



**HAL**  
open science

# Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquence de structures

Aurélien Moreau

► **To cite this version:**

Aurélien Moreau. Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquence de structures. Mécanique [physics]. INSA de Rouen, 2007. Français. NNT : 2007ISAM0022 . tel-00685890

**HAL Id: tel-00685890**

**<https://theses.hal.science/tel-00685890>**

Submitted on 6 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée le 21 décembre 2007 par*

**Aurélien Moreau**

*pour obtenir le grade de*

**Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen**

Discipline : Mécanique

**Ecole Doctorale SPMII**

---

## **Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquences de structures**

---

### **Membres du jury**

M. Grédiac M.	Président	LAMI, Univ. B. Pascal Clermont II
M. Bonnet M.	rapporteur	LMS, Ecole Polytechnique
M. Rade D.	rapporteur	LME, Univ. Fed. d'Uberlândia, Brésil
M. Génévaux J.-M.	examinateur	LAUM, Univ. du Maine
M. Borza D.	directeur de thèse	LMR, INSA Rouen
M. Pagnacco E.	co-encadrant	LMR, INSA Rouen
M. Lemosse D.	co-encadrant	LMR, INSA Rouen



À Cécile

À mes parents, ma famille et mes amis

## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier les membres du jury pour leur participation, ainsi que pour les remarques et éclairages qu'ils ont pu apporter sur mon travail. Tout d'abord les rapporteurs Marc Bonnet et Domingos Rade qui ont eu la lourde tâche de relecture. Michel Grédiac pour avoir accepté de présider ce jury, et enfin Jean-Michel Gèneveaux pour sa participation active.

Je souhaite également remercier très chaleureusement mes encadrants pour leur implication dans mon travail. À commencer par mon directeur de thèse Dan Borza, et également aux co-encadrants Emmanuel Pagnacco et Didier Lemosse. Avec une mention spéciale pour Manu qui m'a suivi pendant toutes ces années : merci.

Cette thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire de Mécanique de Rouen. Je souhaite par conséquent remercier les directeurs successifs du LMR Eduardo Souza et Lakhdar Taleb pour avoir respectivement initié et soutenu ce sujet de thèse et permis le bon déroulement de ce travail.

Merci également à la région Haute Normandie pour avoir financé ce travail.

La réalisation des moyens expérimentaux n'aurait pas été possible sans l'implication de Christophe Gautrelet et Francis Pégard que je souhaite également remercier pour tout le travail accompli et les heures passées ensemble.

La partie expérimentale a également été enrichie grâce aux échanges et mesures que nous avons pu réaliser avec Alain Guillet, et l'équipe de Jean Grenet au sein du LECAP.

Enfin, je souhaite aussi remercier Daniel Rixen et François Hild pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et le regard qu'ils y ont apporté.

D'un point de vue moins formel, mais tout aussi sincère, je souhaite remercier toutes les personnes que j'ai pu croiser dans ce laboratoire. En premier lieu, mes "colocataires" avec Giovanni, un brésilien heureux et jamais stressé, et Jérémie le poitevin. Les thésards avec qui j'ai pu partager cette expérience : Marco, Crescent, Salem, Ioana, Amine, Ha ... et une mention spéciale pour Sylvain et toutes ses mésaventures. Les joyeux participants aux pauses café : Benoit, un cycliste ... bavard, très bavard :-), Leila ... Les secrétaires : Agnès L, Agnès D.Q., Nathalie et Sylviane ...

Merci à tous

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>III</b>
<b>Abréviations</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Viscoélasticité linéaire et mécanique des milieux continus</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	7
1.2 Viscoélasticité linéaire	7
1.3 Approche par module complexe	10
1.3.1 Module complexe	10
1.3.2 Mesure ou identification du module complexe	12
1.4 Représentation du module complexe - modèles rhéologiques	16
1.4.1 Modèles de base	16
1.4.2 Modèles de type solides linéaires standards	19
1.5 Relation de comportement	21
1.5.1 Milieux orthotropes	22
1.5.2 Milieux isotropes	22
1.6 Relations de la mécanique des milieux continus	24
1.7 Formes variationnelles et Principe des Travaux Virtuels	25
1.7.1 Energie potentielle et formulation en déplacement	25
1.7.2 Formulation mixte	27
1.8 Conclusion	29
<b>2 Méthodes numériques</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction	31
2.2 Approximation par éléments finis - modèles spatiaux	32
2.2.1 Phénomènes de blocages numériques - Éléments H8 et H8WT	32
2.2.2 Éléments finis adaptés aux structures minces	37
2.3 Modèles de réponses et méthodes d'expansions de données	41
2.3.1 Modèle de réponse par évaluation directe	41
2.3.2 Modèle de réponse sur base modale	42
2.3.3 Méthodes d'expansion des données	49
2.4 Évaluation des éléments et applications numériques	50
2.4.1 Patch-tests	50
2.4.2 Tests statiques	51
2.4.3 Tests dynamiques non amortis	55

2.4.4	Application sur un modèle amorti . . . . .	59
2.5	Conclusion . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Approche mixte expérimentale-numérique pour l'identification</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Méthodes de recalage et d'identification par éléments finis en dynamique . . . . .	73
3.2.1	Méthode en forces . . . . .	74
3.2.2	Méthode en déplacements . . . . .	75
3.2.3	Méthodes avec résidus pondérés . . . . .	76
3.3	Évaluation de la méthode d'identification en forces pondérées en déplacements . . . . .	82
3.3.1	Matériau isotrope . . . . .	82
3.3.2	Matériau orthotrope . . . . .	98
3.3.3	Matériau sandwich . . . . .	100
3.3.4	Indicateurs de participation des paramètres matériau . . . . .	101
3.4	Conclusion . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Applications et résultats</b>	<b>109</b>
4.1	Dispositif expérimental . . . . .	109
4.1.1	Introduction . . . . .	109
4.1.2	Matériels d'essais et de mesures en dynamique . . . . .	109
4.1.3	Dispositif de test retenu . . . . .	112
4.1.4	Conclusion . . . . .	119
4.2	Identification à partir de données expérimentales . . . . .	120
4.2.1	Application sur une structure en PVC . . . . .	120
4.2.2	Caractérisation d'un Sandwich Aluminium-Lexan . . . . .	132
4.2.3	Conclusion . . . . .	147
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Modèles paramétriques en viscoélasticité linéaire</b>	<b>161</b>
A.1	Modèle paramétriques . . . . .	161
A.1.1	Modèle GHM . . . . .	161
A.1.2	Modèle ADF . . . . .	161
A.1.3	Modèle à dérivées fractionnaires . . . . .	162
A.1.4	Bilan des modèles paramétriques . . . . .	163
A.2	Modèles paramétriques et éléments finis . . . . .	163
A.2.1	Modèle GHM . . . . .	163
A.2.2	Modèle ADF . . . . .	164
A.2.3	Modèle à dérivées fractionnaires . . . . .	165
A.2.4	Bilan sur les modèles de dissipation viscoélastiques . . . . .	165
<b>B</b>	<b>Blocages numériques et plaques</b>	<b>167</b>
B.1	Phénomènes de blocage . . . . .	167
B.1.1	Blocage en cisaillement transverse . . . . .	167
B.1.2	Blocage en contrainte plane . . . . .	168
B.2	Equations des plaques et éléments finis . . . . .	168

# Notations

$[A - Z]$	matrice
$[a - z]$	vecteur
$[a - z]$	scalaire ou champ
$A$	matrice de relation de comportement
${}_rA$	matrice des résidus du mode $r$
$B, C$	matrice booléennes de sélection de ddl
$H$	matrice des FRF
$I$	matrice identité
$J$	matrice jacobienne de la transformation
$K$	matrice de raideur
$M$	matrice de masse
$R$	vecteur des résidus
$T$	matrice d'expansion
$W$	matrice de pondération
$u$	vecteur des déplacements
$\dot{u}$	vecteur des vitesses
$\ddot{u}$	vecteur des accélérations
$\bar{u}$	vecteur des déplacements imposés ou mesurés
$u_R$	vecteur des ddl retenus
$u_C$	vecteur des ddl condensés
$z$	vecteur des ddl de dissipation
$\sigma$	matrice des contraintes
$\varepsilon$	matrice des déformations
$\Omega$	matrice diagonale des pulsations propres
$\Lambda$	matrice diagonale des pulsations propres
$\Phi$	matrice des modes propres réels
$\Psi$	matrice des modes propres complexes
$\phi$	vecteur mode propre réel
$\psi$	vecteur mode propre complexe
$\mathcal{A}$	Tenseur d'élasticité
$\mathcal{A}_{ij}$	composante $(i, j)$ du tenseur d'élasticité
$C_1, C_2$	constantes de la loi WLF
$E$	module d'élasticité
$F$	champ d'excitation
$G$	module de cisaillement
$J = \det(\mathbf{J})$	jacobien de la transformation
$K$	module de compressibilité

$N$	nombre de degrés de liberté
$N_i$	fonction d'interpolation
$S$	entropie
$T$	température
$T_r$	température de référence
$T_g$	température de transition vitreuse
$V$	volume du solide
$W$	travail
$c$	coefficient d'amortissement
$c_{c_r}$	coefficient d'amortissement modal critique
$c_r$	coefficient d'amortissement modal visqueux
$d_r$	coefficient d'amortissement modal hystérétique
$h$	noyau de relaxation de la fonction viscoélastique
$j = \sqrt{-1}$	nombre complexe
$k$	facteur de correction de cisaillement transverse
$k_r$	rigidité modale
$f$	fréquence
$f_r$	fréquence propre
$f_v$	forces de volume
$f_s$	forces de surface
$m$	masse
$s$	variable de Laplace
$t$	temps
$u$	champ de déplacement
$x_r$	déplacement modal
$\Pi$	fonctionnelle
$\nabla$	opérateur gradient
$\beta, \gamma$	coefficient d'amortissement de Rayleigh
$\varepsilon$	tenseur des déformations
$\lambda$	coefficients de Lamé
$\lambda_r$	valeur propre complexe ou pôle
$\nu$	coefficient de Poisson
$\eta$	facteur d'amortissement hystérétique
$\eta_r$	facteur d'amortissement modal hystérétique
$\varphi$	angle de perte
$\mu_r$	masse modale
$\omega$	pulsation
$\omega_r$	pulsation propre
$\omega_g$	poids des points de Gauss
$\rho$	masse volumique
$\sigma$	tenseur des contraintes
$\xi$	facteur d'amortissement hystérétique
$\zeta_r$	facteur d'amortissement modal visqueux
$ \bullet $	module
$\ \bullet\ $	norme
$\bar{\bullet}$	quantité mesurée ou imposée
$(\bullet)^T$	opérateur transposé

$(\bullet)^H$	opérateur hermitien
$(\bullet)^+$	opérateur pseudo inverse
$(\bullet)^*$	quantité virtuelle
$\delta(\bullet)$	opérateur de variation
$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1})$	transformée de Laplace (inverse)
$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$	transformée de Fourier (inverse)
$\mathcal{H}(\mathcal{H}^{-1})$	transformée de Hilbert (inverse)
$\Re[\bullet]$	partie réelle
$\Im[\bullet]$	partie imaginaire
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$	dérivée partielle d'une quantité par rapport à x
*	produit de convolution



# Abréviations

ADF	<i>Augmented Displacement Field</i>
ATF	<i>Augmented Thermodynamic Field</i>
CA	Cinématiquement Admissible
CL	Conditions Limites
CT	Cisaillement Transverse
DDL	Degrès De Liberté
DMA	<i>Dynamic Mechanical Analysis</i>
EF	Eléments Finis
FAAC	<i>Frequency Amplitude Assurance Criterion</i>
FEMU	<i>Finite Element Model Updating</i>
FRAC	<i>Frequency Responce Assurance Criterion</i>
FRF	Fonctions de Réponses en Fréquence
GHM	Golla-Hughes-Mac Tavish
HPP	Hypothèse des Petites Perturbations
LSCE	<i>Least Square Complex Exponential</i>
MAC	Critère d'Assurance Modale ( <i>Modal Assurance Criterion</i> )
MCV	Méthode des Champs Virtuels
MEF	Méthode des Eléments Finis
MSE	<i>Modal Strain Energy</i>
ODS	Déformée Opérationnelle ( <i>Operating Deflection Shape</i> )
PC	Polycarbonate
PMMA	Polyméthacrylate de méthyle
PP	Polypropylène
PTV	Principe des Travaux Virtuels
PVC	Polychlorure de vinyle
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières ( <i>Single Value Decomposition</i> )
TF	Transformée de Fourier
TFI	Transformée de Fourier Inverse
TH	Transformée de Hilbert
WLF	William Landel Ferry



# Introduction

## Contexte

Les progrès dans le domaine de la science des matériaux ont conduit à une utilisation de plus en plus importante et diversifiée des polymères. Ces derniers représentent souvent une alternative aux matériaux métalliques, et ce en raison de leur faible masse, de coûts de production réduits, de facilité de mise en forme, de recyclage, ... mais aussi de dissipation d'énergie mécanique. Pour cela, ils sont désormais très employés dans diverses applications comme par exemple :

- les couches viscoélastiques précontraintes du type ISD-112 (fig.1) ou les verres feuilletés. Dans un pare-brise, la couche centrale d'un verre feuilleté n'a plus seulement un rôle d'anti-éclatement mais aussi un rôle acoustique en limitant son rayonnement et un rôle d'évacuation de l'énergie dans les impacts. Ils sont de fait beaucoup utilisées dans l'automobile et l'aéronautique [Rao01].
- les matériaux composites fibrés [Che]. Les matrices de ces matériaux avaient initialement pour seule fonction de lier les fibres et conférer les inerties voulues pour ces structures. Désormais, elles peuvent de plus être optimisées pour limiter la propagation des vibrations dans les structures.
- les liaisons en génie civil. Les liaisons entre les pièces métalliques sont réalisées avec des pièces qui intègrent des couches de matériaux viscoélastiques. Elles permettent de diminuer l'impact du vent et des tremblements de terre sur la réponse dynamique des structures d'immeubles [SK95].
- les éléments de carrosserie. En polymères, ils permettent par exemple de limiter l'impact des choc piétons.
- les silencieux ou éléments de liaison. En laine de verre et caoutchoucs, les nouvelles vis de maintien des isolants dans les structures aéronautiques permettent de limiter les niveaux sonores.

Ce sont donc essentiellement des problèmes de vibro-acoustique qui sont résolus par l'emploi de matériaux polymères. Leur comportement viscoélastique permet une modification importante de la réponse dynamique, du transfert ou du rayonnement des structures. Il a aussi un impact déterminant sur la fatigue des structures en réduisant les contraintes maximales. Dans ce domaine de la fatigue, la quantification des amortissements matériaux semble d'ailleurs être plus importante que celle des raideurs [ZH02]. En outre, le comportement viscoélastique est également présent dans le corps humain [CR05], composé lui aussi de matériaux polymères, organiques cette fois, comme le collagène constituant les os par exemple.

Parallèlement au développement de la science des matériaux, celui de la mécanique des structures a permis de modifier le cycle de développement industriel des produits. Les moyens de calculs autorisent désormais un usage massif de la simulation numérique. L'objectif étant de retenir les configurations favorables et de limiter le nombre de prototypes nécessaires à la phase de conception. Mais il

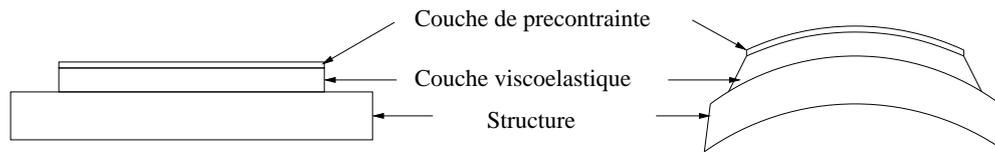


FIG. 1 – Principe de fonctionnement d'un viscoélastique précontraint

est nécessaire de tenir compte des phénomènes physiques mis en jeu dans les simulations numériques pour qu'elles soient prédictives. Parmi ceux-ci, la dissipation reste aujourd'hui problématique puisque le développement de produits industriels passe encore le plus souvent par une démarche de type essais et erreurs avec peu de simulation numérique.

En dynamique, le comportement viscoélastique linéaire peut être représenté par des modules complexes. La partie réelle de ces modules caractérise l'élasticité du matériau tandis que la partie complexe caractérise la dissipation qui lui est associée. Mais si la dissipation des polymères durs est significative, elle n'est pas prépondérante vis-à-vis de la raideur, toujours présente : il y a environ deux ordres de grandeur de différence entre les parties réelle et imaginaire des paramètres. D'autre part, ces polymères ont en général une dépendance du comportement avec la fréquence d'excitation, non seulement pour l'aspect dissipatif mais aussi pour l'aspect élastique. La référence [Pri96] trouve par exemple une variation de raideur de deux ordres de grandeurs sur la gamme de fréquences investiguée d'un PVC souple. Cet effet, qui n'est généralement pas recherché lors du choix du matériau dans la conception, est donc également essentiel à caractériser puisqu'il peut aussi modifier de manière importante le comportement de la structure.

Un grand nombre de modèles viscoélastiques, plus ou moins représentatifs des observations expérimentales, existent dans la littérature. Et les méthodes numériques pour les intégrer dans des simulations par éléments finis ont aussi été développées. Pour représenter correctement le comportement de ces matériaux, la difficulté réside désormais plutôt dans les paramètres d'entrée de ces modèles [TA00]. Il est donc indispensable de les identifier correctement.

Mais les machines d'essais dédiées à la caractérisation en fréquence des matériaux mous ne permettent généralement pas une bonne caractérisation des polymères durs. Et le principe d'équivalence fréquences-températures n'apporte pas de solution : l'augmentation de la température pour retrouver des raideurs compatibles avec ces machines ne va pas dans le sens d'une caractérisation hautes fréquences. D'autant que la validité de ce principe peut-être remise en cause [Che]. D'autre part, la méthode "résonante" pour une caractérisation indirecte est trop restreinte. Elle ne permet d'avoir que quelques valeurs par échantillon. La caractérisation directe en fréquence passe actuellement par la mesure des réponses à des chocs sur des échantillons monodimensionnels pour obtenir les modules de traction-compression ou de cisaillement, moyennant des hypothèses d'homogénéité des champs mécaniques.

D'une manière générale, l'identification de l'amortissement se montre très sensible aux bruits de mesures [Che], compte tenu des ordres de grandeurs recherchés. De plus, le post-traitement des modules obtenus à l'issue des mesures ne permet généralement pas de quantifier de manière satisfaisante le coefficient de Poisson dynamique. Et lorsque les simulations simples sont bien corrélées, les simulations tridimensionnelles de réponses structurelles ne le sont pas toujours [PB00]. Il faut toutefois noter que dans [PB00] un seul module est caractérisé en fréquence. En plus du bruit dans les mesures expérimentales au cours d'un essai, les incertitudes relevées sont généralement liées à une caractérisation incomplète des matériaux, à l'utilisation de multiples échantillons et/ou aux conditions aux limites qui varient ou perturbent les échantillons. De plus, il n'est pas vraiment aisé de quantifier

ce qui se passe au niveau matériau entre la matière première (testée sous forme d'éprouvette) et la structure avec toutes les modifications qu'elle peut subir (fabrication, oxydation, etc...).

Mais avec le développement des mesures optiques de champs cinématiques et des méthodes mixtes expérimentales-numériques, il est désormais possible d'envisager un essai unique, effectué sur un seul échantillon, pour obtenir une caractérisation simultanée de tous les paramètres matériaux par la mise en oeuvre de champs hétérogènes. Cette approche est *a-priori* compatible avec une sollicitation directe en fréquence et l'utilisation de la structure elle-même comme échantillon pendant les essais, ce qui assure sa représentativité (cela évite des risques de délaminage par exemple). Une telle approche doit donc permettre de réduire les dispersions expérimentales, mais aussi combiner une méthode de mesure de grande sensibilité et une méthode numérique très performante.

Le travail proposé ici a donc un caractère exploratoire et vise à proposer une nouvelle approche, directe, expérimentale-numérique pour la caractérisation de tous les modules visco-élastiques avec leur comportement en fréquence. Les principales difficultés à traiter pour la mise en oeuvre de cette démarche sont résumées dans les points suivants :

- la mise en oeuvre d'éléments finis très performants, (comportant peu d'hypothèses), adaptés à la modélisation de structures minces viscoélastiques et permettant de modéliser facilement des structures multicouches ;
- la proposition d'une procédure d'identification permettant d'identifier simultanément tous les paramètres matériaux et adaptée à la prise en compte directe des mesures fréquentielles ;
- la mise en place d'un dispositif d'expérimentation adapté, aussi peu intrusif que possible pour assurer la sensibilité requise à l'identification des paramètres viscoélastiques.

## Organisation du mémoire

Le présent mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

### Chapitre 1 : Viscoélasticité linéaire et mécanique des milieux continus

Le premier chapitre présente les notions liées aux phénomènes matériaux mis en jeu dans le comportement dynamique et la réponse vibro-acoustique des structures en polymères. Il s'agit de viscoélasticité linéaire dans le domaine fréquentiel, caractérisée par des modules dynamiques complexes. Vient alors une présentation de résultats théoriques et de mesures recensées dans la littérature pour fixer les idées sur les valeurs de ces paramètres et leur variation, en nous limitant aux cas des polymères durs. Différentes méthodes d'identifications ou de mesures de ces paramètres sont alors présentées. Quelques modèles simples de représentation des solides viscoélastiques basés sur des modèles rhéologiques sont ensuite rappelés. Ils permettent de faire le lien avec la viscoélasticité temporelle de type fluage ou relaxation et de proposer des modèles de description des modules dynamiques.

Ce chapitre se termine en posant les bases nécessaires à l'établissement de la méthode numérique de résolution permettant de simuler les réponses dynamique des structures étudiées. Il s'agit de l'extension tridimensionnelle des théories unidimensionnelles viscoélastiques, de leur intégration dans les équations de la mécanique des milieux continus, des principes variationnelles et des formulations mixtes.

## Chapitre 2 : Méthodes numériques

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'ensemble des méthodes numériques pour la modélisation et la résolution du problème direct de visco-élasto-dynamique. Les structures concernées par l'emploi de ces matériaux visco-élastiques sont généralement de type plaques ou coques, éventuellement multi-couches. Nous avons retenu la méthode des éléments finis pour la modélisation de ces structures.

L'élément fini volumique H8coque développé en statique dans [Lem00] est bien adapté pour notre étude. Il est établi à partir de formulations mixtes qui permettent de lever les blocages numériques tout en intégrant une relation de comportement complète, tridimensionnelle. L'utilisation de cet élément est bien adaptée à la modélisation de structures multicouches puisqu'il garanti intrinsèquement la continuité des déplacements entre les couches, et qu'il n'y a pas de ddl de rotation qui peuvent poser problème en dynamique. De plus, il facilite la phase d'identification par la mise en correspondance directe entre les mesures disponibles en surface et les noeuds des éléments.

Mais la méthode des éléments finis permet d'établir des modèles spatiaux, alors que l'expérimentation produit des modèles de réponse. Les stratégies numériques pour établir ces modèles, soit d'une manière directe soit par approche modale, sont donc présentées avec les méthodes d'expansion des données permettant de rendre les différents modèles compatibles. Ce chapitre se termine par l'évaluation statique et dynamique de ces éléments et des structures employées par la suite pour l'identification.

## Chapitre 3 : Approche mixte expérimentale-numérique pour l'identification

Le chapitre 3 est dédié à la présentation des méthodes de recalage de modèle EF et d'identification de paramètres matériau. Le principe général de ces méthodes mixtes expérimentale-numérique est le suivant : à partir de paramètres initiaux, la solution numérique du problème direct modélisant l'essai est évaluée pour être comparée avec les données expérimentales via un résidu. La procédure se poursuit alors par l'ajustement successif des paramètres permettant d'atteindre le résidu minimum. Les paramètres obtenus à l'issue de ce processus sont supposés être ceux recherchés.

Pour établir les résidus et les formules d'itérations d'une méthode d'identification compatible avec des données fréquentielles, nous commençons le chapitre par la présentation d'éléments bibliographiques et des méthodes d'identification classiques, en forces et en déplacements, avec leurs avantages et inconvénients. L'analyse de celles-ci nous permet de proposer deux méthodes compatibles avec des données fréquentielles, l'une appelée méthode d'identification en forces pondérées en déplacements et l'autre méthode d'identification en forces filtrées. La première permet de procéder avec des données de mesure de champs incomplètes (avec une seule composante du champ par exemple) tandis que l'autre n'est pas sensible à une mauvaise connaissance des conditions aux limites.

Une évaluation numérique de ces méthodes dans le cas des plaques simples ou composites de type sandwich est ensuite effectuée, pour préparer les applications réelles qui suivront. Les tests de la méthode d'identification en forces filtrées ne seront pas aussi poussés que ceux de la méthode en forces pondérées en déplacements car nous n'aurons par la suite accès qu'à des champs incomplets.

## Chapitre 4 : Applications et résultats

Pour notre étude, nous souhaitons obtenir le champ cinématique de réponse vibratoire d'une structure pour caractériser son matériau. L'identification de la dissipation interne d'un matériau ne peut être obtenue qu'avec un dispositif expérimental aussi peu intrusif que possible, sans dissipation dans des liaisons et à l'aide d'une mesure optique. Les champs dynamique peuvent être obtenus d'une manière

satisfaisante avec des méthodes ESPI ou de vibrométrie laser à balayage. Cette dernière technique s'avère plus simple de mise en oeuvre et est de fait très répandue pour le recalage de modèle EF [Lau05, Cug05, Sie98]. De plus, elle s'avère être compatible avec un moyen d'excitation par impact, qui permet une excitation sans liaison lors de la mesure.

Nous présentons ainsi dans ce chapitre l'ensemble du dispositif que nous avons mis en place pour l'essai, en nous appuyant sur les choix précédents. Nous décrivons les systèmes d'excitation et de mesure spécifiquement développés. Ces derniers nous permettent de réaliser le grand nombre d'acquisitions nécessaires à notre stratégie d'identification tout en limitant les dispersions expérimentales.

Nous nous intéressons maintenant à l'identification de paramètres viscoélastiques à partir des données expérimentales obtenues sur des structures réelles. Les structures ont été choisies pour obtenir des effets significatifs de dissipation, notamment au niveau de leurs épaisseurs. En effet, au niveau de la microstructure, il faut garder un volume élémentaire représentatif, c'est-à-dire avec suffisamment de chaînes moléculaires.

Viennent ensuite les applications réelles. Nous nous intéressons d'abord à l'étude d'un PVC rigide puis à l'identification du PC mis en oeuvre dans un composite PC/aluminium obtenu par l'assemblage de deux plaques homogènes et isotropes. Ces deux applications sont également pour nous l'occasion d'investiguer d'autres méthodes, comme la méthode DMA (aux limites de cette machine) et les méthodes résonantes. Celles-ci nous permettent d'obtenir également des valeurs des paramètres matériaux, à certaines fréquences, que nous pouvons comparer avec nos résultats d'identification.



# Chapitre 1

## Viscoélasticité linéaire et mécanique des milieux continus

### 1.1 Introduction

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux phénomènes viscoélastiques qui régissent le comportement dynamique du matériau, et donc le comportement vibratoire des structures. Ce chapitre présente dans une première partie les notions liées à la viscoélasticité linéaire dans le domaine fréquentiel. Après l'introduction des principes physiques qui induisent ce type de comportement dissipatif du matériau, nous présentons l'approche par module complexe qui se base sur une approche non paramétrique de description des paramètres matériau. Viennent ensuite quelques modèles simples de solides viscoélastiques, basés sur des modèles rhéologiques pour une approche paramétrique de description des paramètres matériau. Enfin, cette partie se termine par l'extension tridimensionnelle de ces théories unidimensionnelles.

Dans une seconde partie, nous rappelons quelques équations de la mécanique des milieux continus qui régissent le comportement dynamique des structures étudiées ainsi que le principe des travaux virtuels, préalable à la méthode des éléments finis que nous présentons dans le chapitre suivant. Différentes formulations sont d'ailleurs présentées à cette occasion.

### 1.2 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité linéaire caractérise le comportement élastique et dissipatif d'un matériau en petites déformations. Celle-ci peut être considérée à différentes échelles. En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

D'un point de vue moléculaire, quand un effort est appliqué sur un matériau viscoélastique comme un polymère, deux mécanismes atomiques interviennent [Roy01]. Les liaisons atomiques changent de longueur et d'angle. Les atomes sont alors déplacés à de nouvelles positions, avec une augmentation de l'énergie interne de façon extrêmement rapide. Les deux premières lois de la thermodynamique indiquent qu'un travail mécanique provoqué par une force  $f$  sur un déplacement  $dx$  implique une

augmentation de l'énergie interne  $E_{int}$  et/ou une diminution de l'entropie  $S$  du système

$$f dx = dE_{int} - T dS \quad (1.1)$$

Parmi les modèles existants, celui de la dissipation thermoélastique met en relation le champ de déformation créé avec des gradients de thermiques et des flux de chaleur. Cette approche n'est valable que pour de faibles déformations. Une autre approche est celle de type mouvements hystérétiques des dislocations. Dans un métal, elle est liée aux frottements au niveau des grains et dépend de la quantité d'impuretés, de la structure des grains et du niveau de déformation. Cependant, cette approche reste difficile à mettre en oeuvre, notamment à cause de la mauvaise connaissance de la densité de dislocations.

D'un point de vue phénoménologique, nous nous intéressons à l'étude macroscopique du matériau en utilisant les résultats expérimentaux. Pour certains matériaux, la réponse à une déformation ou à une contrainte constante varie au cours du temps. Ces observations se font plus particulièrement dans les cas des essais de fluage et de relaxation. Pour un essai de fluage, une contrainte constante est appliquée, et il se produit une augmentation de la déformation au cours du temps. Réciproquement, pour un essai de relaxation, c'est une déformation constante qui est imposée, et c'est alors une diminution de la contrainte qui apparaît au cours du temps. Ces deux phénomènes se caractérisent par les courbes expérimentales présentées sur les figures 1.1 et 1.2 qui caractérisent ces matériaux dans le domaine

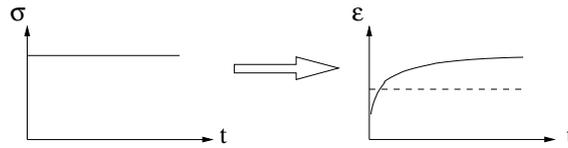


FIG. 1.1 – Courbe caractéristique de fluage

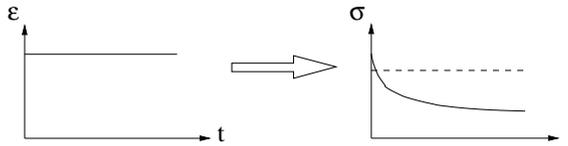


FIG. 1.2 – Courbe caractéristique de relaxation

temporel. De la même manière, pour une succession d'essais de fluage ou de relaxation, l'état final correspond à la somme des modifications apportées par chaque changement : c'est le principe de superposition de Boltzman, illustré par la figure 1.3 dans le cadre d'essais de fluage successifs. Ainsi l'état de contraintes et de déformations d'un matériau dépend de son histoire de chargement.

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la loi de comportement, donnant la relation entre les tenseurs de contraintes et de déformations est donnée par le produit de convolution suivant

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.2)$$

avec  $h$  la fonction de relaxation. Si on considère qu'il y a équilibre jusqu'au temps  $t = 0$ , dans un cadre mono-dimensionnel en traction-compression, cette relation peut se mettre sous la forme

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.3)$$

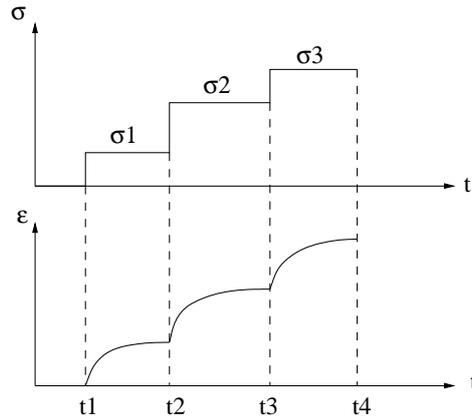


FIG. 1.3 – Principe de superposition de Boltzman

Les différents modèles viscoélastiques varient dans le choix du noyau de la fonction de relaxation  $h$ . Il est à noter que pour les modèles présentés, les formules sont données pour le module d'Young  $E$ , mais peuvent être transposées au module de cisaillement  $G$ . On appelle  $E$  et  $G$  caractéristiques matériaux.

Outre la dépendance temporelle du comportement des matériaux viscoélastiques que nous venons de voir, d'autres facteurs d'environnement sont susceptibles de modifier la réponse de ces matériaux. Parmi eux, la température constitue une donnée très importante. En effet, son rôle est visible dès l'écriture des principes microscopiques 1.1. Il a été constaté expérimentalement qu'une sollicitation de courte durée à une température élevée provoque le même comportement qu'une sollicitation plus longue mais à une température moins élevée. Il est alors possible d'établir un principe d'équivalence temps/température, ou encore fréquence/température. La mesure peut donc être faite sur une petite bande de fréquence, mais à différentes températures. Une translation de chaque courbe, définie par un facteur de translation  $\alpha_T$  dépendant de la température de référence, permet alors de construire une courbe maîtresse sur une large plage de fréquences. L'allure schématique d'une courbe maîtresse est donnée sur la figure 1.4. Une mesure est faite sur une plage de fréquences donnée, mais à différentes températures (ici  $t_1 > t_2 > t_3$ ), et les facteurs de translation  $\alpha_T$  permettent de construire la courbe sur une plage de fréquence plus importante. L'illustration sur un cas mesuré avec une DMA (*Dynamic Modulus Analyzer*) dans le cas d'un échantillon en PVC est présenté sur la figure 1.5 pour le cas du module de stockage du module d'Young. Williams, Landel et Ferry [WLF55] ont montré qu'il était possible d'écrire une équation définissant le facteur de translation tel que

$$\log \alpha_T = \frac{-C_1^r(T - T_r)}{C_2^r + T - T_r} \quad (1.4)$$

avec  $C_1^r$  et  $C_2^r$  deux constantes dépendant de la température de référence  $T_r$ . De plus, en choisissant la température de transition vitreuse  $T_g$  comme température de référence, nous obtenons la loi WLF [BP00]

$$\log \alpha_T = \frac{-C_1^g(T - T_g)}{C_2^g + T - T_g} \quad (1.5)$$

En réalité,  $C_1^g$  et  $C_2^g$  ne sont pas des constantes universelles.  $C_1^g$  est presque constante, alors que  $C_2^g$  varie en fonction du polymère. Un exemple de facteur de translation, pour une température de référence de 73°C, dans le cas de l'échantillon de PVC est présenté sur la figure 1.6.

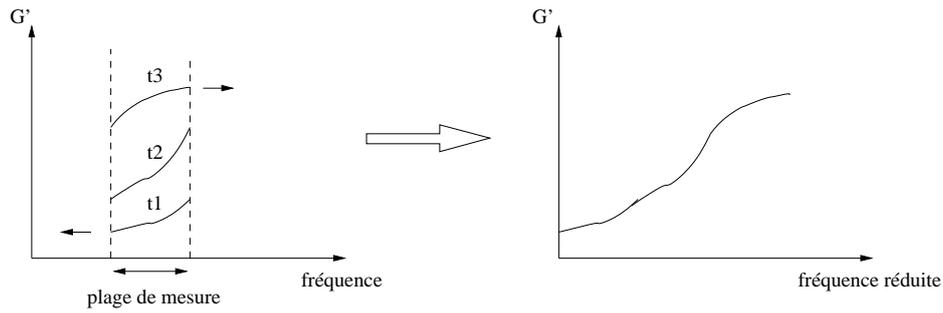


FIG. 1.4 – Exemple de courbe maîtresse

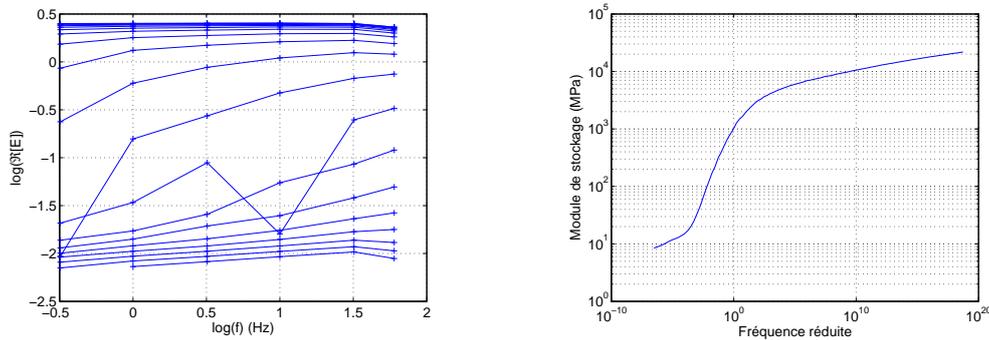


FIG. 1.5 – Mesure DMA du module de stockage du PVC

### 1.3 Approche par module complexe

Le fluage et la relaxation sont des essais qui permettent de bien caractériser un matériau pour des phénomènes d'une durée suffisamment longue (minute, heure, jour,...). Mais lorsqu'ils sont beaucoup plus rapides, les tests dynamiques s'avèrent nécessaires, avec une description du comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel. Une description basée sur des caractéristiques matériau complexes est donc plus apte à décrire la viscoélasticité dans ce domaine. Dans cette approche non paramétrique la partie réelle de ces caractéristiques est liée à l'élasticité tandis que la partie imaginaire correspond à la dissipation.

#### 1.3.1 Module complexe

La transformée de Laplace appliquée à l'équation 1.3 permet d'obtenir

$$\sigma(s) = (E_0 + E(s))\varepsilon(s) \quad (1.6)$$

avec  $s$  la variable de Laplace. En essai harmonique pour une vibration forcée à une pulsation  $\omega$  avec  $s = j.\omega$ , le module complexe du matériau peut donc être défini par

$$E(\omega) = \Re[E(\omega)] + j\Im[E(\omega)] \quad (1.7)$$

où  $\Re[E(\omega)]$  est appelé module de stockage et  $\Im[E(\omega)]$  module de perte. Ce module complexe peut aussi être défini par le module dynamique  $|E(\omega)| = (\Re[E(\omega)]^2 + \Im[E(\omega)]^2)^{1/2}$  et l'angle de déphasage  $\varphi$  entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  (figure 1.7), ou plus souvent par sa tangente avec  $\tan \varphi =$

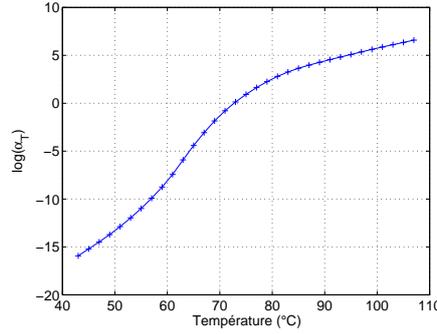


FIG. 1.6 – Facteur de translation du PVC

$\frac{\Im[E(\omega)]}{\Re[E(\omega)]}$  encore appelé facteur de perte  $\eta$ . Ces termes peuvent être compris facilement en considérant le travail  $W$  fourni au cours d'un cycle pour un mouvement harmonique tel que

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma d\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt \quad (1.8)$$

Sur ce cycle, la déformation est de la forme  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$  et la contrainte  $\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi)$  ou encore  $\sigma(t) = \Re[\sigma_0] \cos(\omega t) + \Im[\sigma_0] \sin(\omega t)$  en considérant le module complexe, ce qui conduit à

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} (\Re[\sigma_0] \cos \omega t)(-\varepsilon_0 \omega \sin \omega t) dt + \int_0^{2\pi/\omega} (\Im[\sigma_0] \sin \omega t)(-\varepsilon_0 \omega \sin \omega t) dt \quad (1.9)$$

soit

$$W = -\pi \Im[\sigma_0] \varepsilon_0 \quad (1.10)$$

Le travail au cours d'un cycle est donc négatif et il faut bien fournir de l'énergie au système qui en dissipe une partie pour entretenir le mouvement harmonique. Il est donc clair que la composante en phase ne produit aucun travail, mais que celui-ci provient uniquement de la composante déphasée. De plus, la composante en phase correspond bien à un phénomène réversible en cas de décharge, d'où le terme module de stockage pour la partie réelle, alors que la partie déphasée (complexe) produit un travail, et n'est donc pas réversible. Enfin, la perte maximale d'énergie se fait lorsqu'il y a quadrature de phase entre l'excitation et la réponse. Au cours d'un cycle l'énergie dissipée (sous forme non récupérable : chaleur, rayonnement) est proportionnelle à l'aire définie par la courbe  $\sigma(\varepsilon)$  comme le montre la figure 1.7. Il s'agit d'une boucle d'hystérésis, dont la surface  $D$  est la valeur absolue du travail fourni par cycle et qui peut se mettre sous la forme  $D = \pi \eta \Re[E] \varepsilon_0^2$ .

L'approche par module complexe est donc très utilisée pour la mesure des propriétés viscoélastique des matériaux. Toutefois, l'utilisation directe de ces résultats pour une modélisation numérique peut s'avérer difficile en engendrant des coûts de calculs importants puisqu'il s'agit d'une modélisation non paramétrique de la viscoélasticité [TA00]. Ceci est notamment le cas pour des analyses en dynamique temporelle. Des modèles paramétriques mieux adaptés que les modèles rhéologiques ont donc été développés et les principaux disponibles dans la littérature sont reportés en annexe A.

D'autre part, il faut noter que le respect du principe de causalité n'est pas assuré dans cette approche. C'est notamment le cas si la partie réelle et la partie imaginaire de la raideur complexe sont trouvés ou choisis constants quelque soit la fréquence [NJH85],[Ker04].

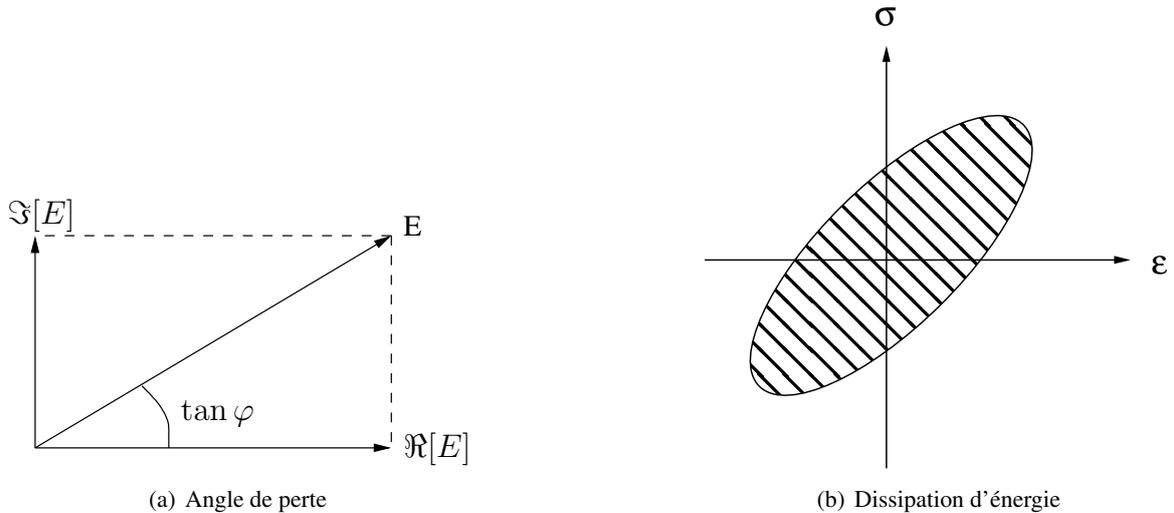


FIG. 1.7 – Angle de perte et dissipation d'énergie

### 1.3.2 Mesure ou identification du module complexe

Différents travaux ont été menés pour identifier les caractéristiques matériau en fonction de la fréquence. Les méthodes employées sont généralement uniaxiales et de trois types :

- mesure DMA [Men99] : un échantillon est sollicité dynamiquement par une machine spécifique sur une gamme de fréquence et une gamme de température. A partir du principe de superposition temps/température ou fréquence/température, les résultats de mesures expérimentales sont ensuite synthétisés pour produire un module dynamique sur une large plage fréquentielle. Le graphique obtenu à trois entrées et deux courbes, appelé nomogramme (figure 1.8), permet de prendre en compte la dépendance en fréquence et en température du module de stockage et du facteur de perte de la façon suivante :

1. Pour une fréquence donnée (en ordonnées), trouver le point d'intersection entre la droite horizontale à cette fréquence et la droite isotherme de la température d'intérêt ;
2. Relever la fréquence réduite de ce point ;
3. Tracer la verticale à cette fréquence réduite et relever les intersections avec les courbes du module de stockage et du facteur de perte dont on peut maintenant relever les valeurs ;

La machine DMA, qui est semblable aux machines de traction, a cependant des dimensions très réduite et ne permet de solliciter que des échantillons de faibles dimensions (quelques millimètres) ayant de faibles raideurs. Ceci est dû d'une part au fait qu'elle ne fait aucune compensation dynamique en supposant simplement un état de déformation quasi-statique, et d'autre part à la possibilité de mise en résonance de la machine. Elle est donc plutôt adaptée à la qualification de matériaux mous comme les caoutchoucs. Sur les machines modernes, les sollicitations peuvent être de différentes natures : traction, flexion, cisaillement, ...

- mesures résonantes sur des échantillons de type poutre [Pri96] ou plaque [Cug05, CGS04, DVSDW97] : la sollicitation d'une éprouvette à une fréquence de résonance permet de remonter à l'information de la raideur et de l'amortissement à la fréquence considérée. Plusieurs fréquences de résonances ou plusieurs échantillons doivent donc être considérés pour couvrir une gamme de fréquences [Pri96, DVSDW97]. Cette méthode nécessite un matériel d'analyse

dynamique des structures comme celui d'analyse modale. Elle est donc plutôt adaptée à la caractérisation d'échantillons très rigides comme les métaux. D'autre part, elle est très sensible à l'environnement (modification par l'intrusion d'un capteur par exemple) et à la dispersion des résultats. Enfin, une méthode d'analyse modale expérimentale peut-être nécessaire pour découpler les résultats de mesure, notamment dans le cas des plaques [Cug05, CGS04].

- mesures fréquentielles [HML00, MHA00, SVC<sup>+</sup>97] : des mesures sont réalisées sur une large gamme de fréquences à partir d'un essai de propagation d'onde dans un échantillon de matériau (fig. 1.10). Toutefois, les mesures sont réalisées directement sur l'échantillon à la différence des essais sur barres de Hopkinson pour les métaux. Ce type d'essai est généralement réalisé en sollicitation uniaxiale de type traction-compression ou torsion et fait appel à un choc (par explosion) pour l'excitation.

Ces méthodes de mesures visent donc à identifier la raideur et l'amortissement en fonction de la fréquence des caractéristiques du matériaux, comme par exemple le module d'Young et/ou le module de cisaillement complexe dans le cas d'un matériau isotrope. Dans les références [Mas78] et [Pri98b], les variations fréquentielles attendues pour ces modules complexes sont détaillées. L'allure des modules est reportée sur la figure 1.9 pour différentes dissipations possibles des matériaux. On constate qu'une évolution monotone et croissante des parties réelles de ces modules est attendue, avec une pente nulle à basse et à haute fréquences (en échelle logarithmique). Les facteurs de perte doivent présenter autant de maxima que de points d'inflexions de la partie réelle (et donc au moins un maximum). L'allure de ces facteurs peut donc être très variable. Quantitativement, ils seront moins important dans les plastiques rigides que dans les caoutchoucs. Par exemple, le maximum du facteur d'amortissement des modules de traction-compression et de cisaillement complexes serait d'au plus 0,1 et celui lié au module de compressibilité complexe serait d'au plus 0,01. Ces constatations font attendre une dépendance en fréquence peu importante des modules dynamiques. Expérimentalement des mesures par jauges ont été effectuées dans la référence [MNL04] pour mesurer les modules de Young et de cisaillement complexe, avec une excitation par pistolet à air comprimé de manière à exciter des ondes longitudinales et de torsion dans des barres de différents diamètre en PMMA et PP sur une large gamme de fréquences. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1.10 et montrent la différence d'ordre de grandeur (au moins égal à 1) entre les parties réelles et imaginaires de ces caractéristiques. La même équipe donne des résultats complémentaires pour le module d'Young complexe de barres en PP dans la référence [HML00], avec des barres de différentes longueurs, plusieurs jeux de jauges de déformation et des excitations par chocs (air comprimé) ou par impacts (pendule). Les résultats sont présentés sur la figure 1.11 en échelles logarithmique et les lignes verticales indiquent des zones critiques qui proviennent d'une mauvaise excitabilité à certaines fréquences ou de problèmes liés à des résonances de la structure. Dans la référence [SVC<sup>+</sup>97], des mesures ont été effectuées sur des barres en PA6 sollicitées en traction par un exciteur électrodynamique. La figure 1.12 reporte les résultats obtenus par plusieurs méthodes pour le module d'Young complexe. Les résultats montrent une certaine consistance entre eux.

Peu de travaux s'intéressent à l'évolution du coefficient de Poisson complexe en fréquence, et beaucoup se contentent de conserver sa valeur statique pour les études en dynamique. Une telle hypothèse revient à supposer un amortissement identique des modules complexes d'Young et de cisaillement, ce qui implique qu'il doit être aussi identique aux amortissements modaux. Ceci n'est pas conforme aux observations expérimentales. Les références [Pri98b] et [Pri00] proposent une étude théorique et examinent les possibilités de mesures ou d'identification pour ce coefficient. Une évolution monotone et décroissante est attendue pour la partie réelle de ce coefficient. Sa partie imaginaire doit être nulle à 0Hz, tendre vers zéro pour des fréquences tendant vers l'infini, et être négative. Le facteur de perte doit présenter un seul minimum. Ces tendances sont présentées **en valeur absolue** sur la

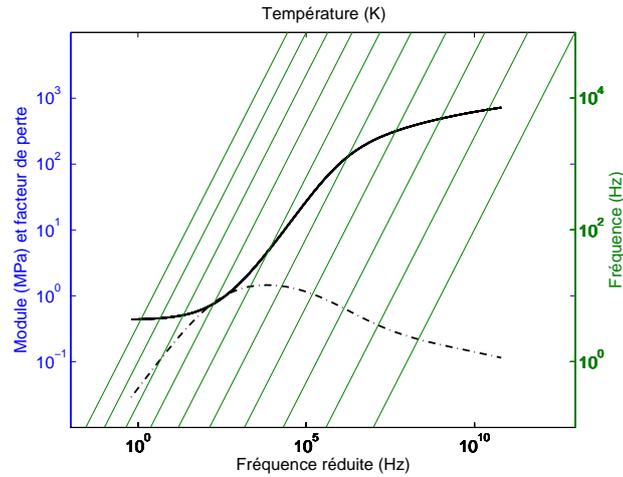


FIG. 1.8 – Exemple de nomogramme

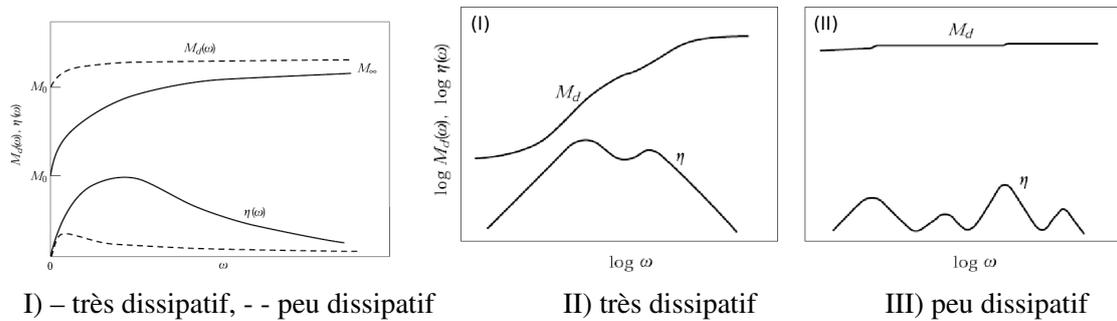


FIG. 1.9 – Evolution théorique dans différentes échelles des modules complexes en fréquence (réf. [Pri98b])

figure 1.13 dans le cas d'un matériau peu dissipatif. La figure 1.14, issue de la référence [AKSKB02], présente un exemple représentatif de la variation du coefficient de Poisson complexe d'un asphalte obtenue à partir d'un modèle de Burger (combinaison en série d'un modèle de Kelvin-Voigt et d'un modèle de Maxwell) pour le module de cisaillement complexe et d'un modèle élastique pour le module de compressibilité. En ce qui concerne la partie réelle du coefficient sur cette figure, il est par exemple intéressant de noter le passage de l'incompressibilité en statique à une compressibilité du matériau avec la fréquence de sollicitation. D'autre part, on peut aussi noter que la partie imaginaire de ce coefficient est d'environ un ordre de grandeur plus faible que sa partie réelle. Dans la référence [CG96], une mesure expérimentale directe sur un PVC de ce coefficient avec une mesure par jauges de déformations placées suivant l'axe longitudinal et transverse est effectuée sur une poutre excitée par la base et à différentes températures. L'analyse des résultats par les auteurs indique que la partie réelle de ce coefficient décroît bien avec la fréquence (figure 1.15) alors que la partie imaginaire n'a pas pu être exploitable. Dans la référence [MNL04] (déjà cité plus haut), des mesures par jauges ont également été effectuées pour mesurer le coefficient de Poisson complexe à partir de l'excitation des ondes longitudinales dans les barres citées. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1.10 et montrent la difficulté de ces mesures. La référence [Pri00] conclue dans son étude théorique que la sensibilité d'une identification indirecte de ce module peut être meilleure par un choix adéquat des car-

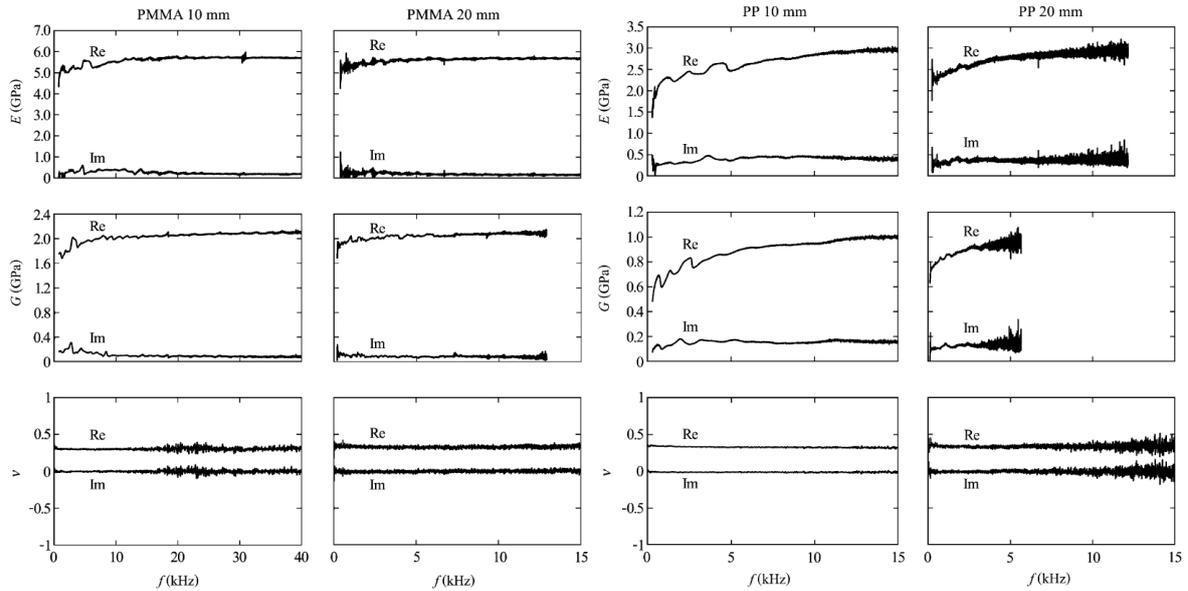


FIG. 1.10 – Modules dynamique issues de la référence [MNL04] sur des barres en PMMA et PP de 2 diamètres différents

actéristiques mesurées. Elle préconise l'identification des modules de traction  $E$  et de compressibilité  $K$  à cette fin.

Enfin, il convient de signaler que l'identification peut également être menée dans le domaine temporel et/ou à partir de modèle viscoélastiques. L'intérêt d'utiliser un modèle présente l'avantage de cumuler l'information mesurée sur l'ensemble de la plage de fréquence considérée et évite les "fréquences problématiques" citées ci-dessus par la référence [HML00]. Ainsi, dans la référence [MHA00] l'identification est conduite en supposant approprié un modèle SLS généralisé de type Maxwell sur des barres en PP. Les résultats sont reportés sur la figure 1.16 et comparés à ceux issus d'un modèle non paramétrique. D'autre part, quelques travaux s'intéressent à extraire simultanément l'ensemble des caractéristiques d'un matériau à partir d'essais complexes, généralement effectués sur des plaques. Ceci permet d'éviter les dispersions inhérentes à l'emploi de différents échantillons lors des mesures. Ainsi, [Cug05, CGS04] mène l'identification des 6 caractéristiques statiques orthotropes d'une plaque épaisse à partir d'une mesure de champ par vibrométrie laser, une analyse modale expérimentale des mesures et un modèle numérique de plaque d'ordre supérieur. La référence [DVSDW97] utilise les amortissements modaux d'une plaque isotrope ou d'une plaque et de deux poutres orthotropes pour identifier les amortissements matériaux, en supposant les parties modules de stockage constants en fréquence. Enfin, [Guo07] s'intéresse à l'extraction des caractéristiques de raideur et d'amortissement d'une plaque à quelques fréquences en régime établi par la Méthode des Champs Virtuels. La principale difficulté relevée dans ce travail concerne la nécessité d'une mesure de phase précise entre l'excitation et la mesure du champ de réponse ainsi que la difficulté d'adapter le niveau de vibrations produit à l'étendue de mesure de la méthode optique choisie.

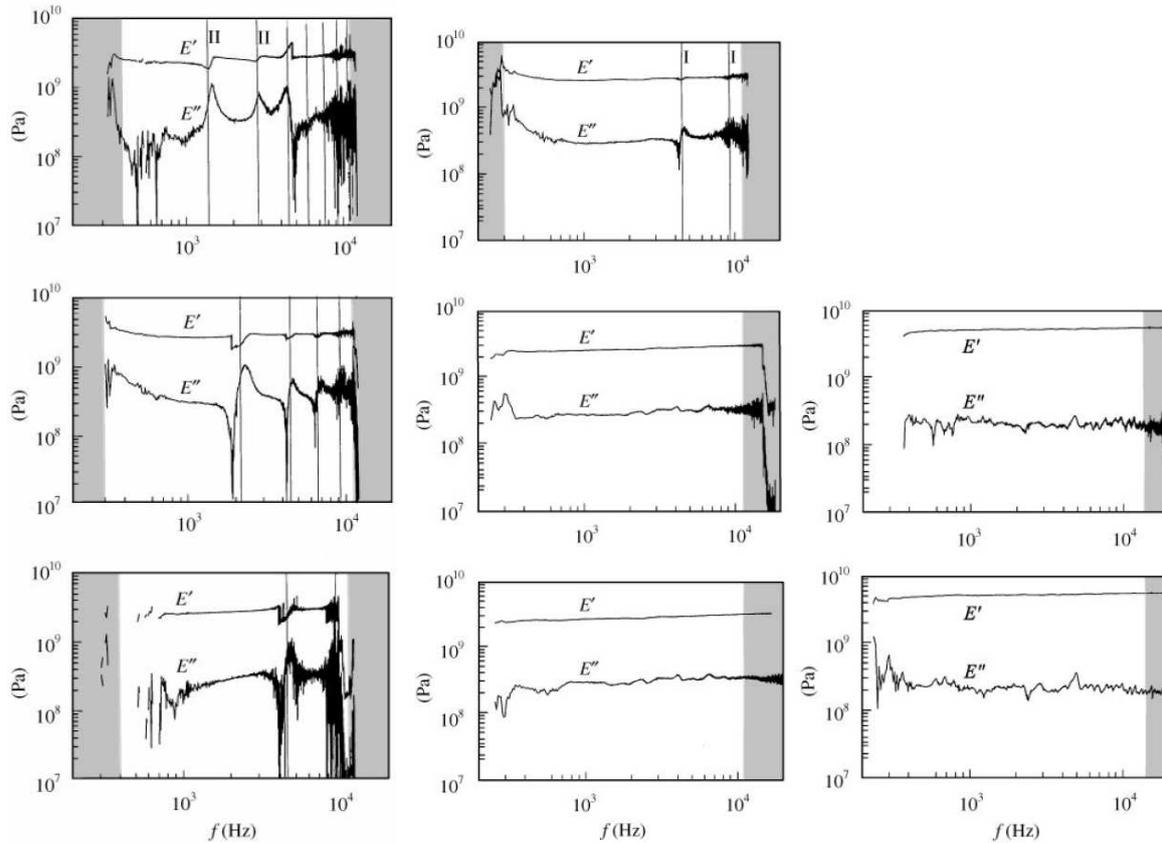


FIG. 1.11 – Module d'Young complexe de barres en PP (référence [HML00])

## 1.4 Représentation du module complexe - modèles rhéologiques

### 1.4.1 Modèles de base

Les modèles rhéologiques sont des éléments permettant de représenter des comportements mécaniques de base. Deux comportements nous intéressent :

1. l'élasticité avec le ressort
2. la viscosité avec l'amortisseur

Leur combinaison doit permettre d'obtenir des lois de comportement proches des celles des matériaux, suivant des règles simples. En série, la déformation totale des éléments est donnée par la somme de chacune des déformations, alors que les contraintes restent identiques dans ces éléments. En parallèle, c'est la déformation qui est égale pour chacun des éléments, pour une contrainte totale donnée par la somme des contraintes induites dans les éléments.

Ainsi, le modèle de Maxwell permet de modéliser un comportement viscoélastique par combinaison d'un ressort et d'un amortisseur en série. Le comportement de ce modèle est donné par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_E = \sigma_c \\ \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_c \end{cases} \quad (1.11)$$

avec  $\sigma_E = E_0 \varepsilon_E$ ,  $\sigma_c = c \dot{\varepsilon}_c$  et la dérivation de la seconde équation conduit à

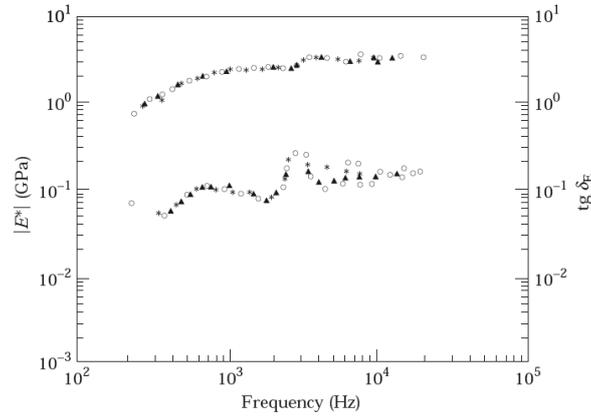


FIG. 1.12 – Résultats issus de la référence [SVC+97] pour le module d'Young complexe d'un PA6

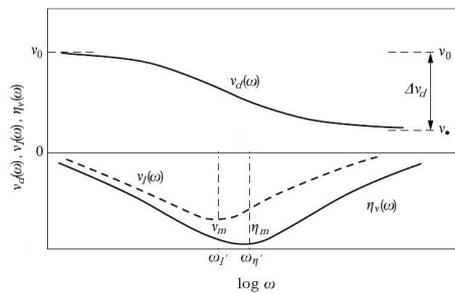


FIG. 1.13 – Evolution théorique du coefficient de Poisson complexe (d'après [Pri98b])

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_E + \dot{\epsilon}_c \tag{1.12}$$

ce qui permet d'aboutir à l'équation différentielle de comportement de ce modèle

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{c} \tag{1.13}$$

Sa réponse pour différents essais peut donc être déterminée aisément. En :

- Fluage : la contrainte  $\sigma$  est imposée (constante) donc  $\dot{\sigma} = 0$ , d'où une vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{c}$  constante et il n'y a pas de stabilisation de la réponse pour cet essai ; Ce modèle est donc adapté pour des fluides viscoélastiques.
- Relaxation : la déformation est imposée (constante) donc  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_E + \dot{\epsilon}_c = 0$  et la réponse en contrainte est de la forme :

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_0}{c}t} \tag{1.14}$$

avec  $\sigma_0 = E_0 \epsilon_0$  ;

- Dynamique : l'excitation est du type  $\epsilon = \epsilon_0 e^{j\omega t}$  avec une réponse de la forme  $\sigma = \sigma_0 e^{j\omega t}$  et le module dynamique  $E(\omega) = \sigma_0 / \epsilon_0$  s'écrit

$$E(\omega) = \frac{j\omega E_0}{\frac{E_0}{c} + j\omega} \tag{1.15}$$

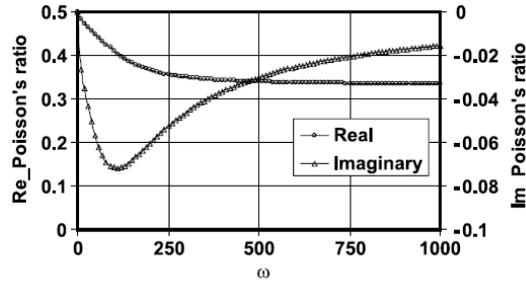


FIG. 1.14 – Modélisation d'un asphalte (référence [AKSKB02])

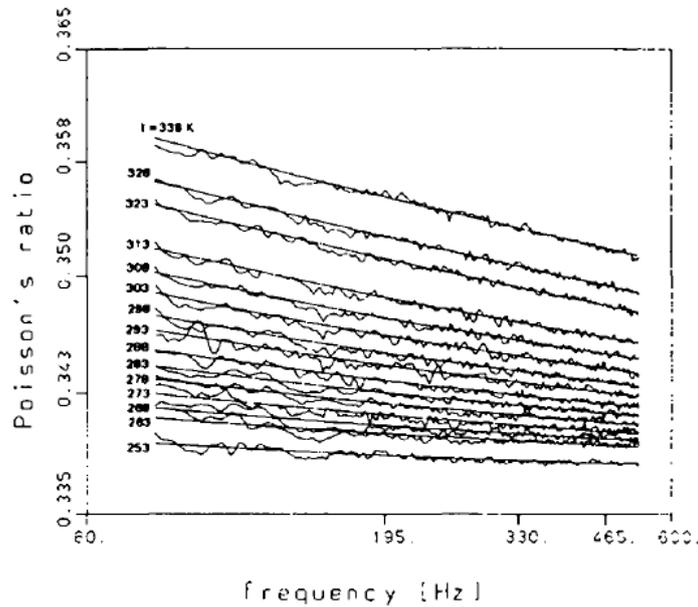


FIG. 1.15 – Evolution du coefficient de Poisson d'un PVC (réf. [CG96])

D'autre part, le modèle obtenu par la combinaison d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (figure 1.1) est appelé modèle de Kelvin-Voigt ou d'amortissement visqueux. Nous avons dans ce cas

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_E = \varepsilon_c \\ \sigma = \sigma_E + \sigma_c = E_0\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.16)$$

d'où l'on tire l'équation différentielle de comportement

$$\varepsilon + \frac{c}{E_0}\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E_0} \quad (1.17)$$

A nouveau, la réponse de ce modèle pour différents essais peut être déterminée aisément. En :

- Fluage : la déformation correspondante est donnée par  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{c}t}\right)$  donc  $\varepsilon \rightarrow \frac{\sigma}{E_0}$  lorsque  $t$  devient très grand ;
- Relaxation : elle est impossible avec ce modèle car il ne peut pas subir une déformation instantanée qui conduirait à une contrainte infinie.

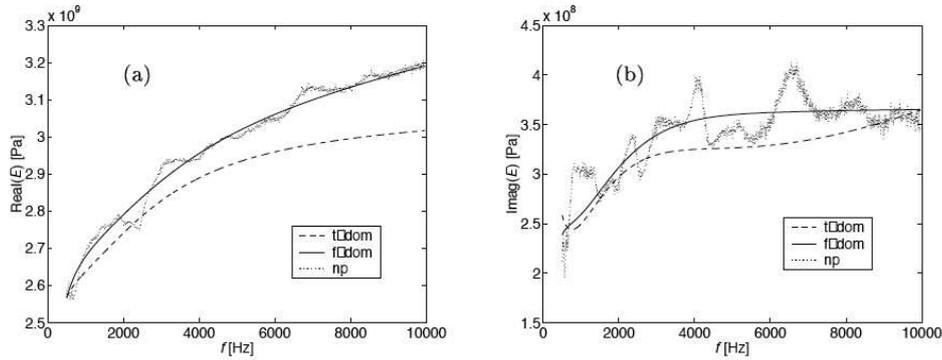


FIG. 1.16 – Résultats paramétriques et non-paramétriques de la référence [MHA00] pour le module d'Young d'un PP

– Dynamique : la réponse en fréquence est

$$E(\omega) = E_0 + jc\omega \quad (1.18)$$

ce qui correspond à un module d'élasticité constant en fréquence pour un amortissement qui croît linéairement avec celle-ci.

Ainsi, le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt et celui de Maxwell restent trop simples pour pouvoir être représentatifs d'un comportement expérimental. C'est ce qui motive l'établissement de modèles plus complexes comme ceux que nous présentons par la suite pour représenter des comportements solides.

## 1.4.2 Modèles de type solides linéaires standards

### 1.4.2.1 Modèles solides linéaires standards de type Kelvin-Voigt

Le modèle solide linéaire standard (SLS) de type Kelvin-Voigt, appelé également modèle de Zener, est obtenu par assemblage en série d'un ressort et d'un modèle de Kelvin-Voigt. L'équation différentielle de comportement s'écrit

$$(E_0 + E_1)\sigma + c\dot{\sigma} = E_0E_1\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (1.19)$$

Ce modèle est certainement plus représentatif d'un comportement réel pour des sollicitations simples comme nous pouvons le voir sur les figures 1.17a et 1.17b. Cependant, et même si le comportement de ce modèle dans le domaine fréquentiel donné par le module dynamique

$$E(\omega) = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + j\omega c} \right)^{-1} = \frac{a + j\omega E_0 b}{1 + j\omega b} \quad \text{avec} \quad a = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \quad \text{et} \quad b = \frac{c}{E_0 + E_1} \quad (1.20)$$

est plus proche des matériaux réels (asymptotes basse et haute fréquences, dissipation maximale dans une zone de fréquences vraisemblable), il est jugé assez peu représentatif de la réalité : la variation de la partie imaginaire de ce modèle avec la fréquence s'avère trop rapide. Une correction est donc généralement apportée à ce modèle en modifiant sa dépendance en fréquence suivant

$$E(\omega) = \frac{a + E_0 b (j\omega)^{1/2}}{1 + b (j\omega)^{1/2}} \quad (1.21)$$

ou en introduisant plus généralement deux paramètres de puissances supplémentaires. Le modèle ainsi obtenu est appelé modèle à dérivées fractionnaires dans la littérature (cf. annexe A). Enfin, une autre possibilité pour améliorer la précision de ce modèle peut consister à lui assembler en série des modèles supplémentaires de Kelvin-Voigt ( $N$  au total).

#### 1.4.2.2 Modèles SLS de type Maxwell

Le modèle de Poynting et Thomson est également qualifié de modèle SLS de type Maxwell car il est obtenu par assemblage en parallèle d'un ressort et d'un modèle de Maxwell (table 1.1). On y associe l'équation différentielle de comportement

$$E_1 \sigma + c \dot{\sigma} = E_0 E_1 \varepsilon + c(E_0 + E_1) \dot{\varepsilon} \quad (1.22)$$

ce qui conduit à une réponse convenable pour un essai de relaxation

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 + E_1 \varepsilon_0 e^{-\frac{E_1}{c} t} \quad (1.23)$$

et qui permet d'aboutir au module dynamique

$$E(\omega) = E_0 + \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{j\omega c} \right)^{-1} = E_0 + \frac{j\omega E_1}{\frac{E_1}{c} + j\omega} \quad (1.24)$$

Mais ce modèle étant également peu apte à représenter un comportement expérimental, il est généralement nécessaire de l'étendre en y ajoutant en parallèle des modèles de Maxwell supplémentaires ( $N$  au total) pour conduire à l'assemblage proposé par la figure 1.1. Ce modèle est dit de Maxwell généralisé ou de Weichert. Le noyau de relaxation correspondant devient

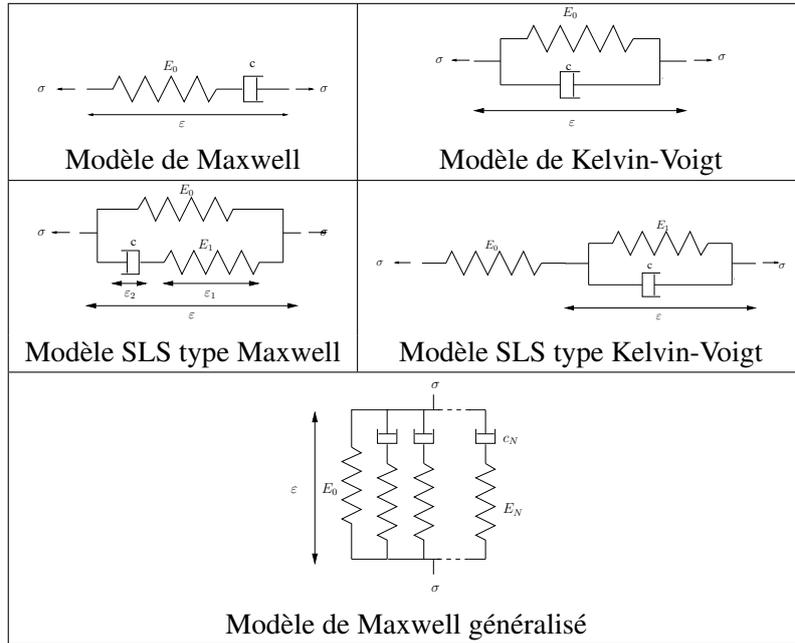
$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{E_i}{c_i} t} \quad (1.25)$$

et le module dynamique associé est

$$E(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega E_i}{\frac{E_i}{c_i} + j\omega} \quad (1.26)$$

Comme il s'agit d'une extension du modèle précédent avec un plus grand nombre de paramètres, il permet évidemment de mieux approximer la réalité, avec en contrepartie un plus grand nombre de coefficients à déterminer ou à identifier.

Ainsi la représentativité des modèles rhéologiques ne peut généralement être obtenue qu'au prix d'un nombre de paramètres important. Pour limiter le nombre de paramètres nécessaire, des modèles paramétriques (ATF/ADF ou GHM) plus élaborés que les modèles rhéologiques ont été introduits. Ils sont présentés en Annexe A. D'autre part, ces modèles 1D uniquement sur le module d'Young ne sont pas suffisants pour établir des modèles de comportement tridimensionnels en raison des phénomènes des couplages entre les directions qui doivent être pris en compte.



TAB. 1.1 – Modèles rhéologiques simples

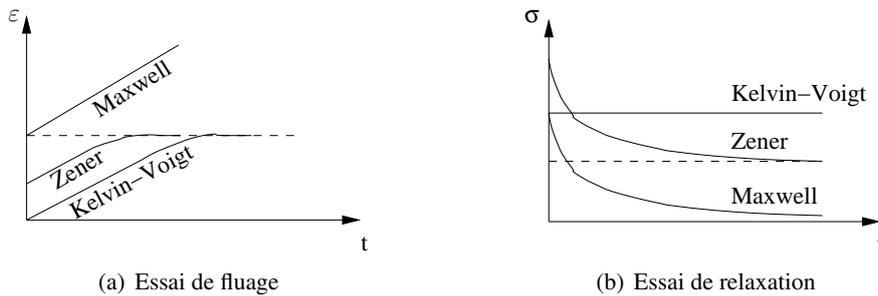


FIG. 1.17 – Réponse de modèles simples

## 1.5 Relation de comportement

L'opérateur de relation de comportement en viscoélasticité linéaire 3D que nous noterons  $\mathcal{A}$  doit être un tenseur d'ordre 4 pour relier les tenseurs des contraintes  $\sigma$  et des déformations  $\varepsilon$  dans le domaine fréquentiel suivant

$$\sigma = \mathcal{A} : \varepsilon \tag{1.27}$$

Cet opérateur doit être symétrique et défini positif. De plus, compte tenu des propriétés de symétries des tenseurs des contraintes et des déformations, le nombre total de coefficients indépendants de cet opérateur ne peut pas excéder 21 dans le cas des matériaux anisotropes. Pour des raisons pratiques de traitement, les matrices de déformations  $\varepsilon$  et de contraintes  $\sigma$  sont mises sous forme de vecteurs tels

que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

avec  $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2\varepsilon_{ij}$  de sorte que

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \quad (1.29)$$

### 1.5.1 Milieux orthotropes

Dans un matériau orthotrope, il existe deux plans de symétrie perpendiculaires. Il ne reste donc plus que 9 coefficients indépendants, tels que la relation de comportement puisse se mettre sous la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{66} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Les matériaux composites à fibres dirigées suivant un axe sont un cas particulier de milieu orthotrope. Les propriétés matériau sont alors invariantes par rotation autour d'un axe de symétrie. Il ne reste plus alors que 5 coefficients, tels que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{55} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

avec  $2\mathcal{A}_{44} = \mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}$  dans le cas des matériaux composites à fibres dirigées suivant l'axe 3.

### 1.5.2 Milieux isotropes

Dans le cas des milieux isotropes, les propriétés matériau sont identiques dans les trois directions. Dans ce cas, la relation peut être décrite avec deux caractéristiques seulement. Par exemple sous la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

La loi viscoélastique fréquentielle peut donc s'écrire sous une forme semblable à la loi de Hooke en élasticité, mais avec des caractéristiques complexes, dépendantes de la fréquence, dont la partie imaginaire est liée à la dissipation interne du matériau :

$$\sigma = \lambda \text{trace}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon \quad (1.33)$$

avec

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.34)$$

où  $E$  correspond à un module de traction, appelé module d'Young complexe, et  $\nu$  à un coefficient de contraction transverse, dit coefficient de Poisson complexe, de sorte que

$$\mathbf{A}(E, \nu) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Les relations entre les caractéristiques sont donc similaires à celles définies en élasticité puisqu'elles proviennent de considérations géométriques ou d'équilibres, et non d'un quelconque aspect temporel des réponses.

Il est aussi possible d'écrire cette relation avec d'autres jeux de caractéristiques, comme par exemple avec un module complexe de compressibilité  $K$  et un module complexe de cisaillement  $G$

$$\mathbf{A}(K, G) = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

avec

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.37)$$

Les relations entre différents choix de caractéristiques pour la relation de comportement 3D sont rappelées dans le tableau 1.2.

	$(E, \nu)$	$(K, G)$	$(\lambda, G)$	$(E, G)$
$(E, \nu)$	-	$\frac{E}{3(1-2\nu)} \frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
$(K, G)$	$\frac{9KG}{3K+G} \frac{3K-2G}{6K+2G}$	-	$K - \frac{2}{3}GG$	$\frac{9KG}{3K+G} G$
$(\lambda, G)$	$\frac{2G^2+3G\lambda}{\lambda+G} \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\lambda + \frac{2}{3}GG$	-	$\frac{-4G^2+3QG}{Q-G} G$
$(E, G)$	$E \frac{E}{2G} - 1$	$\frac{EG}{3(3G-E)} G$	$\frac{5EG-12G^2}{3(3G-E)} - 2GG$	-

TAB. 1.2 – Correspondance entre les paramètres matériau

## 1.6 Relations de la mécanique des milieux continus

Cette section rappelle les équations de la mécanique des milieux continus et précise les notations nécessaires par la suite. Nous nous limitons au cas de la dynamique en viscoélasticité linéaire. Les références [BD90, p. 113][BP00] peuvent être consultées pour plus de détails sur l'obtention de ces équations.

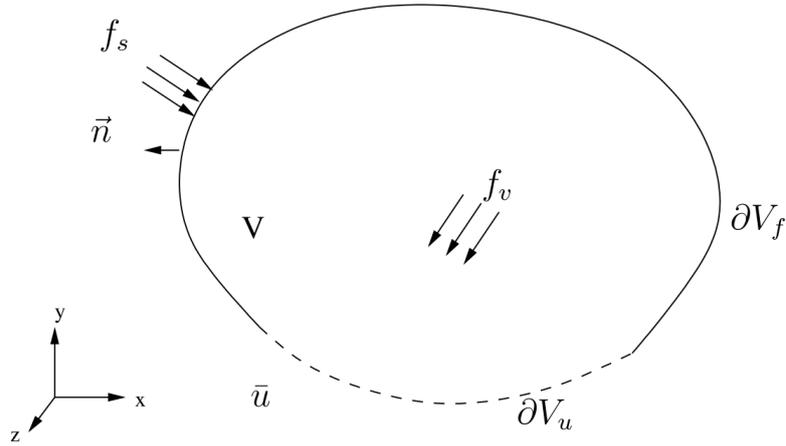


FIG. 1.18 – Solide de référence

Nous considérons un solide de volume  $V$  schématisé sur la figure 1.18, de frontière  $\partial V = \partial V_u \cup \partial V_f$  et ayant un champ de déplacement  $u$  lorsqu'il est soumis à l'action :

- de forces d'inertie  $-\rho\omega^2 u$
- de forces surfaciques  $f_s$  sur la surface  $\partial V_f$
- de déplacements imposés  $u = \bar{u}$  sur la surface  $\partial V_u$

Le problème de viscoélasticité linéaire doit alors satisfaire :

- les équations d'équilibre dans le domaine fréquentiel [Fel03]

$$\operatorname{div}(\sigma) + \rho\omega^2 u = 0 \quad (1.38)$$

sur  $V$  la relation 1.38 conduit donc au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 v \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 w \end{cases} \quad (1.39)$$

- les conditions aux limites mécaniques

$$-\sigma \cdot n + f_s = 0 \quad (1.40)$$

sur  $\partial V_f$ , avec  $n$  le vecteur de la normale sortante ;

- la relation entre les déformations et les déplacements sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP)

$$\varepsilon - \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(u) + \operatorname{grad}(u)^T) = 0 \quad (1.41)$$

sur  $V$  ou encore

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

– les conditions aux limites géométriques sur  $\partial V_u$

$$u - \bar{u} = 0 \quad (1.43)$$

– la loi de comportement 1.27

## 1.7 Formes variationnelles et Principe des Travaux Virtuels

Nous présentons dans cette section quelques formulations variationnelles afin de poser les bases nécessaire pour l'établissement d'éléments finis adaptés à notre problème de viscoélasticité linéaire.

### 1.7.1 Energie potentielle et formulation en déplacement

#### 1.7.1.1 Solution du problème direct et énergie potentielle

Dans le cadre de la théorie linéaire de l'élasticité, il est possible de définir une fonctionnelle de l'énergie potentielle totale [DT86]

$$W = \delta(\Pi_U(u)) = 0 \quad (1.44)$$

telle que

$$\Pi_U(u) = \Pi_{int}(u) - \Pi_{ext}(u) \quad (1.45)$$

avec :

–  $\Pi_{int}$  l'énergie interne de déformation

$$\Pi_{int} = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(u) : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(u) dV \quad (1.46)$$

–  $\Pi_{ext}$  l'énergie des forces de volume et de surface

$$\Pi_{ext} = \int_{S_f} u f_S dS + \int_{S_u} u R dS + \int_V u \rho \omega^2 u dV \quad (1.47)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Pi_U(u) = & \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right)^T : \mathcal{A} : \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV \\ & - \int_{\partial V_f} u \cdot f_S dS - \int_{\partial V_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (u - \bar{u}) dS - \int_V \rho \omega^2 u \cdot u dV \end{aligned} \quad (1.48)$$

La solution d'un problème direct en déplacement consiste donc à minimiser la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale. Ce principe permet de dire que parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, celui qui minimise la fonctionnelle  $\Pi_U$  correspond à la solution du problème, et que cette solution est unique.

### 1.7.1.2 Formulation en déplacement

Il est également possible de définir une forme variationnelle associée à l'expression de l'équilibre 1.38, telle que

$$W^* = \int_V u^* (\operatorname{div}(\sigma) + \rho \omega^2 u) dV = 0 \quad \forall u^* \text{ CA} \quad (1.49)$$

avec  $u^*$  champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible, choisi de manière à satisfaire les équations de conditions aux limites 1.43 (il sera nul sur la frontière où la liaison est imposée), avec des fonctions  $u^*(x)$  dérivables. La formulation forte du problème est donc affaiblie une première fois. Cette équation variationnelle est de la forme

$$W^* = W_{int}^* - W_{ext}^* \quad (1.50)$$

avec

$$W_{int}^* = \int_V u^* \operatorname{div}(\sigma) dV \quad (1.51)$$

et

$$W_{ext}^* = \int_V u^* (-\rho \omega^2 u) dV \quad (1.52)$$

L'intégration par parties suivante permet d'affaiblir une seconde fois l'expression forte du problème

$$\int_V \operatorname{div}(u^* \sigma) dV = \int_V u^* \operatorname{div}(\sigma) dV + \int_V \operatorname{grad}(u^*) : \sigma dV \quad (1.53)$$

avec

$$\operatorname{grad}(u^*) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(u^*) + \operatorname{grad}^T(u^*)) + \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(u^*) - \operatorname{grad}^T(u^*)) \quad (1.54)$$

ce qui fait apparaître le tenseur des déformations virtuelles

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(u^*) + \operatorname{grad}^T(u^*)) = \frac{1}{2} \operatorname{grad}_S(u^*) \quad (1.55)$$

et le tenseur des rotations virtuelles

$$\Omega^* = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(u^*) - \operatorname{grad}^T(u^*)) \quad (1.56)$$

d'où

$$\operatorname{grad}(u^*) : \sigma = \varepsilon^* : \sigma + \Omega^* : \sigma \quad (1.57)$$

or le tenseur  $\sigma$  est symétrique, ce qui entraîne  $\Omega^* : \sigma = 0$  et finalement, nous obtenons l'expression générale du Principe des Travaux Virtuels (PTV) formulé en déplacements

$$W^* = \int_V \varepsilon^* : \sigma dV - \int_{S_f} u^* \cdot f_S dS - \int_{S_u} u^* \cdot R dS - \rho \omega^2 \int_V u^* \cdot u dV = 0 \quad (1.58)$$

$\forall u^* \text{ CA}$  ([BD90]) avec  $u$  pour seul champ inconnu du problème.

Si les fonctions tests  $u^*$  et les fonctions solutions  $u$  appartiennent au même espace, nous avons alors une formulation de type Galerkin. Les fonctions de déplacements virtuels  $u^*$  sont alors définies comme des variations des déplacements réels telles que

$$u^* = \delta u \quad (1.59)$$

L'expression du PTV en déplacements de type Galerkin est alors de la forme

$$\delta W(u) = \int_V \delta \varepsilon : \sigma : \varepsilon dV - \int_{S_f} \delta u \cdot f_S dS - \int_{S_u} \delta u \cdot R dS - \rho \omega^2 \int_V \delta u \cdot u dV = 0 \quad (1.60)$$

$\forall \delta u \text{ CA}$ .

## 1.7.2 Formulation mixte

Dans la formulation du PTV en déplacement, seule l'équation d'équilibre du problème d'élasticité linéaire est mise sous forme variationnelle. Les autres relations sont introduites de manière forte dans la formulation. Le principe des formulations mixtes consiste à introduire d'autres équations sous forme variationnelle ([BD90]) pour obtenir des solutions moins contraintes. Nous montrons alors dans quelles conditions de choix des champs de déformations il est possible de retrouver une forme similaire entre les formes mixtes et celle en déplacements, ce qui permet d'établir des éléments finis simples et performants.

### 1.7.2.1 Formulation de Hu-Washizu et méthode EAS

Il est possible de définir une forme variationnelle associée à l'expression de l'équilibre 1.38, telle que

$$\int_V u^* (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \omega^2 u) dV \quad (1.61)$$

avec :

- une forme variationnelle associée aux conditions aux limites 1.43

$$\int_{\partial V_u} R^*(u - \bar{u}) dS \quad (1.62)$$

- une forme variationnelle associée aux conditions limites mécaniques 1.40

$$\int_{\partial V_f} u_F^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - f_s) dS \quad (1.63)$$

- une forme variationnelle associée à la relation de comportement 1.27

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* (\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (1.64)$$

- une forme variationnelle associée à la relation déformations-déplacements 1.41

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^* \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV \quad (1.65)$$

L'intégration par parties du premier terme de 1.61 permet d'écrire

$$\int_V u^* \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_V \left( \frac{\nabla u^* + \nabla^T u^*}{2} \right) \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\partial V} u^* \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.66)$$

et après simplification, nous obtenons une fonctionnelle mixte de type Hu-Washizu du PTV, telle que

$$W^* = \delta(\Pi_{HW}) \quad (1.67)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(u, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = & - \int_V \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ & + \int_{\partial V_f} u \cdot f_s dS + \int_{\partial V_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (u - \bar{u}) dS + \rho \omega^2 \int_V u \cdot u dV \end{aligned} \quad (1.68)$$

Cette fonctionnelle de Hu-Washizu donne naissance à la méthode EAS (*Enhanced Assumed Strain*) [SRF90], méthode dans laquelle on suppose que le champ de déformation dérive d'un champ de déplacements, et d'un champ complémentaire qui vient l'enrichir, de sorte qu'il puisse s'écrire sous la forme

$$\varepsilon = \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} + \varepsilon_\alpha \quad (1.69)$$

avec la contrainte

$$\int_V \sigma : \varepsilon_\alpha dV = 0 \quad (1.70)$$

L'intérêt majeur de cette méthode est de retrouver alors une forme similaire à 1.48 après le report de cette forme du champ de déformation dans la fonctionnelle de Hu-Washizu.

### 1.7.2.2 Formulation d'Hellinger-Reissner et méthode ANS

La formulation d'Hellinger-Reissner est basée sur celle de Hu-Washizu présentée dans la section précédente, mais la relation déformations-déplacements en HPP donnée par l'équation 1.41 y est introduite explicitement d'où

$$\Pi(u, \sigma) = -\frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV + \int_{\partial V_f} u \cdot f_S dS + \int_{\partial V_u} \sigma \cdot n(u - \bar{u}) dS + \rho \omega^2 \int_V u \cdot u dV \quad (1.71)$$

or

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV &= -\frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV \\ &= -\int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV \end{aligned} \quad (1.72)$$

ce qui peut également être mis sous la forme

$$-\frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV = -\int_V \sigma : \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV \quad (1.73)$$

et permet d'aboutir, après simplification, à la fonctionnelle mixte de type Hellinger-Reissner du PTV

$$\begin{aligned} \Pi_{HR1}(u, \sigma) &= \frac{1}{2} \int_V \sigma : \mathcal{A}^{-1} : \sigma dV - \int_V \sigma : \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV + \int_{\partial V_f} u \cdot f_S dS \\ &\quad + \int_{\partial V_u} \sigma \cdot n(u - \bar{u}) dS + \rho \omega^2 \int_V u \cdot u dV \end{aligned} \quad (1.74)$$

Il s'agit de l'expression en déplacement de la fonctionnelle de Hellinger-Reissner, mais celle-ci peut également se mettre sous la forme d'une fonctionnelle en contrainte

$$\begin{aligned} \Pi_{HR2}(u, \sigma) &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathcal{A}^{-1} \sigma dV + \int_V u \cdot \text{div}(\sigma) dV + \int_{\partial V_f} u \cdot (\sigma \cdot n - f_S) dS \\ &\quad + \int_{\partial V_u} \sigma \cdot n \bar{u} dS + \rho \omega^2 \int_V u \cdot u dV \end{aligned} \quad (1.75)$$

ou encore sous une forme déformation-déplacement (cf. référence[MF91]) avec l'expression

$$\begin{aligned} \Pi_{HR3}(u, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon : \mathcal{A} : \varepsilon dV - \int_V \varepsilon : \mathcal{A} : \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV + \int_V u \cdot f_V dV \\ &\quad + \int_{\partial V_f} u \cdot f_S dS + \int_{\partial V_u} (\varepsilon \mathcal{A}) \cdot n(u - \bar{u}) dS + \rho \omega^2 \int_V u \cdot u dV \end{aligned} \quad (1.76)$$

Cette dernière forme permet d'établir la méthode ANS (*Assumed Natural Strain*). Celle-ci est basée sur la fonctionnelle de Hellinger Reissner dans laquelle intervient un champ de déformation  $\varepsilon$  indépendant tel que

$$\int_V \varepsilon : \mathcal{A} : \left( \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right) dV = \int_V \varepsilon : \mathcal{A} : \varepsilon dV \quad (1.77)$$

ce qui permet de retrouver à nouveau une forme identique à 1.48.

Finalement, nous venons de voir dans cette partie qu'il est possible d'exprimer des fonctionnelles mixtes de notre problème mécanique sous différentes formes, ce qui permet d'imposer différentes conditions de continuités sur les champs introduits.

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre présente les principes généraux de la viscoélasticité linéaire dans le domaine fréquentiel. Les modules complexes traduisent le comportement viscoélastique des matériaux dans ce domaine. Nous avons vu en particulier que

- les modules de stockage ( $\Re[E]$ ,  $\Re[G]$ , ...) ont tendance à augmenter avec la fréquence pour atteindre une limite asymptotiquement ;
- les facteurs de perte des modules complexes présentent généralement ou plusieurs pics puis ont tendance à diminuer avec la fréquence ;
- la partie réelle du coefficient de Poisson a tendance à diminuer avec la fréquence ;
- la partie imaginaire du coefficient de Poisson doit être négative et présenter un minimum avant de tendre vers 0 ;
- les parties imaginaires des caractéristiques matériaux doivent être nulles en statique (limite basses fréquences à 0 Hz) et sont au moins inférieures à leur partie réelle d'un ordre de grandeur.

Cependant l'utilisation directe de modules complexes tabulés dans la modélisation peut nécessiter beaucoup de temps de calcul. Une solution peut venir de l'utilisation de modèles représentatifs des modules trouvés. Les premiers modèles mis en place sur la base de modèles rhéologiques simples pour approximer ces comportements trouvent vite leurs limites. L'utilisation de modèles rhéologiques plus complexes (Maxwell généralisé, ...) permet alors d'être plus représentatif, mais avec un nombre de paramètres à identifier important.

Du point de vue de l'identification de caractéristiques matériau, l'approche directe par module complexe semble toutefois être la plus satisfaisante en première approche, même si les ordres de grandeurs attendus nous font présager d'une forte sensibilité aux bruits de mesures. En effet, elle ne nécessite pas le choix d'un modèle et de son nombre de paramètres *a-priori*. Cette approche permet de tirer l'ordre de grandeur des caractéristiques matériaux avec une allure des variations. Par la suite, si cette première identification s'avère insuffisante, elle peut alors conduire au choix d'un modèle paramétrique adapté, et à une seconde identification qui devrait être moins sensible aux bruits de mesures s'ils sont limités à certaines plages de fréquences.

Enfin le principe des travaux virtuels et les formulations mixtes nous donnent les bases de construction d'éléments finis (présentée dans le chapitre suivant). La modélisation numérique ainsi mise en place permettra l'établissement d'une méthode d'identification expérimentale/numérique pour les caractéristiques viscoélastiques.



## Chapitre 2

# Méthodes numériques

### 2.1 Introduction

Ce chapitre introduit l'ensemble des méthodes numériques nécessaires pour la modélisation et la résolution du problème direct de visco-élasto-dynamique. Les structures concernées par l'emploi de ces matériaux visco-élastiques sont généralement de type plaques ou coques, éventuellement multicouches. Parmi les méthodes de résolution de ces problèmes directs, la méthode numérique des éléments finis est très flexible. Elle permet bien d'appréhender ce type de structures indépendamment de leurs formes et de leur caractère mince ou non.

Pour la modélisation des structures de type plaque ou coque, l'utilisation d'éléments finis volumiques a connu un essor important dernièrement [Sze02], en grande partie grâce à l'absence des degrés de liberté en rotation, souvent problématiques, dans ces éléments. De plus, certains de ces éléments sont formulés en intégrant une relation de comportement complète (3D), ce qui présente l'avantage de ne pas introduire d'hypothèse de manière forte. L'augmentation du nombre de noeud par élément est compensée par la prise en compte des seuls degrés de libertés (ddl) de translation, au lieu des 5 à 6 ddl/noeud pour les éléments de coque (soit 24 ddl/élément au lieu de 20 à 24). Dans le cas de l'identification de structures éventuellement sandwich et avec des mesures disponibles en surface, un tel élément présente un intérêt certain.

Nous proposons donc en première partie de ce chapitre d'étudier les éléments finis que nous utilisons dans ce travail et notamment l'élément H8coque. Au préalable, l'élément volumique classique est introduit avec les notions et notations nécessaires afin d'explicitier les phénomènes de blocage que posent ces éléments dans le cas de structures minces et les remèdes à suivre pour les éviter. Ceci permet d'obtenir des modèles spatiaux des structures.

Les mesures dynamiques permettent de construire des modèles de réponse. Nous présentons donc les stratégies numériques pour construire de tels modèles directement à partir des modèles spatiaux ou via des modèles modaux formés par des bases modales adaptées aux problèmes de visco-elasto-dynamique. L'expansion des données pour rendre des modèles différents compatibles est ensuite abordée. Ce chapitre se termine par l'évaluation statique et dynamique de ces éléments et des structures employées par la suite pour l'identification.

Ce chapitre introduit l'ensemble des méthodes numériques nécessaires pour la modélisation et la résolution du problème direct de visco-élasto-dynamique. Les structures concernées par l'emploi de ces matériaux visco-élastiques sont généralement de type plaques ou coques, éventuellement multicouches. Parmi les méthodes de résolution de ces problèmes directs, la méthode numérique des éléments finis est très flexible. Elle permet bien d'appréhender ce type de structures indépendamment de

leurs formes et de leur caractère mince ou non.

## 2.2 Approximation par éléments finis - modèles spatiaux

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser un solide en éléments de géométries simples rattachés à des noeuds auxquels sont associées des grandeurs cinématiques. A chaque noeud sont associées des variables, ou degrés de liberté (ddl) qui peuvent être de différentes natures : déplacements, températures,... Les champs sont alors approximés en tout point des éléments par une interpolation à partir des valeurs associées aux différents noeuds. Les fonctions choisies doivent satisfaire des conditions de continuité entre les différents éléments. De la même façon la géométrie de l'élément réel est discrétisée en sous-domaines. Cette méthode est basée sur les formulations variationnelles (équations 1.49, 1.74, 1.76) de telle sorte que les équations de la formulation forte, valables en tous points, soient vérifiées en moyenne sur l'ensemble des éléments, et vérifient

$$\delta W = \sum_{\text{éléments}} \delta W^{(e)} \quad (2.1)$$

expression dans laquelle le travail virtuel élémentaire  $\delta W^{(e)} = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M}^{(e)} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}^{(e)})$  est exprimée sur l'élément fini.

La discrétisation ainsi introduite permet après l'assemblage, qui est une opération qui consiste à assurer les conditions de continuité cinématique et d'équilibre entre les éléments, d'aboutir à l'équilibre dynamique global discrétisé

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (2.2)$$

La donnée des matrices de raideur (également amortie dans notre cas)  $\mathbf{K}$  et de masse  $\mathbf{M}$  globale d'une structure constitue alors un "modèle spatial" de celle-ci [Ewi00].

Des blocages numériques apparaissent toutefois dans la modélisation de structures si une formulation en déplacement est adoptée. Des stratégies doivent donc être développées pour lever ces blocages. Un élément fini, basé sur des formulations mixtes, a donc été développé dans ce sens dans la référence [Lem00] en vue de modélisations en statique linéaire et non-linéaire géométrique, et nous l'adaptions ici à notre problème. Toutefois, avant de passer à sa description, nous présentons l'élément fini hexaèdre de base et les phénomènes de blocages afin d'introduire les notions nécessaires.

### 2.2.1 Phénomènes de blocages numériques - Éléments H8 et H8WT

#### 2.2.1.1 Éléments H8

L'élément H8 est un élément linéaire de volume, hexaédrique à huit noeuds. Il est basé sur une formulation en déplacement. Pour former les matrices élémentaires de ces éléments, l'élément de référence de volume  $V^{(r)}$ , décrit dans un espace  $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  ( $\xi, \eta$  et  $\zeta$  sont les coordonnées dans l'espace paramétrique), est associé à chaque élément réel de volume  $V^{(e)}$  dans l'espace réel  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  par la transformation  $\tau^e$  telle que :

$$\tau^e : \xi \rightarrow \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi) \quad (2.3)$$

Pour cet élément la transformation géométrique est linéaire par rapport aux coordonnées  $\mathbf{x}_n$

$$\tau^e : \xi \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{N}_i(\xi) \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{x} \quad (2.4)$$

avec la matrice d'interpolation

$$\mathbf{N} = [ \mathbf{N}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_8 ] \quad \text{où} \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

et les fonctions d'interpolations

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \left( \frac{1 \pm \xi}{2} \right) \left( \frac{1 \pm \eta}{2} \right) \left( \frac{1 \pm \zeta}{2} \right) \quad (2.6)$$

Dans cette expression, les fonctions  $N_i$  sont des polynômes en  $\xi$ , identiques pour les trois coordonnées, et sont appelées fonctions de transformation géométriques. La transformation  $\tau^e$  peut être interprétée comme un changement de variable permettant de passer de la base paramétrique à la base réelle. L'exemple de l'élément H8 est présenté sur la figure 2.1 .

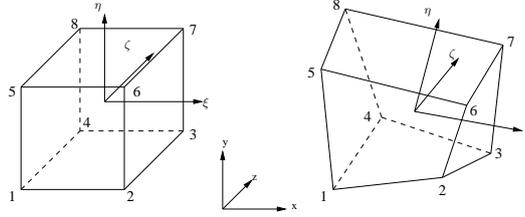


FIG. 2.1 – Éléments de référence et réel H8

Cet élément étant de nature isoparamétrique, l'interpolation de la cinématique est identique à celle de la géométrie. Sur l'élément de référence  $u(\xi) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{u}$  avec le vecteur des degrés de libertés (ddl)  $\mathbf{u} = [ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8 ]^T$ . Pour exprimer le vecteur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  de cet élément dans l'espace réel, nous introduisons la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  de la transformation géométrique<sup>1</sup>

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{telle que} \quad \text{grad}_\xi(\bullet) = \mathbf{J} \cdot \text{grad}_x(\bullet) \quad (2.11)$$

Cette transformation doit être bijective, ce qui est assuré si la matrice de la transformation n'est pas

<sup>1</sup>Une autre propriété importante de cette transformation concerne l'intégration du volume élémentaire :

$$\int_{V^e} f(\mathbf{x}) dx dy dz = \int_{V^r} f(x(\xi)) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.7)$$

car

$$V_R = d\vec{\xi} \cdot (d\vec{\eta} \wedge d\vec{\zeta}) = \det([ d\vec{\xi} \quad d\vec{\eta} \quad d\vec{\zeta} ]) \quad (2.8)$$

et

$$V_0 = d\vec{x} \cdot (d\vec{y} \wedge d\vec{z}) = \det([ d\vec{x} \quad d\vec{y} \quad d\vec{z} ]) = \det(\mathbf{J} [ d\vec{\xi} \quad d\vec{\eta} \quad d\vec{\zeta} ]) \quad (2.9)$$

donc

$$V_0 = \det(\mathbf{J}) \cdot \det([ d\vec{\xi} \quad d\vec{\eta} \quad d\vec{\zeta} ]) = \det(\mathbf{J}) V_R \quad (2.10)$$

singulière (la singularité intervient lorsque ce déterminant s'annule ou devient négatif). Ainsi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{j}_3 \cdot \mathbf{B}_\xi \cdot \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\xi^1 & \mathbf{B}_\xi^2 & \cdots & \mathbf{B}_\xi^8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\xi^i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,\xi}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,\xi}^i \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

avec  $\mathbf{N}_{,\xi}^{iT} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \xi} & \frac{\partial N^i}{\partial \eta} & \frac{\partial N^i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$ . Enfin, pour obtenir le vecteur des déformations cohérent avec l'organisation proposée par la formule 1.28, nous introduisons une matrice de réorganisation  $\mathbf{P}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{j}_3 \cdot \mathbf{B}_\xi \quad (2.15)$$

Suivant la méthode de Galerkin,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u}$  et le PTV (équation 1.60) appliqué à l'élément fini nous donne

$$\delta W^{(e)} = \delta \mathbf{u}^T \left( \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u} - \omega^2 \delta \mathbf{u}^T \left( \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \int_{S_f^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_S dS \quad (2.16)$$

ou

$$\delta W^{(e)} = \delta \mathbf{u}^T \left( \mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M}^{(e)} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F}^{(e)} \right) \quad (2.17)$$

Dans ces expressions, les matrices  $\mathbf{K}^{(e)}$  et  $\mathbf{M}^{(e)}$  de raideur et de masse élémentaires sont obtenues par intégration numérique :

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV \simeq \sum^{NPI} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \omega_g \det(\mathbf{J}) dV \quad (2.18)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \simeq \sum^{NPI} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \omega_g \det(\mathbf{J}) dV \quad (2.19)$$

avec  $NPI$  le nombre de points d'intégration, et  $\omega_g$  les poids de ces points. Pour l'élément H8, une méthode de Gauss [DT86] à  $2 \times 2 \times 2$  points est utilisée.

Compte tenu des relations de comportements proposées dans le chapitre précédent, la matrice de raideur sera donc complexe et dépendante de la fréquence. De plus, il est important de constater

qu'une décomposition simple de cette matrice est obtenue lorsque la relation de comportement est une combinaison linéaire des caractéristiques. Ainsi, avec une relation de comportement isotrope exprimée à partir de  $K$  et  $G$  par exemple, nous avons

$$\mathbf{K}^{(e)} = K\mathbf{K}_K + G\mathbf{K}_G = \Re[K](1 + j\eta_K)\mathbf{K}_K + \Re[G](1 + j\eta_G)\mathbf{K}_G \quad (2.20)$$

Enfin, on peut noter que ces matrices sont symétriques par construction et que  $\mathbf{K}^{(e)}$  est semi-définie positive et  $\mathbf{M}^{(e)}$  est définie positive.

### 2.2.1.2 Phénomènes de blocages

La solution éléments finis obtenue ne converge que si le maillage est suffisamment fin. Or, pour des modélisations de structures de type plaques ou coques, nous souhaitons nous limiter à un seul élément dans l'épaisseur, ce qui est *a-priori* suffisant puisque l'élément linéaire H8 reste cohérent avec l'hypothèse des sections droites, usuelle dans ce type de structures. Cependant, des phénomènes de blocages numériques peuvent apparaître dans ce cas [Sze02] :

- Blocage en contrainte plane, également appelé blocage en épaisseur ou blocage de Poisson : il résulte de la difficulté d'obtenir une contrainte nulle suivant l'épaisseur pour une structure sollicitée en flexion pure. Avec un seul élément dans l'épaisseur, la solution converge vers un état de déformation nulle suivant l'épaisseur. L'élément est alors plus raide avec un écart à la solution exacte de  $1 - \nu^2$  [Fel03, chap. 17, p. 17] pour un milieu isotropes. Ce phénomène est illustré pour une poutre plane modélisé par des éléments bidimensionnels en contraintes planes en annexe B.1.2. Ce blocage n'apparaît pas dans les éléments finis de plaques et coques du fait de l'introduction de l'hypothèse de contraintes planes dans la relation de comportement.
- Blocage en cisaillement transverse : il apparaît dans le cas d'une structure mince sollicitée en flexion avec un seul élément dans l'épaisseur et provient des termes de cisaillement qui sont dominants (et non de flexion). Cela rend la structure plus raide, et ralentit la convergence. Ce phénomène est illustré pour une poutre plane avec des éléments bidimensionnels en contraintes planes en annexe B.1.1. Ce blocage apparaît également dans les éléments finis de plaques et coques.
- Blocage en courbure : ce blocage apparaît dans des structures courbes par une combinaison des termes liés aux effets de membrane et de flexion dans la matrice de raideur. Ce problème disparaît pour un maillage fin, il provoque donc un ralentissement de la convergence.

### 2.2.1.3 Élément H8WT

L'élément H8WT, proposé notamment par Wilson et Taylor, est un élément hexaédrique linéaire à huit noeuds enrichi par des modes incompatibles [Wil02, Bat96, BD90]. Cet enrichissement permet de lever le blocage en contraintes planes, et réduit bien le blocage en cisaillement transverse, sans toutefois être optimum sur cet aspect. Cette stratégie fonctionne dans le cadre d'une méthode EAS et correspond à une formulation mixte (section 1.7.2.1)[YL96]. Cette stratégie est différente de celle proposée dans l'élément mixte H8PS dans lequel le champ des contraintes est interpolé [PT86]. Nous avons d'ailleurs pu constater lors de nos expérimentations numériques que l'élément H8PS ne permet pas de lever les blocages numériques de l'élément H8, alors que la stratégie proposée dans cet élément s'avère tout aussi efficace que celle de l'élément enrichi WT dans le cadre des quadrilatères en contraintes planes.

Les modes incompatibles sont introduits dans l'élément H8WT par l'ajout de ddl supplémentaires. Dans ce cas, le déplacement continu est approximé de la manière suivante

$$u = [ \mathbf{N}_u \quad \mathbf{N}_\alpha ] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

avec les ddl classiques  $\mathbf{u}$  de l'élément H8, et des ddl  $\boldsymbol{\alpha} = [ \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_9 ]^T$ , spécifiques à l'élément H8WT. Les fonctions d'interpolation associées sont :

$$\mathbf{N}_\alpha = [ \mathbf{N}_{\alpha 1} \quad \mathbf{N}_{\alpha 2} \quad \mathbf{N}_{\alpha 3} ] \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_{\alpha i} = \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & P_i & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

où  $P_1 = 1 - \xi^2$ ,  $P_2 = 1 - \eta^2$  et  $P_3 = 1 - \zeta^2$ . La matrice de déformation peut alors être mise sous la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{u} + \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\alpha} \quad (2.23)$$

et le travail virtuel interne au niveau élémentaire,  $\delta W_{\text{int}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} dV$  s'écrit

$$\delta W_{\text{int}} = [ \delta \mathbf{u}^T \quad \delta \boldsymbol{\alpha}^T ] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{\alpha u}^T \\ \mathbf{K}_{\alpha u} & \mathbf{K}_{\alpha \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u dV \\ \mathbf{K}_{\alpha u} &= \int_V \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u dV \\ \mathbf{K}_{\alpha \alpha} &= \int_V \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{A} \mathbf{B}_\alpha dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

N'ayant pas d'énergie externe associée aux ddl internes  $\boldsymbol{\alpha}$ , nous avons d'après le second système d'équations de 2.24

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{K}_{\alpha u} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\alpha \alpha} \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (2.26)$$

ce qui permet d'exprimer les ddl internes

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{K}_{\alpha \alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \mathbf{u} \quad (2.27)$$

et de retrouver une raideur fonction des ddl de type déplacement :  $\delta W = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$  avec

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{\alpha u}^T \mathbf{K}_{\alpha \alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \quad (2.28)$$

Cette façon de procéder pour revenir à une forme en fonction des ddl en déplacement est appelée "condensation statique".

Remarque 1 : En assurant

$$\int_V \mathbf{B}_\alpha dV = 0 \quad (2.29)$$

en accord avec la méthode EAS, l'élément représentera correctement l'état de déformation constante. Pour cela, nous adoptons une méthode proposée dans [Bat96, Wil02] qui consiste à remplacer le terme  $\mathbf{B}_\alpha$  par  $\mathbf{B}_\alpha - \frac{1}{V} \int_V \mathbf{B}_\alpha dV$ .

Remarque 2 : Les éléments H8 et H8WT sont normalement intégrés numériquement avec une méthode de Gauss en 8 points pour avoir une intégration exacte en l'absence de distorsion de l'élément. Mais une intégration réduite ou sélective permet de limiter le blocage en cisaillement transverse qui ralentit la convergence : en intégrant sur 4 points les composantes de la matrice de raideur liées au cisaillement transverse celle-ci est rendue plus "souple".

## 2.2.2 Éléments finis adaptés aux structures minces

Pour lever les problèmes de blocages numériques, nous avons vu qu'une solution est apportée par des éléments enrichis ou obtenus à partir de formulations mixtes. Nous présentons ci-après l'élément H8coque et Q4  $\gamma_{24}$  qui sont bien adaptés à la modélisation des structures minces de type coque. Ce dernier est d'ailleurs considéré comme l'un des meilleurs éléments disponible actuellement pour ce type de structures [BD90, tome2]. Au préalable, il convient toutefois d'introduire un facteur de correction de cisaillement transverse pour corriger les erreurs introduites par l'interpolation linéaire dans le sens transverse.

### 2.2.2.1 Facteur de correction du cisaillement transverse

Lors de la modélisation de structure mince avec des éléments volumiques, l'utilisation d'un seul élément dans l'épaisseur conduit à une interpolation linéaire du champ de déplacement dans cette direction, ce qui impose un champ de déformation transverse constant. Or ce choix ne permet pas de respecter la solution donnée par la mécanique des milieux continus qui conduit à un champ de forme parabolique. Afin de corriger cette erreur, un facteur de correction de cisaillement transverse  $k$  peut être introduit dans la relation de comportement. Dans le cas isotrope 1.35, nous avons :

$$\mathbf{A} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Pour un matériau homogène, Mindlin a trouvé qu'il pouvait varier de 0,76 pour  $\nu = 0$  à 0,91 pour  $\nu = 0,5$ . Dans le cas d'une plaque sollicitée en flexion pure, l'équivalence entre l'énergie de déformation fournie par le modèle théorique (MMC) et celle du modèle utilisé conduit au facteur  $5/6 \simeq 0,83$  [BD90, tome2]. Une autre approche, qui se base sur des considérations dynamiques (la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement), a permis de trouver les coefficients 0,86 pour  $\nu = 0,3$  et  $\pi^2/12 \simeq 0,82$  pour  $\nu = 0,176$ . Toutefois, compte tenu des résultats de convergence que nous obtenons, nous choisissons  $k = 5/6$  dans tous les cas.

### 2.2.2.2 Éléments H8coque

L'élément H8coque a été développé initialement dans [Lem00]. Il s'agit d'un élément 3D spécifique dédié à l'étude des coques, par l'introduction des concepts liés à ces structures comme la notion de plan moyen, de repère tangent et de normales à ce plan (cf. figure 2.2). Il permet ainsi la modélisation de structures de type plaque/coque sans présenter de blocages numériques par le choix de formulations adaptées. En particulier, cet élément permet de lever le blocage en contraintes planes en suivant une démarche similaire à celle de l'élément H8WT (méthode EAS, section 1.7.2.1) et lève totalement le blocage en cisaillement transverse suivant la démarche utilisée dans les éléments de type MITC ou Qx  $\gamma$  (méthode ANS, section 1.7.2.2).

Ainsi, selon l'usage dans les éléments de coques, les contributions des effets de membrane et de cisaillement transverse sont dissociés dans la fonctionnelle pour s'écrire

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_m + \delta W_s = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{H}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dV + \int_V \delta \boldsymbol{\gamma}_s^T k G \boldsymbol{\gamma}_s dV \quad (2.31)$$

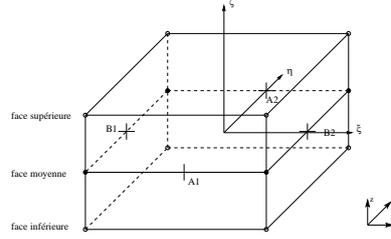


FIG. 2.2 – Élément H8coque

ou encore

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_s) \mathbf{u} \quad (2.32)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & kGI \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

et les vecteurs de déformations de membrane  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^T = [ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} ]$  et transverses  $\boldsymbol{\gamma}_s^T = [ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} ]$ . D'autre part, deux systèmes de coordonnées sont introduits en plus du système cartésien global  $(x,y,z)$  pour décrire cet élément :

– le système de coordonnées covariant  $\mathbf{F}$  défini par les coordonnées paramétriques  $\mathbf{F} = [ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 ]$

avec  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_{,\xi}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_{,\eta}$  et  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{x}_{,\zeta}$ , ou encore  $\mathbf{a}_1^T = \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]$ ,  $\mathbf{a}_2^T = \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]$

et  $\mathbf{a}_3^T = \left[ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]$ .

– le système de coordonnées local  $\mathbf{Q}$  pour définir les directions dans le plan et transverses  $\mathbf{Q} = [ \mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{n} ]$  où  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$  et  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  sont orthonormaux à  $\mathbf{n}$ .

Ayant introduit la notion de direction épaisseur, il n'est plus nécessaire d'enrichir la base d'interpolation de l'élément suivant toutes les directions comme dans l'élément H8WT pour lever le blocage en contraintes planes. Ainsi, seule l'interpolation de la déformation de membrane  $\varepsilon_{\zeta\zeta}$  est enrichie avec un degré de liberté supplémentaire  $\alpha$ , défini au niveau de l'élément de sorte que

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \zeta} + \zeta \cdot \alpha \quad (2.34)$$

Ce choix étant lié à la notion de surface moyenne, avec une épaisseur égale de part et d'autre de cette surface, la contrainte sur l'énergie (nulle) produite par cette variable est vérifiée implicitement.

D'autre part, le blocage en cisaillement transverse est résolu en utilisant une interpolation indépendante du champ de cisaillement transverse dans la base covariante, suivant la méthode ANS (*Assumed Natural Strain*) :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \gamma_{\xi\zeta}^{A_1} + \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \gamma_{\xi\zeta}^{A_2} \\ \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \gamma_{\eta\zeta}^{B_1} + \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \gamma_{\eta\zeta}^{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1-\eta}{2} \right) v_{\xi\zeta}^{A_1} + \left( \frac{1+\eta}{2} \right) v_{\xi\zeta}^{A_2} \\ \left( \frac{1-\xi}{2} \right) v_{\eta\zeta}^{B_1} + \left( \frac{1+\xi}{2} \right) v_{\eta\zeta}^{B_2} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.35)$$

où  $v_{\xi\zeta}^{A_i} = \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_i)^T \cdot \mathbf{N}_{,\zeta}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{a}_3(\mathbf{x}_i)^T \cdot \mathbf{N}_{,\xi}(\mathbf{x}_i)$ , et  $v_{\eta\zeta}^{B_i} = \mathbf{a}_2(\mathbf{x}_i)^T \cdot \mathbf{N}_{,\zeta}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{a}_3(\mathbf{x}_i)^T \cdot \mathbf{N}_{,\eta}(\mathbf{x}_i)$  sont les matrices pour l'expression des cisaillements évalués aux points  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  situés au milieu des faces de l'élément de référence comme indiqué sur la figure 2.3<sup>2</sup>. Ces champs de cisaillements doivent ensuite être exprimés dans le système de coordonnées local en utilisant les expressions des systèmes de coordonnées  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{F}$ .

<sup>2</sup>  $\mathbf{N}_{,\zeta} = [ N_{1,\zeta} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad N_{2,\zeta} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \cdots \quad N_{8,\zeta} \mathbf{I}_{3 \times 3} ]$  et  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{N}_{,\zeta} \mathbf{X}$  avec  $\mathbf{X}^T = [ x_1 \quad y_1 \quad \cdots \quad z_8 ]$

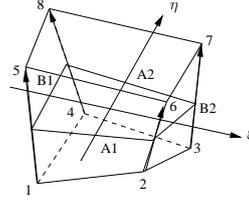


FIG. 2.3 – Projection du cisaillement transverse

Le changement de base permettant de passer du repère covariant au repère local est donné par  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\xi \mathbf{C}$  avec :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^1 \mathbf{t}_2 & \mathbf{a}^1 \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_2 & \mathbf{a}^2 \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{a}^3 \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^3 \mathbf{t}_2 & \mathbf{a}^3 \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

car le vecteur  $\mathbf{a}^3$  est normal aux vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ , il est donc colinéaire à  $\mathbf{n}$ . Mais la réorganisation de la matrice de déformation en vecteur implique une écriture de la forme  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}_\xi$  avec

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{21}^2 & 0 & C_{11}C_{21} & 0 & 0 \\ C_{12}^2 & C_{22}^2 & 0 & C_{12}C_{22} & 0 & 0 \\ C_{13}^2 & C_{23}^2 & C_{33}^2 & C_{13}C_{23} & C_{13}C_{33} & C_{23}C_{33} \\ 2C_{11}C_{12} & 2C_{21}C_{22} & 0 & C_{11}C_{22} + C_{21}C_{12} & 0 & 0 \\ 2C_{11}C_{13} & 2C_{21}C_{23} & 0 & C_{11}C_{23} + C_{21}C_{13} & C_{11}C_{33} & C_{21}C_{33} \\ 2C_{12}C_{13} & 2C_{22}C_{23} & 0 & C_{12}C_{23} + C_{22}C_{13} & C_{12}C_{33} & C_{22}C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

et les déformations covariantes  $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$  :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \zeta \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{u}_{,\xi} \\ \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{u}_{,\eta} \\ \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{u}_{,\zeta} + \zeta \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{N}_{,\xi} & 0 \\ \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{N}_{,\eta} & 0 \\ \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{N}_{,\zeta} & \zeta \\ \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{N}_{,\xi} + \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{N}_{,\eta} & 0 \\ \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{N}_{,\xi} + \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{N}_{,\zeta} & 0 \\ \mathbf{a}_3^T \cdot \mathbf{N}_{,\eta} + \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{N}_{,\zeta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \zeta \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{m\xi} \mathbf{u} + \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\alpha} \quad (2.38)$$

de sorte que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{C}_m \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

et<sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\gamma}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_s = C_{33}^0 \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{21}^0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{1-\eta}{2} \right) v_{\xi\zeta}^{A_1} + \left( \frac{1+\eta}{2} \right) v_{\xi\zeta}^{A_2} \\ \left( \frac{1-\xi}{2} \right) v_{\eta\zeta}^{B_1} + \left( \frac{1+\xi}{2} \right) v_{\eta\zeta}^{B_2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Enfin, le blocage en contrainte normale qui provient des discontinuités entre les normales des éléments (qui induit une combinaison des termes de raideur de flexion en  $(h/L)^3$  et en membrane en

<sup>3</sup>Dans cette dernière expression, la notation  $C_{ij}^0$  indique que les termes de 2.36 sont toujours évalués sur le plan neutre en  $\zeta = 0$  pour obtenir des déformations de cisaillement transverse constantes dans l'épaisseur. En outre, les termes  $C_{13}^0$  et  $C_{23}^0$  ne sont pas considérés.

$(h/L)$ ) est résolu en exprimant la déformation normale suivant les normales définies par la surface moyenne de l'élément et les normales à ses quatre noeuds (dans le cas d'un maillage très fin les normales sont alors presque identiques et ce blocage disparaît naturellement) :

$$\mathbf{B}_{mz}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_{w1}}{h(\xi, \eta)} & -\frac{\mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{w2}}{h(\xi, \eta)} & -\frac{\mathbf{n}_3^T \mathbf{N}_{w3}}{h(\xi, \eta)} & -\frac{\mathbf{n}_4^T \mathbf{N}_{w4}}{h(\xi, \eta)} & \frac{\mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_{w1}}{h(\xi, \eta)} & \frac{\mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{w2}}{h(\xi, \eta)} & \frac{\mathbf{n}_3^T \mathbf{N}_{w3}}{h(\xi, \eta)} & \frac{\mathbf{n}_4^T \mathbf{N}_{w4}}{h(\xi, \eta)} & \frac{\xi}{2} h(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

avec

$$h(\xi, \eta) = \mathbf{N}_w \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_1\| \\ \|\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_2\| \\ \|\mathbf{x}_7 - \mathbf{x}_3\| \\ \|\mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_4\| \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_1\|} & \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_2\|} \\ \mathbf{n}_3 = \frac{\mathbf{x}_7 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_7 - \mathbf{x}_3\|} & \mathbf{n}_4 = \frac{\mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_4}{\|\mathbf{x}_8 - \mathbf{x}_4\|} \end{matrix} \quad (2.42)$$

et

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right) & \left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right) & \left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right) & \left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Pour terminer, les matrices de raideurs de 2.32 sont évaluées sur 8 points de Gauss

$$\mathbf{K}_m^{(e)} \simeq \sum^{NPI} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m \omega_g \det(\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_s^{(e)} \simeq \sum^{NPI} \mathbf{B}_s^T \mathbf{A} \mathbf{B}_s \omega_g \det(\mathbf{F}) \quad (2.44)$$

et le degré de liberté additionnel de  $\mathbf{K}_m^{(e)}$  est condensé statiquement au niveau de l'élément (ce qui évite les modes additionnels) avant de former  $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_m^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$ .

On peut toutefois noter qu'il n'est plus possible de conserver la décomposition proposée par la relation 2.20 du fait de la condensation qui intervient au niveau élémentaire. Mais l'expérimentation numérique avec les caractéristiques des matériaux que nous considérons indique cependant qu'il est toujours possible d'obtenir une approximation linéaire très satisfaisante avec par exemple dans le cas isotrope

$$\mathbf{K}^{(e)} \simeq K \frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}}{\partial K} + G \frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}}{\partial G} \quad (2.45)$$

si les gradients sont évalués au voisinage des caractéristiques considérées. D'autre part, la matrice masse de cet élément est choisie identique à celle de l'élément H8, comme pour l'élément H8WT.

### 2.2.2.3 Élément Q4 $\gamma_{24}$

L'élément Q4  $\gamma_{24}$  est un élément de coque avec cisaillement transversal suivant la théorie de Reissner-Midlin. Une présentation détaillée est disponible dans la référence [BD90, pp 326-328]. Seule sa surface moyenne est décrite d'un point de vue géométrique par 4 noeuds. Cela conduit à une description de la cinématique à partir des 3 déplacements et des 3 rotations de chaque noeud. La formulation de cet élément est assez proche de l'élément H8coque puisque le blocage en cisaillement transverse est résolu en utilisant la même interpolation indépendante du champ de cisaillement transverse dans la base covariante suivant la méthode ANS, et à partir des cisaillements évalués aux points milieu des arêtes de l'élément de référence.

En revanche, le blocage en contraintes planes est levé dans cet élément par l'introduction de l'hypothèse de contrainte plane directement dans la relation de comportement. Le vecteurs des déformations de membrane est alors réduit à  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$  avec dans le cas isotrope

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} Q & Q-2G & 0 \\ Q-2G & Q & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

où  $\nu = 1 - 2\frac{G}{Q}$  et  $E = (1 - \nu^2)Q$ . Cet élément n'utilise donc pas de degré de liberté additionnel à condenser et il permet de conserver la décomposition exacte de la matrice de raideur suivant :

$$\mathbf{K}^{(e)} = Q\mathbf{K}_Q + G\mathbf{K}_G = \Re[Q](1 + j\eta_Q)\mathbf{K}_Q + \Re[G](1 + j\eta_G)\mathbf{K}_G \quad (2.47)$$

dans ce cas isotrope.

## 2.3 Modèles de réponses et méthodes d'expansions de données

Les *modèles de réponses* discrets peuvent être construits expérimentalement à partir d'un ensemble de fonctions de réponses en fréquences (FRF) mesurées en différents points de l'espace d'un solide [Ewi00]. Ils correspondent à une description du champ de réponse d'un solide pour des sollicitations localisées et unitaires. Cette section s'intéresse à l'évaluation numérique de tels modèles, à partir des modèles spatiaux discrets décrits par les matrices EF. Nous présentons tout d'abord l'évaluation directe de ces modèles puis les possibilités de construction sur bases modales, c'est-à-dire via des *modèles modaux*. La construction de ces modèles est d'abord abordée d'une manière générale. En particulier elle n'est pas dépendante d'un modèle particulier d'amortissement. Par la suite, nous développons néanmoins les modèles d'amortissement hystérétiques et visqueux dans le but d'interpréter les informations des modèles modaux construits et de donner les relations nécessaires à l'identification des caractéristiques matériaux. Des méthodes simples d'expansion dynamique des données sont ensuite présentées dans le but d'étendre les données de mesures et d'obtenir finalement des modèles numériques et expérimentaux compatibles.

### 2.3.1 Modèle de réponse par évaluation directe

Le modèle de réponse  $\mathbf{H}(\omega)$  peut être obtenu simplement par inversion de la raideur dynamique complexe  $\mathbf{Z}$  :

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{Z}^+ = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})^+ \quad (2.48)$$

Dans cette expression,  $(\bullet)^+$  dénote l'opérateur pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose [GR96, GVL96]. Dans notre cas de structures amorties, il n'est nécessaire qu'à la fréquence nulle et en l'absence de conditions aux limites permettant de bloquer les mouvements de corps rigides. Il permet dans ce cas de filtrer les mouvements de corps rigides dans la solution (*c.à.d* que celle-ci est orthogonale aux modes rigides). D'un point de vue numérique, le modèle de réponse est donc obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{M}\Phi_R \\ \Phi_R^T\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

à la fréquence nulle et avec les modes rigides  $\Phi_R$ . En dehors de ce cas particulier, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une pseudo-inversion et une inversion classique suffit :  $\mathbf{H} = \mathbf{Z}^{-1}$ . Ainsi, la solution  $\mathbf{U}$  du système

$$\mathbf{Z}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.50)$$

donne  $\mathbf{H}$  lorsque  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  c'est-à-dire pour une excitation unitaire de chaque ddl l'un après l'autre. Ainsi, si nous ne nous intéressons pas à l'ensemble des réponses de la structure mais seulement aux réponses pour un effort donné en un point, il suffit de construire un seul vecteur d'effort avec une composante non nulle.

D'autre part, des modèles de réponses peuvent être également obtenus pour des réponses de type vitesses ou accélérations.

Remarque : Les systèmes amortis présentent en général la particularité d'avoir des fréquences de résonances ayant une dépendance spatiale. Il s'agit donc d'une propriété locale, contrairement aux fréquences propres qui sont données pour l'ensemble de la structure (propriété globale). Ceci peut être illustré par un exemple simple en considérant un système à 2 ddl amorti hystérétiquement avec pour matrice de masse et de raideur complexe  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{K} = (1 + j\eta) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . On note  $\omega_{rk}$  la pulsation de résonance du mode propre  $k$ , et  $\omega_k$  la pulsation propre. La pulsation de résonance correspond à l'amplitude maximale de chaque FRF autour de la pulsation propre associée au mode  $k$ . Nous l'obtenons en cherchant la pulsation qui annule la pente de chaque FRF. La pulsation propre associée au mode  $k$  correspond quant à elle à la pulsation calculée pour le système non amorti "virtuel", ou obtenue par un test d'appropriation. Pour le système défini, la pulsation propre du premier mode est  $\omega_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Cependant, le calcul analytique (après une approximation par un développement de Taylor) permet d'obtenir les pulsations de résonance en déplacement pour chaque élément de la matrice de FRF  $\mathbf{H}^{ij}$  tels que :

- $\omega_{r1}^{11} = \omega_1 + \frac{\sqrt{5}-5}{20}\eta^2 + o(\eta^3)$  pour  $\mathbf{H}^{11}$
- $\omega_{r1}^{12} = \omega_1 + \frac{10-\sqrt{5}}{20}\eta^2 + o(\eta^3)$  pour  $\mathbf{H}^{12}$  ou  $\mathbf{H}^{21}$
- $\omega_{r1}^{22} = \omega_1 + \frac{11\sqrt{5}-25}{20}\eta^2 + o(\eta^3)$  pour  $\mathbf{H}^{22}$

Il apparaît donc pour ce système simple que les fréquences de résonance dépendent du point considéré, même si dans ce cas, les écarts peuvent être faibles. Mais il est aussi possible de vérifier cette propriété pour des modèles d'amortissement plus élaborés de la même façon. Nous avons d'ailleurs trouvé ce type d'étude dans la référence [FL98] pour un système avec amortissement visqueux. Nous allons illustrer cette constatation par la suite, tant avec les modèles numériques amortis, qu'avec les modèles expérimentaux.

## 2.3.2 Modèle de réponse sur base modale

### 2.3.2.1 Cas général

La solution d'un problème de visco-elasto-dynamique peut être recherchée sur une base modale suivant

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{x} \quad (2.51)$$

en cherchant des solutions de la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$  pour une force de la forme  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{j\omega t}$  où  $\omega \in \mathbb{R}$ . La base des modes complexes  $\mathbf{\Psi}$  est quant à elle obtenue en recherchant des solutions propres de la forme  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t}$  pour des forces nulles avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ils vérifient donc

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}^2 \\ \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\mu} \end{cases} \quad (2.52)$$

et les participations modales  $\mathbf{x}$  sont obtenues par la solution de

$$\boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}(\omega) \quad (2.53)$$

compte tenu de 2.2, d'où

$$\mathbf{x} = \left( \boldsymbol{\mu} \left( -\boldsymbol{\Lambda}^2 - \omega^2 \mathbf{I} \right) \right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}(\omega) \quad (2.54)$$

de sorte que

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi} \left( \boldsymbol{\mu} \left( -\boldsymbol{\Lambda}^2 - \omega^2 \mathbf{I} \right) \right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}(\omega) \quad (2.55)$$

Dans le cas de matrices structurales de dimensions  $N \times N$  ( $N$  DDL), il existe donc  $N$  modes propres  $\boldsymbol{\psi}_r = \Re[\boldsymbol{\psi}_r] + j\Im[\boldsymbol{\psi}_r]$  complexes regroupés dans la matrice des modes complexes  $\boldsymbol{\Psi}$  de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_r, \dots, \boldsymbol{\psi}_N] \quad (2.56)$$

Ces modes complexes doivent être interprétés par l'amplitude de chaque DDL du système, associée à un angle de phase. Dans ce cas, les noeuds de vibration ne sont plus fixes au cours du mouvement. Ce phénomène peut s'illustrer simplement en regardant l'évolution temporelle du second mode de vibration d'une poutre encastree, comme présenté sur la figure 2.4. Dans le cas d'un mode réel associé

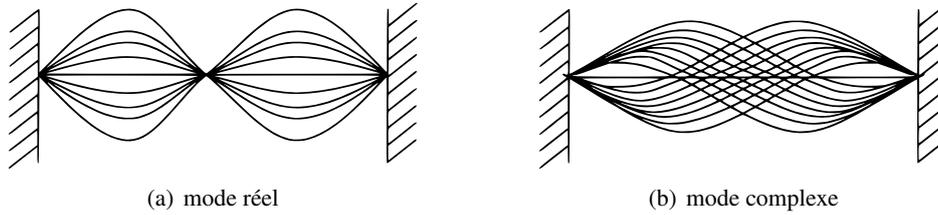


FIG. 2.4 – Évolution temporelle du second mode d'une poutre encastree

au même système sans amortissement, le noeud situé au centre reste fixe, contrairement au cas d'un mode complexe où sa position change. On associe à chaque mode un pôle  $\lambda_r = \Re[\lambda_r] + j\Im[\lambda_r]$  et la matrice des pôles complexes  $\boldsymbol{\Lambda}$  est une matrice diagonale :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

D'autre part, les matrices structurales étant symétriques, les vecteurs propres droits et gauches sont identiques<sup>4</sup> et la matrice  $\boldsymbol{\mu}$  est diagonale. Ainsi, il est possible de réécrire la solution  $\mathbf{u}$  suivant :

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\psi}_r \cdot \mathbf{x}_r = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T}{\boldsymbol{\mu}_r (-\lambda_r^2 - \omega^2)} \mathbf{f}(\omega) \quad (2.58)$$

mais en pratique, la base modale n'est jamais calculée dans son intégralité pour satisfaire un compromis entre la précision et le coût de calcul. C'est donc une base modale tronquée à  $k$  modes qui est utilisée ( $k < N$ ) :

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^k \boldsymbol{\psi}_r \cdot \mathbf{x}_r \quad (2.59)$$

en négligeant  $\sum_{r=k+1}^N \boldsymbol{\psi}_r \cdot \mathbf{x}_r$ . Si nécessaire, il est cependant possible d'améliorer l'approximation obtenue par des termes complémentaires suivant la méthode des accélérations modales généralisées [Rix01].

Dans un cadre viscoélastique général, la matrice de raideur est complexe et dépend de la fréquence via les caractéristiques matériaux. Les modes complexes associés doivent donc être évalués en prenant

<sup>4</sup>Les vecteurs propres droits et gauches sont identiques puisque les matrices structurales  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques par construction.

en compte cette dépendance en fréquence. Pour résoudre ce problème de vibration non linéaire, il est possible d'appliquer une méthode itérative de Newton-Raphson avec pour solution initiale les solutions propres du système réel défini par la statique. Dans ce cas, les  $k$  premières solutions propres du système réel peuvent être obtenues efficacement par des méthodes dites de sous-espaces, comme la méthode des itérations inverses ou la méthode de Lanczos (cette dernière pouvant être vue comme une variante des itérations inverses). Alors que la méthode des itérations inverses itère sur l'ensemble des vecteurs orthogonaux, la méthode de Lanczos utilise l'ensemble des itérés successifs obtenus par itérations inverses pour approcher l'espace des vecteurs recherchés de manière globale. Cherchant ensuite la  $j$ -ème solution propre et considérant la matrice de raideur dynamique, il est possible de former le résidu  $\mathbf{R}_1$  tel que

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}(\lambda_j)\boldsymbol{\psi}_j + \lambda_j^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{Z}(\lambda_j).\boldsymbol{\psi}_j \quad (2.60)$$

dont le calcul de la variation donne

$$\Delta\mathbf{R}_1 = \frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial\lambda_j^2}\Delta\lambda_j^2 + \frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial\boldsymbol{\psi}_j}\Delta\boldsymbol{\psi}_j \quad (2.61)$$

ou

$$\Delta\mathbf{R}_1 = \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\lambda_j^2} + \mathbf{M} \right) \boldsymbol{\psi}_j \right] \Delta\lambda_j^2 + \mathbf{Z}.\Delta\boldsymbol{\psi}_j \quad (2.62)$$

De plus, la condition de normalisation et d'orthogonalisation des modes permet de former un second résidu  $\mathbf{R}_2$  tel que

$$\mathbf{R}_2 = \boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_j - \mu_j \quad (2.63)$$

dont la variation est donnée par

$$\Delta\mathbf{R}_2 = 2\boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M}\Delta\boldsymbol{\psi}_j \quad (2.64)$$

La méthode de Newton-Raphson permet alors d'actualiser les modes et pôles du système non linéaire jusqu'à leur convergence en résolvant le système suivant

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial\boldsymbol{\psi}} & \frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial\lambda_j^2} \\ \frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial\boldsymbol{\psi}} & \frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial\lambda_j^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\psi}_j \\ \Delta\lambda_j^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

que nous écrivons

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \left( \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\lambda_j} + \mathbf{M} \right) \boldsymbol{\psi}_j \\ 2\boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\psi}_j \\ \Delta\lambda_j^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\boldsymbol{\psi}_j \\ \boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_j - \mu_j \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Mais en pratique nous modifions légèrement le système précédent pour retrouver un système à résoudre symétrique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\lambda_j) & \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_j \\ \boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\psi}_j \\ \Delta\lambda_j^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\boldsymbol{\psi}_j \\ \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\psi}_j^T\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_j - \mu_j \right) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Il faut toutefois noter que ce système ne sera pas singulier s'il est formé en fonction de la multiplicité du pôle  $\lambda_j$ . Il aura donc  $N+1$  équations pour un pôle unique et  $N+m$  équations pour  $m$  pôles identiques,

### 2.3.2.2 Modèle hystérétique

Pour un modèle d'amortissement hystérétique, il est possible de développer et d'interpréter les informations du modèle modal précédent. En effet, la matrice de raideur ne dépend pas de la fréquence et peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_R + j\mathbf{K}_I \quad (2.68)$$

et l'équation générale du mouvement s'écrit

$$((\mathbf{K}_R + j\mathbf{K}_I) - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.69)$$

Ainsi nous avons pour le mode  $r$

$$(\mathbf{K}_R + j\mathbf{K}_I) \boldsymbol{\psi}_r + \lambda_r^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

d'où

$$\lambda_r^2 = - \frac{\boldsymbol{\psi}_r^T (\mathbf{K}_R + j\mathbf{K}_I) \boldsymbol{\psi}_r}{\boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_r} \quad (2.71)$$

Les matrices de masse et raideur étant symétriques, les vecteurs propres droit et gauche sont identiques et ils permettent de les diagonaliser :

$$\boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{K}_R + j\mathbf{K}_I) \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & k_r(1 + j\eta_r) & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & \mu_r & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

de sorte que

$$\lambda_r^2 = - \frac{(1 + j\eta_r)k_r}{\mu_r} = -\omega_r^2(1 + j\eta_r) \quad (2.74)$$

où  $\omega_r$  est la fréquence propre du mode  $r$  et  $\eta_r$  son facteur d'amortissement modal hystérétique. Ainsi, le modèle de réponse s'écrit :

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T}{\mu_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2)} \quad (2.75)$$

D'autre part, lorsque la matrice de rigidité du système peut se décomposer linéairement dans les paramètres matériaux suivant

$$\mathbf{K}_I = \Re[K] \cdot \eta_K \cdot \mathbf{K}_K + \Re[G] \cdot \eta_G \cdot \mathbf{K}_G \quad (2.76)$$

il est possible d'estimer l'amortissement modal  $\eta_r$ . En effet :

$$\boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{K}_I \boldsymbol{\psi}_r = \boldsymbol{\psi}_r^T (\Re[K] \cdot \eta_K \cdot \mathbf{K}_K + \Re[G] \cdot \eta_G \cdot \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\psi}_r \quad (2.77)$$

ou

$$\eta_r \cdot k_r = \eta_K \cdot \boldsymbol{\psi}_r^T (\Re[K] \cdot \mathbf{K}_K) \boldsymbol{\psi}_r + \eta_G \cdot \boldsymbol{\psi}_r^T (\Re[G] \cdot \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\psi}_r \quad (2.78)$$

et ainsi l'amortissement modal est donné en fonction des proportions d'énergies mises en jeu par chacun de ces paramètres dans les modes propres :

$$\eta_r = \eta_K \frac{\boldsymbol{\Psi}_r^T (\Re[K] \cdot \mathbf{K}_K) \boldsymbol{\Psi}_r}{\boldsymbol{\Psi}_r^T \mathbf{K}_R \boldsymbol{\Psi}_r} + \eta_G \frac{\boldsymbol{\Psi}_r^T (\Re[G] \cdot \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\Psi}_r}{\boldsymbol{\Psi}_r^T \mathbf{K}_R \boldsymbol{\Psi}_r} \quad (2.79)$$

Une autre situation d'intérêt concerne les structures composées de 2 couches, dont l'une est élastique et l'autre viscoélastique, avec pour seul paramètre complexe le module de cisaillement. Ainsi

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}_R^{(2)} + j\Re[G] \cdot \eta_G \cdot \mathbf{K}_G^{(2)} \quad (2.80)$$

et

$$\eta_r = \eta_G \frac{\boldsymbol{\Psi}_r^T (\Re[G] \cdot \mathbf{K}_G^{(2)}) \boldsymbol{\Psi}_r}{\boldsymbol{\Psi}_r^T (\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}_R^{(2)}) \boldsymbol{\Psi}_r} \quad (2.81)$$

Enfin, une situation numériquement simple se produit lorsque  $\eta_K = \eta_G = \eta$  dans une structure (ce qui correspond à une situation dite d'amortissement proportionnel) puisque

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_R (1 + j\eta) \quad (2.82)$$

et les solutions propres, réelles, du système

$$\begin{cases} \mathbf{K}_R \boldsymbol{\phi} = -\mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \Lambda^2 \\ \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\mu} \end{cases} \quad (2.83)$$

permettent de diagonaliser également  $\mathbf{K}_I$  avec  $\boldsymbol{\phi}$  les modes propres réels. Ainsi  $\eta_r = \eta$  et

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T}{\boldsymbol{\mu}_r (\omega_r^2 - \omega^2 + j \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2)} \quad (2.84)$$

Physiquement, cette situation est cohérente avec un choix de module de Young complexe pour un coefficient de Poisson réel.

**Remarque 1 :** La méthode *Modal Strain Energy* ou MSE est une méthode dédiée à l'étude de l'amortissement de ces structures viscoélastiques composites. Son intérêt réside dans le coût de calcul faible, car elle évite la formation de matrices complexes. Le principe est de considérer que, pour un mode donné, le rapport précédent 2.81 peut être approximé par

$$\eta_r = \eta_G \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T (\Re[G] \cdot \mathbf{K}_G^{(2)}) \boldsymbol{\phi}_r}{\boldsymbol{\phi}_r^T (\mathbf{K}^{(1)} + \Re[G] \cdot \mathbf{K}_G^{(2)}) \boldsymbol{\phi}_r} \quad (2.85)$$

en faisant l'hypothèse que le matériau viscoélastique a une raideur uniquement en cisaillement, et que les modes réels sont obtenus par solution du problème réel (les matrices de raideur sont supposées réelles). Cette méthode est valable pour des structures faiblement amorties, puisqu'elle considère que les modes sont réels. De plus, on suppose que les matrices sont constantes, or les matériaux viscoélastiques présentent une forte dépendance avec la fréquence. Il existe donc une variante itérative de cette méthode qui permet de calculer une matrice de raideur dépendant de la fréquence [TA00].

### 2.3.2.3 Modèle visqueux

Nous nous intéressons maintenant au modèle avec amortissement visqueux dans le cas général. La matrice de raideur peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_R + j\omega\mathbf{K}_C \quad (2.86)$$

et l'équation du mouvement propre s'écrit

$$(\lambda_r^2\mathbf{M} + \lambda_r\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_R)\boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

ce qui permet d'exprimer l'équation vérifiée par les pôles du système

$$\mu_r\lambda_r^2 + c_r\lambda_r + k_r = 0 \quad (2.88)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_r &= \boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_r \\ c_r &= \boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{K}_C \boldsymbol{\psi}_r \\ k_r &= \boldsymbol{\psi}_r^T \mathbf{K}_R \boldsymbol{\psi}_r \end{aligned}$$

d'où

$$\{\lambda_r, \lambda_r^*\} = -\frac{c_r}{2\mu_r} \pm \frac{\sqrt{c_r^2 - 4k_r\mu_r}}{2\mu_r} \quad (2.89)$$

ou

$$\{\lambda_r, \lambda_r^*\} = -\zeta_r\omega_r \pm j\omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (2.90)$$

en posant

$$\zeta_r\omega_r = \frac{c_r}{2\mu_r} \quad \text{et} \quad \omega_r^2 = \frac{k_r}{\mu_r} = |\lambda_r|^2 \quad (2.91)$$

avec  $\zeta_r$  le facteur d'amortissement modal visqueux.

D'autre part, le développement de l'expression suivante :

$$(\lambda_r^{*2}\mathbf{M} + \lambda_r^*\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_R)\boldsymbol{\psi}_r^* = \mathbf{0} \quad (2.92)$$

conduit aux mêmes équations que 2.87, ce qui indique qu'il existe toujours 2N solutions propres. La matrice des FRF peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{\boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T}{a_r(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\boldsymbol{\psi}_r^* \boldsymbol{\psi}_r^H}{a_r^*(j\omega - \lambda_r^*)} \right) \\ &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{\boldsymbol{\psi}_r \boldsymbol{\psi}_r^T}{a_r(\omega_r\zeta_r + j(\omega - \omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2}))} + \frac{\boldsymbol{\psi}_r^* \boldsymbol{\psi}_r^H}{a_r^*(\omega_r\zeta_r + j(\omega + \omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2}))} \right) \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{j\omega({}_r\mathbf{A} + {}_r\mathbf{A}^*) - ({}_r\mathbf{A}\lambda_r^* + {}_r\mathbf{A}^*\lambda_r)}{\lambda_r\lambda_r^* - \omega^2 - j\omega(\lambda_r + \lambda_r^*)} \end{aligned}$$

avec  $a_r = \mu_r(\lambda_r - \lambda_r^*)$  et  ${}_r\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\psi}_r^* \boldsymbol{\psi}_r^H}{a_r}$ . Comme :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_r\lambda_r^* &= \omega_r^2 \\ \lambda_r + \lambda_r^* &= 2\text{Re}\lambda_r = -2\zeta_r\omega_r \\ {}_r\mathbf{A}\lambda_r^* + {}_r\mathbf{A}^*\lambda_r &= 2\Re[{}_r\mathbf{A}]\Re[\lambda_r] + 2\Im[{}_r\mathbf{A}]\Im[\lambda_r] = -2(\zeta_r\omega_r)\Re[{}_r\mathbf{A}] + 2(\omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2})\Im[{}_r\mathbf{A}] \\ {}_r\mathbf{A} + {}_r\mathbf{A}^* &= 2\text{Re}({}_r\mathbf{A}) \end{aligned} \right. \quad (2.93)$$

nous avons finalement :

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N 2 \frac{(-\zeta_r \omega_r + j\omega) \Re[\mathbf{r}\mathbf{A}] + (\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \Im[\mathbf{r}\mathbf{A}])}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega} \quad (2.94)$$

Cette forme permet de remarquer que le numérateur de  $\mathbf{H}$  dépend de la fréquence pour ce modèle d'amortissement. La fonction de réponse impulsionnelle (IRF)  $\mathbf{h}(t)$ , obtenue par transformée de Fourier inverse de la forme précédente est toutefois plus explicite avec pour un élément  $h_{ik}(t)$  de  $\mathbf{h}(t)$  :

$$h_{ik}(t) = \sum_{r=1}^N |2_r A_{ik}| e^{-\zeta_r \omega_r t} \cos\left(\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} t + \varphi_{ik}\right) \quad (2.95)$$

Remarque 1 : Pour des raisons de simplification de calculs, les modèles d'amortissement sont souvent de type proportionnel, avec une matrice d'amortissement formée par une combinaison linéaire des matrices de raideur et de masse. Cette propriété évite le calcul et l'assemblage d'une matrice d'amortissement et donne des propriétés particulières au cas général présenté ci-avant. Les modes propres du système non amorti  $\Phi$  permettent de diagonaliser les matrices structurales et

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{\mu_r ((\omega_r^2 - \omega^2) + 2j\omega \omega_r \zeta_r)} \quad (2.96)$$

Par définition, la matrice d'amortissement visqueux proportionnel est de la forme

$$\mathbf{K}_C = \beta \mathbf{K}_R + \gamma \mathbf{M} \quad (2.97)$$

Cet amortissement est aussi appelé amortissement de Rayleigh, avec  $\beta$  et  $\gamma$  les coefficients qui le définissent. Dans ce cas, le système amorti possédera la propriété suivante :

$$\zeta_r = \frac{\beta \omega_r}{2} + \frac{\gamma}{2\omega_r} \quad (2.98)$$

Il existe une condition plus générale qui permet d'affirmer qu'un système amorti possède les mêmes modes propres qu'un système non amorti, soit :

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) \quad (2.99)$$

Toutefois, il est plus difficile d'en faire une interprétation physique.

Remarque 2 : Les tests numériques que nous avons effectués montrent que la stratégie générale que nous avons proposé précédemment (section 2.3.2.1) s'avère efficace pour évaluer les modes complexes et les FRF d'un tel système visqueux. D'autre part, la référence [Gmü97] propose une méthode sur sous-espace d'extraction directe des modes complexes spécifique à ce modèle d'amortissement. Il n'est donc pas nécessaire de former les matrices d'état, ce qui nuierait grandement à l'efficacité numérique en doublant la taille des matrices EF.

Remarque 3 : On peut remarquer en comparant les équations 2.84 et 2.96 qu'il existe une relation entre les deux types d'amortissements telle que

$$\xi_r = \frac{1}{2} \frac{\omega_r}{\omega} \eta_r \quad (2.100)$$

### 2.3.3 Méthodes d'expansion des données

Les modèles expérimentaux et numériques sont souvent différents car chacun d'entre eux a ses propres contraintes (technique de mesure, accessibilités de certaines zones, ... pour l'un, et type de maillage, convergence du modèle, ... pour l'autre par exemple). Il est alors nécessaire de réduire les modèles ou d'étendre les valeurs (mesurées ou calculées) pour pouvoir appliquer la méthode désirée. Nous sommes intéressés dans ce travail par l'expansion des données issues de mesures dynamiques. Les références et les méthodes dans ce domaine sont nombreuses (afin d'obtenir un bon compromis entre temps de calcul et qualité des résultats), mais nous nous limitons ici à une présentation de la méthode d'expansion dynamique et de la méthode SEREP (cf. [PRI98a, SRMGR03] par exemple).

**Méthode d'expansion dynamique** La méthode d'expansion dynamique est une méthode exacte si le modèle numérique l'est aussi. Elle se base sur la réécriture de l'équilibre dynamique en le partitionnant suivant les ddl retenus notés  $\mathbf{u}_R$ , et les ddl condensés notés  $\mathbf{u}_C$ . Ce système est de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{RR} & \mathbf{Z}_{CR}^T \\ \mathbf{Z}_{CR} & \mathbf{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

On a donc

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{Z}_{CC}^{-1} \mathbf{f}_C - \mathbf{Z}_{CC}^{-1} \mathbf{Z}_{CR} \mathbf{u}_R \quad (2.102)$$

d'où l'expression de l'ensemble des ddl en fonction des ddl retenus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_{CC}^{-1} \mathbf{Z}_{CR} \end{bmatrix} \mathbf{u}_R + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{CC}^{-1} \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_F \quad (2.104)$$

Cette méthode présente l'avantage d'être exacte, mais son principal inconvénient est le coût de calcul qu'elle engendre.

**Méthode d'expansion SEREP** La méthode SEREP (*System Equivalent Reduction Expansion Process*) est une autre méthode d'expansion. Se basant sur le même partitionnement des ddl, les modes propres du système élastique peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_R \\ \boldsymbol{\phi}_C \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

En cherchant une base  $\mathbf{T}_1$  telle que

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{T}_1 \quad (2.106)$$

on a la relation

$$\mathbf{u}_R = \boldsymbol{\phi}_R \mathbf{T}_1 \quad (2.107)$$

d'où

$$\mathbf{T}_1 = \boldsymbol{\phi}_R^+ \mathbf{u}_R \quad (2.108)$$

De plus, on a aussi

$$\mathbf{u}_C = \boldsymbol{\phi}_C \mathbf{T}_1 \quad (2.109)$$

soit

$$\mathbf{u}_C = \boldsymbol{\phi}_C \boldsymbol{\phi}_R^+ \mathbf{u}_R \quad (2.110)$$

ce qui conduit à la matrice d'expansion

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_R \\ \boldsymbol{\phi}_C \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_R^+ \quad (2.111)$$

A ce point, il est nécessaire de distinguer 2 situations. Tout d'abord, si le nombre de ddl retenus est inférieur au nombre de modes numériques, alors

$$\boldsymbol{\phi}_R^+ = \boldsymbol{\phi}_R^T (\boldsymbol{\phi}_R \boldsymbol{\phi}_R^T)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\phi}_C \boldsymbol{\phi}_R^+ \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Dans le cas contraire,  $\boldsymbol{\phi}_R^+ = (\boldsymbol{\phi}_R^T \boldsymbol{\phi}_R)^{-1} \boldsymbol{\phi}_R^T$  et aucune simplification de l'expression 2.111 n'est possible. De plus, le champ retenu  $\mathbf{u}_R$  après expansion ne sera pas identique au champ initial et sera lissé par cet opérateur d'expansion dans ce cas.

## 2.4 Évaluation des éléments et applications numériques

Afin de caractériser les éléments présentés, différents tests peuvent être effectués. Sauf mention contraire, tous les tests sont faits sur des modèles développés sur la plate-forme Matlab [Mat04]. Nous présentons d'abord les patch-tests qui sont les premiers tests à effectuer sur de nouveaux éléments. Nous nous intéressons ensuite aux performances des éléments sur des cas tests simples, en statique, puis en analyse modale non amorti. Nous finissons cette section par la présentation de quelques applications en dynamique utiles pour la suite de ce travail.

### 2.4.1 Patch-tests

Lorsque l'élément fini est implémenté, des tests permettent de s'assurer du bon fonctionnement de cet élément. Ce sont les patchs-tests. Leur rôle concerne la validation de l'élément et ne permet pas de conclure sur la qualité ou l'efficacité des modélisations avec ce dernier. Ils permettent uniquement :

- de tester la programmation pour l'assemblage de plusieurs éléments
- de vérifier la stabilité de la solution

Il existe trois grand types de patchs-tests :

- Forme A :  
Conditions limites :  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  sur tous les noeuds du contour, on vérifie alors que  $\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur tous les noeuds internes au maillage.
- Forme B ou patch-test cinématique :  
Conditions limites :  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  sur tous les noeuds du contour, on vérifie que les déplacements aux noeuds internes correspondent bien aux valeurs théoriques.
- Forme C ou patch-test mécanique :  
Conditions limites : imposition d'un minimum de ddl bloqués sur le contour juste pour supprimer les mouvements de corps rigide et sollicitations sur le reste du contour pour obtenir un état de contraintes constant. On vérifie que les contraintes internes sont constantes. La répartition des efforts sur les noeuds externes doit se faire en calculant la sollicitation équivalente [BD90, p 262].

Les éléments décrits précédemment passent ces patch-tests.

## 2.4.2 Tests statiques

Le but des tests statiques est de valider la matrice de raideur des éléments finis en terme de convergence de la solution, mais également de vérifier la vitesse de convergence. Pour cela, deux configurations de plaque, mince et épaisse, sont d'abord testées sur un cas test d'une plaque encadrée sur ses bords et chargée en son centre. Ensuite, le cas test du cylindre pincé, plus sévère, permet de valider les éléments lorsqu'ils sont distordus.

### 2.4.2.1 Plaque carré

Le cas test choisi est celui d'une plaque carrée encadrée sur ses bords et chargée en son centre (figure 2.5). Les caractéristiques de cette plaque sont  $L = 0.2m$ ,  $E = 3GPa$   $\nu = 0.3$ . La modélisation ne fait intervenir qu'un quart de la plaque avec des conditions de symétrie. Dans un premier test, les dimensions de la plaque satisfont les conditions de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff qui néglige le cisaillement transverse), et qui dispose d'une solution théorique. Dans un second test, les dimensions de la plaque satisfont les conditions de la théorie des plaques épaisses (théorie de Reissner/Mindlin qui prend en compte le cisaillement transverse). Il n'y a plus dans ce cas de solution analytique au problème.

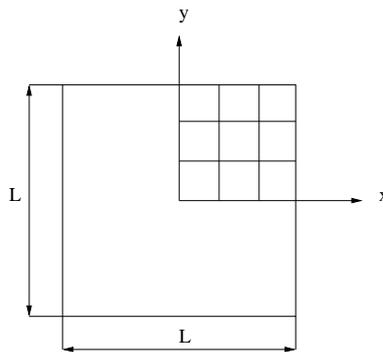


FIG. 2.5 – Plaque carrée test

Les éléments choisis (sauf le H20) sont basés sur des interpolations linéaires et avec un seul élément dans l'épaisseur le facteur de correction de cisaillement transverse choisi à 5/6. Pour ces tests, nous comparons :

- l'élément H8 présenté dans la section 2.2.1.1. Basé sur une formulation en déplacement, il n'est pas adapté à la modélisation de structures minces et permet de mettre en évidence les phénomènes de blocages ;
- l'élément H8WT (section 2.2.1.3) ;
- l'élément H8WT0, variante de l'élément H8WT, sous-intégré sur la partie liée au cisaillement transverse ;
- l'élément H8coque (section 2.2.2.2) ;
- l'élément Q4  $\gamma 24$  (section 2.2.2.3). Il est considéré comme élément de référence.
- l'élément H20 qui, comme l'élément H8, est formulé en déplacement, mais possède 20 noeuds/élément pour une interpolation de degré 2.

**Solution de plaque mince** Une solution analytique donne la valeur de la flèche  $w$  au centre de la plaque pour les conditions aux limites retenues :  $w = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D}$  avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  la rigidité

en flexion de plaque mince, et  $P$  la valeur de la force ponctuelle. La plaque choisie à une épaisseur  $h = 1 \text{ mm}$  soit un rapport caractéristique de 200 pour respecter l'hypothèse de plaque mince. Les résultats de convergence sont présentés sur les figures 2.6. Il apparaît clairement qu'un élément linéaire formulé en déplacement (élément H8) n'est pas adapté à cette modélisation en raison des blocages qu'il présente. L'élément H8WT présente également un blocage en cisaillement transverse qui ralentit sa convergence, problème qui est résolu dans sa variante avec intégration sélective. Tous les autres éléments convergent rapidement vers la solution. Les éléments H8WT0, H8coque et Q4  $\gamma$ 24 permettent donc de bien modéliser les plaques minces dans le cadre de ce cas test.

Nous pouvons aussi remarquer sur la vue détaillée que les modèles ne convergent pas exactement vers la solution de référence, celle-ci étant basée sur une théorie des plaques minces qui n'intègre pas d'effet de cisaillement.

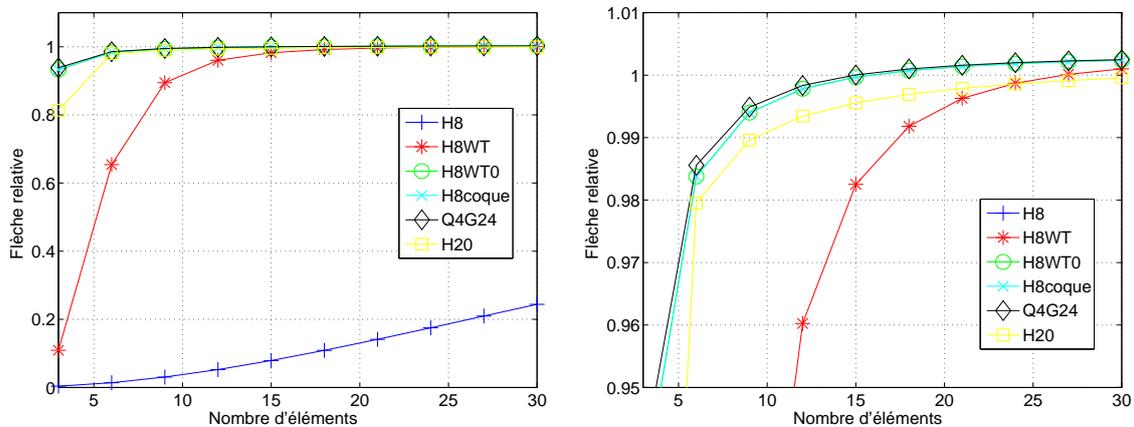


FIG. 2.6 – Convergence des différents éléments pour une plaque mince

**Solution de plaque épaisse** N'ayant pas de solution analytique pour un modèle de plaque épaisse, nous comparons la solution des différents modèles entre eux. La plaque a une épaisseur  $h = 1 \text{ cm}$ , soit un rapport caractéristique de 20 ce qui représente bien un cas de plaque épaisse. Les résultats de convergence sont présentés sur les figures 2.7. Nous pouvons constater que l'élément H8 n'est toujours pas adapté pour cette modélisation. En revanche, tous les autres éléments convergent vers une solution. Le détail de la convergence indique de nouveau que les résultats obtenus pour les éléments H8WT, H8WT0 et H8coque sont très proches de ceux de l'élément de référence Q4  $\gamma$ 24, alors que l'élément H20 converge un peu plus lentement.

#### 2.4.2.2 Éléments distordus

Un autre aspect pour l'évaluation de la performance des éléments concerne l'influence de la distorsion des éléments sur la vitesse de convergence vers la solution. Pour cela, nous comparons la solution obtenue sur le maillage d'une plaque avec des éléments distordus comme présenté sur la figure 2.8. Les dimensions de la plaque, ainsi que les paramètres matériau choisis sont identiques au cas précédent, alors que le maillage est fait sur l'intégralité de la plaque puisqu'il n'y a plus de symétries. Les paramètres de distorsion du maillage sont respectivement  $a = 7,5 \cdot 10^{-2}L$  et  $b = 10 \cdot 10^{-2}L$ . Les résultats de convergence dans les cas de plaque mince et épaisse sont présentés sur les figures 2.9. Pour la plaque mince, en dehors de l'élément H8 qui présente toujours des blocages, tous les éléments

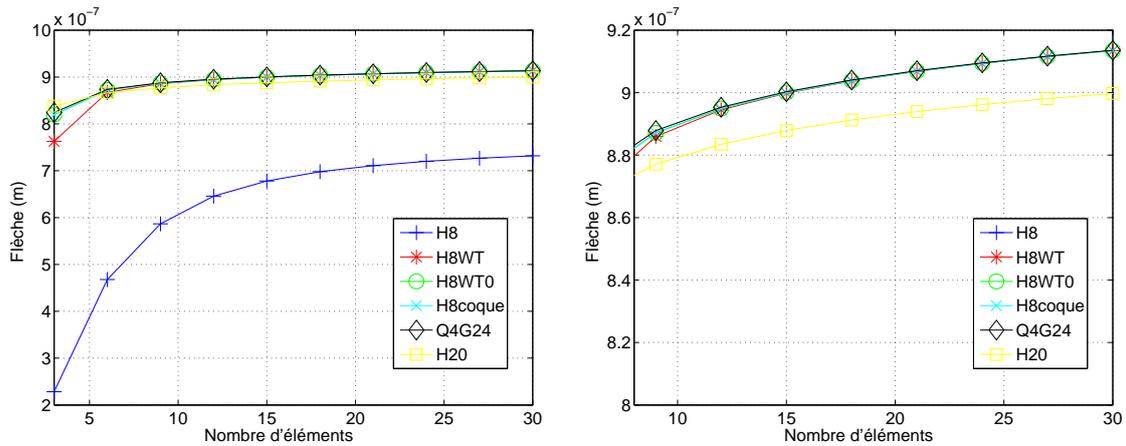


FIG. 2.7 – Convergence des différents éléments pour une plaque épaisse

convergent vers la solution de référence. L'élément H8WT converge plus lentement que les autres. Le comportement non monotone de l'élément H20 a été confirmé avec un code de calcul industriel. Au niveau de la convergence dans la cas d'une plaque épaisse, seul les éléments H8WT, H8coque et Q4  $\gamma$ 24 convergent vers la solution trouvée dans le cas d'un maillage régulier. Les éléments H20 et H8WT0 ne permettent pas de converger dans ce cas là.

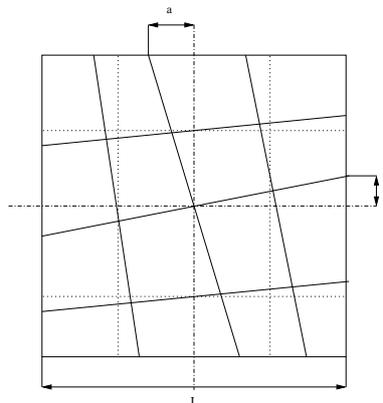


FIG. 2.8 – Plaque avec maillage distordu

### 2.4.2.3 Cylindre pincé

Ce test est basé sur une coque cylindrique mince avec un diaphragme à chacune de ses extrémités, et sur laquelle une force radiale est appliquée. Ce test très sévère, implique un blocage en cisaillement transverse plus important que celui en membrane. De plus, il permet de tester des éléments dans des configurations non coplanaires. La géométrie de référence est présentée sur la figure 2.10, alors que le maillage, pour des raisons de symétries, n'est fait que sur 1/8ème de la structure. Les propriétés sont  $R=3m$   $L=6m$ ,  $h=0,03m$ ,  $\nu = 0,3$  et  $E = 30kPa$ . Les éléments choisis pour ce test sont les mêmes que ceux des cas test de plaque, à l'exception de l'élément H8. L'élément H20 est ici dans une configuration sous-paramétrique par le maillage plan des éléments, alors que les interpolations de variables

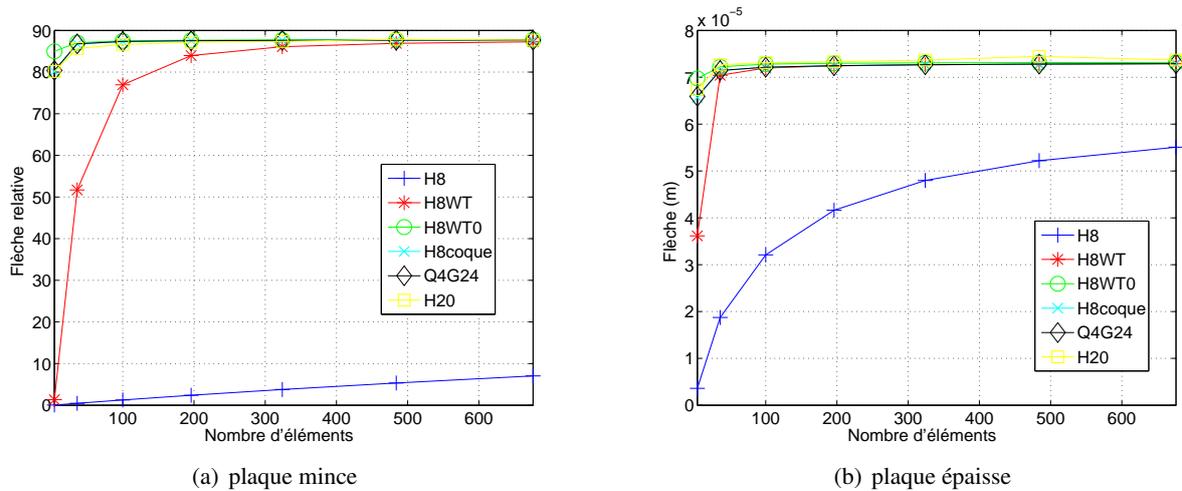


FIG. 2.9 – Convergence des différents éléments pour des éléments distordus

sont toujours de degré 2. Les résultats sont présentés sur la figure 2.11. L'élément H20 permet une convergence très rapide dans cette configuration. L'élément H8WT0 présente une convergence plus lente mais permet bien d'avoir la solution. Enfin, l'élément H8coque converge de nouveau de la même façon que l'élément de référence Q4  $\gamma$ 24.

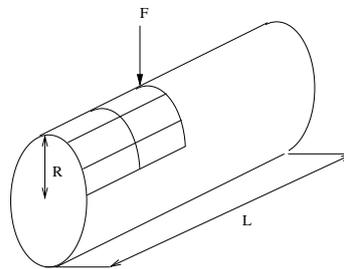


FIG. 2.10 – Cylindre pincé

#### 2.4.2.4 Conclusion des tests statiques

Ces quelques tests statiques montrent bien que des éléments volumiques formulés en déplacement ne sont pas adaptés à la modélisation de structures de type plaque (blocages numériques pour l'élément H8 et lourdeur de l'élément H20 malgré sa convergence vers la solution, excepté dans le cas d'un maillage distordu). Une formulation mixte permet de limiter les blocages. Finalement seuls les éléments H8coque et Q4  $\gamma$ 24 permettent de converger rapidement vers la solution dans tous les cas et le comportement de l'élément H8coque est très proche de celui de l'élément Q4  $\gamma$ 24 pris pour référence.

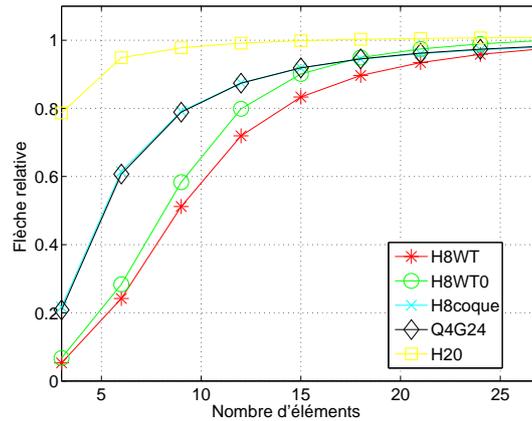


FIG. 2.11 – Convergence sur le cas test du cylindre pincé

### 2.4.3 Tests dynamiques non amortis

Dans le cadre de la dynamique, nous devons nous assurer que les modèles mis en place permettent d'obtenir des résultats fiables. Pour cela, nous comparons les résultats entre un modèle de référence et notre modèle formé avec des éléments H8coque au niveau des solutions modales : fréquences et modes propres.

Nous pouvons tout d'abord comparer les fréquences propres, en valeurs absolues ou relative. Quant aux modes propres, le plus simple est de regarder la matrice de MAC (*Modal Assurance Criterion* ou encore critère d'assurance modal) qui permet de s'assurer de l'orthogonalité des modes. De manière générale, ce critère peut se mettre sous la forme

$$MAC_{12} = \frac{(\boldsymbol{\psi}_1^H \mathbf{W} \boldsymbol{\psi}_2)^2}{(\boldsymbol{\psi}_1^H \mathbf{W} \boldsymbol{\psi}_1) (\boldsymbol{\psi}_2^H \mathbf{W} \boldsymbol{\psi}_2)} \quad (2.113)$$

avec  $\boldsymbol{\psi}$  le mode considéré,  $(\cdot)_1$  et  $(\cdot)_2$  dénotent respectivement les valeurs obtenues pour les modèles 1 et 2, et  $\mathbf{W}$  une matrice de pondération définie positive. La matrice de masse  $\mathbf{M}$  peut être choisie comme matrice de pondération. La valeur trouvée nous donne une indication sur le parallélisme entre deux modes. Une valeur proche de 1 indique des modes corrélés tandis qu'une valeur proche de 0 indique des modes orthogonaux.

#### 2.4.3.1 Test isotrope

Le cas test retenu concerne une plaque isotrope rectangulaire en conditions libres. Celui-ci est représentatif du modèle de test que nous utilisons par la suite. Les propriétés géométriques de cette plaque sont  $L = 150$  mm,  $l = 100$  mm et  $h = 5,1$  mm, et les propriétés mécaniques sont  $E = 4,3$  GPa,  $\nu = 0,38$  et  $\rho = 1460$  kg/m<sup>3</sup>. Les résultats sont présentés pour une gamme de fréquences allant de 0 à environ 3 kHz, ce qui correspond à la gamme de mesure sur laquelle nous travaillerons par la suite.

Dans le cas d'une plaque épaisse, nous n'avons pas de solution analytique [Ble79, Lei69]. Notre solution de référence est produite à l'aide d'un maillage fin en éléments H20 avec le code de calcul industriel *I-deas* [UGS] (pour des raisons de coût de calcul). Les valeurs des fréquences propres sont reportées dans le tableau 2.1 pour différents maillages<sup>5</sup>. Avec un seul élément dans l'épaisseur,

<sup>5</sup>Les indications sur le maillage dans les tableaux concernent le nombre d'éléments suivant  $L$ ,  $l$  et  $h$  respectivement.

les fréquences n'évoluent pratiquement plus dès que le maillage atteint 600 éléments. L'écart relatif en fréquence, avec les maillages plus fins à 1 élément dans l'épaisseur est inférieur à 0.1% pour les dernières fréquences. Avec un nombre variable d'éléments dans l'épaisseur il apparaît qu'avec 3 éléments dans l'épaisseur, le modèle est convergé. La solution obtenue avec un maillage à 60x40x3 éléments fournit donc une solution de référence satisfaisante par la suite.

Maillages	30 × 20 × 1	60 × 40 × 1	90 × 60 × 1	60 × 40 × 3	60 × 40 × 5	90 × 60 × 3
Nb noeuds	4453	17303	38553			82657
Nb éléments	600	2400	5400	7200	12000	16200
$f_1$ (Hz)	359,80	359,57	359,55	358,96	358,95	358,94
$f_2$ (Hz)	399,85	399,83	399,83	399,72	399,95	399,71
$f_3$ (Hz)	834,67	834,08	834,03	832,31	832,29	832,71
$f_4$ (Hz)	948,33	948,22	948,22	947,63	947,63	947,63
$f_5$ (Hz)	1051,21	1050,82	1050,79	1049,42	1049,40	1049,39
$f_6$ (Hz)	1267,46	1267,02	1266,98	1265,15	1265,13	1265,12
$f_7$ (Hz)	1553,21	1552,11	1552,01	1548,15	1548,09	1548,05
$f_8$ (Hz)	1776,99	1775,53	1775,39	1770,25	1770,17	1770,12
$f_9$ (Hz)	2246,74	2245,85	2245,79	2241,20	2241,15	2241,15
$f_{10}$ (Hz)	2467,69	2466,24	2466,12	2459,89	2459,81	2459,78
$f_{11}$ (Hz)	2645,58	2643,06	2642,82	2632,71	2632,57	2632,49
$f_{12}$ (Hz)	2701,56	2700,05	2699,94	2692,71	2692,62	2692,60
$f_{13}$ (Hz)	2754,23	2752,58	2752,45	2745,03	2744,93	2744,91
$f_{14}$ (Hz)	3394,45	3391,68	3391,44	3378,53	3378,36	3378,30

TAB. 2.1 – Fréquences en fonction du maillage avec l'élément H20

Les fréquences propres obtenues avec l'élément H8coque sont reportées dans le tableau 2.2. Les écarts relatifs avec les valeurs de référence sont inférieures 0,5% pour les maillages comptant 600 et 1176 éléments. Ces valeurs sont donc suffisamment bonnes pour être conservées par la suite. C'est ce que confirme la représentation graphique de comparaison des fréquences entre le modèle H20 (7200 éléments) et le modèle H8coque (600 éléments) de la figure 2.13.

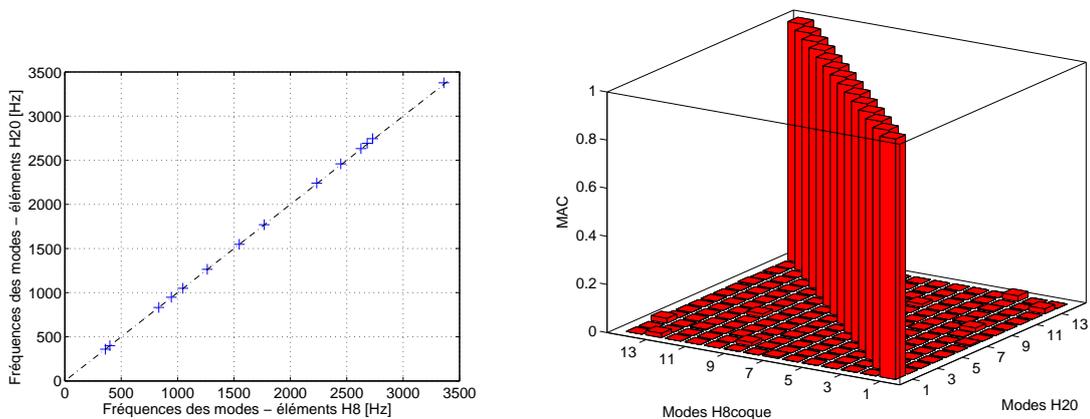


FIG. 2.12 – Comparaison des fréquences et modes propres obtenues avec le modèle H8coque et le modèle de référence - modèle isotrope

Elément	H8coque				H20
Maillages	$12 \times 8 \times 1$	$24 \times 16 \times 1$	$30 \times 20 \times 1$	$42 \times 28 \times 1$	$90 \times 60 \times 3$
Nb éléments	96	384	600	1176	16200
$f_1$ (Hz)	361,35	360,58	360,12	359,50	358,94
$f_2$ (Hz)	399,17	399,14	399,11	399,07	399,71
$f_3$ (Hz)	840,15	835,95	834,59	832,88	832,71
$f_4$ (Hz)	948,31	945,50	945,04	944,61	947,63
$f_5$ (Hz)	1053,71	1049,34	1048,21	1046,94	1049,39
$f_6$ (Hz)	1287,55	1268,49	1265,84	1263,29	1265,12
$f_7$ (Hz)	1572,52	1554,25	1550,60	1546,58	1548,05
$f_8$ (Hz)	1779,83	1774,00	1770,99	1767,12	1770,12
$f_9$ (Hz)	2360,01	2259,10	2247,41	2237,25	2241,15
$f_{10}$ (Hz)	2534,74	2468,03	2458,81	2450,15	2459,78
$f_{11}$ (Hz)	2663,58	2639,87	2633,40	2625,77	2632,49
$f_{12}$ (Hz)	2817,48	2711,31	2697,82	2685,62	2692,60
$f_{13}$ (Hz)	2842,03	2756,18	2744,55	2733,78	2744,91
$f_{14}$ (Hz)	3468,94	3389,66	3376,58	3363,49	3378,30

TAB. 2.2 – Convergence de l'élément h8coque

D'autre part, il nous faut nous assurer que les modes obtenus soient également bien corrélés entre les deux modèles par l'évaluation du MAC qui nous permet de vérifier le parallélisme et l'orthogonalité des différents modes. Il est présenté sur la figure 2.12. La plus petite valeur relevée sur la diagonale de la matrice de MAC est égal à 0,9925, alors que la plus grande valeur hors diagonale est de 0,0229. Les modes propres calculés avec le modèle H8coque sont donc bien corrélés avec ceux du modèle de référence.

### 2.4.3.2 Test orthotrope

Le caractérisation de matériaux orthotropes est largement justifiée dans un cadre viscoélastique car ils correspondent généralement à des matériaux composites fibrés dont la matrice peut non seulement servir de liant mais également avoir une fonction de dissipation. Nous nous intéressons ici aux capacités de l'élément H8coque pour la modélisation d'un matériau faiblement orthotrope. Dans le cas étudié, nous considérons une plaque de géométrie rectangulaire similaire aux cas précédents avec comme propriétés matériau  $E_{xx} = 4$  GPa,  $E_{yy} = E_{zz} = 2$  GPa,  $G_{xy} = 1,5$  GPa,  $G_{yz} = 1$  GPa,  $\nu_{xy} = 0,3$  et  $\rho = 1460$  kg/m<sup>3</sup>. Les résultats de convergence avec des modèles constitués d'éléments H20 et d'éléments H8coque sont présentés dans le tableau 2.3. Les fréquences des modes sont proches (moins de 0,5% d'écart relatif), ce qui permet de dire que l'élément H8coque est adapté à la modélisation de matériaux faiblement orthotropes.

### 2.4.3.3 Application à des composites multicouches

Une autre application d'intérêt concerne la modélisation de composites multicouches, également appelés plaques sandwich. La difficulté majeure de ces applications provient de la différence d'ordre de grandeur des modules d'élasticité entre les couches. La modélisation de ces structures viscoélastiques est encore sujette à discussion [MR04]. En effet, différentes configurations peuvent être envis-

Elément	H 20			H8coque		
Maillages	$30 \times 20 \times 2$	$60 \times 40 \times 2$	$90 \times 60 \times 3$	$24 \times 16 \times 1$	$30 \times 20 \times 1$	$39 \times 26 \times 1$
Nb. éléments	1200	4800	16200	384	600	1014
$f_1$ (Hz)	399	399	399	401	401	400
$f_2$ (Hz)	577	578	578	578	578	578
$f_3$ (Hz)	966	969	971	970	970	970
$f_4$ (Hz)	990	992	992	996	995	994
$f_5$ (Hz)	1229	1233	1234	1237	1236	1235
$f_6$ (Hz)	1615	1619	1621	1626	1623	1621
$f_7$ (Hz)	1956	1962	1964	1973	1970	1967
$f_8$ (Hz)	1976	1982	1984	1993	1989	1987
$f_9$ (Hz)	2608	2623	2628	2646	2636	2629
$f_{10}$ (Hz)	2859	2874	2880	2900	2891	2883
$f_{11}$ (Hz)	3025	3036	3040	3055	3050	3045
$f_{12}$ (Hz)	3109	3120	3124	3154	3140	3131
$f_{13}$ (Hz)	3399	3417	3423	3447	3437	3428
$f_{14}$ (Hz)	3619	3635	3642	3671	3658	3647

TAB. 2.3 – Fréquence des modèles H20 et H8coque orthotrope

agées. Par exemple, des éléments de volumes peuvent être employés pour chacune des couches ou une combinaison d'éléments de volumes pour la couche de matériau viscoélastique et d'éléments de plaques pour les autres couches (reliés entre elles par des éléments rigides ou décalés avec un offset). Dans notre cas test, l'élément H8coque est employé pour les 2 couches de 2 plaques sandwich de 150x100mm. Dans ces plaques, une couche est métallique (acier de 1mm ou aluminium de 5mm) et l'autre est un matériau beaucoup plus souple (ici du PC nommé lexan de 4mm). Les propriétés matériau utilisées sont les suivantes : aluminium  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0,29$  et  $\rho = 2688$  kg/m<sup>3</sup>, acier  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$  et  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, et lexan  $E = 2,4$  GPa,  $\nu = 0,4$  et  $\rho = 1160$  kg/m<sup>3</sup>. A nouveau, les résultats de calculs sont obtenus pour différentes tailles de mailles avec des éléments H20 ou H8coque. Le tableau 2.4 reporte ceux du sandwich aluminium/lexan. Ces résultats indiquent qu'à partir de 600 éléments sur une seule couche, le modèle H8coque est convergé en fréquence. Les graphes de comparaison des fréquences propres des deux modélisations (H8coque et H20) sont présentés sur la figure 2.13a.

Maillages	$24 \times 16 \times 2$	$30 \times 20 \times 2$	$36 \times 24 \times 2$	$42 \times 28 \times 2$
$f_1$ (Hz)	1071	1070	1069	1068
$f_2$ (Hz)	1157	1157	1157	1157
$f_3$ (Hz)	2433	2430	2428	2426
$f_4$ (Hz)	2639	2638	2638	2638
$f_5$ (Hz)	3039	3036	3034	3033
$f_6$ (Hz)	3506	3500	3497	3495

TAB. 2.4 – Convergence du modèle de sandwich aluminium-lexan avec l'élément H8coque

D'autre part, il nous faut nous assurer que les modes obtenus soient également bien corrélés entre les deux modèles par l'évaluation du MAC qui nous permet de vérifier le parallélisme et l'orthog-

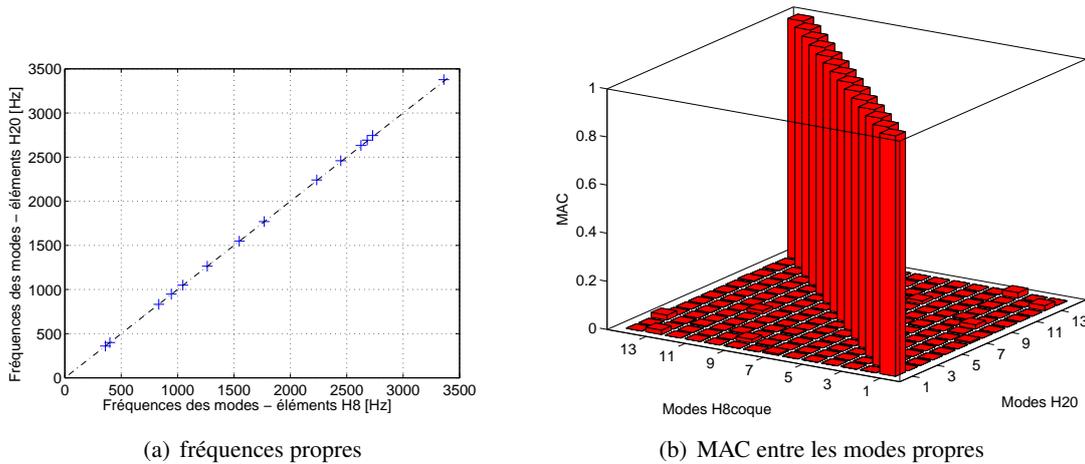


FIG. 2.13 – Comparaison des fréquences et modes propres obtenues avec le modèle H8coque et le modèle de référence - modèle orthotrope

onalité des différents modes. Il est présenté sur la figure 2.13b. La plus petite valeur relevée sur la diagonale de la matrice de MAC est égal à 0,9925, alors que la plus grande valeur hors diagonale est de 0,0229. Les modes propres calculés avec le modèle H8coque sont donc bien corrélés avec ceux du modèle de référence.

## 2.4.4 Application sur un modèle amorti

### 2.4.4.1 Plaque en Lexan

Nous considérons maintenant une plaque rectangulaire libre amortie hystérétiquement de dimensions 150 mm par 100 mm et d'épaisseur 4 mm. Les caractéristiques matériau sont  $\Re[E] = 2,65$  GPa,  $\Re[\nu] = 0,39$  et  $\rho = 1200$  kg/m<sup>3</sup>. Le maillage régulier est réalisé en 60x40 éléments de plaques Q4  $\gamma$ . Nous pouvons d'abord vérifier que l'amortissement introduit sur  $\nu$  a une influence certaine sur l'amortissement modal (total). Le tableau 2.5 reporte les résultats des fréquences propres des modes complexes obtenues pour 3 cas d'amortissement : a)  $\eta_E = 0$  et  $\eta_\nu = 0$ , b)  $\eta_E = 2,87\%$  et  $\eta_\nu = 0$  et c)  $\eta_E = 2,87\%$  et  $\eta_\nu = -1,61\%$ . Les caractéristiques matériau choisies dans ce dernier cas correspondent en fait à un PC de type Lexan (valeurs que nous avons identifiées). Les résultats du tableau 2.5 montrent aussi que les fréquences propres ne changent pas beaucoup avec l'introduction des amortissements choisis pour les paramètres matériau. Pour ces matériaux viscoélastiques rigides, il doit être possible d'identifier les valeurs réelles des paramètres matériaux à partir des fréquences propres d'un modèle non amorti.

Les modes propres flexibles ainsi que la complexité modale associés au cas 3 sont présentés dans le tableau 2.7. Dans ce tableau, comme une pleine échelle de couleur est utilisée pour les parties réelle et imaginaire des déformées modales, il faut se reporter à la complexité modale associée pour connaître les ratio entre ces 2 échelles. Ces valeurs sont toutefois reportées dans le tableau 2.6 pour en faciliter la lecture.

Les FRF peuvent ensuite être évaluées. Une représentation en amplitude et en phase de deux d'entre-elles est donnée sur la figure 2.14a. Ces FRF peuvent être obtenues par calcul direct ou modal (section 2.3). Du fait du grand nombre de ces fonctions, l'observation est difficile pour vérifier que les 2 groupes  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  de FRF obtenues par chacune de ces méthodes est bien similaires. Un critère de corrélation, dans le même esprit que le MAC et les fréquences pour les modes propres, est neces-

	non amorti	$\eta_E = 2,87\% ; \eta_V = 0\%$		$\eta_E = 2,87\% ; \eta_V = -1,61\%$	
Mode	f (Hz)	f (Hz)	$\eta$ (%)	f (Hz)	$\eta$ (%)
1	244,78	244,78	2,87	244,76	3,28
2	272,44	272,44	2,87	272,44	2,85
3	569,77	569,77	2,87	569,75	3,12
4	650,35	650,35	2,87	650,38	2,42
5	717,68	717,68	2,87	717,66	3,06
6	871,67	871,67	2,87	871,71	2,36
7	1064,7	1064,7	2,87	1064,7	2,96
8	1219,5	1219,5	2,87	1219,4	2,95
9	1550,1	1550,1	2,87	1550,2	2,45
10	1699,3	1699,3	2,87	1699,3	2,82
11	1822,7	1822,7	2,87	1822,6	2,88
12	1867,7	1867,7	2,87	1867,7	2,45
13	1901,8	1901,8	2,87	1901,9	2,63
14	2349,3	2349,3	2,87	2349,4	2,65
15	2527,0	2527,0	2,87	2527,1	2,51
16	2597,5	2597,5	2,87	2597,4	2,81
17	2756,0	2756,0	2,87	2756,1	2,72
18	3011,2	3011,2	2,87	3011,2	2,66

TAB. 2.5 – Fréquences propres en fonction de l'amortissement

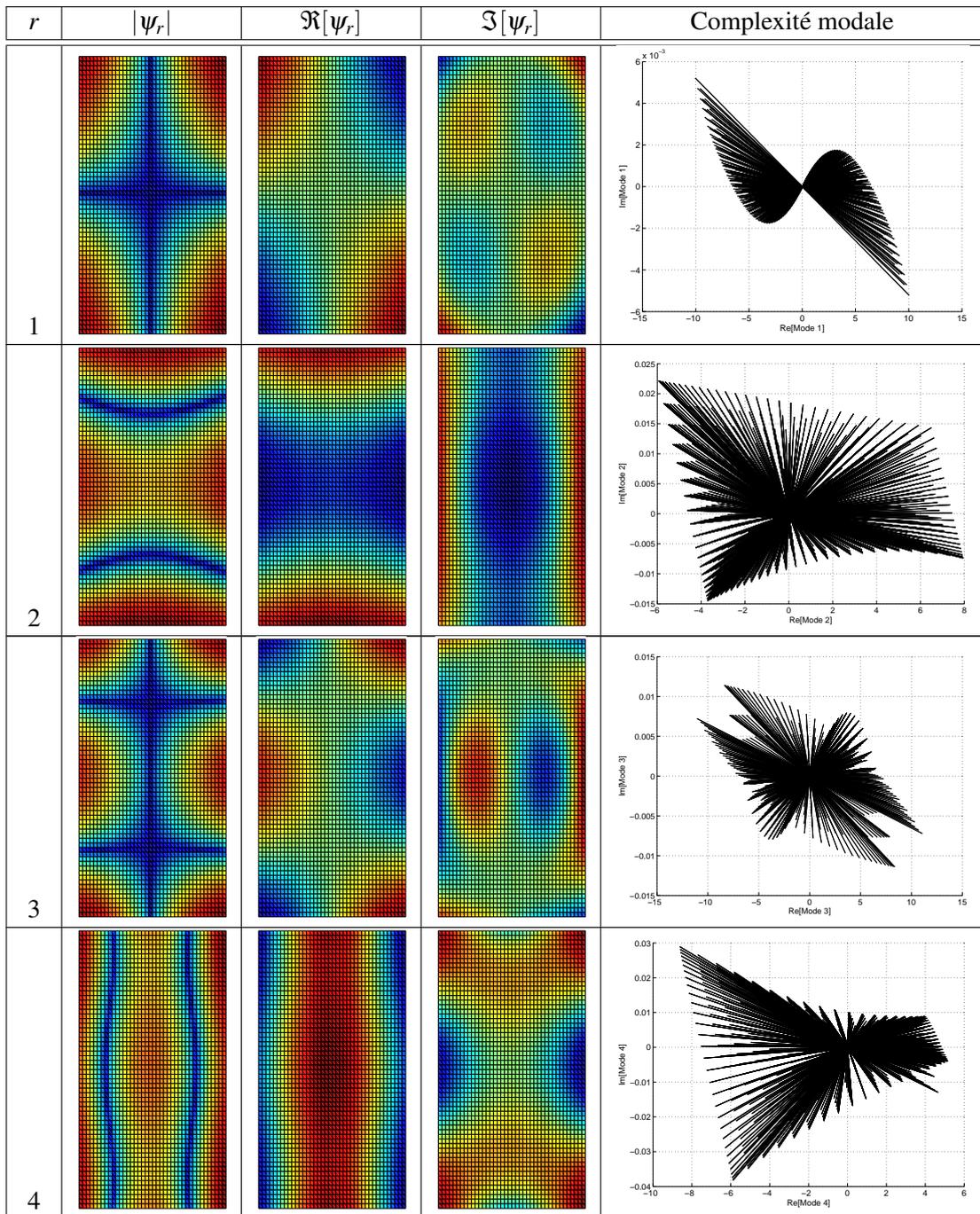
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{\max(\Im\{\psi_r\})}{\max(\Re\{\psi_r\})}$ (%)	0,05	0,28	0,10	0,56	0,63	0,47	0,27	0,19	0,81
Mode	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{\max(\Im\{\psi_r\})}{\max(\Re\{\psi_r\})}$ (%)	1,63	0,18	0,98	0,55	0,50	0,84	0,31	0,59	0,61

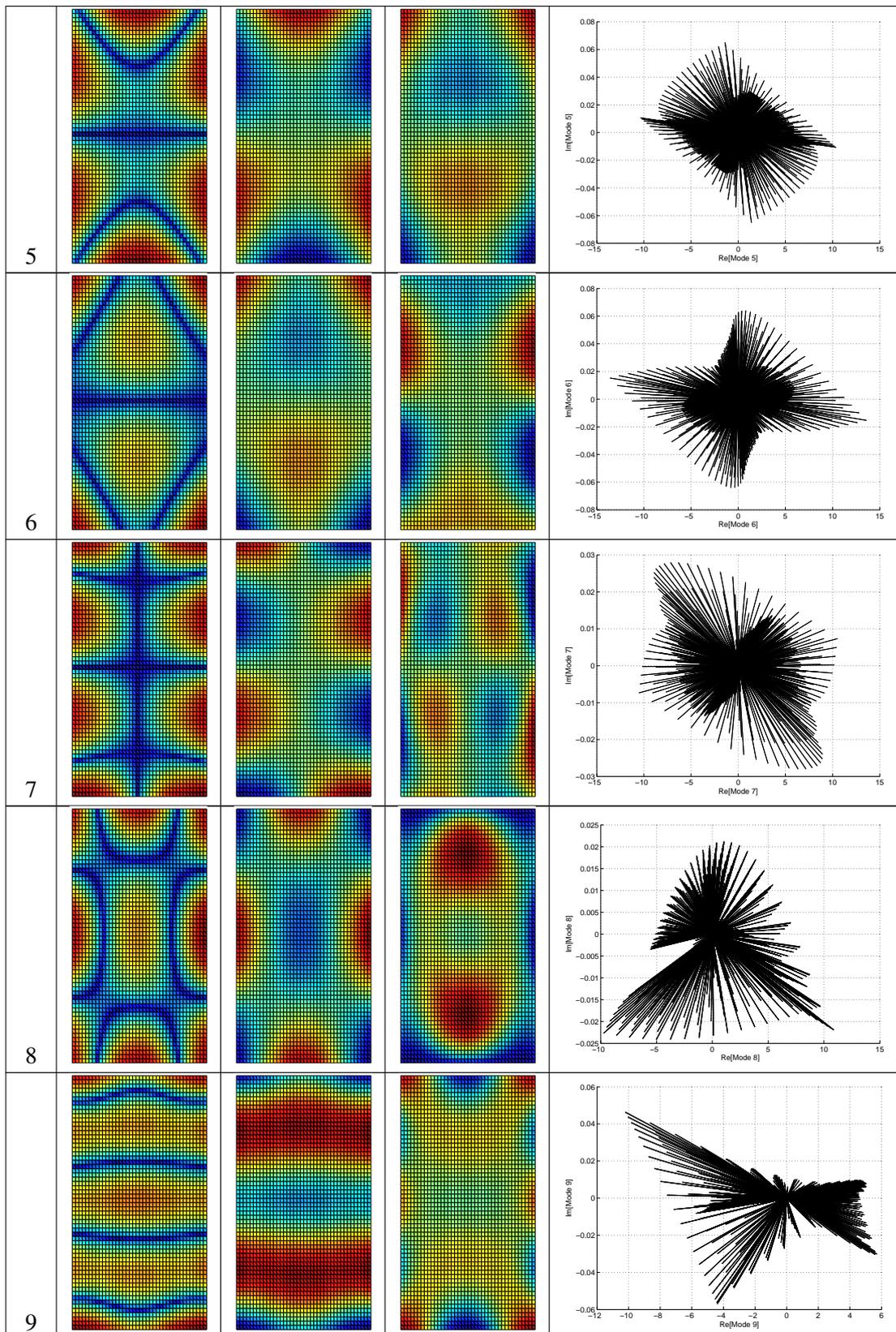
TAB. 2.6 – Ratio entre les maxima des parties imaginaires et réelles des modes propres

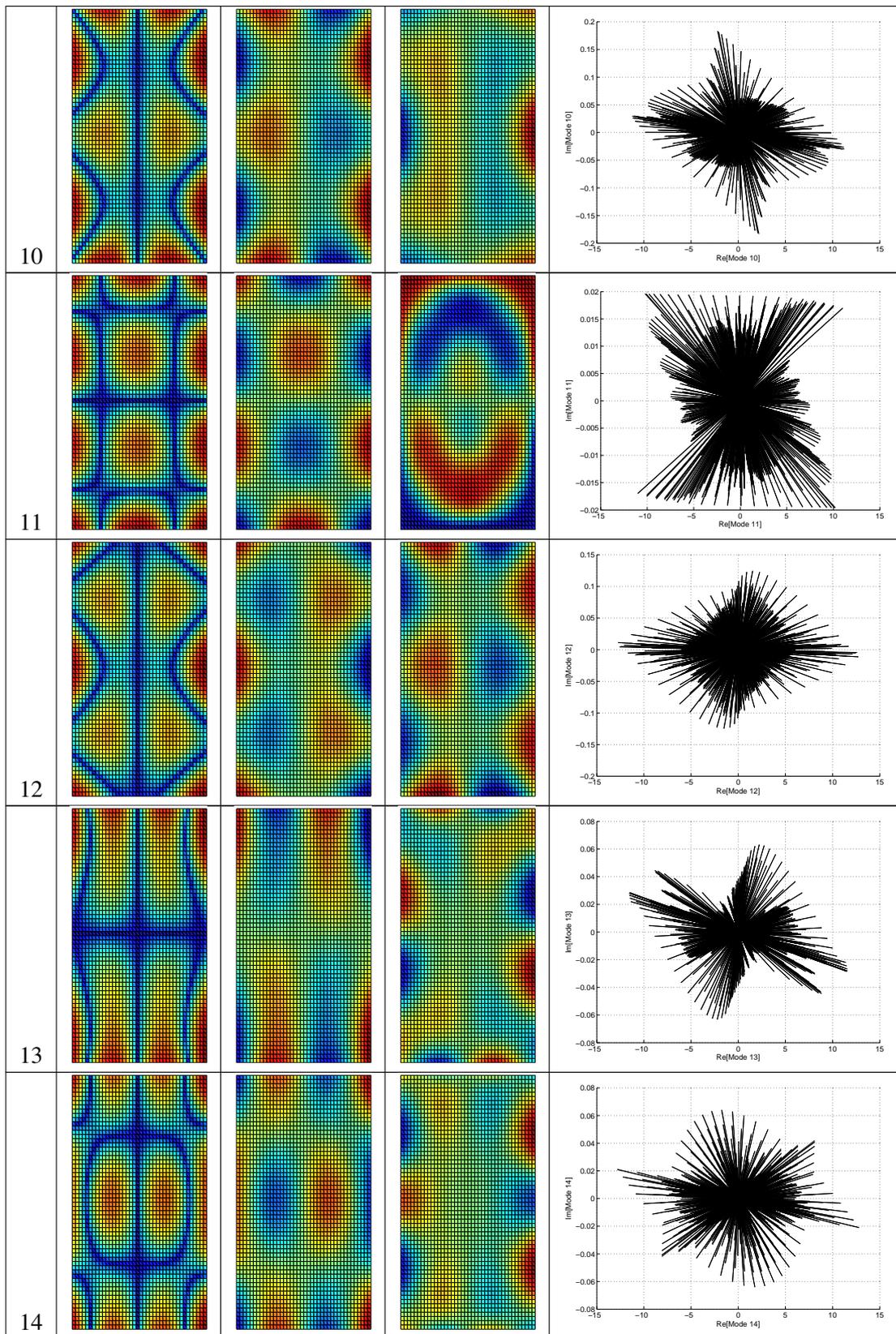
saire pour synthétiser l'information. Dans la littérature on trouve dans le domaine fréquentiel la paire de critères GSC et GAC qui permettent de synthétiser l'information spatiale pour chaque fréquence [ZG101], avec

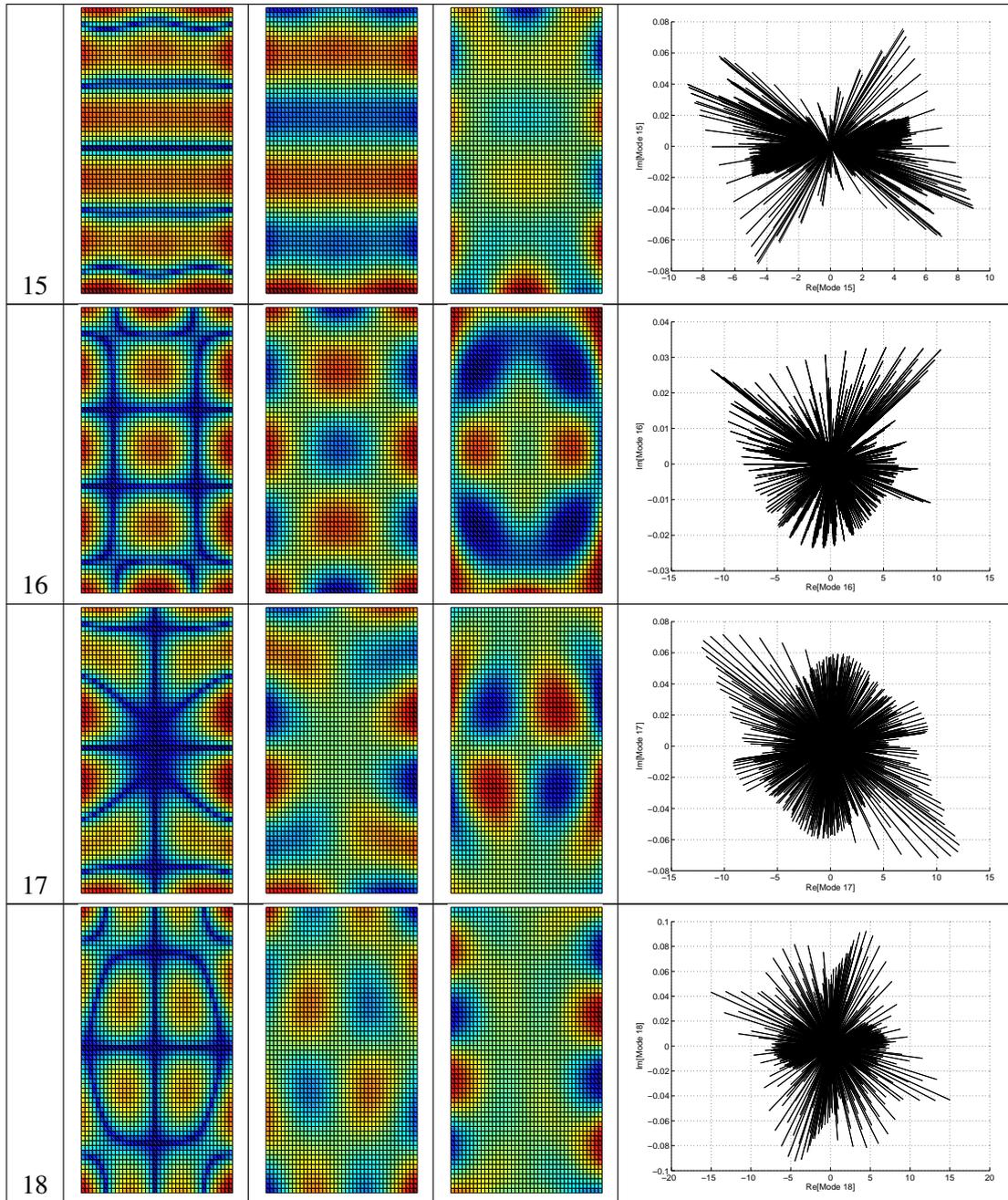
$$\text{GSC}(\omega_k) = \frac{|\mathbf{H}_1^H(\omega_k)\mathbf{H}_2(\omega_k)|^2}{(\mathbf{H}_1^H(\omega_k)\mathbf{H}_1(\omega_k))(\mathbf{H}_2^H(\omega_k)\mathbf{H}_2(\omega_k))}, \quad \text{GAC}(\omega_k) = \frac{2|\mathbf{H}_1^H(\omega_k)\mathbf{H}_2(\omega_k)|}{(\mathbf{H}_1^H(\omega_k)\mathbf{H}_1(\omega_k)) + (\mathbf{H}_2^H(\omega_k)\mathbf{H}_2(\omega_k))} \quad (2.114)$$

Le premier est lié à la corrélation de la forme et le second à la corrélation d'amplitude. Tous les 2 retournent une valeur entre 0 (pas de corrélation) et 1 (corrélation parfaite). Nous choisissons ici d'observer un indicateur donné par la moyenne du produit de ces 2 fonctions sur l'ensemble des fréquences pour obtenir un scalaire significatif de la qualité de la corrélation. La figure 2.14b présente cette indicateur de corrélation entre les FRF obtenues par calcul direct et celles obtenues par calcul modal et en fonction du nombre de modes retenus dans la base. Cette figure montre qu'une base constituée par 40 modes propres permet d'obtenir un indicateur de corrélation très bon (99,9 %) sur la gamme de fréquences 0-3200 Hz.





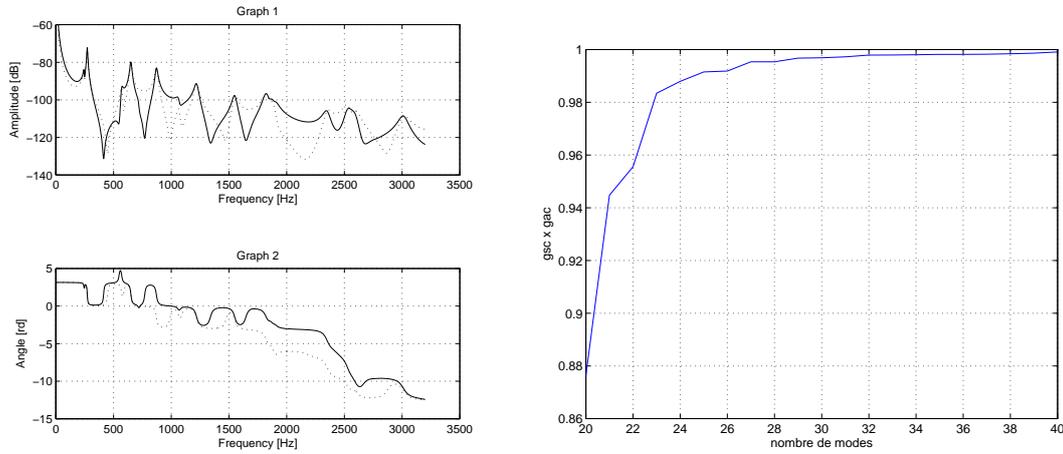




TAB. 2.7: Modes complexes d'une plaque rectangulaire

#### 2.4.4.2 Plaque en PVC à paramètres constants

En seconde application de cette section, nous considérons une plaque similaire à celle de l'application précédente (section 2.4.4.1) mais d'épaisseur 5,1 mm avec des caractéristiques matériau constantes, proches de celles d'un PVC en hautes fréquences, soit  $\Re[E] = 4,07$  GPa,  $\Re[\nu] = 0,36$ ,  $\eta_E = 1,3\%$   $\eta_\nu = -0,30\%$  et  $\rho = 1460$  kg/m<sup>3</sup>. Les modes propres ainsi que la complexité modale



(a) Superposition de 2 FRF de la plaque Lexan

(b) Moyenne du produit GSCxGAC entre les FRF par calcul direct et modal en fonction du nombre de modes propres incluts dans la base modale

FIG. 2.14 – Exemple de FRF et validation de la base modale

associés à cette application sont assez similaires à ceux présentés dans le tableau 2.7 de l’application précédente, avec toutefois un ratio entre les maxima des parties imaginaires et réelles différent. Le tableau 2.8 reporte les valeurs de ces nouveaux ratio ainsi que les résultats des fréquences propres et amortissement modaux de ces modes.

Mode	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence (Hz)	352,2	389,0	814,8	917,0	1026	1224	1512
$\eta$ (%)	4,87	4,66	4,79	4,48	4,76	4,45	4,72
$\frac{\max(\Im[\psi_r])}{\max(\Re[\psi_r])}$ (%)	0,025	0,12	0,048	0,20	0,34	0,24	0,12

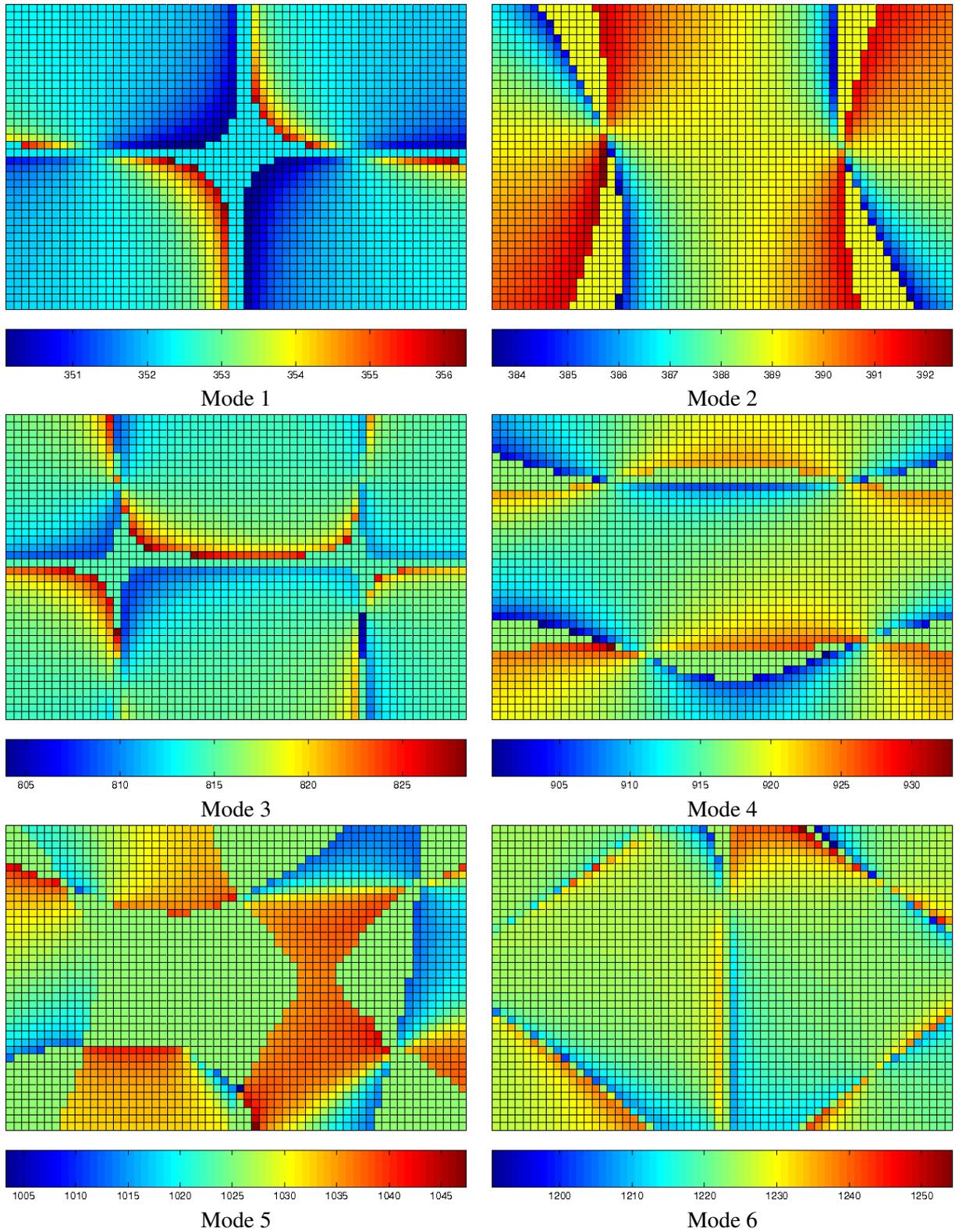
Mode	8	9	10	11	12	13
Fréquence (Hz)	1729	2174	2399	2570	2613	2670
$\eta$ (%)	4,72	4,49	4,65	4,69	4,50	4,57
$\frac{\max(\Im[\psi_r])}{\max(\Re[\psi_r])}$ (%)	0,092	0,25	0,84	0,084	0,48	0,24

TAB. 2.8 – Résultats pour le PVC

Enfin, les déformées opérationnelles (ODS pour *Operating Deflection Shape*) pour une excitation unitaire de la plaque dans un de ses coins nous permet de présenter la distribution spatiale des fréquences de résonance dans le tableau 2.9. Celles-ci sont obtenues en recherchant la fréquence des maxima de déplacements autour des 6 premières fréquences propres. Sur cette figure les valeurs situées sur les lignes nodales ont été prises égales à la fréquence moyenne pour le mode considéré. Le résultat de la moyenne de ces fréquences de résonance est présenté dans le tableau 2.10 pour des ODS évaluées en déplacement ou en vitesse. Nous pouvons donc constater que la moyenne des fréquences de résonance permet d’obtenir une bonne approximation des fréquences propres (ce qui peut éviter l’identification des pôles par analyse modale par exemple). De plus, la différence entre les données en vitesse ou en déplacement n’est pas sensible pour ces fréquences.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter l'élément H8coque dans des modèles spatiaux, modaux et de réponses et de le valider en dynamique. Cet élément volumique basé sur une formulation mixte permet de lever les blocages que présente un élément formulé en déplacement. Il permet de modéliser des structures minces et amorties dans le domaine fréquentiel, aussi bien pour des matériaux isotropes que pour des matériaux faiblement orthotropes ou des structures composites de type sandwich. Il est donc adapté à la modélisation des matériaux viscoélastiques dans leurs usages courants.



TAB. 2.9 – Distribution spatiale des fréquences de résonances situées autour des 6 premiers modes propres

Mode	1	2	3	4	5	6	7
Déplacement	352.27	388.95	814.97	916.67	1027.5	1223.4	1512.3
Vitesse	352.31	389.01	815.08	916.91	1027.7	1223.8	1512.6

TAB. 2.10 – Moyenne des fréquences de résonance de la plaque PVC

## Chapitre 3

# Approche mixte expérimentale-numérique pour l'identification

### 3.1 Introduction

Dans le cas d'un problème d'élastodynamique classique, le problème est posé en supposant connus les paramètres matériau et les conditions limites, et la résolution du problème permet d'obtenir les réponses dynamiques. Il s'agit du problème direct qui, bien que nécessitant une inversion pour être résolu, ne pose pas de problème *a-priori*. En revanche, si ce problème vise à connaître les caractéristiques matériau et/ou les conditions limites à partir d'un ou plusieurs champs cinématiques donnés, il s'agit d'un problème inverse [BC05, CDV04]. Dans ce cas, l'introduction d'incertitudes (liées aux données expérimentales bruitées, aux hypothèses de modélisation, etc...) ne permet pas de connaître de manière exacte la solution obtenue, elle aussi entachée de bruit.

Les problèmes inverses sont étudiés depuis fort longtemps par des méthodes de recalage de modèles ou d'identification de paramètres. Dans les travaux de Kavanagh [KC71], nous pouvons déjà trouver des travaux sur l'identification de paramètres matériaux dans les domaines de l'élasticité et de la viscoélasticité linéaire. La démarche adoptée consistait à recalculer les paramètres d'un modèle EF d'une structure en fonction d'un ensemble de mesures ponctuelles réparties sur celle-ci. Ce sujet de recherche reste d'actualité et l'amélioration des méthodes de mesures et de calcul numériques ont permis de traiter des problèmes plus complexes, tels que l'identification de propriétés élastiques orthotropes à partir d'essais dynamiques [CGS04, Lau05] ou de loi viscoplastique dans des essais à grandes vitesses de déformations [KSMS04].

D'une manière générale l'étude des méthodes d'identification, nous montre qu'on peut distinguer deux types de résolutions, analytique ou numérique, et deux types de mesures, ponctuelle ou de champ. L'identification à partir d'une mesure unique, ponctuelle, ne peut renseigner qu'un paramètre au plus, alors que les mesures de champs permettent d'obtenir plus d'informations. D'autre part, les solutions analytiques n'existent que pour des situations simples, par exemple les poutres minces. Mais sur des échantillons de poutre épaisse ou des plaques et coques, une résolution semi-analytique ou numérique du problème (avec une méthode de type éléments finis par exemple) est nécessaire et il s'agit de méthodes d'identification mixtes expérimentales-numériques. Le principe général, résumé sur la figure 3.1, en est le suivant : à partir d'un jeu de paramètres initiaux, la solution d'un problème direct est évaluée via un modèle numérique. Un résidu est ensuite formé pour comparer ce résultat

avec les données expérimentales de référence, ce qui permet d'avoir une indication sur la qualité de la solution. Ensuite la procédure permet de modifier le jeu de paramètres jusqu'à ce que le critère de comparaison entre les champs numériques et expérimentaux soit satisfait. Cela correspond à un recalage des paramètres du modèle numérique.

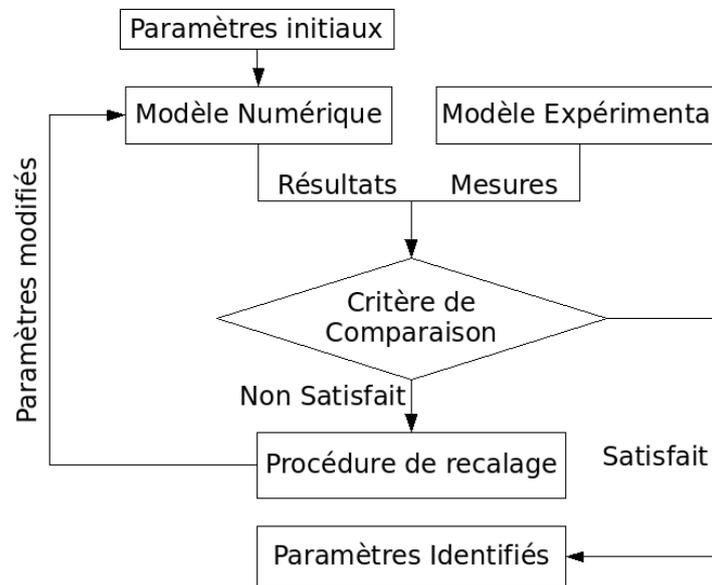


FIG. 3.1 – Principe d'une méthode mixte numérique/expérimentale

Mais les problèmes inverses qui sont résolus par recalage de modèles ne conduisent pas nécessairement à l'identification de paramètres. C'est par exemple le cas lorsqu'un modèle est ajusté pour retrouver des réponses mesurées en introduisant de nouveaux éléments finis ou en modifiant directement les termes des matrices structurales (du modèle spatial). Il n'y a pas d'identification dans cette situation car les modifications introduites n'ont généralement pas de sens physique. Et même lorsque des paramètres physiques du modèle numérique sont sélectionnés, il peut encore ne pas s'agir d'une identification de ceux-ci s'il n'y a pas de réelles certitudes sur leur choix ou s'il n'y a pas autant de données que de paramètres à ajuster. Dans cette dernière situation, le problème est sous-déterminé et les paramètres sont ajustés au sens des moindres-carrés en recherchant leur variation minimale (par rapport à leur valeur initiale). Le résultat n'est alors pas nécessairement consistant : les données d'un essai non incluses dans la phase d'identification ont de grandes chances de ne pas être reproduit par le modèle numérique.

En revanche, nous considérons que des paramètres sont identifiés s'il est certain que ceux-ci constituent les seules inconnues du modèle et qu'il y a suffisamment de données pour les trouver. C'est *a-priori* le cas des problèmes de recalage disposant d'une grande quantité de données expérimentales (typiquement les mesures de champs) aux paramètres peu nombreux et parfaitement connus : le système à résoudre est alors sur-déterminé. Dans ce cas la solution obtenue n'est pas cherchée proche des paramètres initiaux.

Les difficultés liées aux méthodes d'identification sont en général :

- l'identifiabilité : il faut que les paramètres choisis soient assez sensibles pour pouvoir être identifiés (aussi bien dans la procédure numérique que dans le modèle de test où ils doivent "travailler").
- la robustesse : la méthode doit pouvoir intégrer des données bruitées, comme des données ex-

périmentales, et en toute rigueur, il faudrait que la solution soit unique avec une fonction à minimiser convexe.

- la précision : les fonctions objectifs doivent converger vers 0 autour des paramètres réels et l'erreur résiduelle ne doit provenir que des incertitudes expérimentales, et non des erreurs faites par approximations.

Enfin, l'identification ayant pour but principal de renseigner les paramètres d'un phénomène physique, la rapidité d'obtention des résultats doit rester secondaire et ne pas primer sur la qualité des résultats obtenus.

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons identifier les caractéristiques viscoélastiques d'une structure avec une approche par module complexe, basée sur un modèle non paramétrique de l'évolution fréquentielle des caractéristiques matériau. Il nous faut donc identifier les paramètres de la matrice de raideur complexe  $\mathbf{K}(\omega)$ , dépendante de la fréquence. Nous commençons donc cette section avec une revue d'éléments bibliographiques sur les méthodes d'identification, avant de rappeler les principes des méthodes de recalage standards et aptes à appréhender des mesures de champs statiques. Nous proposons ensuite 2 schémas d'identification adaptés pour des données fréquentielles (des FRF). Ceux-ci sont alors évalués avec des données simulées sur des situations de plaques homogènes ou composites de type sandwich.

### Éléments bibliographiques sur l'identification de caractéristiques matériau par mesure de champs

Avec le perfectionnement des méthodes optiques (caméras, laser, ...) et des moyens informatiques (vitesses de transfert de données, capacités de traitement et de stockage), les méthodes de mesure de champ ont connu un essor important ces vingt dernières années. Les domaines d'applications sont vastes, et en se limitant à la mécanique des structures, on trouve par exemple la détection de défauts, l'endommagement, la mesure de forme, de déformations, ... Outre la grande richesse d'informations apportée par ces moyens, leur principal avantage est de mesurer sans contact. Ainsi les structures observées ne sont pas perturbées par une masse, une raideur ou un amortissement additionnel, comme c'est le cas avec des capteurs collés.

Parallèlement au développement des moyens de mesures de champs, nous avons assisté à l'avènement de différentes méthodes d'identifications, aptes à tirer partie des champs ainsi obtenus (cf. [BBC03, AP07] pour des articles de synthèse récents). Ces développements bénéficient d'ailleurs des efforts conjoints d'une communauté structurée en un Groupe De Recherche [GDR]. Parmi les principales méthodes d'identification on retrouve notamment :

- La méthode des champs virtuels (MCV), initialement développée dans [Gré89] et basée sur l'écriture générale du principe des travaux virtuels. Les paramètres matériau à identifier sont factorisés au niveau de la relation de comportement, et le choix de champs virtuels particuliers permet d'obtenir un système inversible. Cette méthode directe a été appliquée dans différentes configurations comme par exemple l'identification de rigidités de matériaux composites dans le plan [PMG02b, PMG02a], hors plan [PG00], ou encore de rigidité et d'amortissement de plaque mince isotrope [GP03, GGP04, GP05, GGP06, Guo07]. Cette méthode étant basée sur l'écriture d'un équilibre, elle présente comme la méthode de recalage par éléments finis dans sa version en forces l'inconvénient de nécessiter un champ complet (y compris au bord) sur une section pour pouvoir exprimer l'équilibre des efforts.
- L'erreur en relation de comportement (*error on constitutive relation*) ; Elle exploite l'idée que les équations d'équilibre et de contraintes cinématiques sont des équations fiables, contrairement à la relation de comportement qui est moins fiable. Ainsi, seule la relation de comporte-

ment est introduite de manière faible dans les équations à résoudre. Cette méthode a été aussi développée en dynamique [CLP98, LC99].

- L'écart à la réciprocité qui consiste à considérer deux champs de raideur différentes, induisant deux champs de déplacements. Des jeux d'écriture permettent ensuite de transformer le système de telle sorte qu'un membre puisse être déterminé en supposant connu un des champs de déplacement, alors que le second membre dépend des caractéristiques à identifier [BC05]. Cette méthode a été appliquée en élasticité et pour de la localisation de fissure [BC05, BBC03].
- Les méthodes de recalage de modèles éléments finis ; Elles sont largement répandues dans le domaine de la mécanique des solides et permettent de résoudre une grande variété de problèmes (statique, dynamique, ...). Différentes approches peuvent être envisagées, suivant le résidu  $\mathbf{R}$  choisi à minimiser, qui doit être représentatif d'un écart entre le modèle numérique et le modèle expérimental (cf. [FM95, MF93, Nat98] et le tableau 3.1) :

Domaine/Résidu	Force	Déplacement
Statique	$\mathbf{K}\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{F}}$	$\mathbf{K}^{-1}\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{U}}$
Modal	$\mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\phi}} - \bar{\omega}^2\mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\phi}}$	$\boldsymbol{\phi} - \bar{\boldsymbol{\phi}}$
Fréquentiel	$\mathbf{Z}\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{F}}$	$\mathbf{Z}^{-1}\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{U}}$

TAB. 3.1 – Résidus en force et en déplacement utilisés en recalage par éléments finis

- Résidu en forces : la méthode est basée sur un résidu en forces (on trouve différentes dénominations dans la littérature comme résidu d'équilibre ou encore méthode d'erreur en entrée pour traduire *force balance method, equation error, equilibrium gap* ou *input residual*). Elle cherche à résoudre

$$\min |\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}| \quad (3.1)$$

ou

$$\min |\mathbf{Z}\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{F}}| \quad (3.2)$$

avec  $\bar{\mathbf{U}}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$  les champs de déplacement et de force mesurés et  $|\bullet|$  est une norme à choisir. Cette approche a été largement utilisée en dynamique avec le modèle modal. Dans ce cas, le champ  $\bar{\mathbf{U}}$  est remplacé par les modes propres expérimentaux qui ont également un sens de déplacements et les fréquences propres expérimentales permettent de construire un champ de forces dynamiques. Dans ce cas, si la méthode expérimentale n'a pas recours à un essai par appropriation, une analyse modale expérimentale est nécessaire en préalable pour identifier les modes propres correspondants au modèle expérimental à partir des FRF mesurées [FH93, MF93].

- Résidu en déplacements : la méthode basée sur un résidu en déplacements ou encore méthode d'erreur en sortie (*output error* ou *output residual, displacement gap*) se base sur la recherche de

$$\min |\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}| \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{U}$  et  $\bar{\mathbf{U}}$  les champs de déplacements calculés et mesurés (respectivement). En dynamique, il est possible de remplacer ces vecteurs par des FRF qui ont un sens de déplacements pour des efforts unitaires [MF93, Ewi00, Lau05], ou par des modes propres. Cette approche a été notamment utilisée pour recalibrer des rigidités de plaques orthotropes [Cug05, CP99].

- Résidu sur des données modales : en dynamique, la multiplicité des champs de FRF ou des modes propres aux différentes fréquences conduit à pouvoir former des résidus de faibles dimensions, comme par exemple :
  - les fréquences propres et/ou les amortissement modaux : c'est le cas des analyses faites sur des échantillons de type poutre ou plaques minces ;
  - les critères de corrélation : le recalage va permettre d'améliorer des critères de corrélation de type fréquences/MAC, GSC/GAC ou FAAC/FRAC par exemple [DS98, ZGI01, PSR07] ;

Une comparaison des méthodes d'identification à partir de mesures de champs est présentée dans [Ami05]. Ce classement sépare les différentes méthodes suivant trois critères : la vérification de l'équilibre sous forme forte ou affaiblie, la vérification de la relation de comportement sous forme forte ou affaiblie, et enfin l'estimation, via le problème direct, de l'écart entre les champs mesuré et calculé. Seules les solutions exactes permettent de vérifier ces trois critères à la fois. Sur ces critères la MCV y est rapprochée de l'écart à la réciprocité, alors que la méthode d'écart à l'équilibre y est vue comme un cas particulier de l'erreur en relation de comportement. Mais l'intérêt d'une méthode mixte expérimentale-numérique basée sur les éléments finis est de disposer de toute la puissance de cet outil en terme de modélisation. Nous retenons cette approche pour nos travaux car elle :

- est bien adaptée à la résolution de problèmes viscoélastiques ;
- est assez flexible pour aborder l'identification de structures très diverses, de formes quelconques et non nécessairement minces ;
- permet de gérer des données partielles, comme par exemple la seule mesure des déplacements hors plans et sur une zone limitée.

Pour son application en dynamique, plusieurs éléments plaident en faveur de l'utilisation directe des FRF pour la définition de la fonction objectif :

- la mesure des FRF est plus aisée que les mesures par appropriations modales ;
- elle évite une analyse modale, et donc des erreurs liées au processus d'identification modale. Par exemple, la référence [MI00] trouve dans une structure constituée de deux plaques soudées une grande variabilité des amortissement modaux identifiés en fonction de la méthode d'analyse expérimentale ;
- elle est applicable à des structures fortement amorties qui ne présentent généralement pas un comportement modal [IVE95] ;
- elle ne nécessite pas d'appairer les modes ;
- elle ne pose pas de problème en cas de modes couplés, comme c'est le cas avec des structures ayant une forte densité modale [Vis92].

Cependant, nous n'avons pas connaissance actuellement d'étude portant sur l'identification des propriétés viscoélastiques à partir d'une méthode mixte numérique/expérimentale se basant sur l'exploitation directe d'une mesure de champ.

## 3.2 Méthodes de recalage et d'identification par éléments finis en dynamique

Nous souhaitons identifier les caractéristiques viscoélastiques du matériau par une approche non-paramétrique de type module complexe. Le vecteur des paramètres choisis  $\mathbf{p}$  est donc celui des caractéristiques viscoélastiques, tel que  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} K \\ G \end{bmatrix}$ , qui permettent de conserver un caractère linéaire à faiblement non-linéaire et sont bien adaptés à l'identification du module d'Young et du coefficient de

Poisson dynamiques [Pri00]. Nous commençons cette section par une présentation des méthodes classiques basées sur les éléments finis pour l'identification. Celles-ci diffèrent par le choix des fonctions objectifs. Nous revenons sur leurs avantages et leurs inconvénients, avant de proposer une formulation plus générale avec des matrices de pondérations à choisir. Nous pouvons ensuite discuter différents aspects, comme la prise en compte de mesures partielles ou incomplètes, ou la connaissance imparfaite des conditions aux limites. La méthode à retenir devra être capable de traiter des données de mesures dynamique et d'exploiter une quantité importante de données expérimentales.

### 3.2.1 Méthode en forces

Initialement présentée dans [KC71], la méthode en forces consiste à minimiser l'écart entre les efforts obtenus avec le modèle EF et ceux mesurés. Le résidu est de la forme

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}\bar{\mathbf{U}} \quad (3.4)$$

Cette méthode a pour avantage de ne pas nécessiter la recherche d'un champ de déplacement numérique. Il n'y a donc pas de résolution de système à faire pour obtenir ce champ et seuls des produits matriciels sont nécessaires. De plus, dans le cas d'une décomposition linéaire dans les paramètres  $\mathbf{p}$  de la matrice de raideur (en 2D contraintes planes par exemple) avec  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} Q \\ G \end{bmatrix}$ , la résolution du problème d'optimisation associé est directe, elle est obtenue sans itération. Le résidu s'écrit

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{F}} + \omega^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{U}} - (\mathbf{K}_Q \cdot Q + \mathbf{K}_G \cdot G) \bar{\mathbf{U}} \quad (3.5)$$

ce qui conduit à résoudre le système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_Q \bar{\mathbf{U}} & \mathbf{K}_G \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ G \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{F}} + \omega^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{U}} \quad (3.6)$$

Le système étant sur-déterminé, il s'agit alors d'une résolution au sens des moindres carrés linéaires.

Dans un cas plus général, nous pouvons poser une fonction objectif  $J$  à minimiser des paramètres  $\mathbf{p}$  telle que

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{p})^H \mathbf{R}(\mathbf{p}) \quad (3.7)$$

dont le développement limité de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$J(\mathbf{p}_{k+1}) = J(\mathbf{p}_k) + \frac{\partial J(\mathbf{p}_k)^H}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k)^H \frac{\partial^2 J(\mathbf{p}_k)}{\partial \mathbf{p}^2} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \quad (3.8)$$

ou encore

$$J_{k+1} = J_k + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} \Big|_k^H \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^H \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{p}^2} \Big|_k \Delta \mathbf{p} \quad (3.9)$$

Le gradient de cette fonction et son hessien sont donné par

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{p}^2} = \mathbf{R}^H \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}^2} + \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \simeq \mathbf{R}^H \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}^2}, \quad (3.10)$$

le terme du second ordre étant généralement négligé. La minimisation de la fonction objectif conduit alors à

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \right) \Delta \mathbf{p} = - \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{R} \quad (3.11)$$

ou encore

$$\Delta \mathbf{p} = - \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \right)^+ \mathbf{R} = - \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right)^+ (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.12)$$

avec  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}}$  puisque seule la matrice de raideur dépend des paramètres<sup>1, 2</sup>. Ici,  $(\bullet)^+$  est l'opérateur pseudo-inverse, et nous l'évaluons plutôt avec une décomposition en valeur singulière pour améliorer l'efficacité numérique. Cette stratégie de résolution correspond à une méthode de moindres-carrés non-linéaire également appelée méthode de Gauss-Newton. Dans le cas d'une décomposition linéaire dans les paramètres de la matrice de raideur, nous retrouvons bien avec cette dernière expression le résultat donné par l'équation 3.6.

Des études d'identification de propriétés de composites orthotropes à partir de méthodes mixtes expérimentales-numériques [Cug05, Lau05] indiquent que le choix de l'évaluation des gradients par une méthode de type différences finies est celui qui est le plus adapté, avec une solution assez précise pour une mise en oeuvre simple et un coût de calcul raisonnable. En dynamique, il y a autant de champs à traiter que de fréquences mesurées et il devient préférable dans ce cas de retenir la forme analytique de l'équation 3.12.

D'autre part, il est important de noter que l'équation du résidu en forces 3.4 impose la mesure de tous les ddl du modèle numérique pour former le résidu. Une alternative consiste à passer par une méthode d'expansion des données mesurées, comme présenté dans la section 2.3.3. Cependant, ces techniques étant généralement dépendantes des paramètres choisis, la méthode en forces peut devenir très non linéaire. D'autre part, elle est très sensible au bruit de mesure [CFN84, PLHA05]. Ceci s'explique par le fait que les mesures  $\bar{\mathbf{U}}$  sont multipliées par la matrice de raideur dynamique dans la formulation du résidu. Or l'ordre de grandeur des termes de cette matrice est très élevé, ce qui amplifie nécessairement le bruit présent dans les mesures.

### 3.2.2 Méthode en déplacements

La méthode en déplacements consiste à minimiser l'écart entre les déplacements obtenus avec le modèle EF et ceux mesurés. Le résidu s'écrit

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \quad (3.13)$$

Il est donc nécessaire de résoudre un problème éléments finis pour obtenir le champ de déplacement numérique afin d'évaluer le résidu. Ceci rendait cette méthode trop coûteuse en temps de calcul lors des premiers développements des méthodes de recalage. Cependant, elle présente l'avantage de pouvoir être appliquée sur des données partielles ou incomplètes. La sélection des ddl coïncidents entre le modèle numérique et le modèle de test permet de former le résidu sans avoir besoin de passer par une expansion des données. Le résidu est alors de la forme

<sup>1</sup> Avec des paramètres  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} K \\ G \end{bmatrix}$  complexes, si  $\mathbf{K} \simeq \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial K} K + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial G} G$  nous avons les propriétés suivantes :  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Re[K]} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial K}$  et  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Im[G]} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial G}$ .

<sup>2</sup> Pour une paramétrisation directe des modules dynamiques comme par exemple  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}$ , nous avons  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \bar{\mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial G} \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix}$ . Mais si un modèle viscoélastique à 3 paramètres est retenu pour  $E$  et  $G$ , avec par exemple  $\mathbf{p}^T = [ E_0 \quad E_1 \quad \eta_E \quad G_0 \quad G_1 \quad \eta_G ]$ , nous avons  $\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial E_0} & \frac{\partial E}{\partial E_1} & \frac{\partial E}{\partial \eta_E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial G}{\partial G_0} & \frac{\partial G}{\partial G_1} & \frac{\partial G}{\partial \eta_G} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{p}$  et  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \bar{\mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial G} \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial E_0} & \frac{\partial E}{\partial E_1} & \frac{\partial E}{\partial \eta_E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial G}{\partial G_0} & \frac{\partial G}{\partial G_1} & \frac{\partial G}{\partial \eta_G} \end{bmatrix}$ .

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \quad (3.14)$$

avec  $\mathbf{B}$  une matrice booléenne de sélection des ddl pour ne prendre en considération que les noeuds coïncidents entre les modèles.

Suivant une stratégie de résolution par moindres-carrés non-linéaires, le gradient de cette méthode s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Z}^{-1}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F} \quad (3.15)$$

et devient

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} = -\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{F} = -\mathbf{B}\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \quad (3.16)$$

lorsque seule la matrice de raideur dépend des paramètres et pour un effort unitaire. Le système à résoudre prend alors la forme

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \mathbf{B}\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right)^+ (\mathbf{B}\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.17)$$

où  $\left( \mathbf{B}\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right)^+$  est appelée matrice d'itération.

Comparée à la méthode en forces, la méthode en déplacements a l'avantage d'être moins sensible à un bruit aléatoire et de ne pas nécessiter l'expansion des données mesurées [CFN84, PLHA05]. Mais l'évaluation du résidu est indirecte puisqu'elle requiert une résolution du problème numérique et la minimisation doit être réalisée sur une fonction non-linéaire ce qui implique des coûts numériques *a-priori* plus importants.

Cependant, le gradient trouvé dans cette méthode introduit de fortes discontinuités en dynamique, au voisinage des fréquences de résonance. La figure 3.2 illustre ces discontinuités par le tracé des gradients du résidu en partie réelle et imaginaire par rapport au module de cisaillement sur un exemple de plaque en PVC. Ceci provient du fait que le champ  $\mathbf{U}$  correspond à celui du modèle numérique et présente nécessairement des fréquences de résonance différentes de celles mesurées tant que les paramètres ne sont pas identifiés. L'expérience numérique montre que ce phénomène ne permet pas la convergence du processus itératif de recalage en dynamique. Cette méthode n'est donc pas envisageable dans notre situation.

### 3.2.3 Méthodes avec résidus pondérés

Nous nous intéressons donc à établir d'autres méthodes, variantes de la méthode en forces ou en déplacements, afin de pallier à leurs inconvénients. La stratégie adoptée consiste à introduire différentes pondérations dans la formulation de la fonction objectif.

#### 3.2.3.1 Méthode en forces pondérée en déplacements

Pour simplifier la présentation nous considérons dans un premier temps que tous les ddl du modèle numérique sont mesurés. De manière à généraliser les méthodes en forces et en déplacements, et à avoir une plus grande latitude dans le processus itératif, nous introduisons deux matrices de pondérations,  $\mathbf{W}_R$  et  $\mathbf{W}_J$  dans la formulation du problème.

Tout d'abord, en choisissant un résidu en déplacements pondéré par  $\mathbf{W}_R$

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}_R (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.18)$$

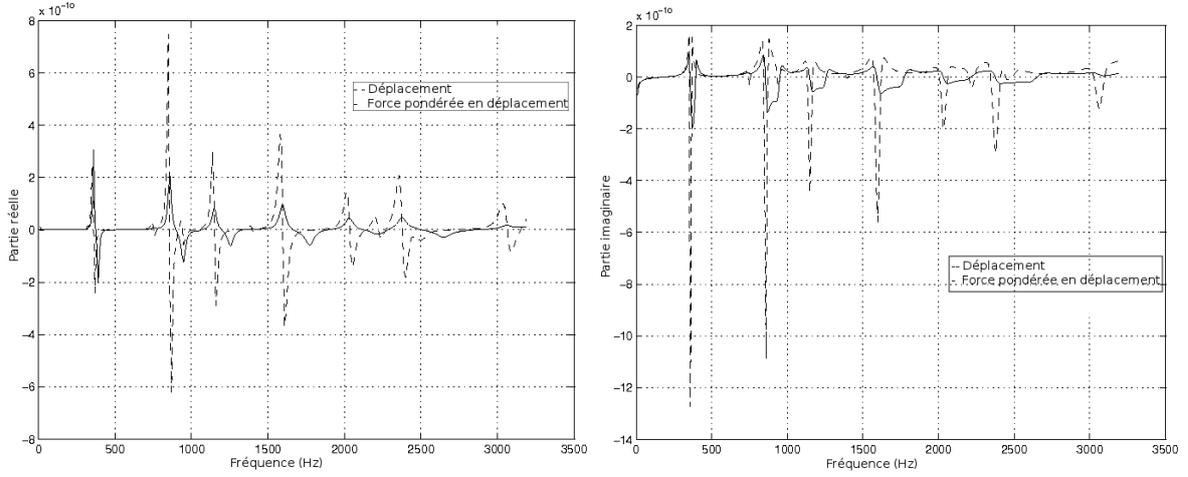


FIG. 3.2 – Discontinuités des gradients pour les méthodes en déplacements et en forces pondérées

nous remarquons que si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{I}$ , alors  $\mathbf{R}$  correspond à un résidu en déplacements et que si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{Z}$  nous formons un résidu en forces :  $\mathbf{R} = \mathbf{Z}(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}\bar{\mathbf{U}}$ .

D'autre part, la fonction objectif peut elle aussi être pondérée par  $\mathbf{W}_J$

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{p})^H \cdot \mathbf{W}_J^H \cdot \mathbf{W}_J \cdot \mathbf{R}(\mathbf{p}) \quad (3.19)$$

avec un développement de la méthode qui néglige les variations de  $\mathbf{W}_J$ . Le gradient de cette fonction est donné par

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{W}_J^H \cdot \mathbf{W}_J \mathbf{R} \quad (3.20)$$

et son hessien par

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{p}^2} = \mathbf{R}^H \mathbf{W}_J^H \mathbf{W}_J \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}^2} + \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{W}_J^H \mathbf{W}_J \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.21)$$

Négligeant les termes du second ordre le système à résoudre s'écrit

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{W}_J^H \mathbf{W}_J \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \right) \Delta \mathbf{p} = - \frac{\partial \mathbf{R}^H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{W}_J^H \mathbf{W}_J \mathbf{R} \quad (3.22)$$

ou

$$\Delta \mathbf{p} = - \left( \mathbf{W}_J \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} \right)^+ \mathbf{W}_J \cdot \mathbf{R} \quad (3.23)$$

Le report de l'expression 3.18 dans cette dernière expression conduit à

$$\Delta \mathbf{p} = - \left( \mathbf{W}_J \left( \frac{\partial \mathbf{W}_R}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{W}_R \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{U} \right)^+ \mathbf{W}_J \cdot \mathbf{W}_R (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.24)$$

et nous pouvons déduire différentes formules d'actualisation des paramètres en fonction des matrices de pondérations  $\mathbf{W}_R$  et  $\mathbf{W}_J$ . Parmi les choix simples :

- si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{W}_J = \mathbf{I}$ , nous retrouvons le résultat de la méthode en déplacements

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right)^+ (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.25)$$

- si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{Z}$  et  $\mathbf{W}_J = \mathbf{I}$ , nous retrouvons le résultat de la méthode en forces

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right)^+ (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.26)$$

- si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{W}_J = \mathbf{Z}$ , nous retrouvons un résidu en forces avec une matrice d'itération semblable à celle de la méthode en déplacements

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right)^+ (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.27)$$

- si  $\mathbf{W}_R = \mathbf{Z}$  et  $\mathbf{W}_J = \mathbf{H}$ , nous retrouvons un résidu en déplacements avec une matrice d'itération semblable à celle de la méthode en forces

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right)^+ \mathbf{H} (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.28)$$

ou

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right)^+ (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.29)$$

Comme la matrice d'itérations de la méthode en forces ne conduit pas à de fortes discontinuités au voisinage des résonances expérimentales (les discontinuités sont seulement situées aux résonances), et que le résidu en déplacements est le moins sensible au bruit aléatoire, cette dernière expression constitue un bon compromis en dynamique. Pour un bruit aléatoire, un meilleur choix de  $\mathbf{W}_R$  serait de prendre l'inverse de la matrice de covariance des mesures [FM95], mais celle-ci est difficile à estimer. Nous retenons donc l'expression 3.28 pour résoudre notre problème inverse. Comme il est possible de retrouver facilement cette expression d'itération en pondérant simplement le résidu de la méthode en force, nous définissons la méthode d'identification qui utilise cette expression d'itération comme une *méthode en forces pondérée en déplacements*. La figure 3.2 compare les gradients de cette méthode avec ceux de la méthode en déplacements sur un exemple.

Après quelques développements, il est possible de constater que les deux expressions d'itérations *a-priori* différentes- proposées de manière séparée par Lin et Ewins dans la référence [LE90, Vis92] (méthode *Pseudo Output Error Method* et *Response Force Method (RFM)*) et par la référence [PRGS02] correspondent à notre méthode en forces pondérées en déplacement. Cependant, le cadre théorique que nous proposons ici doit nous permettre de décliner d'autres versions de cette méthode suivant les impératifs de mesure ou de modélisation numérique. C'est ce que nous montrons par la suite.

### 3.2.3.2 Méthode en forces pondérée en déplacements pour des données incomplètes

La méthode en forces pondérée en déplacements présentée a été développée sans prendre en compte les différences entre les modèles en terme de ddl. Compte tenu de l'expression 3.28, nous

pouvons procéder à une expansion des données de mesure  $\bar{\mathbf{U}}_R$  suivie d'une sélection des ddl à retenir par l'opérateur  $\mathbf{B}$ .

Pour la phase d'expansion et dans le cas d'une mesure de champ, nous pouvons supposer que l'excitation n'est généralement pas réalisée sur la face mesurée. Le vecteur des efforts mesurés est de la forme  $\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_C \end{bmatrix}$  et le vecteur des données expérimentales étendues par expansion dynamique s'écrit

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_{CC}^{-1}\mathbf{Z}_{CR} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_R + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{CC}^{-1}\mathbf{f}_C \end{bmatrix} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}_R + \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{F}}} \quad (3.30)$$

En revenant au résidu choisi avec l'opérateur  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}(\mathbf{H}(\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}\bar{\mathbf{U}})) \quad (3.31)$$

nous avons

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{F}} - (\mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}_R + \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{F}}})) = \mathbf{B}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}_R - \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{F}}}) \quad (3.32)$$

Mais avec la partition des ddl choisis, l'opérateur  $\mathbf{B}$  est de la forme

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

de sorte que

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_R \quad (3.34)$$

Nous voyons ainsi que la phase d'expansion des données n'aura aucune conséquence sur la procédure d'identification, puisque nous pouvons avec cette stratégie ne conserver que les données réellement mesurées. Cette remarque importante, ne pourrait toutefois pas être formulée avec une autre stratégie d'expansion des données comme la méthode SEREP, puisque nous avons vu dans le paragraphe 2.3.3 que cette méthode effectuerait un lissage des données dans notre situation (avec une mesure de champ, il y aura toujours plus de ddl retenus que de modes propres dans la base d'expansion). Cette remarque justifie donc notre choix d'utiliser une méthode d'expansion dynamique des données expérimentales de champ.

Pour terminer le développement dans cette situation, comme nous avons quelques libertés sur la matrice d'itération dans une méthode de Gauss-Newton, nous conservons finalement pour cette méthode la formule d'actualisation suivante :

$$\Delta\mathbf{p} = \left( \mathbf{B}\mathbf{H} \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{p}} \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}_R \right)^+ (\mathbf{B}\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_R). \quad (3.35)$$

### 3.2.3.3 Méthode en forces filtrées

Nous nous intéressons maintenant à l'identification en présence de conditions aux limites mal connues. Cela peut être le cas par exemple d'un échantillon avec un capteur piezo collé ou fixé plus ou moins rigidement à un support, par une liaison boulonnée par exemple, ou encore, dans une mesure nettement moindre par une liaison par élastiques. De telles liaisons comportent non seulement des rigidités mais également des amortissements mal connus, ce qui est autant problématique dans notre étude.

L'idée que nous retenons dans cette situation est que ces conditions aux limites problématiques vont produire un défaut d'équilibre ou encore des réactions inconnues dans les zones incriminées. Ainsi, de même qu'il est possible de construire un opérateur  $\mathbf{B}$  de sélection des ddl mesurés, nous

pouvons construire un opérateur  $\mathbf{C}$ , matrice booléenne de sélection ou de filtrage des réactions inconnues. Cet opérateur doit donc être nécessairement appliqué sur un résidu homogène en force, avec  $\mathbf{W}_R = \mathbf{I}$ . Mais comme il reste souhaitable de ne pas être trop sensible au bruit aléatoire malgré tout, nous proposons de pondérer le résidu ainsi obtenu par  $\mathbf{H}$  pour rendre ce résidu homogène à un déplacement, comme dans la méthode en forces pondérée en déplacement. Enfin, comme il reste également souhaitable de conserver le caractère symétrique des matrices de pondérations pour des raisons de stratégies de calcul numérique, nous proposons la matrice de pondération

$$\mathbf{W}_J = \mathbf{C}^T \mathbf{H} \mathbf{C} \quad (3.36)$$

Avec cette pondération l'actualisation des paramètres s'écrit

$$\Delta \mathbf{p} = \left( \mathbf{C}^T \mathbf{H} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right)^+ \mathbf{C}^T \mathbf{H} \mathbf{C} (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad (3.37)$$

dans une méthode que nous appelons *méthode en forces filtrées*.

D'un point de vue numérique, cette expression d'itération ne peut cependant pas être évaluée aussi simplement puisqu'il n'est pas possible de former la matrice  $\mathbf{H}$  directement (le stockage en mémoire et le coût de calcul sont trop importants). Pour solutionner ce problème, nous résolvons d'abord le système

$$\mathbf{Z} \mathbf{U}_1 = \mathbf{C} \left[ (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{Z} \bar{\mathbf{U}}) \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{p}} \bar{\mathbf{U}} \right] \quad (3.38)$$

pour obtenir  $\mathbf{U}_1$ , qu'il suffit de multiplier par  $\mathbf{C}^T$  pour obtenir chaque membre de cette expression.

Cette méthode, variante de la méthode en forces pondérée en déplacement, a donc la particularité de ne pas faire intervenir les efforts liés aux conditions limites. Elle permet de restreindre l'étude à une zone de mesure, mais n'est cependant pas applicable si une partie du champ n'est pas mesurée dans cette zone. En effet, comme les stratégies d'expansion font intervenir les quantités d'un modèle non recalé, les erreurs introduites produiront des résidus d'équilibres néfastes à l'identification des paramètres recherchés. Ces conclusions sont confirmées par expérimentations numériques : nous retrouvons bien les paramètres recherchés avec un modèle EF de plaque libre et des données issues d'un modèle EF comportant des conditions limites de raideur et d'amortissement sur les bords.

D'un point de vue équivalent, on peut également considérer que la modélisation n'est pas correcte dans les zones incriminées et que cela induit des bruits systématiques. Cette procédure permet donc d'éliminer un bruit systématique moyennant la connaissance des zones à la modélisation incertaine.

### 3.2.3.4 Mise en oeuvre des méthodes d'identification

Nous concluons cette section par plusieurs points généraux relatifs à la mise en oeuvre numérique de l'identification des paramètres.

Les relations de mise à jour des paramètres (comme par exemple 3.28) sont valables en théorie pour chaque fréquence. Mais d'un point de vue numérique, seul un système de rang plein peut conduire à une identification des paramètres. A priori, il est donc nécessaire de cumuler les relations de  $n$  lignes spectrales (ou fréquences) pour identifier  $n$  paramètres. Et pour détecter la dépendance en fréquence de ces derniers, ces  $n$  fréquences doivent être consécutives, de manière à ne faire l'hypothèse de constance des paramètres que sur cette gamme réduite de fréquence. Mais si un seul paramètre est très sollicité dans la réponse dynamique à une fréquence donnée, par exemple si l'on considère le paramètre matériau  $G$  près d'une fréquence de résonance d'un mode de torsion, le cumul des relations de 2 lignes spectrales consécutives ne peut pas produire 2 équations réellement indépendantes, puisque

la réponse dynamique ne change pas radicalement d'une ligne spectrale à la suivante. Contrairement à la statique où la configuration de test peut être imposée pour faire travailler tous les paramètres à identifier, certaines fréquences peuvent poser problème en dynamique.

De plus, les bruits toujours présents expérimentalement, incitent plutôt à cumuler les relations afin d'obtenir une solution fiable. Nous considérons donc dans notre procédure une plage de fréquences, par exemple  $[f_{p-q} \quad f_{p+q}]$ , en faisant l'hypothèse qu'ils sont constants sur ces plages. La largeur de ces plages doit être le résultat d'un compromis entre la fiabilité des valeurs obtenues et une variabilité peu importante des paramètres. Le résidu formé numériquement est alors de la forme

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{f_{p-q}} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{f_p} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{f_{p+q}} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

avec, pour le schéma donné par 3.35 par exemple, le système suivant à résoudre au sens des moindres-carrés :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{BH}(f_{p-q}) \frac{\partial \mathbf{K}(f_{p-q})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{T}(f_{p-q}) \bar{\mathbf{U}}_R(f_{p-q}) \\ \vdots \\ \mathbf{BH}(f_p) \frac{\partial \mathbf{K}(f_p)}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{T}(f_{p-q}) \bar{\mathbf{U}}_R(f_p) \\ \vdots \\ \mathbf{BH}(f_{p+q}) \frac{\partial \mathbf{K}(f_{p+q})}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{T}(f_{p-q}) \bar{\mathbf{U}}_R(f_{p+q}) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{p}(f_p) = \begin{bmatrix} \mathbf{BU}(f_{p-q}) - \bar{\mathbf{U}}_R(f_{p-q}) \\ \vdots \\ \mathbf{BU}(f_p) - \bar{\mathbf{U}}_R(f_p) \\ \vdots \\ \mathbf{BU}(f_{p+q}) - \bar{\mathbf{U}}_R(f_{p+q}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A convergence, il permet de trouver les valeurs des paramètres  $\mathbf{p}$  à la fréquence centrale  $f_p$ .

D'autre part, les paramètres étant complexes, le système à résoudre, de la forme

$$d\mathbf{R}\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{R} \quad (3.41)$$

l'est également. En séparant les parties réelles et imaginaires de la façon suivante :

$$\Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Re[\Delta \mathbf{p}] \\ \Im[\Delta \mathbf{p}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Re[\mathbf{R}] \\ \Im[\mathbf{R}] \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

le système à résoudre devient purement réel, de la forme

$$\begin{bmatrix} \Re[d\mathbf{R}] & -\Im[d\mathbf{R}] \\ \Im[d\mathbf{R}] & \Re[d\mathbf{R}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re[\Delta \mathbf{p}] \\ \Im[\Delta \mathbf{p}] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Re[\mathbf{R}] \\ \Im[\mathbf{R}] \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Nous adoptons donc une décomposition du résidu en valeurs réelle et imaginaire. Ce choix risque de favoriser les fortes amplitudes, près des pics de résonances, lorsqu'il y en a dans la plage de fréquences considérée, au détriment des faibles amplitudes (anti-résonances). Cependant, le choix d'une décomposition des données en amplitude logarithmique et phase, qui serait plus cohérent avec la représentation observée des FRF, serait aussi plus délicat car la phase n'est connue qu'à  $2\pi$  près. Or le déroulement de phase appliqué à des données expérimentales est extrêmement délicat.

En pratique, nous ajoutons aussi un contrôle  $\alpha$  du pas dans la direction  $\Delta \mathbf{p}$  pour assurer la diminution de la fonction objectif. Enfin, nous allons dans notre étude considérer des modèles sans conditions

limites en déplacements. Les réponses obtenues correspondent alors à une superposition de 2 mouvements, l'un se décomposant sur la base des modes rigides et l'autre sur la base des modes flexibles. Or les modes rigides  $\Phi_r$  sont associés à une énergie de déformation nulle et n'apportent pas d'information sur nos paramètres. Nous pourrions donc les filtrer via un opérateur de projection  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\Phi_r \mathbf{r}^T}{\mathbf{r}^T \Phi_r}$  lorsque ce sera nécessaire [GR96].

### 3.3 Évaluation de la méthode d'identification en forces pondérées en déplacements

Nous nous intéressons maintenant à l'évaluation de notre méthode d'identification mixte expérimentale-numérique en forces pondérée en déplacements. Pour cela, nous utilisons des données simulées numériquement à la place des mesures expérimentales et nous allons tester l'identification de différents matériaux (isotrope, orthotrope et sandwich) en fonction de ces données. Un point important à vérifier en particulier concerne l'identifiabilité des paramètres choisis dans les configurations déterminées.

#### 3.3.1 Matériau isotrope

Nous nous intéressons d'abord à l'évaluation de notre méthode d'identification en utilisant des mesures simulées numériquement. Pour cela, nous considérerons une plaque rectangulaire de  $150 \times 100$  mm<sup>2</sup> et d'épaisseur 5,1 mm. Les propriétés matériau choisies sont proches de celles d'un PVC :  $\Re[E] = 4,3$  GPa,  $\eta_E = 3\%$ ,  $\nu = 0,38$  et  $\rho = 1461$  kg/m<sup>3</sup>.

Pour simuler les résultats expérimentaux, le modèle de référence est formé par  $90 \times 60 \times 3$  éléments de type H20, avec une excitation ponctuelle, légèrement excentrée (de 5mm par rapport à la largeur de la plaque et 10 mm par rapport à sa longueur). Ce modèle nous permet d'assurer des valeurs représentative du milieu continu (réel). Comme nous n'utilisons pas ce modèle pour l'identification mais un modèle formé à partir d'un maillage  $30 \times 20 \times 1$  élément H8coque, cela nous permet de détecter si l'erreur de modèle est problématique.

##### 3.3.1.1 Évolution du résidu

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'évolution du résidu dans le voisinage de la solution de référence (connue). La convexité de la surface obtenue permet de fixer les idées sur l'identifiabilité des paramètres. Comme nous avons deux paramètres complexes (ou 4 paramètres indépendants) nous observons plusieurs surfaces : la première en fixant l'un des deux paramètres à sa valeur optimale et en faisant varier l'autre au niveau des ses parties réelle et imaginaire, et la seconde réciproquement. Les résultats obtenus pour des paramètres  $K$  et  $G$  sont respectivement présentés sur les figures 3.3 et 3.4. La surface formée par la norme du résidu en fonction des paramètres  $K$  et  $G$  indique clairement qu'elle est beaucoup plus sensible en partie réelle qu'en partie imaginaire. De plus, la sensibilité est beaucoup plus importante pour le module de cisaillement (aussi bien sur ses parties réelle qu'imaginaire) que pour le module de compressibilité complexe. Les figures 3.5 et 3.6 présentent l'évolution du résidu en fonction du module d'Young complexe et du coefficient de Poisson, obtenus par post-traitement des résultats précédents. Il apparaît que l'identifiabilité de ces paramètres est assez bonne.

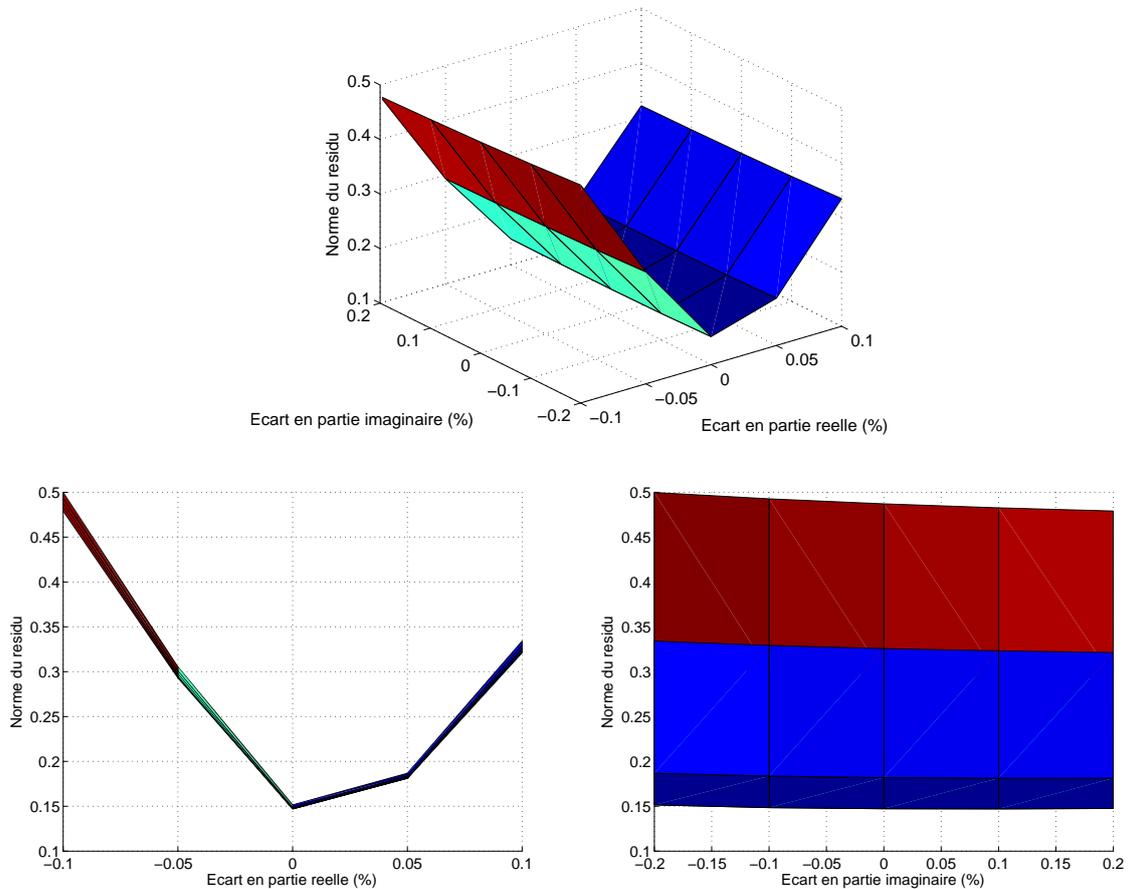


FIG. 3.3 – Norme du résidu en fonction du module de compressibilité complexe

### 3.3.1.2 Erreurs de modèles

Ensuite, nous nous intéressons à l'identification des paramètres à partir de mesures simulées sans bruit. Afin de s'assurer que les modèles sont consistants entre eux, nous réalisons une identification avec les paramètres optimaux comme valeurs initiales de la procédure itérative. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2. Ils sont obtenus avec notre modèle H8coque en considérant des paramètres constants sur l'ensemble des fréquences de 100 à 3000 Hz et que seuls les ddls de translation hors plan d'une seule face sont connus.

Les résultats d'identification à partir d'une solution perturbée sont présentés dans le tableau 3.3. Les valeurs choisies comme solution de départ pour la procédure itérative sont présentées dans le tableau 3.4. Cette perturbation initiale modifie tous les paramètres de façon significative, avec de plus grandes incertitudes sur les parties imaginaires, tout en restant plausible comme l'atteste l'exemple de FRF obtenue avec ces valeurs, figure 3.7a. Les résultats, différents de par la tolérance d'arrêt de la procédure, sont proches de ceux obtenus précédemment. Un exemple de FRF recalée est présenté sur la figure 3.7b. Ces résultats indiquent que les modèles de référence et H8coque sont cohérents entre eux, et confirment la mauvaise identifiabilité de  $K$ , surtout en partie imaginaire. Mais les résultats  $E$  et  $\nu$  sont corrects malgré tout.

Les résultats obtenus avec des éléments de coque Q4  $\gamma 24$  à partir des paramètres initiaux optimaux

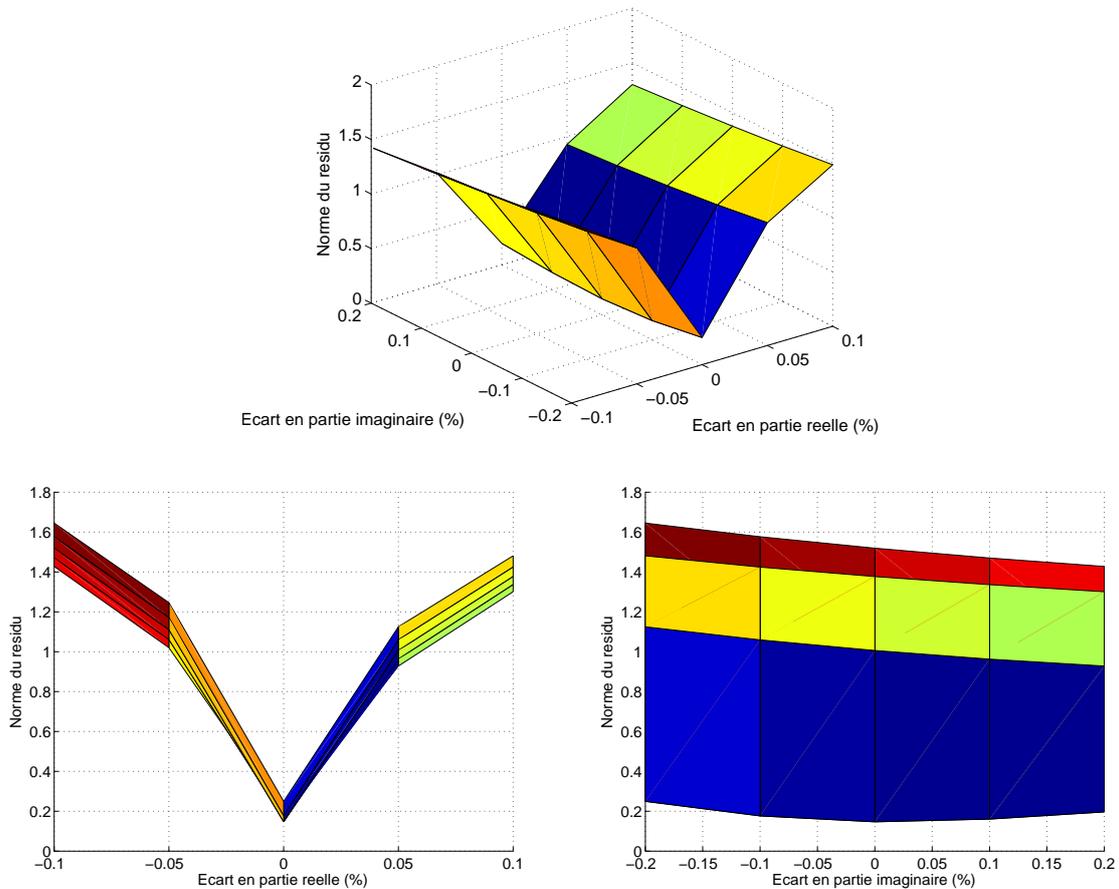


FIG. 3.4 – Norme du résidu en fonction du module de cisailment complexe

et perturbés sont présentés dans les tableaux 3.5 et 3.6. Dans ce cas, les données de la face mesurée sont considérées comme celles des noeuds de la surface moyenne. L'analyse des résultats montrent que cette modélisation introduit des erreurs plus importantes qu'avec un élément H8coque, notamment pour  $G$ . L'utilisation d'un modèle coque intégrant une relation de comportement 2D contraintes planes peut donc nécessiter un traitement particulier des données expérimentales mesurées sur les peaux du matériau.

### 3.3.1.3 Plages en fréquence retenues

La quantité d'information à considérer, en terme de lignes fréquentielles doit être évaluée pour l'identification à partir de données de réponse en fréquences. Nous nous intéressons dans cette partie à l'influence du nombre de plage (ou plutôt à leur largeur, et donc le nombre de pas en fréquence considéré, ce qui revient à la taille du système à résoudre) sur l'identification. Nous avons déjà vu précédemment les résultats obtenus pour une seule plage en fréquence, 100-3000 Hz en ne considérant que 25 ddls de translation hors plan d'une face de la plaque. Ces 25 ddls ne sont pas choisis au hasard mais sont répartis sur la plaque de manière à permettre une analyse modale de celle-ci et une identification des modes propres.

Pour considérer plusieurs plages en fréquence, nous avons d'abord basé notre choix sur les pics

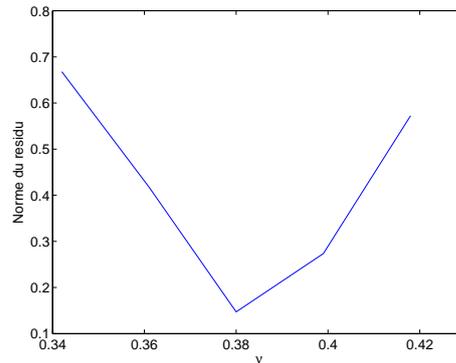
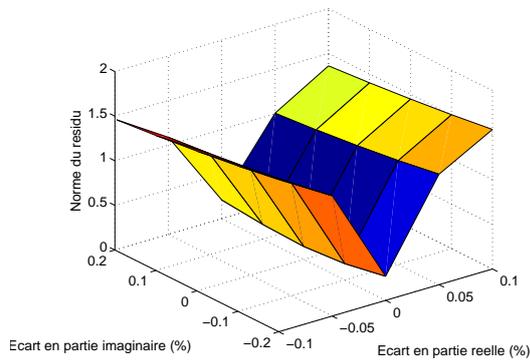


FIG. 3.5 – Norme du résidu en fonction de E

FIG. 3.6 – Norme du résidu en fonction de  $\nu$

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,13 \cdot 10^9$	2,66	$1,79 \cdot 10^8$	$2,01 \cdot 10^8$	12,10	3	3,28
G (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,56 \cdot 10^9$	-0,03	$4,67 \cdot 10^7$	$4,65 \cdot 10^7$	-0,59	3	2,98
E (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,31 \cdot 10^9$	0,18	$1,29 \cdot 10^8$	$1,29 \cdot 10^8$	0,38	3	3,01
$\nu$	0,38	0,38	0,77	0	$3 \cdot 10^{-4}$		0	0,08

TAB. 3.2 – Identification sans bruit à partir de la solution de référence

présents dans la gamme de fréquences considérée. Cette division intuitive vise à inclure plusieurs modes dans chaque plage, et donc au moins un mode de flexion et de torsion dans chacune, afin que les paramètres matériau soient bien sollicités. Ces plages sont 100-630Hz, 630-1160Hz, 1160-2050Hz et 2050-3000Hz. Les résultats d'identification pour  $K$  et  $G$  sont présentés sur la figure 3.8. Le retour aux caractéristiques  $E$  et  $\nu$  sont donnés sur la figure 3.9. Ils indiquent que l'identification est correcte, sauf sur la première plage de fréquences.

Un second choix, lié cette fois-ci à des considérations sur l'évolution possible des paramètres matériau, nous conduit à considérer des plages de 200Hz. Les résultats pour  $K$  et  $G$  sont présentés sur la figure 3.10 et ceux en  $E$  et  $\nu$  sont présentés sur la figure 3.11. Ils montrent que les paramètres sont assez bien identifiés, à l'exception également des premières plages de fréquences.

### 3.3.1.4 Nombre de ddls retenus

Un autre facteur à considérer est celui du nombre de ddls mesurés pour l'identification. Pour cela, nous avons retenus 3 jeux différents de ddls mesurés :

- tous les ddl (u,v et w) sont mesurés sur les deux faces (3906 ddls) ;
- tous les ddl (u,v et w) sont mesurés sur une face (1953 ddls) ;
- seuls les ddl hors plan (w) sont mesurés sur une face (651 ddls).

Les résultats pour  $K$  et  $G$  sont présentés sur la figure 3.12 et leurs transformations en  $E$  et  $\nu$  sont présentés sur la figure 3.13. Ils montrent que, dans toutes les configurations, les paramètres sont bien identifiés avec moins de 1% d'erreur sur la partie réelle de  $E$ , moins de 5% sur sa partie imaginaire et moins de 4% sur  $\nu$ . Mais ils ne permettent pas de dégager une configuration (en terme de nombre de ddls inclus dans le recalage) plus favorable que les autres.

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Départ	Ecart (%)	Réf.	Départ	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,14 \cdot 10^9$	2,75	$1,79 \cdot 10^8$	$2,07 \cdot 10^8$	15,81	3	3,38
G (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,56 \cdot 10^9$	-0,04	$4,67 \cdot 10^7$	$4,64 \cdot 10^7$	-0,80	3	2,98
E (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,31 \cdot 10^9$	0,18	$1,29 \cdot 10^8$	$1,30 \cdot 10^8$	0,47	3	3,01
$\nu$	0,38	0,38	0,80	0	$4 \cdot 10^{-4}$		0	0,11

TAB. 3.3 – Recalage sans bruit à partir de la solution perturbée

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K	$5,97 \cdot 10^9$	$5,37 \cdot 10^9$	-10	$1,79 \cdot 10^8$	$8,96 \cdot 10^7$	-50	3	1,67
G	$1,56 \cdot 10^9$	$1,87 \cdot 10^9$	+20	$4,67 \cdot 10^7$	$7,48 \cdot 10^7$	+60	3	4,00
E	$4,30 \cdot 10^9$	$5,03 \cdot 10^9$	16,89	$1,29 \cdot 10^8$	$1,89 \cdot 10^8$	46,39	3	3,76
$\nu$	0,38	0,34	-9,45	0	$-3,3 \cdot 10^{-3}$		0	-0,95

TAB. 3.4 – Paramètres initiaux

### 3.3.1.5 Identification à partir de données bruitées

Pour tester la robustesse de l'identification, un échantillon de bruit aléatoire normal gaussien de moyenne nulle et d'écart type égal à 20% est ajouté aux données de référence (c.à.d. aux parties réelle et imaginaire). Ce bruit, unique, est arbitrairement très important car il est conservé pour l'ensemble des tests de manière à obtenir des résultats comparables entre-eux et significatifs, mais sans avoir de sens statistique (1 seul échantillon). La démarche suivie pour investiguer la qualité de l'identification est la même que précédemment en l'absence de bruit.

**Une seule plage en fréquence pour tous les ddls d'une face** Les résultats d'identification obtenus avec la seule connaissance du champ hors plan d'une face et en partant des paramètres optimaux sont présentés dans le tableau 3.7. La mauvaise sensibilité du paramètre  $K$  dégrade la solution obtenue, mais les résultats obtenus pour  $E$  et  $\nu$  restent acceptables (<1,5% d'erreur). Les résultats d'identification en partant des paramètres perturbés sont présentés dans le tableau 3.8. La partie imaginaire de  $K$ , bien que très mal identifiée, ne perturbe toujours pas beaucoup les valeurs de  $E$  et  $\nu$  qui sont toujours correctement identifiées (<2% d'erreur).

**Quatre plages et 25 ddls d'une face** Avec 25 ddls retenus et les quatre plages sélectionnées précédemment la quantité d'informations utilisée pour l'identification varie cette fois de 6650 à 11900 points (d'espace et fréquences). Les résultats d'identification obtenus sont présentés sur la figure 3.14 pour  $K$  et  $G$  et sur la figure 3.15 pour  $E$  et  $\nu$ . Ils sont similaires à ceux obtenus sans bruit ajouté.

**Plages de 200 Hz et 25 ddls d'une face** Les résultats d'identification obtenus pour  $K$  et  $G$  avec les 25 ddls et pour des plages en fréquence de 200 Hz sont présentés sur la figure 3.16. Les paramètres  $E$  et  $\nu$  sont présentés sur la figure 3.17. Ces résultats sont moins bons que précédemment car l'information disponible est réduite à 2500 informations complexes. Les paramètres  $K$  et  $G$  sont moins bien identifiés, et la répercussion sur les paramètres  $E$  et  $\nu$  est plus importante que précédemment, surtout en ce qui concerne la partie imaginaire de  $E$ .

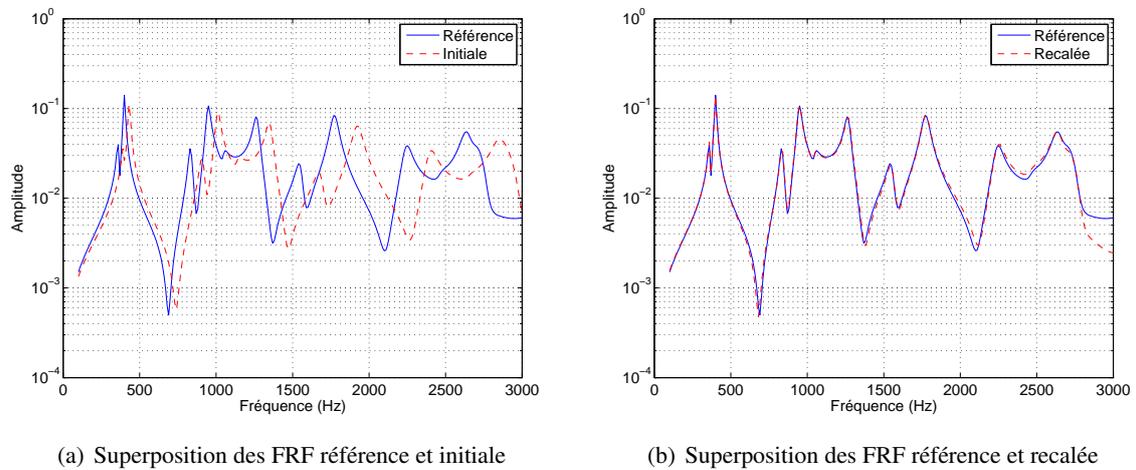


FIG. 3.7 – Exemple de FRF de référence, initiale et recalée

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,01 \cdot 10^9$	0,70	$1,79 \cdot 10^8$	$1,56 \cdot 10^7$	-12,88	3	2,59
G (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,53 \cdot 10^9$	-2,10	$4,67 \cdot 10^7$	$4,77 \cdot 10^7$	2,12	3	3,13
E (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,22 \cdot 10^9$	-1,88	$1,29 \cdot 10^8$	$1,30 \cdot 10^8$	0,99	3	3,09
$\nu$	0,38	0,38	0,80	0	$-6 \cdot 10^{-4}$		0	-0,15

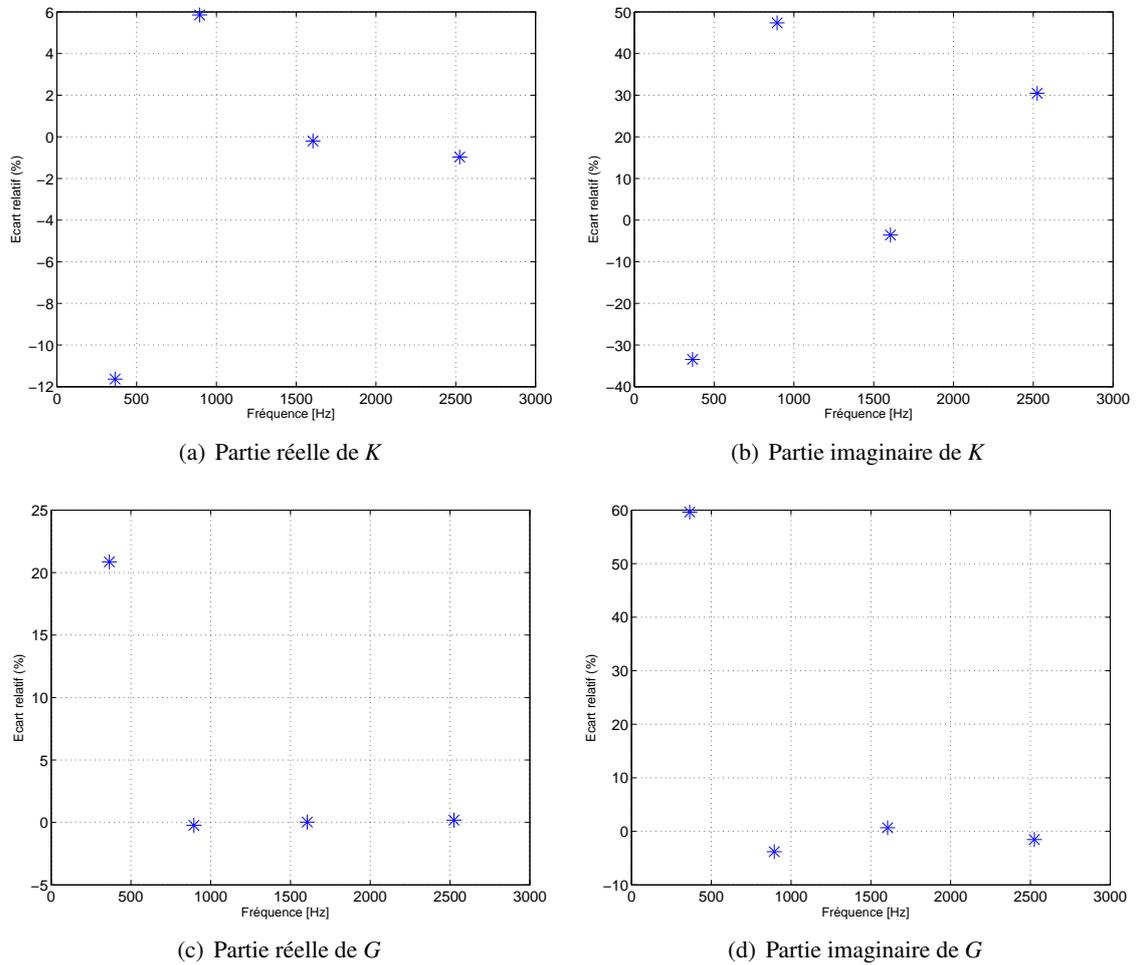
TAB. 3.5 – Identification sans bruit à partir de la solution de référence - élément q4  $\gamma_{24}$

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,02 \cdot 10^9$	0,73	$1,79 \cdot 10^8$	$1,53 \cdot 10^7$	-14,59	3	2,54
G (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,53 \cdot 10^9$	-2,04	$4,67 \cdot 10^7$	$4,79 \cdot 10^7$	2,47	3	3,14
E (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,22 \cdot 10^9$	-1,82	$1,29 \cdot 10^8$	$1,31 \cdot 10^8$	1,18	3	3,09
$\nu$	0,38	0,38	0,80	0	$-6 \cdot 10^{-4}$		0	-0,17

TAB. 3.6 – Recalage sans bruit à partir de la solution perturbée - élément q4  $\gamma_{24}$

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf.	Identifié
K (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,14 \cdot 10^9$	2,75	$1,79 \cdot 10^8$	$2,46 \cdot 10^8$	37,42	3	Ref.
G (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,56 \cdot 10^9$	-0,09	$4,67 \cdot 10^7$	$4,60 \cdot 10^7$	-1,62	3	2,95
E (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,31 \cdot 10^9$	0,13	$1,29 \cdot 10^8$	$1,31 \cdot 10^8$	1,35	3	3,04
$\nu$	0,38	0,38	0,82	0	$11 \cdot 10^{-4}$		0	0,30

TAB. 3.7 – Identification avec bruit à partir des paramètres optimaux

FIG. 3.8 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures et 4 plages de fréquences pour  $K$  et  $G$ 

Module	Partie réelle			Partie imaginaire			Amort.(%)	
	Réf.	Identifié	Ecart (%)	Réf	Identifié	Ecart (%)	Réf	Identifié
$K$ (Pa)	$5,97 \cdot 10^9$	$6,15 \cdot 10^9$	3,05	$1,79 \cdot 10^8$	$4,51 \cdot 10^8$	151,73	3	Ref.
$G$ (Pa)	$1,56 \cdot 10^9$	$1,56 \cdot 10^9$	-0,08	$4,67 \cdot 10^7$	$4,19 \cdot 10^7$	-10,28	3	2,69
$E$ (Pa)	$4,30 \cdot 10^9$	$4,31 \cdot 10^9$	0,17	$1,29 \cdot 10^8$	$1,31 \cdot 10^8$	1,94	3	3,05
$\nu$	0,38	0,38	0,98	0	$5 \cdot 10^{-3}$		0	1,29

TAB. 3.8 – Identification avec bruit à partir des paramètres perturbés

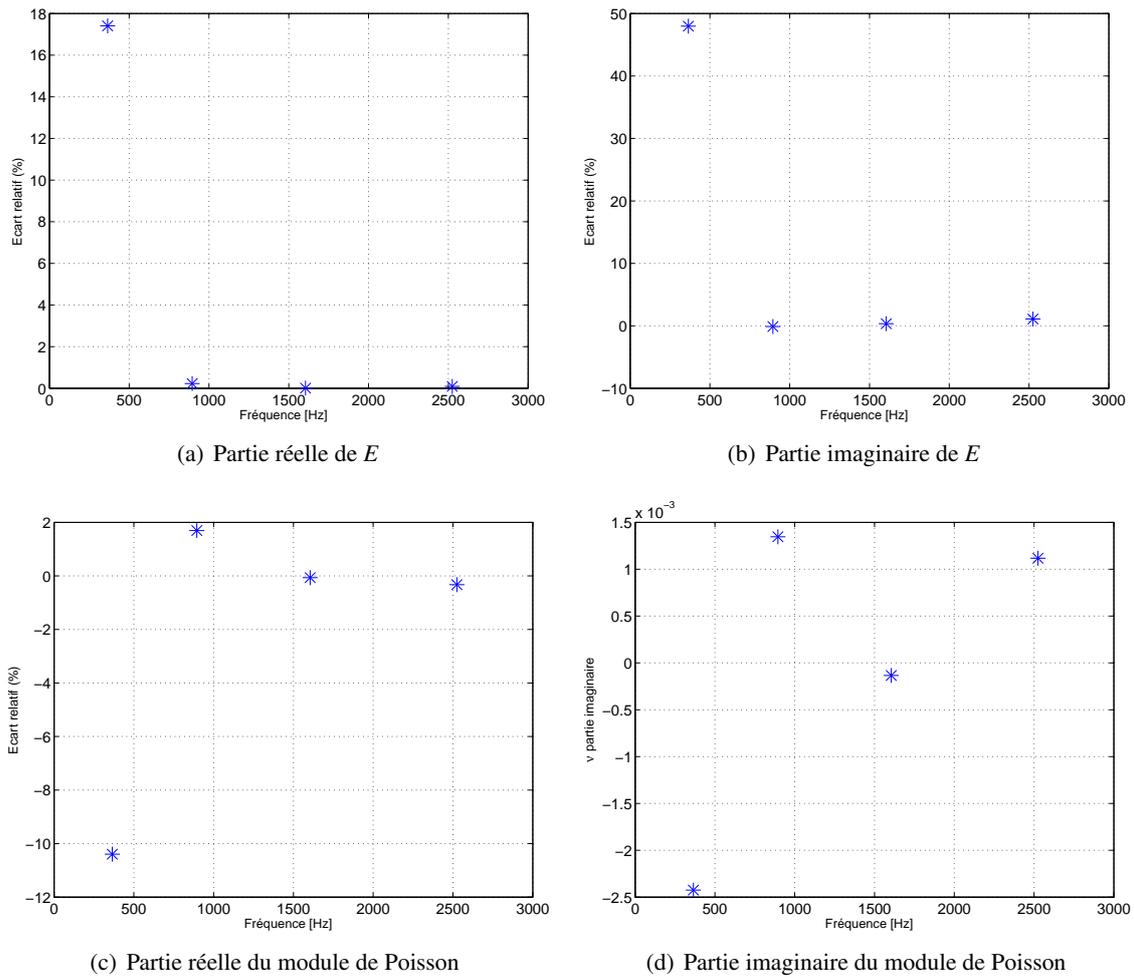


FIG. 3.9 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures et 4 plages de fréquences pour  $E$  et  $\nu$

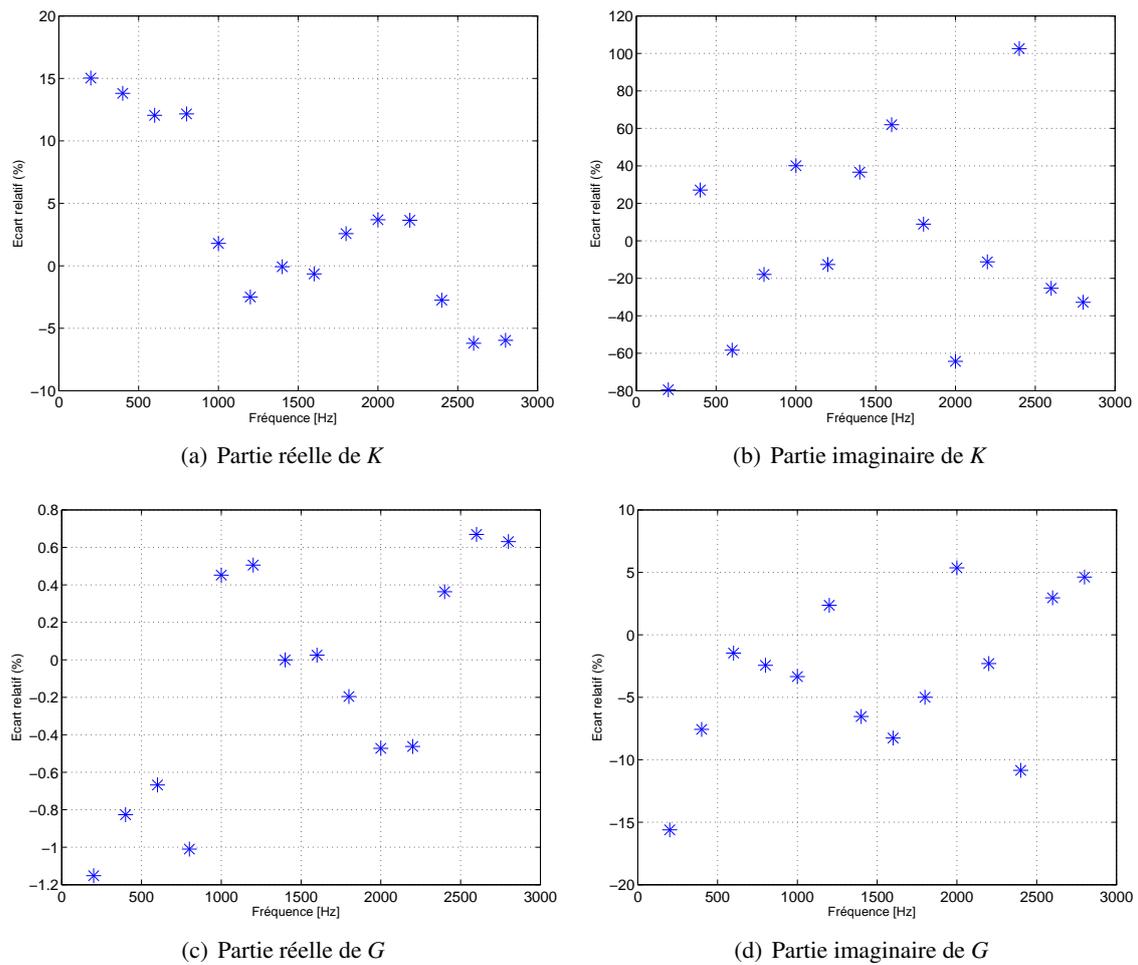


FIG. 3.10 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures par plages de 200Hz pour  $K$  et  $G$

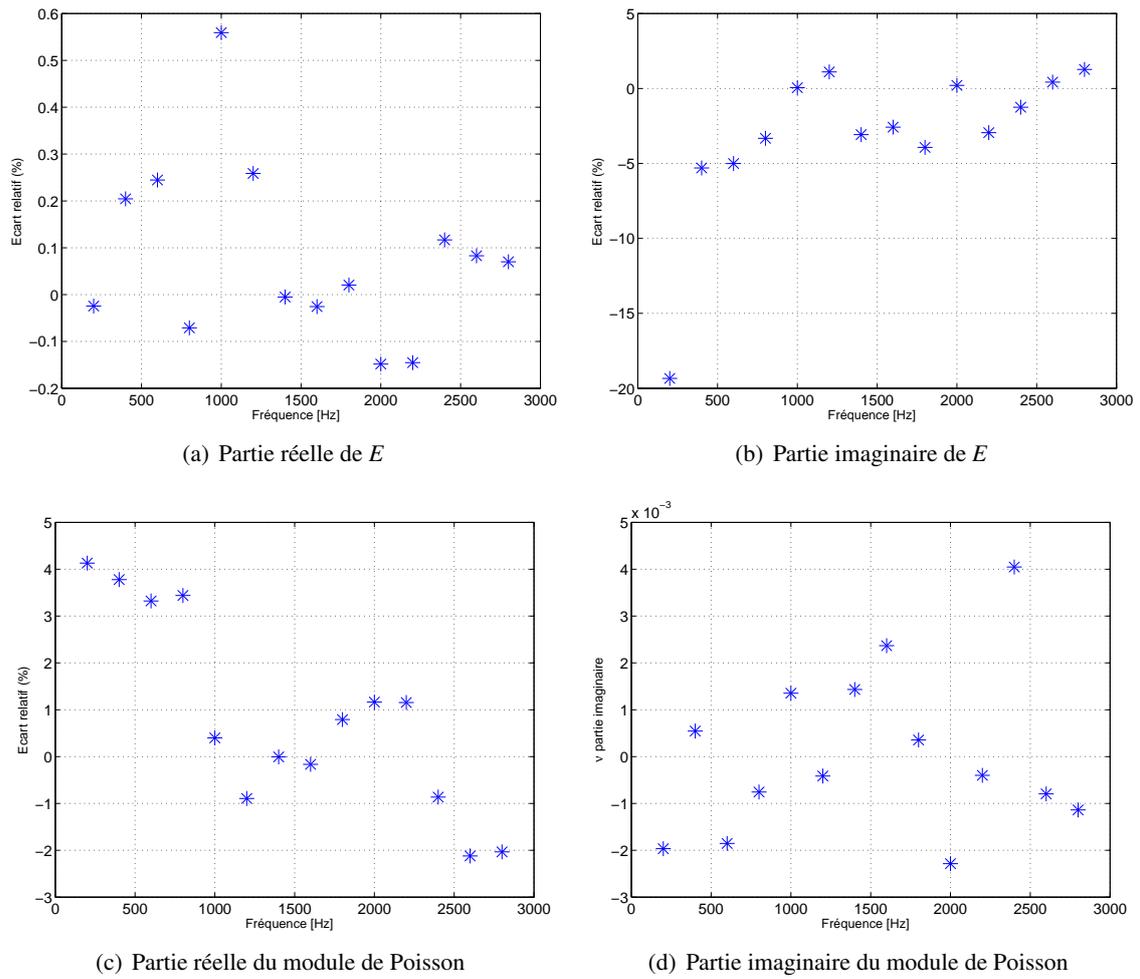


FIG. 3.11 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures par plages de 200Hz pour  $E$  et  $\nu$

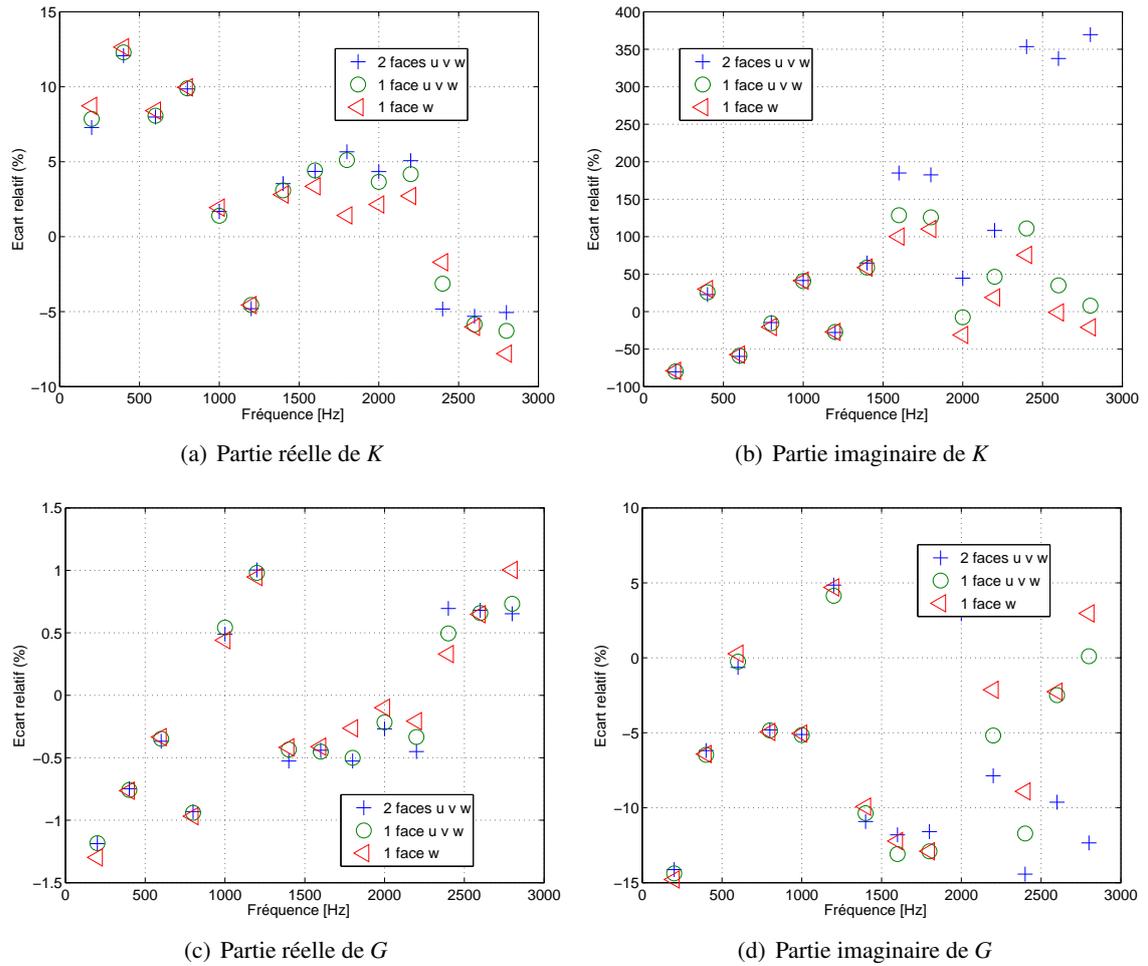


FIG. 3.12 – Résultats d'identification pour différents ensembles de points de mesures et par plages 200Hz pour  $K$  et  $G$

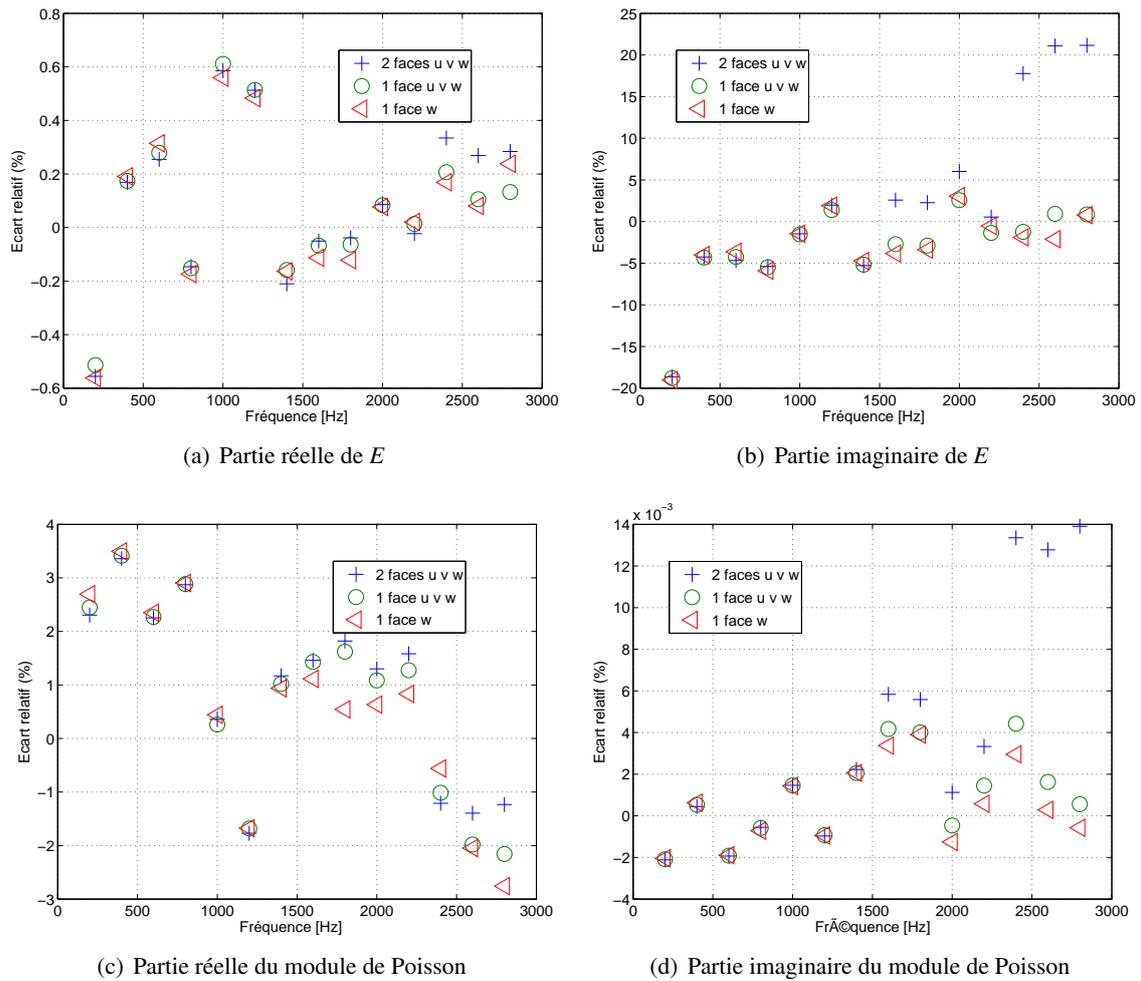


FIG. 3.13 – Résultats d'identification pour différents ensembles de points de mesures et par plages 200Hz pour  $E$  et  $\nu$

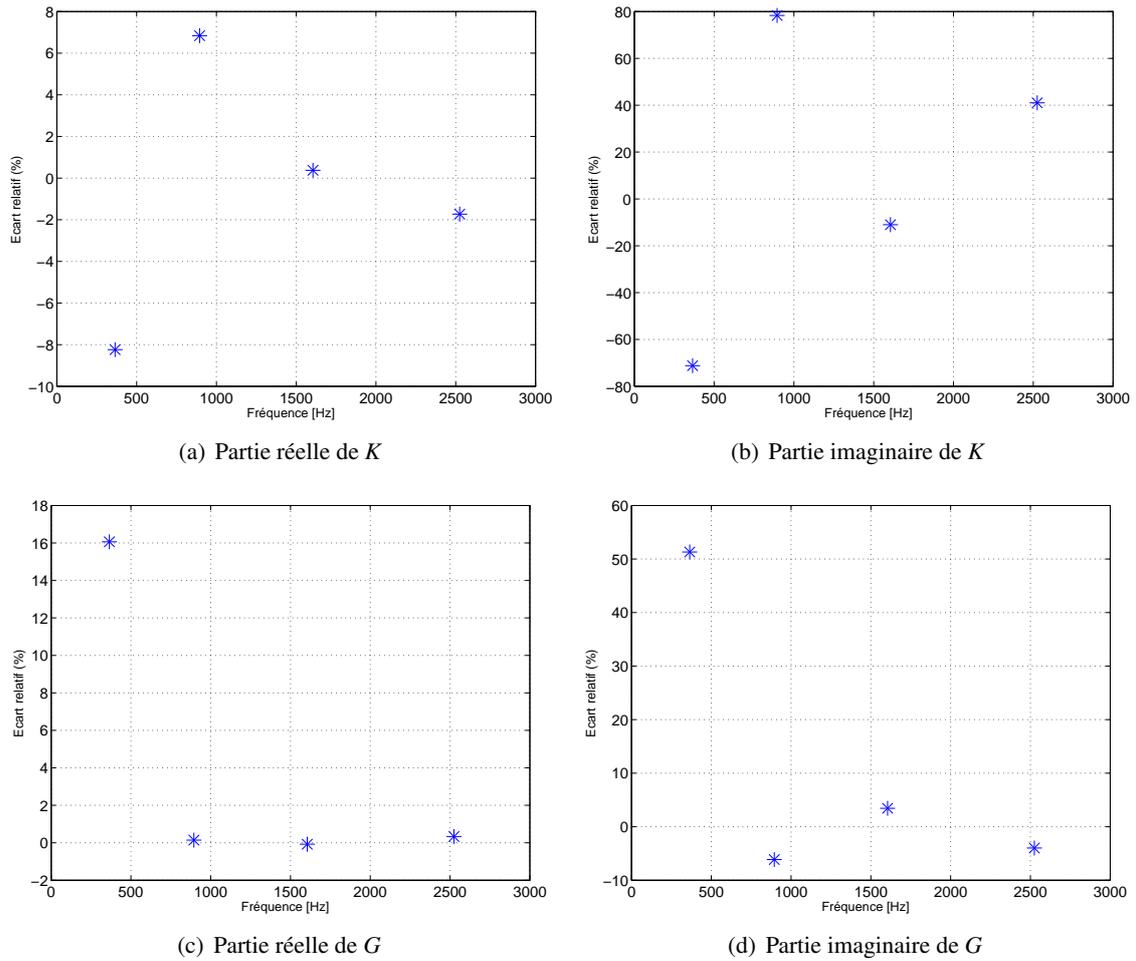


FIG. 3.14 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures et 4 plages pour  $E$  et  $v$  en présence de bruits

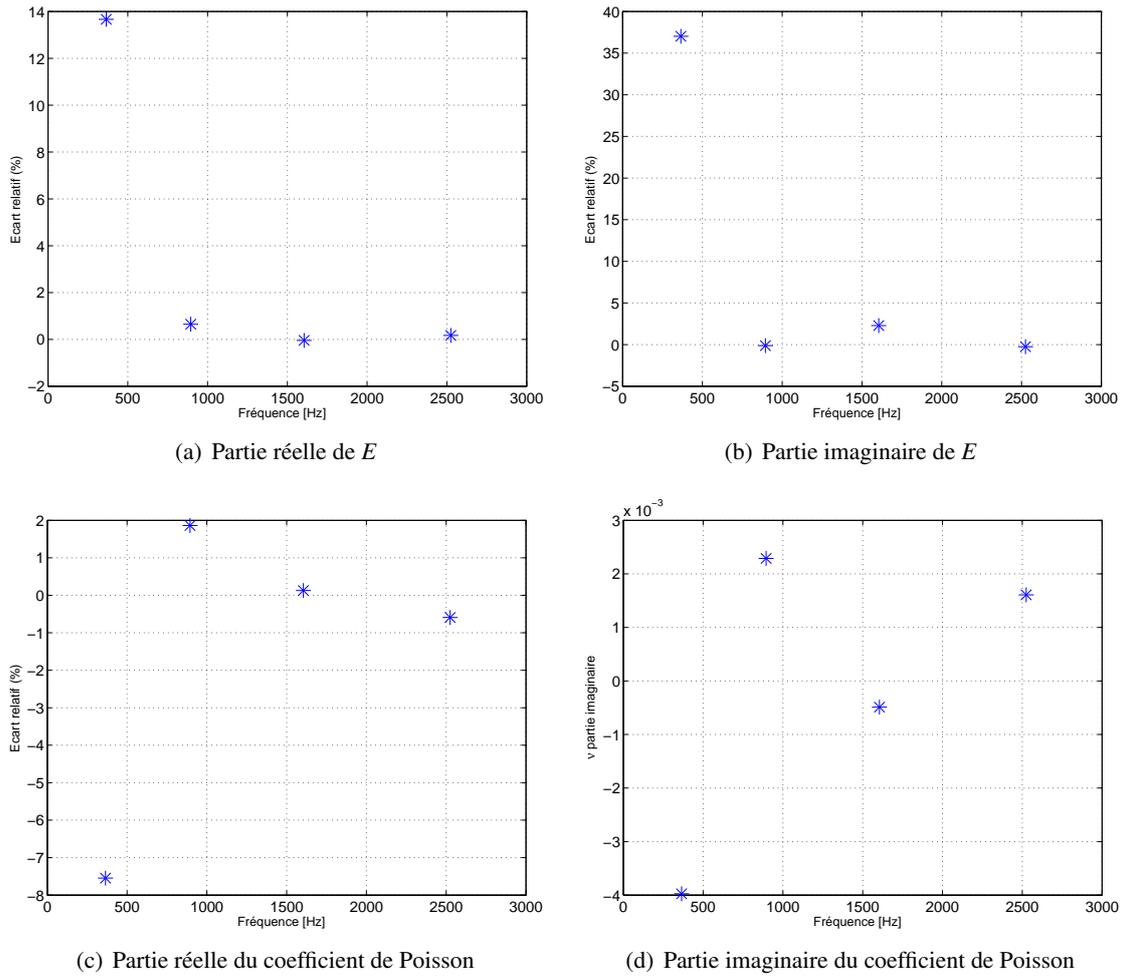


FIG. 3.15 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures et 4 plages pour  $E$  et  $\nu$  en présence de bruits

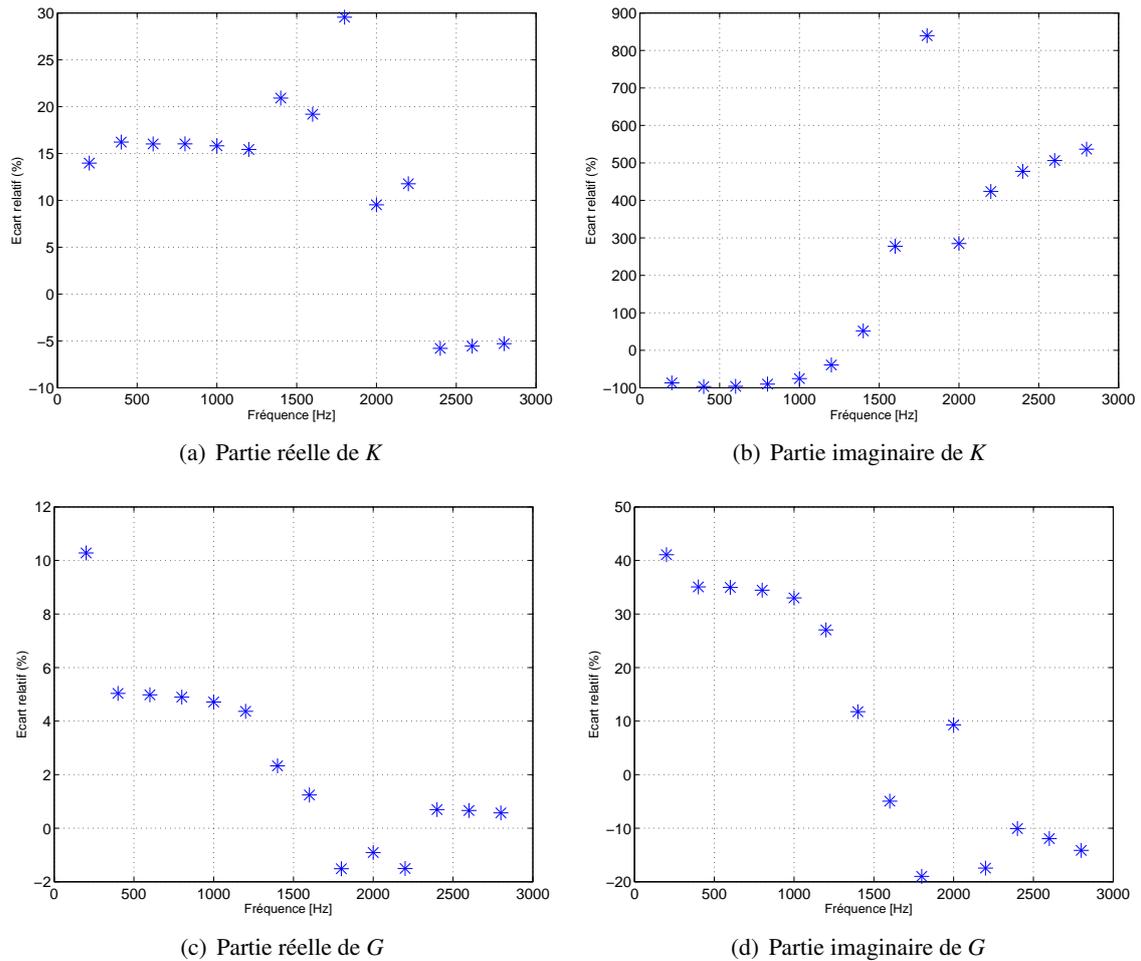


FIG. 3.16 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures par plages de 200Hz pour  $E$  et  $v$  en présence de bruits

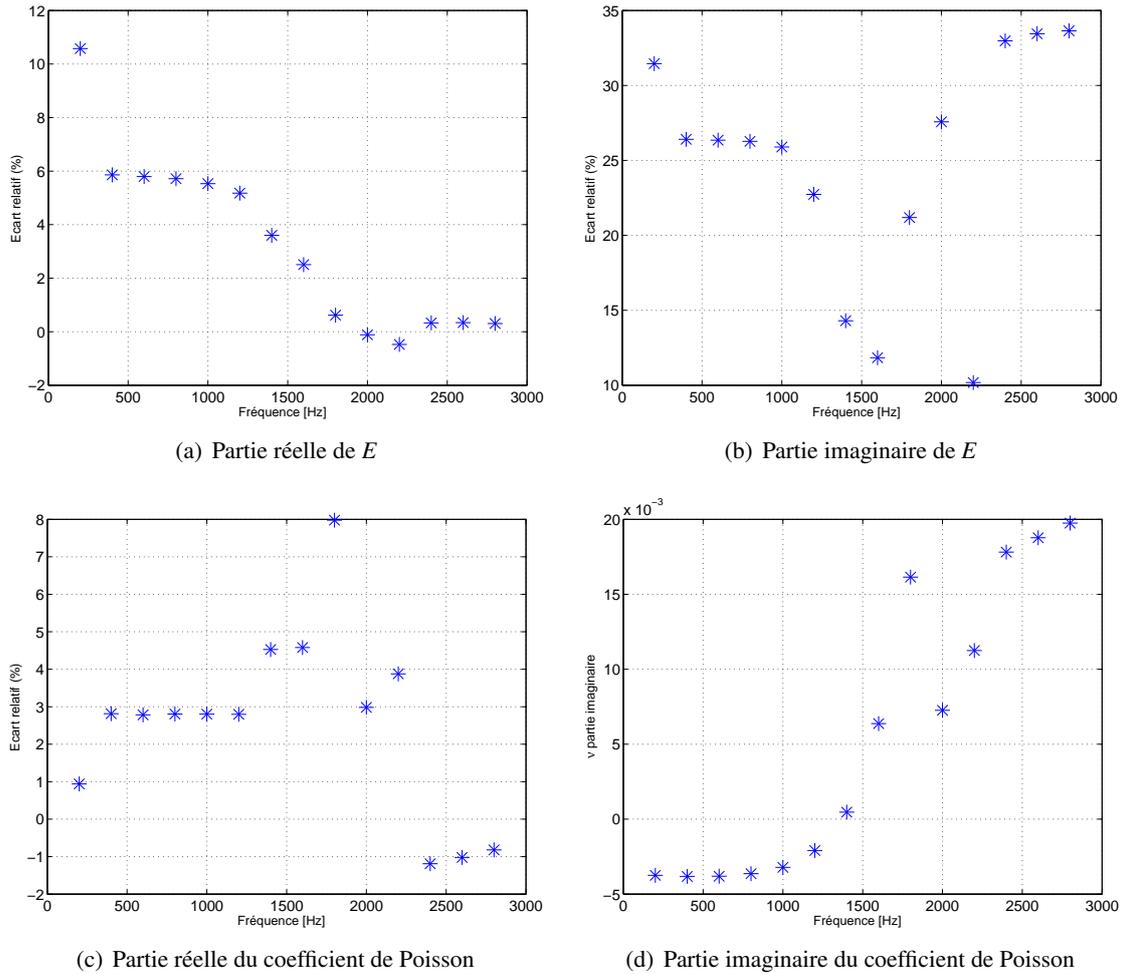


FIG. 3.17 – Résultats d'identification pour 25 points de mesures par plages de 200Hz pour  $E$  et  $\nu$  en présence de bruits

**Plages de 200 Hz et nombre de ddls variable** Les résultats d'identification pour différents choix de ddls mesurés et des plages de fréquences de 200 Hz sont présentés sur la figure 3.18 pour les paramètres  $K$  et  $G$ . Les résultats pour  $E$  et  $\nu$  sont présentés sur la figure 3.19. Il apparaît que l'augmentation du nombre de points permet d'améliorer nettement l'identification puisqu'avec seulement 25 ddls nous avons constaté que les résultats n'étaient pas satisfaisants. Cependant, les différentes configurations testées ici, qui impliquent de 65100 à 390600 informations complexes, ne permettent pas d'en mettre une en défaut par rapport aux autres. En présence de bruits, l'identification est toujours un peu moins bonne avec la réduction des plages en fréquences que pour l'ensemble des fréquences : les paramètres  $K$  et  $G$  sont moins bien identifiés, et la répercussion sur les paramètres  $E$  et  $\nu$  est plus importante, surtout pour la partie imaginaire de  $E$ .

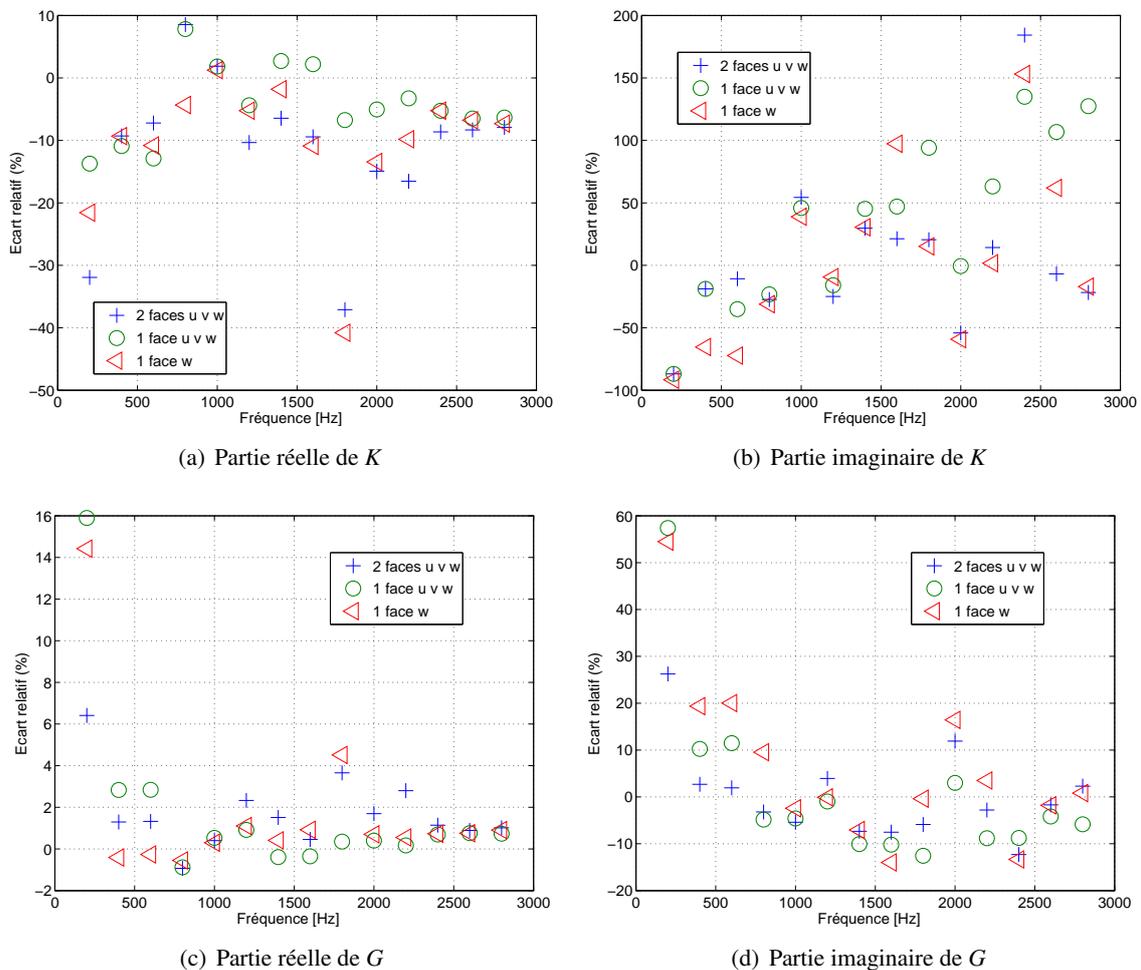


FIG. 3.18 – Résultats d'identification par plages 200Hz et différents ensembles de points de mesures pour  $K$  et  $G$  en présence de bruits

### 3.3.2 Matériau orthotrope

Nous nous intéressons maintenant à l'identification de propriétés de matériaux orthotropes. L'objectif visé ici est de montrer la faisabilité (ou non) d'une telle identification et le cas échéant de valider

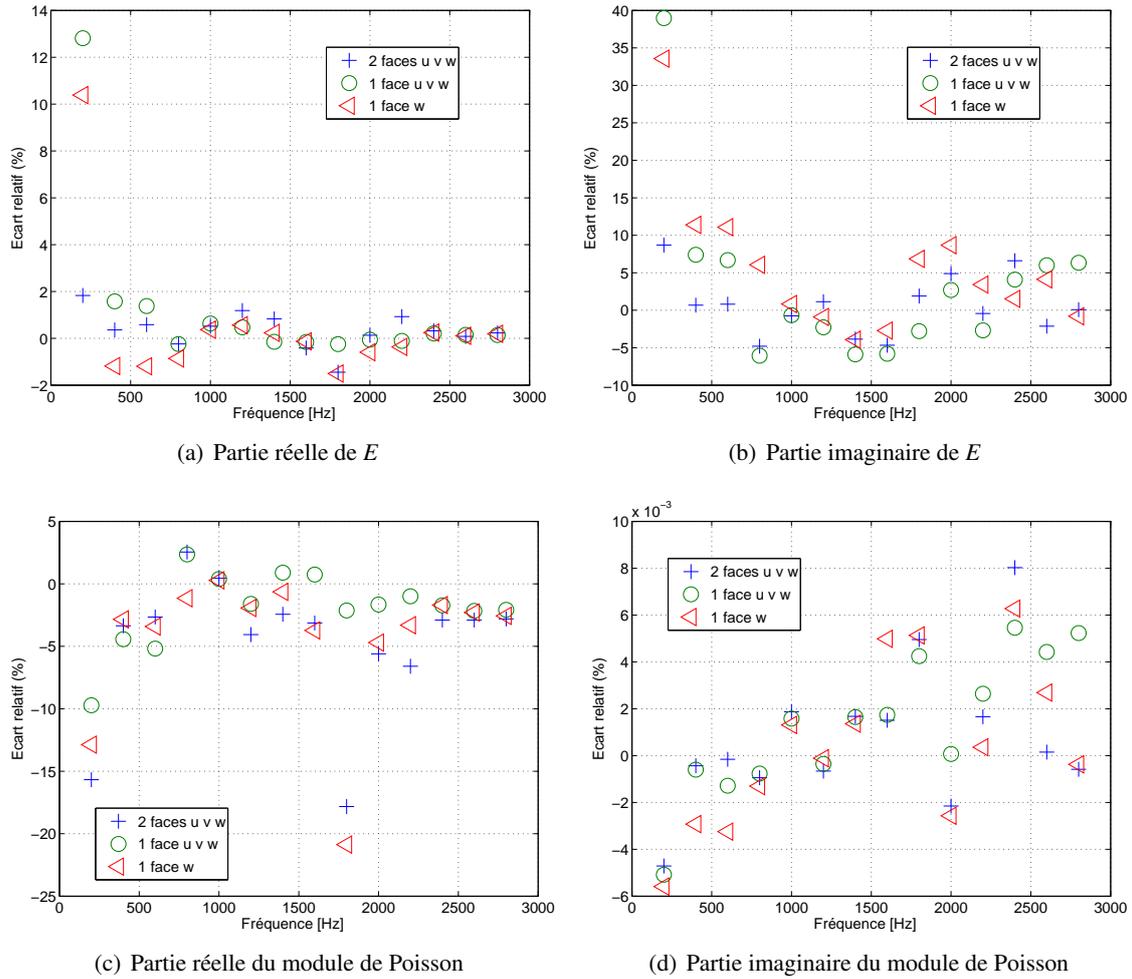


FIG. 3.19 – Résultats d'identification par plages 200Hz et différents ensembles de points de mesures pour  $E$  et  $\nu$  en présence de bruits

le résultat obtenu. Dans ce cas, la référence que nous estimons la plus fiable est celle d'un matériau dont le comportement est clairement isotrope. Nous allons donc investiguer cette identification à partir des mêmes données que précédemment, en ne considérant qu'une plage en fréquence, les ddls de translation hors plan et une loi de comportement décrite par 5 paramètres matériaux complexes et constants (orthotropie unidirectionnelle, cf. section 1.5.1).

L'identification est réalisée à partir de données non bruitées et bruitées comme précédemment mais avec un écart type limité à 10%. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.9. Dans les deux cas, les paramètres sont bien identifiés et nous pouvons vérifier l'hypothèse d'isotropie des matériaux considérés. De plus, l'expérience numérique montre qu'une stratégie d'introduction progressive des paramètres dans le processus d'identification ( $n$  itérations avec 1 paramètre, puis  $n$  itérations avec 2 paramètres, etc... avec  $n = 5$  par exemple) permet d'améliorer la vitesse de convergence du processus itératif.

	Départ	Référence	Sans bruit	Avec bruit (10%)
$E_{xx}$ (Pa)	$3,60 \cdot 10^9 + 8,80 \cdot 10^7 j$	$4,00 \cdot 10^9 + 8,00 \cdot 10^7 j$	$4,00 \cdot 10^9 + 8,00 \cdot 10^7 j$	$4,00 \cdot 10^9 + 7,95 \cdot 10^7 j$
$E_{yy}$ (Pa)	$1,80 \cdot 10^9 + 4,40 \cdot 10^7 j$	$2,00 \cdot 10^9 + 4,00 \cdot 10^7 j$	$2,00 \cdot 10^9 + 4,05 \cdot 10^7 j$	$2,00 \cdot 10^9 + 4,01 \cdot 10^7 j$
$G_{xy}$ (Pa)	$1,35 \cdot 10^9 + 3,30 \cdot 10^7 j$	$1,50 \cdot 10^9 + 3,00 \cdot 10^7 j$	$1,50 \cdot 10^9 + 3,00 \cdot 10^7 j$	$1,50 \cdot 10^9 + 3,01 \cdot 10^7 j$
$G_{yz}$ (Pa)	$1,05 \cdot 10^9 + 1,90 \cdot 10^7 j$	$1,00 \cdot 10^9 + 2,00 \cdot 10^7 j$	$1,05 \cdot 10^9 + 1,90 \cdot 10^7 j$	$1,05 \cdot 10^9 + 1,90 \cdot 10^7 j$
$\nu_{xy}$	$3,15 \cdot 10^{-1}$	$3,00 \cdot 10^{-1}$	$3,00 \cdot 10^{-1} - 4,91 \cdot 10^{-5} j$	$3,00 \cdot 10^{-1} + 4,18 \cdot 10^{-4} j$

TAB. 3.9 – Identification de paramètres matériau orthotrope

### 3.3.3 Matériau sandwich

Nous nous intéressons ensuite à une plaque de  $150 \times 100 \text{ mm}^2$  composée d'un matériau composite de type sandwich. Mais nous ne souhaitons caractériser qu'une des 2 couches de ce matériau. Les composants choisis sont une couche d'aluminium de propriétés  $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,29$  et  $\rho = 2688 \text{ kg/m}^3$  de 5 mm et une couche de lexan de propriétés  $E = 2,4 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,4$  et  $\rho = 1160 \text{ kg/m}^3$  de 4 mm. Le modèle de référence est lui aussi composé d'éléments H20 et les données obtenues sont bruitées comme précédemment.

Le principal point à investiguer dans cette application concerne les données nécessaire à l'identification du module de cisaillement complexe  $G$  de la couche en lexan (le module  $K$  de cette couche est supposé connu car il n'est pas identifiable dans cet essai). Pour déterminer la largeur des plages en fréquence de manière systématique, nous avons adopté la démarche suivante :

1. sélection d'une fréquence centrale et des données hors plan d'une face pour l'identification
2. identifier les paramètres avec un nombre variable de points en fréquence de part et d'autre de la fréquence centrale
3. tracé de cartes d'erreur sur les paramètres  $E$  et  $\nu$  et du conditionnement de la matrice d'itération

Les résultats sont présentés sur la figure 3.20. Les tendances observées indiquent naturellement que l'augmentation de la largeur des plages de fréquences permet d'améliorer l'identification des paramètres mais aussi que les résultats sont trop mauvais pour des plages de moins de 200 Hz. En revanche, la carte présentant le conditionnement de la matrice d'itération est beaucoup plus difficile à interpréter. Il ne semble pas y avoir de corrélation directe entre le conditionnement de la matrice d'itération et l'identifiabilité des paramètres matériaux.

A partir des 21 plages en fréquence de 200 Hz nous avons ensuite cherché à évaluer l'influence du nombre de ddl retenus pour l'identification, de même que pour la plaque isotrope. Trois configurations sont étudiées :

1. tous les noeuds avec les 3 ddl des deux faces
2. tous les noeuds avec les 3 ddl d'une seule face
3. tous les noeuds d'une face avec simplement le ddl hors plan

Les résultats sont présentés dans la table 3.10. Ils sont très proches dans toutes les configurations et ne permettent pas de dégager un choix particulier. La mesure des ddl hors plan sur une face de la plaque semble donc suffisante même si l'identifiabilité des paramètres est globalement moins bonne que pour un matériau isotrope. D'autre part, la plupart des résultats sont acceptables, mais quelques plages posent problème et l'étude du conditionnement ne permet toujours pas de dégager des pistes pour l'analyse de ces valeurs défectueuses.

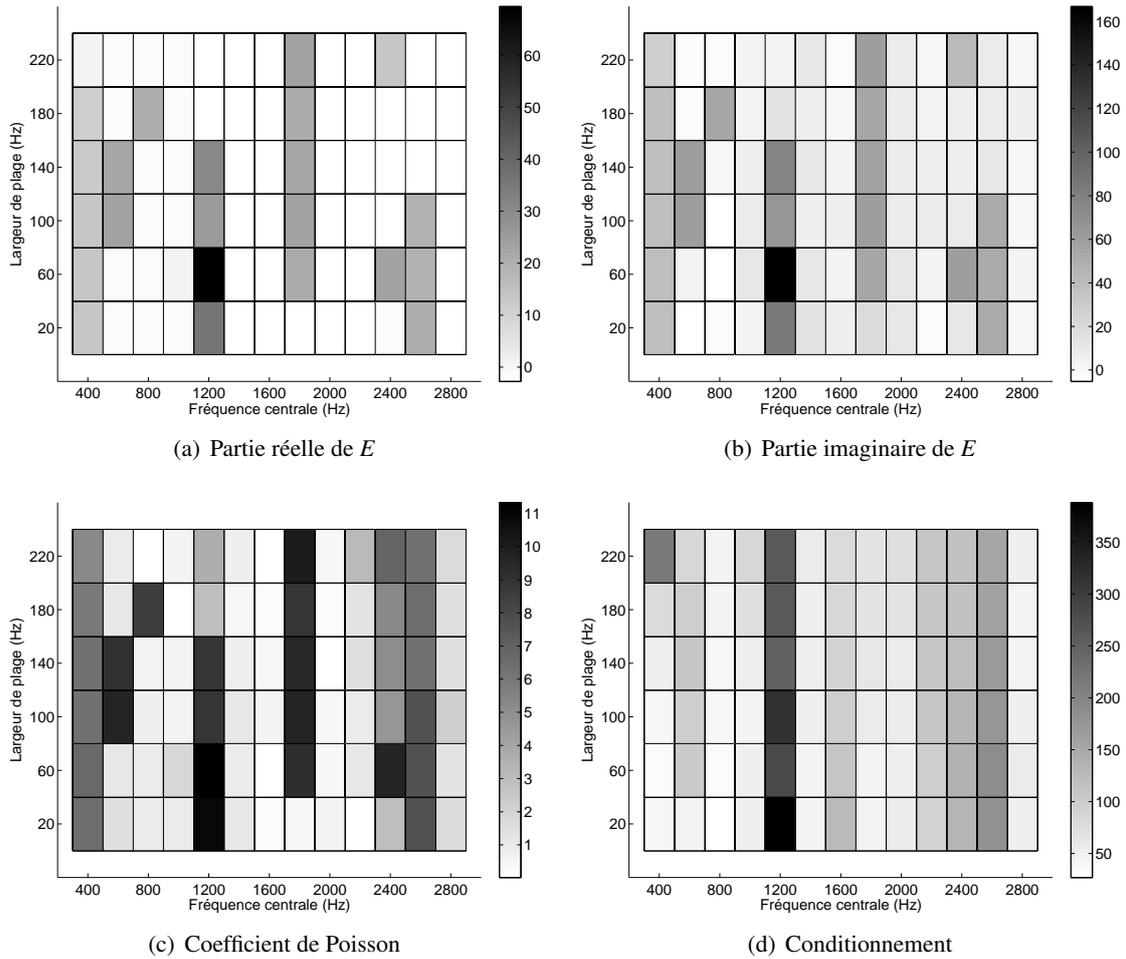


FIG. 3.20 – Cartes d'erreur pour l'identification des propriétés d'un composite

### 3.3.4 Indicateurs de participation des paramètres matériau

L'identifiabilité des paramètres matériau est un point crucial pour le succès de la méthode expérimentale-numérique. Celle-ci dépend essentiellement de la géométrie de l'échantillon et des sollicitations qui lui sont appliquées. Pour apporter des éléments de réponse sur ce point, nous nous tournons vers des indicateurs de participations des paramètres dans la réponse dynamique.

Le premier indicateur que nous pouvons former peut être défini à partir de fractions énergétiques liées à la décomposition de la matrice de raideur. Par exemple nous avons vu dans le cas isotrope que

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_K.K + \mathbf{K}_G.G \quad (3.44)$$

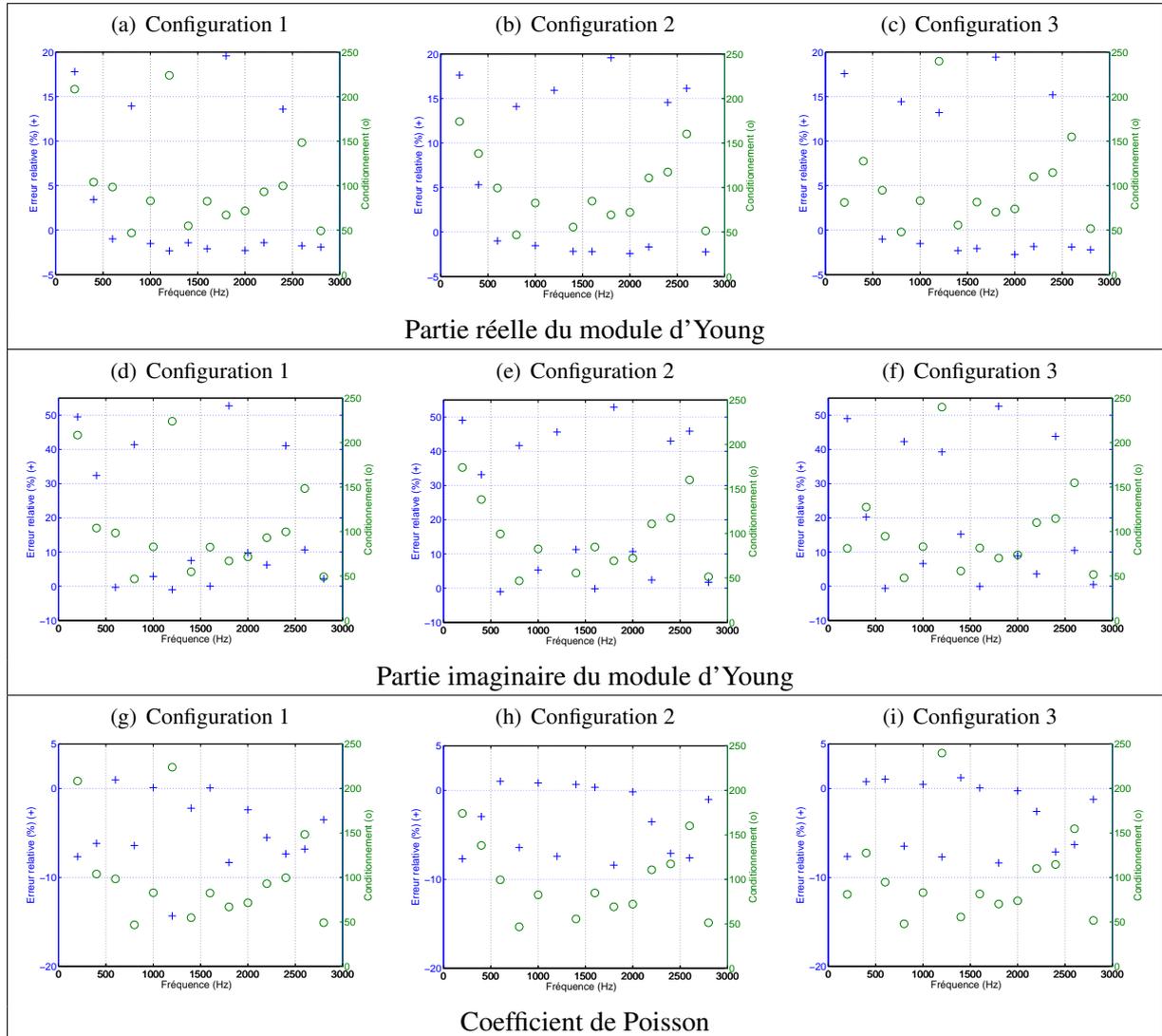
d'où nous déduisons

$$U_K + U_G = 1 \quad (3.45)$$

en posant

$$U_K = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{K}_K \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{K} \mathbf{u}} . K \quad \text{et} \quad U_G = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{K}_G \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{K} \mathbf{u}} . G \quad (3.46)$$

Il s'agit là pour nous d'un indicateur qui permet de mettre en évidence la participation (ou "le travail") de chacun des paramètres dans la réponse  $\mathbf{u}(\omega)$  de la structure, et ceci en fonction de la pulsation



TAB. 3.10 – Identification des propriétés d'un composite pour 3 ensembles de points de mesures

d'excitation  $\omega$ . Il est aussi adapté à l'évaluation des participations énergétiques des paramètres dans les déformées modales.

Il est possible de développer encore ce premier indicateur énergétique en exprimant la décomposition complexe de ces paramètres suivant  $K = \Re[K] + j\Im[K]$  et  $G = \Re[G] + j\Im[G]$ . Mais nous n'obtenons pas avec cette décomposition supplémentaire plus d'information sur les participations des paramètres imaginaires et réels, puisqu'on retrouve simplement que les contributions énergétiques des paramètres imaginaires est similaire à celle des paramètres réels, au facteur d'amortissement de ces paramètres près (c.à.d. qu'on retrouve que la participation énergétique  $U_{\Im[K]}$  de  $\Im[K]$  par exemple est voisine de la participation énergétique  $U_{\Re[K]}$  de  $\Re[K]$  à un facteur  $\eta_K$  près). De plus, la quasi-totalité de la participation énergétique  $U_K$  (resp.  $U_G$ ) provient de la partie réelle du paramètre  $K$  (resp.  $G$ ).

Cela nous conduit à proposer un deuxième indicateur pour dégager les participations d'amortissement de chaque paramètre. Pour l'établir, nous considérons d'abord l'exemple simple de la plaque isotrope de la section 3.3.1 et pour laquelle  $\Im[\mathbf{K}] = \eta_E \Re[\mathbf{K}]$ . En repartant de l'équilibre dynamique

$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}$  et en exprimant la décomposition des participations sous la forme

$$\mathbf{u}^H (\Re[\mathbf{K}] - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} + j\mathbf{u}^H \Im[\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{u}^H \mathbf{f} \quad (3.47)$$

nous avons

$$\frac{\mathbf{u}^H (\Re[\mathbf{K}] - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}} + \frac{j\eta_E \mathbf{u}^H \Re[\mathbf{K}]\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}} = 1 \quad (3.48)$$

et  $V_{\Im[E]}$  défini par

$$V_{\Im[E]} = \frac{j\eta_E \mathbf{u}^H \Re[\mathbf{K}]\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}} = -\frac{\eta_E}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}} \frac{\partial \mathbf{u}^H \mathbf{f}}{\partial \eta_E} \quad (3.49)$$

peut correspondre à un indicateur de participation de la partie imaginaire de  $E$ .

La figure 3.21 présente la variation de  $\Re[V_{\Im[E]}]$  en trait continu et celle de  $\Re[V_{\Re[Z]}] = \Re[V_{\Re[E]}] = \Re\left[\frac{\mathbf{u}^H (\Re[\mathbf{K}] - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}}\right]$  en trait pointillé pour cette plaque (les parties imaginaires de  $V_{\Im[E]}$  et  $V_{\Re[E]}$  sont négligeables dans cet exemple). Ce graphe confirme la validité de l'indicateur choisi en montrant bien que la participation de  $\eta_E$  est maximale à la fréquence de résonance (347 Hz) du 2ème mode, comme on peut s'y attendre : à cette fréquence l'énergie des forces internes élastiques s'annule avec celle des forces d'inerties et l'énergie introduite par les forces externes permet de compenser celle dissipée dans le mouvement. On note aussi sur ce graphe un petit pic associé à la fréquence du premier mode (315 Hz). La faible amplitude de ce pic est aussi logique car l'excitation, choisie légèrement excentrée mais près des lignes nodales de ce mode, ne peut l'exciter que très faiblement. Enfin, l'amplitude globale faible de la participation en dehors des pics confirme aussi que ces paramètres seront difficiles à identifier.

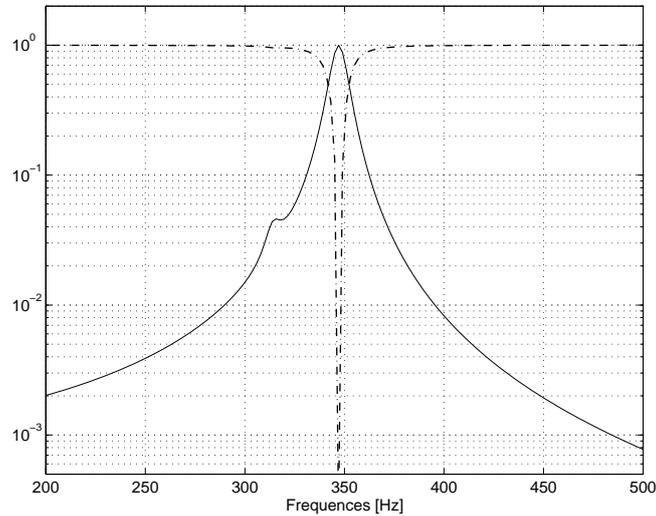


FIG. 3.21 – Participation des paramètres en fréquence de la plaque PVC sur 200-500 Hz

Ce critère peut être généralisé à plusieurs paramètres en notant que  $\Im[\mathbf{K}] = \Im[\mathbf{K}_K.K] + \Im[\mathbf{K}_G.G]$  et avec  $\Im[\mathbf{K}_K.K] \simeq \mathbf{K}_K.\Im[K]$  et  $\Im[\mathbf{K}_G.G] \simeq \mathbf{K}_G.\Im[G]$  puisque  $\mathbf{K}_K \simeq \Re[\mathbf{K}_K]$  et  $\mathbf{K}_G \simeq \Re[\mathbf{K}_G]$  (ces relations sont exactes pour des éléments finis formulés en déplacements). Nous pouvons alors poser les quantités  $V_{\Im[K]} = j\frac{\mathbf{u}^H \mathbf{K}_K \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}}.\Im[K]$  et  $V_{\Im[G]} = j\frac{\mathbf{u}^H \mathbf{K}_G \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{f}}.\Im[G]$  pour avoir les participations des paramètres complexes dans la réponse dynamique. Cependant, ces quantités complexes ne sont pas facilement

interprétable lorsque leur partie imaginaire n'est pas négligeable. Nous proposons donc de modifier ces indicateurs en retenant leur module :

$$V_{|\mathfrak{S}[K]|} = \frac{|V_{\mathfrak{S}[K]}|}{|V_{\mathfrak{R}[Z]}| + |V_{\mathfrak{S}[K]}| + |V_{\mathfrak{S}[G]}|} \quad \text{et} \quad V_{|\mathfrak{S}[G]|} = \frac{|V_{\mathfrak{S}[G]}|}{|V_{\mathfrak{R}[Z]}| + |V_{\mathfrak{S}[K]}| + |V_{\mathfrak{S}[G]}|} \quad (3.50)$$

Les indicateurs  $U_K$ ,  $U_G$ ,  $V_{|\mathfrak{S}[K]|}$ ,  $V_{|\mathfrak{S}[G]|}$  pour la plaque isotrope précédente sont donnés sur la figure 3.22 en traits continus. Nous avons reporté sur les graphes en fréquence la localisation des fréquences des modes propres par des lignes verticales en pointillés. Ces graphes donnent la répartition des différents paramètres dans l'essai défini. En ce qui concerne les participations de  $K$  et  $G$ , nous pouvons remarquer que  $K$  a une participation toujours inférieure à 20%, avec une valeur minimale de 4% entre 250 et 375 Hz, ce qui laisse présager une mauvaise identifiabilité de ce paramètre dans cette zone en présence de mesures expérimentales, toujours bruitées. Les paramètres  $E$  et  $\nu$  étant dépendants de  $K$  et  $G$ , nous pouvons nous attendre à avoir aussi des difficultés pour ceux-ci dans cette même zone. Comme précédemment, nous pouvons remarquer aussi qu'aux fréquences de certains modes, l'amortissement n'arrive pas à émerger, à cause d'une faible participation de ceux-ci dans la réponse. En outre, les participations des parties imaginaires des paramètres sont quasiment nulles en dessous de 200 Hz. Enfin, de manière plus surprenante, nous pouvons aussi constater que l'amortissement peut émerger à des fréquences qui ne correspondent pas à des modes de la structure (ici aux environs de 250, 545, 1855, 2100 et 2785 Hz). La figure 3.23 nous donne quant-à-elle la participation des paramètres matériaux dans les déformées modales.

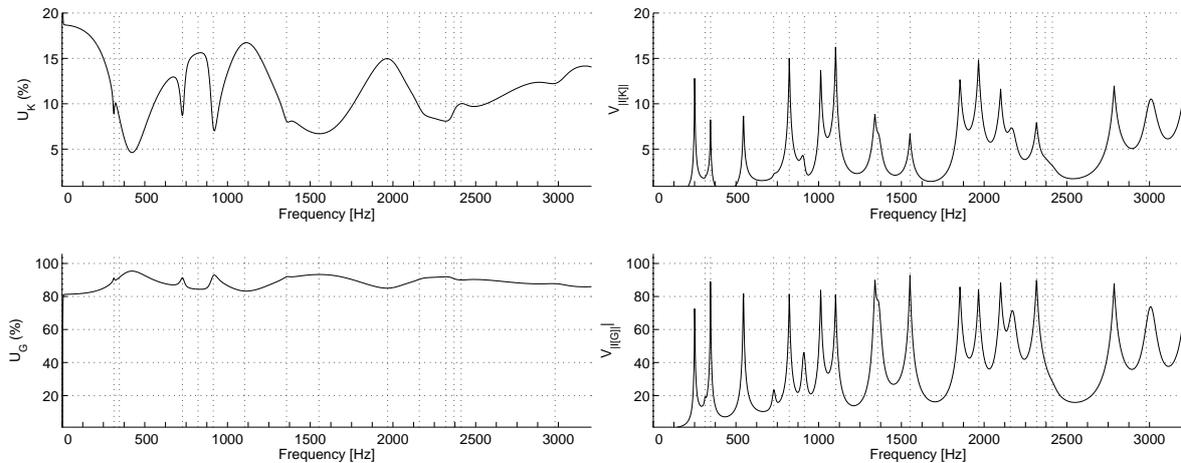
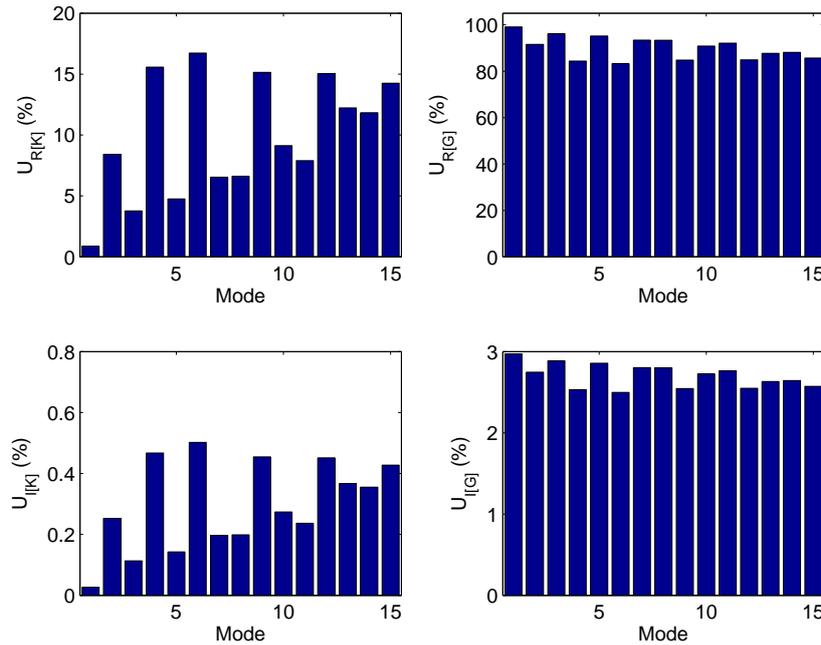


FIG. 3.22 – Participations des paramètres  $K$  et  $G$  en fréquence

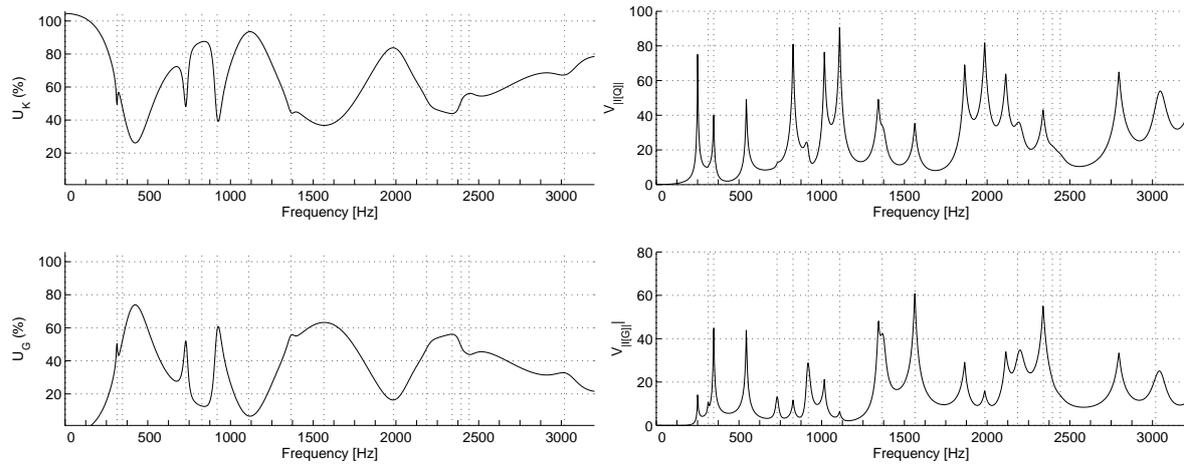
Les indicateurs  $U_Q$ ,  $U_G$ ,  $V_{|\mathfrak{S}[Q]|}$ ,  $V_{|\mathfrak{S}[G]|}$  et la participation des paramètres  $Q$  et  $G$  dans les déformées modales pour la même plaque isotrope que précédemment mais modélisée en 2D contraintes planes avec des éléments de plaque Q4  $\gamma$  sont donnés sur les figures 3.24 et 3.25. Ces graphes indiquent que la répartition des paramètres  $Q$  et  $G$  est plutôt bien équilibrée (environ 60 et 40 % resp.), comparée à celle en  $K$  et  $G$  du modèle 3D. Nous constatons aussi que c'est cette fois le paramètre  $G$  qui présente de faibles participations aux alentours de 625, 800, 1120 et 2000 Hz et surtout pratiquement nulle autour de 130 Hz. Et bien que le premier mode soit un mode de torsion, les graphes de participations des paramètres dans les modes montrent que ce n'est pas  $G$  qui domine à cette fréquence. Enfin, le graphe de participation des parties imaginaires des paramètres ressemble à celui du modèle 3D mais également avec une proportion différente entre les 2 paramètres.

FIG. 3.23 – Participations des paramètres  $K$  et  $G$  dans les modes

### 3.4 Conclusion

Après un bref rappel des stratégies de recalage et d'identification proposées dans la littérature, nous avons rappelé les bases des méthodes classiques d'identification en forces et en déplacements. Ces méthodes sont adaptés à la prise en compte de mesures de champs, mais ne sont pas adaptées pour l'identification de paramètres matériaux visco-élastiques en dynamique. Nous avons donc proposé dans ce chapitre deux méthodes mixtes expérimentale-numérique en vue de l'identification de ces propriétés matériaux. La première est dénommée méthode en forces pondérée en déplacements et peut s'accomoder de la mesure partielle d'un champ de déplacement, comme par exemple la seule mesure du déplacement hors plan d'une structure. La seconde est une méthode en forces filtrées qui présente l'intérêt de s'affranchir de conditions aux limites incertaines dans l'essai. En contrepartie, l'ensemble du champ doit être mesuré dans une zone de mesure donnée. Ces deux méthodes prennent en compte directement des données de réponse en fréquence, sans passer par une analyse modale. De cette manière, plusieurs points critiques sont évités, comme les erreurs d'identification modales et les difficultés liées à de fortes densités modales ou à un amortissement important.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'évaluation de la méthode en forces pondérées en déplacements sur une situation simple d'une plaque rectangulaire isotrope, orthotrope ou composites de type sandwich. Cette évaluation est menée avec des données simulées numériquement. Les différents test effectués ont permis de s'assurer de la qualité du modèle mis en place avec l'élément H8coque et que l'augmentation du nombre de ddls utilisés pour l'identification permet d'obtenir de meilleurs résultats en présence de bruit. Cependant, au delà d'un certain nombre de ddls, l'amélioration ne semble plus significative. La seule mesure des ddl hors plan d'une face de la structure doit donc permettre d'identifier les paramètres viscoélastiques recherchés. Enfin, l'identification de paramètres constants peut être menée sur des plages de fréquences réduites (200Hz dans l'exemple considéré), cependant les premières plages semblent moins fiables.

FIG. 3.24 – Participations des paramètres  $Q$  et  $G$  en fréquence

En ce qui concerne l'analyse en présence de bruits de mesure, nous n'avons pas traité un grand nombre d'échantillons de données bruitées, et nous ne pouvons donc pas dégager de tendances statistiques (seulement un exemple). Mais une analyse statistique n'aurait de valeur qu'avec une connaissance réelle des bruits de mesures. A ce stade, nous estimons donc qu'il est préférable de nous concentrer désormais sur l'essai, et d'envisager l'application de la méthode d'identification avec des données réellement mesurées. Nous terminons ce chapitre par la proposition de 2 indicateurs permettant de constater pour un essai déterminé dans quelle mesure les paramètres recherchés peuvent être identifiables. Les indications qu'ils nous fournissent sont bien corrélées avec les constatations des expériences numériques précédentes. Ils confirment par exemple la faible participation de  $K$  ou encore l'absence de participations des parties imaginaires des paramètres en basses fréquences.

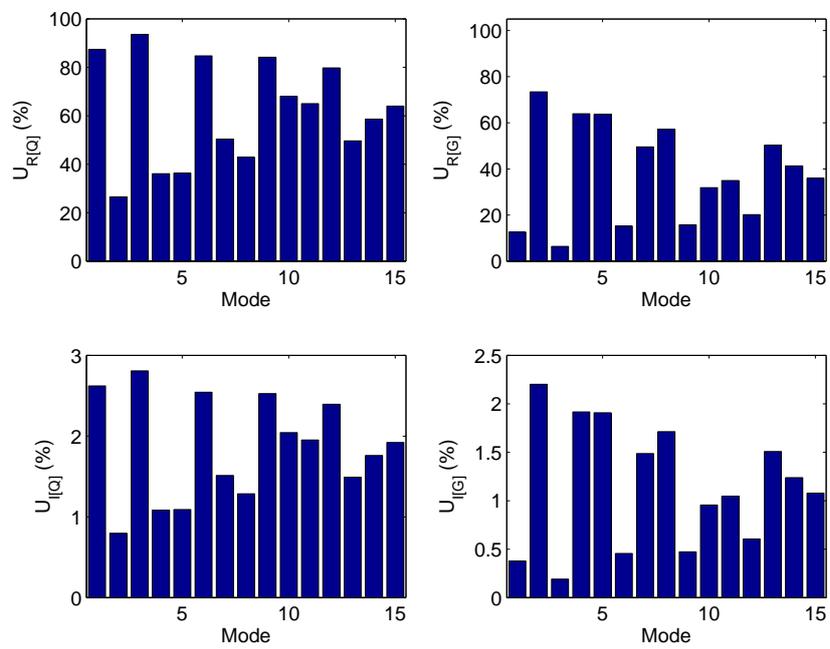


FIG. 3.25 – Participations des paramètres  $Q$  et  $G$  dans les modes



# Chapitre 4

## Applications et résultats

### 4.1 Dispositif expérimental

#### 4.1.1 Introduction

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons obtenir le champ cinématique de réponse vibratoire d'une structure pour caractériser son matériau. Avec la méthode d'identification en forces filtrée, ce sont des champs 3D complets qu'il faut obtenir, sans contraintes sur les conditions aux limites, alors qu'avec la méthode en forces pondérée en déplacements des champs 1D (hors plan pour des plaques) sont suffisants, à condition d'avoir des CL parfaitement connues. Dans ce dernier cas, l'identification de la dissipation interne d'un matériau ne peut être faite correctement qu'avec un dispositif expérimental qui ne la perturbe pas de ce point de vue. La dissipation étant généralement plus importante dans les liaisons que dans la structure [LL03], il est donc très important de minimiser les contacts (au niveau des supports et des capteurs non modélisés) pour ne pas modifier l'objet d'étude.

Les objectifs et les différentes contraintes ne sont pas aisés à respecter et il faut être attentif sur les moyens mis en oeuvre expérimentalement. Nous allons donc dans un premier temps rappeler les moyens disponibles pour les mesures dynamiques et les mesures de champs (tant les capteurs que les excitateurs) avec leurs avantages et leurs inconvénients avant de décrire le moyen d'essais que nous avons retenu et qualifié.

#### 4.1.2 Matériels d'essais et de mesures en dynamique

Il existe une grande variété de moyens de mesure dans le cadre de la dynamique. La référence [Cug05, p. 92] présente une synthèse des principaux capteurs ponctuels avec leurs avantages et leurs inconvénients. Nous trouvons parmi ceux-ci l'interféromètre laser à effet Doppler (LDV), qui est une méthode de mesure sans contact. D'autre part, une synthèse des techniques de mesures de champs est proposée dans [Gré04]. Ces méthodes présentent l'avantage d'être également sans contact (et donc non intrusives) et d'obtenir un champ complet en une seule mesure, généralement avec une grande résolution spatiale. Pour être mises en oeuvre en dynamique, ces techniques doivent cependant avoir recours à du matériel adapté en termes de vitesse d'acquisition.

En dynamique, la méthode de mesure de champ la plus aboutie est probablement la méthode laser pulsée ESPI (*Electronic Speckle Pattern Interferometry*). Elle permet de mesurer le champ de vibration entre les deux instants de deux pulses laser par interférométrie de speckle sur une caméra CCD. L'effet de speckle est le résultat de l'illumination d'une surface rugueuse avec une lumière cohérente monochromatique. En rendant les speckles interférants avec un rayon laser de référence provenant

d'une fibre optique, tout changement dans la position de la surface relativement au système d'enregistrement modifiera l'intensité des speckles. La double exposition du laser permet d'obtenir 2 motifs de speckles. Cela est enregistré dans 2 trames complètes et séparées de la caméra CCD. Un décalage spatial peut ensuite être appliqué pour extraire l'information de phase contenue dans les speckles. Par soustraction, une image de phase est obtenue qui peut être déroulée pour conduire à une image du déplacement. Le principe de mesure est basé sur l'interférométrie, ce qui nécessite une source de lumière laser hautement cohérente, avec une durée très brève et une grande énergie de manière à figer l'état de vibration de la structure. Le progrès dans les caméras CCD autorise une densité d'un million de points avec un bruit de fond très bas (lié à l'échantillonnage, typiquement sur 12 bits). Le système de mesure est sensible aux déplacements de surface colinéaires au vecteur de sensibilité. Ce vecteur appartient à la bissectrice entre les directions d'illumination et d'observation. Ainsi, cette méthode est principalement sensible aux déplacements hors plan. Pour des mesures quantitatives, la position relative entre la structure et les éléments du système est très importante à quantifier. Plusieurs solutions existent pour obtenir les 3 composantes du champ de déplacement, en combinant plusieurs caméras (trois au moins) ou les directions d'illumination. La méthode ESPI nécessite un régime établi de vibration et un balayage en fréquence est donc nécessaire pour obtenir l'ensemble des champs de réponses en fréquences. Elle exclut donc l'utilisation de moyens d'excitations impulsionsnels ou transitoires.

La méthode ESPI étant couteuse, difficile de mise en oeuvre et limitée aux vibrations en régime établi, les vibromètres lasers pour les mesures vibratoires sont plus répandus. En effet, la possibilité d'une mesure sans contact, facile à mettre en oeuvre et couvrant un gamme de fréquence assez large ont permis à cette technique de se généraliser. Le principe de fonctionnement du vibromètre laser (LDV pour *Laser Doppler Vibrometer*) est basé sur une technique d'interférométrie, en fait, un interféromètre de Mach-Zehnder modifié. Le schéma de principe du fonctionnement du vibromètre est donné sur la figure 4.1. La tension obtenue est calculée à partir de la formule suivante

$$V = k \cos(2\pi(f_b + 2v/\lambda)t) \quad (4.1)$$

avec  $V$  : tension de sortie de l'interféromètre,  $k$  : constante fonction de l'efficacité de conversion,  $f_b$  : fréquence de Bragg, et  $f_d = 2v/\lambda$  : fréquence de Doppler. Cette tension est convertie en unités physiques pour obtenir la vitesse du point de mesure. Cependant, l'utilisation de miroirs orientables pour effectuer le balayage doit aussi être pris en compte dans la vitesse obtenue (lorsqu'ils sont présents) [Sie98, HR03]. On parle dans ce cas de SLDV (*Scanning Laser Doppler Vibrometer*). Enfin, l'utilisation de 3 faisceaux simultanés permet la mesure des 3 composantes de la vitesse en un point. Cependant l'utilisation des LDV présente aussi certaines limitations, notamment au niveau :

- de la résolution spatiale qui peut être insuffisante dans certains cas comme par exemple pour la caractérisation des MEMS [CMT06] ;
- d'une sensibilité du laser et du démodulateur aux facteurs environnementaux (température, pression, ...);
- d'une incertitude sur la direction de mesure et donc de la vitesse mesurée, qui est fonction de l'alignement de la structure avec le faisceau laser ;
- du rapport signal/bruit, fonction de la distance de mesure, de la réflexion de la surface, et de facteurs environnementaux (vibrations du sol, poussière, ...).

Enfin, il faut noter qu'en présence de mouvements de corps rigide dans la vibration, il est nécessaire d'adapter la dynamique de mesure des méthodes sans contact, ce qui diminue significativement la sensibilité de mesure. De plus, nous ne pouvons pas allier étendue spatiale et fréquentielle en une seule mesure avec ces méthodes optiques. L'holographie nécessite un balayage fréquentiel tandis que le vibromètre laser nécessite un balayage spatial, et le temps d'acquisition de l'ensemble des données est nécessairement long.

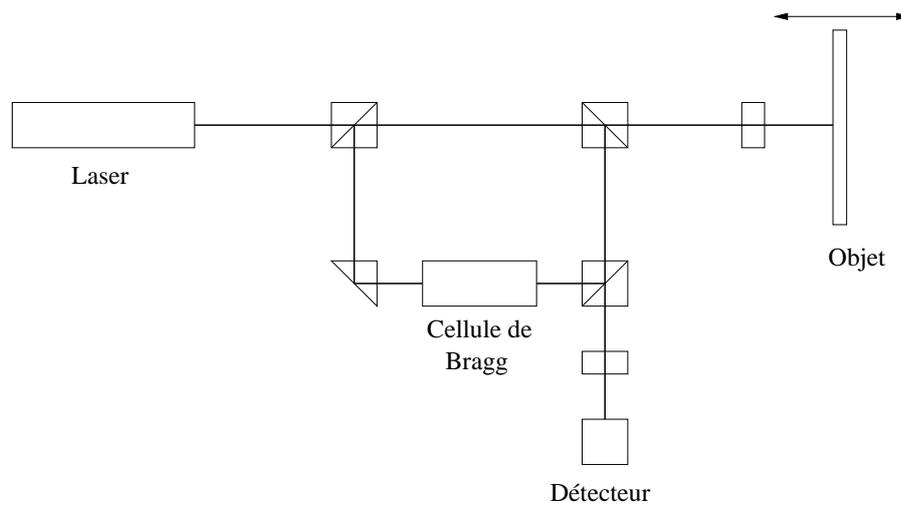


FIG. 4.1 – Schéma de fonctionnement du vibromètre

D'autre part, le moyen d'excitation d'une structure correspond au système qui va apporter de l'énergie pour provoquer le mouvement vibratoire. Une présentation des moyens d'excitation les plus courants en dynamique est donnée dans le tableau 4.1 (reproduit de [Cug05, p. 99]) avec les avantages et inconvénient de chacun de ces moyens. Il faut toutefois ajouter comme inconvénient à la méthode par marteau d'impact l'impossibilité d'exciter une structure en régime établi.

Méthode	Avantages	Inconvénients
Marteau d'impact	<ul style="list-style-type: none"> <li>– plage d'excitation</li> <li>– amplitude</li> <li>– simple</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– difficile pour des tests en conditions libres</li> </ul>
Pot vibrant	<ul style="list-style-type: none"> <li>– grande amplitude</li> <li>– ponctuel</li> <li>– contrôle du signal</li> <li>– plage d'excitation (BF possible)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– masse et raideur ajoutées au niveau de la liaison</li> </ul>
Actionneur piézoélectrique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– grande plage en fréquence</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– faible amplitude</li> <li>– masse raideur et amortissement au niveau du collage</li> <li>– relativement complexe à contrôler au niveau de l'excitation</li> </ul>
Haut parleur	<ul style="list-style-type: none"> <li>– plage en fréquence</li> <li>– sans contact</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– non linéarité</li> <li>– mise au point complexe</li> <li>– mesure de l'effort (champ de pression) apporté à la structure</li> </ul>
inducteur électro magnétique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– grande plage en fréquence</li> <li>– pas de masse et raideur ajoutées</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– uniquement pour les structures ferro-magnétiques (sinon ajout d'inducteurs et donc de masse et de raideur)</li> <li>– à calibrer à chaque utilisation</li> </ul>

TAB. 4.1 – Moyen d'excitation courants en dynamique

Enfin, il est important de noter qu'en dynamique, la mesure nécessite des précautions supplémentaires par rapport à la statique. En effet, elle doit être "instantanée" en ce sens que le temps d'acquisition doit être négligeable par rapport au temps caractéristique d'un mouvement à la fréquence maximale d'intérêt. De plus, lorsque plusieurs signaux sont nécessaires (par exemple pour une FRF où il faut une mesure de la force et une mesure cinématique), il faut assurer la simultanéité de l'acquisition de ces signaux dans chaque voie de mesure. Ceci exclu par exemple le multiplexage simple couramment employé dans les machines d'essais standards des matériaux.

### 4.1.3 Dispositif de test retenu

#### 4.1.3.1 Choix du dispositif de test

Les contraintes expérimentales liées à notre étude sont de pouvoir

1. minimiser les dispersions liées au test

## 2. maximiser les informations disponibles

car les caractéristiques des matériaux que nous cherchons à détecter (dépendance en fréquence de la raideur et des amortissements) ne sont pas prépondérantes dans les réponses dynamiques des structures. Ainsi, pour diminuer les dispersions possibles, nous avons choisis d'effectuer l'identification de toutes les caractéristiques matériaux recherchées à partir d'un essai unique. Ensuite, si la mesure de champ dans la zone d'intérêt n'est pas complète, nous avons vu qu'il est nécessaire de minimiser les perturbations de la structure tant en termes de raideur et masses qu'en termes d'amortissements ajoutés. En effet, l'amortissement interne que nous souhaitons identifier est assez faible devant ceux qui pourraient venir du dispositif d'essai. De plus, l'utilisation de supports est un point délicat pour la reproductibilité de l'essai. Un test normalisé pour l'évaluation de ces méthodes est d'ailleurs en cours d'élaboration, avec un montage spécifique (de type monobloc support-éprouvette) afin de diminuer l'influence des conditions limites [PHB<sup>+</sup>07].

La solution que nous avons retenue consiste à utiliser des suspensions par élastiques des structures testées pour approcher des conditions quasi-libre. En ce qui concerne la mesure cinématique, il convient pour ne pas perturber la structure de mettre en oeuvre une méthode de mesure sans contact. Celle-ci étant nécessairement affectée par les mouvements de corps rigide, il résultera malheureusement de cette combinaison une perte de résolution de la mesure.

D'autre part, l'excitation sans liaison de la structure ne peut se faire que par impact ou par excitation acoustique (les structures viscoélastiques n'étant généralement pas ferro-magnétique pour pouvoir utiliser un inducteur). Une excitation acoustique dans le cadre de l'identification de raideur d'un matériau orthotrope a déjà été utilisée dans [Cug05]. Cependant, sa mise en oeuvre est assez complexe, car il faut caractériser précisément le champ de pression crée par le(s) haut-parleur(s) (dans [Cug05], le volume entre la plaque et les haut-parleurs a été balayé par 9 microphones dans une chambre anéchoïde sur une gamme de fréquences de 20 Hz à 20 kHz). De plus, les excitations en régime établi peuvent conduire à un échauffement des matériaux viscoélastiques puisque ceux-ci dissipent l'énergie sous forme de chaleur. Or nous avons vu que les caractéristiques que nous recherchons présentent une forte dépendance en température. Nous avons donc choisi pour notre part de nous tourner vers une excitation par impact, qui est une technique transitoire et simple de mise en oeuvre. Toutefois, un dispositif automatique pour la mise en oeuvre de cette excitation a été mis en place pour éviter la dispersion sur les nombreuses acquisitions nécessaires.

### 4.1.3.2 Mesure cinématique

Parmi les matériels de mesure sans contact compatible avec des excitations transitoire, nous ne disposons au laboratoire que d'un vibromètre laser monopoint pour une mesure de la composante de vitesse de la structure suivant l'axe du faisceau laser. Ce vibromètre est de marque Polytec, avec le contrôleur OFV-3000 et la tête de mesure OFV-303. La carte démodulateur OVD-02 (HF) utilisée permet de mesurer des vitesses jusqu'à 500 mm/s à la fréquence de 1500 kHz et avec une résolution de 1,5  $\mu\text{m/s}$  et une erreur de phase inférieure à 0,7  $^\circ/\text{kHz}$ . Un dispositif de balayage spatial de la structure a été construit pour cette étude. Il est couplé au vibromètre laser pour obtenir une mesure de champ (SLDV).

L'utilisation d'une méthode optique impose toutefois de travailler avec des structures suffisamment réfléchissantes. Comme les surfaces des structures testées n'ont pas toujours cette propriété optique, une solution généralement retenue consiste à utiliser des patch réfléchissants. Dans notre cas, il n'est pas possible de recouvrir la structure d'un film collé car en plus de modifier sa masse cela ajouterait un amortissement non négligeable. Nous avons alors opté pour l'application d'une fine couche de peinture. Quelques tests sur une plaque mince en acier ont permis de vérifier la validité de ce procédé.

En effet, les effets de la peinture sont faciles à mettre en évidence sur une telle structure, de faible masse et très peu amortie. Nous avons conclu qu'une peinture chromée permet d'obtenir un bon retour du signal laser et n'a pas d'impact sur l'amortissement (les largeurs de pics de résonance ne sont pas altérées).

#### 4.1.3.3 Dispositif d'excitation et de mesure d'effort

Pour assurer une bonne qualité et une bonne répétabilité de l'excitation, un dispositif a été conçu avec un excitateur électromagnétique réglable muni d'un capteur de force et d'un embout nylon, comme présenté sur la figure 4.2. Cet excitateur de type SF 2185.00 autorise un déplacement maximum de 7 mm pour des fréquences comprises entre 0,1 Hz et 5 kHz. La gamme de fréquence du capteur de force PCB 208C02 est comprise entre 0,001 Hz et 36 kHz pour une résolution de mesure de 0,004 N-RMS et une force maximale de 445 N. L'impact est normalement obtenu avec un signal de type demi-sinus pour un spectre large bande, proche de celui d'une impulsion. Cependant, pour éviter un double impact sur la plaque qui est suspendue, le signal d'excitation est une période complète de sinus afin d'éloigner la tête de la plaque à son retour. Enfin la période des impacts est d'environ 0,05 seconde, ce qui permet à la plaque de se stabiliser entre deux mesures. Le dispositif comporte donc deux GBF, l'un pour fixer la période des impacts, et l'autre pour le sinus (largeur et niveau).

Un autre aspect important à prendre en compte dans ce dispositif est l'étalonnage du capteur de force. En effet, celui-ci est destiné, dans son utilisation standard, à être placé sur un marteau d'impact. L'énergie étant transférée par effet d'inertie à la plaque, il est alors nécessaire de prendre en compte un facteur de correction sur la sensibilité du capteur dépendant des masses avant et arrière [McC95]. Dans notre cas, ce facteur est évalué à 0,88, d'où l'importance de sa prise en compte.

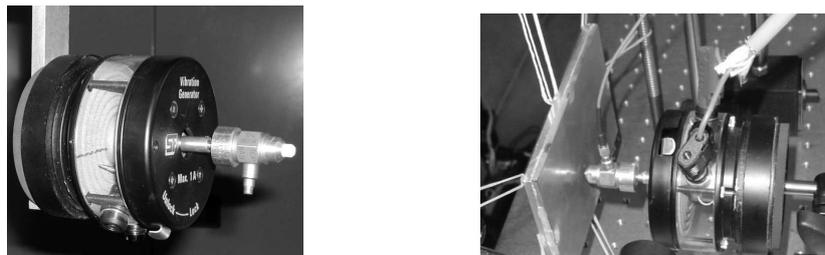


FIG. 4.2 – Photo de l'excitateur

Des courbes caractéristiques de ce dispositif sont présentées sur la figure 4.3, avec le signal d'excitation et la vitesse au niveau de la tête de l'excitateur. La vitesse mesurée au niveau de la plaque met en évidence le signal vibratoire sur une porteuse (sinus amorti) du mouvement d'oscillation sur les élastiques. Le spectre d'effort permet de s'assurer de la gamme de fréquence couverte par l'excitation, sans zone critique (fig. 4.4). Ces données nous permettent de vérifier la quantité de mouvement transmise à la plaque, ce qui confirme la validité de l'étalonnage. D'un point de vue qualitatif, le spectre d'effort ainsi obtenu est mieux adapté que celui produit par un marteau d'impact.

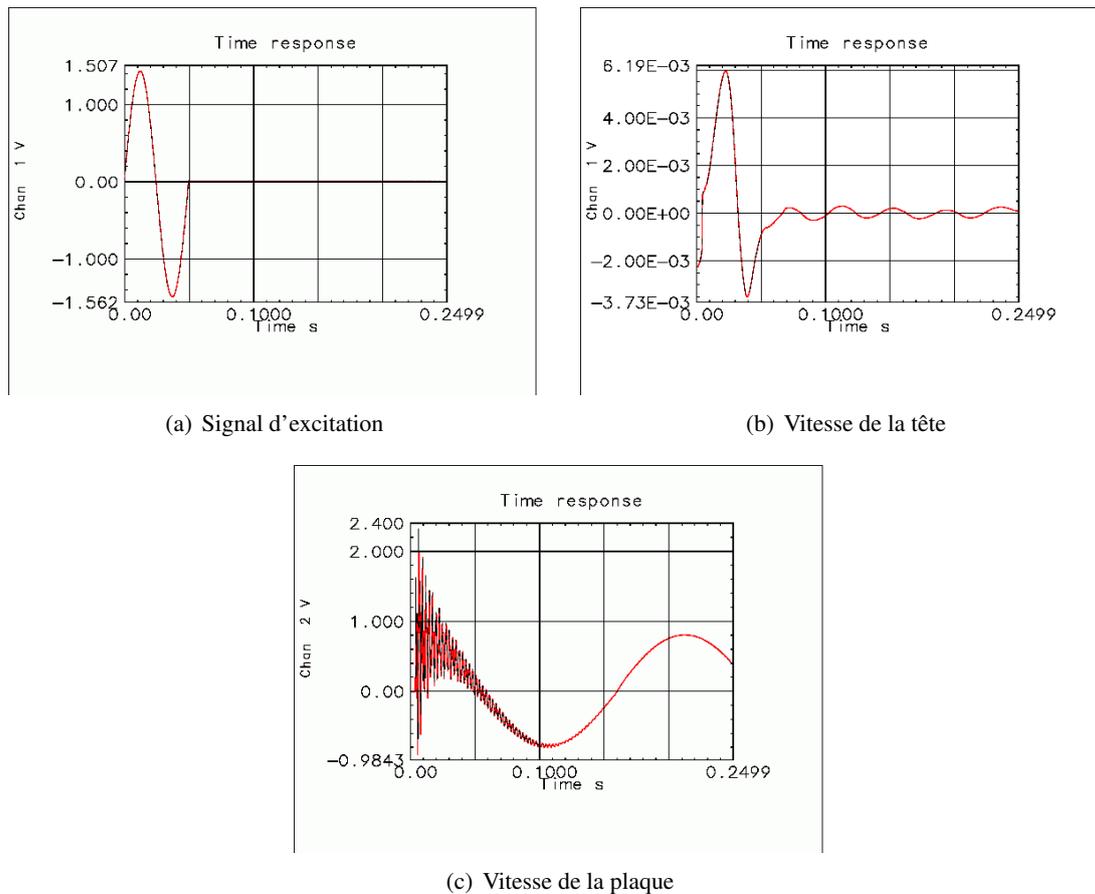
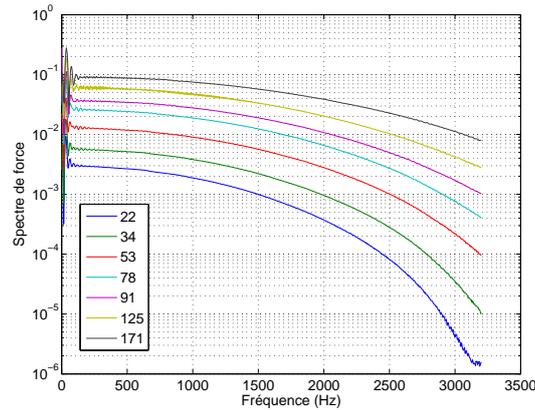
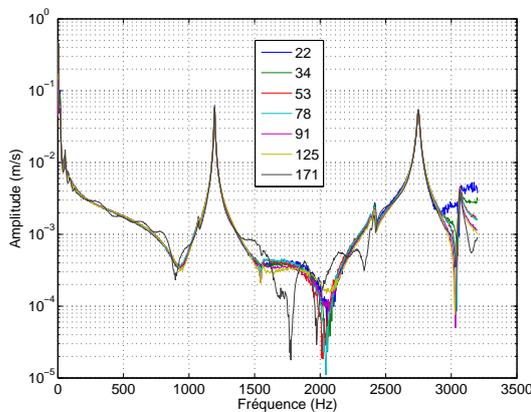


FIG. 4.3 – Caractéristiques de l'excitation

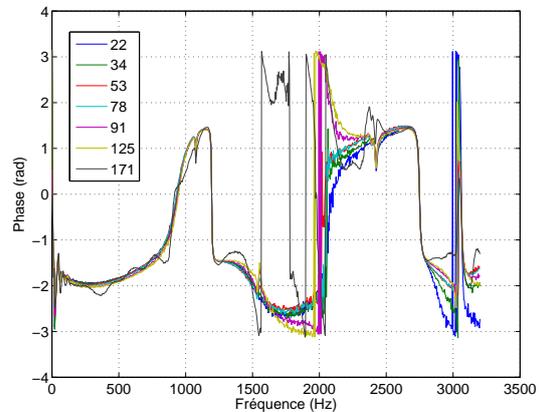
Pour s'assurer que l'excitation reste dans le domaine linéaire, des essais ont été effectués à différents niveaux d'impact, avec pour objectif de s'assurer que les FRF obtenues sont bien indépendantes du niveau d'excitation introduit. La figure 4.4 présente les FRF (amplitude et phase) ainsi que le spectre d'effort pour différentes valeurs d'effort introduit. Il apparaît clairement que pour le maximum d'effort (171N), la réponse obtenue est non-linéaire, alors que pour le minimum d'effort (22N), la réponse obtenue pour les fréquences les plus élevées devient trop perturbée. Cela s'explique par la forte décroissance du spectre d'effort à ces fréquences, pour lesquelles le niveau d'effort introduit n'est plus suffisant. En revanche, pour les niveaux d'effort intermédiaires, il y a une bonne superposition des FRF.



(a) Spectres d'efforts



(b) Amplitude des FRF colocalisées



(c) Phase des FRF colocalisées

FIG. 4.4 – Tests de linéarité

#### 4.1.3.4 Conditions de test

**Choix du point d'excitation** Le choix du point d'excitation est important pour l'identifiabilité des paramètres matériaux. En statique, il est possible de retenir une configuration d'essai privilégiant le travail de certains paramètres matériau. Mais en dynamique, nous avons un ensemble de déformées différentes à chaque fréquence d'excitation pour une configuration unique des conditions aux limites et le choix d'un point d'excitation n'est pas aussi aisé qu'en statique. En analyse modale expérimentale, son positionnement peut être guidé par les modes présents dans la gamme de fréquences considérées, et surtout par rapport à la position des lignes nodales : il est nécessaire de pouvoir exciter chaque mode pour pouvoir l'identifier. De plus, pour extraire des modes de mêmes fréquences, ou seulement lever le doute sur leur multiplicité, il est même nécessaire de choisir plusieurs points d'excitations (en pratique on choisit l'ordre de multiplicité plus 1).

Pour notre méthode, basée sur l'utilisation directe des réponses en fréquences et qui ne nécessite pas d'analyse modale, il n'est *a-priori* pas important de satisfaire ces critères. En effet, nous pouvons considérer qu'avec une méthode efficace, les caractéristiques matériaux peuvent être identifiées quelle que soit la fréquence, que certains modes participent ou non à la réponse et pour autant que la déformée fasse travailler tous les paramètres (cf. section 3.3.4). Cependant, on constate expérimentalement que les modes *a-priori* non excités par le placement de l'excitation sur une ligne nodale le sont tou-

jours un peu. Ceci peut être dû aux tolérances dans le dispositif expérimental (le point d'excitation correspond en fait à une petite surface, l'axe de l'excitateur n'est pas parfaitement normal à la surface), ou encore provenir d'un comportement non parfait du matériau (homogène et isotrope...). Du point de vue de l'identification, ceci peut être perçu comme une erreur du modèle numérique : il ne représente pas fidèlement la configuration de test pour mettre en évidence ces réponses. Or la présence d'un pic à une fréquence où il ne devrait pas apparaître théoriquement risque de perturber fortement le processus de recalage. Nous en concluons qu'une configuration d'essais de la plaque avec une position de l'impact sur une (des) ligne(s) nodale(s) conduira à des biais aux conséquences préjudiciables pour l'identification. Bien que cela soit difficile à satisfaire avec une excitation ponctuelle et unique (du fait de la densité modale), il est donc important de choisir un point d'excitation qui évite autant que possible d'être situé sur des lignes nodales.

D'autre part, comme le matériel de mesures optiques n'est pas lié à la structure, il nécessite d'adapter la dynamique de mesure lorsque celle-ci est sujette à de grands mouvements d'ensemble. En fait, les mouvements les plus pénalisants sont les rotations puisqu'elles nécessitent une adaptation continue, fonction de la distance entre le centre de rotation et le point de mesure. Une excitation au centre de gravité de la structure permettrait d'éviter ces mouvements pénalisants, mais nous devons éviter ce point s'il est situé sur un grand nombre de lignes nodales, ce qui est le cas pour une plaque rectangulaire. Le choix final du point d'excitation doit donc résulter d'un compromis visant à éviter les lignes nodales des modes flexibles tout en se rapprochant du centre de rotations. C'est la raison pour laquelle nous retenons une position légèrement excentrée pour le point d'excitation : 15 mm et 10 mm du centre convient pour une plaque rectangulaire de 150 mm par 100 mm (respectivement).

**Positionnement des élastiques** Le positionnement des élastiques sur la structure va influencer la réponse vibratoire mesurée. Cependant, contrairement à certains travaux comme [DVSDW97] où les suspensions sont déplacées sur les lignes nodales de chaque mode, nous ne souhaitons pas effectuer ces changements pour limiter les dispersions. Pour tester l'influence de la position des élastiques, nous les avons placés en différentes positions : aux milieux des côtés ou aux coins d'une plaque rectangulaire (150 mm par 100 mm) en PVC de 5,1 mm d'épaisseur. Elle pèse 111g et l'impact en masse ajoutée des 4 élastiques (et de la colle) est très faible puisqu'inférieur à 2g. Les fréquences de résonances (avec une résolution fréquentielle de 2Hz) associées à ces configurations sont présentées sur le tableau 4.2 (cf. figure 4.5). Il apparaît que l'influence des élastiques sur les fréquences de résonance est relativement limitée (inférieure à 5 Hz sur [0-2700] Hz).

Mode	Élastiques aux coins (Hz)	Élastiques au centre des côtés (Hz)
1	356	354
2	394	392
3	822	824
4	950	948
5	1046	1048
6	1248	1252
7	1538	1542
8	1778	1774
9	2224	2224
10	2640	2644

TAB. 4.2 – Influence sur les fréquences de résonances du positionnement des élastiques

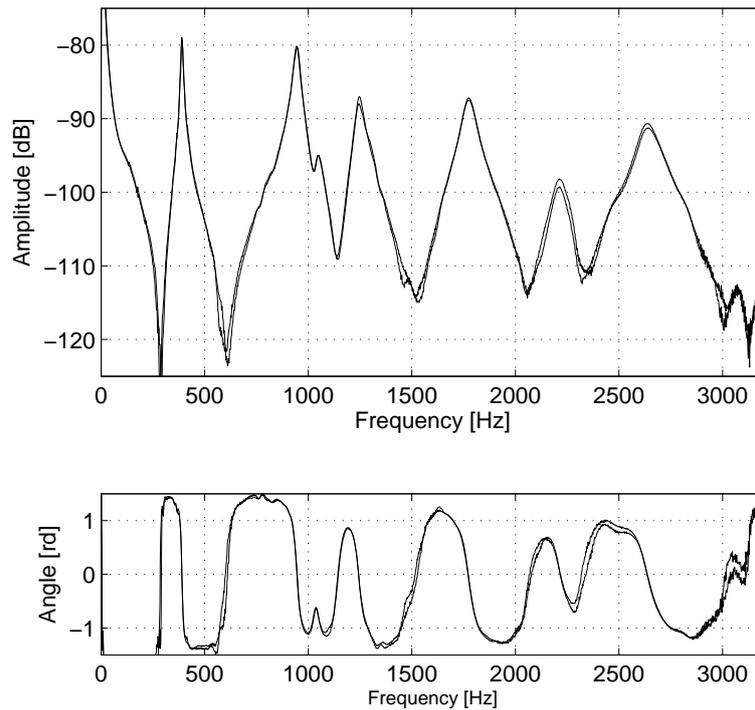


FIG. 4.5 – Superposition des FRF pour 2 positions d'élastiques

#### 4.1.3.5 Matériel d'acquisition et de traitement des signaux

Le schéma du dispositif de test complet est présenté sur la figure 4.6, et des photos de l'ensemble sont présentées sur la figure 4.7. Le vibromètre laser est placé sur un portique permettant de le déplacer dans un plan. Il est relié, via son conditionneur ICP, à un analyseur de spectre, tout comme le capteur d'effort du système d'excitation. L'analyseur de spectre est relié à un ordinateur pour centraliser l'acquisition des données et le déplacement du vibromètre.

Un analyseur de spectre permet normalement d'obtenir des FRF à partir d'estimateurs de type H1 ou H2 sur les signaux temporels de vitesse et de force. Ces estimateurs, identiques en l'absence de bruit, conduisent à différentes évaluations pour des tests réels. L'estimateur H1 permet une meilleure approximation des FRF en présence de bruits aléatoires en sortie (mesure de la vitesse vibratoire), alors que l'estimateur H2 minimise un bruit en entrée (mesure de la force d'excitation)[RL99, McC95]. L'estimateur H1, disponible sur notre matériel d'acquisition HP 35670A, semble donc mieux adapté pour nos essais. D'après la documentation, ce matériel présente une erreur de gain inférieure à 0,04 dB ou 0,5 % de la mesure et une erreur de phase inférieure à 0,5 ° entre les 2 voies de mesure. Il est limité à l'enregistrement de 4096 points et donc à la présentation de 1600 lignes spectrales.

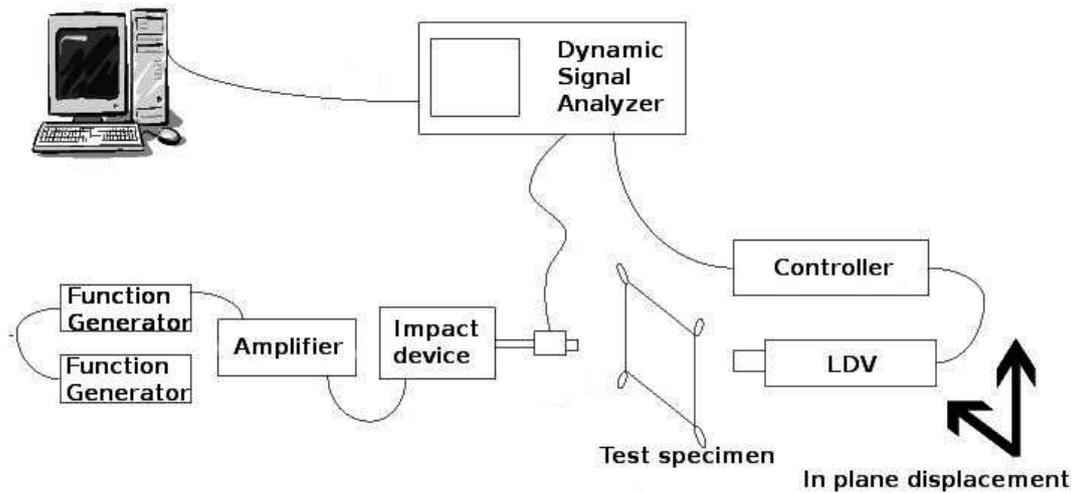


FIG. 4.6 – Schéma du dispositif d'essai

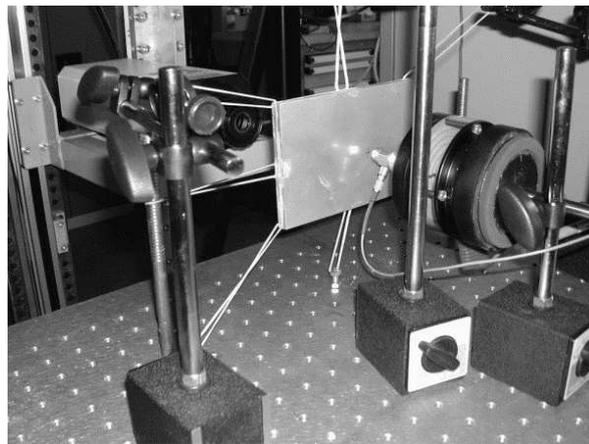


FIG. 4.7 – Photo du dispositif d'essai

#### 4.1.4 Conclusion

Le dispositif d'essai doit résulter de la compatibilité entre les moyens de mesures cinématiques (1D ou 3D) et d'efforts, les moyens d'excitations (pour un régime transitoire ou établi) et les fixations de la structure. Il nécessite en outre une acquisition rapide, en rapport avec la vitesse de vibration de la structure, et parfaitement synchronisée de tous les instruments.

La mesure de champ par holographie permet d'offrir une excellente résolution, mais au prix d'une mise en oeuvre complexe pour assurer l'acquisition des parties réelles et imaginaires des champs en phase par rapport à l'excitation. Avec ce moyen de mesure cinématique, il est nécessaire d'avoir un moyen d'excitation capable de mettre la structure en régime établi de vibration. Une solution par exciteur électromagnétique ou piézoélectrique (qui perturbe la structure aux limites) est envisageable si elle est conjointe à une méthode d'identification en force filtrée. Cette méthode nécessite toutefois un champ complet, 3D, de la zone d'intérêt, ce qui augmente encore la complexité et le coût du moyen de mesure à mettre en oeuvre dans ce cas.

La mesure holographique d'un champ cinématique partiel, 1D, n'est compatible qu'avec la méthode d'identification en forces pondérée en déplacements. Celle-ci nécessite alors des CL parfaitement connues et une excitation en régime établi qui ne perturbe pas la structure. Pour respecter ces conditions, une solution de suspension par élastiques et une excitation acoustique qui évite les dissipations par contact est possible. Cette méthode d'excitation nécessite toutefois une méthode de mesure complexe pour obtenir le champ de pression s'exerçant sur la structure.

Le dispositif expérimental que nous avons retenu est beaucoup plus simple de mise en oeuvre et reste compatible avec cette méthode d'identification. Il dérive des techniques expérimentales bien éprouvées et habituellement utilisées pour l'analyse dynamique des structures métalliques. Il associe un moyen d'excitation fixe par impact avec des suspensions élastiques et une mesure cinématique laser par balayage spatial piloté par ordinateur. Des précautions sont toutefois nécessaires avec ce matériel pour tester les structures en polymère dur et un dispositif spécifique a été mis en place pour automatiser les excitations. Il permet une bonne répétabilité même sur ces structures légères tout en restant dans le domaine linéaire.

L'expérience montre que les élastiques souples permettent d'approcher des conditions libres sans trop perturber les mesures. Le champ cinématique est obtenu par une succession de mesures ponctuelles aux noeuds du modèle expérimental à l'aide d'un dispositif de balayage plan mis en place pour ces essais. Chaque mesure ponctuelle permet l'acquisition de 1600 lignes spectrales.

Le dispositif expérimental choisi doit donc permettre de n'avoir qu'une structure testée dans une configuration unique de test. En outre, il est adapté à une grande variété de formes et de dimensions pour celle-ci. Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'extraction d'un échantillon est difficile, comme par exemple pour une structure composite qui risque un délaminage.

## 4.2 Identification à partir de données expérimentales

Nous nous intéressons maintenant à l'identification de paramètres viscoélastiques à partir des données expérimentales obtenues sur des structures réelles. Les structures ont été choisies pour obtenir des effets significatifs de dissipation, notamment au niveau de leurs épaisseurs. En effet, au niveau de la microstructure, il faut garder un volume élémentaire représentatif, c'est-à-dire avec suffisamment de chaînes moléculaires.

Dans nos applications, nous allons d'abord nous intéresser à un PVC extrudé couramment utilisé dans des applications industrielles. Ensuite, nous nous intéressons à l'identification du polymère mis en oeuvre dans un composite polymère/métallique obtenu par l'assemblage de 2 plaques homogènes et isotropes. Il existe en effet de nombreuses applications vibro-acoustiques des matériaux viscoélastiques dans des sandwich multicouches qu'il est intéressant de caractériser *in-situ*, comme par exemple les verres PVB.

### 4.2.1 Application sur une structure en PVC

Le matériau choisi pour être caractérisé est un PVC isotrope. Ce matériau livré en plaque de 5,1 mm d'épaisseur par SIMONA est rigide avec une température de transition vitreuse que nous avons mesuré à 75,5° C avec un appareil DSC (*Differential Scanning Calorimetry*). Sa limite élastique est de 58 Mpa et nous avons mesuré ses propriétés statiques :  $E = 3,5\text{GPa}$  et  $\nu = 0,38$  ( $G = 1,27\text{GPa}$ ).

**4.2.1.1 Identification par analyse fréquentielle**

Un échantillon de 150x100 mm est extrait dans la plaque brute et le champ de réponse en fréquence a été mesuré à température ambiante ( $\sim 20^{\circ}\text{C}$ ) suivant le protocole annoncé dans la section précédente en 570 points (aux noeuds du modèle EF) d'une face suivant la normale au plan de la plaque. Des exemples de FRF mesurées sur la gamme 0-3200 Hz avec 1600 lignes spectrales sont présentés sur les figures 4.10 et 4.11. La première correspond à un point de mesure où le bruit semble peu important et la seconde à un point où il semble maximal. Les champs de déformées opérationnelles mesurées par vibrométrie à des fréquences proches de celles des modes propres sont présentées sur la figure 4.12. Aussi, comme prévu théoriquement, l'analyse de ces déformées expérimentales confirme la dépendance spatiales des fréquences de résonances. C'est ce qui est montré sur l'exemple de la figure 4.13 où les fréquences des pics d'amplitudes au voisinage de la fréquence du 6ème mode sont reportées sous forme d'un champ spatial sur la plaque.

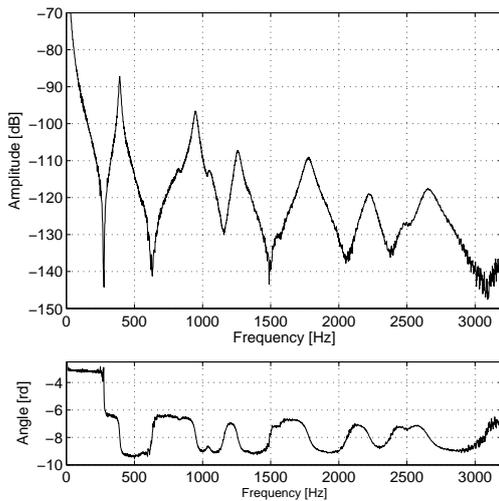


FIG. 4.8 – FRF au point 251

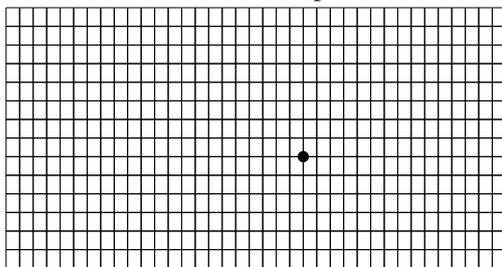


FIG. 4.10 – Localisation du point 251

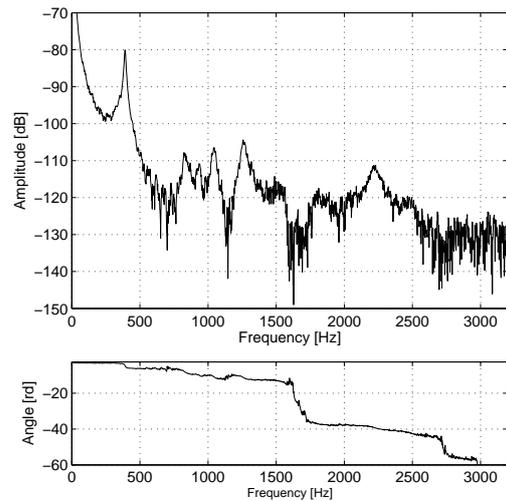


FIG. 4.9 – FRF au point 456

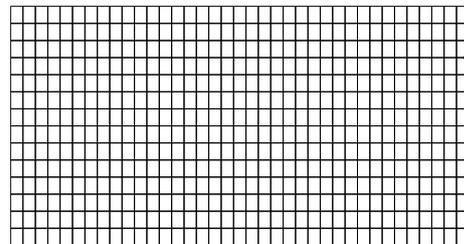


FIG. 4.11 – Localisation du point 456

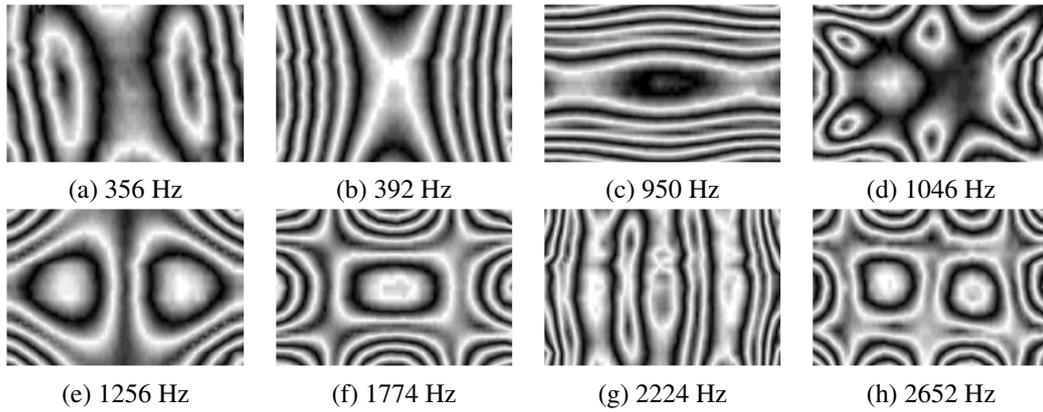


FIG. 4.12 – Champs de déformées opérationnelles mesurées sur la plaque PVC

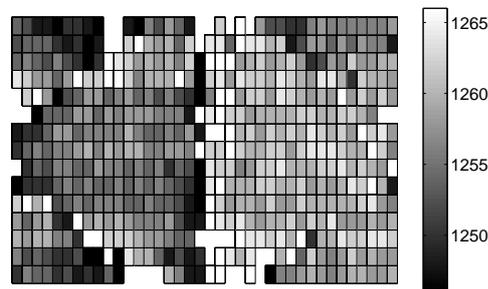


FIG. 4.13 – Carte des fréquences de résonance près du sixième mode de la plaque PVC

Le modèle numérique est celui mis en place dans les chapitres précédents, formé par un maillage de 38x15 éléments H8coque et d'un modèle d'amortissement hystérétique. Les paramètres initiaux sont ceux mesurés en statique avec un amortissement forfaitaire de 3% sur le module d'Young. La FRF colocalisée obtenue avec ce modèle, versus la FRF mesurée, est présentée sur la figure 4.14a en exemple. On peut constater qu'il y a une bonne corrélation en basses fréquences, fig. 4.14b, ce qui est naturel avec ces paramètres, mais aussi qu'il est nécessaire de prendre en compte la variation de ceux-ci en fréquence pour corrélérer l'ensemble des réponses en fréquences.

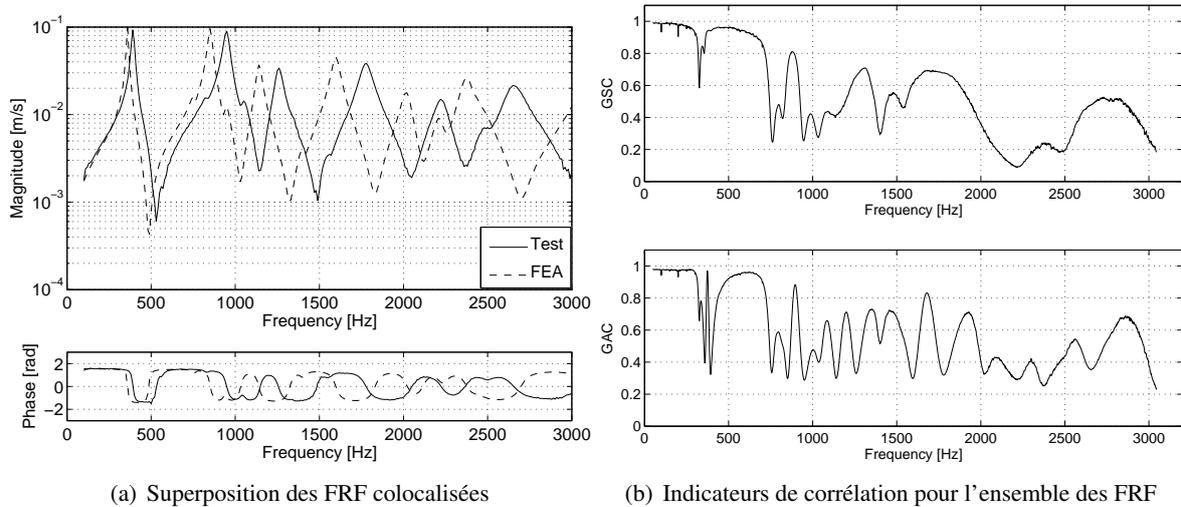


FIG. 4.14 – Comparaison des modèles EF (initial) et test pour le PVC

Le recalage du modèle numérique est ensuite effectué par la méthode en forces pondérées en déplacements avec des paramètres matériaux  $K$  et  $G$  constants par morceaux, sur des plages de 200 Hz. Les résultats identifiés et le retour aux paramètres  $E$  et  $\nu$  sont présentés sur les figures 4.15 et 4.16. Ces résultats font apparaître une évolution rapide des modules de stockage avec la fréquence jusqu'à 700-800 Hz, avant de prendre des valeurs plutôt constantes en fréquences. Le sens de variations trouvé est bien celui qui était attendu, avec un module plus élevé en hautes fréquences qu'en statique, alors que c'est le contraire qui se produit sur le coefficient de Poisson. Comme avec les expérimentations numériques menées avec des données simulées, la valeur identifiée pour le coefficient de Poisson en basses fréquences (à 200 Hz) paraît peu fiable, avec des valeurs assez éloignées des valeurs statiques (0,38 pour la partie réelle et 0 pour la partie imaginaire). En effet, d'après les mesures DMA variables en températures que nous avons fait réaliser sur ce matériau, il ne doit pas y avoir de sauts dans cette plage de fréquences. Pour vérifier cela, nous avons effectué des essais complémentaires avec une autre machine DMA sur des éprouvettes sollicitées en flexion à température ambiante (25 °C) sous une précharge de 0,8 Newtons. Les résultats qui ont pu être obtenus à des fréquences de 1, 10 et 30 Hz sont  $E = 3,42(1 + j0,0102)$  GPa,  $E = 3,47(1 + j0,0137)$  GPa et  $E = 3,50(1 + j0,0184)$  GPa (respectivement). Mais il convient de signaler que ces valeurs sont obtenues à une température plus élevée que lors de nos essais dynamiques et avec une théorie de poutre mince (sans tenir compte des effets de cisaillement pendant l'essai). Toutefois, ces valeurs sont globalement cohérentes avec l'évolution supposée des paramètres statiques aux paramètres dynamique identifiés. Ces résultats permettent donc de compléter notre connaissance de ce matériau.

De plus, il apparaît aussi clairement sur les courbes de modules des figures 4.15 et 4.16 que certains points identifiés sont entachés d'erreur puisqu'ils se trouvent isolés à des valeurs différentes des points alentour : par exemple, la valeur de  $K$  à 2000 Hz paraît peu fiable. Mais la dispersion observée est encore plus forte sur les valeurs trouvées pour le coefficient de Poisson, et surtout sur son facteur de pertes où quelques valeurs positives, aberrantes, sont observées. Cela rejoint aussi les conclusions de nos expérimentations numériques. Mais d'un point de vue global, les facteurs de pertes des modules sont bien positifs dans l'ensemble et ceux du coefficient de Poisson négatifs. Les valeurs obtenues sont donc bien cohérentes, tant pour les modules de stockage que pour les facteurs de pertes.

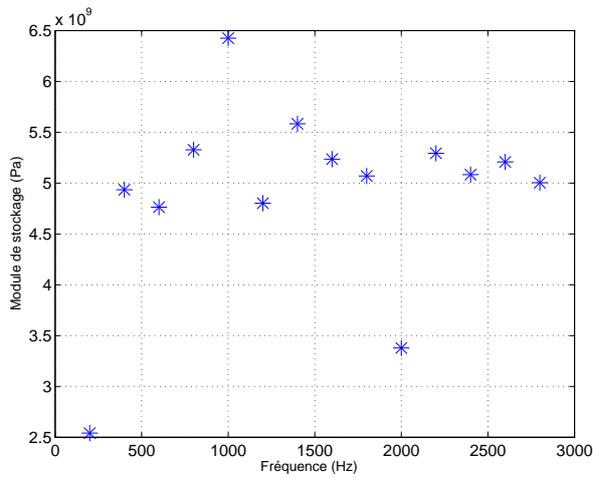
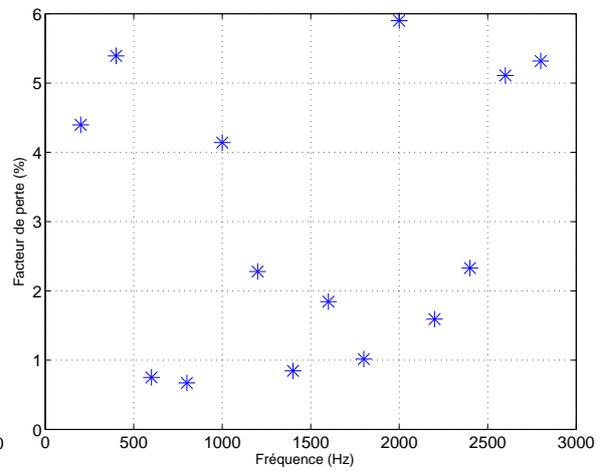
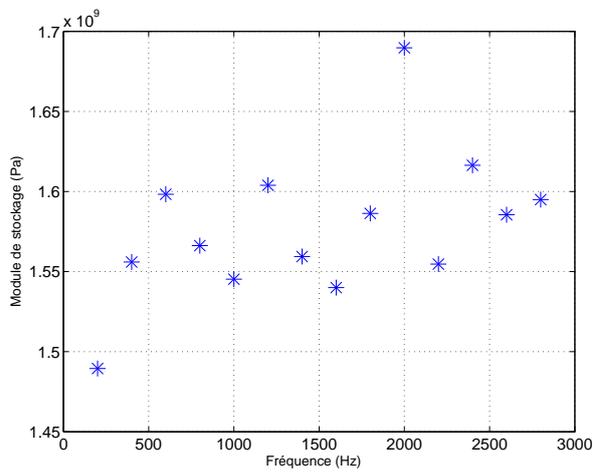
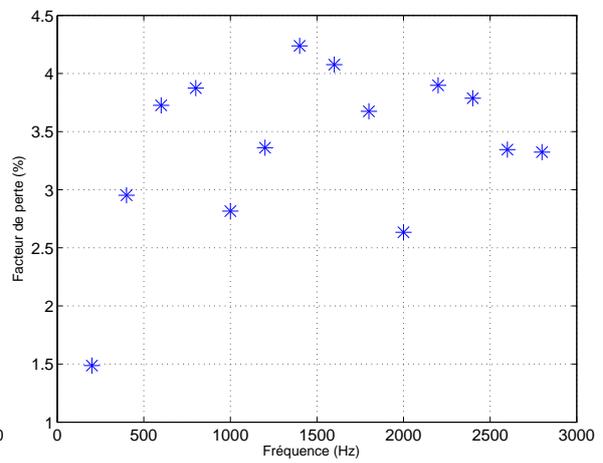
(a) Module de stockage de  $K$ (b) Facteur de perte de  $K$ (c) Module de stockage de  $G$ (d) Facteur de perte de  $G$ 

FIG. 4.15 – Evolution des paramètres identifiés  $K$  et  $G$  du PVC avec la méthode en forces pondérées en déplacements

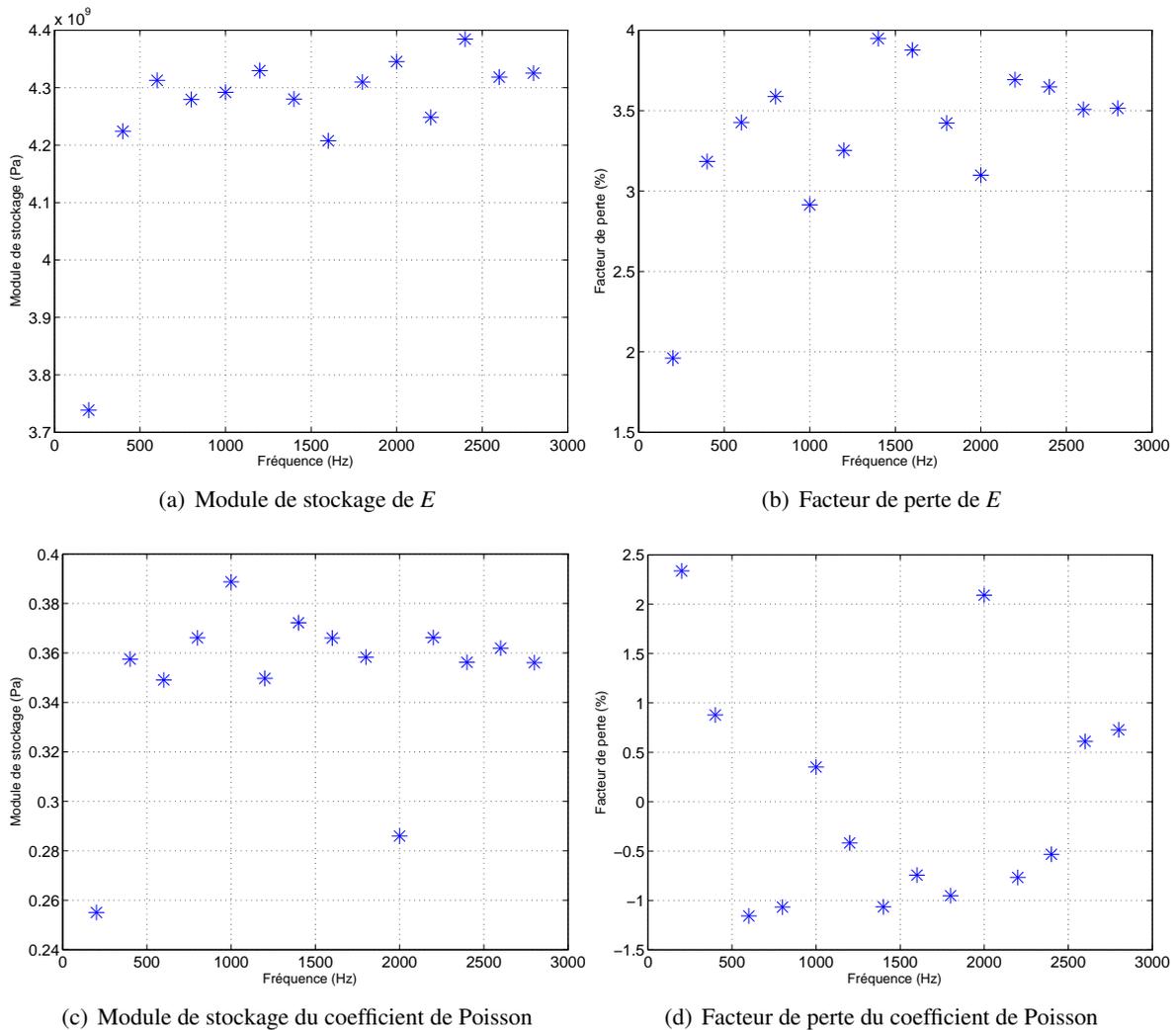
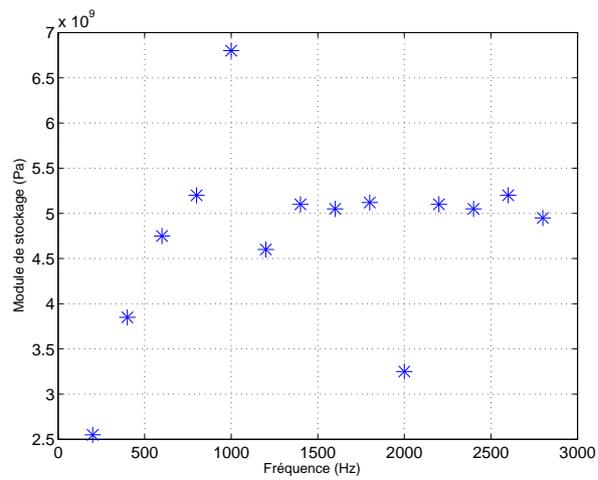
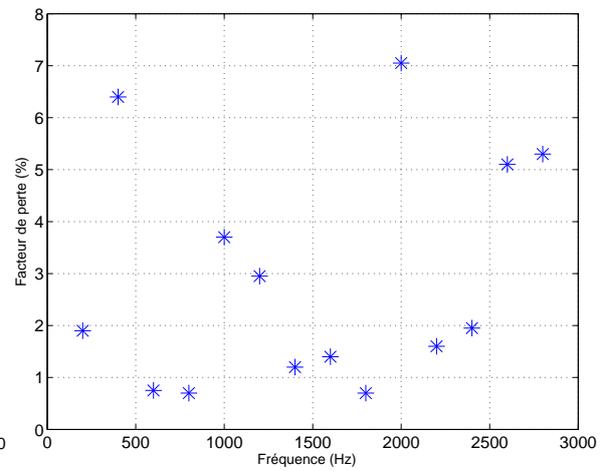
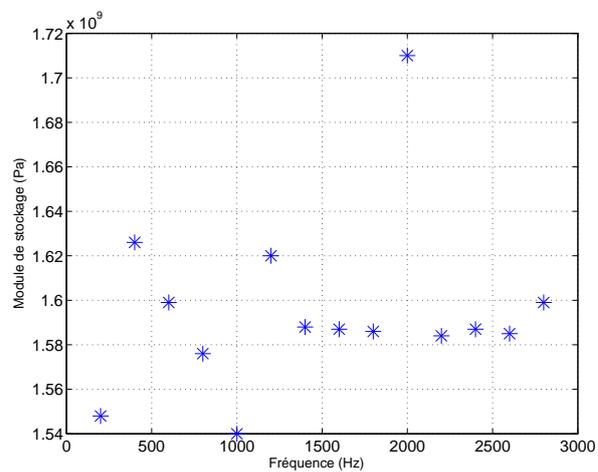
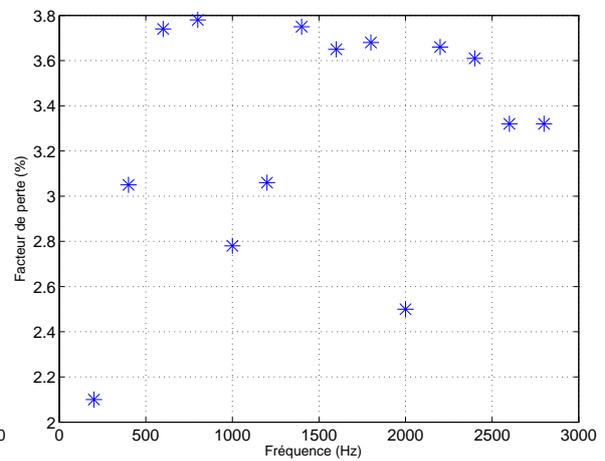


FIG. 4.16 – Evolution des paramètres  $E$  et  $\nu$  du PVC avec la méthode en forces pondérée en déplacements par post-traitement des paramètres de la figure 4.15

Après ce recalage, les fréquences de résonances expérimentales et numériques sont en accord et il devient possible d'appliquer la méthode d'identification en déplacements. Puisque celle-ci est moins sensible aux bruits aléatoires de mesures, il est intéressant de voir sur cette application si elle permet d'améliorer l'identification des paramètres. A partir des valeurs précédentes, une itération supplémentaire avec cette méthode à pu être réalisée, mais les résultats obtenus présentés sur les figures 4.17 et 4.18 ne sont pas très différents, et les conclusions restent inchangées. En fait, le résultat pour le coefficient de Poisson devient même moins bon pour les valeurs en basses fréquences à 200 et 400 Hz.

(a) Module de stockage de  $K$ (b) Facteur de perte de  $K$ (c) Module de stockage de  $G$ (d) Facteur de perte de  $G$ FIG. 4.17 – Evolution des paramètres  $K$  et  $G$  identifiés du PVC avec la méthode en déplacements

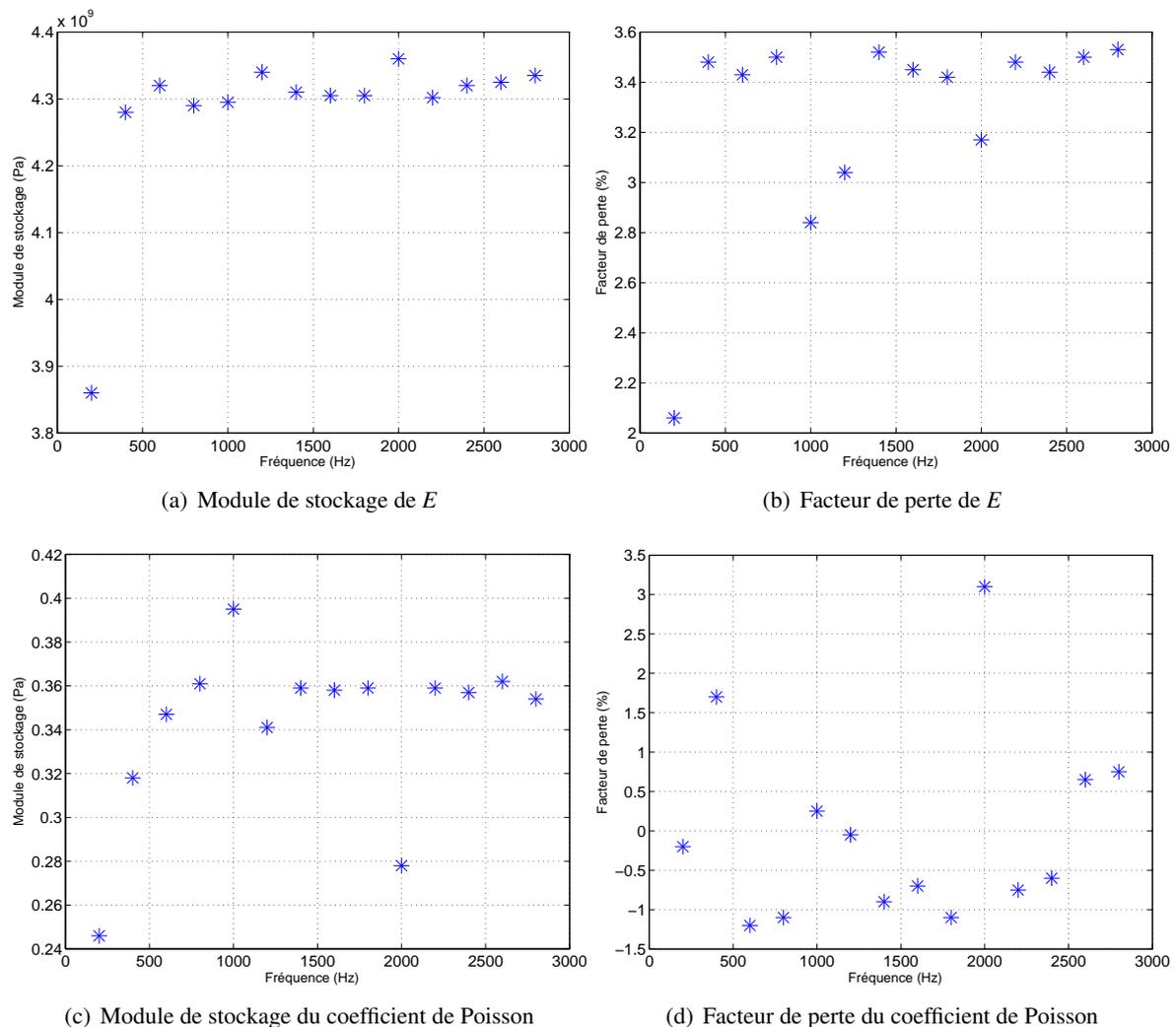


FIG. 4.18 – Evolution des paramètres  $E$  et  $\nu$  du PVC par post-traitement des paramètres de la figure 4.17

Pour aller plus loin dans l'explication des points aberrants, nous avons mis en oeuvre la procédure proposée par DuMouchel et O'Brien [DO91] à partir du résidu produit par la différence entre les champs expérimental et numérique et des gradients. Cette procédure itérative produit un indicateur permettant de détecter les points qui ne suivent pas bien l'ajustement des paramètres réalisé au sens des moindres carrés (*outliers*). Les valeurs trouvées sont comprises entre 0 si la donnée doit être rejetée (elle est bruitée) et 1 si elle est bien en accord avec l'ajustement. L'indicateur obtenu est illustré sur la figure 4.19 pour les parties réelles et imaginaires des résidus liés aux points 251 et 456 (cf. FRF des figures 4.10 et 4.11). Dans l'ensemble, les valeurs obtenues distinguent clairement la FRF 456 assez bruitée de la FRF 251 peu bruitée (en moyenne 71% et 65% sur l'ensemble des fréquences pour les parties réelle et imaginaire du noeud 456 versus 84% et 80% pour le noeud 251). Mais plus localement, nous pouvons remarquer que cet indicateur propose d'éviter le voisinage des fréquences de résonance dans l'évaluation des paramètres au sens des moindres-carrés. D'autre part, il faut noter que les points localisés au bord de la plaque ont un niveau de bruit important d'après cet indicateur. Ceci rejoint nos constatations expérimentales : le faisceau laser risque de se retrouver "à cheval" sur

le bord de la plaque à un moment donné dans le mouvement de celle-ci, ce qui dégrade la mesure.

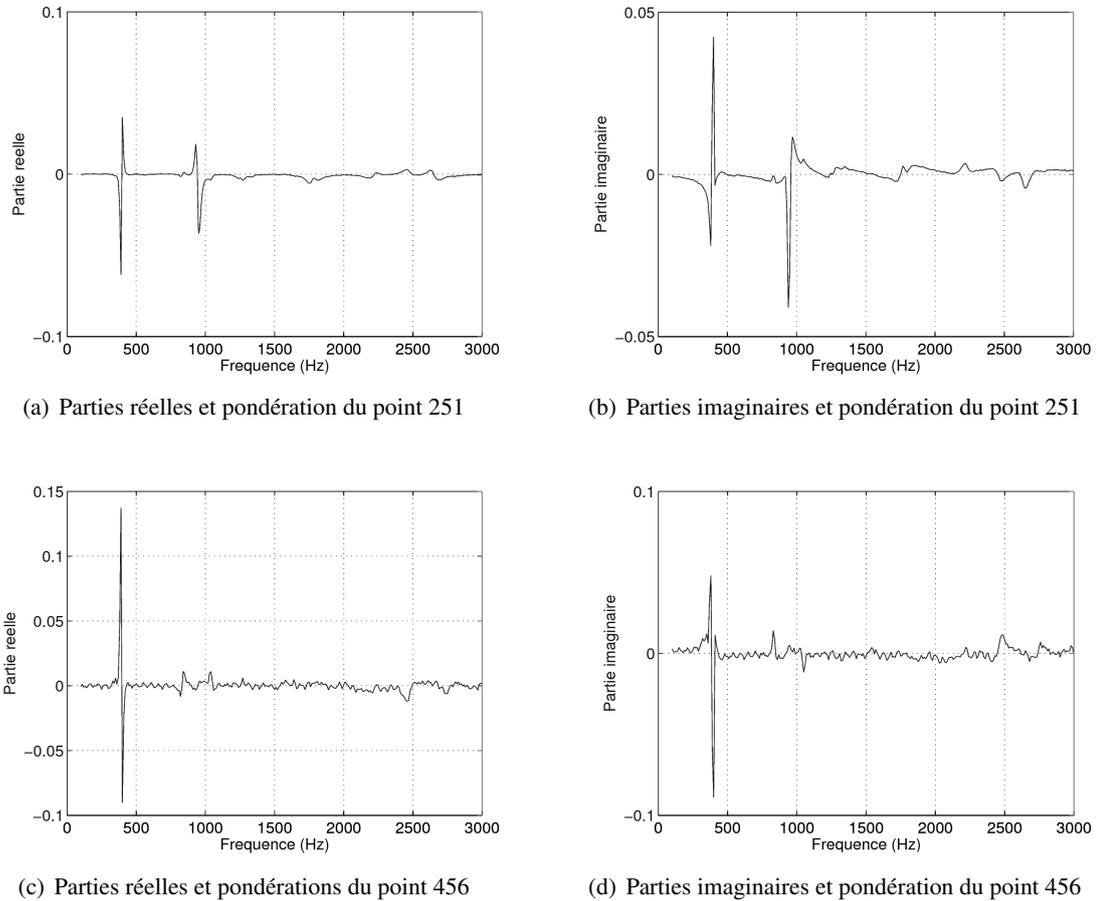


FIG. 4.19 – Résidu et indicateurs appliqués sur les points 251 et 456

Pour finir avec les résultats précédents, il peut être intéressant de proposer un modèle de dissipation pour les caractéristiques en fréquences de ce PVC. Malheureusement, les modèles classiques et simples de viscoélasticité ne permettent pas de reproduire les tendances observées. Nous proposons alors de paramétrer les parties réelles et les parties imaginaires du module d'Young et du coefficient de Poisson dynamique par des modèles exponentiels. Par exemple, nous pouvons proposer  $\Re[E] = 4,32 - 0,83 \exp(-0,00352f)$  GPa pour la partie réelle du module d'Young. Les points retenus finalement et les courbes des caractéristiques exponentielles sont reportées sur la figure 4.20. Cependant, une évolution avec plusieurs maxima correspondrait probablement mieux aux différents points des facteurs de pertes, comme cela est illustré sur la figure 1.9 pour ce matériau qui n'est tout de même pas très dissipatif (comparé à un viscoélastique du type ISD112 par exemple).

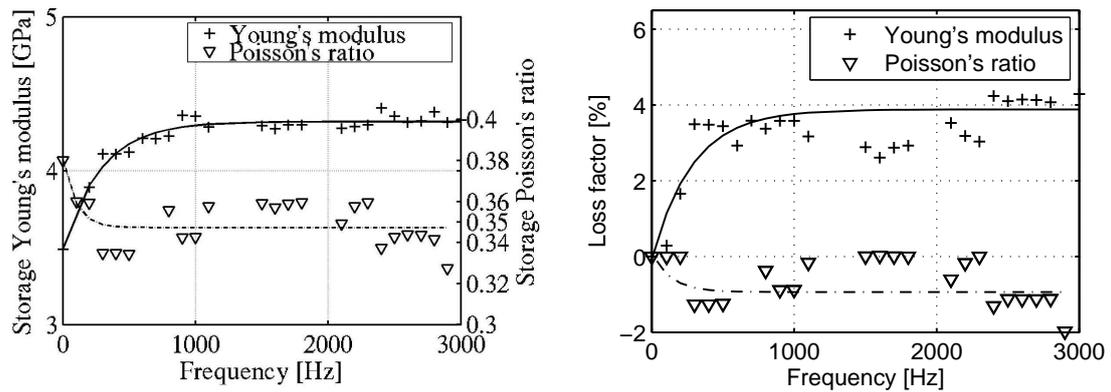


FIG. 4.20 – Evolution des paramètres retenus avec des modèles exponentiels pour  $E$  et  $\nu$  du PVC

Les figures 4.21 et 4.22 présentent finalement les déformées opérationnelles du modèle numérique et la superposition d'une FRF des modèles numérique et test. Compte tenu de la figure 4.12, nous voyons que les modèles numérique et de test sont corrélés de manière satisfaisante.

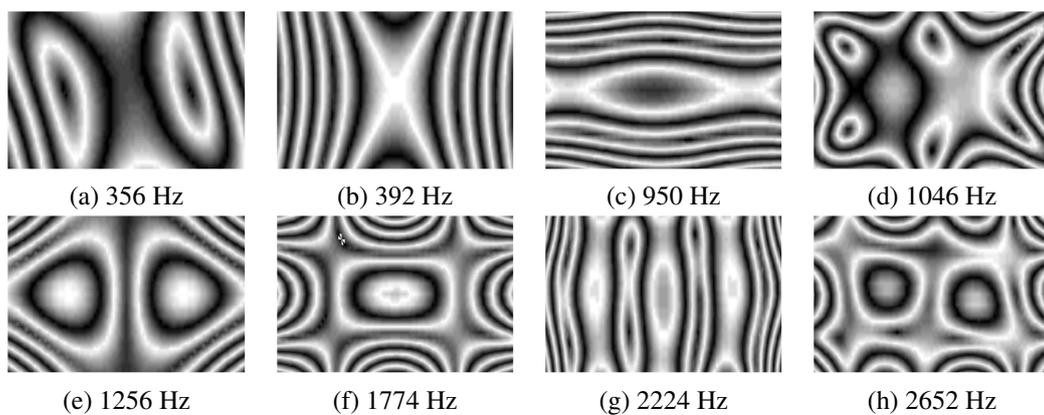


FIG. 4.21 – Déformées opérationnelles du modèle numérique de la plaque PVC

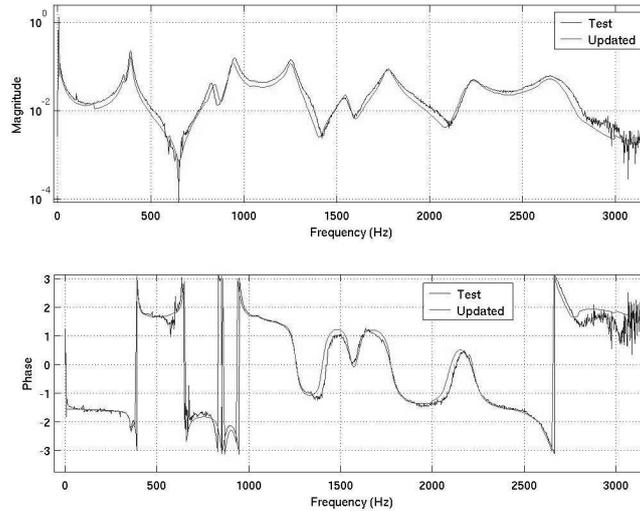


FIG. 4.22 – Superposition d’une FRF des modèles numérique et test de la structure en PVC

#### 4.2.1.2 Identification des amortissements du PVC par analyse modale

Une autre méthode pour identifier des valeurs d’amortissements matériaux consiste à inverser la relation 2.79 en utilisant des facteurs d’amortissements modaux identifiés sur des mesures expérimentales. Pour former un système inversible capable de produire  $n$  paramètres matériaux après résolution, il faut donc écrire  $n$  relations 2.79 avec  $n$  mesures ( $n = 2$  dans le cas isotrope). Mais cette relation n’est valable qu’à une fréquence donnée si les paramètres sont variables en fréquences. Pour satisfaire ce point, il n’est pas possible d’utiliser les amortissements modaux d’une structure ayant des modes aux fréquences éloignées. La solution consiste à relever les amortissements modaux de différents échantillons de plaques (aux dimensions différentes) et de les appairer en fonction des fréquences de résonance expérimentales. Cette stratégie a été appliquée dans la référence [DVSDW97] et nous la reproduisons ici pour investiguer les caractéristiques du PVC.

Pour limiter les perturbations expérimentales, il est conseillé d’effectuer une mesure et une excitation sans contact avec une suspension de l’échantillon par des fils collés aux bords de la plaque dans le prolongement des lignes nodales. Cela nous conduit par exemple à fixer les élastiques dans les coins pour la mesure des propriétés associées au 1er mode et à les fixer au milieu des côtés pour le second. Une mesure colocalisée au vibromètre laser est suffisante pour cette expérience avec une excitation en régime établi à l’aide d’une source sonore. D’après [DVSDW97], l’utilisation de plaques carrés conduit à une meilleure sensibilité pour le coefficient de Poisson complexe. Afin d’adapter les fréquences de résonance, la longueur des côtés des différents échantillons de plaque d’épaisseur 5,1 mm sont choisis à {60, 70, 85, 100} mm. De plus petites dimensions auraient été intéressantes (par ex. 50 mm) pour mieux couvrir l’ensemble de la gamme de fréquences mais nous n’arrivons pas à effectuer des mesures exploitables au LDV dans ce cas.

Pour accélérer les mesures, nous effectuons l’analyse en fréquence des plaques excitées par un signal de type *periodic chirp*. Pour les plaques carrés, l’excitation est réalisée près d’un bord au milieu du côté pour les fixations dans les coins ainsi qu’au centre et dans un coin pour les fixations aux milieux des cotés. Cela doit nous permettre d’identifier les propriétés des 1er et 2ème modes sans perturbation dues à l’environnement de test, au contraire des propriétés du 3ème mode. La plaque

rectangulaire de 150x100 mm est également utilisée pour compléter les données de mesure en utilisant des points de fixations en fonction des lignes nodales des modes 3 et 5. Le tableau 4.3 présente les couples identifiés de fréquences et d'amortissements visqueux modaux.

Plaque	60x60 mm	70x70 mm	85x85 mm	100x100 mm	150x100 mm
Mode 1	{1456 Hz, 1,78%}	{1092 Hz, 1,85%}	{730 Hz, 1,58%}		
Mode 2	{2204 Hz, 1,93%}	{1622 Hz, 1,83%}	{1098 Hz, 1,69%}	{792 Hz, 1,56%}	
Mode 3		{2124 Hz, 1,76%}	{1430 Hz, 1,62%}	{1038 Hz, 1,49%}	{824 Hz, 1,65%}
Mode 4			{1910 Hz, 2,61%}		
Mode 5					{1042 Hz, 1,69%}

TAB. 4.3 – Propriétés modales relevées sur les plaques en PVC

Pour l'identification, nous considérons les propriétés élastiques  $E = 4,07$  GPa et  $\nu = 0,36$  constantes dans la gamme de fréquences considérée (700-2200 Hz). Les amortissements des modes 1 et 2, censés être les plus fiables compte tenu des conditions aux limites adaptées, devraient être préférés pour l'identification. Mais l'ajout de l'amortissement d'un mode 3 ne devrait pas changer de manière démesurée le résultat et permettre d'investiguer la stabilité du résultat. Aussi, pour des amortissements aux environs de 2000 Hz, nous n'avons pas d'amortissements modaux pour un mode 1 et il nous faut utiliser l'amortissement d'un mode 3.

Les résultats obtenus pour différentes combinaison de propriétés modales sont reportés dans le tableau 4.4. D'une manière générale, nous pouvons constater la forte sensibilité du facteur d'amortissement pour le coefficient de Poisson qui conduit à des résultats très chaotiques. L'analyse des résultats sur ce facteur montrent que l'amortissement modal du mode 1 de la plaque de 60 mm n'est pas fiable, de même que celui de la plaque de 70 mm et celui du mode 3 de la plaque de 150x100 mm. Ayant éliminé les colonnes utilisant des valeurs non fiables, il est possible d'extraire le tableau 4.5. Les résultats deviennent alors consistants entre eux.

Plaques	60 à 85			60 à 85			70 à 150			85 à 150		
	2 et 3	2 à 4	3 et 4	1 et 2	1 à 3	2 et 3	1 et 2	1 à 3	2 et 3	2,3,5	1 et 2	1 à 3
$\eta_E$ (%)	3,77	3,70	3,62	3,87	3,49	3,54	2,76	0,071	3,27	3,29	3,08	3,36
$\eta_G$ (%)	3,92	3,82	3,68	3,53	3,64	3,74	3,79	0,075	3,46	3,48	3,17	3,13
$\eta_V$ (%)	-0,60	-0,44	-0,22	1,3	-0,57	-0,73	-3,87	-0,015	-0,71	-0,74	-0,37	0,83

TAB. 4.4 – Amortissements identifiés sur les plaques en PVC

Plaques	85 à 150	70 à 150	60 à 85	60 à 85
Modes	1 et 2	2,3,5	2 et 3	2 et 3
Fréq. moy.	761	1060	1068	1526
$\eta_E$ (%)	3,08	3,29	3,27	3,54
$\eta_G$ (%)	3,17	3,48	3,46	3,74
$\eta_V$ (%)	-0,37	-0,74	-0,71	-0,73

TAB. 4.5 – Amortissements retenus sur les plaques en PVC

Pour conclure cette section après la mise en oeuvre de cette stratégie, nous constatons qu'elle est très délicate de mise en oeuvre pour conduire à l'identification des paramètres matériaux et qu'elle

n'est pas automatique. Ceci est dû à des dispersions trop importantes sur les amortissements modaux expérimentaux qui ne sont pas compensées par une grande quantité de données.

## 4.2.2 Caractérisation d'un Sandwich Aluminium-Lexan

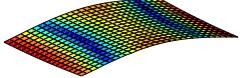
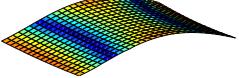
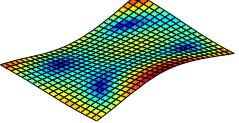
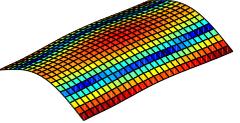
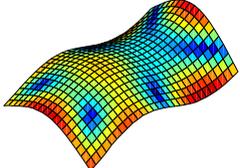
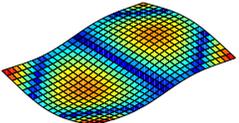
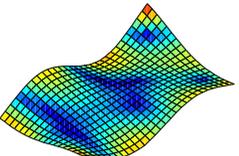
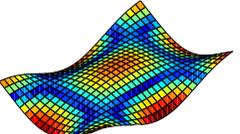
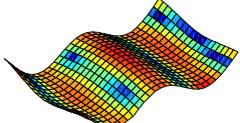
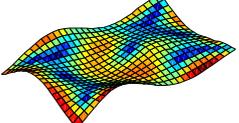
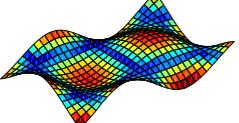
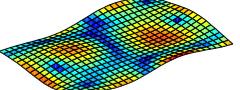
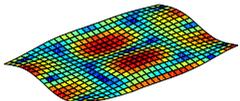
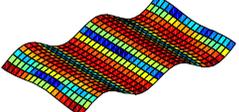
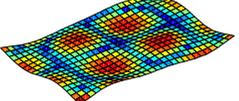
Nous avons choisi dans une seconde application de nous intéresser à la caractérisation de la couche viscoélastique d'un composite sandwich. Plutôt que de travailler directement sur un composite aux propriétés inconnues, nous avons confectionné un tel composite avec des matériaux qu'il est possible de caractériser individuellement. L'assemblage retenu concerne une couche d'aluminium avec une couche de PC (ce dernier matériau a *a-priori* des composants très bien identifiés, contrairement au PVC).

La démarche suivie pour cette étude concerne dans un premier temps l'identification des propriétés du lexan seul avant de nous intéresser à l'identification des propriétés du lexan dans l'assemblage.

### 4.2.2.1 Caractéristiques du Lexan

Le PC choisi est homogène et isotrope et fourni sous forme brute par General Electric en plaque de 4mm sous la dénomination Lexan. Les caractéristiques annoncées sont un module d'Young de 2,35 GPa (ISO 527) pour un chargement à 1mm/min et un coefficient de Poisson de 0,38 (ASTM-D638) à 23°C et 50 % d'humidité relative après 48 heures de stockage.

Un échantillon de 150mm x 100mm est extrait de la plaque brute en vue de sa caractérisation et le champ de mesures est obtenu suivant le protocole expérimental proposé ci-avant. Le balayage a cette fois été réalisé suivant une grille de 29x19 points en excluant les points situés à proximité de l'arête, puisque ces mesures sont très difficile à obtenir et qu'elles sont très bruitées. Le tableau 4.6 présente les déformées opérationnelles mesurées à des fréquences proches des fréquences propres pour cette plaque en lexan. Le maillage régulier du modèle numérique comporte 30x20 éléments H8coque et 1302 noeuds.

ODS				
Freq. (hz)	254	272	577	647
ODS				
Freq. (hz)	712	866	1062	1217
ODS				
Freq. (hz)	1551	1705	1826	1897
ODS				
Freq. (hz)	2355	2533	3022	

TAB. 4.6 – Déformées opérationnelles mesurées pour la plaque en lexan

En première approche, nous avons effectué un recalage du modèle numérique en considérant un modèle d'amortissement hystérétique constant sur la plage de fréquences 100-3000 Hz. Les paramètres identifiés sont présentés dans le tableau 4.7. Ce matériau est donc moins dissipatif que le PVC précédent. Un exemple de superposition de FRF numérique et expérimentale ainsi que des critères de corrélation fréquentiels sont présentés sur la figure 4.23. Ils indiquent qu'en première approximation, le choix d'un modèle hystérétique à paramètres constants sur l'ensemble de cette gamme de fréquence est vraisemblable. Des essais DMA sur un barreau à 1 et 10 Hz ont également confirmé ces valeurs. D'autre part, nous avons aussi effectué l'identification avec un modèle 2D en contraintes planes en vue d'une comparaison avec une méthode d'identification basée sur des données modales. Ce modèle numérique permet d'obtenir des résultats proches des précédents ( $E = 2,65(1 + j0,0287)$  GPa, et  $G = 0,953(1 + j0,0333)$  GPa ou  $\nu = 0,393(1 - j0,0161)$ ).

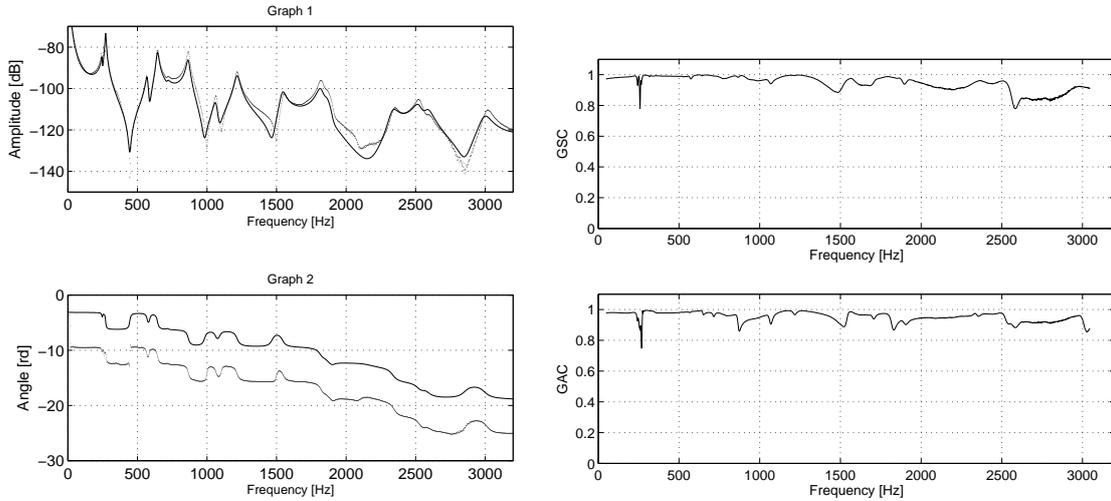


FIG. 4.23 – Superposition des FRF numériques et expérimentale et critères de corrélation fréquentielle pour le lexan avec des paramètres constants

Nous pouvons aussi tester ici notre méthode d'identification avec une relation orthotrope de comportement (orthotropie unidirectionnelle 1.31 à 5 paramètres) sur des données réelles. Présentés dans le tableau 4.7, les résultats obtenus pour ce matériau isotrope présentent une certaine consistance sur les parties réelles des paramètres mais les disparités sont importantes sur les parties imaginaires.

Paramètres	$E_{xx}$ (GPa)	$E_{yy}$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$G_{yz}$ (GPa)	$\nu_{xy}$
Isotrope	$2,55 + j 0,072$	$2,55 + j 0,072$	$0,925 + j 0,027$	$0,925 + j 0,027$	$0,38 + j 0,002$
Orthotrope	$2,85 + j 0,23$	$2,50 + j 0,11$	$0,902 + j 0,047$	$0,919 + j 0,029$	$0,34 + j 0,006$

TAB. 4.7 – Paramètres identifiés pour la plaque en Lexan

En supposant maintenant les paramètres constants par plages de 200Hz, nous obtenons les graphes de variations de la figure 4.24. Ces graphes confirment que les caractéristiques du lexan évoluent peu avec la fréquence. Les variations restent plausibles hormis dans la zone 2000-2500 Hz. Un exemple de FRF recalée ainsi que des critères de corrélation fréquents sont présentés sur la figure 4.25. Pour identifier les zones de mauvaise corrélation spatiale, nous avons tracé un indicateur donné par le produit  $FAAC \times FRAC$  ce qui permet de synthétiser l'information produite par ces 2 indicateurs<sup>1</sup>. La carte obtenue montre un défaut de corrélation près d'un bord vertical et au centre des bords horizontaux. Ce résultat peut être interprété par une influence des CL qui ne sont pas modélisées. Toutefois, si le produit des 2 indicateurs présente l'avantage de bien mettre en évidence les zones de mauvaises corrélation, il amplifie (au carré) un défaut de corrélation mis en évidence par chacun d'eux. Il a donc tendance à exagérer l'importance des zones mal corrélées et nous pouvons affirmer que les corrélations sont plutôt bonnes pour cette application.

<sup>1</sup>Le FAAC (*Frequency Amplitude Assurance Criterion*) et le FRAC (*Frequency Response Assurance Criterion*) sont les pendants spatiaux du GAC et du GSC en fréquences. Pour les coordonnées  $(i, j)$  :

$$FAAC(i, j) = \frac{2 |\bar{\mathbf{H}}^H(i, j) \mathbf{H}(i, j)|}{(\bar{\mathbf{H}}^H(i, j) \bar{\mathbf{H}}(i, j)) + (\mathbf{H}^H(i, j) \mathbf{H}(i, j))} \quad FRAC(i, j) = \frac{|\bar{\mathbf{H}}^H(i, j) \mathbf{H}(i, j)|^2}{(\bar{\mathbf{H}}^H(i, j) \bar{\mathbf{H}}(i, j)) (\mathbf{H}^H(i, j) \mathbf{H}(i, j))} \quad (4.2)$$

Ces critères donnent des valeurs comprises entre 0 (pas de corrélation) et 1 (corrélation parfaite) en fonction des ddl.

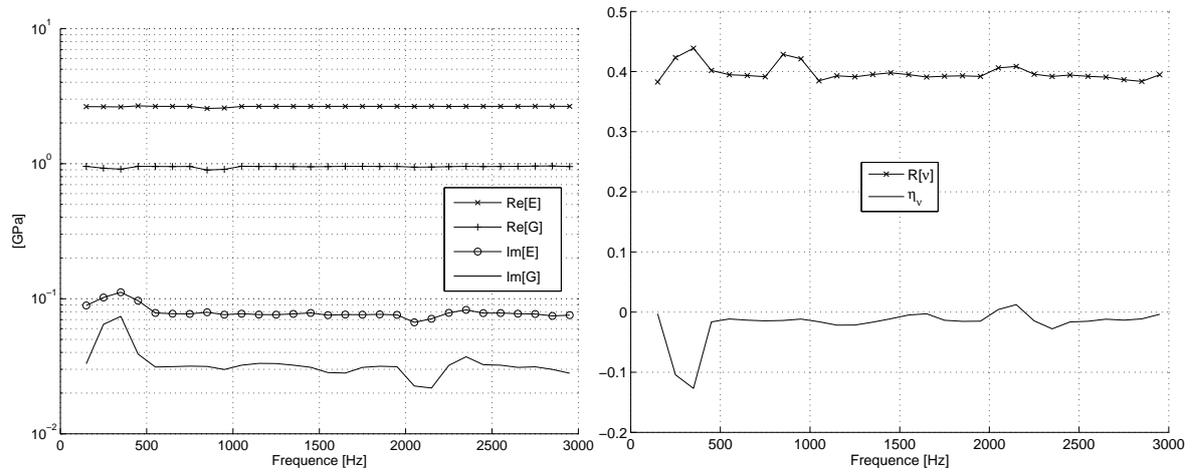
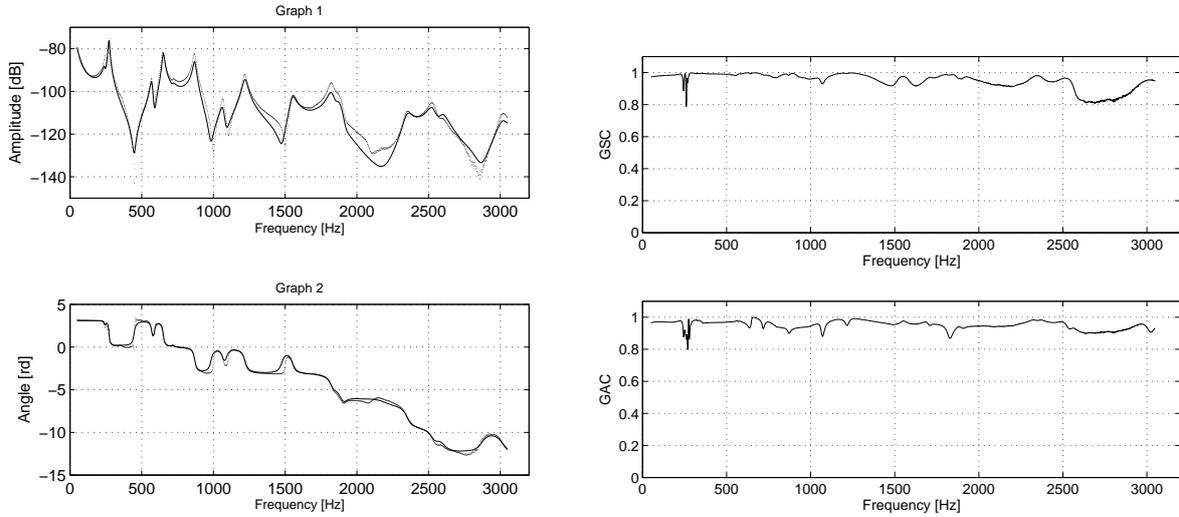
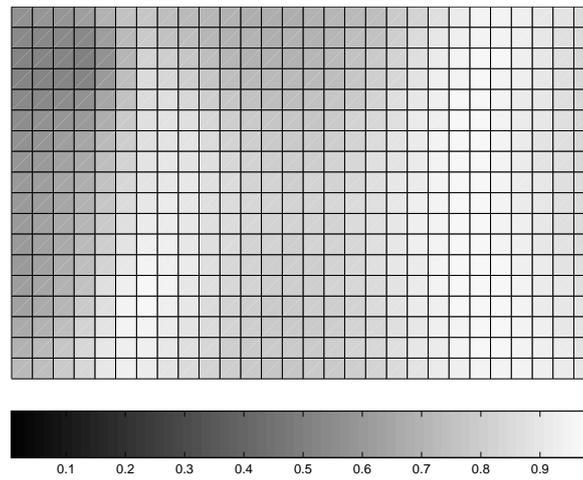


FIG. 4.24 – Paramètres identifiés pour le lexan à partir des FRF



(a) Superposition de FRF numérique et expérimentale en 1 point

(b) Corrélation GSC et GAC



(c) Carte du produit de corrélation FAACxFRAC

FIG. 4.25 – Critères de corrélations pour le lexan avec des paramètres variables

#### 4.2.2.2 Incertitudes sur les paramètres identifiés

Nous cherchons dans cette section d'associer une incertitude sur les paramètres identifiés. Pour commencer ces travaux exploratoires, nous nous intéressons à mener de simples investigations numériques par la méthode de Monte-Carlo.

En fait, l'histogramme du résidu entre les champs expérimentaux et numériques à convergence de la procédure de recalage correspond à une loi normale centrée. Comme il produit une information sur l'erreur globale du modèle et de la mesure, il peut fournir des indications sur le bruit de mesure. Si nous supposons en première approximation que le bruit est homogène spatialement et que le modèle numérique est sans erreur, nous obtenons une estimation du bruit de mesure par l'analyse statistique de ce résidu à une fréquence donnée. Cette analyse est suffisante pour borner l'erreur globale, à défaut d'informations complémentaires.

Les deux parties, réelle et imaginaire, du résidu complexe sont à analyser à chaque fréquence. La figure 4.26 reporte les écarts types et le coefficient de corrélation de ces 2 parties en fonction de la fréquence. Nous avons également reporté sur cette figure l'écart type relatif au maximum du module du champ à cette fréquence. Nous voyons que cet écart type avoisine les 10% (parfois plus) pour la partie réelle. Ces statistiques nous servent à générer un ensemble d'échantillons de "mesures" (simulées) en ajoutant un bruit au champ mesuré. Pour fixer les idées, un exemple de FRF ainsi bruitée est présenté sur la figure 4.27 et l'analyse de la moyenne de 350 échantillons est donnée sur la figure 4.28.

Suivant une méthode de Monte-Carlo, l'analyse statistique de l'ensemble des paramètres identifiés par recalage du modèle numérique<sup>2</sup> avec ces 350 mesures permet d'obtenir l'incertitude sur les paramètres identifiés. Les résultats sont reportés dans le tableau 4.8. Les valeurs obtenues nous semblent faibles pour les parties réelles des paramètres, mais ils confirment l'incertitude importante à associer aux facteurs de pertes, avec 18 % pour celui du coefficient de Poisson.

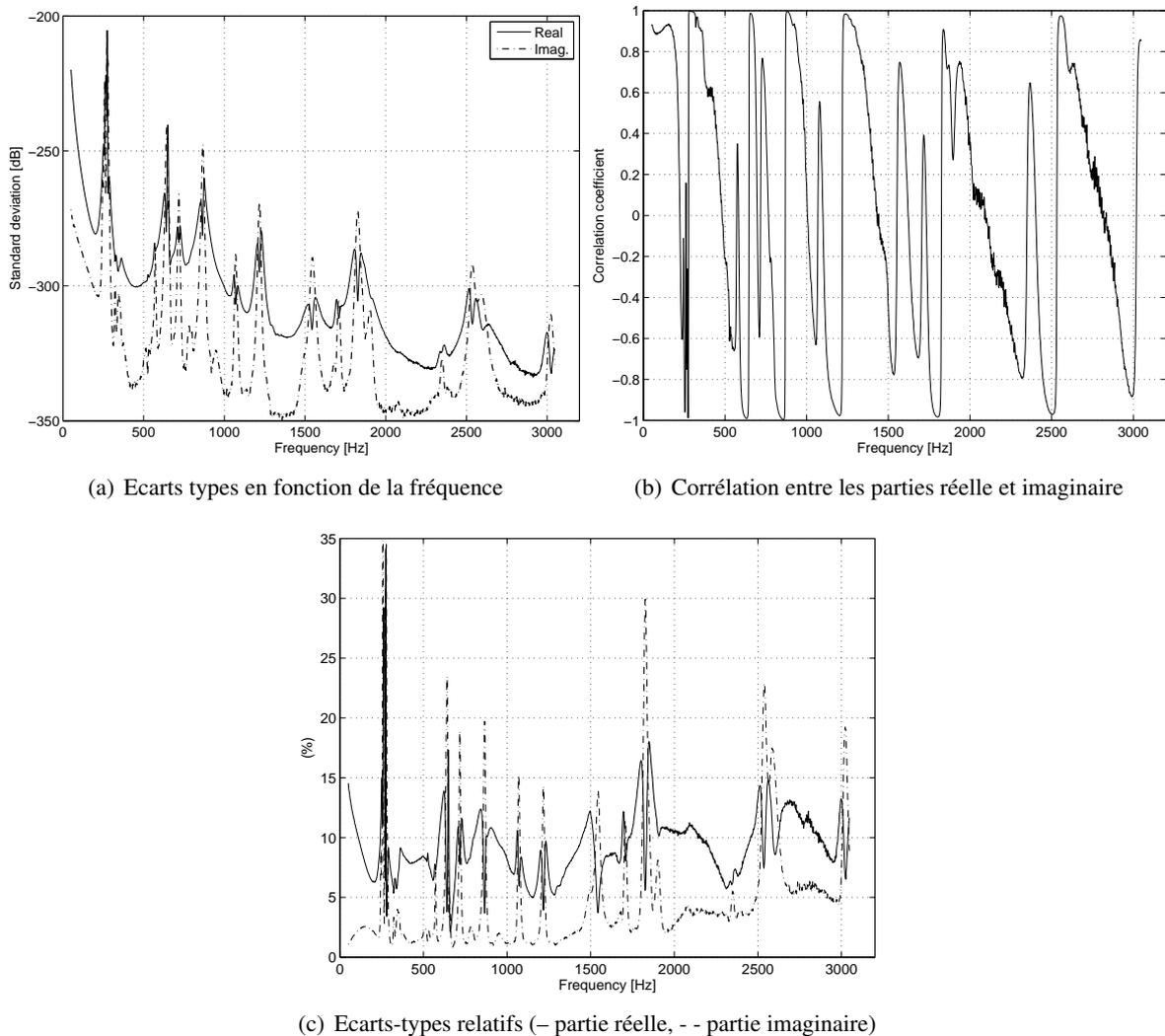


FIG. 4.26 – Analyse statistique du résidu pour le lexan

<sup>2</sup>Pour réduire les coûts de calcul, un modèle en 2D CP avec des éléments Q4  $\gamma$  été utilisé.

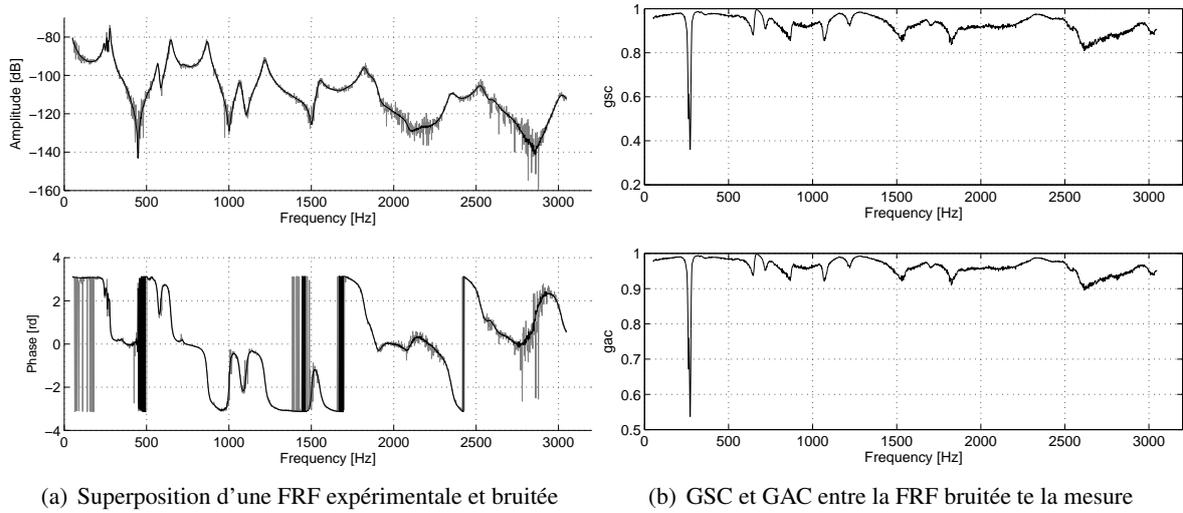


FIG. 4.27 – Présentation d'un échantillon avec bruit ajouté

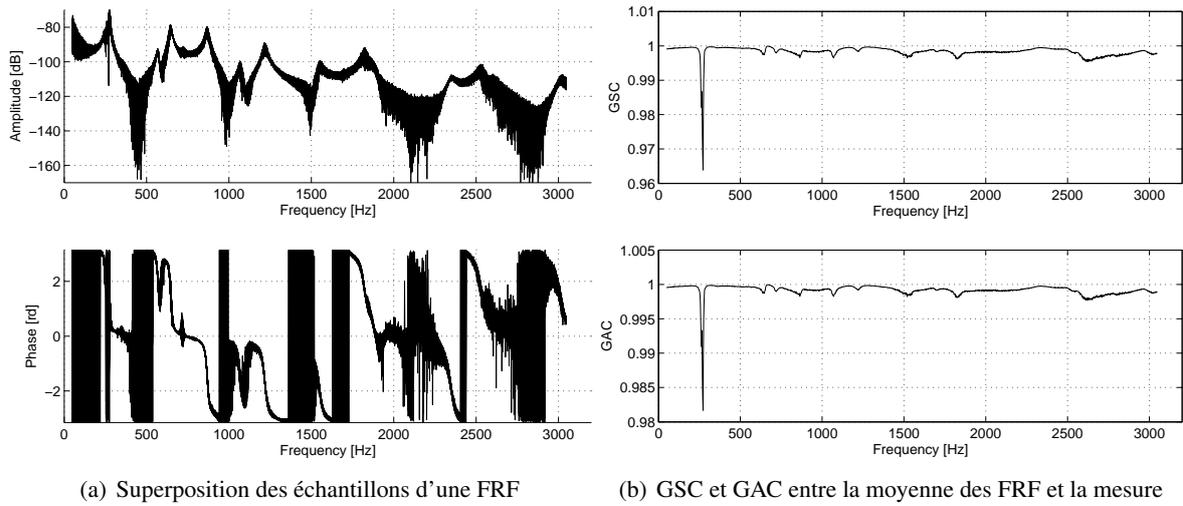


FIG. 4.28 – Ensemble des échantillons de FRF bruitées et corrélations de la moyenne pour le lexan

	$\Re[E]$ (MPa)	$\Re[G]$ (MPa)	$\Re[\nu]$	$\eta_E$ (%)	$\eta_G$ (%)	$\eta_\nu$ (%)
Valeurs de référence	2650	953	0,393	2,87	3,33	1,61
Ecart type $\sigma$	1,4	1,0	0,00074	0,06	0,16	0,41
	$\Re[E]$	$\Re[G]$	$\Re[\nu]$	$\eta_E$	$\eta_G$	$\eta_\nu$
Ecart relatif à 3 $\sigma$ (%)	0,16	0,31	0,63	4,7	8,9	18

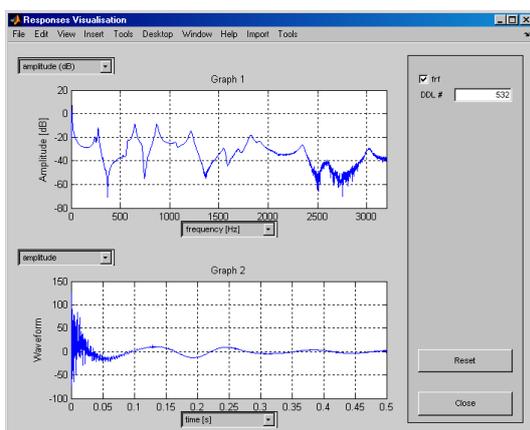
TAB. 4.8 – Statistiques sur les paramètres du lexan

### 4.2.2.3 Identification des propriétés par analyse modale

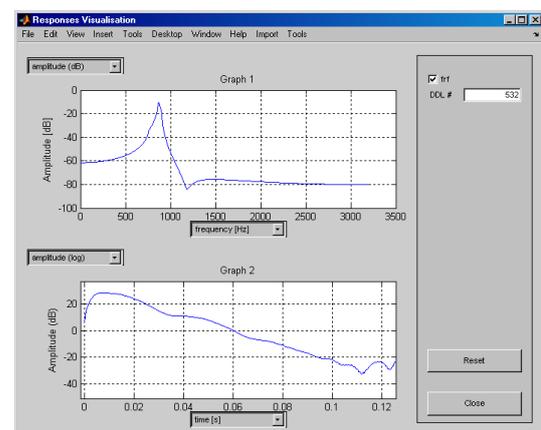
Le tableau 4.9 présente les propriétés modales relevées par l'analyse des signaux de FRF mesurées. Les fréquences propres obtenues pour chaque mode correspondent à la moyenne des fréquences de résonance relevées sur l'ensemble du champ mesuré. Les amortissements visqueux sont obtenus à partir d'une fonction de réponse impulsionnelle (choisie en 1 point). La procédure suivie est la suivante (cf. figure 4.29) :

1. recherche visuelle d'une FRF où le pic de résonance pour le mode considéré est le plus visible ;
2. application d'un filtre en fréquence passe bande sur cette FRF pour isoler le pic de résonance ;
3. évaluation de la réponse impulsionnelle (IRF) par transformée de Fourier inverse. Cela nous donne un signal sinusoïdal exponentiellement amorti ;
4. évaluation du module de la transformée de Hilbert de la réponse impulsionnelle, pour obtenir l'enveloppe du signal ;
5. évaluation des coefficients au sens des moindres-carrés de la droite (dans une échelle logarithmique) qui passe au mieux sur cette enveloppe, par sélection de la plage de temps adéquate ;

Ayant la fréquence du pic de résonance sur la FRF sélectionnée, il est alors possible de trouver le facteur d'amortissement visqueux à partir de ces coefficients. L'intérêt de cette procédure est d'obtenir un coefficient à partir d'un grand nombre de points (dans le domaine du temps). Cependant, certains modes ne sont pas bien excités dans les champs de réponses mesurés et les pics de résonance associés à ces modes ne sont pas toujours bien visible. Cela explique l'absence de valeurs associées à certains modes dans le tableau 4.9. En revanche, la colonne qui contient 2 valeurs d'amortissement donne une idée de l'écart trouvé pour ce mode à partir de 2 FRF différentes.



(a) FRF (haut de l'interface) et IRF (en bas) d'un point



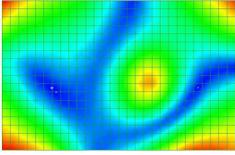
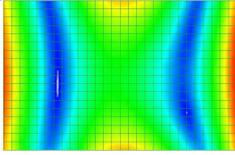
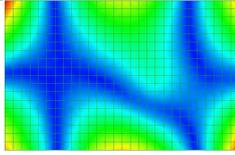
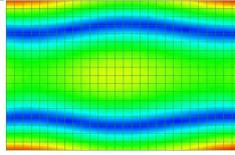
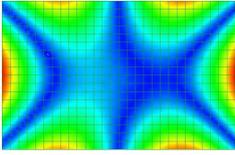
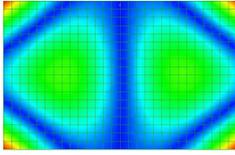
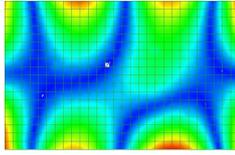
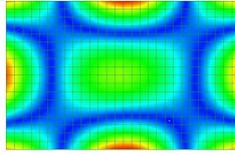
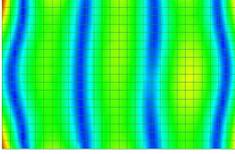
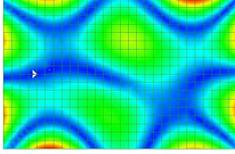
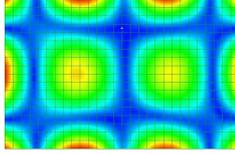
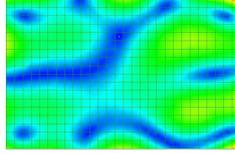
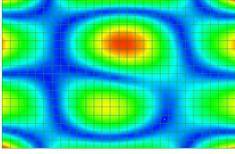
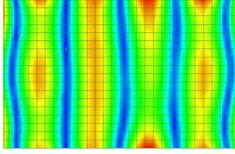
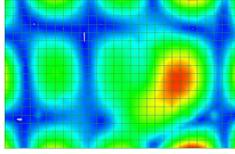
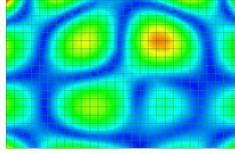
(b) FRF filtrée (en haut) et transformée de Hilbert de l'IRF (en bas)

FIG. 4.29 – Vue de l'interface créée pour l'identification par traitement de signal

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréq. moyenne (Hz)	254,6	272,2	577,3	646,3	711,7	866,3	1062	1217	1551
Amortissement $\xi$ (%)	-	1,11	1,32	1,24-1,64	1,70	1,17-1,21	1,16	1,27	1,10
Mode	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Fréq. moyenne (Hz)	1705	1826	-	1897	2355	2533	-	-	3022
Amortissement $\xi$ (%)	0,83	1,12	-	-	1,08	-	-	-	0,99

TAB. 4.9 – Propriétés modales relevées sur les FRF de la plaque en lexan

Il peut être intéressant de retrouver ces résultats modaux par une autre méthode d'identification, de manière à avoir une idée de la dispersion des résultats. Le tableau 4.10 présente les fréquences, amortissements et modes propres obtenus par analyse modale expérimentale avec la méthode *Least-Squares Complex Exponentiel* du domaine temporel implémentée dans le logiciel de *Test d'Ideas* [MSH<sup>+</sup>98]. La figure 4.30 indique que l'identification est assez satisfaisante en présentant la superposition d'une FRF expérimentale plutôt bruitée avec celle identifiée. Mais comme une seule sollicitation ne permet pas de bien exciter tous les modes, l'analyse ne permet pas de les identifier tous correctement. En particulier, les modes 1, 12, 13, 16 et 17 ne sont pas bien identifiés et c'est une combinaison de 2 modes qui est trouvée. D'autre part, la disparité entre les valeurs obtenues avec l'analyse précédente rejoint l'expérience de la référence [MI00] avec différentes méthodes d'analyse modale.

Mode				
Freq. (Hz)	258,0	271,1	567,9	645,3
$\xi$ (%)	2,14	2,68	1,42	1,35
Mode				
Freq. (Hz)	715,2	867,2	1067	1217
$\xi$ (%)	1,26	1,17	1,22	1,21
Mode				
Freq. (Hz)	1550	1702	1824	1888
$\xi$ (%)	1,18	1,12	1,13	1,52
Mode				
Freq. (Hz)	2347	2530	2597	3015
$\xi$ (%)	1,10	1,08	1,32	1,04

TAB. 4.10 – Propriétés modales identifiées (par analyse modale expérimentale) de la plaque en lexan

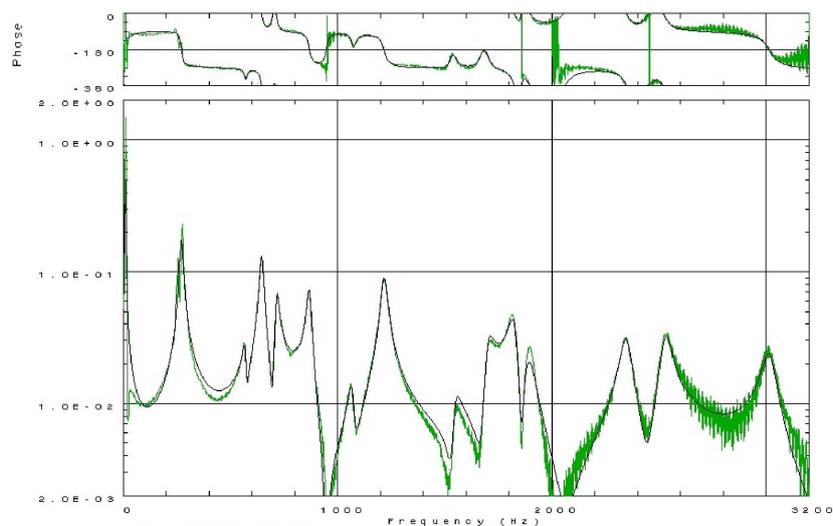


FIG. 4.30 – Superposition d'une FRF expérimentale et identifiée par analyse modale expérimentale

Les amortissements et fréquences propres identifiés peuvent ensuite être utilisés pour identifier les paramètres matériaux. Nous ne retenons cependant pas l'identification complexe des paramètres à partir des pôles compte tenu de la grande dispersion des amortissements modaux. Nous adoptons plutôt une stratégie en deux étapes : 1) identification de la partie réelle des paramètres à partir des fréquences propres ; 2) identification des parties imaginaires par les amortissements modaux ; Les relations utilisées sont donc approchées dans ce cas, mais nous avons vu dans les chapitres précédents que les couplages sont assez faibles : les fréquences propres ne sont que peu affectées par l'amortissement dans la structure.

Ainsi, à partir d'une estimation initiale des paramètres nous recalons le modèle non amorti dans un premier temps suivant une méthode de Gauss-Newton :

$$\Delta \mathbf{p} = - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^2}{\partial \mathbf{p}} \right)^+ (\boldsymbol{\omega}^2 - \bar{\boldsymbol{\omega}}^2) \quad (4.3)$$

où  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_r^2}{\partial \mathbf{p}} = \boldsymbol{\phi}_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \boldsymbol{\phi}_r$  (avec des modes propres mis à jour au cours des itérations). La seconde étape consiste à inverser la relation 2.79. L'identification de  $n$  paramètres matériaux ne peut donc être obtenue qu'en utilisant au minimum  $n$  valeurs expérimentales. L'hypothèse sous-jacente est alors l'indépendance de ces paramètres sur la plage des fréquences considérées, puisque les valeurs de fréquences associées à des modes propres sont généralement espacées. Cette stratégie est appliquée avec succès en utilisant tous les couples de fréquences et amortissements identifiés avec une bonne confiance de la méthode LSCE, en considérant des paramètres constants sur l'ensemble des fréquences dans un modèle composé de 60x40 éléments de plaques Q4  $\gamma$ .

A l'issue du recalage nous obtenons  $E = 2,65(1 + j0,0279)$  GPa, et  $G = 0,952(1 + j0,0315)$  GPa ou  $\nu = 0,395(1 - j0,013)$  qui sont des valeurs pertinentes. Le tableau 4.11 présente les fréquences expérimentales conservées pour ce processus et les couples de fréquences et amortissements produit par le modèle numérique avec les paramètres identifiés. La figure 4.31 reporte sur un graphe les couples de fréquences-amortissements identifiées précédemment par les 2 méthodes d'identification (traitement des signaux et LSCE) et ceux du modèle numérique pour en faciliter la comparaison. Cette figure montre un bon accord entre toutes ces données, malgré les dispersions importantes (manque de précision) des amortissements modaux.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréq. expé. (Hz)	-	271,1	567,9	645,3	715,2	867,2	1067	-	1549
Fréq. numérique (Hz)	244,4	272,1	569,1	650,4	716,9	871,8	1064	1218	1550
Amortissement $\xi$ (%)	1,56	1,38	1,49	1,21	1,47	1,19	1,43	1,42	1,22
Mode	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Fréq. expé. (Hz)	1703	1824	-	-	2347	2530	2596	-	3015
Fréq. numérique (Hz)	1698	1821	1868	1901	2348	2527	2596	2755	3010
Amortissement $\xi$ (%)	1,43	1,42	1,23	1,30	1,31	1,25	1,37	1,33	1,31

TAB. 4.11 – Fréquences et amortissement après identification pour la plaque lexan

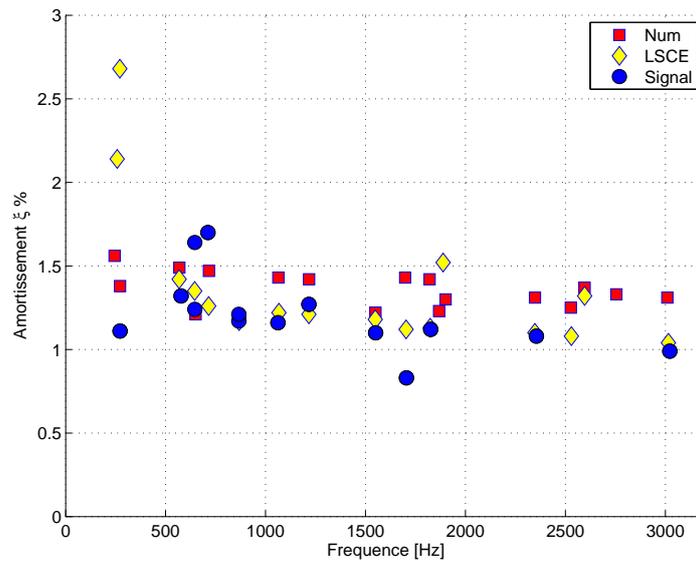


FIG. 4.31 – Superposition des amortissements expérimentaux des méthodes LSCE et traitement de signal avec les amortissements du modèle numérique pour la plaque en lexan

Pour détecter une dépendance en fréquence des paramètres avec cette stratégie, nous décidons de ne considérer que 2 couples de fréquences-amortissements pour identifier les 2 paramètres de ce matériau isotrope. Il n’y a cette fois plus de redondance dans les données pour des gammes de fréquences très variables (la largeur de bande n’est pas maîtrisée et est fonction du positionnement des fréquences propres : elle va de 70 Hz à plus de 500 Hz). La figure 4.32 reporte les résultats obtenus en situant les valeurs des paramètres au milieu des plages de fréquences considérées. Bien que les valeurs des modules  $E$  et  $G$  semblent pertinents *a-priori*, le coefficient de Poisson complexe (obtenu par post-traitement) présente une variation critiquable : sa partie réelle a tendance à augmenter et sa partie imaginaire est très loin d’être monotone négative. Malheureusement, l’augmentation du nombre de données à 3 ou 4 couples pour l’identification ne permet pas d’améliorer cette tendance pour le coefficient de Poisson complexe, comme le montre la figure 4.33.

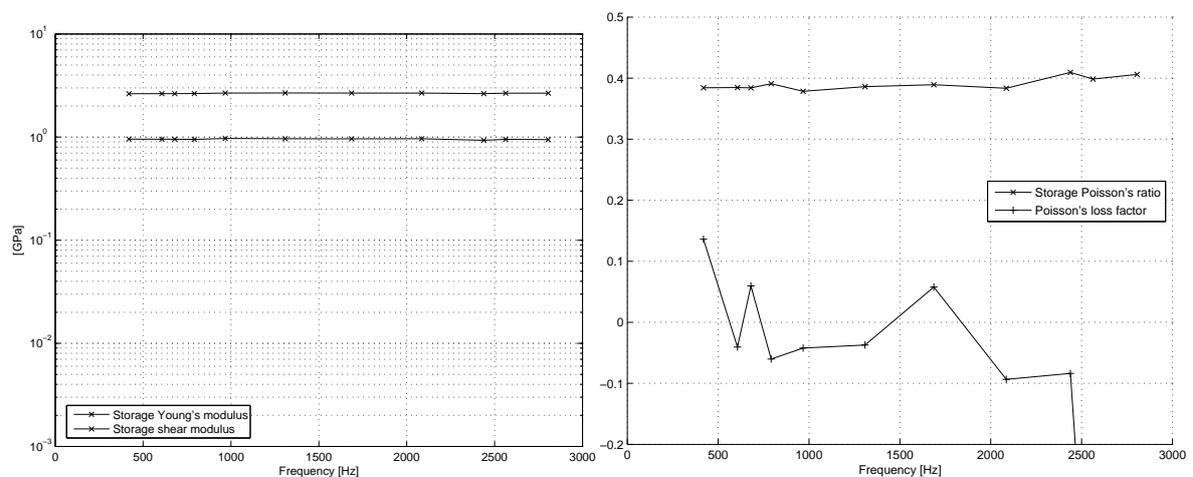


FIG. 4.32 – Paramètres identifiés pour le lexan à partir de 2 couples de données modales

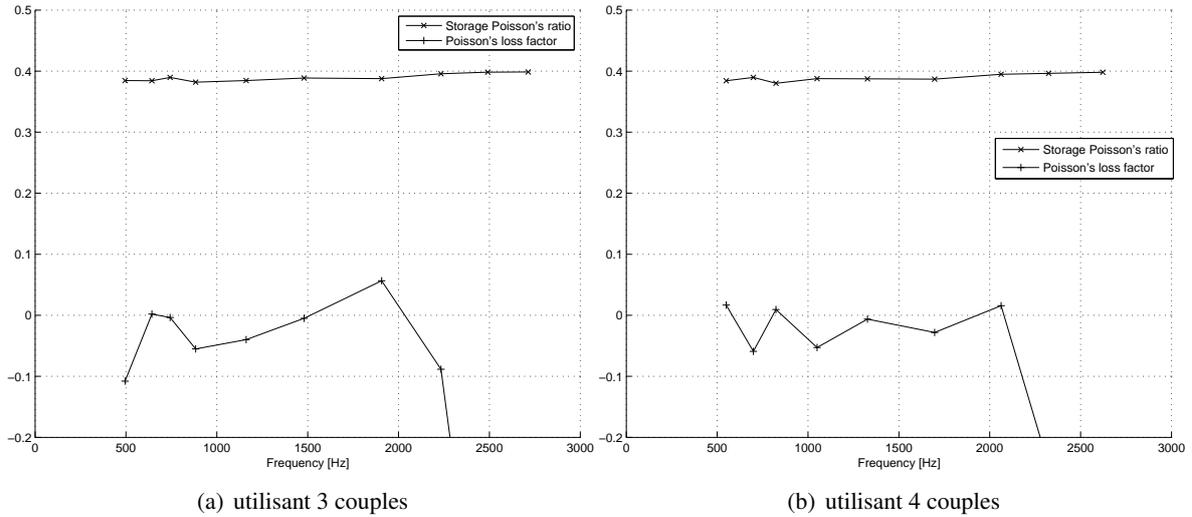


FIG. 4.33 – Coefficients de Poisson complexes identifiés pour le lexan à partir de 3 et 4 couples de données modales

#### 4.2.2.4 Sandwich Aluminium-Lexan

Nous supposons maintenant que les propriétés du lexan doivent être identifiées à partir des seules mesures de champ du sandwich. La réponse vibratoire est mesurée sur la face en aluminium. Le modèle numérique du sandwich est constitué de 3 éléments H8coque dans l'épaisseur pour représenter chaque matériau : l'aluminium, la couche de colle et le lexan. Les caractéristiques de l'aluminium, d'une masse volumique de  $2688 \text{ kg.m}^{-3}$ , sont obtenues à partir de quelques FRF (figure 4.34). Ce matériau est très peu amorti et les fréquences de résonances sont identiques en tous points. Nous considérons donc un comportement purement élastique pour ce matériau :  $E = 71 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0,37$ . La colle X60 du fabricant HBM a pour caractéristiques  $E = 25 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$  et  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$  pour une épaisseur de 0.5 mm.

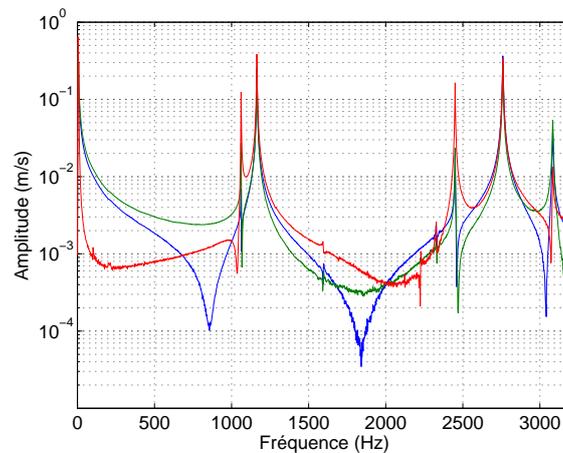


FIG. 4.34 – FRF de la plaque en aluminium

La mauvaise identifiabilité du module de compressibilité peut être vérifiée simplement pour ce sandwich par l'observation des FRF obtenues avec le modèle numérique lorsqu'on lui applique une variation positive ou négative de 30% : elles montrent une très faible variation pour ces différents modules, comme le montre l'exemple présenté sur la figure 4.35. Nous en concluons que ce module n'est pas identifiable dans cette configuration. En fait, il faut appliquer un facteur de variation d'ordre 100 pour obtenir une variation significative des FRF et c'est donc moins une valeur qu'un ordre de grandeur qui pourrait être trouvé pour ce module. Nous limitons donc notre procédure d'identification à la recherche du module de cisaillement du lexan dans cet essai.

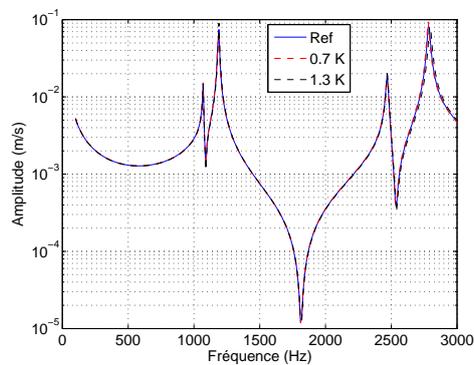
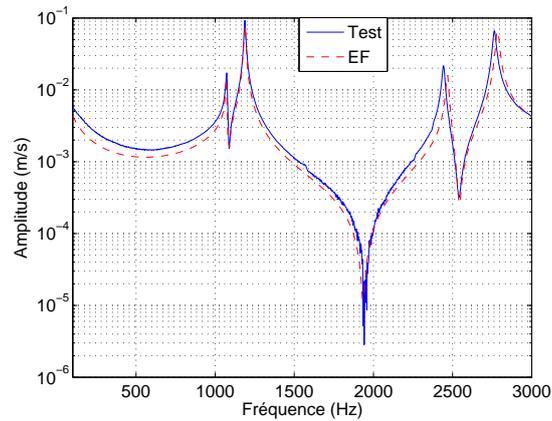


FIG. 4.35 – FRF superposées pour différents module de compressibilité

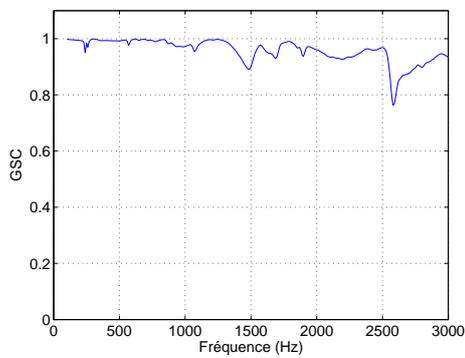
La première identification est réalisée en recherchant un module de cisaillement complexe constant en fréquences sur 100-3000 Hz. A l'issue de la procédure, nous trouvons  $G = 0,911 + j 0,0031$  GPa. Une comparaison des paramètres obtenus dans cette configuration et dans la configuration de la plaque seule est proposée dans le tableau 4.12. Un exemple de FRF recalée et des critères de corrélation fréquentiels sont présentés sur la figure 4.36. Tous ces résultats sont très satisfaisants.

	Seul	Sandwich
$G$ (GPa)	$0,925 + j 0,028$	$0,911E + j 0,031$
$E$ (GPa)	$2,55E + j 0,072$	$2,52 + j 0,084$
$\nu$	$0,38 - j 0,002$	$0,38 - 0,001$

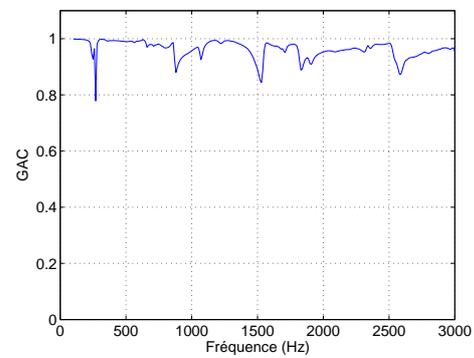
TAB. 4.12 – Comparaison des paramètres identifiés pour le lexan à partir de 2 configurations d'essais



(a) Exemple de FRF recalée



(b) GSC



(c) GAC

FIG. 4.36 – Corrélation obtenues sur le sandwich aluminium-lexan avec  $G$  constant

En considérant maintenant l'identification de paramètres constants par plages de 200Hz, nous obtenons l'évolution du paramètre  $G$  présentée sur la figure 4.37. Cette fois, et bien que la corrélation obtenue sur les FRF soit tout a fait acceptable, la comparaison du module de cisaillement identifié avec l'évolution trouvée sur le lexan seul pour ces plages de fréquences réduites montre que nous avons une dispersion plus importante des résultats dans cette situation.

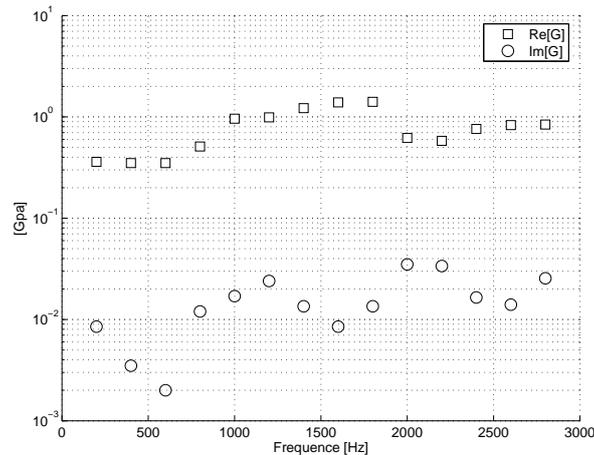


FIG. 4.37 – Module de cisaillement complexe identifié dans le sandwich aluminium-lexan

### 4.2.3 Conclusion

L'analyse de la réponse d'une plaque en PVC avec ses caractéristiques statiques montre bien l'importance d'avoir une caractérisation dynamique de ce matériau. Nous avons montré que la méthode d'identification expérimentale-numérique dans sa version en forces pondérées en déplacements permet d'identifier les caractéristiques viscoélastiques à partir d'une mesure de champ de réponses 1D (hors-plan). Cette méthode se montre simple dans sa mise en oeuvre en permettant de travailler avec des structures de dimensions diverses et à température ambiante. Elle permet aussi de ne réaliser qu'un essai, unique, et de ne faire appel qu'à un échantillon. De plus elle utilise directement les champs de réponses en fréquence pour une excitation unique sans nécessiter l'analyse modale expérimentale de la structure (cette analyse, difficile dans le cas de structures fortement amorties, peut nécessiter des excitations multiples pour assurer l'identification des propriétés modales sur la gamme de fréquences d'intérêt). La multiplicité des données disponibles par la mesure des champs en fréquences montre qu'il est possible d'identifier par cette méthode des caractéristiques de manière systématique. Au contraire, les techniques alternatives basées sur des quantités modales nous montrent, tant sur le PVC que sur le PC, qu'elles sont délicates de mise en oeuvre et qu'elles présentent certainement plus de dispersions dans les résultats à cause du faible nombre d'informations appréhendées. Ces méthodes alternatives nous permettent toutefois d'obtenir des éléments de validation des résultats obtenus en plus des indicateurs de corrélations mis en oeuvre. Nous pouvons donc affirmer que les caractéristiques obtenues sur ces matériaux sont globalement pertinentes dans les cas isotropes et homogènes. Et les investigations menées vers des situations orthotropes ou composites sont intéressantes. Dans tous les cas il est possible de retrouver les ordres de grandeurs, et même des valeurs moyennes.

Toutefois, lorsque les plages en fréquences sont réduites pour obtenir la variation des paramètres, nous constatons qu'il reste des points aberrants sur certaines plages. Ce sont les facteurs de pertes qui présentent le plus d'incertitudes. Ils présentent en effet une sensibilité accrue aux incertitudes, puisqu'ils sont issus du rapport entre les parties réelles des paramètres et leur partie imaginaire (chacun d'eux peut être bruité). Ceci est encore plus accentué pour le coefficient de Poisson puisqu'il est lui-même issu du rapport entre le module d'Young complexe et le module de cisaillement complexe. Ceci est aussi confirmé par l'analyse rudimentaire des incertitudes qui est menée dans cette section. *A-priori*, une diminution du bruit dans les mesures devrait donc pouvoir faire encore progresser la qualité des résultats.



# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Cette étude concerne l'identification des caractéristiques viscoélastiques linéaires des matériaux polymères durs. Celles-ci peuvent être représentées dans le domaine des fréquences par des modules ( $E$ ,  $G$ ,  $K$ ,...) complexes. Leur partie réelle correspond aux propriétés d'élasticité et leur partie imaginaire aux dissipations du matériau. L'expérience montre que les parties imaginaires des modules peuvent être inférieures de plusieurs ordres de grandeur à leur partie réelle et toutes ces propriétés dépendent de la fréquence.

Pour la caractérisation de ces matériaux, plusieurs méthodes indirectes existent et peu de moyens directs sont disponibles. Dans ce dernier cas, il s'agit de méthodes d'analyses 1D d'essais effectués sur des échantillons excités par des chocs qui doivent induire des champs théoriques de traction-compression ou de cisaillement pur. Des caractérisations satisfaisantes sont toutefois difficiles à obtenir car elles présentent une forte sensibilité aux bruits de mesures. De plus, les méthodes d'analyses amplifient ces bruits en nécessitant des essais différents et des traitements des données. Ils peuvent être nombreux : extraction d'un échantillon dans une structure (ce qui peut conduire au délaminage des structures composites), essais multiples sur des échantillons de dimensions différentes, essais différents avec des conditions aux limites multiples, changement de températures pendant les essais, transformation des données fréquentielles en données modales, etc ... Tous ces éléments de dispersions plaident en faveur d'un essai unique à température fixe et sans changement des conditions limites pour caractériser ces matériaux. De plus, un essai possible sur structure garantit la représentativité des résultats obtenus.

Le développement des techniques de mesures de champs et des méthodes numériques ont permis d'aboutir à des méthodes mixtes expérimentales-numériques pour l'identification de paramètres dans les modèles. Les applications réalisées concernent des caractérisations très variées allant de l'élasticité isotrope ou orthotrope jusqu'à la fissuration en passant par la viscoplasticité à grandes vitesses de déformations. Pour notre problème, nous supposons que la combinaison des techniques récentes de mesures optiques présentant une bonne quantification des réponses structurales et offrant une grande quantité de données avec des méthodes numériques performantes doit nous permettre d'extraire les caractéristiques recherchées de manière directe et avec peu de sources d'incertitudes. Nous proposons donc dans ce travail d'explorer les possibilités d'extension des approches de caractérisation 1D par une approche où les structures seraient sollicitées de manière à produire des champs de déformations non homogènes à température fixe dans un essai unique, et sans changement des conditions limites pour caractériser les matériaux viscoélastiques d'intérêt, en exploitant les méthodes d'identification mixtes expérimentales-numériques.

Plusieurs points ont été développés dans ce travail pour cela :

- des outils numériques avec des éléments finis comportant peu d'hypothèses de modélisation capable d'appréhender des structures viscoélastiques diverses et de produire des réponses dy-

namiques proches des milieux continus réels ;

- la définition d'un essai répondant à l'ensemble des critères retenus et la mise en place d'une expérimentation avec une mesure optique des champs de réponses en fréquences ;
- des méthodes de recalage de modèles EF aptes à traiter directement des réponses en fréquences et qui peuvent exploiter toute la richesse des mesures spatiales brutes, sans lissage, pour réduire les dispersions liées à la transformation des données.

Nous proposons en particulier deux méthodes de recalage de modèles adaptées à notre situation. La première, appelée méthode en forces pondérées en déplacements, permet de traiter des champs de mesures partiels, sans conséquences sur l'identification si les conditions aux limites appliquées pendant l'essai sont bien connues ou maîtrisées. La seconde, appelée méthode en forces filtrée, permet de s'affranchir des CL de l'essai moyennant la connaissance du champ cinématique complet. Ces méthodes sont basées sur une approche non paramétrique des caractéristiques matériaux, ce qui évite d'avoir des connaissances *a-priori* sur le comportement en fréquences de celles-ci. Elles permettent aussi de définir la plage de fréquences à considérer pour l'identification, en supposant que les caractéristiques sont constantes sur celles-ci. De larges plages permettent d'augmenter la redondance des équations pour l'identification si les hypothèses sont justes (caractéristiques constantes), tandis que de faibles plages permettent de suivre les variations de ces caractéristiques, mais avec une plus forte sensibilité aux bruits de mesure.

Des applications de la méthode d'identification en forces pondérées en déplacements ont été réalisées sur des matériaux mis en oeuvre dans des plaques simples ou sandwich. Pour cela, une grande attention a été portée dans cette étude sur la convergence des modèles EF afin d'éviter de compenser des erreurs de modélisation par des erreurs sur les caractéristiques matériaux. Aussi pour valider nos résultats et pallier au manque de données de référence, nous avons mis en oeuvre des méthodes d'identification plus classiques, basées sur des données modales, et effectué des essais standards DMA (qui ont nécessité d'extraire des échantillons calibrés) aux limites d'utilisation de ce matériel.

Nos applications ont montré la faisabilité de notre approche, avec des moyens de mesure relativement courants dans les laboratoires d'essais en dynamique des structures. Avec ces moyens, les résultats obtenus sont bons d'un point de vue qualitatif. Ils nous permettent d'identifier correctement des valeurs moyennes des caractéristiques et des variations globales en fréquences de ceux-ci. Quantitativement, le coefficient de Poisson complexe nous indique toutefois que quelques valeurs trouvées sur certaines gammes de fréquences n'ont pas de sens physique. L'analyse rudimentaire de propagation du bruit que nous avons menée confirme cette analyse et montre que les paramètres trouvés font encore l'objet d'incertitudes assez larges.

## Perspectives

Les perspectives à ce travail sont nombreuses. En ce qui concerne le travail actuel, il pourrait être intéressant d'optimiser l'essai, défini jusqu'à présent de manière empirique, en cherchant à maximiser l'identifiabilité des paramètres avec les indicateurs proposés. Parmi les paramètres d'optimisation nous pourrions retenir les dimensions de la structure lorsque cela est possible ou la position du point d'excitation. Il faudrait aussi travailler sur une évaluation plus fine du bruit de mesure et sur l'analyse théorique de la propagation des incertitudes dans le processus. Cette étude pourrait permettre de mieux quantifier les incertitudes des résultats actuels et aussi d'optimiser l'essai, cette fois-ci en visant une identification des caractéristiques avec des incertitudes minimales, ce qui est bien l'objectif final. Enfin, la recherche de modèles corrects de dissipation qui seraient aptes à représenter d'une manière globale les résultats non paramétriques trouvés pourrait nous permettre d'effectuer une identification

paramétrique. Celle-ci comporterait peu de paramètres à déterminer sur l'ensemble de la plage de fréquences d'intérêt, et la procédure permettrait de bien rejeter les bruits de mesures dans l'identification, comme nous l'avons vu dans ce travail.

D'autre part, trois sources d'améliorations importantes liées à la mesure pourraient limiter les incertitudes d'identifications. L'une d'elle concerne la mesure de champs 3D (par exemple par vibrométrie). Elle devrait permettre d'exploiter la méthode en forces filtrées et permettre à l'identification de ne pas être sensible à des perturbations dissipatives de l'excitateur ou des liaisons (visco-élastiques). Une autre concerne la mesure ESPI des cartes d'amplitude et de phase, qui, couplée à une méthode d'excitation acoustique quantifiée devrait permettre de réduire le bruit de fond des réponses dynamiques. Une dernière concerne la dissipation d'énergie mécanique qui se traduit sous forme de chaleur. Les méthodes actuelles de mesures de champs thermiques sont parfaitement capables de détecter les faibles quantités de chaleur émises dans la dissipation. Il serait donc intéressant de corrélérer cette mesure avec le résultat d'une simulation thermo-mécanique, et aussi de travailler sur un développement de la méthode mixte expérimentale-numérique pour prendre en compte des champs thermo-mécaniques. Ces trois sources d'améliorations ne sont d'ailleurs pas exclusives les unes des autres et peuvent être combinées pour exploiter des champs thermiques et cinématiques 3D par mesures ESPI avec des excitations acoustiques.

Enfin, les domaines d'applications peuvent être étendus à d'autres matériaux pour vérifier l'applicabilité de la démarche proposée ou valider ses résultats. En particulier il pourrait être intéressant de travailler avec des structures 3D aux formes plus complexes, avec des matériaux composites fibrés pour déterminer les caractéristiques opérationnelles de la matrice, ou encore d'effectuer des caractérisations en fonction de la température.



# Bibliographie

- [AKSKB02] R. AL-KHOURY, A. SCARPAS, C. KASBERGEN et J. BLAAUWENDRAAD : Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. part iii : viscoelastic aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 39(8):2189–2201, avril 2002.
- [Ami05] F. AMIOT : *Mesure de champ à l'échelle micrométrique pour l'identification d'effets mécaniques surfaciques : vers une nouvelle instrumentation pour la biologie*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, ESPCI, 2005.
- [AP07] S. AVRIL et F. PIERRON : General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(14-15):4978–5002, juillet 2007.
- [Bat96] K. J. BATHE : *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [BBC03] M. BONNET, H. D. BUI et A. CONSTANTINESCU : Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité. *Mécanique et Industries*, 4:687–697, 2003.
- [BC05] M. BONNET et A. CONSTANTINESCU : Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21:1–50, 2005.
- [BD90] J. L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 2. Hermes Edition, 1990.
- [Ble79] R. D. BLEVINS : *Formulas for natural frequency and mode shape*. Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- [BP00] C. BACON et J. POUYET : *Mécanique des solides déformables*. Hermes Science Publications, 2000.
- [CA07] N. B. F. CAMPOS et J. R. F. ARRUDA : Modeling kirchhoff plates with arbitrary boundary conditions by the spectral element method. *In DINAME*, 2007.
- [CDV04] A. CONSTANTINESCU et K. DANG VAN : A global computational approach in engineering problems identification and fatigue. IPPT PAN and CoE AMAS, Warsaw, 2004.
- [CFN84] N. COTTIN, H. P. FELGENHAUER et H. G. NATKE : On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 54(5):378–387, septembre 1984.
- [CG96] R. CARACCILO et M. GIOVAGNONI : Frequency dependence of Poisson's ratio using the method of reduced variables. *Mechanics of Materials*, 24:75–85, 1996.
- [CGS04] J. CUGNONI, T. GMÜR et A. SCHORDERET : Identification by modal analysis of composite structures modelled with fsdt and hsdtd laminated shell finite elements. *Composites : Part A : applied science and manufacturing*, 35:977–987, 2004.

- [Che] Y. CHEVALIER : Comportements élastiques et viscoélastique des composites. *Techniques de l'ingénieur*.
- [CKV05] J.B. CASIMIR, S. KEVORKIAN et T. VINH : The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements : application to kirchhoff's plate continuous elements. *Journal of Sound and Vibration*, 287(3):571–589, octobre 2005.
- [CLP98] A. T. CHOUAKI, P. LADEVÈZE et L. PROSLIER : Updating structural dynamic models with emphasis on the damping properties. *AIAA Journal*, 36(6):1094–1099, 1998.
- [CMT06] P. CASTELLINI, M. MARTARELLI et E.P. TOMASINI : Laser doppler vibrometry : Development of advanced solutions answering to technology's needs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(6):1265–1285, août 2006.
- [CP99] J. CUNHA et J. PIRANDA : Application of model updating techniques in dynamics for the identification of elastic constants of composite materials. *Composites : Part B : engineering*, 30:79–85, 1999.
- [CR05] N. E. CONZA et D. J. RIXEN : Biomedical parameters estimation using frequency domain updating. In *IMAC XXIII*, 2005.
- [Cug05] J. CUGNONI : *Identification par recalage modal et fréquentiel de propriétés constitutives de coques en matériaux composites*. Thèse de doctorat, EPFL, 2005.
- [DO91] W. DUMOUCHEL et F. O'BRIEN : Integrating a robust option into a multiple regression computing environment. *Institute for Mathematics and Its Applications*, 36:41–48, 1991.
- [DS98] E. DASCOTTE et J. STROBBE : Updating finite element models using correlation functions, 1998.
- [DT86] G. DHATT et G. TOUZOT : *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Editions des universités de Laval, Quebec, deuxième édition, 1986.
- [DVSDW97] J. DE VISSCHER, H. SOL et W. P. DE WILDE : Identification of the damping properties of orthotropic composite materials using a mixed numerical experimental method. *Applied Composite Materials*, 4:13–33, 1997.
- [Ewi00] D. J. EWINS : *Modal testing theory, Practice and application*. Research Studies Press Ltd, deuxième édition, 2000.
- [Fel03] C. A. FELIPPA : Finite element method. Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder, 2003. <http://caswww.colorado.edu/courses.d>.
- [FH93] C. FARHAT et F.M. HEMEZ : Updating finite element dynamic models using element-by-element sensitivity methodology. *AIAA Journal*, 32(9):1702–1711, 1993.
- [FL98] M. I. FRISWELL et A. W. LEES : Resonance frequencies of viscously damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, 217(5):950–959, novembre 1998.
- [FM95] M.I. FRISWELL et J.E. MOTTERSHEAD : *Finite element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [GD96] D. J. GORMAN et Wei DING : Accurate free vibration analysis of the completely free rectangular mindlin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 189(3):341–353, janvier 1996.
- [GDR] GDR CNRS 2519, mesure de champs et identification en mécanique des solides. <http://www.ifma.fr/lami/gdr2519/>.

- [GGP04] A. GIRAUDEAU, B. GUO et F. PIERRON : Identification de caractéristiques matériaux, raideur et amortissement, à partir de réponses forcées de plaques. *In XIVème colloque Vibration Chocs & Bruit 2004*, 2004.
- [GGP06] A. GIRAUDEAU, B. GUO et F. PIERRON : Stiffness and damping identification from full field measurements on vibrating plates. *Experimental Mechanics*, V46(6):777–787, décembre 2006.
- [GH85] D.F. GOLLA et P.C. HUGHES : Dynamics of viscoelastic structures - a time-domain, finite element formulation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 52:897 – 906, 1985.
- [Gmü97] T. GMÜR : *Dynamique des Structures Analyse modale numérique*. Presse polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [Gor00] D. J. GORMAN : Free vibration analysis of completely free rectangular plates by the superposition-galerkin method. *Journal of Sound and Vibration*, 237(5):901–914, novembre 2000.
- [GP03] A. GIRAUDEAU et F. PIERRON : Simultaneous identification of stiffness and damping properties of isotropic materials from forced vibrating plates. *Comptes Rendus Mécanique*, 331:259–264, 2003.
- [GP05] A. GIRAUDEAU et F. PIERRON : Identification of stiffness and damping properties of thin isotropic vibrating plates using the virtual fields method : theory and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5):757–781, 2005.
- [GR96] M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Théorie des vibrations, applications à la dynamique des structures*. Editions Masson, 1996.
- [Gré89] M. GRÉDIAC : Principe des travaux virtuels et identification. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 309:1–5, 1989.
- [Gré04] M. GRÉDIAC : The use of full-field measurement methods in composite material characterization : interest and limitations. *Composites*, 35:751–761, 2004.
- [Guo07] B. GUO : *Identification simultanée de paramètres de rigidité et d'amortissement de plaques isotropes minces en vibration par a méthode des champs virtuels*. Thèse de doctorat, ENSAM, 2007.
- [GVL96] G. H. GOLUB et C. F. VAN LOAN : *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [HML00] L. HILLSTRÖM, M MOSSBERG et B. LUNDBERG : Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares. *Journal of Sound and Vibration*, 230:689–707, 2000.
- [HR03] B. J. HALKON et S. J. ROTHBERG : Vibration measurements using continuous scanning laser doppler vibrometry : theoretical velocity sensitivity analysis with applications. *Measurement Science and Technology*, 14:382–393, 2003.
- [IVE95] M. IMREGUN, W. J. VISSER et D. J. EWINS : Finite element model updating using frequency response function data : I. theory and initial investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(2):187–202, 1995.
- [KC71] K.T. KAVANAGH et R.W. CLOUGH : Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7:11–23, 1971.
- [Ker04] G. KERGOULAY : *Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques. Application à une enceinte acoustique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2004.

- [KSMS04] J. KAJBERG, K.G. SUNDIN, L.G. MELIN et P. STÅHLE : High strain rate tensile and viscoplastic parameter identification using microscopic high-speed photography. *International Journal of Plasticity*, 20:561–575, 2004.
- [Lau05] T. LAUWAGIE : *Vibration-based methods for the identification of the elastic properties of layered materials*. Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, 2005.
- [LC99] Pierre LADEVÈZE et Amar CHOUAKI : Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15(1):49–58, 1999.
- [LE90] R. M. LIN et D. J. EWINS : Model updating using FRF data. *In Proceedings of the 15th ISMA*, pages 141–162, KU Leuven, 1990.
- [Lei69] A. W. LEISSA : *Vibration of plates*. Scientific and Technical Information Division Office of Technology Utilization NASA, 1969.
- [Lem00] D. LEMOSSE : *Éléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, 2000.
- [Les92] G. A. LESIEUTRE : Finite element for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 29:1567–1579, 1992.
- [LL03] S. LE LOCH : *Modélisation et Identification de l'Amortissement dans les Structures Spatiales*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2003.
- [Mas78] W. P. MASON : *The Determination of Dynamic Properties of Polymers and Composites*, by B. E. Read and G. D. Dean. Bristol, 1978.
- [Mat04] The MathWorks. *Matlab Documentation*, 2004.
- [McC95] K.G. MCCONNELL : *Vibration Testing Theory and Practice*. Wiley Inter-Science, 1995.
- [Men99] Kevin P. MENARD : *Dynamic Mechanical Analysis, a Practical Introduction*. 1999.
- [MF91] C. MILITELLO et C.A. FELIPPA : A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements. Rapport technique, NASA, 1991.
- [MF93] J. E. MOTTERSHEAD et M. I. FRISWELL : Model updating in structural dynamics : A survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, octobre 1993.
- [MH93] D.J. MCTAVISH et P.C HUGHES : Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, pages 103 – 110, 1993.
- [MHA00] M. MOSSBERG, L. HILLSTRÖM et L. ABRAHAMSSON : Parametric identification of viscoelastic materials from time and frequency domain data. Rapport technique, 2000.
- [MI00] A. MOISES IGLESIAS : Investigating various modal analysis extraction techniques to estimate damping ratio. Mémoire de D.E.A., Virginia Tech, 2000.
- [MNL04] S. MOUSAVI, D. F. NICOLAS et B. LUNDBERG : Identification of complex and Poisson's ratio from measured strains on an impacted bar. *Journal of Sound and Vibration*, 277:971–986, 2004.
- [MR04] R. MOREIRA et J. D. RODRIGUES : Constrained damping layer treatments : Finite element modeling. *Journal of Vibration and Control*, 10(4):575–595, 2004.

- [MSH<sup>+</sup>98] N. M. M. MAIA, J. M. M. SILVA, J. HE, N. A. J. LIEVEN, R. M. LIN, G. W. SKINGLE, A. M. TO et A. P. V. URGUEIRA : *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press Ltd, 1998.
- [Nat98] H. G. NATKE : Problems of models updating procedures : A perspective resumption. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):65–74, janvier 1998.
- [NJH85] A. D. NASHIF, D. I. G. JONES et J. P. HENDERSON : *Vibration Damping*. John Wisley & sons, 1985.
- [PB00] A. S. PLOUIN et E. BALMÈS : Steel/viscoelastic/steel sandwich shells. computational methods and experimental validations. *In IMAC*, 2000.
- [PG00] F. PIERRON et M. GREDIAC : Identification of the through-thickness moduli of thick composites from whole-field measurements using the iosipescu fixture : theory and simulations. *Composites : Part A : applied science and manufacturing*, 31:309–318, 2000.
- [PHB<sup>+</sup>07] Eann A. PATTERSON, Erwin HACK, Philippe BRAILLY, Richard L. BURGUETE, Qasim SALEEM, Thorsten SIEBERT, Rachel A. TOMLINSON et Maurice P. WHELAN : Calibration and evaluation of optical systems for full-field strain measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 45(5):550–564, mai 2007.
- [PLHA05] E. PAGNACCO, D. LEMOSSE, F. HILD et F. AMIOT : Inverse strategy from displacement field measurement and distributed forces using fea. *In SEM*, 2005.
- [PMG02a] F. PIERRON, J. MOLIMARD et M. GREDIAC : Experimental validation of the virtual field method on composites. *In Composites for the future*. Society for Experimental Mechanics, 2002.
- [PMG02b] F. PIERRON, J. MOLIMARD et M. GRÉDIAC : Applying the virtual fields method for the in-plane characterization of orthotropic composites : experimental results. *In Measurements in Advanced Materials and Systems*. European Conference on Composite Materials, 2002.
- [PRGS02] R. PASCUAL, M. RAZETO, J. C. GOLINVAL et R. SCHLCHLI : A robust FRF-based technique for model updating. *In ISMA*, 2002.
- [Pri96] T. PRITZ : Dynamic Young's modulus and loss factor of floor covering materials. *Applied Acoustics*, 49(2):179–190, 1996.
- [PRI98a] D. F. PILKEY, C. J. RIBBENS et D. J. INMAN : High performance computing issues for model reduction/expansion. *Advances in Engineering Software*, 29(3-6):389–393, avril 1998.
- [Pri98b] T. PRITZ : Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214(1):83–104, 1998.
- [Pri00] T. PRITZ : Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. *Applied Acoustics*, 60(3):279–292, 2000.
- [PSR07] R. PASCUAL, R. SCHALCHLI et M. RAZETO : Robust parameter identification using forced responses. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):1008–1025, février 2007.
- [PT86] T. H. .H. PIAN et P. TONG : Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:173–181, 1986.

- [Rao01] M.D. RAO : Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. India-USA symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering, 2001.
- [Rix01] D.J. RIXEN : Generalized mode acceleration methods and modal truncation augmentation. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 42nd*, Seattle, WA., Apr. 16-19 2001.
- [RL99] M. J. RATCLIFFE et N. A. J. LIEVEN : An investigation into the effects of frequency response function estimators on model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(2):315–334, 1999.
- [Roy01] D. ROYLANCE : Engineering viscoelasticity. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [Sal97] J. SALMANOFF : A finite element, reduced order, frequency dependent model of viscoelastic damping. Mémoire de D.E.A., Faculty of Virginia Polytechnic Institute, Sept. 1997.
- [SC98] M. SOULA et Y. CHEVALIER : La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères - applications aux comportements élastiques et viscoélastiques linéaires et non linéaires des élastomères. In *ESAIM*, éditeur : *ESAIM*, volume 5, 1998.
- [SF07] S. SORRENTINO et A. FASANA : Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models. *Journal of Sound and Vibration*, 299:839–853, février 2007.
- [Sie98] E. SIETHOFF : A formulation for updating finite element models through consistent use of laser vibrometer data. Mémoire de D.E.A., Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [SK95] B. SAMALI et K. C. S. KWOK : Use of viscoelastic dampers in reducing wind- and earthquake-induced motion of building structures. *Engineering Structures*, 17(9):639–654, novembre 1995.
- [SRF90] J.C. SIMO, M.S. RIFAI et D.D. FOX : On a stress resultant geometrically exact shell model. part iv : Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, 1990.
- [SRMGR03] C. V. S. SASTRY, D. ROY MAHAPATRA, S. GOPALAKRISHNAN et T. S. RAMAMURTHY : An iterative system equivalent reduction expansion process for extraction of high frequency response from reduced order finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(15):1821–1840, avril 2003.
- [SVC<sup>+</sup>97] M. SOULA, T. VINH, Y. CHEVALIER, T. BEDA et C. ESTEOULE : Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 205(2):167–184, août 1997.
- [Sze02] K. Y. SZE : Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 4:400–407, 2002.
- [TA00] M. TRINDADE AREIAS : *Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2000.
- [UGS] UGS : I-deas.

- [Vis92] W. J. VISSER : *Updating structural dynamics models using frequency response data*. Thèse de doctorat, Imperial College of Science, Technology and Medicine - University of London, 1992.
- [Wan01] G. WANG : *Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores*. Thèse de doctorat, University of Maryland, 2001.
- [Wil02] E. L. WILSON : *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*. Computers and Structures Inc., 2002.
- [WLF55] M. L. WILLIAMS, R. F. LANDEL et J.D FERRY : The temperature dependance of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of American Chemistry Society*, 77(14):3701–3707, 1955.
- [YL96] S. T. YEO et B. C. LEE : Equivalence between enhanced assumed strain method and assumed stress hybrid method based on the hellinger-reissner principle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(18):3083–3099, 1996.
- [ZGI01] C. ZANG, H. GRAFE et M. IMREGUN : Frequency-domain criteria for correlating and updating dynamic finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1):139–155, 2001.
- [ZH02] Z. ZHANG et G. HARTWIG : Relation of damping and fatigue damage of unidirectional fibre composites. *International Journal of Fatigue*, 24(7):713–718, juillet 2002.



## Annexe A

# Modèles paramétriques en viscoélasticité linéaire

L'utilisation de modèles rhéologiques simples n'est pas satisfaisante pour représenter correctement le comportement réel d'un matériau viscoélastique. Des modèles paramétriques plus complexes ont donc été définis afin d'obtenir de meilleurs résultats. Parmi eux, nous allons voir les modèles à dérivées fractionnaires, puis les modèles ATF/ADF et enfin le modèle GHM, ainsi que leur application dans une méthode éléments finis.

### A.1 Modèle paramétriques

#### A.1.1 Modèle GHM

Le modèle Golla-Hughes-Mac Tavish, du nom de ses inventeurs ou GHM [GH85, MH93] propose de modéliser le comportement viscoélastique par la fonction de relaxation

$$E(s) = E_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\beta_i \gamma_i s}{s^2 + 2\beta_i \gamma_i s + \gamma_i^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

avec  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  les paramètres du modèle GHM. Par analogie, ce modèle peut être représenté par l'association de modèles rhéologiques. Le terme de mini oscillateur est souvent utilisé pour chacun des termes de la somme de la fonction de relaxation. Afin de pouvoir représenter correctement le comportement viscoélastique d'une structure, au moins 3 mini oscillateurs doivent être utilisés [Sal97], soit un modèle à 9 paramètres.

#### A.1.2 Modèle ADF

La méthode ADF (*Anelastic Displacement Field*) permet de prendre en compte la dépendance fréquentielle des paramètres. Ce modèle est basé sur des principes thermodynamiques, le modèle ADF étant une extension en 3D du modèle ATF [Les92]. La déformation du matériau viscoélastique peut être séparée en une contribution élastique instantanée plus une contribution anélastique qui permet de prendre en compte le caractère viscoélastique. Le module complexe pour ce modèle est donné par

$$E(\omega) = E_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\omega^2 + j\omega\beta_i}{\omega^2 + \beta_i^2} \right) \quad (\text{A.2})$$

avec  $\alpha_i$  la résistance de relaxation et  $\beta_i$  l'inverse du temps caractéristique de relaxation, obtenus par identification du module de cisaillement mesuré. On peut introduire le paramètre  $\gamma_i$  qui décrit le couplage entre la relaxation et le déplacement, défini par

$$\gamma_i = \frac{1 + \sum_i \alpha_i}{\alpha_i} \quad (\text{A.3})$$

ce paramètre pouvant être considéré comme le rapport du module anélastique et du module élastique. Ce modèle de viscoélasticité sépare la réponse en deux contributions :

- une partie élastique instantanément proportionnelle à la contrainte
- une partie anélastique représentant la relaxation

### A.1.3 Modèle à dérivées fractionnaires

Le modèle à dérivées fractionnaires est issue du concept mathématique de dérivées à puissances non entières <sup>1</sup> le module complexe associé à ce modèle est de la forme

$$E(s) = \frac{E_0 - E_1 s^\alpha}{1 + b s^\beta} \quad (\text{A.7})$$

avec  $\alpha$  et  $\beta \in ] 0 \ 1 [$ . [Wan01]. Il est possible de réduire ce modèle à 3 paramètres, en se plaçant dans le cas particulier où  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . La forme de ce modèle est très proche de celle obtenue dans le cas d'un modèle de type SLS de type Kelvin-Voigt, pour lequel le module dynamique est de la forme

$$E(s) = \frac{E_0 + E_1 s}{1 + b s} \quad (\text{A.8})$$

avec  $b = \frac{c}{E_0 + E_1}$ .

Le modèle à dérivées fractionnaires présente l'avantage de bien approximer l'expérimental dans le domaine fréquentiel grâce aux cinq paramètres qui servent à le décrire. Cependant, le passage au domaine temporel n'est qu'approximatif, car la transformée de Laplace inverse est difficile à calculer. La modélisation faite par les modèles rhéologiques, vue au chapitre 1.4, peut être faite avec des modèles dérivées fractionnaires, sous réserve du bon choix des coefficients, comme indiqué dans l'article [SC98]. Enfin ce type de modèle permet de bien approximer les données expérimentales, mais le sens physique à donner aux paramètres n'est pas évident et ne permet donc pas une interprétation aisée.

<sup>1</sup>Les dérivées fractionnaires sont un outil mathématique employé dans de nombreux champs de la physique. Ils sont basés sur la dérivation à un ordre non entier d'une fonction. Considérons un réel  $\alpha \in ] 0 \ 1 [$ , la dérivée à l'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f$  est définie par ([SC98])

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} f'(s) ds \quad (\text{A.4})$$

ou  $\Gamma$  est la fonction factorielle telle que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\text{A.5})$$

Une définition équivalente, et qui présente l'avantage d'être mieux adaptée à une résolution par éléments finis est celle-ci

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (\text{A.6})$$

### A.1.4 Bilan des modèles paramétriques

Comme nous venons de le voir, les modèles paramétriques peuvent prendre des formes variées. La méthode des dérivées fractionnaires permet de bien approximer les données expérimentales dans le domaine fréquentiel. Cependant son utilisation reste difficile, notamment à cause de son approche mathématique qui ne permet pas d'interpréter facilement les paramètres trouvés. De plus, il est difficile de passer dans le domaine temporel, à partir du modèle initialement prévu pour des analyses fréquentielles. Les méthodes GHM et ADF, étant basées sur l'ajout d'un ddl de dissipation, elles ont un sens physique plus facile à interpréter.

## A.2 Modèles paramétriques et éléments finis

### A.2.1 Modèle GHM

Le modèle GHM ou Golla-Hughes-Mac Tavish est un modèle paramétrique adapté à la résolution par éléments finis. Outre la définition du noyau de relaxation que ses auteurs ont trouvé, la subtilité de ce modèle réside dans l'ajout de ddls de dissipation pour modéliser le comportement viscoélastique.

Pour obtenir le modèle discret, l'équation générale du mouvement prenant en compte la loi de viscoélasticité 1.2 est écrite dans le domaine de Laplace suivant

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}_0(1+h))\mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (\text{A.9})$$

avec la fonction de relaxation

$$h(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\beta_i\gamma_i s}{s^2 + 2\beta_i\gamma_i s + \gamma_i^2} \quad (\text{A.10})$$

L'introduction dans ce modèle de "ddl de dissipation"  $\mathbf{z}$  tels que

$$\mathbf{z} = \frac{\gamma_i^2}{s^2 + 2\beta_i\gamma_i s + \gamma_i^2} \mathbf{U} \quad (\text{A.11})$$

ou

$$\mathbf{U} - \mathbf{z} = \frac{s^2 + 2\beta_i\gamma_i s}{s^2 + 2\beta_i\gamma_i s + \gamma_i^2} \mathbf{U} \quad (\text{A.12})$$

dans la relation A.9 permet ensuite d'obtenir le système :

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}_0)\mathbf{U}(s) + \mathbf{K}_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbf{U} - \mathbf{z}) = \mathbf{F}(s) \quad (\text{A.13})$$

Pour revenir dans le domaine temporel, on note qu'il est possible d'écrire l'équation A.12 sous la forme

$$\left( s^2 \frac{1}{\gamma_i^2} + s \frac{2\beta_i}{\gamma_i} + 1 \right) \mathbf{z} = \mathbf{U} \quad (\text{A.14})$$

et de la multiplier par  $\alpha_i \mathbf{K}_0$ , d'où :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_\infty \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{z} & = \mathbf{F}(t) \\ \frac{\alpha_i}{\gamma_i^2} \mathbf{K}_0 \ddot{\mathbf{z}} + \frac{2\alpha_i \beta_i}{\gamma_i} \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{z}} + \alpha_i \mathbf{K}_0 \mathbf{z} - \alpha_i \mathbf{K}_0 \mathbf{U} & = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

avec  $\mathbf{K}_\infty = \mathbf{K}_0(1 + \sum_i \alpha_i)$ , ce qui peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\infty & \mathbf{K}_{qd} \\ \mathbf{K}_{qd}^T & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\mathbf{M}_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \mathbf{K}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_1\beta_1}{\gamma_1} \mathbf{K}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2\alpha_n\beta_n}{\gamma_n} \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{dd} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{K}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{qd} = [ -\alpha_1 \mathbf{K}_0 \quad \cdots \quad -\alpha_n \mathbf{K}_0 ]$$

L'avantage de cette méthode est que le coefficient d'amortissement dépend de la fréquence, et que toutes les matrices sont constantes. Nous voyons donc qu'il est possible d'obtenir le modèle de réponse par une analyse modale similaire à celle menée pour un système amorti de manière visqueuse. De plus, les modes provenant des ddl de dissipation sont sur-amortis et donc peu observables [TA00]. Cependant, le fait d'ajouter des ddl augmente significativement la taille du système à résoudre (au moins doublé), ce qui amène à utiliser des méthodes de condensation pour conserver l'efficacité de la modélisation. De plus, en cas de modélisation de structures non complètement recouvertes de matériau viscoélastique, certaines matrices ne sont plus définies positives.

### A.2.2 Modèle ADF

L'introduction du modèle ADF dans la modélisation éléments finis se fait, tout comme le modèle GHM, par l'introduction de ddl de dissipation. Le vecteur de déplacement s'écrit alors comme la somme de ddl élastiques  $\mathbf{U}^e$  et de ddl anélastiques  $\mathbf{U}_i^d$  tels que

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e + \sum_i \mathbf{U}_i^d \quad (\text{A.17})$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_\infty \mathbf{U} - \mathbf{K}_\infty \sum_i \mathbf{U}_i^d = \mathbf{F} \quad (\text{A.18})$$

avec  $\mathbf{K}_\infty = (1 + \sum_i \alpha_i) \mathbf{K}_0$ . Il faut également considérer une équation supplémentaire décrivant l'évolution du champ de déplacement anélastique (ADF) telle que

$$\frac{\gamma_i}{\beta_i} \mathbf{K}_\infty \dot{\mathbf{U}}_d + \gamma_i \mathbf{K}_\infty \mathbf{U}_d - \mathbf{K}_\infty \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{A.19})$$

Finalement, par analogie avec le modèle GHM, ces équations conduisent au système

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{U}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{A.20})$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{U}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\infty & \mathbf{K}_{qd} \\ \mathbf{K}_{qd}^T & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{A.21})$$

avec  $\bar{\mathbf{U}} = [ \mathbf{U} \quad \mathbf{U}_1^d \quad \cdots \quad \mathbf{U}_n^d ]^T$ ,  $\bar{\mathbf{F}} = [ \mathbf{F} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} ]^T$  et

$$\mathbf{C}_{dd} = E_\infty \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{\beta_1} \mathbf{K}_\infty & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{\gamma_n}{\beta_n} \mathbf{K}_\infty \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{dd} = E_\infty \begin{bmatrix} \gamma_1 \mathbf{K}_\infty & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \mathbf{K}_\infty \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{qd} = [ -\mathbf{K}_\infty \quad \cdots \quad -\mathbf{K}_\infty ]$$

Sous cette forme, le nombre de ddl anélastiques, pour chaque modèle ADF est égal à celui des ddl élastiques. Il est ensuite possible de réduire ce système de la même façon que pour le modèle GHM.

### A.2.3 Modèle à dérivées fractionnaires

Pour le modèle de dissipation à dérivées fractionnaires, il est également possible de trouver une base modale à partir du modèle éléments finis. La référence [SF07] présente la stratégie de résolution dans l'espace modal de ce problème.

### A.2.4 Bilan sur les modèles de dissipation viscoélastiques

Les trois modèles paramétriques présentés ici sont les plus courants dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Le problème majeur de ces *méthodes* est l'augmentation de la taille du système à résoudre. D'après [TA00] les modèles GHM et ADF donnent de bons résultats, même pour des structures très amorties dans le domaine temporel. Au niveau du modèle ADF les ddl ajoutés n'ont pas d'inertie, il y donc une singularité de la matrice masse, et une obligation de passer par un système d'état pour la résolution. Pour ces deux modèles, il faut au moins 3 mini-oscillateurs pour avoir un système représentatif. Mais pour des matériaux faiblement amortis, il faut beaucoup plus de mini-oscillateurs, ce qui rend les termes difficilement identifiables. D'autres méthodes sont donc préférables dans ces cas. La qualité des résultats des méthodes GHM et ADF dépend fortement de la qualité du lissage des courbes expérimentales. Si leur comportement asymptotique (en dehors de la bande de données expérimentales) semble irréaliste, le résultat sera probablement mauvais. Il faut donc faire très attention à la qualité du lissage de la courbe maîtresse. Pour des structures très amorties, les modes de relaxations et les modes flexibles risquent d'être confondus (risque de les supprimer par erreur), et suivant les paramètres choisis, les modes de relaxation peuvent ne pas être sur-amortis, et donc confondus avec des modes flexibles. Il faut donc être prudent lors de l'utilisation de ces méthodes.

Le tableau A.1 présente les avantages et inconvénients des différentes approches présentées.

Approche	Avantages	Inconvénients
Rhéologique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Très simple</li> <li>– Fréquentiel et temporel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Non représentatif</li> </ul>
Dérivée fractionnaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Représentatif</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Sens physique des paramètres</li> <li>– Nombre de paramètres à identifier</li> <li>– Passage en temporel</li> </ul>
Module complexe	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Découle directement de équations de base</li> <li>– Pas d'augmentation de la taille du système</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Amortissement hystérétique</li> <li>– Passage en temporel</li> </ul>
GHM	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Fréquentiel et temporel</li> <li>– ddl de dissipation bien adapté pour les éléments finis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Augmentation de la taille du système</li> </ul>
ADF	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Sens physique</li> <li>– Fréquentiel et temporel</li> <li>– ddl de dissipation bien adapté pour les éléments finis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Augmentation de la taille du système</li> </ul>
MSE	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Simple (non complexe)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Modal (fréquentiel)</li> <li>– Itératif pour être efficace</li> <li>– Uniquement les structures composites</li> </ul>
Amortissement Modal	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Très répandu</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Global</li> <li>– Uniquement aux résonances</li> </ul>

TAB. A.1 – Avantages/Inconvénients des modèles présentés

## Annexe B

# Blocages numériques et plaques

### B.1 Phénomènes de blocage

Les phénomènes de blocages numériques sont identiques dans les éléments 3D, 2D ou de plaques. Nous retenons des éléments 2D quadrilatères pour en simplifier la présentation. Dans ce cas, nous supposons l'élément sollicité en flexion dans son plan, avec un seul élément, linéaire, dans l'épaisseur de la structure, définie selon l'axe  $y$ .

#### B.1.1 Blocage en cisaillement transverse

En considérant un élément sans correction de forme (pas de jacobien), la matrice de raideur est de la forme

$$\mathbf{K} = \int_{V^r} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV \quad (\text{B.1})$$

en séparant la matrice de raideur en une partie membrane et une partie cisaillement

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_G \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

et

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

alors

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_m^T \mathbf{H}_m \mathbf{B}_m dV + \int_V \mathbf{B}_c^T \gamma \mathbf{B}_c dV \quad (\text{B.5})$$

En se plaçant dans le cas d'un élément Q4 rectangle, pour un carré de côté  $2l * 2h$  avec  $x_i$  et  $y_i$  les coordonnées des noeuds, la relation

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (\text{B.6})$$

prend la forme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{-1+\frac{y}{h}}{l} & 0 & \frac{1-\frac{y}{h}}{l} & 0 & \frac{1+\frac{y}{h}}{l} & 0 & \frac{-1-\frac{y}{h}}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\frac{x}{l}}{h} & 0 & \frac{-1-\frac{x}{l}}{h} & 0 & \frac{1+\frac{x}{l}}{h} & 0 & \frac{1-\frac{x}{l}}{h} \\ \frac{-1+\frac{x}{l}}{h} & \frac{-1+\frac{y}{h}}{l} & \frac{-1-\frac{x}{l}}{h} & \frac{1-\frac{y}{h}}{l} & \frac{1+\frac{x}{l}}{h} & \frac{1+\frac{y}{h}}{l} & \frac{1-\frac{x}{l}}{h} & \frac{-1-\frac{y}{h}}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{-u_1+u_2+u_3-u_4}{4l} + \frac{y(u_1-u_2+u_3-u_4)}{4hl} \\ \varepsilon_y &= \frac{-v_1-v_2+v_3+v_4}{4h} + \frac{x(v_1-v_2+v_3-v_4)}{4hl} \\ \gamma_{xy} &= \frac{-u_1-u_2+u_3+u_4}{4h} + \frac{-v_1+v_2+v_3-v_4}{4l} + \frac{x(u_1-u_2+u_3-u_4)}{4hl} + \frac{y(v_1-v_2+v_3-v_4)}{4hl} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Or le cisaillement nul qui accompagne les structures minces impose dans l'élément

$$\frac{(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)}{4hl} = 0 \quad (\text{B.9})$$

ce qui implique que la déformation  $\varepsilon_x$  ne peut plus être linéaire mais constante. C'est pourtant  $\varepsilon_x$  linéaire qui est caractéristique de la flexion. Il y a donc un phénomène de blocage en cisaillement transverse qui se caractérise par une convergence plus lente.

### B.1.2 Blocage en contrainte plane

La relation de comportement donne

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (\text{B.10})$$

et le rapport des énergies de déformations de cette structure avec celle d'une poutre donne (réf. [Fel03, chap. 17, p. 17])

$$r = \frac{1-\nu^2}{1+(1-\nu)\frac{L^{(e)}}{h}} \quad (\text{B.11})$$

ce qui indique que même si la longueur élémentaire  $L^{(e)} \rightarrow 0$ , ce rapport ne peut pas tendre vers 1 si  $\nu \neq 0$ . En fait, la solution EF tend vers un état de déformations planes, incompatible avec l'état de contraintes planes si  $\nu \neq 0$ .

## B.2 Equations des plaques et éléments finis

La notion de plaque intervient pour un solide défini par une surface de référence plane dont l'épaisseur  $h$  est petite devant les autres dimensions. La contrainte  $\sigma_z$  (qui est maintenant la direction transversale) est nulle. Elle s'annule sur les faces, et pour une plaque mince, on la suppose nulle dans l'épaisseur. Dans une théorie des plaques du premier ordre :

- les sections droites restent droites après déformation
- la déformation transversale est nulle,  $\varepsilon_z = 0$  (pas de variation d'épaisseur)

- la contrainte plane  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contrainte

Dans cette théorie cinq variables cinématiques sont nécessaires  $u, v$  (associées au plan neutre) et  $w$ , ainsi que les rotation hors plan  $\beta_x$  et  $\beta_y$ , ainsi qu'un coefficient de correction de cisaillement transverse  $k$ . Les théories d'ordre supérieur évitent la prise en compte de ce facteur mais elles nécessitent l'introduction de nouvelles variables cinématiques et sont donc plus lourdes. Le champ cinématique est donné par

$$\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

ce qui conduit aux déformations

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

ou  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + z\boldsymbol{\chi}$  avec  $\mathbf{e}$  les déformations de membrane,  $\boldsymbol{\chi}$  les termes associés à la déformation de flexion, et

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

pour les termes de cisaillement transversal.

La relation de comportement permet de relier les efforts aux déformations de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{H}_{mf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{mf} & \mathbf{H}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\chi} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

avec les variables mécaniques de type efforts de membrane  $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$ , moments de flexion  $M_x, M_y$  et  $M_{xy}$ , et enfin, efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  tels que

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz. \quad (\text{B.16})$$

Généralement, les équations de plaques sont écrites pour des plaque épaisses de Reissner/Mindlin, inspiré des poutres de Timoshenko, ou pour des plaques minces de Kirchhoff, inspiré des poutres minces d'Euler-Bernoulli. Dans ce dernier cas, en plus de l'hypothèse des sections droites dans la déformation, les hypothèses sont :

- les sections droites restent normales au plan neutre (pas de déformation en CT)
- les termes non linéaires sont négligés (inertie de rotation), seul le déplacement transversal  $w$  est considéré

Mais la théorie des plaques minces est retrouvée avec la diminution de l'épaisseur dans la théorie des plaques épaisses. Elle peut donc être considérée comme un cas particulier de la théories des plaques épaisses. En statique, avec  $L$  la dimension caractéristique dans le plan  $xy$ , la plaque est supposée épaisse lorsque  $4 \leq L/h \leq 20$  et mince lorsque  $L/h > 20$ . En dynamique, le critère géométrique ne suffit plus et l'hypothèse de plaque mince est fonction d'un critère en fréquence qui prend en compte les caractéristiques matériau [CKV05]. En fait, l'onde de vibration dépend du rapport  $h/l$

entre l'épaisseur et la longueur d'onde de la vibration. Il doit être bien inférieur à l'unité dans le cas d'une plaque mince. En considérant ce rapport à 0,1, l'expression de la longueur d'onde  $l = 2\pi \sqrt[4]{\frac{D}{\rho h \omega^2}}$  conduit à une limitation en fréquence telle que

$$\omega < \frac{0.04\pi^2}{h^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (\text{B.17})$$

avec  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  la raideur en flexion de la plaque.

Les plaques et les coques sont habituellement modélisées avec des éléments spécifiques, représentés par une surface moyenne, et des noeuds sur lesquels sont calculés des rotations. Il existe en dynamique des structures des éléments continus de plaques, comme pour les barres ou les poutres [GD96, Gor00, CA07]. Ils sont également nommés éléments harmoniques, spectraux ou encore éléments à matrice de rigidité exacte, et reposent sur des fonctions d'interpolation dépendantes de la fréquence. Mais ils sont assez lourds à implémenter. L'élément Q4 $\gamma$  est un élément de plaque discret avec cisaillement transversal suivant la théorie de Reissner-Midlin qui est simple et ne présente pas de blocage numérique. Une présentation détaillée est disponible dans la référence [BD90, Tome 2]. Il s'agit d'un élément basé sur l'évaluation de l'énergie interne

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int \mathbf{e}^T \mathbf{H}_m \mathbf{e} dS + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{H}_f \boldsymbol{\chi} dS + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{H}_c \boldsymbol{\gamma} dS \quad (\text{B.18})$$

Les éléments standards ont 3 ddl par noeuds :  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ . Le blocage en cisaillement transverse est résolu en utilisant une interpolation indépendante du champ de cisaillement transverse dans la base covariante suivant la méthode ANS, et à partir des cisaillements évalués aux points milieu des arêtes de l'élément de référence. Le blocage en contrainte plane est quant à lui évité par l'introduction de l'hypothèse de contraintes planes dans la relation de comportement.

En utilisant des éléments volumiques (3D), les problèmes de conditionnement liés aux degrés de liberté en rotation sont évités et la variation d'épaisseur de la plaque est autorisée. Ainsi, les valeurs des déplacements sont calculées directement sur les peaux du matériau, là où les mesures sont faites. De plus, ils assurent intrinsèquement les continuités des déplacements et des déformations entre les couches lors de la modélisation d'un matériau multicouches (sandwich).

## Résumé

Ce travail présente une méthode mixte expérimentale-numérique traitant des mesures mécaniques réalisées sur structures pour l'identification de propriétés matériau viscoélastiques linéaires. Les caractéristiques de ces matériaux sont complexes et dépendent de la fréquence et nous cherchons à les identifier par une approche directe et non paramétrique. Pour cela, deux méthodes d'identification adaptées au traitement des mesures de champs de réponses en fréquences sont présentées. Celles-ci utilisent les données fréquentielles, sans analyse modale expérimentale. Les champs expérimentaux sont obtenus par vibrométrie laser et les champs numérique par la méthode des éléments finis. Nous utilisons un modèle volumique adapté à l'étude des structures minces et épaisses pour l'analyse numérique. Les applications se basent sur des plaques simples ou multicouches. Les résultats sont corrélés avec des mesures DMA et des identifications à partir de données modales identifiées.

**Mots-clés** : Viscoélasticité linéaire, identification, méthode mixte expérimentale-numérique, éléments finis volumiques pour les structures

## Abstract

This work deals with a mixed experimental numerical method for linear viscoelastic material parameter identification. These parameters are complex and frequency dependent. Identification is performed using a direct and non parametric approach. In this goal, two identification methods adapted to frequency response fields measurements treatment are presented. These datas are directly exploited, without any experimental modal analysis. Experimental fields are obtained using a vibrometer and numerical ones with finite element method. A brick element dedicated to thin/thick structures analysis is employed. Applications are performed using simple plates or sandwich plates. Results are also compared to DMA measurements and identified modal parameters.

**Keywords** : Linear viscoelasticity, identification, mixed experimental-numerical method, volumetric finite element for structures