencontre les dents. Pour chaque $q_i \in S$, soit $\xi_i \subseteq N_\sigma \otimes \kappa(q_i)$ le sous-espace déterminé par la direction tangente $T_{D^c, q_i}$. Il s'avère que $N_f \otimes \mathscr{O}_D$ est le "***faisceau des sections rationnelles de*** $N_\sigma$ ***qui ont au plus un pôle simple en chaque*** $q_i$ ***dans la direction*** $\xi_i$ ***et qui sont régulières ailleurs***" (cf. [GHS03, Lemma 2.6]).

Un lemme clé dont on aura besoin est le suivant.

**Lemme 1.3.3** ([GHS03], Lemma 2.5)**.** *Soit $C$ une courbe lisse sur un corps algébriquement clos, $\mathscr{V}$ un fibré vectoriel sur $C$ et $l \geq 1$ un entier positif. Alors pour $m$ assez grand il existe des points généraux $q_1, \ldots, q_m \in C$ et des sous-espaces $\xi_i \subseteq \mathscr{V} \otimes \kappa(q_i)$ de dimension 1 tels que pour tous $l$ points fermés $w_1, \ldots, w_l \in C$ le faisceau $\mathscr{V}'(-w_1 - \cdots - w_l)$ est engendré par ses sections globales et*

$$H^1(C, \mathscr{V}'(-w_1 - \cdots - w_l)) = 0\,,$$

*$\mathscr{V}'$ désignant le faisceau des sections rationnelles de $\mathscr{V}$ qui ont au plus un pôle simple en chaque $q_i$ dans la direction $\xi_i$ et qui sont régulières ailleurs.*

Notons que la plus petite valeur possible de $m$ dépend du nombre $l$ et le fibré vectoriel $\mathscr{V}$.

Le lemme 1.3.3 appliqué au fibré normal $\mathscr{V} = N_\sigma$ sur $D$ montre que l'annulation de la cohomologie en degré supérieur requise dans les tâches (A) et (B) peut être garantie en ajoutant suffisamment de dents au peigne $C^*$.

Maintenant, nous voulons traiter le cas où $k$ n'est pas nécessairement algébriquement clos et nous voulons produire une courbe déformée *définie sur* $k$. Nous aurons à résoudre deux problèmes.

(D.1) Nous devrions être en mesure de construire le peigne $C^*$ sur $k$.

Considérons d'abord la tâche (A). Supposons que nous voulons ajouter des dents dans les fibres sur des points fermés séparables $p_i \in C$. Si nous sommes capables de trouver dans chaque fibre une courbe très libre $T_i$ définie sur $\kappa(p_i)$, alors la réunion $\cup_i T_i \cup \sigma(C)$ considérée en tant que $k$-schéma nous donne un peigne défini sur $k$. Contrairement au cas d'un corps de base algébriquement clos, l'existence d'une courbe très libre définie sur le corps de base dans une fibre séparablement rationnellement connexe n'est pas a priori évidente, et si nous demandons d'ailleurs à la courbe très libre de passer par deux points prescrits, cela peut être même impossible. Dans la section suivante nous allons utiliser les résultats de Kollár et Szabó sur la trivialité de la $R$-équivalence à résoudre ce problème.

La situation pour (B) est essentiellement la même. La différence est que la fibre $\mathcal{X}(J)_{p_i}$ devient un peu plus compliquée. Cependant, par une inspection minutieuse sur la construction des dents réductibles dans [HT06], nous voyons que pour chaque dent réductible $T_i$ toutes les composantes $T_{i,0}, \ldots, T_{i,N}$ sauf une sont simplement des droites reliant deux $\kappa(p_i)$-points et la dernière $T_{i,0}$ est une courbe très libre passant par un $\kappa(p_i)$-point de $E_{i,0}$, qui est l'éclatement de $\mathcal{X}_{p_i}$ en un $\kappa(p_i)$-point. La connexité rationnelle séparable et l'ensemble des classes de $R$-équivalence sont tous des invariants birationnels pour les variétés projectives lisses (cf. [Kol96, IV.3.3] et [CTS77, p.195, Proposition 10]). Donc, si une propriété déterminée par la connexité rationnelle séparable ou la $R$-équivalence est valable pour $\mathcal{X}_{p_i}$, alors elle devrait être valable pour $E_{i,0}$. En particulier, si la même chose peut être faite dans $\mathcal{X}_{p_i}$, alors la courbe $T_{i,0}$ dans $E_{i,0}$ peut être construite sur $\kappa(p_i)$. Donc, il ne fait aucune différence essentielle dans l'accomplissement des tâches (A) et (B).

(D.2) Nous devrions être en mesure de trouver des déformations de $C^*$ qui sont définies sur $k$.

Ayant construit un peigne $C^*$ défini sur $k$ avec de bonnes propriétés comme indiquées dans (A) ou (B), en appliquant le même argument que dans [HT06], on voit que l'espace des modules $M$ des courbes dans $\mathcal{X}(J)$ passant par les points séparables $\{ r_i \}$ est lisse en le $k$-point $[C^*]$ et qu'il y a à proximité des courbes déformées définies sur $\bar{k}$ qui sont lisses. La dernière étape consiste à montrer l'existence d'un $k$-point rationnel dans l'espace des modules. Lorsque le corps $k$ est fertile ou fini, nous avons des outils pour le faire comme nous allons le voir.

## 1.4 Preuves des résultats sur les corps fertiles

**Proposition 1.4.1.** *Avec les notations comme dans le problème* 1.1.3*, soit $k$ un corps fertile. Considérons la question* (SP)*. Supposons que les points fermés $p_1, \ldots, p_n$ sont séparables et que $r_i \in \mathcal{X}_i(\kappa(p_i))$ est dans la même classe de $R$-équivalence que $q_i = \sigma(p_i) \in \mathcal{X}_i(\kappa(p_i))$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

*Alors il existe une section $s : C \to \mathcal{X}$ de $\pi$ telle que $s(p_i) = r_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

*Démonstration.* Dans chaque fibre $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{p_i}$, les deux points rationnels $r_i$ et $q_i = \sigma(p_i)$ sont $R$-équivalent par hypothèse. Ainsi le théorème de Kollár (Théorème 1.2.8) entraîne qu'il existe une courbe très libre $f_i : \mathbb{P}^1 \to \mathcal{X}_i$ définie sur $\kappa(p_i)$ telle que $q_i\,, r_i \in f_i(\mathbb{P}^1(\kappa(p_i)))$. D'autre part, la courbe lisse $C$ a suffisamment de points fermés séparables. On peut donc choisir autant de bons points que nous en avons besoin et construire des dents dans les fibres correspondantes pour obtenir un peigne $C^*$ défini sur $k$ qui satisfait à toutes les propriétés dans la tâche (A). Le peigne $C^*$ a pour déformations proches des courbes lisses, et comme $[C^*]$ est $k$-point lisse dans l'espace des modules, il résulte de la propriété de corps fertile qu'il existe une courbe lisse déformée qui est définie sur $k$. Les problèmes (D.1) et (D.2) décrits dans §1.3.3 peuvent donc être résolus. On obtient alors une section passant par les points $r_i$. □

*Démonstration du théorème* 1.1.4. Soit $U \subseteq C$ l'ouvert formé de points de bonne réduction. (Cet ouvert existe d'après [Kol96, IV.3.11].) Notons que $k$ est parfait de sorte que tout point est séparable. Soient $p_1, \dots, p_n$ des points fermés dans $U$.

Le théorème de Kollár et Szabó (Théorème 1.2.9 (ii)) dit que la $R$-équivalence sur une variétiés lisse séparablement rationnellement connexe sur une extension algébrique infinie d'un corps fini est triviale. Donc on a $\mathcal{X}_{p_i}(\kappa(p_i))/R = 1$. Un argument comme dans la preuve de la proposition 1.4.1 montre qu'un peigne $C^*$ défini sur $k$ peut être construit satisfaisant à toutes les propriétés requises dans la tâche (A) ou (B). Comme $k$ est un corps fertile, le problème (D.2) peut également être résolu. Cela signifie que le peigne $C^*$ admet des courbes lisses déformées définies sur $k$, qui donnent naissance à des sections sur l'éclatement itéré avec la propriété qu'on veut. L'aproximation faible aux places dans $U$ est donc démontrée pour la fibre générique $X$. □

*Démonstration du théorème* 1.1.5. D'après un résultat de Kollár ([Kol99, Thm. 3]), la fonction

$$C(k) \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad c \mapsto |\mathcal{X}_c(k)/R|$$

est semi-continue supérieurement pour la $k$-topologie. Donc il existe un ouvert non vide $W$ de $C(k)$ (pour la $k$-topologie) tel que $\mathcal{X}_c(k)/R = 1$ pour tout $c \in W$. Pour chaque ouvert de Zariski non vide $U$ de $C$, $U(k)$ est dense dans $C(k)$ pour la $k$-topologie. Ainsi $W \cap U(k) \neq \emptyset$, ceci démontre que $W$ est Zariski dense dans $C$. La même argument que dans la démonstration du théorème 1.1.4 établit l'approximation faible aux places dans $W$. □

***Remarque*** 1.4.2. Dans le théorème 1.1.5, l'hypothèse sur l'existence d'un point $p \in C(k)$ pour lequel $\mathcal{X}_p(k)/R = 1$ est vérifiée s'il y a un point $p \in C(k)$ tel que $\mathcal{X}_p$ possède une réduction séparablement rationnellement connexe sur le corps résiduel $\mathbb{F}$ de $k$ et si le corps résiduel $\mathbb{F}$ est de cardinal suffisamment grand (cf. [KS03, Theorem 8]).

Le lemme suivant est une conséquence facile d'un théorème de Kollár.

**Lemme 1.4.3.** *Soit $X$ une variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe sur un corps fertile $k$. Supposons que $X(k) \neq \emptyset$.*

*Alors pour tout $x \in X(k)$, il existe un ensemble $W \subseteq X(k)$, Zariski dense dans $X$, ayant la propriété suivante : pour tout $y \in W$ il existe une courbe très libre $f_{xy} : \mathbb{P}^1 \to X$ définie sur $k$ telle que $x, y \in f_{xy}(\mathbb{P}^1(k))$.*

*Démonstration.* Dans [Kol02, Theorem 1.4], Kollár a prouvé qu'il existe une courbe très libre $f_x : \mathbb{P}^1 \to X$ définie sur $k$ qui envoie un point rationnel $0 \in \mathbb{P}^1$ sur $x$. Notons $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x)$ le schéma Hom, qui paramètre les morphismes $\mathbb{P}^1 \to X$ qui envoient 0 sur $x$. D'après [Deb01, p.91, Proposition 4.8], l'application d'évaluation

$$e : \quad \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x) \longrightarrow X, \quad (t, g) \mapsto g(t)$$

est lisse en tout point rationnel $(t, [f_x])$ avec $t \neq 0$. En particulier, $e$ est dominante. Par conséquence, pour tout ouvert non vide $U$ de $X$, on peut trouver une courbe très libre $f : \mathbb{P}^1 \to X$ définie sur $k$ qui envoie un point rationnel de $\mathbb{P}^1$ dans $U$ avec $f(0) = x$. □

*Démonstration du théorème* 1.1.6. Soit $\sigma : C \to \mathcal{X}$ une section de $\pi : \mathcal{X} \to C$. Soit $Z$ un sous-ensemble fermé strict de $X$. Son adhérence dans $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble fermé strict $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$. Il existe un ouvert non vide $U$ de $C$ tel que pour tout $c \in U$, la fibre $\mathcal{X}_c$ est lisse et séparablement rationnellement connexe et $\mathcal{X}_c \cap \mathcal{Z} \neq \mathcal{X}_c$. Choisissons un point fermé séparable $p \in U$. D'après le lemme 1.4.3, il existe un point $r \in \mathcal{X}_p(\kappa(p)) \setminus \mathcal{Z}$ qui est directement lié à $q = \sigma(p)$ par une courbe rationnelle très libre définie sur $\kappa(p)$. De la proposition 1.4.1 on conclut qu'il existe une section $s : C \to \mathcal{X}$ telle que $s(p) = r$. Cette section détermine un $K$-point rationnel de $X$ qui n'est pas dans $Z$. Comme $Z$ est arbitraire, il s'en suit que $X(K)$ est Zariski dense dans $X$. □

La remarque suivante ne figure pas dans [Hu10b].

***Remarque*** 1.4.4. Wittenberg [Wit10, Question 1.23] a posé la question suivante : Soit $X$ une variété propre lisse séparablement rationnellement connexe sur un corps infini $K$. Supposons $X(K) \neq \emptyset$. L'ensemble $X(K)$ est-il Zariski dense dans $X$ ?

Le théorème 1.1.6 donne une réponse affirmative à cette question dans le cas particulier où $K = k(C)$ est le corps de fonctions d'une courbe sur un corps fertile de caractéristique 0, e.g., $K = \mathbb{R}(t)$, $\mathbb{Q}_p(t)$.

# 1.5 Preuves des résultats sur les corps finis

## 1.5.1 Surjectivité de la spécialisation

**Proposition 1.5.1.** *Avec les notations comme dans le problème* 1.1.3*, soit* $k = \mathbb{F}$ *un corps fini. Soit* $S \subseteq C$ *l'ensemble fermé formé des points de mauvaise réduction pour le modèle* $\pi : \mathcal{X} \to C$*. Supposons que* $\pi$ *possède une section* $\sigma : C \to \mathcal{X}$*. On fixe des immersions fermés*

$$C \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k, \quad \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k \times_k C \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k \times_k \mathbb{P}^3_k \hookrightarrow \mathbb{P}^M_k$$

*où* $\mathbb{P}^N_k \times_k \mathbb{P}^3_k \hookrightarrow \mathbb{P}^M_k$ *est l'immersion de Segre. On note* $\deg C$ *le degré de* $C$ *dans* $\mathbb{P}^3_k$*,* $\deg \sigma(C)$ *et* $\deg \mathcal{X}$ *les degrés de* $\sigma(C)$ *et* $\mathcal{X}$ *dans* $\mathbb{P}^M_k$*, et* $\deg X$ *le degré de* $X$ *par rapport à l'immersion*

$$X = \mathcal{X} \times_C K \hookrightarrow \mathbb{P}^N_K = (\mathbb{P}^N_k \times_k C) \times_C K\,.$$

*Il existe un entier naturel*

$$B = B(N_\sigma,\, \deg_C S\,, \deg_C P,\, \deg C,\, \deg \sigma(C)\,,\, \deg X,\, \dim X)\,,$$

*qui dépend du fibré normal* $N_\sigma$ *de la section* $\sigma$*, des degrés*

$$\deg_C S = \sum_{s\in S}[\kappa(s) : k] \quad \textit{et} \quad \deg_C P = \sum_{p\in P}[\kappa(p) : k]\,,$$

*et des invariants géométriques*

$$\deg C,\, \deg \sigma(C),\, \deg X \quad \textit{et} \quad \dim X\,,$$

*tel que la réponse à la question* (SP) *est oui si l'on a* $|\mathbb{F}| > B$*.*

*Démonstration.* Selon la méthode que nous avons décrite au §1.3, nous allons d'abord construire un peigne $C^*$ tel que les conditions dans la tâche (A) soient remplies. Lorsque $|\mathbb{F}|$ est supérieur à une borne en termes de $\deg X$ et $\dim X$, par le théorème de Kollár et Szabó (Théorème 1.2.9 (i)), dans toute fibre de $\mathcal{X} \to C$ sur un point $p \in C$ de bonne réduction, il existe toujours une courbe très libre définie sur $\kappa(p)$ et passant par deux $\kappa(p)$-points donnés. Cela entraîne que le peigne $C^*$ peut être construit sur $\mathbb{F}$ lorsque $|\mathbb{F}|$ est assez grand.

En plus des dents données par des courbes très libres dans les fibres sur les points dans $P$, de nombreuses autres dents doivent être ajoutées au peigne $C^*$ pour que la condition sur l'annulation de la cohomologie en degré supérieur dans la tâche (A) soit vérifiée. Soit $m$ le nombre de ces dents. La plus petite valeur de $m$ dépend du fibré normal $N_\sigma$ et du nombre $\deg_C P$, comme nous avons remarqué après avoir énoncé le lemme 1.3.3. D'après l'estimation de Lang-Weil ([LW54, Theorem 1]), on peut supposer que $|\mathbb{F}|$ est supérieur à une borne inférieure en fonction de $\deg C$ , $\deg_C P$ et $\deg_C S$ de sorte qu'on puisse trouver $m$ $\mathbb{F}$-points rationnels en dehors de $P \cup S$. On construit ensuite les $m$ dents dans les fibres sur ces points. Le nombre total de dents du peigne $C^*$ est au plus $\deg_C P + m$. D'après [KS03, Theorem 16] et l'estimation de Lang-Weil (cf. [KS03, p.258, Proof of Theorem 16 implies Theorem 2]), on peut choisir chaque dent avec degré borné supérieurement en termes de $\dim X$ et $\deg X$. Ainsi, le degré $d$ de $C^*$ est majoré en termes de $\deg_C P$ , $m$ , $\dim X$ , $\deg X$ et $\deg \sigma(C)$.

Dans l'espace des modules $M_d$ des courbes de degré $d$ dans $\mathcal{X}$ contenant $\{ r_i \}$, le peigne $C^*$ correspond à un $\mathbb{F}$-point rationnel lisse $[C^*]$. Choisissons une courbe lisse géométriquement irréductible $T$ dans $M_d$ passant par $[C^*]$ telle que les déformations données par les points dans $W = T \setminus \{ [C^*] \}$ sont tous des courbes lisses. Alors $W$ est contenu dans une composante géométriquement irréductible unique $W'$ du sous-espace $H_d$ qui paramètre les courbes lisses de degré $d$ dans $\mathcal{X}$ qui contiennent $\{ r_i \}$. D'après [KS03, Proposition 20], les invariants projectifs fondamentaux de $W'$ sont bornés en termes de $\dim \mathcal{X}$, $\deg \mathcal{X}$, $d$ et $\deg_C P$. Dans notre situation, $\dim \mathcal{X}$ et $\deg \mathcal{X}$ s'expriment en termes de $\dim X$, $\deg C$ et $\deg X$. Tenant compte de toutes ces choses, on obtient finalement, en utilisant le théorème de Lang-Weil, une borne

$$B = B(N_\sigma\,,\, \deg_C S\,,\, \deg_C P\,,\, \deg C\,,\, \deg \sigma(C)\,,\, \deg X\,,\, \dim\, X)$$

ayant la propriété que $W'(\mathbb{F}) \neq \emptyset$ dès que $|\mathbb{F}| > B$. Soit $\mathcal{C}_w$ une courbe déformée correspondant à un point rationnel de $W'$. Les courbes déformées données par les points de $W$ ont les mêmes propriétés numériques que $C^*$, donc la courbe $\mathcal{C}_w$ les ont aussi. En particulier, le nombre d'intersection de $\mathcal{C}_w$ avec une fibre générale de $\mathcal{X} \to C$ est 1. En conséquence, la courbe $\mathcal{C}_w$ donne une section $s : C \to \mathcal{X}$ comme désirée. □

Un inconvénient du résultat dans la proposition 1.5.1 est que la borne inférieure $B$ est inefficace et qu'elle dépend de nombreux objets non intrinsèques. Toutefois, de la preuve ci-dessus, on voit que la dépendance de $B$ sur le fibré normal $N_\sigma$ ne repose que sur sa propriété cohomologique. Donc la valeur de $B$ ne changera pas quand on passe à une extension du corps de base $\mathbb{F}$.

Nous commençons maintenant la preuve du théorème 1.1.7. En gros, elle revient à montrer qu'il est vraiment possible de descendre au corps de base $\mathbb{F}$ depuis une extension assez grande $F_n$ sur laquelle le résultat peut être assuré par la proposition 1.5.1. En utilisant la géométrie des hypersurfaces cubiques, nous le ferons avec $F_n/\mathbb{F}$ une tour d'extensions quadratiques. Les idées de base remontrent à Swinnerton-Dyer, qui a obtenu des résultats similaires pour les surfaces cubiques sur les corps de nombres (cf. [SD01, Theorem 5 and its corollary]).

**(1.5.2)** Soit $V \subseteq \mathbb{P}^N_k$ une hypersurface cubique sur un corps $k$ et soit $k_1/k$ une extension quadratique. Notons $\sigma$ l'élément non trivial dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_1/k)$. On définit une “flèche pointillée”

$$V(k_1) \dashrightarrow V(k) \tag{1.5.2.1}$$

comme suit : Pour un point $v_1 \in V(k_1)$, la droite $\ell(v_1\,,\, {}^\sigma v_1)$ reliant $v_1$ et son point conjugué ${}^\sigma v_1$ croisera généralement $V$ en un seul point de plus $v_0$, ce qui est $k$-rationnel. Chaque fois que cela est bien défini, on associe à $v_1 \in V(k_1)$ le troisième point d'intersection $v_0 \in V(k)$ de la droite $\ell(v_1\,,\, {}^\sigma v_1)$ avec $V$. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que la flèche pointillée est bien définie en $v_1$ et l'envoie en $v_0$ quand nous écrivons “$v_1 \dashrightarrow v_0$”.

**Lemme 1.5.3.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $F$. Soit $X_K \subseteq \mathbb{P}^N_K$ une hypersurface cubique lisse et $\mathcal{X}_A \subseteq$*

*$\mathbb{P}^N_A$ son adhérence schématique dans $\mathbb{P}^N_A$. Supposons que la fibre spéciale $X_F \subseteq \mathbb{P}^N_F$ est une hypersurface cubique lisse. Soit $F_1/F$ une extension quadratique et $K_1/K$ une extension quadratique non ramifiée de corps résiduel $F_1/F$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X_K(K_1) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X_F(F_1) \arrow[d, dashed] \\ X_K(K) \arrow[r] & X_F(F) \end{tikzcd}$$

*est commutatif au sens suivant :*

*Si $x_1 \in X_K(K_1)$ se spécialise en $\widetilde{x}_1 \in X_F(F_1)$ et $\widetilde{x}_1 \dashrightarrow \widetilde{x}_0 \in X_F(F)$, alors la flèche pointillée $X_K(K_1) \dashrightarrow X_K(K)$ est définie en $x_1$ et son image $x_0 \in X_K(K)$ se spécialise en $\widetilde{x}_0 \in X_F(F)$.*

*Démonstration.* Soit $\sigma$ l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_1/K) = \mathrm{Gal}(F_1/F)$. L'hypothèse $\widetilde{x}_1 \dashrightarrow \widetilde{x}_0$ signifie que la $F$-droite $L_F = \ell(\widetilde{x}_1\,,\, {}^\sigma\widetilde{x}_1)$ reliant $\widetilde{x}_1$ et ${}^\sigma\widetilde{x}_1$ n'est pas contenue dans $X_F$ et l'intersection $\ell(\widetilde{x}_1\,,\, {}^\sigma\widetilde{x}_1) \cap X_F$ a exactement 3 points, la troisième étant $\widetilde{x}_0 \in X_F(F)$. Comme $K_1/K$ est non ramifiée, il est facile de vérifier que ${}^\sigma x_1$ se spécialise en ${}^\sigma\widetilde{x}_1$. Soit $L_K = \ell(x_1\,,\, {}^\sigma x_1)$ la $K$-droite reliant $x_1$ et ${}^\sigma x_1$. Soit $\mathcal{L}_A \subseteq \mathbb{P}^N_A$ son adhérence schématique dans $\mathbb{P}^N_A$.

**Affirmation.** $\mathcal{L}_A$ est une $A$-droite dans $\mathbb{P}^N_A$.

Nous laissons de côté la preuve de l'affirmation pour un instant et poursuivons la preuve du lemme.

La fibre spéciale $\mathcal{L}_A \times_A F$ est donc une droite contenant $\widetilde{x}_1$ et ${}^\sigma\widetilde{x}_1$, d'où $\mathcal{L}_A \times_A F = L_F = \ell(\widetilde{x}_1\,,\, {}^\sigma\widetilde{x}_1)$. On a $L_K \nsubseteq X_K$ car $L_F \nsubseteq X_F$. Donc $L_K \cap X_K = \{\, x_1\,,\, {}^\sigma x_1\,,\, x_0 \,\}$ avec $x_0 \in X_K(K)$, ceci montre que $x_1 \dashrightarrow x_0$. Pour démontrer que $x_0$ se spécialise en $\widetilde{x}_0$, il suffit de montrer que l'adhérence schématique de $Z_K := L_K \cap X_K \subseteq \mathbb{P}^N_K$ dans $\mathbb{P}^N_A$ est égale à $\mathcal{Z}_A = \mathcal{L}_A \cap \mathcal{X}_A \subseteq \mathbb{P}^N_A$. D'après [GD65, IV.2.8.5], il nous suffit de montrer que $\mathcal{Z}_A$ est plat sur $A$. Notons que $\mathcal{Z}_A \to \operatorname{Spec} A$ est propre et la fibre générique $Z_K/K$ et la fibre spéciale $Z_F = L_F \cap X_F/F$ sont à la fois finies. D'après un théorème de Chevalley, $\mathcal{Z}_A$ est fini sur $A$. Comme la fibre générique $Z_K/K$ et la fibre spéciale $Z_F/F$ ont de même longueur, $\mathcal{Z}_A$ est plat sur $A$ par [Har77, p.174, Lemma 8.9].

Nous finissons par la preuve de notre affirmation. Il s'agit essentiellement d'une conséquence immédiate de [GD65, IV.2.8.1.1].

Le plongement $L_K \subseteq \mathbb{P}^N_K$ correspond à un $K$-homomorphisme surjectif $\varphi : K^{N+1} \to K^2$. Soit $M$ l'image de l'application composée $A^{N+1} \hookrightarrow K^{N+1} \xrightarrow{\varphi} K^2$ et soit $\varphi_A : A^{N+1} \to M$ l'application induite. Alors la surjection $\varphi_A : A^{N+1} \to M$ correspond au plongement $\mathcal{L}_A \subseteq \mathbb{P}^N_A$. Nous devons prouver que $M$ est libre de rang 2 sur $A$. En fait, on a un diagramme commutatif induit à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} A^{N+1} \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ K^{N+1} \arrow[r, "\varphi"] & K^2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En tant que sous-$A$-module de $K^2$, $M$ est sans torsion et donc libre sur l'anneau de valuation discrète $A$. L'homomorphisme naturel $M \otimes_A K \to K^2$ est bijectif, d'où $\mathrm{rank}_A M = 2$. Cela achève la démonstration. $\square$

Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant dû à Kollár.

**Lemme 1.5.4** ([Kol08], Lemma 9.4)**.** *Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal $q \geq 11$.*[†] *Alors pour toute hypersurface cubique lisse $X \subseteq \mathbb{P}^N$ définie sur $\mathbb{F}_q$ avec $N \geq 2$, la flèche pointillée*

$$X(\mathbb{F}_{q^2}) \dashrightarrow X(\mathbb{F}_q)$$

*est surjective, i.e., pour tout $p \in X(\mathbb{F}_q)$, il existe un point $x \in X(\mathbb{F}_{q^2}) \setminus X(\mathbb{F}_q)$ tel que la droite $\ell(x\,,\,{}^\sigma x)$ reliant $x$ et son conjugué ${}^\sigma x$ vérifie*

$$\ell(x\,,\,{}^\sigma x) \cap X = \{\, p\,,\, x\,,\, {}^\sigma x\,\}\,.$$

*Démonstration du théorème* 1.1.7. Nous considérons le cas où $P = \{\, p\,\}$ est composé d'un seul point. Le cas général peut être traité de la même manière, sans différence essentielle.

Soit $\kappa = \kappa(p)$ le corps résiduel du point $p$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$ et soient $F_n$ , $\kappa_n$, $n \geq 0$ les sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}$ déterminés par les conditions suivantes :

$$F_0 = \mathbb{F}\,,\ \ \kappa_0 = \kappa\,,\ F_n \subseteq \kappa_n\,,\ \ \text{et}\ \ [F_{n+1} : F_n] = [\kappa_{n+1} : \kappa_n] = 2\,,$$

pour tout $n \geq 0$. Soit $K_n = F_n(C_{F_n})$ le corps de fonctions de la courbe $C_{F_n} = C \times_{\mathbb{F}} F_n$ sur $F_n$. Alors pour chaque $n$ le diagramme suivant est commutatif au sens décrit dans le lemme 1.5.3 :

$$\begin{tikzcd} X(K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathcal{X}_p(\kappa_{n+1}) \arrow[d, dotted] \\ X(K_n) \arrow[r] & \mathcal{X}_p(\kappa_n) \end{tikzcd}$$

Supposons que $|\kappa(p)| > \phi(N)$. D'après le lemme 1.5.4, partant de tout point $r_0 \in \mathcal{X}_p(\kappa_0)$ on peut trouver successivement une suite de points $r_i \in \mathcal{X}_p(\kappa_i)$ telle que pour chaque $i$, $r_{i+1} \dashrightarrow r_i$ via la flèche pointillée $\mathcal{X}_p(\kappa_{i+1}) \dashrightarrow \mathcal{X}_p(\kappa_i)$. Tenant compte de la proposition 1.5.1, on peut choisir $n$ assez grand pour que l'application de spécialisation $X(K_{n+1}) \to \mathcal{X}_p(\kappa_{n+1})$ soit surjective. On choisit un point $s_{n+1} \in X(K_{n+1})$ qui se spécialise en $r_{n+1} \in \mathcal{X}_p(\kappa_{n+1})$. D'après le lemme 1.5.3, on obtient des points $s_i \in X(K_i)$ pour $i = n+1,\, n\, \ldots, 0$ tels que

$$s_{n+1} \dashrightarrow s_n \dashrightarrow \cdots\cdots \dashrightarrow s_1 \dashrightarrow s_0$$

et que chaque $s_i$ se spécialise en $r_i$. En particulier, il existe un point $s_0 \in X(K)$ qui se spécialise en $r_0 \in \mathcal{X}_p(\kappa(p))$. $\square$

†. Dans [Kol08], la preuve du lemme 9.4 ne marche que pour $q \geq 11$.

### 1.5.2 Approximation faible en une place

Notre démonstration du théorème 1.1.8 suit la méthode de Swinnerton-Dyer. En particulier, le résultat suivant dû à lui sera utilisé.

**Théorème 1.5.5** ([SD01], Theorem 4)**.** *Soit $K$ un corps global, $K_v$ le corps complété de $K$ en une place non archimédienne $v$ et $k$ le corps résiduel de $v$. Soit $V \subseteq \mathbb{P}^3_K$ une surface cubique lisse dont la réduction $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{P}^3_k$ en $v$ est lisse. Soit $\widetilde{P} \in \widetilde{V}(k)$ la réduction d'un point $P \in V(K)$.*

*Supposons qu'il existe un $R \in V(K)$ dont la réduction $\widetilde{R} \in \widetilde{V}(k)$ a les propriétés suivantes :*

(1) *la droite $\widetilde{P}\widetilde{R}$ croise $\widetilde{V}$ en exactement trois points distincts ;*

(2) *aucune droite géométrique sur $\widetilde{V}$ ne passe par $\widetilde{R}$ ;*

(3) *notant $\gamma = T_{\widetilde{R}}\widetilde{V} \cap \widetilde{V}$, il existe deux points distincts $t_1$, $t_2 \in \gamma(k)$ tels que pour chaque $i = 1, 2$, $t_i \neq \widetilde{R}$ et la droite $\widetilde{P}t_i$ rencontre $\widetilde{V}$ en trois points distincts et*

$$T_{t_1}\gamma \cap T_{t_2}\gamma \cap T_{\widetilde{P}}\widetilde{V} = \emptyset\,.$$

*Alors il existe une classe de $R$-équivalence $\mathscr{C}$ in $V(K)$ telle que pour tout point $Q^* \in V(K_v)$ qui se spécialise en $\widetilde{P} \in \widetilde{V}(k)$ et tout voisinage ouvert $v$-adique $\mathscr{U}_v$ de $Q^*$, on a $\mathscr{C} \cap \mathscr{U}_v \neq \emptyset$.*

Swinnerton-Dyer a énoncé le théorème ci-dessus sur un corps de nombres $K$. Mais sa preuve fonctionne pour les corps de fonctions aussi. (Dans son article [SD01], Swinnerton-Dyer déduit ce théorème de son lemme 8 et théorème 3. Pour prouver ces deux résultats les ingrédients clés sont l'analyse non archimédienne, quelques arguments géométriques sur les espaces tangents, et la théorie d'intersection, arguments qui ne dépendent en fait pas des propriétés spéciales des corps de nombres, comme on peut le vérifier avec plus ou moins de patience.)

Dans la preuve du résultat suivant, certains arguments géométriques ont été utilisés dans [SD01] et [Kol08]. L'idée étant très similaire, ici nous incluons toujours une preuve, en raison d'un peu plus de généralité et de certaines estimations utiles explicites.

**Proposition 1.5.6.** *Il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante :*

*Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini, $N \geq 2$, et $X \subseteq \mathbb{P}^N$ une hypersurface cubique lisse sur $\mathbb{F}_q$. Si $q = |\mathbb{F}_q| > \phi(N)$, alors pour tout $p \in X(\mathbb{F}_q)$, il existe un point $x \in X(\mathbb{F}_q)$ tel que la droite $\ell(x, p)$ reliant $x$ et $p$ croise $X$ en exactement trois $\mathbb{F}_q$-points distincts.*

*Démonstration.* Fixons $p \in X(\mathbb{F}_q)$ et posons

$$B = \{\, x \in X(\mathbb{F}_q) \,|\, x \neq p \ \text{ et } \ \ell(x, p) \nsubseteq T_pX \,\}\,,$$

où $T_pX \subseteq \mathbb{P}^N$ désigne l'hyperplan tangent à $X$ en $p$. Pour une droite $\ell \subseteq \mathbb{P}^N$ définie sur $\mathbb{F}_q$ non contenue dans $X$ et un point $x \in (\ell \cap X)(\mathbb{F}_q)$, on note $(\ell \cdot X)_x$ la multiplicité d'intersection de $\ell$ et $X$ en ce point $x$. Alors $B = B_1 \cup B_2$, où pour $i = 1\,,2\,,$ le sous-ensemble $B_i$ est formé des points $x \in B$ tels que $(\ell(x,\, p) \cdot X)_x = i$. On note $b = \#B$ et $b_i = \#B_i$ pour $i = 1\,,2$. On a

$$\begin{aligned} b =& b_1 + b_2 = \#(X(\mathbb{F}_q) \setminus \{\, p\,\}) - \\ & \#\{\, \mathbb{F}_q\text{-droite } \ \ell \subseteq T_pX \mid p \in \ell \ \text{ et } \ (\ell \cdot X)_p = 2\,\} \end{aligned}$$

d'où

$$\#X(\mathbb{F}_q) - 1 - \frac{q^{N-1}-1}{q-1} \leq b = b_1 + b_2 \leq \#X(\mathbb{F}_q) - 1\,. \tag{1.5.6.1}$$

On veut démontrer que, pour $q$ assez grand,

$$\#X(\mathbb{F}_q) - 1 - \frac{q^{N-1}-1}{q-1} > b_2$$

de sorte que $B_1 \neq \emptyset$. Observons que

$$B_2 = \{\, x \in X(\mathbb{F}_q) \mid x \notin T_pX\,, \ \ p \in T_xX\,\}\,.$$

Supposons que $X$ est définie par une forme cubique $\varphi \in \mathbb{F}_q[T_0, \cdots, T_N]$ et posons $\varphi'_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial T_0}$. On peut supposer que $p = (1 : 0 : \cdots : 0)$. Notant $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ le sous-schéma défini par les équations $\varphi = \varphi'_0 = 0$, on a évidemment $B_2 \subseteq Y(\mathbb{F}_q)$, d'où $b_2 \leq \#Y(\mathbb{F}_q)$.

D'après le théorème de Lang-Weil,

$$\#X(\mathbb{F}_q) = q^{N-1} + O(q^{N-3/2})$$

où le terme $O(q^{N-3/2})$ ne dépend que de $N$ et $q$. Utilisant [Del74, Théorème 8.1], on obtient même une estimation plus explicite :

$$\left| \#X(\mathbb{F}_q) - \frac{q^N-1}{q-1} \right| \leq \beta_N \cdot q^{\frac{N-1}{2}}$$

où $\beta_N$ est le $(N-1)$-ième nombre de Betti d'une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$. En vertu de (1.5.6.1), il suffit maintenant de montrer que

$$\#Y(\mathbb{F}_q) = O(q^{N-2}) \tag{1.5.6.2}$$

avec le terme $O(q^{N-2})$ ne dépendant que de $N$ et $q$. Une vérification facile montre que la forme $\varphi'_0$ ne peut pas être identiquement nulle sur $X$ car $X$ est lisse et géométriquement irréductible. Il s'en suit que $\dim Y < \dim X = N-1$ et donc (1.5.6.2) résulte de la borne classique de Lang-Weil. Dans notre cas, il est aussi possible de donner une borne explicite pour $\#Y(\mathbb{F}_q)$. Par exemple, [Sch04, Chapter 4, Lemma 3.3] donne

$$\#Y(\mathbb{F}_q) \leq \frac{12q^{N-1}}{q-1}\,. \tag{1.5.6.3}$$

La proposition est ainsi démontrée. $\square$

***Remarque*** 1.5.7. D'après la preuve précédente (cf. (1.5.6.1) et (1.5.6.3)), pour qu'une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ait la propriété dans la proposition 1.5.6, une condition suffisante est

$$\frac{12q^{N-1}}{q-1} < q^{N-1} - 1 - \beta_N q^{\frac{N-1}{2}}\,, \quad \forall\, N \geq 2\,,\, \forall\, q > \phi(N)\,.$$

Donc on peut calculer explicitement au moins une valeur possible de $\phi(N)$ pour chaque $N$. Par exemple, en utilisant $\beta_3 = 7$ on vérifie facilement que l'on peut prendre $\phi(3) = 20$.

***Remarque*** 1.5.8. Notant $\mathscr{L}_N$ l'ensemble des $\mathbb{F}_q$-droites $\ell \subseteq \mathbb{P}^N$ telles que

$$\ell \cap X = \{p\,,\, x\,,\, {}^{\sigma}x\}\,, \qquad \text{avec } \ x \in X(\mathbb{F}_{q^2}) \setminus X(\mathbb{F}_q)\,,$$

notre preuve de la proposition 1.5.6 donne aussi une borne inférieure en fonction de $N$ (et $q$) pour le cardinal $\#\mathscr{L}_N$. Mais comme condition suffisante pour $\mathscr{L}_N \neq \emptyset$, le lemme de Kollár (Lemme 1.5.4) est évidemment meilleur.

**Lemme 1.5.9.** *Soit $\widetilde{V}$ une surface cubique lisse sur un corps fini $k$ de caractéristique non divisant* 6*. Si $q = |k| > 47$, alors pour tout $\widetilde{P} \in \widetilde{V}(k)$, on peut trouver un $\widetilde{R} \in \widetilde{V}(k)$ satisfaisant à toutes les conditions* (1), (2) *et* (3) *du théorème* 1.5.5.

*Démonstration.* Swinnerton-Dyer a observé ce fait comme il a remarqué dans [SD01, p.379, lignes 7–10]. Cependent, il semble qu'aucune démonstration n'ait été explicitée là-bas. Nous donnons ici notre démontration.

Soit $B_1$ l'ensemble des points $\widetilde{R} \in \widetilde{V}(k)$ pour lesquels la condition (1) vaut. De la preuve de la proposition 1.5.6 (cf. (1.5.6.1) et (1.5.6.3)) on voit que le cardinal $b_1 = \#B_1$ vérifie

$$b_1 \geq \frac{q^3-1}{q-1} - \beta_3 q - \left(1 + \frac{13q^2-1}{q-1}\right) = q^2 - 6q - \frac{13q^2-1}{q-1}\,.$$

Comme la réunion des droites géométriques sur $\widetilde{V}$ peut contenir au plus $27(q+1)$ $k$-points, le sous-ensemble $B_1' \subseteq B_1$ formé des points $\widetilde{R} \in \widetilde{V}(k)$ qui ont à la fois les propriétés (1) et (2) a pour cardinal

$$b_1' = \#B_1' \geq b_1 - 27(q+1) \geq q^2 - 46q - 52\,.$$

Pour $q > 47$, on peut toujours trouver un $\widetilde{R} \in \widetilde{V}(k)$ ayant les propriétés (1) et (2). L'intersection $\gamma = T_{\widetilde{R}}\widetilde{V} \cap \widetilde{V}$ est alors une courbe cubique plane géométriquement irréductible. Une telle courbe a au moins $q-2$ points rationnels lisses. Les points $t \in \widetilde{V}(k)$ tels que le point donné $\widetilde{P}$ se trouve dans le plan tangent correspondant $T_t\widetilde{V}$ sont tous dans une hypersurface quadratique $Y$, et l'intersection $\gamma \cap Y$ a au plus 6 points. Donc, lorsque $q > 47$, on peut toujours trouver deux points $t_1 \neq t_2 \in \gamma(k)$ avec $t_i \neq \widetilde{R}$ tels que la droite $\widetilde{P}t_i$

croise $\widetilde{V}$ en 3 points distincts pour chaque $i = 1, 2$. Il nous reste à montrer que $t_1$, $t_2$ peuvent être choisis de sorte que l'intersection

$$T_{t_1}\gamma \cap T_{t_2}\gamma \cap T_{\widetilde{P}}\widetilde{V} = T_{t_1}\widetilde{V} \cap T_{t_2}\widetilde{V} \cap \left(T_{\widetilde{R}}\widetilde{V} \cap T_{\widetilde{P}}\widetilde{V}\right)$$

soit vide. Ceci est une conséquence du lemme 1.5.10 ci-dessous. □

**Lemme 1.5.10.** *Soit $F$ un corps de caractéristique ne divisant pas 6, $\gamma \subseteq \mathbb{P}^2_F$ une courbe plane cubique géométriquement irréductible qui possède un point non lisse $R \in \gamma(F)$. Alors pour tout point $S \in \mathbb{P}^2(F)$, l'ensemble*

$$\mathscr{T} := \{\, t \in \gamma(F) \mid \textit{ la droite } St \textit{ reliant } S \textit{ et } t \textit{ est tangente à } \gamma \textit{ en } t\,\}$$

*et de cardinal $\leq 6$.*

*Démonstration.* On prend un système de coordonnées tel que $R = (1 : 0 : 0)$. Comme $\gamma$ passe par $R$ et elle n'est pas lisse en ce point, l'equation de $\gamma$ est de la forme suivante :

$$\varphi = T_0 q(T_1\,,\, T_2) + c(T_1\,,\, T_2)$$

où $q$ est une forme quadratique et $c$ est une forme cubique. On peut supposer $S \neq R$ et prendre des coordonnées telles que $S = (0 : 1 : 0)$. Alors $\mathscr{T}$ est l'ensemble des points rationnels du sous-schéma $Z \subseteq \mathbb{P}^2_F$ défini par

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = 0\,.$$

En utilisant l'hypothèse sur la caractéristique de $F$, on conclut d'un calcul facile que $\frac{\partial\varphi}{\partial T_1}$ n'est pas identiquement nulle à cause de l'irréductibilité géométrique de $\gamma$. Il s'en suit que $\#\mathscr{T} = \#Z(F) \leq 6$. □

*Démonstration du théorème* 1.1.8. On applique le théorème 1.5.5 avec $V$ égal à la fibre générique $X$ et $\widetilde{V}$ égal à la fibre spéciale $\mathcal{X}_p$. D'après le théorème 1.1.7, l'hypothèse entraîne qu'il est toujours possible de relever un point dans $\widetilde{V}(k)$ en un point dans $V(K)$. Alors le résultat déroule facilement du théorème 1.5.5 et du lemme 1.5.9. □

*Remerciements.* L'auteur tient à remercier le rapporteur de l'article [Hu10b] pour des commentaires utiles, en particulier pour avoir signalé la possibilité de généraliser la première version du théorème 1.1.7 en utilisant la référence [Kol08]. L'auteur remercie également le Professeur Jean-Louis Colliot-Thélène pour de nombreuses discussions et commentaires éclairants. Certains des problèmes résolus ici est née de conversations que Jean-Louis Colliot-Thélène et Brendan Hassett ont eues en 2005, et la méthode que nous suivons est également inspirée par leurs discussions. Mes remerciements vont également au Professeur János Kollár pour des discussions utiles sur les hypersurfaces cubiques sur les corps finis.

*Acknowledgements.* The author wishes to thank the referee of the paper [Hu10b] for valuable comments, especially for pointing out the possibility of generalizing the first version of Theorem 1.1.7 using the reference [Kol08]. The author also thanks Prof. Jean-Louis Colliot-Thélène for many valuable discussions and comments. Some of the problems solved here arose out of conversations which Jean-Louis Colliot-Thélène and Brendan Hassett had in 2005, and the approach we follow is also inspired by their discussions. Thanks also go to Prof. János Kollár for useful discussions about cubic hypersurfaces over finite fields.

# Chapitre 2

# Ramification des algèbres à division sur les corps de fonctions de surfaces locales henséliennes

Sauf la dernière section (§2.4), ce chapitre fait partie du contenu de la prépublication [Hu11] de l'auteur.

Le thème principal de ce chapitre est d'étudier la ramification et le déploiement des algèbres à division sur le corps des fractions $K$ d'un anneau $R$ local intègre, hensélien excellent de dimension 2. Nous développons dans notre contexte des techniques de Saltman pour détecter la ramification et nous démontrons certains variantes de résultats antérieurs lorsque le corps résiduel $k$ de $R$ est fini. En particulier, nous montrons que toute classe de Brauer sur $K$ d'indice premier $q$, qui est inversible dans $k$, est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$, et que si $n > 0$ est inversible dans $k$, alors toute classe de Brauer sur $K$ d'ordre $n$ a un indice divisant $n^2$. Ce dernier résultat sera comparé à certains autres théorèmes de type "période-indice" et lié à un problème ouvert au §2.4.

Notre méthode donne également un principe local-global pour la cyclicité de classes de Brauer sur $K$, ce qui ne semble pas avoir été remarqué jusqu'ici. Certaines applications de ces résultats sur les algèbres à division à la théorie des formes quadratiques feront partie des questions discutées dans le chapitre qui suit.

## 2.1 Introduction

Dans une série d'articles ([Sal97], [Sal07], [Sal08]), Saltman a étudié un certain nombre de sujets concernant les algèbres à division sur le corps de fonctions $K$ d'une surface excellente régulière $X$. Il a démontré, au prix de supposer que $K$ contient une racine $q$-ième primitive de l'unité, que pour un tel corps $K$, toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ qui a pour indice un nombre premier $q$, qui est inversible sur la surface $X$, a toutes ses ramifications sur $X$ tuées par une extension cyclique galoisienne $M/K$ de degré $q$ ([Sal08, Thm. 7.13]). Dans le cas où $K$ est le corps de fonctions d'une courbe sur un corps $p$-adique, il a obtenu des théorèmes remarquables, par exemple, celui qui dit que toute classe de Brauer dans $\mathrm{Br}(K)$ d'indice premier $q \neq p$ a toutes ses ramifications tuées par une extension de Kummer de $K$ de degré $q$ et est en fait la classe d'une algèbre cyclique ([Sal07, Thm. 5.1]), et celui qui dit que toute classe de Brauer dans $\mathrm{Br}(K)$ d'ordre $n$ premier à $p$ est d'indice divisant $n^2$ ([Sal97, Thm. 3.4]).

Les résultats de Saltman ont eu des applications intéressantes, surtout à la théorie des formes quadratiques. En fait, en utilisant les résultats de [Sal97], Hoffmann et Van Geel [HG98] ont borné le $u$-invariant $u(K)$ d'un corps de fonctions non-dyadique $p$-adique $K$ par 22, et Parimala et Suresh [PS98] ont amélioré cette borne à 10 en utilisant les résultats de [Kat86]. Enfin, le travail de Saltman [Sal07] a conduit à la preuve de Parimala et Suresh du fait $u(K) = 8$, pour $K$ un corps de fonctions non-dyadique $p$-adique ([PS10, Thm. 4.6]).

L'objectif du présent chapitre est d'étudier ce qui se passe dans le cas plus local où $K$ est le corps des fractions d'un anneau $R$ local intègre, hensélien, excellent et de dimension 2. On établit d'abord certaines variantes des résultats de Saltman, dont certains sont de simples traductions tandis que d'autres ne nécessitent un peu plus de subtilités. On s'appuyera fortement sur les techniques pour analyser la ramification des algèbres à division développées par Saltman ([Sal97] and [Sal07]). Quelques applications à la théorie des formes quadratiques occupent la moitié du chapitre 3.

Voici les énoncés plus précis des résultats principaux de ce chapitre.

**Théorème 2.1.1.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien, excellent et de dimension 2, de corps des fractions $K$ et corps résiduel $k$. Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ une classe de Brauer d'indice $q$. Supposons que $k$ est un corps parfait.*

*Alors il existe $g \in K^*$ tel que l'extension $M/K := K(\sqrt[q]{g})/K$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $R$, i.e., pour toute valuation discrète $w$ de $M = K(\sqrt[q]{g})$ qui a un centre sur $\mathrm{Spec}\ R$, $\alpha_M$ est non ramifiée en $w$.*

Notons que dans le cas où $\mu_q \subseteq R$, le théorème ci-dessus est couvert par [Sal08, Thm. 7.13], où le corps résiduel n'est pas supposé parfait.

Le théorème suivant est un analogue de certains résultats de Saltman ([Sal07, Thm. 5.1], [Sal97, Thm. 3.4]).

**Théorème 2.1.2.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien, excellent de dimension 2 dont le corps résiduel $k$ est fini, et soit $K$ le corps des fractions de $R$. Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$.*

(i) *Toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'indice $q$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$.*

(ii) *Soit $n > 0$ un entier positif qui est inversible dans $k$. Alors toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'order $n$ a un indice divisant $n^2$.*

Les preuves du théorème 2.1.1 et de l'assertion (i) du théorème 2.1.2 se trouvent à la fin du §2.3.3. L'assertion (ii) du théorème 2.1.2 sera démontrée au §2.3.1. Cette dernière assertion est un énoncé typique concernant le "problème de période-indice", sur lequel nous donnerons quelques remarques au §2.4. Là on comparera ce résultat avec d'autres résultats du type "période-indice" obtenus par Lieblich ([Lie07], [Lie08], [Lie11]) et par Harbater, Hartmann et Krashen ([HHK11b]), et on le reliera à un problème ouvert (cf. Question 2.4.10).

Comme application du théorème 2.1.2 (i), on démontre au §2.3.4 le théorème suivant.

**Théorème 2.1.3.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien excellent de dimension 2 dont le corps résiduel $k$ est fini, $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$, $K$ le corps des fractions de $R$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ une classe de Brauer d'ordre divisant $q$. Soit $\Omega_R$ l'ensemble des valuations discrètes de $K$ qui correspondent aux points de codimension 1 des modèles propres réguliers de $\mathrm{Spec}\, R$.*

*Si pour toute $v \in \Omega_R$, la classe $\alpha \otimes_K K_v \in \mathrm{Br}(K_v)$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur le corps complété $K_v$, alors $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $K$.*

En fait, comme la même preuve s'applique au corps de fonctions d'une courbe $p$-adique, un énoncé similaire sur les corps de fonctions de courbes $p$-adiques vaut également (cf. Thm. 2.3.31).

**(2.1.4)** Pour faciliter les discussions, nous fixons quelques notations et conventions terminologiques pour tout le reste de ce chapitre :

• Tous les schémas sont supposés noethériens et séparés. Tous les anneaux considérés seront (commutatifs unitaires et) noethériens.

• Une ***courbe*** (resp. ***surface***) signifie un schéma intègre de dimension 1 (resp. 2).

• Étant donné un schéma $X$, on note $\mathrm{Br}(X)$ son groupe de Brauer cohomologique, i.e., $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X\,,\,\mathbb{G}_m)$. Si $X = \mathrm{Spec}\, A$ est affine, on écrit $\mathrm{Br}(A)$ au lieu de $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\, A)$.

• Si $X$ est un schéma et $x \in X$, on écrit $\kappa(x)$ pour le corps résiduel de $x$, et si $Z \subseteq X$ est un sous-ensemble fermé irréductible avec point générique $\eta$, on écrit $\kappa(Z) := \kappa(\eta)$.

• Le sous-schéma fermé réduit d'un schéma $X$ sera noté $X_{\mathrm{red}}$.

• Toute valuation discrète sera supposée normalisée (non triviale) et de rang 1.

• Étant donné un corps $F$ et un schéma $X$ muni d'un morphisme $\mathrm{Spec}\, F \to X$, $\Omega(F/X)$ désignera l'ensemble des valuations discrètes de $F$ qui ont un centre sur $X$. Si $X = \mathrm{Spec}\, A$ est affine, on écrit $\Omega(F/A)$ au lieu de $\Omega(F/\mathrm{Spec}\, A)$.

• Étant donné un schéma $X$ et $i \in \mathbb{N}$, $X^{(i)}$ désignera l'ensemble des points de codimension $i$ de $X$, i.e., $X^{(i)} = \{ x \in X \mid \dim \mathscr{O}_{X,x} = i \}$. Si $X$ est un schéma intègre normal de corps de fonctions $F$, on identifie quelquefois $X^{(1)}$ avec l'ensemble des valuations discrètes de $F$ qui correspondent aux points dans $X^{(1)}$.

• Pour un groupe abelien $A$ et un entier positif $n$, on note $A[n]$ le sous-groupe formé des éléments de $n$-torsion de $A$ et on note $A/n = A/nA$, de sorte que l'on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow A[n] \longrightarrow A \xrightarrow{n} A \longrightarrow A/n \longrightarrow 0\,.$$

• Étant donné un corps $F$, $F_s$ désignera une clôture séparable de $F$ et $G_F := \mathrm{Gal}(F_s/F)$ le groupe de Galois absolu. La cohomologie galoisienne $H^i(G_F\,,\,\cdot)$ du groupe $G_F$ sera notée $H^i(F\,,\,\cdot)$.

• $R$ désignera toujours un anneau local intègre, hensélien, excellent et de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$.

• Par un ***modèle propre régulier*** de Spec $R$, on entend un schéma intègre régulier $\mathcal{X}$ muni d'un morphisme propre birationnel $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, R$. On note $\Omega_R$ l'ensemble des valuations discrètes de $K$ qui correspondent aux points de codimension 1 des modèles propres réguliers de Spec $R$.

## 2.2 Symboles galoisiens et groupes de Brauer

### 2.2.1 Symboles et cohomologie non ramifié

Ce paragraphe est consacré à un rappel rapide de quelques faits standards sur les symboles galoisiens et les applications de résidu. Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur à [CT95].

**(2.2.1)** Soit $F$ un corps et $v$ une valuation discrète de $F$ d'anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ et corps résiduel $\kappa(v)$. Soit $n > 0$ un entier positif différent de la caractéristique de $\kappa(v)$. Soit $\mu_n$ le module galoisien des racines $n$-ièmes de l'unité. Pour un entier $j \geq 1$, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le module galoisien donné par le produit tensoriel de $j$ exemplaires de $\mu_n$ et on définit

$$\mu_n^{\otimes 0} := \mathbb{Z}/n \quad \text{et} \quad \mu_n^{\otimes(-j)} := \mathrm{Hom}(\mu_n^{\otimes j}\,,\,\mathbb{Z}/n)\,,$$

où comme d'habitude $\mathbb{Z}/n$ est vu comme un module galoisien trivial. La théorie de Kummer donne un isomorphisme canonique $H^1(F\,,\,\mu_n) \cong F^*/F^{*n}$. Pour un élément $a \in F^*$, on note $(a)$ son image canonique dans $H^1(F\,,\,\mu_n) = F^*/F^{*n}$. Pour $\alpha \in H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j})$, le cup-produit $\alpha \cup (a) \in H^{i+1}(F\,,\,\mu_n^{\otimes(j+1)})$ sera noté simplement $(\alpha\,,\,a)$. En particulier, si $a_1\,,\ldots,a_i \in F^*$, $(a_1\,,\ldots,\,a_i) \in H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes i})$ désignera le cup-produit $(a_1) \cup \cdots \cup (a_i) \in H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes i})$. Une telle classe de cohomologie est appelée une ***classe de symbole***.

**(2.2.2)** D'après les théories standards de la cohomologie galoisienne ou étale, il y a des homomorphismes, appelés "***résidus***", pour tout $i \geq 1$ et tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\partial_v^{i,j} \ : \ H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \longrightarrow H^{i-1}(\kappa(v)\,,\,\mu_n^{\otimes(j-1)})$$

qui s'insèrent dans une suite longue exacte

$$\cdots \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(\mathcal{O}_v\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \longrightarrow H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_v^{i,j}} H^{i-1}(\kappa(v)\,,\,\mu_n^{\otimes(j-1)}) \longrightarrow H^{i+1}_{\text{ét}}(\mathcal{O}_v\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \longrightarrow \cdots$$

Un élément $\alpha \in H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j})$ est appelé ***non ramifié*** en $v$ si $\partial_v^{i,j}(\alpha) = 0$.

Quand $F = F_v$ est complet par rapport à $v$, on note

$$H^i_{nr}(F_v\,,\,\mu_n^{\otimes j}) := \mathrm{Ker}\left(\partial_v^{i,j} \ : \ H^i(F_v\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \longrightarrow H^{i-1}(\kappa(v)\,,\,\mu_n^{\otimes(j-1)})\right) \ .$$

**(2.2.3)** Si $X$ est un schéma intègre de corps de fonctions $F$ et si $n$ est inversible sur $X$ (i.e., pour tout $x \in X$, $n$ est inversible dans le corps résiduel $\kappa(x)$), on définit le ***groupe de cohomologie non ramifié*** (relatif) de $F$ sur $X^{(1)}$ par

$$H^i_{nr}(F/X^{(1)}\,,\,\mu_n^{\otimes j}) := \bigcap_{v \in \Omega(F/X^{(1)})} \mathrm{Ker}\left(\partial_v \ : \ H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j}) \longrightarrow H^i(\kappa(v)\,,\,\mu_n^{\otimes(j-1)})\right) \ ,$$

où $\Omega(F/X^{(1)})$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de $F$ qui sont centrées en points de codimension 1 de $X$. (Notons que deux valuations discrètes différentes dans $\Omega(F/X^{(1)})$ peuvent se situer au dessus d'un même point de $X^{(1)}$, si l'on ne demande pas à $X$ d'être régulier en codimension 1.)

## 2.2.2 Groupes de Brauer de schémas de basse dimension

Comme on aura fréquemment besoin d'arguments liés aux groupes de Brauer de courbes ou de surfaces, on rappelle brièvement quelques faits de base en cet aspect.

**Théorème 2.2.4** ([Gro68a], [CTOP02]). *Soit $X$ un schéma (noethérien) de dimension $d$.*

(i) *Si $d \leq 1$, alors l'application naturelle* $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_{\mathrm{red}})$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Si $X$ est régulier et intègre de corps de fonctions $F$, alors l'application naturelle* $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(F)$ *est injective.*

(iii) *Si $X$ est régulier, intègre de corps de fonctions $F$ et de dimension $d \leq 2$, alors* $\mathrm{Br}(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(\mathscr{O}_{X,x})$ *dans* $\mathrm{Br}(F)$.

(iv) *Soit $A$ un anneau local hensélien et soit $X \to \mathrm{Spec}\, A$ un morphisme propre dont la fibre fermée $X_0$ est de dimension $\leq 1$. Si $X$ est régulier et de dimension 2, alors l'application naturelle* $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_0)$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* (i) [CTOP02, Lemma 1.6]. (ii) [Gro68a, Coro. 1.8]. (iii) [Gro68a, Coro. 2.2 et Prop. 2.3]. (iv) [CTOP02, Thm. 1.8 (c)]. □

**(2.2.5)** Soit $F$ un corps et $v$ une valuation discrète de $F$ d'anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ et de corps résiduel $\kappa(v)$. Alors $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_v)$ s'identifie avec un sous-groupe de $\mathrm{Br}(F)$ d'après le théorème 2.2.4 (ii). Un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ est dit ***non ramifié*** en $v$ s'il se trouve dans le sous-groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_v) \subseteq \mathrm{Br}(F)$. Si $n > 0$ est un entier positif qui est inversible dans $\kappa(v)$, alors un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[n]$ est non ramifié en $v$ si et seulement si $\partial_v(\alpha) = 0$, où $\partial_v$ désigne l'application de résidu

$$\partial_v = \partial_v^{2,1} \ : \ \mathrm{Br}(F)[n] = H^2(F\,,\,\mu_n) \longrightarrow H^1(\kappa(v)\,,\,\mathbb{Z}/n)\,.$$

**(2.2.6)** Soit $X$ un schéma muni d'un morphisme $\mathrm{Spec}\ F \to X$. Le sous-groupe

$$\mathrm{Br}_{nr}(F/X) := \bigcap_{v\in\Omega(F/X)} \mathrm{Br}(\mathcal{O}_v) \ \subseteq\ \mathrm{Br}(F)$$

est appelé le ***groupe de Brauer non ramifié*** (relatif) de $F$ sur $X$. Lorsque $X = \mathrm{Spec}\ A$ est affine, on écrit $\mathrm{Br}_{nr}(F/A)$ au lieu de $\mathrm{Br}_{nr}(F/\,\mathrm{Spec}\ A)$.

Si $X$ est un schéma intègre de corps de fonctions $F$ et si $X \to Y$ est un morphisme propre, alors $\Omega(F/X) = \Omega(F/Y)$ et donc $\mathrm{Br}_{nr}(F/X) = \mathrm{Br}_{nr}(F/Y)$. Si $X$ est une courbe ou une surface régulière de corps de fonctions $F$, alors le théorème 2.2.4 entraîne que $\mathrm{Br}_{nr}(F/X) \subseteq \mathrm{Br}(X)$.

La propriété suivante pour les corps, déjà discutée dans [Sal97], sera d'intérêt pour nous :

**Définition 2.2.7.** On dit qu'un corps $k$ a la ***propriété*** $B_1$ ou que $k$ est un ***corps*** $B_1$, si pour toute courbe $C$ intègre propre régulière (non nécessairement géométriquement intègre) sur le corps $k$, on a $\mathrm{Br}(C) = 0$.

**Exemple 2.2.8.** Voici quelques exemples de corps $B_1$ :

(1) Un corps séparablement clos $k$ a la propriété $B_1$ ([Gro68b, Coro. 5.8]).

(2) Un corps fini $k$ a la propriété $B_1$. Ceci est un résultat classique dans la théorie du corps de classes, voir aussi [Gro68b, p.97].

(3) Si $k$ a la propriété $B_1$, alors toute extension algébrique $k'$ de $k$ l'a aussi.

**Proposition 2.2.9.** *Soit $k$ un corps $B_1$.*

(i) *Pour tout $k$-schéma propre $X$ de dimension $\leq 1$, on a* $\mathrm{Br}(X) = 0$.

(ii) *La dimension cohomologique* $\mathrm{cd}(k)$ *de $k$ est $\leq 1$, i.e., pour tout $G_k$-module de torsion $A$, $H^i(k\,,\,A) = 0$ pour tout $i \geq 2$.*

(iii) *Si la caractéristique de $k$ n'est pas* 2, *alors toute forme quadratique de rang $\geq 3$ a un zéro non trivial sur $k$.*

*Démonstration.* (i) D'après le théorème 2.2.4 (i), on peut supposer que $X$ est réduit.

Pour le cas de dimension 0, it suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(L) = 0$ pour une extension finie $L$ of $k$. En effet, la $B_1$ propriété entraîne que $\mathrm{Br}(\mathbb{P}^1_L) = 0$. L'existence de $L$-points rationnels sur $\mathbb{P}^1_L$ montre que l'application naturelle

$\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(\mathbb{P}^1_L)$ induite par le morphisme structurel $\mathbb{P}^1_L \to \operatorname{Spec} L$ est injective. Ainsi, $\mathrm{Br}(L) = 0$.

Supposons maintenant que $X$ est réduit et de dimension 1. Soit $X' \to X$ la normalisation de $X$. D'après [CTOP02, Prop. 1.14], il existe un sous-schéma fermé $D$ de dimension 0 de $X$ tel que l'application naturelle $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X') \times \mathrm{Br}(D)$ est injective. Maintenant $X'$ est une réunion disjointe d'un nombre fini de $k$-courbes propres régulières, donc $\mathrm{Br}(X') = 0$ par la propriété $B_1$. Il résulte du cas de dimension 0 que $\mathrm{Br}(D) = 0$, d'où $\mathrm{Br}(X) = 0$ comme désiré.

(ii) Comme cas particulier de (i), on a $\mathrm{Br}(k') = 0$ pour toute extension finie séparable $k'$ de $k$. Ceci entraîne que $\mathrm{cd}(k) \leq 1$ d'après [Ser94, p.88, Prop. 5].

(iii) De (ii), on obtient en particulier $\mathrm{Br}(k)[2] = H^2(k\,,\,\mu_2) = 0$. Donc toute algèbre de quaternions sur $k$ est déployée et sa conique associée possède un $k$-point rationnel. À un multiple scalaire près, toute forme quadratique non singulière de dimension 3 est associée à une algèbre de quaternions, donc isotrope d'après ce qui précède. □

Le corollaire suivant est essentiellement prouvé dans [CTOP02, Corollaries 1.10 et 1.11].

**Corollaire 2.2.10.** *Soit $A$ un anneau (noethérien) local hensélien et soit $X \to \operatorname{Spec} A$ un morphisme propre dont la fibre fermée $X_0$ est de dimension $\leq 1$. Supposons que le corps résiduel de $A$ a la propriété $B_1$.*

*Si $X$ est régulière et de dimension 2, alors $\mathrm{Br}(X) = 0$.*

*Démonstration.* Il suffit de combiner le théorème 2.2.4 (iv) et la proposition 2.2.9 (i). □

## 2.3 Tuer la ramification des algèbres à division

Dans cette section, nous rappelons un certain nombre de techniques dans la méthode de Saltman pour détecter la ramification des algèbres à division ([Sal97]).

### 2.3.1 Déploiement sur une extension bi-cyclique

**(2.3.1)** Dans cette sous-section, soit $X$ une surface régulière excellente et soit $F$ le corps de fonctions de $X$. Grâce à la resolution des singularités plongées ([Sha66, p.38, Thm. et p.43, Remark], [Lip75, p.193]), pout tout diviseur effectif $D$ sur $X$, il existe une surface régulière $X'$ munie d'un morphisme propre birationnel $X' \to X$, obtenue par une suite d'éclatements, telle que le transformé total $D'$ de $D$ dans $X'$ est un diviseur à ***croisements normaux stricts*** (cns) (i.e., les composantes irréductibles réduites de $D'$ sont des courbes régulières, et elles se rencontrent transversement partout). On utilisera ce résultat sans répéter la référence.

Soit $n$ un entier positif qui est inversible sur $X$ et soit $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[n]$ une classe de Brauer d'ordre divisant $n$. Pour toute valuation discrète $v \in \Omega(F/X)$, l'application de résidu

$$\partial_v^{2,1} \; : \; \mathrm{Br}(F)[n] = H^2(F\,,\,\mu_n) \longrightarrow H^1(\kappa(v)\,,\,\mathbb{Z}/n)$$

sera parfois appelée l'***application de ramification*** et noté $\mathrm{ram}_v$. Si $v = v_C$ est la valuation discrète centrée en le point générique d'une courbe $C \subseteq X$, on écrit $\mathrm{ram}_C = \mathrm{ram}_{v_C}$. Le ***lieu de ramification*** de $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[n]$ sur $X$, noté $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$, est par définition la réunion (finie) des courbes $C \subseteq X$ telles que $\mathrm{ram}_C(\alpha) \neq 0 \in H^1(\kappa(C)\,,\,\mathbb{Z}/n)$. Le ***diviseur de ramification*** de $\alpha$ sur $X$, encore noté $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ par abus de notation, est le diviseur réduit supporté sur le lieu de ramification. Quitte à faire des éclatements, on peut supposer que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$.

**Définition 2.3.2** ([Sal07, §2]). Soient $X$, $F$ et $\alpha$ comme dans (2.3.1). Supposons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$. Un point fermé $P \in X$ est appelé

(1) un ***point distant*** pour $\alpha$, si $P \notin \mathrm{Ram}_X(\alpha)$ ;

(2) un ***point courbe*** (“curve point” en anglais) pour $\alpha$, si $P$ se trouve sur une et une seule composante irréductible de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ ;

(3) un ***point nodal*** pour $\alpha$, si $P$ se trouve sur deux composantes irréductibles différentes de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$.

**(2.3.3)** Notons que pour tout corps $\kappa$, le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\kappa\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ s'identifie avec le groupe des caractères de $G_\kappa$, i.e., le groupe $\mathrm{Hom}_{cts}(G_\kappa\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des homomorphismes continus $f : G_\kappa \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Un caractère $f \in \mathrm{Hom}_{cts}(G_\kappa\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ a forcément pour image un sous-groupe de la forme $\mathbb{Z}/m \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour un entier positif $m$, et son noyau est égal à $G_{\kappa'}$ pour une extension cyclique galoisienne $\kappa'/\kappa$ de degré $m$. Il existe un générateur $\sigma \in \mathrm{Gal}(\kappa'/\kappa)$ tel que $f(\sigma) = 1 + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m$. La fonction $f \in \mathrm{Hom}_{cts}(G_\kappa\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est uniquement déterminée par le couple $(\kappa'/\kappa\,,\,\sigma)$. Dans la suite, nous écrirons souvent un élément de $H^1(\kappa\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de cette façon. En particulier, la ramification $\mathrm{ram}_v(\alpha) \in H^1(\kappa(v)\,,\,\mathbb{Z}/n)$ en une valuation discrète $v \in \Omega(F/X)$ sera représentée de cette façon.

**(2.3.4)** Soit $\chi \in H^1(F\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{cts}(G_F\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ un caractère de $G_F$ avec l'image $\mathbb{Z}/n \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, représentée par un couple $(L/F\,,\,\sigma)$, i.e., $L/F$ est une extension galoisienne, finie et cyclique de degré $n$ telle que

$$G_L = \mathrm{Ker}(\chi \; : \; G_F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

et $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ est un générateur tel que $\chi(\sigma) = 1 + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n$. Rappelons ([GS06, §2.5]) que l'***algèbre cyclique*** $(\chi\,,\,b)$ associée à $\chi$ et un élément $b \in F^*$ est la $F$-algèbre engendrée par $L$ et une lettre $y$ soumis aux relations de multiplication suivantes

$$y^n = b \quad \text{et} \qquad \lambda y = y\sigma(\lambda), \;\; \forall\, \lambda \in L\,.$$

C'est un fait standard que $(\chi\,,\,b)$ est une algèbre centrale simple de degré $n$ sur $F$. La classe de l'algèbre cyclique $(\chi\,,\,b)$ dans $\mathrm{Br}(F)[n]=H^2(F\,,\,\mu_n)$ coïncide avec le cup-produit de $\chi\in H^1(F\,,\,\mathbb{Z}/n)$ et $(b)\in H^1(F\,,\,\mu_n)$.

Si $\mu_n\subseteq F$, alors d'après la théorie de Kummer $L$ est de la forme $L=F(\sqrt[n]{a})$ pour un certain $a\in F^*$. Il existe une racine primitive $n$-ième de l'unité $\xi_n\in F$ telle que $\sigma(\sqrt[n]{a})=\xi_n\sqrt[n]{a}$. L'algèbre cyclique $(\chi\,,\,b)$ est isomorphe à la $F$-algèbre $(a\,,\,b)_{\xi_n}$, ce qui est par définition la $F$-algèbre engendrée par deux lettres $x\,,\,y$ soumis aux relations

$$x^n=a\,,\;\;y^n=b\,,\;\;xy=\xi_n yx\,.$$

Réciproquement, quand $F$ contient une racine primitive $n$-ième de l'unité $\xi_n$, l'algèbre $(a\,,\,b)_{\xi_n}$ associée aux éléments $a\,,\,b\in F^*$ est isomorphe à $(\chi\,,\,b)$, où $\chi\in H^1(F\,,\,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le caractère représenté par l'extension cyclique $L/F=F(\sqrt[n]{a})/F$ et le $F$-automorphisme $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)$ qui envoie $\sqrt[n]{a}$ sur $\xi_n\sqrt[n]{a}$. La classe de l'algèbre $(a\,,\,b)_{\xi_n}$ dans $\mathrm{Br}(F)$ sera noté simplement $(a\,,\,b)$ lorsque le degré $n$ et le choix de $\xi_n\in F$ sont clairs d'après le contexte. Cette notation est compatible avec la notion de classes de symboles via l'isomorphisme $\mathrm{Br}(F)[n]=H^2(F\,,\,\mu_n)\cong H^2(F\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$ correspondant au choix de $\xi_n\in F$.

**Proposition 2.3.5** ([Sal97, Prop. 1.2]). *Soit $X$ une surface excellente régulière de corps de fonctions $F$, $P\in X$ un point fermé d'anneau local $R_P=\mathscr{O}_{X,P}$, $n>0$ un entier positif qui est inversible sur $X$ et $\alpha\in\mathrm{Br}(F)[n]$ une classe de Brauer d'ordre divisant $n$. Supposons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$ et que $F$ contient une racine primitive $n$-ième de l'unité.*

(i) *Si $P$ est un point courbe sur une composante irréductible $C$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$, alors*

$$\alpha\equiv(u\,,\,\pi)\pmod{\mathrm{Br}(R_P)}\,,$$

*où $u\in R_P^*$ et $\pi\in R_P$ est une équation locale de $C$ en $P$.*

(ii) *Si $P$ est un point nodal qui se trouve sur deux composantes irréductibles distinctes $C\,,\,C'$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$, alors*

$$\alpha\equiv(u\,,\,\pi)+(v\,,\,\delta)+r.(\pi\,,\,\delta)\pmod{\mathrm{Br}(R_P)}$$

*où $u\,,\,v\in R_P^*$, $r\in\mathbb{Z}/n$ et $\pi\,,\,\delta$ sont respectivement des équations locales de $C$, $C'$ en $P$.*

Les idées de base pour prouver le théorème suivant proviennent d'abord de Saltman, avec une lacune dans sa preuve originale signalée et rapidement réparée par Gabber et une amélioration de l'argument donnée par Colliot-Thélène.

**Théorème 2.3.6** ([Sal97, Thm. 2.1], [Sal98]). *Soit $X$ une surface excellente régulière qui est quasi-projective sur un anneau, $F$ le corps de fonctions de $X$, $n>0$ un entier positif qui est inversible sur $X$, et $\alpha\in\mathrm{Br}(F)[n]$. Supposons $\mu_n\subseteq F$.*

*Alors il existe $f\,,\,g\in F^*$ tels que l'extension $M/F:=F(\sqrt[n]{f}\,,\,\sqrt[n]{g})/F$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $X$, i.e., $\alpha_M\in\mathrm{Br}_{nr}(M/X)$.*

Bien que la situation du théorème ci-dessus diffère de celle de [Sal97, Thm. 2.1], une vérification attentive montre que la preuve (corrigée) de Saltman (cf. [Sal98]) fonctionne toujours dans notre contexte. On peut également trouver une preuve dans les notes de Brussel [Bru10, Lemma 7.8].

**Corollaire 2.3.7.** *Soit $X$ une surface excellente régulière qui est quasi-projective sur un anneau, $F$ le corps de fonctions de $X$, $q$ un nombre premier qui est inversible sur $X$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$.*

*Alors il existe une extension finie séparable $F'/F$ qui tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $X$ et telle que $[F' : F] = q^2 m$ avec $q \nmid m$.*

*Démonstration.* Si $\mu_q \subseteq F$, cela résulte immédiatement du théorème 2.3.6. Le cas général en résulte en passant à l'extension $F(\mu_q)/F$, qui est de degré premier à $q$. □

**(2.3.8)** On rappelle que $R$ désigne un anneau local intègre, hensélien, excellent de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. Grâce à la résolution des singularités pour les surfaces (voir [Lip75], [Lip78]), il existe un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ (le morphisme structurel $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ est en fait projectif d'après [GD63, IV.21.9.13]). Le théorème 2.3.6 et le corollaire 2.3.7 s'appliquent donc à Spec $R$.

Si le corps résiduel $k$ est fini, le théorème 2.3.6 a la forme raffinée suivante, dont l'analogue en cas d'un corps de fonctions $p$-adique est essentiellement une observation de Gabber et Colliot-Thélène (cf. [CT98]).

**Théorème 2.3.9.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien, excellent de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel fini $k$. Soit $n > 0$ un entier positif qui est inversible dans $k$. Supposons $\mu_n \subseteq R$.*

*Alors pour toute collection finie de classes de Brauer $\alpha_i \in \mathrm{Br}(K)[n]$, $1 \le i \le m$, il existe $f, g \in K^*$ tels que l'extension $M/K := K(\sqrt[n]{f}, \sqrt[n]{g})/K$ tue toutes les classes $\alpha_i$, $i = 1, \dots, m$.*

*Démonstration.* Dans la littérature ([CT98], [HG98, Thm. 2.5]), le théorème est énoncé dans le cas où $K$ est un corps de fonctions en une variable sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel fini et où $n$ est un nombre premier. Nous fournissons une preuve ici pour assurer que la même conclusion est valable dans notre contexte.

Prenons un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ tel que le diviseur réduit sur la réunion $\bigcup_{i=1}^m \mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha_i)$ des lieux de ramification des $\alpha_i$, $1 \le i \le m$ est un diviseur cns de la forme $C + E$, où $C$ et $E$ sont des sous-schémas fermés réguliers (mais pas forcément connexes) de dimension 1 de $\mathcal{X}$, qui n'ont pas de composantes en commun. Soit $T$ l'ensemble fini formé des points génériques des composantes irréductibles de $C \cup E$ et des points dans $C \cap E$. Comme le morphisme structurel $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ est projectif, $T$ est contenu dans un ouvert affine de $\mathcal{X}$. Par un argument semilocal, on peut trouver une fonction $f \in K^*$ telle que le support du diviseur $F := \mathrm{div}_{\mathcal{X}}(f) - C - E$ ne rencontre pas $T$.

Posons $T' = F \cap E$ et $T'' = F \cap C$. D'après un lemme de Colliot-Thélène ([Sal98, Lemma] ou [HG98, Lemma 2.4]), il existe une fonction $g \in K^*$ telle que $G := \mathrm{div}_{\mathcal{X}}(g) - C$ ne passe par aucun point de $T \cup T' \cup T''$ et que, pour tout $P \in T'$, $g$ est une unité en $P$ et $g(P) \in \kappa(P)^*$ s'envoie sur un générateur du groupe cyclique $\kappa(P)^*/\kappa(P)^{*n}$ (notant que $\kappa(P)$ est un corps fini).

Posons $M := K(\sqrt[n]{f}\,,\ \sqrt[n]{g})$. La normalisation $R'$ de $R$ dans $M$ satisfait aux mêmes hypothèses que $R$, et $M$ est le corps de fonctions d'une surface régulière $\mathcal{X}'$ qui admet un morphisme propre $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$. On a un diagramme commutatif de morphismes propres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ R \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont birationnels. Maintenant $\Omega(M/\mathcal{X}') = \Omega(M/\mathcal{X})$ et $\mathrm{Br}_{nr}(M/\mathcal{X}) = \mathrm{Br}_{nr}(M/\mathcal{X}') = 0$ d'après le théorème 2.2.4 (iii) et le corollaire 2.2.10. Il suffit donc de démontrer que $M/K = K(\sqrt[n]{f}\,,\ \sqrt[n]{g})/K$ tue toutes les ramifications des $\alpha_i$ , $1 \leq i \leq m$ sur $\mathcal{X}$.

Soit $v$ une valuation discrète de $K$ qui a un centre $P \in \mathcal{X}$. On veut montrer que toute $(\alpha_i)_M$ est non ramifiée en toute valuation discrète $w$ de $M$ au-dessus de $v$.

Si $P \notin C \cup E$, il n'y a rien à craindre car $\alpha_i \in \mathrm{Br}(\mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P})$ pour tout $i = 1\,,\ldots,m$.

Si $P \in C \setminus (T \cup T'')$, alors $P$ est un point fermé dans $C \setminus (E \cup F)$, donc $f$ est une équation locale de $C$ en $P$. D'après la proposition 2.3.5,

$$\alpha_i \equiv (u_i\,,\ f) \pmod{\mathrm{Br}(\mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P})}\ ;\quad \forall\, i = 1\,,\ldots,m$$

où $u_i \in \mathscr{O}^*_{\mathcal{X}\,,P}$. Puisque $f$ devient une puissance $n$-ième dans $M$, on a gagné dans ce cas. De façon similaire, toute $\alpha_i$ est non ramifiée sur $v$ si $P \in E \setminus (T \cup T')$.

Notons que

$$(C \cup E) \setminus (T \cup T' \cup T'') = (C \setminus (T \cup T'')) \cup (E \setminus (T \cup T'))\,.$$

Il nous reste à considérer le cas $P \in T \cup T' \cup T''$. Si $P \in T''$, alors $g$ est une équation locale de $C$ en $P$ et

$$\alpha_i \equiv (v_i\,,\ g) \pmod{\mathrm{Br}(\mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P})}\ ;\quad \forall\, i = 1\,,\ldots,m$$

où $v_i \in \mathscr{O}^*_{\mathcal{X}\,,P}$. L'extension $M/K$ tue alors toutes les ramifications des $\alpha_i$ car $g$ est une puissance $n$-ième dans $M$. Si $P \in T$, alors d'après la proposition 2.3.5 on a encore

$$\alpha_i \equiv (u_i\,,\ \pi) + (v_i\,,\ \delta) + r_i.(\pi\,,\ \delta) \pmod{\mathrm{Br}(\mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P})}\ ;\quad \forall\, i = 1\,,\ldots,m$$

où $u_i\,,\ v_i \in \mathscr{O}^*_{\mathcal{X}\,,P}$, $r_i \in \mathbb{Z}/n$ et $\pi\,,\ \delta$ sont des équations locales de $C\,,\ E$ en $P$. D'autre part, $f = w_1\pi\delta \in \mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P}$ et $g = w_2\pi \in \mathscr{O}_{\mathcal{X}\,,P}$ pour certains $w_1$, $w_2 \in$

$\mathscr{O}_{\mathcal{X},P}^*$. Ainsi, pour tout $i$ on a

$$(\alpha_i)_M \equiv (u_i\,,\,w_2^{-1}) + (v_i\,,\,w_2w_1^{-1}) + r_i.(w_2^{-1}\,,\,w_2w_1^{-1}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathrm{Br}(\mathcal{O}_w))\,,$$

$\mathcal{O}_w$ désignant l'anneau de valuation d'une $w \in \Omega(M/\mathcal{X})$ au-dessus de $v$.

Finalement, on suppose $P \in T'$. En ce cas $P \notin C$ et notant $\delta \in \mathscr{O}_{\mathcal{X},P}$ une équation locale de $E$ en $P$, on a

$$\alpha_i \equiv (v_i\,,\,\delta) \qquad (\mathrm{mod}\ \mathrm{Br}(\mathscr{O}_{\mathcal{X},P}))\,;\quad \forall\, i = 1\,,\ldots,m$$

pour certains $v_i \in \mathscr{O}_{\mathcal{X},P}^*$. Pour toute $w \in \Omega(M/\mathcal{X})$ au-dessus de $v$, les résidus des $(\alpha_i)_M$ en $w$ sont donnés par

$$\partial_w((\alpha_i)_M) = \overline{v}_i^{\,w(\delta)} \;\in\; \kappa(w)^*/\kappa(w)^{*n}\,.$$

Comme $g$ est une unité en $P \in T'$ et est une puissance $n$-ième dans $M$, c'est une puissance $n$-ième dans l'anneau normal $\mathcal{O}_w$, qui contient $\mathscr{O}_{\mathcal{X},P}$. L'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathcal{X},P} \to \mathcal{O}_w$ se factorise par $\mathscr{O}_{\mathcal{X},P} \to \mathscr{O}_{\mathcal{X},P}[t]/(t^n - g) \to \mathcal{O}_w$, donc l'application $\kappa(P) \to \kappa(w)$ se factorise par $\kappa(P) \to \kappa(P)[t]/(t^n - g(P)) \to \kappa(w)$. Comme $\mu_n \subseteq \kappa(P)$ et $g(P)$ n'est pas une puissance $n$-ième dans $\kappa(P)$, $\kappa' := \kappa(P)[t]/(t^n - g(P))$ est une extension de Kummer de degré $n$ de $\kappa(P)$. Le corps $\kappa(P)$ est fini et l'image canonique de $g(P)$ engendre $\kappa(P)^*/\kappa(P)^{*n}$ d'après le choix de $g$, ainsi tout élément de $\kappa(P)$ devient une puissance $n$-ième dans $\kappa'$ et a fortiori dans $\kappa(w)$. Il en résulte que toutes les $(\alpha_i)_M$ sont non ramifiées en $w$, ceci achève la démonstration. $\square$

En tenant compte de l'exemple 2.2.8 (1), l'énoncé (ii) du théorème 2.1.2 est un cas particulier du théorème suivant, dont la preuve est analogue à celle de [Sal97, Thm. 3.4], en substituant certains ingrédients dans le cas des corps de fonctions de courbes $p$-adiques.

**Théorème 2.3.10.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien excellent de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. Soit $n > 0$ un entier positif qui est inversible dans $k$. Supposons que $k$ est un corps $B_1$.*

*Alors toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'ordre $n$ a son indice qui divise $n^2$.*

*Démonstration.* On peut supposer que $n = q^r$ est une puissance d'un nombre premier $q$. Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ un modèle propre régulier. Comme dans la démonstration du théorème 2.3.9, on a $\mathrm{Br}_{nr}(K'/\mathcal{X}) = 0$ pour toute extension finie $K'/K$. Il suffit donc de trouver une extension finie séparable $K'/K$ de degré $q^{2r}m$, où $q \nmid m$, telle que $K'/K$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $\mathcal{X}$.

On procède par récurrence sur $r$, le cas $r = 1$ étant le corollaire 2.3.7. Pour $r$ général, l'hypothèse de récurrence appliquée à la classe $q\alpha$ entraîne qu'il existe une extension finie séparable $K'/K$ qui tue toutes les ramifications de $q\alpha$ sur $\mathcal{X}$, et qui est de degré $q^{2r-2}m'$ avec $q \nmid m'$. Or $q\alpha_{K'} = 0 \in \mathrm{Br}(K')$ d'après le corollaire 2.2.10. En appliquant le corollaire 2.3.7 une fois de plus, on obtient une extension séparable $K''/K'$ de degré $q^2m''$ avec $q \nmid m''$ qui tue toutes les ramifications de $\alpha_{K'}$ sur $\mathcal{X}$. Alors $K''/K$ est une extension séparable de degré $[K'' : K] = q^{2r}m$ avec $m = m'm''$ premier à $q$ et $K''/K$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $\mathcal{X}$, comme désiré. □

On donnera un exemple d'une classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'ordre $n$ qui est d'indice $n^2$ dans l'exemple 2.3.28.

### 2.3.2 Classification des points nodaux

Afin de prouver d'autres résultats, nous avons besoin d'analyser davantage la ramification aux points nodaux. Pour cela, nous rappelons brièvement dans ce paragraphe quelques notions de base et résultats dus à Saltman. Nous renvoyons le lecteur à [Sal07, §§2–3] ou [Bru10, §§7–8] pour plus de détails.

**(2.3.11)** Soit $X$ une surface excellente régulière de corps de fonctions $F$ et soit $q$ un nombre premier qui est inversible sur $X$. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$. Suppsons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$. Soit $P \in X$ un point nodal pour $\alpha$ (cf. Définition 2.3.2) qui se trouve sur deux composantes irréductibles distinctes $C_1$, $C_2$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$. Soit $\chi_1 = \mathrm{ram}_{C_1}(\alpha)$ et $\chi_2 = \mathrm{ram}_{C_2}(\alpha)$ les ramifications de $\alpha$ en $C_1$, $C_2$ respectivement. Comme la suite naturelle induite par les applications de résidu

$$H^2(F\,,\,\mu_q) \longrightarrow \bigoplus_{v\in(\mathrm{Spec}\ \mathscr{O}_{X,\,P})^{(1)}} H^1(\kappa(v)\,,\,\mathbb{Z}/q) \longrightarrow H^0(\kappa(P)\,,\,\mu_q^{\otimes(-1)})$$

est un complexe (cf. [Kat86] ou [CT06, Prop. 2.3]), $\chi_1 \in H^1(\kappa(C_1)\,,\,\mathbb{Z}/q)$ est non ramifiée en $P$ si et seulement si $\chi_2 \in H^1(\kappa(C_2)\,,\,\mathbb{Z}/q)$ est non ramifiée en $P$.

**Définition 2.3.12** ([Sal07, §§2–3])**.** Soient $X$, $F$, $q$, $\alpha$ etc. comme dans (2.3.11). Supposons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$. Soit $P \in X$ un point nodal pour $\alpha$, qui se trouve sur deux composantes irréductibles distinctes $C_1$, $C_2$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$.

(1) $P$ est appelé un ***point froid*** ("cold point" en anglais) pour $\alpha$ si

$$\chi_1 = \mathrm{ram}_{C_1}(\alpha) \in H^1(\kappa(C_1)\,,\,\mathbb{Z}/q)$$

(et donc $\chi_2 = \mathrm{ram}_{C_2}(\alpha) \in H^1(\kappa(C_2)\,,\,\mathbb{Z}/q)$ aussi) est ramifiée en $P$.

(2) Supposons que $\chi_1$ et $\chi_2$ sont non ramifiées en $P$, de sorte qu'elles se trouvent respectivement dans $H^1(\mathscr{O}_{C_1\,,\,P}\,,\,\mathbb{Z}/q)$ et $H^1(\mathscr{O}_{C_2\,,\,P}\,,\,\mathbb{Z}/q)$. Soient $\chi_i(P) \in H^1(\kappa(P)\,,\,\mathbb{Z}/q)\,,\ i = 1,\,2$ leurs spécialisations et soient $\langle\chi_i(P)\rangle$, $i = 1,\,2$ les sous-groupes de $H^1(\kappa(P)\,,\,\mathbb{Z}/q)$ engendrés par $\chi_i(P)$ respectivement. Alors $P$ est appelé

(2.a) un ***point frais*** ("cool point" en anglais) pour $\alpha$ si

$$\langle\chi_1(P)\rangle = \langle\chi_2(P)\rangle = 0$$

(2.b) un ***point glacé*** ("chilly point" en anglais) pour $\alpha$ si

$$\langle\chi_1(P)\rangle = \langle\chi_2(P)\rangle \neq 0$$

(2.c) un ***point chaud*** ("hot point" en anglais) pour $\alpha$ si

$$\langle\chi_1(P)\rangle \neq \langle\chi_2(P)\rangle\,.$$

Quand $P$ est un point glacé, il existe un unique $s = s(C_2/C_1) \in (\mathbb{Z}/q)^*$ tel que

$$\chi_2(P) = s.\chi_1(P) \in H^1(\kappa(P)\,,\,\mathbb{Z}/q)\,.$$

On dit que $s = s(C_2/C_1)$ est le ***coefficient*** du point glacé $P$ par rapport à $C_1$.

***Remarque*** 2.3.13. On peut vérifier sans trop de difficultés que notre classification des points nodaux, qui suit [Bru10, Definition 8.5], est équivalente à la formulation originale de Saltman, qui s'exprime comme suit : Considérons d'abord le cas $\mu_q \subseteq F$. Alors

$$\alpha \equiv (u\,,\,\pi) + (v\,,\,\delta) + r.(\pi\,,\,\delta) \pmod{\mathrm{Br}(\mathscr{O}_{X,\,P})}$$

d'après la proposition 2.3.5. Ici $u,\, v \in \mathscr{O}_{X,\,P}^*$, $r \in \mathbb{Z}/q$ et $\pi,\, \delta \in \mathscr{O}_{X,\,P}$ sont des équations locales des deux composantes de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ qui passent par $P$. Le point $P$ est un ***point froid*** si $r \neq 0 \in \mathbb{Z}/q$. Supposons ensuite que $r = 0 \in \mathbb{Z}/q$. Alors $P$ est un ***point frais*** si $u(P)\,,\, v(P) \in \kappa(P)^{*q}$ ; un ***point glacé*** si $u(P)\,,\, v(P) \notin \kappa(P)^{*q}$ et s'ils engendrent le même sous-groupe de $\kappa(P)^*/\kappa(P)^{*q}$ ; ou un ***point chaud*** sinon. Dans le cas général, soit $X' \to X$ le revêtement fini étale connexe obtenu en adjoignant toutes les racines $q$-ièmes de l'unité et soit $\alpha'$ l'image canonique de $\alpha$ dans $\mathrm{Br}(F')$, où $F'$ désigne le corps de fonctions de $X'$. Alors pour tous deux points $P_1'\,,\, P_2' \in X'$, tous au-dessus de $P \in X$, $P_1'$ est un point froid (resp. frais, resp. glacé, resp. chaud) pour $\alpha'$ si et seulement si $P_2'$ l'est, en ce cas on dit que $P$ est un point froid (resp. frais, resp. glacé, resp. chaud) pour $\alpha$. Quand $P$ est glacé, le coefficient de $P$ par rapport à une composante qui passe par $P$ est bien définie, en tant que le coefficient de toute image réciproque $P'$ de $P$.

Afin d'avoir quelques compatibilités des coefficients de points glacés, on doit éliminer les ***boucles*** dites ***glacées*** ("chilly loops" en anglais), i.e., les boucles dans le graphe suivant : L'ensemble des sommets est l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ et il y a une arête entre deux sommets dès qu'il existe un point glacé dans l'intersection des deux courbes correspondant aux deux sommets.

**Proposition 2.3.14** ([Sal07, Prop. 3.8])**.** *Soient $X$ , $F$ , $q$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$ comme ci-dessus. Supposons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$. Alors il existe un morphisme propre birationnel $X' \to X$, obtenu par une suite d'éclatements, tel que $\alpha$ n'a pas de points frais ni de boucles glacées sur $X'$.*

**(2.3.15)** On aura aussi besoin de la notion de ***classe résiduelle*** en une place ramifiée. Soit $C$ une composante irréductible de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ et soit $v = v_C$ la valuation discrète associée de $F$. On choisit n'importe quel $x \in F^*$ avec $q \nmid v(x)$, de sorte que l'extension $M/F := F(\sqrt[q]{x})/F$ est totalement ramifiée en $v = v_C$ et $\alpha_M = \alpha \otimes_F M \in \mathrm{Br}(M)$ est non ramifiée en la valuation discrète unique $w$ de $M$ au-dessus de $v$. On a $\kappa(w) = \kappa(v) = \kappa(C)$ et donc une classe de Brauer bien définie $\beta_{C,x} \in \mathrm{Br}(\kappa(C))$ donnée par la spécialisation de $\alpha_M \in \mathrm{Br}(M)$ dans $\mathrm{Br}(\kappa(w)) = \mathrm{Br}(\kappa(C))$. Soit $(L/\kappa(C)\,,\,\sigma) = \mathrm{ram}_C(\alpha)$ la ramification de $\alpha$ en $C$. Que $\beta_{C,x} \in \mathrm{Br}(\kappa(C))$ est déployée par l'extension $L/\kappa(C)$ ou non ne dépend pas du choix de $M = F(\sqrt[q]{x})$ ([Sal07, Coro. 0.7]). On dit que les ***classes résiduelles de $\alpha$ en $C$ sont déployées par la ramification***, si pour un (et donc pour tout) choix de $M = F(\sqrt[q]{x})$, la classe résiduelle $\beta_{C,x} \in \mathrm{Br}(\kappa(C))$ est déployée par $L/\kappa(C)$ ([Sal07, p.821, Remark]). Lorsque on ne s'intéresse qu'à cette propriété, on écrit simplement $\beta_C$ pour $\beta_{C,x} \in \mathrm{Br}(\kappa(C))$ par rapport à n'importe quel choix de $x$.

**Proposition 2.3.16** ([Sal07, Prop. 0.5 and Prop. 3.10 (d)])**.** *Soient $X$, $F$, $q$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$ comme ci-dessus. Supposons que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns sur $X$. Considérons les propriétés suivantes :*

(i) *La classe de Brauer $\alpha$ a pour indice $q$.*

(ii) *Toutes les classes résiduelles $\beta_C$ of $\alpha$ en toutes les composantes $C$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ sont déployées par la ramification.*

(iii) *Il n'y a pas de points chauds pour $\alpha$ sur $X$.*

*Alors on a les implications* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

### 2.3.3 Déploiement sur une extension de Kummer

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 2.1.1 et l'assertion (i) du théorème 2.1.2. Un ingrédient clé est un résultat sur les groupes de Picard modifiés.

**(2.3.17)** Soit $X$ un schéma réduit qui est projectif sur un anneau. Soit $\mathcal{P} \subseteq X$ un ensemble fini de points fermés de $X$. On note $\mathscr{K}_X$ le faisceau de fonctions méromorphes sur $X$ et on pose $\mathcal{P}^* := \oplus_{P\in\mathcal{P}}\kappa(P)^*$. Notons $\mathscr{O}^*_{X,\mathcal{P}}$ le noyau de la surjection naturelle de faisceaux $\mathscr{O}^*_X \to \mathcal{P}^*$, de sorte qu'on a une suite exacte naturelle

$$1 \longrightarrow \mathscr{O}^*_{X\,,\,\mathcal{P}} \longrightarrow \mathscr{O}^*_X \longrightarrow \mathcal{P}^* \longrightarrow 1\,.$$

On définit les sous-groupes

$$K^*_{\mathcal{P}} \subseteq H^0(X\,,\,\mathscr{K}_X) \quad \text{et} \quad H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X) \subseteq H^0(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X)$$

par

$$K^*_{\mathcal{P}} := \{\, f \in H^0(X\,,\,\mathscr{K}_X) \,|\, f \in \mathscr{O}^*_{X\,,\,P}\,,\ \ \forall\, P \in \mathcal{P}\,\}$$

et

$$H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X) := \{\, D \in H^0(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X) \,|\, \mathrm{Supp}(D) \cap \mathcal{P} = \emptyset\,\}\,.$$

Considérons l'application naturelle

$$\phi\ :\ K^*_{\mathcal{P}} \longrightarrow H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X)\oplus(\oplus_{P\in\mathcal{P}}\kappa(P)^*)\ ;\quad f\longmapsto(\mathrm{div}_X(f)\,,\,\oplus f(P))\,.$$

**Proposition 2.3.18** ([Sal07, Prop. 1.6])**.** *Avec les notations comme dans* (2.3.17)*, on a un isomorphisme naturel*

$$H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X,\mathcal{P}})\cong\frac{H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}_X/\mathscr{O}^*_X)\oplus(\oplus_{P\in\mathcal{P}}\kappa(P)^*)}{\phi(K^*_{\mathcal{P}})}$$

Voici une généralisation de [Sal07, Prop. 1.7] qui sera indispensable dans notre preuve du théorème 2.1.1.

**Proposition 2.3.19.** *Soit $A$ un anneau local intègre* (*noethérien*)*, normal, hensélien, de corps résiduel $\kappa$, $X$ un schéma intègre, et $X\to\mathrm{Spec}\,A$ un morphisme propre dont la fibre fermée $X_0$ est de dimension $\leq 1$ et dont la fibre générique est géométriquement intègre. Soit $m$ un entier positif qui est inversible dans $A$. Soit $\overline{X}=(X_0)_{\mathrm{red}}$ le sous-schéma fermé réduit sur la fibre fermée $X_0$. Supposons que $\overline{X}$ est géométriquement réduit sur $\kappa$* (*e.g. $\kappa$ est parfait*)*.*

*Alors pout tout ensemble fini $\mathcal{P}$ de points fermés de $X$, l'application naturelle*

$$H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}})\longrightarrow H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})$$

*est surjective et induit un isomorphisme canonique*

$$H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}})/m\cong H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})/m\,.$$

Pour montrer la proposition ci-dessus, on va utiliser un lemme bien connu.

**Lemme 2.3.20.** *Soit $A$ un anneau local* (*noethérien*) *hensélien, $X\to\mathrm{Spec}\,A$ un morphisme propre dont la fibre fermée $X_0$ est de dimension $\leq 1$, $m>0$ un entier positif qui est inversible dans $A$ et $\overline{X}=(X_0)_{\mathrm{red}}$ le sous-schéma fermé réduit sur la fibre fermée $X_0$.*

*Alors l'application naturelle $\mathrm{Pic}(X)\to\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est surjective et induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(X)/m\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\overline{X})/m\,.$$

*Démonstration.* La surjectivité de $\mathrm{Pic}(X)\to\mathrm{Pic}(\overline{X})$ résulte de [GD63, IV.21.9.12]. Alors le diagramme commutatif à lignes exactes, qui provient de la suite de Kummer :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)/m & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(X\,,\,\mu_m) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(X)[m] & \longrightarrow & 0\\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X})/m & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}\,,\,\mu_m) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})[m] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne l'isomorphisme désiré $\mathrm{Pic}(X)/m\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\overline{X})/m$, parce que l'application verticale du milieu est un isomorphisme par le changement de base propre (cf. [AGV73, Exp. XII, Coro. 5.5]), notant aussi que tout schéma $Y$ a la même cohomologie étale à valeurs dans un schéma en groupe étale commutatif que son sous-schéma fermé réduit $Y_{\mathrm{red}}$ (cf. [AGV73, Exp. VIII, Coro. 1.2]). □

*Démonstration de la proposition* 2.3.19. Le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(X\,,\,\mathscr{O}^*) & \xrightarrow{\varphi} & H^0(X\,,\,\mathcal{P}^*) & \longrightarrow & H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^0(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*) & \xrightarrow{\theta} & H^0(\overline{X}\,,\,\mathcal{P}^*) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne la surjectivité de $H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}}) \to H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})$, car la flèche $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ est surjective par le lemme 2.3.20. Posons $M := \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq N := \mathrm{Im}(\theta)$.

Nous affirmons que $\pi$ est surjective. En effet, d'après le théorème de connexité de Zariski ([GD61, III.4.3.12]), l'hypothèse que $A$ est normal et que la fibre générique de $X \to \mathrm{Spec}\, A$ est géométriquement intègre entraîne que la fibre fermée $X_0$ est géométriquement connexe. La fibre fermée réduite $\overline{X} = (X_0)_{\mathrm{red}}$ est géométriquement connexe aussi. Puisque $\overline{X}$ est supposée géométriquement réduite, on a $H^0(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*) = \kappa^*$. Ainsi, la flèche $\pi : H^0(X\,,\,\mathscr{O}^*) \to H^0(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*)$ est évidemment surjective car $A^* \subseteq H^0(X\,,\,\mathscr{O}^*)$.

Maintenant notre affirmation montre que $M = N$ et il en résulte alors que

$$\mathrm{Ker}\Big(H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}}) \to H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})\Big) \cong B := \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}))$$

Il suffit de montrer $B/m = 0$. Du diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(X\,,\,\mathscr{O}^*)/m & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(X\,,\,\mu_m) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)[m] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*)/m & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(\overline{X}\,,\,\mu_m) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X})[m] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

il résulte que $\mathrm{Pic}(X)[m] \cong \mathrm{Pic}(\overline{X})[m]$, car la flèche verticale du milieu est un isomorphisme par le théorème de changement de base propre et on a déjà démontré que la flèche verticale à gauche est surjective. Appliquant le lemme du serpent au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et utilisant le lemme 2.3.20, on voit immédiatement $B/m = 0$, ce qui achève la démonstration. □

**Proposition 2.3.21.** *Soit $A$ un anneau local intègre (noethérien) hensélien de corps résiduel $\kappa$, $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $\kappa$, et $X$ une surface excellente régulière munie d'un morphisme propre dominant $X \to \mathrm{Spec}\, A$. Soit $F$ le corps de fonctions de $X$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$. Supposons que $\kappa$ est parfait et que $\alpha$ a pour indice $q$.*

*Alors il existe $g \in F^*$ tel que l'extension $M/F := F(\sqrt[q]{g})/F$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $X$, i.e., $\alpha_M \in \mathrm{Br}_{nr}(M/X)$.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer $A$ par sa normalisation si nécessaire, on peut supposer que $A$ est normal. Soit $\mathrm{Ram}_X(\alpha) = \sum C_i$ le diviseur de ramification de $\alpha$ sur $X$ et soit $\overline{X} = (X_0)_{\mathrm{red}}$ le sous-schéma fermé réduit sur la fibre fermée $X_0$. Quitte à effectuer un nombre fini d'éclatements, on peut suppoer que $X_0$ est pure de dimension 1, que $B := (\mathrm{Ram}_X(\alpha) \cup \overline{X})_{\mathrm{red}}$ est un diviseur cns, et qu'il n'y a pas de points frais ni de boucles glacées pour $\alpha$ sur $X$ (cf. Prop. 2.3.14). Écrivons

$$(L_i/\kappa(C_i)\,,\,\sigma_i) = \mathrm{ram}_{C_i}(\alpha) \in H^1(\kappa(C_i)\,,\,\mathbb{Z}/q)$$

pour la ramification $\alpha$ en $C_i$. D'arpès l'hypothèse sur l'indice, il n'y a pas de points chauds pour $\alpha$ sur $X$ et les classes résiduelles de $\alpha$ en $C_i$ sont déployées par la ramification $L_i/\kappa(C_i)$ pour tout $i$ (cf. Prop. 2.3.16). Tenant compte de [Sal07, Thm. 4.6], on peut trouver $\pi \in F^*$ ayant les propriétés suivantes :

(P.1) $v_{C_i}(\pi) = s_i$ n'est pas divisible par $q$.

(P.2) Si $P$ est un point glacé dans l'intersection de $C_i$ et $C_j$, alors le coefficient $s(C_j/C_i)$ de $P$ par rapport à $C_i$ (cf. Définition 2.3.12) vérifie $s(C_j/C_i)s_i = s_j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

(P.3) Le diviseur $E := \mathrm{div}_X(\pi) - \sum s_i C_i$ ne contient pas de points singuliers de $B = (\mathrm{Ram}_X(\alpha) \cup X_0)_{\mathrm{red}}$ ni de composantes irréductibles de $B$ dans son support.

(P.4) Par rapport à $F' := F(\pi^{1/q})$, les classes de Brauer résiduelles $\beta_{C_i\,,F'} = \beta_{C_i\,,\pi} \in \mathrm{Br}(\kappa(C_i))$ de $\alpha$ en toutes les $C_i$ sont triviales.

(P.5) Pour tout point fermé $P$ dans l'intersection de $E$ avec une $C_i$, la multiplicité d'intersection $(C_i \cdot E)_P$ est un multiple de $q$ si l'extension correspondante de corps $L_i/\kappa(C_i)$ est non déployée en $P$.

Soit $\gamma \in \mathrm{Pic}(X)$ la classe de $\mathscr{O}_X(-E)$ et soit $\overline{\gamma} \in \mathrm{Pic}(\overline{X})$ son image canonique. En vertu de la propriété (P.3), $E$ et $\overline{X}$ ne se rencontrent qu'en des points non singuliers de $\overline{X}$. On peut donc représenter $\overline{\gamma}$ en tant que diviseur de Cartier sur $\overline{X}$ en termes de l'intersection de $-E$ et $\overline{X}$. Ce diviseur peut être choisi de la forme suivante

$$\sum q n_j Q_j + \sum n_l Q'_l\,, \tag{2.3.21.1}$$

où $Q_j\,,\,Q'_l$ sont des points non singuliers sur $\overline{X}$, et pour chaque $Q'_l$, on a soit $Q'_l \notin \mathrm{Ram}_X(\alpha)$ soit $Q'_l \in C_i$ pour exactement une seule $C_i$ et l'extension correspondante de corps $L_i/\kappa(C_i)$ est déployée en $Q'_l$ (par la propriété (P.5)).

D'après [GD63, IV.21.9.11 et IV.21.9.12], il existe un diviseur premier $E'_l$ sur $X$ tel que $E'_l|_{\overline{X}} = Q'_l$ en tant que diviseurs de Cartier sur $\overline{X}$. Remarquons que $E'_l \nsubseteq \mathrm{Ram}_X(\alpha)$ parce que sinon $Q'_l \in E'_l \cap \overline{X}$ serait un point singulier de $E'_l \cup \overline{X} \subseteq B = (\mathrm{Ram}_X(\alpha) \cup \overline{X})_{\mathrm{red}}$. Posons $E' = -E - \sum n_l E'_l$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points singuliers de $B$ (en particulier, $\mathcal{P}$ contient tous les points nodaux pour $\alpha$).

Soit $\gamma' \in H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}})$ l'élément représenté par le couple

$$(E'\,,\,\oplus 1) \in H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}^*/\mathscr{O}^*) \oplus (\oplus_{P\in\mathcal{P}}\kappa(P)^*)$$

via l'isomorphisme

$$H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}}) \cong \frac{H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}^*/\mathscr{O}^*)\oplus(\oplus_{P\in\mathcal{P}}\kappa(P)^*)}{K^*_{\mathcal{P}}}$$

dans la proposition 2.3.18. (Ici $E'\in H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}^*/\mathscr{O}^*)$ parce que d'après le choix de $\pi$, $E$ ne contient aucun point singulier de $B=(\mathrm{Ram}_X(\alpha)\cup\overline{X})_{\mathrm{red}}$.) L'image $\overline{\gamma}'$ de $\gamma'$ dans $H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})$ se trouve dans $q.H^1(\overline{X}\,,\,\mathscr{O}^*_{\overline{X}\,,\mathcal{P}})$ d'après l'expression (2.3.21.1).

De la proposition 2.3.19 il résulte que $\gamma'\in q.H^1(X\,,\,\mathscr{O}^*_{X\,,\mathcal{P}})$. Donc, d'après la proposition 2.3.18, il y a un diviseur $E''\in H^0_{\mathcal{P}}(X\,,\,\mathscr{K}^*/\mathscr{O}^*)$, des éléments $a(P)\in\kappa(P)^*$ pour chaque $P\in\mathcal{P}$, et $f\in F^*$ tels que $f$ est une unité en tout $P\in\mathcal{P}$, $\mathrm{div}_X(f)=E'+qE''$ et $f(P)=a(P)^q\,,\;\forall\;P\in\mathcal{P}$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_X(f\pi)&=\mathrm{div}_X(f)+\mathrm{div}_X(\pi)=(E'+qE'')+\Big(\sum s_iC_i+E\Big)\\&=-E-\sum n_lE'_l+qE''+E+\sum s_iC_i\\&=\sum s_iC_i+\Big(qE''-\sum n_lE'_l\Big)\\&=:\sum s_iC_i+\sum\tilde{n}_jD_j\,.\end{aligned}\tag{2.3.21.2}$$

Observons que, pour tout $D_j$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(P.6) $D_j$ ne peut rencontrer $B$ qu'en des points non singuliers de $B$.

(P.7) Si $q\nmid\tilde{n}_j$, alors $D_j\in\{\,E'_l\,\}$, et donc soit $D_j\cap\mathrm{Ram}_X(\alpha)=\emptyset$ soit $D_j\cap\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est formé d'un seul $P$, qui se trouve sur une seule $C_i$ et l'extension correspondante de corps $L_i/\kappa(C_i)$ est déployée en $P$.

On affirme que $g=f\pi$ satisfait à la propriété désirée. C'est à dire, posant $M=F((f\pi)^{1/q})$, $\alpha_M\in\mathrm{Br}(M)$ est non ramifiée en toute valuation discrète de $M$ au-dessus d'un point ou d'une courbe sur $X$.

Pour prouver l'affirmation, on considère une valuation discrète de $M$ audessus d'une $v\in\Omega(F/X)$.

Si $v$ est centrée en une $C_i$, alors $M/F$ est totalement non ramifiée en $v$ car le coefficient $s_i$ de $f\pi$ en $C_i$ est premier à $q$ (cf. (2.3.21.2)), donc en particulier $M/F$ tue la ramification de $\alpha$ en $v$. Comme $\alpha$ est non ramifiée en toutes les autres courbes sur $X$, on peut se restreindre au cas où $v$ est centrée en un point fermé $P$ de $X$. D'après [Sal07, Thm. 3.4], on peut aussi ignorer des points distants et des points courbes $P\in C_i$ où $L_i/\kappa(C_i)$ est déployée en $P$.

Supposons maintenant que $P$ est un point courbe qui se trouve sur une $C_1\in\{\,C_i\,\}$ où l'extension correspondante de corps $L_1/\kappa(C_1)$ est non déployée en $P$. D'après la propriété (P.7), les courbes autre que $C_1$ dans le support de $\mathrm{div}_X(f\pi)$ qui peuvent passer par $P$ ont pour coefficients un multiple de $q$. Par conséquent, dans $R_P=\mathscr{O}_{X\,,P}$, on a $f\pi=u\pi_1^{s_1}\delta^q$ avec $u\in R_P^*$, $\pi_1\in R_P$ une uniformisante de $C_1$ en $P$ et $\delta\in R_P$ premier à $\pi_1$. Utilisant [Sal07, Prop. 3.5], on conclut alors que $M/F$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ en $v$.

Rappelons que nous supposons qu'il n'y a pas de points frais ni de points chauds pour $\alpha$. Donc, dans les cas qui restent, $P$ est un point froid ou un point glacé.

Supposons d'abord que $P$ est un point froid pour $\alpha$. D'après la propriété (P.4) et [Sal07, Coro. 0.7], la classe résiduelle $\beta_{C_i\,,M}$ de $\alpha$ en toute $C_i$ par rapport à $M = F((f\pi)^{1/q})$ est donnée par la classe d'une algèbre cyclique $(\chi_i\,,\,\bar{f}^{-t})$, où

$$\chi_i = (L_i/\kappa(C_i)\,,\,\sigma_i) = \mathrm{ram}_{C_i}(\alpha) \in H^1(\kappa(C_i)\,,\,\mathbb{Z}/q)\,,$$

$t$ est un entier positif premier à $q$ et $\overline{f}$ désigne l'image canonique de $f$ dans $\kappa(C_i)$. Comme $f$ est une puissance $q$-ième dans $\kappa(P)$ par le choix, il s'ensuit aussitôt que $\beta_{C_i\,,M}$ est non ramifiée en $P$. Dans l'anneau local $R_P = \mathscr{O}_{X,P}$, on a $f\pi = u_P\pi_1^{s_1}\pi_2^{s_2}$ pour un certain $u_P \in R_P^*$, d'après (2.3.21.2) et la propriété (P.6). Donc, d'après [Sal07, Prop. 3.10 (c)], $M$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ en $v$.

Enfin, considérons le cas où $P$ est un point glacé. Soient $C_1$, $C_2 \in \{\,C_i\,\}$ les deux composantes irréductibles différentes de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ qui passent par $P$ et soient $\pi_1$, $\pi_2 \in R_P = \mathscr{O}_{X\,,P}$ des uniformisantes de $C_1$, $C_2$ en $P$. Utilisant encore une fois (2.3.21.2) et la propriété (P.6), on a $f\pi = u_P\pi_1^{s_1}\pi_2^{s_2}$ pour un certain $u_P \in R_P^*$. Soit $s = s(C_2/C_1)$ le coefficient de $P$ par rapport à $C_1$. Utilisant la propriété (P.2), on voit que $M = F((f\pi)^{1/q})$ s'écrit sous la forme $M = F((\pi_1'\pi_2^s)^{1/q})$, où $\pi_1' \in R_P$ est une uniformisante de $C_1$ en $P$. Ainsi, d'après [Sal07, Prop. 3.9 (a)], $M/F$ tue toutes les ramifications de $\alpha$ en $v$, ceci achève la démonstration. □

**Corollaire 2.3.22.** *Soit $A$ un anneau local intègre (noethérien) hensélien de corps résiduel $\kappa$, $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $\kappa$, et $X$ une surface excellente régulière munie d'un morphisme propre dominant $X \to \mathrm{Spec}\ A$. Soit $F$ le corps de fonctions de $X$ et $\alpha$ une class dans $\mathrm{Br}(F)[q]$. Supposons que $\kappa$ est un corps $B_1$ et que $\alpha$ a pour indice $q$.*

*Si $\mu_q \subseteq F$ ou $\kappa$ est parfait, alors la classe $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$.*

*Démonstration.* Si $\mu_q \subseteq F$, on peut utiliser [Sal08, Thm. 7.13] pour trouver une extension de Kummer de degré $q$ $M/F = F(\sqrt[q]{g})/F$ qui tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $X$. Si $\kappa$ is parfait, une telle extension existe d'après la proposition 2.3.21. Comme dans la preuve du théorème 2.3.9, on a $\mathrm{Br}_{nr}(M/X) = 0$ d'après le corollaire 2.2.10. Donc, $\alpha_M = 0 \in \mathrm{Br}(M)$. D'après un théorème de Albert (cf. [Sal07, Prop. 0.1]), qui est assez immédiat lorsque on suppose l'existence d'une racine primitive $q$-ième de l'unité, $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$. □

Rappelons que $R$ désigne toujours un anneau local intègre, henselien, excellent, de dimension 2 dont on note le corps des fractions $K$ et le corps résiduel $k$. Le théorème 2.1.1 affirme que si le corps résiduel $k$ est parfait, alors pour toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ d'indice $q$, qui est inversible dans in $k$, il existe une extension de Kummer $M/K = K(\sqrt[q]{g})/K$ de degré $q$ qui tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $R$. La preuve du théorème est alors immédiate.

*Preuve du théorème* 2.1.1. Il suffit d'appliquer la proposition 2.3.21 à un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ et de remarquer que $\Omega(M/\mathcal{X}) = \Omega(M/R)$. □

L'assertion (i) du théorème 2.1.2 est un cas particulier du résultat suivant, qui est légèrement plus général.

**Théorème 2.3.23.** *Supposons que le corps résiduel $k$ de $R$ a la propriété $B_1$. Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$.*

*Si $\mu_q \subseteq R$ ou $k$ est parfait, alors toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[q]$ d'indice $q$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$.*

*Démonstration.* On applique le corollaire 2.3.22 à un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$. □

***Remarque*** 2.3.24. (1) Dans la proposition 2.3.21 ou le corollaire 2.3.22, selon la preuve ci-dessus, si on suppose que le morphisme $X \to \mathrm{Spec}\ A$ est choisi tel que $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ est un diviseur cns et que $\alpha$ n'a pas de point frais ni de boucles glacées sur $X$, alors l'hypothèse que $\alpha$ a pour indice $q$ peut être remplacée par la condition plus faible que toutes les classes résiduelles $\beta_C$ de $\alpha$ en toute composante $C$ de $\mathrm{Ram}_X(\alpha)$ sont déployées par la ramification.

(2) De même, si $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ est un modèle propre régulier tel que $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ est un diviseur cns et que $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[q]$ n'a pas de point frais ni de boucles glacées sur $\mathcal{X}$, alors les conclusions dans les théorèmes 2.1.1 et 2.3.23 restent valables si au lieu de supposer que $\alpha$ a pour indice $q$ on demande que toutes les classes résiduelles de $\alpha$ en toutes les composantes de $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ soient déployées par la ramification.

(3) Dans le contexte du théorème 2.3.23, si $k$ est un corps séparablement clos, [CTOP02, Thm. 2.1] donne un résultat plus fort : toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ dont l'ordre $n$ est inversible dans $R$ (mais pas forcément un nombre premier) est représentée par une algèbre cyclique d'indice $n$.

### 2.3.4 Quelques corollaires

Comme application des résultats obtenus précédemment, nous donnons un critère pour que $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[q]$ ait pour indice $q$. De plus, nous allons prouver théorème 2.1.3.

Nous commençons par le fait aisé et standard suivant.

**Lemme 2.3.25.** *Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien, excellent et de dimension 2 dont on note $K$ le corps des fractions et $k$ le corps résiduel. Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ un modèle propre régulier. Alors pour toute courbe $C \subseteq \mathcal{X}$, on a soit*

(i) *$C$ est une courbe propre sur $k$ ;*
*soit*
(ii) *$C = \mathrm{Spec}\ B$, où $B$ est un anneau intègre tel que sa normalisation $B'$ est un anneau de valuation discrète hensélien dont le corps résiduel est une extension finie de $k$.*

*Démonstration.* Quitte à remplaçer $R$ par sa normalisation, on peut supposer que $R$ est normal.

Considérons l'image schématique $D$ de $C \subseteq \mathcal{X}$ par le morphisme structurel $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$. Si $D$ est un point fermé de Spec $R$, alors $C$ est une courbe propre sur le corps résiduel $k$. Sinon, $D$ est le sous-schéma fermé de Spec $R$ défini par un idéal premier $\mathfrak{p} \subseteq R$ de hauteur 1. Puisque $R$ est normal et de dimension 2, le morphisme propre birationnel $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ est un isomorphisme sur les points de codimension 1 (cf. [Liu02, p.150, Coro. 4.4.3]). Ainsi le morphisme induit $C \to D$ est propre birationnel et quasi-fini, il est donc fini d'après le théorème de Chevalley. Notons $A = R/\mathfrak{p}$ tel que $D = \mathrm{Spec}\ A$. Alors $C = \mathrm{Spec}\ B$ pour un anneau intègre $B \subseteq \kappa(C) = \kappa(D)$ qui est fini sur $A$. Comme $A$ est un anneau local intègre excellent hensélien, $B$ l'est aussi. La normalisation $B'$ de $B$ est finie sur $B$ et donc un anneau local intègre hensélien aussi, et elle coïncide avec la normalisation de $A$ dans son corps des fractions $\mathrm{Frac}(A) = \kappa(C) = \kappa(D)$. Il est donc clair que $B'$ est un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel fini sur $k$. Ceci achève la démonstration. □

Rappelons que $\Omega_R$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de $K$ qui sont centrées sur les points de codimension 1 des modèles propres réguliers.

**Corollaire 2.3.26.** *Pour toute $v \in \Omega_R$, le corps résiduel $\kappa(v)$ est soit le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur $k$ soit le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien dont le corps résiduel est une extension finie de $k$.*

On peut maintenant prouver la variante suivante de [Sal07, Coro. 5.2].

**Corollaire 2.3.27.** *Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique du corps résiduel $k$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[q]$ une classe de Brauer d'order $q$. Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ un modèle propre régulier tel que le diviseur de ramification $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ de $\alpha$ sur $\mathcal{X}$ est à croisements normaux stricts et que $\alpha$ n'a pas de points frais ni de boucles glacées sur $\mathcal{X}$. Notons $\mathrm{ram}_{C_i}(\alpha) = (L_i/\kappa(C_i)\,,\,\sigma_i)$ les ramifications et $\beta_i \in \mathrm{Br}(\kappa(C_i))$ les classes résiduelles.*

*Supposons que $k$ est un corps fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$\alpha$ a pour indice $q$.*
(ii) *$\beta_i \in \mathrm{Br}(\kappa(C_i))$ est déployée par $L_i/\kappa(C_i)$ pour toute $i$.*
(iii) *Il n'y a pas de point chauds pour $\alpha$ sur $\mathcal{X}$.*

*Démonstration.* On a (i)⇒(ii)⇒(iii) d'après Prop. 2.3.16.

Pour voir (ii)⇒(i), on observe que d'après la proposition 2.3.21 et la remarque 2.3.24 il existe une extension de Kummer $M/K = K(\sqrt[q]{g})/K$ de degré $q$ qui tue toutes les ramifications de $\alpha$ sur $R$. Comme le corps résiduel est fini, on a $\mathrm{Br}_{nr}(M/X) = 0$ et en particulier $\alpha_M = 0$. Ainsi, l'indice de $\alpha$ divise $q$, le degré de l'extension $M/K$. Comme $\alpha$ a pour ordre $q$, il résulte que l'indice de $\alpha$ est égal à $q$.

Pour montrer (iii)⇒(ii), soit $C$ une composante irréductible fixée du diviseur de ramification $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ dont la ramification sera notée $\mathrm{ram}_C(\alpha) = (L/\kappa(C)\,,\,\sigma)$. D'après [Sal07, Lemma 4.1], il existe $\pi \in K^*$ ayant les propriétés suivantes : (1) la valuation $s_i := v_{C_i}(\pi)$ par rapport à chaque composante $C_i$ de $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ est première à $q$ ; et (2) chaque fois qu'il y a un point glacé $P$ dans l'intersection de deux composantes $C_i$ et $C_j$, le coefficient de $P$ par rapport à $C_i$ est égal à $s_j/s_i = v_{C_j}(\pi)/v_{C_i}(\pi) \bmod q$.

Posons $M := K(\sqrt[q]{\pi})$. Soit $\beta$ la classe résiduelle de $\alpha$ par rapport à $M$, i.e., la spécialisation de $\alpha_M \in \mathrm{Br}(M)$ dans $\mathrm{Br}(\kappa(C))$. On veut démontrer que $\beta$ est déployée par $L/\kappa(C)$.

D'après le corollaire 2.3.26, $\kappa(C)$ est soit un corps de fonctions en une variable sur le corps fini $k$ soit le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien dont le corps résiduel est fini. La même propriété est vraie pour le corps $L$. Donc, dans les deux cas, $\beta \in \mathrm{Br}(\kappa(C))[q]$ est déployée par $L/\kappa(C)$ si et seulement si $L/\kappa(C)$ tue toutes les ramifications de $\beta$ en chaque point fermé $P$ de $C$.

Supposons d'abord que $L/\kappa(C)$ est déployée en $P$. Le point $P$ est soit un point glacé soit un point courbe ($P$ n'est pas froid parce que $L/\kappa(C)$ est non ramifiée en $P$, cf. Définition 2.3.12). Si $P$ est glacé, $\beta$ est non ramifiée en $P$ d'après [Sal07, Prop. 3.10 (b)]. Si $P$ est un point courbe, alors on peut conclure de [Sal07, Prop. 3.11].

Considérons ensuite le cas où $L/\kappa(C)$ est non déployée en $P$. La valuation $P$-adique $v_P$ de $\kappa(C)$ s'étend uniquement à une valuation discrète $w_P$ de $L$. Si $L/\kappa(C)$ est ramifiée en $P$, il est évident que $L/\kappa(C)$ tue la ramification de $\beta$ en $P$. Si $L/\kappa(C)$ est non ramifiée en $P$, alors $\kappa(w_P)$ est l'unique extension de degré $q$ du corps fini $\kappa(v_P) = \kappa(P)$. Ainsi, l'application de restriction

$$\mathrm{Res}\,:\quad H^1(\kappa(P)\,,\,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\kappa(w_P)\,,\,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

est nulle, ce qui entraîne que $L/\kappa(C)$ tue la ramification de $\beta$ en $P$. Le corollaire est ainsi prouvé. □

**Exemple 2.3.28.** Soit $p$ un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. Soit $k = \mathbb{F}_p$ le corps fini de cardinal $p$ et soit $R = k[\![x,\,y]\!]$ l'anneau de séries formelles en deux variables $x$, $y$ sur $k$. Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, R$ l'éclatement de $\mathrm{Spec}\, R$ en le point fermé et $E \subseteq \mathcal{X}$ le diviseur exceptionnel. On a

$$\mathrm{Proj}\,(k[T,\,S]) \cong E = \mathrm{Proj}\,(R[T,\,S]/(x,\,y)) \;\subseteq\; \mathcal{X} = \mathrm{Proj}\;(R[T,\,S]/(xS - yT))\;.$$

Soient $f_1 = y$, $f_2 = x$, $f_3 = y + x$ et $C_i \subseteq \mathcal{X}$ le transformé strict de la courbe définie par $f_i = 0$ dans $\mathrm{Spec}\, R$ pour chaque $i = 1, 2, 3$. Chaque intersection $C_i \cap E$ se compose d'un seul point qu'on note $P_i$.

Soit $\alpha$ la classe de Brauer de l'algèbre de biquaternions $(-1,\, y)\otimes(y+x,\, x)$ sur $K = k((x,\, y))$. Le diviseur de ramification $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ est $C_1 + C_2 + C_3 + E$. L'ensemble des points nodaux pour $\alpha$ sur $\mathcal{X}$ est $\{P_1,\, P_2,\, P_3\}$. Au voisinage de $P_1$, on peut prendre $s$, $x$ pour équations locales de $C_1$, $E$ respectivement, où $s = S/T = y/x \in K$. Ainsi, dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ on a

$$\alpha = (-1,\, y) + (y + x,\, x) = (-1,\, xs) + (xs + x\,,\, x) = (-1,\, s) + (s + 1,\, x)\,.$$

La fonction $s$ s'annule en $P_1$ et $-1 \neq 1 \in \kappa(P_1)^*/\kappa(P_1)^{*2} = k^*/k^{*2}$, donc $P_1$ est un point chaud par définition (cf. Remarque 2.3.13). On peut vérifier que $P_2$ et $P_3$ sont des points froids.

Quant aux classes résiduelles, on peut vérifier que pour chaque $i$ les classes résiduelles de $\alpha$ en $C_i$ sont déployées par la ramification. Montrons maintenant qu'en $E$ les classes résiduelles ne sont pas déployées par la ramification. En effet, si $v_E$ désigne la valuation discrète de $K$ définie par $E$, on a $v_E(x) = v_E(y) = v_E(y + x) = 1$. Il est ainsi facile de voir que la ramification $\mathrm{ram}_E(\alpha)$ de $\alpha$ en $E$ est représentée par l'extension quadratique $k(s)(\sqrt{s+1})$ de $\kappa(E) = k(s)$. Posant $M = K(\sqrt{x})$, $\alpha_M = (-1,\, y) = (-1,\, s) \in \mathrm{Br}(M)$ et donc la classe résiduelle de $\alpha$ en $E$ par rapport à $M/K$ est $\beta_E = (-1,\, s) \in \mathrm{Br}(\kappa(E)) = \mathrm{Br}(k(s))$. Écrivant $u = \sqrt{s+1}$, on voit que l'algèbre de quaternions $(-1,\, s) = (-1,\, u^2 - 1)$ n'est pas déployée sur $k(u) = k(s)(\sqrt{s+1})$ (en effet, elle est ramifiée en $u = 1$ car $-1$ n'est pas un carré dans $k = \mathbb{F}_p$).

On remarque que d'après la proposition 2.3.16 ou le corollaire 2.3.27, $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[2]$ est d'indice 4.

On va démontrer le théorème 2.1.3 sous une forme légèrement généralisée.

**Théorème 2.3.29.** *Soit $R$ un anneau local intègre, excellent, hensélien de dimension 2 dont le corps résiduel $k$ a la propriété $B_1$, $K$ le corps des fractions de $R$, $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$, et $\alpha \in \mathrm{Br}(K)[q]$. Supposons que $\mu_q \subseteq R$ ou $k$ est parfait.*

*Si pour toute $v$ dans l'ensemble $\Omega_R$ des valuations discrètes de $K$ qui correspondent aux points de codimension 1 des modèles propres réguliers, la classe de Brauer $\alpha_v = \alpha \otimes_K K_v \in \mathrm{Br}(K_v)$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $K_v$, alors $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $K$.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, R$ un modèle propre régulier tel que $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ est un diviseur cns et que $\alpha$ n'a pas de points frais ni de boucles glacées sur $\mathcal{X}$. D'après le théorème 2.3.23 et la remarque 2.3.24 (2), il suffit de démontrer que toutes les classes résiduelles de $\alpha$ aux composantes de $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ sont déployées par la ramification.

Supposons le contraire. Alors il existe une composante irréductible $C$ de $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ telle que les classes résiduelles de $\alpha$ en $C$ ne sont pas déployées par la ramification. Considérons maintenant la valuation discrète $v = v_C$ de $K$ définie par $C$. Par hypothèse, $\alpha_v \in \mathrm{Br}(K_v)[q]$ est cyclique de degré $q$, de sorte que

$\alpha_v = (\chi_v\,,\,b_v)$ pour un certain $\chi_v \in H^1(K_v\,,\,\mathbb{Z}/q)$ et un $b_v \in K_v^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b_v = w\pi^t$, où $\pi \in K_v^*$ est une uniformisante pour $v$, $w \in K_v^*$ est une unité pour $v$ et $t$ est un entier tel que $0 \le t \le q-1$.

Soit $(L/K_v\,,\,\sigma_v)$ le couple représentant le caractère $\chi_v \in \mathrm{Hom}_{cts}(G_{K_v}\,,\,\mathbb{Z}/q)$. Si $L/K_v$ est non ramifiée, alors $t \neq 0$, parce que $\alpha$ est ramifiée en $v = v_C$. Après un changement de notation si nécessaire, on peut supposer que $w = 1$. Alors

$$\alpha_v = (\chi_v\,,\,b_v) = (\chi_v\,,\,\pi^t) \in \mathrm{Br}(K_v)[q]$$

est clairement déployée par l'extension totalement ramifiée $K_v'/K_v := K_v(\sqrt[q]{\pi})/K_v$. En particulier, la classe résiduelle de $\alpha$ par rapport à $K_v'/K_v$ est 0 et a fortiori les classes résiduelles de $\alpha$ en $C$ sont déployées par la ramification. Mais cela contredit notre choix de $C$.

Si $L/K_v$ est ramifiée, alors elle est une extension cylique galoisienne qui est totalement et modérément ramifiée ("tamely ramified" en anglais). Il s'ensuit alors que $\mu_q \subseteq K_v$. On peut donc supposer que $\alpha_v = (u\pi^s\,,\,b_v) = (u\pi^s\,,\,w\pi^t)$ pour une certaine unité $u \in K_v^*$ et un entier $s$ tel que $0 \le s \le q-1$. Comme $\alpha$ est ramifiée en $v = v_C$, $s$ et $t$ ne peuvent pas être tous les deux 0. Supposons par exemeple $s > 0$. Un argument similaire à celui donné plus haut montre que $\alpha_v$ est déployée par une extension totalement ramifiée $K_v(\sqrt[q]{\pi})/K_v$, ce qui conduit encore une fois à une contradiction. Ceci démontre le théorème. □

Le cas spécial suivant sera utile au § 3.4.

**Corollaire 2.3.30.** *Soit $R$ un anneau local intègre, excellent, hensélien et de dimension 2 dont on note $K$ le corps des fractions et $k$ le corps résiduel. Supposons que $k$ est un corps fini de caractéristique $\neq 2$. Soit $D$ une algèbre centrale simple sur $K$ de période 1 ou 2.*

*Si pour toute $v \in \Omega_R$, $D \otimes_K K_v$ est Brauer équivalente à une algèbre de quaternions sur $K_v$, alors $D$ est Brauer équivalente à une algèbre de quaternions sur $K$.*

L'analogue du théorème 2.3.29 dans le cas du corps de fonctions d'une courbe $p$-adique n'a pas l'air d'avoir été observé jusqu'ici. Montrons-le sous la forme suivante.

**Théorème 2.3.31.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète excellent hensélien dont le corps résiduel $\kappa$ a la propriété $B_1$. Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $\kappa$, $F$ le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur le corps des fractions de $A$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(F)[q]$. Pour toute surface régulière $\mathcal{Y}$ de corps de fonctions $F$ munie d'un morphisme propre plat $\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}\,A$, on note $\Omega(F/\mathcal{Y}^{(1)})$ l'ensemble des valuations discrètes de $F$ correspondant aux points de codimension 1 de $\mathcal{Y}$. Soit $\Omega_{A,F}$ la réunion des $\Omega(F/\mathcal{Y}^{(1)})$ pour $\mathcal{Y}$ variant parmi toutes les surfaces du type ci-dessus.*

*Supposons que $\mu_q \subseteq F$ ou $\kappa$ est parfait. Si pour toute $v \in \Omega_{A,F}$, $\alpha_v = \alpha \otimes_F F_v \in \mathrm{Br}(F_v)$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $F_v$, alors $\alpha$ est représentée par une algèbre cyclique de degré $q$ sur $F$.*

*Démonstration.* Grâce à la résolution des singularités, il existe une surface régulière $X$ de corps de fonctions $F$, munie d'un morphisme propre plat $X \to \operatorname{Spec} A$, telle que le diviseur de ramification $\operatorname{Ram}_X(\alpha)$ est à croisements normaux stricts et que $\alpha$ n'a pas de points frais ni de boucles glacées sur $X$. D'après le corollaire 2.3.22 et la remarque 2.3.24, it suffit de montrer que toutes les classes résiduelles de $\alpha$ sont déployées par la ramification. Cela peut être fait comme dans la preuve du théorème 2.3.29. □

## 2.4 Quelques remarques sur le problème de période-indice

Dans cette section, nous synthétisons brièvement quelques progrès sur le problème de période-indice pour les groupes de Brauer et discutons des relations entre notre résultat du type "période-indice" (Thm. 2.3.10 ou Thm. 2.1.2 (ii)) et certains théorèmes analogues.

**(2.4.1)** Soit $F$ un corps et $\alpha \in \operatorname{Br}(F)$ une classe de Brauer sur $F$. On note $\operatorname{per}(\alpha)$ et $\operatorname{ind}(\alpha)$ la période et l'indice de $\alpha$. (Rappelons que par définition $\operatorname{per}(\alpha)$ est l'ordre de $\alpha$ dans le groupe de Brauer $\operatorname{Br}(F)$ et $\operatorname{ind}(\alpha)$ est le degré de l'algèbre à division dans la classe de Brauer $\alpha$.) Il est bien connu que $\operatorname{per}(\alpha) \mid \operatorname{ind}(\alpha)$ et que $\operatorname{per}(\alpha)$ et $\operatorname{ind}(\alpha)$ ont toujours les mêmes facteurs premiers. Donc pour chaque $\alpha \in \operatorname{Br}(F)$, il existe un entier positif $e(\alpha)$ tel que $\operatorname{ind}(\alpha) \mid \operatorname{per}(\alpha)^{e(\alpha)}$. Le "***problème de période-indice***" demande ce qui est une borne supérieure pour les exposants $e(\alpha)$ , $\alpha \in \operatorname{Br}(F)$. Une question de longue date est la "conjecture" suivante :

**(2.4.2)** "**Conjecture**" (appelée "conjecture standard" dans [Lie07]) *Si $F$ est un corps "de dimension $d$", alors pout toute $\alpha \in \operatorname{Br}(F)$ on a* $\operatorname{ind}(\alpha) \mid \operatorname{per}(\alpha)^{d-1}$.

Ici la phrase "de dimension $d$" est laissée vague parce que c'est un problème très intéressant mais toujours ouvert de définir une bonne notion de dimension pour la conjecture ci-dessus (cf. [ABGV11, Problem 4.5]).

**(2.4.3)** Pour $i \in \mathbb{N}$, un corps $k$ est appelé corps $C_i$ si tout polynôme homogène de degré $m$ en $n > m^i$ variables possède un zéro non trivial sur $k$. La classe des corps $C_i$ contient presque tous les corps sur lesquels des théorèmes sur la conjecture 2.4.2 ont été démontrés : corps algébriquement clos, corps finis (Wedderburn), corps de degré de transcendance 1 sur un corps fini ou algébriquement clos (Brauer-Hasse-Noether, Tsen). Le cas des corps de fonctions de surfaces algébriques sur des corps algébriquement clos n'a été résolu que dans la dernière décennie (de Jong [dJ04] et Lieblich [Lie08]). Plus récemment, Lieblich [Lie11] prouve la conjecture 2.4.2 pour les corps de fonctions de surfaces algébriques sur les corps finis.

**(2.4.4)** Le premier résultat intéressant sur un corps d'un type légèrement différent est peut-être le théorème suivant de Saltman ([Sal97], [Sal98]) :

*Soit $A$ un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel $k$ et soit $F$ le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur le corps des fractions de $A$. Supposons que le corps résiduel $k$ est un corps $B_1$* (cf. Définition 2.2.7, e.g., $k$ fini ou séparablement clos). *Alors pour toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ de période première à la caractéristique résiduelle* $\mathrm{car}(k)$*, on a* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$.

(On remarque que dans le cas d'un corps de fonctions d'une courbe $p$-adique, le corps $F$ n'est pas $C_3$.)

Pour permettre d'énoncer d'autres résultats plus précisément, on va utiliser la notion de ***dimension de Brauer***.

**Définition 2.4.5** ([Lie07, Definition 1.1], [HHK09, Definition 1.3])**.** Soit $F$ un corps et $M \geq 1$ un entier positif. La ***dimension de Brauer en dehors de*** $M$ de $F$, noté $M'$-$\mathrm{Br.\,dim}(F)$, est l'infimum des entiers $b \geq 0$ ayant la propriété suivante : pour toute extension de type fini $L/F$ de degré de transcendance $t \leq 1$ on a $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{b-1+t}$ pour toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(L)$ avec $\mathrm{ind}(\alpha)$ premier à $M$.

Pour $M = 1$, on parle simplement de ***dimension de Brauer*** et on écrit $\mathrm{Br.\,dim}(F) = 1'$-$\mathrm{Br.\,dim}(F)$.

**Exemple 2.4.6.**

(1) Si $F$ est séparablement clos en dehors de $M$ (i.e., pour tout élément $x$ dans la clôture séparable $F_s$ de $F$, si le degré $[F(x) : F]$ est premier à $M$, alors $x \in F$), on a $M'$-$\mathrm{Br.\,dim}(F) = 0$.

(2) Un corps fini est de dimension de Brauer 1.

(3) Si $F$ est le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, alors $\mathrm{Br.\,dim}(F) = 1$ d'après les théorèmes de Tsen et de de Jong et Lieblich ([dJ04], [Lie08, Thm. 4.2.2.3]).

(4) Si $F$ est le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur un corps fini, alors $\mathrm{Br.\,dim}(F) = 2$. (Combiner (2) et [Lie11, Thm. 1.1].)

**(2.4.7)** Soit $A$ un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel $k$ et soit $F$ le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur le corps des fractions de $A$. Soit $p$ l'***exposant caractéristique*** * du corps résiduel $k$. En plus du résultat mentionné dans (2.4.4), Saltman a en fait prouvé dans [Sal97, Thm. 3.4] :

*si le corps résiduel $k$ est de $p'$-dimension de Brauer $\leq 1$, alors pour toute classe de Brauer $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ sur le corps de fonctions $F$ dont la période est première à $p$, on a* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^3$.

Grosso modo, l'idée clé de la méthode de Saltman (initiée dans [Sal97] et développée dans [Sal07] et [Sal08]) est (comme décrit précédemment dans ce

$*$. Reppelons que l'***exposant caractéristique*** d'un corps $k$ est égal à sa caractéristique $\mathrm{car}(k)$ si $\mathrm{car}(k) > 0$ ou 1 sinon.

chapitre) de tuer la ramification des classes de Brauer sur des modèles propres réguliers en fabriquant des rêvetements ramifiés, ce qui permet de réduire des questions sur le corps de fonctions $F$ à des questions sur les corps de fonctions de courbes sur le corps résiduel $k$. Cependant, le problème de relier la dimension de Brauer du corps des fractions de $A$ avec celle du corps résiduel $k$ n'a pas été traité dans le travail de Saltman.

En combinant les idées de Saltman et de de Jong et en fabriquant des rêvetements ramifiés via la théorie des champs algébriques, Lieblich prouve le théorème suivant, qui est obtenu indépendamment par Harbater, Hartmann et Krashen par une méthode différente.

**Théorème 2.4.8** ([Lie07, Thm. 6.3] †, [HHK09, Coro. 5.6])**.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel $k$ d'exposant caractéristique $p$. Soit $E = \mathrm{Frac}(A)$ le corps des fractions de $A$. Alors on a*

$$p'\text{-Br.}\dim(E) \le p'\text{-Br.}\dim(k) + 1\,.$$

Notons que ce théorème généralise le résultat de Saltman [Sal97, Thm. 3.4].

**(2.4.9)** Il est naturel de demander des analogues du théorème 2.4.8 en “dimension 2”. Plus précisément, considérons un anneau local intègre $R$ hensélien excellent de dimension 2, de corps résiduel $k$ et de corps des fractions $K$. Soit $p$ l'exposant caractéristique de $k$. On peut se demander s'il y a une relation similaire entre les $p'$-dimensions de Brauer $K$ et de $k$.

*Si $k$ est séparablement clos en dehors de $p$ (i.e. tout élément dans la clôture séparable $k_s$ de degré premier à $p$ sur $k$ se trouve dans $k$),* [CTOP02, Thm. 2.1] *assure que* $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ *pour toute classe* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période première à $p$.*

*Si $k$ est fini, notre théorème* 2.3.10 *affirme que* $\mathrm{ind}(\alpha) \,|\, \mathrm{per}(\alpha)^2$ *pour toute classe* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période première à $p$.*

Ces deux théorèmes sont tous les deux établis sur la base des idées de Saltman pour tuer la ramification des classes de Brauer. Les méthodes de recollement développées dans une série d'articles de Harbater, Hartmann et Krashen ([HH10], [HHK09], [HHK11a] et [HHK11b]) donnent le résultat suivant :

*Soit $K$ une extension finie séparable de $k(\!(x, y)\!)$ et soit* $d = p'\text{-Br.}\dim(k)$. *Alors pour toute* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période première à $p$, on a* $\mathrm{ind}(\alpha) \,|\, \mathrm{per}(\alpha)^{d+2}$. *Si de plus $k$ contient une racine primitive* $\mathrm{per}(\alpha)$*-ième de l'unité, alors on a* $\mathrm{ind}(\alpha) \,|\, \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$. (cf. [HHK11b, Thm. 4.6 et Coro. 4.7])

La discussion ci-dessus nous conduit à poser la question suivante.

**Question 2.4.10.** Soit $R$ un anneau local intègre, hensélien excellent de dimension 2, de corps résiduel $k$ et de corps des fractions $K$. Soit $p$ l'exposant caractéristique de $k$. Supposons que $k$ est de $p'$-dimension de Brauer $d = \mathrm{Br.}\dim(k)$.

†. En fait l'énoncé de [Lie07, Thm. 6.3] est légèrement plus général.

*La relation* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$ *est-elle vraie pour toute classe de Brauer* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période non divisible par* $p$ *? Est-ce que la relation plus faible* $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+2}$ *est vraie pour toute* $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ *de période non divisible par* $p$ *?*

**(2.4.11)** Soit $k$ un corps d'exposant caractéristique $p$. Tous les corps $k(x, y)$, $k(\!(x)\!)(y)$, $k(x)(\!(y)\!)$, $k(\!(x)\!)(\!(y)\!)$ et $k(\!(x, y)\!)$ peuvent être vus comme de "dimension relative" 2 sur $k$ en un certain sens.

Dans le tableau ci-dessous, on résume les résultats connus sur le problème de période-indice sur ces corps.

**Notations** :

$k$ : un corps ;

$p$ : l'exposant caractéristique du corps $k$ ;

$F$ : un corps d'une des formes : $k(x, y)$, $k(\!(x)\!)(y)$, $k(x)(\!(y)\!)$, $k(\!(x)\!)(\!(y)\!)$ ou $k(\!(x\,, y)\!)$ ;

$\alpha$ : une classe de Brauer sur $F$ de période première à $p$ ;

$d$ : la $p'$-dimension de Brauer de $k$.

**Abréviations** :

alg. clos = algébriquement clos

exp. car.= exposant caractéristique

par. = particulier

**Problème de Période-indice sur $F$**

$p$ =exp. car. de $k$, $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$, $\gcd(p\,,\,\mathrm{per}(\alpha)) = 1$, $d = p'\text{-Br.}\dim(k)$

| $F$ | $k$ alg. clos | $k$ fini | $k$ général |
|---|---|---|---|
| $k(x,\,y)$ | • $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ ([dJ04], [Lie08]) | • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$ ([Lie11]) | pas de résultat général connu |
| $k(\!(x)\!)(y)$ | • $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ ([HHK09, Coro. 5.8] ou [Lie07, Coro. 1.4]) | • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$ ([Sal97, Thm. 3.4]) | • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$ ([Lie07, Thm. 6.3] ou [HHK09, Coro. 5.6]) |
| $k(x)(\!(y)\!)$ | • $p'\text{-Br.}\dim(F) \leq 2$, en par. $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ ([dJ04] + [HHK09, Coro. 5.6]) | • $p'\text{-Br.}\dim(F) \leq 3$, en par. $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$ ([Lie11] + [HHK09, Coro. 5.6]) | pas de résultat général connu |
| $k(\!(x)\!)(\!(y)\!)$ | • $p'\text{-Br.}\dim(F) \leq 2$, en par. $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ ([HHK09, Coro. 5.7] ou [Lie07, Coro. 1.3]) | • $p'\text{-Br.}\dim(F) \leq 3$, en par. $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$ ([HHK09, Coro. 5.7] ou [Lie07, Coro. 1.3]) | • $p'\text{-Br.}\dim(F) \leq d+2$, en par. $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$ ([HHK09, Coro. 5.7] ou [Lie07, Coro. 1.3]) |
| $k(\!(x\,,\,y)\!)$ | • $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)$ ([CTOP02, Thm. 2.1] ou [HHK11b, Coro. 4.11]) | • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^2$ (Thm. 2.3.10) | ([HHK11b, Thm. 4.6]) • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+2}$ • $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{per}(\alpha)^{d+1}$ si $k \supseteq \mu_n$, où $n = \mathrm{per}(\alpha)$ |

# Chapitre 3

# Formes quadratiques sur les corps de fonctions de surfaces locales henséliennes

Ce chapitre réorganise les résultats sur les formes quadratiques obtenus dans [Hu10a] et [Hu11].

Le contexte est essentiellement le même que celui du chapitre 2 : Soit $K$ le corps des fractions d'un anneau $R$ local intègre, hensélien excellent de dimension 2 de corps résiduel $k$. Supposons que 2 est inversible dans le corps résiduel $k$. On démontre que le $u$-invariant $u(K)$ de $K$ est 8 si le corps résiduel de $k$ est fini, et on discute aussi des principes locaux-globaux pour les formes quadratiques de rang $\geq 3$ sur $K$. Pour les formes de rang 3 ou 4, le principe local-global est prouvé dans la généralité complète, à savoir sans aucune autre hypothèse sur le corps résiduel $k$ ou sur l'anneau $R$. Pour les formes de rang 5, nous obtenons le principe local-global sous l'hypothèse que $k$ est fini. Dans le cas particulier où $R$ est un anneau de séries formelles $A[\![t]\!]$ sur un anneau de valuation discrète complet $A$, nous prouvons que les formes quadratiques de rang $> 2d$ satisfont au principe local-global si le corps résiduel $k$ a pour $u$-invariant strict $d$. En particulier, si le corps résiduel $k$ de $A$ est fini, le principe local-global est valable pour les formes quadratiques de rang $\geq 5$ sur le corps des fractions de $A[\![t]\!]$.

## 3.1 Résultats principaux et problèmes ouverts

On commence par les énoncés de nos résultats principaux, on les compare avec des résultats antérieurs, des travaux reliés et quelques problèmes ouverts.

**(3.1.1)** Sauf mention du contraire, les notations et les conventions fixées dans (2.1.4) seront en vigueur jusqu'à la fin de ce chapitre. En particulier, on rappelle les suivantes :

• $R$ désigne un anneau local intègre, excellent, hensélien de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$.

• Un modèle propre régulier de Spec $R$ est un schéma intègre régulier $\mathcal{X}$ muni d'un morphisme propre birationnel $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$. On note $\Omega_R$ l'ensemble des valuations discrètes de $K$ qui correspondent aux points de codimension 1 des modèles propres réguliers de Spec $R$.

Sauf mention expresse du contraire, on va supposer que le corps résiduel $k$ est de caractéristique différente de 2 (cette hypothèse sera nécessaire sauf en quelques endoits).

On utilisera des notations standards de la théorie des formes quadratiques, pour des préliminaires généraux sur lesquelles on renvoie le lecteur à [Lam05] ou [Sch85].

Dans [CTOP02, Thm. 3.1], il est prouvé que le principe local-global par rapport aux valuations discrètes de $K$ vaut pour les formes quadratiques de rang 3 ou 4 lorsque $k$ est séparablement clos ou fini. Le théorème ci-dessous (démontré au §3.2.3) montre que l'hypothèse que $k$ est séparablement clos ou fini est inutile.

**Théorème 3.1.2.** *Avec les notations et hypothèses comme dans* (3.1.1), *le principe local-global par rapport à $\Omega_R$ vaut pour les formes quadratiques de rang 3 ou 4 sur $K$. Autrement dit, si une forme quadratique de rang 3 ou 4 sur $K$ est isotrope* (*i.e., possède un zéro non trivial*) *sur le complété $v$-adique $K_v$ pour toute $v \in \Omega_R$, alors elle est isotrope sur $K$.*

Dans le cas où $R = A[\![y]\!]$ est un anneau de séries formelles en une variable sur un anneau de valuation discrète complet $A$, on a le théorème suivant.

**Théorème 3.1.3.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète complet dans lequel 2 est inversible, et soient $E$ et $k$ son corps des fractions et son corps résiduel respectivement. Soit $R = A[\![y]\!]$ et $K = \operatorname{Frac}(R)$ le corps des fractions de $R$. Définissons $\Omega_R$ comme dans* (3.1.1).

*Supposons que pour un entier positif $d > 0$ le corps résiduel $k$ a la propriété suivante :*

(3.1.3.1) *pour toute extension finie $k'/k$, toute forme quadratique de rang $> d$ sur $k'$ est isotrope.*

*Alors le principe local-global par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega_R$ vaut pour les formes quadratiques de rang $> 2d$ sur $K$.*

La preuve du théorème 3.1.3 est le sujet du §3.3. Le point clé est de le réduire à un problème sur le corps de fonctions $F = E(y)$ en utilisant le théorème de préparation de Weierstrass. Puis le théorème se déduit en appliquant un théorème de Colliot-Thélène, Parimala et Suresh [CTPS10] sur les formes quadratiques sur $F = E(y)$, dont la preuve repose sur les travaux antérieurs de Harbater, Hartmann et Krashen [HHK09].

Le cas $d = 1$ du théorème ci-dessus a été essentiellement démontré dans [CTOP02]. Dans [Hu10a], ce théorème a été simplement énoncé avec $d = 2$. Mais la preuve fonctionne en fait pour $d > 0$ général.

***Remarque*** 3.1.4.

(1) Rappelons qu'un corps $k$ est appelé un corps $C_i$ si tout polynôme homogène de degré $m$ en $n > m^i$ variables possède un zéro non trivial sur $k$. Une extension finie d'un corps $C_i$ est encore $C_i$. Évidemment, un corps $C_i$ a la propriété (3.1.3.1) avec $d = 2^i$.

En particulier, si $k$ est fini, le théorème 3.1.3 établit le principe local-global pour les formes quadratiques de rang $\geq 5$ sur $\mathrm{Frac}(A[\![y]\!])$. Comme exemples typiques, on peut prendre $R = \mathbb{F}[\![x\,,\,y]\!]$ où $\mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique $> 2$, ou $R = \mathcal{O}_E[\![y]\!]$ où $\mathcal{O}_E$ est l'anneau des entiers d'un corps $p$-adique $E$ (avec $p$ un nombre premier impair).

(2) Observons que la propriété (3.1.3.1) est plus forte que la propriété suivante :

(3.1.4.1) pour toute extension finie $E'/E$, toute forme quadratique de rang $> 2d$ sur $E'$ est isotrope.

En effet, la clôture intégrale $A'$ de $A$ dans $E'$ est un anneau de valuation discrète complet et elle est finie sur $A$ (cf. [Ser79, p.28, §II.2, Prop. 3]). Le corps résiduel $k'$ de $A'$ est une extension finie de $k$. Toute forme quadratique $\phi$ sur $E'$ est isomorphe à une forme $\phi_1 \perp t.\phi_2$, où $t$ est une uniformisante de $A'$ et $\phi_1$, $\phi_2$ sont des formes diagonales dont les coefficients sont des unités dans $A'$. Quand $\phi$ est de rang $> 2d$ et $k$ a la propriété (3.1.3.1), un argument standard utilisant le lemme de Springer (cf. Lemme 3.3.3) montre que $\phi$ est isotrope sur $E'$.

Quand le corps résiduel $k$ est fini, on a le principe local-global pour les formes quadratiques de rang 5 sur $K = \mathrm{Frac}(R)$ pour $R$ général. (Voir §3.4.2.)

**Théorème 3.1.5.** *Avec les notations et hypothèses comme dans* (3.1.1)*, supposons que le corps résiduel $k$ est fini.*

*Alors les formes quadratiques de rang* 5 *sur $K$ satisfont au principe local-global par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega_R$.*

***Remarque*** 3.1.6.

(1) Jaworski [Jaw01] prouve que si $k$ est un corps algébriquement clos, alors les formes quadratiques de rang quelconque sur $K = k(\!(x\,,\,y)\!)$ satisfont au principe local-global par rapport aux valuations discrètes de $K$.

(2) D'autre part, Jaworski [Jaw01, Thm. 1.5] a montré que si $K$ est le corps des fractions de l'anneau

$$R = k[\![x,\,y,\,z]\!]/(z^2 - (y^2 - x^3)(x^2 - y^3))\,,$$

(même avec $k$ algébriquement clos), alors $y^2 - x^3$ est un carré dans $K_v$ pour toute valuation discrète $v$ de $K$, mais il n'est pas un carré dans $K$. Donc le principe local-global ne s'étend pas aux formes binaires.

(3) Pour $R$ général de corps résiduel fini, il reste une question ouverte si le principe local-global vaut pour les formes quadratiques de rang 6, 7 ou 8. (Pour les formes de rang $> 8$, voir le théorème 3.1.8 ci-après.)

**(3.1.7)** Reppelons que pour un corps $F$ de caractéristique $\neq 2$, le ***$u$-invariant*** de $F$, noté $u(F)$, est défini comme le supremum des dimensions des formes quadratiques anisotropes sur $F$ (de sorte que $u(F) = \infty$, si de telles dimensions peuvent être arbitrairement grandes). Le ***$u$-invariant fort*** ou ***$u$-invariant strict*** de $F$, noté $u_s(F)$, est par définition l'infimum des nombres réels $N$ tels que pour toute extension de type fini de corps $L/k$ de degré de transcendance $d \leq 1$, on ait $u(L) \leq 2^d N$.

On démontra à la fin du §3.4.4 le théorème suivant :

**Théorème 3.1.8.** *Avec les notations et hypothèses comme dans* (3.1.1)*, supposons que le corps résiduel $k$ est fini.*

*Alors le $u$-invariant de $K$ est $u(K) = 8$.*

Dans les preuves des théorèmes 3.1.5 et 3.1.8, un résultat qui provient de la théorie du corps de classes de Saito pour les anneaux locaux de dimension 2 ([Sai87]) sera utilisé en quelques endroits cruciaux. En outre, les preuves utilisent les résultats du chapitre 2 et s'appuient sur les travaux de Parimala et Suresh ([PS10], [PS]).

***Remarque*** 3.1.9. Soit $R = A[\![t]\!]$ l'anneau de séries formelles en une variable sur un anneau de valuation discrète complet $A$ de corps résiduel $k$.

(1) L'énoncé du théorème 3.1.8 dans ce cas particulier résulte aussi de [HHK09, Coro. 4.19]. De façon alternative, on peut se ramener à montrer que le corps des fractions de $A[t]$ a pour $u$-invariant $\leq 8$ après une réduction standard en utilisant le théorème de Weierstraß. Or c'est un cas particulier de [HHK09, Coro. 4.13] ou [CTPS10, Coro. 3.4].

(2) Remarquons que la condition (3.1.3.1) est évidemment satisfaite avec $d = u_s(k)$ (si $u_s(k) < \infty$). Pour toute $v \in \Omega_R$, le corps résiduel $\kappa(v)$ de $v$ a pour $u$-invariant $u(\kappa(v)) \leq 2u_s(k) = 2d$ d'après le corollaire 2.3.26. Il résulte du lemme de Springer (cf. Lemme 3.3.3) que $u(K_v) \leq 4d$. Ainsi, dans ce cas particulier, on déduit que $u(K) \leq 4u_s(k)$ du principe local-global établi dans le théorème 3.1.3. Comparer [HHK09, Coro. 4.19] et [HHK11b, Coro. 4.2].

**Question 3.1.10** (Suresh)**.** Soient $R$, $K$ et $k$ comme dans (3.1.1), avec le corps résiduel $k$ arbitraire (pas nécessairement fini) de caractéristique $\neq 2$. Il est connu que $u(K) \leq 4u_s(k)$ dans chacun des cas particuliers suivants :

(1) $k$ est fini (Théorème 3.1.8).

(2) $k$ est héréditairement quadratiquement clos (i.e. toute extension finie de $k$ est quadratiquement clos). Cela résulte essentiellement de la preuve de [CTOP02, Thm. 3.6].

(3) $R = A[\![t]\!]$, où $A$ est un anneau de valuation discrète complet. Ce cas-ci est établi par Harbater, Hartmann et Krashen dans [HHK09, Coro. 4.19]. Le cas spécial $R = \mathbb{C}[\![x, y]\!]$ est déjà établi dans [CDLR82].

(4) $K$ est une extension finie séparable de $k((x, y))$ ([HHK11b, Coro. 4.2]).

Question : *La relation $u(K) \le 4u_s(k)$ est-elle toujours vraie ? Est-elle vraie quand on suppose de plus que $R$ est complet ?*

# 3.2 Formes quadratiques de rang 3 ou 4

## 3.2.1 Valuations provenant d'éclatements

**Lemme 3.2.1.** *Soit $A$ un anneau local intègre excellent de corps résiduel $k$ et $\mathcal{X}$ un $A$-schéma intègre de type fini. Soit $F$ le corps de fonctions de $\mathcal{X}$ et $v$ une valuation discrète de rang 1 de $F$ dont on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau de valuation. Supposons que $v$ est centrée sur $\mathcal{X}$ en un point $x$ dans la fibre fermée $X := \mathcal{X} \times_A k$ et que le corps résiduel $\kappa(v)$ de $\mathcal{O}_v$ est de degré de transcendance $\mathrm{trdeg}_k\kappa(v) = \dim \mathcal{X} - 1$ sur $k$. Soit $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_v$ et $y \in \mathcal{Y}$ le point fermé de $\mathcal{Y}$. Soit $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $\mathscr{O}_{\mathcal{X},x} \subseteq \mathcal{O}_v$. On définit les schémas $\mathcal{X}_n$ , $n \in \mathbb{N}$ et les morphismes $f_n : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_n$ , $n \in \mathbb{N}$ comme suit :*

*Posons $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ et $f_0 = f$. Une fois que $f_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_i$ est déjà défini, soit $\mathcal{X}_{i+1} \to \mathcal{X}_i$ l'éclatement de $\mathcal{X}_i$ le long de l'adhérence de $x_i := f_i(y)$ et soit $f_{i+1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_{i+1}$ le morphisme induit.*

*Alors pour $n$ assez grand, le morphisme $f_n : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_n$ induit un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathcal{X}_n, x_n} \cong \mathcal{O}_v$.*

*Démonstration.* La preuve suivante est une adaptation facile de la preuve du cas géométrique donnée dans [KM98, p.61, Lemma 2.45]. Des arguments similaires se trouvent aussi dans [Liu02, Thm. 8.3.26 and Exercise 8.3.14].

Soit $\mathscr{O}_n := \mathscr{O}_{\mathcal{X}_n, x_n}$. Au niveau des anneaux la construction de $\mathscr{O}_n$ est comme suit. Supposons que $\mathscr{O}_n$ (d'idéal maximal $\mathfrak{m}_n$) est déjà défini. On prend un système de générateurs $z_1, \dots, z_r$ de $\mathfrak{m}_n$ tel que $v(z_1) \le \cdots \le v(z_r)$. Soit $\mathscr{O}'_n = \mathscr{O}_n[z_2/z_1 , \dots , z_r/z_1]$. Alors $\mathscr{O}_{n+1}$ est le localisé de $\mathscr{O}'_n$ en $\mathscr{O}'_n \cap \mathfrak{m}_v$.

Le même argument que dans la preuve de [KM98, p.61, Lemma 2.45] s'applique ici et montre que $\mathcal{O}_v = \bigcup_{n \ge 0} \mathscr{O}_n$. Prenons des éléments $u_1, \dots, u_t \in \mathcal{O}_v \subseteq F$ tels que les réductions $\overline{u}_i$ forment une base de transcendance de $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ sur $k$. Choisissons $n$ suffisamment grand tel que $u_1, \dots, u_t \in \mathscr{O}_n$. Alors $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ est une extension algébrique de $\kappa(x_n) = \mathscr{O}_n/\mathfrak{m}_n$ et

$$\mathrm{trdeg}_k\kappa(x_n) = \mathrm{trdeg}_k\kappa(v) = \dim \mathcal{X} - 1\,.$$

L'adhérence $Z_n := \overline{\{\, x_n \,\}}$ de $x_n$ dans $\mathcal{X}_n$ est un schéma algébrique sur $k$. On a donc

$$\dim Z_n = \mathrm{trdeg}_k\kappa(x_n) = \dim \mathcal{X} - 1\,.$$

D'après [Liu02, p.334, Coro. 8.2.7], $\dim \mathcal{X}_n = \dim \mathcal{X}$. Ainsi,

$$\dim \mathscr{O}_n = \mathrm{codim}(Z_n\,,\, \mathcal{X}_n) \le \dim \mathcal{X}_n - \dim Z_n = 1\,.$$

Or $\mathscr{O}_n \subseteq \mathcal{O}_v$ et l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_v$ n'est pas égal à son corps des fractions $F = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_v) = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_n)$, donc $\dim \mathscr{O}_n = 1$. Soit $R' \subseteq F$ la normalisation de $\mathscr{O}_n$ et soit $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_v \cap R$. Alors $R'$ est un anneau de Dedekind et $R'_{\mathfrak{m}'}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $F$ contenu dans $\mathcal{O}_v$. En conséquence, $R'_{\mathfrak{m}'} = \mathcal{O}_v$. L'anneau $\mathscr{O}_n$ est anneau japonais ("Nagata ring" en anglais) (voir e.g. [Liu02, p.340, Prop. 8.2.29 et p.343, Thm. 8.2.39]). Il en résulte que $R'$ est un $\mathscr{O}_n$-module de type fini. On a ainsi $R' \subseteq \mathscr{O}_N$ pour un certain grand $N \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit alors que $\mathcal{O}_v = \mathscr{O}_{N+1}$. Ceci démontre le lemme. □

### 3.2.2 Principe local-global pour les $\mathrm{PGL}_n$-torseurs

**(3.2.2)** Soit $A$ un anneau de valuation discrète, excellent, hensélien, et soit $F$ le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur le corps des fractions de $A$. Reppelons une notion introduite dans le théorème 2.3.31. Pour tout schéma intègre régulier $\mathcal{Y}$ de dimension 2 de corps de fonctions $F$ muni d'un morphisme propre plat $\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}\ A$, on note $\Omega(F/\mathcal{Y}^{(1)})$ l'ensemble des valuations discrètes de $F$ qui correspondent aux points de codimension 1 de $\mathcal{Y}$. Soit $\Omega_{A,\,F}$ la réunion des $\Omega(F/\mathcal{Y}^{(1)})$ pour $\mathcal{Y}$ variant parmi tous les schémas du type ci-dessus.

L'observation que [CTOP02, Prop. 1.14] vaut sur un corps quelconque conduit au principe local-global suivant pour les groupes de Brauer.

**Théorème 3.2.3.** *Soit $(A,\,F,\,\Omega)$ un triple formé d'un anneau local intègre excellent hensélien $A$, d'un corps $F$ et d'un ensemble $\Omega$ de valuations discrètes de $F$. Supposons que soit*

(i) *$A$ est un anneau de valuation discrète, $F$ est le coprs de fonctions d'une courbe algébrique sur le corps des fractions de $A$ et $\Omega = \Omega_{A,\,F}$ est défini come dans* (3.2.2) ;

*soit*

(ii) *$A = R$ est de dimension 2, $F = K$ est le corps des fractions de $R$ et $\Omega = \Omega_R$ est défini comme dans* (3.1.1).

*Alors les flèches naturelles*

$$\mathrm{Br}(F) \longrightarrow \prod_{v\in\Omega} \mathrm{Br}(F_v) \quad \text{et} \qquad H^1(F,\,\mathrm{PGL}_n) \longrightarrow \prod_{v\in\Omega} H^1(F_v\,,\,\mathrm{PGL}_n)$$

*sont injectives.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer la flèche concernant les groupes de Brauer.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma intègre régulier de dimension 2 de corps de fonctions $F$, muni d'un morphisme propre $\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ A$ tel que dans le cas (i) $\pi$ est plat, ou que dans le cas (ii), $\pi$ est birationnel et la fibre fermée est de dimension 1. Dans les deux cas, soit $X$ la fibre fermée de $\pi$.

Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ une classe de Brauer qui est triviale dans $\mathrm{Br}(F_v)$ pour toute $v \in \Omega$. En particulier, $\alpha$ est non ramifiée en tout point de codimension 1 de $\mathcal{X}$ et donc se trouve dans le sous-groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{Br}(F)$ (cf. Thm. 2.2.4). D'après le théorème 2.2.4, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \cong \mathrm{Br}(X) \cong \mathrm{Br}(X_{\mathrm{red}})$. On identifie $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{X})$ à son image canonique dans $\mathrm{Br}(X_{\mathrm{red}})$. On va utiliser [CTOP02, Prop. 1.14] pour montrer que $\alpha = 0$.

Soit $f : Z \to X_{\mathrm{red}}$ la normalisation du schéma réduit $X_{\mathrm{red}}/k$ et soit $D \subseteq X_{\mathrm{red}}$ le sous-schéma fermé défini par le conducteur de $f$. Alors [CTOP02, Prop. 1.14] dit que la flèche naturelle $\mathrm{Br}(X_{\mathrm{red}}) \to \mathrm{Br}(Z) \times \mathrm{Br}(D)$ est injective. Soit $(\alpha_1 , \alpha_2) \in \mathrm{Br}(Z) \times \mathrm{Br}(D)$ l'image de $\alpha \in \mathrm{Br}(X_{\mathrm{red}})$. Il suffit de démontrer $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$.

Toute composante irréductible réduite $T$ de $Z$ est une courbe (intègre) régulière dont le corps de fonctions $k(T)$ est le corps résiduel $\kappa(w)$ d'un point $w$ de codimension 1 du schéma $\mathcal{X}$, qui est régulier de dimension 2. Comme $\alpha$ s'annule dans $\mathrm{Br}(F_w)$ par hypothèse, la spécialisation de $\alpha$ in $\mathrm{Br}(\kappa(w)) = \mathrm{Br}(k(T))$ est nulle. La flèche naturelle $\mathrm{Br}(T) \to \mathrm{Br}(k(T))$ est une injection pour le schéma régulier $T$, donc l'image canonique de $\alpha$ dans $\mathrm{Br}(T)$ est nul. Cela étant valable pour toute composante irréductible $T$ de $Z$, on a $\alpha_1 = 0$ dans $\mathrm{Br}(Z)$.

Pour montrer que $\alpha_2 = 0$ dans $\mathrm{Br}(D)$, il suffit de montrer que $\alpha_2$ s'annule en tout point fermé $x$ de $X_{\mathrm{red}}$, d'après une variante en dimension 0 de [CTOP02, Lemma 1.6]. Le point $x$ est en même temps un point fermé de $\mathcal{X}$. On peut choisir un sous-schéma fermé intègre $C$ de dimension 1 de $\mathcal{X}$ qui contient $x$ comme un point régulier. Soit $\omega \in \mathcal{X}$ le point générique de $C$. Notre hypothèse entraîne que $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{X})$ s'annule en $\omega$ (i.e. la spécialisation de $\alpha$ dans $\mathrm{Br}(\kappa(\omega))$ est 0). L'anneau local $\mathscr{O}_{C,x}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\kappa(\omega)$. Donc $\alpha$ a pour image canonique 0 dans $\mathrm{Br}(\mathscr{O}_{C,x})$. Il en résulte qu'il existe un sous-schéma ouvert régulier $U$ de $C$, qui contient $x$, tel que $\alpha|_U = 0$ dans $\mathrm{Br}(U) \subseteq \mathrm{Br}(\kappa(\omega))$. Donc, $\alpha_2(x) = \alpha(x) = 0$, ceci achève la démonstration. $\square$

Dans le cas (i) du théorème 3.2.3, si l'anneau de valuation discrète $A$ est complet, le même résultat est établi dans [CTPS10, Thm. 4.3] et [HHK11a, Coro. 9.12] en utilisant des méthodes de recollement.

### 3.2.3 Principe local-global pour les formes de rang 3 ou 4

Le but de cette sous-section est de prouver le théorème 3.1.2, un résultat qui généralise [CTOP02, Thm. 3.1], où le même résultat n'a été établi que sous l'hypothèse que $k$ est séparablement clos ou fini. C'est le théorème 3.2.3 qui nous permet de nous débarrasser de cette restriction sur $k$. En outre, le lemme 3.2.1 sera utilisé pour pouvoir obtenir le principe local-global par rapport aux valuations dans le sous-ensemble $\Omega_R$ au lieu de l'ensemble de toutes les valuations discrètes.

**Lemme 3.2.4.** *Soit $R$ un anneau local intègre, normal, excellent, hensélien, de dimension 2, $K$ son corps des fractions, $K'/K$ une extension finie et $R'$ la* *clôture intégrale de $R$ dans $K'$. Soit $w$ une valuation discrète de $K'$ au-dessus d'une valuation discrète $v$ de $K$.*

*Si $w$ correspond à un point de codimension* 1 *sur un modèle propre régulier $\mathcal{X}'$ de* Spec $R'$*, alors $v$ correspond à un point de codimension* 1 *sur un modèle propre régulier $\mathcal{X}$ de* Spec $R$.

*Démonstration.* Soit $k$ (resp. $k'$) le corps résiduel de $R$ (resp. $R'$). Comme $R$ est excellent, $R'$ est fini sur $R$ et donc $k'/k$ est une extension finie. Soit $x' \in \mathcal{X}'$ le centre de $w'$ sur $\mathcal{X}'$, $p'$ l'image canonique de $x'$ dans Spec $R'$ et $p$ l'image canonique de $p'$ dans Spec $R$.

Si $p$ n'est pas le point fermé de Spec $R$, alors il est de codimension 1 dans Spec $R$ et l'anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ est égal au l'anneau local de $p$ dans Spec $R$, car $R$ est un anneau local intègre normal de dimension 2. Soit $V$ le complémentaire du point fermé dans Spec $R$. Pour tout modèle propre régulier $\pi : \mathcal{X} \to$ Spec $R$ (un tel modèle existe grâce à la résolution de singularités), $\pi^{-1}(V) \to V$ est un isomorphisme car $R$ est normal (cf. [Liu02, p.150, Coro. 4.4.3]). Donc, le point $x = \pi^{-1}(p)$ est de codimension 1 dans $\mathcal{X}$ et il est le centre de $v$ sur $\mathcal{X}$.

Supposons maintenant que $p$ est le point fermé de Spec $R$. Alors $x' \in \mathcal{X}'$ se trouve dans la fibre fermée de $\mathcal{X}'/R'$ et il est le point générique d'une courbe algèbrique intègre sur $k' = \kappa(p')$. Ainsi, le corps résiduel $\kappa(w)$ de $w$ est de degré de transcendance 1 sur $k'$. Comme $k'/k$ et $\kappa(w)/\kappa(v)$ sont des extensions finies, ceci entraîne que le corps résiduel $\kappa(v)$ est de degré de transcendance 1 sur $k$. En prenant un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to$ Spec $R$ et appliquant le lemme 3.2.1 à l'anneau $R$ et au $R$-schéma $\mathcal{X}$, on conclut qu'il existe un morphisme $\mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ obtenu par une suite d'éclatements tel que le centre de $v$ sur $\mathcal{X}_n$ est un point de codimension 1, ce qui achève la démonstration. □

*Démonstration du théorème* 3.1.2. Quitte à effectuer une normalisation, on peut supposer que $R$ est normal. Pour $a\,,\, b \in K^*$, l'isotropie de la forme $\langle 1\,,\, a\,,\, b\rangle$ de rang 3 est équivalente à celle de la forme $\langle 1\,,\, a\,,\, b\,,\, ab\rangle$ de rang 4. On peut donc se limiter au cas des formes de rang 4. Soit $\phi$ une forme quadratique de rang 4 sur $K$ qui est isotrope sur $K_v$ pour toute $v \in \Omega_R$. On peut supposer sans perte de généralité que $\phi = \langle 1\,,\, a\,,\, b\,,\, abd\rangle$ avec $a,\, b\,,\, d \in K^*$.

Supposons d'abord que $d$ est un carré dans $K$. Alors la forme quadratique $\phi$ est isomorphe à la forme norme d'une algèbre de quaternions dont on note $\alpha$ la classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$. La forme $\phi$ est isotrope si et seulement si $\alpha = 0$ dans le groupe de Brauer. D'après le théorème 3.2.3 on a $\alpha = 0$ dans $\mathrm{Br}(K)$, d'où l'isotropie de la forme quadratique $\phi = \langle 1\,,\, a\,,\, b\,,\, abd\rangle$ de rang 4.

Supposons maintenant que $d$ n'est pas un carré dans $K$. Soit $K' = K(\sqrt{d})$ et $R'$ la clôture intégrale de $R$ dans $K'$. Alors $R'$ et $K'$ satisfont aux mêmes hypothèses que $R$ et $K$. Soit $w$ une valuation discrète de $K'$ qui correspond à un point de codimension 1 d'un modèle propre régulier $\mathcal{X}'/R'$. D'après le lemme 3.2.4, $w$ se trouve au-dessus d'une valuation discrète $v$ dans $\Omega_R$. L'isotropie de $\phi$ sur $K_v$ entraîne l'isotropie de $\phi_{K'}$ sur $K'_w$.

La forme quadratique $\phi_{K'}$ sur $K'$ a un déterminant trivial et elle est isotrope sur $K'_w$ pour toute $w \in \Omega_{R'}$, où l'ensemble $\Omega_{R'}$ de valuations discrètes de $K'$ est défini de même manière que $\Omega_R$. D'après le cas précédent, $\phi_{K'}$ est isotrope sur $K'$. D'après [Lam05, p.197, Chap. VII, Thm. 3.1], soit $\phi$ est isotrope sur $K$ soit $\phi$ contient un multiple de $\langle 1\,,\,-d\rangle$. Dans ce dernier cas, comme $\det(\phi) = d \mod (K^*)^2$, $\phi$ contient aussi une forme de rang 2 de déterminant $-1$. Il en résulte alors que $\phi$ est isotrope sur $K$, ce qui achève la démonstration. □

## 3.3 Formes sur $\mathrm{Frac}(A[\![y]\!])$

Dans cette section, on démontra le théorème 3.1.3 .

### 3.3.1 Des séries formelles aux polynômes

**(3.3.1)** Comme au théorème 3.1.3, soit $A$ un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions $E$ et de corps résiduel $k$. Soit $x \in A$ une uniformisante de $A$ et $F = E(y)$ le corps de fonctions de $\mathbb{P}^1_E$. Soit $\Omega = \Omega_{A,\,F}$ comme dans (3.2.2). Si $\mathcal{P}$ est un schéma intègre régulier muni d'un morphisme propre plat $\mathcal{P} \to \mathrm{Spec}\ A$ avec fibre générique $\mathcal{P}\times_A E \cong \mathbb{P}^1_E$, on dit que $\mathcal{P}$ est un ***modèle propre régulier*** de $\mathbb{P}^1_E$ sur $A$ et on note $\Omega_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des valuations discrètes (de rang 1) de $F$ qui correspondent aux points de codimension 1 de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\Omega$ est alors la réunion des $\Omega_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ parcourt tous les modèles propres réguliers de $\mathbb{P}^1_E$ sur $A$. Soit $R = A[\![y]\!]$ et $K = \mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(A[\![y]\!])$.

**Proposition 3.3.2.** *Avec les notations comme dans* (3.3.1)*, supposons que le corps résiduel $k$ a la propriété* (3.1.3.1)*. Soit $\phi/F = \langle a_1\,,\,\ldots\,,\,a_r\rangle$ une forme quadratique non singulière diagonale de rang $r > 2d$ avec $a_i \in A[y]$. Soit $\Sigma \subseteq A$ un ensemble fixé de représentants de $k^*$ dans $A$. Supposons que*

$$a_i = \lambda_i.\, x^{n_i}.\, P_i\,, \tag{3.3.2.1}$$

*où $\lambda_i \in \Sigma\,,\, n_i \in \{\,0\,,\,1\,\}$ et $P_i$ est un polynôme distingué de degré $m_i$ dans $A[y]$ (ceci signifie que $P_i$ est un polynône unitaire dans $A[y]$ dont la réduction mod $x$ est $y^{m_i} \in k[y]$ ).*

*Si pour toute $w \in \Omega_R$, $\phi$ est isotrope sur le complété $K_w$ de $K$ par rapport à $w$, alors pout toute $v \in \Omega$, $\phi$ est isotrope sur le corps complété $F_v$.*

On montre d'abord que le théorème 3.1.3 résulte de la proposition précédente.

*Preuve de "Prop.* 3.3.2 $\Longrightarrow$ *Thm.* 3.1.3*".* Soit $\phi$ une forme quadratique de rang $r > 2d$ sur $K = \mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(A[\![y]\!])$. Supposons que $\phi$ est isotrope sur $K_w$ pour toute $w \in \Omega_R$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi = \langle a_1, \ldots, a_r\rangle$ pour certains éléments non nuls $a_i \in R = A[\![y]\!]$. D'après la forme usuelle du théorème de préparation de Weierstraß (voir e.g. [Bou85, Chap. VII, §3.8, Prop. 6]), chaque $a_i$ s'écrit

$$a_i = x^{n_i}.P_i.U_i \quad \text{avec } n_i \in \mathbb{N}\,,\ U_i \in R^* \text{ et } P_i \text{ un polynôme distingué dans } A[y]\,.$$

Pour toute série formelle $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i \in R = A[\![y]\!]$ qui est inversible dans $R$, notant $\lambda \in \Sigma$ l'élément unique tel que $\lambda^{-1}a_0 \equiv 1 \pmod{xA}$, on a

$$\lambda^{-1} f \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_R}\,.$$

Comme $R$ est complet, il en résulte que $\lambda^{-1}f$ est un carré dans $R$. Quitte à éliminer des carrés, on peut donc supposer que les coefficients $a_i$ sont de la forme déscrite à la proposition 3.3.2. La forme quadratique $\phi$ est alors définie sur $F = E(y)$ et d'après la proposition 3.3.2, elle est isotrope sur $F_v$ pour toute $v \in \Omega$. Le principe local-global par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega$ a été démontré pour les formes quadratiques de rang $\geq 3$ dans [CTPS10, Thm. 3.1 et Remark 3.2]. La forme $\phi$, qui est de rang $r > 2d \geq 2$, est donc isotrope sur $F$ et a fortiori sur $K$. □

### 3.3.2 Valuations centrées sur la fibre spéciale

La plus grande partie de la présente sous-section et la prochaine est consacrée à la démonstration de la proposition 3.3.2.

Le lemme ci-dessous sera utilisé fréquemment et cité dans la suite comme “lemme de Springer”.

**Lemme 3.3.3** (lemme de Springer, [Sch85, p.209, Coro. 2.6]). *Soit $A$ un anneau de valuation discrète hensélien dans lequel $2$ est inversible. Soient $E$ et $k$ son corps des fractions et son corps résiduel respectivement. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ et $\beta_1, \dots, \beta_s$ des unités de $A$ et soient $\overline{\alpha}_i \in k$ et $\overline{\beta}_j \in k$ leurs classes résiduelles. Soit $\pi$ une uniformisante de $A$.*

*Alors la forme quadratique $\langle \alpha_1\,, \dots, \alpha_r\rangle \perp \pi.\langle \beta_1\,, \dots, \beta_s\rangle$ sur $E$ est anisotrope si et seulement si les deux formes résiduelles*

$$\langle \overline{\alpha}_1\,, \dots, \overline{\alpha}_r\rangle \quad \textit{et} \quad \langle \overline{\beta}_1\,, \dots, \overline{\beta}_s\rangle$$

*sont toutes les deux anisotropes sur $k$.*

**(3.3.4)** Dans tout le reste de cette section, on fixe une valuation discrète $v \in \Omega = \Omega_{A,F}$ et on note $\mathcal{O}_v \subseteq F$ l'anneau de valuation de $v$, $\pi_v \in \mathcal{O}_v$ une uniformisante de $v$, $\mathfrak{m}_v = \pi_v\mathcal{O}_v$ et $\kappa(v)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_v$. Le complété $v$-adique de $\mathcal{O}_v \subseteq F$ se notera $\widehat{\mathcal{O}}_v \subseteq F_v$. Si $w$ est une valuation discrète de $K$, des notations similaires comme $\mathcal{O}_w$, $\mathfrak{m}_w$, $\kappa(w)$, $\widehat{\mathcal{O}}_w \subseteq K_w$ etc. seront utilisées.

Posons $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_A$. Soient $\mathcal{X}_E = \mathbb{P}^1_E$ et $\mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ la fibre générique et la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ sur $A$ respectivement. Soit $\eta \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ le point générique de $\mathcal{X}_s$. La valuation $v \in \Omega$ a un unique centre sur le modèle $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_A$, qu'on note $P \in \mathcal{X}$. On a les cas suivants :

(1) $P \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$, $P \neq 0, \infty, \eta$ ;
(2) $P = \eta \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ ;
(3) $P = \infty \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ ou $P = \infty \in \mathcal{X}_E = \mathbb{P}^1_E$ ;
(4) $P = 0 \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ ;
(5) $P$ est un point fermé de $\mathbb{A}^1_E \subseteq \mathcal{X}_E = \mathbb{P}^1_E$.

**(3.3.5)** Notre preuve de la proposition 3.3.2 est un argument cas par cas, qui se divise en deux parties.

*Preuve de la proposition* 3.3.2 (*Partie I*). Dans la première partie de la preuve, on traite les cas (1)–(4).

Cas (1). La valuation $v$ est centrée en $P \in \mathcal{X}_s \setminus \{0, \infty, \eta\}$.

En ce cas, on a $v(x) > 0$ et $v(y) = 0$. On peut supposer sans perte de généralité que pour un certain $0 \le r_1 \le r$, les nombres $n_i$ dans (3.3.2.1) vérifient :

$$n_1 = \cdots = n_{r_1} = 0 \quad \text{et} \quad n_{r_1+1} = \cdots = n_r = 1\,. \tag{3.3.5.1}$$

Alors $a_1, \dots, a_{r_1}$ et $a'_{r_1+1} = a_{r_1+1}/x, \dots, a'_r = a_r/x$ sont des unités pour $v$. Posons

$$\phi_1 = \langle a_1, \dots, a_{r_1}\rangle \quad \text{et} \quad \phi_2 = \langle a'_{r_1+1}, \dots, a'_r\rangle\,. \tag{3.3.5.2}$$

Alors $\phi = \langle a_1, \dots, a_r\rangle = \phi_1 \perp x.\phi_2$ est anisotrope seulement si les formes $\phi_1$ et $\phi_2$ sont toutes les deux anisotropes. D'après le lemme de Springer (ou le lemme de Hensel), $\phi_i$ est anisotrope sur $F_v$ si et seulement si sa forme résiduelle $\overline{\phi}_i := \phi_i \pmod{\mathfrak{m}_v}$ est anisotrope sur $\kappa(v)$. Dans la présente situation, les deux formes résiduelles $\overline{\phi}_i$, $i = 1, 2$ ont des coefficients dans le sous-corps $\kappa(P) \subseteq \kappa(v)$. Comme $r > 2d$, soit $\phi_1$ soit $\phi_2$ est de rang $> d$. Supposons par exemple que $\phi_1$ est de rang $> d$. Le corps résiduel $\kappa(P)$ est une extension finie de $k$, donc la propriété (3.1.3.1) entraîne que $\overline{\phi}_1$ est isotrope sur $\kappa(P)$ et a fortiori sur $\kappa(v)$. Il en résulte que $\phi$ est isotrope sur $F_v$ comme désiré.

Cas (2). La valuation $v$ est centrée en le point générique $\eta$ de la fibre spéciale $\mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$.

En ce cas, $v$ est la valuation $x$-adique sur $A[y]$ et $\kappa(v) = k(y)$. Soit $w$ la valuation $x$-adique sur $A[\![y]\!]$, de sorte que $w|_{A[y]} = v|_{A[y]}$ et $\kappa(w) = k(\!(y)\!)$. Définissons $\phi_1$ et $\phi_2$ comme dans (3.3.5.2). On a

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_1 &:= \phi_1 \pmod{\mathfrak{m}_w} = \langle \lambda_1 y^{m_1}, \dots, \lambda_{r_1} y^{m_{r_1}}\rangle\,,\\ \overline{\phi}_2 &:= \phi_2 \pmod{\mathfrak{m}_w} = \langle \lambda_{r_1+1} y^{m_{r_1+1}}, \dots, \lambda_r y^{m_r}\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.3.5.3}$$

Ici on identifie chaque $\lambda_i \in \Sigma \subseteq A$ avec son image canonique dans $k$. D'après l'hypothèse et le lemme de Springer, on peut supposer que l'une des deux formes résiduelles, disons $\overline{\phi}_1$, est isotrope sur $k(\!(y)\!)$. Vu (3.3.5.3), $\overline{\phi}_1$ a ses coefficients dans $k(y)$ et est isomorphe à $\mu_1\perp y.\mu_2$ sur $k(y)$ pour certaines formes quadratiques non singulières $\mu_i$ sur $k$. En effet, si $I$ (resp. $J$) désigne le sous-ensemble de $\{ 1\,,\dots,r_1 \}$ formé des indices $i$ tels que $m_i$ est paire (resp. impaire), alors on peut prendre $\mu_1 = \langle\lambda_i\rangle_{i\in I}$ (resp. $\mu_2 = \langle\lambda_i\rangle_{i\in J}$). Appliquant le lemme de Springer à la forme $\overline{\phi}_1/k(\!(y)\!)$ par rapport à l'anneau de valuation discrète $k[\![y]\!]$, on conclut que soit $\mu_1$ soit $\mu_2$ est isotrope sur $k$. Il est alors clair que $\overline{\phi}_1 \cong \mu_1\perp y.\mu_2$ est isotrope sur $k(y) = \kappa(v)$. Comme les formes résiduelles de $\phi$ mod $v$ coïncident avec celles modulo $w$, il résulte du lemme de Springer que $\phi$ est isotrope sur $F_v$.

Cas (3). La valuation $v$ est centrée en $P = \infty \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ ou $P = \infty \in \mathcal{X}_E = \mathbb{P}^1_E$.

En ce cas, on a $v(y) < 0$ et $v(x) \geq 0$. Posons $z = y^{-1} \in F = E(y)$. On veut démontrer que $\phi$ est isotrope sur $F_v$.

Rappelons que les coefficients de la forme diagonale $\phi$ sont de la forme $a_i = \lambda_i.x^{n_i}.P_i$, où $\lambda_i \in \Sigma$, $n_i \in \{ 0\,,\, 1 \}$ et $P_i$ est un polynôme distingué dans $A[y]$ pour chaque $i$. Soit $m_i = \deg P_i$ le degré de $P_i$ par rapport à la variable $y$. Alors dans $F = E(y)$ on a

$$P_i(y) = y^{m_i}(1 + z.\rho_i) \quad \text{pour certain } \rho_i \in A[z]\,.$$

Posons $b_i = \lambda_i.x^{n_i}.y^{m_i} \in F$ et notons $\phi'/F$ la forme quadratique diagonale $\langle b_1,\dots,b_r\rangle$. Les deux formes $\phi = \langle a_i\rangle$ et $\phi' = \langle b_i\rangle$ sont isomorphes sur $F_v$ car $1 + z.\rho_i$ est un carré sur $F_v$ pour chaque $i$. Il suffit donc de montrer l'isotropie sur $F_v$ de la forme $\phi' = \langle b_i\rangle$.

On peut supposer que les nombres $n_i$ sont donnés comme dans (3.3.5.1), de sorte que $\phi' = \phi'_1\perp x.\phi'_2$ avec

$$\phi'_1 = \langle\lambda_1 y^{m_1}\,,\dots,\lambda_{r_1}y^{m_{r_1}}\rangle\;, \quad \phi'_2 = \langle\lambda_{r_1+1}y^{m_{r_1+1}}\,,\dots,\lambda_r y^{m_r}\rangle\,.$$

Il existe des formes quadratiques diagonales $\mu_j$ , $j = 1,\dots,4$, où $\mu_1$ , $\mu_2$ ont des coefficients dans $\{ \lambda_1\,,\dots,\lambda_{r_1} \} \subseteq \Sigma$ et $\mu_3$ , $\mu_4$ ont des coefficients dans $\{ \lambda_{r_1+1}\,,\dots,\lambda_r \} \subseteq \Sigma$, telles que $\phi'_1 \cong \mu_1\perp y.\mu_2$ et $\phi'_2 \cong \mu_3\perp y.\mu_4$ sur $F = E(y)$. Observons que les deux formes résiduelles de $\phi$ par rapport à la valuation $x$-adique sur $F$ sont isomorphes aux formes $\mu_1\perp y.\mu_2$ et $\mu_3\perp y.\mu_4$. Une analyse attentive de la preuve ci-dessus dans le cas (2) montre que les quatre formes $\mu_j$ ne sont pas toutes anisotropes sur $k$. Comme

$$\phi' \cong \mu_1\perp y.\mu_2\perp x.(\mu_3\perp y.\mu_4) \quad \text{sur } F = K(y)\,,$$

il en résulte facilement que $\phi'$ est isotrope sur $F_v$, d'où l'isotropie de $\phi$ sur $F_v$.

Cas (4). La valuation $v$ est centrée en l'origine $P = 0 \in \mathbb{P}^1_k$ de la fibre spéciale.

Par la définition de l'ensemble $\Omega$, la valuation $v \in \Omega$ correspond à un point $p$ de codimension 1 d'un modèle propre régulier $\mathcal{P}/A$ de $\mathbb{P}^1_E$. Comme le centre de $v$ sur $\mathcal{X}$ se trouve dans la fibre spéciale, on a $v(x) > 0$. Le point $p \in \mathcal{P}$ se trouve dans la fibre spéciale de $\mathcal{P}/A$ parce que sinon la valuation $v$ doit être triviale sur $E = \mathrm{Frac}(A)$. Le corps résiduel $\kappa(v)$ est alors le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur $k$. On a donc

$$\mathrm{trdeg}_k \kappa(v) = 1 = \dim \mathbb{P}^1_A - 1\,.$$

D'après le lemme 3.2.1, il existe un morphisme $\mathcal{X}_n \to \mathcal{X} = \mathbb{P}^1_A$ obtenu par une suite d'éclatements en des points fermés au-desuss de $0 \in \mathcal{X}_s = \mathbb{P}^1_k$ tel que $\mathcal{O}_v = \mathscr{O}_{\mathcal{X}_n\,,x_n} \subseteq F$ pour un point $x_n$ de codimension 1 dans $\mathcal{X}_n$. Si on considère la même suite d'éclatements qui est cette fois-ci effectuée sur Spec $A[\![y]\!]$, alors on obtient une valuation discrète $w \in \Omega_R$ de $K$ qui étend $v$. On a maintenant les inclusions $A[y] \subseteq \mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ et $\kappa(v) = \kappa(w)$. Soient $\phi_1\,,\,\phi_2$ deux formes quadratiques diagonales à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}_v^*$ telles que

$$\phi \cong \phi_1 \perp \pi_v.\phi_2 \quad \text{ sur } \quad F_v\,.$$

Comme $\phi$ est isotrope sur $K_w$ par hypothèse, en appliquant le lemme de Springer à $w$ on voit que $\overline{\phi}_1 = \phi_1 \pmod{\mathfrak{m}_v}$ ou $\overline{\phi}_2 = \phi_2 \pmod{\mathfrak{m}_v}$ a un zéro non trivial dans $\kappa(w) = \kappa(v)$. Une autre application du lemme de Springer, par rapport à $v$ cette fois, montre que $\phi$ est isotrope sur $F_v$. □

### 3.3.3 Valuations centrées sur la fibre générique

Pour démontrer la proposition 3.3.2 dans le dernier cas, on a besoin de la forme suivante du théorème de division de Weierstraß.

**Lemme 3.3.6** (Weierstraß)**.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète complet et $A[\![y]\!]$ l'anneau de séries formelles en une variable sur $A$. Soit $P \in A[y]$ un polynôme distingué et $f \in A[y]$.*

(i) *Pour tout $g \in A[\![y]\!]$, il existe une unique expression*

$$g = Q.P + R$$

*où $Q \in A[\![y]\!]$ et $R \in A[y]$ est un polynôme de degré $\leq \deg P - 1$. En particulier,*

$$A[y]/(P) \cong A[\![y]\!]/(P)\,.$$

(ii) *Si $f$ divise $P$ dans $A[y]$, alors il existe une unité $u$ dans $A$ telle que $uf$ est un polynôme distingué.*

*Démonstration.* (i) Voir e.g. [Bou85, Chap. VII, §3.8, Prop. 5]. Remarquons que l'isomorphisme $A[y]/(P) \cong A[\![y]\!]/(P)$ entraîne que $P$ est irréductible dans $A[y]$ si et seulement si $P$ est irréductible dans $A[\![y]\!]$ et que $P$ divise un polynôme $f$ dans $A[y]$ si et seulement si $P$ divise $f$ dans $A[\![y]\!]$.

(ii) Supposons que $P = fg$ avec $g \in A[y]$. L'hypothèse entraîne que le coefficient $a_0$ de $y^{\deg f}$ dans $f$ est une unité dans $A$ car $P$ est un polynôme unitaire. Soit $k$ le corps résiduel de $A$ et soit $A[y] \to k[y]\,,\ F \mapsto \overline{F}$ l'application de réduction canonique.

En considérant la factorisation $y^{\deg P} = \overline{P} = \overline{f} \cdot \overline{g}$ dans $k[y]$, on voit que $u := a_0^{-1} \in A^*$ a la propriété désirée. □

*Preuve de la proposition* 3.3.2 (*Partie II*). On considère maintenant le seul cas qui reste, le cas (5). C'est le cas où le centre $P$ de la valuation $v$ se trouve dans $\mathbb{A}^1_K \subseteq \mathcal{X}_K = \mathbb{P}^1_K$.

On a $\mathscr{O}_{\mathcal{X},P} = \mathcal{O}_v$ car les deux anneaux sont tous deux des anneaux de valuations discrètes de corps des fractions $F$. Donc $v$ est définie par un polynôme irréductible $f \in A[y]$ avec $x \nmid f$.

Si aucun des polynômes $P_i$, $i = 1, \dots, r$ n'est divisible par $f$, alors $\phi$ a ses coefficients dans $\mathcal{O}_v^* = \mathscr{O}_{\mathcal{X},P}^*$. Le corps résiduel $\kappa(v) = \kappa(P)$ est une extension finie de $E$ et la forme résiduelle $\overline{\phi} = \phi \pmod{\mathfrak{m}_v}$ est de rang $r > 2d$. D'après la propriété (3.1.4.1) (cf. Remarque 3.1.4), $\overline{\phi}$ est isotrope sur $\kappa(v)$. Il résulte du lemme de Springer (ou lemme de Hensel) que $\phi$ est isotrope sur $F_v$.

Supposons maintenant que $f$ divise un $P_i$, disons $f \mid P_1$. D'après le lemme 3.3.6, quitte à multiplier $f$ par une unité dans $A$ si nécessaire, on peut supposer que $f$ est un polynôme distingué irréductible. Dans $A[\![y]\!]$, $f$ est encore un élément irréductible. La valuation $f$-adique sur $R = A[\![y]\!]$ détermine une valuation discrète $w \in \Omega_R$ qui étend $v \in \Omega$. On a

$$\kappa(v) = \mathrm{Frac}(A[y]/(f)) = \mathrm{Frac}(A[\![y]\!]/(f)) = \kappa(w)$$

et $F_v \subseteq K_w$. Utilisant l'argument avec la première et la seconde forme résiduelle et le lemme de Springer, on conclut comme dans le cas (4) que $\phi$ est isotrope sur $F_v$. □

## 3.4 Anneau $R$ général, à corps résiduel fini

### 3.4.1 Un résultat provenant de la théorie du corps de classes

Comme avant, soit $R$ un anneau local intègre excellent hensélien de dimension 2 dont on note $K$ le corps des fractions et $k$ le coprs résiduel . La proposition suivante provient d'une conversation avec S. Saito, à qui l'auteur exprime ses remerciements chaleureux.

**Proposition 3.4.1.** *Supposons que $R$ est normal et que le corps résiduel $k$ est fini. Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ R$ un modèle propre régulier tel que le diviseur réduit sur la fibre fermée est à croisements normaux stricts. Soit $n > 0$ un entier qui est inversible dans $k$.*

*Alors l'application naturelle*

$$H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow \prod_{v \in \mathcal{X}^{(1)}} H^3(K_v\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$$

*est injective.*

*Démonstration.* Soit $Y$ le sous-schéma réduit sur la fibre fermée de $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ et $U = \mathcal{X} \setminus Y$. Soient $i : Y \to \mathcal{X}$ et $j : U \to \mathcal{X}$ les inclusions naturelles. Posons $\mathscr{F} := i^* Rj_* \mu_n^{\otimes 2}$. Soit $P = (\operatorname{Spec} R)^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1 de $\operatorname{Spec} R$. On peut identifier $P$ avec l'ensemble des points fermés de $U$ via le morphisme structurel $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$. Des théories de localisation on obtient des suites exactes (cf. [Sai87, p.358–360])
(3.4.1.1)

$$H^3(U\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P} H^3(K_{\mathfrak{p}}\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P} H^4_{\mathfrak{p}}(U\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$$

et
(3.4.1.2)

$$H^3(Y\,,\,\mathscr{F}) \longrightarrow \bigoplus_{\eta\in Y^{(0)}} H^3(\kappa(\eta)\,,\,\mathscr{F}) \xrightarrow{\theta'} \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathbb{Z}/q \cong \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} H^4_x(Y\,,\,\mathscr{F})\,,$$

La flèche $\iota$ dans (3.4.1.1) est induite par les applications naturelles $H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(K_{\mathfrak{p}}\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$. Pour chaque $\eta \in Y^{(0)} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$, notons $A_\eta$ le complété de l'anneau de valuation discrète $\mathscr{O}_{\mathcal{X},\eta}$. D'après la functorialité du foncteur $Rj_*$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3(\mathcal{X}\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^3(\mathscr{O}_{\mathcal{X},\eta}\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^3(A_\eta\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[d, "\cong"] \\
H^3(U\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] & H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] & H^3(K_\eta\,,\,\mu_n^{\otimes 2})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes canoniques. D'autre part, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^3(\mathcal{X}\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^3(\mathscr{O}_{\mathcal{X},\eta}\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(A_\eta\,,\,Rj_*\mu_n^{\otimes 2}) \arrow[d, "\cong"] \\
H^3(Y\,,\,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^3(\kappa(\eta)\,,\,\mathscr{F}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & H^3(\kappa(\eta)\,,\,\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

où les deux isomorphismes verticaux sont donnés par le théorème de changement de base propre. Soit

$$\theta : \bigoplus_{\eta\in Y^{(0)}} H^3(K_\eta\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathbb{Z}/n$$

la flèche composée de la flèche $\theta'$ dans (3.4.1.2) avec l'isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\eta\in Y^{(0)}} H^3(K_\eta\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\eta\in Y^{(0)}} H^3(\kappa(\eta)\,,\,\mathscr{F})\,.$$

De tout ce qui précéde, on tire un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^3(U\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\phi} & H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\iota} & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P} H^3(K_{\mathfrak{p}}\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \\ \cong\big\downarrow & & \varphi\big\downarrow & & \\ H^3(Y\,,\,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\tau} & \bigoplus_{\eta\in Y^{(0)}} H^3(K_\eta\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\theta} & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathbb{Z}/n \end{array}$$

où la flèche $\varphi$ est induite par les applications de restriction $H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(K_\eta\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$. D'après [Sai87, p.361, Lemma 5.13], l'application induite $\mathrm{Ker}(\phi) \to \mathrm{Ker}(\tau)$ est un isomorphisme. Ainsi, $\varphi$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ker}(\iota) \cong \mathrm{Ker}(\theta)$. En particulier, un élément $\zeta \in H^3(K\,,\,\mu_n^{\otimes 2})$ est nul si et seulement si $\iota(\zeta) = 0$ et $\varphi(\zeta) = 0$. Le résultat suit, car $\mathcal{X}^{(1)} = P \cup Y^{(0)}$. □

### 3.4.2 Principe local-global pour les formes de rang 5

Reppelons que $\Omega_R$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de $K$ qui sont centrées aux points de codimension 1 des modèles propres réguliers. On va démontrer le principe local-global pour les formes quadratiques de rang 5 par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega_R$ comme énoncé dans le théorème 3.1.5.

*Démonstration du théorème* 3.1.5. On suit les idées dans la preuve de [CTOP02, Thm. 3.6]. Soit $\phi$ une forme quadratique non singulière de dimension 5 sur $K$. Supposons que $\phi_v$ est isotrope sur $K_v$ pour toute $v \in \Omega_R$.

La forme $\psi := \phi\perp\langle -\det(\phi)\rangle$ de dimension 6 est similaire à une forme d'Albert $\langle a\,,\,b\,,\,-ab\,,\,-c\,,\,-d\,,\,cd\rangle$. D'après la théorie générale des formes d'Albert (cf. [GS06, p.14, Thm. 1.5.5]), la forme $\langle a\,,\,b\,,\,-ab\,,\,-c\,,\,-d\,,\,cd\rangle$ est isotrope si et seulement si l'algèbre de biquaternions $D := (a\,,\,b) \otimes (c\,,\,d)$ n'est pas une algèbre à division. Par hypothèse, pour toute $v \in \Omega_R$, $\psi_v$ est isotrope sur $K_v$, donc l'algèbre de biquaternions $D_v = (a\,,\,b)_{K_v} \otimes (c\,,\,d)_{K_v}$ n'est pas une algèbre à division. L'indice de $D_v$ est forcément plus petit que 4, qui est le degré de l'algèbre. Par conséquent, $D_v$ est Brauer équivalente à une algèbre de quaternions sur $K_v$. D'après le corollaire 2.3.30, $D = (a\,,\,b)\otimes(c\,,\,d)$ est Brauer équivalente à une algèbre de quaternions sur $K$. En particulier, $D$ n'est pas une algèbre à division sur $K$. Donc $\psi$ est isotrope sur $K$. Cela entraîne que $\phi$ s'écrit sous la forme

$$\phi = \det(\phi).\langle 1\,,\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,abc\rangle$$

sur $K$. En particulier, $\phi$ est similaire à une sous-forme d'une 3-forme ("3-fold form" en anglais) de Pfister

$$\rho = \langle\!\langle -a\,,\,-b\,,\,-c\rangle\!\rangle := \langle 1\,,\,a\rangle \otimes \langle 1\,,\,b\rangle \otimes \langle 1\,,\,c\rangle\,.$$

D'après le théorème de Merkurjev (cf. [Ara84, p.129, Prop. 2]), la forme $\rho$ est isotrope si et seulement si la classe de symbole $(-a\,,\,-b\,,\,-c)$ s'annule. Pour toute $v \in \Omega_R$, comme la sous-forme $\phi_v$ de $\rho_v$ est isotrope sur $K_v$, on a $(-a\,,\,-b\,,\,-c) = 0$ dans $H^3(K_v\,,\,\mathbb{Z}/2)$. Il résulte alors de la proposition 3.4.1

que $(-a\,,\,-b\,,\,-c)=0$ dans $H^3(K\,,\,\mathbb{Z}/2)$ (notant qu'on peut supposer $R$ normal). Ainsi, la forme de Pfister $\rho$ est isotrope sur $K$ et donc hyperbolique ([Lam05, p.319, Thm. 1.7]). La forme $\rho$ contient alors un sous-espace totalement isotrope de dimension 4, qui a forcément une intersection non triviale avec l'espace sous-jacent de la sous-forme $\phi$ de dimension 5. Donc, $\phi$ est isotrope sur $K$. □

### 3.4.3 Symboles galoisiens de degré 3

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

**Théorème 3.4.2.** *Soient $R\,,\,K\,,\,k$ comme dans* (3.1.1). *Supposons que le corps résiduel $k$ est fini. Soit $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$.*

*Si $\mu_q\subseteq K$, alors tout élément dans $H^3(K\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ est un symbole.*

Commençons par une variante de [PS10, Coro. 1.2].

**Lemme 3.4.3.** *Avec les notations et hypothèses comme dans le théorème* 3.4.2, *pour toute $v\in\Omega_R$, le noyau $H^3_{nr}(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ de l'application de résidu*

$$H^3(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})\xrightarrow{\partial_v}H^2(\kappa(v)\,,\,\mu_q^{\otimes 2})$$

*est trivial. Si de plus $\mu_q\subseteq K$, alors tout élément de $H^3(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ est un symbole.*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2.3.26, le corps résiduel $\kappa(v)$ est soit le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur $k$ soit le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien $B$ dont le corps résiduel $k'$ est fini sur $k$. Dans le premier cas, on a $\mathrm{cd}_q(\kappa(v))\le 2$ d'après [Ser94, p.93, Prop. 11] et donc $H^3(\kappa(v)\,,\,\mu_q^{\otimes 3})=0$. Dans le second cas, la suite exacte

$$H^3(k'\,,\,\mu_q^{\otimes 3})\cong H^3_{\text{ét}}(B\,,\,\mu_q^{\otimes 3})\longrightarrow H^3(\kappa(v)\,,\,\mu_q^{\otimes 3})\longrightarrow H^2(k'\,,\,\mu_q^{\otimes 2})$$

entraîne que $H^3(\kappa(v)\,,\,\mu_q^{\otimes 3})=0$, car $\mathrm{cd}(k')\le 1$. Si $\mu_q\subseteq K$, alors $\kappa(v)$ contient aussi toutes les racines $q$-ième de l'unité. Si $\kappa(v)$ est un corps de fonctions en une variable sur $k$, alors d'après un théorème classique de Hasse-Brauer-Noether-Albert, tout élément de $H^2(\kappa(v)\,,\,\mu_q)$ est un symbole. Le même énoncé est vrai si $\kappa(v)$ est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel fini, par la théorie du corps de classe local (cf. [Ser79, p.181, Thm. 1]). Les résultats suivent alors de [PS10, Lemma 1.1]. □

Reppelons la notation suivante : Si $X$ est un schéma intègre de corps de fonctions $F$, on note $H^i_{nr}(F/X^{(1)}\,,\,\mu_n^{\otimes j})$ (avec $n>0$ inversible sur $X$) le sous-groupe de $H^i(F\,,\,\mu_n^{\otimes j})$ formé des éléments qui sont non ramifiés aux valuations discrètes centrées aux points de codimension 1 de $X$. (Notre notation $H^i_{nr}(F/X^{(1)}\,,\,-)$ est la même que la notation $H^i_{nr}(F/X\,,\,-)$ utilisée dans [PS].)

Notre preuve du théorème 3.4.2 est une application du principe local-global suivant pour la cohomologie en degré 3, récemment obtenu par Parimala et Suresh.

**Théorème 3.4.4** (Parimala–Suresh, [PS, Thm. 3.1])**.** *Soit $X$ une surface excellente régulière de corps de fonctions $F$ et $q$ un nombre premier qui est inversible sur $X$. Supposons que pour toute courbe $C \subseteq X$, $H^2_{nr}(\kappa(C)/C^{(1)}\,,\,\mu_q) = 0$, et que $\mu_q \subseteq F$.*

*Alors pour tout $\zeta \in H^3(F\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ et toute classe de symbole $\alpha \in H^2(F\,,\,\mu_q^{\otimes 2})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute $v \in X^{(1)}$ il existe $f_v \in F_v^*$ tel que $\zeta - \alpha \cup (f_v) \in H^3_{nr}(F_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$.*

(ii) *Il existe $f \in F^*$ tel que $\zeta - \alpha \cup (f) \in H^3_{nr}(F/X^{(1)}\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$.*

**Corollaire 3.4.5.** *Soit $R$ un anneau local intègre, normal, excellent, hensélien et de dimension 2, de corps résiduel fini $k$, $K$ le corps des fractions de $R$, $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, R$ un modèle propre régulier dont la fibre fermée est un diviseur cns, et $q$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$. Supposons que $\mu_q \subseteq K$.*

*Alors pour tout $\zeta \in H^3(K\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ et toute classe de symbole $\alpha \in H^2(K\,,\,\mu_q^{\otimes 2})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute $v \in \mathcal{X}^{(1)}$ il existe $f_v \in K_v^*$ tel que $\zeta = \alpha \cup (f_v) \in H^3(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$.*

(ii) *Il existe $f \in K^*$ tel que $\zeta = \alpha \cup (f) \in H^3(K\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$.*

*Démonstration.* Pour toute $v \in \mathcal{X}^{(1)}$, on a $H^3_{nr}(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3}) = 0$ d'après le lemme 3.4.3. Il en résulte que $H^3_{nr}(K/\mathcal{X}^{(1)}\,,\,\mu_q^{\otimes 3})$ coïncide avec le noyau de l'application naturelle

$$H^3(K\,,\,\mu_q^{\otimes 3}) \longrightarrow \prod_{v \in \mathcal{X}^{(1)}} H^3(K_v\,,\,\mu_q^{\otimes 3})\,.$$

Comme $\mu_q \subseteq K$, il résulte de la proposition 3.4.1 que $H^3_{nr}(K/\mathcal{X}^{(1)}\,,\,\mu_q^{\otimes 3}) = 0$.

Donc le résultat suivra du principe local-global de Parimala et Suresh (Thm. 3.4.4), si l'on peut vérifier que $H^2_{nr}(\kappa(C)/C^{(1)}\,,\,\mu_q) = 0$ pour toute courbe $C \subseteq \mathcal{X}$. Soit $\widetilde{C} \to C$ la normalisation de $C$. D'après le lemme 2.3.25, la courbe $\widetilde{C}$ est soit une courbe propre régulière sur un corps fini soit le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel fini. Dans les deux cas, on a (cf. Thm. 2.2.4 (iii))

$$H^2_{nr}(\kappa(C)/C^{(1)}\,,\,\mu_q) = \mathrm{Br}(\widetilde{C})[q] = 0\,,$$

d'où le corollaire. □

*Démonstration du théorème* 3.4.2. On peut supposer $R$ normal. On fixe une racine primitive $q$-ième de l'unité pour identifier $\mu_q^{\otimes j}$ avec $\mathbb{Z}/q$. On prend un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, R$ dont la fibre fermée réduite est à croisements normaux stricts.

Soit $\zeta \in H^3(K\,,\,\mathbb{Z}/q)$ et soit $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta)$ le diviseur de ramification de $\zeta$ sur $\mathcal{X}$. Pour toute $v \in \mathcal{X}^{(1)}$ qui est centrée sur une courbe dans le lieu de ramification $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta) \subseteq \mathcal{X}$, on peut choisir $f_v\,,\,g_v\,,\,h_v \in K_v^*$ tels que $\zeta = (f_v\,,\,g_v\,,\,h_v) \in H^3(K_v\,,\,\mathbb{Z}/q)$, d'après le lemme 3.4.3. D'après l'approximation faible, il y a des éléments $f\,,\,g \in K^*$ tels que

$$(f) = (f_v) \quad \text{et} \quad (g) = (g_v) \;\in\; H^1(K_v\,,\,\mathbb{Z}/q)\,,\;\; \forall\, v \in \mathcal{X}^{(1)} \cap \mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta)\,.$$

Posons $\alpha = (f\,,\,g) \in H^2(K\,,\,\mathbb{Z}/q)$. Alors pour toute $v \in \mathcal{X}^{(1)}$ on a $\zeta = \alpha \cup (h_v) \in H^3(K_v\,,\,\mathbb{Z}/q)$ pour un certain $h_v \in K_v^*$ (prenant $h_v = 1$ pour $v \in \mathcal{X}^{(1)} \setminus \mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta)$). Ainsi, d'après le corollaire 3.4.5 on obtient $\zeta = (f\,,\,g\,,\,h) \in H^3(K\,,\,\mathbb{Z}/q)$ pour un certain $h \in K^*$. □

### 3.4.4 Le $u$-invariant

Ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème 3.1.8, qui affirme que si le corps résiduel de $R$ est fini, alors $u(K) = 8$.

**(3.4.6)** Soit $F$ un corps de caractéristique $\neq 2$. On note $W(F)$ l'anneau de Witt des formes quadratiques sur $F$ et $I(F)$ l'idéal fondamental. Pour $a_1\,,\dots,a_n \in F^*$, on note $\langle\langle a_1\,,\dots,a_n\rangle\rangle$ la $n$-forme de Pfister $\langle 1\,,\,-a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1\,,\,-a_n\rangle$. La puissance $n$-ième $I^n(F)$ de l'idéal fondamental $I(F)$ est engendrée en tant que groupe abélien par les $n$-formes de Pfister. Une version au sens de formes quadratiques de la conjecture de Milnor affirme que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un homomorphisme bien défini

$$e_n\,:\; I^n(F) \longrightarrow H^n(F\,,\,\mathbb{Z}/2)$$

de noyau $I^{n+1}(F)$, donné par la formule

$$e_n(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle) = (a_1, \dots, a_n) \in H^n(F\,,\,\mathbb{Z}/2)\,.$$

Cette conjecture a été démontrée par Arason, Elman et Jacob [AEJ86, Coro. 4 and Thm. 2] dans le cas particulier où $F$ a pour 2-dimension cohomologique $\leq 3$. C'est le seul cas dont on aura besoin.

Le théorème profond ci-dessous est bien connu.

**Théorème 3.4.7** (Artin–Gabber)**.** *Soit $R$ un anneau local intègre excellent hensélien de dimension 2 de corps des fractions $K$ et de corps résiduel fini $k$.*

*Alors pour tout nombre premier $p$ différent de la caractéristique de $k$, la $p$-dimension cohomologique $\mathrm{cd}_p(K)$ de $K$ est 3.*

Quand $K$ et $k$ ont la même caractéristique, ceci résulte d'un théorème de Artin ([AGV73, Exp. XIX, Coro. 6.3]). Quand la caractéristique de $K$ est différente de celle de $k$, Gabber a prouvé l'analogue du résultat d'Artin (probablement connu au public pour la première fois pendant un exposé donné à l'I.H.E.S en mars 1981). Ici on peut renvoyer à la preuve de Kato décrite dans [Sai86, §5].

**Corollaire 3.4.8.** *Soit $R$ un anneau local intègre excellent hensélien de dimension 2, de corps résiduel fini de caractéristique $\neq 2$. Soit $K$ le corps des fractions de $R$.*

*Alors $I^4(K) = 0$.*

*Démonstration.* Ceci résulte de la combinaison du théorème 3.4.7 et d'un résultat de Arason, Elman et Jacob ([AEJ86, Coro. 4]). □

**(3.4.9)** Soit $R$ comme dans (3.1.1). Supposons que le corps résiduel $k$ de $R$ est fini (de caractéristique $\neq 2$). Alors l'inégalité $u(K) \geq 8$ se voit facilement comme suit : Prenons une valuation discrète $v$ correspondant à un idéal premier de hauteur 1 de la normalisation de $R$. Il résulte du corollaire 2.3.26 et du lemme de Springer que $u(\kappa(v)) = 4$. Prenons une forme diagonale $\varphi$ de dimension 4 sur $K$ dont les coefficients sont des unités pour $v$ telle que sa forme résiduelle $\overline{\varphi}$ sur $\kappa(v)$ est anisotrope. Soit $\pi \in K$ une uniformisante pour $v$. Alors $\varphi \perp \pi.\varphi$ est une forme de dimension 8 sur $K$ anisotrope sur $K_v$. Donc l'assertion du théorème 3.1.8 équivaut à $u(K) \leq 8$. Pour le prouver, on suivra la méthode de Parimala et Suresh développée dans [PS10].

**Proposition 3.4.10.** *Supposons que le corps résiduel $k$ de $R$ est fini de caractéristique $\neq 2$.*

(i) *Soit $\phi$ une 3-forme de Pfister sur $K$ et $\varphi_2$ une forme quadratique de dimension 2 sur $K$. Alors il existe $f, a, b \in K^*$ tels que $f$ est une valeur de $\varphi_2$ et $\phi = \langle 1, f\rangle \otimes \langle 1, a\rangle \otimes \langle 1, b\rangle$ dans $W(K)$.*

(ii) *Soit $\phi = \langle 1, f\rangle \otimes \langle 1, a\rangle \otimes \langle 1, b\rangle$ une 3-forme de Pfister sur $K$ et $\varphi_3$ une forme quadratique de dimension 3 sur $K$. Alors il existe $g, h \in K^*$ tels que $g$ est une valeur de $\varphi_3$ et $\phi = \langle 1, f\rangle \otimes \langle 1, g\rangle \otimes \langle 1, h\rangle$ dans $W(K)$.*

*Démonstration.* On peut supposer que $R$ est normal. Soit

$$\zeta = e_3(\phi) \in H^3(K, \mathbb{Z}/2).$$

Prenons un modèle propre régulier $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ dont la fibre fermée réduite est à croisements normaux stricts et soit $\mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta)$ le lieu de ramification de $\zeta$ sur $\mathcal{X}$. Pour toute $v \in \mathcal{X}^{(1)}$, on a $u(\kappa(v)) \leq 4$ et $u(K_v) \leq 8$ d'après le corollaire 2.3.26 et le lemme de Springer.

(i) D'après [PS10, Prop. 4.1], il existe $f_v, a_v, b_v \in K_v^*$ tels que $f_v$ est une valeur de $\varphi_2$ sur $K_v$ et $\phi = \langle 1, f_v\rangle \otimes \langle 1, a_v\rangle \otimes \langle 1, b_v\rangle$ sur $K_v$. Par approximation faible, on peut trouver $f, a \in K^*$ tels que $f$ est une valeur de $\varphi_2$ sur $K$ et

$$(f) = (f_v), \quad (a) = (a_v) \in H^1(K_v, \mathbb{Z}/2), \quad \forall\, v \in \mathcal{X}^{(1)} \cap \mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta).$$

Pour $v \in \mathcal{X}^{(1)} \setminus \mathrm{Ram}_{\mathcal{X}}(\zeta)$, on a $\zeta = (-f, -a, 1)$ dans $H^3(K_v, \mathbb{Z}/2)$ car $H^3_{nr}(K_v, \mathbb{Z}/2) = 0$ d'après le lemme 3.4.3. D'après le corollaire 3.4.5, il existe $b \in K^*$ tel que $\zeta = (-f, -a, -b) \in H^3(K, \mathbb{Z}/2)$. En tenant compte du corollaire 3.4.8, on voit que $e_3 : I^3(K) \to H^3(K, \mathbb{Z}/2)$ est injective ([AEJ86]). Il en résulte alors que $\phi = \langle 1, f\rangle \otimes \langle 1, a\rangle \otimes \langle 1, b\rangle$.

(ii) D'après [PS10, Prop. 4.2], il existe $g_v\,,\, h_v \in K_v^*$ tels que $\phi = \langle 1,\, f\rangle \otimes \langle 1,\, g_v\rangle \otimes \langle 1\,,\, h_v\rangle$ sur $K_v$. Le reste de la preuve se fait de façon similaire comme dans (i). □

**Lemme 3.4.11.** *Soit $R$ un anneau local intègre excellent hensélien de dimension 2, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. Supposons que $k$ est un corps $B_1$ (cf. Définition 2.2.7) de caractéristique $\neq 2$.*

*Alors tout élément dans $H^2(K\,,\, \mathbb{Z}/2)$ est la somme de deux symboles.*

*Démonstration.* D'après le théorème 2.3.10, tout élément dans $\mathrm{Br}(K)[2] \cong H^2(K\,,\, \mathbb{Z}/2)$ a un indice divisant 4. Un théorème bien connu d'Albert ([Alb61, Chapt. XI, §6, Thm. 9]) entraîne qu'il est la classe d'un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions. □

*Démonstration du théorème* 3.1.8. On a $I^3(K) \cong H^3(K\,,\, \mathbb{Z}/2)$ en vertu du corollaire 3.4.8 ([AEJ86]). D'après le théorème 3.4.2, tout élément de $I^3(K)$ est (représenté par) une 3-forme de Pfister. Le théorème résulte alors de [PS10, Prop. 4.3], ainsi que du lemme 3.4.11 et de la proposition 3.4.10. □

***Remarque*** 3.4.12. Remarquons qu'on obtient une preuve rapide du fait $u(K) \leq 22$ à partir du théorème 2.3.9 et du corollaire 3.4.8 en utilisant la méthode de Hoffmann et Van Geel ([HG98]).

### 3.4.5 Torseurs sous des groupes orthogonaux spéciaux

**Théorème 3.4.13.** *Soit $R$ un anneau local intègre, excellent, hensélien de dimension 2 de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. Supposons que $k$ est un corps fini de caractéristique $\neq 2$.*

*Alors pour toute forme quadratique non singulière $\phi$ de rang $\geq 2$ sur $K$, l'application naturelle*

$$H^1(K\,,\, \mathrm{SO}(\phi)) \longrightarrow \prod_{v\in\Omega_R} H^1(K_v\,,\, \mathrm{SO}(\phi))$$

*est injective.*

*Démonstration.* Soient $\psi_1,\, \psi_2$ des formes quadratiques non singulières représentant des éléments $\xi_1,\, \xi_2 \in H^1(K\,,\, \mathrm{SO}(\phi))$. Comme elles ont la même dimension, les formes $\psi_1$ et $\psi_2$ sont isomorphes si et seulement si elles représentent la même classe dans le groupe de Witt. Comme $\psi_1$ et $\psi_2$ ont le même discriminant, il résulte de [Sch85, p.82, Chapt. 2, Lemma 12.10] que $\psi_1 - \psi_2 \in I^2(K)$. Il suffit d'appliquer le lemme 3.4.14 ci-dessous. □

**Lemme 3.4.14.** *Soient $R$, $K$, $k$ comme dans le théorème 3.4.13. L'application naturelle*

$$I^2(K) \longrightarrow \prod_{v\in\Omega_R} I^2(K_v)$$

*est injective.*

*Démonstration.* Dans le cas où $R$ est le hensélisé d'une surface algébrique sur un corps fini en un point fermé, ceci est déjà établi dans [CTOP02, Thm. 3.10]. Ici, l'argument est essentiellement le même, la proposition 3.4.1 et le corollaire 3.4.8 fournissant les ingrédients appropriés dans le présent cas. □

***Remarque*** 3.4.15. Dans le théorème 3.4.13, si $\phi$ est de rang 2 ou 3, il n'y a pas de besoin de supposer $k$ fini.

En effet, soient $\psi_1$, $\psi_2$ des formes quadratiques non singulières représentant des éléments $\xi_1, \xi_2 \in H^1(K\,,\,\mathrm{SO}(\phi))$. En rang 2, supposons $\psi_1 \cong \langle a\,,\,b\rangle$ et $\psi_2 \cong \langle \alpha\,,\,\beta\rangle$. Alors $\psi_1 \cong \psi_2$ si et seulement si les algèbres de quaternions $(a,\,b)$ et $(\alpha\,,\,\beta)$ sont isomorphes, car les deux formes ont le même discriminant (cf. [Sch85, Chapt. 2, Coro. 11.11]). En rang 3, supposons $\psi_1 \cong \langle a\,,\,b\,,c\rangle$ et $\psi_2 \cong \langle \alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\rangle$. Alors $\psi_1 \cong \psi_2$ si et seulement si les algèbres de quaternions $(-ac\,,\,-bc)$ et $(-\alpha\gamma\,,\,-\beta\gamma)$ sont isomorphes (cf. [Sch85, Chapt. 2, Thm. 11.12]). Deux algèbres de quaternions sont isomorphes si et seulement si leurs classes dans le groupe de Brauer coïncident, l'énoncé résulte alors du théorème 3.2.3.

***Remarque*** 3.4.16. Il y a un argument général pour montrer comment les principes locaux-globaux pour les torseurs sous des groupes orthogonaux spéciaux peuvent être prouvés "par une méthode inductive" en utilisant les principes locaux-globaux correspondants pour les formes quadratiques.

Soit $F$ un corps de caractéristique $\neq 2$ et $\Omega$ un ensemble de valuations discrètes de $F$. Pour tout entier $r \geq 2$, considérons l'énoncé suivant :

($\mathrm{LG}_r$) Pour toute forme quadratique non singulière $\phi$ de rang $r$ sur $F$, le principe local-global par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega$ vaut pour les $\mathrm{SO}(\phi)$-torseurs.

Supposons que le principe local-global par rapport aux valuations discrètes dans $\Omega$ vaut pour les formes quadratiques de rang $r+2$ sur $F$. Alors $\mathrm{LG}_r$ entraîne $\mathrm{LG}_{r+1}$.

En effet, soient $\psi$, $\psi'$ des formes quadratiques non singulières de rang $r+1$ sur $F$. Supposons $\psi \cong \langle a_1\rangle \perp \psi_1$ avec $\psi_1$ de rang $r$. Si $(\psi)_{F_v} \cong (\psi')_v$ pour toute $v \in \Omega$, alors $(\psi' \perp \langle -a_1\rangle)_{F_v}$ est isotrope pour toute $v \in \Omega$. D'après le principe local-global pour les formes quadratiques de rang $r+2$, $\psi'$ représente $a_1$ sur $F$ d'où une décomposition $\psi' \cong \langle a_1\rangle \perp \psi'_1$. Il suffit alors d'appliquer $\mathrm{LG}_r$ aux formes $\psi_1$ et $\psi'_1$.

Avec l'argument dans la remarque 3.4.15, cela montre que si l'application naturelle $\mathrm{Br}(F) \to \prod_{v\in\Omega} \mathrm{Br}(F_v)$ est injective et si le principe local-global par rapport à $\Omega$ est valable pour les formes quadratiques de rang $\geq 5$ sur $F$, alors $\mathrm{LG}_r$ est vrai pour tout $r \geq 2$. Par exemple, si $F$ est le corps de fonctions d'une courbe relative sur un anneau de valuation discrète complet (cf. (3.2.2)), alors pour toute forme quadratique $\phi$ de rang $\geq 2$ sur $F$, les $\mathrm{SO}(\phi)$-torseurs satisfont au principe local-global par rapport aux valautions divisorielles (cf. [CTPS10, Thm. 3.1]).

*Remerciements.* Je me suis intéressé à certains des problèmes considérés dans ce chapitre quand j'ai participé à l'atelier "Deformation theory, patching, quadratic forms, and the Brauer group" qui a eu lieu à l'American Institute of Mathematics (AIM) (Palo Alto, États-Unis, janvier, 2011). Je tiens à remercier l'AIM et les organisateurs de cet atelier pour l'accueil aimable et le soutien généreux. Je suis reconnaissant à mon directeur de thèse, Prof. Jean-Louis Colliot-Thélène, pour des discussions et commentaires utiles. Je remercie le Prof. Shuji Saito, avec qui une conversation m'a aidé à trouver la réponse à une question dont on a besoin dans ce chapitre. Je remercie aussi la Prof. Raman Parimala, qui a lu le manuscrit [Hu10a] attentivement et m'a transmis des commentaires qui m'ont amené à énoncer le théorème 3.1.3 dans la présente généralité. L'auteur est enfin reconnaissant au rapporteur de [Hu10a] pour des commentaires utiles.

*Acknowledgements.* I got interested in some of the problems considered in this chapter when I was attending the workshop "Deformation theory, patching, quadratic forms, and the Brauer group" held at American Institute of Mathematics (AIM) (Palo Alto, USA, January, 2011). I would like to thank AIM and the organizers of this workshop for kind hospitality and generous support. I'm grateful to my advisor, Prof. Jean-Louis Colliot-Thélène, for helpful discussions and comments. Thanks are also due to Prof. Shuji Saito, with whom a conversation has helped me to find the answer to a question that is needed in this chapter. People to whom the author wishes to express his thanks also include Prof. Raman Parimala, who has read the manuscript [Hu10a] carefully and given comments that led the author to find that the earlier version of Theorem 3.1.3 may be generalized to the present one. The author is grateful to the referee of [Hu10a] for useful comments.

# Bibliographie


[ABGV11] A. Auel, E. Brussel, S. Garibaldi, and U. Vishne. Open problems on central simple algebras. *Transformation Groups*, **16**(1) :219–264, 2011.

[AEJ86] J. Kr. Arason, R. Elman, and B. Jacob. Fields of cohomological 2-dimension three. *Math. Ann.*, **274** :649–657, 1986.

[AGV73] M. Artin, A. Grothendieck, and J.-L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4), Tomes 1–3*, volume **269**, **270**, **305** of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1972–1973.

[Alb61] A. Albert. *Structure of Algebras.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961.

[Ara84] J. Kr. Arason. A proof of Merkurjev's theorem. In *Quadratic and hermitian forms*, volume 4 of *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, pages 121–130. American Math. Soc., Providence, R.I., 1984.

[BBK96] F. Bien, A. Borel, and J. Kollár. Rationally connected homogeneous spaces. *Invent. math.*, pages 103–127, 1996.

[Bou85] N. Bourbaki. *Algèbre Commutative : Chapitres 5–7.* Masson, 1985.

[Bru10] E. Brussel. On Saltman's $p$-adic curves papers. In J.-L. Colliot-Thélène, S. Garibaldi, R. Sujatha, and V. Suresh, editors, *Quadratic Forms, Linear Algebraic Groups, and Cohomology*, number **18** in Developments in Math., pages 13–39. Springer, 2010.

[Cam92] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **25** :539–545, 1992.

[CDLR82] M.D. Choi, Z.D. Dai, T.Y. Lam, and B. Reznick. The Pythagoras number of some affine algebras and local domains. *J. reine angew. Math.*, **336** :45–82, 1982.

[Con06] D. Conduché. *Courbes rationnelles et hypersurfaces de l'espace projectif.* PhD thesis, l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2006.

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the gersten conjecture. Number **58** in Proc. Sympos. Pure Math., pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995.

[CT96] J.-L. Colliot-Thélène. Groupes linéaires sur les corps de fonctions de courbes réelles. *J. für die reine und angew. Math.*, **474** :139–167, 1996.

[CT98] J.-L. Colliot-Thélène. Review of [Sal97]. Zentralblatt MATH database, Zbl 0902.16021, 1998.

[CT06] J.-L. Colliot-Thélène. Algèbres simples centrales sur les corps de fonctions de deux variables (d'après A. J. de Jong). *Astérisque*, **307** :379–413, 2006. Séminaire Bourbaki, Vol.2004/2005, Exp. No. 949, ix.

[CT11] J.-L. Colliot-Thélène. In *Arithmetic Geometry (C.I.M.E., 2007)*, volume **2009** of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 2011.

[CTG03] J.-L. Colliot-Thélène and P. Gille. Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable. In *Arithmetic of higher dimensional arithmetic varieties*, volume **226** of *Progress in Mathematics*, pages 121–134. Birkhäuser, 2003.

[CTOP02] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, and R. Parimala. Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes. In R. Parimala, editor, *Algebra, Arithmetic and Geometry, Mumbai, 2000, Part I*, pages 185–217. Narosa Publishing Housing, 2002.

[CTPS10] J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala, and V. Suresh. Patching and local-global principle for homogeneous spaces over function fields of $p$-adic curves. *Commentarii Mathematici Helvetici*, to appear, 2010.

[CTS77] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc. La $R$-équivalence sur les tores. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **10**(2) :175–229, 1977.

[Deb01] O. Debarre. *Higher-dimensional Algebraic Geometry.* Springer–Verlag, 2001.

[Deb03] O. Debarre. Variétés rationnellement connexes. *Séminaire Bourbaki, Exp. no. 905, ix, vol. 2001–2002, Astérisque*, **290** :243–266, 2003.

[Del74] P. Deligne. La conjecture de Weil : I. *Publ. Math. I.H.É.S.*, **43** :273–307, 1974.

[dJ04] A. de Jong. The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface. *Duke Math. J.*, **123**(1) :71–94, 2004.

[dS03] A. J. de Jong and J. Starr. Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point. *Amer. J. Math.*, **125**(3) :567–580, 2003.

[Duc98] A. Ducros. L'obstruction de réciprocité à l'existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d'une courbe réelle. *J. für die reine angew. Math.*, **504** :73–114, 1998.

[FJ86] M. Fried and M. Jarden. *Field Arithmetic.* Springer–Verlag, 1986.

[GD61] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Publ. Math. de l'Inst. Hautes Études Sci.*, **11**, 1961.

[GD63] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie. *Publ. Math. de l'Inst. Hautes Études Sci.*, **17**, 1963.

[GD65] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie. *Publ. Math. de l'Inst. Hautes Études Sci.*, **24**, 1965.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, **16**(1) :57–67, 2003.

[Gro68a] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer : II. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, pages 67–87. Masson and North-Holland, Paris and Amsterdam, 1968.

[Gro68b] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer : III. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, pages 88–188. Masson and North-Holland, Paris and Amsterdam, 1968.

[GS06] P. Gille and T. Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology.* Cambridge University Press, 2006.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Number **52** in Graduate Texts in Math. Springer–Verlag, 1977.

[Har04] D. Harari. Weak approximation on algebraic varieties. In *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002)*, number **226** in Progress in Mathematics, pages 43–60. Birkäuser, 2004.

[Has10] B. Hassett. Weak approximation and rationally connected varieties over function fields of curves. to appear in Panoramas & Synthèses, available at arXiv :1008.2711, 2010.

[HG98] D. W. Hoffmann and J. Van Geel. Zeros and norm groups of quadratic forms over function fields in one variable over a local non-dyadic field. *J. Ramanujan Math. Soc.*, **13**(2) :85–110, 1998.

[HH10] D. Harbater and J. Hartmann. Patching over fields. *Israel J. Math.*, **176(1)** :61–107, 2010.

[HHK09] D. Harbater, J. Hartmann, and D. Krashen. Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras. *Invent. math.*, **178** :231–263, 2009.

[HHK11a] D. Harbater, J. Hartmann, and D. Krashen. Local-global principles for torsors over arithmetic curves. arXiv : 1108.3323, 2011.

[HHK11b] D. Harbater, J. Hartmann, and D. Krashen. Weierstrass preparation and algebraic invariants. arXiv : 1109.6362, 2011.

[HT06] B. Hassett and Y. Tschinkel. Weak approximation over function fields. *Invent. math.*, **163**(1) :171–190, 2006.

[HT08] B. Hassett and Y. Tschinkel. Approximation at places of bad reduction for rationally connected varieties. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, **4**(3) :743–766, 2008.

[Hu10a] Y. Hu. Local-global principle for quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains. Ann. de l'Institut Fourier, to appear, also available at arXiv : 1010.6038, 2010.

[Hu10b] Y. Hu. Weak approximation over function fields of curves over large or finite fields. *Math. Ann.*, **348**(2) :357–377, 2010.

[Hu11] Y. Hu. Division algebras and quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains. arXiv : 1105.2051, 2011.

[Jaw01] P. Jaworski. On the strong Hasse principle for fields of quotients of power series rings in two variables. *Math. Z.*, **236** :531–566, 2001.

[Kat86] K. Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. reine angew. Math.*, **366** :142–181, 1986.

[KM98] J. Kollár and S. Mori. *Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Cambridge University Press, 1998.

[KMM92a] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori. Rationally connected varieties. *J. Alg. Geo.*, **1** :429–448, 1992.

[KMM92b] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori. Rationally connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Diff. Geo.*, **36** :765–769, 1992.

[Kne] A. Knecht. Weak approximation for general degree two del Pezzo surfaces. arXiv : 0809.1251.

[Kol96] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties.* Springer–Verlag, 1996.

[Kol99] J. Kollár. Rationally connected varieties over local fields. *Ann. of Math.*, **150**(1) :357–367, 1999.

[Kol02] J. Kollár. Unirationality of cubic hypersurfaces. *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, **1**(2) :467–476, 2002.

[Kol04] J. Kollár. Specialization of zero cycles. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **40** :689–708, 2004.

[Kol08] J. Kollár. Looking for rational curves on cubic hypersurfaces. In *Higher-dimensional geometry over finite fields*, volume 16 of *NATO Science for Peace and Security Series D : Information and Communication Security*, pages 92–122. IOS Press, 2008. notes by U. Derenthal.

[KS03] J. Kollár and E. Szabó. Rationally connected varieties over finite fields. *Duke Math. Jour.*, **120**(2) :251–267, 2003.

[Lam05] T.Y. Lam. *Introduction to quadratic forms over fields.* American Math. Society, 2005.

[Lie07] M. Lieblich. Period and index in the Brauer group of an arithmetic surface, with an appendix by daniel krashen. *J. reine angew. math.*, 2007. to appear, also available at arXiv :math/0702240v4.

[Lie08] M. Lieblich. Twisted sheaves and the period-index problem. *Composito Math.*, **144** :1–31, 2008.

[Lie11] M. Lieblich. The period-index problem for fields of transcendence degree 2. available at arXiv :math/0909.4345v2, 2011.

[Lip75] J. Lipman. Introduction to resolution of singularities. *Proc. Symp. Pure Math.*, **29** :187–230, 1975.

[Lip78] J. Lipman. Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math.*, **107** :151–207, 1978.

[Liu02] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2002.

[LW54] S. Lang and A. Weil. Number of points of varieties in finite fields. *Amer. J. Math.*, **76** :819–827, 1954.

[Mad06a] D. Madore. Approximation faible aux places de bonne réduction sur les surfaces cubiques sur les corps des fonctions. *Bull. Soc. Math. France*, **134**(4) :475–485, 2006.

[Mad06b] D. Madore. Les hypersurfaces cubiques sont séparablement rationnellement connexes. available at arXiv :math/0605662v1, 2006.

[Nag62] M. Nagata. *Local Rings.* Interscience Publishers, 1962.

[Pop96] F. Pop. Embedding problems over large fields. *Ann. of Math.*, **144** :1–34, 1996.

[PR84] A. Prestel and P. Roquette. *Formally $p$-adic fields*, volume **1050** of *Lecture Notes in Math.* Springer–Verlag, 1984.

[PS] R. Parimala and V. Suresh. Degree three cohomology of function fields of surfaces. arXiv : 1012.5367.

[PS98] R. Parimala and V. Suresh. Isotropy of quadratic forms over function fields of $p$-adic curves. *Publ. I.H.E.S.*, **88** :129–150, 1998.

[PS10] R. Parimala and V. Suresh. The $u$-invariant of the function fields of $p$-adic curves. *Ann. Math.*, **172** :1391–1405, 2010.

[Sai86] S. Saito. Arithmetic on two-dimensional local rings. *Invent. math.*, **85** :379–414, 1986.

[Sai87] S. Saito. Class field theory for two-dimensional local rings. In *Galois Representatioin and Arithmetic Algebraic Geometry*, number **12** in Advanced Studies in Pure Math., pages 343–373. 1987.

[Sal97] D. Saltman. Division algebras over $p$-adic curves. *J. Ramanujan. Math. Soc.*, **12**(1) :25–47, 1997.

[Sal98] D. Saltman. Correction to "Division algebras over $p$-adic curves". *J. Ramanujan. Math. Soc.*, **13**(2) :125–129, 1998.

[Sal07] D. Saltman. Cyclic algebras over $p$-adic curves. *J. Algebra*, **314**(2) :817–843, 2007.

[Sal08] D. Saltman. Division algebras over surfaces. *J. Algebra*, **320** :1543–1585, 2008.

[Sch85] W. Scharlau. *Quadratic and Hermitian Forms.* Springer–Verlag, 1985.

[Sch96] C. Scheiderer. Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one. *Invent. Math.*, **125**(2) :307–365, 1996.

[Sch04] W. Schmidt. *Equations over finite fields : an elementary approach.* Kendrick Press, Heber City (Utah), 2004.

[SD01] Sir Peter Swinnerton-Dyer. Weak approximation and $R$-equivalence on cubic surfaces. In E. Peyre and Y. Tschinkel, editors, *Rational points on algebraic varieties*, number **199** in Progress in Mathematics, pages 357–404. Birkäuser, Boston, 2001.

[Ser79] J.-P. Serre. *Local Fields*, volume **67** of *Graduate Texts in Math.* Springer–Verlag, 1979.

[Ser94] J.-P. Serre. *Cohomologie Galoisienne*, volume **5** of *Lectures Notes in Math.* Springer–Verlag, cinquième edition edition, 1994.

[Sha66] I. R. Shafarevich. *Lectures on Minimal Models and Birational Transformations of Two Dimensional Schemes.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1966.

[Sko01] A. Skorobogatov. *Torsors and rational points*, volume **144** of *Cambridge Tracts in Math.* Cambridge University Press, 2001.

[Wit10] O. Wittenberg. La connexité rationnelle en arithmétique. to appear in Panoramas & Synthèses, available at arXiv :1003.1659, 2010.

[Xu] C. Xu. Weak approximation for low degree Del Pezzo surfaces. to appear in J. Alg. Geom., avaiable at arXiv : 0902.1765.