Formes de Dirichlet et applications en théorie ergodique des chaînes de Markov

Guillaume Poly

Université Paris-Est
Thèse de doctorat

Directeur de thèse : Nicolas Bouleau
Rapporteur : Francis Hirsch
Rapporteur : Eva Löcherbach
Examinateur: Vlad Bally
Examinateur: Cristophe Chorro
Examinateur: Damien Lamberton

Formes de Dirichlet et applications á la théorie ergodique des chaînes de Markov

Poly Guillaume

Ecole nationale des ponts et chaussées, le 07/12/2011

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je souhaite remercier Nicolas Bouleau d'avoir accepté de diriger ma thèse. La théorie des formes de Dirichlet et des structures d'erreur qu'il m'a enseignée, est un sujet extrêmement riche et passionnant, à la croisée de plusieurs disciplines des mathématiques et des sciences. Son écoute, sa patience et son expérience m'ont permis d'aborder des thématiques variées avec certes plus ou moins de succès, mais avec une motivation permanente. Ses qualités mathématiques et pédagogiques resteront pour moi exemplaires.

Je remercie Francis Hirsch et Eva Löcherbach d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie d'avoir passé outre les maladresses de rédaction et fautes de frappes, leurs conseils et commentaires m'ont été très utiles. Je remercie également Vlad Bally, Christophe Chorro et Damien Lamberton de me faire l'honneur de constituer mon jury.

Je voudrais remercier tout particulièrement Vlad Bally, Eva Löcherbach et Damien Lamberton pour m'avoir reçu à plusieurs reprises pour discuter de mes travaux. Leur disponibilité sans faille, leurs conseils et encouragements sont très certainement décisifs dans l'aboutissement de ces travaux.

Je voudrais saluer tous les chercheurs qui m'ont un jour reçu pour discuter de ce travail ou qui ont bien voulu répondre à mes questions. Un grand merci à Agnès Coquio de m'avoir invité à Grenoble, ses commentaires avisés m'ont beaucoup apporté. De façon non exhaustive je voudrais saluer Jean-François Delmas, Jean-Pierre Kahane, Raphaël Krikorian, Bernard Lapeyre, François Ledrappier, Cristophe Leuridan, Yves Meyer...

Je voudrais remercier très chaleureusement Stéphane Hallegatte et Patrice Dumas ainsi que l'ensemble de l'équipe du Cired de m'avoir accueilli en thèse voilà quatre ans. Je suis reconnaissant à Stéphane et Patrice de m'avoir proposé un sujet si riche et je regrette beaucoup de n'avoir pas su le mener à bien. Toutefois les discussions scientifiques que j'ai eues avec Stéphane et Patrice ont été passionnantes, leur connaissance approfondie des mathématiques m'a toujours impressionné, même si à contrario mes connaissances en économie laissaient un peu à désirer...

Enfin je veux remercier ici ma famille et mes amis pour leur soutien inconditionnel durant ces dernières années. Alors en désordre, je salue Jean-Pierre, Dominique, Sébastien, Masami, Damianu, Missia, Mina, Mamita, Stéphane, Antoine, Paule, Ange-François, Marie Cécile, Christian, Julie, Vincent ainsi que mes nombreux autres cousins oncles et tantes. Quant à mes amis, je n'oublie pas Dominique, Rafik, Ayman, Benoit, Mathieu, Renaud, Antoine, Vincent, Olivier, Doudoul, le Xé, Martin, Romain, Sylvain, et les toulousains Yohann, Miboule, Arnaud, Ghilès.

Je voudrais enfin remercier Nguyen Phuong Anh pour sa collaboration fructueuse ayant permis d'établir l'existence de Lionel Poly. Ce résultat est certainement le plus important de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

1.1 *Définition principale et calcul d'erreur*

Les formes de Dirichlet ont été introduites par Beurling et Deny en 1958 dans le cadre de la théorie abstraite du potentiel. Une forme de Dirichlet désigne alors une forme bilinéaire, symétrique, et fermée sur un espace de Hilbert de type $L^2(\mathbb{P})$. Dans cette thèse nous n'adopterons pas le point de vue le plus général sur les formes de Dirichlet, mais le point de vue particulier des structures de Dirichlet ou structures d'erreur sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cette notion de structure d'erreur est centrale dans cette thèse.

Avant de donner la définition précise de ce type de structure, nous allons expliquer les liens existants avec le calcul d'erreur ou la propagation des erreurs. C'est de là que provient la terminologie en vigueur, et c'est une bonne façon d'introduire cet objet mathématique. Néanmoins, cette thèse ne porte pas réellement sur les liens existants entre le calcul d'erreur et les formes de Dirichlet.

Imaginons que X est une grandeur physique erronée, à cause d'erreurs de troncature ou d'erreurs de mesure. Notons $\epsilon\Delta X$ l'erreur qui entache X. On supposera que la quantité X est aléatoire, ainsi que son erreur ΔX. On supposera en outre que $\epsilon << 1$, ce qui correspond à l'idée bien naturelle que les erreurs sont petites. Le fait de considérer les mesures et les erreurs sur les mesures est également naturel si l'on pense que celles-ci sont issues d'une expérience aléatoire, et donc que réitérer l'expérience ne fournira pas le même résultat exactement. On fera l'hypothèse additionnelle que $\mathbb{E}\{\Delta X | X\} = 0$, ce qui traduit le fait que les erreurs "sachant X" sont centrées en 0. Prenons ϕ une fonction régulière à travers laquelle on étudie la propagation de l'erreur, on forme alors la quantité :

$$\mathbb{E}\{\Big(\frac{f(X+\epsilon\Delta X) - f(X)}{\epsilon}\Big)^2 \Big| X\} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} f'(X)^2 \mathbb{E}\{\Delta X^2 | X\}.$$

Par conséquent, on définit $\Gamma[f(X)] = f'(X)^2\mathbb{E}\{\Delta X^2|X\}$, l'erreur quadratique infinitésimale obtenue en appliquant f. En prenant $f = id$, on voit déjà le calcul fonctionnel vérifié par les erreurs :

$$\Gamma[f(X)] = f'(X)^2\Gamma[X].$$

Cette courte étude permet de jeter les bases d'une axiomatique du calcul d'erreur et de faire un premier pas vers la définition rigoureuse d'une structure d'erreur.

1. Les quantités erronées sont un sous-ensemble des variables mesurables.
2. Si X est erronée et f régulière alors $f(X)$ est erronée.
3. L'erreur quadratique satisfait le calcul fonctionnel $\Gamma[f(X)] = f'(X)^2\Gamma[X]$.

Si l'on pense Γ comme un opérateur de mesure des erreurs, on doit alors faire le parallèle avec les axiomes qui définissent une mesure de probabilité. La propriété cruciale manquante est une propriété "limite" qui permet de définir l'erreur sur des objets "limites", de même que la sigma-additivité permet de calculer les probabilités d'ensembles limites. En rassemblant ces observations nous pouvons définir une structure d'erreur ou structure de Dirichlet.

Définition 1. *(Structure d'erreur)*

Une structure d'erreur est un quintuplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$.

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé.*
2. $\mathbb{D}$ *est un sous-espace vectoriel dense de* $L^2(\mathbb{P})$.
3. Γ *est un opérateur bilinéaire symétrique positif de* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ *dans* $L^1(\Omega)$.
4. *Si* $X = (X_1, \cdots, X_p) \in \mathbb{D}^p$ *et* $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *est Lipschitzienne de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors* $F(X) \in \mathbb{D}$. *En outre on a le calcul fonctionnel (règle de la chaîne) :*

$$\Gamma[F(X)] = \sum_i \sum_j \partial_i F(X) \partial_j F(X) \Gamma[X_i, X_j].$$

5. $\mathbb{D}$ *muni de la norme* $\|X\|_{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{\Gamma[X]\}\right)^{\frac{1}{2}}$ *est complet.*

Remarque 1. *L'opérateur carré du champ* Γ *est un opérateur bilinéaire, néanmoins afin d'alléger les notations nous noterons très souvent* $\Gamma[X] = \Gamma[X, X]$.

Et la propriété analogue à la sigma-additivité est la propriété 5 de complétude de l'espace $\mathbb{D}$. Parmi l'exemple le plus simple nous trouvons l'espace de Sobolev sur $[0,1]$:
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$,
- $\mathbb{D} = \mathcal{H}^1([0,1], dx)$,
- $\Gamma[f,g] = f'g'$.

Nous avons aussi l'exemple de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck qui est un pavé "élémentaire" de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1))$,
- $\mathbb{D} = \mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0,1))$,
- $\Gamma[f,g] = f'g'$.

Précisons que l'espace $\mathcal{H}^1([0,1], dx)$ (resp. $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0,1))$ représente la fermeture des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ pour les normes $\int f^2 dx + \int (f')^2 dx$ (resp. $\int f^2 d\mathcal{N}(0,1) + \int (f')^2 d\mathcal{N}(0,1)$).

1.2 Des applications en théorie ergodique

Si le paragraphe précédent présentait l'opérateur Γ comme une mesure de l'erreur commise, ici nous le présentons plus comme une mesure du bruit. Intuitivement, plus $\Gamma[X]$ est "grand", plus la variable X est "bruitée". Pour valider cette interprétation des choses, nous nous appuyons sur la propriété de densité de l'énergie image qui suit. Suivant les idées de Nicolas Bouleau dans [4], nous allons démontrer que si $\Gamma[X]$ est presque sûrement non nul, alors la loi de X possède une densité respectivement à la mesure de Lebesgue, en utilisant les axiomes qui définissent une structure d'erreur.

Soit A un borélien négligeable de $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. g_n une suite bornée de fonctions continues qui approchent $\mathbf{1}_A$ dans $L^1(dx + X_*(\Gamma[X]\mathbb{P}))$ et $dx + X_*(\Gamma[X]\mathbb{P})$ presque sûrement. Et posons enfin $G_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$. D'après la propriété (4) de calcul fonctionnel, on en déduit que $G_n(X) \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[G_n(X)] = (g_n(X))^2 \Gamma[X]$.

D'une part, $\mathbb{E}\{\big(\int_0^X g_n(t)dt\big)^2\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\{\big(\int_0^X \mathbf{1}_A(t)dt\big)^2\} = 0$.

D'autre part, $\mathbb{E}\{\Gamma[G_n(X) - G_p(X)]\} = \mathbb{E}\{(g_n(X) - g_p(X))^2 \Gamma[X]\} \xrightarrow[n\to\infty,\, p\to\infty]{} 0$.

En d'autres termes, $G_n(X)$ est de Cauchy dans $\mathbb{D}$ qui est complet, or $G_n(X)$ converge vers 0 dans $L(\mathbb{P})$, donc la seule limite possible dans $\mathbb{D}$ est 0. Or, $\mathbb{E}\{\Gamma[G_n(X)]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\{\mathbf{1}_A(X)\Gamma[X]\} = 0$ d'après l'observation précédente. De ce fait, on récupère que $X_*(\Gamma[X]\mathbb{P}) << dx$, qui achève la démonstration.

Cette interprétation en terme de bruit est également visible dans la version multidimensionnelle du résultat précédent. A savoir, si $(X_1, \cdots, X_p)$ sont dans le domaine $\mathbb{D}$ tels que la matrice :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma[X_1, X_1] & \cdots & \Gamma[X_1, X_p] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \Gamma[X_p, X_1] & \cdots & \Gamma[X_p, X_p] \end{pmatrix}$$

soit presque sûrement inversible, alors il est conjecturé que la loi de $(X_1, \cdots, X_p)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette conjecture, comme nous aurons l'occasion de le voir dans cette thèse, a été prouvée dans tous les cas particuliers classiques rencontrés en calcul stochastique (Espace de Poisson, Espace de Wiener, Espace de Monte-Carlo).

Maintenant, imaginons que l'on souhaite étudier un système dynamique aléatoire $X_{n+1} = F(X_n, V_{n+1})$, où la fonction est assez régulière ($\mathcal{C}^1$) et où les V_i sont indépendantes et équi-distribuées dans le domaine $\mathbb{D}$ d'une structure d'erreur. Puisque le domaine $\mathbb{D}$ est stable par F et vu que les V_i sont dans $\mathbb{D}$, on peut démontrer que X_n est dans $\mathbb{D}$. Autrement dit, la trajectoire du système dynamique est bruitée et on a un instrument de mesure de bruit : l'opérateur Γ. Il est donc naturel d'étudier la limite quand $n \to \infty$ afin de prouver que les différentes mesures invariantes du systèmes sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.
D'autre part, on sait que si μ est une mesure ergodique du système, on a le théorème ergodique de Birkhoff :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \phi(X_k^x) \xrightarrow[n\to\infty]{x-p.s} < \phi, \mu > .$$

On imagine bien que si la mesure ergodique μ est portée par un Cantor de mesure nulle, il va être extrêmement difficile de trouver une condition initiale x de convergence du théorème de Birkhoff. Il y a donc un intérêt majeur à démontrer que les mesures ergodiques μ sont absolument continues afin de s'assurer d'avoir des points de convergence pour le théorème de Birkhoff, en vue d'éventuelles applications numériques.

En outre, nous savons que les mesures ergodiques d'un système sont étrangères entre elles. Imaginons que nous puissions démontrer que les mesures ergodiques sont non seulement absolument continues mais équivalentes à la mesure de Lebesgue, alors on dispose là d'un outil puissant pour prouver qu'il n'existe qu'une seule mesure ergodique. Les systèmes dynamiques aléatoires uniquement ergodiques jouissent de propriétés de convergence très fortes comme on le verra dans cette thèse. Pour ce faire, les structures d'erreur permettent d'effectuer du calcul de Malliavin et donc de prouver des critères de régularité quantitatifs, c'est cet aspect quantitatif qui permet de prouver que des mesures sont équivalentes à la mesure de Lebesgue. Pour fixer les idées, le calcul de Malliavin permet d'effectuer des intégrations par parties et donc de démontrer des inégalités du type :

$$|\mathbb{E}\{\partial_{i_1,\cdots,i_p}\phi(X)\}| \leq C\|\phi\|_\infty.$$

Ainsi, en particularisant pour des fonctions $\phi(x_1,\cdots,x_n) = e^{i<x,\xi>}$ on obtient des estimations de la décroissance des coefficients de Fourier de la loi de X qui permettent alors d'obtenir des estimations de la régularité de la densité de loi de X. Dans cette thèse nous effectuerons cela pour obtenir une estimation de la régularité de la densité d'une mesure de probabilité stationnaire d'une chaîne de Markov.

2. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Dans ce chapitre nous présentons les propriétés générales qui facilitent l'utilisation des formes de Dirichlet, telles que les opérations algébriques produit et images. Nous expliquons par la suite comment le formalisme des structures d'erreur pose les bases d'un calcul de Malliavin souple et simple d'utilisation. Enfin, nous expliquons comment effectuer du calcul de Malliavin sur l'espace de Wiener grâce aux structures d'erreur.

2.1 *Opérations algébriques sur les structures d'erreur*

2.1.1 Opération produit

Commençons par définir le produit fini de structures d'erreur.
Soient $S_1 = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{D}_1, \Gamma_1)$ et $S_2 = (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2, \mathbb{D}_2, \Gamma_2)$ deux structures d'erreur. On peut définit canoniquement la structure d'erreur produit $S_1 \times S_2$.
On pose $S_1 \times S_2 = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ avec :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$.
- $\mathbb{D} = \big\{X(\omega_1, \omega_2) \in L^2(\mathbb{P}) \big| \omega_1 \to X \in \mathbb{D}_1,\, \omega_2 \to X \in \mathbb{D}_2,\, \mathbb{E}\{\Gamma_1[X] + \Gamma_2[X]\} < \infty\big\}$.
- $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Exemple 1. *Soit* $S = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, \mathcal{H}^1([0,1], dx), \Gamma[f] = (f')^2)$. *Alors,* $S \times S = ([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), dxdy, \mathcal{H}^1([0,1]^2), \Gamma[f,g] = \nabla f.\nabla g)$.

Exemple 2. *Soit* $S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1), \mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0,1)), \Gamma[f] = (f')^2)$. *Alors,* $S \times S = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{N}(0, I_2), \mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0, I_2)), \Gamma[f,g] = \nabla f.\nabla g)$.

Le produit de n structures d'erreur se définit alors simplement par récurrence.

La définition précédente se généralise à un produit infini de structures d'erreur, de façon analogue à un produit dénombrable d'espaces probabilisés. Soit $S_i = (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i, \mathbb{D}_i, \Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de structures d'erreur. On veut définir $S = \prod_{i=0}^{\infty} S_i$.
Comme précédemment, on définit :

– $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \prod_{i=0}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$.
– $\mathbb{D} = \left\{ X((\omega_i)_i) \in L^2(\mathbb{P}) \,\middle|\, \forall i,\, \omega_i \to X \in \mathbb{D}_i,\ \mathbb{E}\{\sum_i \Gamma_i[X]\} < \infty \right\}$.
– $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$.

2.1.2 Opération image

Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur, et $X = (X_1, \cdots, X_p) \in \mathbb{D}^p$. On souhaite définir l'image de la structure S par la variable X afin de construire une structure d'erreur sur $\mathbb{R}^p$. Pour cela on procède de façon analogue aux espaces probabilisés image. On définit $S_X = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \mathbb{P}_X, \mathbb{D}_X, \Gamma_X)$ avec :
– $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \mathbb{P}_X)$ est l'image de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par X.
– $\mathbb{D}_X = \{\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},\, \phi(X) \in \mathbb{D}\}$.
– $\forall \psi \in \mathbb{D}_X,\ \Gamma_X[\psi](t) = \mathbb{E}\{\Gamma[\psi(X)] \,|\, X = t\}$.

La cohérence de la définition précédente repose sur le fait que $\Gamma_X[\phi]$ est défini $\mathbb{P}_X$ presque partout.

2.2 Lien avec le calcul de Malliavin

Le formalisme des structures d'erreur permet très simplement d'effectuer du calcul de Malliavin. Par calcul de Malliavin, nous sous-entendons de façon imprécise, des techniques d'intégrations par parties et de calcul différentiel impliquant des variables aléatoires.

2.2.1 existence d'un générateur

Le point de départ est l'interprétation potentialiste des formes de Dirichlet. Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur. Il existe alors un unique semi-groupe symétrique à contraction P_t défini sur l'espace $L^2(\mathbb{P})$ tel que :

$$\mathbb{D} = \{X \in L^2(\mathbb{P}) \,|\, \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}\{(X - P_t[X])X\} \text{existe.}\}$$

Pour une démonstration, on pourra consulter ([21]). A ce semi-groupe de contractions, on associe A son générateur et $\mathcal{D}(A) = \{X \in L^2(\mathbb{P}) \,|\, \lim_{t \to 0} \dfrac{P_t X - X}{t} \text{existe.}\}$. Comme le semi-groupe est symétrique, on peut en déduire que A est auto-adjoint. Cet opérateur permet de réaliser des intégrations par parties. On a la formule d'intégration suivante, qui découle directement de la symétrie du semi-groupe P_t :

$$\forall U \in \mathcal{D}(A), \forall X \in \mathbb{D}, \ \mathbb{E}\{\Gamma[X,U]\} = -\mathbb{E}\{XA[U]\}.$$

Cette formule admet le raffinement suivant très utile :

$$\forall U \in \mathcal{D}(A), \forall (X,Y) \in \mathbb{D}^2, \ \mathbb{E}\{Y\Gamma[X,U]\} = -\mathbb{E}\{XYA[U]\} + \mathbb{E}\{X\Gamma[Y,U]\}.$$

2.2.2 existence d'un gradient

Si l'espace $\mathbb{D}$ est séparable, alors on peut construire un gradient associé à l'opérateur carré-du-champ Γ, c'est un résultat dû à Gabriel Mokobodzki. De façons plus précise, on peut construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et D un opérateur linéaire satisfaisant :

- $D : \mathbb{D} \to L^2(\mathbb{P}, \mathcal{H})$.
- $\forall X \in \mathbb{D}^p, \ D[F(X)] = \sum_i \partial_i F(X) D[X_i]$.
- $\Gamma[X] =< D[X], D[X] >_{\mathcal{H}}$.

Cet opérateur D dont le domaine est dense possède un opérateur adjoint δ, qui satisfait :

- $\mathrm{dom}(\delta) = \{Z \in L^2(\mathbb{P}, \mathcal{H}) \,|\, \forall U \in \mathbb{D}, |\mathbb{E}\{< Z, U >_{\mathcal{H}}\}| \leq C_Z \|U\|_2\}$.
- $\forall Z \in \mathrm{dom}(\delta), \forall (X,Y) \in \mathbb{D}^2$:

$$\mathbb{E}\{Y < D[X], Z >_{\mathcal{H}}\} = -\mathbb{E}\{XY\delta[U]\} + \mathbb{E}\{X < D[Y], Z >_{\mathcal{H}}\}.$$

La dernière formule permet d'effectuer du calcul de Malliavin.

2.3 Structure d'erreur sur l'espace de Wiener

L'objectif de cette section est de rappeler la construction de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Cette construction est fondamentale car elle permet d'appréhender des objets complexes comme les solutions d'équation différentielles stochastiques et de calculer l'opérateur carré-du-champ Γ sur ces objets. Le point de départ est la construction de Wiener du mouvement brownien. Soit h_n la base hilbertienne de Haar de $L^2([0,T], dx)$ et X_n une suite indépendante de gaussiennes centrées et réduites.

$$W_t = \sum_{k=0}^{\infty} < \mathbf{1}_[0,T], h_k >_{L^2([0,T])} X_n.$$

W_t est alors un mouvement brownien standard. De façon plus générale, on définit également :

$$\int_0^T f(s) dW_s = \sum_{k=0}^{\infty} < f, h_k >_{L^2(0,T)} X_k.$$

Si l'on pense que les gaussiennes X_k sont les applications coordonnées de la structure d'erreur produit :

$$S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1), \mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0,1)), \Gamma[f] = (f')^2),$$

alors on en déduit que $W_t \in \mathbb{D}$ et $\int_0^T f(s)dW_s \in \mathbb{D}$. On a par ailleurs :

$$\Gamma[W_t] = \sum_{k=0}^{\infty} < \mathbf{1}_{[}0,T], h_k >^2_{L^2([0,T])} = t.$$

Le détail du calcul vient de la bilinéarité de Γ, et du fait que :

$$\Gamma[X_n, X_m] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial X_n}{\partial X_j} \frac{\partial X_m}{\partial X_j} = \delta_{n,m}.$$

Mais alors pour $f = (f_1, \cdots, f_p) \in L^2([0,T])^p$, $F \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, on a $F(\int_0^T f_1(s)dW_s, \cdots, \int_0^T f_p(s)dW_s) \in \mathbb{D}$. De plus :

$$\Gamma[F(\int_0^T f_1(s)dW_s, \cdots, \int_0^T f_p(s)dW_s)] = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \partial_j F \partial_k F < f_j, f_k >_{L^2([0,T],dx)} .$$

2.4 Résultats de la thèse

L'apport scientifique de cette thèse est constitué de cinq parties distinctes.

1. Dans le chapitre 3, on généralise un résultat de Nicolas Bouleau qui traite de l'extension de certains théorèmes limites, en l'occurrence le théorème d'invariance de Donsker, à une topologie plus fine que la topologie de la convergence en loi. La topologie considérée est la topologie de la convergence en loi de Dirichlet, elle étudie en plus des lois le comportement de l'opérateur carré du champ dans le passage à la limite. Nicolas Bouleau ayant traité le cas des variables indépendantes, nous nous proposons d'étudier le cas des variables à dé-corrélation rapide, c'est à dire qui sont asymptotiquement indépendantes.

2. Le chapitre 4 a été réalisé en collaboration avec Dominique Malicet, doctorant en théorie ergodique à l'université Paris 6 sous la direction

de Raphaël Krikorian. Il s'agit d'un travail de recherche en cours qui étudie la conjecture de Bouleau-Hirsch sous un angle nouveau. Nous avons mis en évidence l'existence d'un renforcement de la propriété de densité de l'énergie image qui permet de donner des résultats quantitatifs sous les mêmes hypothèses que (EID). Cette nouvelle approche permet d'aborder avec une grande souplesse la question de la conjecture de Bouleau-Hirsch. Nous démontrons (SEID) dans le cas de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener et fournissons une nouvelle preuve de la propriété de Bouleau-Hirsch dans ce cas. La preuve est purement fonctionnelle et n'utilise pas les arguments classiques de formule de co-aire.

3. Dans le chapitre 5, nous étudions la chaîne de Markov $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ avec les variables U_i indépendantes et équi-distribuées. Nous prouvons que si les fonctions F sont assez régulières et si les variables U_i sont les applications coordonnées d'une structure d'erreur produit (ce qui "en gros" signifie que leur loi est assez "régulière"), alors sous des hypothèses de non-dégénérescence adéquates les mesures stationnaires de la chaînes sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. En outre nous construisons sur ces mesures des structures d'erreur non triviales satisfaisant la propriété (EID). L'intérêt principal de ce chapitre réside dans le fait qu'aucun critère à ce jour n'est connu pour savoir si une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ peut permettre de construire une structure d'erreur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu, \mathbb{D}, \Gamma)$, et encore moins de prédire si la structure éventuellement construite vérifie la propriété (EID) dont on rappelle qu'elle est conjecturée.

4. Dans le chapitre 6, nous étudions encore la chaîne de Markov $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ et fournissons des critères quantitatifs de régularité des densités des mesures ergodiques de la chaîne. Il s'agit en quelque sorte d'une version "quantitative" du chapitre 5. Par ailleurs, nous utilisons ces critères pour étudier la convergence à l'équilibre de la chaîne. En guise d'application nous prouvons un théorème central limite.

5. Dans le chapitre 7 nous étendons les résultats du chapitre précédent au cas des diffusions browniennes sur le tore de dimension d. Dans cette partie nous utilisons le critère (SEID) démontré au chapitre 4

pour établir des critères selon lesquels le semi-groupe de la diffusion est fortement Feller. Ces critères améliorent strictement les critère déjà existant pour établir le caractère fortement Feller en abaissant la régularité requise des coefficients ainsi que la condition de non-dégénérescence requise. Pour finir cette partie, un critère de convergence à l'équilibre est obtenu en toute généralité pour un semi-groupe fortement Feller et uniquement ergodique. A notre connaissance, ce dernier résultat est nouveau.

3. EXTENSION DU THÉORÈME DE DONSKER

3.1 Introduction

Dans [6],sous certaines hypothèses d'indépendance des erreurs, Nicolas Bouleau démontre un théorème asymptotique sur l'erreur commise par l'approximation dans le théorème de Donsker si les variables i.i.d en jeu sont elles même entachées d'erreur.Il a ainsi étendu le résultat bien connu de principe d'invariance en loi de Donsker à un cadre plus général qui est celui du calcul d'erreur par formes de Dirichlet. Le principe d'invariance de Donsker, assure que si X_i est une famille indépendante et équidistribuée de variables aléatoires alors les variables correctement renormalisées $S_t = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} X_k$ convergent en loi de processus vers un mouvement Brownien standard.
Nicolas Bouleau a ainsi généralisé ce théorème au cadre de la convergence en loi de Dirichlet, notion englobant la convergence en loi et qui est rappelée ci-dessous. L'idée principale était de remarquer que les couples $(X_n, \Gamma[X_n])$ sont indépendants et équidistribués, de même que les couples $(X_n, D[X_n])$ si X_n est un gradient rattaché à Γ. En appliquant alors le théorème de Donsker classique à ces couples, il obtient la généralisation souhaitée. L'extension du théorème central limite aux formes de Dirichlet a été également étudiée par Cristophe Chorro qui étudie des variables aléatoires à valeurs dans des espaces de Banach, voir [16] ou [17]. Notons que d'autres théorèmes asymptotiques probabilistes peuvent être étudiés du point de vue des formes de Dirichlet, on pourra consulter [15] où Cristophe Chorro étudie la convergence de certaines intégrales stochastique pour la topologie de la convergence en loi de Dirichlet.

Le cadre de notre étude sera celui de la chaîne de Markov $Z_{N+1} = \Psi(Z_N, V_{N+1})$ avec indépendance des V_n. Sous certaines hypothèses sur la fonction Ψ il existe un théorème de Donsker, aussi dans ce cadre là nous généralisons les résultats de [6]. L'hypothèse majeure sur la fonction Ψ est l'hypothèse de contraction $\sup_{x,y} |\partial_1 \Psi(x, y)| < 1$. Si cette hypothèse entraîne un théorème de Donsker pour Z_n, cela n'est pas vrai pour $(Z_n, D[Z_n])$. Nous devons alors procéder différemment.
On peut interpréter la chaîne de Markov Z_n comme une "perturbation mar-

kovienne" du cadre indépendant classique. Même si le principe d'invariance de Donsker est déjà connu sous ces hypothèses, nous fournissons une preuve en appendice, qui est relativement technique mais directement issue de la preuve dans le cadre indépendant classique.
La principale difficulté du présent travail sera la démonstration d'un théorème ergodique concernant la dé-corrélation rapide des erreurs et qui s'obtient grâce à une légère amélioration du théorème ergodique classique de Birkhoff.
La notion suivante définit la notion de convergence adaptée aux structures d'erreur qui est au coeur de ce travail.

3.2 Convergence en loi de Dirichlet

Soit une structure d'erreur $S = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$, et soit $\mathcal{E}$ la forme de Dirichlet qui lui est associée. Soit E un espace vectoriel normé muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ et soit X_n une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{D}$ à valeurs dans E.

Définition 2. *On dit que X_n converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur sur $(E, \mathcal{B}(E))$ soit $\Sigma = (E, \mathcal{B}(E), m, \mathbb{D}_0, \Gamma_0)$ telle que :*

1. $X_{n*}\mathbb{P} \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} m$
2. *Si $F \in \mathcal{C}^1 \cap Lip(E, \mathbb{R})$ alors $F(X_n) \in \mathbb{D}$ pour tout n et $\mathcal{E}(F(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{E}_0(F)$ quand $n \to \infty$ et où $\mathcal{E}_0$ est la forme associée à Σ.*

Exemple 3. *Extension du théorème central limite à la convergence en loi de Dirichlet.*

Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)^{\mathbb{N}}$ une structure d'erreur produit infini. Supposons que les X_n sont les applications coordonnées de cette structure. En particulier, ce sont les applications coordonnées d'un produit d'espaces probabilisés donc elles sont indépendantes, de plus comme les espaces sont identiques elles sont équi-distribuées.

Le théorème central limite assure alors que $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en loi vers une gaussienne centrée et réduite. (En supposant que $\mathbb{E}\{X_k\} = 0$ et $\mathbb{E}\{X_k^2\} = 1$).

Prenons F lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\Gamma[F(S_n)] = (F'(S_n))^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma[X_k]$.

Or en appliquant cette fois-ci la loi des grands nombres, on sait que que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Gamma[X_k]$ *converge dans* L^1 *vers* $\mathbb{E}\{\Gamma[X_1]\}$. *Donc, en vue de vérifier le point 2 de la définition, on a démontré que*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{\Gamma[F(S_n)]\} = \mathbb{E}\{\Gamma[X_1]\}\int_{\mathbb{R}}(F'(x))^2 e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{E}[F].$$

Où l'on a posé $\mathcal{E}$ *la forme de Dirichlet de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck.*

Exemple 4. *Impossibilité d'extension d'un théorème d'équi-répartition à la convergence en loi de Dirichlet.*

Nous avons vu avec le théorème central limite un exemple d'extension à la convergence en Loi de Dirichlet. Ici nous présentons un exemple qui ne fonctionne pas. Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ *et* X *dans* $\mathbb{D}$ *telle que p.s,* $\Gamma[X] > 0$. *D'après la propriété de densité de l'énergie image,* X *a une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De ce fait, la variable* e^{inX} *à valeurs dans* $\mathbb{T}$ *converge en loi vers la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{T}$. *Pourtant,* $\Gamma[e^{inX}] = \Gamma[cos(nX)] + \Gamma[sin(nX)] = n^2\Gamma[X]$ *n'admet pas de limite en espérance. Le problème vient essentiellement du fait que la multiplication par* n *accroît l'erreur.*

L'extension d'un théorème de convergence en loi à la notion de convergence en loi de Dirichlet possède un intérêt en soi. Toutefois de nombreuses questions théoriques se posent quant à cette convergence, aucune d'entre elles n'ayant été résolue à ce jour. Ces questions sous-tendent le fait que la notion de convergence en loi de Dirichlet doit permettre de préciser les théorèmes asymptotiques.

Question 1. *Si* X_n *converge en loi de Dirichlet vers la mesure* m *d'une structure de probabilité* $(E, \mathcal{B}(E), m, \mathbb{D}, \Gamma)$. *En particulier, pour toute fonction continue* ϕ, $\lim_n \mathbb{E}\{\phi(X_n)\} =< \phi, m >$. *Si l'on suppose que* $\Gamma \neq 0$, *c'est à dire que la structure limite n'est pas triviale, peut-on augmenter la classe des fonctions telles que la convergence précédente a lieu. A-t-on pour tout application* g *borélienne bornée,* $\lim_n \mathbb{E}\{g(X_n)\} =< g, m >$ *?*

Question 2. *On sait que la convergence en loi des couples* $(X_n, D[X_n])$ *entraîne la convergence en loi de Dirichlet. Sous cette hypothèse supplémentaire, peut-on accroître la classe des fonctions telles que la convergence* $\lim_n \mathbb{E}\{\phi(X_n)\} =< \phi, m >$ *a lieu ? Peut-on donner une vitesse de convergence, sur des fonctions plus régulières ?*

Cette question est extraite de la thèse de Cristophe Chorro, nous n'avons pas su y répondre.

Question 3. *La convergence en loi de Dirichlet est elle équivalente à la convergence en loi des couples* $(X_n, D[X_n])$ *?*

Même dans le cas très particulier de l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ cette question n'a rien d'évident. Posons là en ces termes. Soit f_n une suite de fonctions dans $\mathcal{H}^1([0,1])$ convergente en loi de Dirichlet vers f. C'est à dire,

- $\lim_n \int_{[0,1]} \phi(f_n)\mathrm{d}x = \int \phi(f)\mathrm{d}x$,
- $\lim_n \int_{[0,1]} \phi(f_n)({f_n}')^2\mathrm{d}x = \int \phi(f)(f')^2\mathrm{d}x$.

A-t-on, $\lim_n \int_{[0,1]} \phi(f_n, f_n')\mathrm{d}x = \int \phi(f, f')\mathrm{d}x$? Si cela s'avérait être vrai, cela tiendrait au fait que les fonctions f_n et f_n' sont très liées, en vertu du théorème fondamental du calcul intégral.

3.3 Extension du théorème de Donsker

Nous supposons dans cette section que les variables aléatoires V_k sont erronées, en conservant les hypothèses d'équi-distribution et d'indépendance pour les V_k et leurs erreurs. Cela signifie que les V_n sont les applications coordonnées d'une structure d'erreur produit :

$$S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m, \mathbb{D}_0, \Gamma_0)^{\mathbb{N}^\star}$$

Nous définissons alors comme précédemment :

$$Z_{n+1} = \Psi(Z_n, V_{n+1}) \ , \ Z_0 = z$$

On fera sur Ψ les hypothèses suivantes :

1. $\Psi(x, y)$ est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$,

2. p.s, $\frac{|\Psi(x,V)-\Psi(y,V)|}{|x-y|} < \kappa < 1$.

On définit, pour des paramètres de renormalisation σ et γ qui seront choisis ultérieurement, le processus stochastique :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} \sum_{k=1}^{[Nt]} (Z_k - \gamma) + \frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} (Nt - [Nt])(Z_{[Nt]+1} - \gamma).$$

Dans l'appendice, pour des valeurs convenables de σ et γ, nous redémontrons que ce processus stochastique converge en loi de processus vers un mouvement Brownien standard. Cela est rendu possible par l'hypothèse de contraction effectuée sur la fonction Ψ, elle permet de prouver que la chaîne de Markov converge en loi exponentiellement rapidement sur l'espace des fonctions lipschitziennes.

Théorème 1. *Les variables X_n convergent en loi de Dirichlet vers la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener* $(W, \mathcal{W}, m, \Gamma_0, \mathbb{D}_0)$

Dans [6], la preuve du théorème repose sur une amélioration strictement probabiliste du théorème de Donsker qui étend le théorème aux fonctions à croissance quadratique. Ici cette approche est rendue délicate par le fait que la chaîne de Markov couplée $(Z_n, \Gamma[Z_n])$ ne vérifie pas à priori un principe d'invariance de Donsker, alors que dans le cas i.i.d, les couples $(V_n, \Gamma[V_n])$ sont également i.i.d et des théorème limites en loi restent valides.
Pour contourner cette difficulté nous aurons besoin d'une amélioration strictement probabiliste du théorème ergodique de Birkhoff, qui permette d'avoir de l'uniformité dans la convergence. C'est l'objet du lemme suivant qui est un renforcement du théorème de Birkhoff classique.

Lemme 1. *Soit $T : K \longrightarrow K$ une application continue, K un espace métrique et μ ergodique par rapport à T.*
Soit enfin $\phi \in L^1(\mu)$ telle que $\int \phi d\mu = 0$. On a le théorème de Birkhoff "renforcé" :

$$\frac{1}{N} \max_{k \le N} |\sum_{p=1}^{k} \phi \circ T^p(x)| \xrightarrow{ps, L^1} 0.$$

Démonstration.

Traitons d'abord le cas de la convergence presque sûre, soit τ_n le premier instant où $\max_{k \le N} |\sum_{p=1}^{k} \phi \circ T^p(x)|$ est réalisé.
Fixons $\epsilon > 0$ et N_0 assez grand tel que $n \ge N_0$ entraîne $\frac{1}{N} |\sum_{k=1}^{N} \phi \circ T^k(x)| \le \epsilon$.

En séparant les cas $\tau_n \geq N_0$ et $\tau_n \leq N_0$ on récupère :

$$\frac{1}{N}\max_{k\leq N}|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p(x)| \leq \frac{1}{N}\max_{k\leq N_0}|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p(x)| + \epsilon.$$

Ainsi :

$$\forall\epsilon > 0 \quad , \ \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\max_{k\leq N}|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p(x)| \leq \epsilon.$$

La preuve de la convergence dans L^1 est un peu plus délicate :

Fixons un entier $q > 0$, effectuons la division euclidienne de k par q :

$$k = qm_k + r_k$$

. Ainsi par inégalité triangulaire on récupère :

$$|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p| \leq \sum_{j=1}^{m_k}|\sum_{i=(j-1)q+1}^{jq}\phi\circ T^i| + |\sum_{i=m_kq+1}^{m_kq+r_k}\phi\circ T^i|.$$

ce qui implique :

$$|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p| \leq \sum_{j=1}^{m_N}|\sum_{i=(j-1)q+1}^{jq}\phi\circ T^i| + q\max_{k\leq N}|\phi\circ T^k|.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_\mu\{\frac{1}{N}\max_{k\leq N}|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p|\} \leq \frac{m_N}{N}\mathbb{E}_\mu\{\sum_{k=1}^{q}\phi\circ T^k\} + \frac{q}{N}\mathbb{E}_\mu\{\max_{k\leq N}|\phi\circ T^k|\}.$$

$$\max_{k\leq N}|\phi\circ T^k| \leq M + \max_{k\leq N}|\phi\circ T^k\mathbf{1}_{[-M,M]^c}(\phi\circ T^k)| \leq M + \sum_{k=1}^{N}|\phi\circ T^k\mathbf{1}_{[-M,M]^c}(\phi\circ T^k)|.$$

Donc

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{q}{N}\mathbb{E}_\mu\{\max_{k\leq N}|\phi\circ T^k|\} \leq q\int|\phi(x)|\mathbf{1}_{[-M,M]^c}(\phi(x))d\mu_x \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Par conséquent,

$$\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_\mu\{\frac{1}{N}\max_{k\leq N}|\sum_{p=1}^{k}\phi\circ T^p|\} \leq \frac{1}{q}\mathbb{E}_\mu\{|\sum_{k=1}^{q}\phi\circ T^k|\}.$$

Ceci achève la démonstration en utilisant le théorème de Birkhoff dans L^1 en faisant $q\to\infty$ dans l'inégalité ci-dessus. q.e.d

Avant de commencer la preuve du théorème 1, nous aurons besoin de quelques lemmes préparatifs.

Lemme 2. *Soit $F \in \mathcal{C}^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$, où W est muni de la norme uniforme, alors*

$$F(x+h) = F(x) + < F'(x), h > + ||h|| \epsilon_x(h)$$

où $\epsilon_x(h)$ est bornée en x et h et $\lim_{h \to 0} \epsilon_x(h) = 0$ dans W, et où $x \to F'(x)$ est continue bornée de W dans l'espace de Banach des mesures de Radon sur $[0, 1]$.

Démonstration. On a par hypothèse sur F que $| < F'(x), v > | \leq K ||v||$ avec K constante de Lipschitz de F. q.e.d

Lemme 3. *Soit $F \in \mathcal{C}^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$ alors $F(X_n) \in \mathbb{D}_0$ et*

$$\Gamma_0[F(X_n)] = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \Gamma[X_n(t), X_n(s)] F'(X_n)(dt) F'(X_n)(ds)$$

Pour la preuve du lemme ci-dessus,il faut procéder par approximation par des fonctions F qui ne dépendent que d'un nombre fini de $X_n(t_i)$ et passer à la limite. Pour plus de détails : voir [6].

Preuve de l'extension du théorème de Donsker(1) :

Introduisons quelques formules préliminaires :

Soient $p < q$, par utilisation de la règle de la chaîne et du calcul fonctionnel dans les structures d'erreur on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma[Z_p, Z_q] &= (\partial_1 \Psi(Z_p, V_{p+1})) \cdots (\partial_1 \Psi(Z_{q-1}, V_q)) \Gamma[Z_p, Z_p], \\
\Gamma[Z_1, Z_1] &= (\partial_2 \Psi(z, V_1))^2 \Gamma[V_1], \\
\Gamma[Z_p, Z_p] &= (\partial_1 \Psi(Z_{p-1}, V_p))^2 \Gamma[Z_{p-1}] + (\partial_2 \Psi(Z_{p-1}, V_p))^2 \Gamma[V_p], \\
\frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k=1}^{p} \Gamma[Z_k, Z_q] &= \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k=1}^{p} \Gamma[Z_k, Z_k] (\partial_1 \Psi(Z_k, V_{k+1})) \cdots (\partial_1 \Psi(Z_{q-1}, V_q)).
\end{aligned}$$

En majorant systématiquement $|\partial_1 \Psi(x, V_k)|$ par κ,il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{N\sigma^2} | \sum_{k=1}^{p} \Gamma[Z_k, Z_q]| \leq \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k=1}^{p} \Gamma[Z_k, Z_k] \kappa^{q-k} \leq \frac{C}{N} \max_{k \leq N} \Gamma[V_k].$$

Mais, comme la suite $\Gamma[V_k]$ est i.i.d, et dans $L^1(\mathbb{P})$, on sait que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\max_{k\le N} \Gamma[V_k]}{N} = 0.$$

Il en découle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\max_{(s,t)\in[0,1]^2} |\Gamma[X_n(t), \frac{Z_{[ns]+1} - \gamma]|}{\sqrt{n\sigma^2}}\} = 0.$$

Simplifions encore le problème en considérant si $t < s$:

$$\frac{1}{N\sigma^2} \sum_{q\le[nt]} \sum_{[nt]+1\le p\le[ns]} |\Gamma[Z_q, Z_p]| \le \max_{(s,t)\in[0,1]^2} \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{q\le[nt]} \sum_{[nt]\le p\le[ns]} \Gamma[Z_q, Z_q]\kappa^{p-q}$$
$$\le \frac{C}{N} \max_{k\le N} \Gamma[V_k] \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0.$$

Résumons les résultats établis jusque là :

$$\max_{(s,t)\in[0,1]^2} |\Gamma[X_n(t), X_n(s)] - \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k\le[ns\wedge t]} \sum_{l\le[ns\wedge t]} \Gamma[Z_l, Z_k]| \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0,$$
$$\frac{1}{N} \sum_{q\le r} \sum_{p\le r} \Gamma[Z_q, Z_p] = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{r} \Gamma[Z_q, Z_q] + \frac{2}{N} \sum_{p<q\le r} \Gamma[Z_p, Z_q].$$

Nous allons traiter le premier terme de la somme :$\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{r} \Gamma[Z_q, Z_q]$, le second terme de la somme ci-dessus se traitant de la même façon.
Notons pour cela :

$$\begin{aligned}
\Delta_k^l &= \Gamma[V_k]\partial_2\Psi(Z_{k-1}, V_k)^2 \partial_1\Psi(Z_k, V_{k+1})^2 \cdots \partial_1\Psi(Z_{l-1}, V_l)^2, \\
\Delta_k^k &= \Gamma[V_k]\partial_2\Psi(Z_{k-1}, V_k)^2,
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\frac{1}{N} \sum_{q=1}^{r} \Gamma[Z_q, Z_q] = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{r} (\Delta_q^q + \Delta_{q-1}^q + \cdots + \Delta_1^q).$$

Le point crucial de la démonstration est l'utilisation du théorème ergodique suivant :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Delta_k^{k+r}\xrightarrow[N\to\infty]{L^1,ps}\alpha_r.$$

Car la chaîne de Markov $(Z_{k-1},V_{k-1},\Gamma[V_{k-1}],Z_k,V_k,\Gamma[V_k],...,Z_{k+r},V_{k+r},\Gamma[V_{k+r}])$ est ergodique, car en utilisant le fait que Z_k admet une unique mesure invariante et que les couples $(\Gamma[V_k],V_k)$ sont i.i.d on peut montrer que la chaîne de Markov ci-dessus admet une unique mesure invariante et que celle ci doit être nécessairement ergodique.

En utilisant le lemme 1, on récupère

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\{\max_{P\leq N}|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P}(\Delta_k^{k+r}-\alpha_r)|\}=0.$$

La suite de la démonstration s'enchaîne naturellement, fixons un entier a :

$$\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\Delta_k^q=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-l}\Delta_k^{k+l}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{a}\sum_{k=1}^{r-l}\Delta_k^{k+l}+\frac{1}{N}\sum_{r\geq l>a}\sum_{k=1}^{r-l}\Delta_k^{k+l}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\Delta_k^q=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{a}\sum_{k=1}^{r-l}(\Delta_k^{k+l}-\alpha_l)+\frac{1}{N}\sum_{r\geq l>a}\sum_{k=1}^{r-l}\Delta_k^{k+l}+\frac{r-l}{N}(\alpha_0+..+\alpha_l).$$

Remarquons par ailleurs que :

$$\mathbb{E}\{\max_{r\leq N}|\frac{1}{N}\sum_{r\geq l>a}\sum_{k=1}^{r-l}\Delta_k^{k+l}|\}\leq C\kappa^a.$$

Ainsi en appliquant les résultats ci-dessus :

$$\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}\{\max_{t\in[0,1]}|\frac{1}{N\sigma^2}\sum_{k\leq[ns\wedge t]}\Gamma[X_k,X_k]-\frac{[ns\wedge t]+1}{N\sigma^2}(\alpha_0+..+\alpha_a)|\}\leq C\kappa^a.$$

Par ailleurs, si on considère les termes de la forme $\delta_{(k,l,m)}=\Delta_k^l\partial_1(Z_l,V_{l+1})..\partial_1(Z_{m-1},V_m)$, on a le théorème ergodique :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{(k,k+r_1,k+r_2)}\xrightarrow[n\to\infty]{L^1}\beta_{(r_1,r_2)}.$$

Par le même raisonnement que ci dessus on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\max_{t\in[0,1]} |\frac{2}{N\sigma^2} \sum_{k<l\leq[ns\wedge t]} \Gamma[X_k, X_l] - 2\frac{[ns\wedge t]+1}{N\sigma^2} \sum_{r_1\leq a} \sum_{r_2\leq a} \beta_{(r_1,r_2)}|\} \leq C\kappa^a.$$

La démonstration peut maintenant se terminer de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} |\frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k,l\leq[ns\wedge t]} \Gamma[X_k, X_l] - \\
&\frac{[ns\wedge t]+1}{N\sigma^2} (\sum_{l\leq a} \alpha_l + 2\sum_{r_1\leq a} \sum_{r_2\leq a} \beta_{(r_1,r_2)})||F'(X_n)(dt)||F'(X_n)(ds)|\} \\
&\leq K^2 \mathbb{E}\{\max_{t\in[0,1]} |\frac{2}{N\sigma^2} \sum_{k<l\leq[ns\wedge t]} \Gamma[X_k, X_l] - 2\frac{[ns\wedge t]+1}{N\sigma^2} \sum_{r_1,r_2\leq a} \beta_{(r_1,r_2)}|\} \\
&+K^2 \mathbb{E}\{\max_{t\in[0,1]} |\frac{1}{N\sigma^2} \sum_{k\leq[ns\wedge t]} \Gamma[X_k] - \frac{[ns\wedge t]+1}{N\sigma^2} \sum_{l\leq a} \alpha_l|\}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\int_{[0,1]^2} \Gamma[X_n(t), X_n(s)]F'(X_n)(dt)F'(X_n)(ds)\} \\
&= c \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\int_{[0,1]^2} s\wedge t F'(X_n)(dt)F'(X_n)(ds)\} \\
&= c\,\mathbb{E}\{< s\wedge t, F'(B)(ds)F'(B)(dt) >\}.
\end{aligned}$$

Où on a utilisé dans la dernière limite ci dessus le principe d'invariance de Donsker sur la chaîne Z_n et qui est démontré dans l'appendice suivant.

$$c = \frac{1}{\sigma^2}(\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l + 2\sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \beta_{(r_1,r_2)}).$$

Remarque 2. *La série ci-dessus est convergente, car du fait de l'hypothèse de contraction $\|\partial_1\Psi\|_\infty\|_\infty \leq 1$, on obtient $|\alpha_r| \leq C\kappa^r$ ce qui assure la croissance sous-géométrique et la convergence des séries.*

3.4 Appendice

Considérons V_k une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{R}$ admettant des moments d'ordre 2, et Ψ une application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ globalement lipschitzienne. On forme alors comme précédemment, la chaîne de Markov :

$$Z_{n+1} = \Psi(Z_n, V_{n+1}) \ , \ Z_0 = z.$$

Nous imposons sur Ψ les conditions suivantes :

- $\exists M \geq 0$ *tq p.s* $\sup_{x \in [-M,M]} |\Psi(x, V_1)| \leq M$,
- p.s : $x \to \Psi(x, V_1)$ est s-lipschitzienne sur $[-M, M]$ et $0 \leq \mathbb{E}(s) < 1$.

La suite propose de démontrer le théorème central limite qui a été utilisé ci-dessus. Ce théorème est déjà connu et on pourra consulter [26] pour une preuve détaillée. Toutefois, nous avons souhaité donner une preuve plus personnelle dudit résultat. Cette preuve ne développe pas d'idée nouvelle et reste assez technique, mais elle retranscrit les points clefs du raisonnement par perturbation spectrale.

3.4.1 Théorème central limite

Considérons alors l'espace de Banach $E = \mathcal{L}ip([-M, M], \mathbb{R})$,ensemble des fonctions lipschitziennes de $[-M, M]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $N(\phi) = [\phi] + \|\phi\|_\infty$.

Avec $[\phi] = \sup_{x,y \in [-M,M]} \dfrac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}$ et $\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in [-M,M]} |\phi(x)|$.
Posons

$$T = \begin{cases} E \longrightarrow E \\ T(\phi)(z) = \mathbb{E}(\phi(\Psi(z, V_1))). \end{cases}$$

Lemme 4. *Pour tout ϕ dans E et tout $x \in [-M, M]$, il existe un réel $\mathcal{L}_\phi$ ne dépendant pas de x, tel que*

$$|T^n\phi(x) - \mathcal{L}_\phi| \leq N(\phi)(M + N(\phi))\mathbb{E}(s)^n$$

<u>preuve :</u>

Observons que $|T\phi(x) - T\phi(y)| \leq \mathbb{E}\{|\phi(\Psi(x, V)) - \phi(\Psi(y, V))|\} \leq [\phi]\mathbb{E}(s)|x - y|$ Il en découle que

$$|T^n\phi(x) - T^{n+p}\phi(x)| \leq [\phi]\mathbb{E}(s)^n|x - T^p\phi(x)|$$

En remarquant que $\|T\phi\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$, on obtient :

$$|T^n\phi(x) - T^{n+p}\phi(x)| \leq (M + \|\phi\|_\infty)[\phi]\mathbb{E}(s)^n$$

On en déduit l'existence (car $\mathbb{E}(s) < 1$) de $\mathcal{L}_{\phi,x}$ tel que $|T^n\phi(x) - \mathcal{L}_{\phi,x}| \leq [\phi](M + \|\phi\|_\infty)\mathbb{E}(s)^n$.
En outre $|T^n\phi(x) - T^n\phi(y)| \leq [\phi]\mathbb{E}(s)^n$ donc $\mathcal{L}_{\phi,x} = \mathcal{L}_{\phi,y}$.

Lemme 5. *T^n converge en norme d'opérateur associée à la norme N sur E.*

Preuve :

De la preuve ci-dessus on tire :

$$[T^n\phi - T^{n+p}\phi] \leq [\phi](\mathbb{E}(s)^n + \mathbb{E}(s)^{n+p})$$

$$\sup_{x\in[-M,M]} |T^n\phi(x) - T^{n+p}\phi(x)| \leq N(\phi)(M + N(\phi))\mathbb{E}(s)^n$$

Mais par définition : $\|T^n - T^{n+p}\| = \sup_{N(\phi)\leq 1} N(T^n\phi - T^{n+p}\phi)$

Ainsi on a bien le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_p \|T^n - T^{n+p}\| = 0$$

L'opérateur $\phi \longrightarrow \mathcal{L}_\phi$ s'étend par densité en une forme linéaire sur les fonctions continues sur $[-M, M]$ et peut donc en vertu du théorème de Riesz être associé à une mesure μ : $\mathcal{L}_\phi =< \phi, \mu >$.

Lemme 6. *1 est une valeur propre simple de T, le reste des valeurs spectrales est dans un $D(0,\rho)$ avec $0 \leq \rho < 1$. T vérifie donc un trou spectral.*

Preuve :

On a

$$N(T^n\phi - \mathcal{L}\phi) \leq N(\phi)(M + N(\phi) + 1)\mathbb{E}(s)^n$$

d'où

$$|T^n - \mathcal{L}| \leq (M + 1)\mathbb{E}(s)^n$$

Et donc par la formule du rayon spectral comme $T\mathcal{L} = \mathcal{L}T = \mathcal{L}$ on tire que

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - L)^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Pour démontrer le théorème central limite, nous utiliserons les techniques classiques de perturbation d'opérateurs linéaires et de perturbation des valeurs propres isolées. Aussi définissons, la transformée de Fourier de l'opérateur T :

$$\text{T=} \begin{cases} E \longrightarrow E \\ T_\xi(\phi)(z) = \mathbb{E}\{e^{i\xi(\Psi(z,V_1)-\gamma)}\phi(\Psi(z, V_1))\} \end{cases}$$

avec $\gamma = \int \mathbb{E}\{\Psi(z, V_1)\}d\mu$.

La soustraction de γ ci-dessus est nécessaire pour recentrer les variables Z_k par rapport à l'unique mesure stationnaire de la chaîne de Markov $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans le cas où $\Psi(x, y) = y$ cela aurait donné $V_k - \mathbb{E}(V_k)$ qui devient une suite centrée de variables i.i.d, condition nécessaire pour obtenir un théorème central limite.

Lemme 7. *L'application $\xi \longrightarrow T_\xi$ est holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{L}_b(E)$(espace des opérateurs linéaires bornés)*

Preuve :
L'application $\xi \longrightarrow T_\xi\phi$ est clairement holomorphe,cela entraîne l'holomorphie de l'opérateur par un théorème classique. Voir [29]

Lemme 8.

$$T_\xi^n\phi(z) = \mathbb{E}\{e^{i\xi(Z_1^z+Z_2^z+...+Z_n^z-n\gamma)}\phi(Z_n^z)\}$$

(L'exposant ^{z} signifie la dépendance de la chaîne de Markov Z_n par rapport à la condition initiale z.)

Démonstration. La preuve se fait naturellement par récurrence. Le cas $n = 1$ vient de la définition de T_ξ.
En outre, si la propriété est vraie au rang n alors $T_\xi^{n+1}\phi(z) = \mathbb{E}\{e^{i\xi(Z_1^z-\gamma)}T_\xi^n\phi(Z_1^z)\}$
Mais $T_\xi^n\phi(Z_1^z) = \hat{\mathbb{E}}\{e^{i\xi(Z_1^{\sharp,Z_1^z}+...+Z_n^{\sharp,Z_1^z}-n\gamma)}\phi(Z_n^{\sharp,Z_1^z})\}$
Le dièse signifie que l'on intègre à partir d'un tirage $(V_1^\sharp, ..., V_n^\sharp)$ indépendant de V_1. Or si ce tirage est $(V_2, ..., V_{n+1})$ qui convient alors on obtient :

$$T_\xi^n\phi(Z_1^z) = \mathbb{E}_{(V_2,..,V_{n+1})}\{e^{i\xi(Z_2^z+...+Z_{n+1}^z-n\gamma)}\phi(Z_{n+1}^z)\}$$

En réinjectant :

$$\begin{aligned} T_\xi^{n+1}\phi(z) &= \mathbb{E}_{V_1}\{e^{i\xi(Z_1^z-\gamma)}\mathbb{E}_{(V_2,..,V_{n+1})}\{e^{i\xi(Z_2^z+...+Z_{n+1}^z-n\gamma)}\phi(Z_{n+1}^z)\}\} \\ &= \mathbb{E}\{e^{i\xi(Z_1^z+Z_2^z+...+Z_{n+1}^z-((n+1)\gamma)}\phi(Z_{n+1}^z)\}. \end{aligned}$$

q.e.d

Théorème 2. *Pour tout $z \in [-M, M]$, la suite de v.a $\frac{1}{\sqrt{N}}(Z_1^z + ... + Z_n^z - n\gamma)$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance*

$$\sigma^2 = \int \{\mathbb{E}\{(Z_1^z - \gamma)^2\} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{E}\{(Z_1^z - \gamma)(Z_k^z - \gamma)\}\}d\mu_z.$$

Preuve :

Regardons l'opérateur T_ξ, d'après un résultat de Kato (voir [29]),si ξ est assez petit, l'opérateur T_ξ possède une valeur propre isolée $\lambda(\xi)$ associée au vecteur propre $P_\xi\mathbf{1}$. On a noté P_ξ le projecteur spectral associé à la valeur propre $\lambda(\xi)$ et $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.
Le reste du spectre étant contenu dans un disque de rayon strictement plus petit que 1, de sorte que le trou spectral soit encore vérifié pour T_ξ, avec ξ bien sûr assez petit.
En outre, la valeur propre et le vecteur propre sont tous deux des fonctions holomorphes de ξ.
Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} T^N_{\frac{\xi}{\sqrt{N}}}\mathbf{1}(z) = e^{-\xi^2\sigma^2}$$

Mais d'après les observations ci dessus :

$$\lim_{n\to\infty} T^N_{\frac{\xi}{\sqrt{N}}}\mathbf{1}(z) = \lim_{N\to\infty} \lambda(\frac{\xi}{\sqrt{N}})^N P_{\frac{\xi}{\sqrt{N}}}\mathbf{1}(z)$$

Or $\lim_{N\to\infty} P_{\frac{\xi}{\sqrt{N}}}\mathbf{1}(z) = P_0\mathbf{1}(z) = 1$
Mais $\lambda(\xi) = 1 + \alpha\xi + \beta\xi^2 + O(\xi^3)$,il suffit donc d'évaluer les coefficients α et β pour pouvoir conclure.

$$\begin{aligned} T_\xi = & \quad T + \xi T_1 + O(\xi^2) \\ P_\xi = & \quad P + \xi P_1 + O(\xi^2) \\ \lambda(\xi) = & \quad 1 + \xi\alpha + O(\xi^2) \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient d'ordre 1 dans la relation $T_\xi P_\xi = \lambda_\xi P_\xi$ on récupère :

$$\alpha + P_1\mathbf{1}(z) = TP_1\mathbf{1}(z) + T_1P\mathbf{1}(z)$$

Ce qui donne après intégration de la relation par μ :

$$\alpha =< T_1\mathbf{1}, \mu >= i\int \mathbb{E}\{(\Psi(z,V) - \gamma)\}d\mu_z = 0$$

Or $\lim_{N\to\infty} \lambda(\frac{\xi}{\sqrt{N}})^N = \lim_{N\to\infty}(1 + \beta\frac{\xi^2}{N})^N = e^{\beta\xi^2}$
Mais en identifiant dans la formule du lemme 5 devant le coefficient d'ordre 2 on a :

$$\beta = \quad -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int \mathbb{E}\{(Z_1 + ... + Z_n - n\gamma)^2\}d\mu = \quad -\sigma^2$$

3.4.2 invariance de Donsker

Définissons la suite de fonctions continues sur $[0,1]$:

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} \sum_{k=1}^{[Nt]} (Z_k - \gamma) + \frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} (Nt - [Nt])(Z_{[Nt]+1} - \gamma)$$

Théorème 3. *La suite de fonctions X_n converge étroitement vers le mouvement brownien dans l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$.

<u>Preuve :</u>

La preuve comporte deux étapes essentielles, il faut montrer que la loi de X_n est tendue dans $\mathcal{C}([0,1])$ puis que les lois marginales convergent vers les lois marginales du mouvement brownien.
<u>étape 1 :</u>
Soient $t_1 < t_2 < .. < t_p$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{e^{i\alpha_1 X_n(t_1)+..+i\alpha_p X_n(t_p)}\} = \mathbb{E}\{e^{i\alpha_1 B(t_1)+..+i\alpha_p B(t_p)}\}$$

Mais en récrivant en termes d'opérateurs :

$$\mathbb{E}\{e^{i\alpha_1 X_n(t_1)+..+i\alpha_p X_n(t_p)}\} = T^{[nt_1]}_{\frac{\alpha_1+..+\alpha_p}{\sqrt{n\sigma^2}}} ... T^{[nt_{p-1}]-[nt_{p-2}]}_{\frac{\alpha_{p-1}+\alpha_p}{\sqrt{n}\sigma^2}} T^{[nt_p]-[n_{t_{p-1}}]}_{\frac{\alpha_p}{\sqrt{n\sigma^2}}} \mathbf{1}(z)$$

Soit en utilisant à nouveau le développement limité de la valeur propre $\lambda(\xi)$ de T :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{e^{i\alpha_1 X_n(t_1)+..+i\alpha_p X_n(t_p)}\} = e^{-t_1(\alpha_1+..+\alpha_p)^2-(t_2-t_1)(\alpha_2+...+\alpha_p)^2-...-(t_p-t_{p-1})\alpha_p^2}$$

D'un autre coté on peut écrire :

$$\alpha_1 B(t_1)+...+\alpha_p B(t_p) = (\alpha_1+...+\alpha_p)B(t_1)+(\alpha_2+...+\alpha_p)(B(t_2)-B(t_1))+...+\alpha_p(B(t_p)-B(t_{p-1}))$$

En combinant les deux résultats ci-dessus, et en utilisant le théorème de Levy de caractérisation des lois par leurs transformées de Fourier on obtient bien le résultat annoncé.

<u>étape 2 :</u>

Par définition, pour montrer que la loi de X_n est tendue, il suffit de prouver que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ de $\mathcal{C}([0,1])$ tel que $\sup_n \mathbb{P}_n(K) \geq 1-\epsilon$.
Notons $\omega(x,\delta) = \sup_{|t_1,t_2|\leq\delta} |x(t_1)-x(t_2)|$, le module de continuité d'une fonction x.
Nous avons le théorème bien connu d'Arzela-Ascoli qui caractérise les parties compactes de $\mathcal{C}([0,1])$.

Théorème 4. *Une partie K de $\mathcal{C}([0,1])$ est d'adhérence compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\exists t_0 \in [0,1]$ *tel que* $\sup_{f\in K} |f(t_0)| < \infty$.
- $\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in K} \omega(f,\delta) = 0$.

On pourra consulter [37] pour une preuve de ce résultat dans un cadre plus général.
La caractérisation d'Arzela-Ascoli permet une définition équivalente de la tension d'une suite de lois :

Théorème 5. *Une suite de lois $\mathbb{P}_n$ est tendue si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n\{f | f(0) > \lambda\} = 0$.
- $\forall \epsilon > 0; \lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n\{f | \omega(f,\delta) > \epsilon\} = 0$.

La deuxième condition du théorème ci-dessus pouvant être relaxée à

Proposition 1.

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n\{f|\omega(f,\delta) > \epsilon\} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\{f|\omega(f,\delta) > \epsilon\} = 0.$$

On pourra consulter [36] pour obtenir les démonstrations des résultats ci dessus.

On va montrer la tension en utilisant le critère ci-dessus, la difficulté principale étant due au fait que comme les variables ne sont pas indépendantes. Nous allons utiliser des arguments de martingale basés sur le fait que l'opérateur T satisfaisant un trou de spectre permet de résoudre l'équation de Poisson.

$$\omega(X_n,\delta) = \sup_{|t-s|\leq\delta} |X_n(t) - X_n(s)| \leq \frac{4M}{\sqrt{n\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sup_{|t-s|\leq\delta} |\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} (Z_k - \gamma)|$$

Il en découle que :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega(X_n,\delta) \geq \epsilon\} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sup_{|t-s|\leq\delta} |\sum_{k=[ns]+1}^{[nt]} (Z_k-\gamma)| \geq \epsilon\}$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sup_{k\leq n; j\leq n\delta} |\sum_{k\leq i\leq k+j} (Z_i-\gamma)| \geq \epsilon\}.$$

Pour un entier k donné inférieur à n on notera p l'unique entier tel que k soit compris entre $pn\delta$ et $(p+1)n\delta$ de sorte que :

$$\sum_{k\leq i\leq k+j} (Z_i-\gamma) = \sum_{i=pn\delta}^{(p+1)n\delta-1} (Z_i-\gamma) + \sum_{i=(p+1)n\delta}^{j} (Z_i-\gamma) - \sum_{i=pn\delta}^{k-1} (Z_i-\gamma).$$

De cela on tire nécessairement que :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega(X_n,\delta) \geq \epsilon\} \leq \mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sup_{k\leq\frac{1}{\delta}; j\leq n\delta} |\sum_{kn\delta\leq i\leq kn\delta+j} (Z_i-\gamma)| \geq \frac{\epsilon}{3}\}$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sup_{j\leq n\delta} |S_j| \geq \frac{\epsilon}{3}\}.$$

$(S_j = \sum_{1\leq i\leq j} (Z_i-\gamma).)$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui permet de faire apparaître des martingales quand les propriétés de l'opérateur de transfert permettent de résoudre l'équation de Poisson.

Lemme 9. *Il existe une fonction f lipschitzienne et bornée telle que :*

$$M_n = \sum_{1\leq i\leq n} (Z_i-\gamma) - f(Z_1^z) + Tf(Z_n^z)$$

est une martingale.

Démonstration. Introduisons ϕ_M la fonction affine par morceaux valant l'identité sur $[-M,M]$, valant M sur $[M,\infty[$ et $-M$ sur $]-\infty,-M]$. Ainsi $Z_i-\gamma = \phi_M(Z_i)-\gamma$ et $\int(\phi_M(z)-\gamma)d\mu_z = 0$. Posons $\theta_M = \phi_M-\gamma$ et $f = \sum_{k=0}^{\infty} T^k\theta_M$. La série précédente étant bien définie grâce à la propriété de trou de spectre sur T précédemment démontrée.
On a par ailleurs $\theta_M = f - Tf$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_M(Z_i) = f(Z_1) - Tf(Z_n) + M_n$$

avec M_n une martingale centrée. q.e.d

Ceci nous apprend que S_n est une martingale à un terme uniformément borné près. Par conséquent, nous pouvons utiliser l'inégalité de Doob pour les martingales :

$$\frac{1}{\delta}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sup_{j\leq n\delta}|S_j|\geq\frac{\epsilon}{3}\}\leq\frac{C}{n^2\delta\epsilon^4}\mathbb{E}\{S_{n\delta}^4\}. \tag{3.1}$$

Le terme de bord $f(Z_1)-Tf(Z_n)$ est divisé par $\sqrt{n}$, donc comme il est uniformément borné, pour n assez grand il ne modifie pas les inégalités. Le lemme suivant permettra de conclure la preuve.

Lemme 10. $\mathbb{E}\{S_n^4\}\approx Cn^2$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème central limite. On sait alors que :

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\{(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}S_N)^4=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

q.e.d

Par conséquent :

$$\frac{1}{\delta}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\sup_{j\leq n\delta}|S_j|\geq\frac{\epsilon}{3}\}\leq C_\epsilon\delta.$$

Et,

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\omega(X_n,\delta)\geq\epsilon\}=0.$$

Le critère de tension est donc démontré et achève la preuve du théorème de Donsker.

4. PROPRIÉTÉS DE CONVERGENCE DANS LES STRUCTURES D'ERREUR

Introduction

La propriété de densité de l'énergie image (EID) affirme que dans une structure d'erreur donnée S, un p-uplet de variables dans le domaine $\mathbb{D}$ dont la matrice carré du champ est presque sûrement non dégénérée, admet une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de dimension p. Cette propriété a été conjecturée vraie dans toutes les structures d'erreur par Nicolas Bouleau et Francis Hirsch en 1986. Démontrée dans tous les cas particuliers classiques, elle permet d'établir des critères sous lesquels les lois de solutions d'équations différentielles stochastiques éventuellement avec sauts, admettent des densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Le critère (EID) ne repose pas réellement sur la théorie du calcul de Malliavin car il n'y a pas besoin d'effectuer des intégrations par parties pour obtenir la régularité des lois. Il s'agit plutôt d'une propriété très fine de théorie géométrique de la mesure.
Le cas des variables aléatoires à valeurs réelles (p=1) a été prouvé en toute généralité, ceci peut être vu dans [4]. Quelques années plus tard, la conjecture est démontrée dans le cas particulier de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener, voir [12]. Alors que la théorie du calcul de Malliavin avait déjà permis d'établir des critères sous lesquels les lois de solutions d'équations différentielles stochastiques admettent des densités, ce résultat permet d'abaisser la régularité des coefficients fonctionnels à Lipschitzien. A ce jour, ces critères restent les plus généraux.
Le cas de l'espace de Poisson a été traité par Agnès Coquio dans un cas particulier, voir [19], il s'agit du cas où la mesure d'intensité est une loi uniforme sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Très récemment, une nouvelle méthode dite "de la particule prêtée" permet d'établir des résultats très généraux pour des structures de Dirichlet sur l'espace de Poisson. On pourra consulter [10] pour une introduction à cette théorie ainsi que [9] pour l'application aux équations différentielles stochastiques. Toutes ces démonstrations reposent en partie sur la formule de la co-aire de Federer.

L'objectif de ce travail est de mettre en évidence l'existence d'un renforcement de la propriété (EID), que l'on peut voir comme une version quantitative de la propriété. Il s'agit d'établir que la convergence dans le domaine $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ de variables aléatoires entraîne la convergence en variation totale des lois. Nous établissons cette propriété en toute généralité pour le cas des variables aléatoires à valeurs réelles et étudions les liens avec la propriété (EID) ainsi que certaines propriété générales. Cela permet par exemple, d'établir que les lois de variables non dégénérées sont de Rajchman et possèdent donc un "gros" support. Cela va dans le sens de la conjecture (EID). Dans un second temps nous démontrons le cas particulier de la structure de Dirichlet $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$ ainsi que le cas de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Notons que cela permet de donner une démonstration alternative de (EID) sur ces espaces, ne reposant aucunement sur la formule de la co-aire. Dans la dernière partie nous énonçons des pistes de recherche prolongeant ces idées, en vue d'un travail post-doctoral.

4.1 Un bref rappel de la preuve de (EID) sur $\mathcal{H}^1([0,1]^p, dx)$ par la formule de la coaire

Avant d'entrer dans le détail des définitions, nous souhaitons donner les grandes lignes de la preuve de (EID) sur l'espace $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$ par des techniques de théorie géométrique de la mesure et par la formule de la co-aire, nous n'effectuons ici aucune démonstration. Les preuves des théorèmes ci-dessous s'avérant particulièrement délicates.
La notion suivante de "approximativement dérivable" est cruciale dans le raisonnement. Soit f une fonction Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est approximativement différentiable en un point $a \in \mathbb{R}$ et de dérivée égale à b si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \lambda\{x \in [a-\eta, a+\eta] \mid |f(x) - f(a) - (x-a)b| > \epsilon |x-a|\} = 0.$$

On note alors $b = apf'(a)$.

De la même façon, si f est définie de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir $ap\partial_i f$ ainsi que $ap\nabla f = (ap\partial_1 f, \cdots, ap\partial_m f)$.

Enfin, si $f = (f_1, \cdots, f_n)$ est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq m$), on peut définir le jacobien approximatif de f noté $apJf$. Le théorème suivant découle de la formule de la co-aire :

Théorème 6. *Si $m \geq n$, si $\forall i \leq m$, $\forall j \leq n$, $ap\partial_i f_j$ est défini λ_m-presque partout alors :*

$$f_*(apJ(f)d\lambda_m) << d\lambda_n.$$

On pourra consulter les théorèmes 3.1.4, 3.1.8, 3.2.3, 3.2.11 de [20] pour des démonstrations. Pour pouvoir appliquer ce critère, il reste à démontrer que les fonctions f dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1]^p, dx)$ sont approximativement différentiables. Cela découle essentiellement du théorème suivant dû à Stepanoff.

Théorème 7. *Si $A \subset B \subset \mathbb{R}^m$, avec B ouvert et $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\limsup_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} < \infty$$

pour tout $a \in A$, alors f est différentiable en λ_m presque tout point de A.

Par la suite, nous n'utiliserons pas ces arguments mais plutôt des techniques empruntées à l'analyse fonctionnelle. Mentionnons quand même que si nous gagnons en simplicité, nous avons besoin d'hypothèses d'intégrabilité légèrement plus fortes.

4.2 Définitions et propriétés générales

Ici nous rappelons les définitions dont nous étudierons les propriétés dans ce travail. Nous retrouvons notamment la propriété (EID) et définissons son "alter-ego" qui est la propriété (SEID).

Définition 3. *(Structure d'erreur)*

Une structure d'erreur est un quintuplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$.

- *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.*
- *$\mathbb{D}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{P})$.*
- *Γ est un opérateur bilinéaire symétrique positif de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $L^1(\Omega)$.*
- *Si $X = (X_1, \cdots, X_p) \in \mathbb{D}^p$ et $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne de classe $\mathcal{C}^1$ alors $F(X) \in \mathbb{D}$. En outre on a le calcul fonctionnel (règle de la chaîne) :*

$$\Gamma[F(X)] = \sum_i \sum_j \partial_i F(X) \partial_j F(X) \Gamma[X_i, X_j].$$

- *$\mathbb{D}$ muni de la norme $\|X\|_{\mathbb{D}} = \left(\mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{\Gamma[X]\}\right)^{\frac{1}{2}}$ est complet.*

Soit une structure d'erreur $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$. Introduisons deux définitions, dont nous étudions les liens ultérieurement.

Définition 4. *(Energy image density)*

On dit que S satisfait la propriété (EID), si pour tout p-uplet $X = (X_1, \cdots, X_p)$ de variables aléatoires dans $\mathbb{D}$:

$$X_*(\det(\Gamma[X_i, X_j]_{i,j\leq p})\, d\mathbb{P}) << d\lambda_p.$$

La propriété précédente est fondamentale et n'a été prouvée que dans quelques cas particuliers (espace de Poisson, espace de Wiener, espace de Monte-Carlo). C'est une conjecture fondamentale de la théorie des formes de Dirichlet depuis 1986. Elle très intimement reliée à la conjecture suivante.

Conjecture 1. *conjecture des formes symétriques fermées*

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Soit $A(x)$ une famille mesurable de matrices $n \times n$ symétriques et positives telles que la forme quadratique différentielle $\int \nabla\phi\, A\, {}^t\nabla\phi d\mu$ définie sur les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ soit fermable. Alors

$$\chi_{\{rang(A)=k\}} d\mu << d\mathcal{H}_k.$$

Avec $\mathcal{H}_k$ la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 5. *(Strong energy image density)*

On dit que S satisfait la propriété (SEID), si pour tout p-uplet $X = (X_1, \cdots, X_p)$ de $\mathbb{D}^p$, pour toute suite de $\mathbb{D}^p$ $X_n = (X_1^{(n)}, \cdots, X_p^{(n)})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(n)}\|_{\mathbb{D}} = 0$, puis pour toute suite ϕ_n de fonctions de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ avec $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$, on a la propriété suivante.

$$\forall Z \in L^2(\mathbb{P}), \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\, \chi_{\{\det(\Gamma[X_i,X_j]_{i,j\leq p})\neq 0\}}\, (\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = 0.$$

Avant de rentrer dans le détail des significations des deux définitions précédentes, introduisons brièvement quelques notations.

- $D : \mathbb{D} \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{H})$ est un gradient tel que $\Gamma[X] = < DX, DX >_{\mathcal{H}}$. (Ici $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.)
- δ est l'opérateur adjoint du gradient.
- P_t est le semi-groupe engendré par la forme de Dirichlet $\mathcal{E}[X] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\Gamma[X]\}$.
- A est le générateur associé au semi-groupe P_t.

La proposition suivante permet de clarifier la définition de la propriété (SEID).

Proposition 2. *(Convergence en variation totale et SEID)*

Supposons que S satisfait la propriété (SEID). Soient $X = (X_1, \cdots, X_p)$ et $X_n = (X_1^{(n)}, \cdots, X_p^{(n)})$ des éléments de $\mathbb{D}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(n)}\|_{\mathbb{D}} = 0$ et $\mathbb{P}$-ps, $\det(\Gamma[X_i, X_j]_{i,j\leq p}) > 0$. On a alors la propriété suivante de convergence en variation totale :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|\phi\|_\infty \leq 1} \mathbb{E}(\phi(X_n) - \phi(X)) = 0.$$

Démonstration. Pour tout entier n, il existe ϕ_n continue telle que $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$ et $|\sup_{\|\phi\|_\infty \leq 1} \mathbb{E}(\phi(X_n) - \phi(X)) - \mathbb{E}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))| \leq \dfrac{1}{n}$. Il suffit alors d'appliquer la propriété (SEID) à la suite ϕ_n et en prenant également $Z = 1$ pour obtenir le résultat souhaité. Précisons que par hypothèse, la variable X de $\mathbb{D}^p$ étant presque sûrement non dégénérée, il découle que presque sûrement, $\chi_{\{\det(\Gamma[X_i,X_j]_{i,j\leq p})\neq 0\}} = 1$. q.e.d

---

Remarquons que la condition de non dégénérescence de la matrice Γ de la limite est nécessaire. Prenons l'exemple de la structure de Dirichlet suivante : $S = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx, H^1([0,1]), \Gamma[f] = (f')^2)$. On définit alors la fonction f valant 0 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Puis on définit $f_n = f + \frac{1}{n}$. On a alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{H^1} = 0$ mais on n'a pas la convergence en variation totale de $(f_n)_* dx$ vers $f_* dx$. Il suffit de considérer le borélien $A = \{0\}$, on a $\mathbb{E}\{\chi_A(f)\} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}\{\chi_A(f_n)\} = 0$.

La proposition suivante explique en quoi, la propriété (SEID) est un renforcement de la propriété (EID).

Proposition 3. *(SEID)⇒(EID)*

Si une structure d'erreur satisfait la propriété (SEID) alors elle satisfait la propriété (EID).

Démonstration.

Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur dont on suppose qu'elle satisfait la propriété (SEID). Soit $p \geq 1$, et $X = (X_1, \cdots, X_p) \in \mathbb{D}^p$, l'objectif de la démonstration est d'obtenir que pour un borélien A de $\mathbb{R}^d$ négligeable pour la mesure de Lebesgue, $\mathbb{E}\{\chi_A(X)\chi_{\{\det \Gamma[X] \neq 0\}}\} = 0$. L'idée de la preuve est d'opérer une régularisation de la loi de X par convolution. Soit $U = (U_1, \cdots, U_p)$, p variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$ et définies sur un espace probabilisé auxiliaire $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$. On a,

$$\hat{\mathbb{E}}\mathbb{E}\{\chi_A(X + \frac{1}{N}U)\chi_{\{\det \Gamma[X] \neq 0\}}\} = 0.$$

Mais d'après la propriété (SEID),

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\{(\chi_A(X + \frac{1}{N}U) - \chi_A(X))\chi_{\{\det \Gamma[X] \neq 0\}}\} = 0.$$

Ainsi, en intégrant par rapport à $\hat{\mathbb{P}}$ et en effectuant une convergence dominée, on récupère bien que $\mathbb{E}\{\chi_A(X)\chi_{\{\det \Gamma[X] \neq 0\}}\} = 0$. q.e.d

Remarque 3. *Dans la démonstration précédente nous n'avons pas utilisé pleinement la propriété (SEID). Nous n'avons utilisé que la sous-propriété suivante :*

pour toute suite h_n convergeant vers 0 :

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\{(\chi_A(X + h_N) - \chi_A(X))\chi_{\{\det \Gamma[X] \neq 0\}}\} = 0.$$

Cette sous-propriété qui s'apparente à (SEID) sur les translations est en fait équivalente à (EID). En effet, rappelons que si μ est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue alors

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h \mu - \mu\|_{v-t} = 0.$$

(Avec $< \tau_h \mu, \phi >= \int \phi(x + h) d\mu_x$.)

Nous savons que la propriété (EID) a été prouvée en toute généralité dans le cas unidimensionnel (p=1). Dans le théorème suivant, nous démontrons que (SEID) est également vraie pour toute structure d'erreur S et pour $p = 1$, c'est à dire pour des variables à valeurs réelles. Ce théorème est important dans la suite car il permet d'obtenir des résultats généraux en dimension supérieure.

Théorème 8. *(SEID) pour $p = 1$.*

Soient X et X_n des variables aléatoires dans $\mathbb{D}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Fixons une suite quelconque de fonctions continues ϕ_n telles que $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$ et Z un élément quelconque de L^1. Sous ces hypothèses :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = 0.$$

Démonstration.

- Fixons un réel $M > 0$ et supposons dans un premier temps que toutes les fonctions de la suite ϕ_n sont à support dans $[-M, M]$.

  La suite $\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{P})$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers un élément W de $L^\infty(\mathbb{P})$. Ainsi,quel que soit Y dans $L^1(\mathbb{P})$ (quitte à renuméroter) :

  $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Y\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = \mathbb{E}\{YW\}.$$

  L'objectif principal de la preuve est donc d'établir que $W = 0$. Notons $\Psi_n(x) = \int_0^x \phi_n(t)dt$. Fixons enfin U dans le domaine $\mathcal{D}(A)$ du générateur. Ψ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-Lipschitzienne. Remarquons que comme les fonctions ϕ_n sont à support dans $[-M, M]$, alors les fonctions Ψ_n sont uniformément bornées par M. Nous pouvons appliquer la propriété de calcul fonctionnel.

  $$\begin{aligned}\Gamma[\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X), U] &= \phi_n(X_n)\Gamma[X_n, U] - \phi_n(X)\Gamma[X, U] \\ &= (\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\Gamma[X, U] + \phi_n(X_n)\Gamma[X - X_n, U].\end{aligned}$$

  Prenons l'espérance des égalités précédentes. Pour Z dans $\mathbb{D} \cap L^\infty$, on a l'intégration par parties suivante :

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\Gamma[\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X), U]Z\} &= -\mathbb{E}\{Z(\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X))A[U]\} \\ &\quad +\mathbb{E}\{(\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X))\Gamma[Z, U]\} \\ &= \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\Gamma[X, U]\} \\ &\quad +\mathbb{E}\{Z\phi_n(X_n)\Gamma[X - X_n, U]\}.\end{aligned}$$

Ici nous utilisons pleinement le fait que la suite Ψ_n est uniformément bornée, car $\Gamma[Z,U] \in L^1$ et $\mathbb{E}\{(\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X))\Gamma[Z,U]\}$ n'aurait pas de sens autrement. D'une part (convergence dominée),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X))A[U]\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{(\Psi_n(X_n) - \Psi_n(X))\Gamma[Z,U]\} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\phi_n(X_n)\Gamma[X - X_n, U]\} = 0.$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\Gamma[X,U]\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}\Gamma[X,U]\} \\ &= \mathbb{E}\{WZ\Gamma[X,U]\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout U dans $\mathcal{D}(A)$ et Z dans $\mathbb{D}\cap L^\infty$, on a $\mathbb{E}\{WZ\Gamma[X,U]\} = 0$.

Finalement, $\mathbb{E}\{W^2\Gamma[X,X]\} = 0$, donc $W\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}} = 0$. Or on a clairement $W\chi_{\{\Gamma[X]=0\}} = 0$ (par construction). Ainsi $W = 0$. Autrement dit, la seule valeur d'adhérence faible est 0, ce qui achève la démonstration.

– Nous avons prouvé dans l'étape ci-dessus que pour tout réel $M > 0$ et pour toute suite de fonctions f_n à support dans $[-M, M]$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(f_n(X_n) - f_n(X))\} = 0.$$

Il s'agit là de s'affranchir de la condition de support sur la suite de fonctions ϕ_n. Quitte à renuméroter, on peut supposer que la suite X_n converge presque sûrement vers X. En utilisant le théorème d'Egoroff, la convergence est uniforme sur des ensemble de mesure arbitrairement grande. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A_\epsilon \in \mathcal{F}$ et $M_\epsilon > 0$ avec :
– $\mathbb{P}(A_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$,
– $\forall \omega \in A_\epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq M_\epsilon$.
Soit ϕ_n une suite de fonctions qui **ne sont plus à support dans** $[-M, M]$. Nous utilisons alors le résultat intermédiaire prouvé ci-dessus :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{A_\epsilon}\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = 0.$$

En effet, sur l'ensemble A_ϵ la suite X_n et sa limite X sont à support dans $[-M_\epsilon, M_\epsilon]$, ainsi :

$$\mathbb{E}\{Z\chi_{A_\epsilon}\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\} = \\ \mathbb{E}\{Z\chi_{A_\epsilon}\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\chi_{[-M,M]}(X_n)\phi_n(X_n) - \chi_{[-M,M]}(X)\phi_n(X))\}.$$

Enfin, la preuve s'achève en remarquant que :

$$|\mathbb{E}\{Z\chi_{A_\epsilon^c}\chi_{\{\Gamma[X]\neq 0\}}(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\}| \leq 2\epsilon.$$

(A_ϵ^c désigne le complémentaire de A_ϵ.)

q.e.d

Une conséquence intéressante de la propriété précédente est que la convergence en norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ est préservée par composition avec des applications Lipschitziennes. Ce résultat est déjà connu, mais la preuve que nous fournissons est nouvelle, (voir [1]).

Corollaire 1. *Convergence pour $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ et fonction Lipschitzienne.*

Soient X_n et X des éléments de $\mathbb{D}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Et soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, K-Lipschitzienne. Alors $\lim_{n\to\infty} \|F(X_n) - F(X)\|_{\mathbb{D}} = 0$.

Démonstration.

F est K-Lipschitzienne, nous avons déjà $\lim_{n\to\infty} \|F(X_n) - F(X)\|_{L^2(\mathbb{P})} = 0$.
Il reste à prouver que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}[F(X_n) - F(X)] = 0$.

En utilisant le calcul fonctionnel de classe Lipschitzien :

$$\Gamma[F(X_n)-F(X)] = (F'(X_n))^2\Gamma[X_n]+(F'(X))^2\Gamma[X]-2F'(X)F'(X_n)\Gamma[X, X_n].$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\Gamma[X, X_n] - \Gamma[X, X]|\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\Gamma[X_n, X_n] - \Gamma[X, X]|\} = 0.$$

Ainsi $\mathcal{E}[F(X_n) - F(X)]$ a même limite que $\mathbb{E}\{\Gamma[X, X](F'(X_n) - F'(X))^2\}$.

Or d'après la propriété (SEID),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X, X](F'(X_n))^2\} = \mathbb{E}\{\Gamma[X, X](F'(X))^2\},$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X, X]F'(X_n)F'(X)\} = \mathbb{E}\{\Gamma[X, X](F'(X))^2\}.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Gamma[X, X](F'(X_n) - F'(X))^2\} = 0.$ q.e.d

Étudions maintenant la stabilité de la propriété (SEID) vis à vis de l'opération produit infini. On sait que si S_i est une famille de structures d'erreurs telle que pour tout n, $\prod_{i=1}^{n} S_i$ satisfait (EID) alors $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$ satisfait encore (EID). Cette propriété est d'une grande importance car elle permet d'obtenir (EID) sur des objet de dimension "infinie" tels que les solutions d'équations différentielles stochastiques. Dans la proposition suivante nous montrons qu'il en est de même pour (SEID). Nous renvoyons à [14] ou [5] pour les définitions des opérations "produit" et "image" sur les structures.

Proposition 4. *Stabilité de (SEID) par produit infini.*

Soit S_i une famille de structures d'erreur telles que $\prod_{i=1}^{n} S_i$ satisfait (SEID) pour tout rang n, alors $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$ vérifie (SEID).

Démonstration.

Soient $X = (X_1, \cdot, X_p)$ et $X_n = (X_1^{(n)}, \cdot, X_p^{(n)})$ avec $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$. Soit ϕ_n une suite de fonction de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telles que $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$ et soit $Z \in L^2(\mathbb{P})$. Rappelons, que par définition du produit de structures, $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_i$. Dans les calculs qui suivent, $\mathbb{E}_i^j$ désignera l'espérance par rapport à la mesure $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=i}^{j} \mathbb{P}_k$.

$$\begin{aligned}
& \left| \; \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}}\} - \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}}\}\right| \\
\leq \; & 2\,\mathbb{E}\{|Z|\,|\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}}|\} \\
\leq \; & K\,\mathbb{E}\{(\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}})^2\}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim_{q\to\infty} \mathbb{E}\{(\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}} - \chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}})^2\} = 0$, par convergence monotone. Car $\lim_{q\to\infty} \uparrow \Gamma_q[X] = \Gamma[X]$. (Il s'agit ici de l'ordre naturel sur les matrices symétriques).

A partir de maintenant on fixe un entier q tel que les quantités ci-dessus soient proches à $\epsilon > 0$ près.
Il nous suffit alors de démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n) - \phi_n(X))\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

Mais par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}_1^\infty\{Z(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}}\} = \mathbb{E}_{q+1}^\infty\{\mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))\chi_{\{\det\Gamma[X]\neq 0\}}\}\}.$$

Or par définition du produit infini de structures d'erreurs, $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as,

$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_q) \longrightarrow X(\omega, \omega_{q+1}, \cdots,) \in \mathbb{D}_q = \mathbb{D}(S_1 \times \cdots \times S_q)$.

De plus, nous avons par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathbb{D}} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{q+1}^\infty\{\|X_n - X\|^2_{\mathbb{D}_q}\} = 0$. Par le théorème de Riesz-Fischer de complétude des espaces L^p, on peut trouver une sous-suite k_n telle que $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as, $\lim_{n\to\infty} \|X_{k_n} - X\|_{\mathbb{D}_q}(\omega_{q+1}, \cdots) = 0$.

Par (SEID), $\mathbb{P} = \bigotimes_{k=q+1}^{\infty} \mathbb{P}_k$-as :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_{k_n}(X_{k_n}) - \phi_{k_n}(X))\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

Par convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{q+1}^\infty\mathbb{E}_1^q\{Z(\phi_{k_n}(X_{k_n}) - \phi_{k_n}(X))\chi_{\{\det\Gamma_q[X]\neq 0\}}\} = 0.$$

q.e.d

Remarque 4. *Néanmoins, la propriété (SEID) comme la propriété (EID) ne passent pas aux "images" de structures d'erreur. La difficulté principale résidant dans le fait que si $\Gamma[X](\omega)$ est non dégénérée alors $\mathbb{E}\{\Gamma[X]|X\}(\omega)$ peut être dégénérée. Toutefois, comme pour (EID) on peut démontrer que (SEID) passe aux images injectives. C'est à dire que si S satisfait (SEID) et $X = (X_1, \cdots, X_p)$ est un p-uplet dont la matrice de covariance $\Gamma[X]$ est presque sûrement non dégénérée alors, l'image de S par X est une structure d'erreur sur $\mathbb{R}^p$ qui satisfait (SEID).*

Voyons maintenant une application de (SEID) pour les variables aléatoires unidimensionnelles. Rappelons qu'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure de Rajchman si et seulement si $\lim_{\|\xi\|\to\infty} \hat{\mu}(\xi) = 0$.

Théorème 9. *Les variables non dégénérées de $\mathbb{D}^p$ ont une loi de Rajchman.*

Soient $X = (X_1, \cdots, X_p)$ dans le domaine $\mathbb{D}$ d'une structure d'erreur S, et dont $\Gamma[X] = (\Gamma[X_i, X_j])_{i,j}$ est presque sûrement non dégénérée.
Dans ce cas, $\mathbb{P}_X$: la loi de X, est une mesure de Rajchman sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration.

Soit $X = (X_1, \cdots, X_p)$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit $U = (U_1, \cdots, U_p)$ les applications coordonnées de la structure d'erreur $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$, en particulier U a pour loi la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^p$. On définit alors $X_n = X + \frac{1}{n}U$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\|_{\mathbb{D}} = 0.$$

Ici $\mathbb{D}$ représente le domaine de la structure produit $S \times \mathcal{H}^1([0,1]^p)$. Soit $\xi_n = (\xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_p^{(n)}) \in \mathbb{R}^p$,

$$\mathbb{E}\{e^{i\xi_n \cdot X_n} - e^{i\xi_n \cdot X}\} = \mathbb{E}\{e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\cdot X_n} - e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\}}\cdot X}\}.$$

Quitte à renuméroter, et par compacité, on peut supposer que $\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}$ converge vers $\frac{\xi}{\|\xi\|}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n - \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X\|_{\mathbb{D}} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X - \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X\|_{\mathbb{D}} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} = 0.$$

Pour les deux dernières équations, on a appliqué (SEID) à la suite de fonctions $g_n(x) = e^{i\|\xi_n\|x}$, grâce au fait que la variable limite $\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X$ est non dégénérée. Vérifions juste ce dernier point, $\Gamma[\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X] = {}^t(\frac{\xi}{\|\xi\|})\Gamma[X](\frac{\xi}{\|\xi\|})$. Or cette dernière quantité est toujours non nulle, eu égard au fait que $\Gamma[X]$ est par hypothèse une matrice symétrique définie positive. Enfin, pour conclure, il faut remarquer que :

$$\mathbb{E}\{e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\cdot X_n} - e^{i\,\|\xi_n\|\frac{\xi_n}{\|\xi_n\}}\cdot X}\} = \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\} - \mathbb{E}\{g_n(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \cdot X_n) - g_n(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot X)\}.$$

Ceci assure donc que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{e^{i\xi_n \cdot X_n} - e^{i\xi_n \cdot X}\} = 0.$$

Ce qui peut s'écrire plus explicitement,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^p} |\hat{\mathbb{P}}_{X_n}(\xi) - \hat{\mathbb{P}}_X(\xi)| = 0.$$

Autrement dit, la convergence dans le domaine entraîne la convergence uniforme des transformées de Fourier des lois.
Pour conclure, il suffit de remarquer que par construction la loi de X_n possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et est donc de Rajchman. La propriété précédente permet d'affirmer que $\mathbb{P}_X$ est aussi une mesure de Rajchman. q.e.d

4.3 Cas particulier de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener

Dans cette partie, nous démontrons une version plus faible (nécessitant des hypothèses d'intégrabilité supplémentaires) de la propriété (SEID) pour la structure d'erreur uniforme $\mathcal{H}^1([0,1]^p)$ puis nous déduirons une propriété analogue pour la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0, Id_p), \mathbb{R}^p)$.

Théorème 10. *(SEID) Mesure de Lebesgue*

Soit $f_n = (f_1^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$ une suite de $\mathcal{H}^1([0,1]^q)$ qui converge vers $f = (f_1, \cdots, f_p)$ pour la norme de $\mathcal{H}^1$.
Nous ferons l'hypothèse d'intégrabilité supplémentaire que la suite ∇f_n est bornée dans $L^p(d\lambda_q)$.
Dans ce cas, nous avons la propriété (SEID), à savoir pour toute suite ϕ_n de fonctions continues ($\|\phi_n\|_\infty \leq 1$) et toute fonction g dans $L^2(d\lambda_q)$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x)))\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}}(x)dx_1\cdots dx_q = 0.$$

Avant de rentrer dans le détail de la preuve générale, et afin de fixer les idées, nous démontrons ici le cas particulier $q = p = 2$. Soient $F_n = (f_n, g_n)$ dans $\mathcal{H}^1([0,1]^2)$ et convergeant pour la norme $\mathcal{H}^1$ vers $F = (f, g)$. Soit ψ_n une suite de fonctions quelconque de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec $\|\psi_n\|_\infty \leq 1$. Nous souhaitons démontrer que pour toute fonction h dans $L^2([0,1]^2)$ on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} h(\psi_n(F_n) - \psi_n(F))\chi_{\{\det\Gamma[F]\neq 0\}}dxdy = 0.$$

Pour ce faire, nous allons introduire $\Psi_n(x,y) = \int_0^x \psi_n(t,y)dt$ une primitive par rapport à la première variable de ψ_n. La règle de différentiation en chaîne assure donc que :

$$\partial_1[\Psi_n(F_n)] = \psi_n(F_n)\partial_1 f_n + \partial_2[\Psi_n](F_n)\partial_1 g_n,$$

$$\partial_2[\Psi_n(F_n)] = \psi_n(F_n)\partial_1 f_n + \partial_2[\Psi_n](F_n)\partial_2 g_n.$$

Nous souhaitons éliminer le terme $\partial_2[\Psi_n]$ car nous n'avons aucun contrôle sur ce terme. On procède par combinaison linéaire, ainsi :

$$\partial_1[\Psi_n(F_n)]\partial_2 g_n - \partial_2[\Psi_n(F_n)]\partial_1 g_n = \psi_n(F_n)(\partial_1 f_n \partial_2 g_n - \partial_1 g_n \partial_1 f_n).$$

Ou autrement écrit , $\{\Psi_n(F_n), g_n\} = \psi_n(F_n)\{f_n, g_n\}$ avec $\{u,v\} = \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v$ le crochet de Poisson.

Si l'on introduit maintenant $H_n = (f, g_n)$, par simple application des calculs précédents on obtient, pour une fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R})$:

$$\phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\} = \phi\Big(\psi_n(F_n)\{f_n, g_n\} - \psi_n(H_n)\{f, g_n\}\Big).$$

Mais par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} |\{f_n, g_n\} - \{f, g\}| dxdy = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n)\{f_n, g_n\} - \psi_n(H_n)\{f, g_n\}\big)dxdy - \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy - \int_{[0,1]^2} \phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\}dxdy = 0.$$

Mais par intégration par parties, on a :

$$\int_{[0,1]^2} \phi\{\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n), g_n\}dxdy = -\int_{[0,1]^2} (\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n))\{\phi, g_n\}dxdy.$$

Or par construction $\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n) = \displaystyle\int_0^{f_n - f} \psi_n(t, g_n)dt$.

Et donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} (\Psi_n(F_n) - \Psi_n(H_n))\{\phi, g_n\}dxdy = 0$.

Nous en déduisons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \phi\big(\psi_n(F_n) - \psi_n(H_n)\big)\{f, g\}dxdy = 0.$$

Il suffit pour conclure de choisir des fonctions test ϕ telles que :

$$\int_{[0,1]^2} |\phi\{f,g\} - h\chi_{\{\det\Gamma[F]\neq 0\}}|dxdy \leq \epsilon.$$

Cela est possible car $\det\Gamma[F] = \{f,g\}^2$.

Il reste à dire que $\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f,g)$ se décompose de la façon suivante :

$$\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f,g) = (\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g_n)) + (\psi_n(f, g_n) - \psi_n(f,g)).$$

La démonstration précédente ne traite que le terme $\psi_n(f_n, g_n) - \psi_n(f, g_n)$. Pour traiter le terme $(\psi_n(f, g_n) - \psi_n(f,g))$ il faut procéder de façon tout à fait analogue en considérant cette fois ci, $\theta_n(x,y) = \int_0^y \psi_n(x,s)ds$, la primitive de ψ_n respectivement à la seconde variable.
Passons au cas général. Dans la suite $p \leq q$, si $p > q$ alors la propriété est triviale car $\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}} = 0$.

Démonstration.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite de fonctions ϕ_n considérée est de classe $\mathcal{C}^1$. Le passage aux fonctions continues se fera alors par densité, étant donné qu'on a de l'uniformité sur les fonctions ϕ_n que l'on choisit.

Définissons $\Psi_n(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \int_0^{x_1} \phi_n(t, x_2, \cdots, x_p)dx_1 \cdots dx_p$.

Pour tout $k \in \{1, \cdots, q\}$:

$$\partial_k[\Psi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})] = \phi_n(f_n)\partial_k f_1^{(n)} + \sum_{j=2}^{p} \partial_j[\Psi_n](f_n)\partial_k f_j.$$

Ce qui peut s'écrire matricielle-ment :

$$\begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n(f_n)] \\ \partial_2[\Psi_n(f_n)] \\ \vdots \\ \partial_q[\Psi_n(f_n)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1^{(n)} & \partial_1 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_1 f_p^{(n)} \\ \partial_2 f_1^{(n)} & \partial_2 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_2 f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_q f_1^{(n)} & \partial_q f_2^{(n)} & \cdots & \partial_q f_p^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n](f_n) \\ \partial_2[\Psi_n](f_n) \\ \vdots \\ \partial_p[\Psi_n](f_n) \end{pmatrix}.$$

A partir de maintenant, on fixe $I = \{i_1, \cdots, i_p\}$ un sous-ensemble d'indices de $\{1, \cdots, q\}$.

Nous avons donc le système suivant qui est l'extraction du système précédent pour l'ensemble des indices dans I :

$$\begin{pmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n)] \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n)] \\ \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{i_1} f_1^{(n)} & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} f_1^{(n)} & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} f_1^{(n)} & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1[\Psi_n](f_n) \\ \partial_2[\Psi_n](f_n) \\ \vdots \\ \partial_p[\Psi_n](f_n) \end{pmatrix}.$$

Les formules de Cramer assurent que :

$$\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) = \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix}.$$

On a noté :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1^{(n)} & \partial_1 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_1 f_p^{(n)} \\ \partial_2 f_1^{(n)} & \partial_2 f_2^{(n)} & \cdots & \partial_2 f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_q f_1^{(n)} & \partial_q f_2^{(n)} & \cdots & \partial_q f_p^{(n)} \end{pmatrix} ; A_I^{(n)} = \begin{pmatrix} \partial_{i_1} f_1^{(n)} & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} f_1^{(n)} & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} f_1^{(n)} & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Grâce aux calculs algébriques précédents, nous pouvons commencer la preuve du théorème. Pour ce faire, nous allons introduire Z une limite faible de la suite $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))$.

Autrement dit, et quitte à renuméroter la suite on a pour tout w dans $L^1(d\lambda_q)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} w(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))d\lambda_q = \int_{[0,1]^q} wZd\lambda_q.$$

Il suffit alors de prouver que $Z\chi_{\{\det A \neq 0\}} = 0$. Rappelons à cet effet que puisque $\det \Gamma[f] = (\det A)^2$, $\{\det A \neq 0\} = \{\det \Gamma[f] \neq 0\}$.
Remarquons également que nous considérons $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}))$ au lieu de $(\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, \cdots, f_p))$. Mais cela sera suffisant, il suffit en effet de considérer la décomposition suivante, et d'appliquer

la méthode à chaque terme de la décomposition ci-dessous.

$$\begin{aligned}
&\phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, \cdots, f_p) = \phi_n(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) \\
&+\phi_n(f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, f_3^{(n)} \cdots, f_p^{(n)}) \\
&+\phi_n(f_1, f_2, f_3^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) - \phi_n(f_1, f_2, f_3, f_4^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)}) \\
&\vdots \\
&+\phi(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f_p^{(n)}) - \phi(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f_p).
\end{aligned}$$

De ce qui précède on tire que (avec $g_n = (f_1, f_2^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$) et $B_I^{(n)} = mat((\partial_{i_k} g_l)_{k,l}))$:

$$\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n) = \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons supposé également que ∇f_n est bornée dans $L^{(p)}$ et que f_n converge vers f dans $\mathcal{H}^1$. Cela permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} |\det(A_I^{(n)}) - \det(A_I)| d\lambda_q = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} |\det(B_I^{(n)}) - \det(A_I)| d\lambda_q = 0.$$

Par suite, pour toute fonction test w de $\mathcal{C}_c^\infty([0,1]^q, \mathbb{R})$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^q} (\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n)) w d\lambda_p = \int_{[0,1]^q} Zw \det A_I d\lambda_q.$$

Ce que l'on va montrer, c'est que pour toute fonction test w, $\int_{[0,1]^q} Zw \det A_I d\lambda_q = 0$.

Il suffit pour ça de revenir à l'expression avec les déterminants :

$$\int_{[0,1]^q} (\det(A_I^{(n)})\phi_n(f_n) - \det(B_I^{(n)})\phi_n(g_n))w =$$

$$\int_{[0,1]^q} w \begin{vmatrix} \partial_{i_1}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p}[\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)] & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix} d\lambda_q =$$

$$-\int_{[0,1]^q} (\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)) \begin{vmatrix} \partial_{i_1} w & \partial_{i_1} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_1} f_p^{(n)} \\ \partial_{i_2} w & \partial_{i_2} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_2} f_p^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{i_p} w & \partial_{i_p} f_2^{(n)} & \cdots & \partial_{i_p} f_p^{(n)} \end{vmatrix} d\lambda_q \leq$$

$$C\|\Psi_n(f_n) - \Psi_n(g_n)\|_{L^2(\lambda_q)} \leq C\|f_n - g_n\|_{L^2(\lambda_q)}.$$

On a donc bien prouvé, que pour toute fonction test w, $\int_{[0,1]^q} Zw \det A_I d\lambda_q = 0$, ou encore $Z \det A_I = 0$. Le raisonnement étant valable pour tout sous-ensemble d'indice I, on a bien $Z \det(A) = 0$. q.e.d

Remarque 5. *Le point clé de la démonstration précédente est le résultat suivant. Pour $w_1, w_2, \cdots, w_{p+1}$ de classe $\mathcal{C}_c^\infty([0,1]^q, \mathbb{R})$ on a la formule d'intégration par partie suivante qui découle essentiellement du lemme de Schwartz $\partial_{(i,j)} = \partial_{(j,i)}$. Ce lemme peut ensuite s'étendre par densité à des fonctions moins régulières telles que celles de $\mathcal{W}^{1,p}$, pourvu qu'il n'y ait pas de termes de bord. Il n'y a pas de termes de bord, si l'une des fonctions w_i est à support compact.*

$$\int_{[0,1]^q} w_{p+1} \begin{vmatrix} \partial_1 w_1 & \partial_1 w_2 & \cdots & \partial_1 w_p \\ \partial_2 w_1 & \partial_2 w_2 & \cdots & \partial_2 w_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_p w_1 & \partial_p w_2 & \cdots & \partial_p w_p \end{vmatrix} d\lambda_q = -\int_{[0,1]^q} w_1 \begin{vmatrix} \partial_1 w_{p+1} & \partial_1 w_2 & \cdots & \partial_1 w_p \\ \partial_2 w_{p+1} & \partial_2 w_2 & \cdots & \partial_2 w_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_p w_{p+1} & \partial_p w_2 & \cdots & \partial_p w_p \end{vmatrix} d\lambda_q.$$

Cette formule est par essence multilinéaire. Pour la démontrer, on peut la tester facilement sur les fonction exponentielles $e^{i<\alpha,x>}$ puis l'étendre par approximation de Fourier par exemple.

Remarque 6. *Dans cette remarque, nous allons effectuer une preuve différente de la formule d'intégration par parties ci-dessus. Cette preuve (beaucoup* *plus claire et concise) est due à Damien Lamberton et Vlad Bally et n'utilise pas d'arguments de type "Fourier" qui seraient fastidieux à rédiger en intégralité.*

$$\begin{aligned}\int w_{p+1}\det[\partial w]d\lambda_p &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_{p+1}\partial_{\pi(1)}w_1\cdots\partial_{\pi(p)}w_p d\lambda_p\\ &= -\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_1\partial_{\pi(1)}(w_{p+1}\partial_{\pi(2)}w_2\cdots\partial_{\pi(p)}w_p)d\lambda_p\\ &= -\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_1\partial_{\pi(1)}w_{p+1}\partial_{\pi(2)}w_2\cdots\partial_{\pi(p)}w_p d\lambda_p\\ &- \sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_1 w_{p+1}\partial_{\pi(1)}(\partial_{\pi(2)}w_2\cdots\partial_{\pi(p)}w_p)d\lambda_p.\end{aligned}$$

Avec π une permutation, $\epsilon(\pi)$ sa signature et $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des permutations de p éléments.
Afin de conclure, il faut prouver que le terme $\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_1 w_{p+1}\partial_{\pi(1)}(\partial_{\pi(2)}w_2\cdots\partial_{\pi(p)}w_p)d\lambda_p$ est nul. Mais alors,

$$\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\int w_1 w_{p+1}\partial_{\pi(1)}(\partial_{\pi(2)}w_2\cdots\partial_{\pi(p)}w_p)d\lambda_p =$$
$$\int w_1 w_{p+1}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)\sum_{k=2}^{n}(\prod_{i\neq k}\partial_{\pi(i)}w_i)\times\partial_{\pi(1)}\partial_{\pi(k)}w_k d\lambda_p$$

On fixe k, et on note τ_k la permutation qui échange 1 et k. On a d'une part le lemme de Schwartz qui assure : $\partial_{\pi(1)}\partial_{\pi(k)}w_k = \partial_{\pi(k)}\partial_{\pi(1)}$ et d'autre part, $\partial_{\pi(k)}\partial_{\pi(1)}w_k = \partial_{\pi(\tau_k(1)}\partial_{\pi(\tau_k(k)}w_k$. Cela dit, remarquons que $\epsilon(\pi(\tau_k)) = -\epsilon(\pi)$, on récupère que :

$$\int\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)(\prod_{i\neq k}\partial_{\pi(i)}w_i)\times\partial_{\pi(1)}\partial_{\pi(k)}w_k d\lambda_p = -\int\sum_{\pi\in\mathcal{S}_p}\epsilon(\pi)(\prod_{i\neq k}\partial_{\pi(i)}w_i)\times\partial_{\pi(1)}\partial_{\pi(k)}w_k d\lambda_p.$$

Cela achève la démonstration.

Remarque 7. *Notons enfin que la preuve précédente s'articule autour de la formule d'intégration par parties :*

$$\int \det(\nabla^I f) h \partial_1 \Psi(f) d\lambda_p = \int \Psi(f) \det(\partial^I h, \nabla^I(f_2), \cdots, \nabla^I(f_p)) d\lambda_p.$$

Suite à une remarque de Vlad Bally sur la précédente intégration par parties, en prenant les bonnes fonctions test et en supposant la non-dégénérescence adéquate, on obtient :

$$\int g \partial_1 \Psi(f) = \int \Psi(f) \det[\nabla^I(\frac{g}{(\det \nabla^I f)}), \nabla^I f_2, \cdots, \nabla^I f_p)].$$

En notant $H_I^1(g,f) = \det[\nabla^I(\frac{g}{(\det \nabla^I f)}), \nabla^I f_2, \cdots, \nabla^I f_p)]$, *le poids apparaissant dans l'intégration par parties, on pourrait obtenir (sous les bonnes hypothèses) des majorations du type :*

$$\|H_I^1(g,f)\|_p \leq C \|(\det \nabla^I f)^{-1}\|_{p'} \|(g, \nabla^I g)\|_{p'} \|(\nabla^I f, \nabla^I \nabla^I f)\|_{p'}.$$

Ces majorations permettent d'obtenir des critères quantitatifs de régularité des lois.

Examinons le cas de la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck multidimensionnelle : $S_{O-U} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0,1), \mathcal{H}(\mathcal{N}(0,1)), \Gamma[f] = (f')^2)^q$. On a alors l'analogue du théorème précédent à savoir :

Théorème 11. *(SEID) Ornstein-Uhlenbeck*

Soit $f_n = (f_1^{(n)}, \cdots, f_p^{(n)})$ *une suite de* $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^q, \mathcal{N}(0, I_q))$ *qui converge vers* $f = (f_1, \cdots, f_p)$ *pour la norme de* $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}(0, I_q))$.
Nous ferons l'hypothèse d'intégrabilité supplémentaire que la suite ∇f_n *est bornée dans* $L^p(\mathcal{N}(0, I_q))$.
Dans ce cas, nous avons la propriété (SEID), à savoir pour toute suite ϕ_n *de fonctions continues* ($\|\phi_n\|_\infty \leq 1$) *et toute fonction* g *dans* $L^2(\mathcal{N}(0, I_q))$, *on a la limite suivante :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x))) \chi_{\{\det \Gamma[f] \neq 0\}}(x) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} dx_1 \cdots dx_q = 0.$$

Démonstration.

On peut se ramener à la mesure de Lebesgue. On commence par fixer un réel $M > 0$ tel que :

$$|\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{\{\|x\|_1 \geq M\}} g(x)(\phi_n(f_n(x)) - \phi_n(f(x))) \chi_{\{\det \Gamma[f] \neq 0\}}(x) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}} dx_1 \cdots dx_q| \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{\{\|x\|_1 \geq M\}} g(x) d\mathcal{N}(0, I_q) \leq \epsilon.$$

Il suffit alors de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-M,M]^q}\frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}}g(x)(\phi_n(f_n(x))-\phi_n(f(x)))\chi_{\{\det\Gamma[f]\neq 0\}}(x)\frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_q^2)/2}}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}}dx_1\cdots dx_q=0.$$

Or il est clair que les fonctions f_n restreintes à $[-M,M]^q$ sont dans $\mathcal{H}^1([-M,M]^q,d\lambda_q)$. Enfin comme la densité de la mesure gaussienne ne s'annule pas et que ∇f_n est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^q,\mathcal{N}(0,I_q))$ alors ∇f_n est également bornée dans $L^p([-M,M]^q,d\lambda_q)$. On peut donc appliquer le théorème 10. q.e.d

Voyons maintenant quelques applications des théorèmes précédents.

Corollaire 2. *Itération aléatoire de fonctions dépendant d'un paramètre*

Soit $F:\mathbb{R}\times[0,1]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. On fait les hypothèses suivantes.

1. *il existe $k\in[0,1[$ tel que*
$$\forall(x,x')\in\mathbb{R}^2,\quad\sup_{y\in[0,1],\,z\in[a,b]}|F(x,y,z)-F(x',y,z)|\le k|x-x'|.$$
2. *il existe $C>0$ tel que :*
$$\sup_{z\in[a,b]}|F(x,y,z)-F(x',y',z')|\le C|x-x'|+C|y-y'|.$$
3. *$(x,y,z)\longrightarrow F(x,y,z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
4. *Pour tout z, pour tout x, l'application : $y\longrightarrow F(x,y,z)$ n'est pas constante et $\partial_1F(x,y,z)\neq 0$.*

On considère la chaîne de Markov $X_{n+1}=F(X_n,U_{n+1},z)$, où les U_i est une suite indépendante équidistribuée de lois uniformes sur $[0,1]$. On a les conclusions suivantes.

1. *Pour toute valeur du paramètre z, X_n converge en loi vers une mesure de proba μ_z.*
2. $\lim_{z\to z'}\|\mu_z-\mu_z'\|_{v-t}=0.$

Démonstration.

Considérons la structure d'erreur produit infini suivante $\mathcal{H}^1([0,1])^{\mathbb{N}}$. Les tirages U_i peuvent être assimilés aux coordonnées de cette structure d'erreur.

Soit $f_i(x) = F(x, U_i, z)$, $X_n = f_n \circ \cdots \circ f_1(x_0)$. Ainsi X_n a même loi que $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0)$. En inversant ainsi l'ordre des itérations, nous allons démontrer que $Z_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots f_n(x_0)$ converge dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\| \cdot \|_{\mathbb{D}}$ vers une variable aléatoire de loi μ_z.

$$\|Z_{n+1} - Z_n\|_{L^2} \leq Ck^n,$$
$$\Gamma[Z_n] = \partial_2 F(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0), U_1, z)^2 + \cdots +$$
$$\partial_1 F(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x_0), U_1, z)^2 \cdots \partial_1 F(f_n(x_0), U_{n-1}, z)^2 \partial_2 F(x_0, U_n, z)^2.$$

Par conséquent, Z_n converge dans L^2 vers Z_∞ et $\mathcal{E}[Z_n]$ est bornée. Par suite $Z_\infty \in \mathbb{D}$. Nous allons à présent démontrer que $\lim_{z' \to z} \|Z_\infty(z') - Z_\infty(z)\|_{\mathbb{D}} = 0$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que :

$$\sup_{z \in [a,b]} \|Z_\infty^z - Z_n^z\|_{\mathbb{D}} \leq \epsilon.$$

Il est donc suffisant de prouver que pour tout n :

$$\lim_{z \to z'} \|Z_n^z - Z_n^{z'}\|_{\mathbb{D}} = 0.$$

Cela découle directement de l'hypothèse 3.

Il reste à étudier la non dégénérescence de $\Gamma[Z_\infty]$. On a la formule suivante :

$$\Gamma[Z_\infty^z] = \partial_2 F(Z_2^\infty, U_1, z)^2 + \cdots + \partial_1 F(Z_2^\infty, U_1, z)^2 \cdots \partial_1 F(Z_n^\infty, U_{n-1}, z)^2 \partial_2 F(Z_{n+1}^\infty, U_n, z)^2 + \cdots .$$

Où l'on a noté $Z_p^\infty = \lim_{n \to \infty} f_p \circ f_{p+1} \circ \cdots f_n(x)$.

En utilisant l'hypothèse 4, on obtient que $\Gamma[Z_\infty](\omega) = 0$ si et seulement si pour tout $p \geq 1$, $\partial_2 F(Z_{p+1}^\infty, U_p, z)(\omega) = 0$.
Introduisons l'événement $\mathcal{A}_n = \{\forall p \geq n,\ \partial_2 F(Z_{p+1}^\infty, U_p, z)(\omega) = 0\}$. Ainsi $\bigcap_n \mathcal{A}_n$ est un événement de la tribu asymptotique.
On en déduit que $\mathbb{P}\{\Gamma[Z_\infty] = 0\} \in \{0, 1\}$. Et $\mathbb{P}\{\Gamma[Z_\infty] = 0\} = 1$ si et seulement si, $\mu_z \otimes d\lambda_y \partial_2 F(x, y, z) = 0$, ce qui va impliquer que pour certaines valeurs de x, la fonction $y \to F(x, y, z)$ est constante.
Pour achever la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème 8, car les variables Z_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. q.e.d

Remarque 8. *Le résultat précédent se généralise à la dimension supérieure. Il faut toutefois modifier les conditions de non dégénérescence sur F dans l'esprit du chapitre de cette thèse sur l'absolue continuité des mesures stationnaires.*

Par des méthodes issues du calcul de Malliavin et sous-condition de Hörmander on sait que la famille des probabilités de transition $p_t(x, y)$ d'une diffusion est régulière en (x, y) (voir [33] pages 125-135). Cela permet d'étudier facilement la dépendance des lois aux conditions initiales.
Si les coefficients fonctionnels ne sont pas assez réguliers (disons de classe $\mathcal{C}^1$) une telle approche est souvent impossible. La condition de Hörmander nécessite souvent beaucoup de régularité sur les coefficients. La proposition suivante permet d'étudier la question en toute généralité. Nous n'avons pas réussi à abaisser la régularité à Lipschitzien.

Corollaire 3. *Dépendance des lois de solutions de S.D.E à la condition initiale.*

Considérons l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x, s)dt + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X_s^x, s)dW_s^j. \tag{4.1}$$

Nous supposons les conditions suivantes sur les coefficients B *et* σ :

1. $\sum_{j=1}^d \|\sigma_j(x,t) - \sigma_j(y,t)\| + \|B(x,t) - B(y,t)\| \leq K\|x - y\|$; $x, y \in \mathbb{R}^m,\ t \in [0, T]$.
2. $t \to B(0,t),\ \ t \to \sigma_j(0,t)$ *sont bornées sur* $[0, T]$.
3. *Pour tout réel* t, $x \to \sigma(x,t)$ *et* $x \to B(x,t)$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas, nous avons les conclusions suivantes.

1. *Pour tout* x *dans* $\mathbb{R}^m$, *pour tout* t *dans* $[0, T]$ *et tout* $p \geq 2$, $X_t^x \in \mathbb{D}^{1,p}$.

   De plus, il existe r *tel que* $\sup_{y \in B(x,r)} \|X_t^y\|_{\mathbb{D}^{1,p}} < \infty$.
2. $\lim_{x \to y} \|X_t^x - X_t^y\|_{\mathbb{D}} = 0$.
3. *On a la propriété (SEID), à savoir pour toute suite de fonctions* ϕ_n *continues sur* $\mathbb{R}^m$ *telle que* $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$, *pour toute fonction arbitraire* Z *dans* $L^2(\mathbb{P})$ *et pour toute suite* y_n *convergeant vers* y :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\{Z\chi_{\{\det \Gamma[X_t^y] \neq 0\}}(\phi_n(X_t^{y_n}) - \phi_n(X_t^y))\} = 0.$$

4. *Si par exemple $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_t^y] \neq 0\} = 1$, alors la loi de X_t^x converge en variation totale vers la loi de X_y^t quand x tend vers y.*

Démonstration.

Procédons point par point.

1. Cette propriété qui se démontre par un raisonnement d'itération de Picard est faite dans le livre [33]. Il s'agit du théorème 2.2.1 à la page 119. Pour cela, l'hypothèse 3 est inutile.
2. Cette propriété découle du théorème de point fixe à paramètre suivant.

   Soit $(\mathcal{K}, d)$ un espace métrique complet, et U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $F : \mathcal{K} \times U \to \mathcal{K}$ une application continue telle que pour tout x dans U, il existe $r_x > 0$ et $\alpha_x \in [0, 1[$ avec :

   $$\sup_{y \in B(x,r_x)} \sup_{a,b \in \mathcal{K}} d(F(a, y), F(b, y)) \leq \alpha_x d(a, b).$$

   Alors pour tout x dans U, il existe un unique point fixe a_x dans $\mathcal{K}$ pour l'application $F(\cdot, x)$. De plus l'application $x \to a_x$ est continue.

   Rappelons que pour démontrer le premier point, on étudie la suite d'itérations de Picard :

   $$X_0(t) = x$$
   $$X_{n+1}(t) = x + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_j(s, X_n(s))dW_s^j + \int_0^t B(s, X_n(s))ds.$$

   Ce qui s'écrit $X_{n+1} = T(X_n, x)$. L'espace de Banach considéré est :

   $$E = \{\phi(s, \omega) \in \mathbb{D} \mid \sup_{s \in [0,T]} \|\phi(x)\|_{\mathbb{D}} < \infty\}.$$

   Il suffit de vérifier que T est continue sur $E \times \mathbb{R}^m$. Cela provient essentiellement de la formule suivante :

   $$^\sharp T\phi(t) = \int_0^t \partial_2 B(s, \phi(s))^\sharp \phi(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \partial_2 \sigma_j(s, \phi(s))^\sharp \phi(s)dW_s^j + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(s, \phi(s))d\hat{W}_s^j.$$

   $\hat{W}$ représentant un mouvement brownien indépendant de W. Il s'agit là du choix d'un gradient particulier qui est l'opérateur $\sharp$. Rappelons brièvement que cet opérateur est défini par la formule (valable sur les fonctionnelles régulières du Brownien) :

$$^\sharp F(W_{h_1}, \cdots, W_{h_p}) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k F(W_{h_1}, \cdots, W_{h_p}) \int h_k d\hat{W}.$$

Nous pouvons déduire de cette formule (par les théorèmes classiques de convergence sous les intégrales) que si ϕ_n tend vers ϕ pour la norme de E alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}\{|^\sharp T\phi_n(t) - {}^\sharp T\phi(t)|^2\} = 0.$$

Puis l'on a également

$$\lim_{n\to\infty, x\to y} \mathbb{E}\{|T(\phi_n, x) - T(\phi, y)|^2\} = 0.$$

L'hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ est alors utilisée pour passer à la limite dans les dérivées partielles des fonctions B et ϕ.

3. Pour démontrer ce point là, il faut utiliser conjointement le théorème 11 et la proposition 4.

   D'après le point 2, on sait que $\lim_{x\to y} \|X_t^x - X_t^y\|_{\mathbb{D}} = 0$. Mais on sait que $\mathbb{E}\{\Gamma[X_t^x]^p\}$ est bornée sur un voisinage de x, pour tout $p \geq 2$. Cette hypothèse de contrôle de la norme p du gradient nous permet d'appliquer le théorème 11.
4. Le point 4 est un corollaire du point 3 et de la proposition 2.

q.e.d

4.4 Vers le cas général...

Dans cette section nous souhaitons établir une liste des pistes de recherches qui nous paraissent intéressantes pour généraliser les résultats obtenus dans ce travail. Bien entendu, nous ne prétendons établir (EID) ni (SEID) dans le cas général car il s'agirait là de la démonstration d'une conjecture délicate. Nous jetons juste les bases d'un travail de recherche post-doctoral qui permettrait de prolonger les idées de ce travail.

4.4.1 Faire opérer les fonctions à valeurs réelles

C'est dans une optique semblable que nous avons obtenu le théorème 9. Nous avions alors décider de faire opérer les fonctions linéaires $ax + by + \cdots$.

Il nous parait très plausible qu'en faisant opérer une catégorie moins "restrictive" de fonctions, nous puissions obtenir un peu mieux que le caractère Rajchman des mesures.

Proposition 5. *Soit* $B = \{\phi \in \mathcal{C}^{1,\alpha} \Big| \|\phi\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})} \leq 1\}$, *la boule unité des fonctions* $\mathcal{C}^1$ *à dérivée* α*-hölderienne. Soit* $\mathcal{E} = \{\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Big| \|\phi\|_\infty \leq 1\}$. *Soit* $X_n = (X_n^1, \cdots, X_n^p)$ *une suite variables aléatoires convergeant dans* $\mathbb{D}$ *vers* $X = (X_1, \cdots, X_p)$. *Dans ce cas :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\phi\in\mathcal{E}} \sup_{\Psi\in B} \mathbb{E}\{(\phi\circ\Psi(X_n) - \phi\circ\Psi(X)) \det\Gamma[X]\} = 0.$$

Démonstration. La preuve découle immédiatement du théorème 8. Il suffit de remarquer que l'espace B est compact pour la topologie de la convergence $\mathcal{C}^1$ et que la convergence $\mathcal{C}^1$ préserve la convergence pour $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$.

q.e.d

Nous n'avons pas réussi à exploiter cette idée mais nous avons remarqué que si nous arrivons à prendre $\alpha = 0$ dans la proposition ci-dessus alors c'est gagné. En effet $\sup_{\phi\in\mathcal{E}} \sup_{\Psi\in B} \int \phi\circ\Psi(x) d\mu_x = \|\mu\|_{\text{v-t}}$.

Dans le même ordre d'idée, en adaptant la preuve du théorème 8, on peut prouver la proposition suivante, sous certaines hypothèses d'intégrabilités supplémentaires.

Proposition 6.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\{\Psi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}) \big| \|\nabla\Psi\|\leq 1\}} \mathbb{E}\{(\nabla\Psi(X_n) - \nabla\Psi(X)) \det\Gamma[X]\} = 0.$$

Démonstration. Pour fixer les idées, nous allons traiter le cas $p = 2$. Soit $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ convergeant pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ vers $X = (X^1, X^2)$. Soit ϕ_n une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-lipschitziennes. Fixons U et V deux variables dans le domaine $\mathcal{D}(A)$ du générateur associé à la forme de Dirichlet.

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi_n(X_n), U] &= \partial_1\phi_n(X_n)\Gamma[X_n^1, U] + \partial_2\phi_n(X_n)\Gamma[X_n^2, U], \\
\Gamma[\phi_n(X_n), V] &= \partial_1\phi_n(X_n)\Gamma[X_n^1, V] + \partial_2\phi_n(X_n)\Gamma[X_n^2, V],
\end{aligned}$$

En effectuant une combinaison linéaire on obtient :

$$\Gamma[\phi_n(X_n), U]\Gamma[X_n^2, V] - \Gamma[\phi_n(X_n), V]\Gamma[X_n^2, U] = \partial_1\phi_n(X_n)\big(\Gamma[X_n^1, U]\Gamma[X_n^2, V] - \Gamma[X_n^2, U]\Gamma[X_n^1, V]\big).$$

Mais par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\Big|\big(\Gamma[X_n^1,U]\Gamma[X_n^2,V]-\Gamma[X_n^2,U]\Gamma[X_n^1,V]\big)-\big(\Gamma[X^1,U]\Gamma[X^2,V]-\Gamma[X^2,U]\Gamma[X^1,V]\big)\Big|\}=0.$$

En toute généralité, écrire $\mathbb{E}\{\Gamma[X,Y]\Gamma[Z,T]\}$ est problématique car Γ est un opérateur à valeur dans $L^1(\mathbb{P})$. Pour fixer les idées, dans cette preuve nous supposons que Γ prend ses valeurs dans L^p avec p assez grand.

Notons (Z_1, Z_2) une limite faible dans $L^2(\mathbb{P})$ de $\nabla\phi_n(X_n) - \nabla\phi_n(X)$. On obtient alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big\{\Gamma[\phi_n(X_n)-\phi_n(X),U]\Gamma[X^2,V]-\Gamma[\phi_n(X_n)-\phi_n(X),V]\Gamma[X^2,U]\Big\} = \mathbb{E}\{Z_1\big(\Gamma[X^1,U]\Gamma[X^2,V]-\Gamma[X^2,U]\Gamma[X^1,V]\big)\}.$$

En outre, on peut approcher $\Gamma[X^2,V]$ dans $L^2(\mathbb{P})$ par des variables Z_ϵ dans $\mathbb{D}\cap L^\infty$ de sorte que par exemple :

$$\sup_n \mathbb{E}\{\big|\Gamma[\phi_n(X_n)-\phi_n(X),U]\big|\Gamma[X^2,V]-Z_\epsilon\big|\}\le\epsilon.$$

Ceci ajouté au fait que $\sup_n \mathbb{E}\{\Gamma[\phi_n(X_n)-\phi_n(X),U]Z_\epsilon\} = \mathbb{E}\{(\phi_n(X_n)-\phi_n(X))(\Gamma[U,Z_\epsilon]-Z_\epsilon A[U])\}$ permet d'établir que :

$$\mathbb{E}\{Z_1\big(\Gamma[X^1,U]\Gamma[X^2,V]-\Gamma[X^2,U]\Gamma[X^1,V]\big)\}=0.$$

Par densité du domaine du générateur dans $\mathbb{D}$, on fait converger U vers X^1 et V vers X^2, on récupère que :

$$\mathbb{E}\{Z_1 \det\Gamma[X]\}=0.$$

On raisonne de façon symétrique pour Z_2 et on récupère le résultat annoncé.
q.e.d

Autrement dit, la convergence est uniforme sur les gradients de fonctions 1-Lipschitziennes, cette propriété semble forte mais nous n'avons pas réussi à la ramener à la convergence en variation totale. La question qui semble sous-jacente est de savoir quels sont les couples de fonctions boréliennes dérivant d'un gradient ? Il y a-t-il un lien avec la convergence des mesures en métrique de Wasserstein :

$$d(\mu,\nu)=\sup_{\{\|\nabla\phi\|\le 1\}} |\int \phi(d\nu-d\mu)|?$$

Nous présentons là une idée qui n'a pas marché, mais qui pourrait peut-être s'adapter en changeant de méthode de décomposition. Le théorème de superposition de Kolmogorov permet de décomposer de façon surprenante les fonctions à plusieurs variables comme des composées de fonctions d'une variable. Plus précisément, on peut trouver $\Psi_{i,j}$ une famille finie de fonctions d'une variable fixée, 1-Lipschitzienne et strictement croissantes telles que pour toute fonction ϕ continue de $[0,1]^p$ dans $[0,1]^p$, il existe $g_1, \cdots, g_{2p+1}$ continues à une variable et ne dépendant que de ϕ avec :

$$\phi(x_1, \cdots, x_p) = \sum_{k=1}^{2p+1} g_k(\sum_{j=1}^{p} \Psi_{k,j}(x_j)).$$

L'idée était alors tentante de dire que comme les fonctions Ψ sont Lipschitziennes et unidimensionnelles alors en utilisant le corollaire 1 :

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_{k,j}(X_n^j) - \Psi_{k,j}(X^j)\|_{\mathbb{D}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\sum_{j=1}^{p} \Psi_{k,j}(X_n^j) - \sum_{j=1}^{p} \Psi_{k,j}(X^j)\|_{\mathbb{D}} = 0.$$

Il aurait alors suffit d'utiliser (SEID) en ayant démontré au préalable que les fonctions de représentation de Kolmogorov $\Psi_{k,j}$ sont telles que $\sum_{j=1}^{p} \Psi_{k,j}(X^j)$ est non dégénérée. Eu égard au caractère strictement croissant des $\Psi_{k,j}$ on aurait pu y croire, néanmoins ce théorème de Kolmogorov est si puissant que le revers de la médaille entraîne que les fonctions $\Psi_{k,j}$ sont trop chaotiques pour faire marcher l'idée. Par contre, il existe peut-être des méthodes de représentation plus "souples" qui font que cette idée ne doit pas être trop vite abandonnée.

4.4.2 Prolongement sur l'espace de Wiener

Le point clé qui permet la preuve de (SEID) dans l'espace de Wiener, est la propriété de Schwarz de commutation des dérivées : $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$. Ce fait curieux semble également être au coeur de la démonstration de la conjecture dans le cas général, malheureusement le cas général ne permet pas de se ramener à la mesure de Lebesgue.

Plaçons nous pour l'instant dans l'espace de Wiener et dans le domaine $\mathbb{D}$ de l'opérateur carré du champ de Malliavin. Soient U, V, W des fonctionnelles régulières (par exemple dans $\mathbb{D}^{\infty,p}$). A-t-on une inégalité de commutation de ce type :

$$|\mathbb{E}\{\Gamma[\Gamma[U,V],W]-\Gamma[\Gamma[U,W],V]\}|\leq C_{V,W}\|U\|_{\mathbb{D}}?$$

A priori U est dérivé 2 fois dans l'expression ci-dessus, mais si on y regarde le cas de la dérivée usuelle, un phénomène de compensation du au lemme de Schwarz permet d'avoir une dépendance à la dérivée première uniquement. La question est bien naturelle de savoir si ce phénomène peut-être étendu au cas de la dérivée de Malliavin dans l'espace de Wiener.

5. RÉGULARITÉ DES MESURES INVARIANTES, PROPRIÉTÉ EID

5.1 Introduction

A Dirichlet structure is a term $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ where $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is a probability space and Γ a square field operator acting on the sub domain $\mathbb{D}$ of $L^2(\mathbb{P})$. Γ is a positive symmetric bilinear form which satisfies a functional calculus of $\mathcal{C}^1_{Lip}$ class. $\mathbb{D}$ endowed with the norm $\sqrt{\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{P})} + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\Gamma[\cdot,\cdot])}$ has is complete. This condition of completeness of the domain $\mathbb{D}$ implies a special link between the probability $\mathbb{P}$ and the square field operator Γ. A typical example of such a structure is $(\mathcal{O}, \mathcal{B}(\mathcal{O}), d\lambda, H^1(\mathcal{O}), \Gamma[f] = \nabla f^t \nabla f)$ where $\mathcal{O}$ is an open set of $\mathbb{R}^n$, λ the normalized Lebesgue measure and $H^1(\mathcal{O})$ the corresponding sobolev space. Caracterizing measures of $\mathbb{R}^d$ which can be endowed with a Dirichlet structure is a very hard problem of geometric measure theory which has been solved only for dimension $d = 1$ by Hamza [21](p.105). For $d > 1$, only sufficient conditions are known. We also refer to [21](p.100-110) for details.

Such structures have been extensively studied in the cases of the Wiener space, the Poisson space and the Monte-Carlo space. Thus, conditions under which the laws of the solutions of stochastic differential equations admit a density with respect to Lebesgue measure have been provided (see for instance [11], [19] or [18]). Proofs are based on the fact that property of energy image density ensures that a random variable with almost surely regular square field operator is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. This property has been conjectured in 1986 by N. Bouleau and F. Hirsch [11]. Getting qualitative criteria under which laws of solutions of stochastic differential equations have a density can also be done thanks to Malliavin calculus. Nevertheless this method needs more regularity of the functional coefficients of the stochastic differential equation.

Let us consider a Markov chain $X_{n+1} = \phi(X_n, Y_{n+1})$ where $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ is a $\mathcal{C}^1_{Lip}$ map and random variables Y_i are the projections of a product Di-

richlet structure $S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu, \mathbb{D}, \Gamma)^{\mathbb{N}}$ which satisfies the property of energy image density. We assume that there exists an ergodic measure π, and we exhibit conditions under which the probability space $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \pi)$ is endowable with a Dirichlet structure satisfying the property of energy image density. Then we can greatly extend the class of measures which can be equipped with a Dirichlet structure. We will also derive some simple criteria under which π admits a density.
These results are a generalization of J-B. Graveraux and A. Coquio's works ([22] and [23]). The latters are based on Malliavin calculus. Their hypothesis of regularity are stronger than ours. , for some technical reasons they assumed that the iterated maps are contractant which implies unique ergodicity. We can avoid this hypothesis, using fast enough decreasing weights on the square field operators of the product structure. This is an important improvement because getting criteria of absolute continuity of π without unique ergodicty type conditions can be used to prove some strong ergodic properties of the Markov chain. We will give an example of such an application.
Before giving the statement of the results, we recall some classical facts about Dirichlet structure theory and ergodic theory of random dynamical systems. Let's finally mention that the strong link existing between Dirichlet forms theory and error calculus or sensitivity calculus leds to the equivalent terminology of error structure. Such an approach of Dirichlet structures can be found in [5], [7] or [8].

5.1.1 Preliminaries of Dirichlet structure theory

Définition 6 (Dirichlet structure). *A Dirichlet structure will design a term* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ *such that :*

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *is a probability space.*
2. $\mathbb{D}$ *is a dense vector space in* $L^2(\mathbb{P})$.
3. $\Gamma : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow L^1(\mathbb{P})$ *is a bilinear, symmetric, nonnegative operator.*
4. Γ *satisfies a function calculus of* $\mathcal{C}^1_{Lip}$ *class :*

   For $U = (U_1, \cdots, U_p) \in \mathbb{D}^p$ *and* $F \in \mathcal{C}^1_{Lip}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ *then* $F(U) \in \mathbb{D}$ *and*

$$\Gamma[F(U)] = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x_k}(U) \frac{\partial F}{\partial x_l}(U) \Gamma[U_k, U_l].$$

5. $\mathbb{D}$ *endowed with the norm* $\sqrt{\|.\|^2_{L^2(\mathbb{P})} + \frac{1}{2}\mathcal{E}[.]}$ *is a Banach space.*

For some later convenience we will adopt the following notations :

- For a given Dirichlet structure $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ and for $\alpha > 0$ we will note
$S^\alpha = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \alpha\Gamma)$, the dilatation of structure S square field operator.
- For $U = (U_1, \cdots, U_p) \in \mathbb{D}^p$, we will note :

$$\Gamma[U] = \begin{pmatrix} \Gamma[U_1, U_1] & \Gamma[U_1, U_2] & \cdots & \Gamma[U_1, U_p] \\ \Gamma[U_2, U_1] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \Gamma[U_{p-1}, U_p] \\ \Gamma[U_p, U_1] & \cdots & \Gamma[U_p, U_{p-1}] & \Gamma[U_p, U_p] \end{pmatrix}.$$

- $\partial_1\phi(x, y) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ is the jacobian matrix of $x \longrightarrow \phi(x, y)$ at (x, y).
- $\partial_2\phi(x, y) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{R})$ is the jacobian matrix of $y \longrightarrow \phi(x, y)$ at (x, y).
- For some matrix A, we will note its transposition ${}^tA$.
- We will also note $\phi_{Y_1}(x) = \phi(x, Y_1)$ and for $p \leq q$ we note $\mathcal{Z}_p^q(x) = \phi_{Y_p} \circ \cdots \circ \phi_{Y_q}(x)$ the reversed iterations. It is obvious that $\mathcal{Z}_1^q(x)$ has same distribution as $X_q(x)$.

Let's remind precisely the density of energy image property.

Conjecture 2 (density of energy image)**.** *Let $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ a Dirichlet structure.*
Let $U = (U_1, \cdots, U_p) \in \mathbb{D}^p$, and λ_p the p-dimensional Lebesgue measure, then we have

$$U_* \ \det \Gamma[U] d\mathbb{P} \ll \lambda_p.$$

Définition 7 (product of Dirichlet structures)**.** *Let's $S_i = (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i, \mathbb{D}_i, \Gamma_i)$ a finite or countable family of Dirichlet structures. Then $\prod_{i\in I} S_i$ is the Dirichlet structure on the product of probability spaces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i, \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}_i)$ whose domain is,*

$$\mathbb{D} = \Big\{ X \in L^2(\mathbb{P}) \,|\, \forall i \in I,\, \omega_i \to X \in \mathbb{D}_i \textit{ and } \sum_{i\in I} \mathcal{E}_i(X) < \infty \Big\},$$

and whose square field operator is,

$$\Gamma[X] = \sum_{i\in I} \Gamma_i[X].$$

Here we state the following key lemma.

Lemme 11. *Let $(S_i)_{i\in I}$ a finite family of Dirichlet structures. We assume that $\prod_{i\in I} S_i$ satisfies the density of energy image property. Let $(\alpha_i)_{i\in I}$ a corresponding family of positive numbers. Then $\prod_{i\in I} S_i^{\alpha_i}$ also satisfies the density of energy image property.*

Démonstration. We first notice that dilating the square field operators does not change the domain of the Dirichlet forms. Let $U = (U_1, \cdots, U_p) \in \mathbb{D}^p$ with $\mathbb{D}$ the domain of $\prod_{i\in I} S_i$.
We must prove that $U_* (\det \sum_{i\in I} \alpha_i \Gamma_i[U]) d\mathbb{P} << \lambda_p$. But the matrix $\Gamma_i[U]$ are nonnegative symmetric, and α_i are positive. We conclude that

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \Gamma_i[U] \in \mathcal{G}L_p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{i\in I} \Gamma_i[U] \in \mathcal{G}L_p(\mathbb{R}).$$

That ensures density image property for $\prod_{i\in I} S_i^{\alpha_i}$. ($\Gamma_i$ is the square field operator of the structure S_i). q.e.d

5.1.2 Preliminaries of ergodic theory

Here we remind some standard facts about ergodic theory of random maps and introduce our future notations.

Définition 8 (ergodicity)**.** *Let T the transition operator : $Tf(x) = \mathbb{E}[f \circ \phi(x, Y_1)]$.*
π is said to be ergodic if and only if $Tf = f$ π-a.e and f coninuous implies that f is π-a.e constant.

The above definition is equivalent to the ergodicity of $\pi \otimes \mu^{\mathbb{N}}$ for the associated dynamical system :

$$S = \begin{cases} \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \\ (x, \omega) \longrightarrow (\phi(x, \omega_0), \tau_l(\omega)). \end{cases}$$

(τ_l is the left shift). See [30](p.13-30) for precise proof and related results.
We shall prove the two following Theorems in the final appendix. These Theorems are obviously known, unfortunately they don't appear clearly in the related literature.

Théorème 12. *Let $(E, \mathcal{B}(E), \nu)$ a topological space and $H : (E, \nu) \longrightarrow (E, \nu)$ an ergodic transformation.*
By virtue of Kolmogorov Theorem we can define on $E^{\mathbb{N}}$ the measure ρ by the following relations on cylindrical maps :

$$\int \phi(x_1, \cdots, x_p) d\rho = \int \phi(H^{p-1}x, \cdots, x) d\nu_x.$$

Then ρ is ergodic for the left shift on $E^{\mathbb{N}}$:

$$\tau_l = \begin{cases} E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^{\mathbb{N}} \\ (x_1, x_2, \cdots) \longrightarrow (x_2, x_3, \cdots). \end{cases}$$

Let ψ some continuous bounded function, then $M_n(\psi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \psi \circ \phi_{Y_1} \circ \phi_{Y_2} \cdots \phi_{Y_n}(x) d\pi_x$ is a bounded martingale for the filtration generated by $(Y_1, \cdots, Y_n)$. In virtue of Riesz representation Theorem, the limit $M_\infty(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\nu_\omega(x)$ for some random probability measure $\nu_\omega(x)$. Then we have the following ergodic Theorem (which traduces ergodicity on past).

Théorème 13 (ergodicity on past)**.** *The measure $\nu_\omega(x) \otimes \mu^{\mathbb{Z}}$ is ergodic for the following transformation*

$$\mathcal{S}_{-\infty} = \begin{cases} \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}} \\ (x, \omega) \longrightarrow (\phi_{\omega_0}(x), \tau_r(\omega)). \end{cases}$$

(Where τ_r is the right shift)

5.1.3 Statement of the results

Let's now give the setting of this work. We are given a product Dirichlet structure $S = (R^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu, \mathbb{D}, \Gamma)^{\mathbb{N}}$ satisfying the property of energy image density. Let Y_i be the independent identically distributed random variables corresponding to the coordinates of S. Let π be an ergodic measure of the Markov chain $X_{n+1} = \phi_{Y_{n+1}}(X_n)$. We shall assume that :

1. $\pi \otimes \mu$-a.e, $\det \partial_1 \phi(x, y) \neq 0$.
2. $\exists n \geq 1$, $\pi \otimes \mathbb{P}\big\{ \det \Gamma[X_n(x)] > 0 \big\} > 0$.

The above non degeneracy conditions are similar to the conditions found by Gravereaux and Coquio in [22]. They ensure the following theorem.

Théorème 14. *Under non degeneracy conditions* 1 *and* 2*, the probability space $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \pi)^{\mathbb{N}}$ may be endowed with a non trivial Dirichlet structure satisfying the property of energy image density. Moreover π is absolutely continuous with respect to the d dimensional Lebesgue measure.*

5.2 Construction of Dirichlet structures on $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \pi)$

We now set $\alpha_i = (K+1)^{-2i}$ where K is the global Lipschitz constant of ϕ. We will use currently the Dirichlet structure $S_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu, \mathbb{D}, \alpha_i\Gamma) = ((R^n)^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu^{\mathbb{N}}, \mathbb{D}_\alpha, \Gamma_\alpha)$ which was proved to satisfy energy image density. From now on, the variables Y_i are set to be the coordinates of S_α. In that section we won't use the ergodicity of π but only its invariance. Using this invariance we construct the Dirichlet structures $S_{n,\pi}$ in a way really closed to the concept of image structure and generalized image structure that we can find in [5] (p.12-23). The only difference is about the construction of the domain which is in that case a bit more difficult. Moreover, taking $\phi(x,y) = \psi(y)$, we can notice that the next Theorem is a generalization of image structure construction.

For $n \geq 1$, we set :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{n,\pi} &= \left\{\psi \in L^2(\pi) \,\middle|\, \pi \otimes \mu^{\mathbb{N}}\text{-ae, } \psi(\mathcal{Z}_1^n(x)) \in \mathbb{D}_\alpha \text{ and } \int \mathcal{E}_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))]d\pi_x < \infty\right\} \\
\Gamma_{n,\pi}[\psi](x) &= \mathbb{E}_{\pi_z \otimes \mu^{\mathbb{N}}}\left[\Gamma_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(z))] \,\middle|\, \mathcal{Z}_1^n(z) = x\right] \\
\mathcal{E}_{n,\pi}[\psi] &= \int \mathcal{E}_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))]d\pi_x = \int \Gamma_{n,\pi}[\psi](x)d\pi_x. \text{ (Since} \mathcal{Z}_1^n(z) \text{ is } \pi\text{-distributed, under } \pi_z \otimes
\end{aligned}$$

Théorème 15. *The space $S_{n,\pi} = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \pi, \mathbb{D}_{n,\pi}, \Gamma_{n,\pi})$ is an Dirichlet structure.*

Démonstration. We will successively check the axioms of an Dirichlet structure.

- $D_{n,\pi}$ is a vector space containing 1, moreover it is dense on $L^2(\pi)$ since he contains regular maps with compact support.
- $\Gamma_{n,\pi}$ is a bilinear positive operator as the conditional expectation of such an operator.
- Let $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_p) \in \mathbb{D}_{n,\pi}^p$ and $F \in \mathcal{C}^1_{Lip}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ with Lipschitz constant C. We have to prove :

  $$F(\psi_1, \cdots, \psi_p) \in \mathbb{D}_{n,\pi} \text{ and } \Gamma_{n,\pi}[F(\psi_1, \cdots, \psi_p)] = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\psi)\frac{\partial F}{\partial x_l}(\psi)\Gamma_{n,\pi}[\psi_k, \psi_l].$$

  The functional calculus is valid for the structure S_α.

We then have $\pi \otimes \mu^{\mathbb{N}}$-a.e $F(\psi(\mathcal{Z}_1^n(x)) \in \mathbb{D}_\alpha$ and :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha[F(\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))] &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial F}{\partial x_k}(\psi(\mathcal{Z}_1^n(x)))\frac{\partial F}{\partial x_l}(\psi(\mathcal{Z}_1^n(x)))\Gamma_\alpha[\psi_k(\mathcal{Z}_1^n(x)),\psi_l(\mathcal{Z}_1^n(x))] \\
&\leq C^2\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\sqrt{\Gamma_\alpha[\psi_k(\mathcal{Z}_1^n(x))]}\sqrt{\Gamma_\alpha[\psi_l(\mathcal{Z}_1^n(x))]} \\
&\leq pC^2\sum_{k=1}^{p}\Gamma_\alpha[\psi_k(\mathcal{Z}_1^n(x))].
\end{aligned}$$

It's then straightforward that $F \circ \psi \in \mathbb{D}_{n,\pi}$. Moreover,

$$\mathbb{E}\Big[\Gamma_\alpha[F\circ\psi(\mathcal{Z}_1^n(z))]\Big|\mathcal{Z}_1^n(z)=x\Big] =$$
$$\sum_{1\leq k,l\leq p}\frac{\partial F}{\partial x_k}(\psi)\frac{\partial F}{\partial x_l}(\psi)\mathbb{E}\Big[\Gamma_\alpha[\psi_k(\mathcal{Z}_1^n(z)),\psi_l(\mathcal{Z}_1^n(z))]\Big|\mathcal{Z}_1^n(z)=x\Big]$$

.

(Above expectations are taken under $\pi_z \otimes \mu^{\mathbb{N}}$ probability.)

– We now come to the important fact that $(\mathbb{D}_{n,\pi}, \sqrt{\|.\|^2_{L^2(\pi)} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{n,\pi}[.]})$ must be an Hilbert space. We then have to prove its completeness. Let $\psi_p \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}_{n,\pi}$ a Cauchy sequence for $\sqrt{\|.\|^2_{L^2(\pi)} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{n,\pi}[.]}$, that means that $\phi_p(\mathcal{Z}_1^n(x))$ is a Cauchy sequence for the Banach space $L^2(\pi,\mathbb{D}_\alpha)$. There exists a subsequence ψ_{k_p}, $\psi \in L^2(\pi,\mathbb{D}_\alpha)$ and $\Theta \in L^2(\pi)$ such that :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\psi_p(\mathcal{Z}_1^n(.)) &= \Psi \ \ (\text{for } \|.\|_{L^2(\pi,\mathbb{D}_\alpha)}). \\
\pi\otimes\mu^{\mathbb{N}}\text{-a.e, } \lim_{p\to\infty}\psi_{k_p}(\mathcal{Z}_1^n(x)) &= \Psi(x). \\
\pi\text{-a.e, } \lim_{p\to\infty}\psi_{k_p}(x) &= \Theta(x).
\end{aligned}$$

But $\pi \otimes \mu^{\mathbb{N}}$-ae, $\mathcal{Z}_1^n(x) \in \mathrm{supp}(\pi)$, thus $\lim_{p\to\infty}\psi_{k_p}(\mathcal{Z}_1^n(x)) = \Theta(\mathcal{Z}_1^n(x)) = \Psi(x) \in \mathbb{D}_\alpha$.

It is then easy to check that : $\lim_{p\to\infty}\int|\psi_p(x)-\Theta(x)|^2 d\pi_x + \frac{1}{2}\int\Gamma_{n,\pi}[\psi_p-\Theta]d\pi_x = 0.$

q.e.d

Using functional calculus in the Dirichlet structure S_α we give now a developed expression for $\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)]$.

Lemme 12. *Let's define for $k \leq n$,*

$$\begin{aligned} M_0 &= I_d. \\ M_k &= \partial_1(\phi(\mathcal{Z}_2^n(x), Y_1)\partial_1\phi(\mathcal{Z}_3^n(x), Y_2)\cdots\partial_1\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k). \end{aligned}$$

We then have :

$$\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)] = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k M_{k-1}\partial_2\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k)\Gamma[Y_k]^t\partial_2\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k)^t M_{k-1} \tag{5.1}$$

Démonstration. Using functional calculus we have :

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_k^n(x)] &= \partial_2\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k)\Gamma[Y_k]^t\partial_2\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k) \\ &+ \partial_1\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k)\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_{k+1}^n(x)]^t\partial_1\phi(\mathcal{Z}_{k+1}^n(x), Y_k). \end{aligned}$$

It's then a straightforward recurrence to get (1). q.e.d

One can construct a probability space $(E, \mathcal{E}, \nu)$ and random maps $(z_i, y_i, \Gamma[y_i])$ on that space, such that the following conditions are satisfied :
- $(y_i, \Gamma[y_i])$ are i.i.d, and are distributed like $(Y_i, \Gamma[Y_i])$.
- $\forall i \geq 1$, $\sigma\big(z_p;\ p \geq i+1\big)$ is independent of $(y_1, \Gamma[y_1], \cdots, y_i, \Gamma[y_i])$.
- $\forall i \geq 1$, z_i is π-distributed.
- $\forall i \geq 1$, $z_i = \phi(z_{i+1}, y_i)$.

The construction is based on Kolmogorov compatibility criteria, and will be explained in the final appendix. We then set, like previously :

$$\begin{aligned} m_0 &= I_d. \\ m_k &= \partial_1\phi(z_2, y_1)\partial_1\phi(z_3, y_2)\cdots\partial_1\phi(z_{k+1}, y_k). \end{aligned}$$

We can rewrite expression for $\Gamma_{n,\pi}$ using these variables :

Lemme 13. *Let ψ a regular map, then $\psi \in \mathbb{D}_{n,\pi}$ and :*

$$\Gamma_{n,\pi}[\psi](x) = \nabla\psi(x)\mathbb{E}_\nu\big[\sum_{k=1}^{n} \alpha^k m_{k-1}\partial_2\phi(z_{k+1}, y_k)\Gamma[y_k]^t\partial_2\phi(z_{k+1}, y_k)^t m_{k-1}\,\big|z_1 = x\big]^t\nabla\psi(x).$$

Démonstration. First, by functional calculus, (since ψ is regular) we have :

$$\Gamma_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))] = \nabla\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)]^t\nabla\psi(\mathcal{Z}_1^n(x)).$$

Moreover, applying lemma 2.1,

$$\int \mathbb{E}\Big[\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)]f(\mathcal{Z}_1^n(x))\Big]d\pi_x = \mathbb{E}_\nu\Big[f(z_1)\sum_{k=1}^n \alpha^k m_{k-1}\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)\Gamma[y_k]^t\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)^t m_{k-1}\,\Big].$$

Finally we have,

$$\mathbb{E}_{\pi_x\otimes\mu^{\mathbb{N}}}\Big[\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)]\Big|\mathcal{Z}_1^n(x)=y\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[\sum_{k=1}^n \alpha^k m_{k-1}\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)\Gamma[y_k]^t\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)^t m_{k-1}\Big|z_1=y\Big].$$

q.e.d

The next lemma is straightforward, we will use it for the last Theorem of this section.

Lemme 14. *For any regular map ψ, and $n \le m$, than $\psi \in \mathbb{D}_{n,\pi}\bigcap\mathbb{D}_{m,\pi}$ and $\mathcal{E}_{n,\pi} \le \mathcal{E}_{m,\pi}$.*

We are now going to study the limit of the structures $S_{n,\pi}$. We will introduce an Dirichlet prestructure endowed with square field operator defined on regular maps. As usually, the main difficulty is to show that the induced Dirichlet form is closable, the proof will be based entirely on the Theorem 2.1.

Théorème 16. *Let $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ a regular map with compact support. We set :*

$$\Gamma_\pi(x) = \nabla\psi(x)\mathbb{E}_\nu\big[\sum_{k=1}^\infty \alpha^k m_{k-1}\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)\Gamma[y_k]^t\partial_2\phi(z_{k+1},y_k)^t m_{k-1}\,\big|z_1=x\big]^t\nabla\psi(x).$$

Then, $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\pi,\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}),\Gamma_\pi)$ is a closable Dirichlet prestructure. S_π will be its closure.

Démonstration. We only have to check that the induced Dirichlet form $\mathcal{E}_\pi$ is closable. Let ψ_p be a given sequence in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ such that :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\int\psi_p(x)^2d\pi_x &= 0\\ \lim_{m,n\to\infty}\mathcal{E}_\pi[\psi_m-\psi_n] &= 0 \text{ (Cauchy sequence).}\end{aligned}$$

We are going to prove that $\lim_{p\to\infty} \mathcal{E}_\pi[\psi_p] = 0$, which is the closability definition. Since $|\sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_m]} - \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_n]}| \leq \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_m - \psi_n]}$, we know that, for some $l \geq 0$, $\lim_{p\to\infty} \mathcal{E}_\pi[\psi_p] = l$. If we succeed in proving that 0 is the only possible value for l, we will have proved the Theorem.

First we notice that, for $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n,\pi}[\psi] = \mathcal{E}_\pi[\psi]$.
Indeed, α has been chosen for compensating the matrix m_k growth. Since ϕ is globally K-Lipschitz, we can say that $\|m_p\| \leq K^p$, and that (geometrically fast) :

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^k \, \mathbb{E}_\nu \Big[\nabla\psi(z_1) m_{k-1} \partial_2\phi(z_{k+1}, y_k) \Gamma[y_k]^t \partial_2\phi(z_{k+1}, y_k)^t m_{k-1}{}^t \nabla\psi(z_1)\Big] = 0.$$

Let $\epsilon > 0$,

$$\begin{array}{ll} \exists N_0 \geq 1 \quad \text{such that :} & \forall n, m \geq N_0, \ \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_m - \psi_n]} \leq \epsilon. \\ \exists N_1 \geq 1 \quad \text{such that :} & |\sqrt{\mathcal{E}_{N_1,\pi}[\psi_{N_0}]} - \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_{N_0}]}| \leq \epsilon. \end{array}$$

Since $\mathcal{E}_{N_1,\pi}[.] \leq \mathcal{E}_\pi$ (lemma 2.3), (ψ_p) is also a cauchy sequence in $\mathbb{D}_{N_1,\pi}$. But by Theorem 2.1, this space is complete. Then, there exists $N_2 \geq N_0$, such that $\sqrt{\mathcal{E}_{N_1,\pi}[\psi_{N_2}]} \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_{N_0}]} &\leq \epsilon + \sqrt{\mathcal{E}_{N_1,\pi}[\psi_{N_0}]} \\ &\leq \epsilon + \sqrt{\mathcal{E}_{N_1,\pi}[\psi_{N_0} - \psi_{N_2}]} + \sqrt{\mathcal{E}_{N_1,\pi}[\psi_{N_2}]} \\ &\leq 2\epsilon + \sqrt{\mathcal{E}_\pi[\psi_{N_0} - \psi_{N_2}]} \\ &\leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

We are able to construct a subsequence N_k such that $\lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_\pi[\psi_{N_k}] = 0$ which ensures that the only possible value for l is 0. q.e.d

Remarque 9. *The above proof outlines the fact that* $D_\pi \subset \bigcap_{n\geq 1} \mathbb{D}_{n,\pi}$. *We can say a bit more about* $\mathbb{D}_\pi$, *one can show that :*
- $\mathbb{D}_\pi = \left\{\psi \in \bigcap_{n\geq 1} \mathbb{D}_{n,\pi} \middle| \sup_n \mathcal{E}_{n,\pi}[\psi] < \infty\right\}$.
- $\Gamma_\pi[\psi] = \lim_{n\to\infty} \Gamma_{n,\pi}[\psi]$.

5.3 Conditions for density of energy image

In that section, we will show that under non degeneracy conditions 1 and 2 the Dirichlet structure S_π satisfies the density of energy image property. Criteria for regularity of π will be derived.

Let's note for convenience :

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},\ M_{n,\pi} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k m_{k-1} \partial_2\phi(z_{k+1}, y_k)\Gamma[y_k]^t \partial_2\phi(z_{k+1}, y_k)^t m_{k-1}.$$

Lemme 15. *Let $\psi \in \mathbb{D}_\pi^p$, there exists $G(x) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ such that $\forall n \geq 1$:*
- *G is π-measurable*
- *$\pi_x \otimes \mu^{\mathbb{N}}$-a.e, $\det \Gamma_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))] = \det G(\mathcal{Z}_1^n(x))\Gamma_\alpha[\mathcal{Z}_1^n(x)]^t G(\mathcal{Z}_1^n(x))$*
- *π_x-a.e, $\det \Gamma_{n,\pi}[\psi](x) = \det G(x)\mathbb{E}\big[M_{n,\pi}\big|z_1 = x\big]^t G(x)$.*

Démonstration. We refer the reader to [11] (p.188, lemma 1.1.6.1) for a proof. It is a straightforward consequence of density of $\mathcal{C}^\infty$ maps in $\mathbb{D}_\pi$. We will just notice that this result is not ambiguous since we know that $\mathbb{D}_\pi \subset \bigcap \mathbb{D}_{n,\pi}$. q.e.d

We can make a first step toward density of energy image of S_π with the next lemma.

Lemme 16. *Let $n \geq 1$, and $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_p) \in \mathbb{D}_\pi^p$. Fix A a nullset of $\mathbb{R}^p$ with respect to Lebesgue measure, then :*

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\mathbf{1}_A(\psi_1(z_1), \cdots, \psi_p(z_1)) \det G_\psi(z_1) M_{\infty,\pi}{}^t G_\psi(z_1)\Big] = 0$$

Démonstration. Thanks to remark 2.1 we know that $\forall j \leq p,\ \psi_j \in \bigcap_{n\geq 1} \mathbb{D}_{n,\pi}$.
Let fix $n \geq 1$, thanks to lemma 1.1 we know that S_α satisfies density of energy image. Thus using lemma 5,

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\mathbf{1}_A(\psi(z_1)) \det G_\psi(z_1) M_{n,\pi}{}^t G_\psi(z_1)\Big] = \int \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A(\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))) \det \Gamma_\alpha[\psi(\mathcal{Z}_1^n(x))]\Big] d\pi_x = 0.$$

But $M_{n,\pi}$ is an increasing (for the order on symmetric matrix) sequence of nonnegative symmetric matrix such that $\lim_{n\to\infty} M_{n,\pi} = M_{\infty,\pi}$. Using monotone convergence Theorem under expectation we finally get the wished result. We notice that knowing explicitely $\mathbb{D}_{n,\pi}$ is a crucial point of the previous proof. q.e.d

Théorème 17. *Assume that ν-a.e, $\det M_{\infty,\pi} \neq 0$, then S_π satisfies the density of energy image property. We also have density of energy image for $S_\pi^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Let $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_p) \in \mathbb{D}_\pi^p$. Fix A a null set of $\mathbb{R}^p$ with respect to Lebesgue measure.
We want to prove that,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A(\psi(x)) \det \Gamma_\pi[\psi](x)\Big] = 0.$$

We have $\big\{ \det \mathbb{E}\big[M_{\infty,\pi} \big| \, z_1\,\big] = 0\big\} \subset \big\{ \det M_{\infty,\pi} = 0\big\} = \emptyset$.
We refer to [11] (p.188, lemma 1.1.6.2) for a proof of the previous inclusion, we derive that almost surely, $\det \mathbb{E}\big[M_{\infty,\pi} \big| \, z_1\,\big] \neq 0$.
Finally,

$$\begin{aligned}
\big\{ \det \Gamma_\pi[\psi](z_1) \neq 0\big\} &= \big\{ \det G(z_1)\mathbb{E}\big[M_{\infty,\pi}\big|z_1\big]^t G(z_1) \neq 0\big\} \\
&= \big\{ \det G(z_1)^t G(z_1) \neq 0\big\} \\
&= \big\{ \det G(z_1) M_{\infty,\pi}{}^t G(z_1) \neq 0\big\}.
\end{aligned}$$

Now we apply lemma 3.2 to get the wished result.

In order to check density of energy image of $S_\pi^{\mathbb{N}}$, we can use a coupling argument.
Indeed, π^p is an invariant measure for the coupled Markov chain :

$$(X_{n+1}^1(x_1), \cdots, X_{n+1}^p(x_p)) = (\phi(X_n^1(x_1), Y_{n+1}^1), \cdots, \phi(X_n^p(x_p), Y_{n+1}^p)).$$

This can be rewritten in the following way : $\mathcal{X}_{n+1} = \Phi(\mathcal{X}_n, (Y_{n+1}^i)_i)\,;\ \mathcal{X}_0 = (x_1, \cdots, x_p)$.

In the above formula Y_i^j are the coordinates of the mutually independent Dirichlet structures S_α^i. Applying the arguments of the proof of lemma 1.1, it is easy to check density of energy image for $\displaystyle\prod_{i=1}^p S_\alpha^i$. To get the wished result, we notice that the jacobian matrix of the application driving the above Markov chain are block diagonal. That ensures immediatly that the resulting block matrix is regular since every block is regular. q.e.d

Now we begin to use our hypothesis of ergodicity of π with the next proposition.

Proposition 7. $\nu\big\{ \det M_{\infty,\pi} \neq 0\big\} \in \{0, 1\}$.

Démonstration. Let's $p \geq 1$, we set like previously,

$$\begin{aligned} m_0^{(p)} &= I_d. \\ m_k^{(p)} &= \partial_1\phi(z_{p+1}, y_p)\partial_1\phi(z_{p+1}, y_{p+1})\cdots\partial_1\phi(z_{k+p}, y_{p+k-1}). \end{aligned}$$

We now define

$$M_{\infty,\pi}^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k m_{k-1}^{(p)} \partial_2\phi(z_{k+p}, y_{p+k-1})\Gamma[y_{p+k-1}]^t\partial_2\phi(z_{p+k-1}, y_k)^t m_{k+p}^{(p)}.$$

That represents the equivalent of matrix $M_{\infty,\pi}$ when we left shift coordinates in the space E :

$$(z_1, y_1, \Gamma[y_1], z_2, y_2, \Gamma[y_2], \cdots) \longrightarrow (z_p, y_p, \Gamma[y_p], z_{p+1}, y_{p+1}, \Gamma[y_{p+1}], \cdots).$$

Recall that we made the fundamental assumption that $\det \partial_1\phi(z_2, y_1) \neq 0$, so :

$$\begin{aligned} \big\{ \det M_{\infty,\pi}^{(p+1)} \neq 0 \big\} &\subset \big\{ \det M_{\infty,\pi}^{(p)} \neq 0 \big\} \\ \nu\big\{ \det M_{\infty,\pi} \neq 0 \big\} &= \nu\big\{ \det M_{\infty,\pi}^{(p)} \neq 0 \big\} \text{ (Left shift preserves } \nu) \\ \lim_{p\to\infty} \nu\big\{ \det M_{\infty,\pi}^{(p)} \neq 0 \big\} &= \nu\Big(\bigcap_p \big\{ \det M_{\infty,\pi}^{(p)} \neq 0 \big\} \Big) \in \{0, 1\} \text{ (Ergodicity of left shift on } E). \end{aligned}$$

q.e.d

The following is straightforward.

Corollaire 4. *The non degeneracy condition* 2 *is then equivalent to* $\det M_{\infty,\pi} \neq 0$ *almost surely, under this condition the previous theorem ensures that the measure* π *is absolutely continuous with respect to Lebesgue.*

Remarque 10.
We will say that $\mathcal{C}(\phi, \pi, \mu, \Gamma)$ *is satisfyed if and only if the non degeneracy condition 2 is not.*

When $d = 1$*,*

$$\mathcal{C}(\phi, \pi, \mu, \Gamma) \Leftrightarrow \partial_2\phi(z_2, y_1)\Gamma[y_1]^t\partial_2\phi(z_2, y_1) = 0.$$

When $d = 2$*,*

$$\mathcal{C}(\phi, \pi, \mu, \Gamma) \Leftrightarrow \Big(\partial_2\phi(z_2, y_1)\Gamma[y_1]^t\partial_2\phi(z_2, y_1) = \lambda(\omega)\partial_1\phi(z_2, y_1)\partial_2\phi(z_3, y_2)\Gamma[y_2]^t\partial_2\phi(z_3, y_2)^t\partial_1\phi(z_2, y$$

5.4 Application to the special case of $d = 1$

For a local Dirichlet form with square field operator, the energy image density is always true for real valued functions in the domain of the form. This can be found in [14] (p.251). The aim of this section is to use the special case $d = 1$, where conjecture has been proved, to get stronger result with weaker hypothesis. The following results may be used practically since they concern a large class of Markov chains and may be useful in numerical experimentations. Theoretically, the next results brings out a regularizing effect of ergodicity.

We make the following hypothesis in this section :

- $\phi \in \mathcal{L}_{ip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ with global Lipschitz constant K
- $\partial_1\phi(x, y) \neq 0$, λ_2-a.e.
- Y_i are real valued i.i.d variables admitting distribution μ such that $\frac{d\mu}{d\lambda} \neq 0$.
- The set of points where $\frac{1}{\frac{d\mu}{d\lambda}}$ is locally integrable is non empty.
- π is an ergodic measure of the Markov chain $X_{n+1} = \phi(X_n, Y_{n+1})$.

Remarque 11. *Strictly speaking there exists $L^1(\mathbb{R})$ functions such that $\frac{1}{f}$ is nowhere integrable. For instance f may vanish at any point of a generalized cantor set. We must include a new hypothesis to avoid such cases. One has to notice that in most cases encountered practically, the above hypothesis on μ are fulfilled.*

We set $\nabla\phi = (\partial_1\phi, \partial_2\phi)$ a borelian representant of the gradient such that :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \phi(c, d) - \phi(a, b) = \int_0^1 \nabla\phi(a + t(c - a), b + t(d - b)).(c - a, d - b)dt.$$

We seek sufficient conditions for the regularity of the measure π. We will remind the Hamza conditions which give all Dirichlet structures on the space $\mathbb{R}$. We refer to [21](p.105) for the corresponding proofs.

Théorème 18 (Hamza caracterization of real Dirichlet structures)**.** *A term :*

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}), \Gamma[\psi] = (\psi')^2 g)$ *is a closable Dirichlet prestructure if and only if :*

- $g d\nu \ll \lambda$
- $a = \frac{g d\nu}{d\lambda} = 0$ *on* $\mathbb{R} - \left\{ x \middle| \exists \epsilon > 0 \text{ with } \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{dx}{a} < \infty \right\}$.

Lemme 17. *Owing to the fact that $\frac{d\mu}{d\lambda} \neq 0$, the space $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ may be equipped with some Dirichlet form.*

Démonstration. We may write $\mu = \mu_a + \mu_s$ the Radon-Nikodym desintegration of μ with respect to Lebesgue. We will note $b(x) = \frac{d\mu}{d\lambda}(x)$. We also note A the set of points where $\frac{1}{b}$ is locally integrable and we set $g(x) = \mathbf{1}_A(x)b(x)$. It is easy to check that $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathcal{C}_K^\infty, (\psi')^2 g)$ satisfies Hamza conditions. We bring out the fact that our hypothesis on the probability measure μ guarantees that $A \neq \emptyset$ and then that the Dirichlet structure is not trivial. q.e.d

Théorème 19. *If* $\pi \otimes \mu \Big\{ (x,y) \Big| (\partial_2 \phi(x,y))^2 g(y) \neq 0 \Big\} > 0$ *then* π *is absolutely continuous with respect to Lebesgue.*

Démonstration. We use with the above Dirichlet structure the Theorem 4. Since we study regularity of a real valued variable we won't need density of energy images hypothesis. In that case the condition $\mathcal{C}(\phi, \pi, \mu, \Gamma)$ becomes $\pi \otimes \mu$-a.e, $(\partial_2 \phi(x,y))^2 g(y) = 0$.
We bring out the fact that studying real valued variable enables Lipschitzian functional calculus instead of $\mathcal{C}^1_{Lip}$ one. q.e.d

The following result is important since it gives a way to use the previous results to ensure unique ergodicity for the Markov chain.

Théorème 20 (Application to unique ergodicity)**.** *Let assume that*

- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}\{\det \partial_1 \phi(x, Y) = 0\} = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_n(x)] > 0\} > 0$.
- *There exists one initial condition whose orbit is almost surely dense in the state space.*

Then the Markov chain admits only one ergodic measure.

5.5 Appendix-Proof of ergodic Theorems

In that appendix we will prove the ergodic results we used in this article. Proofs consist in showing that the measures are extremal among the invariant measures which is equivalent to ergodicity. The proofs are not difficult but may seem a bit technical owing to the notations, that's why we will only give the ideas and the main arguments.

Théorème 21 (2.1)**.** *Let* $(E, \mathcal{B}(E), \nu)$ *a topological space and* $H : (E, \nu) \longrightarrow (E, \nu)$ *an ergodic transformation.*
By virtue of Kolmogorov Theorem we can define on $E^{\mathbb{N}}$ *the measure* ρ *by the following relations on cylindrical maps :*

$$\int \phi(x_1, \cdots, x_p) d\rho = \int \phi(H^{p-1}x, \cdots, x) d\nu_x.$$

Then ρ is ergodic for the left shift on $E^{\mathbb{N}}$:

$$\tau_l = \begin{cases} E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^{\mathbb{N}} \\ (x_1, x_2, \cdots) \longrightarrow (x_2, x_3, \cdots). \end{cases}$$

Démonstration. ρ is an invariant measure of the left shift. Let's assume that $\rho = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ with ρ_1 and ρ_2 two invariant measures. We notice that ρ-a.e, $x_1 = Hx_2 = H^2x_3 = \cdots = H^p x_{p+1}$, we then have ρ_1-a.e and ρ_2-a.e, the same relations. Moreover, since ρ_1 is preserved under shift operations, we have that $x_{1*}\rho_1 = x_{2*}\rho_1$. But $x_1 = Hx_2$, it follows that $x_{1*}\rho_1$ is an invariant measure on E for H. The same holds for $x_{1*}\rho_2$ with $\nu = tx_{1*}\rho_1 + (1-t)x_{1*}\rho_2$. Ergodicity of ν ensures to the desired result. q.e.d

Since π is an ergodic measure of the Markov chain X_n, we know that $\pi \otimes \mu^{\mathbb{N}}$ is ergodic for the dynamical system :

$$S = \begin{cases} \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \\ (x, \omega) \longrightarrow (\phi(x, \omega_0), \tau_l(\omega)). \end{cases}$$

Let's note μ_1 the law of $(Y_1, \Gamma[Y_1])$, we can slightly reinforce the previous definition saying that $\pi \otimes \mu_1^{\mathbb{N}}$ is ergodic for the dynamical system :

$$S_1 = \begin{cases} \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}} \\ (x, \omega) \longrightarrow (\phi(x, \omega_0), \tau_l(\omega)). \end{cases}$$

That comes from the fact that $\Gamma[Y_n]$ does not play any role in the definition of our Markov chain and that is somehow a free improvement.

Théorème 22 (2.2)**.** *Let ψ some continuous bounded function, then $M_n(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \circ \phi_{Y_1} \circ \phi_{Y_2} \cdots \phi_{Y_n}(x) d\pi_x$ is a bounded martingale. The limit is expressed with a random measure $\nu_\omega(x)$ such that $\int \psi(x) d\nu_\omega(x) = M_\infty(\psi)$. The measure $\nu_\omega(x) \otimes \mu_1^{\mathbb{Z}}$ is ergodic for the following transformation*

$$\mathcal{S}_{-\infty} = \begin{cases} \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{Z}} \\ (x, \omega) \longrightarrow (\phi_{Y_0}(x), \tau_r(\omega)). \end{cases}$$

(Where τ_r is the right shift)

Démonstration. Once again, we have to prove extremality of the invariant measure. Let $\nu_\omega(x) \otimes \mu_1^{\mathbb{Z}} = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$, with ρ_1 and ρ_2 two invariant

measures for the right shift. The key idea is to test the above relation for maps of the form $\psi_1(x)\psi_2(\omega_{-1}, \omega_{-2}, \cdots, \omega_{-n})$ that is to say for maps only depending on negative coordinates. We use the ergodicity of S_1 to check that ρ_1, ρ_2 and
$nu_\omega(x) \otimes \mu_1^{\mathbb{Z}}$ coincidate on these maps. When using the invariance we can push forward the relations and get the positive coordinates. Then we will get $\nu_\omega(x) \otimes \mu_1^{\mathbb{Z}} = \rho_1 = \rho_2$. q.e.d

Constructing the variables $(z_i, y_i, \Gamma[y_i])_{i\geq 1}$ used since lemma 3.2 is not hard when using Kolmogorov compatibility criteria in the adequate product space. Roughly speaking we set $E = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ and we define ν on cylindrical maps by the formula :

$$\int \Psi(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \int \mathbb{E}\Big\{\Psi\big((\phi_{Y_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n}(x), Y_1, \Gamma[Y_1]), \cdots, (\phi_{Y_n}(x), Y_n, \Gamma[Y_n])\big)\Big\}d\pi_x.$$

But for the establishment of the conditions $\mathcal{C}(\phi, \pi, \mu, \Gamma)$ we used the ergodicity on the left shift on the space E for the measure ν. To prove this ergodicity one has to use simultaneously the two above theorems and to check that $(z_i, y_i, \Gamma[y_i])$ are the appropriate coordinates.

6. MESURES INVARIANTES, CONVERGENCE VERS L'ÉQUILIBRE

6.1 Introduction

Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéressons à la chaîne de Markov $X_{n+1} = F(X_n, Y_{n+1})$ et à ses propriétés ergodiques. Dans le chapitre précédent, nous avons construit des structures d'erreurs portées par les mesures ergodiques de ces chaînes de Markov qui satisfaisaient non trivialement la propriété (EID) de densité de l'énergie image. En particulier nous en avons déduit des critères pour que les mesures stationnaires soient absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, même si ce n'était pas totalement l'objectif initial. Aussi dans la première partie de ce travail nous cherchons les critères les plus faibles d'absolue continuité des lois des mesures invariantes. Les hypothèses de régularité sont abaissées à Lipschitzien et la preuve consiste essentiellement en l'utilisation couplée de la formule de la coaire et du théorème ergodique dans le passé qui est prouvé dans l'appendice du chapitre précédent. Dans la seconde partie de ce travail, nous cherchons à estimer la classe de régularité des densités des mesures invariantes sous des hypothèses de non dégénérescence faibles. Dans la dernière partie de ce travail, nous étudions les propriétés asymptotiques de la chaîne de Markov en démontrant des conditions de Doeblin locales, qui si elles ont couplées à l'unique ergodicité permettent de prouver l'ergodicité géométrique. Nous en déduisons un théorème central limite.
La question de la régularité des mesures invariantes des chaînes de Markov a déjà été étudiée dans le passé ([23],[22]) sous des hypothèses de régularité plus fortes. En outre, il était supposé que la chaîne de Markov satisfaisait à une propriété de contraction ce qui assurait d'emblée son unique ergodicité. Dans notre travail, nous ne faisons pas cette hypothèse grâce à la mise de poids devant les chaînes de dérivées exactement comme le chapitre de thèse précédent. Cette idée est importante car elle permet d'établir l'unique ergodicité dans des contextes bien plus généraux que les contextes "contractants" ($\|\partial_1 F\| < 1$).

6.2 Critère général d'existence de densité

Théorème 23. *Soit $X_{n+1} = F(X_n, Y_{n+1})$ une chaîne de Markov admettant une mesure stationnaire ergodique π. Supposons que :*

1. *$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est globalement lipschitzienne. On peut donc fixer un représentant borélien $(\partial_1 F, \partial_2 F) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de la matrice jacobienne de F.*
2. *Y_i est une suite indépendante équidistribuée de loi μ non étrangère à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$. ($\frac{d\mu}{d\lambda_p} \neq 0$)*
3. *Pour $\pi \otimes \mu$ presque tout (x, y), $\det(\partial_1 F(x, y)) \neq 0$.*
4. *$\exists q > 1$, $\pi \otimes (\frac{d\mu}{d\lambda_p})^{\mathbb{N}}\{Rg(\partial_Y F_{Y_1} \circ \cdots \circ F_{Y_q}(x)) = n\} > 0$.*

Alors π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

Preuve du critère.
Précisons que la notation $\partial_Y F_{Y_1} \circ \cdots \circ F_{Y_q}(x)$ représente la différentielle de l'application $(Y_1, \cdots, Y_q) \to F_{Y_1} \circ \cdots \circ F_{Y_q}(x)$. La notation $(\frac{d\mu}{d\lambda_p})^{\mathbb{N}}$ dans la condition 4 ci-dessus dit que la probabilité est calculée pour des tirages des Y_i selon la partie régulière de μ.
La mesure aléatoire μ est par définition non étrangère à la mesure de Lebesgue, aussi pouvons nous écrire $\mu = \mu_a + \mu_s$ avec $\mu_a << \lambda_p$, $\mu_s \perp \lambda_p$ et $\mu_a \neq 0$. Il sera commode pour différencier la partie absolument continue de la partie singulière de μ d'introduire ϵ_i une suite équi-distribuée et indépendante de variables de Bernoulli de paramètre $\mu_a(\mathbb{R}^p)$ à valeurs dans $\{1, 2\}$, et deux suites indépendantes et equi-distribuées $(y_i^1)_{i\geq 1}$ (de loi $\frac{\mu_a}{\mu_a(\mathbb{R}^p)}$), et $(y_i^2)_{i\geq 1}$ (de loi $\frac{\mu_s}{\mu_s(\mathbb{R}^p)}$) de sorte $Y_i \overset{loi}{=} y_i^{\epsilon_i}$.
Il existe alors un espace probabilisé auxiliaire dans lequel sont définies des variables aléatoires $(z_i)_{i\geq 1}$, $(y_i^1)_{i\geq 1}$, $(y_i^2)_{i\geq 1}$ et ϵ_i satisfaisant aux conditions suivantes.

- $z_i = F(z_{i+1}, y_i^{\epsilon_i})$.
- z_i est distribuée selon π.
- z_{i+1} est indépendante de $(y_1^1, \cdots, y_i^1; y_1^2, \cdots, y_i^2; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_i)$.
- Les variables aléatoires y_i^1, y_i^2, ϵ_i sont mutuellement indépendantes.
- $y_i^1 \sim \frac{\mu_a}{\mu_a(\mathbb{R}^p)}$, $y_i^2 \sim \frac{\mu_s}{\mu_s(\mathbb{R}^p)}$, ϵ_i est de loi de Bernoulli (à valeurs dans $\{1, 2\}$) de paramètre $\mu_a(\mathbb{R}^p)$.

Nous utiliserons dans la preuve, le critère suivant dû à la formule de la coaire. Si G est une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $p \leq n$, pour tout représentant ∂G de la différentielle de G, $G_* \det(\partial G^t \partial G) d\lambda_n << d\lambda_p$.

Fixons enfin A un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$, et notons formellement $\frac{\partial z_1}{\partial y_k} =$

$\frac{\partial[F_{y_1^{\epsilon_1}} \circ \cdots \circ F_{y_k^{\epsilon_k}}(z_{k+1})]}{\partial y_k}$ la matrice jacobienne de la différentielle des k premières itérations par rapport au tirage $y_k^{\epsilon_k}$. Dans ce cas $\sum_{k=1}^n \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}$ représente un terme de la forme $\partial G^t \partial G$, où ∂G représente le jacobien de la différentielle de $F_{y_1^{\epsilon_1}} \circ \cdots \circ F_{y_n^{\epsilon_n}}(z_{k+1})$ par rapport aux variables aléatoires $y_i^{\epsilon_i}$ avec $\epsilon_i = 1$, c'est à dire uniquement par rapport aux tirages absolument continus. La formule de la coaire assure que

$$\mathbb{E}\{\mathbf{1}_A(z_1) \det \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}\} = 0.$$

Notons K la constante de Lipschitz globale de F et fixons $0 < \alpha < \frac{1}{K^2}$. On a alors :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{1}_A(z_1) \det \sum_{k=1}^n \alpha^k \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}\} = 0.$$

Soit en faisant $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{1}_A(z_1) \det \sum_{k=1}^\infty \alpha^k \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}\} = 0. \tag{6.1}$$

En effet, en vertu de la règle de la chaîne dans la différentielle, puisque $z_1 = F_{y_1^{\epsilon_1}} \circ \cdots \circ F_{y_n^{\epsilon_n}}(z_{n+1})$,

$$\|\frac{\partial z_1}{\partial y_k}\| = \|\partial_1 F(z_2, y_1^{\epsilon_1}) \cdots \partial_1 F(z_k, y_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}) \partial_2 F(z_{k+1}, y_k^{\epsilon_k})\| \leq K^k.$$

L'ajout du paramètre α dans l'équation 1 assure la convergence de la série, et permet le passage à la limite.

Pour achever la preuve, démontrons que selon les conditions de non-dégénérescence 3 et 4, avec une probabilité 1, $\det \sum_{k=1}^\infty \alpha^k \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}} > 0$. C'est l'objet du lemme suivant. q.e.d

Lemme 18. *Si les conditions 3 et 4 du théorème précédent sont satisfaites alors*

$$\mathbb{P}\{det \sum_{k=1}^\infty \alpha^k \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}} > 0\} = 1$$

Démonstration. Introduisons la variable aléatoire :

$$H((z_i)_{i\geq 1}, (y_i^1)_{i\geq 1}, (y_i^2)_{i\geq 1}, (\epsilon_i)_{i\geq 1}) = \det \sum_{k=1}^\infty \alpha^k \frac{\partial z_1}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k} \mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}.$$

Posons également τ le shift à gauche sur notre espace probabilisé tel que

$$\tau\Big((z_i)_{i\geq 1},(y_i^1)_{i\geq 1},(y_i^2)_{i\geq 1},(\epsilon_i)_{i\geq 1}\Big)=\Big((z_i)_{i\geq 2},(y_i^1)_{i\geq 2},(y_i^2)_{i\geq 2},(\epsilon_i)_{i\geq 2}\Big).$$

Il suffit alors de remarquer que $H(\omega)=0 \Rightarrow H(\tau\omega)=0$. En effet, s'agissant d'une somme de matrice symétriques positives :

$$0=\det\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\frac{\partial z_1}{\partial y_k}\frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k}\mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}\Rightarrow 0=\det\sum_{k=2}^{\infty}\alpha^k\frac{\partial z_1}{\partial y_k}\frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k}\mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}.$$

Mais, $\det\sum_{k=2}^{\infty}\alpha^k\frac{\partial z_1}{\partial y_k}\frac{{}^t\partial z_1}{\partial y_k}\mathbf{1}_{\{\epsilon_k=1\}}=\det(\partial_1F(z_2,y_1^{\epsilon_1}))^2H(\tau\omega)$, l'hypothèse de non dégénérescence 3 permet de conclure.
La suite de la preuve repose sur le fait que le shift défini ci-dessus est ergodique de par l'ergodicité de la mesure invariante π. La variable aléatoire $\mathbf{1}_{H=0}$ étant invariante par le shift d'après ce qui précède, par ergodicité $\mathbb{P}(H=0)\in\{0,1\}$. Enfin l'hypothèse de non dégénérescence 4, assure que $\mathbb{P}(H>0)>0$. q.e.d

Remarque 12. *L'ergodicité du shift ci-dessus est démontrée dans l'appendice du chapitre précédent.*

Application 1 (Itération de combinaisons convexes aléatoires de fonctions contractantes)**.**
Soient f et g deux applications contractantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Soit Y_i une suite équi-distribuée de variables aléatoires de loi μ à support dans $[0,1]$. On suppose que μ n'est pas singulière. On étudie alors la chaîne de Markov : $X_{n+1}=Y_{n+1}f(X_n)+(1-Y_{n+1})g(X_n)$. Comme f et g sont deux applications contractantes, la chaîne de Markov converge en loi vers une unique probabilité d'équilibre, qui est donc ergodique. La condition de non-dégénérescence 3 se traduit par, $\pi\otimes\mu$ p.p, $yf'(x)+(1-y)g'(x)\neq 0$. La condition de non dégénérescence 4 devient quant à elle $\pi\big\{f(x)\neq g(x)\big\}>0$.
Cette dernière condition, prend dans ce cadre une forme remarquablement simple. Supposons que pour π presque tout x, $f(x)=g(x)$. Soit X_0 une condition initiale tirée selon π, alors $X_1=f(X_0)=g(X_0)$, mais X_1 est aussi de loi π donc $X_2=f(X_1)=g(X_1)$. Ainsi $X_n=f^n(X_0)=g^n(X_0)$ et converge presque sûrement vers l'unique point fixe de f qui est aussi l'unique point fixe de g. Nous avons démontré l'alternative suivante, sous la condition 3, soit π est absolument continue, soit π est un Dirac en l'unique point fixe de f qui est aussi l'unique point fixe de g.
Notons que la condition 3 n'est pas très restrictive, il suffit par exemple que les fonctions itérées soient strictement croissantes. Notons enfin que l'hypothèse de contraction des deux fonctions peut être relaxée à une hypothèse de contraction en moyenne.

6.3 Critères quantitatifs de régularité des densités

Dans cette section nous cherchons à obtenir des critères quantitatifs sur la classe de régularité des densités des mesures invariantes ergodiques. Afin d'éviter une technicité inutile, nous restreindrons dans un premier temps notre étude au cas des applications F agissant sur le tore multidimensionnel $\mathbb{T}^n$. Travailler sous hypothèse de compacité entraîne l'existence de probabilités invariantes ergodiques de plus l'hypothèse de périodicité que nous faisons permet d'éviter les termes de bord et simplifie la procédure d'intégration par parties.

6.3.1 préliminaires

Le cadre est le suivant :
- $F : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^p \longrightarrow \mathbb{T}^n$, de classe $\mathcal{C}^r$, avec $r \geq 2$.
- $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite indépendante et équi-distribuée de variables aléatoires de loi uniforme sur $\mathbb{T}^d$.
- π est une mesure stationnaire (non nécessairement ergodique) de la chaîne de Markov $X_{n+1} = F(X_n, Y_{n+1})$.

Par relèvement de F, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\Psi = (\Psi_1, \cdots, \Psi_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$ et 2π périodique en chaque variable telle que :

$$F(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}, e^{iy_1}, \cdots, e^{iy_p}) = (e^{i\hat{\Psi}_1(\theta_1,\cdots,\theta_p,y_1,\cdots,y_p)}, \cdots, e^{i\hat{\Psi}_n(\theta_1,\cdots,\theta_p,y_1,\cdots,y_p)}).$$

Notons $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_p)$, on a posé ci-dessus $\hat{\Psi}(\theta, y) = \theta * A + \Psi(\theta, y)$.
Le relèvement de la chaîne de Markov devient $\theta_{n+1} = \hat{\Psi}(\theta_n, Y_{n+1})$ où les variables aléatoires Y_i sont indépendantes équidistribuées de loi uniforme sur $[0, 2\pi]^p$. Les conditions de non dégénérescence subissent alors les modifications suivantes :

	qualitatif :	quantitatif :
1	$\pi \otimes \mu$-ps, $\det \partial_1 \hat{\Psi}(\theta, y) \neq 0$	$\forall (\theta, y)$, $\det \partial_1 \hat{\Psi}(\theta, y) \neq 0$
2	$\exists N$, $\pi \otimes \mathbb{P}\big\{Rg\partial_Y[\hat{\Psi}_{Y_1} \circ \cdots \circ \hat{\Psi}_{Y_N}](\theta) = n\big\} \neq 0$	$\forall \theta, \exists N_\theta$, $\mathbb{P}\big\{Rg\partial_Y[\hat{\Psi}_{Y_1} \circ \cdots \circ \hat{\Psi}_{Y_{N_\theta}}] = n\big\} \neq 0$

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 19.

Pour tout $N \geq 1$ et pour tout x, si $\mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} > 0$ *alors il* *existe* $\delta > 0$ *tel que* $\|x - z\| \leq \delta \Rightarrow \mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^z}{\partial y_k} > 0 \Big\} > 0.$

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$, $N \geq 1$ et $\alpha > 0$ fixés.
La fonction $(x, y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k}$ est uniformément continue.
Il existe $\delta > 0$ tel que $|x - z| \leq \delta \Rightarrow | \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} - \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^z}{\partial y_k} | \leq \alpha$.
Ainsi pour $|z - x| \leq \delta$,

$$\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \geq \epsilon + \alpha \Big\} \subset \Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \geq \epsilon \Big\} \subset \Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^z}{\partial y_k} \geq \epsilon - \alpha \Big\}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si $\mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} > 0$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \geq \epsilon \Big\} > 0.$ q.e.d

Remarque 13 (On peut s'affranchir de la dépendance de N_θ en θ ci-dessus)**.**

La condition quantitative 2 est équivalente à

$$\forall x \in [0, 2\pi]^n,\ \exists N_x \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial \theta_{N_x}^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_{N_x}^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} > 0.$$

Avec les notations $\theta_{N_x}^x = \hat{\Psi}_{Y_1} \circ \cdots \circ \hat{\Psi}_{Y_{N_x}}(x)$ *et* $\hat{\Psi}_Y(x) = \hat{\Psi}(x, Y)$.
Mais, $y \to \mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N_x} \frac{\partial \theta_{N_x}^y}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_{N_x}^y}{\partial y_k} > 0 \Big\}$ *est localement de signe constant d'après le lemme précédent. Par suite,* $\forall x \in [0, 2\pi]^n$, $\exists R_x > 0$ *tel que pour tout* y *dans* $[0, 2\pi]^n \cap B(x, R_x)$, $N_x = N_y$. *On a donc* $[0, 2\pi]^n = \bigcup_{x \in [0, 2\pi^n]} B(x, R_x) \cap [0, 2\pi]^n$.

Par compacité on extrait le sous recouvrement fini $[0, 2\pi]^n = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, R_{x_i}) \cap [0, 2\pi]^n$.
Et on pose finalement $N = \max\{N_{x_1}, \cdots, N_{x_p}\}$ *qui sera le rang de référence indépendant de* x. *Vérifions que cela fonctionne.*

Soit $x \in [0, 2\pi]^n$, il existe i dans $\{1, \cdots, p\}$ tel que $x \in B(x_i, R_{x_i}) \cap [0, 2\pi]^n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} &\geq \mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=N-N_{x_i}}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} && (6.2)\\
&= \mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=0}^{N_{x_i}} \frac{\partial \theta_{N_{x_i}}^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_{N_{x_i}}^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} && (6.3)\\
&> 0. && (6.4)
\end{aligned}$$

L'inégalité 2 vient du fait qu'il s'agit d'une somme de matrices symétriques positives. Pour démontrer l'égalité 3, rappelons qu'en vertu de la règle de la chaîne, $\frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} = \partial_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) \cdots \partial_1 \hat{\Psi}(\theta_k^{N,x}, Y_{k-1}) \partial_2 \hat{\Psi}(\theta_{k+1}^{N,x}, Y_k)$. On a posé la notation $\theta_k^{N,x} = \hat{\Psi}_{Y_k} \circ \cdots \circ \hat{\Psi}_{Y_N}(x)$. Ainsi obtient-on l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\det \sum_{k=N-N_{x_i}}^{N} \frac{\partial \theta_N^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_N^x}{\partial y_k} &= \det(\partial_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) \cdots \partial_1 \hat{\Psi}(\theta_{N-N_{x_i}}^{N,x}, Y_{N-N_{x_i}-1}))^2 \\
&\times \det \sum_{k=0}^{N_{x_i}} \frac{\partial \theta_{N-N_{x_i}+k}^{N,x}}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_{N-N_{x_i}+k}^{N,x}}{\partial y_k}.
\end{aligned}$$

On utilise pour conclure l'équidistribution des variables Y_i.

Remarque 14 (Un éclairage sur la condition de non-dégénérescence 2)**.**

La remarque précédente est importante car elle permet de mieux comprendre la deuxième condition de non-dégénérescence. Supposons que celle ci ne soit pas vérifiée. D'après la remarque précédente, cela signifie qu'il existe x tel que pour tout $N \geq 1$, $\mathbb{P}\Big\{ \det \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \theta_{N_x}^x}{\partial y_k} \frac{{}^t\partial \theta_{N_x}^x}{\partial y_k} > 0 \Big\} = 0$. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les x qui vérifient la condition précédente, $\mathcal{K}$ est compact en tant qu'intersection de fermés mais est également stable par la chaîne de Markov, de par l'invariance des lois. En outre sur $\mathcal{K}$ les fonctions itérées sont totalement dégénérées quel que soit l'ordre d'itération.
Par exemple, si $d = 1$, cela signifie que pour tout x de $\mathcal{K}$ et pour tout y $\partial \hat{\Psi}(x, y) = 0$. Autrement dit $\hat{\Psi}$ ne dépend pas de y sur $\mathcal{K}$ et tout se passe comme si on itérait une unique fonction. Dans ce cas critique il est impossible d'obtenir des critères de régularité. La condition de non dégénérescence 2 est donc particulièrement faible.

Plaçons nous désormais sous les conditions de non dégénérescence quantitatives 1 et 2. De par la remarque 2, on supposera quitte à renuméroter les fonctions que pour toute condition initiale x, $\mathbb{P}\Big\{ \det \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y)^t \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y) > 0\Big\} > 0$. Ces conditions nous incitent à introduire les quantités suivantes.

- $\delta = \inf_{x,y} |\det \partial_1 \hat{\Psi}(x,y)|$,
- $\omega = \inf_{x} \mathbb{P}\Big\{ \det \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y)^t \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y) > 0\Big\}$,
- $\omega(\epsilon) = \inf_{x} \mathbb{P}\Big\{ \det \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y)^t \partial_2 \hat{\Psi}(x,Y) \geq \epsilon\Big\}$.

Remarquons que $\omega > 0$ et que $\omega(\epsilon) > 0$ si ϵ est assez petit. Les conditions de régularité que nous allons obtenir par la suite seront le résultat d'une compétition entre les quantités δ et ω. Intuitivement on peut dire que plus δ et ω sont grands, plus les mesures invariantes admettent des densités régulières.

6.3.2 procédure d'intégration par parties

Introduisons l'opérateur carré du champ et le générateur associé qui nous serviront à intégrer par parties. On se donne un réel $0 < \alpha < \dfrac{1}{\sup_{x,y} \|\partial_1 \hat{\Psi}(x,y)\|^2}$.
Il s'agit essentiellement d'itérer une formule d'intégration par parties, nous nous inspirons grandement de la rédaction de J-B.Gravereaux et A.Coquio. Pour cela, on effectuera les modifications induites par l'ajout du poids α à l'opérateur carré du champ.
Soit $\phi = F(Y_1, \cdots, Y_N)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on définit :

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi,\phi] &= \sum_{k=1}^{N} \alpha^k \frac{\partial F(Y_1,\cdots,Y_N)}{\partial Y_k} \frac{{}^t\partial F(Y_1,\cdots,Y_N)}{\partial Y_k}. \\
L\phi &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \alpha^k \Delta_k F(Y_1,\cdots,Y_N).
\end{aligned}$$

On dira par la suite que ϕ est multipériodique si $\phi = F(Y_1,\cdots,Y_N)$ est 2π périodique par rapport à chacune des variable Y_i^j.

Lemme 20.
Soit $\phi = F(Y_1,\cdots,Y_N)$ de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ multipériodique, f définie sur $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs réelles et soit $\Psi = \Psi(Y_1,\cdots,Y_N)$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ multipériodique à valeurs réelles. On a l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)\Gamma[\phi_i,\phi_j]\Psi\Big\} = -\mathbb{E}\Big\{ f(\phi)(2\Psi L\phi^j + \Gamma[\Psi,\phi_j])\Big\}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)\Gamma[\phi_i,\phi_j]\Psi\Big\} &= \mathbb{E}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)(\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\frac{\partial \phi_i}{\partial Y_k}\frac{{}^t\partial \phi_j}{\partial Y_k})\Psi\Big\}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\alpha^k\mathbb{E}\Big\{(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)\frac{\partial \phi_i}{\partial Y_k})\frac{{}^t\partial \phi_j}{\partial Y_k}\Psi\Big\}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\alpha^k\mathbb{E}\Big\{\frac{\partial f(\phi)}{\partial Y_k}\frac{{}^t\partial \phi_j}{\partial Y_k}\Psi\Big\}\\
&= -\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\mathbb{E}\Big\{f(\phi)(\Delta_k\phi_j\Psi+\frac{\partial \phi_j}{\partial Y_k}\frac{{}^t\partial \Psi}{\partial Y_k})\Big\}\\
&= -\mathbb{E}\Big\{f(\phi)(2\Psi L\phi_j+\Gamma[\Psi,\phi_j])\Big\}.
\end{aligned}$$

q.e.d

Notons $h^{j,k}(A)$ le cofacteur (j,k) d'une matrice carrée A et notons $\Gamma[\phi]=(\Gamma[\phi_i,\phi_j])_{1\leq i,j\leq n}$.

Corollaire 5. *Sous les hypothèses du lemme qui précède on a :*

$$\mathbb{E}\Big\{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi)(\det\Gamma[\phi])^2\Psi\Big\}=\mathbb{E}\Big\{f(\phi)H(\Gamma[\phi],L(\phi),\Gamma[\Gamma[\phi],\phi],\Gamma[\Psi,\phi])\Big\}$$

Avec

$$H=-\sum_{j=1}^{n}\Big\{\Psi\big\{2\det\Gamma[\phi]h^{j,k}(\Gamma[\phi])L\phi_j+\Gamma[\det\Gamma[\phi],\phi_j]h^{j,k}(\Gamma[\phi])$$
$$+\det\Gamma[\phi]\Gamma[h^{j,k}(\Gamma[\phi]),\phi_j]\big\}+\det\Gamma[\phi]h^{j,k}(\Gamma[\phi])\Gamma[\Psi,\phi_j]\Big\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $\Psi^{i,j}=\det\Gamma[\phi]h^{i,j}(\Gamma[\phi])\Psi$ et de sommer sur j.

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi)\Gamma[\phi_k,\phi_j]\Psi^{i,j}\Big\}=-\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\Big\{f(\phi)(2\Psi^{i,j}L\phi^j+\Gamma[\Psi^{i,j},\phi_j])\Big\}.$$

Mais,

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi)\Gamma[\phi_k,\phi_j]\Psi^{i,j}\Big\}=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big\{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi)\sum_{j=1}^{n}\Gamma[\phi_k,\phi_j]\Psi^{i,j}\Big\}.$$

Comme $h^{i,j}$ est le cofacteur (i,j) la formule d'inversion des matrices donne :

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma[\phi_k, \phi_j] h^{i,j}(\Gamma[\phi]) = \mathbf{1}_{\{i=k\}} \det \Gamma[\phi].$$

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi)\Gamma[\phi_k, \phi_j]\Psi^{i,j} \Big\} = \mathbb{E}\Big\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)(\det \Gamma[\phi])^2 \Psi \Big\}.$$

Enfin en calculant $\Gamma[\phi_j, \Psi^{i,j}]$ on obtient le résultat souhaité. q.e.d

L'itération de la formule précédente a la conséquence suivante.

Corollaire 6.

$$\mathbb{E}\Big\{ D^m_{x^m} f(\phi) \det \Gamma[\phi]^{q+2m} \Psi \Big\} = \mathbb{E}\Big\{ f(\phi) \det \Gamma[\phi]^q H_m(\Psi) \Big\}$$

Où pour $1 \leq i \leq m$ *:*

$$H_1 = H(\Gamma[\phi], L(\phi), \Gamma[\Gamma[\phi], \phi], \Gamma[\Psi, \phi]),$$

et

$$H_{i+1} = H(\Gamma[\phi], L(\phi), \Gamma[\Gamma[\phi], \phi], \Gamma[H_i, \phi])$$

L'idée est d'appliquer les formules d'intégration par parties ci-dessus à $\theta_1^{N,x}$ où N est un nombre d'itérations fixé. Pour cela il va falloir calculer les variables aléatoires suivantes qui interviennent naturellement dans l'itération des intégrations.

- $Y(0)_N^x = \Gamma[\theta_1^{N,x}, \theta_1^{N,x}]$.
- $Y(1)_N^x = L\theta_1^{N,x}$.
- $\vdots$
- $Y(2p+2)_N^x = \Gamma[\theta_1^{N,x}, Y(2p)_N^x]$.
- $Y(2p+3)_N^x = \Gamma[\theta_1^{N,x}, Y(2p+1)_N^x]$.

Pour une variable aléatoire $G = G(Y_1, \cdots, Y_p)$ introduisons la notation $\tau G = G(Y_2, \cdots, Y_{p+1})$. Le résultat suivant est au coeur de la procédure d'intégration par parties, car il nous donne un contrôle des variables $Y(i)_N^x$ qui nous permettra de faire converger le nombre d'itérations vers l'infini.

Théorème 24. *Les variables aléatoires $Y(q)_N^x$ sont solutions d'équations aux différences aléatoires de la forme :*

$$\begin{aligned} Y(q)_0^x &= 0. \\ Y(q)_N^x &= A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q)_{N-1}^x + B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)_{N-1}^x, \cdots, \tau Y(q-1)_{N-1}^x, Y_1). \end{aligned}$$

Avec de plus,

$$\begin{aligned} \|B_{2p}(x, y(0), \cdots, y(2p-1), z)\| &\leq K_{2p} \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{2p-1}\leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \cdots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}}. \\ \|B_{2p+1}(x, y(0), \cdots, y(2p), z)\| &\leq K_{2p+1} \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{2p-1}\leq p+1} \|y(0)\|^{\alpha_0} \cdots \|y(2p-1)\|^{\alpha_{2p-1}} \|y(2p)\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0(x,y) &= \alpha^2\ \partial_x \hat{\Psi}(x,y) \otimes \partial_x \hat{\Psi}(x,y). \\ A_1(x,y) &= \alpha\ \partial_x \hat{\Psi}(x,y). \\ A_{p+2}(x,y) &= \alpha\ \partial_x \hat{\Psi}(x,y) \otimes A_p(x,y). \end{aligned}$$

$\Big(A \otimes B$ *désigne le produit tensoriel d'opérateurs,* $(A \otimes B)_{(i,j,k,l)} = A_{i,j} B_{k,l}\Big)$.

Démonstration. Nous allons effectuer une récurrence sur q. Commençons tout d'abord par $q = 0$ et $q = 1$.

<u>$q = 0$:</u>

$\Gamma[\theta_1^{N,x}] = \alpha \frac{\partial \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1)}{\partial Y_1} \frac{{}^t\partial \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1)}{\partial Y_1} + \partial_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1)\ \Gamma[\theta_2^{N,x}]\ {}^t\partial_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1)$.
Mais par construction de l'opérateur carré du champ : $\Gamma[\theta_2^{N,x}] = \alpha\tau\Gamma[\theta_1^{N-1,x}]$.
L'application linéaire $M \longrightarrow AM^tA$ admet la représentation matricielle $A \otimes A$. On en déduit le résultat pour $q = 0$ avec $B_0(x,y) = \alpha \frac{\partial \hat{\Psi}(x,y)}{\partial y} \frac{{}^t\partial \hat{\Psi}(x,y)}{\partial y}$.

<u>$q = 1$:</u>

$$\begin{aligned} L\theta_1^{N,x} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \alpha^k \Delta_k \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) \\ &= \frac{\alpha}{2} \Delta_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) + \frac{\alpha^2}{2} \partial_{11}^2 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) \otimes \tau Y(0)_{N-1}^x \\ &+ \alpha \partial_1 \hat{\Psi}(\theta_2^{N,x}, Y_1) \tau Y(1)_{N-1}^x. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat avec : $B_1(x,y(0),y) = \frac{\alpha}{2}\Delta_y\hat{\Psi}(x,y) + \frac{\alpha^2}{2}\partial^2_{11}\hat{\Psi}(x,y)y(0)$.

$\underline{\mathcal{H}(0,1,\cdots,q) \Rightarrow \mathcal{H}(0,1,\cdots,q,q+1) :}$

Par hypothèse de récurrence :

$Y(q)^x_N = A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q)^x_{N-1} + B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q-1)^x_{N-1}, Y_1)$.

Or,

$$Y(q+2)^x_N = \Gamma[\theta_1^{N,x}, Y(q)^x_N] = \sum_{k=1}^N \alpha^k \frac{\partial\theta_1^{N,x}}{\partial Y_k} {}^t\frac{\partial Y(q)^x_N}{\partial Y_k}.$$

Pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y(q)^x_N}{\partial Y_k} &= \frac{\partial\left[A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q)^x_{N-1} + B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q-1)^x_{N-1}, Y_1)\right]}{\partial Y_k} \\
&= \partial_1 A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q)^x_{N-1}\frac{\partial\theta_2^{N,x}}{\partial Y_k} \\
&+ A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\frac{\partial\tau Y(q)^x_{N-1}}{\partial Y_k} \\
&+ \partial_1 B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q-1)^x_{N-1}, Y_1)\frac{\partial\theta_2^{N,x}}{\partial Y_k} \\
&+ \sum_{q'=0}^{q-1}\partial_{y(q')} B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q-1)^x_{N-1}, Y_1)\frac{\tau Y(q')^x_N}{\partial Y_k}.
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$:

$\frac{\partial Y(q)^x_N}{\partial Y_1} = \partial_2 A_q(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q)^x_{N-1} + \partial_{Y_1} B_q(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q-1)^x_{N-1}, Y_1)$.

D'où

$Y(q+2)^x_N = A_{q+2}(\theta_2^{N,x}, Y_1)\tau Y(q+2)^x_{N-1} + B_{q+2}(\theta_2^{N,x}, \tau Y(0)^x_{N-1}, \cdots, \tau Y(q+1)^x_{N-1}, Y_1)$.

Avec les relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
A_{q+2}(x,y) &= \alpha\,\partial_1\hat{\Psi}(x,y) \otimes A_q(x,z) \\
B_{q+2}(x,y(0),\cdots,y(q+1),y) &= \alpha\,\partial_1\hat{\Psi}(x,y)[y(0)\left({}^t(\partial_1 A_q(x,y)y(q)) + {}^t\partial_1 B_q(x,y(0),\cdots,y(q-1),z)\right) \\
&+ \sum_{q'=0}^{q-1} y(q'+2)^t\partial_{y(q')}B_q(x,y(0),\cdots,y(q-1),y)] \\
&+ \alpha\,\partial_2\hat{\Psi}(x,y)\left({}^t(\partial_2 A_q(x,y)y(q)) + {}^t\partial_y B_q(x,y(0),\cdots,y(q-1),z)\right).
\end{aligned}$$

Les relations de récurrence sur les B_q ainsi que les initialisations respectives assurent que quand x et y sont fixés, ces fonctions sont polynomiales en les composantes de $y(q')$. Donc en dérivant par rapport à $y(q')$ on diminue de 1 la puissance des termes en $y(q')$.
Par la relation de récurrence sur les fonctions B_q on a :

$$\begin{aligned}\|B_{q+2}(x, y(0), \cdots, y(q+1), y)\| &\leq K\Big(\|y(0)\| \ \|y(q)\| + \|y(0)\| \ \|\partial_x B_q\| \\ &+ \sum_{q'=0}^{q-1} \|y(q'+2)\| \|\partial_{y(q')} B_q\| + \|y(q)\| + \|\partial_y B_q\|\Big).\end{aligned}$$

On en déduit les inégalités correspondantes sur les fonctions B_q. q.e.d

Théorème 25. *Puisque* $\alpha < \frac{1}{K^2}$ *(*$K = \sup_{(x,y)} \|\partial_1 \hat{\Psi}(x, y)\|$*), alors pour tout* p*, il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que* $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{N \geq 1} \|Y(p)_N^x\|_\infty \leq C_p$.

Démonstration. La preuve s'effectue par récurrence et repose sur le théorème précédent.

Pour $q = 0$:

$$\| \ \Gamma[\theta_1^{N,x}] \ \|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k K^{2k+2} = C_0.$$

Pour $q = 1$:

$$\|Y(1)_N^x\|_\infty \leq \alpha K \|Y(1)_{N-1}^x\|_\infty + K_1.$$

Comme $\alpha K^2 < 1$, on peut itérer l'inégalité précédente pour obtenir l'existence de C_1 telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{N \geq 1} \|Y(1)_N^x\|_\infty \leq C_1$.

Pour q quelconque, on utilise les inégalités obtenues sur les fonctions B_q :

$$\|Y(q)_N^x\|_\infty \leq \|A_q\|_\infty \|Y(q)_{N-1}^x\|_\infty + K_q \sup_{x,y} \|B_q(x, Y(0)_{N-1}^x, \cdots, Y(q-1)_{N-1}^x, y)\|_\infty.$$

On utilise enfin les inégalités obtenues pour majorer le terme de droite ainsi que le fait que $\|A_q\|_\infty < 1$ pour obtenir une majoration du type (où $a_q < 1$) :

$$\|Y(q)_N^x\|_\infty \leq a_q \|Y(q)_{N-1}^x\|_\infty + K_q.$$

q.e.d

Afin d'estimer le degré de régularité des densités des mesures invariantes considérées, nous utiliserons le lemme bien connu suivant :

Lemme 21 (régularité). *Soit μ une loi sur $\mathbb{T}^n$ telle que pour $m \geq n+1$, et $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$:*

$$|\hat{\pi}(p)| \leq \frac{1}{\|p\|_1^m}.$$

Alors μ admet une densité de classe $\mathcal{C}^{m-n-1}$.

On se donne $\epsilon > 0$ et on définit $\Psi_\epsilon = \frac{1}{(\det \Gamma[\theta_1^{N,x}]+\epsilon)^{2n+2}}$. Démontrons dans un premier temps la semi-continuité inférieure des densités.

Théorème 26 (régularité sci des densités).
Si $\hat{\Psi}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, sous les conditions de non-dégénérescence 1 et 2, toutes les mesures invariantes de la chaîne de Markov ont une densité sci.

Démonstration. Considérons $f(x) = e^{i<q,x>}$, avec $q = (q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $I \subset \{1, \cdots, n\}^{n+1}$. Et soit N un nombre d'itérations fixé. D'après le corollaire 5, on a :

$$\left|\mathbb{E}\{(\prod_{k \in I} q_k) f(\theta_1^{N,x}) \det \Gamma[\theta_1^{N,x}]^{2n+2} \Psi_\epsilon\}\right| = \left|\mathbb{E}\{f(\theta_1^{N,x}) H_{n+1}\}\right|.$$

Mais H est une fonction rationnelle en les variables $(Y(0)_N^x, \cdots, Y(n+1)_N^x)$ qui sont bornées uniformément en N et en x d'après le théorème précédent. On peut donc affirmer qu'il existe une constante $C_\epsilon > 0$ indépendante de N telle que :

$$\left|\mathbb{E}\{f(\theta_1^{N,x}) \det \Gamma[\theta_1^{N,x}]^{2n+2} \Psi_\epsilon\}\right| \leq \frac{C_\epsilon}{\|q\|^{n+1}}.$$

On se place sur le même espace probabilisé auxiliaire que le théorème 23, c'est à dire on intègre la condition initiale par rapport à une mesure invariante et on fait converger le nombre d'itérations vers l'infini. On obtient

$$\left|\mathbb{E}\{f(\theta_1) \det \Gamma[\theta]^{2n+2} \Psi_\epsilon\}\right| \leq \frac{C_\epsilon}{\|q\|^{n+1}}.$$

Par conséquent, la loi $\theta_{1*}(\det \Gamma[\theta]^{2n+2} \Psi_\epsilon d\mathbb{P})$ admet une densité continue. Remarquons que comme les conditions de non dégénérescence quantitatives sont plus fortes que les conditions qualitatives, on sait que toutes les mesures invariantes admettent des densités (voire le théorème 23). Donc θ_1 a une loi régulière par rapport à Lebesgue. Or par construction, les lois $\theta_{1*}(\det \Gamma[\theta]^{2n+2} \Psi_\epsilon d\mathbb{P})$ admettent des densités continues qui convergent en croissant vers la densité de θ_1 qui est la mesure invariante considérée. Celle ci est donc semi-continue inférieurement.

En effet $\lim_{\epsilon\to 0} \nearrow \det\Gamma[\theta_1]^{2n+2}\Psi_\epsilon = \mathbf{1}_{\{\det\Gamma[\theta_1]\neq 0} = 1\}$. Car d'après les conditions de non dégénérescence, l'opérateur carré du champ obtenu par un nombre infini d'itérations ne s'annule pas. q.e.d

L'obtention de la régularité sci utilise uniquement le fait que l'opérateur carré du champ $\det\Gamma[\theta_1]$ ne s'annule pas. Pour obtenir des régularité de classe $\mathcal{C}^k$, il faut étudier l'intégrabilité de $\frac{1}{\det\Gamma[\theta_1]}$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 27 (Conditions d'intégrabilité de $\frac{1}{\det\Gamma[\theta_1]}$)**.**

Soit :

$$0 < \lambda < \frac{\ln(1-\omega)}{\ln(\delta^2/K^{2n})}.$$

Alors :

$$\frac{1}{\det\Gamma[\theta_1]} \in L^\lambda(\mathbb{P}).$$

Démonstration. Rappelons que :

$$\Gamma[\theta_1] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \frac{\partial\theta_1}{\partial Y_k}\frac{{}^t\partial\theta_1}{\partial Y_k}.$$

Avec d'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial Y_k} = \partial_1\hat{\Psi}(\theta_2, Y_1))\cdots\partial_1\hat{\Psi}(\theta_k, Y_{k-1})\partial_2\hat{\Psi}(\theta_{k+1}, Y_k).$$

Notons $\tau_\epsilon = \inf\{k \geq 1 \mid \det\partial_2\hat{\Psi}(\theta_{k+1}, Y_k)^t\partial_2\hat{\Psi}(\theta_{k+1}, Y_k) \geq \epsilon\}$. On obtient $\det\Gamma[\theta_1] \geq \epsilon\alpha^{n\tau_\epsilon}\delta^{2\tau_\epsilon}$.
(On a $\alpha^{n\tau_\epsilon}$ au lieu de α^{τ_ϵ} par multilinéarité du déterminant).

Il faut donc étudier l'intégrabilité de $\delta^{-2\tau_\epsilon}\alpha^{-n\tau_\epsilon}$ en estimant $\mathbb{P}\{\tau_\epsilon \geq k\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\tau_\epsilon \geq k\} &= \mathbb{P}\{\det\partial_2\hat{\Psi}(\theta_2, Y_1)^t\partial_2\hat{\Psi}(\theta_2, Y_1) \leq \epsilon, \cdots, \det\partial_2\hat{\Psi}(\theta_{k+1}, Y_k)^t\partial_2\hat{\Psi}(\theta_k, Y_{k-1}) \leq \epsilon\} \\
&\leq (\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\{\det\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1)^t\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1) \leq \epsilon\})^{k-1} \\
&\leq (1-\omega_\epsilon)^{k-1}.
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\{\det\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1)^t\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1) \leq \epsilon\} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1-\mathbb{P}\{\det\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1)^t\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1) \geq \epsilon\}) \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1-\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\mathbb{P}\{\det\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1)^t\partial_2\hat{\Psi}(x, Y_1) \geq \epsilon\}) \\
&\leq 1-\omega_\epsilon.
\end{aligned}$$

Enfin pour $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta^{-2p\tau_\epsilon}\alpha^{-pn\tau_\epsilon}] < \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{-2pk}\alpha^{-pnk}\mathbb{P}\{\tau_\epsilon = k\} < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{-2pk}\alpha^{-pnk}\mathbb{P}\{\tau_\epsilon \geq k\} < \infty \\
&\Leftarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{-2pk}\alpha^{-pnk}(1-\omega_\epsilon)^k < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \delta^{-2p}\alpha^{-pn}(1-\omega_\epsilon) < 1.
\end{aligned}$$

On en déduit les conditions du théorème car $\lim_{\epsilon \to 0} \omega_\epsilon = \omega$ et parce que $\alpha < \frac{1}{K^2}$. q.e.d

Remarque 15. *On peut donner une formulation spectrale du critère précédent, si* $0 < \lambda < \frac{\ln(1-\omega)}{ln(\rho_{min}/\rho_{max})}$ *alors* $\frac{1}{\det \Gamma[\theta_1]^\lambda}$ *est intégrable. On a noté* ρ_{min} *(resp* ρ_{max}*) la plus petite (resp la plus grande) valeur propre de* $\partial_1 \hat{\Psi}(x,y)^t \partial_1 \hat{\Psi}(x,y)$ *uniformément en* x *et* y*.*

Le théorème précédent permet de donner des critères effectifs de régularité des densités.

Théorème 28. *Supposons* Ψ *de classe* $\mathcal{C}^{r+1}$*, avec* $r \geq n+1$ *et* $r < \frac{1}{3}\frac{\ln(1-\omega)}{\ln(\delta^2/K^{2n})}$ *alors toutes les mesures invariantes admettent une densité de classe* $\mathcal{C}^{r-n-1}$*.*

Démonstration. On pose $\Psi_\epsilon = \frac{1}{(\det \Gamma[\theta_1^{N,x}]+\epsilon)^{2r}}$ et on utilise le corollaire 5. Soit $I \subset \{1, \cdots, n\}^r$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{(\prod_{k \in I} q_k) f(\theta_1^{N,x}) \det \Gamma[\theta_1^{N,x}]^{2r} \Psi_\epsilon\} \quad &= \quad \mathbb{E}\{f(\theta_1^{N,x}) H_r\} \\
\Big| \mathbb{E}\{f(\theta_1^{N,x}) \det \Gamma[\theta_1^{N,x}]^{2r} \Psi_\epsilon\}| \quad &\leq \quad \frac{C_\epsilon}{\|q\|_1^r}.
\end{aligned}$$

Or H_r est une fraction rationnelle dont le dénominateur est $(\det \Gamma[\theta_1^{N,x}]+\epsilon)^{3r}$ et dont le numérateur est borné uniformément en ϵ car c'est un polynôme en les variables $Y(0)_N^x, \cdots, Y(q+1)_{N,x}$. On en déduit que

$$C_\epsilon \leq C \inf_{x,\epsilon} \mathbb{E}\{\frac{1}{(\det \Gamma[\theta_1^{N,x}]+\epsilon)^{3r}}\}.$$

Et il suffit de faire tendre ϵ vers 0.

q.e.d

On obtient la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 7. *Si $\hat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\omega = 1$ (i-e : pour tout x : $y \to \hat{\Psi}(x,y)$ est presque sûrement de rang n) alors toute les mesures invariantes admettent une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

6.4 Propriétés ergodiques, vitesse de convergence vers l'équilibre.

Dans cette section nous étudions les propriétés ergodiques des chaînes de Markov considérées. Nous cherchons des critères entraînant une convergence rapide des lois de X_n vers un équilibre de la chaîne. Pour cela, nous utiliserons les conditions de non dégénérescence ainsi que les résultats de régularité des mesures invariantes obtenus. Le résultat suivant est central dans notre étude.

Lemme 22 (Condition de "type" Doeblin locale)**.** *Il existe un recouvrement fini de $\mathbb{T}^n$ par des ouverts $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_k$ et des mesures positives finies et non nulles $\mu_1, \cdots, \mu_k$ telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{T}^n,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}_+),\ T\phi(x) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_i}(x) < \phi, \mu_i >$$

Avant de commencer la preuve, remarquons la similitude entre le résultat ci-dessus et la condition de Doeblin qui stipule que pour une mesure positive non nulle μ :

$$\forall x \in \mathbb{T}^n,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}_+),\ T\phi(x) \geq < \phi, \mu > .$$

Il est bien connu que la condition de Doeblin entraîne l'existence d'une unique mesure stationnaire π telle que :

$$\exists C > 0,\ \exists \rho < 1,\ \forall \nu,\ :\ \|\nu T^{*n} - \pi\|_{v.t} \leq C\rho^n$$

et,

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{K}, \mathbb{C}) :\ \|T^n\phi(x) - < \pi, \phi > \|_\infty \leq C\|\phi\|_\infty \rho^n.$$

Ces propriétés connues sous le nom de Doeblin récurrence sont particulièrement fortes. La très belle méthode du mathématicien Nagaev permet par des techniques de perturbations spectrales de démontrer des propriétés asymptotiques très fines sur les chaînes de Markov qui satisfont ce type de propriétés.

Démonstration. On continue à travailler avec $\hat{\Psi}$ qui est le relèvement de Ψ. Soit ϕ une fonction continue positive. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, nous notons

$$\mathcal{O}_x = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \det \partial_2\hat{\Psi}(x,y)^t\partial_2\hat{\Psi}(x,y) > 0\}$$

. L'idée est alors d'effectuer un simple changement de variable sur $\mathcal{O}_x$, pour cela on utilise la formule de la coaire.

$$\begin{aligned} T\phi(x) &= \mathbb{E}\{\phi(\hat{\Psi}(x,Y))\} \\ &\geq \mathbb{E}\{\phi(\hat{\Psi}(x,Y))\mathbf{1}_{\mathcal{O}_x}(Y)\} \\ &\geq \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}^n} \phi(z)dz \int_{\hat{\Psi}_x^{-1}(z)} \frac{d\mathcal{H}_{p-n}(t)}{\det \partial_2\hat{\Psi}(x,t)^t\partial_2\hat{\Psi}(x,t)} \\ &\geq \frac{1}{K}\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}^n} \phi(z)\mathcal{H}_{p-n}(\hat{\Psi}_x^{-1}(z))dz. \end{aligned}$$

Enfin, remarquons pour tout z tel que $\mathcal{H}_{p-n}(\hat{\Psi}_x^{-1}(z)) > \beta > 0$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x et un voisinage $\mathcal{V}'$ de z tels que pour tout x' dans $\mathcal{V}$ et z' dans $\mathcal{V}'$ on a $\mathcal{H}_{p-n}(\hat{\Psi}_{x'}^{-1}(z')) > \frac{\beta}{2}$. Ainsi :

$$T\phi(x) \geq \frac{\beta}{2K}\mathbf{1}_{\mathcal{V}}(x)\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}^n} \phi(z)\mathbf{1}_{\mathcal{V}'}(z)dz.$$

Pour achever la preuve il suffit d'utiliser la propriété de Borel-Lebesgue au compact $\mathbb{T}^n$ car les voisinages $\mathcal{V}_x$ sont un recouvrement ouvert. q.e.d

Rappelons sans démonstration le très beau résultat suivant dû à Hillel Furstenberg et Oxtoby [34].

Théorème 29. *Soit $\mathcal{K}$ un espace métrique compacte et soit T un opérateur positif de $\mathcal{C}(\mathcal{K},\mathbb{C})$ dans lui même, tel que $T(1) = 1$ et tel que T^* n'admet qu'une seule probabilité invariante π. Alors, pour toute fonction continue ϕ, on a :*

$$\lim_{N\to\infty} \|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} T^k\phi(x) - <\phi,\pi>\|_\infty = 0.$$

Maintenant voyons sur des exemples simples comment combiner simplement les deux résultats précédents pour obtenir des estimations de vitesse de convergence vers l'équilibre.

Application 2. *Soit $\mathcal{K}$ un espace métrique compact dénombrable. Et T un opérateur positif de $\mathcal{C}^0(\mathcal{K})$ dans lui même tel que $T1 = 1$. Supposons que T^* n'admet qu'une seule probabilité invariante π. Alors il est possible d'estimer la vitesse de convergence vers l'équilibre, ce que le théorème de Furstenberg ne fait pas. Considérons les deux situations suivantes.*

– *Supposons qu'il existe un point isolé ζ de $\mathcal{K}$ tel que $1 > \pi(\zeta) > 0$.*

  Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{K}, \mathbb{R}_+)$, $T\phi(x) \geq \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{1}_{\{k\}}(x) \sum_{z\in\mathcal{K}} \phi(z)P(k,z)$.
  Soit $T\phi(x) \geq \mathbf{1}_{\{\zeta\}}(x) < \phi, \mu_\zeta >$. Mais par hypothèse ζ n'est pas absorbant, sinon on aurait $\pi(\zeta) = 1$, donc $z \to P(\zeta, z) = \mu_\zeta \neq 0$. Ainsi :

$$\frac{T\phi(x) + T^2\phi(x) + \cdots + T^N\phi(x)}{N} \geq < \phi, \mu_\zeta > \frac{\mathbf{1}_{\{\zeta\}}(x) + \cdots + T^{N-1}\mathbf{1}_{\{\zeta\}}(x)}{N}.$$

  Mais, comme ζ est isolé, $\mathbf{1}_{\{\zeta\}}(\cdot)$ est une application continue. Ainsi en application du théorème de Furstenberg, pour N_0 assez grand et pour tout x : $|\frac{T\mathbf{1}_{\{\zeta\}}(x)+\cdots+T^N\mathbf{1}_{\{\zeta\}}(x)}{N_0} - \pi(\zeta)| \geq \frac{\pi(\zeta)}{3}$. Finalement, pour tout x dans $\mathcal{K}$:

$$\frac{T\phi(x) + T^2\phi(x) + \cdots + T^{N_0}\phi(x)}{N_0} \geq \frac{2\pi(\zeta)}{3} < \phi, \mu_\zeta > .$$

  Ceci assure que $\frac{T+\cdots+T^{N_0}}{N_0}$ satisfait à la condition de Doeblin.
  L'opérateur de transition $Q_{N_0} = \frac{T+\cdots+T^{N_0}}{N_0}$ est associé à une chaîne de Markov très similaire à la chaîne de Markov associée à T. Au lieu de considérer usuellement $X_1, X_2, \cdots$ où l'on itère de 1 à chaque pas, on tire au hasard à chaque pas un entier entre 1 et N_0 qui va correspondre au nombre d'itérations que l'on fait. Cela peut être par exemple $X_1, X_7, X_{14}, X_{14+N_0}$ etc. Comme nous le verrons, on peut utiliser la Doeblin récurrence de la chaîne associée à l'opérateur Q_{N_0} des théorèmes asymptotiques associés à la chaîne de Markov associée à T.

– *On va supposer que la famille de probabilité de transition $P(x,y)$ est continue en (x,y).*

$$\begin{aligned} T\phi(x) &\geq \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{1}_{\{k\}}(x) \sum_{z\in\mathcal{K}} \phi(z)P(k,z) \\ T^2\phi(x) &\geq \sum_{k\in\mathcal{K}} P(x,k) < \phi, \mu_k > \\ \frac{T\phi(x) + \cdots + T^N\phi(x)}{N} &\geq \sum_{k\in\mathcal{K}} < \phi, \mu_k > \frac{\mathbf{1}_k(x) + \cdots + T^{N-1}\mathbf{1}_k(x)}{N}. \end{aligned}$$

Mais comme $x \to P(x,k)$ est continue alors le théorème de Furstenberg assure que uniformément en x :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{1}_k(x) + \cdots + T^{N-1}\mathbf{1}_k(x)}{N} = \pi(k).$$

Si la mesure invariante n'est pas concentrée en un seul point, on peut trouver k tel que $\mu_k \neq 0$ et $\pi(k) > 0$, on en déduit le même type de conditions de Doeblin que précédemment.

– *On peut adapter les arguments précédents au cas d'un espace métrique compact et d'une chaîne de Markov uniquement ergodique possédant une famille de probabilités de transition de la forme $p(x,y)d\nu_y$ avec une fonction p continue. Le cas où le noyau de transition est uniformément minoré est trivial car il entraîne immédiatement une condition de type Doeblin.*
  L'intérêt de cette méthode est qu'il permet de considérer des cas ou le noyau de transition p peut s'annuler.

Adaptons cette idée aux chaînes de Markov que nous avons considérées à la section précédente.

Théorème 30. *Supposons que $\hat{\Psi}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ et satisfait les deux conditions de non dégénérescence précédentes. Alors on sait déjà que toutes les mesures invariantes admettent des densités de classe sci. Pour chaque mesure invariante μ on note f_μ un représentant sci, $\mathcal{O}_\mu = \{f_\mu > 0\}$ et $K_\mu = Adh(\mathcal{O}_\mu)$. Alors K_μ est un compact stable par la chaîne de Markov qui est uniquement ergodique sur $\mathcal{K}_\mu$ telle que $\frac{T+\cdots+T_{N_\mu}}{N_\mu}$ satisfait une condition de Doeblin sur $\mathcal{C}(K_\mu)$ pour un certain entier N_μ. On peut même prendre $N_\mu = 2$.*

Démonstration. Nous savons que d'après le théorème 26, toutes les mesures invariantes admettent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on peut choisir comme semi-continue inférieurement. L'ensemble $\mathcal{O}_\mu = \{f_\mu > 0\}$ est donc un ouvert. Il est clair que presque sûrement, l'ouvert $\mathcal{O}_\mu$ est stable par $\hat{\Psi}(\cdot, Y)$, car $\mathcal{O}_\mu$ représente le support de la loi μ. Soit désormais un point z dans l'adhérence de l'ouvert $\mathcal{O}_\mu$. Il existe alors z_n dans $\mathcal{O}_\mu$ qui converge vers z, mais presque sûrement $\hat{\Psi}(z_n, Y)$ est encore dans $\mathcal{O}_\mu$ pour tout n et converge vers $\hat{\Psi}(z,Y)$, ce qui prouve bien la stabilité de K_μ. Sur le compact K_μ, l'opérateur de transition T sur $\mathcal{C}^0(\mathcal{T}^n)$ induit un opérateur de transition sur $\mathcal{C}^0(K_\mu)$ qui est uniquement ergodique. En effet, si il existe une autre mesure ν sur K_μ ergodique par T_μ^* alors elle est invariante par T et possède donc une densité sci. Mais alors l'ouvert $\mathcal{O}_\mu$ qui est par construction dense dans K_μ va intersecter $\mathcal{O}_\nu$ ce qui est impossible. Car les mesures ergodiques sont mutuellement étrangères. Pour conclure la preuve, il suffit d'utiliser le lemme 22 et l'unique ergodicité que nous venons de démontrer sur K_μ.

Il existe un recouvrement ouvert fini de K_μ $(\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_q)$ et des mesures positives non nulles $(\nu_1, \cdots, \nu_p)$ telles que pour toute fonction positive sur K_μ on ait :

$$T_\mu \phi(x) \geq \sum_{k=1}^{q} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_k}(x) < \phi, \nu_k > .$$

Soit,

$$\frac{T_\mu \phi(x) + \cdots + T_\mu^{N_\mu} \phi(x)}{N_\mu} \geq \sum_{k=1}^{q} < \phi, \nu_k > \frac{T_\mu \mathbf{1}_{\mathcal{V}_k}(x) + \cdots + T_\mu^{N_\mu} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_k}(x)}{N_\mu}.$$

Mais d'après l'unique ergodicité, on a uniformément en x :

$$\liminf_{N_\mu \to \infty} \frac{T_\mu \mathbf{1}_{\mathcal{V}_k}(x) + \cdots + T_\mu^{N_\mu} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_k}(x)}{N_\mu} \geq \mu(\mathcal{V}_k) > 0.$$

On obtient comme précédemment une condition de Doeblin pour une moyenne des itérées de l'opérateur de transition. Considérons le polynôme $P(X) = \frac{X+X^2+\cdots+X^n}{n}$. Le théorème spectral assure que $sp(P(T)) = P(sp(T))$. Par conséquent, 1 est une valeur propre isolée dans le spectre de T, de multiplicité 1. En conséquence, $(T+T^2)/2$ vérifie une propriété de trou spectral. q.e.d

Remarque 16. *Les mêmes conclusions peuvent être atteintes si l'on suppose que les fonctions sont simplement de classe $\mathcal{C}^1$. Il faut alors utiliser la propriété (SEID) et c'est plus délicat. Néanmoins, cela est fait dans le chapitre suivant lorsqu'on étudiera les propriétés ergodiques des diffusions sur $\mathbb{T}^m$ c'est-à-dire la version "temps-continu" de ce travail.*

Corollaire 8 (théorème central limite)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un espace métrique complet. X_n la chaîne de Markov sur $\mathcal{K}$ associée à un opérateur de transition T de $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ dans lui même. On suppose que $\frac{T+T^2}{2}$ satisfait une propriété de trou spectral.*

Alors étant donnée μ l'unique mesure invariante de la chaîne et ϕ continue telle que $\int_{\mathcal{K}} \phi d\mu = 0$, on a la convergence suivante pour toute condition initiale x.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} \phi(X_k^x)}{\sqrt{N}} \overset{Loi}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Démonstration. Comme $Q = \frac{T+T^2}{2}$ satisfait la condition de Doeblin, alors $Q - id$ est inversible dans l'espace de Banach des fonctions continues d'intégrale nulle par rapport à μ. Cela provient du fait que sous la condition de Doeblin, l'opérateur de transition Q possède un trou de spectre. Autrement dit, $Q = P + R$ avec $P\phi =< \phi, \mu > \mathbf{1}$, $PR = RP = 0$ et $\|R\| < 1$. Ceci nous permet de considérer l'opérateur $\sum_{k=0}^{\infty} R^k$ qui permet de résoudre l'équation de Poisson associée à Q.
Aussi, existe-t-il Ψ continue telle que $\phi = Q\Psi - \Psi$. Mais alors, $\phi = Tf - f$ avec

$$f = \frac{1}{2}(id + (T + id))[\Psi].$$

Il en découle que $T - id$ est également inversible dans l'espace de Banach des fonctions continues d'intégrale nulle par rapport à μ.

A partir de là, la méthode est classique pour démontrer le théorème central limite et se base sur le théorème bien connu suivant.

Théorème 31 (théorème central limite pour les martingales)**.** *Soit M_n une martingale par rapport à une filtration $\mathcal{F}_n$ telle que :*

- $M_0 = 0$,
- $\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$,
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\{(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sigma^2$,
- $\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})\mathbf{1}_{\{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon\sqrt{n}\}}] = 0$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{n}} \overset{Loi}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

La suite est classique, puisque $\phi = f - Tf$:

$$\sum_{k=0}^{n} \phi(X_k^x) = f(X_0) - Tf(X_n) + M_n.$$

où M_n est la martingale définie par :

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(X_{i+1}) - Tf(X_i)$$

. La vérification des hypothèses du théorème central limite pour martingale appliquée à M_n est simple dans ce cas. Ceci est dû au fait que ϕ et f sont des fonctions continues sur un compact donc bornées. q.e.d

7. PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DES DIFFUSIONS PÉRIODIQUES

Introduction

Dans ce travail, nous étudions les propriétés ergodiques d'équations différentielles stochastiques à coefficients périodiques. Soient b et σ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π périodiques en chaque variable, nous étudions l'équation suivante :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma(X_s)dW_s^j,\ x_0 \in \mathbb{R}^m. \tag{7.1}$$

Remarque 17. *L'évolution du système dynamique 7.1 ne dépend que de la classe de X_s dans $\mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$. Il induit donc un système dynamique sur $\mathbb{T}^m$. Cela permet de considérer le système sur un espace d'état compact, ce qui assure l'existence de mesures de probabilité invariantes. A partir de maintenant, sans perte de généralité, X_t sera assimilé à sa classe d'équivalence dans $\mathbb{T}^m$.*

Plus précisément, les questions que nous abordons sont :

1. Sous quelles conditions sur σ et b, les mesures stationnaires de X_t sont-elles régulières par rapport à la mesure de Lebesgue ?
2. Sous quelles conditions peut-on s'assurer que le système dynamique X_t est uniquement ergodique (ie n'admet qu'une seule mesure stationnaire) ?
3. Peut-on donner alors une vitesse de convergence vers l'équilibre ?

1. La question 1 a été très étudiée pendant les deux dernières décennies, donnant lieu à une vaste littérature. Nous renvoyons à [3] pour une description détaillée des résultats principaux de ces recherches. Le point de vue purement analytique permet alors d'établir le résultat suivant très général.

Théorème 32. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $A(x) = (a_{i,j}(x))$ une famille borélienne de matrices symétriques positives sur Ω. Soit μ une mesure positive σ-finie sur Ω telle que $a_{i,j}(x) \in L^1_{loc}(\Omega, \mu)$ et telle que pour une constante $C > 0$ et pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:*

$$\int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_i\partial_j\phi(x)d\mu \leq C(\sup_\Omega |\phi| + \sup_\Omega |\nabla\phi|).$$

Dans ce cas, $(\det A{\cdot}d\mu)$ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Soit $b(x)$ une famille borélienne de vecteurs dans $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$. On considère l'opérateur différentiel de diffusion suivant :

$$L_{A,b}\phi = a_{i,j}\partial_i\partial_j\phi + b_i\partial_i\phi.$$

L'invariance d'une mesure μ pour la diffusion peut alors être vue au sens "infinitésimal". C'est-à-dire $L^*_{A,b}(\mu) = 0$, ou encore pour toute fonction test ϕ :

$$\int_\Omega a_{i,j}\partial_i\partial_j\phi d\mu + \int_\Omega b_i\partial_i\phi d\mu = 0.$$

Sous ces conditions, le théorème 1 s'applique et fournit des critères généraux d'absolue continuité pour μ. En effet, les coefficients fonctionnels A et b n'étant à priori que boréliens, on ne peut même pas envisager la diffusion au sens trajectoriel classique. Cela nécessiterait des conditions de type Lipschitz sur A et b.

Les hypothèses de régularité que nous faisons sur σ et b nous permettent de voir la diffusion X_t comme un système dynamique aléatoire. La théorie ergodique nous permet de donner des critères d'absolue continuité de μ sous des conditions de non dégénérescence bien plus faibles que celles requises par la méthode analytique. En contrepartie, les coefficients fonctionnels b et σ doivent être $\mathcal{C}^1$ au lieu de boréliens. Cette généralisation repose sur le théorème ergodique de Birkhoff pour les systèmes dynamiques aléatoires (voir [30]).

Par exemple, en utilisant la méthode analytique, si μ_x-p.p, $\det A(x) \neq 0$ alors $d\mu << d\lambda_m$. En utilisant des arguments de type Birkhoff, et si la mesure μ est ergodique, la condition ci-dessus peut être relaxée à $\mu\{x \,|\, \det A(x) \neq 0\} > 0$. En outre, la méthode permet de traiter certains cas où A est totalement dégénérée ($\det A = 0$). L'outil principal des preuves de régularité des lois est la propriété de densité de l'énergie image (EID) dans l'espace de Wiener. Rappelons juste que si $X = (X_1, \cdots, X_p)$ est un p-uplet de variables aléatoires dans le domaine $\mathbb{D}$ de l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Wiener, alors $(X_1, \cdots, X_p)_*(\det \Gamma[X_i, X_j]_{i,j} d\mathbb{P}) << d\lambda_p$. On pourra consulter [?] pour la démonstration ou [14] pour une introduction détaillée aux formes de Dirichlet sur l'espace de Wiener.

La difficulté principale réside dans le fait qu'il faut considérer simultanément la loi de X_t sur l'ensemble de sa trajectoire c'est à dire pour un intervalle de temps "infini", afin d'obtenir la régularité d'une mesure stationnaire. Pour cela, nous mettons des poids à décroissance rapide sur des intervalles de temps fini $[kT, (k+1)T]$, ce qui permet d'effectuer du calcul de Malliavin en temps "infini". Cette méthode à l'avantage de s'exporter sur différents contextes tels que les diffusions à sauts ou les équations différentielles aléatoires, et à notre connaissance, n'avait jamais été faite auparavant.

La condition de non-dégénérescence que nous prendrons sera :

$$\forall x \in \mathbb{T}^m,\ \exists T > 0,\ \mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] > 0\} > 0. \tag{7.2}$$

Elle exprime le fait que partant de n'importe quelle condition initiale x, à partir d'un temps T (dépendant de x) suffisamment grand, il y a une chance positive que le "bruit" se propage à travers toutes les directions de l'espace d'état $\mathbb{T}^m$.

2. Si la diffusion est elliptique, on sait qu'elle n'admet qu'une seule mesure stationnaire. En outre celle-ci aura la régularité des coefficients fonctionnels, soit dans notre cas la classe $\mathcal{C}^1$. On pourra consulter par exemple [28]. Si la diffusion est hypoelliptique, alors l'unicité de la mesure stationnaire n'est plus assurée. Par exemple, l'équation $dX_t = -sin(2X_t)dt + cos(2X_t)dW_t$ est hypoelliptique et possède deux mesures stationnaires, l'une sur $[-\pi/4, \pi/4]$ et l'autre sur $[3\pi/4, 5\pi/4]$. Il faut rajouter une condition de récurrence qui va exprimer le fait que pour un certain point fixé, et pour toute condition initiale, avec une probabilité positive, la diffusion rentre dans n'importe quel voisinage de ce point. Voyons comment, sous ces conditions, assurer l'unicité de la mesure stationnaire. Les mesures ergodiques étant étrangères entre elles, leur supports doivent être disjoints. Or par la condition de récurrence, on saura que les supports topologiques vont s'intersecter (au point de récurrence). Enfin, sous condition d'hypoellipticité le semi-groupe P_t de

la diffusion est fortement Feller et cela assure que si les supports topologiques s'intersectent alors les supports généraux s'intersectent. Nous donnerons en appendice une démonstration alternative de cette propriété (corollaire 10). Le semi-groupe est fortement Feller si et seulement si les probabilités de transition sont continues en variation totale en la variable spatiale x. Cette méthode et ce résultat sont utilisés universellement pour établir l'unique ergodicité en dimension finie. Une version plus générale d'"asymptotiquement fortement Feller" a été introduite récemment pour des cas en dimension infinie ([24],[25]), et donne lieu aux mêmes conclusions sur les supports topologiques des mesures stationnaires. Pour prouver que la diffusion est "fortement Feller", cela se fait généralement en établissant que on a :

$$\|\nabla \mathcal{P}_t \phi\|(x) \leq C(x)\|\phi\|_\infty.$$

Cela, découle généralement d'une intégration par parties de Malliavin nécessitant des hypothèses de classe $\mathcal{C}^2$, sur σ et b ainsi qu'une hypothèse de non-dégénérescence forte : $\frac{1}{\det \Gamma[X_t]} \in L^p$. Dans notre cas, ni les conditions de régularité, ni la condition de non-dégénérescence 7.2 ne permettent de vérifier ce critère.
La propriété (EID) permet d'affirmer que deux mesures stationnaires ergodiques sont régulières par rapport à la mesure de Lebesgue, mais cela n'est pas contradictoire avec le fait qu'elles soient étrangères, ni même que leurs supports topologiques s'intersectent. La propriété (EID) est donc insuffisante pour prouver que les mesures ergodiques coïncident. Pour ce faire, nous allons démontrer une version "quantitative" de la propriété (EID), qui permet de comparer en variation totale les lois de variables aléatoires dans le domaine $\mathbb{D}$. La preuve de ce résultat est donnée au chapitre 4 de cette thèse et repose de façon curieuse sur le principe de Schwartz de commutation des dérivées ($\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$). Notons qu'il s'agit là d'une démonstration totalement nouvelle de la propriété (EID) sur l'espace de Wiener, la démonstration classique reposant sur des arguments de formules de co-aire.
Plus précisément nous démontrons que pour toute suite arbitraire de fonctions ϕ_n continues avec $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$, et pour $y_n \to y$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\det \Gamma[X_t^y](\phi_n(X_t^{y_n}) - \phi_n(X_t^y))\} = 0. \qquad (7.3)$$

Cela signifie que pour deux conditions initiales proches x et y, les parties absolument continues de $\mathcal{L}_{X_t^y}$ et de $\mathcal{L}_{X_t^x}$ sont proches en variation totale. Par conséquent, si les supports topologiques s'intersectent, et grâce à la propriété ci-dessus, on en déduira que les supports généraux s'intersectent. Cette méthode permet d'affaiblir considérablement les hypothèses requises pour obtenir que le semi-groupe est fortement Feller. Par exemple, si nous supposons que pour tout x, $\det \Gamma[X_t^x] > 0$, $\mathbb{P}$-p.s (au lieu de $\frac{1}{\det \Gamma[X_t]} \in L^p$), nous obtiendrons également le caractère fortement Feller du semi-groupe $\mathcal{P}_t$. Par ailleurs, l'hypothèse 7.2, suffira pour obtenir que les supports topologiques de deux mesures ergodiques sont disjoints, sans que le semi-groupe soit fortement Feller. Il y a là une différence de fond fondamentale, le critère utilisé pour prouver le caractère fortement Feller du semi-groupe repose sur une intégration par parties de Malliavin, tandis que la démonstration de (SEID-(7.3)) repose sur un autre type d'intégration par parties laquelle est équivalente au lemme de Schwarz ($\partial_{x,y} = \partial_{y,x}$).

L'hypothèse de récurrence que nous faisons (pour assurer l'unique ergodicité) est classique :

$$\exists x_0 \in \mathbb{T}^m,\ \forall x \in \mathbb{T}^m,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists T_{x,\epsilon} > 0,\ \mathbb{P}\{X^x_{T_{x,\epsilon}} \in B(x_0, \epsilon)\} > 0. \tag{7.4}$$

Précisons que le support général d'une mesure μ désigne un borélien B tel que $\mu(B) = 1$. Il n'y a pas unicité de B dans cette définition. Enfin, le support topologique de μ désigne le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle pour μ, il est alors unique.

3. Concernant la troisième question, il existe aussi une littérature exhaustive sur le sujet. Dans le cas d'une diffusion elliptique sur $\mathbb{T}^m$, la vitesse de convergence à l'équilibre est obtenue via l'étude des propriétés spectrales du générateur infinitésimal de la diffusion. On déduit de ces propriétés spectrales une vitesse de convergence exponentielle à l'équilibre, autrement dit le semi-groupe P_t vérifie un trou de spectre. Dans les cas plus dégénérés comme le cas hypoelliptique, et sous une condition de récurrence adéquate on obtient des propriétés similaires sur le semi-groupe P_t de la diffusion, ceci est fait dans [31]. La méthode consiste alors prouver qu'il existe un ensemble C visité exponentiellement souvent par la chaîne X_t sur lequel est valide une condition de minoration de Doeblin :
$$\inf_{x\in C} P(x, \cdot) \geq \lambda\eta(\cdot).$$
Par ailleurs ces conditions sont obtenues en prouvant l'existence de fonctions de Lyapounov et en utilisant le fait que les lois de transitions $p_t(x, y)$ sont des fonctions conjointement continues en (x, y) (consé-

quence de l'hypoellipticité).
Une approche légèrement différente consiste à étudier la résolubilité de l'équation de Poisson pour estimer des vitesses de convergence à l'équilibre. On pourra consulter [32], pour une étude de la résolution de l'équation de Poisson pour les diffusions hypoelliptiques sur $\mathbb{T}^m$. Là encore, faute de régularité sur les coefficients fonctionnels σ et b, nous ne pourrons appliquer ces méthodes. Le théorème suivant permet de contourner la difficulté, il sera central dans notre travail.

Théorème 33.
Soit $\mathcal{K}$ un compact. Soit P_t un semi-groupe de $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui même, tel que
- $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$,
- $P_t 1 = 1$,
- *P_t admet une unique mesure μ de probabilité stationnaire ($P_t^* \mu = \mu$).*

Alors, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$:

$$\lim_{T\to\infty} \|\frac{1}{T}\int_0^T P_s\phi(\cdot)ds - <\phi, \mu> \|_\infty = 0.$$

Ce théorème est très certainement connu, il s'agit d'étendre le critère de convergence uniforme des sommes de Birkhoff (équivalent à l'unique ergodicité) au cas continu d'un semi-groupe. Néanmoins, faute de référence satisfaisante, nous le redémontrons en appendice. Ce critère de convergence uniforme est dû au travail séminal d'Oxtoby ([34]) sur l'unique ergodicité.
Ce théorème couplé avec la propriété 7.3 nous permet d'obtenir un ordre de convergence exponentiel vers l'équilibre. Même si nous ne pouvons pas explicitement quantifier cette vitesse de convergence, ce résultat permet d'obtenir des informations spectrales sur le générateur de la diffusion sous des hypothèses de non dégénérescence minimales et sous faible régularité. La méthode consiste à utiliser conjointement la propriété 7.3 et le théorème 33 pour prouver des conditions de Doeblin sur la chaîne de Markov X_t. Il est à noter que sous des hypothèses plus fortes, on peut obtenir des conditions de Doeblin très quantifiées, il faut pour cela utiliser des minorations de densités de probabilités de transition, lesquelles s'obtiennent par des techniques de calcul de Malliavin. On pourra consulter [27] pour des applications ergodiques, ainsi que [2] pour l'obtention de minorations de densités.
Par rapport à [31], notre méthode se démarque car nous n'avons pas

besoin de l'existence de fonctionnelles de Lyapounov. Nous n'utilisons pas non plus le fait que les lois de transition $p_t(x,y)$ sont conjointement continues en (x,y) ce qui a priori est rare étant donné le fait que nous ne pouvons pas utiliser le critère de Hörmander sur les coefficients fonctionnels b et σ. L'apport de ce travail consiste donc principalement en l'appauvrissement des hypothèses de régularité des coefficients ainsi que l'appauvrissement de la condition de non-dégénérescence.
Cela dit, étant donnée la faiblesse de nos hypothèses nous obtiendrons un résultat légèrement plus faible. Nous aurons que pour tout $T>0$, $\frac{1}{T}\int_0^T P_s ds$ vérifie un trou de spectre, au lieu d'obtenir que P_t satisfait un trou de spectre. Ce qui se traduit en terme de générateur par le fait que 0 est isolée dans le spectre.

Afin de fixer les idées, schématisons le raisonnement effectué dans ce travail.

$$\left(\text{ Non-dégénérescence(7.2) }\right) \overset{\text{(EID)}}{\longrightarrow} \text{Régularité des mesures stationnaires.}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Non-dégénérescence(7.2)} \\ \text{Récurrence(7.4)} \end{pmatrix} \overset{(7.3)}{\longrightarrow} \text{Unique ergodicité.}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Non-dégénérescence(7.2)} \\ \text{Unique ergodicité} \end{pmatrix} \overset{(7.3)+\text{thm}(33)}{\longrightarrow} \text{Vitesse de convergence exponentielle.}$$

7.1 Régularité des densités des mesures stationnaires

Nous renvoyons à l'introduction pour les notions de calcul de Malliavin utilisées dans ce chapitre, l'outil central dans les preuves à venir est la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener.

7.1.1 Définition d'un calcul de Malliavin en temps long

Nous souhaitons prouver que les mesures stationnaires de l'équation 7.1 :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma(X_s)dW_s^j,\ x_0 \in \mathbb{R}^m,$$

sous la condition de non dégénérescence 7.2 sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 23. *Soit S_i une suite de matrices symétriques positives. Soit α_i une suite correspondante de réels positifs. Alors on a :*

$$\sum_i \alpha_i S_i \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_i S_i \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que si $\sum_i {}^tXS_iX = 0$ alors pour tout i, ${}^tXS_iX = 0$ et $\sum_i \alpha_i{}^tXS_iX = 0$. q.e.d

Le résultat assure que l'on peut s'affranchir de la dépendance de x dans la propriété de non-dégénérescence 7.2.

Lemme 24. *Sous la condition 7.2 :*

$$\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{T}^m,\ \mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] > 0\} > 0.$$

Démonstration.

Par continuité de $\Gamma[X_T^x]$ vis à vis de la condition initiale x, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{T}^m$, il existe $r_x > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, r_x)$ on ait $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^y] > 0\} > 0$. Ceci permet de recouvrir le compact $\mathbb{T}^m$ par les ouverts $B(x, r_x)$. On extrait alors un sous-recouvrement fini de sorte que $\mathbb{T}^m \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_{x_i})$. On pose alors $T = \max_{i\leq k} T_{x_i}$.

Enfin, on remarque si $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^y] > 0\} > 0$ alors pour tout $S \geq T$, $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_S^y] > 0\} > 0$. Intuitivement cela affirme que plus T est grand, plus le système accumule de "bruit" et a de chances d'être non-dégénéré. Plus rigoureusement, cela découle du théorème 1.3.3 de [14] p-157 , qui donne la forme précise de l'évolution de $\Gamma[X_t]$ au cours du temps.
En conclusion, pour tout x dans $\mathbb{T}^m$, $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] > 0\} > 0$. q.e.d

Selon les notations usuelles, introduisons $\Phi_{s,t}(x)$ le flot stochastique associé à l'équation 7.1. On a ainsi :

$$X_{nT}^x = \Phi_{(n-1)T,nT} \circ \Phi_{(n-2)T,(n-1)T} \circ \cdot \circ \Phi_{0,T}(x).$$

A partir de là, nous opérons un renversement des itérations. Nous avons l'égalité suivante en loi :

$$\Phi_{(n-1)T,nT} \circ \Phi_{(n-2)T,(n-1)T} \circ \cdot \circ \Phi_{0,T}(x) \overset{loi}{=} \Phi_{0,T} \circ \Phi_{T,2T} \circ \cdot \circ \Phi_{(n-1)T,nT}(x) = Y_{nT}^x.$$

Fixons μ une mesure stationnaire et Z une variable aléatoire de loi μ indépendante du mouvement brownien régissant l'équation (7.1). Par définition de la stationnarité, X_{nT}^Z est de loi μ. Il en est de même pour Y_{nT}^Z. Le théorème principal est alors le suivant.

Théorème 34. *Sous l'hypothèse de non dégénérescence 7.2, alors toutes les mesures stationnaires du système (7.1) sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration.
Selon un procédé classique, on peut construire un espace probabilisé auxiliaire $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$ sur lequel sont définies des variables aléatoires Y_k vérifiant :

- Y_k suit une loi μ.
- $Y_k = \Phi_{(k-1)T,kT}(Y_{k+1})$.
- Y_k est indépendante de $\sigma\{W_s;\ s \leq (k-1)T\}$.

Ainsi pour tout p et pour tout n :

$$Y_p \overset{loi}{=} \Phi_{pT,(p+1)T} \circ \Phi_{(p+1)T,(p+2)T} \circ \cdot \circ \Phi_{(n-1)T,nT}(Z).$$

On fixe désormais un A un borélien négligeable de $\mathbb{T}^m$, on souhaite prouver que $\mathbb{E}\{\chi_A(Y_1)\} = \mathbb{E}\{\chi_A(Y_{nT}^Z)\} = 0$. Par la propriété de densité de l'énergie image dans la structure d'erreur S_{OU} :

$$\mathbb{E}\{\chi_A(Y_{nT}^Z)\det(\Gamma[Y_{nT}^Z])\} = 0.$$

Cela provient essentiellement du fait que $(Y_{nT}^Z, \Gamma[Y_{nT}^Z]) \overset{loi}{=} (X_{nT}^Z, \Gamma[X_{nT}^Z])$.

On sait que s'agissant d'équations différentielles stochastiques à coefficients Lipschitziens, le flot stochastique $\Phi_{t,s}(\cdot)$ est presque sûrement un difféomorphisme Lipschitzien de $\mathbb{T}^m$ ([13]). Nous allons développer la formule précédente en utilisant un calcul fonctionnel de classe Lipschitzien, où nous allons utiliser sans perte de généralité les variables auxiliaires Y_i.

$$\mathbb{E}\{\chi_A(Y_1)\det\Big(\Gamma_1[Y_1]\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + {}^t\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\Gamma_2[Y_2]\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + \cdots +$$

$${}^t\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\chi_{\{\det\Gamma_n[Y_n]\neq 0\}}\Big)\} = 0. \qquad (7.5)$$

Le fait de discrétiser le flot selon les intervalles de temps $[kT,(k+1)T]$ revient à "découper" la trajectoire du mouvement brownien en morceaux de taille T. Dans la formule ci-dessus, Γ_1 représente la dérivée de Malliavin par rapport à la trajectoire brownienne sur $[0,T]$, de même Γ_k représente la dérivée de Malliavin par rapport à l'accroissement du brownien sur $[(k-1)T,kT]$.

Il y a une subtilité dans la formule (7.5) précédente. D'après les axiomes d'une structure d'erreur, on sait que l'on peut effectuer un calcul fonctionnel de classe $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{L}ip$. Néanmoins, pour effectuer un calcul fonctionnel de classe Lipschitzien, des difficultés inhérentes au choix des représentants des gradients apparaissent. C'est pour cela que nous avons introduit de façon quelque peu artificielle les indicatrices $\chi_{\{\det \Gamma_k[Y_k]\neq 0\}}$. La présence de ces indicatrices nous permet d'effectuer le calcul fonctionnel Lipschitzien sans se soucier du choix des représentants pour les $\nabla\phi_{0,(k-1)T}(Y_k)$. En effet, par la propriété (EID), on sait que $Y_k * (\chi_{\{\det \Gamma_k[Y_k]\neq 0\}} d\mathbb{P}) << d\lambda_m$. Remarquons par ailleurs, que l'on a utilisé tacitement le lemme (23) dans la formule précédente. A priori, la stricte application de (EID) assure que $\mathbb{E}\{\chi_A(Y_1)\det\Gamma[Y_1]\} = 0$, mais cela n'est pas grave car :

$$\det\Big(\Gamma_1[Y_1]\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + {}^t\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\Gamma_2[Y_2]\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + \cdots +$$
$${}^t\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\chi_{\{\det\Gamma_n[Y_n]\neq 0\}}\Big)$$
$$\leq \det\Gamma[Y_1].$$

Pour conclure la preuve, on va faire tendre n vers l'infini dans la formule (7.5). Il n'est pas du tout sur que :

$$\det\Big(\Gamma_1[Y_1]\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + {}^t\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\Gamma_2[Y_2]\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + \cdots +$$
$${}^t\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\chi_{\{\det\Gamma_n[Y_n]\neq 0\}}\Big),$$

admette une limite quand n tend vers l'infini. Mais on peut trouver des poids α_i strictement positifs et à décroissance assez rapide pour que :

$$\det\Big(\alpha_1\Gamma_1[Y_1]\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + \alpha_2{}^t\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\Gamma_2[Y_2]\nabla\Phi_{0,1}(Y_2)\chi_{\{\det\Gamma_1[Y_1]\neq 0\}} + \cdots +$$
$$\alpha_n{}^t\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\chi_{\{\det\Gamma_n[Y_n]\neq 0\}}\Big)$$

admette une limite dans $L^1(\mathbb{P}^*)$ quand n tend vers l'infini. L'existence de ces poids découle directement du fait que $\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)$ est une quantité $L^2(\mathbb{P}^*)$.

La régularité de μ sera établie si on arrive a prouver que presque sûrement :

$$\det\Big(\sum_n \alpha_n \nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\Gamma_n[Y_n]\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)\chi_{\{\det\Gamma_n[Y_n]\neq 0\}}\Big) \neq 0.$$

Le flot stochastique étant un difféomorphisme lipschitzien, les matrices jacobiennes $\nabla\phi_{0,(n-1)T}(Y_n)$ sont inversibles. Le déterminant ci-dessus sera non nul presque sûrement si on prouve que presque sûrement il existe n tel que $\det\Gamma_n[Y_n] \neq 0$. Or par le lemme (24), on a choisit T pour que $\mathbb{P}^*\{\det\Gamma_n[Y_n] \neq 0\} > 0$. A priori, la mesure μ est invariante pour le processus en temps discret mais pas forcément ergodique. Toutefois, si la mesure stationnaire μ fixée initialement est ergodique pour le processus discret alors cet événement arrivera presque sûrement. Par conséquent μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
Le cas des mesures stationnaires (non ergodiques) en découle, car d'après le théorème de Krein-Millman, les mesures stationnaires sont des combinaisons convexes des mesures ergodiques. De façon plus précise, on peut prouver que pour toute mesure stationnaire μ, il existe une mesure de probabilité ρ à support sur les mesures ergodiques telle que $\mu = \int \pi_\alpha d\rho_\alpha$. Ainsi, toutes les mesures invariantes du processus discret sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Donc toutes les mesures invariantes du processus continu aussi, car elles sont nécessairement invariantes pour le processus discret. q.e.d

Remarque 18. *La condition de non dégénérescence (7.2) est assez forte car elle implique que toutes les mesures stationnaires admettent une densité. Mais si l'on se donne une mesure ergodique μ particulière dont on souhaite établir la régularité, alors on peut relaxer la condition de non dégénérescence à $\mu_x \otimes \mathbb{P}\{\det\Gamma[X_T^x] > 0\} > 0$. Il suffit d'adapter la démonstration précédente à ce cas là.*
Une autre condition suffisante serait que $\mu\{x \mid \det{}^t\sigma(x)\sigma(x) > 0\} > 0$. Autrement dit, si sur un ensemble de mesure positive pour μ la diffusion est elliptique, alors μ est absolument continue par rapport à Lebesgue. Cela constitue une amélioration stricte de la condition de non dégénérescence nécessaire à l'utilisation du théorème 32.

7.2 Unique ergodicité et vitesse de convergence à l'équilibre

Dans cette partie, nous étudions la question de l'unique ergodicité sous deux conditions suivantes :

- (7.2) $\forall x \in \mathbb{T}^m$, $\exists T > 0$, $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] > 0\} > 0$.
- (7.4) $\exists x_0 \in \mathbb{T}^m$, $\forall x \in \mathbb{T}^m$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists T_{x,\epsilon} > 0$, $\mathbb{P}\{X_{T_{x,\epsilon}}^x \in B(x_0, \epsilon)\} > 0$.

On aura besoin de la "quantification" de la propriété (EID) énoncée dans la proposition suivante et démontrée précédemment, que nous rappelons ici bas.

Proposition 8. *SEID-(7.3)*

Soit ϕ_n une suite arbitraire de fonctions continues avec $\|\phi_n\|_\infty \leq 1$. Soit x_n une suite convergeant vers x. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\big(\phi_n(X_t^{x_n}) - \phi_n(X_t^x)\big) \det \Gamma[X_t^x]\} = 0.$$

Remarque 19. *La proposition précédente assure que la loi de $X_t^{x_n}$ converge pour la norme en variation totale vers la loi de X_t^x là où la loi de X_t^x n'est pas dégénérée.*

On a le théorème suivant qui constitue une généralisation du corollaire 10.

Théorème 35. *Sous la condition de non dégénérescence (7.2), deux mesures ergodiques π_1 et π_2 distinctes ont des supports topologiques disjoints.*
Par conséquent, sous les conditions (7.2) et (7.4), il n'y a qu'une seule mesure ergodique.

Démonstration. D'après le lemme (24), la condition de non-dégénérescence peut-être renforcée. Soit T fixé de sorte que pour tout x, $\mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] > 0\} > 0$. Soient π_1 et π_2 deux mesures ergodiques distinctes, nous supposons que leurs supports topologiques s'intersectent en un point z.
Disons qu'un point x est une condition typique pour π_1 si et seulement si pour toute fonction continue θ :

$$\lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \theta(X_s^x) ds =< \theta, \pi_1 > .$$

Le théorème ergodique de Birkhoff assure que π_1 presque tout x est typique pour π_1. Il en va de même pour π_2.
Il existe donc x_n une suite de points typiques pour π_1 et y_n une suite de points typiques pour π_2 telles que $\lim_n x_n = z$ et $\lim_n y_n = z$. Ainsi par la propriété (SEID), et pour une suite arbitraire de fonctions continues bornées ϕ_n :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\big(\phi_n(X_T^{x_n}) - \phi_n(X_T^{y_n})\big) \det \Gamma[X_T^z]\} = 0.$$

Donc pour n assez grand, les lois de $X_T^{x_n}{}_*(\det\Gamma[X_T^z]d\mathbb{P})$ et de $X_T^{y_n}{}_*(\det\Gamma[X_T^z]d\mathbb{P})$ ne sont pas singulières. Or d'après le lemme (24), $\mathbb{P}\{\det\Gamma[X_T^z]>0\}>0$, par conséquent les lois de $X_T^{x_n}$ et de $X_T^{y_n}$ ne sont pas singulières. Mais comme x_n est typique, alors presque sûrement $X_T^{x_n}$ est typique. De même pour $X_T^{y_n}$. Cela assure que $X_T^{x_n}$ et $X_T^{y_n}$ ont deux lois étrangères, c'est contradictoire.
Par conséquent, deux mesures ergodiques singulières admettent des supports topologiques disjoints, de plus sous la condition de récurrence (7.4) il y a unique ergodicité. q.e.d

En utilisant le théorème (33) on obtient le corollaire suivant qui a un intérêt en soi.

Corollaire 9. *Si l'on remplace la condition de non-dégénérescence 7.2 par la condition plus forte :*

$$\forall x\in\mathbb{T}^m,\ \mathbb{P}\{\det\Gamma[X_T^x]\neq 0\}=1,$$

alors le semi-groupe P_t est fortement Feller (à partir du temps T).
En outre, sous la condition de récurrence (7.4), pour toute fonction borélienne bornée g on a :

$$\lim_{S\to\infty}\sup_x|\frac{1}{S}\int_0^S P_s[f](x)-<f,\pi>|=0.$$

Démonstration. En utilisant la propriété (SEID) démontrée en appendice, pour une suite x_n arbitraire convergeant vers x :

$$\lim_{x_n\to x}\sup_{\{\|\phi\|_\infty\leq 1\}}\mathbb{E}\{\phi(X_T^{x_n})-\phi(X_T^x)\}=0.$$

Cela entraîne que les probabilités de transition $P_T(x,\cdot)$ sont continues en x pour la convergence en variation totale. Le semi-groupe P_t est donc fortement Feller à partir du temps T.

Soit g une fonction borélienne bornée. D'après ce qui précède, $P_T[g]$ est une fonction continue. Or d'après le théorème (35), le semi-groupe est uniquement ergodique et par conséquent, en utilisant le théorème (33) :

$$\lim_{S\to\infty}\|\frac{1}{S}\int_0^S P_sP_T[g]ds-<P_T[g],\pi>\|_\infty=0.$$

Remarquant que $<P_t[g],\pi>=<g,\pi>$, et que $\frac{1}{S}\int_0^S P_sP_T[g]ds=\frac{T+S}{S}\frac{1}{S+T}\int_0^{S+T}P_s[g]ds-\frac{1}{S}\int_0^T P_s[g]$, on en déduit le résultat. q.e.d

Dans le cas où le système est uniquement ergodique ((7.4)+(7.2)), on peut donner un ordre de convergence vers l'équilibre. Plus précisément nous allons montrer que pour tout $t > 0$, l'opérateur $\frac{1}{t}` \int_0^t P_s ds$ vérifie un trou de spectre dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 36. *Plaçons-nous sous les conditions ((7.4)+(7.2)).*

Pour tout $t > 0$, la valeur propre 1 est isolée dans le spectre de $\frac{1}{t} \int_0^t P_s ds$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$.

Démonstration.

Pour fixer les idées, nous allons commencer par effectuer la preuve dans le cas où :

$$\forall x \in \mathbb{T}^m,\ \mathbb{P}\{\det \Gamma[X_T^x] \neq 0\} = 1.$$

Fixons, ϕ une fonction borélienne positive et bornée. L'objectif de la démonstration est d'obtenir une condition de minoration de Doeblin pour une moyenne du semi-groupe P_t. C'est à dire l'existence d'une mesure de probabilité η et d'une constante $c > 0$ telles que

$$\frac{1}{M} \int_0^M P_s \phi ds \geq c < \phi, \eta > .$$

$$\begin{aligned} P_T[\phi](x) &= \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y) p_T(x, y) dy, \\ \frac{1}{S} \int_T^S P_s P_T[\phi](x) &= \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y) \big(\frac{1}{S} \int_T^S P_s[p_T(\cdot, y)] ds \big)(x) dy. \end{aligned}$$

Remarque 20. *Afin d'utiliser pleinement le caractère fortement Feller du semi-groupe à partir du temps T nous cherchons à minorer $\frac{1}{S} \int_T^S P_s \phi(x) ds$ au lieu de $\frac{1}{S} \int_0^S P_s \phi(x) ds$. C'est une restriction mineure car de fait : $\frac{1}{S} \int_0^S P_s \phi(x) ds \geq \frac{1}{S} \int_T^S P_s \phi(x) ds$.*

En utilisant le corollaire (9), pour tout y et $S > T$:

$$\lim_{S \to \infty} \sup_x | \big(\frac{1}{S} \int_T^S P_s[p_T(\cdot, y)] ds \big)(x) - \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z, y) d\pi_z | = 0.$$

Car,

$$\frac{1}{S} \int_T^S P_s[p_T(\cdot, y)] ds = \frac{1}{S} \int_0^{S-T} P_s[P_T[p_T(\cdot, y)]] ds.$$

$([P_T[p_T(\cdot,y)]]$ est continue.)

Si l'on pose $h_N(y) = \sup_x |\big(\frac{1}{N}\int_T^N P_s[p_T(\cdot,y)]ds\big)(x) - \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z|$, on a donc que la suite de fonctions h_N converge presque partout vers 0.

Remarque 21. *Il n'est pas à priori évident que h_n soit une fonction mesurable, étant donné que l'on prend le sup sur $\mathbb{T}^m$. Toutefois, comme le semi-groupe (à partir du temps T) est dans notre cas fortement Feller, $x \longrightarrow \big(\frac{1}{N}\int_T^N P_s[p_T(\cdot,y)]ds\big)(x)$ est (à y fixé) une fonction continue en x. Donc le suprêmum peut être choisi sur un ensemble dénombrable dense ce qui assure la mesurabilité de $h_N(y)$.*

On applique alors le théorème d'Egoroff, pour tout $\epsilon > 0$, il existe A_ϵ tel que $\lambda(A_\epsilon) \geq 1-\epsilon$ et :

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{y\in A_\epsilon} |h_N(y)| = 0.$$

Par ailleurs, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\lambda\{y|\ \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z \geq \alpha > 0\} = \theta > 0.$$

On choisit alors $\epsilon < \theta$ dans le théorème d'Egoroff, de sorte que :

$$\lambda\big(\{y|\ \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z \geq \alpha > 0\} \cap A_\epsilon > 0\big).$$

Fixons alors $B = \{y|\ \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z \geq \alpha > 0\} \cap A_\epsilon$. Par construction nous avons que :

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{y\in B} |h_N(y)| = 0,$$

$$\inf_{y\in B} \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z \geq \alpha.$$

Il existe alors P assez grand tel que $\sup_{y\in B}|h_P(y)| \leq \frac{\alpha}{2}$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{T}^m,\ \forall y \in B,\ \frac{1}{P}\int_T^P P_s[p_T(\cdot,y)]ds \geq \int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z - \frac{\alpha}{2} > 0.$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P}\int_T^P P_sP_T[\phi](x)ds &= \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y)\big(\frac{1}{P}\int_T^P P_s[p_T(\cdot,y)]ds\big)(x)ds,\\
&\geq \int_B \phi(y)\big(\frac{1}{P}\int_T^P P_s[p_T(\cdot,y)]ds\big)(x)ds,\\
&\geq \int_B \phi(y)\big(\int_{\mathbb{T}^m} p_T(z,y)d\pi_z - \frac{\alpha}{2}\big)dy,\\
&\geq C < \phi,\nu > .
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a la condition de minoration de Doeblin, pour S assez grand.

$$(\frac{1}{S}\int_0^S P_u\phi du)(x)du \geq C < \phi, \nu > .$$

Voyons maintenant comment adapter ces arguments au cas de la condition de non-dégénérescence (7.2). A priori le semi-groupe n'est pas fortement Feller et la stricte application du corollaire 9 est impossible. Toutefois, nous allons démontrer qu'il est "minoré" par une composante fortement Feller. Soit M un réel positif, et g_M l'application Lipschitzienne par morceaux valant x sur $[-M, M]$, valant M sur $[M, +\infty[$ et $-M$ sur $]-\infty, -M]$.

$$P_T[\phi](x) = \mathbb{E}\{\phi(X_T^x)\} \geq Q_T[\phi](x) = \frac{1}{M}\mathbb{E}\{\phi(X_T^x)g_M(\det\Gamma[X_T^x])\}.$$

En appliquant la propriété (SEID), $Q_T[\phi](x)$ est une application continue. En outre, d'après la propriété (EID), il existe une densité f tel que $Q_T[\phi](x) = \int \phi(y)f(x,y)dy$.

Remarque 22. *Nous avons utilisé la fonction g_M au lieu de $\chi_{\{\det\Gamma[X_T^x]>0\}}$ dans la définition de ϕ_T car il n'est pas du tout clair que $\lim_{x\to y, L^1} \chi_{\{\det\Gamma[X_T^x]>0\}} = \chi_{\{\det\Gamma[X_T^y]>0\}}$. Le réel M choisi est arbitraire.*

On reprend alors la preuve précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\int_0^S P_sP_T[\phi](x) \quad &\geq \quad \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y)\big(\frac{1}{S}\int_0^S P_s[f(\cdot,y)]ds\big)(x)dy,\\
&\geq \quad \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y)\big(\frac{1}{S}\int_T^S P_sP_T[f(\cdot,y)]ds\big)(x)dy,\\
&\geq \quad \int_{\mathbb{T}^m} \phi(y)\big(\frac{1}{S}\int_T^S P_sQ_T[f(\cdot,y)]ds\big)(x)dy.
\end{aligned}$$

On reprend alors le même mécanisme que la preuve précédente.

Autrement dit, l'opérateur Markovien $(\frac{1}{S}\int_0^S P_u du)$ satisfait une condition de minoration de Doeblin, il satisfait donc à une propriété de trou de spectre. Or le spectre de $(\frac{1}{S}\int_0^S P_u du)$ est l'image du spectre de A (générateur infinitésimal de P_t) par l'application $x \longrightarrow \frac{1}{S}\int_0^S e^{ux}du = \frac{e^{xS}-1}{xS}$. On pourra consulter [35] pour une démonstration de ce dernier résultat. Par conséquent, la valeur propre 0 est isolée dans le spectre de A, on en déduit par ré-application du même théorème que $(\frac{1}{T}\int_0^T P_u du)$ satisfait un trou spectral, quel que soit $T > 0$.

q.e.d

Remarque 23. *Il serait très intéressant de prouver que P_t satisfait un trou spectral sans faire au préalable la moyenne. Nous n'y sommes pas parvenu.*

Dans ce qui suit, nous regardons un exemple extrait de [31] et précisons quelles hypothèses peuvent-être allégées et quelles conclusions peuvent être tirées de notre méthode. (Nous conservons exactement les mêmes notations que [31]).

Considérons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dq &= pdt, && (7.6)\\ dp &= -\gamma(q)pdt - \nabla F(q)dt + \sigma(q)dW. && (7.7)\end{aligned}$$

- $F : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$,
- $\sigma : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$,
- $\gamma : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$,
- ρ_i la i-ème colonne de σ.

Il s'agit de l'équation de Langevin décrivant le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique et soumise à bruit. p représente la position de la particule et q représente le moment de la particule. Dans [31], il est supposé que la matrice γ est (positivement) proportionnelle à la matrice ${}^t\sigma\sigma$ ce qui correspond à une relation de "fluctuation-dissipation". Il est supposé en outre que la matrice σ est inversible et que les coefficients fonctionnels sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans ce cas ils établissent que la diffusion ci-dessus est géométriquement ergodique.

Pour nos besoins, nous modifierons l'équation de sorte à se ramener complètement au cas compact. Nous étudions donc :

$$\begin{aligned} dq &= \sin(p)dt, && (7.8)\\ dp &= -\gamma(q)\sin(p)dt - \nabla F(q)dt + \sigma(q)dW. && (7.9)\end{aligned}$$

Le cas non compact pose des problème quant à la méthode que nous développons ici, notamment quant à l'utilisation du théorème ergodique uniforme. Néanmoins, la méthode pour démontrer l'unicité des mesures ergodiques en passant par (SEID) fonctionne indépendamment de la compacité.
Nous ne faisons pas l'hypothèse sur la relation de "fluctuation-dissipation". Cette hypothèse assurait principalement l'existence de fonctionnelles de Lyapounov et l'existence d'un ensemble compact visité exponentiellement souvent par le système. En outre cette hypothèse leur assurait l'existence d'une mesure stationnaire. Nous ne ferons pas l'hypothèse que les fonctions sont infiniment dérivables, mais nous supposons que les coefficients fonctionnels sont de classe $\mathcal{C}^1$. Nous supposons comme [31] que la matrice σ est inversible. Par abus de notation nous noterons $\sin(p)$ la matrice diagonale $(\sin(p_1), \cdots, \sin(p_d))$ de même pour $\cos(p)$.

Écrivons les coefficients fonctionnels sous forme matricielle.

$$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_d \end{pmatrix}, Y(x) = \begin{pmatrix} \sin(p) \\ -\gamma(q)\sin(p) - \nabla F(q) \end{pmatrix}, \Sigma(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(q) \end{pmatrix}$$

Posons $X_i(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_i(q) \end{pmatrix}$.

Nous commencerons par établir que la condition (7.2) est vérifiée.

Lemme 25. *Récurrence*

La condition de récurrence 7.4 est satisfaite.

Démonstration. Nous suivons strictement la méthodologie de [31]. On étudie le problème de contrôle associé suivant.

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = Y(X) + \Sigma(X)\frac{\mathrm{d}U}{dt}.$$

Il suffit de prouver que pour tout $t > 0$, pour tout $y \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, et tout y_+ dans $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$, on peut trouver $U \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{T}^d)$ telle que l'équation ci-dessus soit satisfaite avec $X(0) = y$ et $X(t) = y_+$.

On pose $X = \begin{pmatrix} Q \\ \arcsin(\frac{dQ}{dt}). \end{pmatrix}$
L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{d^2Q}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{dQ}{dt}^2}} + \gamma(Q)\frac{dQ}{dt} + \nabla F(Q) = \sigma(Q)\frac{dU}{dt}.$$

(Par abus de notation, $\frac{d^2Q}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{dQ}{dt}^2}}$ est la matrice diagonale des $\frac{d^2Q_i}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{dQ_i}{dt}^2}}$.)

On choisit, Q une trajectoire de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\begin{pmatrix} Q(0) \\ \arcsin(\frac{dQ}{dt})(0). \end{pmatrix} = y, \begin{pmatrix} Q(t) \\ \arcsin(\frac{dQ}{dt})(t). \end{pmatrix} = y_+.$$

Ensuite on définit $\frac{dU}{dt}$ par substitution qui sera un cran plus régulier que les coefficients fonctionnels donc $\mathcal{C}^2$. La substitution n'est rendue possible que parce que la matrice σ est supposée inversible partout.

L'évènement $\sup_{t\leq s} \|W_t - U(t)\| \leq \epsilon$ survient avec une probabilité strictement positive, car la mesure de Wiener de chaque cylindre est positive. On en déduit finalement la propriété de récurrence souhaitée en utilisant le théorème de support de la diffusion de Stroock et Varadhan ([38]). q.e.d

Lemme 26. *Non-dégénérescence*

La condition (7.2) est satisfaite.

Démonstration.

Calculons les crochets de Lie en vue d'utiliser le critère de Hörmander :

$$[X_i, Y] = \begin{pmatrix} \cos(p)\rho_i(q) \\ -\{\nabla\rho_i(q)\}sin(p) - \gamma(q)cos(p)\rho_i(q) \end{pmatrix}.$$

Étant donnée que la matrice σ est inversible, on en déduit que $\{X_1, \cdots, X_d, [X_1, Y], \cdots, [X_d, Y]\}$ va engendrer l'espace en tout point (q, p) tel que $\cos(p_1)\cos(p_2) \times \cdots \times \cos(p_d) \neq 0$. C'est à dire sur le complémentaire d'une union dénombrable d'hyperplans de l'espace. Il suffit ici d'utiliser le lemme 25 pour assurer que pour toute condition initiale, le système va atteindre le complémentaire de cette union d'hyperplans. Enfin, on sait que partant de toute condition initiale où la condition de Hörmander est satisfaite, la condition de non dégénérescence 7.2 va être valide. Ces deux faits prouvent la propriété (7.2). q.e.d

7.3 Appendice

Suivant les idées d'Oxtoby, démontrons le théorème 33.

Démonstration. Théorème 33

Soit A le générateur du semi-groupe P_t, il est défini sur $\mathcal{D}(A)$ qui est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$. Nous allons démontrer que $\mathcal{I}m(A) = \{A[\phi] \,|\, \phi \in \mathcal{D}(A)\}$ est dense dans $\mathcal{C}_\pi(\mathcal{K}) = \{\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{K}) \,|\, <\phi, \mu>= 0\}$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, il suffit de prouver que toute forme linéaire nulle sur $\mathcal{I}m(A)$ est nulle. Or par le théorème de Riesz, cette forme linéaire peut être vue comme une mesure ν signée sur $\mathcal{K}$.

Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(A)$, on a successivement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} < P_t\phi, \nu >=< A[P_t\phi], \nu >= 0,$$

$$< P_t\phi, \nu >=< P_0\phi, \nu >=< \phi, \nu > .$$

Mais par densité de $\mathcal{D}(A)$, pour tout ψ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$, on a :

$$< P_t\psi, \nu >=< \psi, \nu > .$$

Cela assure que la mesure ν signée est stationnaire pour le semi-groupe P_t. On ne peut pas conclure directement que ν est colinéaire à μ car ν est une mesure signée donc n'est pas à priori une mesure positive.

Par ailleurs, fixons x un point de $\mathcal{K}$. Alors $\frac{1}{T}\int_0^T P_s^*\delta_x ds$ converge faiblement vers μ. Pour le voir, on extrait une sous-suite faible et on vérifie que la mesure limite (qui est une mesure de proba) est stationnaire, donc égale à μ.

Cela permet de prouver que pour tout x dans $\mathcal{K}$ et toute fonction continue ϕ :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P_s\phi(x)ds =< \phi, \mu > .$$

Par convergence dominée et invariance de ν :

$$\lim_{T\to\infty} < \frac{1}{T}\int_0^T P_s\phi(x)ds, \nu >= \nu(K) < \phi, \mu >=< \phi, \nu > .$$

Donc μ et ν sont proportionnelles, et ν est nulle sur $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{K})$.

Pour conclure, on prend ϕ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ et on approche $\phi- < \phi, \mu >$ par

une fonction $A[\psi]$ à ϵ près.
Enfin on remarque que :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P_sA[\psi](x)ds = \lim_{T\to\infty}\frac{P_T[\psi](x)-\psi(x)}{T}=0.$$

q.e.d

Voyons comment appliquer ce théorème pour obtenir que les supports topologiques de deux mesures ergodiques sont disjoints si le semi-groupe P_t est fortement Feller. Rappelons qu'un semi-groupe est dit fortement Feller si pour toute fonction borélienne bornée f, P_tf est une fonction continue.

Corollaire 10. *Soit $\mathcal{K}$ un compact. Soit P_t un semi-groupe de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ positif tel que $P_t1=1$. ($\mathcal{B}(\mathcal{K})$ désigne l'ensemble des fonctions boréliennes bornées.)*
Alors les supports topologiques de deux mesures ergodiques π_1 et π_2 de P_t sont disjoints.

Démonstration.

Notons $\mathcal{K}_1$ le support topologique de la mesure π_1. P_t induit naturellement un semi-groupe de $\mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K}_1)$. En outre, si l'on interprète P_t comme l'opérateur de transition d'une chaîne de Markov à temps continu sur $\mathcal{K}$, on vérifie que $\mathcal{K}_1$ est stable par par X_t. Autrement dit, pour tout x dans $\mathcal{K}_1$, $X_t^x\in\mathcal{K}_1$. Ceci permet d'affirmer que $P_t(\chi_{\mathcal{K}_1})=\chi_{\mathcal{K}_1}$. Maintenant, nous souhaitons prouver que P_t restreint à $\mathcal{K}_1$ est uniquement ergodique.

Soit π_3 une mesure ergodique différente de π_1 dont le support topologique est inclus dans $\mathcal{K}_1$. Soit B un borélien de $\mathcal{K}_1$, tel que $\pi_3(B)=1$. Alors $<P_t\chi_B,\pi_1>=<\chi_B,\pi_1>=0$, car π_1 et π_3 sont étrangères. D'où $P_t\chi_B(x)=0$ pour π_1 presque tout x. Mais par hypothèse, $P_t\chi_B$ est continue. Par densité, il découle que pour tout x dans $\mathcal{K}_1$, $P_t\chi_B(x)=0$. Cela est absurde car on devrait avoir $<P_t\chi_B,\pi_3>=1$.

Ainsi la restriction de P_t à $\mathcal{K}_1$ est uniquement ergodique. De par le théorème 33, pour tout x dans $\mathcal{K}_1$ et pour toute application continue ϕ :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P_s\phi(x)dx=<\phi,\pi_1>.$$

Ainsi on doit nécessairement avoir $\mathcal{K}_1\cap\mathcal{K}_2=\emptyset$. q.e.d

7.4 Un résultat général sur les semi-groupes fortement Feller

Dans cette section, nous ré-écrivons les idées de la partie précédente dans un contexte plus général.

Soit $\mathcal{K}$ un compact métrique. Et soit P_t un semi-groupe de transition supposé fortement Feller et admettant une unique mesure de probabilité invariante. Nous démontrons que pour tout $T > 0$, $\frac{1}{T}\int_0^T P_s ds$ est un opérateur satisfaisant une propriété de trou de spectre sur $\mathcal{C}(\mathcal{K})$. A notre connaissance, ce résultat naturel n'a pas été publié en ces termes, insistons sur le fait que l'hypothèse de compacité est cruciale.

Théorème 37. *Soit $\mathcal{K}$ un compact métrique. Soit P_t une famille d'opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$. ($\mathcal{B}(\mathcal{K})$ désigne les fonctions boréliennes bornées sur $\mathcal{K}$). On suppose que P_t satisfait :*
- $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$,
- $P_t 1 = 1$,
- $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, $\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathcal{K}} |P_t f(x) - f(x)| = 0$,
- $P_{t+s} = P_t P_s$.

On suppose en outre qu'il existe une unique mesure de probabilité μ invariante pour le semi-groupe P_t.

Alors, pour tout $T > 0$, 1 est isolée dans le spectre de $\frac{1}{T}\int_0^T P_s ds$, elle est de multiplicité 1 et il n'existe pas d'autres valeurs propres sur le cercle unité. De façon équivalente, il existe une constante $C > 0$ et un réel $k \in [0, 1[$ tels que pour tout f dans $\mathcal{B}(\mathcal{K})$:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{K}} |\big(\frac{1}{T}\int_0^T P_s ds\big)^N [f](x) - < f, \mu > | \leq C k^n \|f\|_\infty.$$

Démonstration.
Sans perte de généralité, on peut associer à P_t une unique chaîne de Markov X_t à temps continu et à valeurs dans $\mathcal{K}$, de sorte que $P_t\phi(x) = \mathbb{E}\{\phi(X_t^x)\}$. Soit x_n une suite dense dans $\mathcal{K}$, $t > 0$ fixé et soit $\nu_n = P_t(x_n, dy)$ la probabilité de transition partant de la condition initiale x. On défini alors la mesure de probabilité sur $\mathcal{K}$:

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\nu_n.$$

Vérifions que pour tout x dans $\mathcal{K}$, $P_t(x, dy)$ est absolument continue par rapport à ν. Soit A un borélien tel que $\nu(A) = 0$ et soit x_{k_n} telle que $x_{k_n} \to x$. D'une part $\nu_{k_n}(A) = 0$, d'autre part comme le semi-groupe est fortement Feller $\lim_{n\to\infty} \nu_{k_n}(A) = P_t(x,A)$. On en déduit que $P_t(x,A) = 0$. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, il existe $f(x,y)$ telle que $P_t(x,dy) = f(x,y)d\nu_y$. Par ailleurs on sait (33) que pour toute fonction borélienne bornée ϕ :

$$\lim_{T\to\infty} |\frac{1}{T}\int_0^T P_s[\phi](x)ds - <\phi,\mu>| = 0.$$

On a en outre :

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_s[P_t\phi](x)ds = \int_{\mathcal{K}} \phi(y)\frac{1}{T}\int_0^T P_s[f(\cdot,y)](x)dsd\nu_y.$$

Introduisons $h_T(y) = \sup_{x\in\mathcal{K}} |\frac{1}{T}\int_0^T P_s[f(\cdot,y)](x)ds - \int_{\mathcal{K}} f(x,y)d\mu_x|$. Vérifions que la fonction $y \to \int_{\mathcal{K}} f(x,y)d\mu_x$ n'est pas identiquement nulle ν-presque partout. Pour cela remarquons que pour toute fonction ϕ bornée :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{K}} \phi(y)f(x,y)d\mu_x d\nu_y &= \int_{\mathcal{K}} P_t\phi(x)d\mu_x \\ &= <\phi,\mu> .\end{aligned}$$

Ainsi f ne peut pas être la fonction identiquement nulle, car μ est une mesure de probabilité donc non nulle. La conclusion de cette discussion est qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\nu\{\int_{\mathcal{K}} f(x,y)d\mu_x > \alpha\} > 0$.

La démonstration s'engage naturellement comme suit. On sait que ν_y-p.s, $\lim_{T\to\infty} h_T(y) = 0$. En utilisant le théorème d'Egoroff, on peut trouver un borélien B tel que :

$$\begin{aligned}&\nu_y\text{-p.s}, \int_{\mathcal{K}} f(x,y)d\mu_x \geq \alpha, \\ &\lim_{T\to\infty}\sup_{y\in B} h_T(y) = 0.\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $T > 0$ assez grand tel que $\sup_{y\in B} h_T(y) \leq \frac{\alpha}{2}$. Dans ce cas, pour tout x et toute fonction borélienne ϕ positive :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T P_s[P_t\phi](x)ds &= \frac{1}{T}\int_t^{T+t} P_s[\phi](x)ds \\
&= \int_{\mathcal{K}} \phi(y)\frac{1}{T}\int_0^T P_s[f(\cdot,y)](x)dsd\nu_y \\
&\geq \int_B \phi(y)\frac{1}{T}\int_0^T P_s[f(\cdot,y)](x)dsd\nu_y \\
&\geq \int_B \phi(y)\big(\int_{\mathcal{K}} f(x,y)d\mu_x - \frac{\alpha}{2}\big)d\nu_y \\
&= C < \phi,\eta > .
\end{aligned}$$

Où η représente une certaine mesure de probabilité et C une constante strictement positive de normalisation.

$$\frac{1}{T+t}\int_0^{T+t} P_s[\phi](x)ds \geq \frac{1}{T+t}\int_t^{T+t} P_s[\phi](x)ds \geq \frac{Ct}{t+T} < \phi,\eta > .$$

Par conséquent, $\frac{1}{T+t}\int_0^{T+t} P_s ds$ vérifie une condition de minoration de Doeblin globale sur le compact $\mathcal{K}$ ce qui assure un trou spectral. De plus, le spectre de $\frac{1}{T+t}\int_0^{T+t} P_s ds$ est l'image du spectre de A le générateur du semi-groupe par la fonction $\frac{1}{T+t}\int_0^{T+t} e^{t\,x}ds$, on en déduit que 0 est isolée dans le spectre de A et de multiplicité 1. En remontant, on en déduit que pour toute valeur $S > 0$, $\frac{1}{S}\int_0^S P_s ds$ satisfait aussi un trou spectral. De façon plus intuitive, le fait de "moyenner" l'opérateur P_s permet de se débarrasser des valeurs spectrales sur le cercle unité, cela permet d'avoir le phénomène de trou spectral recherché.

q.e.d

Remarque 24. *Simulons une famille de variables aléatoires U_i de loi uniforme sur $[0,1]$, une conséquence intéressante est que la chaîne de Markov $Y_n^x = X_{U_1+\cdots+U_n}^x$ est géométriquement ergodique.*

Remarque 25. *En aucun cas sous ces hypothèses nous ne pouvons montrer que la chaîne X_t est géométriquement ergodique. Si l'on regarde une chaîne de Markov périodique sur un espace d'état fini (muni de la topologie discrète) et uniquement ergodique, nous sommes exactement dans le contexte de cette preuve. Pourtant, du fait de la périodicité, la chaîne n'est pas géométriquement ergodique. Par exemple, $E = \{0,1\}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ancona. Continuité des contractions dans les espaces de dirichlet. *Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 2*, pages 1–26, 1976.

[2] V. Bally. Lower bounds for the density of locally elliptic itô processes. *The Annals of Probability*, 34(6) :2406–2440, 2006.

[3] V.I. Bogachev, N.V. Krylov, and M. Röckner. Elliptic and parabolic equations for measures. *Russian Mathematical Surveys*, 64 :973, 2009.

[4] N. Bouleau. Décomposition de l'énergie par niveau de potentiel. *Théorie du Potentiel*, pages 149–172, 1984.

[5] N. Bouleau. *Error calculus for finance and physics : The language of Dirichlet forms.* de Gruyter, 2003.

[6] N. Bouleau. Théorème de Donsker et formes de Dirichlet. *Arxiv preprint math.PR/0610392*, 2006.

[7] N. Bouleau. When and how an error yields a Dirichlet form. *Journal of Functional Analysis*, 240(2) :445–494, 2006.

[8] N. Bouleau and C. Chorro. Error structures and parameter estimation. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(4) :305–310, 2004.

[9] N. Bouleau and L. Denis. Application of the lent particle method to poisson-driven sdes. *Probability Theory and Related Fields*, pages 1–31, 2009.

[10] N. Bouleau and L. Denis. Energy image density property and the lent particle method for poisson measures. *Journal of Functional Analysis*, 257(4) :1144–1174, 2009.

[11] N. Bouleau and F. Hirsch. Formes de Dirichlet generales et densité des variables aléatoires reelles sur l'espace de Wiener. *Journal of functional analysis*, 69(2) :229–259, 1986.

[12] N. Bouleau and F. Hirsch. Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques. *Séminaire de Probabilités XX 1984/85*, pages 131–161, 1986.

[13] N. Bouleau and F. Hirsch. On the derivability, with respect to the initial data, of the solution of a stochastic differential equation with lipschitz

coefficients. *Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 9*, pages 39–57, 1989.

[14] N. Bouleau and F. Hirsch. Dirichlet forms and analysis on Wiener space, vol. 14 of de Gruyter Studies in Mathematics, 1991.

[15] C. Chorro. Convergence in dirichlet law of certain stochastic integrals. *Electronic Journal of Probability*, 10 :1005–1025.

[16] C. Chorro. On an extension of the central limit theorem to dirichlet forms. *Cahiers de la mse*, 2004.

[17] C. Chorro. On an extension of the hilbertian central limit theorem to dirichlet forms. *Osaka J. Math*, 45 :457–470, 2008.

[18] A. Coquio. Forme de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson et applications aux équations différentielles stochastiques= Dirichlet forms on canonical Poisson space and applications to stochastic differential equations. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 29, pages 1–36. Elsevier, 1993.

[19] A. Coquio. Formes de Dirichlet sur l'espace canonique de Poisson et applications aux equations différentielles stochastiques. *Ann. Inst. Henri Poincarré*, 19(1) :1–36, 1993.

[20] H. Federer. *Geometric Measure Theory.-Reprint of the 1969 Edition.* Springer, 1996.

[21] M. Fukushima, Y. Ōshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes.* Walter de Gruyter, 1994.

[22] JB. Gravereaux. Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov= Malliavin calculus and invariant probability for a Markov chain. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 24, pages 159–188. Elsevier, 1988.

[23] JB. Gravereaux and A. Coquio. Calcul de Malliavin et régularité de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov= Malliavin calculus and regularity of the density of an invariant probability for a Markov chain. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 28, pages 431–478. Elsevier, 1992.

[24] M. Hairer and J.C. Mattingly. Spectral gaps in wasserstein distances and the 2d stochastic navier–stokes equations. *The Annals of Probability*, 36(6) :2050–2091, 2008.

[25] M. Hairer and J.C. Mattingly. A theory of hypoellipticity and unique ergodicity for semilinear stochastic pdes. *Preprint*, 2008.

[26] H. Hennion and L. Hervé. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness.* Springer, 2001.

[27] R. Hoepfner and E. Loecherbach. On some ergodicity properties for time inhomogeneous markov processes with t-periodic semigroup. *Arxiv preprint arXiv :1012.4916*, 2010.

[28] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators. iii. pseudo-differential operators. reprint of the 1994 edition. classics in mathematics, 2007.

[29] T. Katō. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Verlag, 1995.

[30] Y. Kifer. *Ergodic theory of random transformations*. Birkhauser Boston-Basel-Stuttgart, 1986.

[31] JC Mattingly and AM Stuart. Geometric ergodicity of some hypo-elliptic diffusions for particle motions. *Markov Processes and Related Fields*, 8(2) :199–214, 2002.

[32] J.C. Mattingly, A.M. Stuart, and MV Tretyakov. Convergence of numerical time-averaging and stationary measures via poisson equations. *Arxiv preprint arXiv :0908.4450*, 2009.

[33] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Springer, 1995.

[34] J.C. Oxtoby. Ergodic sets. *Bull. Amer. Math. Soc*, 58(2) :116–136, 1952.

[35] RS Phillips. Spectral theory for semigroups of linear operators. *Trans. Amer. Math. Soc*, 71 :393–415, 1951.

[36] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer Verlag, 1999.

[37] W. Rudin and A. Abouhazim. *Analyse fonctionnelle*. Ediscience international, 1995.

[38] D.W. Stroock and SRS Varadhan. On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. In *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob*, volume 3, pages 333–368, 1972.