



**HAL**  
open science

# Etude d'une nouvelle classe de graphes : les graphes hypotriangulés

Hélène Topart

► **To cite this version:**

Hélène Topart. Etude d'une nouvelle classe de graphes : les graphes hypotriangulés. Réseaux et télécommunications [cs.NI]. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2011. Français. NNT : 2011CNAM0776 . tel-00686960

**HAL Id: tel-00686960**

**<https://theses.hal.science/tel-00686960>**

Submitted on 11 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT du CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET  
MÉTIERS

Spécialité :

**Informatique**

présentée par

**Hélène TOPART**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR du CNAM**

# Étude d'une nouvelle classe de graphes : les graphes hypotriangulés

préparée au laboratoire **CEDRIC**

dans le cadre de l'**EDITE**

soutenue publiquement le 26 mai 2011

devant le jury composé de :

Cristina BAZGAN	Rapporteur
Dominique DE WERRA	Rapporteur
Cédric BENTZ	Examinateur
Nicolas TROTIGNON	Examinateur
Marie-Christine COSTA	Directeur de thèse
Christophe PICOULEAU	Directeur de thèse

---

*Dans les sciences, le chemin est plus important que le but.*

*Les sciences n'ont pas de fin.*

Edwin Chargaff

---

# Résumé

Dans cette thèse, nous définissons une nouvelle classe de graphes : *les graphes hypotriangulés*. Les graphes hypotriangulés vérifient que pour tout chemin de longueur deux, il existe une arête ou un autre chemin de longueur deux entre ses extrémités. Cette classe permet par exemple de modéliser des réseaux robustes. En effet, nous montrons que dans de tels graphes, la suppression d'une arête ou d'un sommet ne modifie pas la distance initiale entre toutes paires de sommets non adjacents. Ensuite, nous étudions et démontrons plusieurs propriétés pour cette classe de graphes. En particulier, après avoir introduit une famille de partitions spécifiques, nous montrons les relations entre certains éléments de cette famille et leur caractère hypotriangulé. De plus, grâce à ces partitions, nous caractérisons les graphes hypotriangulés minimum, qui, parmi les graphes hypotriangulés connexes, minimisent le nombre d'arêtes pour un nombre de sommets fixé.

Dans une deuxième partie, nous étudions la complexité, pour la classe des graphes hypotriangulés, de problèmes difficiles dans le cas général. Nous montrons d'abord que les problèmes classiques de cycle hamiltonien, coloration, clique maximum et stable maximum restent  $\mathcal{NP}$ -difficiles pour cette classe de graphes. Ensuite, nous nous intéressons à des problèmes de modification de graphes, pour lesquels il s'agit de déterminer le nombre minimal d'arêtes à ajouter ou à supprimer à un graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé : nous montrons la complexité de ces problèmes, pour plusieurs classes de graphes.

**Mots Clés** : graphe, biparti, arbre, chemins disjoints, complexité

# Abstract

In this thesis, we define a new class of graphs : *the hypochordal graphs*. These graphs satisfy that for any path of length two, there exists an chord or another path of length two between its two endpoints. This class can represent robust networks. Indeed, we show that in such graphs, in the case of an edge or a vertex deletion, the distance between any pair of nonadjacent vertices remains unchanged. Then, we study several properties for this class of graphs. Especially, after introducing a family of specific partitions, we show the relations between some of these partitions and hypochordality. Moreover, thanks to these partitions, we characterise minimum hypochordal graphs that are, among connected hypochordal graphs, those that minimise the number of edges for a given number of vertices.

In a second part, we study the complexity, for hypochordal graphs, of problems that are  $\mathcal{NP}$ -hard in the general case. We first show that the classical problems of hamiltonian cycle, colouring, maximum clique and maximum stable remain  $\mathcal{NP}$ -hard for this class of graphs. Then, we analyse graph modification problems : deciding the minimal number of edges to add or delete from a graph, in order to obtain an hypochordal graph. We study the complexity of these problems for several classes of graphs.

**Keywords** : graph, bipartite, tree, disjoint paths, complexity

# Remerciements

Je tiens ici à remercier toutes les personnes qui ont contribué, directement ou simplement par leur soutien, à l'existence de cette thèse.

Je souhaite d'abord remercier Marie-Christine Costa et Christophe Picouveau d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Ils ont été les piliers de cette thèse, par leur investissement dans mon encadrement et ont été très complémentaires dans leurs conseils, tant au niveau scientifique que méthodologique. Il est évident que sans eux cette thèse n'aurait pas abouti, mais sans l'un ou sans l'autre, cette thèse n'aurait pas été la même.

Je remercie également Cristina Bazgan et Dominique de Werra pour leur relecture méticuleuse de mon manuscrit en tant que rapporteurs. J'éprouve un profond respect pour leur travail et je suis extrêmement touchée par le regard encourageant qu'ils ont porté sur mes travaux.

Je voudrais ensuite remercier Nicolas Trotignon et Cédric Bentz pour avoir accepté d'être membres du jury.

Il y a également de nombreuses autres personnes qui ont été à mes côtés pendant tout ou partie de cette thèse.

Tout d'abord les membres de l'équipe OC du CEDRIC, Agnès, Sourour, Eric, Alain, Frédéric, je vous remercie pour votre accueil au sein de l'équipe et pour la bonne ambiance qui y règne.

Je voudrais plus particulièrement remercier les personnes avec lesquelles j'ai partagé mon bureau. D'abord Nicolas, avec quelques visites d'Aurélien, avec qui j'ai passé ma première année de thèse. La présence de Nicolas dans le bureau était synonyme de musique et de bonne humeur. C'est ensuite Amélie qui est venue s'installer à l'accès 12. L'ambiance de travail était alors plus studieuse, mais non moins agréable et la journée se terminait parfois autour d'un verre au Léonard ou ailleurs. Amélie était toujours prête



à prendre sur son temps pour m'entendre me plaindre de cette satanée preuve sur l'hypotriangulation des arbres qui m'a résistée jusqu'au bout et pour m'écouter remettre à plat toutes mes idées afin d'y voir plus clair. D'autres sont passés dans le bureau, pour de plus courtes durées, comme Rina ou Thierry ou encore Sabine, qui a finalement décidé de revenir dans l'équipe pour faire une thèse ; c'est bien le signe que l'on se sent bien dans cette équipe.

Je tiens ensuite à remercier les anciens membres du bureau. Bien que n'ayant jamais partagé ce bureau avec eux, Cédric et Marie m'ont accueilli très chaleureusement lors des repas de bureau autour d'une fondue.

Enfin, au sein du laboratoire, il y a quelques personnes auxquelles je souhaite adresser un petit merci pour leur soutien constant : tout d'abord Rodrigo, Pedro, Leila, Fatima avec qui je déjeunais régulièrement, mais aussi Cédric du Mouza qui a toujours su résister aux pauses que nous prenions avec Christophe mais qui m'a toujours encouragé dans mon travail.

Enfin, je souhaite remercier tous ceux qui n'ont rien à voir dans le déroulement de la thèse à proprement parler mais qui ont été là, qui m'ont soutenue ou qui m'ont permis de me changer les idées. Bien sur, certains ont essayé de comprendre ce sur quoi je travaillais, mais c'est surtout pour leur présence à mes cotés que je tiens à les remercier.

Je pense, tout d'abord, à ma famille, mes parents, mon frère que je remercie pour leur soutien et leurs encouragements. Mes tantes, ma grand-tante et mes cousins en Angleterre, bien que ne me voyant qu'une fois par an, ne manquaient jamais de s'intéresser à l'évolution de mes travaux.

Je souhaite également remercier la famille de Thomas, ses parents (Annick, Christian, Patricia, Patrick), sa soeur Camille, sa cousine Pascale pour avoir régulièrement pris de mes nouvelles, pour m'avoir soutenue tout au long de cette thèse.

Viennent ensuite tous mes amis, dont certains sont déjà cités plus haut. Ces amis qui dernièrement s'inquiétaient beaucoup de connaître la date de la soutenance, ils avaient certainement peur que j'oublie de les inviter. À tous, un grand merci d'avoir été là, merci pour ces week-end, pour ces soirées ou simplement pour ces coups de fil... Sans autre ordre que la galanterie, merci à Anne-Sophie, Tamara, Tiny, Pauline, Pauline, Selma, Laetitia, Amélie, Laure, Maëlle, Claire, Boubou, Amélie, Héloïse, Marine et pour les mes-

sieurs, merci à Ben, BenJ, Jean, Alban, Sam, David, Patrick, Cyril, Pierre, Nicolas, Nicolas, Quentin, Elie, BoYoyo, Arnaud, François, Matthieu. Certains amis sont présents depuis bien avant le début de cette thèse, d'autres depuis peu. J'en ai certainement oublié, j'espère qu'ils ne m'en tiendront pas rigueur.

Et enfin, celui que je ne peux pas oublier, celui qui partage ma vie depuis maintenant cinq ans : Thomas. Merci d'avoir respecté mon choix de faire cette thèse et de m'avoir soutenu pendant trois ans, merci surtout d'avoir été présent et compréhensif pendant les moments difficiles de cette thèse, merci de m'avoir écouté répéter mes différentes présentations et de m'avoir donné des conseils, mais avant tout, merci de me faire rire, merci d'être là, merci d'être toi.



# Table des matières

.....	iii
Résumé .....	v
Abstract .....	vi
Remerciements .....	vii
Table des matières .....	xi
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>5</b>
1 Un peu de théorie de la complexité .....	5
2 Quelques notions de théorie des graphes .....	6
2.1 Notions de base et notations .....	6
2.2 Propriétés de graphes .....	8
2.2.1 Quelques classes de graphes classiques .....	9
2.2.2 Les graphes d'échanges .....	13
2.3 Quelques problèmes de théorie des graphes et leur complexité .....	16
2.3.1 Quelques problèmes classiques .....	16
2.3.2 Problèmes de modification de graphes .....	17
<b>2 Les graphes hypotriangulés</b>	<b>21</b>
1 Définition et caractérisations .....	21
1.1 Définition et exemples .....	21
1.2 Caractérisations équivalentes .....	22
2 Propriétés des graphes hypotriangulés .....	24
2.1 Premières propriétés .....	24
2.2 Propriété de conservation des distances .....	29
3 Partition de graphes .....	30

3.1	Définitions . . . . .	31
3.2	Partitions et graphes hypotriangulés . . . . .	31
3.3	Transformation de graphes, partitions et graphes hypotriangulés . . . . .	33
4	Graphes hypotriangulés minimum . . . . .	36
4.1	Nombre minimal d'arêtes . . . . .	36
4.2	Caractérisation des graphes hypotriangulés minimum	40
4.3	Problèmes classiques pour les graphes hypotriangulés minimum . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Complexité de problèmes dans la classe des graphes hypotriangulés</b>	<b>45</b>
1	Étude des problèmes classiques . . . . .	45
1.1	Cycle hamiltonien . . . . .	45
1.2	Coloration . . . . .	50
1.3	Clique Maximum . . . . .	51
1.4	Stable Maximum . . . . .	52
2	Problèmes de modification . . . . .	52
2.1	$\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES . . . . .	52
2.2	$\mathcal{Bip} \rightarrow (\mathcal{Bip} \cap \mathcal{HT})$ -AJOUT ARÊTES . . . . .	53
2.3	Classes polynomiales pour $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES . . . . .	57
2.3.1	Chaînes et cycles . . . . .	58
2.3.2	Les chenilles . . . . .	59
2.4	$\mathcal{Arbre} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES . . . . .	64
2.4.1	Résultats préliminaires . . . . .	64
2.4.2	Arbres à feuilles uniformes . . . . .	69
2.4.3	Les autres arbres . . . . .	72
2.5	$\mathcal{Grille} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES . . . . .	74
2.5.1	Trouver un minorant du nombre minimal d'arêtes à ajouter à une grille . . . . .	75
2.5.2	$p = 2, q \geq 2$ . . . . .	84
2.5.3	$p$ et $q$ pairs . . . . .	84
2.5.4	$p = 4, q$ quelconque . . . . .	85
2.5.5	Les autres cas . . . . .	85
2.6	$\mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES . . . . .	86

2.6.1	Les arbres . . . . .	86
2.6.2	Les grilles . . . . .	87
2.6.3	Les cycles . . . . .	88
<b>Conclusion</b>		<b>89</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>93</b>
<b>Table des figures</b>		<b>97</b>
<b>Notations des classes de graphes</b>		<b>101</b>



# Introduction

Un mathématicien confronté à un problème de la vie réelle s'empresse de traduire celui-ci en un problème mathématique, qu'il peut alors tenter de résoudre. Dans sa boîte à outils mathématiques, les graphes peuvent s'avérer fort utiles.

Intuitivement, un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées. Plus formellement, un graphe est défini par deux ensembles : son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes, une arête étant une paire de sommets reliés. La théorie des graphes introduit ensuite de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les graphes permettent de modéliser de nombreux problèmes dans le domaines des réseaux, par exemple un réseau de transport (un plan de métro est un graphe, où les sommets représentent les stations), un réseau social (chaque sommet représente une personne et une arête relie deux sommets si les personnes correspondantes se connaissent) ou plus simplement un réseau informatique ; mais également des problèmes de chimie ou de génétique. Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un sujet de recherche toujours prolifique, mais revenons d'abord aux origines de la théorie des graphes.

Le problème des ponts de Koenigsberg a été introduit en 1735 par Léonard Euler, considéré comme le fondateur de la théorie des graphes. La ville de Koenigsberg possède sept ponts enjambant la rivière Pregel (FIG. 1) et Euler s'interroge sur l'existence d'une promenade lui permettant de passer par tous les ponts de la ville une et une seule fois, et de revenir à son point de départ. Euler modélise ce problème par un graphe : un sommet est associé à chaque parcelle de terre délimitée par la rivière et une arête est associée à chaque pont les reliant (voir FIG. 2). Ainsi, une promenade passant par chacun des ponts une et une seule fois est alors un cycle eulérien dans ce



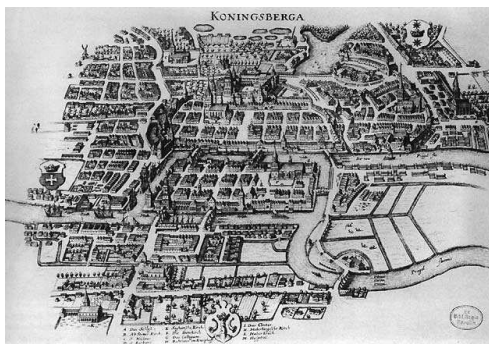


FIGURE 1 – Plan de la ville de Koenigsberg

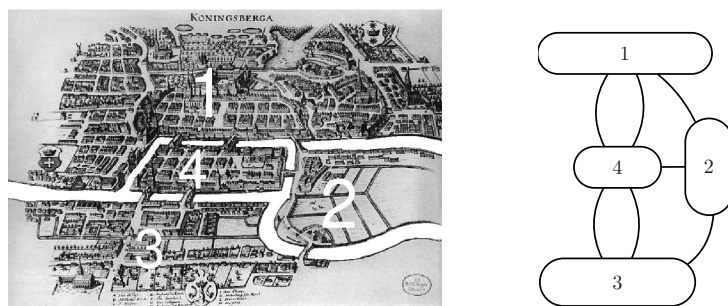


FIGURE 2 – Modélisation du problème des ponts de Koenigsberg

graphe. Euler affirme que décider de l'existence d'un cycle eulérien dans un graphe est un problème "facile" : il faut et il suffit que tous les sommets soient de degré pair.

Cependant, les problèmes qui s'expriment aussi simplement ne se résolvent pas toujours aussi facilement. Considérons, par exemple, le problème du cycle hamiltonien. Étant donné un ensemble de villes reliées par un réseau de routes, existe-t-il un cycle passant par toutes les villes une et une seule fois ? Ce problème se modélise, de façon évidente, en associant à chaque ville un sommet et à chaque route une arête. Un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet est appelé un cycle hamiltonien dans le graphe ainsi construit. Contrairement au problème précédent, décider s'il existe un tel cycle dans un graphe est un problème "difficile" à résoudre.

Voici donc deux problèmes d'apparences similaires mais de difficultés différentes. Afin de pouvoir classifier les problèmes en fonction de leur difficulté de résolution, on se réfère à la théorie de la complexité. Celle-ci s'attache à déterminer la difficulté intrinsèque des problèmes algorithmiques et introduit une hiérarchie entre ces problèmes, fondée sur la difficulté à les résoudre.

Plus concrètement, lorsqu'un problème est classé "facile", il existe au moins un algorithme efficace (polynomial) qui le résout. L'idée est alors de déterminer l'algorithme le plus efficace, le plus rapide possible. Par contre, lorsque le problème est classé "difficile", c'est-à-dire qu'il n'existe aucun algorithme efficace pour le résoudre, plusieurs approches sont envisageables. On peut soit chercher un algorithme qui donne une réponse proche de la solution au problème (avec éventuellement une garantie sur l'approximation), soit considérer le même problème, mais sous des contraintes spécifiques et vérifier si le problème reste "difficile" ou non. Ceci permet de tracer plus nettement la frontière entre les problèmes "difficiles" et "faciles", et d'essayer de comprendre ce qui peut faire qu'un problème est "difficile". C'est cette deuxième approche que nous adoptons dans cette thèse. Ainsi, lorsque nous sommes confronté à un problème de graphes "difficile", nous nous restreignons à une classe de graphes particulière.

Dans cette thèse, nous définissons une nouvelle classe de graphes : *les graphes hypotriangulés*. Les graphes hypotriangulés vérifient que pour tout chemin de longueur deux, il existe une arête ou un autre chemin de longueur deux entre ses extrémités. Pour cette classe de graphes, nous étudions et démontrons plusieurs propriétés. Tout d'abord, nous montrons que dans de tels graphes, la suppression d'une arête ou d'un sommet ne modifie pas la distance initiale entre toutes paires de sommets non adjacents. Ensuite, après avoir introduit une famille de partitions spécifiques, nous montrons les relations entre certains éléments de cette famille et leur caractère hypotriangulé. De plus, grâce à ces partitions, nous caractérisons les graphes hypotriangulés minimum, qui, parmi les graphes hypotriangulés connexes, possèdent un nombre minimal d'arêtes pour un nombre de sommets fixé.

Dans une deuxième partie, nous étudions la complexité, pour la classe des graphes hypotriangulés, de problèmes difficiles dans le cas général. Nous montrons d'abord que les problèmes classiques de cycle hamiltonien, coloration, clique maximum et stable maximum restent difficiles pour cette classe de graphes. Ensuite, nous nous intéressons à des problèmes de modification de graphes. Il s'agit ici de déterminer le nombre minimal d'arêtes à ajouter ou à supprimer à un graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé : nous montrons la complexité de ces problèmes, pour plusieurs classes de graphes.

Dans cette thèse, le Chapitre 1 rappelle rapidement certaines notions et résultats de théorie de la complexité et de théorie des graphes.

Le Chapitre 2 introduit les graphes hypotriangulés et leurs propriétés associées. Après les avoir définis, nous donnons des caractérisations équivalentes et étudions quelques propriétés générales de ces graphes. Nous introduisons ensuite une famille de partitions de graphes et montrent les relations entre les partitions de cette famille et les graphes hypotriangulés. Enfin, nous caractérisons, à l'aide de ces partitions, les graphes hypotriangulés minimum. Dans le Chapitre 3, nous déterminons la complexité de certains problèmes pour la classe des graphes hypotriangulés. Plus précisément, nous étudions d'abord les problèmes de cycle hamiltonien, coloration, clique maximum et stable maximum. Nous nous intéressons ensuite à des problèmes de modification de graphes, par ajout ou suppression d'arêtes, pour obtenir un graphe hypotriangulé.

Enfin, nous donnons nos conclusions et perspectives.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

Dans ce premier chapitre, nous définissons les notions qui serviront dans la suite de ce document. Nous commençons par une brève introduction de la théorie de la complexité. Ensuite nous introduisons des notions et notations de théorie des graphes et en particulier certaines classes de graphes classiques. Enfin, nous rappelons les résultats de complexité pour quelques problèmes de graphes.

### 1 Un peu de théorie de la complexité

Nous introduisons ici quelques notions de complexité. Pour toutes notions non développées ici, nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'excellent ouvrage de Michael R. Garey et David S. Johnson [17].

Nous nous intéressons, pour un problème donné, à déterminer la "difficulté" de résolution de ce problème. Pour cela, nous distinguons les *problèmes de décision* dont la réponse est "oui" ou "non" et les *problèmes de recherche d'une solution* pour lesquels il faut construire une solution (dans notre cas, ces problèmes sont des problèmes d'optimisation). La théorie de la complexité ne couvre que les problèmes décidables, c'est-à-dire les problèmes de décision dont la réponse peut être décidée mécaniquement (par un algorithme, une machine de Turing), ou calculables, c'est-à-dire les problèmes de recherche d'une solution dont la réponse peut être calculée par un algorithme. La théorie de la complexité vise à estimer la "difficulté" de résolution d'un problème. Nous distinguons deux classes de problèmes. La classe  $\mathcal{NP}$  (pour *Nondeterminist Polynomial*) est définie comme la classe

des problèmes de décision que l'on peut résoudre, à l'aide d'un algorithme non déterministe, en temps polynomial par rapport à la taille de la donnée. À l'intérieur de cette classe, la classe  $\mathcal{P}$  des problèmes polynomiaux est l'ensemble des problèmes qui peuvent être décidés sur une machine déterministe polynomiale. Une célèbre conjecture en informatique théorique est que  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  ; cela signifierait que certains problèmes de  $\mathcal{NP}$  ne peuvent pas être résolus par des algorithmes efficaces. Les problèmes les plus "difficiles" à résoudre parmi les problèmes de  $\mathcal{NP}$  sont les problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets. Un problème  $\Pi$  est  $\mathcal{NP}$ -difficile si l'existence d'un algorithme polynomial (déterministe) pour  $\Pi$  implique l'existence d'un algorithme polynomial (déterministe) pour n'importe quel problème de  $\mathcal{NP}$ . Un problème est  $\mathcal{NP}$ -complet s'il est  $\mathcal{NP}$ -difficile et appartient à  $\mathcal{NP}$ . En 1971, Stephen A. Cook est le premier à avoir prouvé l'existence de tels problèmes, en montrant que le problème de satisfaction des formules booléennes SAT est  $\mathcal{NP}$ -complet [8]. Une façon de montrer la  $\mathcal{NP}$ -complétude d'un problème est d'utiliser la notion de réduction polynomiale : étant donné un problème  $\Pi \in \mathcal{NP}$  et un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile  $\Pi^*$ , si  $\Pi^*$  se réduit polynomialement à  $\Pi$ , alors  $\Pi$  est  $\mathcal{NP}$ -complet (ou  $\mathcal{NP}$ -difficile s'il n'est pas dans  $\mathcal{NP}$ ). En règle générale, on montre qu'un problème d'optimisation est  $\mathcal{NP}$ -difficile en montrant que le problème de décision associé est  $\mathcal{NP}$ -complet.

## 2 Quelques notions de théorie des graphes

Commençons par des notations générales de théorie des ensembles. Soit  $A$  un ensemble fini, nous notons  $|A|$  le cardinal de  $A$ . L'inclusion d'un ensemble  $A$  dans un ensemble  $B$  est représentée par  $A \subset B$  ou  $B \supset A$  et par  $\subsetneq$  ou  $\supsetneq$  pour préciser lorsqu'il s'agit d'une inclusion stricte. La différence symétrique de deux ensembles  $A$  et  $B$  s'écrit  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Nous rappelons maintenant des définitions de théorie des graphes. La plupart d'entre elles sont classiques et se trouvent dans [1].

### 2.1 Notions de base et notations

Nous définissons un *graphe simple non orienté*  $G$  par son ensemble de sommets  $V(G)$  et son ensemble d'arêtes  $E(G)$  ;  $G$  n'a ni arêtes multiples,

ni boucles. Quand cela ne porte pas à confusion, nous notons  $V = V(G)$  et  $E = E(G)$ . Avec ces définitions, un graphe  $G$  est alors noté  $G = (V, E)$ .  $n(G) = n$  désigne le cardinal de  $V$  et  $m(G) = m$  représente le nombre d'arêtes du graphe  $G$ . Une arête est une paire non ordonnée de sommets distincts de  $V$ . Une arête de  $G$  est donc un ensemble  $\{u, v\}$  où  $u, v \in V$  et  $u \neq v$ . Cependant, nous adoptons la notation  $uv$  pour représenter une arête,  $vu$  représentant la même arête.

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$ , si  $uv$  appartient à  $E$ , alors  $u$  et  $v$  sont *adjacents*, nous dirons également que  $u$  et  $v$  sont *voisins*. L'arête  $uv$  est *incidente* à  $u$  et  $v$ . Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet  $u$  est appelé le *degré* de  $u$  et est noté  $\deg(u)$ . Nous définissons alors  $\delta(G) = \min_{u \in V} \deg(u)$  le degré minimal d'un sommet de  $G$  et  $\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u)$  le degré maximal. Soit un entier  $k$ , un graphe  $G$  est  $k$ -régulier si tout sommet est de degré  $k$ . Un graphe 3-régulier est dit cubique.

Une *chaîne* de longueur  $k$  entre les sommets  $u$  et  $v$  dans le graphe  $G$  est une séquence de sommets successifs  $\nu_0 \nu_1 \dots \nu_k$  telle que  $\nu_0 = u$ ,  $\nu_k = v$  et  $\nu_{i-1} \nu_i \in E$ . La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes dans la chaîne. Une chaîne est en particulier un *cycle* lorsque  $\nu_0 = \nu_k$ . On appelle  $P_k$  (respectivement  $C_k$ ) une chaîne (respectivement un cycle) de longueur  $k - 1$  (respectivement  $k$ ), ayant  $k$  sommets distincts (on dit que la chaîne/le cycle est élémentaire). Nous appellerons en particulier un  $C_3$  un triangle et un  $C_4$  un carré. Un cycle hamiltonien dans  $G$  est un cycle passant une unique fois par chaque sommet. Un graphe possédant un cycle hamiltonien est un graphe hamiltonien.

Les *composantes connexes* d'un graphe sont définies comme les classes d'équivalence de sommets pour la relation d'accessibilité, c'est-à-dire s'il existe une chaîne entre les sommets. Un graphe est alors *connexe* s'il comporte une unique composante connexe. Un graphe est  *$k$ -sommet-connexe* ou plus simplement  *$k$ -connexe* s'il reste connexe pour toute suppression de  $(k - 1)$  sommets. De manière équivalente,  $G$  est  $k$ -connexe si entre toute paire de sommets de  $G$  il existe  $k$  chaînes disjointes par les sommets. Dans la suite, à moins qu'il ne soit mentionné le contraire, nous travaillons avec des graphes connexes. De cette manière, il est toujours possible de définir la distance entre deux sommets  $u, v$ , notée  $d(u, v)$  : il s'agit du nombre minimal d'arêtes d'une chaîne  $u \dots v$ . L'excentricité (ou écartement) d'un sommet

$u$ , notée  $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$ , est la distance maximale d'un sommet de  $G$  à  $u$ . Le diamètre  $\text{diam}(G)$  du graphe  $G$  est alors l'excentricité maximale d'un sommet de  $G$ . Pour  $u \in V$  et  $i \in \mathbb{N}, i \leq e(u)$ , nous désignons par  $N_i^u = \{v \in V, d(u, v) = i\}$  l'ensemble des sommets de  $G$  à distance  $i$  de  $u$ . La famille  $\{u\} \cup \{N_i^u\}_{i \leq e(u)}$  définit alors une partition de  $V$ . Le cas particulier de l'ensemble des voisins de  $u$  est  $N(u) = N_1^u$ . Deux sommets  $u$  et  $v$  sont *jumeaux* s'ils ont exactement les mêmes voisins, c'est-à-dire  $N(u) = N(v)$ . Le *graphe complémentaire* de  $G = (V, E)$  est le graphe  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  avec  $\overline{E} = V \times V \setminus E$ , c'est-à-dire  $\overline{G}$  a les mêmes sommets que  $G$  et deux sommets distincts de  $\overline{G}$  sont adjacents si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans  $G$ .

Enfin rappelons la distinction entre graphe partiel, sous-graphe induit et sous-graphe (partiel) d'un graphe  $G = (V, E)$ .  $G' = (V, E')$  avec  $E' \subset E$  est un *graphe partiel* de  $G$ , il est obtenu en supprimant des arêtes au graphe initial. Le *sous-graphe* de  $G$  induit par  $V'$  est le graphe  $G' = (V', E')$  tel que  $E' = \{uv \in E, u \in V', v \in V'\}$ . Alors que  $G' = (V', E')$  est un sous-graphe (partiel) de  $G = (V, E)$  si  $G'$  est un graphe partiel du sous-graphe de  $G$  induit par  $V'$  ; ainsi  $V' \subset V$  et  $E' \subset E$  est un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes de  $G$  d'extrémités dans  $V'$  (il est donc obtenu en supprimant des sommets et des arêtes au graphe  $G$ ).

## 2.2 Propriétés de graphes

Nous identifions une propriété de graphes  $\mathcal{P}$  et la classe des graphes satisfaisants cette propriété.

Une propriété de graphes est *non triviale* si elle est vraie pour un ensemble infini de graphes et fausse pour un ensemble infini de graphes. Une propriété de graphes  $\mathcal{P}$  est *héréditaire* si elle est close par suppression de sommets, c'est-à-dire pour tout graphe  $G$  satisfaisant  $\mathcal{P}$ , tout sous-graphe induit de  $G$  satisfait  $\mathcal{P}$ . Une propriété de graphes est *monotone* si elle est close par suppression de sommets ou d'arêtes, c'est-à-dire, pour tout graphe de  $\mathcal{P}$ , tout sous-graphe (non nécessairement induit) satisfait cette propriété. Ainsi, une propriété monotone est héréditaire. De nombreuses classes de graphes très étudiées sont monotones ou héréditaires.

Nous allons maintenant donner la définition de plusieurs classes de

graphes que nous rencontrerons par la suite, nous préciserons leur caractère monotone ou héréditaire éventuel. Les relations d'inclusion entre ses classes de graphes sont résumées FIG. 1.1. Nous renvoyons également le lecteur page 101 pour les notations des classes de graphes qui suivent.

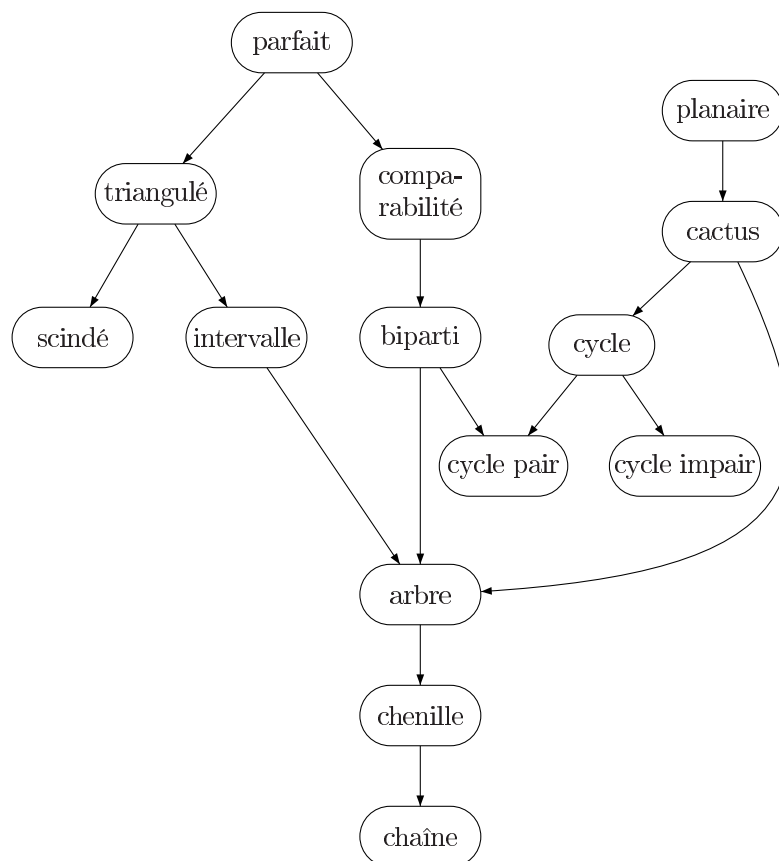


FIGURE 1.1 – Relations d'inclusion de différentes classes de graphes classiques :  $A \rightarrow B$  signifie que  $B \subset A$

### 2.2.1 Quelques classes de graphes classiques

Un sous-graphe induit  $S = (V(S), E(S))$  de  $G$  vérifiant :  $\forall u \in V(S), v \in V(S), uv \notin E(S)$  est appelé un *stable* de  $G$ . Une  $k$ -coloration de  $G$  est une partition des sommets en  $k$  ensembles stables. Le plus petit nombre de stables nécessaires pour une partition de  $V$  est appelé *nombre chromatique* de  $G$  et est noté  $\chi(G)$ . La  $k$ -colorabilité est une propriété monotone.

Le *graphe complet*  $K_n$  d'ordre  $n$  est un graphe simple à  $n$  sommets dans lequel chaque sommet est adjacent aux  $n - 1$  autres. Un sous-graphe induit



complet  $K$  de  $G$  est une *clique* de  $G$  et nous la notons également  $K_n$  (où  $n = |V(K)|$ ). Le cardinal d'une clique maximum est noté  $\omega(G)$ .

Un graphe  $G$  est *parfait* si, et seulement si, pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ ,  $\omega(H) = \chi(H)$ . Un graphe est *de Berge* si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de cycle impair induit de longueur supérieure ou égale à cinq. Le théorème (fort) des graphes parfaits, conjecturé par Claude Berge et démontré par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [7] donne l'égalité de ces classes de graphes : *un graphe est parfait si et seulement si il est de Berge*. Nous notons  $\mathcal{Parf}$  l'ensemble des graphes parfaits. La reconnaissance de ces graphes est polynomiale, en  $\mathcal{O}(n^{10})$  dans [11] et  $\mathcal{O}(n^9)$  dans [6]. Nous verrons dans la partie 2.3.1 de ce chapitre que certains problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets deviennent polynomiaux pour cette classe de graphes. De plus, la perfection est une propriété héréditaire.

Un graphe est *triangulé* (ou *cordal*) s'il ne possède pas de cycle induit de longueur supérieure ou égale à 4.  $\mathcal{Tri}$  désigne l'ensemble des graphes triangulés. Les graphes triangulés sont parfaits et cette propriété est également héréditaire. Les graphes triangulés sont caractérisés par l'existence d'un ordre d'élimination simplicial [16], c'est-à-dire un ordre sur les sommets du graphe tel que, pour tout sommet  $v$ , les voisins de  $v$  apparaissant après celui-ci dans l'ordre d'élimination forment une clique. Cette caractérisation est très utilisée pour l'étude de divers problèmes sur les graphes triangulés. Elle permet, par exemple, la reconnaissance d'un graphe triangulé en temps linéaire  $\mathcal{O}(m+n)$  par un parcours Lex-BFS (en largeur lexicographique) [31] ou par l'algorithme MCS dû à Tarjan et Yannakakis [34]. Une autre caractérisation des graphes triangulés due à Gavril [18] utilise les arbres et leurs sous-arbres : à partir d'un ensemble  $V$  de sous-arbres d'un arbre  $T$ , il est possible de définir un graphe *sous-arbre* qui est le graphe d'intersection de ses sous-arbres. Ce graphe sous-arbre possède un sommet par sous-arbre et ses arêtes relient les sous-arbres qui ont au moins un sommet en commun dans l'arbre  $T$ . Les graphes sous-arbre sont exactement les graphes triangulés.

Un *graphe d'intervalles* est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de la droite réelle (ou de manière équivalente le graphe sous-arbre d'un graphe chaîne). Chaque sommet représente un intervalle et une arête relie deux sommets lorsque les intervalles correspondants sont d'intersection

non vide. Nous notons  $\mathcal{Int}$  la classe des graphes d'intervalles. Ces graphes sont exactement les graphes triangulés dont le complémentaire est un graphe de comparabilité [19]. Cette propriété est également héréditaire.

Les *graphes scindés* (ou *split graphs*) sont les graphes pouvant être partitionnés en une clique et un stable. Ils sont triangulés.

Un *graphe de comparabilité* possède un ordre partiel sur les sommets tel qu'il existe une arête entre toute paire d'éléments comparables. Ils sont également appelés *transitivement orientables*. Cette classe est une sous-classe des graphes parfaits. Tester la transitivité d'une orientation est polynomial (équivalent à un produit matriciel) et la construction d'une orientation transitive d'un graphe, quand elle existe, est linéaire. Ainsi la reconnaissance d'un graphe de comparabilité est polynomiale. Cette propriété est héréditaire.

Un graphe est *biparti* lorsque l'ensemble des sommets  $V$  peut être partitionné en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que  $uv \in E$  implique  $u \in V_1$  et  $v \in V_2$  ou  $u \in V_2$  et  $v \in V_1$ . Dans un but de clarté de lecture, nous notons dans la suite un graphe biparti  $G = (V_1, V_2, E)$  et  $\mathcal{Bip}$  désigne l'ensemble des graphes bipartis. Tout graphe biparti est de comparabilité, en prenant par exemple, une orientation des arêtes de  $V_1$  vers  $V_2$ . Cette propriété est monotone.

Le graphe biparti complet  $K_{n_1, n_2}$  est un graphe biparti tel que  $|V_1| = n_1$  et  $|V_2| = n_2$  et pour tous sommets  $u \in V_1, v \in V_2$ , l'arête  $uv$  appartient à  $E$ . Soient  $S$  et  $S'$  des ensembles de sommets de  $G$  disjoints, on écrira  $S - S'$  pour signifier que  $\forall x \in S, y \in S', xy \in E$ . Ainsi  $(S, S', E \cap S \times S')$  est un sous-graphe (partiel) biparti complet de  $G$ .

Un graphe  $G$  est à *distance héréditaire* si la distance entre deux sommets quelconques d'un sous-graphe induit connexe de  $G$  est égale à la distance entre ces sommets dans  $G$ . Ces graphes ont été introduits par Howorka dans [22]. Nous notons  $\mathcal{DistH}$  la classe des graphes à distance héréditaire. Ils sont caractérisés par l'existence de deux cordes croisées pour tout cycle de longueur au moins cinq, toute chaîne induite est une plus courte chaîne. Comme son nom le laisse entendre, cette propriété de graphes est héréditaire. Ces graphes sont parfaits et la reconnaissance d'un graphe à distance

héréditaire est linéaire [12].

Une sous-classe de la précédente est la classe des *cographe*s : parmi les nombreuses caractérisations équivalentes de ces graphes, citons :

- un cografe est un graphe dont chaque composante connexe est un graphe à distance héréditaire de diamètre au plus 2 ;
- un cografe est un graphe dont tous les sous-graphes induits connexes sont de diamètre inférieur ou égal à 2 ;
- un cografe est un graphe sans  $P_4$  induit.

Ces graphes sont également des graphes de comparabilité. La reconnaissance de ces graphes est, ici encore, linéaire [10] et cette propriété est héréditaire [9].

Un graphe est *planaire* s'il peut être plongé dans le plan, c'est-à-dire si l'on peut le dessiner dans le plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre. Nous notons  $\mathcal{Plan}$  l'ensemble des graphes planaires. Cette propriété est monotone.

Un *cactus* est un graphe connexe dans lequel deux cycles simples ont au plus un sommet commun. De manière équivalente, un cactus est un graphe tel que chaque arête appartient à au plus un cycle. Les cactus sont des graphes planaires. Un graphe est un cactus si et seulement si toute composante 2-connexe est soit un cycle, soit une arête.

Nous rappelons qu'un *graphe cycle*, ou plus simplement un cycle, à  $n$  sommets  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  a pour arêtes  $\{u_i u_{i+1} / i = 1, \dots, n-1\} \cup \{u_n u_1\}$ . Nous notons  $C_n$  le graphe cycle à  $n$  sommets. Il s'agit d'un cas particulier de cactus. Les cycles pairs  $C_{2k}$  sont également bipartis.

Un graphe est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. L'acyclicité est une propriété monotone.

Un *arbre*  $T = (V, E)$  est un graphe non orienté, connexe et acyclique. Il vérifie  $m(T) = n(T) - 1$ . Les arbres sont très étudiés car ils sont à la fois triangulés, bipartis, planaires et à distance héréditaire.

Une *forêt* est un graphe non orienté acyclique. Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre. La classe des forêts est monotone.

Une *arborescence* est un arbre dans lequel un sommet, appelé *racine* de l'arborescence, se distingue des autres. Soit  $T$  un graphe,  $T$  est une arbores-

cence de racine  $r$  si et seulement si  $r$  est relié à tout autre sommet par un chemin unique. Un sommet  $v$  sur l'unique chemin de  $r$  à  $u$  est un *ancêtre* de  $u$ ,  $u$  est alors un *descendant* de  $v$ . La sous-arborescence de racine  $u$  est l'arborescence composée des descendants de  $u$ , de racine  $u$ . Si le dernier arc du chemin de  $r$  à  $u$  est  $vu$ , alors  $v$  est le *parent* de  $u$  et  $u$  est un *enfant* de  $v$ . Un sommet sans enfant est appelé une *feuille* de l'arborescence, les autres sommets sont qualifiés d'internes. La *hauteur* du sommet  $u$  est la longueur du chemin élémentaire le plus long qui relie  $u$  à une feuille de sa descendance. La hauteur d'une arborescence est alors la hauteur de sa racine.

Une *chenille* est un arbre tel que le sous-graphe induit par les sommets de degré supérieur ou égal à 2 est une chaîne. Rappelons qu'un *graphe chaîne*, que nous appellerons une chaîne, de longueur  $n - 1$ , à  $n$  sommets  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  a pour arêtes  $\{u_i u_{i+1} / i = 1, \dots, n - 1\}$ . Nous notons  $P_n = u_1 u_2 \dots u_n$ .

Soient  $p, q \geq 1$ , la *grille* de dimension 2 de taille  $p \times q$ , notée  $G_{p,q}$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ , un sommet  $(a, b)$  a alors pour voisins les sommets (éventuels)  $(a - 1, b)$ ,  $(a + 1, b)$ ,  $(a, b - 1)$ ,  $(a, b + 1)$ . Ce graphe est biparti et planaire.

L'*hypercube*  $H_n$  de dimension  $n$  est un graphe  $n$ -régulier possédant  $2^n$  sommets, correspondants aux sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments. Deux sommets correspondants aux ensemble  $A$  et  $B$  sont adjacents si et seulement si  $|A \triangle B| = 1$ . L'hypercube  $H_n$  est biparti. Il est planaire si et seulement si  $n \leq 3$ .

### 2.2.2 Les graphes d'échanges (ou switching graphs)

Nous introduisons maintenant les graphes d'échanges, une classe de graphes nettement moins classique que les précédentes. Pour cela, il est nécessaire de faire une courte digression sur la tomographie discrète.

La tomographie discrète consiste à reconstruire des objets discrets à partir de leurs projections dans plusieurs directions. Nous nous concentrons ici sur le problème de reconstruction d'une image rectangulaire et bicolore (ou de manière équivalente à la reconstruction d'une matrice binaire dans laquelle chaque coefficient correspond à un pixel de l'image) à partir de

ses projections orthogonales  $(H, V)$  définies comme suit (voir également FIG. 1.2) : étant donnée une matrice binaire  $A$  de taille  $m \times n$ ,  $h_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j}$  est la projection horizontale de la ligne  $i$ , pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $H = (h_1, \dots, h_m)$  est la projection horizontale de  $A$ . De la même façon,  $v_j = \sum_{i=1}^m A_{i,j}$  est la projection verticale de la colonne  $j$ , pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  et  $V = (v_1, \dots, v_n)$  est la projection verticale de  $A$ .

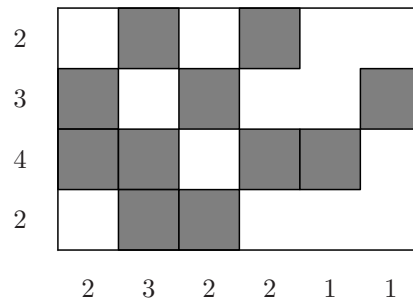


FIGURE 1.2 – Une image bicolore et ses projections

2	0	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	0	1
4	1	1	0	1	1	0
2	0	1	1	0	0	0
	2	3	2	2	1	1

FIGURE 1.3 – La matrice associée à l'image 1.2 et ses projections

Étant donné deux vecteurs entiers  $H$  et  $V$ , se posent alors le problème d'existence d'une matrice binaire dont  $H$  et  $V$  sont les projections horizontale et verticale et le problème de reconstruction d'une telle matrice. Ces problèmes se résolvent polynomialement grâce à la méthode de Ryser. Cependant une solution est rarement unique. Nous nous intéressons aux images équivalentes, c'est-à-dire aux images (ou matrices) qui possèdent les mêmes projections horizontales et verticales. Pour cela, introduisons l'opération d'échange (Définition 1 et FIG 1.4) :

**Définition 1.** *Un élément d'échange d'une matrice binaire  $A$  est une sous-*

matrice de taille  $2 \times 2$  d'une des deux formes suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un échange (ou switch) est une transformation de  $A$  qui change une sous-matrice de type  $A_1$  en  $A_2$  ou vice versa (les autres valeurs dans  $A$  sont inchangées).

Les projections orthogonales d'une matrice binaire demeurent inchangées après un échange.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array}$$

FIGURE 1.4 – Opération d'échange

D'après le théorème de Ryser [32], si deux matrices binaires  $A$  et  $B$  ont les mêmes projections verticales et horizontales, alors il existe une suite finie d'échanges qui transforme  $A$  en  $B$ . Pour un couple de projections orthogonales, le *graphe d'échanges* est alors défini tel que ses sommets sont les matrices binaires qui satisfont ces projections ; deux sommets sont adjacents si et seulement si on peut passer d'une matrice à l'autre par une opération d'échange. Ces graphes ont été introduits successivement par Brualdi [3], puis par Kong et Herman qui les ont appelés graphes de Ryser [26] et enfin par Kaneko et Nagahama [24, 25]. Voir FIG. 1.5 pour des exemples de graphes d'échanges.

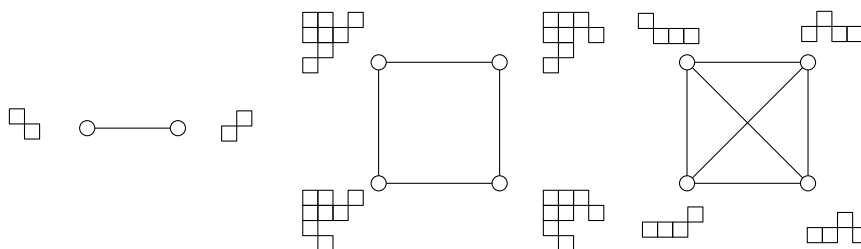





FIGURE 1.5 – Exemples de graphes d'échanges

Parmi les propriétés des graphes d'échanges démontrées dans [24, 25], nous nous intéressons au Lemme 4.2 de [25] (*triangle-square-lemma*), rap- pelé ici.

**Lemme 1.** *Si un graphe d'échanges contient une chaîne de la forme  alors il contient soit  ou  de manière à compléter la chaîne initiale.*

## 2.3 Quelques problèmes de théorie des graphes et leur complexité

Dans cette partie, nous définissons quelques problèmes de théorie des graphes. Pour les problèmes d'optimisation, nous leur associons un problème de décision.

### 2.3.1 Quelques problèmes classiques

Les premiers problèmes décrits ici sont des problèmes classiques de théories des graphes. Leur complexité pour différentes classes de graphes  $\mathcal{P}$  est donnée dans [17].

**$\mathcal{P}$ -CYCLE HAMILTONIEN** Il s'agit de déterminer, étant donné un graphe  $G$  satisfaisant la propriété  $\mathcal{P}$ , si ce graphe possède un cycle hamiltonien. Ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet de manière générale. Il reste  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes cubiques planaires 3-connexes [17], ainsi que pour les graphes bipartis [27]. Le problème  $\mathcal{DistH}$ -CYCLE HAMILTONIEN est quant à lui linéaire [23]. (Rappelons que les notations des classes de graphes se trouvent page 101)

Les trois problèmes suivants sont  $\mathcal{NP}$ -complets. Cependant, ils deviennent polynomiaux pour les graphes parfaits [21] et sont en particulier linéaires pour les cographes [9, 10].

**$\mathcal{P}$ -COLORATION** Le but de ce problème est la détermination du nombre chromatique d'un graphe  $G \in \mathcal{P}$ . Le problème de décision associé est : étant donné un entier  $k \leq |V(G)|$ , décider s'il existe une  $k$ -coloration de  $G$ . Nous notons  $\mathcal{P}$ - $k$ -COLORATION ce problème de décision.

Le problème de décision est polynomial pour  $k = 2$ , mais il est  $\mathcal{NP}$ -complet

pour tout  $k$  fixé supérieur ou égal à 3. En particulier,  $\mathcal{Plan} \cap \{\Delta \leq 4\}$ -3-COLORATION reste  $\mathcal{NP}$ -complet.

**$\mathcal{P}$ -CLIQUE MAXIMUM** On s'intéresse à la recherche d'une clique de cardinalité maximale dans un graphe  $G$  satisfaisant  $\mathcal{P}$ . Dans le problème de décision associé, soit  $k$  un entier, la question est celle de l'existence d'une clique de cardinalité supérieure ou égale à  $k$ .

Ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet de manière générale. Cependant pour toute valeur  $d$  fixée,  $\{\Delta \leq d\}$ - $k$ -CLIQUE MAXIMUM est polynomial.

**$\mathcal{P}$ -STABLE MAXIMUM** On s'intéresse à la recherche d'un stable de cardinalité maximale dans un graphe  $G$  satisfaisant  $\mathcal{P}$ . Dans le problème de décision associé, soit  $k$  un entier, la question est celle de l'existence d'un stable de cardinal supérieur à  $k$ .

Ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes cubiques planaires

### 2.3.2 Problèmes de modification de graphes

Nous commençons par décrire de manière générale les problèmes de modification de graphes, puis nous donnons un état de l'art succinct des problèmes de ce type étudiés dans la littérature. Il s'agit dans ces problèmes d'apporter un nombre minimal de modifications à un graphe possédant la propriété  $\mathcal{P}$  pour obtenir un graphe possédant la propriété  $\mathcal{Q}$ . Lorsque le graphe de départ est quelconque, nous omettons  $\mathcal{P}$ .

**$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ -EDITION ARÊTES** Dans ce problème, on s'autorise à la fois l'ajout et la suppression d'arêtes. Le problème s'écrit :

*Données* Un graphe  $G = (V, E)$  satisfaisant  $\mathcal{P}$

*Question* Quel est le cardinal minimum d'un ensemble d'arêtes  $F$ ,  $F \subset V \times V$  tel que le graphe  $G' = (V, E \Delta F)$  satisfait la propriété  $\mathcal{Q}$ ?

Le problème de décision correspondant  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ - $k$ -EDITION ARÊTES s'écrit :

*Données* Un graphe  $G = (V, E)$  de  $\mathcal{P}$ , un entier  $k$

*Question* Existe-t-il un ensemble d'arêtes  $F$ ,  $F \subset V \times V$  avec  $|F| \leq k$  et tel que le graphe  $G' = (V, E \Delta F) \in \mathcal{Q}$ ?



$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ -AJOUT ARÊTES Dans ce problème, la seule modification autorisée du graphe  $G$  initial est l'ajout d'arêtes, c'est-à-dire  $E \cap F = \emptyset$ . On cherche donc un surgraphe minimum de  $G$ , satisfaisant  $\mathcal{Q}$ .

$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ -SUPPRESSION ARÊTES Dans ce problème, seule la suppression d'arêtes du graphe  $G \in \mathcal{P}$  est autorisée, c'est-à-dire  $F \subset E$ . On cherche donc un graphe partiel maximum de  $G$ , satisfaisant  $\mathcal{Q}$ .

Nous définissons maintenant un problème de modification de l'ensemble des sommets.

$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ -SUPPRESSION SOMMETS Dans ce problème, on autorise uniquement la suppression de sommets. On cherche donc un sous-graphe induit maximum de  $G \in \mathcal{P}$  satisfaisant  $\mathcal{Q}$ .

Les problèmes de modifications de graphes sont fondamentaux en théorie des graphes : dès 1979, Garey et Johnson mentionnent 18 problèmes de ce type dans [17]. De plus, de nombreux problèmes classiques de théories des graphes, qu'ils soient polynomiaux (comme le problème du couplage maximum [14]) ou  $\mathcal{NP}$ -difficiles (comme le problème de la clique maximum) peuvent s'écrire comme des problèmes de modifications de graphes, pour une propriété  $\mathcal{Q}$  appropriée. De plus, ces problèmes ont des applications dans de nombreux domaines, qui vont de la biologie moléculaire (en particulier la cartographie génétique [20]) à l'algèbre numérique (dans l'élimination de Gauss pour des matrices creuses symétriques définies positives [30]).

Ces problèmes ont été largement étudiés, pour de grandes classes de propriétés  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Ainsi Yannakakis et Lewis [28, 35] prouvent que le problème  $\mathcal{Q}$ -SUPPRESSION SOMMETS est  $\mathcal{NP}$ -complet, pour toute propriété  $\mathcal{Q}$  héréditaire et non triviale. Il est à noter que la condition de propriété héréditaire est nécessaire, en effet, la 2-connexité n'est pas héréditaire et le problème de suppression de sommets est linéaire [33] pour obtenir cette propriété. Pour les problèmes d'édition d'arêtes, citons encore Yannakakis qui dans [36] en 1981 démontre que le problème  $\mathcal{Tri}$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet, ce problème s'appelle également le MINIMUM FILL-IN. C'est encore à Yannakakis que l'on doit les deux résultats suivants,  $\mathcal{Plan-k}$ -SUPPRESSION ARÊTES

et  $Comp-k$ -SUPPRESSION ARÊTES sont  $\mathcal{NP}$ -complets [35]. Cependant, le problème  $Dist\mathcal{H} \rightarrow Tri$ -AJOUT ARÊTES est linéaire [2]. Nous ne cherchons pas l'exhaustivité des résultats précédents, le lecteur intéressé est encouragé à aller voir [4, 29] qui regroupent une grande partie des résultats de la littérature pour les problèmes  $\mathcal{Q}$ -ÉDITION ARÊTES. En FIG. 1.6 nous donnons une partie de ces résultats.

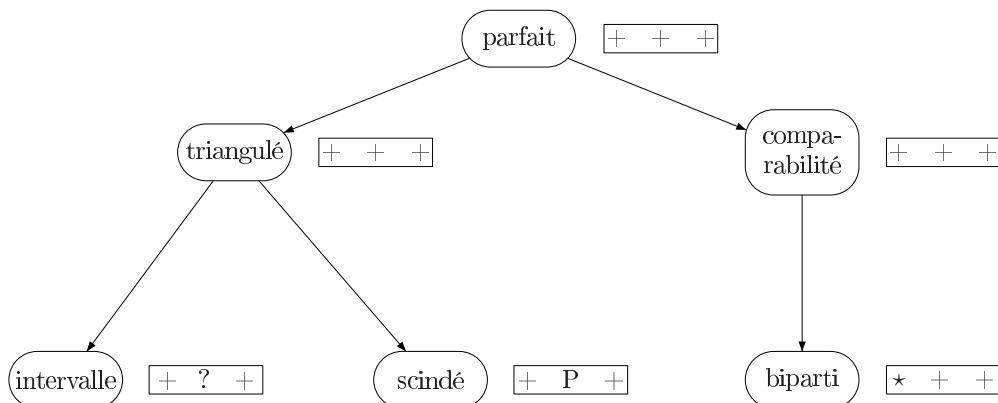


FIGURE 1.6 – Complexité des problèmes de modifications d'arêtes pour quelques classes de graphes.  $A \rightarrow B$  signifie que  $B \subset A$ . La boîte à droite de chaque classe de graphes indique de gauche à droite la complexité des problèmes d'ajout, d'édition et de suppression. (+) signifie que le problème correspondant est  $\mathcal{NP}$ -difficile, (P) polynomial, ( $\star$ ) non significatif et (?) qu'il est toujours ouvert. *Extrait de [29]*

Enfin, nous terminons cet état de l'art par un résultat qui nous servira dans la suite, qui est démontré dans [5] : le problème  $\{\text{diam}(G) \leq D\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet pour tout  $D \geq 2$ .

Après avoir rappelé les notions de base de théorie des graphes, nous avons défini diverses classes de graphes classiques et avons rappelé, pour certaines, quelques propriétés ou caractérisations. Nous avons ensuite mentionné quelques résultats de complexité pour des problèmes dans ces classes de graphes.

Nous abordons maintenant le sujet central de ce mémoire : *les graphes hypotriangulés*. Dans un premier temps, nous définissons ces graphes et étudions certaines propriétés. Ensuite, nous étudions la complexité de quelques problèmes dans cette classe de graphes.



# Chapitre 2

## Les graphes hypotriangulés

Ce chapitre a pour but de définir les graphes hypotriangulés, mais également d'étudier quelques propriétés de ces graphes. Ensuite, nous introduisons des partitions de graphes particulières permettant, dans certains cas, de mettre en évidence le caractère hypotriangulé d'un graphe. Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des graphes hypotriangulés minimum, c'est-à-dire les graphes hypotriangulés connexes possédant un nombre minimal d'arêtes pour un nombre de sommets donné.

### 1 Définition et caractérisations

Dans cette partie, nous allons définir la propriété de graphe d'être hypotriangulé et en donner des caractérisations équivalentes, principalement en termes de conservation de distance en cas de suppression d'un sommet ou d'une arête du graphe.

#### 1.1 Définition et exemples

**Définition 2.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe.  $G$  est hypotriangulé si pour toute paire de sommets  $\{a, b\} \in V^2$  telle que  $ayb$  est un  $P_3$ , alors  $ab \in E$  ou il existe  $z \neq y$  tel que  $azb$  est un  $P_3$ .

Nous notons alors  $\mathcal{HT}$  la classe des graphes hypotriangulés. Quelques premiers exemples de graphes hypotriangulés sont donnés FIG 2.2, et quelques exemples de graphes non hypotriangulés FIG 2.3.

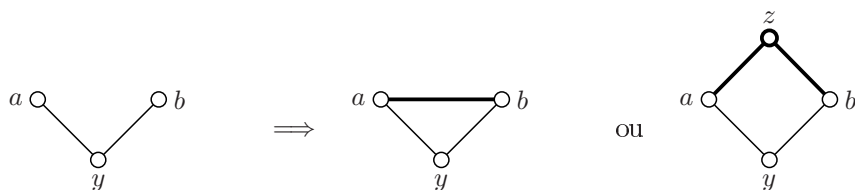


FIGURE 2.1 – Définition de la propriété d'hypotriangulé

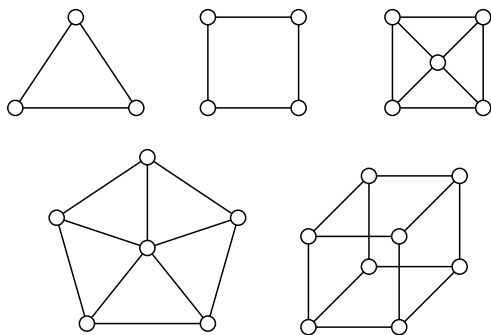


FIGURE 2.2 – Exemples de graphes hypotriangulés

## 1.2 Caractérisations équivalentes

**Proposition 1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe, les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est hypotriangulé ;
2. dans  $G$ , tout  $P_3$  est inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$  ;
3.  $\forall \{a, b\} \in V^2, a \neq b, |N(a) \cap N(b)| = 1 \Rightarrow ab \in E$  ;
4. la suppression d'un sommet quelconque de  $G$  ne modifie pas les distances entre les sommets ;
5. la suppression d'une arête de  $G$  ne modifie pas les distances entre les sommets non adjacents de  $G$  ;
6. pour toute paire de sommets non adjacents  $\{a, b\} \in V^2$ , il existe deux plus courtes chaînes disjointes par les sommets entre  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre 1 et 2 est claire. Nous montrons donc que  $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$ .

(1  $\Rightarrow$  3) Si  $G \in \mathcal{HT}$ , supposons qu'il existe  $a$  et  $b$  dans  $V$  non adjacents tel que  $|N(a) \cap N(b)| = 1$ . Soit  $\{y\} = N(a) \cap N(b)$  donc  $ayb$  est un  $P_3$  de  $G$ . Or  $G$  est hypotriangulé. Soit il existe  $z \neq y$  tel que  $azb$  est un  $P_3$  de  $G$ ,

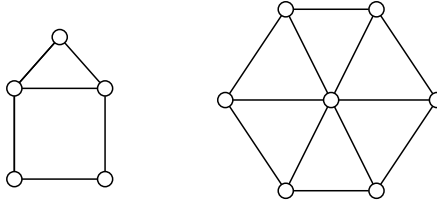


FIGURE 2.3 – Des graphes non hypotriangulés

donc  $z \neq y$  et  $z \in N(a) \cap N(b)$ , ce qui est impossible ; soit l'arête  $ab \in E$  or nous avons supposé que  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents.

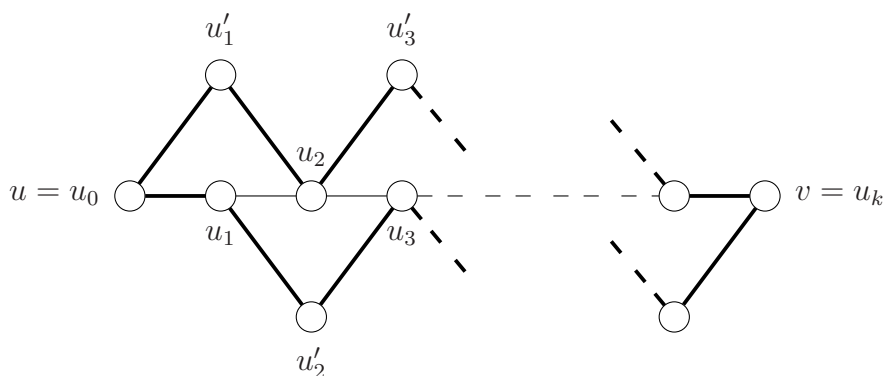
(3  $\Rightarrow$  4) Nous supposons que pour toute paire de sommets de  $G$  dont l'intersection des voisinages est de cardinal 1, l'arête correspondante appartient à  $G$ . Soient  $y \in V$  et  $u, v$  deux sommets de  $G$ , distincts de  $y$ . Soit  $\mu = u_0 u_1 \dots u_k$  avec  $u_0 = u$  et  $u_k = v$  une plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . Si  $y \notin \mu$ , la suppression de  $y$  ne modifie pas la distance entre  $u$  et  $v$ . Si  $y = u_i, i \in \{1, \dots, k-1\}$ , considérons les voisinages des sommets  $u_{i-1}$  et  $u_{i+1}$  :  $N(u_{i-1}) \cap N(u_{i+1}) \neq \emptyset$  car  $y = u_i \in N(u_{i-1}) \cap N(u_{i+1})$ . De plus, l'arête  $u_{i-1} u_{i+1}$  n'appartient pas au graphe  $G$  puisque  $\mu$  est une plus courte chaîne, donc  $|N(u_{i-1}) \cap N(u_{i+1})| \geq 2$ . Soit alors  $z \in N(u_{i-1}) \cap N(u_{i+1}), z \neq y$ .  $\mu' = u_0 \dots u_{i-1} z u_{i+1} \dots u_k$  est une plus courte chaîne de longueur  $k$  entre  $u$  et  $v$  évitant  $y$ .

(4  $\Rightarrow$  5) Si la suppression d'un sommet ne modifie pas les distances entre toutes paires de sommets, il est évident que la suppression d'un arête ne modifie pas non plus les distances entre les sommets non adjacents.

(5  $\Rightarrow$  6) Soient  $u$  et  $v$  deux sommets non adjacents de  $G$  tels que  $\mu = u_0 u_1 \dots u_k$ , avec  $u_0 = u$  et  $u_k = v$ , est une plus courte chaîne entre ces sommets. Pour tout  $u_i \in \mu, (u_i \neq u, v)$ ,  $u_{i-1}$  et  $u_{i+1}$  sont à distance deux, sinon  $\mu$  n'est pas une plus courte chaîne.

D'après 5, pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ , la suppression de l'arête  $u_{i-1} u_i$  ne modifie pas la distance  $d(u_{i-1}, u_{i+1})$  ainsi, il existe  $u'_i, (u'_i \neq u_i)$  tel que  $u_{i-1} u'_i$  et  $u'_i u_{i+1}$  sont des arêtes de  $G$ . Il existe donc deux plus courtes chaînes entre  $u$  et  $v$ , disjointes par les sommets :  $\mu_1 = u_0 u_1 u'_2 \dots u_{2i-1} u'_{2i} \dots u_k$  et  $\mu_2 = u_0 u'_1 u_2 \dots u'_{2i-1} u_{2i} \dots u_k$ , visibles FIG 2.4.

(6  $\Rightarrow$  1) Soient  $a$  et  $b$  deux sommets non adjacents de  $G$  tels que  $ayb$  est un  $P_3$  dans  $G$ . D'après 6, il existe deux plus courtes chaînes disjointes par


 FIGURE 2.4 – Construction de deux plus courtes chaînes entre  $u$  et  $v$ 

les sommets entre  $a$  et  $b$ , donc il existe  $z$  tel que  $azb$  est un  $P_3$  dans  $G$  et  $z \neq y$ . Ainsi  $G$  est hypotriangulé.  $\square$

**Remarque 1.** Soit  $uv \in E$  une arête de  $G$  hypotriangulé, connexe avec  $n \geq 3$ . Comme  $G$  est connexe et  $n \geq 3$ ,  $uv$  appartient à un  $P_3$ . De plus,  $G$  est hypotriangulé, donc  $uv$  appartient à un  $C_3$  ou un  $C_4$ . Ainsi la suppression de l'arête  $uv$  augmente la distance entre les sommets  $u$  et  $v$  de 1 ou 2.

## 2 Propriétés des graphes hypotriangulés

### 2.1 Premières propriétés

#### Intersections avec d'autres classes de graphes

Dans [25], un des premiers résultats montrés sur les graphes d'échanges est leur caractère hypotriangulé. Cette propriété s'avère centrale dans la démonstration de nombreux résultats pour cette classe de graphes. C'est d'ailleurs cette propriété des graphes d'échanges qui nous a poussé à introduire les graphes hypotriangulés.

Nous nous intéressons maintenant à l'intersection de la classe des graphes hypotriangulés avec des classes de graphes plus classiques.

D'après la propriété 6 de la Proposition 1, les graphes hypotriangulés sont 2-connexes.

Le graphe de la figure 2.6 page 30 est un graphe d'intervalle 2-connexe, il est donc triangulé ; cependant il n'est pas hypotriangulé. De même, les

arbres sont triangulés, mais non hypotriangulés dès qu'ils sont de diamètre supérieur ou égal à 2. Cependant, les graphes complets  $K_n$ ,  $n \geq 1$  sont à la fois triangulés et hypotriangulés.

Quant aux graphes bipartis complets  $K_{n_1, n_2}$  pour  $n_1, n_2 \geq 2$  et aux hypercubes, ils sont hypotriangulés et bipartis. En effet, tout  $P_3$  est inclus dans un carré. Les cycles de longueur paire  $C_{2k}$  fournissent un exemple de graphes bipartis 2-connexes non hypotriangulés, pour  $k > 2$ .

Enfin, considérons les graphes distance héréditaire 2-connexes. Un tel graphe  $G$  vérifie que la distance entre deux sommets quelconques d'un sous-graphe induit connexe de  $G$  est égale à la distance entre ces sommets dans  $G$ . En particulier, considérons un sous-graphe induit  $G' = G \setminus \{x\}$ , où  $x$  est un sommet de  $G$ .  $G$  étant 2-connexe,  $G'$  est connexe. La distance entre deux sommets quelconques de  $G'$  est égale à la distance entre ces sommets dans  $G$ . D'après la propriété 4 de la Proposition 1,  $G$  est hypotriangulé. Ainsi tout graphe distance héréditaire 2-connexe est hypotriangulé. La roue de taille 5 (FIG 2.2) est un graphe hypotriangulé, mais n'est pas à distance héréditaire : elle possède un cycle induit de taille 5 sans corde (a fortiori, sans cordes croisées).

La roue de taille 5 montre également que la classe des graphes hypotriangulés n'est pas incluse dans la classe des graphes parfaits.

### Hérédité, monotonie

Nous avons défini l'hérédité et la monotonie d'une propriété de graphe dans le Chapitre 1 et nous avons vu que de nombreuses propriétés de graphes rentrent dans ces catégories. De même, dans la section 2.3 du Chapitre 1, nous avons vu que des problèmes peuvent être étudiés pour l'ensemble des propriétés monotones ou héréditaires. Cependant, la propriété d'être hypotriangulé n'est ni monotone, ni héréditaire. En effet, rappelons qu'un hypercube est hypotriangulé car il existe exactement deux chaînes de longueur deux entre toute paire de sommets à distance deux ; ainsi, après suppression d'un sommet d'un hypercube, nous obtenons un graphe qui possède des sommets à distance deux ayant un unique voisin. Le graphe obtenu n'est donc pas hypotriangulé.



### Probabilité d'être hypotriangulé

Avant de continuer à étudier les graphes hypotriangulés, intéressons-nous à la probabilité pour un graphe aléatoire d'être hypotriangulé. Il s'agit ici d'une brève digression probabiliste qui ne s'étend pas au delà de ce paragraphe. Pour les graphes aléatoires, nous avons choisi le modèle de Erdős-Rényi [15]. Dans ce modèle, la probabilité  $p$  d'existence des arêtes est fixée.

**Proposition 2.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe aléatoire à  $n$  sommets, dans le modèle de Erdős-Rényi, de probabilité d'existence des arêtes  $p$ .*

$$P(G \in \mathcal{HT}) = \left(1 - (1-p)p^2(n-2)(1-p^2)^{n-3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(G \in \mathcal{HT}) = 1$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} G \text{ est hypotriangulé} &\Leftrightarrow \forall u, v \in V, |N(u) \cap N(v)| = 1 \Rightarrow uv \in E \\ &\Leftrightarrow \forall u, v \in V, \neg(|N(u) \cap N(v)| = 1 \wedge uv \notin E) \end{aligned}$$

Calculons donc maintenant la probabilité de l'événement  $|N(u) \cap N(v)| = 1$ . Soit  $w \in V, w \neq u, w \neq v, P(w \in N(u) \cap N(v)) = P(uw \in E) \times P(vw \in E) = p^2$ , par indépendance des événements. Ainsi, chacun des  $n - 2$  sommets distinct de  $u$  et  $v$  appartient à l'intersection des voisinages des sommets  $u$  et  $v$  selon une loi de Bernouilli de probabilité  $p^2$  donc l'évènement  $|N(u) \cap N(v)| = m$  suit une loi binomiale et est de probabilité  $C_{n-2}^m p^2 (1 - p^2)^{n-2-m}$ . Donc  $P(|N(u) \cap N(v)| = 1) = (n-2)p^2(1 - p^2)^{n-3}$ .

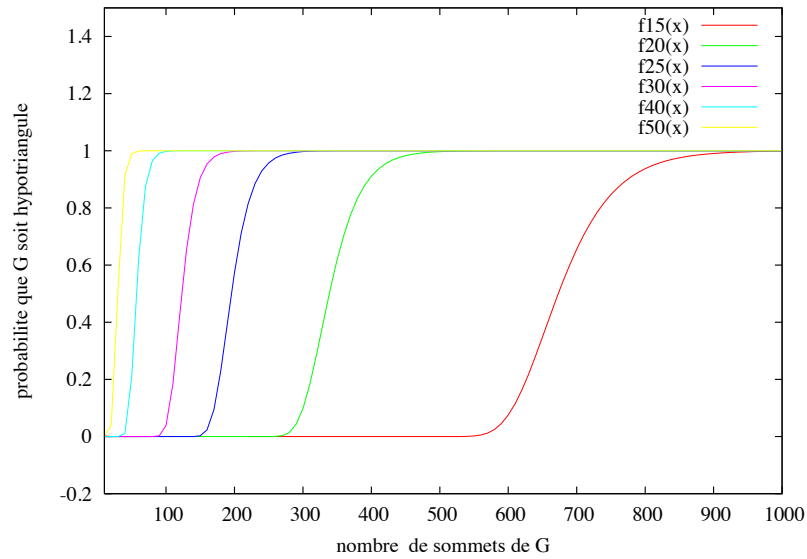
Nous obtenons alors  $P(G \in \mathcal{HT}) = \left(1 - (1-p)p^2(n-2)(1-p^2)^{n-3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

Pour étudier la limite en  $+\infty$ , nous passons au logarithme et obtenons un équivalent de  $\ln(P(G \in \mathcal{HT}))$  :

$$\begin{aligned} \ln(P(G \in \mathcal{HT})) &= \frac{n(n-1)}{2} \ln(1 - (1-p)p^2(n-2)(1-p^2)^{n-3}) \\ &\sim \frac{-(1-p)p^2}{2} n(n-1)(n-2)(1-p^2)^{n-3} \\ &\sim \frac{-(1-p)p^2}{2(1-p^2)^2} n^3(1-p^2)^n \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

□

FIG. 2.5 nous donnons des courbes  $P(G \in \mathcal{HT}) = f_p(n)$  pour quelques valeurs de  $p$ .


 FIGURE 2.5 –  $P(G \in \mathcal{HT}) = f_p(n)$  pour quelques valeurs de  $p$ 

### Reconnaissance des graphes hypotriangulés

La reconnaissance des graphes hypotriangulés est évidemment polynomiale. Cependant nous avons cherché à obtenir un algorithme efficace.

**Proposition 3.** *La reconnaissance d'un graphe hypotriangulé s'effectue en  $O(nm)$ .*

*Démonstration.* Pour tout sommet  $u \in V$ , nous considérons l'ensemble des voisins de  $u$ ,  $N(u)$  et le multiensemble  $\mathcal{U} = \bigsqcup_{v \in N(u)} N(v)$  qui représente l'ensemble des sommets de  $G$  accessibles depuis  $u$  par une chaîne de longueur 2, avec pour multiplicité le nombre de ces chaînes. Tout sommet  $w$  de  $\mathcal{U}$  de multiplicité supérieure ou égale à 2 vérifie  $|N(w) \cap N(u)| \geq 2$ . Ainsi,  $G$  est hypotriangulé si et seulement si pour tout sommet  $u$  de  $G$ , les sommets de multiplicité 1 dans  $\mathcal{U}$  sont des voisins de  $u$ .

Après une phase d'initialisation (en  $\mathcal{O}(n)$ ), l'algorithme 1 parcourt tous les sommets du graphe dans la boucle **pour** de la ligne 4. Pour chaque sommet  $u$ , nous déterminons la multiplicité des sommets  $w$  accessibles depuis  $u$  par un chemin de longueur 2 en  $\mathcal{O}(m)$  (lignes 5 à 9). Ensuite, nous parcourons l'ensemble des voisins de  $u$  pour réinitialiser leur multiplicité à 0 pour le prochain parcours (ligne 10 à 14). Nous reparcourons ensuite l'ensemble des sommets accessibles depuis  $u$  par un chemin de longueur 2 et nous testons

---

**Algorithme 1** Reconnaissance des graphes hypotriangulés

---

**Entrée:** un graphe  $G$

**Sortie:**  $G$  est-il hypotriangulé ?

```

1: pour tout  $u \in V$ 
2:    $\text{mult}(u) \leftarrow 0$ 
3: fin pour
4: pour tout  $u \in V$ 
5:   pour tout  $v \in N(u)$ 
6:     pour tout  $w \in N(v)$ 
7:        $\text{mult}(w) \leftarrow \text{mult}(w) + 1$ 
8:     fin pour
9:   fin pour
10:  pour tout  $v \in N(u)$ 
11:    si  $\text{mult}(v) = 1$  alors
12:       $\text{mult}(v) \leftarrow 0$ 
13:    fin si
14:  fin pour
15:  pour tout  $v \in N(u)$ 
16:    pour tout  $w \in N(v)$ 
17:      si  $\text{mult}(w) = 1$  alors
18:        retourner faux
19:      fin si
20:       $\text{mult}(w) \leftarrow 0$ 
21:    fin pour
22:  fin pour
23: fin pour
24: retourner vrai

```

---

si leur multiplicité vaut 1, auquel cas le graphe n'est pas hypotriangulé. En effet, les voisins de  $u$  ayant été traité précédemment, un tel sommet est nécessairement à distance 2 de  $u$ . Cette dernière opération s'effectue en  $\mathcal{O}(m)$  (lignes 15 à 22).

Ainsi l'algorithme 1 est finalement en  $\mathcal{O}(mn)$ . □

## 2.2 Propriété de conservation des distances et comparaison aux graphes triangulés 2-connexes

La propriété 6 de la Proposition 1 nous apprend que les graphes hypotriangulés sont les graphes qui possèdent deux plus courts chemins sommets disjoints entre toutes paires de sommets non adjacents. Les graphes hypotriangulés sont donc en particulier 2-connexes.

Nous avons vu qu'il n'existe aucune relation d'inclusion entre les classes des graphes triangulés (éventuellement 2-connexes) et les graphes hypotriangulés.

Nous nous intéressons donc à la comparaison des graphes hypotriangulés aux graphes 2-connexes et aux graphes triangulés 2-connexes en terme de conservation de distance en cas de suppression d'un sommet ou d'une arête.

**Proposition 4.** *Soit  $G$  un graphe 2-connexe, la suppression d'un sommet (respectivement d'une arête) peut augmenter la distance entre deux sommets de  $n - 4$  (respectivement  $n - 2$ ).*

*Si de plus, le graphe  $G$  est triangulé, toute arête de  $G$  appartient à un  $C_3$ . Ainsi, la suppression d'une arête quelconque de  $G$  triangulé, 2-connexe augmente d'au plus un la distance entre toute paire de sommets.*

*Démonstration.* Le graphe  $C_n$  ( $n \geq 4$ ) est 2-connexe. Soient  $x, y, z$  trois sommets induisant un  $P_3$  de  $C_n$ , la suppression du sommet  $y$  augmente la distance entre  $x$  et  $z$  de  $n - 4$ . De même, la suppression de l'arête  $xy$  augmente la distance entre  $x$  et  $y$  de  $n - 2$ .

Soit  $G$  triangulé et 2-connexe. Soit  $uv$  une arête de  $G$ . Il existe au moins deux chaînes entre  $u$  et  $v$  car  $G$  est 2-connexe. La première chaîne étant simplement l'arête  $uv$ , considérons  $\mu = u_0u_1 \dots u_k$ , où  $u = u_0$  et  $v = u_k$ , la deuxième plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . Si  $k > 2$  alors  $uu_1 \dots vu$  est un cycle induit sans corde de  $G$  avec  $k + 1 > 3$  sommets. Ceci contredit le fait

que  $G$  est triangulé. Ainsi  $k = 2$  et  $uv$  appartient bien à un triangle dans  $G$ .  $\square$

Cependant, la suppression d'un sommet de  $G$  triangulé 2-connexe peut augmenter la distance entre deux sommets d'une valeur arbitrairement grande. Considérons le graphe de la figure 2.6, les sommets  $u$  et  $v$  et la suppression du sommet  $x$ .

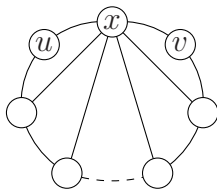


FIGURE 2.6 – Un graphe triangulé 2-connexe, dont la suppression du sommet  $x$  conduit à une augmentation de distance arbitrairement grande

### 3 Partition de graphes

Les partitions de graphes dont nous parlerons ici sont des partitions de l'ensemble des sommets du graphes. De telles partitions permettent d'étudier la structure des graphes appartenant à une même classe. Les graphes bipartis, ainsi que les graphes scindés sont définis à partir d'une partition de leur ensemble de sommets. Dans ces deux cas, l'ensemble des sommets  $V$  est partitionné en deux ensembles et l'on impose des contraintes sur le sous-graphe induit par un des ensembles de la partition : ensemble stable ou clique.

Contrairement aux deux exemples précédents, dans les partitions que nous introduisons dans cette section, le nombre d'ensemble de la partition n'est pas limité à deux et les contraintes de structure ne portent pas sur les arêtes existant ou non au sein des ensembles de la partition, mais sur les arêtes existant entre deux ensembles distincts. Nous définissons également des restrictions de ces partitions que sont les partition-arbre, partition-stable et  $\text{partition}_{\leq k}$ . Ces partitions sont utilisées dans la suite, principalement pour la caractérisation des graphes hypotriangulés minimum, Section 4 de ce chapitre.

### 3.1 Définitions

**Définition 3.** *Un graphe  $H = (\mathcal{B}, \mathcal{F})$  est une partition de  $G$  si*

- *tout sommet  $B_i$  de  $H$  est un ensemble de sommets de  $G$ ,  $B_i \subset V$ ,  $B_i \neq \emptyset$ , nous appelons  $B_i$  un sac ;*
- *l'ensemble des sacs réalise une partition de  $V$  :  $\bigcup_i B_i = V$  et  $\forall i, j$ ,  $i \neq j$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ;*
- *si deux sommets adjacents dans  $G$  sont dans deux sacs différents  $A$  et  $B$  alors  $A - B$  dans  $G$ , et les sacs  $A$  et  $B$  sont adjacents dans  $H$ .*

*Autrement dit, à chaque arête  $AB$  de  $H$  correspond un sous-graphe biparti complet de  $G$  :  $(A \cup B, E \cap A \times B)$ .*

**Remarque 2.**  *$G$  est une partition de lui-même, ainsi pour tout graphe  $G$ , il existe une partition. De plus, aucune condition n'est imposée sur l'adjacence des sommets au sein d'un même sac. De cette manière, le graphe  $H$  avec un seul sommet est une partition de tout graphe ( $H$  ayant un seul sac égal à  $V$ ).*

**Définition 4.**

- *Une partition-arbre  $T$  de  $G$  est une partition telle que  $T$  est un arbre ;*
- *Une partition-stable  $H$  de  $G$  est une partition telle que chaque sac est un stable de  $G$  ;*
- *Une partition  $\leq k$   $H$  de  $G$  est une partition dont tous les sacs sont de taille inférieure ou égale à  $k$ .*

### 3.2 Partitions et graphes hypotriangulés

**Proposition 5.** *Si  $G$  a une partition  $H = (\mathcal{B}, \mathcal{F})$  avec  $|\mathcal{B}| \geq 2$ ,  $H$  connexe et  $\forall B_i \in \mathcal{B}, |B_i| \geq 2$ , alors  $G$  est hypotriangulé.*

*Démonstration.* Soient  $u, v$  deux sommets distincts de  $G$ . Ils sont soit dans un même sac, soit dans des sacs différents.

- Si  $u$  et  $v$  sont dans un même sac  $A$  : la partition  $H$  étant connexe et ayant au moins deux sacs, il existe un sac  $B$  adjacent à  $A$ . Donc  $A - B$  et  $N(u) \cap N(v) \supset B$ . Ainsi  $|N(u) \cap N(v)| \geq |B| \geq 2$ .
- Si  $u$  et  $v$  sont dans des sacs distincts  $A$  et  $B$  : supposons que  $|N(u) \cap N(v)| = 1$ ,  $N(u) \cap N(v) = \{w\}$  ;  $w$  est soit dans le sac  $A$  (ou symétriquement  $B$ ) ou dans un troisième sac  $C$ .

- Si  $w \in A$  : puisque  $v$  et  $w$  sont adjacents dans  $G$  et appartiennent à des sacs différents  $A$  et  $B$  de  $H$ , on a  $A - B$ . Ainsi  $uv \in E$ .
- Si  $w \in C$  : par le même type d'argument que précédemment, dans  $H$ ,  $A - C$  et  $B - C$ . Ainsi  $N(u) \cap N(v) \supset C$  et par conséquent  $|N(u) \cap N(v)| \geq |C| \geq 2$ , ce qui est contredit  $|N(u) \cap N(v)| = 1$ .  $\square$

**Proposition 6.** *Si  $G$  est 2-connexe et possède une partition-arbre  $T = (\mathcal{B}, \mathcal{F})$  avec  $|\mathcal{B}| \geq 3$ , alors  $G$  est hypotriangulé.*

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{B}$  un sac de  $T$  tel que  $|N_T(A)| \geq 2$  ( $A$  n'est pas une feuille de  $T$ ). Le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de  $V \setminus A$  est non connexe. Or  $G$  est 2-connexe, donc  $|A| \geq 2$ . Ainsi les sacs de taille 1 ne se trouvent qu'aux feuilles de  $T$ .

Si  $\mathcal{B}$  contient un seul sac  $A$  de taille strictement supérieure à 1, nous créons une nouvelle partition-arbre  $T'$  de  $G$  en regroupant les sacs de taille 1 en un seul sac de taille supérieure ou égale à 2 ; ceci est possible car les sacs de taille 1 ont le même voisin  $A$ . La Proposition 5 permet de conclure que  $G$  est hypotriangulé.

Dans les autres cas, nous commençons par supprimer les sacs de taille 1 de  $T$ , l'arbre résultant est appelé  $T'$ . D'après la Proposition 5, le sous-graphe  $G'$  de  $G$  induit par les sommets des sacs de  $T'$  est hypotriangulé. Soient  $u, v$  deux sommets de  $G$ , ayant au moins un voisin commun  $w$  :

- Si  $u, v$  sont des sommets de  $G'$  :  $G'$  étant hypotriangulé,  $|N(u) \cap N(v)| = 1$  implique  $uv \in E$ .
- Si  $u, v$  sont tous les deux dans des sacs de taille 1 :  $u$  et  $v$  sont dans des sacs qui sont des feuilles de  $T$  donc  $w$  appartient à un sac  $A$  qui est un noeud interne de  $T$ .  $N(u) = N(v) = A$ , avec  $|A| \geq 2$ .
- Si  $u$  est dans un sac de taille 1 et  $v$  appartient à  $G'$  :  $w$  peut soit être dans le même sac que  $v$ , soit être dans un autre sac de  $T$ .
  - Si  $v$  et  $w$  sont dans un même sac, puisque  $u$  et  $w$  sont adjacents dans  $G$ , nous avons  $uv \in E$ .
  - Si  $w$  est dans un sac  $A$  et  $v$  dans un sac  $B$  de  $T$ , alors  $N(u) \cap N(v) = N(u) = A$  avec  $|A| \geq 2$ .  $\square$

### 3.3 Transformation de graphes, partitions et graphes hypotriangulés

Nous définissons dans cette partie deux transformations, qui à partir d'un graphe quelconque, construisent des graphes hypotriangulés.

**Définition 5.** Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Le graphe  $2G = (U, F)$  est tel que  $U = V \times \{1, 2\}$ ; tout sommet  $v$  de  $G$  correspond à deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  dans  $2G$ ; si  $uv \in E$  alors  $u_i v_j \in F, i, j \in \{1, 2\}$ .

Voir FIG. 2.7 pour un exemple. Notons que  $G$  correspond une partition-stable $\leq 2$  de  $2G$ .

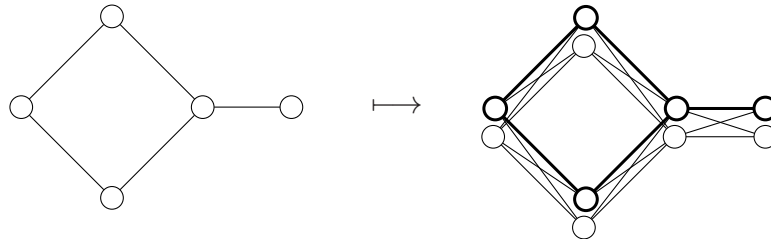


FIGURE 2.7 – Un graphe  $G$  et le graphe  $2G$  correspondant

**Proposition 7.** Pour tout graphe connexe  $G$  ayant au moins deux sommets, le graphe  $2G$  est hypotriangulé.

*Démonstration.*  $G$  correspond à une partition de  $2G$  avec au moins deux sacs, chaque sac étant de taille 2. La Proposition 5 permet de conclure.  $\square$

**Remarque 3.** D'après la Proposition 7, nous pouvons en déduire que pour tout entier  $k$ , il existe des graphes hypotriangulés de diamètre  $k$ , il existe également des graphes hypotriangulés possédant des trous de taille  $k$  (considérons  $2C_k$ ). Ainsi les graphes hypotriangulés ne peuvent pas se décrire par un ensemble fini de sous-graphes induits interdits.

Nous définissons maintenant une nouvelle transformation  $G \mapsto \widetilde{2G}$  similaire à celle de la Définition 5. En fait, il s'agit de la même transformation sauf pour les sommets de degré 1 qui ne sont pas dupliqués. Voir FIG. 2.8 pour un exemple.



**Définition 6.** Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Soient  $V_1 \subset V$  l'ensemble des sommets de  $G$  de degré 1 et  $V_2 = V \setminus V_1$ . Le graphe  $\widetilde{2G} = (U, F)$  est défini comme suit :  $U = V_1 \cup V_2 \times \{1, 2\}$  ; à tout sommet  $u \in V_1$  correspond un sommet  $u_1$  de  $\widetilde{2G}$  ; chaque sommet  $v \in V_2$  a deux sommets correspondants  $v_1$  et  $v_2$  dans  $\widetilde{2G}$  ; si  $uv \in E$  alors  $u_i v_j \in F, i, j \in \{1, 2\}$ .

$G$  correspond à une partition-stable $\leq 2$  de  $\widetilde{2G}$

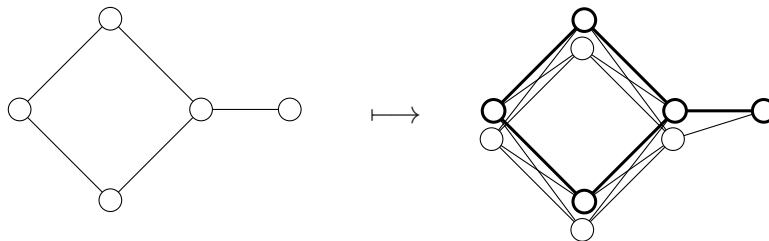


FIGURE 2.8 – Un graphe  $G$  et le graphe  $\widetilde{2G}$  correspondant

**Proposition 8.** Pour tout graphe  $G$  connexe ayant au moins trois sommets, le graphe  $\widetilde{2G}$  est hypotriangulé.

*Démonstration.* Soit  $G'$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de degré supérieur ou égal à 2. Puisque  $n(G) \geq 3$  et  $G$  est connexe,  $n(G') \geq 1$ .

Si  $n(G') = 1$ , alors  $G$  est l'étoile  $K_{1, n(G)-1}$ . Ainsi  $\widetilde{2G}$  est le graphe biparti complet  $K_{2, n(G)-1}$  qui est hypotriangulé car  $n(G) - 1 \geq 2$ .

Si  $n(G') \geq 2$ , alors, d'après la Proposition 7, le sous-graphe induit  $2G'$  de  $\widetilde{2G}$  est hypotriangulé. Par un argument semblable à celui de la preuve de la Proposition 6, nous montrons que  $\widetilde{2G}$  est hypotriangulé.  $\square$

**Proposition 9.** Un graphe  $G$  avec  $n(G) \geq 5$  est de la forme  $\widetilde{2H}$  si et seulement si  $\delta(G) \geq 2$  et  $G$  a une partition-stable $\leq 2$  connexe avec au moins un sac de taille 2 et tout sommet de degré supérieur ou égal à 3 dans un sac de taille 2.

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Si  $G = \widetilde{2H}$  et  $n(G) \geq 5$ , alors  $H$  est une partition-stable $\leq 2$  connexe de  $G$  ayant au moins trois sacs. Ainsi l'un au moins des sacs est de taille 2. Les sommets de  $G$  qui se trouvent dans des sacs de taille 1 sont de degré 2 dans  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $K$  une partition-stable $\leq 2$  connexe de  $G$  vérifiant les conditions de la Proposition 9. Les deux sommets d'un même sac de taille 2 ont le même degré.

Puisque les sommets de degré supérieur ou égal à 3 sont dans des sacs de taille 2 et comme  $\delta(G) \geq 2$ , les sacs de taille 1 ne peuvent contenir que des sommets de  $G$  de degré 2. Les voisins d'un sommet  $x$  de degré 2 dans  $G$  sont dans un même sac de taille 2 : raisonnons par l'absurde et supposons que les voisins de  $x$  sont dans deux sacs différents, ces sacs sont nécessairement de taille 1 (sinon  $x$  aurait plus de deux voisins) et les voisins de  $x$  sont donc de degré 2. En réitérant cet argument aux voisins de  $x$ , nous montrons que  $G$  a une composante connexe qui est un cycle. Comme  $G$  est connexe,  $G$  est un cycle où chaque sommet est un sac de  $K$ . Ceci est impossible puisque  $K$  possède au moins un sac de taille 2 et  $n(G) \geq 5$ .

Donc tout sac de taille 1 dans  $K$  a un unique sac adjacent, qui est de taille 2. Nous construisons une nouvelle partition-stable $\leq 2$  de  $G$ ,  $K'$  telle que si un sommet  $x$  de  $G$  de degré 2 est dans un sac  $A$  de taille 2 de  $K$ , alors dans  $K'$ ,  $A$  est remplacé par deux sacs  $A_1$  et  $A_2$  de taille 1, chacun contenant un seul sommet de degré 2. De cette manière, tout sommet de degré 2 est dans un sac de taille 1 de  $K'$ , chaque sommet de degré supérieur ou égal à 3 est dans un sac stable de taille 2 de  $K'$ . Puisque  $K'$  est une partition-stable $\leq 2$ , les deux sommets d'un même sac de taille 2 ont exactement les mêmes voisins. Ainsi  $G = \widetilde{2K'}$ .  $\square$

**Lemme 2.** Soit  $H$  un graphe connexe avec  $n(H) \geq 3$ .  $\widetilde{2H}$  vérifie  $m(\widetilde{2H}) = 2n(\widetilde{2H}) - 4$  si et seulement si  $H$  est un arbre.

*Démonstration.* Soit  $n_1$  le nombre de sommets de degré 1 de  $H$  et  $n_2 = n(H) - n_1$ .  $\widetilde{2H}$  a  $n(\widetilde{2H}) = n_1 + 2n_2$  sommets. Nous comptons maintenant le nombre d'arêtes de  $\widetilde{2H}$  : toute arête de  $H$  ayant une extrémité de degré 1 correspond à deux arêtes de  $\widetilde{2H}$ , les autres arêtes de  $H$  correspondent à quatre arêtes de  $\widetilde{2H}$  (voir Fig. 2.8), ainsi  $m(\widetilde{2H}) = 2n_1 + 4(m(H) - n_1) = 4m(H) - 2n_1$  arêtes. Nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} m(\widetilde{2H}) &= 2n(\widetilde{2H}) - 4 \\ \Leftrightarrow 4m(H) - 2n_1 &= 2(n_1 + 2n_2) - 4 \\ \Leftrightarrow m(H) &= n_1 + n_2 - 1 \\ \Leftrightarrow m(H) &= n(H) - 1 \\ \Leftrightarrow H &\text{ est un arbre.} \end{aligned}$$

□

## 4 Graphes hypotriangulés minimum

Nous nous intéressons dans cette section au problème suivant : pour tout  $n$ , décrire l'ensemble des graphes hypotriangulés *connexes* ayant un nombre minimal d'arêtes. Nous les appelons *graphes hypotriangulés minimum*. Cette partie s'articule autour de deux axes : nous déterminons une borne inférieure sur le nombre d'arêtes des graphes hypotriangulés ; puis, nous caractérisons la structure des graphes hypotriangulés minimum, en nous aidant pour cela des partitions de graphes définies dans la section précédente.

### 4.1 Nombre minimal d'arêtes

Pour  $n = 2$  (respectivement  $n = 3$ ), il existe un unique graphe connexe hypotriangulé minimum :  $K_2$  (respectivement  $K_3$ ).

Nous considérons donc dans la suite  $n \geq 4$ .

**Lemme 3.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe hypotriangulé connexe et  $x$  un sommet de  $G$ . On a  $\forall 2 \leq i \leq e(x)$  et  $\forall v \in N_i^x$ ,  $|N(v) \cap N_{i-1}^x| \geq 2$  ; c'est-à-dire tout sommet à distance  $i$  de  $x$  a au moins deux voisins à distance  $i - 1$  de  $x$ .*

*Démonstration.*  $G$  étant un graphe hypotriangulé connexe, il existe deux plus courts chemins sommets disjoints entre  $x$  et  $v$ . Soient  $\mu = v_0 v_1 \dots v_{i-1} v_i$  et  $\mu' = v_0 v'_1 \dots v'_{i-1} v_i$  avec  $v_0 = x$  et  $v_i = v$  deux plus courts chemins sommets disjoints entre  $x$  et  $v$ . Les sommets  $v_{i-1}$  et  $v'_{i-1}$  appartiennent à  $N(v) \cap N_{i-1}^x$ . □

**Lemme 4.** *Soit  $G$  un graphe hypotriangulé connexe avec  $n \geq 4$ , on a  $m \geq 2n - 4$ . De plus, si  $m = 2n - 4$  alors  $\delta(G) \leq 3$ .*

*Démonstration.* Comme  $G$  est hypotriangulé, connexe et  $n \geq 4$ , nécessairement  $\delta(G) \geq 2$ . Nous allons trouver une minoration de  $m$  dans les différents cas.

- Si  $\delta(G) = 2$  : soit  $x$  un sommet de degré minimal. D'après le Lemme 3, pour tout sommet  $v \in N_i^x$ ,  $2 \leq i \leq e(x)$ , il existe au moins deux arêtes  $vw_1$  et  $vw_2$  avec  $w_1, w_2 \in N_{i-1}^x$ . De plus, le sommet  $x$  a deux voisins dans  $N_1^x$ , donc  $m \geq 2 \times |\cup_{2 \leq i \leq e(x)} N_i^x| + |N_1^x| = 2(n-3) + 2 = 2n-4$ .
- Si  $\delta(G) = 3$  : pour  $n = 4$ ,  $G = K_4$  qui vérifie  $m = 6 > 2n-4$ . Considérons  $n \geq 5$ . Soit encore  $x$  un sommet de degré minimal et  $y$  un sommet à distance maximale  $k = e(x)$  de  $x$ . Nous utilisons un dénombrement similaire au cas précédent, en utilisant de plus le fait que  $y$  est de degré au moins 3. Cela signifie que  $y$  a au moins un troisième voisin  $z \in N_k^x \cup N_{k-1}^x$  et l'arête  $yz$  n'a pas encore été comptée, nous obtenons alors  $m \geq [2(n-4) + 3] + 1 = 2n-4$ .
- Si  $\delta(G) \geq 4$  : on a  $2m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \delta(G)(v) \geq 4n$  donc  $m \geq 2n$ .

Il est immédiat que  $m = 2n-4$  implique  $2 \leq \delta(G) \leq 3$ .  $\square$

**Lemme 5.** *Soit  $G$  un graphe hypotriangulé connexe vérifiant  $m = 2n-4$  et  $x$  un sommet de  $G$  de degré minimal  $\deg(x) = 2$ , alors  $\forall 2 \leq i \leq e(x)$  et  $\forall v \in N_i^x$ , on a  $|N(v) \cap N_{i-1}^x| = 2$  et toute arête  $uv$  de  $G$  est telle que  $\exists 1 \leq i \leq e(x), u \in N_i^x$  et  $v \in N_{i-1}^x$  (ou symétriquement  $v \in N_i^x$  et  $u \in N_{i-1}^x$ ).*

*Démonstration.* Considérons la preuve du Lemme 4. Puisque  $m = 2n-4$ , pour  $2 \leq i \leq e(x)$ , tout sommet de  $N_i^x$  a exactement deux voisins dans  $N_{i-1}^x$  et toute arête  $uv$  vérifie  $\exists 1 \leq i \leq e(x), u \in N_i^x$  et  $v \in N_{i-1}^x$ .  $\square$

**Lemme 6.** *Soit  $G$  un graphe hypotriangulé connexe vérifiant  $m = 2n-4$  et  $x$  un sommet de  $G$  de degré minimum  $\deg(x) = 3$ , alors  $\forall 2 \leq i \leq e(x)$ ,  $\forall v \in N_i^x$ ,  $|N(v) \cap N_{i-1}^x| = 2$  et toute arête  $uv$  de  $G$  est telle que  $\exists 1 \leq i \leq e(x), u \in N_i^x$  et  $v \in N_{i-1}^x$  (ou symétriquement  $v \in N_i^x$  et  $u \in N_{i-1}^x$ ) ou  $u, v \in N_{e(x)}^x$ . De plus,  $|N_{e(x)}^x| \leq 2$ .*

*Démonstration.* Ce résultat est presque déjà démontré dans la preuve du Lemme 4.  $K_4$  ne vérifie pas  $m = 2n-4$ , donc  $n \geq 5$ . Pour tout sommet  $v \in N_i^x, 2 \leq i < e(x)$ , il existe exactement deux arêtes  $vw_1$  et  $vw_2$  avec  $w_1, w_2 \in N_{i-1}^x$ .

Si  $|N_{e(x)}^x| \geq 3$ , en utilisant l'argument de dénombrement du Lemme 4, alors  $m \geq 2 \times |\cup_{i \geq 2} N_i^x| + |N_1^x| + \frac{1}{2}|N_{e(x)}^x| = 2(n-4) + 3 + \frac{1}{2}|N_{e(x)}^x| > 2n-4$ . Ainsi  $m = 2n-4$  implique  $|N_{e(x)}^x| \leq 2$ .

Ainsi toute arête  $uv$  de  $G$  vérifie  $\exists 1 \leq i \leq e(x), u \in N_i^x$  et  $v \in N_{i-1}^x$  ou  $u, v \in N_{e(x)}^x$ .  $\square$

Nous utilisons les résultats précédents pour prouver le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Un graphe hypotriangulé minimum  $G = (V, E)$  avec  $n \geq 4$  est tel que  $m = 2n - 4$ , il est biparti et  $\delta(G) = 2$  ou  $3$ . De plus, il existe un unique graphe hypotriangulé minimum vérifiant  $\delta(G) = 3$  qui est le cube. En outre, il existe une famille infinie de graphes hypotriangulés minimum avec  $\delta(G) = 2$ .*

*Démonstration.*

- Si  $\delta(G) = 2$  :  $G = K_{2, n-2}$  vérifie  $m = 2n - 4$  et  $G$  est hypotriangulé. Pour  $m = 2n - 4$ , tout graphe hypotriangulé est nécessairement biparti ; en effet, nous avons vu dans la preuve du Lemme 5 que toute arête  $uv$  de  $G$  est telle que  $u \in N_i^x$  et  $v \in N_{i-1}^x, 1 \leq i \leq e(x)$ . Ainsi les ensembles  $\bigcup_{i \text{ pair}} N_i^x$  et  $\bigcup_{i \text{ impair}} N_i^x$  forment une partition de  $V$ .
- Si  $\delta(G) = 3$  : le cube satisfait  $m = 2n - 4$  et est hypotriangulé. Soit  $x$  un sommet de degré minimal et  $k = e(x)$  l'excentricité de  $x$ . Nous montrons d'abord que  $k \geq 3$ . D'après le Lemme 6, nous savons que  $|N_k^x| \leq 2$ . Si  $|N_k^x| = 1$ , soit  $N_k^x = \{y\}$ , alors  $k = 2$  est impossible :  $N(x) = N(y) = N_1^x$  et  $N_1^x$  est un stable donc les sommets de  $N_1^x$  sont de degré 2. Si  $|N_k^x| = 2$ , soit  $N_k^x = \{y, z\}$ . Nécessairement  $yz \in E$  : raisonnons par l'absurde et supposons que  $yz \notin E$ , comme  $\delta(G) = 3$ ,  $y$  et  $z$  ont chacun au moins trois voisins dans  $N_{k-1}^x$ . Ainsi en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 4, nous obtenons  $m \geq 2|\bigcup_{i=2}^{k-1} N_i^x| + |N(x)| + 2\delta(G) = 2(n - 6) + 9 = 2n - 3$ . Donc  $yz$  est la seule arête dont les deux extrémités appartiennent au même ensemble  $N_i^x$ . Voir FIG. 2.9 pour une illustration de la situation. Soit  $v$  un voisin de  $y$  appartenant à  $N_{k-1}^x$ , le  $P_3$   $zyv$  implique l'existence de l'arête  $vz$  d'où  $N(y) \cap N_{k-1}^x = N(z) \cap N_{k-1}^x$ . De plus  $N(y) \cap N_{k-1}^x = N_{k-1}^x$  : par l'absurde, si il existe  $u \in N_{k-1}^x \setminus N(y)$ ,  $N(u) \subset N_{k-2}^x$ , donc d'après le Lemme 6,  $|N(u)| = 2$  or  $\delta(G) = 3$ . D'où finalement,  $|N_{k-1}^x| = 2$ .  $k = 2$  est donc impossible puisque  $N_{k-1}^x = N_1^x$  et  $|N_1^x| = 3$ .

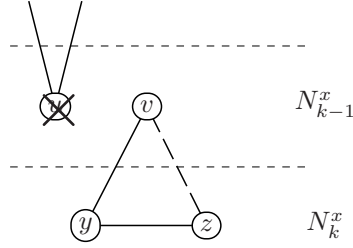


FIGURE 2.9 – Les sommets  $y$  et  $z$  de  $N_k^x$  sont voisins

Finalement nous obtenons  $k \geq 3$ . Soient  $v_1, v_2, v_3 \in N_1^x$  les trois voisins de  $x$ . Comme  $G$  est hypotriangulé et  $N_1^x$  est un stable,  $v_2$  et  $v_3$  ont un autre voisin commun  $w_1 \in N_2^x$ . D'après le Lemme 6,  $N(w_1) \cap N_1^x = \{v_2, v_3\}$ . Par symétrie, il existe un sommet  $w_2 \neq w_1$  tel que  $N(w_2) \cap N_1^x = \{v_1, v_3\}$  ; et il existe un sommet  $w_3 \neq w_1, w_3 \neq w_2$  tel que  $N(w_3) \cap N_1^x = \{v_1, v_2\}$ . D'où  $N_2^x = \{w_1, w_2, w_3\}$ .

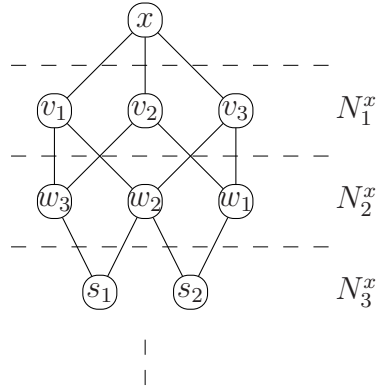


FIGURE 2.10 –  $\delta(G) = 3, k \geq 3, |N_3^x| \geq 2$

Supposons que  $|N_3^x| \geq 2$  : puisque  $|N_2^x| = 3, \delta(G) = 3$  et d'après le Lemme 6,  $\forall s \in N_3^x, |N(s) \cap N_2^x| = 2$ , il existe deux sommets  $s_1, s_2 \in N_3^x$  tels que  $N(s_1) \cap N_2^x = \{w_2, w_3\}$  et  $N(s_2) \cap N_2^x = \{w_1, w_2\}$ , la figure 2.10 représente cette configuration. Les sommets  $v_1$  et  $s_2$  ont un unique voisin commun  $w_2$ , ce qui est impossible car  $G$  est hypotriangulé.

Donc  $|N_3^x| = 1$ . De plus, les graphes hypotriangulés n'ont pas de sommets d'articulation donc  $k = 3$  et  $G$  est le cube.  $\square$

## 4.2 Caractérisation des graphes hypotriangulés minimum de degré minimal 2

D'après le Théorème 1, le seul graphe hypotriangulé minimum ayant pour degré minimal  $\delta(G) = 3$  est le cube et il n'existe aucun graphe hypotriangulé minimum pour  $\delta(G) \geq 4$ . Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes hypotriangulés minimum vérifiant  $\delta(G) = 2$  (il existe une infinité de tels graphes). Nous rappelons que ces graphes satisfont  $m = 2n - 4$ , ils sont bipartis, les ensembles  $N_i^x$  sont stables et tout sommet  $v$  à distance  $i$  de  $x$  a exactement deux voisins à distance  $(i - 1)$  de  $x$ .

**Lemme 7.** *Soit  $G$  un graphe connexe hypotriangulé minimum avec  $n \geq 4$  et  $\delta(G) = 2$ , soit  $x$  un sommet de  $G$  de degré 2. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $N_i^x$ ,  $2 \leq i \leq e(x)$ . Si  $N(u) \cap N(v) \cap N_{i+1}^x \neq \emptyset$  alors  $|N(u) \cap N(v) \cap N_{i-1}^x| = 2$ .*

*Démonstration.* D'après le Lemme 5, nous savons que  $u$  et  $v$  ont deux voisins dans  $N_{i-1}^x$ . Soit  $w \in N_{i+1}^x$  un voisin commun de  $u$  et  $v$ . Supposons que  $u$  a un voisin  $a$  dans  $N_{i-1}^x$  non adjacent à  $v$ . La figure 2.11 illustre cette hypothèse.  $w$  a deux voisins dans  $N_i^x$  qui sont  $u$  et  $v$ .  $auw$  est un  $P_3$  mais ni  $aw$ , ni  $av$  ne

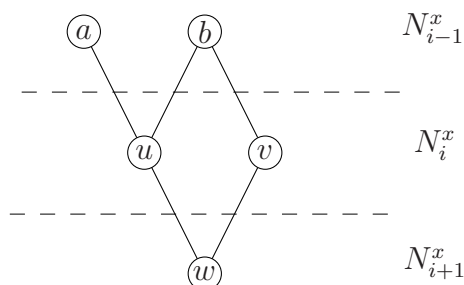


FIGURE 2.11 –  $a \in N_{i-1}^x$  adjacent à  $u$  et non adjacent à  $v$

sont des arêtes de  $G$  ; ce qui contredit le fait que  $G$  est hypotriangulé.  $\square$

Rappelons que deux sommets  $y$  et  $z$  sont jumeaux si  $N(y) = N(z)$ .

**Lemme 8.** *Soit  $G$  un graphe connexe hypotriangulé minimum avec  $\delta(G) = 2$  et  $n \geq 5$ . Tout sommet  $y$  de degré  $\deg(y) \geq 3$  a un sommet jumeau  $z$ . De plus,  $z$  est unique.*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$  tels que  $\deg(x) = 2$  et  $\deg(y) \geq 3$ . Il existe  $1 \leq i \leq e(x)$  tel que  $y \in N_i^x$ .

Si  $y \in N_1^x$ , soit  $N_1^x = \{y, z\}$ . Montrons que  $z$  est le jumeau de  $y$ . D'après le Lemme 5,  $yz \notin E$  et tout sommet  $w \in N_2^x$  a deux voisins dans  $N_1^x$  qui sont nécessairement  $y$  et  $z$ . Donc  $N(y) = N(z) = \{x\} \cup N_2^x$  et  $z$  est l'unique jumeau de  $y$ .

Si  $y \in N_i^x, i \geq 2$ . Toujours d'après le Lemme 5,  $|N(y) \cap N_{i-1}^x| = 2$ ; soient  $a$  et  $b$  les deux voisins de  $y$  dans  $N_{i-1}^x$ , voir FIG. 2.12. Comme  $\deg(y) \geq 3$ ,  $y$  a au moins un voisin  $w \in N_{i+1}^x$ . Or  $|N(w) \cap N_i^x| = 2$ ; soit  $z$  tel que  $N(w) \cap N_i^x = \{y, z\}$ .

Montrons que  $N(z) = N(y)$ .  $G$  étant hypotriangulé minimum, nous savons que  $N(y) \subset N_{i-1}^x \cap N_{i+1}^x$ . Or  $N(y) \cap N(z) \cap N_{i+1}^x \neq \emptyset$ , les Lemme 5 et 7 nous assurent que  $N(y) \cap N_{i-1}^x = N(z) \cap N_{i-1}^x = \{a, b\}$ . Supposons qu'il existe  $u \in N_{i+1}^x \cap N(y) \setminus N(z)$ . Soit  $v \neq z$  tel que  $N(u) \cap N_i^x = \{y, v\}$ . Si  $\deg(u) = 2$  ou  $\deg(w) = 2$ ,  $N(u) \cap N(w) = \{y\}$ ;  $uw \notin E$  et  $vw \notin E$ , ceci est donc impossible. D'où  $\deg(u) \geq 3$  et  $\deg(w) \geq 3$ .

$uw \notin E$  et  $N(u) \cap N(w) \neq \emptyset$  donc on a  $|N(u) \cap N(w)| \geq 2$ ; ainsi il existe

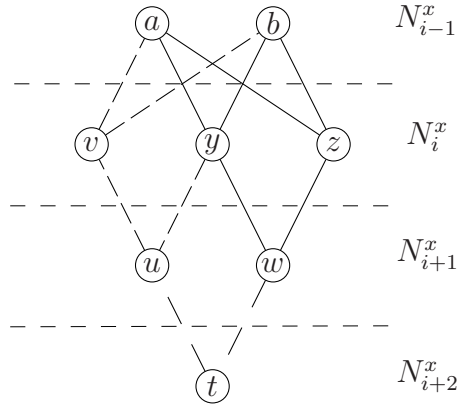


FIGURE 2.12 – Gémellité de  $y$  et  $z$

$t \in N(u) \cap N(w) \cap N_{i+2}^x$ . D'après le Lemme 5,  $N(t) \cap N_{i+1}^x = \{u, w\}$ , donc  $N(z) \cap N(t) = \{w\}$ , ce qui est impossible car  $zt \notin E$ .

Montrons maintenant que le jumeau  $z$  de  $y$  est unique. Par l'absurde, supposons que  $y$  a deux jumeaux  $z$  et  $z'$  (ce sont donc des triplés). Alors  $N(y) = N(z) = N(z')$  et  $\deg(y) = \deg(z) = \deg(z') \geq 3$ . Il existe donc  $t \in N(y) \cap N_{i+1}^x$  mais  $|N(t) \cap N_i^x| \geq 3$ , ce qui contredit le Lemme 5.  $\square$



**Théorème 2.**  $G$  est un graphe connexe hypotriangulé minimum avec  $n(G) \geq 4$  et  $\delta(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est de la forme  $\widetilde{2T}$  où  $T$  est un arbre avec  $n(T) \geq 3$ .

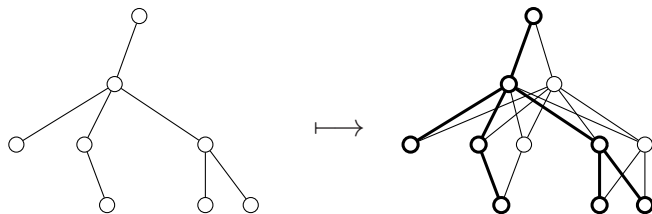


FIGURE 2.13 – Un arbre  $T$  et le graphe  $\widetilde{2T}$  correspondant

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ )

- Si  $n(G) = 4$ , le seul graphe hypotriangulé minimum est  $G = C_4$  et  $G = \widetilde{2P_3}$ .
- Si  $n(G) \geq 5$ , d'après le Lemme 8, tout sommet  $y$  de degré  $\deg(y) \geq 3$  a un unique jumeau  $z$ . Soit alors  $H$  une partition-stable $\leq 2$  de  $G$  construite comme suit : tout sommet  $w$  de  $G$ ,  $\deg(w) = 2$  forme un sac de  $H$  ; tout sommet  $y$ ,  $\deg(y) \geq 3$  est couplé à son jumeau  $z$  pour former un sac stable de taille 2 de  $H$ . La caractérisation de la Proposition 9 implique que  $G = \widetilde{2H}$ . De plus,  $G$  vérifie  $m(G) = 2n(G) - 4$ , donc le résultat du Lemme 2 assure que  $H$  est un arbre.

( $\Leftarrow$ ) D'après la Proposition 8,  $\widetilde{2T}$  est un graphe hypotriangulé et par le Lemme 2,  $m(\widetilde{2T}) = 2n(\widetilde{2T}) - 4$ . Donc  $\widetilde{2T}$  est un graphe hypotriangulé minimum.  $\square$

**Théorème 3.** Un graphe  $G$  avec  $n(G) \geq 4$  et  $\delta(G) = 2$  est un graphe hypotriangulé minimum si et seulement si  $G$  est 2-connexe et il existe une partition-arbre-stable $\leq 2$   $T$  de  $G$ .

*Démonstration.* Pour  $n(G) = 4$ , le seul graphe  $G$  à 4 sommets hypotriangulé minimum est  $C_4$  qui est bien 2-connexe et il possède une partition-arbre-stable $\leq 2$ . Réciproquement, un graphe  $G$  à 4 sommets, 2-connexe et ayant une partition-arbre-stable $\leq 2$  est nécessairement  $C_4$ . Nous considérons maintenant  $n(G) \geq 5$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $G$  est un graphe hypotriangulé minimum,  $G$  est 2-connexe et d'après le Théorème 2,  $G = \widetilde{2T}$  où  $T$  est un arbre. Donc  $T$  est une partition-arbre-stable $\leq 2$  de  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $G$  un graphe tel que  $T$  est une partition-arbre-stable $\leq 2$  de  $G$ . Comme  $n(G) \geq 5$ , une partition-arbre-stable $\leq 2$  de  $G$  a au moins trois sacs ; alors, d'après la Proposition 6,  $G$  est hypotriangulé. Donc  $m(G) \geq 2n(G) - 4$ .

Il nous reste à montrer que, parce que  $G$  a une partition-arbre-stable $\leq 2$   $T$ ,  $m(G) \leq 2n(G) - 4$  :

$n_1(T)$  désigne le nombre de sacs de  $T$  de taille 1.  $T$  étant un arbre, il vérifie  $m(T) = n(T) - 1$  ;  $m_1(T)$  désigne alors le nombre d'arêtes de  $T$  incidentes à des sacs de taille 1. Comme  $G$  est 2-connexe, tout sac interne de  $T$  est de taille 2, donc  $m_1(T) = n_1(T)$ .

On a alors  $n(G) = n_1(T) + 2 \times (n(T) - n_1(T)) = 2n(T) - n_1(T)$  et  $m(G) = 2m_1(T) + 4[(n(T) - 1) - m_1(T)] = 2(2n(T) - m_1(T)) - 4$ . Puisque  $m_1(T) = n_1(T)$ ,  $m(G) = 2n(G) - 4$ .  $\square$

### 4.3 Problèmes classiques pour les graphes hypotriangulés minimum

Cette caractérisation des graphes hypotriangulés minimum implique que les problèmes combinatoires classiques sont polynomiaux pour ces graphes : les graphes hypotriangulés minimum sont bipartis, ils sont donc 2-coloriable, la taille maximale d'une clique est 2 et le problème du stable maximum est polynomial ; ces graphes ne possèdent pas de cycle hamiltonien sauf le cube et  $\widetilde{2P}_k, \forall k \geq 3$ .

Dans le chapitre suivant, nous commençons par considérer ces mêmes problèmes dans le cas des graphes hypotriangulés (quelconques). Puis nous nous intéressons à des problèmes de modification de graphes.



# Chapitre 3

## Complexité de problèmes dans la classe des graphes hypotriangulés

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la complexité de problèmes de graphes, dans le cas particulier des graphes hypotriangulés. Nous commençons par des problèmes classiques puis nous considérons des problèmes de modification de graphes.

### 1 Étude des problèmes classiques

#### 1.1 Cycle hamiltonien

Il existe des graphes hypotriangulés qui ne sont pas hamiltoniens. En effet, nous avons constaté que tout graphe biparti complet est hypotriangulé, or  $K_{2,n}$  ne possède pas de cycle hamiltonien pour  $n > 2$ . Nous nous intéressons donc au problème de décider, étant donné un graphe hypotriangulé, s'il est hamiltonien ou non.

$\mathcal{HT}$ -CYCLE HAMILTONIEN est le problème consistant à décider si un graphe hypotriangulé est hamiltonien ou non et  $3\mathcal{R}$ -CYCLE HAMILTONIEN le problème consistant à décider si un graphe 3-régulier est hamiltonien.

**Théorème 4.** *Le problème  $\mathcal{HT}$ -CYCLE HAMILTONIEN est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Le problème  $3\mathcal{R}$ -CYCLE HAMILTONIEN est  $\mathcal{NP}$ -complet [17]. Nous allons montrer que  $3\mathcal{R}$ -CYCLE HAMILTONIEN se réduit à  $\mathcal{HT}$ -CYCLE HAMILTONIEN.

Le problème  $\mathcal{HT}$ -CYCLE HAMILTONIEN est bien dans  $\mathcal{NP}$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe 3-régulier. Nous construisons un graphe hypotriangulé  $H = (U, F)$  par une transformation polynomiale à partir de  $G$ .

- Chaque sommet  $a$  de  $G$  devient un sous-graphe  $H_a$  de  $H$  isomorphe à  $K_6$  ;
- chaque arête  $ab$  de  $G$  est remplacée par un gadget (voir FIG. 3.1) relié à  $H_a$  et  $H_b$  par deux de leurs sommets. Les sommets  $a_1, a_2$  de  $H_a$  et  $b_1, b_2$  de  $H_b$  sont reliés aux deux sommets  $u_1$  et  $u_2$  du gadget.

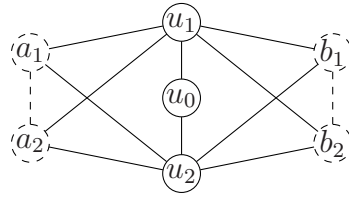


FIGURE 3.1 – Le gadget correspondant à l’arête  $ab$  de  $G$

$G$  est un graphe 3-régulier, un sommet  $a$  a donc trois arêtes incidentes  $ab, ac$  et  $ad$ . La figure 3.2 montre le voisinage d’un sommet  $a$  dans  $G$  et le sous-graphe correspondant de  $H$ .

Vérifions d’abord que le graphe  $H$  ainsi construit est bien hypotriangulé. Pour cela, nous considérons les voisins communs des sommets à distance deux (FIG. 3.2). Étant données les symétries de  $H$ , nous ne considérons que les sommets à distance deux de  $a_1$  plus le couple  $\{u_1, u_2\}$ . Les sommets à distance deux de  $a_1$  sont  $b_1$  (et  $b_2$ ),  $u_0$  et  $v_1$  (et  $v_2$ ).

- Les sommets  $a_1$  et  $b_1$  ont deux voisins communs  $u_1$  et  $u_2$  ;
- les sommets  $a_1$  et  $u_0$  ont deux voisins communs  $u_1$  et  $u_2$  ;
- les sommets  $a_1$  et  $v_1$  ont deux voisins communs  $a_5$  et  $a_6$  ;
- les sommets  $u_1$  et  $u_2$  ont cinq voisins communs  $a_1, a_2, b_1, b_2$  et  $u_0$ .

Nous montrons maintenant que si  $G$  a un cycle hamiltonien alors il existe un cycle hamiltonien dans  $H$ . Soit  $\mathcal{C}_G$  un cycle hamiltonien de  $G$  : à partir d’un sommet quelconque  $v \in V$ ,  $\mathcal{C}_G$  induit un ordre total  $<$  sur  $V$ .

Pour une arête  $xy$  de  $G$ ,  $xy \in \mathcal{C}_G$ , nous associons une chaîne hamiltonienne dans le gadget entre les sous-graphes  $H_x$  et  $H_y$  de  $H$  comme dans la figure 3.3.

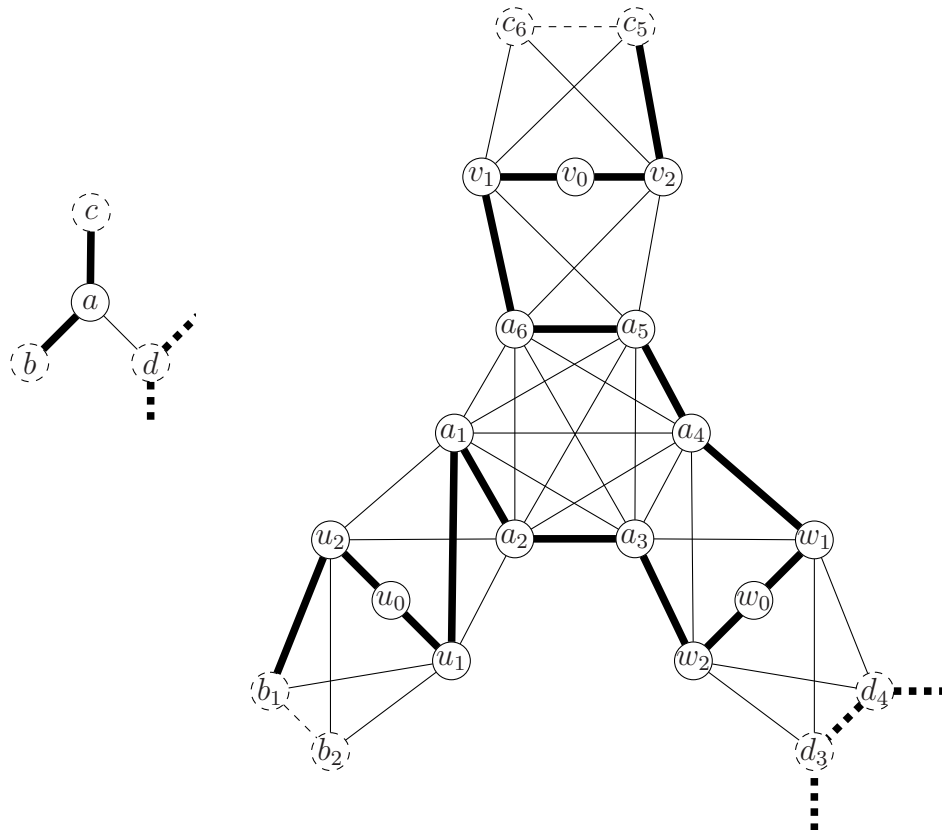


FIGURE 3.2 – Le voisinage d'un sommet  $a$  de  $G$  et le sous-graphe de  $H$  correspondant

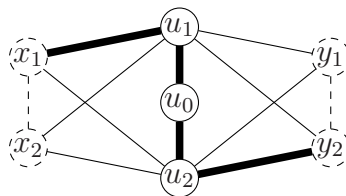


FIGURE 3.3 – Chaîne dans  $H$  correspondant à une arête choisie dans le cycle hamiltonien de  $G$

Pour une arête  $xy$  de  $G$  avec  $xy \notin \mathcal{C}_G$  et  $x < y$ , nous associons une chaîne dans le gadget, ne reliant pas  $H_x$  et  $H_y$ , comme dans la figure 3.4.

Pour tout sommet  $a$  de  $G$ , deux des trois arêtes incidents en  $a$  appartiennent à  $\mathcal{C}_G$ . Supposons que  $b, c, d$  sont les trois voisins de  $a$  et  $ab$  et  $ac$  appartiennent à  $\mathcal{C}_G$ . Il nous faut encore relier les chaînes correspondantes dans les gadgets de  $H$ , via les sommets de  $H_a$ . Distinguons deux cas :

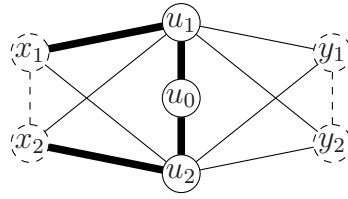


FIGURE 3.4 – Chaîne dans  $H$  associée à une arête de  $G$  non empruntée par le cycle hamiltonien

- $a < d$  : il y a alors trois chaînes à relier, une entre  $H_a$  et  $H_b$  (avec pour extrémité  $a_1$ ), une seconde entre  $H_a$  et  $H_c$  (avec  $a_6$  pour extrémité) et enfin, une chaîne dans le gadget correspondant à l'arête  $ad$  (avec  $a_3, a_4$  pour extrémités). Nous relierons ces trois chaînes aux sommets de  $H_a$  qui n'appartiennent encore à aucune chaîne c'est-à-dire  $a_2$  et  $a_5$ , voir FIG. 3.2.
- $d < a$  : dans ce cas, il y a deux chaînes, une entre  $H_a$  et  $H_b$  (d'extrémité  $a_1$ ) et l'autre entre  $H_a$  et  $H_c$  (d'extrémité  $a_6$ ). Nous relierons alors ces deux chaînes par la chaîne  $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ .

Soit  $\mathcal{C}_H$  le cycle obtenu dans  $H$ . Pour tout sommet  $x$  de  $H$ ,  $x$  est soit un sommet d'un gadget, soit un sommet d'un sous-graphe isomorphe à  $K_6$ . Dans les deux cas, il appartient à  $\mathcal{C}_H$ , donc  $\mathcal{C}_H$  est hamiltonien.

Montrons maintenant que si  $H$  a un cycle hamiltonien alors il existe un cycle hamiltonien dans  $G$ . Pour cela, observons le gadget et les différentes manières d'en parcourir une seule fois tous les sommets. La présence du sommet  $u_0$  du gadget impose qu'un cycle hamiltonien dans  $H$  ne passe qu'une seule fois dans le gadget. Ce cycle hamiltonien peut soit entrer et sortir du gadget par le même  $K_6$  (comme sur la figure 3.4), soit entrer dans le gadget d'un côté et en sortir de l'autre (comme sur la figure 3.3). Dans le second cas, nous gardons l'arête correspondante de  $G$ . De cette manière, nous construisons un cycle hamiltonien de  $G$ .  $\square$

### Amélioration du résultat

**Dans les graphes hypotriangulés 7-réguliers** Dans la transformation polynomiale précédente, le graphe hypotriangulé construit est de degré maximum 7, nous allons montrer ici qu'il est possible de se ramener à un

graphe hypotriangulé 7-régulier. Pour cela, nous modifions le gadget remplaçant les arêtes (voir FIG. 3.5) de manière à avoir tous les sommets de degré 7. Les arguments ne changent pas et nous obtenons donc le résultat suivant :

**Théorème 5.** *Le problème  $(\mathcal{HT} \cap 7\mathcal{R})$ -CYCLE HAMILTONIEN est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

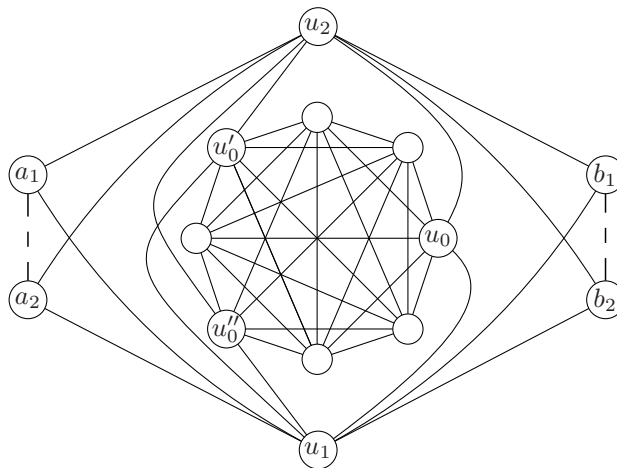


FIGURE 3.5 – Gadget 7-régulier

*Démonstration.* Nous vérifions que le graphe  $H$  ainsi construit est 7-régulier, hypotriangulé. □

### Dans les graphes hypotriangulés bipartis

**Théorème 6.** *Le problème  $(\mathcal{HT} \cap \mathcal{Bip})$ -CYCLE HAMILTONIEN est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Ce ne sont pas les gadgets relatifs aux arêtes que nous allons modifier par rapport à la première réduction, car ceux-ci sont déjà bipartis, mais les graphes remplaçant les sommets de  $G$ .

Pour cela, nous considérons le problème suivant : *Le problème  $(\mathcal{Bip} \cap 3\mathcal{R})$ -CYCLE HAMILTONIEN est  $\mathcal{NP}$ -complet [17].*

Soit donc  $G = (V_1, V_2, E)$  un graphe biparti 3-régulier. Construisons alors  $H$  tel que :



- à chaque sommet  $a$  de  $V_1$ , nous associons un sous-graphe  $H_a$  de  $H$  biparti complet isomorphe à  $K_{5,6}$  ;
- les sommets  $b$  de  $V_2$  sont associés à un sous-graphe biparti complet de  $H$ ,  $H_b$ , isomorphe à  $K_{4,6}$  ;
- les arêtes des  $G$  sont remplacées par le même gadget que dans la première réduction (Fig. 3.1, page 46).

Nous obtenons alors les sous-graphes de  $H$  donnés FIG. 3.6 et 3.7 :

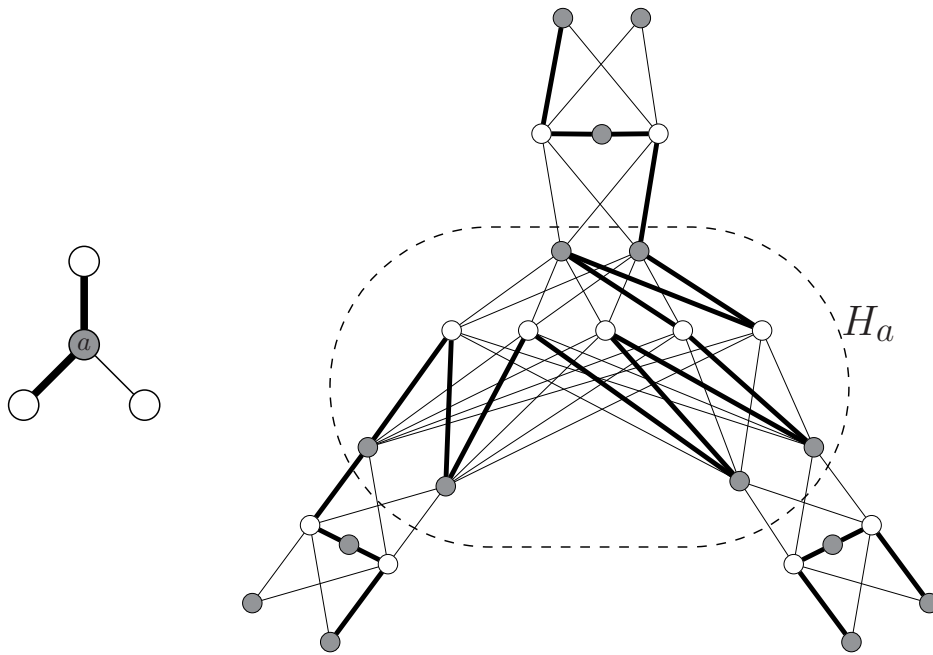


FIGURE 3.6 – Voisinage d'un sommet de  $V_1$  et sous-graphe de  $H$  correspondant

La preuve est identique à la précédente pour prouver la réduction au problème  $(\mathcal{B}ip \cap 3\mathcal{R})$ -CYCLE HAMILTONIEN.  $\square$

Nous utilisons la transformation polynomiale  $G \mapsto 2G$  (Définition 5) pour montrer que les problèmes suivants sont difficiles dans la classe des graphes hypotriangulés.

## 1.2 Coloration

**Théorème 7.** *Le problème  $\mathcal{HT}$ - $k$ -COLORATION est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

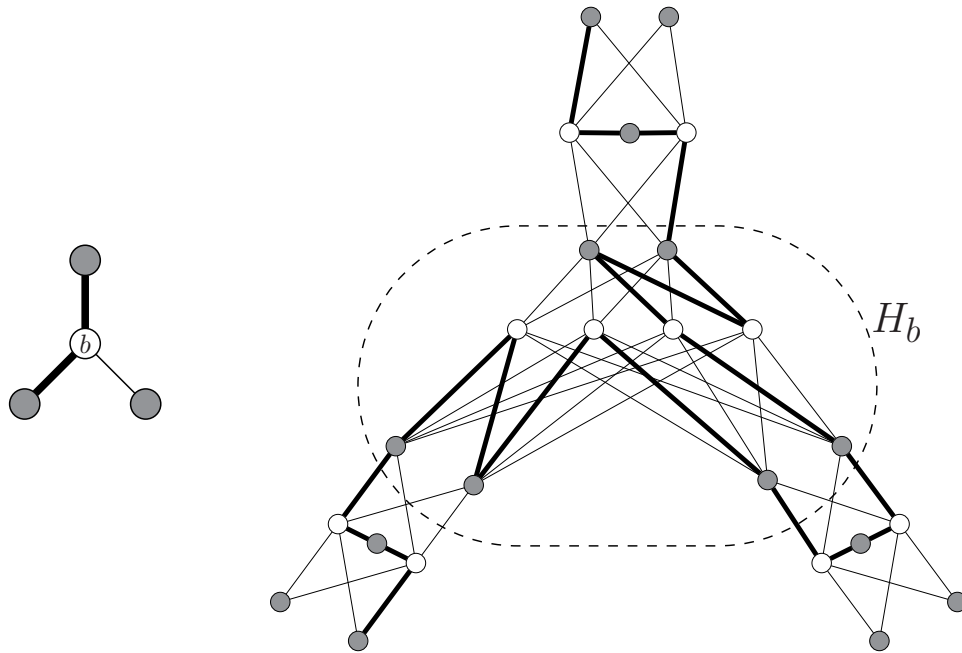


FIGURE 3.7 – Voisinage d’un sommet de  $V_2$  et sous-graphe de  $H$  correspondant

*Démonstration.* Nous rappelons que la transformation  $G \mapsto 2G$  construit un graphe hypotriangulé.

Supposons avoir une coloration minimum de  $G$ , nous obtenons une coloration de  $2G$  en affectant aux sommets  $v_1$  et  $v_2$  la couleur du sommet correspondant  $v$  dans la coloration de  $G$ .  $G$  étant un sous-graphe induit de  $2G$ , la coloration de  $2G$  ainsi obtenue est bien minimum.

Considérons maintenant une coloration minimum de  $2G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont jumeaux, c’est-à-dire qu’ils sont non adjacents et ont les mêmes voisins, nous pouvons donc leur affecter la même couleur. Etant donnée une telle coloration des sommets de  $2G$ , nous en déduisons une coloration de  $G$  en affectant à  $v$  la couleur commune de ses sommets correspondants dans  $2G$ . Cette coloration de  $G$  est minimum, sinon nous pourrions obtenir une meilleure coloration de  $2G$  en affectant à  $v_1$  et  $v_2$  la couleur du sommet  $v$  dans une coloration minimum de  $G$ .  $\square$

### 1.3 Clique Maximum

**Théorème 8.** *Le problème  $\mathcal{HT}$ - $k$ -CLIQUE MAXIMUM est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Une clique de  $2G$  contient un seul des sommets jumeaux

$v_1$  et  $v_2$ . Ainsi, étant donné un ensemble  $K$  de sommets de  $G$  et  $K'$  un ensemble de sommets de  $2G$  où chaque sommet  $v \in K$  correspond soit à  $v_1$  ou  $v_2$  dans  $K'$  ( $|K| = |K'|$ ),  $K$  est une clique maximum de  $G$  si et seulement si  $K'$  est une clique maximum de  $2G$ .  $\square$

## 1.4 Stable Maximum

**Théorème 9.** *Le problème  $\mathcal{HT}$ - $k$ -STABLE MAXIMUM est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Un stable de  $2G$  peut contenir les sommets jumeaux  $v_1$  et  $v_2$  car ils sont non adjacents. Soit  $S$  un ensemble de sommets de  $G$  et  $S' = 2S$  l'ensemble des sommets correspondants de  $2G$ ,  $|S'| = 2 \times |S|$ .  $S$  est un stable maximum de  $G$  si et seulement si  $S'$  est un stable maximum de  $2G$ .  $\square$

## 2 Problèmes de modification

Nous considérons dans cette section des problèmes de modification minimale de l'ensemble des arêtes d'un graphe, dans le but d'obtenir un graphe hypotriangulé. La définition des problèmes qui suivent a été donnée dans la Section 2.3.2 du Chapitre 1.

### 2.1 $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES

**Théorème 10.** *Le problème  $\mathcal{HT}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Tout d'abord,  $\mathcal{HT}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES est bien dans  $\mathcal{NP}$ . En effet, la reconnaissance d'un graphe hypotriangulé est polynomiale (voir page 27). Pour montrer que ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet, nous allons montrer que ce problème se réduit au problème  $\{\text{diam}(G) \leq 2\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES.

Nous définissons la transformation polynomiale suivante : étant donné un graphe  $G = (V, E)$  connexe et un sommet  $\alpha \notin V$ , le graphe  $H$  est le graphe  $G$  auquel nous ajoutons un sommet  $\alpha$  voisin de tous les sommets de  $G$ . Formellement, le graphe  $H = (U, F)$  est tel que  $U = V \cup \{\alpha\}$  et  $F = E \cup \{\alpha u / u \in V\}$ . Un exemple est donné sur la figure 3.8.

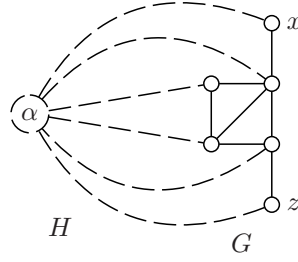


FIGURE 3.8 –  $d_G(x, z) = 3$  donc  $H$  n'est pas hypotriangulé

Montrons alors que  $H$  est hypotriangulé si et seulement si  $G$  est de diamètre inférieur ou égal à 2.

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $G$  de diamètre inférieur ou égal à 2 et considérons un  $P_3 xyz$  de  $H$ . Nous distinguons trois cas :

- $x, y, z \in V$  : le sommet  $\alpha$  étant voisin de  $x$  et  $z$ , il permet de fermer le  $P_3 xyz$  en un carré dans  $H$  ;
- $z = \alpha$  : le sommet  $\alpha$  étant voisin de tous les sommets de  $G$ , il est en particulier voisin de  $x$ , ainsi les sommets  $x, y$  et  $\alpha$  induisent un triangle dans  $H$  ;
- $y = \alpha$  : dans  $G$ , les sommets  $x$  et  $z$  sont à une distance inférieure ou égale à 2, donc le  $P_3 x\alpha z$  est inclus dans un  $C_3$  ou  $C_4$  dans  $H$ .

Ainsi  $H$  est hypotriangulé.

( $\Rightarrow$ ) Réciproquement, si  $H$  est hypotriangulé. Nécessairement, tout  $P_3$  du type  $x\alpha z$  avec  $x$  et  $z$  des sommets de  $G$  est inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$  dans  $H$ . Ceci implique que  $d_G(x, z) \leq 2$ , pour tout  $x, z \in V^2$ , donc  $G$  est de diamètre inférieur ou égal à 2.

Ainsi tout  $P_3$  de  $H$  est inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$  si et seulement si  $\text{diam}(G) \leq 2$ . De plus, le sommet  $\alpha$  de  $H$  est adjacent à tous les sommets de  $G$ , donc toute arête ajoutée à  $H$  est en fait, une arête ajoutée à  $G$ . Nous concluons grâce au résultat de [5] selon lequel le problème  $\{\text{diam}(G) \leq 2\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet.  $\square$

## 2.2 $\text{Bip} \rightarrow (\text{Bip} \cap \mathcal{HT})$ -AJOUT ARÊTES

Nous rappelons (et démontrons) ici un résultat énoncé dans [13] :

**Lemme 9.** *Soit  $G = (U, V, E)$  un graphe biparti.*

$diam(G) \leq 3$  si et seulement si  $G$  est connexe et  $\forall u, u' \in U, N(u) \cap N(u') \neq \emptyset$   
 et  $\forall v, v' \in V, N(v) \cap N(v') \neq \emptyset$ .

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Si  $diam(G) \leq 3$ . Soient  $u, u' \in U, u \neq u'$ ,  $G$  étant biparti,  $d(u, u')$  est pair et inférieure ou égale à 3 par hypothèse, donc  $d(u, u') = 2$  ; cela signifie donc que  $u$  et  $u'$  ont un voisin commun. De même pour  $v, v' \in V$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $G$  est biparti, connexe et  $\forall u, u' \in U, N(u) \cap N(u') \neq \emptyset$  et  $\forall v, v' \in V, N(v) \cap N(v') \neq \emptyset$ . Soient  $u, u' \in U$ , ces sommets ayant un voisin commun,  $d(u, u') = 2$ . De même pour  $v, v' \in V$ . Soient  $u \in U$  et  $v \in V$ . Deux cas se présentent :  $u$  et  $v$  sont adjacents et alors  $d(u, v) = 1$ , ou  $u$  et  $v$  ne sont pas adjacents ; dans ce cas, soit  $u' \in U$  un voisin de  $v$ ,  $d(u, u') = 2$  donc  $d(u, v) = 3$ .  $\square$

Rappelons qu'une couverture  $\mathcal{C}$  d'un ensemble  $X$  est une famille de sous-ensembles de  $X$  dont l'union est  $X$ .

$k$ -COUVERTURE-2 est le problème défini par :

*Données* Un ensemble fini  $X$ , une couverture  $\mathcal{C}$  de  $X$  telle que  $\forall x \in X, \exists c, c' \in \mathcal{C}, x \in c \cap c'$  et  $\forall x, y \in X, \exists \tilde{c} \in \mathcal{C}, x \in \tilde{c}, y \in \tilde{c}$  (c'est-à-dire que tout élément de  $X$  appartient à au moins deux ensembles de la couverture  $\mathcal{C}$  et toute paire d'éléments de  $X$  est couverte par un ensemble de  $\mathcal{C}$ ) et un entier  $k$

*Question* Existe-t-il une couverture  $\mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ , de cardinal  $k$  ?

Ce problème est  $\mathcal{NP}$ -complet [5], par réduction à partir du problème de 3-COUVERTURE EXACTE : pour une instance  $\mathcal{C}^0$  de 3-COUVERTURE EXACTE, une instance  $\mathcal{C}$  de  $k$ -COUVERTURE-2 est construite en ajoutant à  $\mathcal{C}^0$  toutes les paires d'éléments de  $X$  (de cardinal  $3k$ ) :  $\mathcal{C}^0$  a réponse "oui" pour 3-COUVERTURE EXACTE si et seulement si  $\mathcal{C}$  a réponse "oui" pour  $k$ -COUVERTURE-2 (les ensembles de taille 2 dans  $\mathcal{C}$  sont inutiles).

**Lemme 10.** *Le problème  $\mathcal{Bip} \rightarrow \mathcal{Bip} \cap \{diam(G) \leq 3\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Ce problème appartient à  $\mathcal{NP}$ . Nous montrons qu'il est  $\mathcal{NP}$ -difficile par réduction à partir du problème  $k$ -COUVERTURE-2.

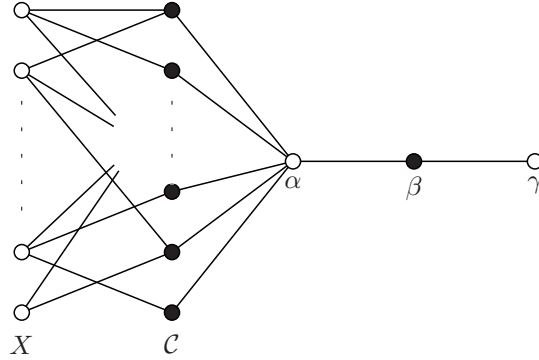


FIGURE 3.9 – Transformation d'un problème de couverture en problème de diamètre de graphe

Soit  $\mathcal{C}$  une instance de  $k$ -COUVERTURE-2 sur l'ensemble  $X$ . Nous construisons alors le graphe  $G = (U, V, E)$  biparti comme suit :  $U = X \cup \{\alpha, \gamma\}$ ,  $V = \mathcal{C} \cup \{\beta\}$  et  $E = \{x_i c_j / x_i \in X, c_j \in \mathcal{C}, x_i \in c_j\} \cup \{c\alpha / c \in \mathcal{C}\} \cup \{\alpha\beta, \beta\gamma\}$ . La figure 3.9 donne un exemple d'un tel graphe.

Tous les sommets de  $V$  sont voisins de  $\alpha$ , ils sont donc à distance 2 les uns des autres. Pour les sommets de  $U$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $d(x, y) = 2$ , car  $\exists \tilde{c} \in \mathcal{C}$  tel que  $\{x, y\} \subset \tilde{c}$  ;  $d(x, \alpha) = 2$  ;  $d(\alpha, \gamma) = 2$  et  $d(x, \gamma) = 4$ . Enfin, pour  $x \in X$  et  $\tilde{c} \in \mathcal{C}$ ,  $d(x, \tilde{c}) \leq 3$  car pour  $c \ni x$ ,  $x c \alpha \tilde{c}$  est une chaîne de longueur 3 entre  $x$  et  $\tilde{c}$ . Ainsi le diamètre de  $G$  est 4.

Montrons que si il existe une couverture  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de cardinal  $k$ , alors le problème  $\mathcal{Bip} \rightarrow \mathcal{Bip} \cap \{\text{diam}(G) \leq 3\}$ - $k$ -AJOUT-ARÊTES admet une solution pour le graphe  $G$  ainsi construit. Pour cela, nous ajoutons au graphe  $G$  les arêtes  $\gamma c_i \in V \times U$  pour  $c_i \in \mathcal{C}'$  de manière à obtenir un nouveau graphe  $G'$ . Ce graphe  $G'$  vérifie alors  $d_{G'} \leq d_G$  et  $d_{G'}(x, \gamma) = 2 \forall x \in X$  car  $\mathcal{C}'$  est une couverture. Ainsi  $\text{diam}(G') \leq 3$  et  $G'$  est biparti.

Réciproquement supposons qu'il existe un ensemble  $F$ ,  $F \subset U \times V$ ,  $E \cap F = \emptyset$  et  $|F| \leq k$  tel que  $G' = (U, V, E \cup F)$  est biparti et de diamètre inférieur ou égal à 3.  $G'$  étant biparti,  $F$  ne peut contenir des arêtes que de trois types :  $\beta x_i$ ,  $x_i c_j$  et  $\gamma c_j$ . Nous allons montrer qu'il existe une solution équivalente  $F'$  ne contenant que des arêtes de type  $\gamma c_j$ . En effet, les seules distances strictement supérieures à 3 dans le graphe  $G$  initial sont entre les sommets  $x_i$  et  $\gamma$  donc une arête n'est ajoutée que pour réduire la distance entre  $x_i$  et  $\gamma$ . Par ailleurs,  $\mathcal{C}$  est une couverture de  $X$  donc il existe  $c_m$  tel que

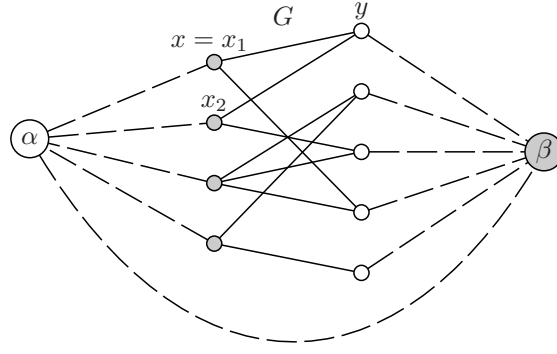


FIGURE 3.10 –  $d_G(x, z) > 3$  donc  $H$  n'est pas hypotriangulé

$x_i \in c_m$ , l'arête  $x_i c_m \in E$ . Nous pouvons donc remplacer une arête  $x_i \beta$  de  $F$  par  $\gamma c_m$  dans  $F'$  et une arête  $x_i c_j$  de  $F$  également par  $\gamma c_m$  dans  $F'$ . Nous gardons dans  $F'$  les arêtes du type  $\gamma c_j$  de  $F$ . Considérons  $G'' = (U, V, E \cup F')$ .  $G''$  est obtenu à partir de  $G$  par ajout d'arêtes du type  $\gamma c_j$ , il est donc biparti et de diamètre inférieur ou égal à 3, comme  $G'$ . Ainsi  $d_{G''}(x_i, \gamma) = 2$ , donc pour tout  $x_i \in X$ , il existe une chaîne  $x_i c_j \gamma$  telle que  $x_i c_j \in E$ . Donc l'ensemble  $\mathcal{C}' = \{c_j / \gamma c_j \in F'\}$  vérifie  $|\mathcal{C}'| \leq k$  et  $\mathcal{C}'$  est une couverture de  $X$ .  $\square$

**Théorème 11.** *Le problème  $\mathcal{B}ip \rightarrow (\mathcal{B}ip \cap \mathcal{HT})$ -AJOUT ARÊTES est  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Ce problème appartient bien à  $\mathcal{NP}$ . Pour prouver qu'il est  $\mathcal{NP}$ -difficile, nous exhibons une réduction polynomiale à partir du problème  $\mathcal{B}ip \rightarrow \mathcal{B}ip \cap \{\text{diam}(G) \leq 3\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES.

Soit  $G = (V_1, V_2, E)$  un graphe biparti connexe. Nous construisons alors le graphe biparti  $H = (U_1, U_2, F)$  en lui ajoutant deux sommets  $\alpha$  et  $\beta$ , un dans chaque ensemble de la bipartition, complet à l'autre ensemble. Formellement,  $U_1 = V_1 \cup \{\beta\}$ ,  $U_2 = V_2 \cup \{\alpha\}$  et  $F = E \cup \{\alpha x / x \in U_1\} \cup \{\beta y / y \in U_2\}$ . En particulier l'arête  $\alpha\beta$  appartient à  $H$ . Voir exemple de la figure 3.10.

Montrons alors que  $H$  est hypotriangulé si et seulement si  $G$  est de diamètre inférieur ou égal à 3.

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $G$  de diamètre inférieur ou égal à 3 et considérons les différents  $P_3$  de  $H$  :

- $x_1yx_2$  (respectivement  $y_1xy_2$ ) avec  $x_i \in V_1, y \in V_2$ , ce  $P_3$  est inclus dans un  $C_4$  dans  $H$  via le sommet  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) ;
- $\alpha xy$  (respectivement  $xy\beta$  est inclus dans un carré dans  $H$  via le sommet  $\beta$  (respectivement  $\alpha$ ) ;
- $x\alpha\beta$  (respectivement  $\alpha\beta y$ ) est inclus dans un  $C_4$  qui passe par un voisin de  $x$  (respectivement de  $y$ ) dans  $G$ ,  $G$  étant connexe ;
- $x_1\alpha x_2$  (respectivement  $y_1\beta y_2$ ) est inclus dans un  $C_4$  car  $\text{diam}(G) \leq 3$  et  $G$  est biparti, d'après le Lemme 9,  $N_G(x_1) \cap N_G(x_2) \neq \emptyset$  (respectivement  $N_G(y_1) \cap N_G(y_2) \neq \emptyset$ ).

Ainsi  $\text{diam}(G) \leq 3$  implique que  $H \in \mathcal{HT}$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons maintenant que  $H$  est hypotriangulé (et biparti). En particulier, tout  $P_3$  de la forme  $x_1\alpha x_2$  (respectivement  $y_1\beta y_2$ ) est inclus dans un carré, donc nécessairement,  $N_G(x_1) \cap N_G(x_2) \neq \emptyset \forall x_1, x_2 \in V_1$  et  $N_G(y_1) \cap N_G(y_2) \neq \emptyset \forall y_1, y_2 \in V_1$  ce qui d'après le Lemme 9 est équivalent à  $\text{diam}(G) \leq 3$ ,  $G$  étant biparti.

Puisqu'une arête ne peut être ajoutée à  $H$  qu'entre des sommets de  $G$ , compléter  $G$  en un graphe biparti de diamètre inférieur ou égal à trois est équivalent à compléter  $H$  en un graphe biparti hypotriangulé. Nous concluons en utilisant le Lemme 10 □

### 2.3 Classes polynomiales pour $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES

Le problème  $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES étant difficile, nous nous intéressons ici à des restrictions de ce problème pour des classes de graphes particulières.

Commençons d'abord par rappeler les résultats des Théorèmes 2 et 3 :

- $G$  est un graphe hypotriangulé minimum avec  $n(G) \geq 4$  et  $\delta(G) = 2$
- $\Leftrightarrow G = \widetilde{2T}$  où  $T$  est un arbre avec  $n(T) \geq 3$
- $\Leftrightarrow G$  est 2-connexe et possède une partition-arbre-stable  $\leq 2$ .

**Remarque 4.** *Si nous parvenons à partitionner les sommets d'un graphe  $G$  en stables de taille 1 et 2, ces stables formant une structure d'arbre et où les sommets dans des stables de taille 1 ont leur(s) voisin(s) dans un seul stable, alors le graphe  $G$  est un graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum de degré minimal 2.*

*Ainsi, lorsque nous cherchons à compléter un graphe en un graphe hypotriangulé minimum, les sommets de degré supérieur ou égal à 3 sont né-*



cessairement dans des stables de taille 2 ; les sommets de degré 2 que nous choisissons de mettre dans des stables de taille 1 imposent que leurs deux voisins soient dans un même stable de taille 2 et les sommets de degré 1 n'imposent aucune contrainte supplémentaire, qu'ils soient dans des stables de taille 1 ou 2.

### 2.3.1 Chaînes et cycles

#### Chaînes

**Théorème 12.** *Le problème  $\{P_k\} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES est polynomial, le graphe obtenu est un graphe hypotriangulé minimum, par ajout de  $k - 3$  arêtes.*

*Démonstration.* Soit  $P_k$  la chaîne de longueur  $k - 1$ , dont les sommets sont numérotés de 1 à  $k$ .

- Si  $k$  est pair, nous formons les stables de taille 2 :  $\{i, k - (i - 2)\}$ , pour  $i = 2, \dots, k/2$  et les stables de taille 1 :  $\{k/2 + 1\}$  et  $\{1\}$ . Les stables ainsi construits forment une structure de chaîne,  $P_k$  est un graphe partiel de  $\widetilde{2P_{k/2+1}}$ . Voir FIG. 3.11.

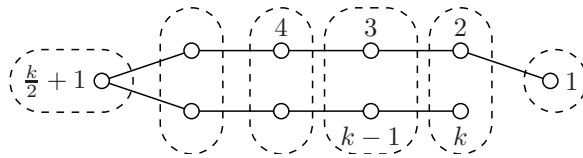


FIGURE 3.11 – Formation des stables pour  $P_k$ ,  $k$  pair

- Si  $k$  est impair, nous formons les stables de tailles 2 :  $\{i, k - (i - 1)\}$  pour  $i = 1, \dots, (k - 1)/2$  et le stable de taille 1 :  $\{(k + 1)/2\}$ .  $P_k$  est un graphe partiel de  $\widetilde{2T}$  où  $T$  est un arbre à trois feuilles dont deux ont leur voisin commun, FIG 3.12.

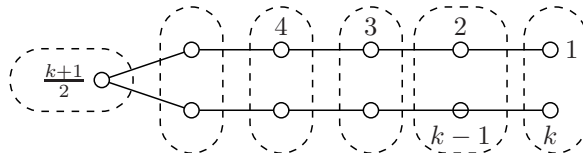


FIGURE 3.12 – Formation des stables pour  $P_k$ ,  $k$  impair

□

## Cycles

**Théorème 13.** *Le problème  $\{C_k\} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES est polynomial.*

**Proposition 10.** *Soit  $C_k$  un cycle à  $k$  sommets. Pour  $k$  pair, le nombre minimal d'arêtes à ajouter au graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $k - 4$  et le graphe obtenu est un graphe hypotriangulé minimum ; pour  $k$  impair, le nombre minimal d'arêtes à ajouter au graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $k - 3$ , le graphe obtenu n'est pas hypotriangulé minimum.*

*Démonstration.* Soit  $C_k$  le cycle à  $k$  sommets, numérotés de 1 à  $k$ .

- Si  $k$  est pair, nous formons les stables de taille 2 :  $\{i, k - (i - 2)\}$ , pour  $i = 2, \dots, k/2$  et les stables de taille 1 :  $\{k/2 + 1\}$  et  $\{1\}$ . Les stables ainsi construits forment une structure de chaîne,  $C_k$  est un graphe partiel de  $\widetilde{2P_{k/2+1}}$ .
- Si  $k$  est impair,  $C_k$  n'est pas biparti. Or nous avons montré que tout graphe hypotriangulé minimum est biparti. De plus, tout graphe partiel d'un graphe biparti est aussi biparti. Ainsi  $C_k$  n'est pas un graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum. Il est donc impossible, par ajout d'arêtes à un cycle impair, d'obtenir un graphe hypotriangulé minimum. Le nombre minimal d'arêtes à ajouter à un cycle impair, pour obtenir un graphe hypotriangulé, est alors supérieur ou égal à  $k - 3$ . Considérons alors les ensembles de taille deux :  $\{i, k - (i - 1)\}$  pour  $i = 1, \dots, (k - 1)/2$  qui sont stables pour  $i \geq 2$  et le stable de taille 1 :  $\{(k + 1)/2\}$  donné en figure 3.13. L'ajout des arêtes de manière à ce que les sommets d'un même ensemble de taille deux soient jumeaux construit un graphe (à  $k$  sommets) hypotriangulé. Ce graphe possède  $2k - 3$  arêtes et est un surgraphe du cycle impair  $C_k$ . Ainsi, le nombre minimal d'arêtes à ajouter à  $C_k$ , avec  $k$  impair, pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $k - 3$ .

□

### 2.3.2 Les chenilles

Nous nous intéressons ici au problème *Chenille*  $\rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES. Comme dans les problèmes  $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES pour les chaînes et les

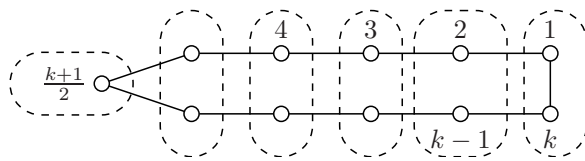


FIGURE 3.13 – Formation des ensembles de taille 1 et 2 pour  $C_k$ ,  $k$  impair, tous stables sauf  $\{1, k\}$

cycles, nous allons utiliser la caractérisation des graphes hypotriangulés minimum pour démontrer la minimalité de l'ensemble des arêtes ajoutées. Cependant, dans le cas des chenilles, il existe des sommets de degré supérieur ou égal à 3, que nous sommes obligés de mettre dans des stables de taille 2, pour espérer obtenir un graphe hypotriangulé minimum, par ajout d'arêtes.

**Théorème 14.** *Le problème Chenille  $\rightarrow$  HT-AJOUT ARÊTES est polynomial*

*Démonstration.* Soit  $Ch = (B, N, E)$  une chenille,  $n \geq 4$ . Par convention (voir FIG. 3.14, la colonne vertébrale de la chenille est en gras) :

- les sommets de la colonne vertébrale (les vertèbres) de la chenille sont numérotés de 1 à  $p$  ;
- les sommets 1 et  $p$  n'ont pas de pattes ;
- le sommet 1 appartient à  $N$ .

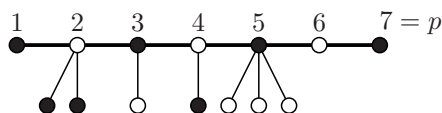


FIGURE 3.14 – Une chenille à 7 vertèbres

Nous allons maintenant montrer le résultat suivant :

**Proposition 11.** *L'ajout de  $n-3$  arêtes à une chenille à  $n$  sommets permet d'obtenir un graphe hypotriangulé minimum ( $m' = 2n - 4$ ) sauf lorsque les sommets blancs sont en nombre impair et tous de degré supérieur ou égal à 3. Dans ce cas, le nombre minimal d'arêtes à ajouter à la chenille pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $n - 2$ .*

Pour montrer ce résultat, nous raisonnons, modulo 4, sur le nombre de sommets de la colonne vertébrale de la chenille.

Si  $p \equiv 0[4]$ , nous formons des ensembles stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 1[4]$  et  $i \equiv 2[4]$ , avec  $i \leq p - 2$ . Ainsi, tous les sommets de la colonne vertébrale sont dans des stables de taille 2. Sur la figure 3.15, la colonne vertébrale est en gras, les stables de taille 2 sont en pointillés.

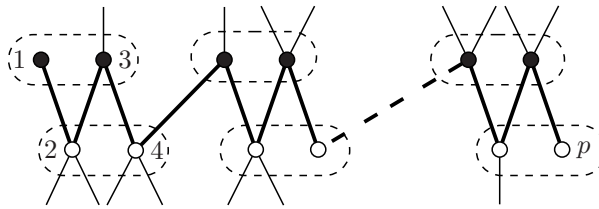


FIGURE 3.15 – Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que  $p \equiv 0[4]$

Si  $p \equiv 1[4]$ , nous formons des ensembles stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 2[4]$  et  $i \equiv 3[4]$ , avec  $i \leq p - 2$ . Dans ce cas, la première vertèbre joue le rôle d'une patte de la vertèbre 2, voir FIG. 3.16.

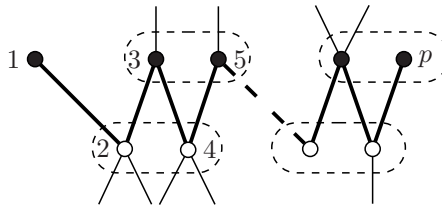


FIGURE 3.16 – Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que  $p \equiv 1[4]$

Si  $p \equiv 2[4]$ , nous formons des ensembles stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 2[4]$  et  $i \equiv 3[4]$ , avec  $i \leq p - 3$ . Ici la première et la dernière vertèbre n'appartiennent à aucun stable de taille 2, ces vertèbres se comportent comme des pattes de leur vertèbre voisine (FIG. 3.17)

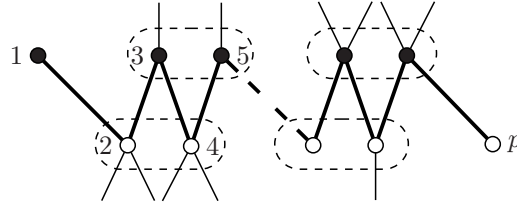


FIGURE 3.17 – Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que  $p \equiv 2[4]$

Si  $p \equiv 3[4]$ , la chenille possède un nombre impair de vertèbres blanches. Nous considérons alors deux sous-cas :

- Si il existe une vertèbre blanche  $2j$  sans patte, sans perte de généralité, nous supposons que  $2j \geq \frac{p+1}{2}$ , c'est-à-dire le sommet  $2j$  appartient à la deuxième moitié de la colonne vertébrale. Nous formons des ensembles stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{2j-i, 2j+i\}$  pour  $1 \leq i \leq p-2j$ . La vertèbre  $2j$  est seule dans un stable. Il reste alors les vertèbres  $\{1, \dots, 4j-p-1\}$  (avec  $4j-p-1 \equiv 0[4]$ ). Nous formons alors les stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{i, i+2\}$  pour  $i \equiv 1[4]$  et  $i \equiv 2[4]$ , avec  $i \leq 4j-p-3$  (FIG. 3.18).

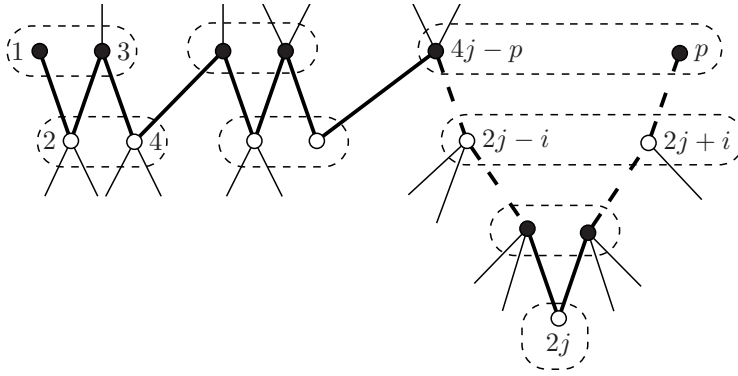



FIGURE 3.18 – Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que  $p \equiv 3[4]$ , possédant une vertèbre  $2j$  blanche sans patte

- Si il existe une patte blanche  sur la vertèbre  $2j+1$ , notons  $x$  le sommet blanc de la patte. Le nombre de vertèbres blanches étant impair, cette patte blanche divise la colonne vertébrale en deux, une partie contenant un nombre pair de vertèbres blanches, l'autre un nombre impair de vertèbres blanches. Supposons sans perte de gé-

néralité que les vertèbres  $\{1, \dots, 2j\}$  contiennent un nombre pair de vertèbres blanches ( $2j \equiv 0[4]$ ). Nous formons alors des stables de taille 2 avec les vertèbres  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 1[4]$  et  $i \equiv 2[4]$ , avec  $i \leq 2j - 2$ , le stable  $\{2j + 1, 2j + 3\}$ , le stable  $\{x, 2j + 2\}$  et enfin des stables  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 0[4]$  et  $i \equiv 1[4]$ , avec  $2j + 4 \leq i \leq p - 2$  (FIG. 3.19).

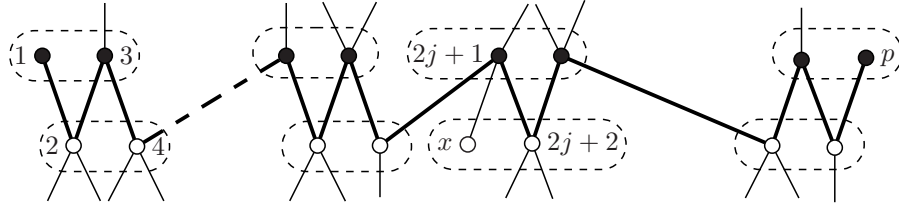


FIGURE 3.19 – Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que  $p \equiv 3[4]$ , possédant une vertèbre  $2j + 1$  noire ayant une patte

Dans chacun des cas précédents, une fois les ensembles stables construits, nous ajoutons alors des arêtes de telle manière que ces stables de taille 2 soient des sacs dans une partition, les autres sommets de la chenille étant dans des sacs de taille 1. Nous obtenons alors un graphe 2-connexe possédant une partition-arbre-stable $\leq 2$ , il est donc hypotriangulé minimum (par le Théorème 3, page 42).

Supposons maintenant que les sommets blancs sont en nombre impair et tous de degré supérieur ou égal à 3, c'est-à-dire,  $p \equiv 3[4]$ , toutes les vertèbres blanches ont une patte et aucun vertèbre noire n'a de patte. Il est alors impossible de compléter cette chenille en un graphe hypotriangulé minimum. En effet, les graphes hypotriangulés minimum sont bipartis, les stables de taille 2 contenant des sommets du même ensemble de la bipartition et tout sommet de degré supérieur ou égal à 3 appartient à un sac de taille 2 dans la partition-arbre-stable $\leq 2$ . Or une telle chenille possède un nombre impair de sommets blancs, tous de degré supérieur ou égal à 3. Il est impossible de regrouper les sommets blancs en stables de taille 2. Ainsi, le nombre minimal d'arêtes à ajouter à un tel graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé est minoré par  $n - 2$ . Nous formons alors des sacs de taille 2 dont un seul n'est pas stable : les ensembles stables de taille 2 sont  $\{i, i + 2\}$  pour  $i \equiv 2[4]$  et  $i \equiv 3[4]$ , avec  $i \leq p - 4$  auxquels s'ajoute l'ensemble  $\{p - 1, p\}$  non stable (voir FIG. 3.20). L'ajout des arêtes, de manière à rendre jumeaux les

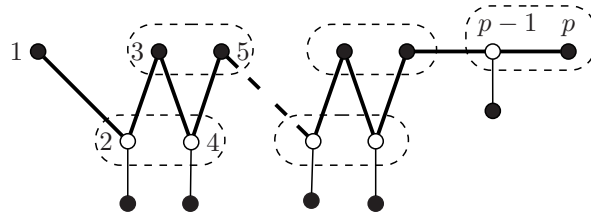


FIGURE 3.20 – Formation de ensembles de taille 2,  $\{p-1, p\}$  n'étant pas stable, pour une chenille ayant un nombre impair de sommets blancs, tous de degré supérieur ou égal à trois

sommets d'un même stable, formant ainsi des sacs de taille deux, construit un graphe hypotriangulé possédant  $2n - 3$  arêtes.  $\square$

## 2.4 Arbre $\rightarrow$ $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES

Les cas des chaînes et des chenilles étant polynomiaux, nous avons bien évidemment voulu nous intéresser au cas des arbres. Cependant, nous avons été confronté à des difficultés : déterminer si un arbre est ou non graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum n'est pas aussi aisé que dans le cas des chenilles.

Nous commençons par montrer des résultats sur les forêts à feuilles uniformes, puis nous hypotriangulons les arbres à feuilles uniformes. Enfin, nous donnons deux exemples d'arbres de structures similaires, l'un pouvant se compléter en un graphe hypotriangulé minimum et l'autre non.

### 2.4.1 Résultats préliminaires

**Définition 7.** *Un ensemble fini  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{1 \leq i \leq p}$  de graphes est minimale-ment hypotriangulable si il satisfait les conditions suivantes :*

*il existe un ordre sur  $\mathcal{G}$  et deux entiers  $k_1$  et  $k_2$  tels que :*

- $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq p$
- $\forall i \leq k_1, n_i = 1, G_i$  a un unique sommet  $x_i$  ;
- $\forall i, k_1 < i \leq k_2, G_i$  est un  $P_3$ , où  $x_i^1$  et  $x_i^2$  sont ses extrémités ;
- $\forall i, k_2 < i \leq p, G_i$  est un graphe hypotriangulé minimum avec  $n(G_i) \geq 4$  sommets et  $\delta(G_i) = 2$ , on note  $x_i^1$  et  $x_i^2$  deux sommets d'un même sac de la partition-arbre-stable $\leq 2$  de  $G_i$  ;
- et  $\sum_i n(G_i) \geq 2$ .

**Lemme 11.** Soit  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{1 \leq i \leq p}$  un ensemble de graphes, minimale-ment hypotriangulable. Soient  $u, v$  deux sommets, distincts des sommets des graphes  $G_i$ . Soit le graphe  $G$  dont l'ensemble des sommets est  $V = \bigcup_i V_i \cup \{u, v\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \bigcup_i E_i \cup \bigcup_{i \leq k_1} \{[u, x_i], [v, x_i]\} \cup \bigcup_{i > k_1} \{[u, x_i^1], [u, x_i^2], [v, x_i^1], [v, x_i^2]\}$ .  
 $G$  est un graphe hypotriangulé minimum.

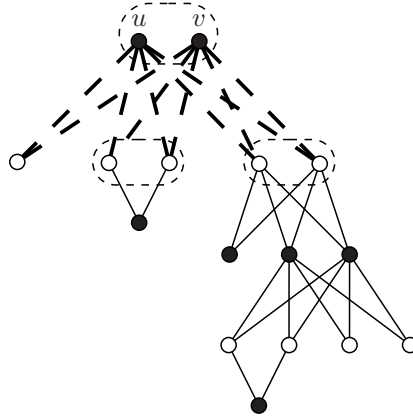


FIGURE 3.21 – Construction d'un graphe hypotriangulé minimum à partir d'une famille minimale-ment hypotriangulable et deux sommets  $u$  et  $v$

*Démonstration.* Si  $\sum_i n(G_i) \geq 2$ , alors  $|V| \geq 4$ . D'après le théorème 3,  $G$  est hypotriangulé minimum est équivalent à  $G$  est 2-connexe et a une partition-arbre-stable  $\leq 2$ .

Les graphes  $G_i$  pour  $i > k_1$  sont reliés via un graphe biparti complet  $K_{2,2}$  aux sommets  $u$  et  $v$ . Cela nous assure que le graphe  $G$  est 2-connexe (il n'y a pas de sommet d'articulation). De plus en affectant les sommets  $u$  et  $v$  à un même sac  $A$  ; les sommets  $x_i, i \leq k_1$  dans des sacs de taille 1 ; et pour  $k_1 < i \leq k_2$ , les extrémités du  $P_3$  dans un même sac de taille deux ; les sacs des graphes  $G_i$ , pour  $i > k_2$ , sont inchangés ; de cette manière, nous construisons une partition-arbre-stable  $\leq 2$  de  $G$ . Voir FIG. 3.21.  $\square$

**Définition 8.** Une forêt (ensemble d'arborescences)  $\mathcal{F}$  est à feuilles uniformes si en imposant aux racines de chaque arborescence d'appartenir au même ensemble de la bipartition, alors toutes les feuilles de profondeur supérieure ou égale à 1 appartiennent à un même ensemble de cette bipartition.



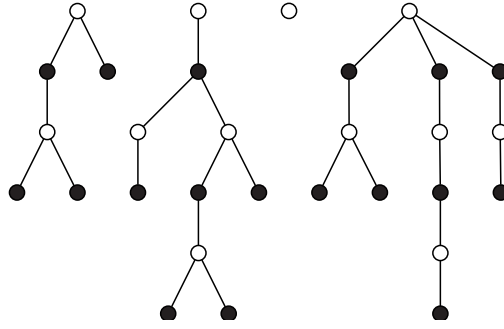


FIGURE 3.22 – Exemple de forêt à feuilles uniformes noires et à racines blanches

**Lemme 12.** *Soit  $\mathcal{F} = (N, B, E)$  une forêt à feuilles uniformes dont les feuilles de profondeur supérieure ou égale à 1 appartiennent à  $N$ . Si  $|B|$  est pair, alors il existe un surgraphe de  $\mathcal{F}$  qui est minimalement hypotriangulable, les racines des arbres de  $\mathcal{F}$  étant dans des ensembles stables de taille 2, à l'exception des arbres de taille 1 si ils appartiennent à  $N$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence sur  $h$  la hauteur maximale d'un arbre de  $\mathcal{F}$ . Nous montrons qu'il est possible de coupler les racines des arbres dans des stables de taille 2. Ensuite, l'hypothèse de récurrence et le Lemme 11, permettent de conclure.

**Pour  $h = 0$ ,**  $\mathcal{F}$  contient uniquement des arbres de taille 1. Donc  $\mathcal{F}$  est minimalement hypotriangulable. De plus, si ces sommets appartiennent à  $N$ , il n'y a rien à prouver. Si par contre ils appartiennent à  $B$ , sachant que  $|B|$  est pair, alors il est possible de partitionner  $B$  en stables de taille 2.

**Pour  $h = 1$ ,** les feuilles appartenant à  $N$ , les racines des arbres de  $\mathcal{F}$  sont nécessairement dans  $B$ . Or  $|B|$  est pair, nous partitionnons alors  $B$  en stables de taille 2 et ajoutons les arêtes de manière à ce que deux sommets dans un même stable soient jumeaux (c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes voisins), voir FIG. 3.23. Soit  $x$  et  $x'$  les racines de deux arbres de  $\mathcal{F}$ , alors  $x, x'$  et leurs fils (éventuels) forment un graphe  $K_{2,|N(x) \cup N(x')|}$ . Si  $|N(x) \cup N(x')| \geq 2$  il s'agit d'un graphe hypotriangulé minimum ; si  $|N(x) \cup N(x')| = 1$ , alors il s'agit d'un  $P_3$  ; sinon ( $|N(x) \cup N(x')| = 0$ )  $x$  et  $x'$  sont des sommets isolés. Nous avons donc ajouté des arêtes à  $\mathcal{F}$  de manière à obtenir un ensemble minimalement hypotriangulable.

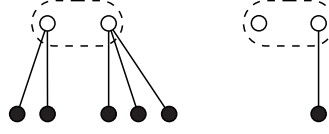


FIGURE 3.23 – Formation de stables de taille 2 contenant les racines des arbres d’une forêt à feuilles uniformes de hauteur 1

**Au rang  $h$ ,** l’hypothèse de récurrence est que pour toute forêt à feuilles uniformes  $\mathcal{F} = (N, B, E)$  dont les arbres sont de hauteur inférieure ou égale à  $h$ , où les feuilles de profondeur supérieure ou égale à 1 appartiennent à  $N$  et  $|B|$  est pair,  $\mathcal{F}$  est un graphe partiel d’une famille minimalement hypotriangulable, les racines des arbres de  $\mathcal{F}$  étant dans des stables de taille 2, à l’exception des arbres de taille 1 si ils appartiennent à  $N$ .

**Au rang  $h+1$ ,** soit  $\mathcal{F}$  une forêt dont les arbres sont de hauteur inférieure ou égale à  $h+1$ . Soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{F}$ , notons  $B_T$  les sommets de  $B \cap V(T)$ .  $|B_T|$  est pair ou impair, mais puisque  $|B|$  est pair, ces derniers sont en nombre pair.

Nous considérons, dans la suite, les arbres tels que  $|B_T|$  est pair isolément et ceux dont  $|B_T|$  est impair par paire  $T_1$  et  $T_2$ . Dans le cas des arbres de taille 1, si ils appartiennent à  $N$ , il n’y a rien à prouver et si ils appartiennent à  $B$  alors  $|B_T| = 1$  est impair.

- Soit  $T$  tel que  $|B_T|$  est pair :  $|B_T| \geq 2$  donc la hauteur de  $T$  est au moins 2 et  $T$  a au moins 4 sommets. Soit  $u$  la racine de  $T$  et  $v$  un petit-fils de  $u$  (la hauteur de l’arbre est supérieure à 2),  $\{u, v\}$  est un stable de taille 2. Voir FIG. 3.24 et 3.25.

Les sommets de  $T \setminus \{u, v\}$  induisent une forêt à feuilles uniformes  $\mathcal{RF}$  dont les arbres sont de hauteur inférieure ou égale à  $h$ , où toute feuille de profondeur supérieure ou égale à 1 appartient à  $N$  et vérifiant  $|B|$  est pair. L’hypothèse de récurrence permet de conclure qu’il existe un surgraphe de  $\mathcal{RF}$  qui est un ensemble fini  $\{G_i\}$  de graphes, minimalement hypotriangulable, les racines des arbres étant dans des sacs stables de taille 2  $\{x_i^1, x_i^2\}$ , sauf pour les arbres de taille 1 appartenant à  $B$ .  $\mathcal{RF}$  a au moins 2 sommets, le Lemme 11 assure que l’ajout des arêtes  $\{[u, x_i], [v, x_i]\}_{i \leq k_1}$  et  $\{[u, x_i^1], [u, x_i^2], [v, x_i^1], [v, x_i^2]\}_{i > k_1}$  construit un surgraphe hypotriangulé de  $T$ .

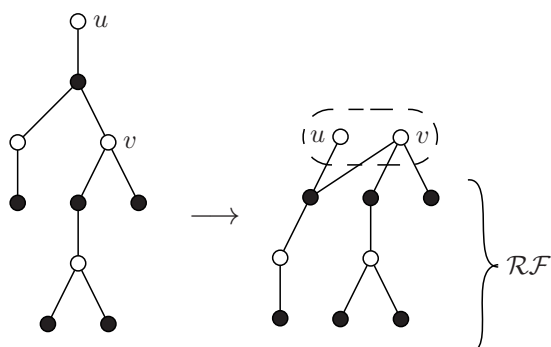


FIGURE 3.24 – Formation du stable contenant la racine  $u \in B$  de  $T$  tel que  $|B_T|$  est pair

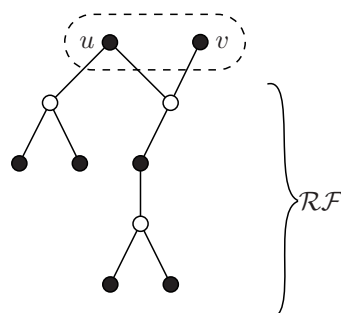


FIGURE 3.25 – Formation du stable contenant  $u \in N$  racine de  $T$  tel que  $|B_T|$  est pair

- Soient  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $|B_{T_1}|$  et  $|B_{T_2}|$  sont impairs : soit  $u$  (respectivement  $v$ ) la racine de  $T_1$  (respectivement  $T_2$ ), voir FIG. 3.27 et 3.26.

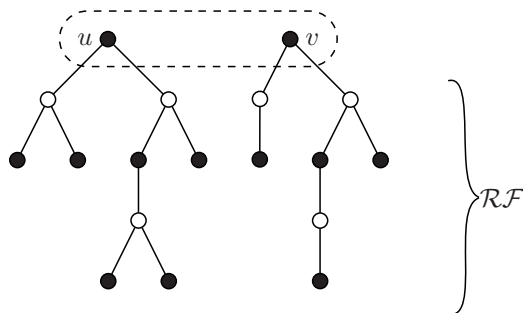


FIGURE 3.26 – Formation du stable contenant les racines  $u$  et  $v \in N$  de  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $|B_{T_1}|$  et  $|B_{T_2}|$  sont impairs

L'ensemble  $\{u, v\}$  est un stable de taille 2. Si  $|V(T_1) \cup V(T_2)| = 2$ , les sommets  $u$  et  $v$  sont des sommets isolés ; si  $|V(T_1) \cup V(T_2)| = 3$ ,

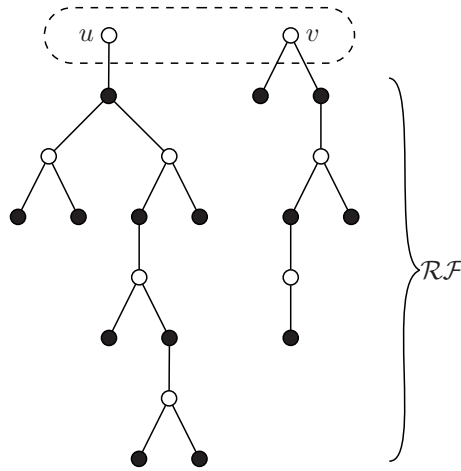


FIGURE 3.27 – Formation du stable contenant les racines  $u$  et  $v \in B$  de  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $|B_{T_1}|$  et  $|B_{T_2}|$  sont impairs

alors l'ajout d'arêtes pour rendre  $u$  et  $v$  jumeaux donne un  $P_3$  ; sinon ( $|V(T_1) \cup V(T_2)| \geq 4$ ), les fils de  $u$  et  $v$  appartenant au même ensemble de la bipartition, sont les racines d'arbres de hauteur inférieure ou égale à  $h$ . Ces arbres forment une forêt  $\mathcal{RF}$  ayant un nombre pair de sommets dans  $B$  et où toute feuille de profondeur supérieure ou égale à 1 appartient à  $N$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $\mathcal{RF}$ , l'ajout des arêtes entre  $u$  et les fils de  $v$  (et respectivement  $v$  et les fils de  $u$ ) et le Lemme 11 construisent un surgraphe hypotriangulé minimum de  $T_1 \cup T_2$ .

□

### 2.4.2 Arbres à feuilles uniformes

Nous allons utiliser le Lemme 12 pour hypotriangler les arbres à feuilles uniformes. Commençons par définir ces arbres.

**Définition 9.** *Un arbre à feuilles uniformes est un arbre dont les feuilles sont toutes dans le même ensemble de la bipartition.*

**Théorème 15.** *Le problème  $\text{Arbre}_{unif} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES est polynomial.*

*Démonstration.* Soit  $T = (B, N, E)$  un arbre tel que toutes ses feuilles appartiennent à  $N$ .

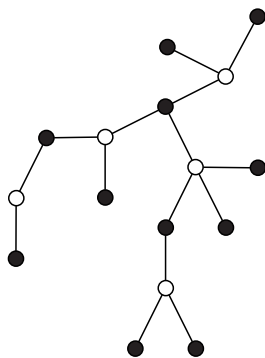


FIGURE 3.28 – Exemple d’arbre à feuilles uniformes noires

Nous allons maintenant montrer le résultat suivant :

**Proposition 12.** *L’ajout de  $n - 3$  arêtes à un arbre à feuilles uniformes à  $n$  sommets permet d’obtenir un graphe hypotriangulé minimum ( $m' = 2n - 4$ ) sauf lorsque les sommets blancs sont en nombre impair et tous de degré supérieur ou égal à 3. Dans ce cas, le nombre minimal d’arêtes à ajouter à l’arbre pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $n - 2$ .*

Pour montrer ce résultat, nous raisonnons sur la parité de  $|B|$ , ainsi que  $\delta(B)$ , le degré minimal d’un sommet de  $B$ .

**Si  $|B|$  est pair,** en choisissant un sommet quelconque de  $T$  comme racine de l’arbre, ce résultat est un cas particulier du Lemme 12.

**Si  $|B|$  est impair et  $\delta(B) = 2$ ,** soient  $x \in B$  de degré 2 et  $u, v \in N$  les voisins de  $x$ . Les sommets de  $V(T) \setminus \{x, u, v\}$  induisent une forêt  $\mathcal{RF}$  (voir FIG. 3.29) contenant un nombre pair de sommets de  $B$ , les racines des arbres appartenant à  $B$  et les feuilles à  $N$ . Par le Lemme 12, nous savons que cette forêt peut être complétée en un ensemble  $\{G_i\}$  minimalement hypotriangulé. D’après le Lemme 11 avec l’ensemble  $\{G_i\} \cup \{x\}$  et les sommets  $u$  et  $v$ ,  $T$  est un graphe partiel d’un graphe hypotriangulé minimum.

**Si  $|B|$  est impair et  $\delta(B) \geq 3$ ,** il est impossible de compléter  $T$  en un graphe hypotriangulé minimum. En effet, un graphe hypotriangulé minimum est nécessairement biparti et chaque sommet de degré supérieur ou égal à 3 est couplé dans un stable de taille 2 avec un sommet jumeau (qui

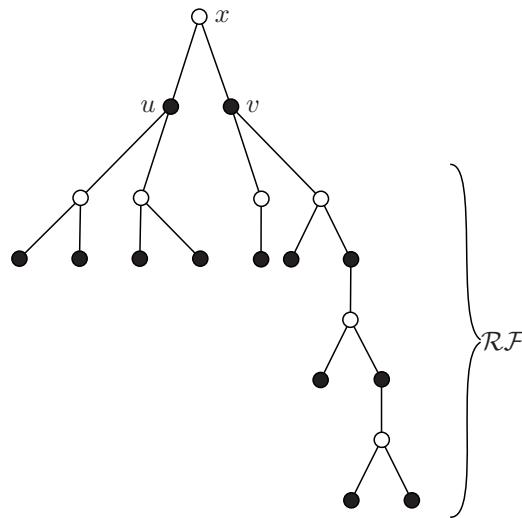


FIGURE 3.29 – Arbre à feuilles uniformes  $N$ ,  $|B|$  est impair et  $\delta(B) = 2$

appartient donc au même ensemble de la bipartition). Ici, il y a un nombre impair de sommets de  $B$  à partitionner en stables de taille 2. Ceci est impossible, donc  $T$  n'est pas un graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum. Le nombre minimal d'arêtes à lui ajouter pour obtenir un graphe hypotriangulé est donc supérieur ou égal à  $n - 2$ .

Soit  $y \in N$  une feuille de  $T$  et  $x \in B$  le voisin de  $y$ . Comme  $y$  est une feuille, le graphe induit par les sommets  $V(T) \setminus \{x, y\}$  est une forêt  $\mathcal{F}$  à feuilles uniformes, appartenant à  $N$ , ayant un nombre pair de sommets de  $B$ , dont les arbres sont à racines dans  $N$  (voir FIG. 3.30).

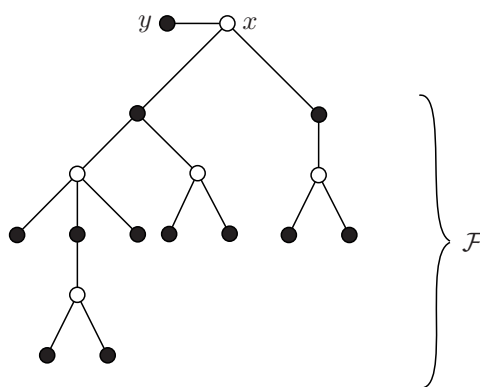


FIGURE 3.30 – Arbre à feuilles uniformes  $N$ ,  $|B|$  impair et  $\delta(B) \geq 3$

Ainsi par le Lemme 12, cette forêt se complète en un ensemble  $\{G_i\}$  de

graphes minimalement hypotriangulable où les racines des arbres de  $\mathcal{F}$  sont dans les stables de taille 2, à l'exception des arbres de taille 1 appartenant à  $N$ . Une complétion semblable à celle du Lemme 11 permet d'obtenir un graphe ayant une partition-arbre  $\leq 2$  et dont chaque sac est un ensemble stable de taille 2 sauf pour le sac  $\{x, y\}$ . Le graphe ainsi obtenu est un graphe hypotriangulé et possède  $2n - 3$  arêtes. L'hypotriangulation de  $T$  par ajout d'arêtes nécessite donc  $n - 2$  nouvelles arêtes.  $\square$

### 2.4.3 Les autres arbres

Nous avons cherché à obtenir des résultats généraux sur les arbres. Cependant, quelque soit l'approche que nous avons envisagé, nous nous sommes trouvés dans une impasse : certains arbres sont graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum et nécessite l'ajout de  $n - 3$  arêtes pour obtenir un graphe hypotriangulé. D'autres ne le sont pas. Considérons par exemple les arbres des Figures 3.31 et 3.32.

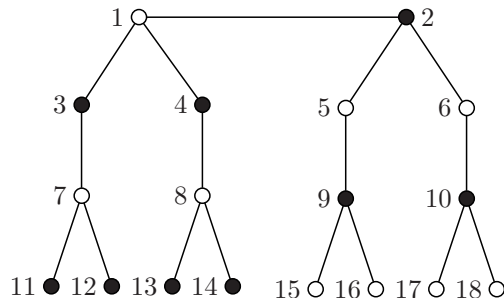


FIGURE 3.31 – Cet arbre est graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum

Ces deux arbres (respectivement  $T_1$  et  $T_2$ ) présentent une structure proche : les sommets  $\mathcal{G} = \{1; 3; 4; 7; 8; 11; 12; 13; 14\}$  induisent un sous-arbre à feuilles uniformes noires, ayant un nombre impair de sommets blancs, tous de degré 3 (dans l'arbre  $T_i$ ). Quant aux sommets de  $\mathcal{D} = V \setminus \mathcal{G}$ , ils induisent un sous-arbre de racine 2 qui est un arbre à feuilles uniformes blanches et possédant un nombre impair de sommets noirs, de degré 3 (dans l'arbre  $T_i$ ). Nous avons vu précédemment que de tels sous-arbres ne peuvent être graphes partiels de graphes hypotriangulés minimum. Ainsi, si  $T_1$  (respectivement  $T_2$ ) est graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum, nécessairement au moins un sommet blanc de  $\mathcal{G}$  forme un stable de taille

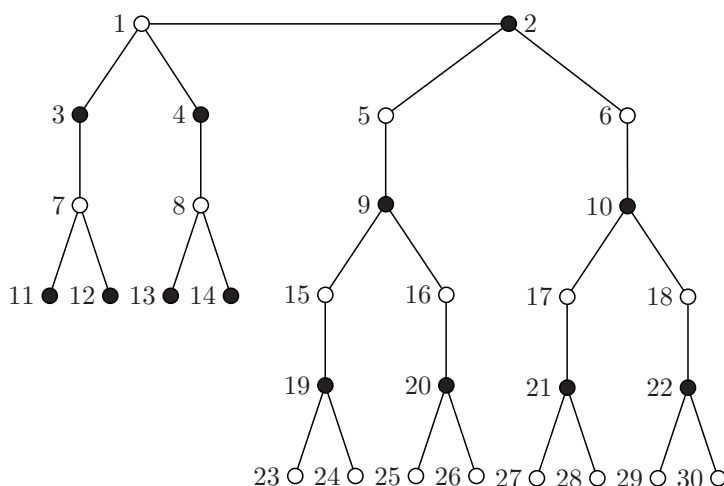


FIGURE 3.32 – Cet arbre n’est pas graphe partiel d’un graphe hypotriangulé minimum

2 avec un sommet blanc de  $\mathcal{D}$  (plus précisément, un nombre impair de tels stables doivent exister) et de même pour les sommets noirs : au moins un sommet noir de  $\mathcal{D}$  forme un stable de taille 2 avec un sommet noir de  $\mathcal{G}$ .

Pour l’arbre  $T_1$  en FIG. 3.31, nous donnons les sacs stables de taille 2 justifiant ainsi que  $T_1$  est graphe partiel d’un graphe hypotriangulé minimum. Les sacs de  $T_1$  sont :  $\{1; 5\}$ ,  $\{2; 3\}$ ,  $\{4; 9\}$ ,  $\{6; 7\}$ ,  $\{8; 15\}$  et  $\{10; 11\}$ .

Pour l’arbre  $T_2$  en FIG. 3.31, nous utilisons l’argument précédent, disant qu’au moins un sommet blanc de  $\mathcal{G}$  doit être dans un sac stable avec un sommet blanc de  $\mathcal{D}$  et, à symétrie près, énumérons les différents cas possibles :

Supposons que le sommet 1 forme un stable avec :

- le sommet 23, alors nous pouvons en déduire les sacs  $\{2; 19\}$ ,  $\{5; 15\}$ , puis  $\{9; 20\}$ ,  $\{3; 4\}$  et  $\{7; 8\}$ . Il est alors impossible d’affecter tous les sommets noirs du sous-arbre de racine 6 à des sacs stables de taille 2, pour obtenir une partition-arbre-stable $\leq 2$ .
- le sommet 15. Nous obtenons nécessairement les sacs  $\{2; 9\}$ ,  $\{3; 19\}$ . Le sous-arbre de racine 4 pose alors un problème.
- le sommet 5. Nous considérons alors les différentes possibilités de formation de stables contenant le sommet 2 :  $\{2; 3\}$ ,  $\{2; 9\}$  ou  $\{2; 10\}$ . Par le même type d’argument que précédemment, chacune de ses possibilités aboutit à une impasse.

Nous raisonnons de même pour les stables  $\{7; 23\}$ ,  $\{7; 15\}$  ou  $\{7; 5\}$ . Ainsi,



l'arbre  $T_2$  n'est pas graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum. Le nombre minimum d'arêtes à lui ajouter pour obtenir un graphe hypotriangulé est  $n - 2$ . En effet, en considérant le sac de taille 2  $\{1; 2\}$  non stable, la formation des autres sacs stables de taille 2 devient évidente :  $\{3; 4\}$ ,  $\{5; 6\}$ ,  $\{7; 8\}$ ,  $\{9; 10\}$ ,  $\{15; 16\}$ ,  $\{17; 18\}$ ,  $\{19; 20\}$  et enfin  $\{21; 22\}$ . Le graphe ayant ces sacs pour partition-arbre  $\leq 2$  est un graphe hypotriangulé à  $2n - 3$  arêtes.

## 2.5 Grille $\rightarrow$ $\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES

Nous nous intéressons dans cette partie à l'hypotriangulation des grilles. Nous changeons complètement de philosophie dans la démonstration des résultats qui suivent. En effet, nous ne considérons plus les graphes hypotriangulés minimum pour montrer la minimalité de l'ensemble des arêtes ajoutées. Nous allons trouver un minorant du nombre d'arêtes à ajouter pour hypotriangler une grille et à partir de ce minorant, nous pouvons conclure sur la minimalité de l'ensemble d'arêtes ajoutées. Dans les cas où nous n'avons pas réussi à conclure grâce à ce minorant, nous donnons un majorant du nombre minimal d'arêtes à ajouter à une grille pour l'hypotriangler.

Soit  $G_{p,q}$  la grille de taille  $p \times q$  ( $p \geq q \geq 2$ ). Nous numérotions les lignes de 1 à  $p$  de haut en bas et les colonnes de 1 à  $q$  de gauche à droite. Soit un sommet  $x \in G_{p,q}$ , nous notons alors  $L(x)$  (respectivement  $C(x)$ ) le numéro de la ligne (respectivement la colonne) à laquelle appartient  $x$ .

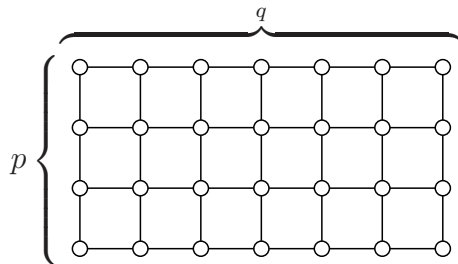


FIGURE 3.33 –  $G_{p,q}$

Le graphe  $G_{p,q}$  n'est pas hypotriangulé. En effet, tout  $P_3$  horizontal ou vertical n'est inclus dans aucun  $C_3$  ou  $C_4$ . Rappelons le problème  $\mathcal{Grille} \rightarrow$

$\mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES, défini en Section 2.3.2 du Chapitre 1 :

*Données* Une grille  $G_{p,q} = (V, E)$

*Question* Quel est le cardinal minimal d'un ensemble d'arêtes  $F$ ,  $F \subset V \times V \setminus E$  tel que le graphe  $G' = (V, E \cup F)$  est hypotriangulé?

Notons  $r_{p,q}$  le cardinal minimal de  $F$ .

### 2.5.1 Trouver un minorant de $r_{p,q}$

Le nombre minimal d'arêtes à ajouter à  $G_{p,q}$  pour que tous les  $P_3$  horizontaux et verticaux soient inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$  est un minorant de  $r_{p,q}$ .

Soit  $ayb$  un  $P_3$  horizontal ou vertical de  $G_{p,q}$  inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$  suite à l'ajout d'un ensemble d'arêtes. Si une arête ajoutée  $e$  appartient à un  $C_3$  ou à un  $C_4$  contenant  $ayb$ , nous dirons que  $e$  couvre  $ayb$ .

**Couverture des  $P_3$  horizontaux et verticaux d'une grille** Nous détaillons ici les différentes manières de couvrir un  $P_3$  dans une grille. Soit  $ayb$  un  $P_3$  horizontal (ou vertical) de la grille, il peut être couvert :

- par une seule arête ajoutée :
- par l'arête  $ab$ , ainsi les sommets  $a, y, b$  induisent un  $C_3$  dans le nouveau graphe (voir FIG. 3.34) ;

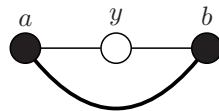


FIGURE 3.34 –  $P_3$  de la grille inclus dans un  $C_3$

- par une arête  $az$  où  $z$  est un voisin de  $b$  dans la grille, ainsi les sommets  $a, y, b, z$  induisent un  $C_4$  dans le graphe complété, dont trois des quatre arêtes appartiennent à la grille (voir FIG. 3.35) ;
- par une paire d'arêtes ajoutées :  $az, zb$ , ainsi  $ayb$  est inclus, dans le nouveau graphe, dans un  $C_4$  dont deux des quatre arêtes appartiennent à la grille (voir FIG. 3.36).

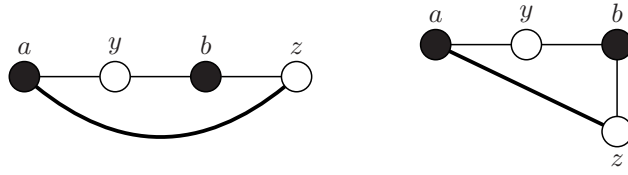


FIGURE 3.35 – Deux manières de couvrir un  $P_3$  de la grille par une seule arête ajoutée, inclus dans un  $C_4$

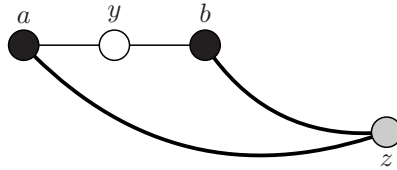


FIGURE 3.36 – Un  $P_3$  de la grille couvert par deux arêtes ajoutées

**Partition de l'ensemble des  $P_3$  horizontaux et verticaux** La grille est un graphe biparti, notons donc  $G_{p,q} = (B, N, E)$ . Nous notons alors  $P_X^h$  ( $X \in \{N, B\}$ ) (respectivement  $P_X^v$ ) l'ensemble des  $P_3$  horizontaux (respectivement verticaux) de  $G_{p,q}$  dont le sommet central appartient à  $X$ .

Ainsi les  $P_3$  de la grille qui n'appartiennent à aucun  $C_3$  ou  $C_4$  sont partitionnés en  $P_B^h \sqcup P_B^v \sqcup P_N^h \sqcup P_N^v$ .

**Couverture de  $P_B^h \sqcup P_N^v$**  Nous cherchons à déterminer ici le nombre minimal d'arêtes à ajouter à la grille  $G_{p,q}$  pour que les  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  soient inclus dans des  $C_3$  ou des  $C_4$ .

**Remarque 5.** Une arête seule peut couvrir au maximum un seul  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . Ceci est dû au fait que nous ne considérons ici que les  $P_3$  de sommet central blanc horizontaux et les  $P_3$  de sommet central noir verticaux. En effet, une arête seule peut couvrir deux  $P_3$  (FIG. 3.35), mais alors ceux-ci sont tous les deux horizontaux ou verticaux et ont des sommets centraux de couleurs différentes.

**Remarque 6.** Une arête ne peut servir à couvrir que des  $P_3$  dont un de ses sommets est extrémité. Ainsi, si  $xy \in E$ , cette arête peut servir dans la couverture d'au plus deux  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  d'extrémité  $x$  (plus précisément,

ces  $P_3$  sont de type  $P_B^h$  si  $x \in N$  et de type  $P_N^v$  si  $x \in B$ ) et d'au plus deux  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  d'extrémité  $y$ .

**Remarque 7.** Soit un ensemble  $F$  d'arêtes à ajouter à  $G_{p,q}$ . Supposons qu'il existe deux  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  d'extrémités  $x, x_1$  et  $y, y_1$  couverts par des arêtes  $xy, xy_1$  et  $x_1y$  de  $F$  et l'arête  $xy$  ne sert dans la couverture d'aucun autre  $P_3$ .

- Si  $x_1y_1 \in F$ , les  $P_3$  d'extrémités  $x, x_1$  et  $y, y_1$  sont également couverts par les arêtes  $xy_1, x_1y_1$  et  $x_1y$  de  $F$ . Ainsi l'ensemble  $F \setminus \{xy\}$  de cardinal  $|F| - 1$  couvre les mêmes  $P_3$  que  $F$ .
- Si  $x_1y_1 \notin F$ , l'ensemble  $F \setminus \{xy\} \cup \{x_1y_1\}$  de cardinal  $|F|$  couvre les mêmes  $P_3$  que  $F$ .

**Proposition 13.** Soit  $G_{p,q} = (V, E)$  où  $V = N \cup B$ . Soit  $F \in V^2 \setminus E$  un ensemble de paires de sommets de  $G_{p,q}$ . Dans le graphe  $G = (V, E \cup F)$ , au plus  $|F|$  éléments de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  sont couverts (i.e. sont inclus dans un  $C_3$  ou un  $C_4$ ).

*Démonstration.* Nous montrons ce résultat par récurrence sur  $|F|$ .

$|F| = 1$ , l'ajout d'une arête à  $G_{p,q}$  couvre au plus un  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ , par la proposition 5.

Soit l'hypothèse de récurrence au rang  $k$ ,  $HR(k)$  : tout ensemble d'arêtes  $F$  de cardinal  $k$  permet par son ajout au graphe  $G_{p,q}$  de couvrir au plus  $k$   $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ .

Soit  $F$  un ensemble de  $k + 1$  arêtes, nous montrons par l'absurde que  $F$  couvre au plus  $k + 1$   $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  de la grille. Par l'absurde, supposons que  $F$  couvre au moins  $k + 2$   $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . Si il existe une arête  $xy \in F$  qui ne couvre qu'un seul  $P_3$  alors  $F \setminus \{xy\}$  est de cardinal  $k$  et couvre au moins  $k + 1$   $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ , ce qui contredit  $HR(k)$ . Ainsi, toute arête de  $F$  sert à couvrir au moins deux  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ .

Nous partitionnons  $F$  comme suit :

$NN_L = \{xy \in F/x \in N, y \in N, L(x) = L(y)\}$  les arêtes dont les deux extrémités appartiennent à  $N$  et à la même ligne ;

$NN = \{xy \in F/x \in N, y \in N, L(x) \neq L(y)\}$  les arêtes dont les deux extrémités appartiennent à  $N$  qui ne partagent pas la même ligne ;

$BB = \{xy \in F/x \in B, y \in B\}$  les arêtes dont les deux extrémités appartiennent à  $B$  ;

$NB = \{xy \in F/x \in N, y \in B, C(x) < C(y)\}$  les arêtes dont une extrémité appartient à  $N$  et l'autre à  $B$ , le sommet noir étant à gauche du sommet blanc ;

$BN = \{xy \in F/x \in N, y \in B, C(x) > C(y)\}$  les arêtes dont une extrémité appartient à  $N$  et l'autre à  $B$ , le sommet noir étant à droite du sommet blanc ;

$NBC = \{xy \in F/x \in N, y \in B, C(x) = C(y)\}$  les arêtes bicolores dont les deux extrémités appartiennent à la même colonne.

Pour chacun des ensembles que nous avons définis, nous le supposons non vide et choisissons alors une arête  $xy$  de cet ensemble de manière à restreindre les possibilités d'arêtes de  $F$  incidentes à  $xy$ . Ainsi, nous restreignons les possibilités de  $P_3$  couverts par  $xy$ . De plus, nous avons montré que toute arête de  $F$  doit servir dans la couverture d'au moins deux  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . C'est donc en particulier vrai pour  $xy$ . Nous cherchons alors à aboutir à une absurdité et montrons ainsi que les six ensembles définis ci-dessus sont vides, et donc que  $F$  est vide.

**Si**  $NN_L \neq \emptyset$ , soit une arête  $xy = \operatorname{argmax}\{d_G(x, y)/xy = \operatorname{argmin}(C(x))\}_{xy \in NN_L}$ . Il s'agit donc d'une arête la plus longue dont les deux extrémités sont noires, appartiennent à une même ligne et l'une des extrémités est la plus à gauche. Nous raisonnons par récurrence sur  $d_G(x, y)$ .

- Si  $d_G(x, y) = 2$ , alors  $C(y) = C(x) + 2$  et l'arête  $xy$  couvre le  $P_3$   $\bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet$  mais elle doit servir à couvrir au moins un autre  $P_3$ . Il existe donc une arête  $xz$  (ou  $yz$ ) incidente à  $xy$  telle que  $y$  et  $z$  (ou  $x$  et  $z$ ) sont extrémités d'un  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ , or  $x \in N$  (et  $y \in N$ ) donc  $z \in N$ . Nécessairement l'arête  $yz$  est telle que  $L(z) = L(x) = L(y)$  et  $C(z) = C(x) - 2$  ce qui est impossible car par minimalité de  $C(x)$  ou l'arête est  $xz$  telle que  $L(z) = L(x) = L(y)$  et  $C(z) = C(y) + 2$  et alors  $d_G(x, z) > d_G(x, y)$  ce qui est impossible car l'arête  $xy$  maximise la distance entre ses extrémités, une fois  $C(x)$  minimal.
- Supposons que  $d_G(x, y) = 2j$  conduit à une absurdité, pour  $j \geq 1$ .
- Si  $d_G(x, y) = 2(j + 1)$ , alors  $C(y) = C(x) + d_G(x, y)$  et l'arête  $xy$  ne couvre seule aucun  $P_3$ . Or cette arête doit servir à couvrir au moins deux  $P_3$ , il existe donc deux arêtes incidentes à  $xy$ . Par le choix de l'arête  $xy$ , ces arêtes sont nécessairement  $xy_1$  avec  $C(y_1) = C(y) - 2$

et  $x_1y$  avec  $C(x_1) = C(x) + 2$ . Utilisons maintenant la remarque 7 et le choix de l'arête  $xy$  : soit  $x_1y_1$  appartient à  $F$  et dans ce cas,  $F \setminus \{xy\}$  contredit  $\text{HR}(k)$ , soit l'arête  $x_1y_1$  n'appartient pas à  $F$  et alors  $F \setminus \{xy\} \cup \{x_1y_1\}$  est un ensemble d'arêtes, dont l'ajout à  $G_{p,q}$  permet de couvrir les mêmes  $P_3$  que  $F$ , de même cardinal ; contenant  $x_1y_1 \in NN_L$  et  $d_G(x, y_1) = 2j$ . En itérant pour toutes les arêtes  $xy$  de  $NN_L$  qui minimise  $C(x)$  et telle que  $d_G(x, y) = 2(j+1)$ , nous obtenons alors un ensemble d'arêtes  $F'$  de même cardinal que  $F$ , couvrant les mêmes  $P_3$  tel que  $\max_{xy \in NN_L} \{d_G(x, y)/xy = \operatorname{argmin}(C(x))\} = 2j$ . D'après l'hypothèse de récurrence, ceci est impossible.

Donc  $NN_L = \emptyset$ .

Si  $NN \neq \emptyset$ , soit une arête  $xy = \operatorname{argmax}_{xy \in NN} \{d_G(x, y)/xy = \operatorname{argmin}(C(x))\}$ . Rappelons que  $L(x) \neq L(y)$ . Il s'agit d'une arête la plus longue dont les deux extrémités sont noires et l'une des extrémités est la plus à gauche.  $x$  minimise  $C(x)$  donc  $C(x) \leq C(y)$ . L'arête  $xy$  seule ne couvre aucun  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ , donc il existe deux arêtes incidentes à  $xy$  permettant de couvrir des  $P_3$  horizontaux appartenant aux lignes  $L(x)$  ou  $L(y)$ . Or ces arêtes ne peuvent pas être de la forme  $yz$  avec  $L(z) = L(x)$ ,  $C(z) < C(x)$ , par minimalité de  $C(x)$ . De plus  $xy$  maximise  $d_G(x, y)$  donc ces arêtes incidentes ne peuvent pas non plus être de type  $xz$  avec  $L(z) = L(y)$ ,  $C(z) > C(y)$ . Ainsi les arêtes incidentes à  $xy$  sont nécessairement  $x_1y \in NN$  avec  $L(x_1) = L(x)$ ,  $C(x_1) = C(x) + 2$  et  $xy_1 \in NN$  avec  $L(y_1) = L(y)$ ,  $C(y_1) = C(y) - 2$ . Raisonnons par récurrence sur  $C(y) - C(x)$  pour montrer que cette situation aboutit à une absurdité.

- Si  $C(y) - C(x) = 0$  ou  $1$ , le sommet  $y_1$  vérifie  $C(y_1) < C(x)$ , ce qui contredit la minimalité de  $C(x)$ .
- Supposons que  $C(y) - C(x) \leq j$  est impossible pour  $j \geq 1$ . Soit  $C(y) - C(x) = j + 1$ , la configuration est donnée en FIG. 3.37. Utilisons la remarque 7 : si l'arête  $x_1y_1$  appartient à  $F$ , l'ensemble  $F \setminus \{xy\}$  contredit  $\text{HR}(k)$ . Ainsi l'arête  $x_1y_1$  n'appartient pas à  $F$ , nous modifions alors l'ensemble  $F$ , en remplaçant l'arête  $xy$  par  $x_1y_1$ . L'arête  $xy_1$  appartient toujours à cet ensemble. En effectuant cette opération pour toute les arêtes  $xy \in NN$  qui minimise  $C(x)$  telle que  $C(y) - C(x) = j + 1$ , nous obtenons alors un nouvel ensemble d'arêtes

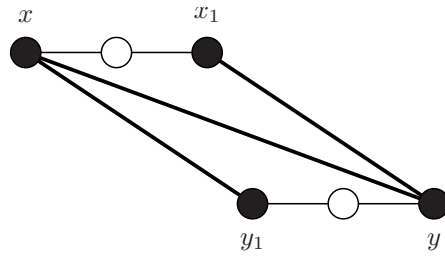


FIGURE 3.37 –  $L(x) \neq L(y)$

de même cardinal, couvrant les mêmes  $P_3$  pour lequel  $C(y) - C(x)$  est majoré par  $j$  pour les arêtes qui minimisent  $C(x)$ .

Donc  $NN = \emptyset$ .

Si  $BB \neq \emptyset$ , en transposant les arguments précédents, relatifs aux lignes, aux colonnes et en considérant une arête  $xy = \operatorname{argmax}_{xy} \{d_G(x, y) / xy = \operatorname{argmin}_{xy \in BB} (L(x))\}$ , nous arrivons à une absurdité. Donc  $BB = \emptyset$ .

Si  $NB \neq \emptyset$ , soit une arête  $xy = \operatorname{argmax}_{xy \in NB} \{d_G(x, y) / xy = \operatorname{argmin}_{xy \in NB} (C(x))\}$ . Il s'agit donc d'une arête la plus longue dont les extrémités sont noire et blanche, l'extrémité noire étant plus à gauche que la blanche et la plus à gauche parmi les arêtes de ce type.

- Si  $d_G(x, y) = 3$  et  $L(x) = L(y)$ , alors  $C(y) = C(x) + 3$  et l'arête  $xy$  seule couvre un  $P_3$  de  $P_B^h$  mais elle doit servir à couvrir au moins un autre  $P_3$ . Il existe donc une arête  $xz$  ou  $yz$  dans  $F$  incidente à  $xy$  telle que  $y$  et  $z$  (ou  $x$  et  $z$ ) sont extrémités d'un  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ , or  $x \in N$  et  $y \in B$  donc soit  $yz \in F$  avec  $z \in N$  et  $L(z) = L(x)$ , soit  $xz \in F$  avec  $z \in B$  et  $C(z) = C(y)$ . Cependant, par minimalité de  $C(x)$ , le premier cas est impossible. De plus, par maximalité de  $d_G(x, y)$ , le deuxième cas est également impossible. Voir FIG. 3.38.

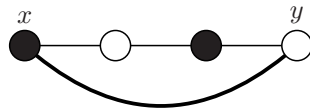


FIGURE 3.38 –  $L(x) = L(y)$  et  $d_G(x, y) = 3$

- Si  $d_G(x, y) > 3$  et  $L(x) = L(y)$ , alors  $C(y) = C(x) + d_G(x, y)$  et l'arête seule ne couvre aucun  $P_3$ . Il existe donc au moins deux arêtes incidentes à  $xy$  dans  $F$  :
  - $yz \in F$  avec  $z \in N$  et  $L(z) = L(x)$ , et par minimalité de  $C(x)$ , nous obtenons nécessairement  $C(z) = C(x) + 2$  ;
  - $xz \in F$  avec  $z \in B$  et  $C(z) = C(y)$  or  $d_G(x, y)$  est maximal, ce cas est donc impossible.
 Il existe dans  $F$  au plus une arête incidente à  $xy$  permettant de couvrir des  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . L'arête  $xy$  ne sert dans la couverture que d'un seul  $P_3$  et sa suppression de  $F$  contredit  $HR(k)$ .
- Si  $L(x) \neq L(y)$  et  $d_G(x, y) = 3$ . L'arête  $xy$  couvre un  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . Or cette arête doit servir dans la couverture d'un deuxième  $P_3$ , donc il existe une arête incidente à  $xy$ . Nous distinguons deux cas :
  - $|L(y) - L(x)| = 1, C(y) - C(x) = 2$ , par minimalité de  $C(x)$  et par maximalité de  $d_G(x, y)$ , l'arête incidente à  $xy$  est  $xy_1$  avec  $|L(y_1) - L(x)| = |L(y) - L(x)|$  et  $C(y_1) = C(y)$ . Nous voyons sur la figure 3.39 que  $F \setminus \{xy\}$  couvre alors  $k + 1$   $P_3$ , ce qui contredit  $HR(k)$ .

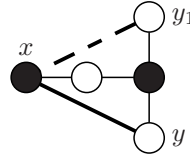


FIGURE 3.39 -  $|L(y) - L(x)| = 1, C(y) - C(x) = 2$

- $|L(y) - L(x)| = 2, C(y) - C(x) = 1$ , cette fois, la seule arête incidente à  $xy$  qui permet de couvrir un deuxième  $P_3$  est  $x_1y$  avec  $L(x_1) = L(x)$  et  $C(x_1) = C(x) + 2$ . Encore une fois, (voir FIG. 3.40) la suppression de l'arête  $xy$  contredit l'hypothèse de récurrence.
- Sinon,  $L(x) \neq L(y)$  et  $d_G(x, y) > 3$  donc l'arête  $xy$  seule ne couvre aucun  $P_3$ . Il existe deux arêtes incidentes à  $xy$  permettant de couvrir des  $P_3$  de la ligne  $L(x)$  ou de la colonne  $C(y)$ . Ces arêtes ne peuvent pas être de la forme  $yz$  avec  $L(z) = L(x), C(z) < C(x)$ . De plus  $xy$  maximise  $d_G(x, y)$  donc ces arêtes incidentes ne peuvent pas non plus être de type  $xz$  avec  $C(z) = C(y)$  et  $|L(z) - L(x)| > |L(y) - L(x)|$ .



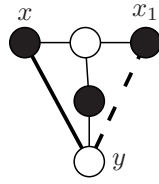


FIGURE 3.40 –  $|L(y) - L(x)| = 2, C(y) - C(x) = 1$

Ainsi les arêtes incidentes à  $xy$  sont nécessairement  $x_1y$  avec  $L(x_1) = L(x)$ ,  $C(x_1) = C(x) + 2$  et  $xy_1$  avec  $C(y_1) = C(y)$ ,  $|L(y_1) - L(x)| = |L(y) - L(x)| - 2$ . Raisonnons par récurrence sur  $d_G(x, y)$  pour montrer que cette situation aboutit à une absurdité.

- $d_G(x, y) = 3$  est impossible. Ce cas a été étudié précédemment.
- Si  $d_G(x, y) = 5$  avec  $\{|L(y) - L(x)|, |C(y) - C(x)|\} = \{2, 3\}$ , dans ce cas, les sommets  $x_1$  et  $y_1$  sont voisins dans la grille et l'arête  $xy_1$  (respectivement  $x_1y$ ) couvre seule le  $P_3$  d'extrémité  $x, x_1$  (respectivement  $y, y_1$ ). L'ensemble  $F \setminus \{xy\}$  couvre les mêmes arêtes que  $F$ . Donc  $F \setminus \{xy\}$  contredit  $\text{HR}(k)$ .

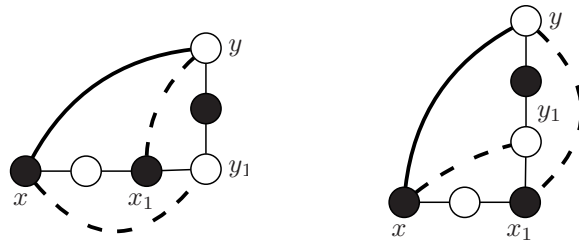


FIGURE 3.41 – Deux configurations telles que  $d_G(x, y) = 5$  avec  $\{|L(y) - L(x)|, |C(y) - C(x)|\} = \{2, 3\}$

- Si  $d_G(x, y) = 5$  avec  $|L(y) - L(x)| = 1, C(y) - C(x) = 4$ . Voir FIG. 3.42. On a alors  $|L(y_1) - L(x)| = 1$ , les sommets  $y$  et  $y_1$  sont symétriques par rapport à  $L(x)$ . En appliquant le même raisonnement à  $xy_1$ , nous obtenons que  $x_1y_1 \in F$ . Or d'après la remarque 7, l'ensemble  $F \setminus \{xy\}$  contredit  $\text{HR}(k)$ .
- Si  $d_G(x, y) = 5$  avec  $|L(y) - L(x)| = 4, C(y) - C(x) = 1$ . Voir FIG. 3.43. Les sommets  $x$  et  $x_1$  sont symétriques par rapport à  $C(y)$ , l'arête  $x_1y$  appartient à  $BN$ . L'arête  $x_1y_1$  n'appartient pas à  $F$ , sinon  $F \setminus \{xy\}$  contredit  $\text{HR}(k)$ , nous remplaçons donc dans  $F$

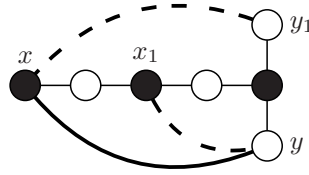


FIGURE 3.42 –  $d_G(x, y) = 5$  avec  $|L(y) - L(x)| = 1, C(y) - C(x) = 4$

l'arête  $xy$  par  $x_1y_1$ . En appliquant ceci à toutes les arêtes de  $F$  de ce type, nous obtenons un nouvel ensemble d'arêtes  $F'$  dont l'ajout à la grille couvre les mêmes  $P_3$  que  $F$ , de même cardinal et ne contenant pas d'arêtes  $xy$  minimisant  $C(x)$  telles que  $d_G(x, y) = 5$  avec  $|L(y) - L(x)| = 4, C(y) - C(x) = 1$ .

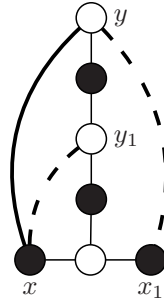


FIGURE 3.43 –  $d_G(x, y) = 5$  avec  $|L(y) - L(x)| = 4, C(y) - C(x) = 1$

- Si  $d_G(x, y) > 5$ , l'arête  $xy$  seule ne couvre aucun  $P_3$ . Il existe donc au moins deux arêtes incidentes à  $xy$  de manière à ce que cette arête serve dans la couverture de deux  $P_3$ . Nécessairement, par minimalité de  $C(x)$  et par maximalité de  $d_G(x, y)$ , ces arêtes sont  $xy_1$  avec  $C(y_1) = C(y), |L(y_1) - L(x)| = |L(y) - L(x)| - 2$  et  $x_1y$  avec  $C(x_1) = C(x) + 2, L(x_1) = L(x)$ . Nous utilisons maintenant la remarque 7 : si l'arête  $x_1y_1$  appartient à  $F$ , la suppression de  $xy$  contredit l'hypothèse de récurrence  $HR(k)$ , nous pouvons donc remplacer l'arête  $xy$  par  $x_1y_1$  dans  $F$  ; ainsi nous obtenons un ensemble d'arêtes dont l'ajout à la grille permet de couvrir le même ensemble de  $P_3$  que  $F$ . En effectuant cette opération pour toutes les arêtes de ce type, nous diminuons strictement  $d_G(x, y)$  pour  $xy \in NB$  qui minimise  $C(x)$ .

Ainsi  $NB = \emptyset$ .

Si  $BN \neq \emptyset$ , considérons une arête  $xy = \operatorname{argmax}\{d_G(x,y)/xy = \operatorname{argmax}_{xy \in BN}(C(x))\}$ . En échangeant les arguments de minimalité de  $C(x)$  précédents pour des arguments de maximalité, nous montrons que ce cas est impossible. Ainsi  $BN = \emptyset$ .

**Finalement**,  $F = NB_C$ . Nous avons montré que l'existence dans  $F$  d'arêtes bicolores horizontales est impossible. De même, l'existence d'arêtes bicolores verticales est impossible, donc  $NB_C = \emptyset$ .

Ainsi  $F$  couvre au plus  $|F| P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$ . □

**Proposition 14.**  $r_{p,q} \geq |P_B^h \sqcup P_N^v| = pq - p - q$ .

*Démonstration.* Le nombre minimal d'arêtes à ajouter à la grille  $G_{p,q}$  pour obtenir un graphe hypotriangulé est minoré par le nombre d'arêtes minimal à ajouter à la grille pour couvrir tous les  $P_3$  de  $P_B^h \sqcup P_N^v$  et  $|P_B^h \sqcup P_N^v| = pq - p - q$ . □

### 2.5.2 $p = 2, q \geq 2$



FIGURE 3.44 –  $G_{2,q}$  et un surgraphe hypotriangulé minimum de  $G_{2,q}$

La grille  $G_{2,q}$  est complétée, en ajoutant les  $q - 2$  arêtes de la figure 3.44, en un graphe hypotriangulé minimum. Ainsi  $q - 2$  est le nombre minimal d'arêtes à ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe hypotriangulé. Ainsi  $r_{2,q} = q - 2$ .

### 2.5.3 $p$ et $q$ pairs

**Proposition 15.** Pour  $p$  et  $q$  pairs,  $r_{p,q} = pq - p - q$ .

*Démonstration.* Le graphe de la figure 3.45 est un surgraphe hypotriangulé de  $G_{p,q}$ , possédant  $pq - p - q$  arêtes supplémentaires. Ainsi, nous obtenons une borne supérieure pour  $r_{p,q}$  :  $r_{p,q} \leq pq - p - q$ .

Or  $r_{p,q} \geq |P_B^h \sqcup P_N^v| = pq - p - q$ . □

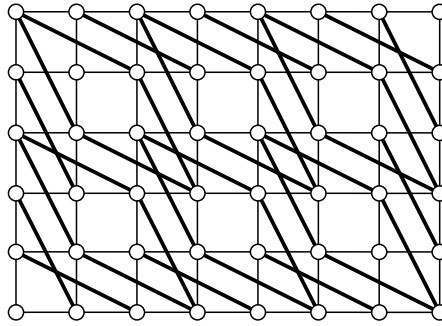


FIGURE 3.45 – Un surgraphe hypotriangulé de  $G_{p,q}$  avec  $p, q$  pairs

#### 2.5.4 $p = 4, q$ quelconque

**Proposition 16.** *Pour  $p = 4$  et  $q$  quelconque,  $r_{p,q} = pq - p - q = 3q - 4$ .*

*Démonstration.* Le graphe de la figure 3.46 est un graphe hypotriangulé, obtenu par ajout de  $3q - 4 = 4q - q - 4$  arêtes (en gras) à la grille  $G_{4,q}$ . Nous concluons par la proposition 14.  $\square$

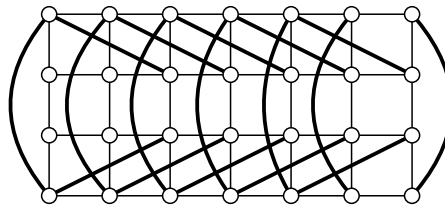


FIGURE 3.46 –  $G_{4,q}$

#### 2.5.5 Les autres cas

**Pour  $p = q = 3$ ,** un argument d'énumération montre que  $r_{3,3} = 4 > pq - p - q = 3$ . En particulier, une solution optimale est donnée en figure 3.47.

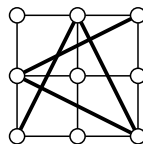


FIGURE 3.47 – Un surgraphe hypotriangulé de  $G_{3,3}$

Ainsi la borne inférieure  $pq - p - q$  n'est pas atteinte dans tous les cas.

Dans les cas impair-impair ou pair-impair avec  $p \geq 6$ , nous obtenons une borne supérieure en généralisant le cas  $p = 3, q = 3$ . Cette borne supérieure (illustrée sur la figure 3.48) nous donne  $r_{p,q} \leq (p - 2)(q - 1) + (q - 2)(p - 1) = 2pq - 3p - 3q + 4$ .

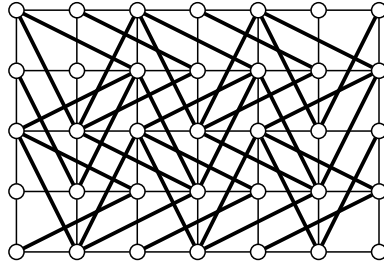


FIGURE 3.48 – Une hypotriangulation possible (minimale?) d’une grille impair-impair

## 2.6 $\mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES

Après les longues pages précédentes, qui pour certaines n’aboutissent qu’à des résultats partiels, nous nous permettons de terminer rapidement sur des problèmes beaucoup plus faciles.

### 2.6.1 Les arbres

**Théorème 16.** *Le problème  $\text{Arbre} \rightarrow \mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES est polynomial.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un arbre avec  $n(T) \geq 2$ , nous cherchons un sous-graphe maximum de  $T$  qui est hypotriangulé. Le plus grand sous-graphe connexe de  $T$  qui est hypotriangulé est  $K_2$ , donc nécessairement tout sous-graphe hypotriangulé de  $T$  est un ensemble de  $K_2$  et de sommets isolés. Nous cherchons donc un sous-graphe maximum de  $T$  formé de  $K_2$  et de sommets isolés.

Le problème  $\mathcal{HT}$ -SUPPRESSION-ARÊTES pour les arbres est donc équivalent au problème du couplage maximum d’un arbre. Ce problème est donc polynomial.  $\square$

### 2.6.2 Les grilles

**Théorème 17.** *Le problème Grille  $\rightarrow$   $\mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES est polynomial.*

*Démonstration.* Soit  $G_{p,q}$  une grille avec  $\min\{p, q\} \geq 2$ . Tout sous-graphe hypotriangulé de  $G_{p,q}$  est un ensemble de  $C_4$ , de  $K_2$  et de sommets isolés. Ainsi pour obtenir un sous-graphe maximum de  $G_{p,q}$  hypotriangulé, nous cherchons un sous-graphe formé de  $C_4$ , de  $K_2$  et de sommets isolés, où nous maximisons le nombre de  $C_4$ , puis le nombre de  $K_2$ .

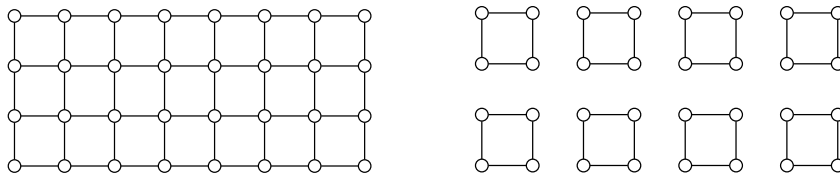


FIGURE 3.49 – Grille  $G_{p,q}$  avec  $p, q$  pairs

**$p, q$  pairs** L'ensemble des sommets de  $G_{p,q}$  peut être partitionné en  $pq/4$   $C_4$ . Voir FIG. 3.49

Cette solution est donc optimale et nécessite la suppression de  $pq - p - q$  arêtes.

**$p$  pair,  $q$  impair** Il est impossible de partitionner les sommets de  $G_{p,q}$  uniquement en  $C_4$ . Le nombre maximum de  $C_4$  disjoints dans  $G_{p,q}$  est  $p(q-1)/4$ . Il reste alors  $p$  sommets, or  $p$  étant pair, ces sommets peuvent être partitionnés en au maximum  $p/2$   $K_2$ .

Il existe un sous-graphe de  $G_{p,q}$  formé de  $p(q-1)/4$   $C_4$  et  $p/2$   $K_2$ . Voir FIG. 3.50

Ce graphe est une solution optimale de notre problème, par suppression de  $pq - p/2 - q$  arêtes.

**$p, q$  impairs** Dans ce cas, il est également impossible de partitionner les sommets de  $G_{p,q}$  en un ensemble de  $C_4$ . Le nombre maximum de  $C_4$  est  $(p-1)(q-1)/4$ . Il reste alors  $p+q-1$  sommets,  $p+q-1$  est impair, donc le nombre maximal de  $K_2$  disjoints sur ces sommets est  $p/2 + q/2 - 1$ .

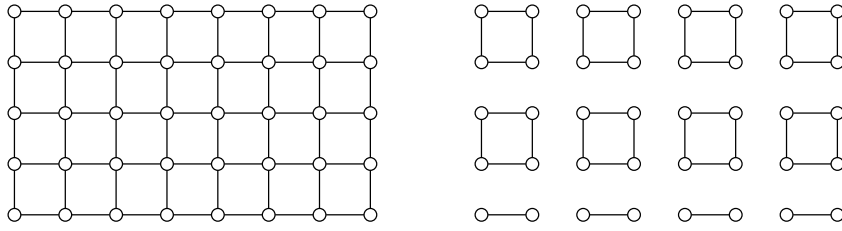


FIGURE 3.50 – Grille  $G_{p,q}$  avec  $p$  pair,  $q$  impair

Il existe un sous-graphe de  $G_{p,q}$  formé de  $(p-1)(q-1)/4 C_4$ ,  $p/2+q/2-1 K_2$  et un sommet isolé. Voir FIG. 3.51

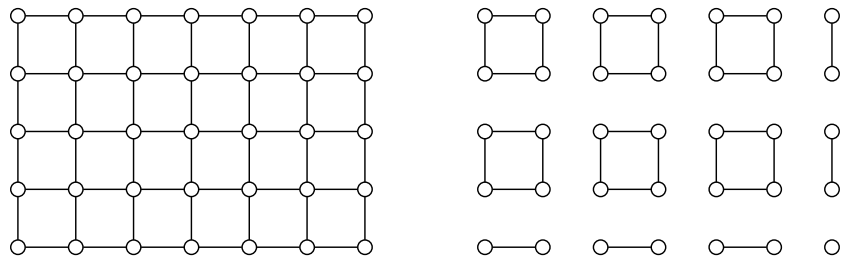


FIGURE 3.51 – Grille  $G_{p,q}$  avec  $p, q$  impairs

Ce graphe est une solution optimale au problème  $\mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES pour  $G_{p,q}$ .  $pq - p/2 - q/2 + 1$  arêtes sont supprimées.  $\square$

### 2.6.3 Les cycles

Soit  $C_n$  un cycle de  $n \geq 3$  sommets.

**Pour  $n = 3$  ou  $4$ ,** le graphe  $C_n$  est hypotriangulé.

**Pour  $n \geq 5$ ,**  $C_n$  n'est pas hypotriangulé. Le plus grand sous-graphe hypotriangulé connexe de  $C_n$  est  $K_2$  donc tout sous-graphe hypotriangulé de  $C_n$  est un ensemble de  $K_2$  et de sommets isolés.

Le problème  $\{C_n\}_{n \geq 5} \rightarrow \mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES est alors équivalent au problème du couplage maximum d'un cycle, il est donc polynomial.

# Conclusion

Cette thèse consiste en l'introduction d'une nouvelle classe de graphes. Après avoir rappelé les notions de base de théorie de la complexité et de théorie des graphes, en particulier certaines classes de graphes classiques, nous mentionnons quelques résultats de complexité pour des problèmes dans ces classes de graphes.

Dans le Chapitre 2, nous définissons les graphes hypotriangulés. Ces graphes vérifient que pour tout chemin de longueur deux, il existe une arête ou un autre chemin de longueur deux entre ses extrémités. Nous examinons alors diverses caractérisations équivalentes. Parmi celles-ci, notons notamment la conservation des distances entre toutes paires de sommets non adjacents en cas de suppression d'un sommet ou d'une arête ainsi que l'existence de deux plus courtes chaînes disjointes par les sommets entre toutes paires de sommets non adjacents. Nous nous intéressons ensuite à différentes propriétés de cette classe de graphes, en commençant par son intersection éventuelle avec d'autres classes de graphes classiques, la probabilité qu'un graphe aléatoire soit hypotriangulé ainsi que la reconnaissance des graphes hypotriangulés. Nous montrons ensuite l'intérêt des graphes hypotriangulés en terme de conservation des distances en cas de suppression d'un sommet ou d'une arête en comparaison aux graphes triangulés 2-connexes. Nous introduisons ensuite une famille de partitions des sommets d'un graphe, avec ses restrictions que sont les partition-arbre, partition-stable et  $\text{partition} \leq k$ . Nous étudions alors les liens entre l'existence d'une telle partition et le caractère hypotriangulé du graphe. Ces partitions sont introduites afin de faciliter l'étude des graphes hypotriangulés minimum dans la section suivante. En effet, dans la dernière section de ce chapitre, nous caractérisons, pour un nombre de sommets fixé, les graphes hypotriangulés connexes possédant un nombre minimal d'arêtes : les graphes hypotriangulés minimum.



Nous commençons par déterminer que tout graphe hypotriangulé connexe à  $n$  sommets possèdent au moins  $2n - 4$  arêtes. Nous montrons alors que les graphes hypotriangulés minimum (satisfaisant  $m = 2n - 4$ ) sont bipartis, de degré minimal 2 ou 3. Plus précisément, il existe un seul graphe hypotriangulé minimum de degré minimal 3, qui est le cube. Nous montrons alors l'équivalence entre les graphes hypotriangulés de degré minimal 2 et les graphes 2-connexes possédant une partition-arbre-stable  $\leq 2$ .

Enfin, dans le Chapitre 3, nous nous intéressons à la complexité de problèmes de graphes, dans le cas particulier des graphes hypotriangulés. Nous rappelons nos différents résultats dans le tableau ci-dessous.

$\mathcal{HT}$ -CYCLE HAMILTONIEN	
$(\mathcal{HT} \cap 7\mathcal{R})$ -CYCLE HAMILTONIEN	$\mathcal{NP}$ -complets
$(\mathcal{HT} \cap \mathcal{Bip})$ -CYCLE HAMILTONIEN	
$\mathcal{HT}$ - $k$ -COLORATION	$\mathcal{NP}$ -complet
$\mathcal{HT}$ - $k$ -CLIQUE MAXIMUM	$\mathcal{NP}$ -complet
$\mathcal{HT}$ - $k$ -STABLE MAXIMUM	$\mathcal{NP}$ -complet
$\mathcal{HT}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES	$\mathcal{NP}$ -complet
$\mathcal{Bip} \rightarrow \mathcal{Bip} \cap \{\text{diam}(G) \leq 3\}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES	$\mathcal{NP}$ -complet
$\mathcal{Bip} \rightarrow (\mathcal{Bip} \cap \mathcal{HT})$ - $k$ -AJOUT ARÊTES	$\mathcal{NP}$ -complet
$\text{Arbre} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES	ouvert
$\text{Arbre}_{unif} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES	polynomial
$\text{Chenille} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES	polynomial
$\{C_k\} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES	polynomial
$\text{Grille} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES	ouvert
$\text{Arbre} \rightarrow \mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES	polynomial
$\{C_k\} \rightarrow \mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES	polynomial
$\text{Grille} \rightarrow \mathcal{HT}$ -SUPPRESSION ARÊTES	polynomial

Nous étudions tout d'abord la complexité du problème de l'existence d'un cycle hamiltonien dans les graphes hypotriangulés, ainsi que sa restriction aux graphes hypotriangulés 7-réguliers ou bipartis. Ces problèmes sont  $\mathcal{NP}$ -complets. Tout comme restent  $\mathcal{NP}$ -complets les problèmes de coloration, de clique maximum et de stable maximum dans les graphes hypotriangulés.

Nous considérons ensuite des problèmes de modifications minimales de l'ensemble des arêtes d'un graphe, pour obtenir un graphe hypotriangulé. Nous montrons que les problèmes  $\mathcal{HT}$ - $k$ -AJOUT ARÊTES et  $\mathcal{Bip} \rightarrow (\mathcal{Bip} \cap \mathcal{HT})$ - $k$ -AJOUT ARÊTES sont  $\mathcal{NP}$ -complets. Ceci étant établi, nous avons alors cherché à restreindre ces problèmes à des sous-classes de graphes où ils seraient alors polynomiaux. Des résultats prometteurs sur les chaînes et chenilles nous ont encouragé à considérer les arbres. Cependant, nous n'avons réussi à obtenir que des résultats partiels concernant les arbres à feuilles uniformes. Chaque fois que nous avons abordés les arbres de manière générale, nous nous sommes heurtés à un problème : la caractérisation des arbres pouvant être hypotriangulé par l'ajout de  $n - 3$  arêtes, c'est-à-dire les arbres qui sont graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum. C'est vraisemblablement sur ce point que nos prochains efforts devront se concentrer.

Voulant explorer une autre classe, nous nous sommes penchés sur le cas des grilles. Là encore, nous n'aboutissons qu'à des résultats partiels : nous avons démontré que  $pq - p - q$  est une borne inférieure au nombre d'arêtes à ajouter à une grille  $G_{p,q}$  pour obtenir un graphe hypotriangulé. Ainsi, le problème  $\mathcal{Grille} \rightarrow \mathcal{HT}$ -AJOUT ARÊTES est résolu dans le cas des grilles de taille  $(2, q)$ ,  $(4, q)$  et  $(p, q)$  avec  $p$  et  $q$  pairs, car nous avons pu montrer que cette borne inférieure est alors atteinte. Cependant, l'exemple de la grille  $G_{3,3}$ , pour lequel nous avons énuméré toutes les possibilités d'ajout d'arêtes, nous permet d'assurer que cette borne inférieure n'est pas toujours atteinte. C'est pourquoi, dans les autres cas, nous avons obtenu une borne supérieure au nombre minimal d'arêtes à ajouter à une grille pour obtenir un graphe hypotriangulé. Cette borne supérieure est  $2pq - 3p - 3q + 4$ . Nous ne sommes évidemment pas satisfaits de ces résultats partiels.



# Bibliographie

- [1] C. Berge. *Graphes*. Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [2] H. J. Broersma, E. Dahlhaus, and T. Kloks. A linear time algorithm for minimum fill-in and treewidth for distance hereditary graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 99(1-3) :367–400, 2000.
- [3] R. A. Brualdi. Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors. *Linear Algebra Appl*, 33 :59–231, 1980.
- [4] P. Burzyn, F. Bonomo, and G. Durán.  $\mathcal{NP}$ -completeness results for edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 154(13) :1824–1844, 2006.
- [5] V. Chepoi and Y. Vaxes. Augmenting trees to meet biconnectivity and diameter constraints. *Algorithmica*, 33(2) :243–262, 2002.
- [6] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour, and K. Vušković. Recognizing berge graphs. *Combinatorica*, 5(2) :143–186, 2005.
- [7] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164 :51–229, 2006.
- [8] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158, 1971.
- [9] D. G. Corneil, L. S. Burlingham, and H. Lerchs. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3) :163–174, 1981.
- [10] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14 :926–934, 1985.
- [11] G. Cornuéjols, X. Liu, and K. Vušković. A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs. In *FOCS '03 : Proceedings of the 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, page 20, 2003.

- [12] G. Damiand, M. Habib, and C. Paul. A simple paradigm for graph recognition : application to cographs and distance hereditary graphs. *Theoretical Computer Science*, 263(1-2) :99–111, 2001.
- [13] V. Duquenne and B. Monjardet. Relations binaires entre partitions d'un ensemble fini. *Mathématiques et Sciences humaines*, 80 :5–37, 1982.
- [14] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17(3) :449–467, 1965.
- [15] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6(26) :290–297, 1959.
- [16] D. R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific journal of mathematics*, 15(3) :835–855, 1965.
- [17] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of  $\mathcal{NP}$ -Completeness*. W.H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979.
- [18] F. Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1) :47–56, 1974.
- [19] M.C. Golumbic. Algorithmic graph theory and perfect graphs. 1980.
- [20] M.C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir. On the complexity of dna physical mapping. *Adv. Appl. Math.*, 15(3) :251–261, 1994.
- [21] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. Polynomial algorithms for perfect graphs. *Topics on perfect graphs*, pages 325–356.
- [22] E. Howorka. A characterization of distance-hereditary graphs. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 28(4) :417, 1977.
- [23] S.Y. Hsieh, C.W. Ho, T. Hsu, and M.T. Ko. Efficient algorithms for the hamiltonian problem on distance-hereditary graphs. *Computing and Combinatorics*, pages 51–75, 2002.
- [24] A. Kaneko and R. Nagahama. Reconstruction algorithm and switching graph for two-projection tomography with prohibited subregion. *Lecture Notes in Computer Science*, 4245 :110–121, 2006.
- [25] A. Kaneko and R. Nagahama. Switching graphs and digraphs associated with total reconstructed sets from two projection data. *Natural Science Report Ochanomizu University*, 56(2) :33–45, 2006.

- 
- [26] T. Y. Kong and G. T. Herman. Tomographic equivalence and switching operations. *Discrete Tomography : Foundations, Algorithms, and Applications*, pages 59–84, 1999.
- [27] M. S. Krishnamoorthy. An  $\mathcal{NP}$ -hard problem in bipartite graphs. *ACM SIGACT News*, 7(1) :26, 1975.
- [28] J. M. Lewis and M. Yannakakis. The nodedeletion problem for hereditary problems is  $\mathcal{NP}$ -complete. *Journal of Computer and System Sciences*, 20 :219–230, 1980.
- [29] A. Natanzon, R. Shamir, and R. Sharan. Complexity classification of some edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 113(1) :109–128, 2001.
- [30] D. J. Rose. A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations. *Graph Theory and Computing*, pages 183–217, 1973.
- [31] D. J. Rose, R. E. Tarjan, and G. Lueker. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. *SIAM Journal on Computing*, pages 146–160, 1976.
- [32] H. J. Ryser. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canadian Journal of Mathematics*, 9 :371–377, 1957.
- [33] R. Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1 :146, 1972.
- [34] R. E. Tarjan and M. Yannakakis. Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 13 :566, 1984.
- [35] M. Yannakakis. Node-and edge-deletion  $\mathcal{NP}$ -complete problems. In *Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 253–264, 1978.
- [36] M. Yannakakis. Computing the minimum fill-in is  $\mathcal{NP}$ -complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2(1) :77–79, 1981.



# Table des figures

1	Plan de la ville de Koenigsberg . . . . .	2
2	Modélisation du problème des ponts de Koenigsberg . . . . .	2
1.1	Relations d'inclusion de différentes classes de graphes classiques : $A \rightarrow B$ signifie que $B \subset A$ . . . . .	9
1.2	Une image bicolore et ses projections . . . . .	14
1.3	La matrice associée à l'image 1.2 et ses projections . . . . .	14
1.4	Opération d'échange . . . . .	15
1.5	Exemples de graphes d'échanges . . . . .	15
1.6	Complexité des problèmes de modifications d'arêtes pour quelques classes de graphes . . . . .	19
2.1	Définition de la propriété d'hypotriangulé . . . . .	22
2.2	Exemples de graphes hypotriangulés . . . . .	22
2.3	Des graphes non hypotriangulés . . . . .	23
2.4	Construction de deux plus courtes chaînes entre $u$ et $v$ . . . . .	24
2.5	$P(G \in \mathcal{HT}) = f_p(n)$ pour quelques valeurs de $p$ . . . . .	27
2.6	Un graphe triangulé 2-connexe . . . . .	30
2.7	Un graphe $G$ et le graphe $2G$ correspondant . . . . .	33
2.8	Un graphe $G$ et le graphe $\widetilde{2G}$ correspondant . . . . .	34
2.9	Les sommets $y$ et $z$ de $N_k^x$ sont voisins . . . . .	39
2.10	$\delta(G) = 3, k \geq 3,  N_3^x  \geq 2$ . . . . .	39
2.11	$a \in N_{i-1}^x$ adjacent à $u$ et non adjacent à $v$ . . . . .	40
2.12	Gémellité de $y$ et $z$ . . . . .	41
2.13	Un arbre $T$ et le graphe $\widetilde{2T}$ correspondant . . . . .	42
3.1	Le gadget correspondant à l'arête $ab$ de $G$ . . . . .	46
3.2	Le voisinage de $a \in G$ et le sous-graphe de $H$ correspondant . . . . .	47



3.3	Chaîne dans $H$ correspondant à une arête choisie dans le cycle hamiltonien de $G$ . . . . .	47
3.4	Chaîne dans $H$ associée à une arête de $G$ non empruntée par le cycle hamiltonien . . . . .	48
3.5	Gadget 7-régulier . . . . .	49
3.6	Voisinage d'un sommet de $V_1$ et sous-graphe de $H$ correspondant . . . . .	50
3.7	Voisinage d'un sommet de $V_2$ et sous-graphe de $H$ correspondant . . . . .	51
3.8	$d_G(x, z) = 3$ donc $H$ n'est pas hypotriangulé . . . . .	53
3.9	Transformation d'un problème de couverture en problème de diamètre de graphe . . . . .	55
3.10	$d_G(x, z) > 3$ donc $H$ n'est pas hypotriangulé . . . . .	56
3.11	Formation des stables pour $P_k$ , $k$ pair . . . . .	58
3.12	Formation des stables pour $P_k$ , $k$ impair . . . . .	58
3.13	Formation des ensembles de taille 1 et 2 pour $C_k$ , $k$ impair, tous stables sauf $\{1, k\}$ . . . . .	60
3.14	Une chenille à 7 vertèbres . . . . .	60
3.15	Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que $p \equiv 0[4]$ . . . . .	61
3.16	Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que $p \equiv 1[4]$ . . . . .	61
3.17	Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que $p \equiv 2[4]$ . . . . .	62
3.18	Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que $p \equiv 3[4]$ , possédant une vertèbre $2j$ blanche sans patte . . . . .	62
3.19	Formation des stables de taille 2 pour une chenille telle que $p \equiv 3[4]$ , possédant une vertèbre $2j + 1$ noire ayant une patte . . . . .	63
3.20	Formation de ensembles de taille 2, $\{p - 1, p\}$ n'étant pas stable, pour une chenille ayant un nombre impair de sommets blancs, tous de degré supérieur ou égal à trois . . . . .	64
3.21	Construction d'un graphe hypotriangulé minimum à partir d'une famille minimalement hypotriangulable et deux sommets $u$ et $v$ . . . . .	65
3.22	Exemple de forêt à feuilles uniformes noires et à racines blanches . . . . .	66

3.23	Formation de stables de taille 2 contenant les racines des arbres d'une forêt à feuilles uniformes de hauteur 1 . . . . .	67
3.24	Formation du stable contenant la racine $u \in B$ de $T$ tel que $ B_T $ est pair . . . . .	68
3.25	Formation du stable contenant $u \in N$ racine de $T$ tel que $ B_T $ est pair . . . . .	68
3.26	Formation du stable contenant les racines $u$ et $v \in N$ de $T_1$ et $T_2$ tels que $ B_{T_1} $ et $ B_{T_2} $ sont impairs . . . . .	68
3.27	Formation du stable contenant les racines $u$ et $v \in B$ de $T_1$ et $T_2$ tels que $ B_{T_1} $ et $ B_{T_2} $ sont impairs . . . . .	69
3.28	Exemple d'arbre à feuilles uniformes noires . . . . .	70
3.29	Arbre à feuilles uniformes $N$ , $ B $ est impair et $\delta(B) = 2$ . . . . .	71
3.30	Arbre à feuilles uniformes $N$ , $ B $ impair et $\delta(B) \geq 3$ . . . . .	71
3.31	Cet arbre est graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum . . . . .	72
3.32	Cet arbre n'est pas graphe partiel d'un graphe hypotriangulé minimum . . . . .	73
3.33	$G_{p,q}$ . . . . .	74
3.34	$P_3$ de la grille inclus dans un $C_3$ . . . . .	75
3.35	Deux manières de couvrir un $P_3$ de la grille par une seule arête ajoutée, inclus dans un $C_4$ . . . . .	76
3.36	Un $P_3$ de la grille couvert par deux arêtes ajoutées . . . . .	76
3.37	$L(x) \neq L(y)$ . . . . .	80
3.38	$L(x) = L(y)$ et $d_G(x, y) = 3$ . . . . .	80
3.39	$ L(y) - L(x)  = 1, C(y) - C(x) = 2$ . . . . .	81
3.40	$ L(y) - L(x)  = 2, C(y) - C(x) = 1$ . . . . .	82
3.41	Deux configurations telles que $d_G(x, y) = 5$ avec $\{ L(y) - L(x) ,  C(y) - C(x) \} = \{2, 3\}$ . . . . .	82
3.42	$d_G(x, y) = 5$ avec $ L(y) - L(x)  = 1, C(y) - C(x) = 4$ . . . . .	83
3.43	$d_G(x, y) = 5$ avec $ L(y) - L(x)  = 4, C(y) - C(x) = 1$ . . . . .	83
3.44	$G_{2,q}$ et un surgraphe hypotriangulé minimum de $G_{2,q}$ . . . . .	84
3.45	Un surgraphe hypotriangulé de $G_{p,q}$ avec $p, q$ pairs . . . . .	85
3.46	$G_{4,q}$ . . . . .	85
3.47	Un surgraphe hypotriangulé de $G_{3,3}$ . . . . .	85

3.48 Une hypotriangulation possible (minimale?) d'une grille impair-impair . . . . .	86
3.49 Grille $G_{p,q}$ avec $p, q$ pairs . . . . .	87
3.50 Grille $G_{p,q}$ avec $p$ pair, $q$ impair . . . . .	88
3.51 Grille $G_{p,q}$ avec $p, q$ impairs . . . . .	88

# Notations des classes de graphes

$k\mathcal{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$ .....	graphes $k$ -réguliers
$\{\Delta \leq k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ .....	graphes de degré borné par $k$
$\{\text{diam}(G) \leq D\}$ pour $D \in \mathbb{N}$ ...	graphes de diamètre inférieur ou égal à $D$
<i>Arbre</i> .....	Ensemble des arbres
<i>Bip</i> .....	graphes bipartis
<i>Dist<math>\mathcal{H}</math></i> .....	graphes à distance héréditaire
<i>Grille</i> .....	Ensemble des grilles
<i><math>\mathcal{HT}</math></i> .....	graphes hypotriangulés
<i>Int</i> .....	graphes d'intervalles
<i>Parf</i> .....	graphes parfaits
<i>Plan</i> .....	graphes planaires
<i>Tri</i> .....	graphes triangulés