



HAL
open science

Modélisation des supraconducteurs HTC Applications au calcul des pertes AC

Emmanuel Vinot

► **To cite this version:**

Emmanuel Vinot. Modélisation des supraconducteurs HTC Applications au calcul des pertes AC. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2000. Français. NNT : . tel-00689985

HAL Id: tel-00689985

<https://theses.hal.science/tel-00689985>

Submitted on 20 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mieux vaut mobiliser son intelligence sur des conneries que sa connerie sur des choses intelligentes.



REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie mes parents et mes grands parents pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté pendant mes études et également pour toutes les corrections grammaticales et orthographiques qu'ils ont apportées à ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont portés à ce travail :

- Monsieur Yves Brunet, président de l'INPG pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury
- Messieurs Frédéric Bouillault, Professeur à l'Université Paris XI et Pierre Manuel, Ingénieur EDF et Docteur d'Etat pour avoir été les rapporteurs de ce travail et pour leurs nombreuses remarques
- Monsieur Bertrand Dutoit, Professeur à l'EPFL pour avoir accepté de participer à ce jury.

Ce travail n'aurait pas pu être mené à bien sans l'aide d'un grand nombre de personnes. Je tiens donc à remercier tous ceux qui m'ont supporté pendant deux ans et demi :

- tout particulièrement mes deux directeurs de thèse, Pascal Tixador et Gérard Meunier, tant pour leur apport au niveau scientifique que pour leur aide lors de la rédaction d'articles et la rédaction de ce mémoire, ainsi que pour leur disponibilité tout au long de ce projet
- Patrice Labie, grand chasseur de bug devant l'éternel pour son aide précieuse lors des développements sous Flux3D
- Vincent Leconte pour l'aide qu'il m'a apportée tant au niveau programmation qu'au niveau relecture d'article
- Guillaume Donnier Valentin avec qui la plupart des mesures et des calculs analytiques ont été réalisés
- Bertrand Raison pour ses corrections orthographiques et son sens inné de la rhétorique
- Enaut Muxika pour son aide en informatique

Remerciements

- Etienne Gallegher, Patrick Guillot, Patrick Eustache pour leur disponibilité et leur rapidité d'intervention lors des problèmes avec le réseau informatique et pour leur aide lors de mes (nombreuses) fausses manip
- Monique Boizard, Daniel Collin, Jacqueline Delaye, Elise Riado qui ont toujours su répondre aux diverses tracasseries administratives avec le sourire
- les techniciens du LEG comme du CRTBT pour leur aide notamment lors des mesures
- les permanents du LEG avec qui j'ai eu souvent l'occasion de discuter et qui m'ont apporté une aide aussi bien scientifique que technique ou administrative
- enfin tous les thésards, particulièrement pour les nombreuses discussions scientifiques, politique, philosophique et autres que nous avons pu avoir, ainsi que pour tout ce qui fait la vie d'un labo. Dans le désordre en m'excusant auprès de ceux que j'oublie : Thierry Chevalier, Vincent leconte, Jean-Christophe Crébier, Jean Eric Torlay, Corrine Perret, Eric Atienza, Jean Michel Guichon, Maxime Besacier, Armando Fonseca, Bertrand Raison, Enaüt Mujika, Ambroise Schellmanns, Ali Abakar, Christophe Herault, Anthony Erraud, Guillaume Donnier Valentin, Didier Buzon, Jimmy Lorange, Pierre olivier Jeanin, Bertrand Legrand ...

TABLE DES MATIERES

Table des Matières.....	5
Nomenclature	10
Abréviations	11
Introduction générale.....	12
<u>CHAPITRE I</u>	<u>INTRODUCTION SUR LES SUPRACONDUCTEURS..... 14</u>
I.A	PRÉSENTATION DES SUPRACONDUCTEURS DITS DE TYPE II..... 14
I.A.1	INTRODUCTION..... 14
I.A.2	BREF HISTORIQUE..... 14
I.A.3	COMPORTEMENT ET STRUCTURE DES SUPRACONDUCTEURS DE TYPE II..... 15
I.A.3.a	Grandeurs critiques 15
I.A.3.b	Comportement magnétique et réseau de vortex 15
I.A.3.c	Microstructure..... 16
I.A.3.d	Pertes DC dans les supraconducteurs 17
I.A.3.e	Pertes AC en champ propre ou extérieur 18
I.A.4	APPLICATIONS POTENTIELLES 19
I.A.5	BRINS MULTIFILAMENTAIRES..... 19
I.B	MODÈLES 20
I.B.1	INTRODUCTION 20
I.B.2	MODÈLE DE L'ÉTAT CRITIQUE ET MODÈLE DE BEAN 20
I.B.2.a	Présentation du modèle de Bean 20
I.B.2.b	Exemple : fil infiniment long, notion de pénétration complète..... 20
I.B.3	LOI EN PUISSANCE 22
I.B.3.a	Loi $E(J)$ 22
I.B.3.b	Hypothèse sur l'influence du champ magnétique et de la température sur J_c 23
I.B.3.c	Détermination expérimentale des paramètres de la loi $E(J)$ à température constante et champ extérieur nul 24
I.B.3.d	Pourquoi un modèle numérique 25
<u>CHAPITRE II</u>	<u>MODÉLISATION ET CALCUL DES CHAMPS APPLIQUÉS AUX SUPRACONDUCTEURS 26</u>
II.A	PRÉSENTATION RAPIDE ET ETAT DE L'ART 26
II.A.1	BUT ET UTILITÉ DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS EN ÉLECTROMAGNÉTISME 26
II.A.2	FORMULATIONS ET VARIABLES D'ÉTAT..... 26

II.A.3	ETAT DE L'ART	27
II.A.4	LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ET LA MÉTHODE DE GALERKINE	28
II.B	IMPLANTATION DANS FLUX 3D	29
II.B.1	INTRODUCTION.....	29
II.B.2	DIFFÉRENTES FORMULATIONS	30
II.B.2.a	Formulation 2D en potentiel vecteur magnétique \vec{A}	30
II.B.2.b	Formulation 2D en $\partial\vec{A}/\partial t$ (dérivée du potentiel vecteur magnétique)	31
II.B.2.c	Formulation en potentiel vecteur courant \vec{T} et potentiel scalaire magnétique Φ	32
II.B.2.d	Formulations pour imposer un courant total.....	33
II.B.2.d.i	Formulation en $\vec{T}\vec{T}_0\Phi$	33
II.B.2.d.ii	Couplage avec les équations de circuits de la formulation 2D en \vec{A}	34
II.C	VALIDATION ET COMPARAISON DE CES MODÈLES SUR QUELQUES EXEMPLES SIMPLES... 35	
II.C.1	PLAN INFINI BEAN :	35
II.C.2	CYLINDRE CREUX INFINI AVEC $N = 1$ (CONDUCTEUR RÉSISTIF)	37
II.C.3	PERFORMANCES ET ÉLÉMENTS DE COMPARAISONS DE CES FORMULATIONS	38
II.D	CONCLUSION	40
<u>CHAPITRE III QUELQUES ÉTUDES QUALITATIVES EN CHAMP</u>		
<u>EXTÉRIEUR</u>		
<u>41</u>		
III.A	INTRODUCTION	41
III.B	RÉPARTITION DES GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES DANS UN PLAN INFINI.....	41
III.C	PERTES FONCTION DE DIFFERENTS PARAMETRES EN CHAMP EXTERIEUR	45
III.C.1	INTRODUCTION.....	45
III.C.2	INFLUENCE DE LA HAUTEUR DU CONDUCTEUR POUR DIFFÉRENTS N	45
III.C.2.a	Influence du rapport hauteur sur épaisseur	46
III.C.2.b	Influence de N	48
III.C.2.c	Conclusion sur la validité du modèle de Bean appliqué à un plan infini.....	49
III.C.3	EFFET DE LA FORME DU CHAMP EXTÉRIEUR	49
III.C.3.a	Influence sur la valeur moyenne des pertes	49
III.C.3.b	Influence sur les pertes instantanées	51
III.C.4	EFFET ORIENTATION.....	52
III.D	CONCLUSION	54
<u>CHAPITRE IV ETUDE D'UN FIL OPIT DE BI-2223 EN CHAMP PROPRE.....</u>		
<u>55</u>		
IV.A	INTRODUCTION	55

IV.B	MÉTHODE ELECTRIQUE DE MESURE DE PERTES	55
IV.B.1	PROBLÉMATIQUE	55
IV.B.2	PRINCIPE ET SCHÉMA DE MESURE.....	56
IV.B.3	MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UN SUPRACONDUCTEUR DE SECTION CIRCULAIRE	58
IV.B.4	MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UN SUPRACONDUCTEUR DE SECTION RECTANGULAIRE.....	59
IV.C	PERTES EN CHAMP PROPRE DANS UN CONDUCTEUR	62
IV.C.1	CONDUCTEUR ÉTUDIÉ ET HYPOTHÈSE SUR LE COUPLAGE ENTRE FILAMENTS.....	62
IV.C.2	RÉPARTITION DE J DANS UN RUBAN SUPRACONDUCTEUR.....	63
IV.C.3	COMPARAISON ENTRE MESURE, SIMULATION ET FORMULES CLASSIQUES	64
IV.C.3.a	Comparaison simulation mesure.....	64
IV.C.3.b	Comparaison avec les formules de Norris	64
IV.C.3.c	Comparaison avec le modèle de « plan infini ».....	65
IV.C.4	ETUDE DE L'HOMOGENÉISATION	67
IV.C.4.a	Répartition du courant	68
IV.C.4.b	Comparaison sur la valeur des pertes.....	69
IV.D	CONCLUSION SUR LE CHAPITRE	70
CHAPITRE V ETUDE DÉTAILLÉE D'UNE BOBINE DEUX COUCHES		71
V.A	INTRODUCTION	71
V.B	MODÈLE ANALYTIQUE.....	71
V.B.1	BOBINE MONO-COUCHE	71
V.B.1.a	Présentation du modèle et méthodologie	71
V.B.1.b	Hypothèse sur le couplage des filaments.....	73
V.B.1.c	Répartition des grandeurs électromagnétiques	74
V.B.1.d	Calcul des pertes instantanées et moyennes	75
V.B.2	BOBINE DEUX COUCHES AVEC COUCHE EXTERNE SEULE ALIMENTÉE.....	77
V.B.2.a	Modèle	77
V.B.2.b	Répartition des grandeurs électromagnétiques et pertes instantanées	77
V.B.2.b.i	Si la bobine 2 est en pénétration complète ($I_{hM} > I_{hp}$)	78
V.B.2.b.ii	Si la bobine 2 n'est pas en pénétration complète	79
V.B.3	BOBINE DEUX COUCHES AVEC DEUX COUCHES ALIMENTÉES ET EN SÉRIE MAGNÉTIQUEMENT (LEURS FLUX S'AJOUTENT)	79
V.B.3.a	Modèle	79
V.B.3.b	Répartition des grandeurs électromagnétiques et pertes instantanées	79
V.B.3.b.i	Si la bobine 2 est en pénétration complète ($I_{hM} > I_{hp}$).	79
V.B.3.b.ii	Si la bobine 2 n'est pas en pénétration complète	80

V.C	MÉTHODE ELECTRIQUE DE MESURE DE PERTES.....	81
V.C.1	PROBLÉMATIQUE.....	81
V.C.2	MESURE DE TENSION EN FONCTION DE L'EMPLACEMENT DES PRISES DE POTENTIELS.....	81
V.C.2.a	Cas d'une bobine mono-couche.....	81
V.C.2.b	Cas d'une bobine deux couches.....	82
V.C.2.b.i	Si la couche interne est alimentée	82
V.C.2.b.ii	Si la couche interne n'est pas alimentée.....	83
V.D	ETUDE D'UNE BOBINE DEUX COUCHES REELLE	83
V.D.1	COUCHE INTERNE SEULE ALIMENTÉE	84
V.D.2	DEUX COUCHES ALIMENTÉES	85
V.D.3	COUCHE INTERNE NON ALIMENTÉE	87
V.E	CONCLUSION.....	89
	Conclusion générale	90
 <u>ANNEXE 1</u>		
	MESURE AVEC UN VOLTMÈTRE	92
1.A	MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UN SUPRACONDUCTEUR DE SECTION CIRCULAIRE ..	92
1.B	MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UNE SPIRE D'UNE BOBINE INFINIE.....	94
 <u>ANNEXE 2</u>		
	PERTES DANS UN CYLINDRE SUPRACONDUCTEUR	96
2.A	INTRODUCTION	96
2.B	PRÉSENTATION DÉTAILLÉE DES CALCULS DANS LE CAS MONO-COUCHE.....	96
2.B.1	MODÈLE	96
2.B.2	CALCUL DES PERTES DANS UNE BOBINE MONO-COUCHE.....	96
2.B.2.a	Répartition des grandeurs électromagnétiques	96
2.B.2.b	Calcul des pertes instantanées et moyennes	98
2.C	N ^{IE} ME COUCHE D'UNE BOBINE	98
2.C.1	COUCHE INTERNE NON ALIMENTÉE.	98
2.C.1.a	Si il n'y a jamais pénétration complète ($H_M \leq J_c e/2$)	99
2.C.1.b	Si il y a pénétration complète au cours du temps ($H_M \geq J_c e/2$).....	100
2.C.2	COUCHE INTERNE ALIMENTÉE.....	102
2.C.2.a	Si il n'y a jamais pénétration complète ($H_M \leq (e.J_c - I_h/e)/2$).....	102
2.C.2.b	Si il y a pénétration complète au cours du temps ($H_M \geq (e.J_c - I_h/e)/2$)	104

ANNEXE 3	FORME FAIBLE DE LA FORMULATION EN $T\phi$	106
3.A	FORMULATION ET ÉQUATIONS À RÉSOUDRE	106
3.B	FORME FAIBLE	106
3.C	MÉTHODE DE NEWTON RAPHSON	107
Références		109

NOMENCLATURE

\vec{H}	champ magnétique
H	module du champ magnétique
\vec{B}	induction magnétique
B	module de l'induction magnétique
\vec{E}	champ électrique
E	module du champ électrique
\vec{J}	densité de courant
J	module de la densité de courant
J_c	densité de courant critique
I_c	courant critique
E_c	champ électrique critique
T_c	température critique
H^*	champ magnétique critique
H_{c1}, H_{c2}	champs magnétiques critiques d'un supraconducteur de type II
H_p	champ magnétique de pénétration
μ_0	perméabilité du vide ($4\pi \cdot 10^{-7}$)
\vec{A}	potentiel vecteur magnétique
V	potentiel scalaire électrique
Ψ	potentiel scalaire électrique intégré dans le temps
U	tension
\vec{T}	potentiel vecteur courant
\vec{T}_0	potentiel vecteur courant source unitaire (1 A/m^2)
J_s	densité de courant source
Φ	potentiel scalaire magnétique
A_z	composante de \vec{A} selon z
J_t	densité de courant de transport
H_e	champ magnétique extérieur
H_m	amplitude du champ magnétique extérieur
B_n	induction magnétique au n^{ieme} pas de temps
e	épaisseur d'un plan ou d'un conducteur
h, b	hauteur d'un plan ou d'un conducteur
p	pertes actives instantanées
P	pertes actives moyennes
p_l	pertes actives instantanées par unité de longueur
P_l	pertes actives moyennes par unité de longueur
p_{vol}	pertes actives volumiques instantanées
P_{vol}	pertes actives volumiques moyennes
δ	épaisseur de peau
ρ	résistivité
σ	conductivité
V_{eff}	Valeur efficace de la tension

I_{eff}	Valeur efficace du courant
φ	déphasage entre tension et courant
θ	angle entre un conducteur et champ magnétique extérieur
v	valeur instantanée d'une tension
$V_A, V_{A'}, V_B, V_{B'}$	tension instantanée mesurée par les voltmètres A, A', B, B'
Φ_{ext}	flux extérieur
Φ_{int}	flux intérieur
I_m	amplitude du courant de transport
I_h	courant instantané par unité de hauteur
I_{hM}	amplitude du courant par unité de hauteur
r_p	rayon de pénétration
r_{p2i}	rayon de pénétration à l'intérieur de la couche 2
r_{p2e}	rayon de pénétration à l'extérieur de la couche 2
$r_{p2\text{max}}$	rayon maximal de pénétration à l'intérieur de la couche 2
R_i	rayon intérieur
R_e	rayon extérieur
R_{1i}	rayon intérieur de la couche 1
R_{2i}	rayon intérieur de la couche 2
R_{2e}	rayon extérieur de la couche 2
N_1	nombre de spire de la couche 1
N_2	nombre de spire de la couche 2
L_{1i}	longueur de fil intérieur de la couche 1
L_{2i}	longueur de fil intérieur de la couche 2
L_{2e}	longueur de fil extérieur de la couche 2
H_i	champ magnétique intérieur
H_e	champ magnétique extérieur
Φ_{12}	flux magnétique entre la couche 1 et la couche 2
Φ_{cond1}	flux magnétique dans le conducteur de la couche 1
Φ_{cond2}	flux magnétique dans le conducteur de la couche 2
Φ_2	flux magnétique à l'intérieur de la couche 2

ABREVIATIONS

BTC	Basse température critique
HTC	Haute température critique
CRTBT	Centre de Recherches sur les Très Basses Températures
LEG	Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble
CEDRAT	Centre d'Etude de Développement et de Recherche sur l'Aménagement du Territoire
AC	alternatif current
DC	direct current
TAFF	Themally activated Flux-Flow

INTRODUCTION GENERALE

La découverte des supraconducteurs dits à haute température critique (HTC) en 1986 a fortement relancé l'intérêt pour ces matériaux. Nous sommes maintenant à un stade où leur utilisation en électrotechnique peut être envisagée sérieusement. Les fils à base de Bismuth sont tout indiqués pour la réalisation des bobinages dans les transformateurs ou les moteurs. Les conducteurs déposés sont une autre voie pleine d'avenir. Parallèlement, la propriété remarquable des supraconducteurs de faire léviter « sans dissipation d'énergie » et de manière stable un aimant permanent permet d'envisager leur utilisation (notamment les pastilles d'YBaCuO) pour des paliers magnétiques ou le stockage inertiel d'énergie.

Il devient donc important de savoir déterminer avec une bonne précision les grandeurs électromagnétiques dans les dispositifs supraconducteurs. Ainsi, on peut déduire, par exemple, les pertes AC ou les efforts mécaniques mis en jeux.

Ce travail a été, au LEG, le premier concernant la modélisation des supraconducteurs d'un point de vue macroscopique. Il s'est néanmoins appuyé très fortement sur le logiciel Flux3D, développé conjointement par le LEG et CEDRAT, et sur la vaste expérience existant au laboratoire concernant les méthodes numériques. La vision matériau supraconducteur s'est appuyée sur le CRTBT où les parties expérimentales ont été menées.

Dans ce mémoire, nous nous sommes préoccupés plus particulièrement de la détermination des pertes AC dans les supraconducteurs HTC de façon à pouvoir dimensionner le dispositif de refroidissement. Pour cela, nous avons choisi une approche numérique (éléments finis) car, dans beaucoup de cas, seule cette méthode permet de calculer les grandeurs nécessaires à la détermination des pertes.

Nous avons cependant attaché beaucoup d'importance à la comparaison des résultats numériques avec des modèles analytiques, afin de connaître le mieux possible les domaines d'application et de validité de ces derniers. De même, une comparaison avec les valeurs expérimentales, même sur des dispositifs assez simples, nous a semblé indispensable notamment pour valider ou invalider les hypothèses faites dans les modèles analytiques ou numériques. Nous avons ainsi été amenés à mieux comprendre la méthode électrique de mesure de pertes.

Ce mémoire est structuré en cinq chapitres.

Le premier commence par un bref rappel de l'histoire des supraconducteurs avec leurs propriétés et le comportement des supraconducteurs de type II. Il présente ensuite quelques modèles physiques de ces matériaux ainsi que les hypothèses qui les accompagnent et qui ont, pour certaines, été utilisées dans ce mémoire.

Après une présentation rapide de l'état de l'art de la modélisation des supraconducteurs, le deuxième chapitre est consacré aux différentes formulations (\vec{A} , $\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{T}\Phi$, $\vec{T}\vec{T}_0\Phi$, \vec{A} couplée avec les équations de circuit) qui ont été développées lors de ce travail et à leurs comparaisons.

Le troisième chapitre analyse l'influence d'un certain nombre de paramètres sur les pertes en champ extérieur. La grande majorité des études numériques de ce chapitre est comparée aux modèles analytiques ; on s'aperçoit alors que, sous certaines conditions, ces derniers donnent des résultats très proches de ceux obtenus par simulation.

Le chapitre suivant concerne l'étude d'un fil OPIT de Bi-2223 en champ propre. L'hypothèse d'un fil homogène est utilisée et validée. La méthode expérimentale de mesure de pertes est expliquée, notamment concernant la mesure d'une tension aux bornes d'un fil. Enfin, les pertes calculées numériquement, analytiquement (modèle de Norris) et mesurées sont comparées, entre autre, de façon à valider expérimentalement les méthodes numériques.

Le dernier chapitre porte sur l'étude d'une bobine supraconductrice comportant deux couches de conducteurs. Un modèle analytique est d'abord proposé, puis le problème de la mesure de tension est étudié. Enfin, comme dans le chapitre précédent, méthodes analytique, numérique et mesures sont comparées, afin de discuter, sur ce cas précis, de la validité des hypothèses rappelées au chapitre I.

Le manuscrit contient également des annexes comportant principalement les calculs utilisés pour la compréhension des mesures de tension et pour la détermination des pertes dans une bobine comportant n couches de conducteurs.

Chapitre I

Introduction sur les supraconducteurs

I.A PRESENTATION DES SUPRACONDUCTEURS DITS DE TYPE II

I.A.1 Introduction

Les matériaux supraconducteurs ont des propriétés électriques et magnétiques assez remarquables. La propriété la plus connue, et qui a donné le nom au phénomène, étant la disparition totale de toute résistivité en dessous d'une certaine température appelée température critique (T_c). Une autre propriété est le diamagnétisme parfait de ces matériaux [I-1] : ils expulsent totalement le champ magnétique en dehors de leur volume dans certaines conditions précises de champ.

En fait, ces deux propriétés définissent la supraconductivité dite de type I. Dans ce mémoire, nous nous attacherons plus particulièrement aux supraconducteurs dits de type II, dont la résistivité n'est pas complètement nulle autour de J_c , et dont le diamagnétisme n'est que partiel (paragraphe I.A.3).

Une autre distinction, plus arbitraire, entre les supraconducteurs, est faite en fonction de leur température critique. On distingue ainsi les supraconducteurs à température critique (T_c) inférieure à 30 K dits supraconducteurs à Basse Température critique (BTC), et ceux à température critique supérieure à 30 K, dits supraconducteurs à Haute Température critique (HTC). Il faut noter que tous les supraconducteurs HTC sont de type II.

I.A.2 Bref historique

La découverte de la supraconductivité a eu lieu en 1911, dans du mercure refroidi à l'hélium liquide (4 K).

La découverte de la supraconductivité de type II a été plus tardive puisqu'elle n'a eu lieu que vers 1954 dans un alliage de niobium et d'étain supraconducteur en dessous de 18 K [I-2]. Les alliages à base de niobium seront pendant longtemps les supraconducteurs ayant les plus hautes températures critiques, (Nb_3Ge , découvert en 1973, $T_c=23$ K) [I-3], mais ceux-ci étaient encore BTC et il était alors communément admis que la limite de 30 K ne serait jamais dépassée.

Les températures critiques ont finalement fait un bond avec l'apparition des céramiques supraconductrices à base d'oxyde de cuivre : le composé BaLaCuO [I-4] tout d'abord qui apparaît en 1986 (38 K), puis l'année suivante le composé YBaCuO ($T_c=93$ K) [I-5] qui donne vraiment naissance à la supraconductivité HTC. Ceci a fortement renforcé l'intérêt pour les supraconducteurs qui pouvaient désormais être refroidis à l'azote liquide, fluide beaucoup moins coûteux et beaucoup plus facile d'utilisation que les fluides à température d'ébullition plus basse (hélium liquide par exemple).

Depuis, de nouveaux matériaux HTC sont apparus, le composé HgBaCaCuO ($T_c = 133$ K) [I-6] ou les composés à base de bismuth présentés chapitre I.A.5.

I.A.3 Comportement et structure des supraconducteurs de type II

I.A.3.a Grandeurs critiques

L'état supraconducteur non dissipatif est limité par trois grandeurs, appelées grandeurs critiques, au-delà desquelles le matériau passe dans un état fortement dissipatif. Il s'agit de la densité de courant critique J_c , de la température critique T_c , et du champ magnétique H^* .

Ces trois grandeurs sont fonction les unes des autres et forment ainsi une surface critique au-delà de laquelle le matériau cesse d'être non dissipatif.

Dans les supraconducteurs HTC, si T_c est définie de façon très claire par une chute brutale de la résistivité, nous verrons, paragraphe I.B.3.a, qu'il n'en est pas de même pour J_c dont la définition est basée sur un critère arbitraire.

I.A.3.b Comportement magnétique et réseau de vortex

Les supraconducteurs de type II possèdent en fait deux champs critiques, H_{c1} en dessous duquel le diamagnétisme est parfait, excepté dans une fine couche à la surface, et H_{c2} au-dessus duquel le matériau cesse d'être supraconducteur et devient parfaitement amagnétique ($B = \mu_0 H$). Entre H^* et H_{c2} , le matériau est supraconducteur mais dans un état dissipatif (verre de Vortex).

Entre ces deux champs critiques, le diamagnétisme n'est pas parfait et le champ magnétique pénètre dans le matériau par quantum de flux. Ceci forme un réseau de vortex ordonné (Figure I-1).

Dans la pratique, H_{c1} est très petit devant H_{c2} et peut être négligé devant les champs magnétiques de travail. Le supraconducteur peut alors être considéré comme amagnétique entre H_{c1} et H_{c2} (Figure I-2). Cette hypothèse sera utilisée dans toute la suite de ce mémoire, et on aura toujours $B = \mu_0 H$.

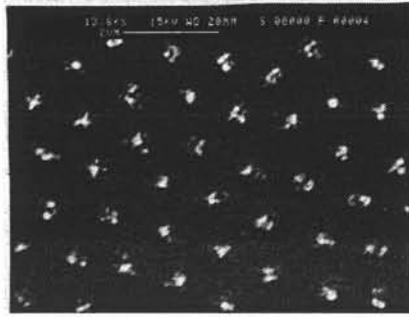


Figure I-1 : Réseau de vortex obtenu avec de fines particules ferromagnétiques (en blanc) (K. Runge, CNRS - CRTBT).

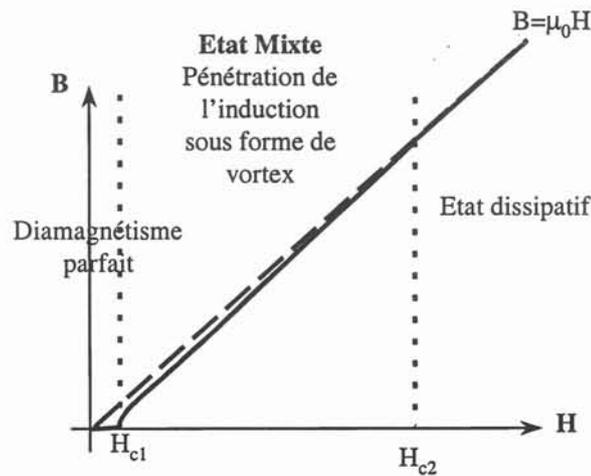


Figure I-2 : Induction magnétique dans les supraconducteurs de type II.

I.A.3.c Microstructure

Les supraconducteurs à haute température critique sont des oxydes intermétalliques. Leur structure est fortement anisotropique ; leurs propriétés ne sont pas les mêmes dans toutes les orientations. Ils possèdent deux directions principales. La plupart des supraconducteurs à haute température critique est constituée en partie d'un empilement de plans CuO_2 appelés plans ab. La direction perpendiculaire est l'axe c. La densité de courant critique est beaucoup plus grande dans les plans ab que suivant l'axe c. De même l'orientation du champ magnétique est fondamentale. Un champ parallèle aux plans ab est toujours nettement plus favorable (en terme de densité de courant critique) que s'il est perpendiculaire (voir paragraphe I.B.3.b). Dans ce mémoire nous n'avons considéré que des cas où le courant est parallèle aux plans ab et, comme nous le verrons paragraphe I.B.3.b, nous avons négligé l'influence du champ magnétique sur la densité de courant critique.

I.A.3.d Pertes DC dans les supraconducteurs

Lorsqu'un courant continu traverse un supraconducteur, il crée un champ magnétique continu, perpendiculaire à ce courant, et qui pénètre le matériau sous forme de vortex. Ces vortex sont soumis à la force de Lorentz (proportionnelle à $\vec{J} \wedge \vec{B}$) (Figure I-3), qui a alors tendance à les déplacer, parallèlement, certains vortex sont « ancrés » sur des impuretés du matériau. D'après la théorie de Anderson et Kim [I-7], les vortex ont une probabilité de sauter de leurs centres de piégeage par activation thermique. En présence d'une force de Lorentz, une « direction de sauts » devient privilégiée. Selon la valeur des forces de Lorentz, donc du courant, on distingue différents phénomènes. Pour des faibles courants, les vortex se déplacent de point d'ancrage en point d'ancrage, ce phénomène est appelé TAFF (thermally activated flux-flow), pour des courants plus importants, le phénomène s'emballe, on parle alors de « flux-creep ». Enfin lorsque les forces de Lorentz deviennent très supérieures aux forces d'ancrage, les vortex se déplacent alors librement; on a alors un phénomène dit de « flux-flow ». Dans tous ces cas, les forces appliquées aux vortex entraînent un déplacement de ceux-ci, donc une dissipation d'énergie.

D'un point de vue électrique, les déplacements ou vibrations du réseau entraînent des variations du champ magnétique qui engendrent la création d'un champ électrique ($\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$), donc des pertes ($p = \int \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dt$). Dans notre cas (matériaux traversés par un courant continu), on parle de pertes DC en champ propre puisque le matériau est soumis uniquement au champ créé par le courant qui le traverse. La Figure I-4 présente, à température constante et champ magnétique extérieur nul, l'évolution du champ électrique en fonction de la valeur du courant continu qui traverse un échantillon de supraconducteur HTC. En générale, les pertes en régime de TAFF sont totalement négligeables par rapport à celles en régime de flux-creep. Le régime de flux-flow est quant à lui très dissipatif. Pour des raisons économiques, les supraconducteurs seront donc utilisés principalement en régime de flux-creep (sauf dans le cas des limiteurs de courant).

Il faut noter que les phénomènes et terminologies présentés ci-dessus, concernant les déplacements des vortex, sont à considérer avec beaucoup de précautions ; les physiciens eux-mêmes ne semblent pas tous totalement d'accord sur le sujet, tout particulièrement en ce qui concerne le régime de TAFF. Ce phénomène n'est a priori observable qu'à température suffisamment élevée. A basse température, de nombreux auteurs supposent que le réseau de vortex est « gelé » et qu'il n'y a donc plus aucune dissipation.

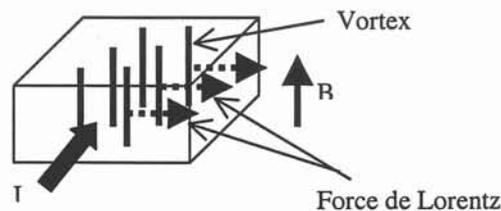


Figure I-3 : Force de Lorentz dans un supraconducteur.

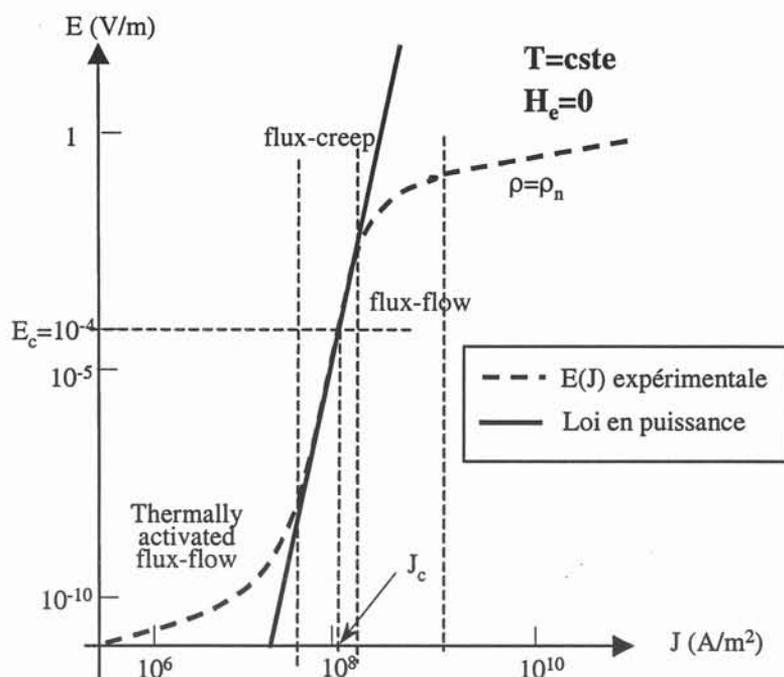


Figure I-4 : Allure typique de la loi $E(J)$.

I.A.3.e Pertes AC en champ propre ou extérieur

Si le supraconducteur est traversé par un courant alternatif, celui-ci crée un champ magnétique variable. Les variations temporelles de ce champ magnétique entraînent la création ou la disparition permanente de vortex dans le matériau, donc un déplacement et une réorganisation du réseau, donc un champ électrique qui, combiné au courant de transport, crée une dissipation d'énergie. On parle alors de pertes AC en champ propre.

Lorsqu'un supraconducteur est soumis à un champ magnétique extérieur variable, celui-ci entraîne, pour les mêmes raisons que précédemment, la création d'un champ électrique dans le matériau qui, combiné au courant qui se crée pour écranter ce champ (loi de Lenz), amène une dissipation d'énergie dans le matériau. On parle alors de pertes AC en champ extérieur.

Comme on l'a vu précédemment, les pertes DC sont en général très faibles, voire non mesurables, sauf pour des courants proches de J_c (courant pour lequel on a J_c partout dans le matériau). Les pertes AC, elles, sont souvent non négligeables, même pour des courants dont la valeur maximale est 3 à 4 fois plus petite que J_c . En effet, les déplacements du réseau de vortex dus à un champ ou un courant alternatif sont en général beaucoup plus importants que ceux dus au phénomène de TAFF ou de Flux creep.

De façon plus macroscopique, on peut dire que toute modification de l'état magnétique du matériau crée un champ électrique et donc, potentiellement, des pertes. En effet, quelle que soit l'origine du champ électrique, celui-ci est relié à une densité de courant par une « loi de comportement du matériau » (voir paragraphe I.B.3.a) ; or la présence d'un champ électrique et d'une densité de courant colinéaire entraîne des pertes.

Les phénomènes de pertes en champ propre ou extérieur peuvent bien évidemment se combiner à l'intérieur des dispositifs supraconducteurs. De plus, un champ magnétique extérieur continu ou un courant continu peuvent s'ajouter au champ ou courant alternatif et venir modifier l'état électromagnétique du matériau, donc les pertes.

I.A.4 Applications potentielles

Pour l'instant, les supraconducteurs HTC n'ont pratiquement pas d'applications industrielles ou commerciales, les applications de la supraconductivité concernant principalement les BTC. Cependant, la relative simplicité d'utilisation des supraconducteurs HTC et les progrès faits dans leur conception permettent d'envisager leur utilisation en électrotechnique.

Des transformateurs [I-6]-[I-8] et des moteurs supraconducteurs [I-9]-[I-10] présentant des performances meilleures que les dispositifs classiques sont étudiés. Ils sont, de surcroît, plus petits et plus légers.

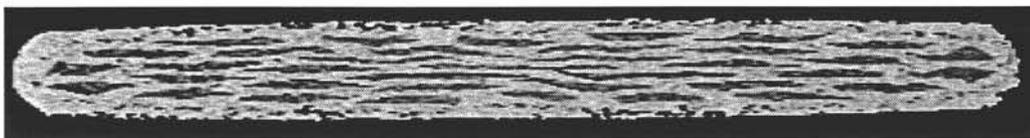
D'autres applications originales sont également à l'étude. Elles utilisent deux propriétés particulières aux supraconducteurs. La première concerne le phénomène de lévitation : un aimant placé au-dessus d'une pastille supraconductrice entre en lévitation dans une position d'équilibre stable ; cette propriété peut être utilisée pour réaliser des suspensions magnétiques totalement passives [I-11]-[I-12]-[I-13] ou pour le stockage d'énergie par inertie [I-14]-[I-15]-[I-16]. La seconde utilise la propriété de transition de l'état supraconducteur vers un état résistif lorsque le courant critique est dépassé. Elle permet de réaliser des limiteurs de courant [I-17]-[I-18]-[I-19].

I.A.5 Brins multifilamentaires

Depuis quelques années, des fils supraconducteurs HTC sont apparus et leur fabrication commence à être bien maîtrisée. On peut maintenant disposer de fils de plusieurs centaines de mètres de long. Ces fils sont principalement réalisés à partir de composés au bismuth avec la technique dite PIT (*Powder in Tube*) [I-20]-[I-21] qui consiste à laminier et à étirer ensemble plusieurs tubes en argent remplis de poudre de bismuth ; on obtient alors un fil non homogène composé de filaments de bismuth dans une matrice en argent (Figure I-5).

Il existe deux grands types de fils à base de bismuth qui sont différenciés par les proportions stœchiométriques des matériaux qui les composent. Ainsi on a des fils en Bi-2223 $((\text{Bi,Pb})_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10})$ ou Bi-2212. Les chiffres représentent les proportions stœchiométriques respectives en bismuth plus des traces de plomb, strontium, calcium, cuivre et oxygène. Les fils en Bi-2212 sont plus faciles de réalisation que ceux en Bi-2223, mais ils ont une température critique plus faible (85 K contre 110 K) et ils présentent des capacités de transport moindres à hautes température (supérieure à 20 K). Par contre, à très basse température (4,2 K), leur densité de courant critique sous champ magnétique est supérieure à

celle des fils en Bi-2223. Ils sont bien adaptés à la réalisation d'inserts sous très fort champ magnétique à 4,2 K.



*Figure I-5 : Section d'un ruban supraconducteur fourni par BICC :
en foncé filaments de bismuth, en clair matrice en argent.*

Les fils en Bi-2223 sont étudiés en détail chapitre IV.

I.B MODELES

I.B.1 Introduction

Les deux modèles présentés ci-après sont des modèles macroscopiques. Ils proposent en fait des relations entre la densité de courant J et le champ électrique E , la relation entre induction B et champ magnétique H ayant été choisie linéaire et amagnétique (chapitre I.A.3.b). Ces relations, bien que reflétant la dissipation due au déplacement des vortex, oublient donc leur existence et considèrent un matériau où le champ magnétique pénètre de façon homogène et continue et non plus sous forme de vortex.

I.B.2 Modèle de l'état critique et modèle de Bean

I.B.2.a Présentation du modèle de Bean

Le modèle de l'état critique stipule qu'à température donnée la densité de courant dans un supraconducteur est, soit nulle, soit égale à la densité de courant critique J_c . D'un point de vue plus mathématique, dans les équations de Maxwell, cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \pm \mu_0 \vec{J}_c \\ \text{ou } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{I.1}$$

Le modèle de Bean (1962) suppose, en plus, que la densité de courant critique est indépendante de la valeur de l'induction magnétique B .

Ce modèle a l'avantage d'être assez simple mathématiquement et permet donc, sur des exemples simples, de bien comprendre la supraconductivité d'un point de vue macroscopique. Cependant, la discontinuité de ce modèle le rend peu utilisable pour des développements numériques ; de plus, il ne reflète pas toujours de façon satisfaisante le comportement des supraconducteurs comme on le verra dans les chapitres III à V.

I.B.2.b Exemple : fil infiniment long, notion de pénétration complète

On considère un cylindre infiniment long, soumis à un champ extérieur variable parallèle à son axe, et on regarde la densité de courant et le champ magnétique à l'intérieur de ce cylindre.

Le champ magnétique extérieur augmente à partir de zéro jusqu'à une valeur maximale H_m puis diminue jusqu'à $-H_m$.

Les répartitions de J et H dans le cylindre sont présentées ci-après (Figure I-6). Pour déterminer et comprendre ces répartitions, il est fait appel au modèle de Bean et aux équations de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{B} = \pm \vec{J}_c \text{ ou } \vec{0} \quad (I.2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I.3)$$

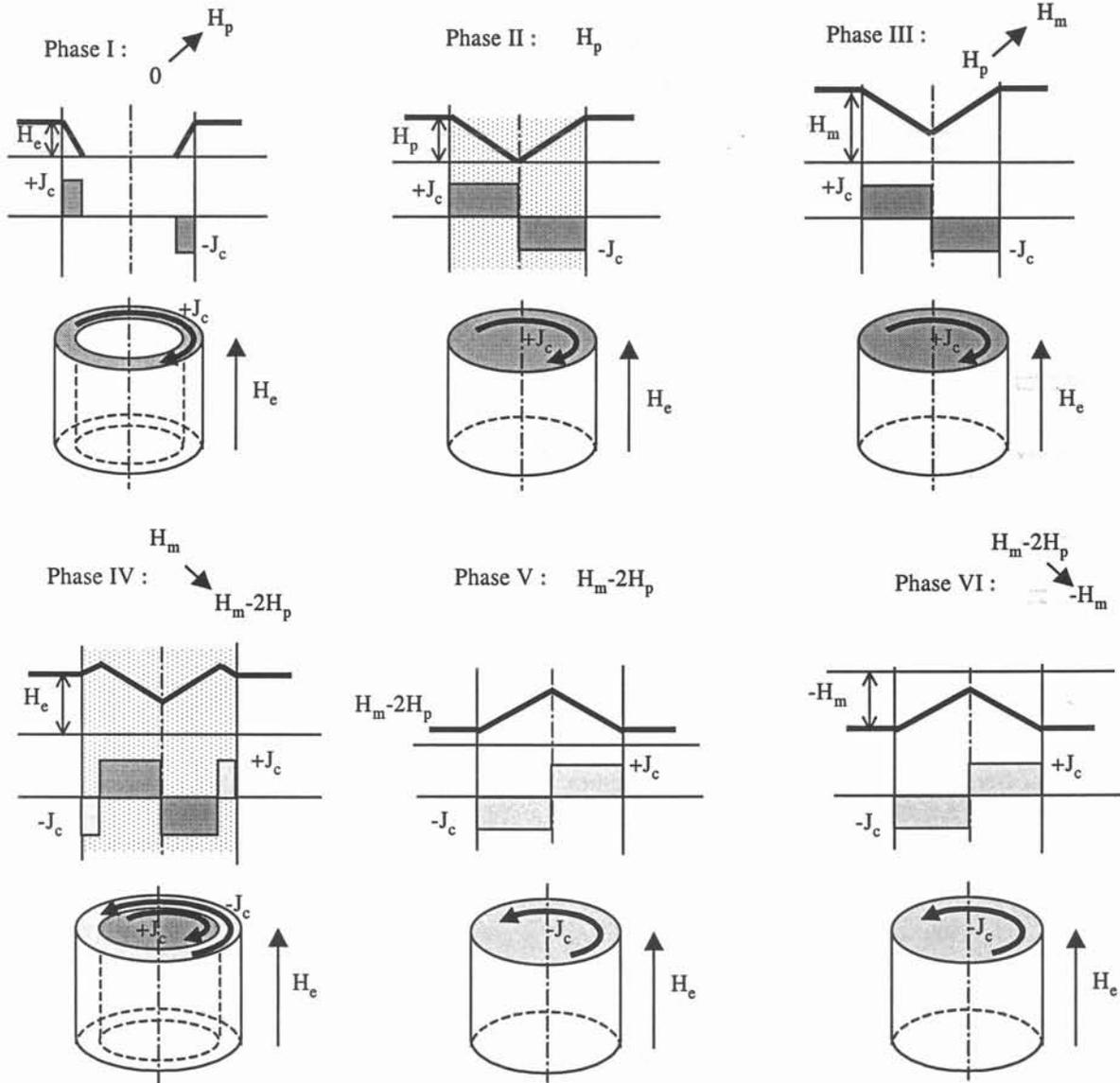


Figure I-6 : Répartition de J et H dans un fil supraconducteur de section circulaire, en champ extérieur, avec le modèle de Bean.

Phase I : Le champ magnétique extérieur augmente. D'après la loi de Lenz, des courants qui s'opposent aux variations du champ magnétique se développent à partir de l'extérieur du conducteur. D'après le modèle de Bean, ces courants ont une densité égale à J_c ,

ils forment donc une couronne de densité J_c ; en conséquence, d'après (I.1), le champ magnétique décroît de façon linéaire à l'intérieur du conducteur.

Phase II : Le courant a pénétré dans tout le conducteur avec une densité J_c . Le champ magnétique s'annule seulement sur l'axe. Le champ magnétique extérieur est alors appelé champ de pénétration H_p (champ pour lequel le courant atteint le centre du cylindre).

Phase III : Le champ magnétique continue à augmenter mais, comme les courants d'écrantage ne peuvent plus augmenter, ils ne s'opposent plus au nouvel accroissement du champ magnétique et celui-ci augmente de façon égale partout dans le conducteur.

Phase IV : Le champ magnétique extérieur commence à diminuer ; le courant s'oppose donc à cette diminution ; il se crée alors une couronne de densité $-J_c$. Au centre de cette couronne, il subsiste un cylindre de densité de courant égal à J_c . En effet, dans cette zone, E est nul puisque le champ magnétique reste constant (I.2) ; il n'y a donc pas de dissipation d'énergie et la densité de courant reste égale à J_c .

Phase V : Le champ magnétique a diminué d'une valeur $2H_p$, le supraconducteur est donc de nouveau en pénétration complète, cette fois avec une densité de courant égale à $-J_c$.

Phase VI : De même qu'à la phase III, le champ magnétique diminue de façon identique partout dans le conducteur. Le courant ne peut plus diminuer et sa densité reste égale à $-J_c$.

Remarque : lorsque le champ extérieur passe par zéro, il y a toujours des courants dans le supraconducteur, éventuellement un seul cylindre de densité $\pm J_c$. Si l'on a un cylindre de longueur finie, celui-ci se comporte alors comme un aimant permanent. D'un point de vue pratique, l'expérience de J. File et R.G Mills [I-22] a consisté à induire un courant dans une spire supraconductrice et à mesurer la constante de temps caractéristique de la décroissance de ce courant. Ils ont trouvé 120 000 années, ce qui montre qu'un supraconducteur, même si sa résistivité n'est pas absolument nulle, est quand même très peu dissipatif.

I.B.3 Loi en puissance

I.B.3.a Loi E(J)

Dans ce modèle, J et E sont reliés par une équation dite loi en puissance ou Power Law (I.4) :

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^N \quad (\text{I.4})$$

C'est une loi purement empirique mais qui représente bien le comportement électrique des matériaux lorsque l'on est proche de J_c (paragraphe I.B.3.c).

Dans cette équation, J_c et E_c sont respectivement appelés densité de courant critique et champ électrique critique. Il est habituel de choisir $E_c = 1 \mu\text{V/cm}$, et donc J_c est la densité de courant quand $E = E_c$. Il faut alors noter que J_c étant défini de façon arbitraire en fonction

de la valeur de E_c , la limite entre état supraconducteur et état dissipatif est relativement floue. Cependant dès que N est assez grand (supérieur à 10), la valeur choisie pour E_c , si elle reste « physique » (entre $1 \mu\text{V}/\text{cm}$ et $100 \mu\text{V}/\text{cm}$), influe peu sur la valeur de la densité de courant critique (Figure I-7).

Ce modèle, contrairement au modèle de Bean, ne permet pratiquement pas les calculs analytiques ; il présente cependant de nombreux avantages :

- Pour $N = 1$, on retrouve une loi $E(J)$ linéaire, ce qui correspond à un conducteur « normal » qui aurait une conductivité égale à J_c/E_c (en pratique, J_c/E_c est compris entre 5.10^{10} et $10^{14} \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$, pour le cuivre à 300 K $\sigma = 5.10^7 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$). Pour N grand (supérieur à 100), on retrouve le modèle de Bean (Figure I-7). Ces deux cas particuliers ont permis, comme on le verra plus tard, de valider les modèles numériques sur des exemples où l'on connaît les résultats analytiques.

- Cette loi est continue et à dérivée continue ce qui permettra par la suite d'utiliser Newton-Raphson comme méthode de convergence.

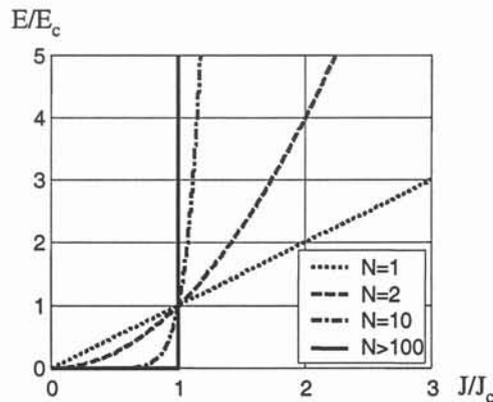


Figure I-7 : Loi $E(J)$ en puissance de N .

I.B.3.b Hypothèse sur l'influence du champ magnétique et de la température sur J_c

Dans la pratique, J_c dépend de l'induction magnétique B dans le matériau et également de la température.

On voit (Figure I-8), que la densité de courant critique dans un ruban en Bi-2223, dépend fortement du champ magnétique extérieur, surtout lorsque celui-ci est transverse ; par contre, lorsque celui-ci est axial ou longitudinal, cette dépendance est relativement négligeable pour des champs faibles (inférieur à 10 mT). Nous n'avons pas pris en compte ce phénomène dans ce mémoire, sauf, dans une certaine mesure, dans le cas d'une bobine. Si celle-ci est mono-couche, lorsque l'on relève la loi $E(J)$, chaque spire est soumise au champ magnétique des autres ; donc à un champ longitudinal, voire transverse pour les spires des extrémités. Si la bobine est multicouche, les couches intérieures sont soumises au champ magnétique des couches extérieures. On prend donc en compte la dépendance de B de façon globale sur toute la bobine, mais la loi de comportement $E(J)$ n'en tient pas réellement compte et nous avons considéré que J_c est une constante.

Même si cette hypothèse semble discutable dans le cas du chapitre III, celui-ci présente des études quantitatives dont le but est de comprendre les phénomènes et discuter de la validité du modèle de Bean sur des géométries simples ; ceci peut donc se faire même en négligeant la dépendance de B . Pour l'étude du chapitre IV (fil en champ propre) où les champs magnétiques sont effectivement relativement faibles (inférieur à 10 mT) et jamais axiaux, cette hypothèse sera pleinement justifiée. Nous verrons par contre ses limites de validité chapitre V (bobine deux couches), où les champs magnétiques sont transverses aux extrémités et de plus peuvent être supérieurs à la dizaine de mT.

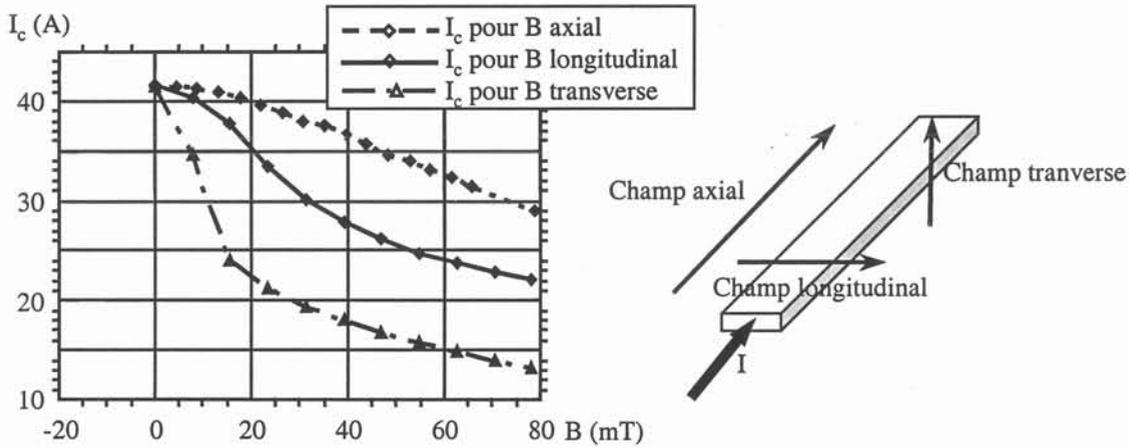


Figure I-8 : Dépendance de I_c en fonction de B pour différents champs extérieurs.

Il faut également remarquer que, lorsqu'il y a des pertes dans un supraconducteur, celui-ci s'échauffe et cela influence également sur J_c ; ce phénomène est d'autant plus sensible que le courant ou le champ extérieur est variable. Nous avons, pour tout le travail présenté dans ce mémoire, négligé ce phénomène et toujours considéré que le supraconducteur reste à température constante. Là aussi, nous verrons chapitre V, les limites de cette hypothèse. De plus, il faudrait absolument prendre ce phénomène en compte dans l'optique de la modélisation des limiteurs de courant.

Une des suites logiques de ce travail est de prendre en compte l'influence du champ magnétique et de la température sur J_c . Il faudra alors tenir compte de l'anisotropie de ces matériaux. Pour les fils à base de bismuth, il sera donc nécessaire d'implanter une loi $E(J)$ ou J_c sera fonction du vecteur induction magnétique \vec{B} et pas seulement de son module.

I.B.3.c Détermination expérimentale des paramètres de la loi $E(J)$ à température constante et champ extérieur nul

On relève la caractéristique $E(J)$ en courant continu ; en fait, on relève $U(I)$ et on en déduit J et E . E est la tension U divisée par la distance entre les prises de potentiels, J est le courant I divisé par la section. On se fixe ensuite un champ électrique critique (typiquement $1 \mu\text{V/cm}$). Le courant critique est alors le courant à $E = E_c$. On détermine ensuite N tel que la loi en puissance se superpose le mieux possible à la courbe expérimentale.

On voit (Figure I-9) que, pour l'échantillon de fil présenté au chapitre IV, cette loi représente bien le comportement électrique du matériau ($N = 16.8$) lorsque la densité de courant est proche de J_c . Dès que celle-ci est beaucoup plus faible ou plus grande que J_c , cette loi représente mal le vrai comportement des supraconducteurs (Figure I-4). En fait, elle modélise bien le phénomène de flux-creep mais mal les phénomènes de TAFF et flux-flow [I-23]-[I-24]. Les supraconducteurs étant destinés à travailler dans la zone proche de J_c , notre étude a porté sur cette zone et nous avons utilisé une loi en puissance comme modèle.

En général, selon les matériaux et leur fabrication, N varie entre 5 et 30 dans les supraconducteurs HTC et peut aller jusqu'à 100 dans les types II BTC.

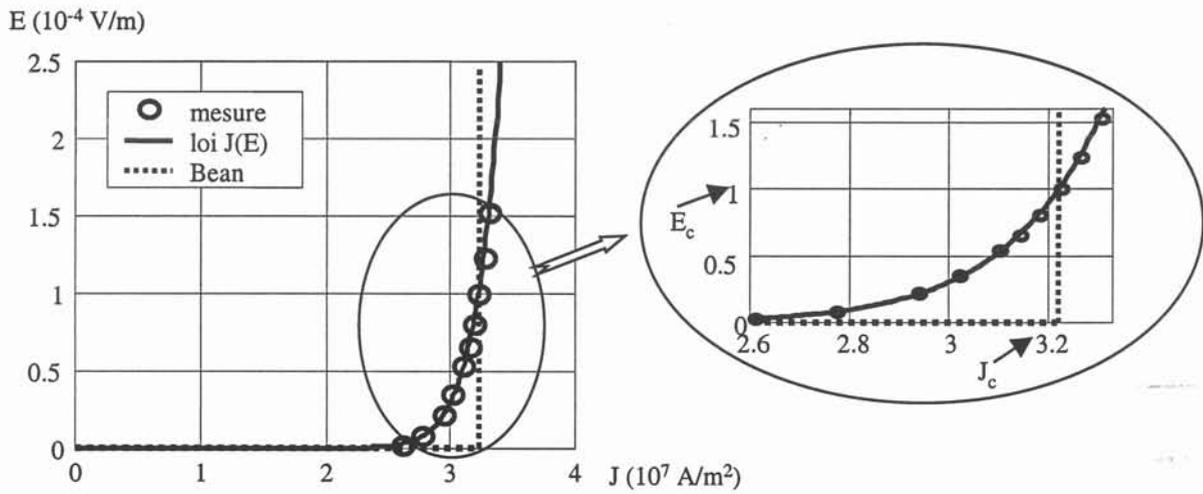


Figure I-9 : Loi $E(J)$ expérimentale approchée par une loi en puissance, autour de J_c

I.B.3.d Pourquoi un modèle numérique

Pour réaliser des dispositifs électrotechniques supraconducteurs (voir paragraphe I.A.4), il est important d'avoir une idée très précise des grandeurs électromagnétiques \vec{J} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} à l'intérieur de ces dispositifs, ceci afin de comprendre les phénomènes physiques qui s'y déroulent mais également afin de pouvoir déterminer par exemple les pertes ou les forces mises en jeu. Ce mémoire s'attachera plus précisément à la détermination des pertes. Il est en effet indispensable de connaître la puissance dissipée, notamment pour déterminer le dispositif de refroidissement nécessaire à l'évacuation des pertes, et également pour avoir une idée la plus précise possible de ses performances.

Dans cette optique, il est important d'avoir un modèle qui représente correctement la réalité et qui de plus permette le calcul dans le cas de géométries compliquées. Les seules méthodes le permettant sont celles qui utilisent les différences finies ou les éléments finis.

Chapitre II

Modélisation et calcul des champs appliqués aux supraconducteurs

II.A PRESENTATION RAPIDE ET ETAT DE L'ART

II.A.1 But et utilité de la méthode des éléments finis en électromagnétisme

Comme on vient de le voir à la fin du chapitre I, le calcul des champs en électromagnétisme intervient principalement lorsqu'on ne sait plus résoudre les problèmes analytiquement, soit parce que la géométrie est trop complexe, soit parce que les lois de comportement liant \vec{J} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} ne le permettent plus. Il faut alors faire appel à des méthodes numériques et, entre autres, à des méthodes de calcul des champs (différences finies ou éléments finis). Dans ce mémoire, seule la méthode des éléments finis est considérée, ceci principalement parce qu'elle est la mieux maîtrisée au LEG qui dispose de logiciels l'utilisant, et parce que c'est une méthode plus générale que celle des différences finies.

Dans notre cas, son utilisation a pour but de résoudre les équations de Maxwell, tout en respectant les lois de comportement des matériaux et un certain nombre de conditions aux limites, fonction du problème traité.

On verra par la suite que la très forte non-linéarité de la loi $E(J)$ est la plus grande difficulté que l'on rencontre dans la modélisation des supraconducteurs.

II.A.2 Formulations et variables d'état

Dans notre cas (2D avec \vec{J} perpendiculaire au plan d'étude), les équations de Maxwell s'écrivent, en négligeant les termes de propagation et la densité volumique de charges :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.2})$$

$$div \vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$(div \vec{D} = 0) \text{ toujours vérifiée} \quad (\text{II.4})$$

Les lois de comportement utilisées sont celles présentées chapitre I :

$$B = \mu_0 H \quad (\text{II.5})$$

$$J = J_c \left(\frac{E}{E_c} \right)^{1/n} \quad (\text{II.6})$$

En fait, la loi $J(E)$ est difficilement programmable telle quelle, car, si $E = 0$, $\partial J/\partial E$ est infini. Pour remédier à cet inconvénient, cette loi a été légèrement modifiée de deux manières différentes :

- soit la première partie de la courbe (pour J inférieur à ϵJ_c) a été linéarisée, on a alors dans cette partie $J = \sigma E$ avec $\sigma = \epsilon^{1/(N-1)} J_c / E_c$.
- soit on a rajouté une très bonne conductivité σ_0 ([II-12] [II-13]), supérieure à $100J_c/E_c$. La loi de comportement est alors de la forme :

$$J = \frac{\sigma(E)\sigma_0}{\sigma(E) + \sigma_0} \text{ avec } \sigma(E) = J_c \left(\frac{E}{E_c} \right)^{1/n} \quad (\text{II.7})$$

De façon à résoudre ce système de quatre équations ((II.1) à (II.4)) auquel on ajoute les deux lois de comportement ((II.5) (II.6)), on utilise des variables de calcul appelées variables d'états qui permettent de ramener ce système à une ou deux équations. On pourra alors recalculer toutes les grandeurs électromagnétiques à partir de ces variables.

La plus utilisée en électromagnétisme est probablement le potentiel vecteur magnétique \vec{A} , défini tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Lorsque l'on utilise cette variable, on parle alors de formulation en potentiel vecteur magnétique ou formulation en \vec{A} . Une autre formulation, très utilisée aussi, surtout en 3D, est celle en potentiel vecteur courant \vec{T} défini tel que ($\vec{J} = \text{rot } \vec{T}$). Cette dernière a comme particularité de faire appel aux lois de comportements $E(J)$ et $H(B)$ au lieu de $J(E)$ et $B(H)$ comme en \vec{A} . Nous verrons au paragraphe II.B.2.c que cela peut parfois améliorer la convergence.

L'un des principaux travaux de cette thèse (paragraphe II.B.2), au point de vue numérique, a été d'essayer différentes variables d'états pour trouver la formulation la mieux adaptée aux supraconducteurs.

II.A.3 Etat de l'art

Depuis 1990, de nombreuses équipes se sont intéressées aux problèmes de la modélisation numérique des supraconducteurs.

Au départ, les études se sont principalement intéressées à la lévitation supraconductrice [II-1]-[II-2]-[II-3]-[II-4]. Par la suite, lorsque les industriels ont été en mesure de fournir des longueurs importantes de fil, les études ont plus porté sur la modélisation des pertes et la compréhension des phénomènes dans des rubans supraconducteurs [II-5]-[II-6]-[II-8]-[II-9]-[II-10].

Pour l'étude de la lévitation, les modèles étaient évidemment développés en champ extérieur. Cependant, même pour l'étude des pertes dans les conducteurs, la plupart de ces modèles n'autorisent que les études en champ extérieur [II-8]-[II-9]-[II-10] et, quand un courant est imposé, il l'est par conditions aux limites sur le champ magnétique [II-5]. Le couplage avec les équations de circuit, permet d'inclure un supraconducteur massif dans un circuit électrique quelconque et d'imposer de façon simple un courant. On peut éventuellement y ajouter un champ magnétique extérieur. Cette méthode n'a, à priori, jamais été utilisée avec les supraconducteurs. Elle est présentée et utilisée dans ce rapport, chapitre III et IV.

Dans un premier temps, les modèles de Bean [II-1]-[II-6] et de Kim [II-3]-[II-9] furent les plus utilisés. Puis, surtout pour l'étude des pertes, les modèles dits Flux Flow-Flux Creep proches de la loi en puissance présentée chapitre I ont été implantés [II-2]-[II-4]-[II-5]. Enfin, depuis quelques années, la loi en puissance « remporte » le plus de succès [II-8]-[II-10]-[II-12].

Les méthodes des différences finies [II-5]-[II-8]-[II-9] et celle des éléments finis [II-1]-[II-2]-[II-4]-[II-12] sont les plus utilisées, mais on trouve également quelques méthodes moins classiques, comme par exemple une méthode hybride éléments finis-intégrale de frontière [II-1]. Ces méthodes utilisent différentes variables d'états, notamment le potentiel vecteur magnétique \vec{A} [II-1]-[II-3]-[II-4], le potentiel vecteur courant \vec{T} [II-2]-[II-8] ou le champ électrique \vec{E} [II-5]-[II-8].

Certaines équipes se sont intéressées à la modélisation microscopique des supraconducteurs (états Meissner et mixte) [II-14]. Elle est indispensable pour l'électronique supraconductrice, notamment les capteurs. Pour les dispositifs de puissance, l'approche macroscopique représente correctement les phénomènes et nous ne nous sommes intéressés qu'à celle-là.

II.A.4 La méthode des éléments finis et la méthode de Galerkin

Cette méthode consiste à remplacer la fonction inconnue (par exemple le potentiel vecteur magnétique \vec{A}) par N inconnues réelles représentant la valeur de la fonction aux nœuds. On interpole en fait la fonction inconnue par l'intermédiaire de fonctions appelées fonctions de forme α_i et ne dépendant que de la forme des éléments :

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{a}_i \quad (\text{II.8})$$

Il faut alors calculer la valeur de tous les coefficients \vec{a}_i ; pour cela, on utilise la méthode de Galerkin ou des résidus pondérés [II-11]. Sur l'exemple de la formulation en \vec{A} , il faut résoudre :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) - \vec{J} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

où \vec{J} est fonction de \vec{E} donc de \vec{A} , ($\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V$).

On montre alors que résoudre (II.9) équivaut à annuler le résidu :

$$\vec{R}_i = \int_{\Omega} \alpha_i \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \alpha_i \vec{J}(\vec{A}) d\Omega \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } N \quad (\text{II.10})$$

où Ω est le domaine d'étude, α_i les fonctions de forme, et \vec{A} s'exprime en fonction de \vec{a}_i et α_i (II.8).

On a ainsi remplacé une équation à une inconnue \vec{A} , qui est une fonction des coordonnées d'espace (x, y, z) (II.9), par N équations à N inconnues réelles. La forme faible de la formulations en \vec{T} est présentée, a titre d'exemple, annexe 3.

II.B IMPLANTATION DANS FLUX 3D

II.B.1 Introduction

Les développements informatiques de ce travail de thèse ont tous été réalisés en utilisant Flux3D, logiciel de calcul des champs par éléments finis développé conjointement par le LEG et par CEDRAT. Flux3D permet les résolutions en deux dimensions, en trois dimensions et en axisymétrique. Par ailleurs, c'est un logiciel de développement particulièrement bien adapté à l'introduction de nouvelles fonctionnalités.

La plupart des développements a été réalisée en 2D ou en axisymétrique. D'une part, parce que, étant donnée la difficulté numérique des problèmes avec des supraconducteurs, il semble judicieux de commencer par des problèmes relativement simples, (entre autres certaines formulations 2D permettent de n'avoir qu'une inconnue par nœuds). D'autre part, parce que les systèmes que nous souhaitons étudier et qui sont présentés chapitres IV et V sont effectivement assez bien représentés par des géométries 2D ou axisymétriques. Enfin, cela a déjà permis de comprendre, au moins de façon qualitative, un certain nombre de phénomènes (voir chapitre III).

Au niveau développement informatique, ce travail a consisté à implanter les formulations présentées dans la suite de ce chapitre et à intégrer les lois de comportements présentées chapitre I (loi B(H) linéaire (II.8), loi J(E) en puissance indépendante de B (II.9)). Ceci a été fait en essayant de profiter au maximum de ce qui existait déjà dans Flux3D, et notamment le solveur et l'interface graphique.

Dans les problèmes avec des supraconducteurs, la non-linéarité de la loi J(E) impliquant que les grandeurs ne sont jamais toutes sinusoïdales, on ne peut pas utiliser de méthodes basées sur les nombres complexes et simulant un régime permanent sinusoïdal. Il faut, dans notre cas, utiliser systématiquement des méthodes dites transitoires ou pas à pas

dans le temps, ce qui entraîne des temps de calcul importants, (de quelques minutes jusqu'à plusieurs heures). A chaque pas de temps, nous avons utilisé la méthode de Newton-Raphson comme méthode itérative de convergence. Nous l'avons choisie car, bien que ne garantissant pas la convergence, elle est plus rapide que d'autres méthodes d'itérations telles que point fixe ou Gauss-Seidel.

Pour la plupart des calculs réalisés, une méthode de sous relaxation consistant à multiplier l'incrément de solution par un nombre plus petit que 1 à été adoptée. On utilise un algorithme dit de relaxation optimale [II-15] qui détermine la valeur de ce nombre pour essayer de converger le mieux possible avec une bonne rapidité de convergence.

II.B.2 Différentes formulations

Dans ce mémoire, trois formulations sont présentées ainsi que les raisons qui ont motivé leurs développements. Seules sont présentées ici les équations à résoudre avant l'application de la méthode de Galerkin.

II.B.2.a Formulation 2D en potentiel vecteur magnétique \vec{A}

Cette formulation a été développée principalement parce que c'est la plus classique et la plus utilisée en électromagnétisme et parce que, dans le cas de problème 2D, on peut faire en sorte de n'avoir qu'une seule inconnue par nœud (A_z).

Pour appliquer cette méthode, on utilise une grandeur \vec{A} à partir de laquelle on peut recalculer toutes les grandeurs électromagnétiques. C'est une variable de calcul définie tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, on vérifie automatiquement que $\text{div} \vec{B} = 0$.

On montre que, en deux dimensions, comme \vec{A} est portée par \vec{z} et fonction de x et y ($\vec{A} = A(x, y)\vec{z}$), l'équation (II.4), $\text{div} \vec{E} = 0$ est toujours vérifiée.

Il faut donc résoudre :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.13})$$

Par substitution, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) = \overrightarrow{rot} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

avec V potentiel scalaire électrique.

Résoudre les équations de Maxwell avec les lois de comportements équivaut donc à résoudre :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J} = \vec{0} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{avec } \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$$

$$= \vec{J} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \right)$$

Pour les géométries 2D cartésiennes et symétriques, on montre que $\overrightarrow{grad} V$ est une constante sur une surface de conducteur et donc rajoute seulement une inconnue par conducteur.

Les essais réalisés sur la formulation en potentiel vecteur \vec{A} ont montré que celle-ci peut devenir numériquement instable surtout lorsque l'on prend des valeurs de N trop importantes (N supérieur à 20). Pour éviter les problèmes d'oscillations numériques dûs en grande partie au calcul de la dérivée de \vec{A} par rapport au temps, et améliorer ainsi la convergence, une formulation en $\partial \vec{A} / \partial t$ a été développée.

II.B.2.b Formulation 2D en $\partial \vec{A} / \partial t$ (dérivée du potentiel vecteur magnétique)

De même que pour la formulation en \vec{A} , résoudre les équations de Maxwell équivaut à résoudre : $\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J} = \vec{0}$ avec \vec{H} et \vec{J} fonction uniquement de \vec{E} .

Cependant, pour des raisons dues à la programmation et afin d'éviter un calcul d'intégrale par rapport au temps ($B = \int rot E . dt$), on préférera résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J}) = \vec{0} \quad (\text{II.16})$$

ce qui est équivalent à résoudre l'équation non dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J} = C \text{ où } C \text{ est une constante par rapport au}$$

temps; or, à $t = 0$, \vec{H} et \vec{J} sont nuls, par conséquent $C = 0$.

Il faut donc résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \overrightarrow{rot} (\vec{E}) \text{ ou } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}(\vec{E})}{\partial t}$$

La formulation en $\partial \vec{A} / \partial t$ est nettement plus stable que la formulation en \vec{A} et converge dans la majeure partie des cas.

II.B.2.c Formulation en potentiel vecteur courant \vec{T} et potentiel scalaire magnétique Φ

Cette formulation a été essayée dans le but de tester sa convergence et de la comparer à celle des formulations précédentes. Elle possède à priori deux avantages :

- elle s'écrit de façon quasi identique en 2D et en 3D, donc sera, si elle converge bien, tout indiquée pour le passage en 3D.
- elle utilise une loi de la forme $E(J)$ et non pas $J(E)$, ce qui devrait améliorer la convergence.

Ce dernier avantage peut se comprendre sur un exemple unidimensionnel simple de recherche de zéro sur une loi de forme $J(E)$ -cste ou $E(J)$ -cste (Figure II-1), même si, bien évidemment, ceci est très loin de ce qui se passe réellement d'un point de vue numérique dans un logiciel d'éléments finis.

Sachant que cette méthode prend en compte la dérivée pour le calcul de l'incrément de solution, on peut se rendre compte (Figure II-1) que, à partir d'une condition initiale, on converge dans tous les cas avec la loi $E(J)$, alors qu'avec la loi $J(E)$ on aura beaucoup de mal à atteindre le point où la courbe coupe l'axe horizontal.

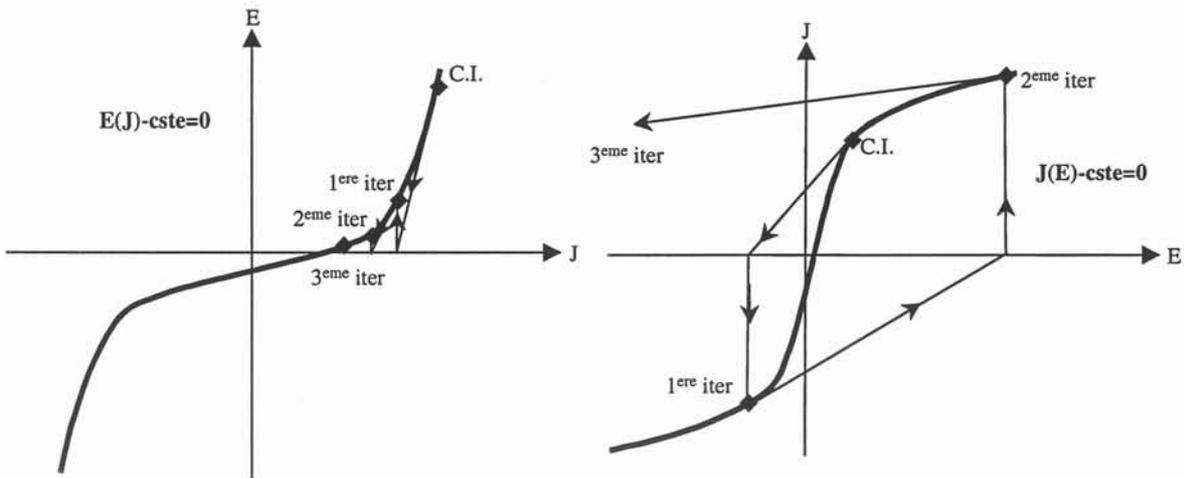


Figure II-1 : Convergence d'une loi $J(E)$ ou $E(J)$.

Pour appliquer cette méthode, on utilise deux variables, le potentiel vecteur courant \vec{T} et le potentiel scalaire magnétique Φ , définies telles que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{T} &= \vec{J} \\ \text{d'où } \vec{H} &= \vec{T} - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Il faut alors vérifier :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Donc, comme $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$:

$$\text{div}(\mu_0 (\vec{T} - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi)) = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 (\vec{T} - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi)) = 0 \quad (\text{II.21})$$

Remarque : Les équations (II.20) et (II.21) où \vec{E} est fonction de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{T}$ n'assurent pas l'unicité de \vec{T} et de Φ ; en effet, toute variable de la forme $\vec{T} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ est également solution de ces équations. La non-unicité de la solution posant des problèmes de convergence, nous avons, pour y remédier, ajouté une condition de jauge ($\text{div} \vec{T} = 0$) à l'équation (II.21).

Cette formulation a permis d'obtenir la convergence pratiquement dans tous les cas, y compris pour N très grand (par exemple 500) et pour des géométries non infinies. De plus, comme c'est la méthode qui converge le mieux en 2D, elle est tout indiquée pour les simulations 3D, sachant que la taille des matrices à résoudre sera peu augmentée. En effet, le nombre d'inconnues par nœuds dans les régions conductrices passera de 3 à 4, et non pas de 1 à 4 comme en $\partial \vec{A} / \partial t$ ou en \vec{E} . De plus, dans les régions non-conductrices, il y a en 2D comme en 3D une seule inconnue par nœud (Φ).

II.B.2.d Formulations pour imposer un courant total

Les trois formulations précédentes, telles qu'elles sont présentées, permettent uniquement d'imposer un champ extérieur. Ceci, soit par conditions aux limites sur les variables d'états (formulation en $\vec{T}\Phi$), soit en imposant un courant source dans des régions conductrices (formulations en \vec{A} et $\partial \vec{A} / \partial t$).

De façon à pouvoir imposer un courant total dans un supraconducteur et à obtenir la répartition de ce courant, éventuellement en présence d'un champ magnétique extérieur, deux méthodes ont été employées et testées. La première est une formulation en $\vec{T}\vec{T}_0\Phi$ qui permet « naturellement » d'imposer un courant par l'intermédiaire de \vec{T}_0 . La deuxième est le couplage avec les équations de circuits de la formulation en \vec{A} , ce qui permet d'inclure le conducteur dans un circuit électrique et donc d'imposer par exemple le courant.

II.B.2.d.i Formulation en $\vec{T}\vec{T}_0\Phi$

Dans un premier temps, on impose une densité de courant uniforme \vec{J}_0 dans le conducteur arbitrairement égale à 1 A/m².

On calcule ensuite le potentiel vecteur courant \vec{T}_0 qui en résulte en minimisant :

$$\left(\vec{J}_0 - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{T}_0 \right)^2 \quad (\text{II.22})$$

Ensuite, de façon à imposer le courant total désiré, on multiplie ce potentiel par une densité de courant J_s correspondant au courant à imposer, divisé par la surface. On obtient

ainsi une densité de courant source uniforme $\overrightarrow{\text{rot}}(J_s \vec{T}_0)$ correspondant au courant total à imposer.

Un terme « correctif » $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{T}$ est alors ajouté à cette densité de courant et le champ magnétique est « corrigé » grâce au potentiel scalaire électrique Φ :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{T} + J_s \vec{T}_0) \\ \vec{H} &= \vec{T} + J_s \vec{T}_0 - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Pour conserver le bon courant total, on impose $\vec{T} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ sur la frontière du conducteur, de façon à ce que la contribution de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{T}$ au courant total soit nulle ($\int \vec{T} \cdot d\vec{l} = 0$).

\vec{T} et Φ sont calculés de la même façon que dans la formulation $\vec{T}\Phi$, en résolvant :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mu_0 (\vec{T} + J_s \vec{T}_0 - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi)) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 (\vec{T} + J_s \vec{T}_0 - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi)) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

II.B.2.d.ii Couplage avec les équations de circuits de la formulation 2D en \vec{A}

Cette méthode consiste à faire cohabiter les équations issues des éléments finis avec les équations de circuits (lois des mailles et lois des nœuds). Il faudra donc résoudre en même temps les équations de Maxwell sur les surfaces maillées et les équations de circuit pour tous ses éléments (y compris les éléments maillés). La méthode implantée dans Flux3D consiste à exprimer la loi des nœuds, à chaque nœud du circuit, en fonction de ψ ($\psi = \int V \cdot dt$), le potentiel scalaire électrique intégré dans le temps aux nœuds du circuit.

Pour un conducteur massif, on peut donc le considérer comme inséré entre deux nœuds d'un circuit auxquels arrivent n courants provenant d'autres éléments (Figure II-2).

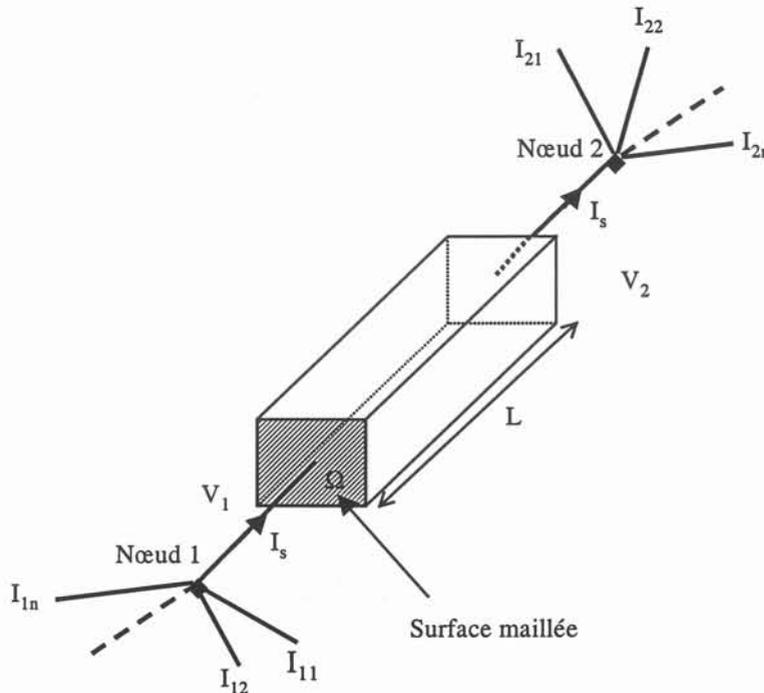


Figure II-2 : Couplage d'un supraconducteur avec un circuit.

Si on regarde les équations qu'il faut résoudre au niveau du conducteur :

Par les éléments finis :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - \vec{J} = \vec{0} \quad (\text{II.25})$$

Par les équations de circuits :

$$\text{Au nœud 1 : } \sum_{i=1}^n I_{1n} - I_s = \sum_{i=1}^n I_{1n} - \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{N} \cdot d\Omega = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Au nœud 2 : } \sum_{i=1}^n I_{2n} + I_s = \sum_{i=1}^n I_{2n} + \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{N} \cdot d\Omega = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$\text{avec } \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$$

$$= \vec{J} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}} V \right)$$

$$= \vec{J} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{L} \right) \cdot \vec{N} \right) \text{ en 2D}$$

Il faut bien évidemment également résoudre les lois des nœuds dans le reste du circuit.

II.C VALIDATION ET COMPARAISON DE CES MODELES SUR QUELQUES EXEMPLES SIMPLES

Comme nous l'avons vu précédemment, la loi $J(E)$ permet pour $N = 1$ et N grand (N supérieur à 100), de valider les formulations numériques. Un grand nombre de test a été réalisé pour valider les formulations précédentes. Dans tous les cas, les résultats numériques ont été en excellent accord avec les calculs analytiques.

Deux exemples, un en 2D et un en axisymétrique sont présentés ci-après.

II.C.1 Plan infini Bean :

Le premier exemple de validation est donné en 2D, avec un plan infini d'épaisseur e soumis à un champ magnétique extérieur parallèle aux côtés de ce plan (Figure II-3). L'amplitude de ce champ magnétique est égale à deux fois le champ de pénétration. $H_p = J_c e / 2 = 23400 \text{ A/m}$. On compare les résultats obtenus en simulation pour $N = 500$ avec les résultats analytiques obtenus avec le modèle de Bean.

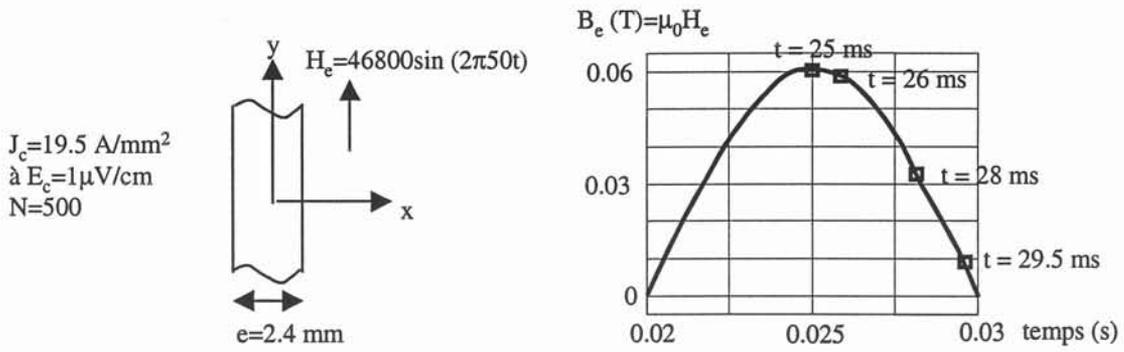


Figure II-3 : plan infini soumis à un champ extérieur sinusoïdal.

Une comparaison entre les répartitions de J et B à l'intérieur de ce plan, pour les instants pointés (Figure II-3), est présentée Figure II-4 et Figure II-5, en régime permanent, avant pénétration complète pour J et pour B . Dans tous les cas, on voit que les résultats de simulation sont très proches des calculs analytiques. On observe cependant une très petite différence, notamment au niveau de J où les « fronts de pénétration » ne sont pas totalement raides. Ceci est dû au maillage, la densité de courant passant de J_c à $-J_c$ sur l'épaisseur d'une maille. La très forte non linéarité de la loi $J(E)$ nécessite que les régions avec des supraconducteurs soient maillées très finement. Typiquement, la discrétisation peut être de 10 à 100 mailles par millimètre.

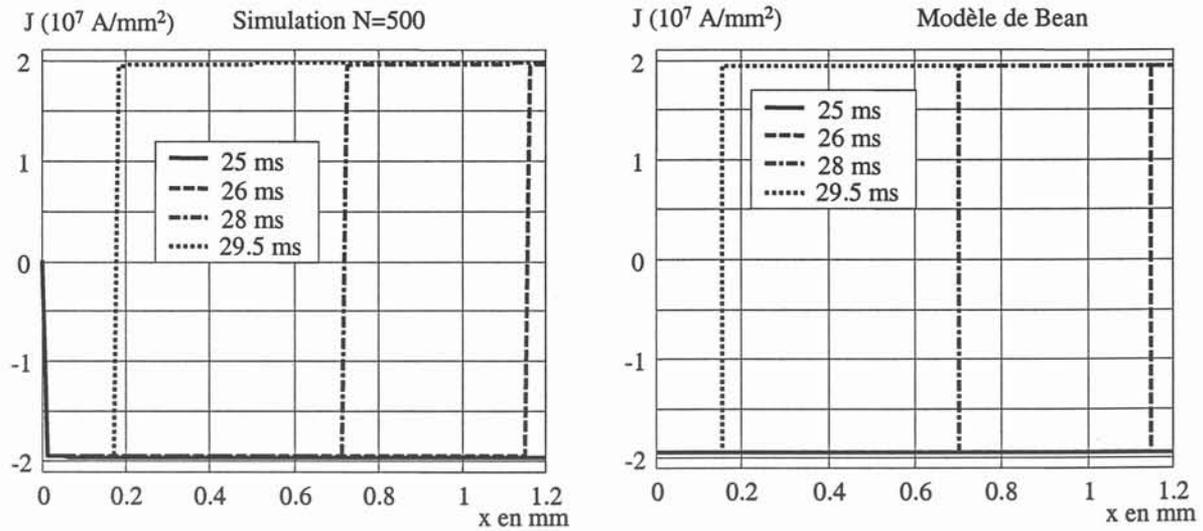


Figure II-4 : Répartition de J avant pénétration complète simulation et modèle de Bean.

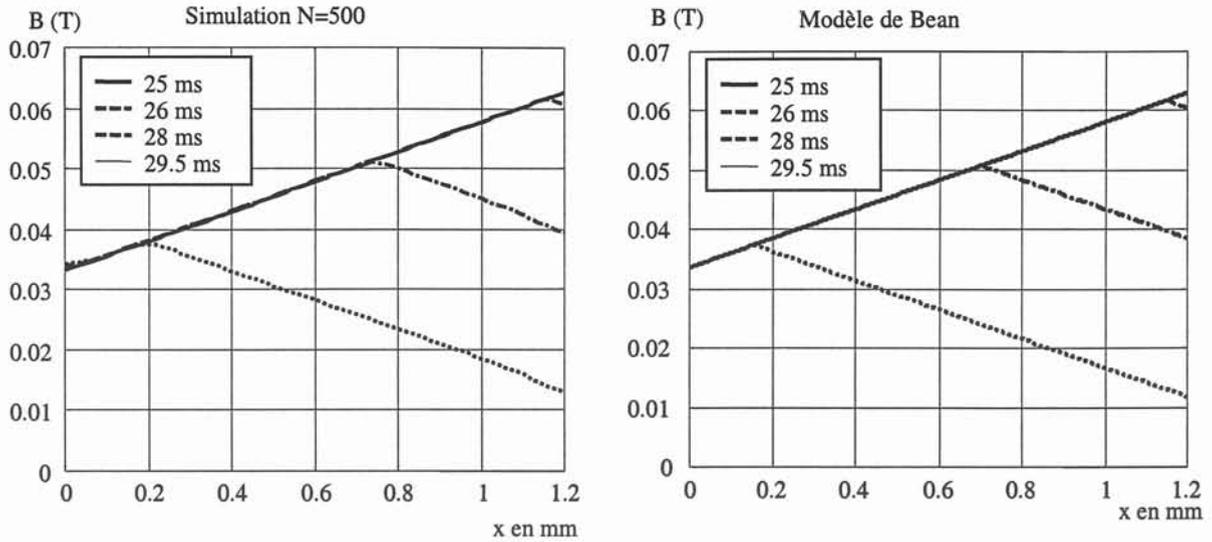


Figure II-5 : Répartition de B avants pénétration complète, simulation et modèle de Bean.

II.C.2 Cylindre creux infini avec $N = 1$ (conducteur résistif)

Cet exemple est axisymétrique. On modélise un cylindre creux infiniment haut parcouru par une densité de courant sinusoïdale (Figure II-6). On compare les résultats de simulation pour $N = 1$ (cas linéaire), et les résultats analytiques obtenus avec les fonctions de Bessel.

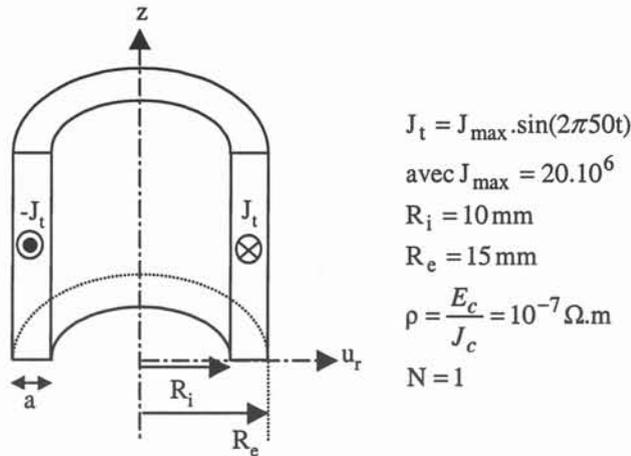


Figure II-6 : Cylindre creux infiniment haut parcouru par une densité de courant.

Comme pour le cas 2D, on voit que les résultats sont très proches. On remarque quand même que la courbe de J obtenue en simulation est à dérivée première discontinue. Ceci, du fait que, dans cette formulation, \vec{J} est une variable dérivée de la variable d'état ($\vec{J} = \text{rot } \vec{T}$) et qu'on ne garantit pas la continuité de la dérivée de cette variable.

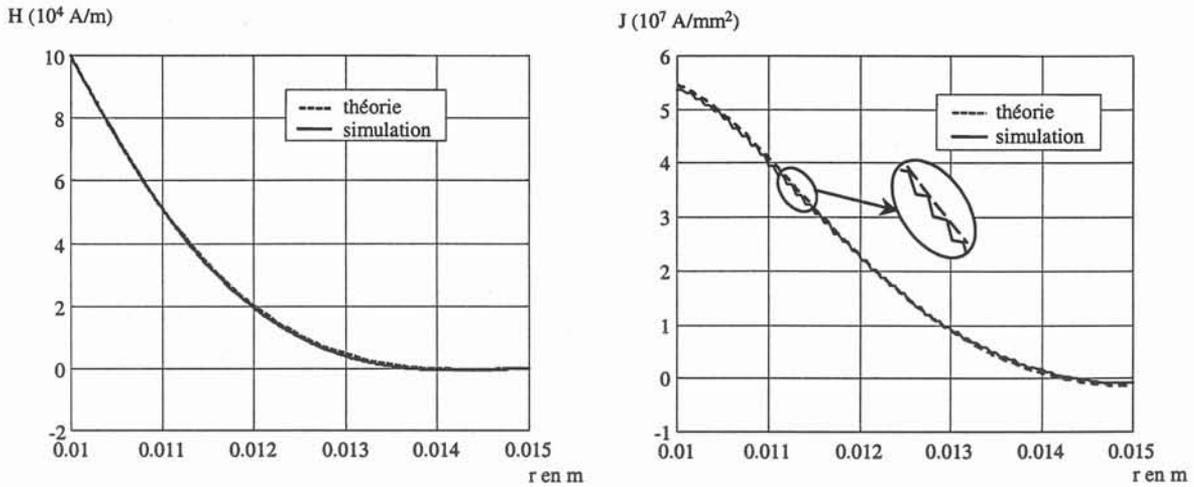


Figure II-7 : Répartition de J et H pour J_{max} théorie, et simulation (conducteur résistif).

II.C.3 Performances et éléments de comparaisons de ces formulations

Seuls les éléments du premier ordre ont été utilisés, ceci parce que les éléments du second ordre amènent des problèmes importants d'inversion de matrice et également de convergence. De plus, la finesse du maillage permet souvent d'avoir d'excellents résultats avec des éléments du premier ordre.

Du fait de leur bonne convergence, les formulations en $\vec{T}\Phi$ et en $\partial\vec{A}/\partial t$ ont été les plus utilisées. La formulation en \vec{A} n'a été utilisée que dans sa « version » couplée avec les équations de circuit (modèle multi-filaments, chapitre IV).

Une comparaison en termes de temps de calcul, de nombre moyen d'itérations par pas de temps et de facteur moyen de relaxation (valeur par laquelle est multiplié l'incrément de solution à chaque itération de Newton Raphson) est donnée dans le Tableau II-1 pour l'exemple des Figure II-8 et II-9 (ruban supraconducteur soumis à un champ extérieur parallèle à son petit côté). La formulation en \vec{A} ayant été très peu utilisé, seules sont comparées ici les formulations en $\partial\vec{A}/\partial t$ et $\vec{T}\Phi$, sur un exemple en champ extérieur.

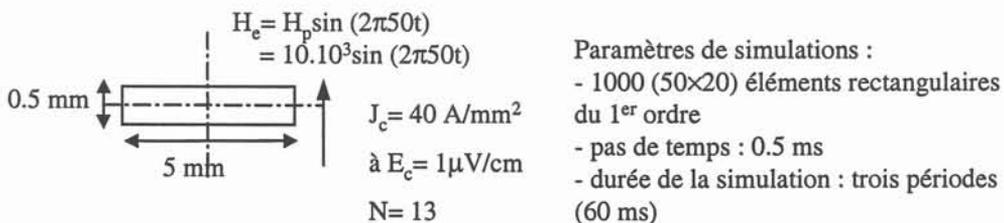


Figure II-8 : Ruban supraconducteur soumis à un champ extérieur.

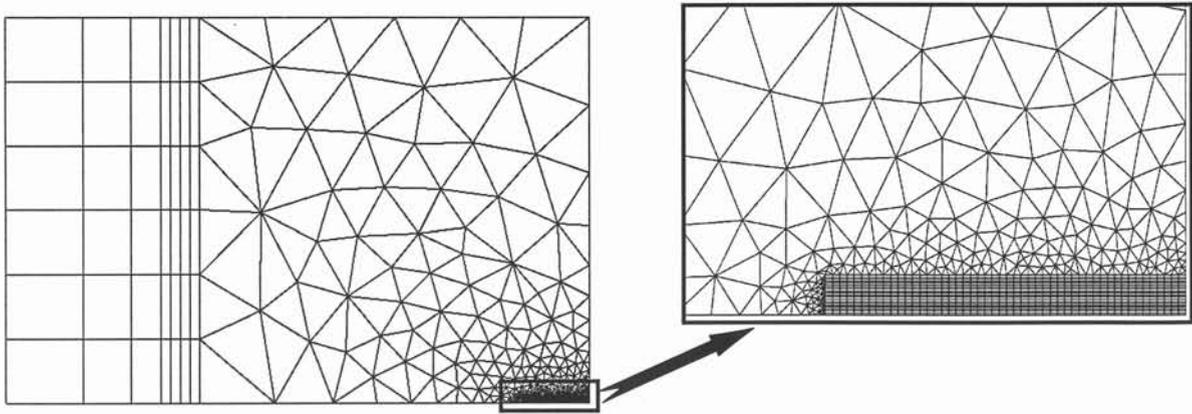


Figure II-9 : Maillage utilisé.

Formulation	$\partial\bar{A}/\partial t$	$\bar{T}\Phi$
Temps de calcul	100 min	80 min
Nombre moyen d'itérations avec Newton Raphson	25	10
Facteur moyen de relaxation	5.10^{-2}	1

 Tableau II-1 : Comparaison entre formulations en $\partial\bar{A}/\partial t$ et \bar{T} .

Les calculs ont été fait sur station Hp Unix type j224. On remarque Tableau II-1 que les temps de calcul sont à peu près égaux ; en effet, bien que la formulation en $\partial\bar{A}/\partial t$ ne comporte qu'une inconnue par nœud au lieu de trois en $\bar{T}\Phi$, elle nécessite un nombre d'itérations plus grand à chaque pas de temps et le calcul d'un facteur optimal de relaxation. La taille plus grande des matrices de la formulation en $\bar{T}\Phi$ est donc compensée par sa meilleure convergence.

Le tableau qui suit présente un récapitulatif des avantages et des inconvénients des différentes formulations en 2D.

Formulations	\bar{A}	$\partial\bar{A}/\partial t$	$\bar{T}\Phi$
Nombre d'inconnues par nœud en 2D	1	1	3
Convergence	-	+	++
Facilité du couplage avec les équations de circuit	++	+	+-
Passage en 3D	-	-	++

Tableau II-2 : Récapitulatif des comparaisons entre formulations.

La formulation en \bar{A} est celle qui rencontre les plus grosses difficultés de convergence mais elle a pour avantage d'avoir, dans notre cas, été couplée avec les équations de circuit. Les formulations en $\partial\bar{A}/\partial t$ et $\bar{T}\Phi$ ont des performances quasi identiques. La

formulation en $\vec{T}\Phi$ converge cependant un peu mieux et semble tout indiquée pour le passage en 3D. De plus, grâce à sa « version » $\vec{T}\vec{T}_0\Phi$, elle permet d'imposer facilement un courant, auquel on peut éventuellement superposer un champ magnétique extérieur.

II.D CONCLUSION

Ces méthodes de calcul ont été développées, entre autre, pour répondre aux besoins de l'équipe cryoélectrotechnique commune au LEG et au CRTBT, et en fonction des dispositifs que nous souhaitons étudier. Néanmoins, nous avons maintenant à notre disposition des outils de calcul permettant de simuler une grande partie des problèmes que nous pouvons rencontrer avec des supraconducteurs. Cependant, il reste à ajouter, à ce qui existe déjà, la dépendance de B de la loi J(E) et, à plus long terme, à introduire le mouvement, de façon à pouvoir simuler les phénomènes de lévitation et à coupler le problème aux équations de la thermique pour pouvoir modéliser les limiteurs de courant. Il faut également remarquer que les possibilités de simulations en 3D de la formulation en \vec{T} ont pour l'instant été très peu utilisées.

Ces outils ont déjà été employés, aussi bien pour des études quantitatives (chapitre III), que pour des études qualitatives (chapitre IV et V).

Les études quantitatives ont permis de mieux comprendre les phénomènes physiques qui se produisent dans les supraconducteurs et de discuter la validité des modèles utilisant le modèle de Bean. Les études qualitatives ont permis de valider les méthodes numériques, au sens que la loi J(E), même indépendante de B, modélise bien les supraconducteurs. Elles ont également permis de mieux comprendre la méthode électrique de mesure de pertes. En outre, elles ont montré que le modèle homogène d'un conducteur multi-filaments est valable.

Les outils que l'on possède peuvent donc être utilisés pour aider à la conception des dispositifs électrotechniques, notamment en ce qui concerne les pertes AC. Cependant, la difficulté numérique des problèmes, tant au niveau du temps de calcul qu'au niveau de la convergence, ne permet pas, pour l'instant, d'envisager la simulation complète d'un transformateur ou d'un moteur supraconducteur.

Chapitre III

Quelques études qualitatives en champ extérieur

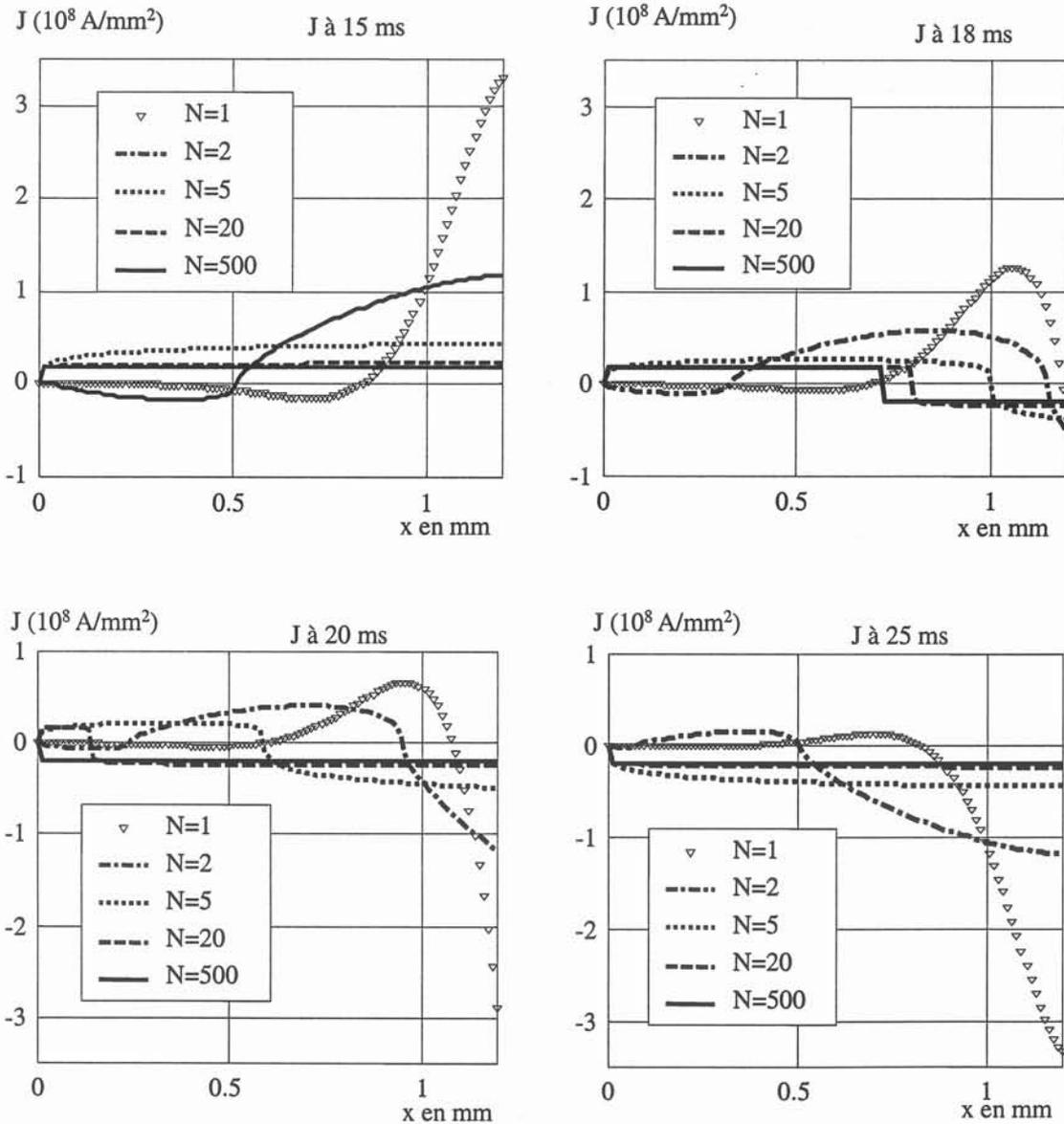
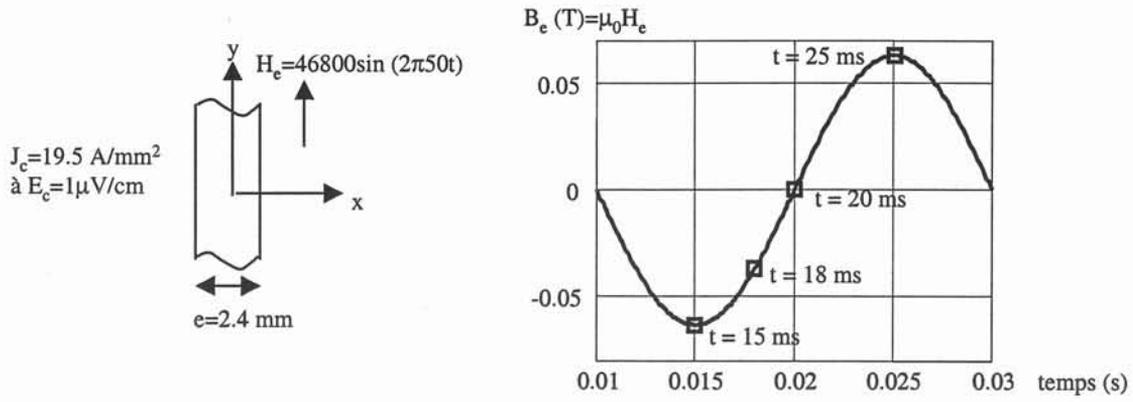
III.A INTRODUCTION

Ce chapitre présente quelques études qualitatives, principalement en ce qui concerne l'influence de différents paramètres sur les pertes AC en champ extérieur (paragraphe III.C). Il présente également quelques exemples de répartition des grandeurs électromagnétiques.

Le but de ces études est de se faire une idée plus précise des phénomènes physiques dans les dispositifs supraconducteurs, et surtout d'essayer de comprendre et de quantifier l'influence de différents paramètres notamment sur les pertes. Ceci principalement pour permettre de valider ou d'infirmer les modèles analytiques, en champ extérieur, utilisant le modèle de Bean sur des géométries simples.

III.B REPARTITION DES GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES DANS UN PLAN INFINI

Cette étude permet de se faire une idée un peu plus précise de l'influence de N sur la répartition des grandeurs électromagnétiques, si celui-ci est différent de 1 (cas linéaire) et de l'infini (modèle de Bean), ceci dans le cas d'un plan infini soumis à un champ extérieur variable (Figure III-1). Dans cet exemple, l'amplitude du champ extérieur est égale à deux fois le champ de pénétration H_p ($H_p =$ valeur du champ extérieur pour laquelle lors de la première montée le courant atteint le centre du plan, $H_p = J_c e/2$). Les courbes qui suivent présentent les répartitions de J , E et B à différents instants et pour différents N dans un plan infini.



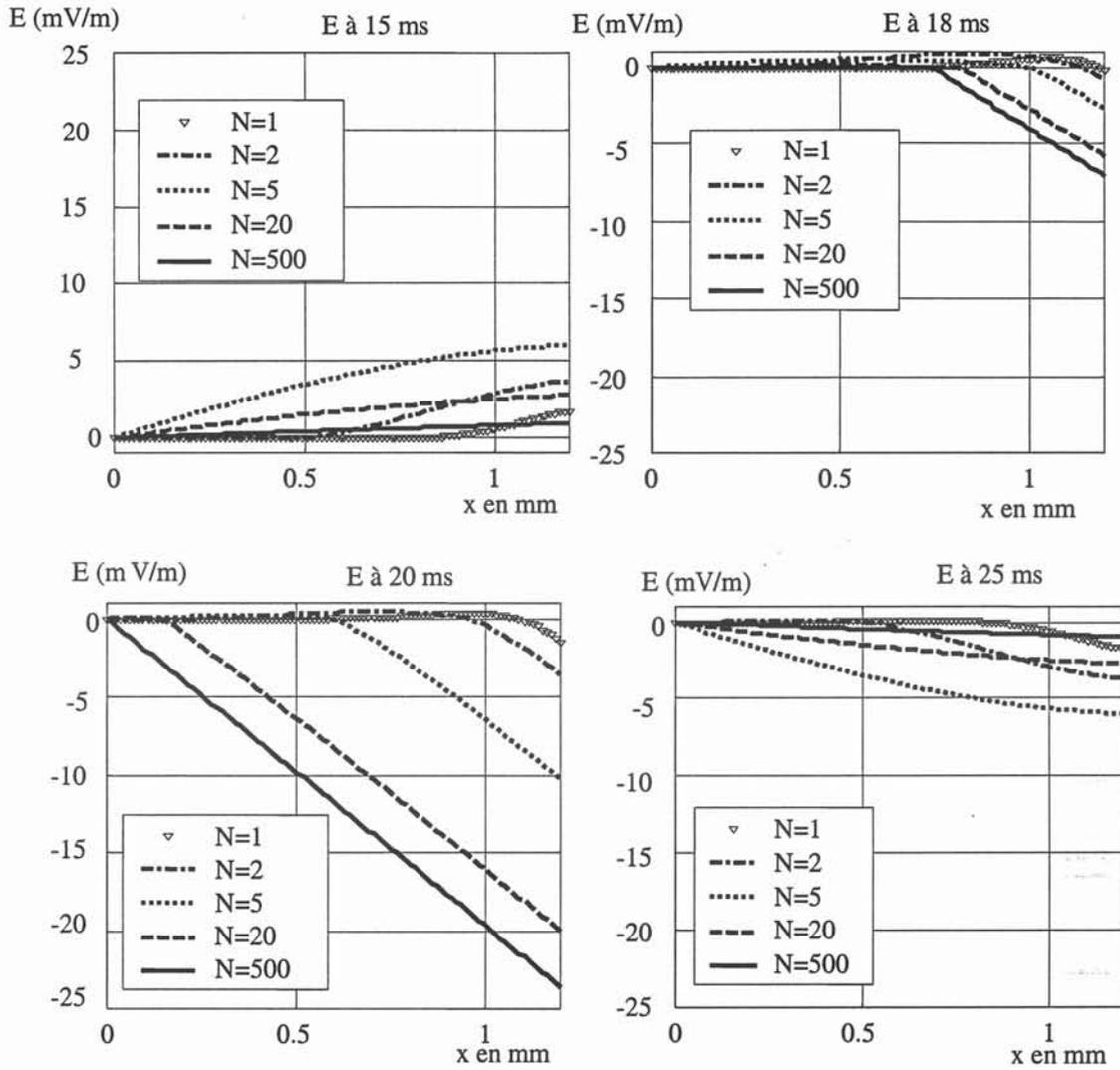


Figure III-3 : Répartition de E dans un plan infini soumis à un champ extérieur pour différents N et à différents instants.

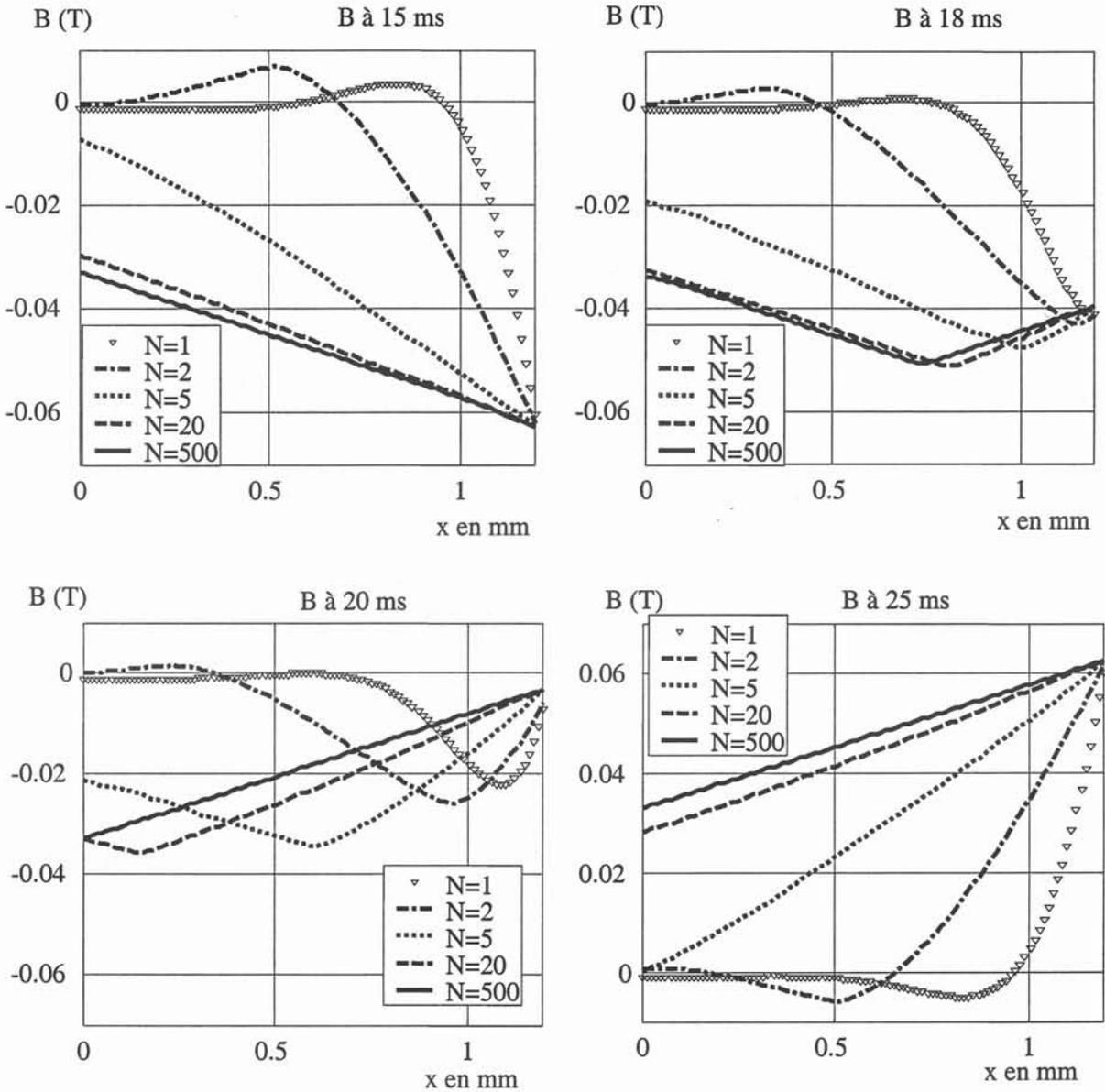


Figure III-4 : Répartition de B dans un plan infini soumis à un champ extérieur pour différents N et à différents instants.

Sur les courbes précédentes, Figure III-2, Figure III-3, Figure III-4, on retrouve pour $N = 500$ le modèle de Bean ($J = \pm J_c$, E est une droite de pente $dB_e/dt \dots$) et, comme $H_m = 2H_p$, lorsque le champ extérieur passe par 0, on atteint, pour le modèle de Bean ($N = 500$), la pénétration complète ; donc le courant n'évolue plus tant que H ne varie pas à nouveau dans l'autre sens. Pour $N = 1$, on retrouve l'effet de peau classique dans un conducteur de conductance $\sigma = J_c/E_c = 1.95 \times 10^{11} \text{ m}^{-1} \cdot \Omega^{-1}$, et avec une épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\sigma\mu_0\omega} = 0.16 \text{ mm}$.

Entre ces deux valeurs, le plan infini a un comportement « intermédiaire » que l'on ne peut déterminer que par simulation numérique. Cependant, il faut remarquer que, pour $N = 20$, on est déjà très proche du modèle de Bean. En pratique, les supraconducteurs dont le N sera au moins de 15 auront donc à priori un comportement bien représenté par ce modèle.

Il faut remarquer que pour $N = 500$ et $H = \pm H_m$, on devrait avoir $E = 0$ ($dB_e/dt = 0$), or E n'est pas tout à fait nul ; ceci provient du fait que numériquement la dérivée de B n'est pas réellement nulle puisque calculée par $1/\Delta t(B_n - B_{n-1})$.

Il peut arriver, à certains instants (proches des valeurs où H est maximal), que le champ électrique soit maximal pour des valeurs de N différentes de 1 ou 500 (ici proche de 5) ; ceci peut en partie expliquer pourquoi les pertes moyennes en fonction de N peuvent parfois passer par un maximum (voir paragraphe III.C.2 Figure III-8 et III.C.3 Figure III-9).

III.C PERTES FONCTION DE DIFFERENTS PARAMETRES EN CHAMP EXTERIEUR

III.C.1 Introduction

Pour toutes les études qui suivent, le courant et le champ électrique sont colinéaires et perpendiculaires au plan d'étude. On peut donc calculer les pertes actives instantanées pour une longueur l de conducteur par la formule :

$$p = l \cdot \iint_{\Omega} E \cdot J \cdot d\Omega \quad (\text{III.1})$$

où Ω est la section du conducteur.

Les pertes actives instantanées par unité de longueur sont calculées par :

$$p_l = \iint_{\Omega} E \cdot J \cdot d\Omega \quad (\text{III.2})$$

Les pertes actives volumiques instantanées sont alors déterminées par :

$$p_{vol} = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} E \cdot J \cdot d\Omega \quad (\text{III.3})$$

Les pertes actives moyennes en AC sont ensuite calculées en intégrant ces formules sur une période, $P = \langle p \rangle$, $P_l = \langle p_l \rangle$, $P_{vol} = \langle p_{vol} \rangle$.

Les paramètres (taille, J_c , N etc ...), utilisés dans les études qui suivent ont été choisis proches de ceux de nos échantillons. Même si l'on peut tirer des conclusions de ces études, il est difficile de définir des généralités, ce qui nécessiterait des études plus approfondies sur un nombre important de problèmes avec des paramètres différents.

III.C.2 Influence de la hauteur du conducteur pour différents N

Deux études ont été menées pour essayer de comprendre l'influence de la hauteur sur les pertes volumiques, afin de se faire une idée sur la validité du modèle classique du plan infini. Pour cela, on a étudié, dans un premier temps, l'influence du rapport hauteur sur épaisseur sur les pertes volumiques dans un ruban supraconducteur soumis à un champ

extérieur sinusoïdal d'amplitude une ou deux fois le champ de pénétration H_p (Figure III-5). Dans un deuxième temps, une étude en fonction de la valeur de N a permis de déterminer les pertes dans un ruban supraconducteur et dans un plan infini, ceci pour un champ extérieur très supérieur à H_p , $H_m = 22H_p$ (Figure III-9).

III.C.2.a Influence du rapport hauteur sur épaisseur

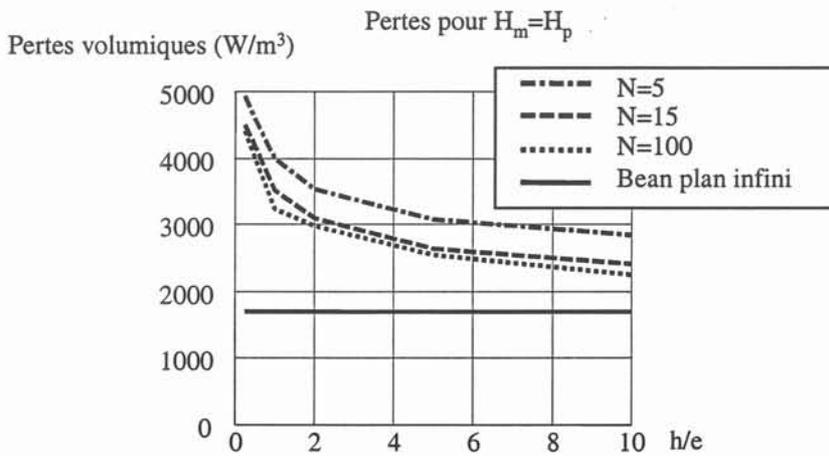
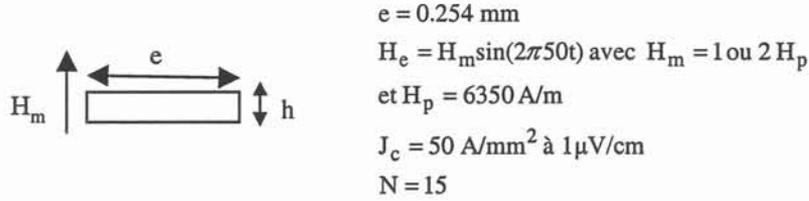


Figure III-5 : Pertes en fonction du rapport hauteur sur épaisseur pour $H_m = H_p$.

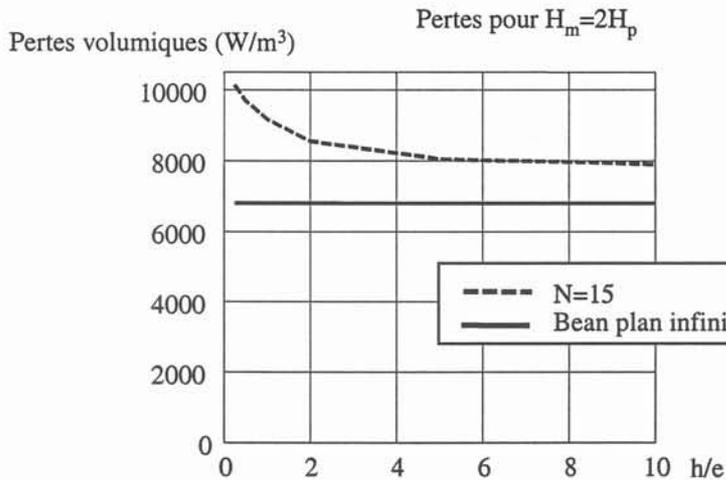


Figure III-6 : Pertes en fonction du rapport hauteur sur épaisseur pour $H_m = 2H_p$.

Sur les deux exemples Figure III-5 et Figure III-6, on voit que plus le conducteur est haut, plus les pertes volumiques sont faibles, ceci quel que soit N . L'influence d'un N non infini est d'ailleurs peu sensible.

Pour $H_m = H_p$ (Figure III-5), on remarque également que pour $N = 100$, lorsque le rapport h/e augmente, on tend vers les pertes calculées avec le modèle de Bean pour un plan infini :

$$\begin{aligned} P_{vol} &= \frac{1}{6} \mu_0 \cdot f \cdot J_c^2 \cdot e^2 \\ &= 1690 \text{ W/m}^3 \text{ pour } H_m \leq H_p \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Pour $H_m = 2H_p$ (Figure III-6), on remarque que les pertes volumiques sont moins sensibles à l'influence de la hauteur, ce qui vient du fait que, dès que l'on atteint le champ de pénétration, la répartition du courant est la même quelle que soit la hauteur du conducteur (Figure III-7) :

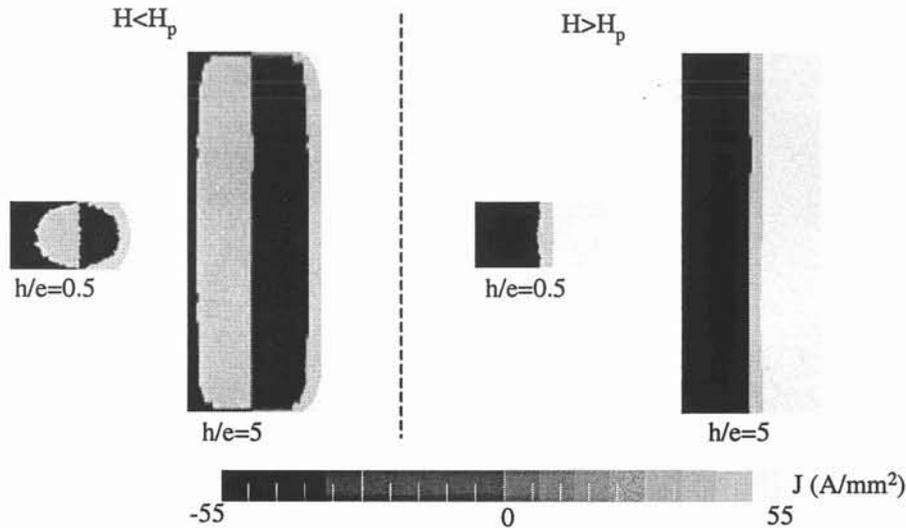


Figure III-7 : Répartition de J en pénétration complète ou incomplète.

Dans ce cas, les pertes volumiques calculées avec le modèle de Bean sont de :

$$\begin{aligned} P_{vol} &= 4 \cdot f \cdot \mu_0 \left[-\frac{1}{3} J_c^2 \cdot e^2 + J_c \cdot e \cdot H_m \right] \\ &= 6780 \text{ W/m}^3 \text{ pour } H_m > H_p \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Cependant, la Figure III-6 ne présente que les valeurs pour $N = 15$ donc, même pour un rapport h/e très grand, la courbe resterait un peu supérieure à cette valeur.

III.C.2.b Influence de N

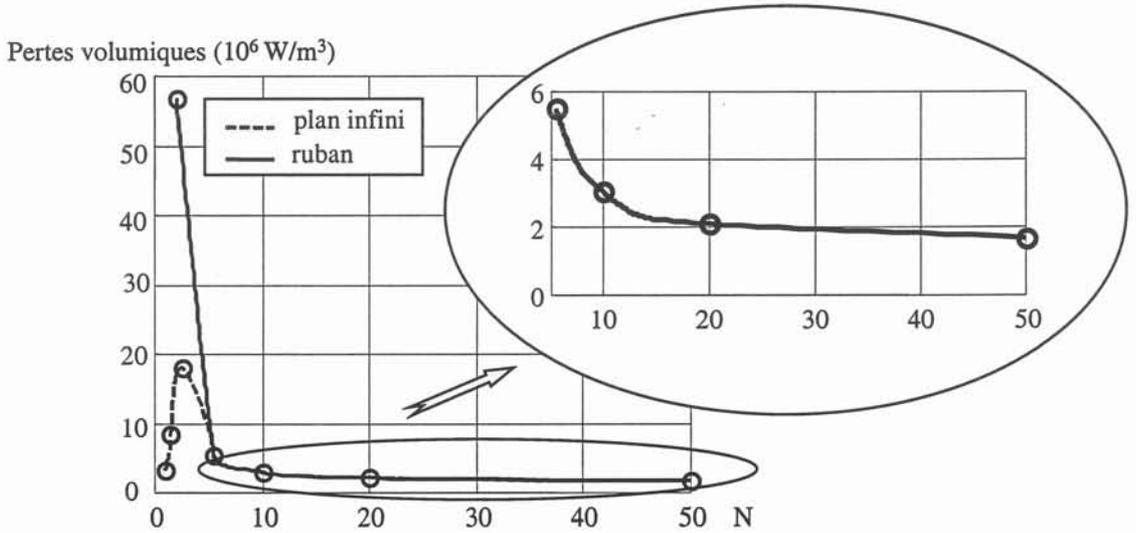
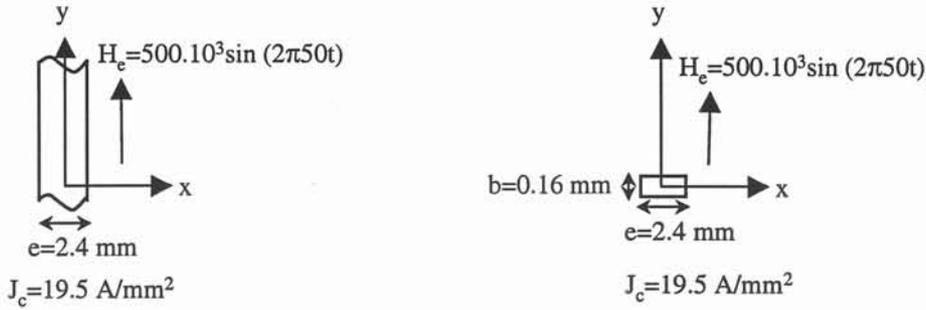


Figure III-8 : Pertes en fonction de N pour un plan infini ou un ruban.

Sur cet exemple, on voit que, pour $N > 5$, les pertes volumiques sont exactement les mêmes dans un plan infini et dans un ruban ; ceci se comprend car, comme $H_m \gg H_p$, les répartitions de courant sont identiques la majeure partie du temps (voir paragraphe précédent Figure III-7). Par contre, pour $N < 5$, il n'y a plus pénétration complète (voir répartitions sur l'exemple du paragraphe III.B) ; les répartitions de courants deviennent donc différentes et on peut ainsi comprendre les différences au niveau des pertes.

Dans les deux cas, plan infini et ruban, lorsque N tend vers l'infini on retrouve les pertes calculées par le modèle de Bean (III.5), soit $1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ et, pour un plan infini avec $N = 1$, les pertes calculées avec le modèle classique de l'effet de peau, soit $3,3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ (III.6).

$$p_{vol} = \rho \frac{H_m^2}{e\delta} (1 - e^{-e/\delta}) \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0 \pi f}} \text{ pour } e \gg \delta \quad \text{(III.6)}$$

Ces pertes passent par un maximum (autour de $N = 3$ sur cet exemple) ; cependant, il est possible que sur d'autres exemples elles ne présentent pas ce maximum notamment dans des cas où, pour $N = 1$, l'épaisseur du conducteur serait proche ou plus faible que l'épaisseur de peau.

Il faut également remarquer que, pour un ruban, les pertes augmentent lorsque N diminue. Un N grand est donc important pour avoir un supraconducteur ayant le moins de pertes possible ; ceci se traduit par un supraconducteur possédant une transition très « nette » entre l'état supraconducteur et l'état résistif.

III.C.2.c Conclusion sur la validité du modèle de Bean appliqué à un plan infini

Ces deux exemples montrent que, en champ extérieur, *pour des valeurs de N classiques dans les HTC (entre 10 et 20), et pour des champs magnétiques d'amplitude supérieure à H_p , le modèle de Bean donne une très bonne indication de la valeur des pertes (maximum 40% d'erreur sur les exemples précédents), ceci même si le rapport hauteur sur épaisseur est faible. Ces conditions sont pratiquement toujours présentes dans les dispositifs supraconducteurs. Cependant, pour des N faibles et/ou des champs magnétiques d'amplitude égale ou inférieure à H_p , ce modèle n'est plus du tout valable et peut amener des erreurs de plusieurs centaines de % ; le modèle numérique est alors indispensable.*

III.C.3 Effet de la forme du champ extérieur

Les dispositifs supraconducteurs peuvent être alimentés par des convertisseurs électroniques ; ceux-ci délivrent en général une tension qui n'est pas purement sinusoïdale. C'est le cas pour les futurs transformateurs destinés à la traction ferroviaire qui alimenteront des convertisseurs pour la commande de machines synchrones. Dans ce cas, la forme du courant au secondaire du transformateur est assez bien représentée par une sinusoïde à laquelle on superpose un triangle de fréquence plus élevé et d'amplitude plus faible. C'est pourquoi nous avons étudié l'influence de la forme de H , sachant que, dans une bobine, chaque spire est soumise au champ magnétique des autres et est donc plus dans un régime de champ extérieur que dans un régime de champ propre.

III.C.3.a Influence sur la valeur moyenne des pertes

Les pertes moyennes en fonction de N , dans un plan infini, identique à celui du paragraphe précédent, soumis à un champ extérieur sinusoïdal puis triangulaire de la même amplitude $46,8 \cdot 10^3$ A/m et 50 Hz, sont présentées (Figure III-9) ainsi que les pertes si on superpose un triangle d'une amplitude dix fois plus petite et de fréquence 700 Hz. Dans cet exemple, l'amplitude du champ extérieur est égale à deux fois le champ de pénétration $H_m = 2H_p = 2 \times 23400$ A/m.

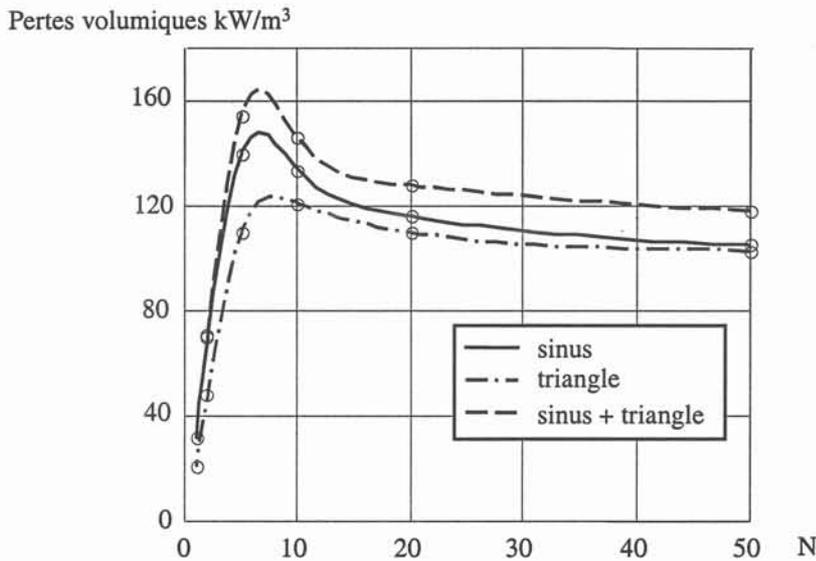
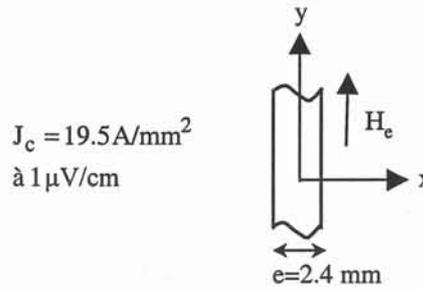


Figure III-9 : Effet de la forme du champ extérieur sur les pertes.

On remarque que, quand N augmente, les pertes tendent vers celles calculées analytiquement avec le modèle de Bean équation (III.5) :

Cette formule montre qu'avec ce modèle, les pertes ne dépendent que de la valeur maximale du champ extérieur et pas de sa forme. On trouve donc pour une amplitude de $46,8 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ (sinus ou triangle), 96 kW/m^3 et pour $51 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ (sinus plus triangle), 110 kW/m^3 .

Par contre, on voit que pour N inférieur à 50, les pertes dépendent de la forme d'onde et sont plus faibles pour un triangle que pour un sinus. On voit également que, si on superpose un triangle, on crée bien évidemment des pertes supplémentaires, principalement pour des N supérieurs à 5. Cependant, dans ce cas, le modèle de Bean donne une très bonne approximation de la valeur des pertes et ceci quelle que soit la forme d'onde.

Il faut également noter que, avec un plan infini, les pertes peuvent être plus faibles pour $N = 1$ (formule (III.6), $p_{\text{vol}} = 31.5 \text{ kW/m}^3$) que pour N élevé.

III.C.3.b Influence sur les pertes instantanées

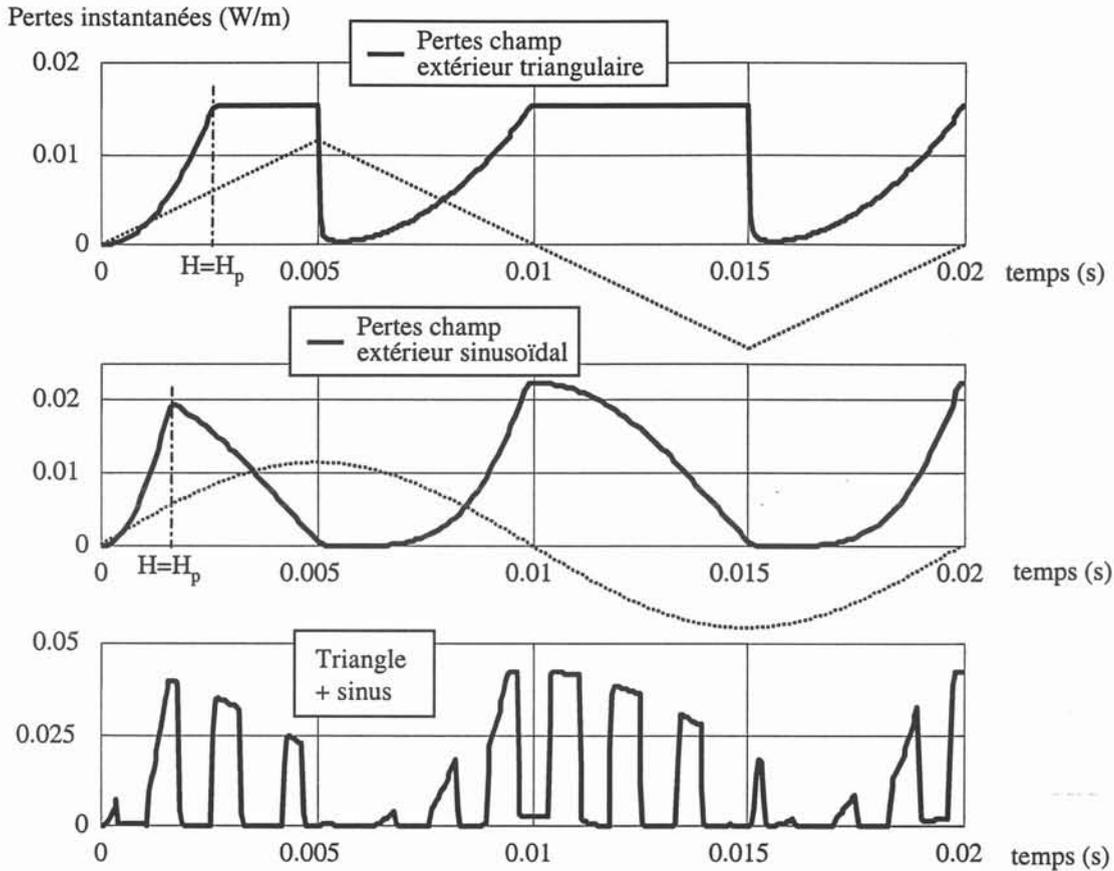


Figure III-10 : Formes des pertes instantanées pour $N=500$.

Les pertes instantanées pour $N = 500$ sont représentées Figure III-10 pour les trois formes de champ différentes. On remarque que pour un triangle, une fois la pénétration complète atteinte, les pertes sont constantes, ce qui est normal puisqu'alors, elles ne dépendent plus que de la dérivée du champ extérieur (J reste constant car pénétration complète, et E est une droite de pente dB_e/dt).

On voit également que, lorsque l'on superpose un triangle à un sinus, les pertes ont une forme assez hachée. Cette forme se comprend assez bien lorsque l'on regarde la répartition de E et J pour deux instants différents, suivant que H augmente ou diminue (Figure III-11). En effet, lorsque H diminue (entre t_1 et t_2), il se crée une « bande » de courant de densité J_c sur le bord du conducteur ; le champ électrique (tout comme dans l'exemple du chapitre I), est alors nul partout sauf sur cette bande ; de même, entre t_2 et t_3 , il se crée une « bande » de courant de densité $-J_c$. Par contre, en t_4 , on repasse soudainement dans une configuration identique à celle de t_1 où il y a beaucoup plus de pertes.

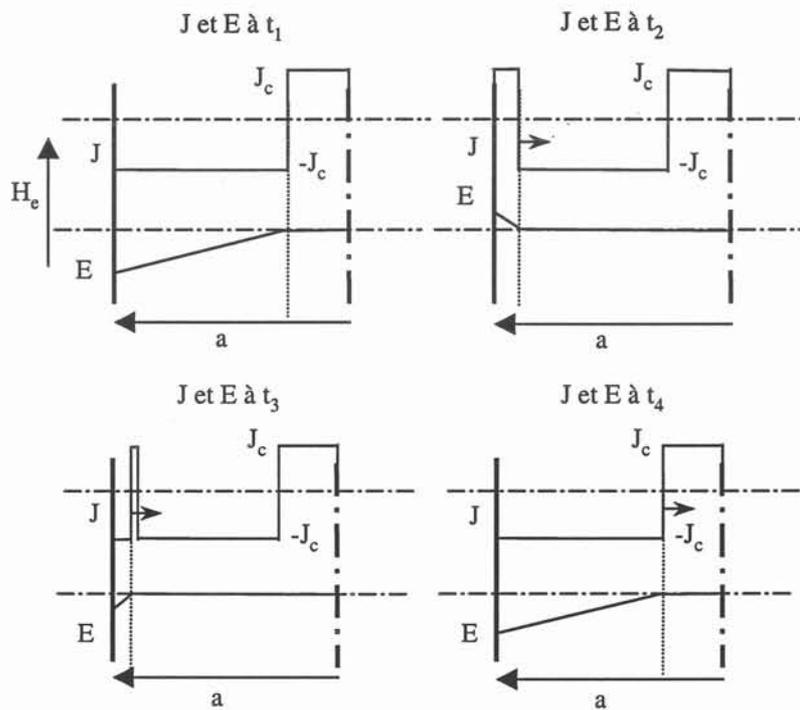
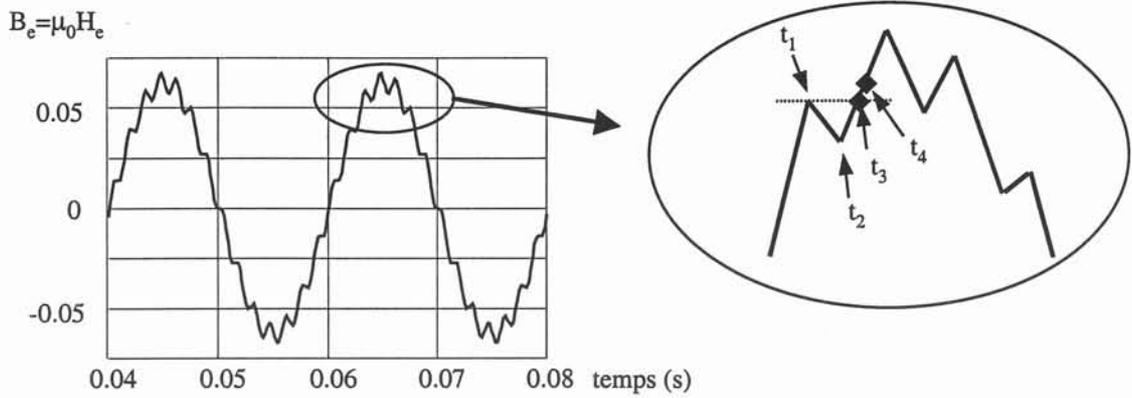


Figure III-11 : Répartition de J et E à différents instants.

On s'aperçoit donc que, même si la forme d'onde a une grande influence sur la forme des pertes en fonction du temps, celle-ci influe assez peu sur la valeur moyenne de ces pertes. L'effet d'un convertisseur placé en aval d'un transformateur supraconducteur ne devrait donc pas être trop sensible.

III.C.4 Effet orientation

Dans une bobine composée de conducteurs de section rectangulaire (Figure III-12), le champ magnétique au centre de cette bobine est parallèle aux grands cotés des conducteurs mais ne l'est plus aux extrémités. Afin de connaître l'influence de cette orientation sur les pertes dans les spires situées aux extrémités, nous avons calculé les pertes dans un ruban supraconducteur en fonction de l'angle entre le champ extérieur et le grand côté de ce ruban. Ceci, dans les cas où l'amplitude du champ magnétique est trois fois plus faible que le champ de pénétration pour $\theta = 0^\circ$, il y a alors pénétration complète pour $\theta = 90^\circ$ (Figure III-13), et

deux fois plus grande que ce champ pour $\theta = 0^\circ$, il y a alors pénétration complète quel que soit θ (Figure III-14).

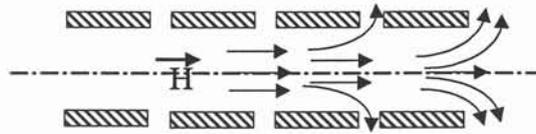


Figure III-12 : Champ magnétique à l'extrémité d'une bobine.

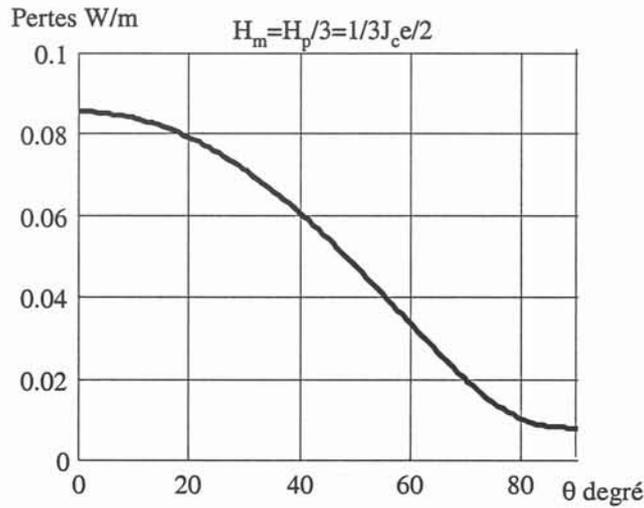
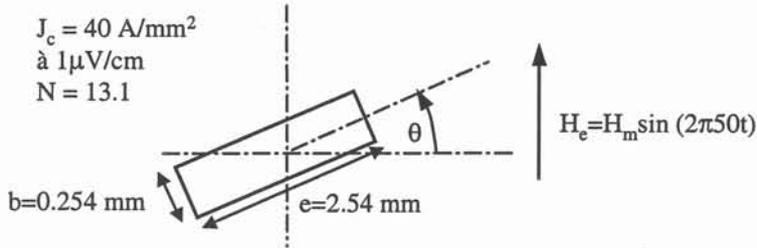


Figure III-13 : Pertes en fonction de l'angle entre champ extérieur et conducteur s'il n'y a pas toujours pénétration complète.

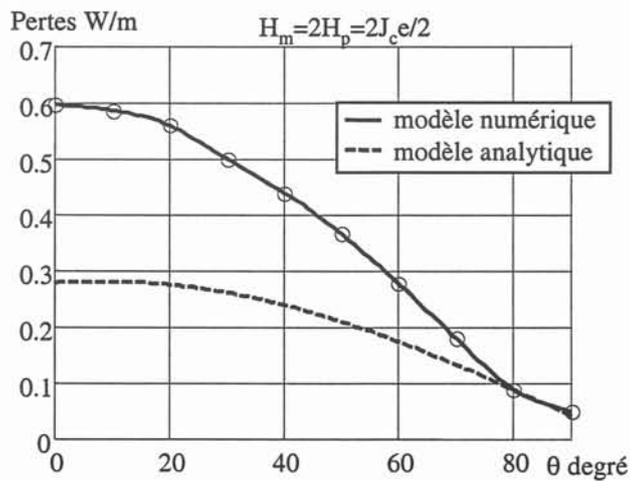


Figure III-14 : Pertes en fonction de l'angle entre champ extérieur et conducteur s'il y a toujours pénétration complète.

On peut voir que, dans les deux cas, les pertes dans les spires aux extrémités d'une bobine (θ différent de 90°) sont plus importantes que celles dans les spires du centre et peuvent être multipliées dans un rapport dix. Des dispositifs pour guider le champ magnétique le plus parallèlement possible à l'axe de la bobine peuvent alors être intéressants.

Nous avons également comparé le modèle numérique au modèle analytique « classique » dans le cas où $H_m = 2H_p$ pour $\theta = 0^\circ$. Ce modèle consiste à ajouter les contributions des pertes calculées avec le modèle de Bean pour un plan infini, en ajoutant les pertes dans les cas $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$, pondérées par $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$P = (\text{Pertes // grand côté}) \cdot \cos\theta + (\text{Pertes // petit côté}) \cdot \sin\theta$$

$$P_l = \mu_0 \cdot f \cdot [b(\frac{1}{3} J_c^2 e^3 + e^2 J_c H_m) \cos\theta + e(\frac{1}{3} J_c^2 b^3 + b^2 J_c H_m) \sin\theta] \quad (\text{III.7})$$

Ce modèle donne des résultats assez satisfaisants lorsque θ est proche de 90° mais présente jusqu'à 100% d'erreur lorsque θ est proche de 0° , ce qui est normal puisqu'on est alors très loin du modèle de plan infini ; dans ce cas, H est parallèle au petit côté.

De plus, on ne peut pas appliquer de modèle théorique lorsqu'il n'y a pas pénétration complète quel que soit θ .

Si l'on veut connaître les pertes quand H_m est inférieur à H_p pour certaines valeurs de θ , ou si l'on veut une idée précise de leurs valeurs quand H_m est toujours supérieur à H_p , il faut avoir recours au modèle numérique.

III.D CONCLUSION

Ce chapitre a permis de mettre en évidence le fait que, dans un certain nombre de cas, le modèle de Bean donne des résultats très proches de ceux de simulation, et donc que l'utilisation d'un outil numérique n'est alors pas indispensable. Parallèlement, si le champ extérieur maximal est inférieur à une ou deux fois le champ de pénétration, ou si le conducteur a une épaisseur faible devant sa hauteur, ou si N est relativement faible (inférieur à 10), les résultats donnés par le modèle de Bean sont relativement éloignés de ceux obtenus par simulation. Dans tous ces cas, le recours à un modèle numérique est indispensable. Cependant, le modèle numérique doit également être confronté à l'expérience. Ceci a été fait chapitre IV dans le cas d'un ruban supraconducteur ; on est alors en champ propre, et chapitre V dans le cas d'une bobine.

Chapitre IV

Etude d'un fil OPIT de Bi-2223 en champ propre

IV.A INTRODUCTION

Ce chapitre présente une étude détaillée concernant un fil supraconducteur OPIT de Bi-2223, alimenté par un courant sinusoïdal. Cette étude a permis de valider expérimentalement les modèles numériques utilisés, notamment la bonne représentation des pertes AC en champ propre grâce à une loi $J(E)$. Nous avons été confronté aux problèmes de la mesure électrique des pertes. Le calcul des pertes par les formules analytiques classiques est présenté et discuté. Le problème d'un modèle homogène ou multi-filaments de ces conducteurs a également été abordé.

Ces études ont été menées à 50 Hz car c'est la fréquence la plus utilisée en électrotechnique ; cependant, il n'y aurait aucune difficulté à faire des simulations à d'autres fréquences.

IV.B METHODE ELECTRIQUE DE MESURE DE PERTES

IV.B.1 Problématique

Pour mesurer les pertes dans un ruban supraconducteur, nous avons utilisé une méthode dite électrique [IV-1]-[IV-2] qui consiste habituellement à mesurer le courant qui traverse ce conducteur, la tension à ses bornes et le déphasage entre les deux. On obtient alors, lorsque le courant et la tension sont sinusoïdaux, les pertes moyennes par la formule classique :

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) \quad (IV.1)$$

Se posent cependant plusieurs problèmes pour appliquer cette méthode :

- la tension à mesurer étant très faible (quelques mV), il faut prendre beaucoup de précautions pour ne pas avoir un signal trop bruité (fils blindés et éviter les « boucles de flux » dans le circuit de mesure).

- il ne faut mesurer que la tension aux bornes du supraconducteur et non pas la tension fournie par le générateur, de façon à ne pas prendre en compte les chutes de tension dans les connexions, les soudures et les amenées de courants qui sont bien souvent

supérieures à la tension aux bornes de l'échantillon supraconducteur. Il faut donc mesurer la tension par l'intermédiaire de prises de potentiels placées sur le conducteur (Figure IV-1).

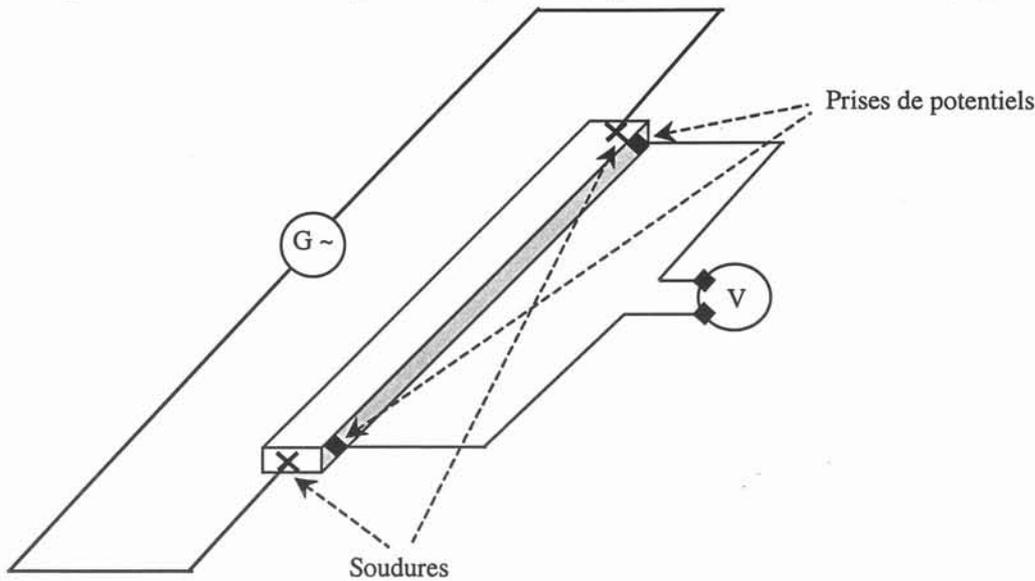


Figure IV-1 : Prises de potentiels sur un ruban supraconducteur.

- la tension est très fortement inductive et le déphasage entre courant et tension est très proche de 90° . Si l'on détermine les pertes à l'aide de la formule (IV.1), l'erreur commise sur la mesure de l'angle entraîne une très forte imprécision sur la mesure de la puissance. De plus, un wattmètre donne également des mesures très imprécises quand le déphasage est trop important.

- la tension et le courant ne peuvent être tous les deux sinusoïdaux, compte tenu de la non linéarité de la loi $J(E)$. En général, nous avons considéré le courant sinusoïdal et l'expression des pertes est alors :

$$P = V_{eff(fondamental)} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) \quad (IV.2)$$

il faut donc mesurer la valeur efficace du fondamental de la tension.

Nous verrons dans le paragraphe qui suit comment remédier à ces inconvénients.

IV.B.2 Principe et schéma de mesure

Pour remédier aux problèmes précédents, on retranche à la tension aux bornes du ruban une composante purement inductive grâce à une mutuelle de compensation. Un pont diviseur inductif permet ensuite d'ajuster l'amplitude de cette composante de sorte que la tension totale soit pratiquement en phase avec le courant. Ensuite, comme le courant est sinusoïdal, une détection synchrone nous fournit les valeurs efficaces des composantes en phase et en quadrature du fondamental de cette tension (Figure IV-2). Les formes des tensions avant et après compensation sont données Figure IV-3 pour l'exemple traité à la fin de ce chapitre (paragraphe IV.C), pour un courant d'amplitude I_c .

Remarque : Dans le cas d'un conducteur seul, une mutuelle de compensation n'est pas forcément utile et une détection synchrone peut suffire pour mesurer avec une très bonne

précision la composante en phase. Ceci devient pratiquement impossible aux bornes d'une bobine ou la tension est extrêmement inductive.

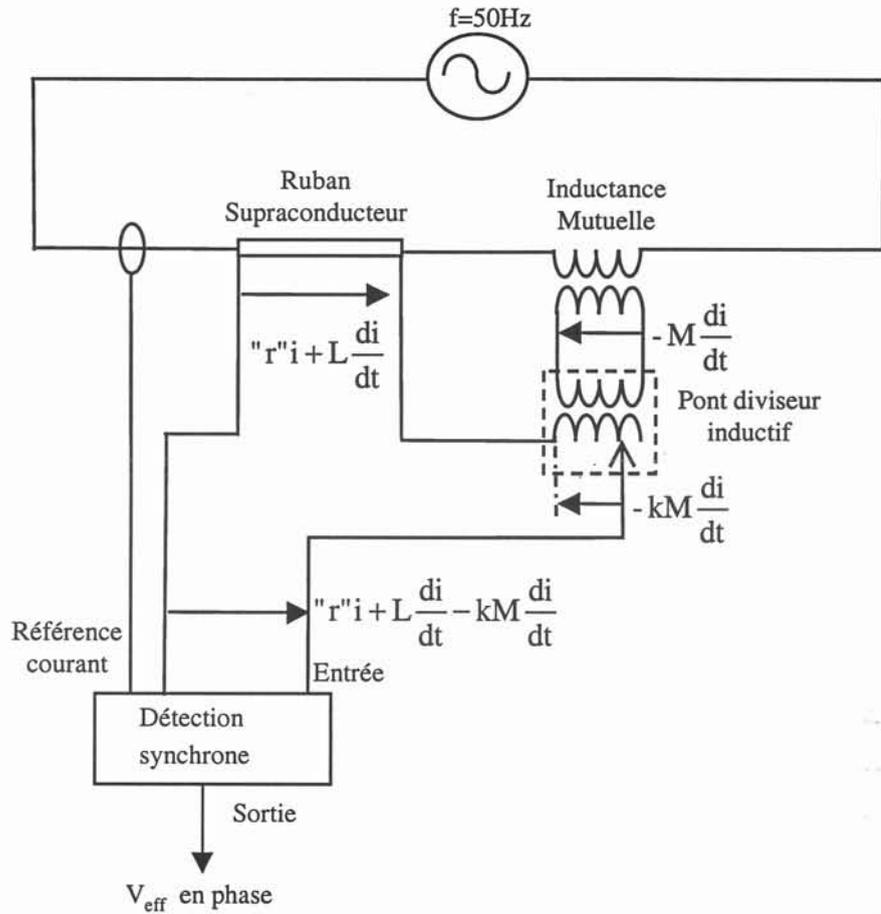


Figure IV-2 : Schéma de mesure des pertes.

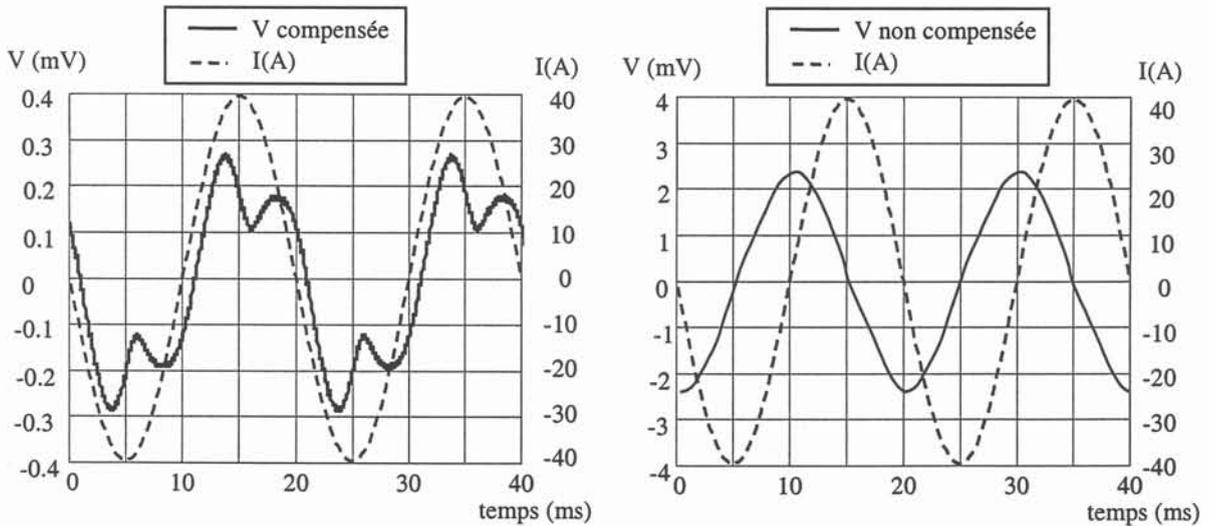


Figure IV-3 : Tension compensée ou non compensée aux bornes d'un ruban supraconducteur.

Les problèmes dûs aux déphasages et à une tension non sinusoïdale ayant été résolus, il restait quand même à savoir ce que représentait exactement cette tension. En effet, si cela est une évidence qu'un voltmètre placé aux bornes d'un composant mesure la chute de tension

dans ce composant, il ne faut pas oublier qu'il mesure aussi la dérivée du flux embrassé par la boucle de mesure formée par les fils. Qui plus est, aux bornes d'un conducteur massif, l'emplacement des prises de potentiel n'influe-t'il pas sur la tension mesurée ?

Ces deux problèmes, emplacement des prises de potentiels et flux embrassé, sont importants car si on ne mesure pas toujours la même tension suivant la position des prises de potentiels et la disposition des fils de mesure, on risque de ne pas mesurer toujours les mêmes pertes. Les problèmes de mesure de tension aux bornes d'un conducteur ont déjà été traités par plusieurs auteurs ([IV-1] à [IV-6]) mais il nous est néanmoins apparu intéressant de développer ce point dans ce chapitre.

Les exemples d'un conducteur de section circulaire puis d'un conducteur de section rectangulaire sont traités ci-après.

IV.B.3 Mesure de tension aux bornes d'un supraconducteur de section circulaire

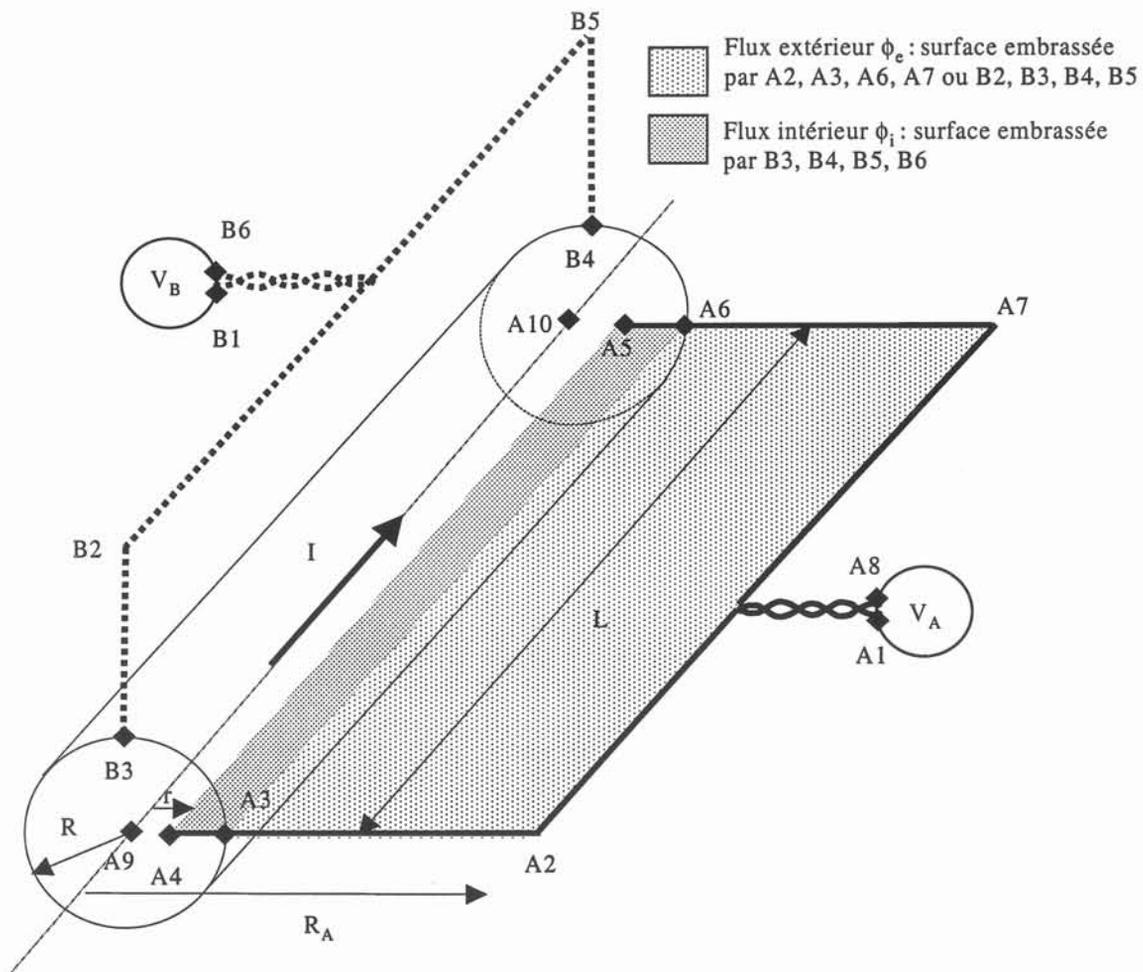


Figure IV-4 : Emplacement des prises de potentiels dans le cas d'un conducteur de section circulaire.

Sur cet exemple, on place deux voltmètres dont les prises de potentiels sont situées en B3, B4 et en A4, A5, et on dispose les fils de mesure de manière qu'ils embrassent le même flux. Les fils en sortie des voltmètres sont torsadés de telle sorte qu'ils n'embrassent

aucun flux. Sachant qu'un voltmètre mesure un gradient de potentiel à ses bornes [IV-3], on montre que :

$$v_B = \int_{B1}^{B6} -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dl} = E(R,t) \cdot L + \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (\text{IV.3})$$

$$v_A = \int_{A1}^{A8} -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{dl} = E(r,t) \cdot L + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (\text{IV.4})$$

On montre alors que : $E(r,t) \cdot L + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = E(R,t) \cdot L$

Donc, dans ce cas on a bien :

$$v_A = v_B = E(R,t) + L \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (\text{IV.5})$$

une démonstration détaillée est fournie annexe 1.

De plus, dans le cas d'un conducteur de section circulaire, le flux extérieur est en phase avec le courant et sa dérivée est donc en quadrature. Quel que soit le flux extérieur embrassé, les pertes mesurées seront donc les mêmes bien que la tension soit différente. Dans ce cas, on a intérêt à coller les fils sur le conducteur de façon à limiter la composante inductive et à éviter de mesurer un flux magnétique ne provenant pas du conducteur lui-même.

IV.B.4 Mesure de tension aux bornes d'un supraconducteur de section rectangulaire

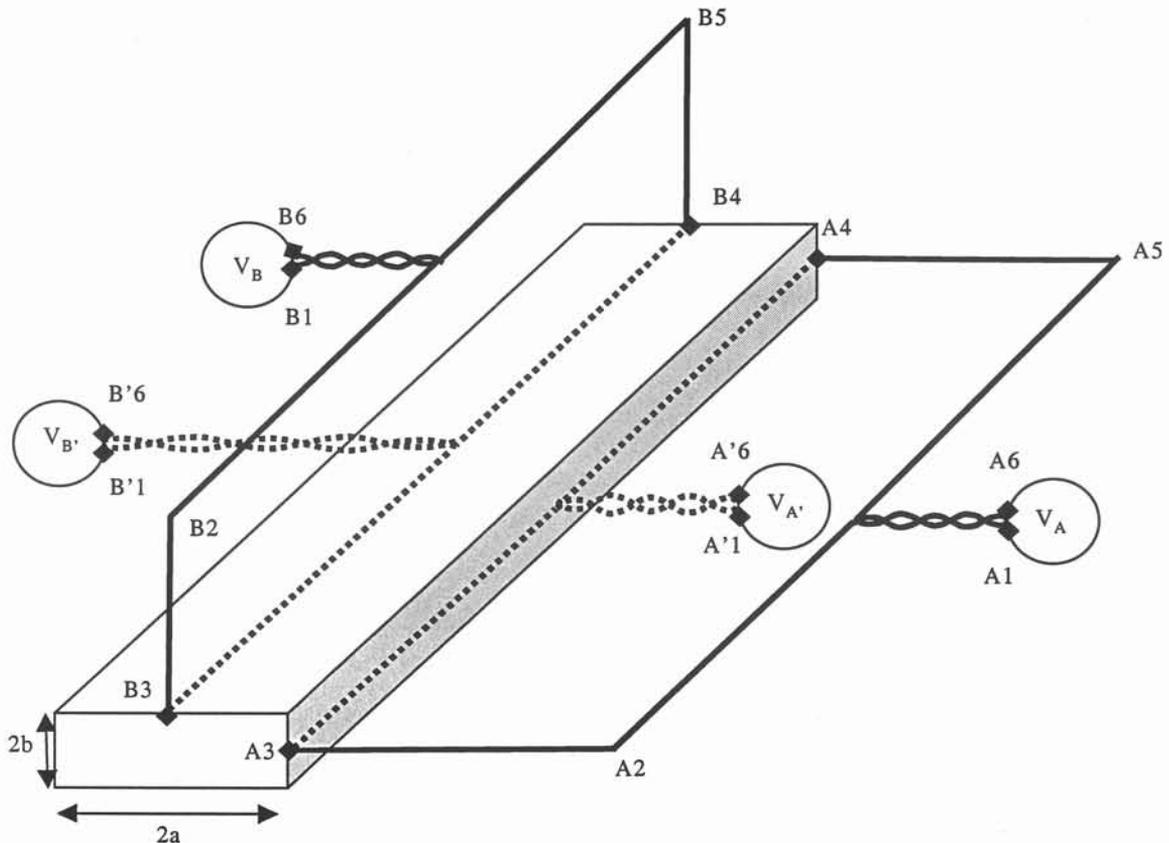


Figure IV-5 : Position des fils de mesure aux bornes d'un conducteur de section rectangulaire.

Dans ce cas, on s'intéresse aux tensions mesurées par quatre voltmètres dont les prises de potentiels sont placées à la surface du conducteur, au milieu du grand ou du petit côté. Les fils de mesure embrassent ou non un flux extérieur (Figure IV-5). Pour les mêmes raisons que précédemment, on montre que l'emplacement des prises de potentiels n'a pas d'importance et que l'on mesure, dans tous les cas, le champ électrique à la surface du conducteur, auquel s'ajoute ou non un flux extérieur [IV-4].

$$v_{A'} = E(a,t).L \quad (IV.6)$$

$$v_{B'} = E(b,t).L \quad (IV.7)$$

$$v_A = E(a,t).L + \frac{\partial \phi_{A2,A3,A4,A5}}{\partial t} \quad (IV.8)$$

$$v_B = E(b,t).L + \frac{\partial \phi_{B2,B3,B4,B5}}{\partial t} \quad (IV.9)$$

On mesure donc quatre tensions différentes car le champ électrique à la surface d'un conducteur rectangulaire n'est pas uniforme (Figure IV-6). Qui plus est, les composantes de ces tensions en phase avec le courant n'ont à priori aucune raison d'être les mêmes, donc les pertes calculées à partir de ces tensions sont à priori différentes ! De plus, avec un conducteur de section rectangulaire, le champ magnétique autour de ce conducteur n'est pas parfaitement en phase avec le courant (Figure IV-7), par conséquent le flux embrassé « transporte » une partie des pertes.

La Figure IV-7 présente le champ magnétique, calculé par simulation, pour différents endroits sur un conducteur ou sur des lignes perpendiculaires aux côtés de ce conducteur lorsque celui-ci est parcouru par un courant sinusoïdal. On remarque que :

- dès que l'on s'éloigne un peu du conducteur (d'une distance égale à environ une fois son plus grand côté), on retrouve un champ magnétique pratiquement parfaitement en phase avec le courant, donc ne « transportant pas » de pertes.

- sur la ligne horizontale, le champ magnétique est en retard par rapport au courant et au contraire en avance sur la ligne verticale. Ceci implique que, sur la ligne horizontale, si les prises de potentiels embrassent un flux magnétique (voltmètre A'), on mesurera une puissance plus faible que si l'on colle les fils au conducteur (voltmètre A). Au contraire, sur la ligne verticale, si les prises de potentiels embrassent un flux magnétique (voltmètre B'), on mesurera une puissance plus grande que si l'on colle les fils au conducteur (voltmètre B).

Le Tableau IV-1 présente, pour $I = I_c$, les pertes mesurées aux points 1, 3, 6 et 8 (Figure IV-7) et calculées en simulation à partir de la valeur moyenne de $p(t) = v(t).i(t)$, avec $v(t) = e(t)_{\text{surface}} + \partial \phi_{\text{ext}} / \partial t$. Sur ce tableau, on voit que, d'un point de vue pratique comme d'un point de vue numérique, la puissance mesurée à partir des voltmètres A et B est la même et que celle-ci est égale à la puissance calculée numériquement par $\iiint E.J.d^3v$. Les légères différences sont dues, pour les points 1 et 6, au fait que, pour les mesures, les fils ne sont pas parfaitement collés (ils devraient d'ailleurs être enfoncés dans le conducteur), et pour les

points 3 et 8 à l'imprécision du calcul numérique, notamment dans le calcul de la dérivée du flux.

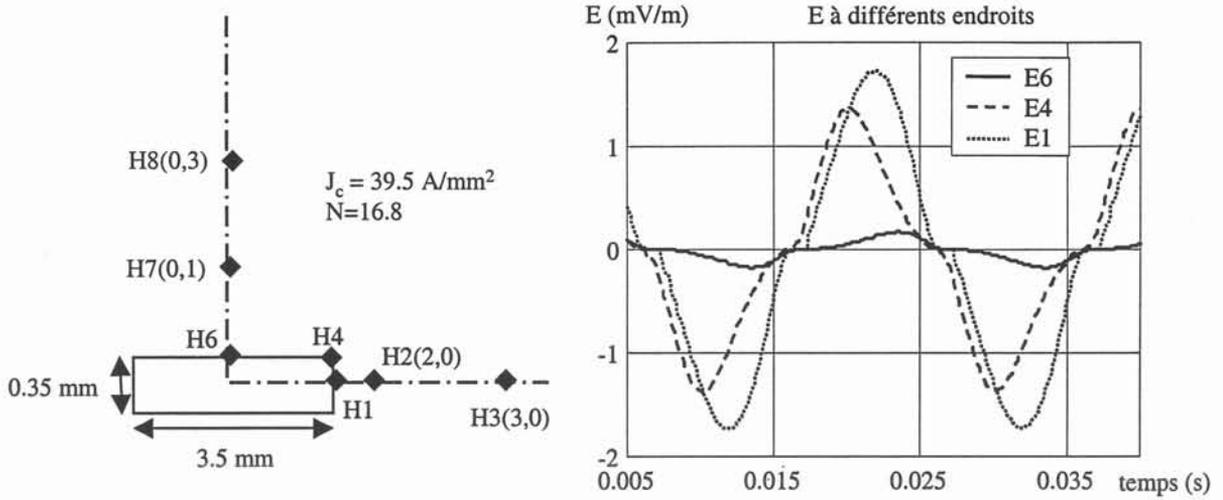


Figure IV-6 : Répartition de E autour d'un conducteur de section rectangulaire

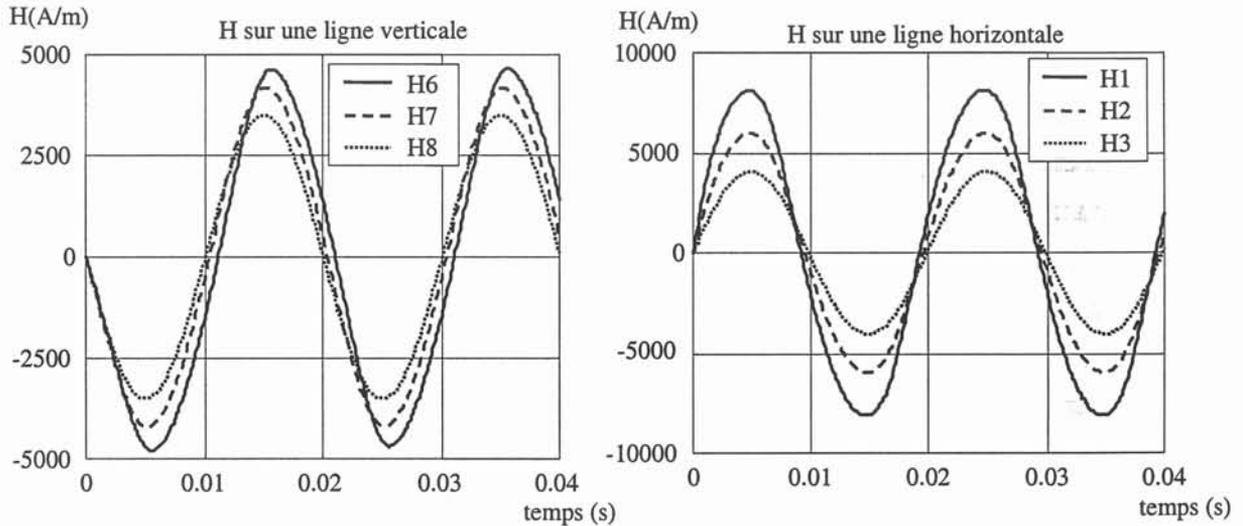


Figure IV-7 : Répartition de H autour d'un conducteur de section rectangulaire.

	Simulation	Mesure
point 1	5.7	5.9
point 3	4.6	4.8
point 6	0.7	2.3
point 8	5	4.8

$$\iiint E.J.d^3v = 4.75 mW$$

Tableau IV-1 : Valeur moyenne des pertes en mW pour $I=I_c$ suivant la position du voltmètre.

Conclusion : même si, en théorie, dans le cas d'un conducteur de section rectangulaire, il faut, pour mesurer la bonne puissance, placer le voltmètre à l'infini [IV-4]-[IV-5], on voit que, dès que celui-ci est éloigné de 1 à 2 fois la largeur du ruban, on mesure

les pertes avec une bonne précision [IV-5]-[IV-6]-[IV-2]. Ceci à été vérifié en pratique sur un ruban supraconducteur (Figure IV-8). On n'a, de toute façon, pas intérêt à placer le voltmètre plus loin car alors la tension mesurée devient encore plus inductive et l'imprécision sur la mesure des pertes augmente.

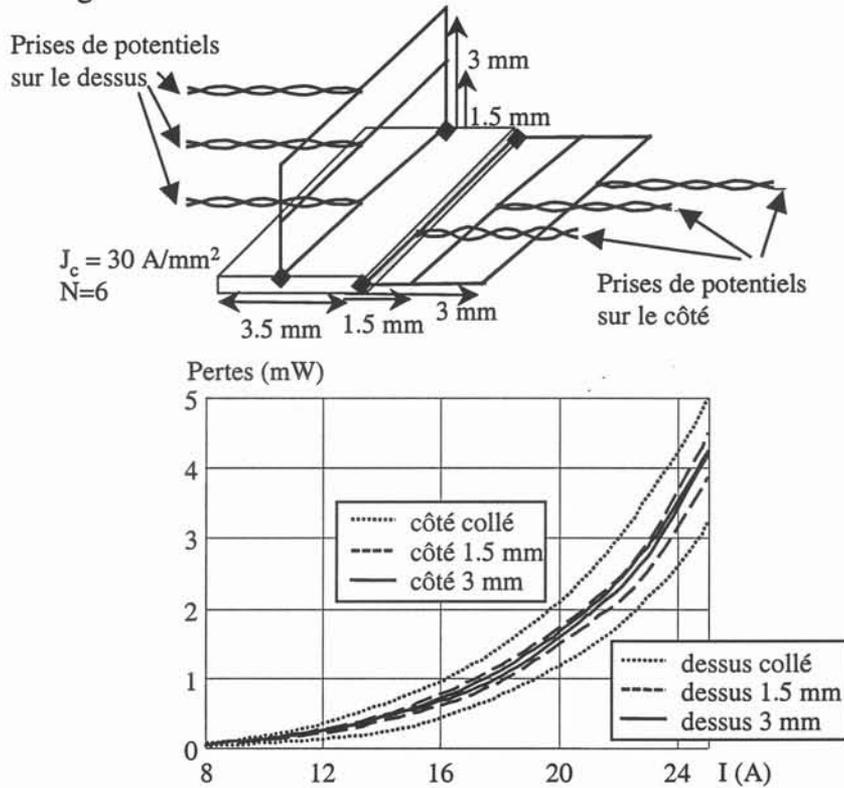


Figure IV-8 : Pertes mesurées suivant l'emplacement des fils de prises de potentiel.

IV.C PERTES EN CHAMP PROPRE DANS UN CONDUCTEUR

IV.C.1 Conducteur étudié et hypothèse sur le couplage entre filaments

Cette partie présente l'étude d'un ruban supraconducteur OPIT de Bi-2223 (voir chapitre I). La Figure IV-9 présente une section de ce conducteur ainsi que le modèle numérique utilisé qui suppose que le conducteur est homogène ; la validité de cette hypothèse sera discutée au paragraphe IV.C.4.

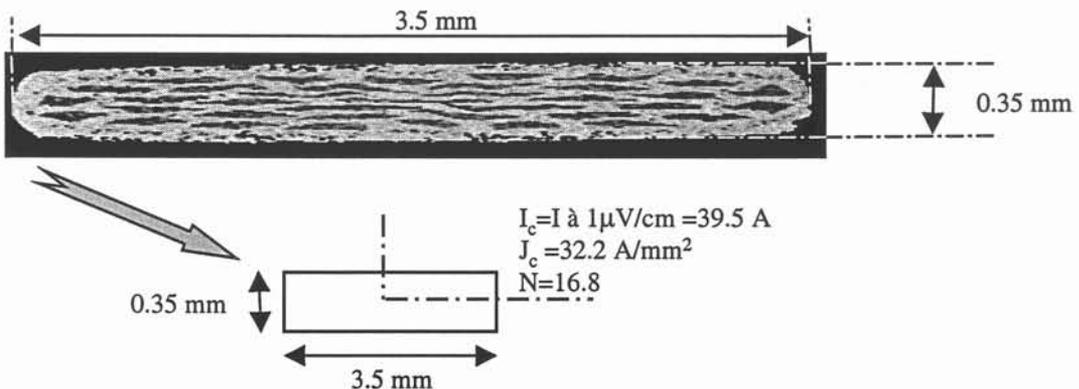


Figure IV-9 : Section d'un conducteur OPIT de Bi-2223 et modèle homogène.

On peut supposer que le conducteur est homogène dans la mesure où les filaments sont, en champ propre, parfaitement couplés magnétiquement entre eux. N'étant pas disposés comme dans un fil de Litz, ils se comportent a priori comme un seul gros filament.

IV.C.2 Répartition de J dans un ruban supraconducteur

Ce paragraphe présente la répartition du courant dans un quart du conducteur présenté précédemment pour un courant sinusoïdal d'amplitude I_c , lorsque le courant passe de $-I_c$ à $+I_c$.

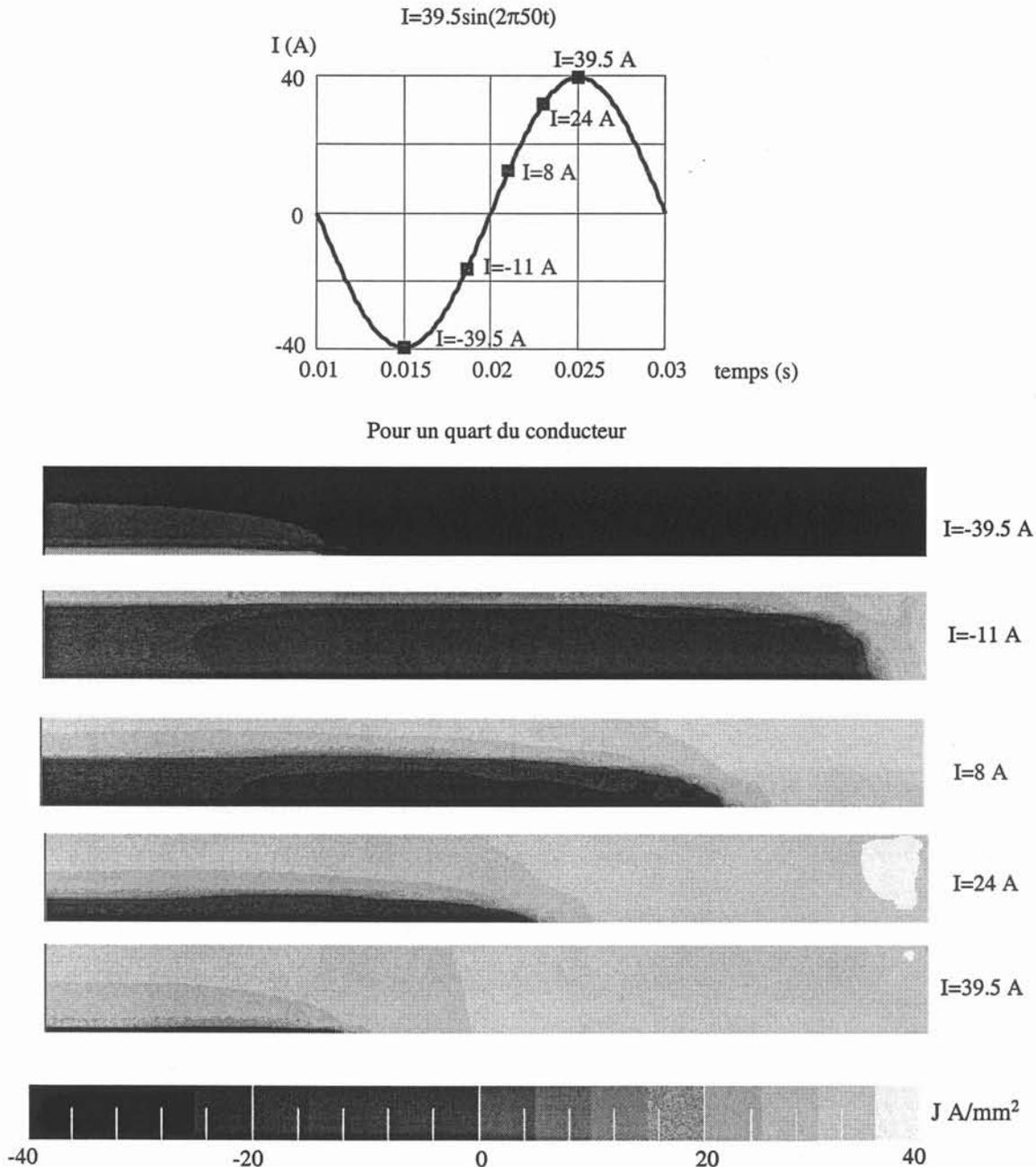


Figure IV-10 : Répartition de J dans un conducteur de section rectangulaire.

On voit sur la figure ci-dessus que, lorsque le courant total augmente, la densité de courant évolue de $-J_c$ à $+J_c$ à partir de l'extérieur du conducteur vers l'intérieur, le périmètre

séparant $-J_c$ de $+J_c$ ayant une forme à peu près elliptique. On voit également l'effet d'un N non infini : la densité de courant peut dépasser J_c (32.2 A/mm^2) à l'extérieur et être inférieure à l'intérieur. Néanmoins, lorsque le courant est maximal ou minimal, on retrouve une densité de courant uniforme et égale à J_c pratiquement dans tout le conducteur, ce qui est normal puisque l'amplitude du courant est égale à I_c .

IV.C.3 Comparaison entre mesure, simulation et formules classiques

IV.C.3.a Comparaison simulation mesure

La Figure IV-11 présente une comparaison entre les mesures et les résultats de simulation pour $I_{eff} \leq I_c / \sqrt{2}$, on voit que les courbes se superposent parfaitement. On peut donc supposer que les méthodes de mesure et de simulation sont toutes deux valables ; néanmoins, d'autres tests sur d'autres échantillons seraient nécessaires pour tirer une conclusion définitive, d'autant que, compte tenu des erreurs sur les mesures, et des hypothèses faites sur l'homogénéité du conducteur, les courbes devraient probablement ne plus être confondues.

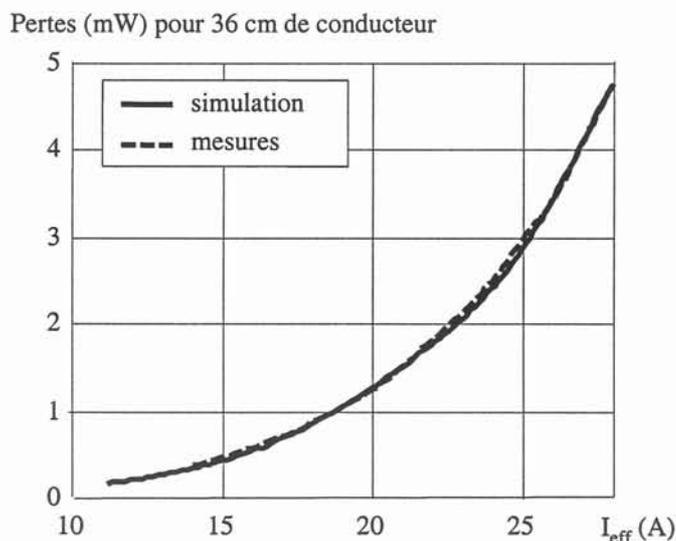


Figure IV-11 : Pertes dans un supraconducteur opit Bi-2223.

Une comparaison avec les formules théoriques « classiques » a également été menée, notamment avec le modèle de Norris paragraphe IV.C.3.b et avec le modèle de « plan infini » paragraphe IV.C.3.c.

IV.C.3.b Comparaison avec les formules de Norris

Le modèle de Norris [IV-7] détermine analytiquement la répartition du courant, entre autres pour des conducteurs de section rectangulaire ou elliptique, tout en se basant sur le modèle de Bean ($J = \pm J_c = \pm \text{cte}$) :

Section rectangulaire :

$$P_l = \frac{\mu_0 f I_c^2}{\pi} [(1-F) \ln(1-F) + (1+F) \ln(1+F) - F^2] \quad (\text{IV.10})$$

Section elliptique :

$$P_l = \frac{\mu_0 f I_c^2}{\pi} [(1-F) \ln(1-F) + (2-F) \frac{F}{2}] \quad (\text{IV.11})$$

avec $F = I_m/I_c$ où I_m est la valeur maximale du courant de transport et I_c le courant critique (surface multipliée par la densité de courant critique).

Pertes (mW) pour 36 cm de conducteur

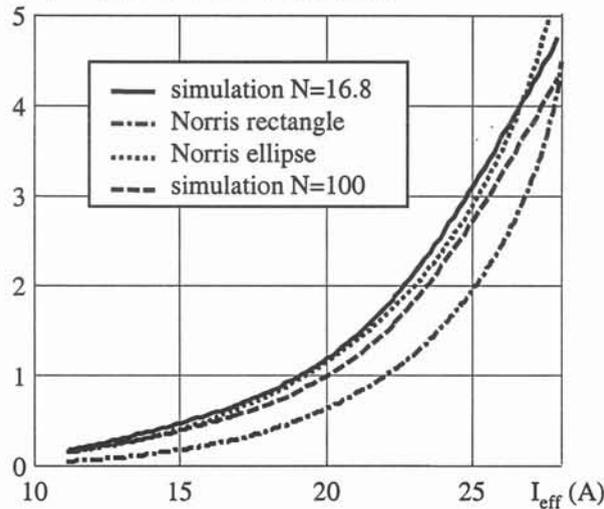


Figure IV-12 : Comparaison du modèle numérique avec les formules de Norris.

On remarque, Figure IV-12, qu'il y a une différence importante entre les résultats de simulation pour $N = 16.8$ et le modèle de Norris dans le cas d'une section rectangulaire. Cette différence peut s'expliquer par l'utilisation du modèle de Bean dans le modèle de Norris (voir courbe pour $N = 100$), et par les hypothèses faites sur la répartition du courant dans ce modèle. En effet, le périmètre séparant les zones parcourues par J_c et $-J_c$ est supposé parfaitement elliptique dans le modèle de Norris, et ne l'est pas forcément (Figure IV-10).

Le modèle de Norris dans le cas d'une section elliptique donne, par contre, de très bons résultats. Dans la littérature [IV-1]-[IV-3]-[IV-5]-[IV-6], on retrouve pratiquement toujours cette constatation : le modèle pour une ellipse donne de très bons résultats et est très proche des pertes mesurées, même si, lorsque I se rapproche de I_c , ces pertes semblent toujours devenir un peu plus grandes que les pertes calculées.

IV.C.3.c Comparaison avec le modèle de « plan infini »

Dans ce paragraphe, on compare les pertes obtenues en simulation et calculées avec un modèle de plan infini. Le rapport entre le petit côté et le grand côté du conducteur étant dans notre cas de 10, on aurait pu penser que ce modèle n'est pas trop mauvais.

Dans un plan infini, le courant se répartit par couches parallèles aux côtés du plan et que le champ magnétique créé par ce courant à l'extérieur est uniforme et parallèle au plan (Figure IV-13).

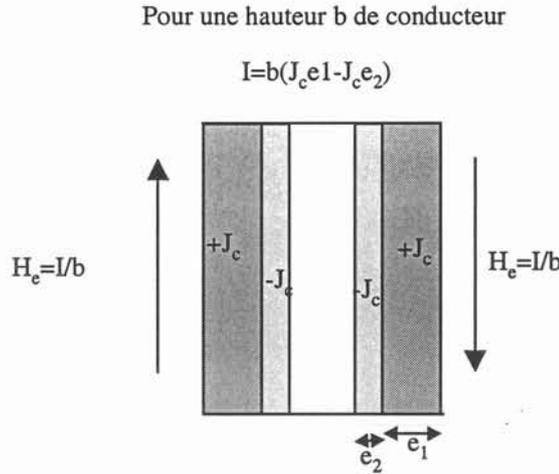


Figure IV-13 : Modèle de plan infini.

Les pertes linéiques calculées avec ce modèle ont pour expression :

$$P_l = f \frac{2\mu_0 e}{3b} F^3 I_c^2 \text{ avec } F = \frac{I_m}{I_c} \quad (\text{IV.12})$$

où b est la hauteur du conducteur, I_m la valeur maximale du courant de transport pour une hauteur b de conducteur, et I_c le courant critique (surface multipliée par la densité de courant critique) pour une hauteur b ($I_c = ebJ_c$).

On voit sur la Figure IV-14 que ce modèle présente des écarts importants avec les résultats de simulations et donc les mesures. Cela ne peut pas s'expliquer par le fait que le modèle de Bean suppose un N infini. De plus, d'autres tests ont montré que plus l'épaisseur est faible par rapport à la largeur plus les écarts sont importants.

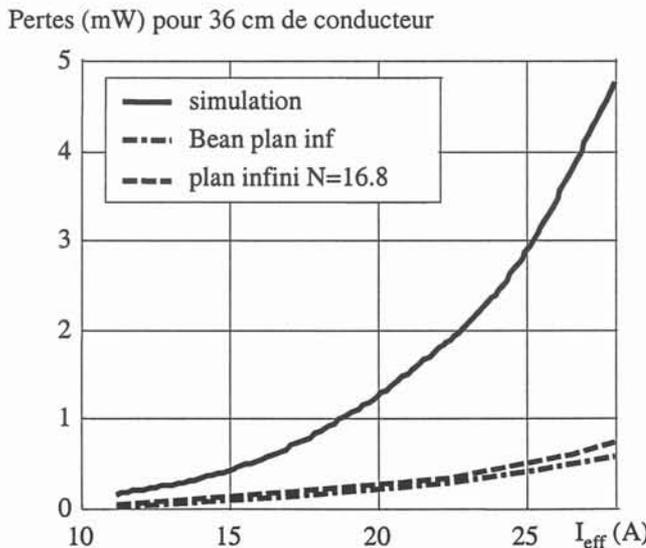


Figure IV-14 : Comparaison du modèle numérique avec le modèle de plan infini.

Le modèle de plan infini n'est donc pas valable en champ propre ; ceci peut se comprendre en comparant la répartition du courant et du champ magnétique dans un plan infini et dans un conducteur rectangulaire de hauteur 3.75 mm et d'épaisseur 40 fois plus faible. On s'aperçoit alors que, en champ propre, la répartition du courant et donc du champ magnétique dans le conducteur est radicalement différente de celle dans un plan infini. Ce modèle reste cependant à priori valable en champ extérieur.

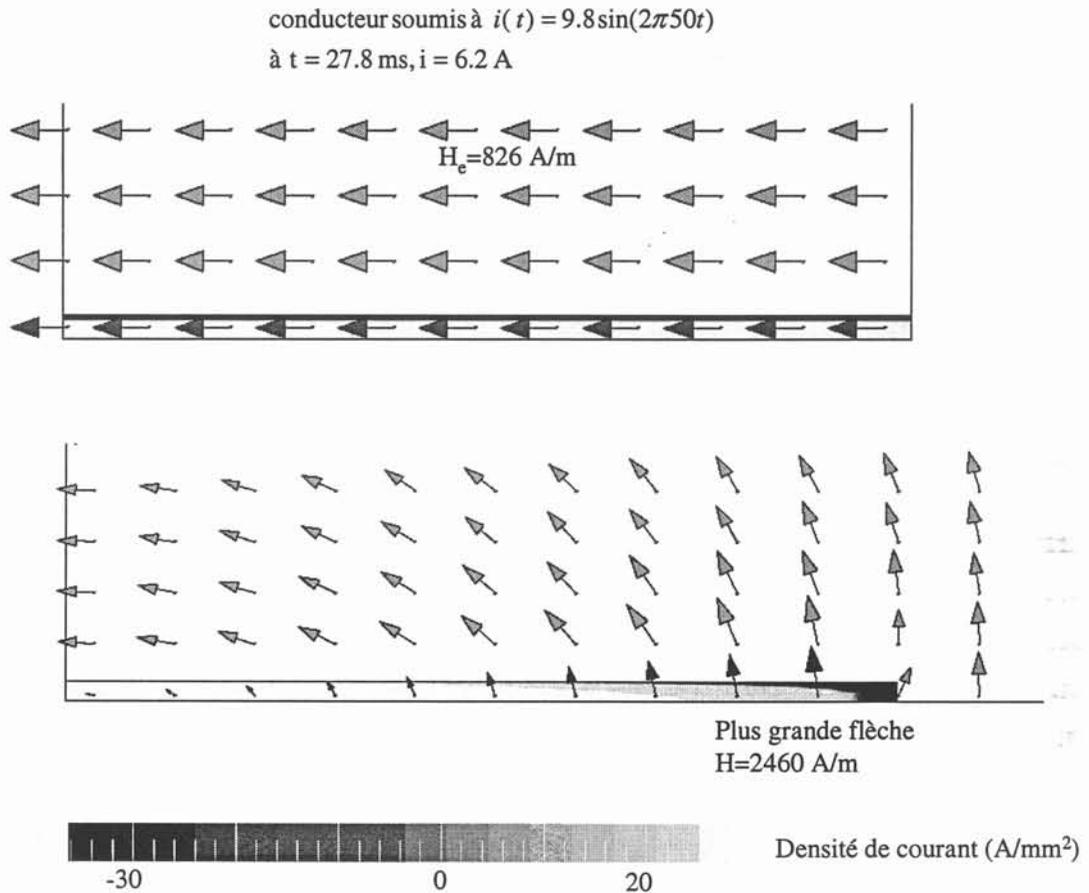


Figure IV-15 : Répartition du courant et du champ magnétique dans un plan infini et un ruban.

IV.C.4 Etude de l'homogénéisation

Ce paragraphe présente une comparaison entre un modèle homogène utilisé précédemment et un modèle numérique qui prend en compte la composition multi-filamentaire des fils OPIT (Figure IV-16). Pour cela, la répartition de courant dans un fil comprenant trente six filaments est présentée et les pertes moyennes calculées avec ce modèle sont ensuite comparées à celles calculées avec le modèle homogène.

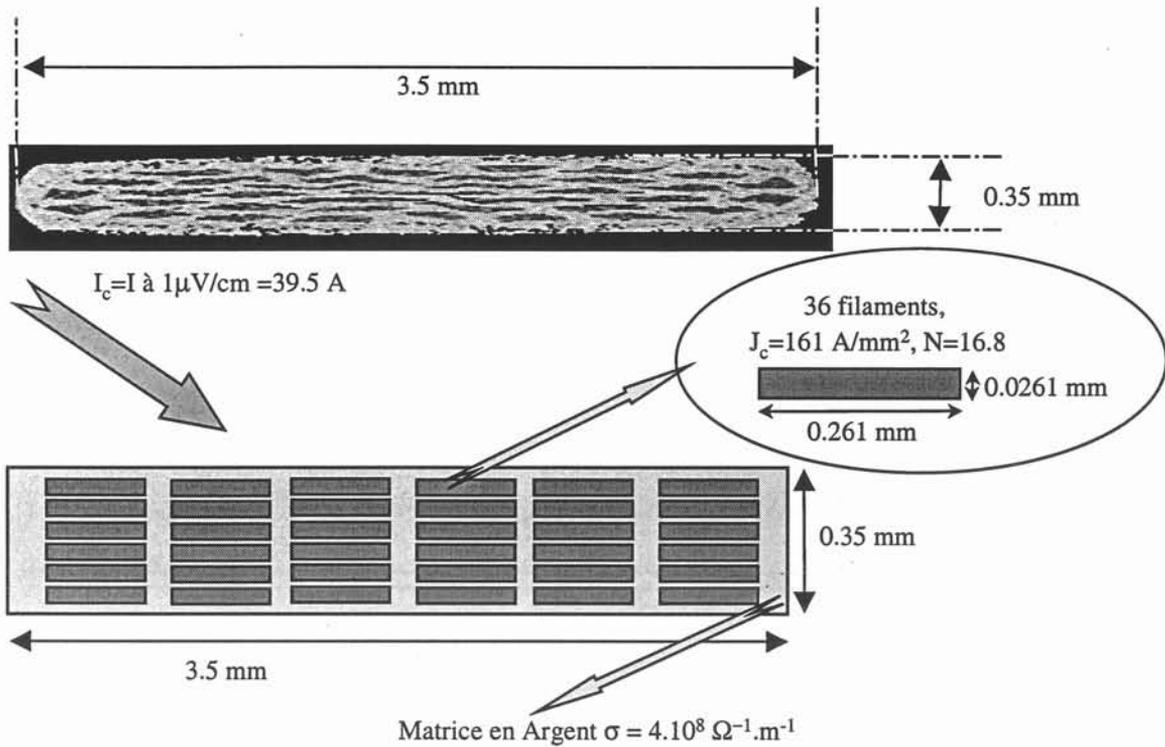


Figure IV-16 : Modèle 36 filaments d'un supraconducteur OPIT.

Par rapport au modèle homogène, la densité de courant critique des filaments est définie comme étant le courant critique divisé uniquement par la surface des filaments. On a pu déterminer que celle-ci ne représente que 20% de la surface totale du conducteur ; la densité de courant critique est donc cinq fois plus forte que celle du modèle de conducteur homogène.

Remarque : Ce calcul a été effectué à l'aide de la formulation $\partial \vec{A} / \partial t$ couplée avec les équations de circuit. Le circuit électrique est présenté à la Figure IV-16.

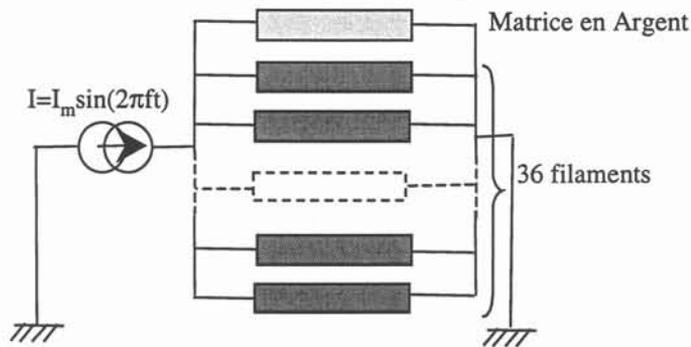


Figure IV-17 : circuit électrique d'un supraconducteur OPIT 36 filaments.

IV.C.4.a Répartition du courant

Comme dans le cas d'un conducteur homogène, ce paragraphe étudie la répartition du courant dans un quart du conducteur présenté ci dessus, pour un courant sinusoïdal d'amplitude I_c , lorsque le courant passe de $-I_c$ à $+I_c$.

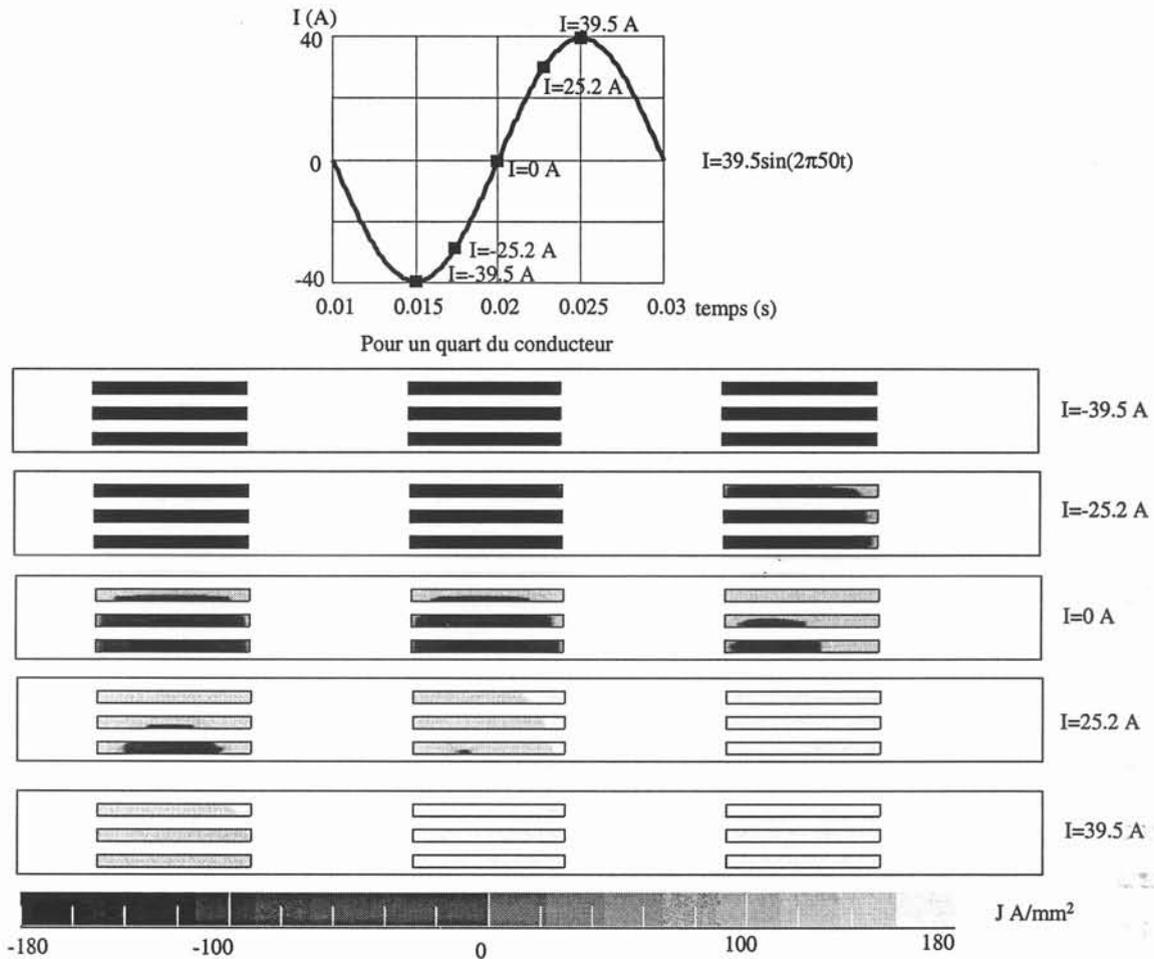


Figure IV-18 : Répartition de J pour un quart de conducteur.

La valeur de la densité de courant dans la matrice étant au moins cent fois plus faible que dans les filaments, celle-ci n'a pas été représentée sur la figure.

Comme l'on pouvait s'y attendre, en regardant la répartition de J dans le cas d'un conducteur homogène Figure IV-10, ce sont les filaments extérieurs qui, les premiers, vont avoir tendance à voir leur densité de courant passer de $-J_c$ à J_c . Les conducteurs du centre sont, eux, les derniers à être parcourus par cette densité de courant. Cependant, il faut remarquer que la surface parcourue par J_c , ne forme pas, comme dans le cas homogène, une ellipse, mais aurait plutôt tendance à former deux ellipses de part et d'autre du conducteur.

Nous verrons néanmoins, paragraphe suivant, que cette petite différence n'influe en fait pratiquement pas sur la valeur moyenne des pertes en champ propre. De même, le fait que l'on considère 36 filaments de densité de courant critique 161 A/mm^2 , au lieu d'un conducteur de densité de courant critique $32,2 \text{ A/mm}^2$, n'influe pas non plus, du moins pour $I_{\text{eff}} < I_c / \sqrt{2}$.

IV.C.4.b Comparaison sur la valeur des pertes

Pour des courants inférieurs au courant critique, la Figure IV-19 confirme les hypothèses classiques sur la validité du modèle homogène. D'une part, les pertes dans la

matrice sont négligeables devant les pertes dans les filaments supraconducteurs et, d'autre part, le modèle homogène donne des pertes très proches du modèle multi-filaments, donc modélise très bien les conducteurs de type OPIT.

Par contre, lorsque l'amplitude du courant devient plus grande que I_c , ($I_{eff} > 28A$), les pertes du modèle multi-filaments deviennent nettement plus importantes que celles du modèle homogène. Cela est peut être dû à la valeur du courant critique qui est cinq fois plus grande que dans le modèle homogène.

De plus, les pertes dans la matrice augmentent très brutalement pour ne devenir que dix fois plus faibles que les pertes dans les filaments. Ceci se comprend par le fait que les filaments deviennent "moins bons conducteurs", donc le courant qui passe dans la matrice n'est plus complètement négligeable face à celui qui passe dans les filaments. D'un point de vue expérimental, nous nous sommes limité, pour préserver nos échantillons, à des courants au maximum égaux à I_c , la non-validité du modèle homogène pour des courants plus importants n'a donc pas été vérifiée pour l'instant.

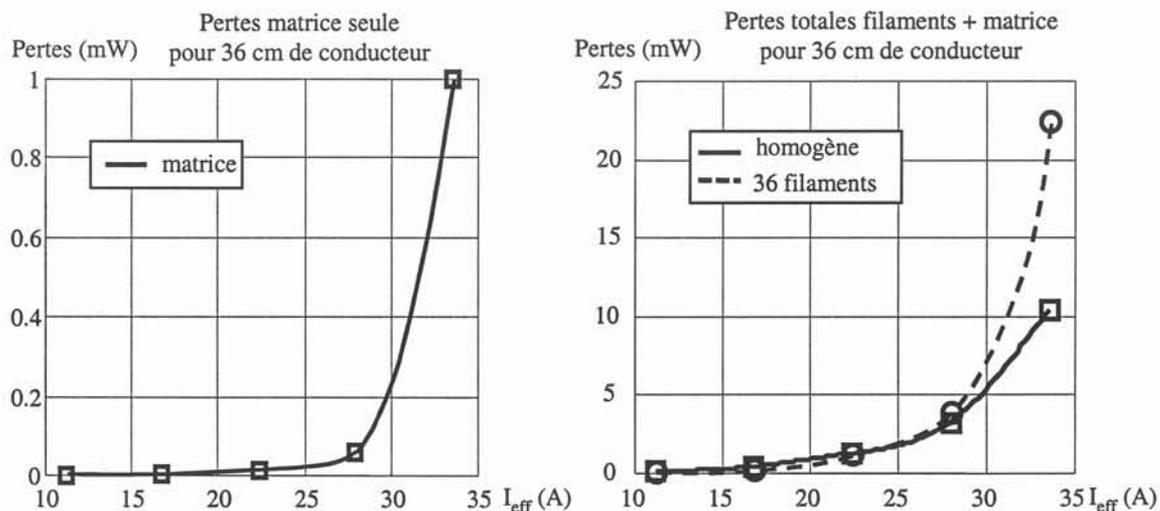


Figure IV-19 : Pertes en champ propre modèles homogène ou 36 filaments.

Pour des courants d'amplitude inférieure à I_c , les filaments sont donc effectivement parfaitement couplés en champ propre et se comportent bien comme un seul gros filament.

IV.D CONCLUSION SUR LE CHAPITRE

Le début de ce chapitre a permis de mieux comprendre la méthode électrique de mesure de pertes et notamment ce que mesure réellement un voltmètre placé aux bornes d'un conducteur. La simulation a ensuite permis de vérifier sur des exemples concrets la validité de cette méthode tant au niveau du principe qu'au niveau des résultats quantitatifs.

Le modèle homogène d'un conducteur multifilaments a également été validé. En champ propre, pour des courants d'amplitude inférieure au courant critique, et des conducteurs de faibles dimensions (faible champ propre) l'hypothèse d'un J_c indépendant de B est donc totalement justifiée. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'elle l'est moins en champ extérieur.

Chapitre V

Etude détaillée d'une bobine deux couches

V.A INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objet l'étude d'une bobine supraconductrice possédant deux couches de conducteurs. Il propose dans un premier temps un modèle permettant de calculer les pertes dans des bobines supraconductrices et de comprendre leur comportement physique. Ensuite, le problème de la mesure de la tension est étudié pour diverses configurations. Enfin une étude pratique et numérique est présentée.

V.B MODELE ANALYTIQUE

Ce paragraphe présente un modèle de bobines supraconductrices basé sur des cylindres infiniment longs. Le cas d'une bobine mono-couche est étudié en détail, avec la méthode permettant de déterminer les pertes. Le cas d'une bobine deux couches dont la couche interne est alimentée ou non est ensuite présenté beaucoup plus succinctement. Des formules plus générales, applicables à des bobines n couches sont, quant à elles, présentées en annexe 2. Toutes les formules de ce chapitre ont été validées sur des exemples avec les paramètres du paragraphe V.D.

V.B.1 Bobine mono-couche

V.B.1.a Présentation du modèle et méthodologie

Dans ce modèle, la bobine est représentée par un tube infiniment long (Figure V-2), et non comme étant composée d'un fil bobiné (modèle multi-conducteurs). On suppose que la bobine est très longue par rapport à son diamètre (modèle de solénoïde infini), ceci sous-entend que le champ magnétique est parfaitement axial à l'intérieur de la bobine et nul à l'extérieur. On a alors une relation directe entre le courant de transport par unité de hauteur I_h et le champ magnétique à l'intérieur du cylindre : $H = I_h$. On peut alors aussi bien considérer que le cylindre est parcouru par un courant orthoradial ou qu'il est soumis à un champ magnétique interne. Dans une bobine, les conducteurs sont donc plutôt en régime de champ extérieur qu'en régime de champ propre (Figure V-1). Contrairement au cas du chapitre IV, un modèle en champ extérieur est donc susceptible de donner de bons résultats.

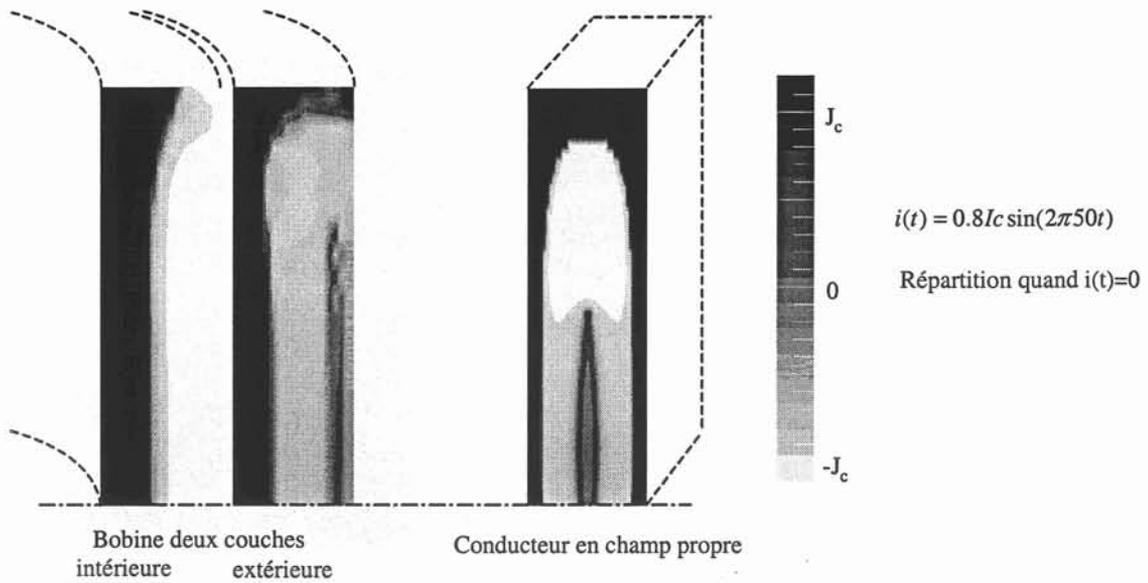


Figure V-1 : Répartition du courant dans un demi-conducteur appartenant à une bobine ou en champ propre.

La méthode pour le calcul des pertes est la suivante ; elle est inspiré de celle utilisée par W.J Carr dans le cas de plan infini [V-1]:

- déterminer la répartition du courant et de l'induction magnétique (même méthode que dans l'exemple du chapitre I). La densité de courant est égale à $\pm J_c$ où 0, donc l'induction magnétique dans le supraconducteur est telle que $\text{rot } \vec{B} = \pm J_c$ où 0 et que $\vec{B}(R_i) = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 I_h \vec{z}$. Les courants se développent pour écranter le champ magnétique, donc, dans le cas mono-couche, à partir de l'intérieur du cylindre. Le rayon de pénétration r_p est tel que $\vec{B}(r_p) = 0$.
- \vec{E} se calcul ensuite avec l'équation de Maxwell, $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ en prenant comme condition aux limite $\vec{E}(r_p) = 0$.
- on peut alors déterminer les pertes instantanées dans un cylindre de hauteur b par la formule :

$$p(t) = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{r_p} \int_0^b J \cdot E \cdot r \cdot \partial r \cdot \partial \theta \cdot \partial z$$

- le cas échéant, les pertes moyennes dissipé dans le cylindre se calcule par :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt$$

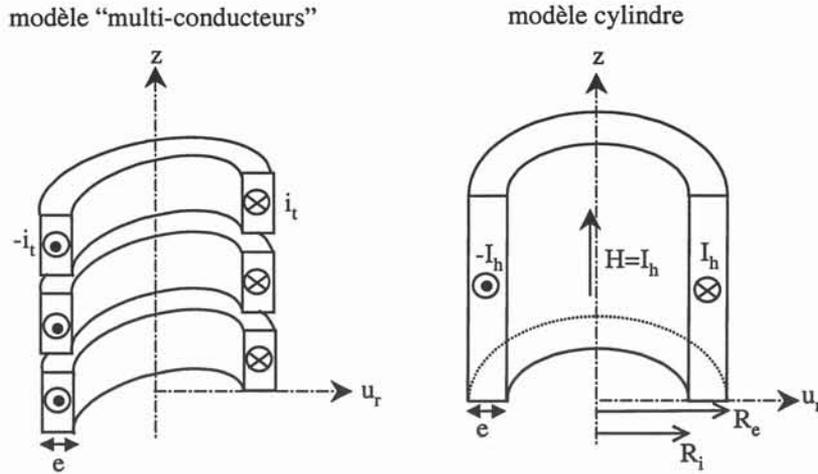


Figure V-2 : Modèles « multi-conducteurs » et cylindre infiniment long.

Les bobines supraconductrices présentées dans ce chapitre étant réalisées à partir de fils de section rectangulaire (Figure V-2) semblables à ceux présentés chapitre IV, ce modèle de cylindre n'est, à priori, pas trop éloigné de la réalité (ceci sera discuté à la fin du chapitre). Ce serait beaucoup moins vrai avec des fils de section circulaire.

Ce modèle utilise le modèle de Bean ; il ne sera donc pas utilisable pour des courants supérieurs à I_c , alors qu'en pratique, comme N n'est pas infini, on peut dépasser ce courant critique.

V.B.1.b Hypothèse sur le couplage des filaments

Dans le chapitre précédent, les filaments étaient supposés couplés magnétiquement. Dans ce chapitre, les fils sont soumis à des champs magnétiques transverses ou longitudinaux. Les filaments sont alors couplés électriquement par la matrice en argent. Pour comprendre ce phénomène, il suffit de regarder, en champ extérieur, la répartition du courant dans deux filaments supraconducteurs. Ils sont supposés très longs par rapport à leur largeur et sont entourés ou non d'une matrice en argent (Figure V-3).

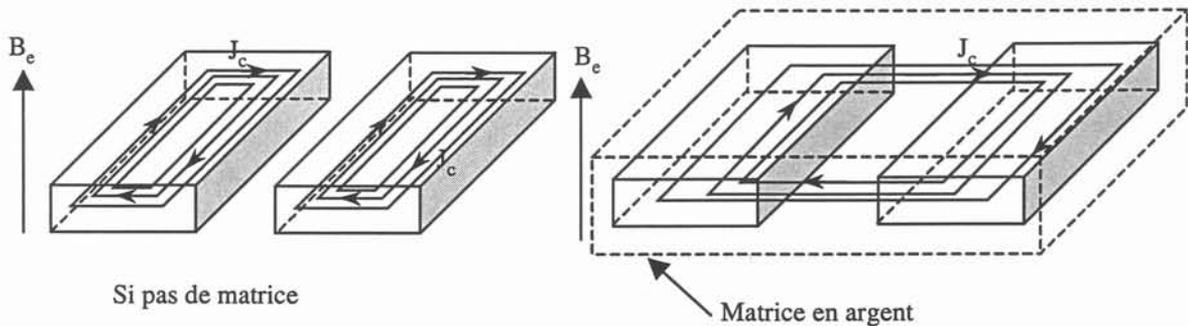


Figure V-3 : Couplage par une matrice en argent.

Si le champ magnétique est très supérieur au champ de pénétration, en l'absence de matrice, les deux filaments ont des comportements indépendants l'un de l'autre. Si il y a une matrice, des courants peuvent se développer dans celle-ci. Ils parcourent alors les filaments

supraconducteurs et se bouclent dans la matrice (Figure V-3). Ils traversent donc la matrice sur une très petite longueur, mais dans une grande section. La conductivité de l'argent est de $4.10^8 \Omega^{-1}.m^{-1}$ à 77 K. La constante de temps d'amortissement de ces courants est, si les filaments ne sont pas « twistés », proportionnelle à la longueur du conducteur divisée par la résistivité de l'argent. Elle est alors de plusieurs heures et l'amortissement est négligeable à 50 Hz. Si les filaments sont « twistés », la longueur à prendre en compte est celle du pas de torsadage. Si celle-ci est assez faible, il peut y avoir amortissement des courants donc découplage des filaments. Dans ce chapitre, les filaments sont supposés non torsadés donc parfaitement couplés ; ils se comportent alors comme un seul gros filament.

V.B.1.c Répartition des grandeurs électromagnétiques

A partir du modèle précédent, on peut déterminer les répartitions des différentes grandeurs électromagnétiques dans le cylindre (Figure V-4) si celui-ci est parcouru par un courant $I_h = I_{hM}\sin(\omega t)$ où I_h est la valeur instantanée du courant par unité de hauteur.

Pour cela, on utilise les principes énoncés paragraphe au V.B.1.a et déjà utilisés chapitre I (exemple d'un cylindre infiniment long en champ extérieur).

Lors de la première montée de courant (entre 0 et I_{hM}), le champ magnétique est nul à l'extérieur du cylindre et proportionnelle au courant à l'intérieur. D'après la loi de Lenz, des courants se développent à l'intérieur du cylindre pour écranter ce champ magnétique. La densité de ces courants ne peut être égale qu'à J_c (loi de Bean). Les équations de Maxwell permettent alors de déterminer, entre autre, la forme du champ magnétique, qui décroît linéairement lorsque l'on s'écarte du centre du cylindre. Lorsque $I_h(t)=I_{hM}$, le courant atteint un rayon r_{pmax} .

Le régime permanent est atteint dès la première descente du courant. Lors des diminutions du courant, sa densité évolue de J_c à $-J_c$ de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre, ceci jusqu'à atteindre r_{pmax} . Inversement, lorsque le courant augmente, sa densité évolue de $-J_c$ à J_c également de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre.

Pour la suite (bobine deux couches), les répartitions du courant et des autres grandeurs électromagnétiques se déterminent avec les mêmes principes.

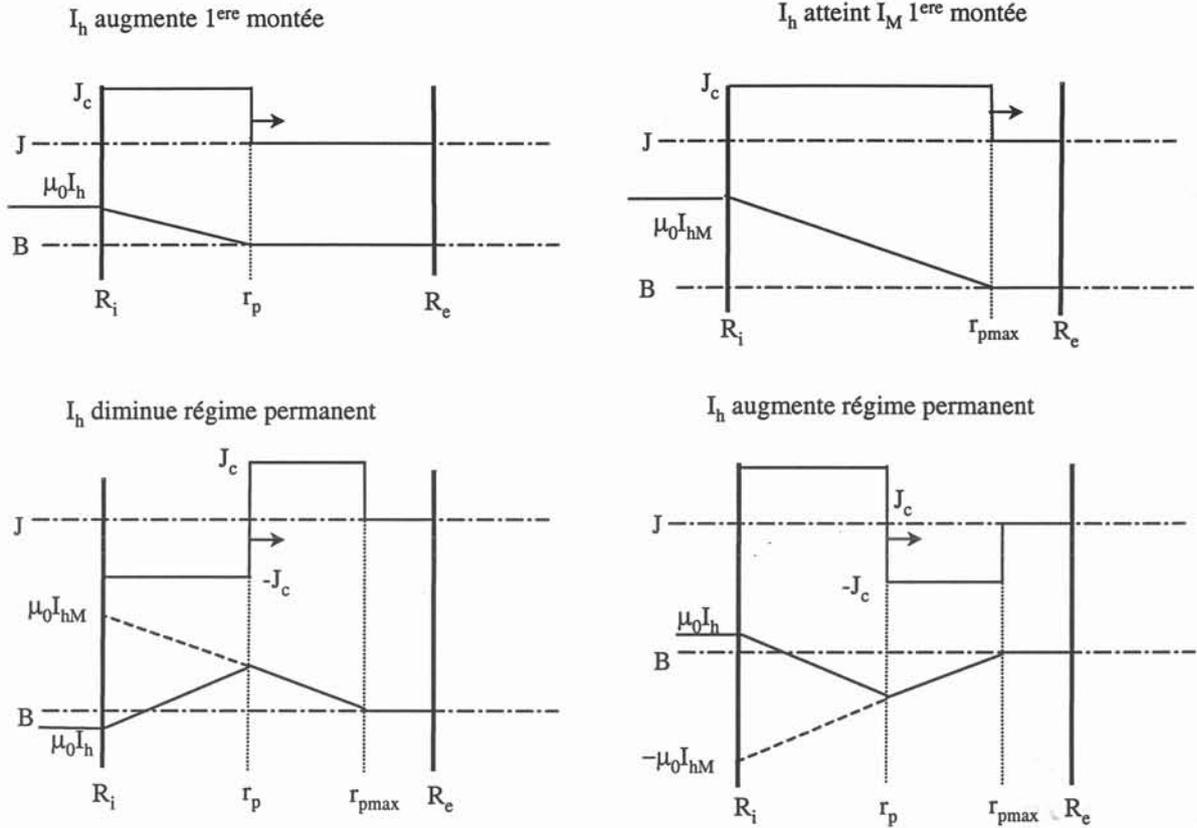


Figure V-4 : Répartition de J, E et B dans une bobine mono-couche.

Les équations mathématiques des répartitions de J, E et B sont présentées annexe 2.

V.B.1.d Calcul des pertes instantanées et moyennes

Les pertes volumiques instantanées dans la bobine peuvent se calculer de deux façons. Pour une hauteur b de cylindre, on peut déterminer :

- la puissance active instantanée consommée dans la bobine :

$$p_c(t) = \int_{r_i}^{r_p} \int_0^{2\pi} \int_0^b E \cdot J \cdot r \cdot \partial r \cdot \partial \theta \cdot \partial z \quad (\text{V.1})$$

$p_c(t)$ représente donc les pertes pour une spire de hauteur b .

- la puissance active instantanée fournie par la source :

$$p_f(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{V.2})$$

Ou $v(t)$ est la tension aux bornes la bobine, on montrera paragraphe V.C.2.a que :

$$p_f(t) = 2\pi \cdot R_i \cdot E(R_i) \cdot b \cdot I_{hM} \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{V.3})$$

On trouve alors :

$$p_c(t) = -\pi \cdot b \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t \cdot \left[\frac{2r_p^3}{3} - R_i \cdot r_p^2 + \frac{d^3}{3} \right] \quad (\text{V.4})$$

$$p_f(t) = \pi \cdot b \cdot R_i \cdot \mu_0 \cdot I_{hM}^2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{r_p^2}{R_i} - R_i \right) \quad (V.5)$$

avec $r_p = \frac{1}{2J_c} I_{hM} \left(1 - \varepsilon \left(\frac{dI_h}{dt} \right) \sin \omega t \right) + R_i$ et $\varepsilon = \text{signe} \left(\frac{dI_h}{dt} \right)$.

Même si les puissances instantanées fournies par le générateur et consommées dans la bobine ne sont pas les mêmes (Figure V-5), puisqu'il y a en permanence stockage/déstockage d'énergie dans le conducteur de la bobine, les puissances actives moyennes sont bien évidemment égales :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{4}{3T} \pi \cdot b \cdot \mu_0 \left[\frac{R_i \cdot I_{hM}^3}{J_c} + \frac{I_{hM}^4}{2 \cdot J_c^2} \right] \quad (V.6)$$

Donc, si l'on considère une bobine réelle, on a, pour une spire de hauteur b parcourue par un courant $i(t) = \hat{I}_t \sin(\omega t)$:

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{4}{3T} \pi \cdot \mu_0 \cdot \left[\frac{R_i \cdot \hat{I}_t^3}{J_c \cdot b^2} + \frac{\hat{I}_t^4}{2 \cdot J_c^2 \cdot b^3} \right] \quad (V.7)$$

où \hat{I}_t est la valeur maximale du courant de transport.

Les formes des pertes en fonction du temps sont présentées Figure V-5 pour une spire appartenant à une bobine infinie ayant les paramètres suivants :

- $J_c = 40 \text{ A/mm}^2$
- $R_i = 29.85 \text{ mm}$
- Largeur des conducteurs : $e = 0.254 \text{ mm}$
- Hauteur des conducteurs : $b = 2.54 \text{ mm}$
- $I_t = I_c \sin \omega t = 27.4 \sin \omega t$

Les pertes actives valent dans les deux cas 0.52 mW.

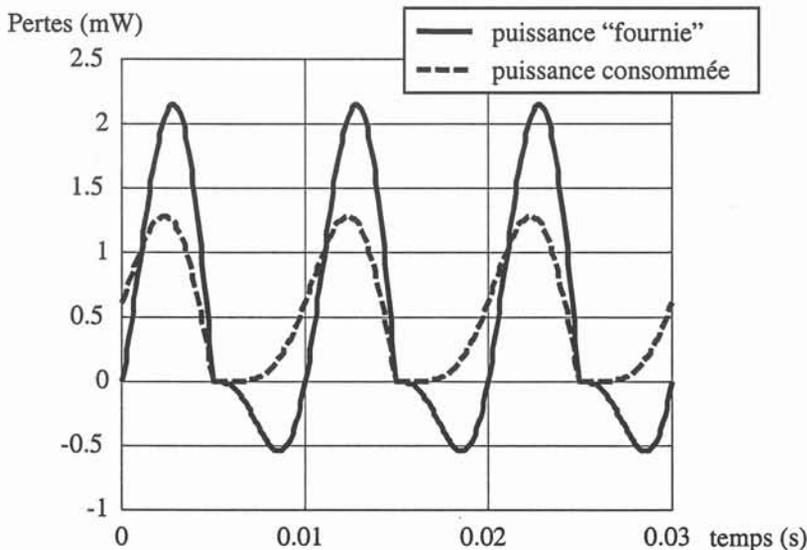


Figure V-5 : Pertes instantanées dans un cylindre creux.

V.B.2 Bobine deux couches avec couche externe seule alimentée

V.B.2.a Modèle

Les formules présentées dans ce paragraphe ont toutes été utilisées dans le paragraphe V.D pour être comparées aux calculs numériques et aux mesures.

Si l'on suppose une bobine possédant deux couches de fil supraconducteurs dont la couche interne n'est pas alimentée, on peut modéliser ce dispositif par deux cylindres concentriques. La couche extérieure étant exactement dans la même situation que si elle est seule, les répartitions de J , E , B et la valeur des pertes sont celles déterminées au paragraphe V.B.1. Les formules présentées ci-après ne concernent donc que la couche intérieure. Il faut y ajouter les pertes dans la couche extérieure pour avoir la totalité de la puissance dissipée dans la bobine. La couche intérieure est soumise à un champ magnétique $H_e = I_h$ à l'extérieur et à l'intérieur. Bien que non parcourue par un courant de transport, cette dernière voit néanmoins des courants se développer dans ses spires et est donc le siège de pertes.

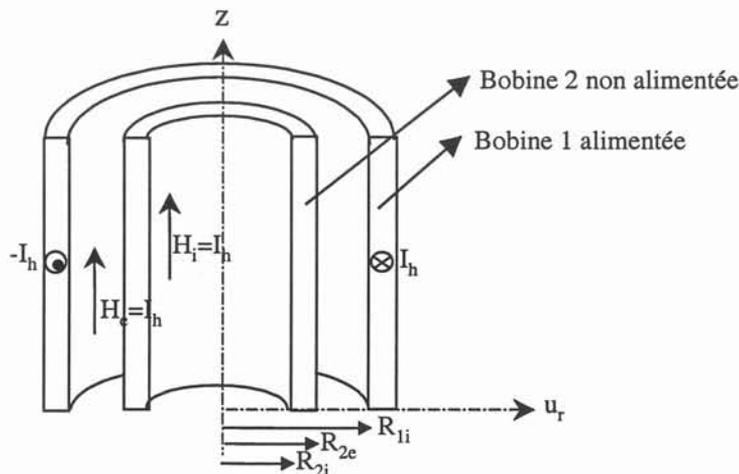


Figure V-6 : Modèle bobine deux couches alimentées.

Dans cette partie, seules sont présentées les valeurs instantanées des pertes car les pertes moyennes donnent des formules très longues et compliquées. Lorsque le calcul de ces pertes a été utile, elles ont été calculées numériquement avec un logiciel tel que MATLAB.

V.B.2.b Répartition des grandeurs électromagnétiques et pertes instantanées

Il faut distinguer deux cas suivant que la couche intérieure entre ou non en pénétration complète (densité de courant présente partout dans la couche). Cette condition peut s'exprimer en fonction de la valeur du courant de transport par unité de hauteur I_h ; si la valeur maximale de ce courant est toujours inférieure à une certaine valeur I_{hp} , il n'y a jamais pénétration complète, si elle est supérieure, il y a pénétration complète pendant une partie du temps. On trouve :

$$I_{hp} = \frac{e \cdot J_c}{2} \quad (\text{V.8})$$

V.B.2.b.i Si la bobine 2 est en pénétration complète ($I_{hM} > I_{hp}$)

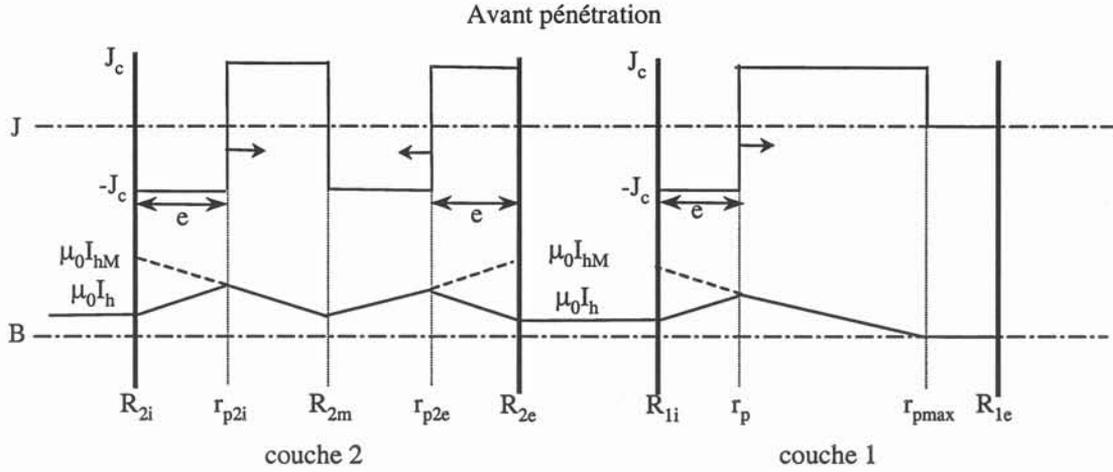


Figure V-7 : J , E et B avant pénétration dans une bobine deux couches si la couche intérieure est non alimentée et entre en pénétration complète.

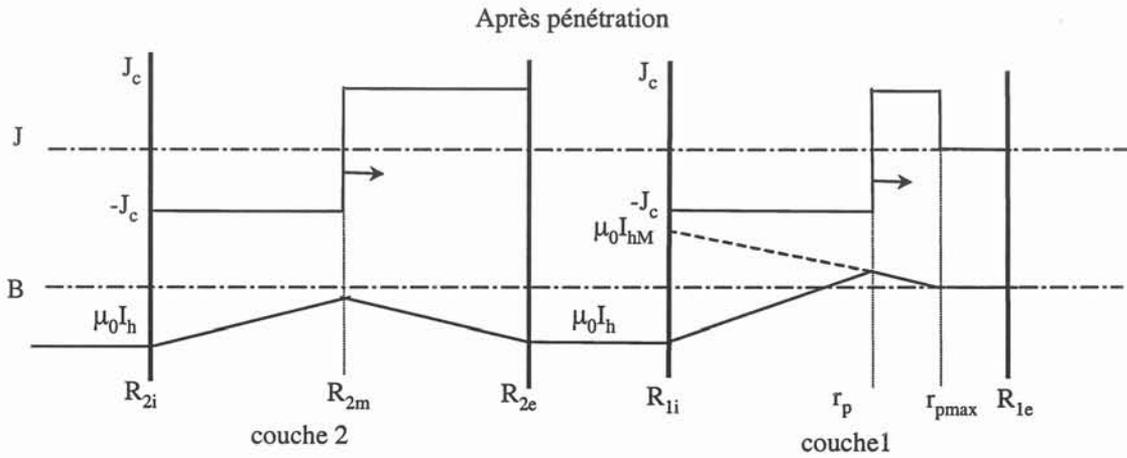


Figure V-8 : J , E et B après pénétration dans une bobine deux couches si la couche intérieure est non alimentée et entre en pénétration complète.

Les pertes instantanées dans la bobine intérieure pour une hauteur b , si le cylindre extérieur est parcouru par un courant $I_h = I_{hM} \sin(\omega t)$ ont pour valeur :

Avant pénétration : $\frac{T}{4} + k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p$ avec $t_p = k \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} a \sin\left(\frac{J_c e}{I_M} - 1\right)$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$p(t) = \varepsilon \pi b \mu_0 \omega \cos \omega t J_c \left(\frac{2}{3} (r_{p2i}^3 + r_{p2e}^3) - (R_{2i} r_{p2i}^2 + R_{2e} r_{p2e}^2) + \frac{1}{3} (R_{2i}^3 + R_{2e}^3) \right) \quad (V.9)$$

Avec $r_{p2i} = R_{2i} + \frac{I_{hM} (1 + \varepsilon \sin \omega t)}{2J_c}$ et $r_{p2e} = R_{2e} - \frac{I_{hM} (1 + \varepsilon \sin \omega t)}{2J_c}$

où $\varepsilon = \text{signe} \left(\frac{dI_h}{dt} \right)$

Après pénétration $t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + (k+1)\frac{T}{2}$

$$p(t) = \varepsilon \pi b \mu_0 \omega \cos \omega t J_c \left(\frac{-2}{3} R_{2m}^3 + \frac{1}{3} (R_{2i}^3 + R_{2e}^3) \right) \quad (\text{V.10})$$

V.B.2.b.ii Si la bobine 2 n'est pas en pénétration complète

Bien que les répartitions de J et B ne soient pas totalement identiques, la formule des pertes instantanées est exactement la même que dans le cas précédent avant pénétration complète.

V.B.3 Bobine deux couches avec deux couches alimentées et en série magnétiquement (leurs flux s'ajoutent)

V.B.3.a Modèle

Si les deux couches sont alimentées, la bobine extérieure est exactement dans la même situation que si elle était seule. La bobine intérieure est soumise à un champ magnétique $H_e = I_h$ à l'extérieur et à un champ magnétique $H_i = 2I_h$ à l'intérieur.

V.B.3.b Répartition des grandeurs électromagnétiques et pertes instantanées

De même qu'au paragraphe V.B.3.a, si la valeur maximale du courant est toujours inférieure à une certaine valeur I_{hp} il n'y a jamais pénétration complète. Si elle est supérieure, il y a pénétration complète pendant une partie du temps. On trouve :

$$I_{hp} = \frac{e J_c}{3} \quad (\text{V.11})$$

V.B.3.b.i Si la bobine 2 est en pénétration complète ($I_{hM} > I_{hp}$).

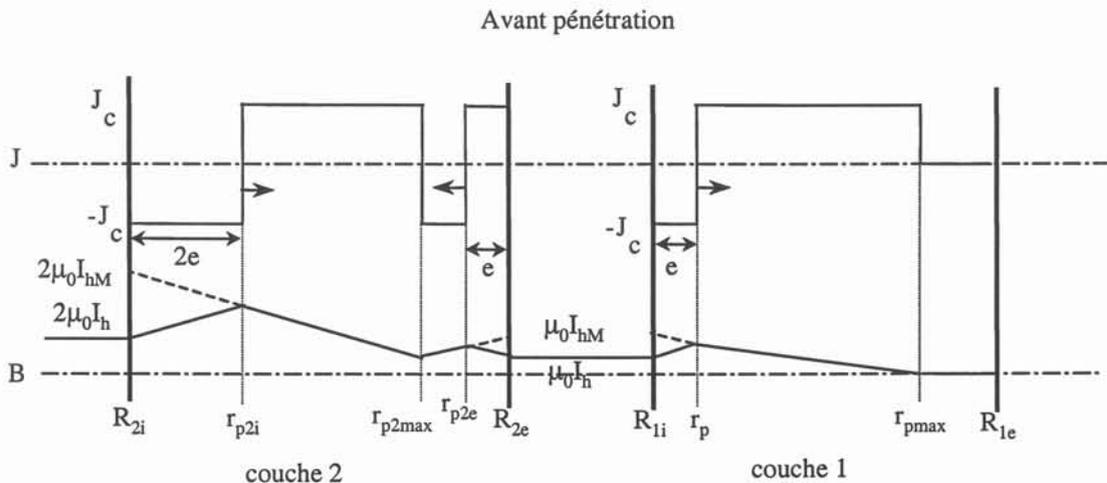


Figure V-9 : J , E et B dans une bobine deux couches si la couche intérieure est alimentée et entre en pénétration complète, avant pénétration.

Après pénétration

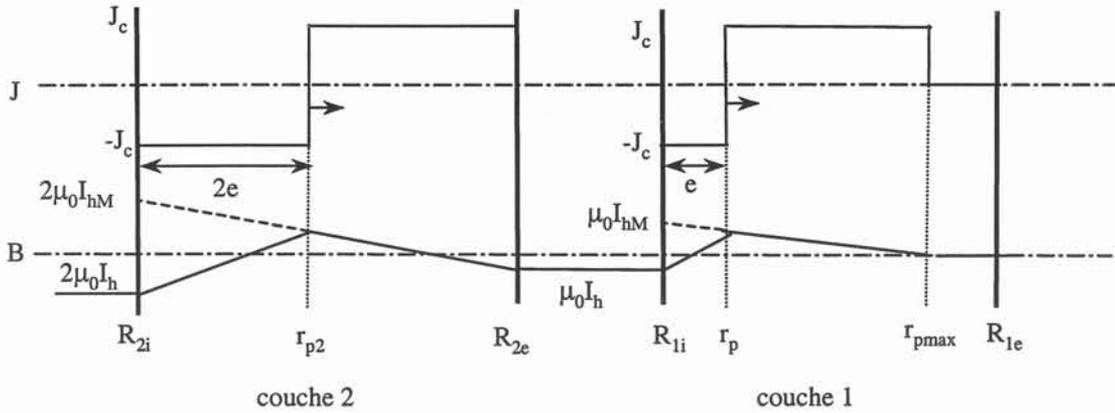


Figure V-10 : J , E et B dans une bobine deux couches si la couche intérieure est alimentée et entre en pénétration complète, après pénétration.

Les pertes instantanées dans la bobine intérieure pour une hauteur b , si les deux bobines sont parcourues par un courant $I_h = I_{hM} \sin(\omega t)$ ont pour valeur :

Avant pénétration : $\frac{T}{4} + k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p$ avec $t_p = k \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} a \sin\left(\frac{J_c e}{I_M} - 2\right)$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$p(t) = \varepsilon \pi b \mu_0 \omega \cos \omega t J_c \left(\frac{2}{3} (2r_{p2i}^3 + r_{p2e}^3) - (2R_{2i} r_{p2i}^2 + R_{2e} r_{p2e}^2) + \frac{1}{3} (2R_{2i}^3 + R_{2e}^3) \right) \quad (\text{V.12})$$

Avec $r_{p2i} = R_{2i} + \frac{I_{hM} (1 + \varepsilon \sin \omega t)}{J_c}$ et $r_{p2e} = R_{2e} - \frac{I_{hM} (1 + \varepsilon \sin \omega t)}{2J_c}$

où $\varepsilon = \text{signe}\left(\frac{dI_h}{dt}\right)$

Après pénétration : $t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + (k+1) \frac{T}{2}$

$$p(t) = \varepsilon \pi b \mu_0 \omega \cos \omega t J_c \left(2r_{p2}^3 - r_{p2}^2 (R_{2i} + R_{2e}) + \frac{1}{3} (2R_{2i}^3 + R_{2e}^3) \right) \quad (\text{V.13})$$

Avec $r_{p2} = R_{2m} - \varepsilon \frac{I_{hM} \sin \omega t}{2J_c}$

V.B.3.b.ii Si la bobine 2 n'est pas en pénétration complète

Comme dans le cas où la bobine interne est non alimentée, la formule des pertes instantanées est la même paragraphe V.B.2.b.i avant pénétration complète.

V.C METHODE ELECTRIQUE DE MESURE DE PERTES

V.C.1 Problématique

Les problèmes pour la mesure des pertes dans une bobine supraconductrice sont sensiblement les mêmes que ceux dans un fil (voir chapitre IV). La tension est beaucoup moins faible qu'aux bornes d'un fil de quelques centimètres ; par contre, elle est bien évidemment encore plus inductive. La compensation de la composante inductive devient indispensable.

Le principe de la mesure de pertes et le schéma sont exactement identiques pour une bobine et pour un fil. A savoir, si le courant est sinusoïdal, compensation par une bobine mutuelle puis mesure de la valeur efficace du fondamental de la composante de tension en phase avec le courant par l'intermédiaire d'une détection synchrone.

De même que pour un fil, il faut s'interroger sur ce que mesure un voltmètre placé aux bornes d'une bobine supraconductrice notamment en fonction de l'emplacement des prises de potentiels. Ce problème est traité dans ce qui suit pour une bobine mono-couche et pour une bobine deux couches, dans les cas où la couche interne est alimentée ou non.

V.C.2 Mesure de tension en fonction de l'emplacement des prises de potentiels

V.C.2.a Cas d'une bobine mono-couche

Supposons une spire supraconductrice (Figure V-11) appartenant à une bobine infiniment longue. Le champ magnétique à l'intérieur est alors axial, le champ électrique est orthoradial et tous deux ne dépendent que de r . De plus, le champ magnétique à l'extérieur étant alors nul, l'emplacement des fils n'a aucune importance ; pratiquement, ils seront collés à la bobine pour éviter d'embrasser un flux parasite.

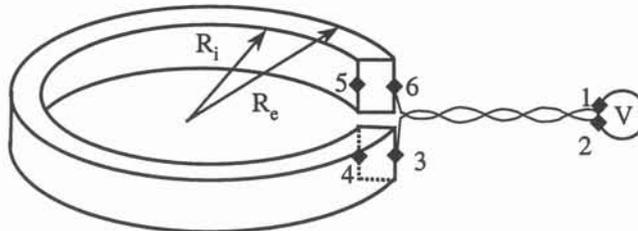


Figure V-11 : Emplacement des prises de potentiels aux bornes d'une spire.

On montre (annexe 1), de même que pour un fil, que, quel que soit l'emplacement des prises de potentiels (3 et 6 ou 4 et 5), on mesure la même tension aux bornes de la spire et qu'elle est égale à :

$$v = E(R_i) \times 2\pi \cdot R_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (\text{V.14})$$

avec ϕ_i le flux à l'intérieur de la spire, qui est parfaitement en quadrature avec le courant, avec nos hypothèse (bobine infiniment longue).

En fait, dans le cas d'un solénoïde comportant N spires, on mesure :

$$v = E(R_i).L + N \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (V.15)$$

où L est la longueur effective de fil et N le nombre de spires.

Pour s'assurer que cette tension est bien représentative des pertes, nous avons vérifié sur des exemples que les pertes calculées par v.i et par $\iiint E.J$ étaient effectivement identiques.

V.C.2.b Cas d'une bobine deux couches

V.C.2.b.i Si la couche interne est alimentée

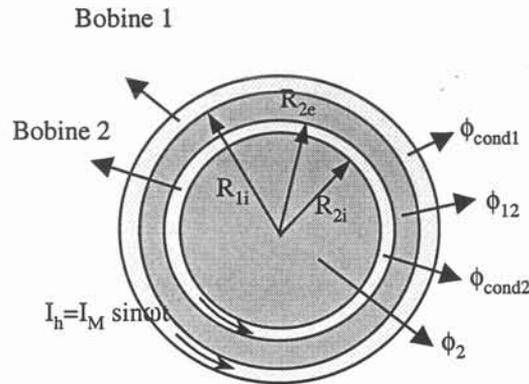


Figure V-12 : Bobine deux couches avec deux couches alimentées.

Dans notre cas, nous avons à notre disposition une bobine possédant deux couches indépendantes dont chaque extrémité était disponible. De façon à ne pas mesurer les pertes dans les connexions entre ces bobines, il est nécessaire, même si les deux couches sont en série, de mesurer séparément la tension aux bornes de chacune d'elles.

Un voltmètre placé aux bornes de la bobine 1 (Figure V-12) de longueur intérieure L_{1i} et possédant N_1 spires, mesure :

$$v_1 = L_{1i} \cdot E_1(R_{1i}) + N_1 \cdot \frac{\partial(\phi_{12} + \phi_{cond2} + \phi_2)}{\partial t} \quad (V.16)$$

donc on montre, par des considérations similaires à celle du cas mono-couche (annexe 1) que :

$$v_1 = L_{1i} \cdot E_1(R_{1i}) + L_{2i} \cdot E_2(R_{2i}) - L_{2e} \cdot E_2(R_{2e}) + N_1 \cdot \frac{\partial \phi_{12}}{\partial t} + N_1 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (V.17)$$

Un voltmètre placé aux bornes de la couche 2 (Figure V-12), de longueur intérieure L_{2i} , de longueur extérieure L_{2e} et possédant N_2 spires, mesure :

$$v_2 = L_{2i} \cdot E_2(R_{2i}) + N_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (V.18)$$

Cependant, il est important de noter que v_1 ne représente pas les pertes dans la couche extérieure seule et que v_2 ne représente pas les pertes dans la couche intérieure seule ; en pratique, il est donc impossible de séparer ces pertes à partir des mesures de ces tensions.

Les pertes dans la couche extérieure sont représentées par :

$$v_e = L_{1i} \cdot E_1(R_{1i}) \quad (\text{V.19})$$

Les pertes dans la couche intérieure sont représentées par :

$$v_i = 2L_{2i} \cdot E_2(R_{2i}) - L_{2e} \cdot E_2(R_{2e}) \quad (\text{V.20})$$

Le fait que ces grandeurs représentent bien les pertes dans les couches intérieure et extérieure a été vérifié en comparant les pertes calculées par v_i et par $\iiint E \cdot J$ sur des exemples qui montrent qu'elles sont parfaitement identiques.

La tension totale mesurée qui, elle, représente bien la totalité des pertes dans les couches 1 et 2 est donc :

$$v = L_i \cdot E_1(R_{1i}) + 2L_{2i} \cdot E_2(R_{2i}) - L_{2e} \cdot E_2(R_{2e}) + N_1 \cdot \frac{\partial \phi_{12}}{\partial t} + (N_1 + N_2) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad (\text{V.21})$$

V.C.2.b.ii Si la couche interne n'est pas alimentée

Les indications des voltmètres sont les mêmes que précédemment ; cependant, elles n'ont pas la même signification. La tension v_1 permet de calculer les pertes dans l'ensemble des deux couches, alors que v_2 représente les pertes dans la moitié intérieure de la bobine 2.

V.D ETUDE D'UNE BOBINE DEUX COUCHES REELLE

Ce paragraphe présente une comparaison entre les valeurs moyennes des pertes mesurées, calculées avec le modèle présenté précédemment et déterminées par simulation numérique, ceci sur l'exemple d'une bobine dont les caractéristiques sont présentées Tableau V-1. Il faut noter que lorsque la couche extérieure est alimentée, les caractéristiques de la couche intérieure et notamment sa densité de courant critique sont légèrement dégradées (voir chapitre I). Ceci est une manière « globale » de prendre en compte la dépendance $J_c(B)$: J_c est plus faible que lorsque la bobine est seule (car l'induction est plus grande) mais reste quand même constant dans le conducteur quelle que soit la valeur de l'induction.

La bobine étudiée est constituée de fils OPIT de Bi-2223 dont les filaments ne sont pas « twistés ». Nous tenons à remercier EDF-DRD et plus particulièrement M. Arnaud Ansart pour nous l'avoir prêtée.

	Nombre de spires	Diamètre intérieur	Section des spires	J_c à $E_c=1\mu\text{V/cm}$	N
couche extérieure	172	59.5 mm	$0.254 \times 2.54 \text{ mm}^2$	40 A/mm^2	13.1
couche intérieure	175	60.05 mm	$0.254 \times 2.54 \text{ mm}^2$	41.5 A/mm^2 (1) 39.5 A/mm^2 (2)	14.7

(1) si la bobine extérieure ou la bobine intérieure ne sont pas alimentées

(2) si les deux bobines sont alimentées et parcourue par le même courant

Tableau V-1 : Bobine deux couches expérimentale.

Les géométries utilisées dans les simulations (modèle multi-conducteurs ou cylindre infini) sont présentées Figure V-13. Pour des raisons de symétrie, dans le cas multi-

conducteurs, si on considère une bobine infiniment longue, on peut, en axisymétrie, ne simuler que une demie section de conducteur. Par contre, simuler la bobine réelle nécessiterait une géométrie comportant 86 spires (la moitié de la bobine). Le problème est alors trop long à résoudre.

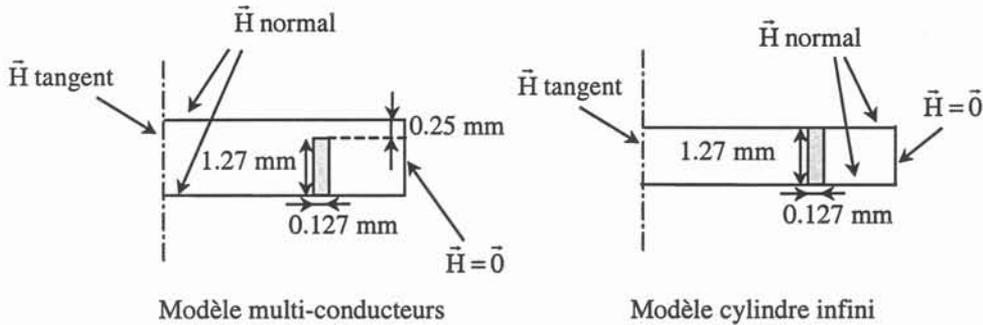


Figure V-13 : Modèles de simulations.

Dans tout ce qui suit, les courbes représentent les pertes divisées par le nombre de spires (172). Donc, dans le cas des pertes totales pour une bobine deux couches, les courbes montrent les pertes dans une spire de la bobine extérieure plus celles dans une spire de la bobine intérieure.

V.D.1 Couche interne seule alimentée

Ce paragraphe propose une comparaison entre les valeurs des pertes mesurées, calculées par le modèle analytique (cas mono-couche) et simulées dans le cas d'un cylindre infini, et le cas d'un solénoïde infini mais multi-conducteurs (conducteur bobiné Figure V-2). Ceci a permis d'étudier l'influence d'un N non infini en comparant les modèles analytique et numérique pour un cylindre. L'influence d'un modèle de cylindre comparé à un modèle multi-conducteurs a également pu être déterminée.

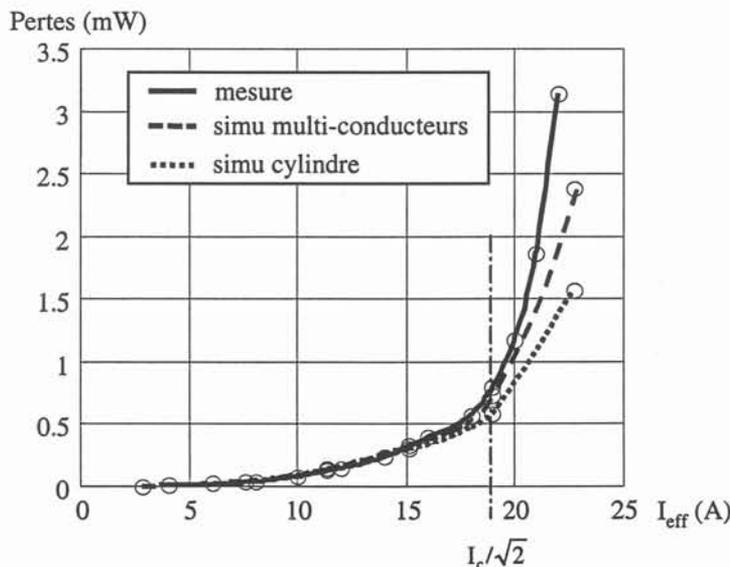


Figure V-14 : Pertes moyennes dans une spire pour la bobine intérieure seule.

La courbe analytique n'est pas représentée Figure V-14 mais est parfaitement confondue avec celle d'un cylindre infini, du moins jusqu'à I_c puisque, au-delà, le modèle analytique ne s'applique plus. Ceci montre que l'influence d'un N non infini ($N=14.7$) est dans ce cas négligeable.

On peut voir également que, dès que la valeur efficace du courant de transport dépasse 15 A, les modèles numérique et analytique donnent des valeurs assez éloignées des valeurs mesurées. Cette différence peut avoir plusieurs explications :

- ces modèles ne tiennent pas compte de la dépendance $J_c(B)$ de façon locale. Pour un courant égal à I_c , le champ magnétique est de 6 mT. La dégradation de J_c commence donc à être de l'ordre de 1 ou 2 A même en champ longitudinal (voir chapitre I). Or les simulations montrent que diminuer J_c , même de façon global, de 1 ou 2 Ampères peut, au delà de I_c , augmenter les pertes de l'ordre de plusieurs dizaines de %.
- ces modèles reposent sur des géométries infinies et donc négligent le fait que les spires des extrémités sont soumises à un champ transverse, donc ont beaucoup plus de pertes que celles du centre (chapitre III).
- pour nos expériences, la bobine est refroidie simplement par un bain d'azote. Les puissances à évacuer étant relativement importantes (500 mW pour toute la bobine), il est possible que celle-ci chauffe légèrement. Or, à 77 K, la dégradation de J_c est rapide avec la température, de l'ordre de 4 Ampères par K ([V-2]), et notre modèle numérique ne prend pas ce phénomène en compte.

Ces hypothèses deviennent d'autant plus sensibles que le champ magnétique est important, ce qui explique que les écarts entre théorie et mesure augmentent quand le courant (donc le champ magnétique à l'intérieur de la bobine) augmente.

V.D.2 Deux couches alimentées

Le cas où les deux bobines sont alimentées et traversées par le même courant est présenté ci-après.

La Figure V-15 montre les pertes dans chacune des bobines déterminées de façon analytique et numérique mais, pour les raisons exposées précédemment, la comparaison avec les mesures ne peut se faire que sur les pertes globales (Figure V-16). Dans ce cas, le courant critique de la bobine intérieure est de 39.5 A/mm^2 au lieu de 41.5 A/mm^2 quand elle est seule alimentée.

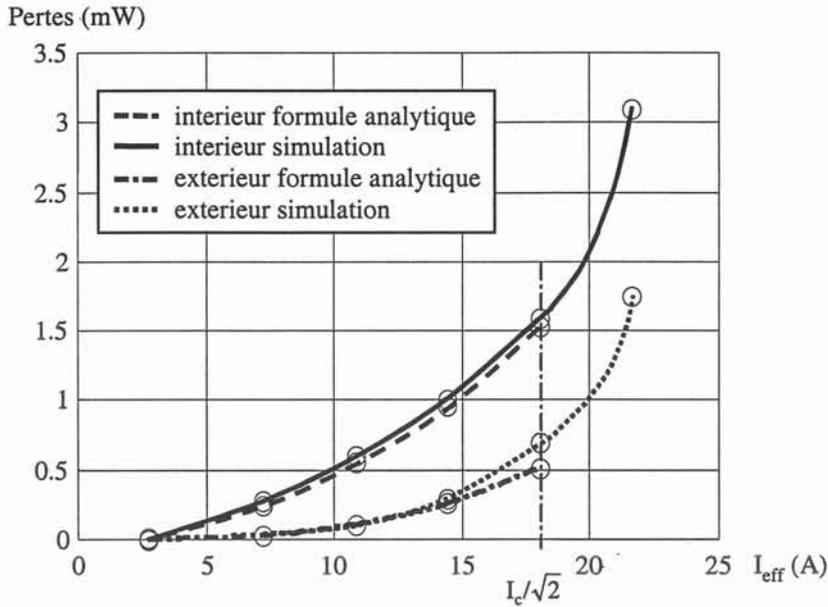


Figure V-15 : Pertes moyennes dans une spire pour les couches extérieure et intérieure.

Il faut remarquer sur la Figure V-15 que les pertes calculées par le modèle numérique multi-conducteurs sont très proches de celles fournies par le modèle analytique. Ceci est d'ailleurs encore plus vrai sur la couche intérieure que sur la couche extérieure, où les deux courbes s'éloignent lorsque l'amplitude du courant se rapproche de $I_c/\sqrt{2}$. En effet, la couche intérieure est très vite en pénétration complète; donc les grandeurs électromagnétiques ont des répartitions très proches de celles dans un cylindre infini (Figure V-1).

Les pertes dans la couche intérieure sont très supérieures à celles dans la couche extérieure puisque celle-ci soumet la couche intérieure à un champ magnétique (voir V.B.3.b).

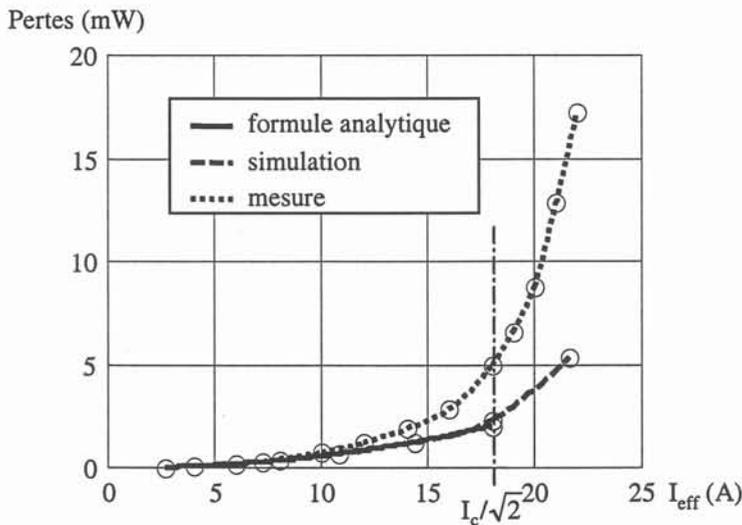


Figure V-16 : Somme des pertes moyennes dans une spire pour les bobines intérieure et extérieure.

On remarque (Figure V-16) un écart important entre les modèles théoriques et la mesure (jusqu'à plusieurs centaines de pourcents au delà de 15 A). Les raisons de cet écart sont a priori les mêmes que dans le cas d'une bobine seule, mais sont en plus « amplifiées » :

- comme il y a deux couches alimentées, la couche intérieure subit un champ magnétique deux fois plus important que si elle est seule (de l'ordre de 12 mT à I_c). La dépendance de $J_c(B)$ devient très importante (I_c diminue de 12 A en champ transverse et 3 A en champ longitudinal, voir courbe chapitre I).
- la bobine intérieure entre en pénétration complète dès que la valeur efficace du courant de transport est supérieure à $I_c/3 = 6A$ or, comme dans une bobine monocouche, au delà de la pénétration complète, une diminution de 1 à 2 Ampères du courant critique amène une augmentation de plusieurs dizaines de pourcents des pertes. L'échauffement, lui aussi, est beaucoup plus important que si on a une seule couche (2 Watts à évacuer sur toute la bobine)

V.D.3 Couche interne non alimentée

Les Figure V-17 et Figure V-19 présentent les pertes dans le cas où seule la couche extérieure est alimentée. La couche intérieure est néanmoins sujette à des pertes. La Figure V-17 présente les pertes dans chaque couche déterminées de façon analytique et numérique. La Figure V-18 donne les valeurs expérimentales des pertes mesurées dans chaque bobine lorsqu'elles sont seules à être alimentées. Enfin la Figure V-19 les pertes totales comparées à celles mesurées.

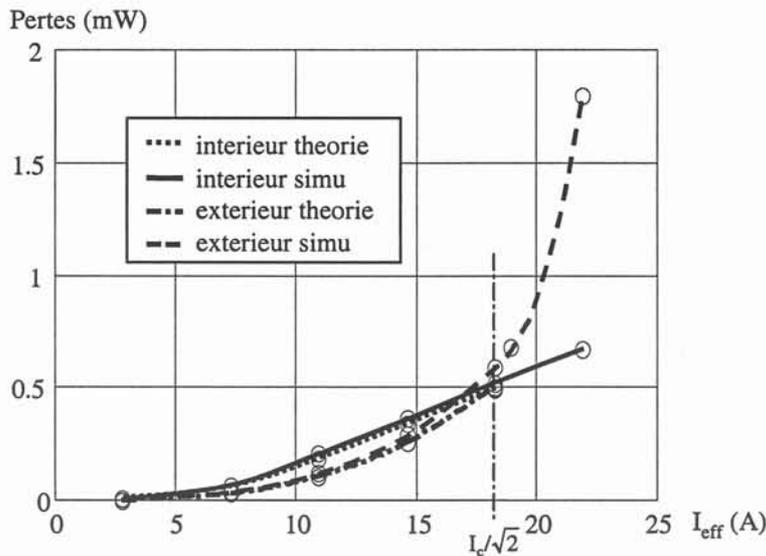


Figure V-17 : Pertes moyennes dans une spire pour les couches extérieure et intérieure.

Le peu d'écart (même proche de I_c) entre les courbes pour la couche intérieure s'explique de la même façon que précédemment (répartition identique des grandeurs électromagnétiques dans les cas « multi-conducteurs » et cylindre infini).

Les pertes dans la couche intérieure (non alimentée) sont toujours au moins égales à celles dans la couche extérieure alimentée. Les pertes totales vont être plus que doublées par rapport au cas où la couche est seule. On vérifie expérimentalement (Figure V-18), en comparant la valeur des pertes dans les couches intérieure et extérieure lorsqu'elles sont seules à être alimentées, qu'il y a effectivement des pertes importantes dans la couche non

alimentée. La différence entre les pertes dans les couches extérieure et intérieure est en effet du même ordre de grandeur que les pertes dans la couche intérieure. Ce qui ne peut pas s'expliquer uniquement par les très légères différences de leur courant critique, et de leur N.

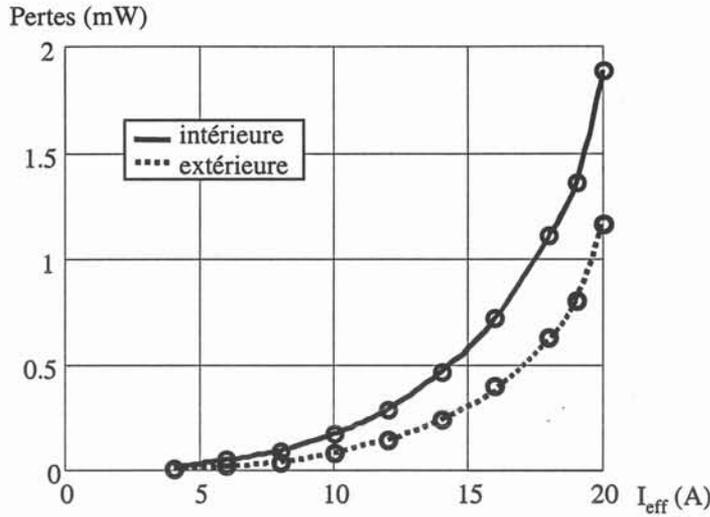


Figure V-18 : Pertes mesurées dans les bobines intérieure et extérieure alimentées séparément.

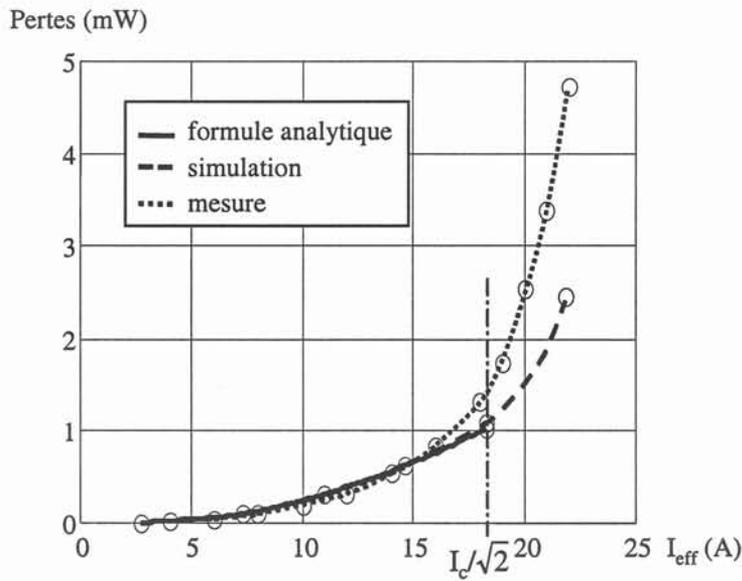


Figure V-19 : Somme des pertes moyennes dans une spire pour les couches intérieure et extérieure.

La Figure V-19 montre que, dans ce cas, les formules théoriques et les mesures sont, pour des courants inférieur à la valeur efficace du courant critique, en bon accord. Cependant, il faut noter que les mesures et la théorie ne progressent pas selon la même loi de puissance de I, probablement du fait de la dépendance J_c de B ou de T.

Pour I supérieur à I_c , pour les raisons évoquées précédemment, les pertes mesurées sont, dans ce cas aussi, plus grandes que les pertes calculées analytiquement.

V.E CONCLUSION

Le modèle analytique proposé en début de chapitre donne de bons résultats sur une bobine mono-couche ou une bobine deux couches avec la couche interne non alimentée. Son application est cependant limitée à des courants inférieurs à I_c . De plus, des écarts interviennent dès qu'il y a deux couches alimentées. Les études numériques sur des géométries infinies montrent que le fait de considérer des couches « multi-conducteurs » ne suffit pas à donner des valeurs proches des mesures. Dans beaucoup de cas, les pertes données par ce modèle ne sont que de quelques pourcents supérieures à celle données par le modèle analytique, alors que les écarts avec les mesures peuvent parfois atteindre plusieurs dizaines de pourcents. Par contre, ce modèle est applicable même au delà de I_c .

Il semble assez raisonnable de supposer que ces modèles sont donc valables pour des champs magnétiques faibles et que l'hypothèse d'un J_c indépendant de la température et de l'induction magnétique amène des différences dès que le champ magnétique augmente.

D'un point de vue analytique, il est difficile d'améliorer le modèle car, si J_c est fonction de B ou si les bobines ne sont plus infiniment longues, les calculs deviennent alors impossibles.

Par contre, d'un point de vue numérique, il reste, d'une part à implanter une loi avec J_c dépendant de B puis de T et d'autre part à essayer d'améliorer la rapidité de calcul pour être capable de simuler des bobines non infinies.

Au-delà de ces problèmes, cette méthode a clairement montré que, dès qu'une bobine est multi-couches, les couches internes sont le siège de pertes beaucoup plus importantes que la couche externe, ceci dès la deuxième couche.

Il faut aussi remarquer qu'une couche non alimentée est également le siège de pertes qui sont du même ordre de grandeurs que dans les couches alimentées.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail était de développer puis d'utiliser un module représentant un matériau supraconducteur massif macroscopiquement dans le logiciel d'éléments finis FLUX3D développé au LEG. Cette approche permet de bénéficier de l'environnement de ce logiciel et de pérenniser ce travail. Le supraconducteur a été modélisé comme un matériau amagnétique avec une loi de puissance pour la relation entre la densité de courant et le champ électrique.

D'un point de vue numérique, ce travail a permis de développer plusieurs formulations 2D ou axisymétriques en $\vec{A}, \partial\vec{A}/\partial t, \vec{T}\Phi, \vec{T}\vec{T}_0\Phi, \vec{A}$ couplée avec les équations de circuit, de façon à pouvoir imposer un champ magnétique extérieur et/ou un courant. Le couplage avec les équations de circuit d'un supraconducteur massif a notamment été réalisé.

Le modèle numérique a, d'une part, été utilisé pour des études quantitatives. Ceci a permis de mieux comprendre un certain nombre de phénomènes physiques et de valider ou non les modèles analytiques basés sur le modèle de Bean. Cela a notamment montré que, pour des valeurs de N classiques dans les HTC (entre 10 et 20) et pour des champs magnétiques d'amplitude supérieure à H_p , le modèle de Bean donne souvent une très bonne indication de la valeur des pertes. Il a également été utilisé pour des études qualitatives.

Les conducteurs OPIT de Bi-2223 ont été étudiés en détails. L'hypothèse que les filaments sont parfaitement couplés en champ propre a été vérifiée pour des courants inférieurs à I_c : ils se comportent comme un seul gros filament. Dans ce cas, le modèle numérique est parfaitement en accord avec les mesures et le modèle de Norris donne une très bonne approximation des pertes dans ce type de conducteur.

Un modèle analytique pour des bobines supraconductrices multi-couches a été proposé. La comparaison des résultats analytiques, numériques et des mesures a démontré la limite d'un modèle reposant sur une géométrie infinie et surtout le modèle de Bean (J_c indépendant de B). En effet, si les résultats sont corrects pour une bobine mono-couche, il y a des écarts importants entre les pertes mesurées et calculées dès que l'on a deux couches de bobinage. Une amélioration du modèle numérique semble être la seule solution pour remédier à ce problème. Les formules analytiques proposées permettent, elles, de donner un bon ordre de grandeur.

Au niveau pratique, ce travail a permis de réellement comprendre la méthode électrique de mesure de pertes et d'étudier l'influence de l'emplacement des fils de mesure.

Ce travail était le premier réalisé au LEG sur la modélisation des supraconducteurs. Ce sujet est assez vaste et il reste beaucoup de chose à faire d'un point de vue numérique. Pendant le déroulement de ce projet, nous nous sommes attachés à ne pas perdre de vue les modèles analytiques et les expériences. Ceci s'est fait au détriment d'un certain nombre de développements informatiques qui n'ont pas été réalisés.

Le modèle développé donne de bons résultats et il a déjà été utilisé notamment pour déterminer les pertes AC dans un transformateur supraconducteur. Ce sera un outil très utile pour développer les applications supraconductrices. Cependant, si les simulations sont satisfaisantes quant aux résultats elle sont coûteuses en termes de temps de calcul.

Un certain nombre d'études peuvent déjà être réalisées avec les outils existants. Il serait notamment intéressant d'étudier :

- l'influence d'un champ magnétique sur un conducteur homogène ou multifilaments parcouru par un courant de transport,
- l'influence du « twistage » des filaments ; en utilisant une succession de plans 2D reliés électriquement entre eux.

Des prolongements naturels de ce travail seraient :

- la prise en compte de la dépendance de J_c en fonction de l'induction magnétique (de façon anisotrope) et également de la température,
- de prendre en compte l'anisotropie de la densité de courant (plan ab et axe c).
- d'être capable de prendre en compte les mouvements mécaniques ; cette potentialité existe déjà dans Flux3D, il ne reste plus qu'à la faire « cohabiter » avec les supraconducteurs.
- d'étudier réellement le cas 3D, et pour cela de faire progresser la vitesse de calcul ; la formulation en $\vec{T}\Phi$ semble tout indiquée pour ce type de géométries.

Annexe 1

Mesure avec un voltmètre

1.A MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UN SUPRACONDUCTEUR DE SECTION CIRCULAIRE

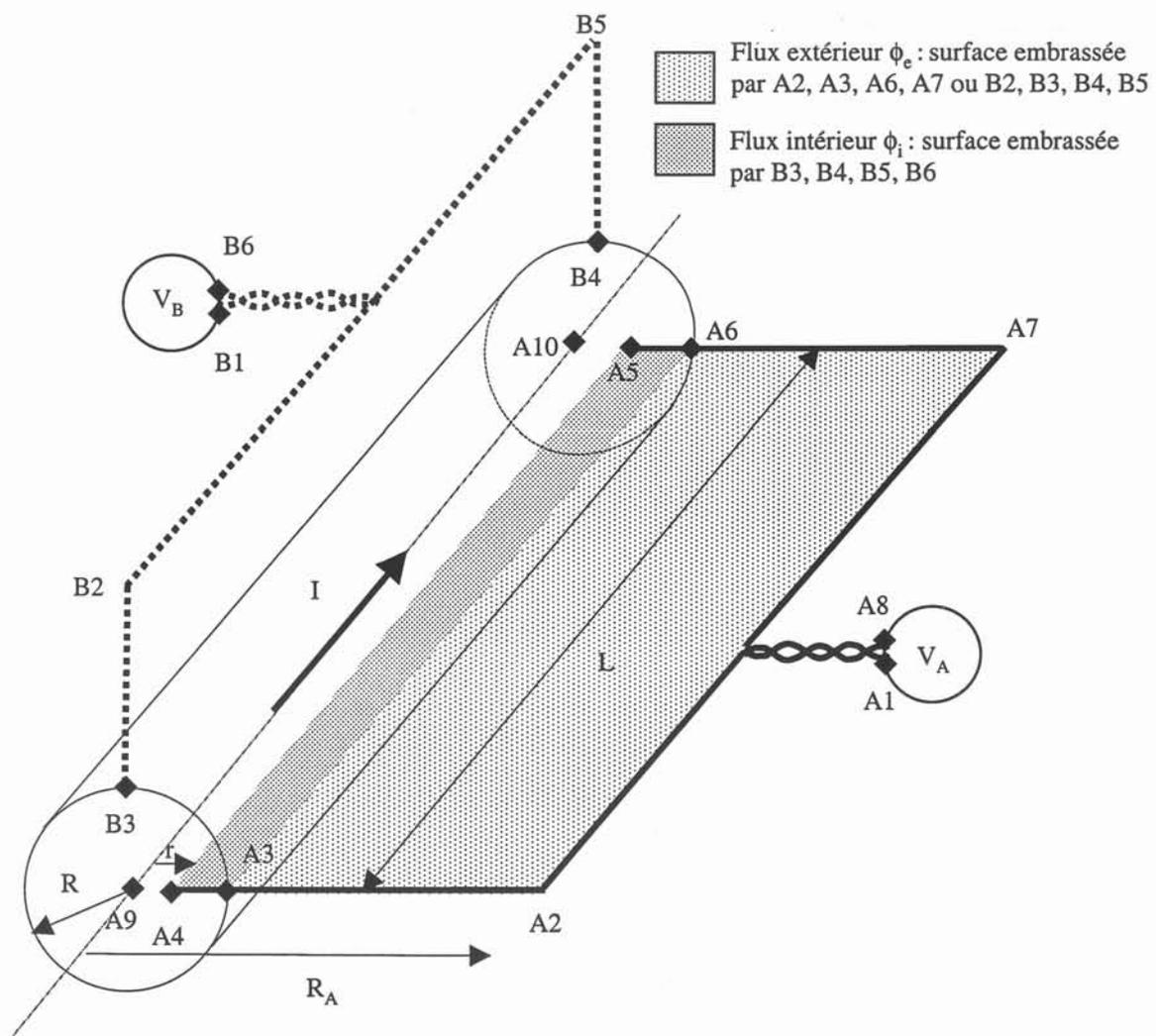


Figure 1-1 : Voltmètre aux bornes d'un conducteur de section circulaire.

Sur cet exemple, on suppose que l'on place deux voltmètres dont les prises de potentiels sont situées en B3, B4 ou en A4, A5, et dont on dispose les fils de mesure tels qu'ils embrassent le même flux. Les fils en sortie des voltmètres sont torsadés de telle sorte

qu'ils n'embrassent aucun flux. En sachant qu'un voltmètre mesure un gradient de potentiel à ces bornes et que $\vec{\text{grad}}V = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ on a:

$$v_B = \int_{B1}^{B6} -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_{B1}^{B6} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B1}^{B6} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (1.1)$$

or

$$\begin{aligned} \int_{B1}^{B6} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{B1}^{B3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B3}^{B4} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B4}^{B6} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{B3}^{B4} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(R,t) \times L \\ \text{car } \int_{B1}^{B3} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{B4}^{B6} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (courant nul dans les fils de mesures)} \\ \int_{B1}^{B6} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{B1}^{B6} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{B2,B3,B4,B5}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{B2,B3,B4,B5}} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \end{aligned}$$

donc

$$v_B = E(R,t) \cdot L + \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$v_A = \int_{A1}^{A8} -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_{A1}^{A8} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A1}^{A8} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (1.3)$$

or

$$\begin{aligned} \int_{A1}^{A8} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{A1}^{A3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A3}^{A4} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A4}^{A5} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A5}^{A6} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A6}^{A8} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A4}^{A5} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r,t) \times L \\ \text{car } \int_{A1}^{A3} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{A6}^{A8} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (courant nul dans les fils de mesures)} \\ \text{et } \int_{A3}^{A4} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{A5}^{A6} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (}\vec{E} \perp d\vec{l}\text{)} \\ \int_{A1}^{A8} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A1}^{A8} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{A2,A4,A5,A7}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{A2,A4,A5,A7}} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \end{aligned}$$

donc

$$v_A = E(r,t) \cdot L + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (1.4)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{A3,A4,A5,A6}} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_{S_{A3,A4,A5,A6}} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{A3}^{A4} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A4}^{A5} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A5}^{A6} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A6}^{A3} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{A4}^{A5} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A6}^{A3} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(R,t) \times L - E(r,t) \times L \\ \text{car } \int_{A3}^{A4} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{A5}^{A6} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (}\vec{E} \perp d\vec{l}\text{)} \end{aligned}$$

donc on a bien d'après (1.2) et (1.4) :

$$\boxed{v_A = v_B = E(R,t).L + \frac{\partial \phi_e}{\partial t}} \quad (1.5)$$

1.B MESURE DE TENSION AUX BORNES D'UNE SPIRE D'UNE BOBINE INFINIE

Supposons une spire supraconductrice (Figure 1-2) appartenant à une bobine infiniment longue. On peut alors supposer que le champ magnétique à l'intérieur est parfaitement axial, que le champ électrique est parfaitement orthoradial et que tous deux ne sont fonction que de r. De plus, le champ magnétique à l'extérieur étant alors nul, l'emplacement des fils n'a aucune importance ; pratiquement, ils seront collés à la bobine pour éviter d'embrasser un flux parasite.

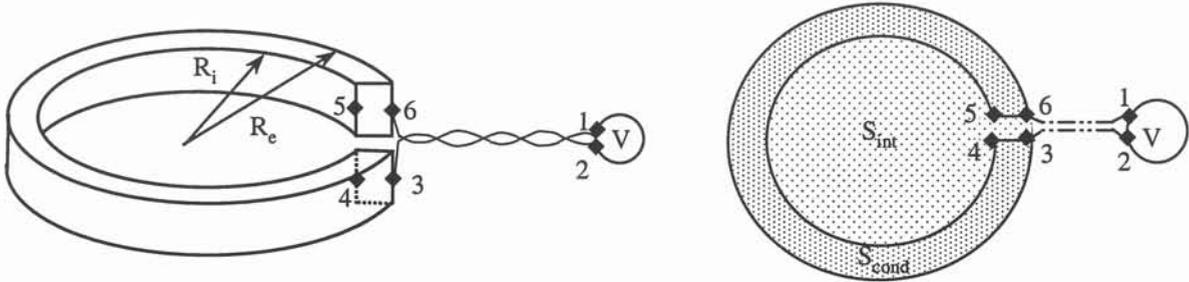


Figure 1-2 : Emplacement des prises de potentiels aux bornes d'une spire.

Si les prises de potentiel sont au niveau de 4 et 5 :

$$v_{4-5} = \int_2^1 - \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dl} = \int_2^1 \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_2^1 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} \quad (1.6)$$

or

$$\int_2^1 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_2^3 \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_3^4 \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_4^5 \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_5^6 \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_6^1 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_4^5 \vec{E} \cdot \vec{dl} = E(R_i) \times 2\pi R_i$$

$$\text{car } \int_2^3 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_6^1 \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ (courant nul dans les fils de mesures)}$$

$$\text{et } \int_3^4 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_5^6 \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ } (\vec{E} \perp \vec{dl})$$

$$\int_2^1 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = \frac{\partial}{\partial t} \int_2^1 \vec{A} \cdot \vec{dl} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\text{int}}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\text{int}}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

donc

$$\boxed{v_{6-3} = E(R_i) \times 2\pi R_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial t}} \quad (1.7)$$

Si les prises de potentiel sont au niveau de 6 et 3 :

$$v_{6-3} = \int_2^1 -\overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_2^1 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_2^1 \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dl} \quad (1.8)$$

or

$$\int_2^1 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_2^3 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_3^6 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_6^1 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_3^6 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E(R_e) \times 2\pi R_e$$

(courant nul dans les fils de mesures)

$$\int_2^1 \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{\partial}{\partial t} \int_2^1 \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} \quad \text{ou } S \text{ est la surface qui s'appuie}$$

sur le rayon extérieur de la spire ($S=S_{\text{cond}}+S_{\text{int}}$).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\text{int}}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\text{cond}}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{\text{cond}}}{\partial t} \quad \text{ou } S_{\text{cond}} \text{ est la surface}$$

délimitée par 3, 4, 5 et 6.

donc :

$$v_{6-3} = E(R_e) \times 2\pi R_e + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{\text{cond}}}{\partial t} \quad (1.9)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{\text{cond}}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iint_{S_{\text{cond}}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_3^4 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_4^5 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_5^6 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_6^3 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} \\ &= \int_6^3 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_4^5 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = E(R_i) \times 2\pi R_i - E(R_e) \times 2\pi R_e \\ \text{car } \int_3^4 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} &= \int_5^6 \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \quad (\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dl}) \end{aligned}$$

donc on a bien d'après (1.7) et (1.9) :

$$v_{6-3} = E(R_i) \times 2\pi R_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = v_{4-5} \quad (1.10)$$

Annexe 2

Pertes dans un cylindre supraconducteur

2.A INTRODUCTION

Cette annexe présente le calcul détaillé des pertes en fonction du temps pour un cylindre supraconducteur infini, dans trois configurations différentes. Ces configurations correspondent aux trois conditions dans lesquelles peut se trouver une couche de bobinage à l'intérieur d'une bobine :

- bobine mono-couche ou couche externe d'une bobine multi-couches, donc soumise uniquement à son propre champ magnétique à l'intérieur.
- couche interne non alimentée, donc soumise à l'intérieur et à l'extérieur au champ magnétique des couches externes.
- couche interne alimentée, donc soumise à l'extérieur au champ magnétique des couches externes et à l'intérieur au champ magnétique des couches externes plus à son propre champ magnétique.

2.B PRESENTATION DETAILLEE DES CALCULS DANS LE CAS MONO-COUCHE

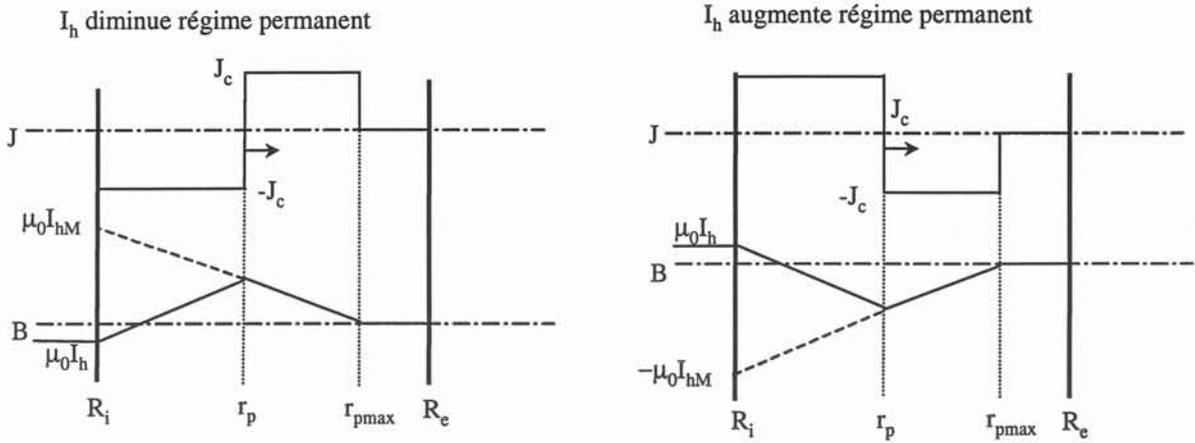
2.B.1 Modèle

Le modèle et la méthode de calcul des pertes sont ceux présentés au chapitre V.

2.B.2 Calcul des pertes dans une bobine mono-couche

2.B.2.a Répartition des grandeurs électromagnétiques

Le cylindre est parcouru par un courant $I_h = I_{hM} \sin(\omega t)$ où I_h est le courant par unité de hauteur. Les répartitions, en régime permanent, des différentes grandeurs électromagnétiques dans le cylindre (Figure 2-1) ont été déterminées chapitre V. Elle sont rappelées ici, puis les équations de ces répartitions sont ensuite données.

Figure 2-1 : Répartition de J , E et B dans une bobine monocouche.

Lorsque I_t diminue :

Pour $R_i \leq r \leq r_p$:

$$B = \mu_0 J_c (r - R_i) + \mu_0 I_h$$

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial I_h}{\partial t} \left(\frac{r_p^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_p = \frac{I_M - I_h}{2J_c} + R_i$$

Pour $r_p \leq r \leq r_{pmax}$:

$$B = \mu_0 J_c (R_i - r) + \mu_0 I_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pmax} \leq r \leq R_e$;

$$B = 0$$

$$E = 0$$

Quand I_t augmente :

Pour $r_i \leq r \leq r_p$:

$$B = \mu_0 J_c (R_i - r) + \mu_0 I_h$$

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial I_h}{\partial t} \left(\frac{r_p^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_p = \frac{I_M + I_h}{2J_c} + R_i$$

Pour $r_p \leq r \leq r_{pmax}$:

$$B = \mu_0 J_c (r - R_i) + \mu_0 I_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pmax} \leq r \leq R_e$:

$$B = 0$$

$$E = 0$$

2.B.2.b Calcul des pertes instantanées et moyennes

Les pertes volumiques instantanées dans la bobine, peuvent se calculer de deux façons. Pour une hauteur b de cylindre, on peut déterminer :

la puissance active instantanée consommée dans la bobine :

$$p_c(t) = \int_{r_i}^{r_p} \int_0^{2\pi} \int_0^b E.J.r.\partial r.\partial \theta.\partial z \quad (2.1)$$

la puissance active instantanée fournie par la source :

$$p_f(t) = u(t).i(t) = 2\pi.R_i.E(R_i).b.I_M.\sin(\omega t) \quad (2.2)$$

On trouve alors :

$$p_c(t) = -\pi.b.\mu_0.\omega.\cos \omega t.\left[\frac{2r_p^3}{3} - R_i.r_p^2 + \frac{d^3}{3}\right] \quad (2.3)$$

$$p_f(t) = \pi.b.R_i.\mu_0.I_M^2.\omega.\cos \omega t.\sin \omega t.\left(\frac{r_p^2}{R_i} - R_i\right) \quad (2.4)$$

$$\text{avec } r_p = \frac{1}{2J_c} I_M \left(1 - \varepsilon \left(\frac{dI_h}{dt}\right) \sin \omega t\right) + R_i$$

$$\text{où } \varepsilon = \text{signe} \left(\frac{dI_h}{dt}\right)$$

2.C N^{IEME} COUCHE D'UNE BOBINE

2.C.1 Couche interne non alimentée.

Si l'on suppose une bobine possédant n couches de filaments supraconducteurs dont la n^{ieme} couche n'est pas alimentée, cette couche peut se modéliser par un cylindre concentrique, soumis au même champ magnétique à l'extérieur et à l'intérieur, ce champ magnétique provenant des couches alimentées situées à l'extérieur de la couche étudiée. Les couches situées à l'intérieur et les couches non alimentées situées à l'extérieur ne contribuent pas au champ magnétique que subit cette bobine.

Cette couche travaille donc uniquement en champ extérieur, et on considèrera qu'elle est soumise à un champ magnétique sinusoïdal $H_e(t) = H_M \sin(\omega t)$, à l'intérieur et à l'extérieur.

Il faut distinguer deux cas, suivant que cette couche entre ou non en pénétration complète (courant présent partout) au cours du temps. Cette condition peut s'exprimer en fonction de la valeur du champ magnétique extérieur ; si la valeur maximale de ce champ est toujours inférieure à une certaine valeur H_p , il n'y a jamais pénétration complète, si elle est supérieure, il y a pénétration complète pendant une partie du temps. On trouve :

$$H_p = \frac{e \cdot J_c}{2} \quad (2.5)$$

Dans toute la suite, $\varepsilon = \text{signe} \left(\frac{dI_h}{dt} \right)$.

2.C.1.a Si il n'y a jamais pénétration complète ($H_M \leq J_c e/2$)

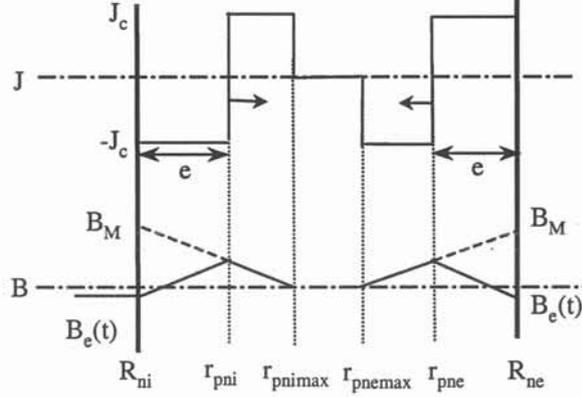


Figure 2-2 : couche non alimentée.

Les grandeurs électromagnétiques J , E et b ont alors comme équation :

Pour $R_{ni} \leq r \leq r_{pni}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ni} - r) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pni}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$$

Pour $r_{pni} \leq r \leq r_{pnimax}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ni}) - \varepsilon B_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pnimax} \leq r \leq r_{pnemax}$:

$$J = 0$$

$$B = 0$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pnemax} \leq r \leq r_{pne}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \mu \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ne} - r) - \varepsilon B_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pne} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ne}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pne}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$$

Valeurs des pertes instantanées (calculée avec la formule (2.1))

Pour une spire de hauteur b:

$$p(t) = \varepsilon \pi b \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} J_c \left(\frac{2}{3} (r_{pni}^3 + r_{pne}^3) - R_{ni} r_{pni}^2 - R_{ne} r_{pne}^2 + \frac{1}{3} (R_{ne}^3 + R_{ni}^3) \right) \quad (2.6)$$

$$\text{avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c} \text{ et } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$$

2.C.1.b Si il y a pénétration complète au cours du temps ($H_M \geq J_c e/2$)

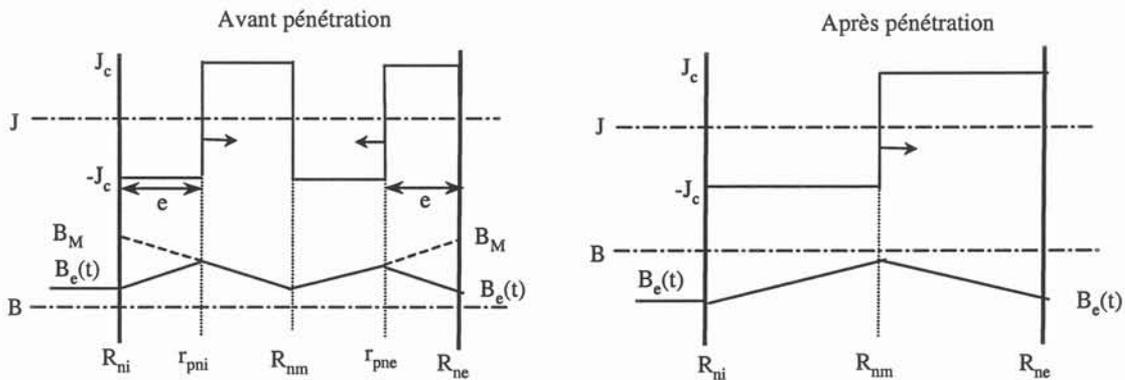


Figure 2-3 : couche non alimentée.

Avant pénétration complète :

Pour $R_{ni} \leq r \leq r_{pni}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ni} - r) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pni}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$$

Pour $r_{pni} \leq r \leq r_{nm}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \mu \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ni}) - \varepsilon B_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{nm} \leq r \leq r_{pne}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \mu \varepsilon \mu_0 J_c R_{ne} - r) - \varepsilon B_M$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pne} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ni}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pne}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$$

Après pénétration complète :

Pour $R_{ni} \leq r \leq R_{nm}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ni} - r) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{nm}^2}{r} - r \right) \text{ avec } R_{nm} = \frac{R_{ni} + R_{ne}}{2}$$

Pour $R_{nm} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ne}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{nm}^2}{r} - r \right) \text{ avec } R_{nm} = \frac{R_{ni} + R_{ne}}{2}$$

Valeurs des pertes instantanées

Il y a pénétration incomplète pour $\frac{T}{4} + k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p$ avec $t_p = k \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} (a \sin(\mu_0 \frac{J_c e}{B_{e \max}}) - 1)$.

Il y a pénétration complète pour $t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + (k+1) \frac{T}{2}$

Les pertes pour une spire de hauteur b ont donc pour expression :

Avant pénétration complète ($\frac{T}{4} + k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p$)

$$p(t) = \varepsilon \pi b \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} J_c \left(\frac{2}{3} (r_{pni}^3 + r_{pne}^3) - R_{ni} r_{pni}^2 - R_{ne} r_{pne}^2 + \frac{1}{3} (R_{ne}^3 + R_{ni}^3) \right) \quad (2.7)$$

avec $r_{pni} = R_{ni} + \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$ et $r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_M (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2 \mu_0 J_c}$

Après pénétration complète ($t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + (k+1) \frac{T}{2}$)

$$p(t) = \varepsilon\pi b \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} J_c \left(-\frac{2}{3} R_{nm}^3 + \frac{1}{3} (R_{ne}^3 + R_{ni}^3) \right) \quad (2.8)$$

avec $R_{nm} = \frac{R_{ni} + R_{ne}}{2}$

2.C.2 couche interne alimentée

Si l'on suppose une bobine possédant n couches de filaments supraconducteurs dont la n^{ième} couche est alimentée, cette couche peut se modéliser par un cylindre concentrique soumis à un champ magnétique extérieur H_e(t) et un champ magnétique intérieur H_e(t)+I_h(t). Le champ magnétique H_e(t) provenant des couches alimentées situées à l'extérieur de la couche étudiée, cette couche est donc soumise à un champ magnétique sinusoïdal H_e(t) = H_M sin(ωt) à l'extérieur, et a un champ intérieur H_e(t) + I_h(t) = (H_M + I_M) sin(ωt) (si I_h(t) est le courant par unité de hauteur et est en phase avec H_e(t)).

Il faut distinguer deux cas, suivant que cette couche entre ou non en pénétration complète (courant présent partout). Cette condition peut s'exprimer en fonction de la valeur du champ magnétique extérieur ; si la valeur maximale de ce champ est toujours inférieure à une certaine valeur H_p, il n'y a jamais pénétration complète ; si elle est supérieure, il y a pénétration complète pendant une partie du temps. On trouve :

$$H_p = \frac{e.J_c - I_h/e}{2} \quad (2.9)$$

2.C.2.a Si il n'y a jamais pénétration complète (H_M ≤ (e.J_c - I_h/e)/2)

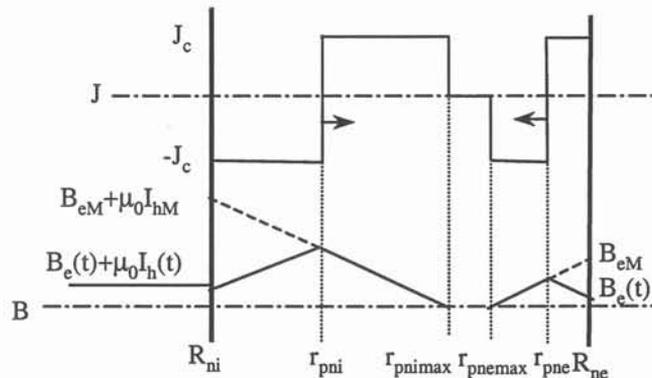


Figure 2-4 : couche alimentée.

Les grandeurs électromagnétiques J, E et B ont alors comme équation :

Pour $R_{ni} \leq r \leq r_{pni}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon\mu_0 J_c (R_{ni} - r) + (B_e(t) + \mu_0 I_h(t))$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial(B_e(t) + \mu_0 I_h(t))}{\partial t} \left(\frac{r_{pni}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{(B_{eM} + \mu_0 I_M)(1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

Pour $r_{pni} \leq r \leq r_{pnimax}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ni}) - \varepsilon (B_{eM} + \mu_0 I_M)$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pnimax} \leq r \leq r_{pne}$:

$$J = 0$$

$$B = 0$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pne} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ne} - r) - \varepsilon (B_{eM} + \mu_0 I_M)$$

$$E = 0$$

Pour $r_{pne} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ne}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pne}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_{eM} (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

Valeurs des pertes instantanées

Pour une spire de hauteur b:

$$p(t) = \varepsilon \pi b J_c \left(\frac{\partial(B_e(t) + \mu_0 I_h(t))}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pni}^3 - R_{ni} r_{pni}^2 + \frac{1}{3} R_{ni}^3 \right) + \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pne}^3 - R_{ne} r_{pne}^2 + \frac{1}{3} R_{ne}^3 \right) \right) \quad (2.10)$$

$$\text{avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{(B_{eM} + \mu_0 I_M)(1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c} \text{ et } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_{eM} (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

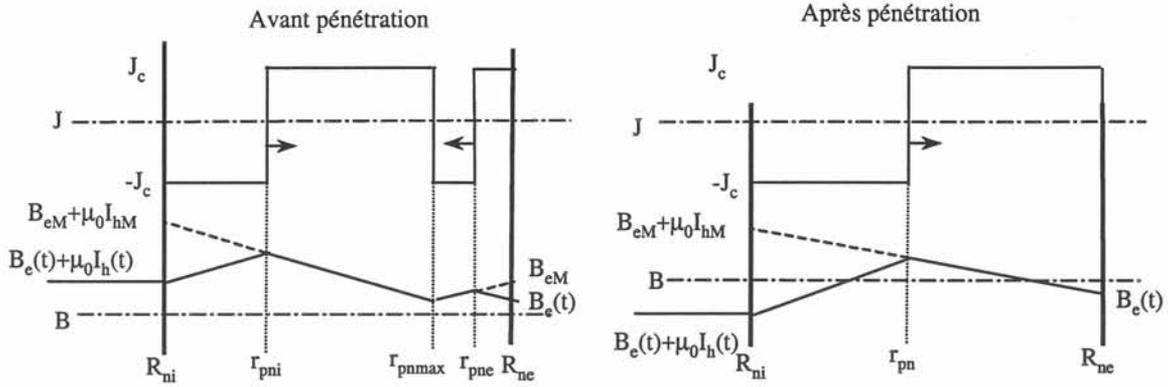
2.C.2.b Si il y a pénétration complète au cours du temps ($H_M \geq (e.J_c - I_h/e)/2$)


Figure 2-5 : couche alimentée.

Avant pénétration complète :

 Pour $R_{ni} \leq r \leq r_{pni}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ni} - r) + (B_e(t) + \mu_0 I_h(t))$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial (B_e(t) + \mu_0 I_h(t))}{\partial t} \left(\frac{r_{pni}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{(B_{eM} + \mu_0 I_M)(1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

 Pour $r_{pni} \leq r \leq r_{nm}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ni}) - \varepsilon (B_{eM} + \mu_0 I_M)$$

$$E = 0$$

 Pour $r_{nm} \leq r \leq r_{pne}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ne} - r) - \varepsilon (B_{eM} + \mu_0 I_M)$$

$$E = 0$$

 Pour $r_{pne} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ne}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pne}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_{eM} (1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

Après pénétration complète :

 Pour $R_{ni} \leq r \leq R_{nm}$:

$$J = \varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (R_{ni} - r) + (B_e(t) + \mu_0 I_h(t))$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pn}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pm} = \frac{R_{ni} + R_{ne}}{2} - \varepsilon \frac{I_h}{2J_c} = R_{nm} - \varepsilon \frac{I_h}{2J_c}$$

Pour $R_{nm} \leq r \leq R_{ne}$:

$$J = -\varepsilon J_c$$

$$B = \varepsilon \mu_0 J_c (r - R_{ne}) + B_e(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{r_{pn}^2}{r} - r \right) \text{ avec } r_{pm} = R_{nm} - \varepsilon \frac{I_h}{2J_c}$$

Valeurs des pertes instantanées

Il y a pénétration incomplète pour

$$\frac{T}{4} + k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p \text{ avec } t_p = k \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} a \sin\left(\frac{\mu_0(eJ_c - I_M)}{B_{eM}} - 1\right)$$

Il y a pénétration complète pour $t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + k \frac{T}{2}$

Les pertes pour une spire de hauteur b ont donc pour expression :

Avant pénétration complète ($k \frac{T}{2} \leq t \leq t_p$)

$$p(t) = \varepsilon \pi b J_c \left(\frac{\partial(B_e(t) + \mu_0 I_h(t))}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pni}^3 - R_{ni} r_{pni}^2 + \frac{1}{3} R_{ni}^3 \right) + \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pne}^3 - R_{ne} r_{pne}^2 + \frac{1}{3} R_{ne}^3 \right) \right) \quad (2.11)$$

$$\text{avec } r_{pni} = R_{ni} + \frac{(B_{eM} + \mu_0 I_M)(1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c} \text{ et } r_{pne} = R_{ne} - \frac{B_{eM}(1 + \varepsilon \sin(\omega t))}{2\mu_0 J_c}$$

Après pénétration complète ($t_p \leq t \leq \frac{T}{4} + k \frac{T}{2}$)

$$p(t) = \varepsilon \pi b J_c \left(\frac{\partial(B_e(t) + \mu_0 I_h(t))}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pn}^3 - R_{ni} r_{pn}^2 + \frac{1}{3} R_{ni}^3 \right) + \frac{\partial B_e(t)}{\partial t} \left(\frac{2}{3} r_{pn}^3 - R_{ne} r_{pn}^2 + \frac{1}{3} R_{ne}^3 \right) \right) \quad (2.12)$$

$$\text{avec } r_{pm} = R_{nm} - \varepsilon \frac{I_t}{2J_c}$$

Annexe 3

Forme faible de la formulation en $T\phi$

3.A FORMULATION ET EQUATIONS A RESOUDRE

T et ϕ sont définie tel que :

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \overrightarrow{\text{rot}}\vec{T} \\ \vec{H} &= \vec{T} - \overrightarrow{\text{grad}}\Phi\end{aligned}\quad (3.1)$$

on résout alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \text{div}\vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

3.B FORME FAIBLE

Si on utilise la méthode de Galerkin, on doit alors minimiser :

$$\begin{cases} \vec{R}_{1i} = \int_{\Omega} \alpha_i (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) d\Omega & i = 1 \text{ à } N \\ R_{2i} = \int_{\Omega} \alpha_i \text{div}\vec{B} d\Omega \end{cases}\quad (3.3)$$

où Ω est le domaine d'étude, et α_i sont les fonctions de formes.

En appliquant les formules classiques de calcul des champs (3.3) devient :

$$\begin{cases} \vec{R}_{1i} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{rot}}(\alpha_i \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i \wedge \vec{E} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\Omega \\ R_{2i} = \int_{\Omega} \text{div}(\alpha_i \vec{B}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i d\Omega \end{cases}\quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{1i} = \int_{\Gamma} \alpha_i (\vec{E} \wedge \vec{N}) d\Gamma - \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i \wedge \vec{E} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\Omega \\ R_{2i} = \int_{\Gamma} \alpha_i \vec{B} \cdot \vec{N} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i d\Omega \end{cases}\quad (3.5)$$

Avec Γ la frontière du domaine d'étude.

En éliminant les intégrales de surface, (condition aux limites ou conditions sur les fonctions de formes), on a le système à résoudre :

$$\begin{cases} \vec{R}_{1i} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i \wedge \vec{E} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\Omega \\ R_{2i} = - \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\alpha_i d\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

3.C METHODE DE NEWTON RAPHSON

A chaque pas de temps, on résout la non linéarité par la méthode de Newton Raphson. On a à résoudre:

$$R = 0 \text{ avec } R = \begin{cases} \vec{R}_{1i} & \text{pour } i = 1 \text{ à } N \\ R_{2i} \end{cases}$$

Les inconnues du système étant :

$$\psi = \begin{cases} \vec{T} \\ \Phi \end{cases} \text{ avec } \vec{T} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \vec{T}_j \text{ et } \Phi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j$$

On utilise une méthode implicite, à chaque itération on calcule un incrément de solution $\Delta\psi$ tel que : $\psi_n = \psi_{n-1} + \Delta\psi$.

L'incrément de solution est tel que, à l'instant $t+\Delta t$:

$$R_{t+\Delta t}(\psi_n) = \left(\frac{\partial R}{\partial \psi} \right)_{t+\Delta t} \cdot \Delta\psi_{t+\Delta t}$$

Pour appliquer la méthode de Newton Raphson, on est donc amené à calculer la dérivée des résidus par rapport aux inconnues aux nœuds \vec{T} et Φ , on a alors :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \psi} \right)_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_{1i}}{\partial \vec{T}_j} & \frac{\partial \vec{R}_{1i}}{\partial \Phi_j} \\ \frac{\partial R_{2i}}{\partial \vec{T}_j} & \frac{\partial R_{2i}}{\partial \Phi_j} \end{bmatrix}$$

On montre alors en dérivant (3.6) :

$$\left(\frac{\partial \vec{R}_{1i}}{\partial \vec{T}_j} \right)_{t+\Delta t} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{rot}}\alpha_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{J}} \overrightarrow{\text{rot}}\alpha_j d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial H} \alpha_j d\Omega \quad (3.7)$$

avec

$$\overrightarrow{rot}\underline{\alpha}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\alpha_i}{\partial z} & -\frac{\partial\alpha_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial\alpha_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\alpha_i}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial J_x} & \frac{\partial E_x}{\partial J_y} & \frac{\partial E_x}{\partial J_z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial J_x} & \frac{\partial E_y}{\partial J_y} & \frac{\partial E_y}{\partial J_z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial J_x} & \frac{\partial E_z}{\partial J_y} & \frac{\partial E_z}{\partial J_z} \end{bmatrix} \underline{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial\vec{R}_{1i}}{\partial\Phi_j} \right)_{t+\Delta t} = \frac{-1}{\Delta t} \int_{\Omega} \alpha_i \frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{H}} \overrightarrow{grad}\alpha_j d\Omega \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial R_{2i}}{\partial T_j} \right)_{t+\Delta t} = - \int_{\Omega} (\overrightarrow{grad}\alpha_i)^\perp \frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{H}} \alpha_j d\Omega \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial R_{2i}}{\partial\Phi_j} \right)_{t+\Delta t} = \int_{\Omega} (\overrightarrow{grad}\alpha_i)^\perp \frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{H}} \overrightarrow{grad}\alpha_j d\Omega \quad (3.10)$$

NB : Le système présenté ci dessus n'est pas symétrique mais pourrait néanmoins être symétrisé.

REFERENCES

Chapitre I

- [I-1] P. Tixador, Les supraconducteurs, traité des nouvelles technologies série matériaux, Hermès.
- [I-2] C.P Poole, H.A. Farach, R.J. Creswick, Superconductivity, Academic Press, 1995.
- [I-3] T.P Sheahen, Introduction to High-temperature Superconductivity, Plenum Press, 1994.
- [I-4] J.G Bednorz, K. Muller, Z. physic, **B64**, 189 (1986).
- [I-5] M.K. Wu *et al.*, Physical Review letter, **58**, 908 (1987).
- [I-6] H. Riemersma *et al.*, IEEE Trans on Power Apparatus and systems, **100**, 3398 (1981).
- [I-7] P. Anderson, Y. Kim, Rev. Mod. Phys., Hard Superconductivity : Theory of the motion of Abrikosov Flux Lines, **36**, 30, (1964)
- [I-8] M. Chenais, Journée de cryogénie et de supraconductivité, Nov. 1994.
- [I-9] P. Tixador *et al.*, IEEE Trans. On applied Superconductivity, **3** , 381 (1993).
- [I-10] M. Superczynski, IEEE Trans. on Magnetics, **23**, 348 (1987).
- [I-11] P. Stoye *et al.*, Static forces in a superconducting Magnet Bearing, IEEE Trans on Magnetics, **31**, (1995).
- [I-12] T.A. Coombs *et al.*, Superconducting bearings in high speed rotating machinery, Proc. Of EUCAS, Institute of physics publishing, Bristol, UK, **XXXV**, 1712, (1997).
- [I-13] V.R. Candes *et al.*, Topology and performances of superconducting magnetic bearings, The international Journal for computation and mathematics in electrical and electronic Engineering, **17**, 628, (1998).
- [I-14] T. Coombs *et al.*, Superconducting magnetic bearings for energy storage flywheels, IEEE Trans. On applied Superconductivity, **9**, 968 (1999).
- [I-15] T.M Mulcahy *et al.*, Flywheel energy storage advances using HTS bearings, IEEE Trans. On applied Superconductivity, **9**, 297 (1999).
- [I-16] M. Tunoli *et al.*, Analysis of losses due to rotor vibration in HTC superconducting flywheel system, Journal of sound and vibration, **212**, 649, (1998).
- [I-17] P. Tixador *et al.* Limiteur supraconducteur de courant de défaut, Electrotechnique du futur, EF 99, Lille 30-31 Mars 1999.
- [I-18] T. Verhaege *et al.*, Experiments with a high voltage (40kV) superconducting fault current limiter, Cryogenics **36**, 251-256 (1996).
- [I-19] B. Gromoll *et al.*, Resistive fault current limiters with YbaCuO Films -100 kVA Functional model, IEEE Trans. On applied Superconductivity, **9**, (1999).
- [I-20] K. Heine *et al.*, Applied Physics letters, **55**, 2441 (1989).
- [I-21] R. Flükiger *et al.*, IEEE Trans. On applied Superconductivity, **5**, 1150, (1995).
- [I-22] J. File, R.G. Mills, Physical Review Lettres, **10**, 93 (1963).
- [I-23] Thomas P. Sheahen, Introduction to High-Temperature Superconductivity, Plenum Press, New York (1994).

- [I-24] D. Huse, M. Fisher and D. Fisher, Are superconductors really superconducting ?, *Nature*, vol 358, (August 1992).

Chapitre II

- [II-1] T.Sugiura ,H. Hashizume and K. Miya, Numerical electromagnetic field analysis of type II superconductors, *Int. J. of Applied Electromagnetics in materials* 4 (1993) 13-25.
- [II-2] Yoshikatsu Yoshida, Mitsuru Uesaka, Kenzo Miya, Evaluation of dynamic magnetic force of high Tc superconductor with flux flow and creep ,*Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials* 5 (1994) 183-89.
- [II-3] N. Takeda, M.Uesaka and K.Miya, Computation and experiments on the static and dynamic characteristics of high Tc superconducting levitation, *Cryogenics* 1994, vol. 34, Number 9.
- [II-4] A.O. Hauser, Calculation of Superconducting Magnetic Bearings using a Commercial FE-Program (ANSYS), *IEEE Transactions on magnetics*, vol. 33, No. 2, March 1997.
- [II-5] M.Maslouh et F. Bouillault, Modélisation des phénomènes électromagnétiques dans les matériaux supraconducteurs, *Journal de physique III*, 1997.
- [II-6] Leonid Prigozhim, Analysis of Critical-State Problems in Type-II Superconductivity, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol.7, No.4, December 1997.
- [II-7] A. Bossavit, Numerical Modelling of Superconductors in Three Dimensions : A Model and a Finite Element Method, *IEEE Transactions on magnetics*. vol. .30, No. 5, September 1994.
- [II-8] J.K. Sykulski, R.L. Stoll and A.E. Mahdi Modelling HTc Superconductors for AC Power Loss Estimation, *IEEE Transactions on magnetics*. vol. .33, No. 2, March 1997.
- [II-9] C.Levillain, P. Manuel and P.G. Théron, Current induction Profiles and hysteretic losses in High-Tc Superconducting tapes, *IEEE Transactions on applied superconductivity*, vol 5, No.2, June 1995.
- [II-10] S. Le Naour, A. Lacaze, Y. Laumond, P. Estop, T. Verhaege, AC Current Distribution and Losses in Multifilamentary Superconductors Exposed to longitudinal Magnetic Field, *IEEE Transactions on magnetics*. vol. .32, No. 4, July 1996.
- [II-11] J.L Coulomb, J.C. Sabonnadière, *Eléments finis et CAO*, Hermès Publishing, Paris, 1988.
- [II-12] N. Nibbio, M. Sjoström, B. Dutoit, P. Lombard, and D. Taghezout, Global properties of HTS tape model using field-dependent power law in finite-Element Method, submitted at Eucas, Septembre 1999.
- [II-13] N. Nibbio, Nonlinear electromagnetic modeling of high temperature superconducting tapes, Thèse de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (1999).
- [II-14] C. Cordier, S. Flament and C. Dubuc, A 3-D Finite Element Formulation for Calculating Meissner Currents in Superconductors, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol.9, No.1, March 1999.
- [II-15] N. Nakata, T.Takahashi, K.Fujimara, N.Okamoto, K. Muramatsu, Improvement of convergence characteristics of Newton Raphson method for non linear magnetic field analysis, *IEEE Transactions on magnetics*, vol. 28, No. 2, March 1992, pp 1048-1051.
- [II-16] K.Fujimara et al Improvement of modified Newton Raphson method, *IEEE Transactions on magnetics*, vol. 29, No. 2, March 1993, pp 1962-1965.
- [II-17] Jian-she Wang, "A Nodal Analysis Approach for 2D and 3D Magnetic-Circuit Coupled Problems", *IEEE transactions on Magnetism*, vol. 32, pp 1074-1077, 1996..

- [II-18] T. Dreher and G. Meunier, "3D line current model of coil and external circuit ", IEEE transactions on Magnetics, vol.31, No 3, Mai 1995.

Chapitre IV

- [IV-1] K. Müller and K. Leslie, Self-field ac loss of Bi-2223 superconducting tapes, IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. .7, No. 2, June 1997.
- [IV-2] C. Beduz et al., A series of round-robin measurements of the self-field ac loss of Bi-2223 tapes, Supercond. Sci. Technol. 11 (1998) 675-679.
- [IV-3] A. Campbell, AC Losses in High T_c Superconductors, IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. .5, No. 2, June 1995.
- [IV-4] Y. Yang, T. Hughes, C. beduz et al., The influence of geometry on self-field AC losses of Ag sheathed PbBi-2223 tapes, Physica C 256 (1996), 378-386.
- [IV-5] J. Clem, T. Pe, and J, McDonald, Voltage-Probe-Position Dependence and Magnetic-Flux Contribution to the Measured Voltage in ac Transport Measurements : Which Measuring Circuit Determines the Real Losses ?, Proc. of Polish-US Conference on HTS, Springer Verlag Sept. 1995.
- [IV-6] S. Shakil and S. Sali, Study of Self-field AC losses in Mono and Multi-filamentary Bi-2223 tapes for Power Applications, IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. .7, No. 2, June 1997.
- [IV-7] W. Norris, Calculation of hysteresis losses in hard super-conductors carrying ac : isolated conductors and edges of thin sheets, J. Phys. D : Appl. Phys., vol. 3 (1969).

Chapitre V

- [V-1] K. Müller and K. Leslie, Self-field ac loss of Bi-2223 superconducting tapes, IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. .7, No. 2, June 1997.
- [V-2] Norton DP et al. Science 24, p 755