Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques

Corine Castela

Corine CASTELA

Maître de Conférences
LDAR-Université Paris Diderot-Université de Rouen
IUFM de Haute-Normandie

Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets

/

Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques

Note de synthèse présentée en vue de
l'Habilitation à Diriger des Recherches
Université Paris Diderot

Soutenue le 7 Octobre 2011
Devant le jury :

Michèle ARTIGUE, Professeur émérite, Université Paris Diderot Paris 7, France
Yves CHEVALLARD (Rapporteur), Professeur, Université de Provence, France
Alain KUZNIAK, Professeur, Université Paris Diderot Paris 7, France
Daniel PERRIN, Professeur, Université Cergy-Pontoise, France
Maggy SCHNEIDER, Professeur, Université de Liège, Belgique
Anna SIERPINSKA (Rapporteur), Concordia University, Montreal, Canada

Sommaire

Introduction

Conformément à ce que le titre de l'exercice résume, cette note ambitionne de présenter les travaux réalisés dans mon parcours de recherche sous forme d'une totalité cohérente. Je pense y avoir réussi moyennant l'abandon de mes toutes premières productions. Reste alors un ensemble relativement limité de travaux (je tenterai de m'expliquer plus loin de cette productivité restreinte) qui s'organise en deux flux ayant chacun une cohérence. Le premier correspond aux chapitres 1 et 2, il intègre les recherches qui conduisent de l'analyse des connaissances impliquées dans la résolution de problèmes en mathématiques à l'étude des voies de leur construction largement non accompagnée didactiquement, donc du travail personnel des élèves et étudiants, à différents niveaux de scolarité. Le second est présenté dans les chapitres 1 et 3. Nourri par les réflexions sur la résolution de problèmes en mathématiques mais aussi par deux affluents plus tardifs relatifs à la comparaison des enseignements de la géométrie au Chili et en France d'une part, à la transposition des mathématiques dans la formation des ingénieurs d'autre part, ce flux s'intéresse à la modélisation des ressources cognitives socialement produites et à l'étude des processus qui constituent au niveau institutionnel les dynamiques cognitives de production et de circulation des praxéologies. Les recherches portent sur des contenus mathématiques mais l'effort théorique accompli, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, est certainement de portée plus générale. Ces deux directions de recherche sont porteuses de perspectives spécifiques qui sont présentées en conclusion des chapitres 2 et 3.

Avant d'en venir au premier des trois chapitres qui composent donc ce texte, je veux m'expliquer sur certaines options prises dans l'élaboration de cette note. Comme on a déjà pu le constater, j'ai choisi de l'écrire en première personne. Ceci répond à l'objectif d'exprimer ici les développements les plus récents de ma pensée, donc non nécessairement confrontés à la controverse. Je me suis ainsi autorisée à plusieurs reprises à m'avancer à l'extrême limite de mes connaissances, avec le projet d'envisager des pistes possibles ; ces audaces sont explicitées comme on le verra dans les différents chapitres. Mais, dans cette introduction, je veux aussi tenter d'élucider quelques éléments de mon rapport à l'activité de recherche, entre autre ceux qui peuvent en expliquer certaines limites, non pour m'en excuser mais pour espérer ne pas les imposer aux jeunes chercheurs que je serai amenée à encadrer.
Comme je l'ai dit précédemment, le nombre de mes recherches est limité, particulièrement celles qui comprennent une dimension expérimentale ou empirique. Ceci est dit sans effet de fausse modestie. Chacune des recherches que j'ai réalisées a été accompagnée ou suivie d'un long temps associant écriture et élaboration théorique. Ceci est la conséquence du besoin irrépressible de disposer à titre personnel d'une organisation conceptuelle intégratrice, porteuse d'une cohérence pour un certain domaine. Cet édifice n'est évidemment jamais définitif, son sort est d'être déstabilisé puis reconstruit. Ceci me fait donc avancer mais prend du temps et détourne du terrain. C'est pourquoi les travaux à base empirique que j'ai menés à bien ont toujours été inscrits dans un processus d'élaboration théorique qui en a retardé l'achèvement et la publication.
Cette caractéristique a aussi des effets sur ma pratique de lecture. Plus encore que par la confrontation au réel, la mise en mouvement que j'ai évoquée est initiée par des rencontres avec les élaborations d'autres chercheurs, essentiellement par l'étude des textes qu'ils ont produits. C'est avec cette finalité que j'ai, dans ma vie de didacticienne, envisagé le travail bibliographique, dans un sens sous bien des aspects hérétique du point de vue des normes scientifiques : certainement pas exhaustif, il est une recherche de rencontres assez aléatoires avec des pensées, suffisamment proches pour que je les entende, suffisamment différentes

pour déséquilibrer ma cohérence antérieure. Le sentiment d'inconfort que suscite alors chez moi la désorganisation ainsi provoquée est tel que le travail d'accommodation nécessaire ne souffre pas beaucoup de délais. Il me faut surseoir au travail de lecture pour reconstruire un équilibre. Pour désagréables que soient pendant un temps les effets de telles rencontres, je ne lis véritablement que pour les vivre et ainsi enrichie, relancer mon chantier. Ceci explique que réaliser une revue systématique de travaux n'a jamais été une priorité pour moi et même qu'il m'est quasiment impossible d'en mener une à terme. Je ne m'en vante pas, tout à fait convaincue de la nécessité scientifique de capitaliser les différents travaux et de situer les nouveaux par rapport aux anciens. La rédaction du présent texte de synthèse a été pour moi l'occasion d'explorer, sinon de manière exhaustive et systématique, du moins beaucoup plus largement que je ne l'avais jamais réalisé, les travaux existants sur les thèmes d'étude qui sont les miens. C'est ainsi que le chapitre 1 commence par une revue de travaux consacrés à la résolution de problèmes en mathématiques, visant à y distinguer des tendances par rapport auxquelles je situe ma propre position. La thématique du travail personnel des élèves ou étudiants n'ayant guère été abordée dans le cadre des recherches didactiques, je présente dans le chapitre 2 les travaux réalisés sur ce sujet en sciences de l'éducation et en sociologie par des chercheurs de langue française, en m'attardant sur ceux d'entre eux, très rares, qui prennent en compte la spécificité des savoirs enseignés. Enfin, dans le chapitre 3, j'ai mis en relation le développement du modèle praxéologique que je propose avec certains aspects des travaux réalisés par trois courants de recherches sur les pratiques professionnelles.
Ceci correspond à une dernière caractéristique du projet dual mis en œuvre dans cette note : j'ai cherché à expliciter les choix philosophiques qui me font inscrire fermement mon travail au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique et, assumant ainsi clairement mon orientation, j'ai à plusieurs reprises envisagé de possibles convergences avec des approches théoriques partant de présupposés *a priori* nettement différents.

Chapitre 1

Savoirs en jeu dans la résolution de problèmes : le pari de la généricité pratique

I. Introduction

Mes premiers travaux, directement inspirés par mon expérience d'enseignante de lycée, ont concerné des apprentissages conceptuels. L'un, publié par l'IREM de Rouen, s'intéresse aux acquis des élèves sur les nombres réels en début de seconde. L'autre, qui a donné lieu à un article dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1995), est consacré aux conceptions de la notion de tangente à une courbe à plusieurs niveaux du lycée. Dans les deux cas, les données analysées sont issues d'un questionnaire dont les items ne font pas intervenir les concepts visés sous forme d'outil. Les conclusions sont formulées en terme d'écart entre le concept mathématique et les conceptions que s'en font les élèves. Les circonstances ont fait que je n'ai prolongé aucune de ces deux recherches dans la direction d'une ingénierie, ce qui m'aurait nécessairement conduite à élargir une approche qui en est donc restée à un stade assez naïf, eu égard aux outils développés par la didactique française.
Recrutée à l'IUFM[1] en 1991, j'ai été immédiatement responsable d'un enseignement de géométrie très particulier puisque, destiné aux étudiants préparant le CAPES[2] de mathématiques, il est centré sur la révision des programmes du lycée. Dans ce cadre, les lacunes manifestées par les étudiants ne peuvent que rarement être interprétées en termes de défaut de conceptualisation, il s'agit plutôt de difficultés dans l'utilisation de leurs connaissances dans des conditions requérant une certaine autonomie, conformément aux caractéristiques des deux épreuves écrites du concours. Celles-ci ont un programme de niveau limité puisqu'il ne dépasse guère les contenus du secondaire (dont la géométrie) et des deux premières années universitaires mais ce programme est aussi très large puisque les problèmes posés ne s'annoncent pas comme relevant d'un secteur particulier. Même si n'intervient dans chaque problème qu'un nombre très restreint de théorèmes importants de niveau universitaire, il arrive que leur mobilisation soit à la charge des étudiants. Leur utilisation suppose en général de les coordonner, sans que l'énoncé ne fournisse aucune indication, avec des théorèmes plus anciens ou des techniques que l'on pourrait à ce niveau considérer comme élémentaires puisque déjà rencontrées au secondaire. Enfin, ces problèmes sont longs (un seul thème pour une durée de 5 heures) et régulièrement, certaines questions utilisent des résultats établis antérieurement et ce sans avertissement particulier.

> J'illustrerai une partie de ce qui vient d'être dit par un exemple issu de la deuxième épreuve écrite de 2009. Le problème est consacré aux racines de polynômes (borne de Cauchy, théorème de Lucas liant les racines de f'(z) à celles de f(z), interprétation en termes de coniques pour le degré 3). Après avoir rappelé la définition d'une partie convexe du plan (en terme de barycentre), la partie C commence en demandant d'établir que
>
> 1. le plus petit convexe contenant une partie F du plan est l'intersection de tous les convexes contenant F,
> 2. que l'ensemble G des barycentres à coefficients positifs de familles finies de points de F est ce plus petit convexe.

[1] Institut Universitaire de Formation des Maîtres : en première année, les étudiants y préparent les concours de recrutement des professeurs d'école ou de collège et lycée ; la deuxième année, réservée aux admis aux concours qui sont alors professeurs stagiaires, est consacrée à une formation plus directement professionnalisée qui doit conduire à la titularisation. Cette situation change en Septembre 2010.
[2] Il s'agit du concours de recrutement des professeurs de Collège et Lycée qui se prépare pendant un an à l'issue d'une Licence.

Je n'analyse pas pour l'instant en détail l'ensemble des étapes à introduire pour traiter la deuxième question, je retiendrai seulement (mais cela donne déjà une bonne idée de la difficulté) que les étudiants doivent à leur initiative effectuer un raisonnement par récurrence pour établir que tout convexe contenant F contient aussi G, ils doivent également mobiliser le théorème d'associativité ou passer au cadre vectoriel. Il s'agit ici de savoirs qui sont déjà rencontrés au secondaire.

Or les étudiants qui s'inscrivent à la préparation au concours et ont donc suivi au moins un cursus complet de 3 ans à l'université manifestent de très grandes difficultés face à ce contexte d'utilisation de connaissances que l'on peut considérer comme relativement anciennes. Ainsi, un travail réalisé par J. Pian (1999) auprès d'une centaine d'étudiants des préparations au CAPES de Versailles et de Lille, en début d'année universitaire, montre que, dans un questionnaire de 24 items, concernant uniquement des savoirs enseignés au niveau L1-2, les seules questions qui sont réussies par plus de la moitié des étudiants sont des applications directes de propriétés élémentaires, sans coordination avec d'autres résultats. Dès qu'une question nécessite certaines adaptations[3], par exemple l'introduction d'une étape, le pourcentage de réussite se situe au dessous de 20 % des étudiants. Cette étude est confirmée année après année par les notes d'écrits au concours : pour l'année 2008, sur les 3453 candidats présents, 10 ont obtenu la note 19/20, leur production permettant d'étalonner le barème, 46 % des notes sont alors strictement inférieures à 8.

C'est donc dans ce contexte que je me suis intéressée à la résolution de problèmes, objet qui a constitué jusque fort récemment l'épine dorsale de mes recherches. En comparaison avec mon travail sur les réels et sur la tangente, ceci constitue un changement de perspective sur la nature des enjeux de l'enseignement des mathématiques : il ne s'agit plus seulement de créer les conditions d'une construction conceptuelle, de l'appropriation par les élèves des concepts et des théorèmes (ce que je désignerai désormais en parlant de savoirs théoriques), les fins ultimes visées concernent l'utilisation de ces connaissances dans certaines pratiques. La résolution de problèmes est considérée, non en tant que moyen nécessaire à la construction des connaissances mathématiques théoriques, ce qu'elle est certes, mais comme un objectif de l'éducation mathématique à part entière.

L'enjeu du module de géométrie de 30 heures que j'ai conçu dans le cadre de la préparation au CAPES était donc de faire réviser les savoirs géométriques du secondaire, souvent non retravaillés à l'université, et de faire progresser les étudiants dans leurs capacités à utiliser ces savoirs dans des problèmes exigeant d'eux qu'ils prennent un certain nombre d'initiatives, pour choisir des outils pertinents et les utiliser efficacement dans chaque contexte, ce qui suppose diverses formes d'adaptation. Il n'est donc pas question de nier l'importance du savoir théorique, l'objectif est au contraire d'étendre son champ d'utilisation à des problèmes qui ne se réduisent pas à l'exercice routinier de techniques connues par avance, applications simples des théorèmes enseignés. Mais, le postulat sur lequel repose la conception du travail proposé aux étudiants est le suivant : il existe au sein des contextes d'utilisation du savoir mathématique une multiplicité d'invariances, de proximités qui peuvent provoquer chez ceux qui y sont confrontés la construction de connaissances non prises en charge par les définitions et théorèmes et dont la raison d'être est de favoriser l'emploi du savoir théorique dans les situations non routinières. C'est ce que j'appelle *le pari de la généricité pratique*. Attribuant à un déficit relatif à ces connaissances les difficultés des étudiants préparant le CAPES, j'ai pris le parti de faire officiellement une place à certaines d'entre elles dans le module de géométrie sous forme d'objets de savoir reconnus.

Dans la mesure où la thématique de la résolution de problèmes est l'objet de nombreux travaux dans le monde, avec des approches très différentes, j'ai entrepris à l'occasion de ce

[3] A propos des différentes formes d'adaptation, voir (Robert 1998) et pour plus de détails, par exemple (Robert & Rogalski 2002)

document de synthèse de réaliser, non pas une revue de travaux complète, mais plutôt un certain repérage qui me permettra de me situer relativement au courant du *Problem Solving* d'une part, à la didactique française d'autre part. Ceci réalisé, je reviendrai sur le module de géométrie que je viens d'évoquer en précisant quels objets de savoirs y ont été introduits et selon quelles modalités (III et IV). Puis j'examinerai les objections développées dans le cadre de la communauté didactique française à l'enseignement d'heuristiques et de méthodes (V). Suivant une piste ouverte par un travail d'ergonomie cognitive sur les règlements dans les mondes professionnels, j'envisagerai quelques références théoriques qui me paraissent de nature à prendre en compte l'apport que peut constituer, du côté de l'apprentissage, l'existence d'objets de savoirs[4] pratiques (VI). Je terminerai ce chapitre en présentant les outils que j'ai développés pour modéliser ces savoirs (VII).

II. Le courant du Problem Solving en Education Mathématique : un emblème, plusieurs conceptions

L'expression *Problem Solving* est utilisée comme bannière d'un courant de l'Education Mathématique dont on voudrait croire qu'il est relativement unifié puisque des programmes et standards institutionnels utilisent cette formule pour définir la pédagogie attendue des enseignants. Il n'en est rien comme le montre l'état de l'art dressé en 2006 par le numéro 39 (5-6) de la revue *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Il y a certes plusieurs points communs : le travail d'entraînement à l'utilisation de techniques bien définies et essentiellement algorithmiques dans des exercices limités ne relève pas du *Problem Solving*, on se centre sur des problèmes non routiniers qui doivent constituer un certain défi pour les élèves, la dimension collective du travail est souvent mise en avant. Mais cette unanimité disparaît quand il s'agit de définir les buts éducatifs de l'activité de résolution de problèmes. Je vais distinguer plusieurs conceptions dont sans doute personne ne se réclame exclusivement mais qui me semblent permettre de décrire différentes tendances présentes dans ce courant ; elles se distinguent notamment par les types de connaissances dont la construction par les élèves est visée. Le terme 'connaissances' est important, il s'agit bien ici d'envisager des moyens dont un sujet cognitif dispose pour traiter des situations problématiques, une partie de ces connaissances pouvant être indicible, voire inconsciente. Les dispositifs didactiques que nous allons évoquer dans la suite peuvent ambitionner la construction de certaines connaissances chez les élèves sans jamais y faire référence par des savoirs explicités dans la classe, ni même tenter de reconnaître l'enjeu d'apprentissage sous-jacent. Quoiqu'il en soit, je profiterai de ce parcours au sein du *Problem Solving* pour dresser un tableau des différentes formes de connaissances en jeu dans la résolution de problèmes

1. Former à la confrontation avec des situations inédites

Dans cette conception, l'accent est mis sur l'originalité des problèmes posés qui ne doivent être en rien familiers aux élèves. La résolution de chaque problème est considérée comme une fin en soi et se maintient relativement isolée du reste des activités mathématiques. Ces problèmes ne doivent apparaître en relation ni avec des savoirs enseignés, ni avec des types de problèmes déjà rencontrés, de façon à ce qu'aucune technique éventuellement disponible ne figure dans l'environnement immédiat (je reprends ici à mon compte l'analyse proposée par Bosch &.Gáscon 2005, p. 109-110, à la nuance près que je ne l'étends pas automatiquement à l'ensemble du courant du *Problem Solving*). On pourrait même dire qu'au contraire, on insiste sur le fait que le but n'est pas d'améliorer l'apprentissage des mathématiques enseignées. Ainsi

[4] Dans ce texte, sauf mention expresse d'une restriction, j'utilise le terme 'savoirs' pour désigner des savoirs socialement partagés et reconnus.

U. d'Ambrosio (2007) qui me semble être, d'après sa contribution à ZDM, un représentant engagé de cette tendance, écrit :

> "In elementary and secondary education, text books are still generous in listing exercises (trivial drilling) but also some challenging problems. But[5] they are always linked to the topics in the program, and the objective is clearly a better assimilation of the program." (p. 519).

On sent un certain regret dans cette citation. D'autres passages relativisent l'efficacité du savoir mathématique ; ainsi l'extrait suivant concerne l'introduction de problèmes posés par la vie dans un manuel brésilien :

> "This reference to "problems posed by life" clearly implies the idea that we can treat problems posed by life with skills learned in school. This gross misunderstanding that real problems can be expressed in terms of the mathematics presented in the curriculum still prevails. […] This implies an oversimplified vision of reality " p. 519

Il y aurait finalement une certaine illusion à penser que les situations[6] que les humains rencontrent en dehors des institutions de formation puissent être traitées grâce aux mathématiques enseignées. L'objectif est donc d'entraîner les élèves, voyageurs sans bagages, à la confrontation à des situations dont le traitement repose pour l'essentiel sur des qualités de créativité, d'ingéniosité qui sont les mots clés de cette orientation :

> "I don't see my mission as an educator to prepare new generations of docile citizens that continue to accept and behave in this pattern. […] They need creativity to propose the new and not to be good reproducers of the old. […] Problem Solving must be interpreted as research, with the goals of finding the new, and not with the goals of repeating what is well known." p.516

Cette vision me semble sous-tendre également le point de vue de J. Szendrei (2007) qui, dans le même numéro de ZDM, explique pourquoi, selon elle, il a été facile de diffuser le courant du *Problem Solving* en Hongrie :

> "[during] the period between 1945 and 1948 […] institutions and top layers of the aristocracy, of the substantial middle class and of the administration were liquidated. Consequently, the remaining intact parts of society were left, in the sociological sense, without any pattern to follow and were deprived of value orientation. One had to start over from scratch, building on the ruins that were left behind after devastation. Defeated, one had to carry on living amidst the rules of an obscure, unknown system.
> Unless you are resourceful and ingenious, you will not survive. Life here means solving problems on a daily basis. It follows that in principle it is not too difficult to make people understand the term "problem solving" whether it is used in its abstract scientific form or its culturally 'domesticated' form which can be taught in schools." p. 443

Métaphoriquement, il s'agit donc de reconstruire sur des ruines pour faire face à de l'inconnu.

Il y a dans cette conception une certaine défiance vis-à-vis du savoir, c'est-à-dire du capital cognitif accumulé. On peut penser que chez U. d'Ambrosio, initiateur de l'Ethnomathématique, et chez d'autres sans doute, ce point de vue résulte d'une volonté de mettre en cause une forme de pouvoir exercé par les scribes qui maîtrisent le savoir académique sur ceux qui n'ont pas ce privilège, en donnant une place aux *folklore[7]s*, ces savoirs produits pour le bénéfice commun par des communautés non savantes. Mais ce n'est pas nécessairement le cas : le fait de construire un projet éducatif de formation au traitement de situations inédites induit le besoin d'isoler les problèmes affrontés. L'enjeu de formation est de développer ce qu'en référence notamment à M. de Certeau (1980), j'ai nommé *un rapport tactique aux situations* (Castela 2008b, p.102) : l'activité (pratique et cognitive) est orientée strictement vers la réalisation de la tâche, dans son unicité subie comme une contingence ; la réussite est atteinte au moyen de régulations de l'action, nécessitant plus ou moins suivant les tâches, inventivité, distanciation et réflexivité. L'élève n'a aucune raison de capitaliser sur la solution trouvée puisqu'il sait par contrat didactique, qu'il ne sera pas confronté à des

[5] C'est moi qui souligne.
[6] Bien qu'il y ait des liens avec la notion de situation a-didactique, le terme *Situations* n'est pas utilisé ici au sens codifié dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD dans la suite).
[7] Le mot est entendu au sens étymologique du terme : *folk-lore* est le discours –savoir- du peuple

situations analogues. Mais, cette logique, si on la pousse à ses extrémités, détourne de toute forme de savoir déjà là, mettant en avant l'inadéquation face au singulier, plutôt que l'intérêt pour le générique. Ce qu'il y a à acquérir dans la rencontre avec les situations de résolution de problèmes, n'est donc pas spécifique d'une discipline :

> "This is how Problem Solving became a frequent subject in Business, Administration, Health Sciences, Environment, indeed, every human activity. Problem solving is an important component of professional training. Curiously, the pattern is very much alike in all areas, including mathematics." (d'Ambrosio 2007, p. 517)

Selon U. d'Ambrosio, cette conception du *Problem Solving* a vécu et vit dans les compétitions mathématiques de type Olympiades, elle est par contre relativement incompatible avec les dispositifs d'évaluation. Ce même phénomène est signalé aux Pays Bas par (Doorman & Al. 2007). Dans ce pays, le *Problem Solving*, selon la tradition initiée par Freudenthal, fait écho au courant *Realistic Mathematics Education*, même s'il ne s'y réduit pas. Les auteurs constatent une certaine difficulté à faire vivre sans affadissement, dans les institutions scolaires, l'approche de la résolution de problèmes développée avec succès dans des compétitions. Ils relèvent en particulier la lourdeur du travail impliqué par l'élaboration du type de situations souhaité. Sans approfondir cette question, il n'est pas anodin qu'une évaluation institutionnelle, par la société, des acquisitions de chaque élève soit remplacée par une compétition. A l'isolement des situations problématiques semble correspondre inévitablement l'isolement de ceux qui s'y confrontent, qu'il s'agisse d'un individu ou d'un groupe. Une telle conception ignore finalement les valeurs de coopération sociale et de transmission. Je pense que la question de l'idéologie qui la produit et qu'elle véhicule mérite d'être étudiée sérieusement.

Comment exprimer les apprentissages visés ? S'engager dans une réponse à cette question, c'est reconnaître qu'il y a du générique dans les situations d'affrontement aux situations inédites et tenter de repérer des régularités dans les façons de faire, seul ou en groupe, avec le nouveau. Compte tenu de l'orientation non disciplinaire décrite précédemment, les invariants recherchés concernent prioritairement le déroulement de l'activité de traitement d'un problème, en se centrant sur ce qui est commun à tous les domaines de l'activité humaine. Comment s'organise-t-on ? Par quoi est-il préférable de commencer ? Est-il préférable de planifier avant d'agir ? Comment se répartir les rôles ? Comment gérer les conflits ? Etc. Des savoirs, reconnus dans certaines institutions (ce qui ne signifie pas qu'ils soient tous validés scientifiquement), sont disponibles pour décrire et analyser certaines dimensions des apprentissages que la confrontation des élèves à des résolutions de problèmes inédits peut prétendre viser. Ces savoirs peuvent être objets explicites d'enseignement dans les dispositifs de formation professionnelle, initiale et continue, évoqués par U. d'Ambrosio : il s'agit alors de prendre acte de l'existence de pratiques socialement partagées, reconnues et validées dont la transmission est recherchée. Mais on voit qu'il y a une véritable contradiction entre cette approche qui met en avant une double généricité, au niveau des situations à traiter et au niveau des acteurs de la résolution, et la conception du *Problem Solving* envisagée. Celle-ci peut à l'inverse se traduire par le refus d'inscrire explicitement les situations vécues dans une perspective de réinvestissement ultérieur. La résolution de problèmes se présente alors aux élèves comme une pratique où ils ne peuvent espérer s'améliorer qu'en s'y confrontant. Le fait qu'il soit possible de tirer parti des expériences vécues et d'en tirer des leçons pour l'avenir n'est pas mis en avant, charge est laissée à chaque élève d'en prendre conscience et de repérer lui-même ce qu'il peut apprendre de ce qu'il a vécu. Entre ces deux extrêmes, une position intermédiaire consiste à ce que l'enseignant organise des phases réflexives sur le déroulement de la recherche.

2. Faire entrer dans la culture mathématique de la résolution de problèmes

Je veux envisager ici une conception qui comme la précédente se centre sur l'affrontement à l'inédit, à ceci près, et la nuance est de taille, que cette confrontation, considérée comme une dimension caractéristique de l'activité professionnelle du mathématicien, est envisagée de son point de vue. Il est l'expert de référence. Le regard que porte la communauté mathématicienne sur le monde, les pratiques qu'elle met en œuvre, sont valorisés en tant que manières de voir et de faire efficaces pour traiter certains problèmes.

La résolution de problèmes est mise en avant comme la dimension essentielle de l'activité du mathématicien :

> "What does mathematics *really* consist of? […] Mathematics could surely not exist without these ingredients [axioms, theorems, definitions, theories, methods]; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics *really* consists of is problems and solutions." (Halmos1980, p.519, cité dans Schoenfeld 1992, p. 339)

Pas plus que la précédente, cette perspective n'insiste sur le lien entre les problèmes, si ce n'est au niveau très général de la discipline. Lorsque, suite à la citation de Halmos rapportée ci-dessus, A. Schoenfeld mentionne des problèmes, il évoque le problème des quatre couleurs, la conjecture de Goldbach, c'est-à-dire des problèmes-évènements, qui, parce que sans liens avec ce qui avait déjà été résolu, ont résisté longuement aux efforts des experts. Mais, avertit-il, cette résistance est, en de moindres proportions, le fait de tous les problèmes qui font vraiment avancer la compréhension, il faut des semaines, des mois, voire des années pour les résoudre, durée qui s'explique par le fait que rien de ce qui est disponible n'est efficace. Et c'est donc cela qu'il faut transposer dans le système éducatif. Un tel point de vue est compatible avec un corpus très réduit de savoirs mathématiques : des travaux comme ceux qui sont expérimentés autour de D. Grenier et C. Payan (Grenier 2010) à Grenoble, notamment dans le domaine des Mathématiques Discrètes, le prouvent amplement.

Cette approche ne nie pas l'intérêt du savoir mathématique mais l'objectif attribué au *Problem Solving* n'est pas centralement dans l'acquisition de ce savoir. Quel est-il ? Il me semble qu'on peut y distinguer deux composantes : la première est au principe de cette conception de l'éducation mathématique, il s'agit de faire entrer les élèves dans une certaine culture ; la seconde est diversement prise en compte dans les travaux de recherche autour du *Problem Solving* et plus généralement de *l'Advanced Mathematical Thinking*[8] (AMT, voir par exemple le numéro consacré en 2005 à ce sujet par la revue *Mathematical Thinking and Learning*), elle concerne les façons d'agir des experts en situation de résolution de problèmes .

Entrer dans une culture de mathématiciens

L'objectif commun est que les élèves découvrent les spécificités de l'approche mathématique du monde, qu'ils en mesurent l'intérêt en ayant l'occasion d'adopter eux-mêmes ce point de vue :

> "becoming a good mathematical problem solver […] may be as much matter of acquiring the habits and dispositions of interpretation and sense-making as of acquiring any particular set of skills, strategies or knowledge. If this is so, we may do well to conceive of mathematics education less as an instructional process (in the traditional sense of teaching specific, well-defined skills or items of knowledge) than a socialization process. " (Resnick 1988, p. 58)

Par un tel processus de socialisation, dit aussi d'acculturation, c'est un certain sens de ce qui est et ce qui n'est pas mathématique du point de vue des outils, des pratiques et des valeurs sociales qui est à construire. Dans cette perspective, on pourra éventuellement décider de développer explicitement avec les élèves des réflexions d'ordre épistémologique sur les

[8] Je ne cherche pas à traduire ces termes qui ne correspondent pas à des objets étudiés en didactique des mathématiques française.

mathématiques : par exemple, sur la nature de la vérité et du débat de preuve, sur le type d'objets en jeu en géométrie, sur ce qui fait l'usage légitime des savoirs mathématiques. C'est à ce niveau de généralité que se situent les connaissances épistémiques d'ordre II et III distinguées par Sackur & Al. 2005 (voir III pour quelques précisions).

S'approprier des gestes du penser mathématique

Le deuxième objectif est relatif aux pratiques expertes. Il s'agit de considérer que les mathématiciens ont des façons de faire en situation de résolution de problèmes auxquelles il convient d'initier plus ou moins les élèves :

> "We believe that every course or academic experience in high school should be used as an opportunity to help students develop what we have come to call good general habits of mind.
> Good thinking must apparently be relearned in a variety of domains […] high school graduates should be accustomed to using real mathematical *methods*. […] We are after mental habits that allow students to develop a repertoire of general heuristics and approaches that can be applied in many different situations." (Cuoco & Al.1997 p.377).

Dans le courant de recherches relatif à l'AMT, sous diverses dénominations (*habits of minds, ways of thinking*), ces façons de faire sont envisagées en tant que constructions individuelles, répondant à une certaine généricité des tâches affrontées :

> "In our usage, the phrase way of understanding, conveys the reasoning one applies in a local, particular mathematical situation. The phrase way of thinking, on the other hand, refers to what governs one's ways of understanding, and thus expresses reasoning that is not specific to one particular situation but to a multiple of situations. A person's ways of thinking involve at least three interrelated categories: beliefs, problem-solving approaches, and proof schemes."(Harel & Sowder 2005, p.31)

Ces pratiques individuelles sont explorées au moyen d'interviews (exemple : Iannone & Nardi 2007) d'une part, de résolution à haute voix d'autre part (un mathématicien est placé en situation de recherche d'un problème, il lui est demandé de formuler à haute voix ses réflexions intérieures -exemples : Schoenfeld 1992, Carlson & Bloom 2005, Martignone 2007).

La construction des connaissances d'ordre métacognitif repérées chez les experts pendant la résolution peut être un enjeu de la conception examinée ici, plus ou moins explicité et didactiquement pris en charge.

On peut considérer qu'il s'agit avant tout de plonger les élèves dans un bain mathématique, où, par imprégnation et pratique répétée, ils finiront par accéder à une certaine culture mathématicienne d'une part, par construire à titre individuel des façons de faire, parentes de celles des experts, leur permettant d'atteindre une certaine efficacité. Un tel point de vue est cohérent avec l'approche psychologique dominante dans les recherches sur l'AMT : les connaissances métacognitives des experts sont, même s'ils les reconnaissent en savoirs personnels[9], des constructions de nature individuelle, dont on ne cherche pas la trace en termes de savoirs socialement partagés.

Un point de vue exactement opposé existe au sein du courant de recherche sur l'AMT, comme en témoigne le titre de Cuoco & Al. 1997 cité plus haut : " Habits of mind: an organizing principle for mathematics curriculum" mais aussi beaucoup plus récemment un texte de A. et J. Selden (2005) :

> "Sometimes referred to as 'mathematical habits of mind" or "mathematical practices", these ways of thinking about and doing mathematics may be fairly widely regarded as productive, but are often left to the implicit curriculum. That is, they are usually not taught explicitly, and in current school curricula,

[9] L'expression *'savoir personnel'* définie dans Castela 2000, rend compte de deux dimensions : d'une part, il s'agit d'une *connaissance*, c'est-à-dire d'une ressource cognitive qui permet à un sujet d'agir sur une situation (Rouchier 1996), d'autre part, le sujet a une certaine conscience de la connaissance considérée et en reconnaît le rôle actif (Conne 1992). Le sujet a un rapport avec cette connaissance, il la connaît donc, suivant le sens attribué au verbe '*connaître*' dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1992).

may not be considered by teachers as part of their responsibility. Indeed, some teachers may not see such habits of mind as capable of being taught.

[…] We hope that by laying out some recurring themes in the discussions of AMT that further progress in designing and implementing curricula will be encouraged, and that by introducing aspects of advanced mathematical thinking or its precursors earlier, the K-16, or even the K-graduate school curricula can become better integrated." (p.1-2)

Cette perspective change du tout au tout le point de vue sur les connaissances construites par les experts, puisqu'il s'agit de les insérer institutionnellement dans les textes définissant les curricula et ce pas seulement au niveau universitaire. Ceci suppose une reconnaissance sociale des connaissances en question.

Sous quelle forme est-il envisagé d'organiser didactiquement l'accès des élèves à des pratiques inspirées de celles des experts ? L'exemple d'A. Schoenfeld est intéressant car il est marqué par une certaine évolution quant au point que nous examinons ici, c'est-à-dire le développement de capacités de régulation et de contrôle en situation de recherche. Dès 1976, Schoenfeld a réalisé, dans le cadre de premiers cycles universitaires, des modules intitulés "*Problem Solving Course*" décrits dans Schoenfeld 1985 (Ch 3 et 4) et 1987. Des stratégies heuristiques[10] qui sont des déclinaisons de celles de G. Pólya (1945) adaptées à des domaines particuliers et plus détaillées sont présentées explicitement aux étudiants, en lien avec la recherche de problèmes non routiniers où elles peuvent être en jeu. Ainsi la stratégie "Prendre des cas particuliers" est spécifiée différemment pour le cas de problèmes faisant intervenir un paramètre entier ("Chercher des formules récurrentes en envisageant les valeurs 1,2, 3 etc."), de problèmes sur les suites récurrentes ("Regarder ce qui se passe pour un terme initial égal à 0 et 1"), de problèmes sur les racines d'un polynôme ("Considérer des polynômes facilement factorisables"). Mais le nombre de stratégies introduites devenant très élevé, la gestion de leur emploi nécessite que les étudiants développent des capacités de régulation de leur activité. Pour les y aider, l'enseignant distribue et commente en détail une sorte de feuille de route ('*flowchart*') dont il est bien dit qu'elle n'est un recours éventuel qu'en cas de blocage. La stratégie exécutive en question se présente sous la forme d'un organigramme, décomposant de manière très laconique le processus de résolution en différentes phases :

"The strategy is given in the form of a flowchart indicating the major stages of the problem solving process: analysis, design, exploration, implementation, and verifying." (Schoenfeld 1985, p. 108)

Dans son article de 1987, A. Schoenfeld signale que la place accordée explicitement aux heuristiques et à la stratégie exécutive générale a peu à peu reculé au profit de présentations plus informelles, l'enseignant se montrant par exemple en train de chercher un problème et explicitant à la classe ses réflexions. Mais, quelle que soit la version du cours considérée, une grande partie du temps est consacrée à la recherche de problèmes : recherches menées collectivement en classe entière, le professeur exerçant une fonction de chef d'orchestre et de régulateur par des questions appropriées ; recherches en petits groupes, le professeur passant dans les groupes pour obliger, par ses questions, les étudiants à faire des points d'étape ("Qu'êtes-vous en train de faire ? En quoi cela a-t-il un intérêt pour la solution ? Que ferez-vous du résultat ?"). L'évaluation des étudiants en fin de formation montre avec régularité qu'ils obtiennent de bons résultats face à des problèmes vraiment nouveaux et que leur gestion des moments de recherche se rapproche de ce qui a pu être constaté chez des mathématiciens.
Schoenfeld 1987 insiste sur l'importance de la dimension interactive du travail réalisé dans ses *Problem Solving Classes*. L'idée d'acculturation est très présente mais je ferai l'hypothèse que dans le cas de cet auteur, elle n'est pas seulement un but en soi, l'expérience de recherches

[10] Pólya désigne par heuristiques des méthodes de découverte et d'invention, valables pour toute situation de résolution de problèmes mathématiques. Schoenfeld 1985 précise "Roughly characterized, heuristic strategies are techniques used by problem solvers when they run into difficulty. They are rules of thumb for making sense of, and progress on, difficult problems." (p.74)

collectives respectant le genre[11] mathématique de la résolution de problèmes est aussi le moyen d'une appropriation par les étudiants de certaines façons de faire expertes. Par ailleurs, on peut penser que l'enseignant, A. Schoenfeld dans le cas présent, joue un rôle décisif, par ses interventions orales notamment, dans l'entrée de la classe dans le genre mathématique, rôle qu'il est en capacité de jouer parce qu'il a fait lui-même l'expérience des pratiques expertes d'une part et qu'il a développé un savoir explicite les concernant.

3. La résolution de problèmes comme une activité sollicitant un ensemble très étendu de savoirs

Les deux conceptions du *Problem Solving* examinées jusqu'à présent mettent en avant la dimension créative de l'activité de résolution et les mécanismes, éventuellement spécifiques des mathématiciens, de régulation de son déroulement. Dans leur forme la plus radicale, elles conduisent à insister sur le caractère inédit des problèmes proposés aux élèves qui doivent donc apparaître isolés les uns des autres, au plus liés dans le deuxième cas par le regard mathématique avec lequel on décide de les aborder. Si des savoirs mathématiques sont en jeu, il faut que ce soit d'une manière très éloignée de ce qui a déjà été rencontré, donc des applications usuelles qui accompagnent les savoirs théoriques. Cette option peut conduire à privilégier des situations ne nécessitant qu'un bagage mathématique minimal. La résolution de problèmes est alors conçue comme une éducation à des pratiques sans connexion avec l'enseignement et l'appropriation du savoir mathématique. Il existe dans le courant du *Problem Solving*, une approche exactement opposée dont A. Schoenfeld est l'un des initiateurs majeurs (à sa suite, voir les travaux de I. Bloom, M.P. Carlson, P.L. Galbraith, V.Geiger, F.K. Lester, G.A. Stillman cités dans Carlson et Bloom 2005, également Santos-Trigo 2007). Ainsi que nous l'avons vu dans la section précédente, A. Schoenfeld fait de la résolution de problèmes non familiers une composante de l'éducation mathématique ; il considère l'entrée dans une culture mathématique comme un enjeu éducatif à part entière et reconnaît les dimensions métacognitives des activités de résolution. Mais, et on a pu déjà s'en rendre compte à propos des stratégies heuristiques, il a de l'équipement cognitif nécessaire aux mathématiciens dans la résolution de problèmes une vision beaucoup plus large que celle qui prévaut dans les deux autres conceptions. Les experts ne sont pas seulement capables de piloter et réguler leurs efforts de recherche, de repérer rapidement les impasses et de changer leur stratégie, ils sont aussi des personnes disposant d'un ensemble large et structuré de ressources : savoirs mathématiques académiques (concepts et théorèmes), savoirs pratiques allant des algorithmes, *routine procedures* jusqu'aux heuristiques ou *problem solving strategies*. Ces dernières ont déjà été évoquées dans la section précédente, les *routine procedures* sont définies comme suit :

> "Routine procedures and relevant competencies differ from facts, definitions and theorems, and algorithmic procedures in that they are less cut-and-dried. Facts are right or wrong, algorithms, when apllied correctly, are guaranteed to work. Routine procedures are likely to work, but with no guarantees." (Schoenfeld 1992, p. 350)

Ces procédures sont, dans le vocabulaire de la Théorie Anthropologique du Didactique, des techniques non algorithmiques, associées à des types de problèmes bien identifiés. Les heuristiques concernent des classes de problèmes beaucoup plus larges et sont directement liées à la conduite de l'activité.

La résolution de problèmes mathématiques non routiniers n'est pas, selon cette conception, un enjeu d'apprentissage indépendant des enjeux d'appropriation de savoirs, théoriques et pratiques, dans la mesure où ces savoirs jouent un rôle permanent dans l'invention des solutions et ce dans toutes les dimensions du processus de recherche, comme le montrent Carlson et Bloom 2005, en utilisant la méthodologie de la résolution à haute voix :

[11] La notion de genre d'activité est empruntée à Y.Clot (2002).

> "Among the mathematicians we studied, well-connected conceptual knowledge appears to have influenced all phases of the problem solving process (orienting, planning, executing and verifying). Our results also support that the ability to access useful mathematical knowledge at he right moment during each of the problem-solving phases is highly dependent on the richness and connectedness of the individual's conceptual knowledge." (p.70)

L'expert apparaît ainsi pour reprendre une métaphore due à A. Robert (1998, p.145) comme un explorateur, certes intrépide, courageux et créatif, mais aussi très bien outillé et dont le camp de base est très bien fourni, tout le contraire du voyageur sans bagages qu'une certaine vision de la créativité conduit à privilégier.

Comme on l'a vu, les savoirs mathématiques ne sont pas marginalisés dans cette conception, au contraire, on vise à faire vivre aux étudiants l'expérience de leur nécessité. Si elle constitue un but à part entière, la résolution de problèmes est aussi vue comme favorisant une meilleure compréhension des concepts et théorèmes enseignés :

> "mathematical problem solving is conceived as a way of thinking in which problem solvers or, in this case, students develop and exhibit habits, values, resources strategies, and a disposition consistent with mathematical practice in order to comprehend mathematical ideas and concepts, and to explore and solve mathematical tasks or situations." (Santos-Trigo, 2007, p. 534)

Mais, comme les citations précédentes le montrent, les ressources considérées débordent largement le strict cadre du savoir théorique. Le mathématicien n'est donc pas seulement un expert du savoir théorique, capable en toute circonstance d'en inventer, avec un certain génie, l'usage efficace. Il est aussi un artisan riche d'expériences diverses dont il garde une bonne mémoire, ayant développé un bagage pratique dans lequel il puise aussi pour affronter l'inédit. Les connaissances ici en jeu ont donc à leur principe ce que j'ai appelé *un rapport stratégique aux situations* (Castela 2008b), centré sur la mise en relation des problèmes considérés comme dotés d'une certaine généricité, *a priori* non intégralement inédits, et dans tous les cas, porteurs d'enseignements pour l'avenir. Un tel rapport encourage le développement d'un capital cognitif à partir des expériences. Il est une condition *sine qua non* de la construction de savoirs personnels et de l'appropriation de savoirs sociaux par un individu. Pour la conception examinée ici, le savoir en jeu inclut une composante pratique associée à ce qui dans le générique des problèmes n'est pas pris en compte par le savoir théorique.

Il doit paraître évident, à partir de ce que j'ai écrit dans l'introduction, que la conception du module de géométrie proposée aux étudiants préparant le CAPES se rattache totalement à cette troisième conception.

4. *Conceptual development* plutôt que *Problem Solving*, un nouveau courant dans le monde anglo-saxon

La première et la dernière conceptions du *Problem Solving* analysées dans ce qui précède sont aux antipodes d'un axe sur lequel différentes positions intermédiaires peuvent être occupées. Elles se distinguent fondamentalement par la valeur attribuée aux expériences antérieures et aux savoirs qu'elles ont permis de construire. Dans un cas, ce bagage, individuel et social, est reconnu comme le substrat qui nourrit l'invention en situation inédite. Dans l'autre, c'est une sorte de créativité totale qui est valorisée et travaillée. Le monde auquel il faut préparer les élèves étant vu comme formé de situations essentiellement différentes les unes des autres, c'est leur ingéniosité dans l'action qu'il convient de développer. Bien que se présentant sous l'étendard de la modernité, de l'adaptation à l'évolution des formes contemporaines du travail, ce point de vue n'est pas neuf. Ainsi B. Lahire (2000) rappelle sa présence au XIX^{e} siècle dans les débats autour de l'enseignement de la rhétorique :

> "Depuis très longtemps, une certaine critique de l'exercice et de la transmission de techniques intellectuelles est fondée sur l'idée selon laquelle il ne saurait exister de génie laborieux, c'est-à-dire d'intelligence constituée dans l'entraînement répété et le maniement continu de techniques sur des corpus de savoirs spécifiques.

> […] En fait, la critique de l'écrivain sans génie que va entamer contre la rhétorique le romantisme est une critique conservatrice d'écrivains qui regardent avec mépris ceux qui s'essaient à ces techniques. "Rhéteurs embarrassés dans votre toge neuve…' écrivait Victor Hugo en fustigeant les "parvenus" ou les "nouveaux riches" en matière de capital littéraire." p.176-177

La mise en avant de l'inventivité dans le système des valeurs n'est donc pas du tout nouvelle. J'ai tendance à y voir l'influence de conceptions de l'essence humaine qui privilégient l'individuel par rapport au social et ce, aujourd'hui, au niveau d'une tendance lourde des sociétés industrialisées. Toutefois il me semble intéressant de terminer ce parcours au sein d'un continent de l'éducation mathématique essentiellement influencé par une approche anglo-saxonne, en y repérant une évolution qui introduit une certaine contestation du point de vue de la résolution de problèmes sans lendemain et ce depuis une analyse des besoins les plus actuels des mondes professionnels. Je m'appuie ici sur un article de B. Sriraman et R.Lesh publié dans la revue *ZDM* en 2006. Les auteurs se situent dans le courant de recherche *Models and Modeling* :

> "M&M research investigates the nature of understanding and abilities that are needed in order for students to be able to use what they have (presumably) learned in the classroom in "real life" situations beyond school. M&M perspectives evolved out of research on concept development more than research on problem solving…" (p. 249)

A lire cet article, on est frappé par l'idée omniprésente d'accélération des changements qui marquent les situations professionnelles qu'évoquent les auteurs : les problèmes à résoudre évoluent continuellement, les outils techniques et cognitifs à disposition également. Les groupes multidisciplinaires qui se constituent pour traiter les problèmes rencontrés doivent donc savoir apprendre à partir des ressources existantes mais aussi à partir de la reproduction de plusieurs cycles élaboration-expérimentation-révision/rejet. En effet, à l'encontre de ce que l'on pourrait penser de prime abord, le caractère changeant des situations ne les isole pas en une succession discrète de problèmes isolés, il appelle au contraire à la recherche d'outils de traitement plus génériques, capables de supporter les variations. Ce sont de nouveaux types de produits qui sont attendus des équipes :

> "That is, the development cycles often involve a great deal more than simply progressing from premathematized givens to goals when the path is not obvious. Instead, the heart of the problem often consists of conceptualizing givens and goals in productive ways." (*ibidem*, p. 252)

Dans ces conditions, les recruteurs cherchent des personnes manifestant notamment des capacités à structurer les expériences successives ("*imposing structure on experience*") et à produire des outils conceptuels qui puissent être partagés et réutilisés. Ces dimensions sont présentes au sein de l'activité des mathématiciens, il ne m'a pas semblé, à la lecture des articles que j'ai lus pour préparer ce texte, que les auteurs se réclamant du *Problem Solving* les mettent en avant comme enjeu de formation des étudiants. Mais, on aboutit à une vision très différente des deux premières conceptions que j'ai décrites dès lors que l'on considère que les situations de résolution concernent le traitement de familles de problèmes, dont la variabilité doit être explorée par les élèves eux-mêmes au moyen d'outils susceptibles de prendre en charge la généricité. Le "New Thinking", ce que je traduirais par "Penser du Nouveau", que U. d'Ambrosio (2007, p.517) appelle de ses vœux peut alors être interprété comme un appel à une créativité, non plus tactique, mais stratégique. L'enjeu n'est plus de ruser pour survivre sur les ruines mais de recréer des conditions qui fassent la vie facile. En terme d'éducation, l'objectif est très ambitieux : il ne s'agit plus de former ni des bricoleurs modestement outillés mais ingénieux, ni des utilisateurs plus ou moins inventifs des savoirs partagés, mais des producteurs de savoirs. Cette perspective est séduisante, elle rejoint comme nous allons le voir plusieurs courants de la didactique française. Mais les travaux réalisés, y compris les plus anciens (TSD, "méta"), n'ont pas donné lieu à des généralisations réussies dans l'enseignement ordinaire, ce qui m'amène à une certaine circonspection vis-à-vis de la viabilité d'une telle ambition dont je me demande par ailleurs si elle ne procède pas d'un point de vue élitiste sur le travail.

III. La résolution de problèmes dans la didactique française

Au sein de la recherche française en didactique des mathématiques, les deux premières conceptions de la résolution de problèmes, telles que décrites dans les sections II.1 et II.2, sont très peu représentées. Il n'existe pas de représentant de la première**.** Par contre, certains travaux peuvent être mis en relation avec la deuxième conception. Il s'agit d'abord de ceux qui ont été développés autour de D. Grenier et de C. Payan. Ils visent, pour reprendre le titre de l'intervention de D. Grenier au séminaire national de didactique en mars 2009, à "changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes" (2010). Des situations de recherche souvent issues des mathématiques discrètes, présupposant peu de savoirs mathématiques, ont pour but de développer des capacités à "expérimenter, argumenter, conjecturer, modéliser, définir, prouver" et ce à différents niveaux de la scolarité. On voit à la lecture des objectifs visés, que, notamment à travers des activités concernant l'élaboration de définitions, ces travaux cherchent à engager les élèves dans des pratiques expertes relatives au développement conceptuel.
Les travaux du groupe CESAME (T. Assude, J-P. Drouhard, M. Maurel, Y. Paquelier et C. Sackur) s'intéressent quant à eux à la construction par les élèves de connaissances d'ordre relativement général sur l'activité et la nature mathématique. Ils distinguent trois ordres de connaissances épistémiques (Sackur & Al. 2005). Les connaissances d'ordre II sont les règles du jeu mathématique : elles sont ce qui fait que les parties du discours mathématique fonctionnent bien comme elles sont censées fonctionner, elles portent sur la légitimité de l'usage des connaissances d'ordre I (proprement mathématiques). Les connaissances d'ordre III, souvent implicites, sont ce qui permet à un individu de dire qu'une activité est mathématique ou non.
Dans l'enseignement français existent d'autres expérimentations qui confrontent les élèves à des problèmes sans chercher spécifiquement à ce qu'y soient impliqués les contenus enseignés, mais celles-ci relèvent plutôt de l'ordre des recherches-actions. Elles sont impulsées par les IREM (problèmes ouverts, narration de recherche), l'INRP[12] et par des associations parallèles au système scolaire *stricto sensu* comme Math.en.Jeans ou Animath. Elles sont très peu prises comme objets d'étude par la recherche au sens universitaire du terme. Pourtant la résolution de problèmes, en particulier de problèmes non routiniers, est partout présente dans la recherche didactique française. Mais elle l'est pour l'essentiel associée à, finalisée par l'enseignement et l'appropriation de savoirs mathématiques déterminés.

1. Résoudre des problèmes pour s'approprier le savoir mathématique

L'importance accordée à la résolution de problèmes est d'abord liée à une réflexion épistémologique. Concepts et théorèmes mathématiques sont considérés comme indissociablement objets et outils :

> "Un concept scientifique, aussi simple soit-il en apparence, n'est jamais enfermé dans une définition, fût-elle axiomatique, mais rassemble de manière organique toutes ses formes de fonctionnement, scientifiques et idéologiques". (Ovaert 1979[13])

[12] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques; INRP : Institut National de Recherche Pédagogique. Math.en.Jeans (www.mathenjeans.free.fr) est un dispositif qui met des classes volontaires en contact avec des chercheurs mathématiciens ; ceux-ci proposent aux élèves des problèmes ouverts de recherche. Animath (www.animath.fr) vise à promouvoir l'activité mathématique par des clubs, ateliers, compétitions …
[13] Ces quelques lignes sont extraites du bulletin 317 de l'APMEP (Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public) qui rendait compte des travaux du colloque « Formation mathématique des professeurs de lycée » (organisé par la SCFCIEM : Sous-Commission Française de la Commission Internationale

Dans le contexte de la réaction à la réforme des Mathématiques Modernes d'une part, d'une approche constructiviste de l'apprentissage d'autre part, la didactique se construit en France dès ses débuts contre une approche monumentaliste[14] des œuvres, oublieuse des questions qui ont engendré les savoirs, dont la dénonciation se rencontre à la fin des années 70 dans de nombreux textes noosphériens. Ainsi, dans un article intitulé "Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse" (bulletin InterIREM, Décembre 1981), J-L. Ovaert et D. Lazet critiquent sévèrement leur propre enseignement :

> "Enseignant les mathématiques, nous avons bien des raisons pour faire aujourd'hui notre autocritique […] Les défauts majeurs de la situation actuelle nous paraissent être : l'introduction des notions de base sans problématique sous-jacente […], l'emploi dès l'abord d'un langage trop souvent formalisé, […] un discours du maître, bien au point, présentant les mathématiques comme un monde clos que, tel un objet d'art, on propose à l'admiration béate des élèves, […] une construction linéaire des concepts […] Les applications intéressantes arrivent trop tard, voire jamais, et les notions ne sont pas perçues dès l'abord comme étant efficaces pour la résolution de problèmes."

Les travaux de G. Brousseau, dès leurs premiers développements au cours des années 70, dans le cadre de ce qui est aujourd'hui constitué d'une double théorie, théorie des Situations Mathématiques (à usage didactique) et théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998, Salin 2002), ceux de R. Douady (1987) sur les Jeux de cadres et la Dialectique Outil-Objet (DOO) considèrent la résolution de problèmes comme une dimension intrinsèque d'un processus d'enseignement de savoirs mathématiques visant à leur restituer une véritable authenticité épistémologique. Intégrés dans la notion de Situation a-didactique, les problèmes sont aussi dans la TSD au fondement d'un processus d'apprentissage abordé selon une perspective Piagétienne (c'est aussi le cas dans les travaux inspirés par la DOO) :

> "La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève des adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des "problèmes" qu'il lui propose." (Brousseau 1986, p.45)

Confrontés dans un contexte conçu pour permettre un travail autonome, à des problèmes qui sont bien non routiniers puisque les savoirs qui permettent de les traiter de manière optimale n'ont pas encore été enseignés, les élèves construisent de nouvelles connaissances dont une partie peut être mise en relation avec les savoirs mathématiques à enseigner. C'est un travail d'ordre mathématique et épistémologique qui permet de dégager ce qui est nommé Situation Fondamentale associée à un savoir ou un ensemble de savoirs, c'est-à-dire

> " l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant." (Brousseau 1986, p. 109)

Il est crucial de comprendre que la mise en scène didactique d'une Situation Fondamentale ne se réduit jamais à une unique confrontation à un problème isolé. Dans les situations d'action, l'enjeu est de chercher des stratégies gagnantes pour des classes de problèmes, connaissances parfois implicites dont les situations de formulation provoquent l'explicitation et le partage dans la classe, les situations de validation l'accès au statut d'outil de preuve. De même, dans la Dialectique Outil-Objet, le passage de l'invention d'un outil pour la résolution d'un problème à sa décontextualisation en objet ne se conçoit pas sans l'existence d'une classe de problèmes proches, source pour les mathématiciens d'un domaine d'expériences à partir duquel une thématisation devient possible (Piaget et Garcia 1983, p.124). La résolution de problèmes est donc bien présente sous la forme du traitement de familles de problèmes évoquée dans II.4. Toutefois, on ne peut pas prétendre qu'il soit fait dévolution aux élèves du processus de développement conceptuel ; c'est le professeur qui organise le parcours d'étude et rend

---

sur l'Enseignement des mathématiques).). J-L. Ovaert, membre influent et actif de la noosphère, notamment pendant la période de réaction à la Réforme des Mathématiques Modernes, y présentait ses réflexions sur les thèmes de la commission : « Quelle philosophie et quelle vision des mathématiques transmet-on aux futurs enseignants ? »

[14] Cette expression est empruntée à Y.Chevallard (par ex, 2007, p. 726)

possible une conclusion en termes de savoirs, décontextualisation dans laquelle il est en général fortement impliqué. L'enjeu est l'apprentissage de savoirs mathématiques, pas une formation à leur production. Je rappelle que les recherches réalisées concernent pour l'essentiel le primaire et le début du secondaire.

L'existence de familles de problèmes dont la solution utilise en tant qu'outil le concept ou le théorème dont l'enseignement est visé est donc primordiale, en tant que moyen de l'apprentissage. Par contre, à la fin des années 80 et pendant les années 90, si des phases de réinvestissement sont prévues dans les travaux de R. Douady autour de la DOO, le travail des techniques issues du savoir mathématique est négligé dans les recherches inspirées par la TSD. Les ingénieries didactiques développées à cette époque, au niveau du primaire et du collège, privilégient une vision relativement héroïque, spectaculaire, de la résolution de problèmes dans le cadre des situations a-didactiques. Certes, l'enchaînement des situations a-didactiques d'action, de formulation et de validation assure une certaine stabilisation des connaissances construites par les élèves. Mais ce n'est pas avant la thèse de F. Genestoux en 2000 qu'est théoriquement pris en compte, avec la notion d'assortiment didactique, le besoin de situations didactiques plus ordinaires permettant un certain entraînement des élèves à propos des connaissances ébauchées grâce aux moments forts mis en avant par la TSD. Par ailleurs, Y. Chevallard n'introduit qu'en 1995, dans son cours à la VIII[e] école d'été de didactique des mathématiques (Chevallard 1997), la notion d'organisation praxéologique qui met en avant les idées de types de problèmes et de techniques et prend en compte la nécessité d'organiser didactiquement le travail de ces techniques. Ce point est développé un peu plus tard avec la théorie des moments de l'étude d'une organisation praxéologique (Chevallard 1999). Dans cet article, on peut lire :

> "On notera que, contre une certaine vision héroïque de l'activité mathématique, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles, c'est bien *l'élaboration de techniques* qui est au cœur de l'activité mathématique. Au fantasme moderne de l'élève héros triomphant sans coup férir de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépassable de l'élève-artisan laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment ses techniques mathématiques. En réalité, l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème *particulier*, spécimen du type étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un *moyen* pour qu'une telle technique de résolution se constitue". (Chevallard 1999, p. 252)

2. Le courant "méta"

Dans ce contexte, un groupe de chercheurs travaillant au niveau de l'enseignement post-obligatoire, classe Terminale du secondaire et premières années universitaires, réalisent pendant une décennie, de la fin des années 80 à la fin des années 90, des travaux qu'ils caractérisent eux-mêmes comme jouant explicitement d'un levier "méta". Dans la synthèse qu'elles proposent en 1996, A. Robert et J. Robinet mettent en avant un trait commun des enseignements expérimentés qui fonde l'emploi du préfixe méta :

> "ce type d'enseignement est toujours indirect, dans la mesure où il vise, en dernière analyse, plus que ce qu'il dit, c'est-à-dire qu'il vise l'apprentissage des connaissances mathématiques SUR lesquelles il ne fait que parler." (Robert et Robinet 1996, p. 168)

Cette affirmation ne serait qu'une tautologie (tout discours professoral, fût-il l'énoncé de savoirs mathématiques à enseigner, n'est qu'un discours sur les connaissances que les élèves doivent construire) si elle n'avait été précédée d'une description des contenus de type "méta" dont l'explicitation par l'enseignant est envisagée :

> "En fait, il y a plusieurs formes ou plusieurs niveaux d'information ou de connaissances sur les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, que nous devons préciser. On peut citer :
> - des informations constitutives de la connaissance mathématique (méthodes, structures, organisation),

- des informations constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, accès d'un individu donné ou plus général (jeux de cadres, rôle des questionnements, des exemples et contre-exemples, et aussi rôle de la réflexion épistémologique pour apprendre)
- des informations sur les modes de productions et le fonctionnement mathématique (contrôle, guidage)." (*ibidem*, p. 157)

Sont donc susceptibles d'apparaître dans la classe, explicitées par l'enseignant, donc munies d'une certaine reconnaissance, toutes les catégories de connaissances que nous avons envisagées au fil de la partie II comme impliquées dans la résolution de problèmes. La citation de la page 168 précise donc que ces informations sont données dans le but principal de favoriser l'apprentissage de ce qu'il faut alors interpréter comme le savoir mathématique à enseigner. En cela, ce courant est totalement en accord avec la tendance générale de la didactique française décrite précédemment. Mais pour atteindre cet objectif, il est entrepris de faire aussi évoluer la métacognition de chaque élève, c'est-à-dire sa façon d'apprendre et de faire des mathématiques :

> "L'origine de ce paradoxe [faire apparemment plus difficile pour faire réussir plus d'élèves] est à chercher dans l'hypothèse suivante sur la construction des connaissances : les représentations des élèves sur la manière d'apprendre des mathématiques peuvent peser négativement sur cet apprentissage, et il peut être nécessaire de faire faire aux élèves un détour qui contribue à enrichir ces représentations, rendant leurs pratiques plus compatibles avec l'apprentissage cherché. Les chercheurs font aussi l'hypothèse que ce détour doit se faire au sein d'activités mathématiques, qu'il n'est donc pas question de simplifier, mais ils supposent que le recours au niveau "méta" peut favoriser la transmission." (*ibidem*, p.169)

Les interventions du professeur au niveau "méta", c'est-à-dire présentant explicitement des "réflexions sur" visent d'une part à favoriser l'apprentissage des savoirs mathématiques et d'autre part à développer chez les élèves des habitudes réflexives dont on suppose qu'elles lui permettront de mieux apprendre et de mieux faire des mathématiques parce qu'ils pourront produire de leur propre chef des connaissances de niveau méta analogues à celles dont le professeur leur aura montré l'existence. Les expériences de type Enseignement de Méthodes présentées dans la suite correspondent exactement à cette feuille de route, qui a beaucoup à voir avec le travail d'A. Schoenfeld (voir II.3). Mais la posture réflexive n'est pas seulement envisagée au niveau de l'individu et de la régulation de ses actions, elle est également considérée comme une dimension essentielle du développement des mathématiques. Résoudre des problèmes n'est pas le tout de l'activité des mathématiciens, les recherches développées au niveau de l'enseignement supérieur pour engager les étudiants dans ces autres pratiques expertes ne sont pas sans évoquer le courant du *Conceptual Development* et la vision du *Problem Solving* envisagée dans la section II.4.

L'enseignement de méthodes

Je fais ici référence plus précisément à trois expérimentations : un enseignement de méthodes en géométrie au niveau de la Terminale C (Robert & Tenaud 1988), un enseignement d'algèbre et géométrie de niveau licence en formation continue d'enseignants (Robert 1991) et un enseignement d'algèbre linéaire en première année universitaire (Rogalski 1997).
Comme chez A. Schoenfeld, la figure de référence est l'expert en situation de résolution de problèmes, considéré comme s'appuyant sur un bagage cognitif important et organisé ce qui en facilite la mobilisation autonome. Ce bagage inclut des méthodes, spécifiques (ex : reformuler un problème de concours de droites en une question d'alignement) et plus générales (ex : importance des changements de cadre), des situations de référence (point qui n'a pas encore été mis en évidence dans ce texte), des questionnements de plusieurs niveaux qui lui permettent de se repérer dans un problème nouveau, de solliciter les ressources *a priori* les mieux adaptées, voire d'en changer rapidement. (Robert 1998, pp. 144-145).
Partant de l'hypothèse selon laquelle le fait d'utiliser les savoirs mathématiques enseignés dans des problèmes difficiles, notamment parce que ne contenant pas d'indications de méthodes,

permet d'améliorer l'apprentissage des élèves, en favorisant entre autres une réorganisation des connaissances, il est fait le choix de mettre à disposition des élèves par des interventions orales de l'enseignant certains éléments du bagage de l'expert, en postulant que ces apports vont rendre accessibles à plus d'élèves des problèmes plus difficiles. Ainsi, pour l'expérience menée en Terminale C, ont été mises à disposition des élèves une classification grossière des types de problèmes de géométrie, une liste des outils disponibles (les élèves étant amenés à établir pour un certain nombre de types de problèmes des listes d'outils adaptés), une liste de configurations de base. Dans le cadre de l'enseignement d'algèbre linéaire, sont donnés des "points de repère concernant : les types de problèmes ; les questions à se poser ; les différentes méthodes, souvent liées à différents points de vue, utilisables pour aborder des problèmes" (Rogalski. 1997, p. 176). Par exemple :

> "Un modèle central de problématique *: l'équation T(x) = y*." (*ibidem*, p.171). [De nombreux problèmes peuvent être mis sous cette forme et une question importante est de se demander si l'application T est ou non linéaire, ce qui aura des conséquences décisives quant aux classes de méthodes utilisables]
>
> *"Type de problème* : déterminer noyau et image d'une application linéaire T
>
> *Questions à se poser* : comment est déterminée l'application ? peut-on choisir des bases dans lesquelles sa matrice sera simple ? le contexte nécessite-t-il de déterminer KerT et/ou ImT par des équations ou au moyen de vecteurs les engendrant ?
>
> *Méthodes et points de vue :* il y a deux points de vue, donnant chacun une méthode de résolution du problème : (a*) la méthode paramétrique ou vectorielle* […], (b) *la méthode des équations : "Gauss sur les lignes* […]". (*ibidem*, p. 177)

Les auteurs insistent sur le fait que cet enseignement de méthodes doit se présenter comme tel, avec l'objectif que les étudiants soient ainsi avertis du caractère potentiellement utile des savoirs qu'on leur présente. Mais l'enseignant doit leur proposer des problèmes dans lesquels cette utilité pourra être mise à l'épreuve. Il s'agit donc par rapport à la norme scolaire, voire universitaire, *de problèmes non standard*, qui se rapprochent des situations rencontrées par les mathématiciens (Robert 1998, p.169). Dans le cas de l'enseignement de licence, le partiel lui-même est de ce type :

> "les tâches peuvent être plus vagues et plus générales […] Le découpage en petites étapes peut alors être à la charge des étudiants. De même on peut ne pas indiquer les outils à utiliser, et il peut du même coup y avoir à faire des choix de méthodes, point de vue, stratégies.
> Il peut aussi être nécessaire de se livrer à des conjectures, pas forcément immédiates, il peut y avoir lieu de faire des essais (graphiques, numériques …) pour se donner des idées." (Robert 1992, p.198)

Dans le cas de l'expérimentation en Terminale C, des séances en petits groupes sont consacrées tout au long de l'année à la recherche de problèmes pouvant être résolus en utilisant des méthodes très différentes et qui sont alors proposés sans indication, en particulier sans indication de méthode. Notons que comme souvent en géométrie les méthodes considérées ne sont pas des algorithmes, leur mise en œuvre nécessite en général des adaptations et les enregistrements réalisés montrent qu'il y a "souvent élaboration de stratégies complètement nouvelles par amalgame de propositions individuelles plus partielles" (Robert & Tenaud 1988, p. 52). Les différentes solutions trouvées par les élèves sont exposées explicitement à la classe pendant une séance de correction.

Le *travail en groupes* est une constante des trois expérimentations évoquées ici. La présence d'interactions d'ordre méthodologique entre les élèves est vue comme de nature à favoriser l'appropriation des savoirs apportés par les discours du professeur. Des phases collectives de mise en commun, donnant éventuellement lieu à institutionnalisation de méthodes, peuvent également y contribuer. Dans une perspective vygotskienne, on voit le rôle important joué par la médiation langagière : par ses interventions, le professeur met à disposition des élèves tout à la fois des savoirs qu'ils vont pouvoir intérioriser en connaissances ET des *mots pour les*

dire qu'ils pourront utiliser lors des phases de recherche en groupes. On retrouve ici des lignes de force des expérimentations réalisées par A. Schoenfeld[15].
Le travail proposé vise aussi, comme nous l'avons envisagé précédemment, à engager les élèves dans un processus réflexif qui les conduirait à dégager eux-mêmes des méthodes. Cet enjeu est particulièrement mis en évidence par A. Robert pour l'enseignement de licence qui s'adresse à un public dont elle dit :

> "Il s'agit d'abord d'adultes, ayant des possibilités de réflexion sur leurs activités.
> Ils peuvent donc *a priori* profiter de connaissances sur les mathématiques, d'un enseignement de méthodes par exemple. Ils peuvent aussi produire eux-mêmes des réflexions sur les connaissances enseignées (synthèse, méthodes, etc.) Ils peuvent même entendre et bénéficier d'un discours sur leur propre apprentissage." (*ibidem*, p.187)

Donnant le détail des explicitations d'ordre "méta" prises en charge par le professeur, elle précise

> "L'idée est que la prise en compte d'éléments métamathématiques doit aider les étudiants et doit petit à petit passer à leur initiative." (*ibidem*, p. 196)

Il arrive que des questions concernant des méthodes soient intégrées aux problèmes posés :

> " Quelles sont les méthodes que vous connaissez pour démontrer qu'une application affine de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ (affine euclidien) est une projection orthogonale ? On pourra discuter suivant la façon dont l'application est donnée." (*ibidem*, p. 220)

A ce niveau individuel, le fait de posséder un langage approprié peut aider à la construction de savoirs personnels en rendant possible une certaine décontextualisation.

Je voudrais insister sur une dimension qui différencie nettement cette partie des travaux "méta" de ceux auxquels à la même époque donne lieu la TSD, à savoir l'extension du champ des problèmes dans lesquels on attend que les élèves utilisent les savoirs enseignés. Comme je l'ai fait remarquer à la fin de la section précédente, les ingénieries réalisées dans le cadre de la TSD, au niveau de l'école primaire et du collège, s'appuient sur les problèmes pour faire émerger le savoir théorique et les méthodes qui en découlent directement, mais abandonne à l'ordinaire didactique ce que l'on peut appeler le travail des techniques, négligé comme enjeu ou pour le moins considéré comme non problématique. Or même si les chercheurs du courant "méta" insistent surtout sur le fait que la confrontation à des problèmes non standard vise à faire mieux apprendre le savoir théorique, il n'en reste pas moins que l'enseignement explicite de méthodes est aussi un moyen de former à la résolution de problèmes plus difficiles, (un peu) plus proches des problèmes experts. Même si cette orientation n'est pas clairement assumée, il y a une certaine ouverture vers la perspective d'une formation à l'utilisation des mathématiques (au sein de problèmes mathématiques en l'occurrence) qui peut être mise en relation avec les niveaux scolaires où sont réalisés les travaux évoqués.

Prise en compte de l'activité des mathématiciens au-delà de la résolution de problèmes

Si l'on excepte la recherche d'I. Tenaud et A. Robert sur l'enseignement de la géométrie en Terminale C, les ingénieries impliquant le levier "méta" et réalisées dans la période 1985-2000 ont à voir avec l'algèbre linéaire et dans ce cadre, elles ne limitent pas les interventions "méta" au seul niveau des méthodes pour la résolution de problèmes. La plupart des travaux menés à bien sont présentés dans le livre "*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question"* (Dorier & Al. 1997). A la suite des recherches d'A. Robert et J. Robinet sur la convergence, ils confèrent un rôle central à ce qu'ils considèrent comme une caractéristique des principaux concepts intervenant en algèbre linéaire, à savoir le fait qu'ils sont formalisateurs, unificateurs et généralisateurs. Ces concepts, dont la genèse historique a souvent été longue et sinueuse,

[15] Les recherches développées en Italie autour de la Théorie de la Médiation Sémiotique se situent dans cette même perspective vygotskienne mais elles sont postérieures aux travaux que j'analyse ici (Bartolini Bussi & Mariotti 2007)

n'ont pas été produits comme formes décontextualisées d'outils introduits pour résoudre des problèmes ayant une certaine proximité. Ils se révèlent certes a posteriori comme des outils performants : ils permettent de traiter plus facilement une diversité de types de problèmes anciens, résolus jusque là par des méthodes *ad hoc* ; ils apportent des solutions à des versions généralisées de ces problèmes (par exemple, la formule de Gregory produite par l'algèbre linéaire permet de résoudre des questions d'interpolation linéaire pour un nombre très élevé de contraintes – Dorier, Robert, Robinet, Rogalski 1997, pp. 197-204) ; ils apportent des solutions à de nouveaux problèmes. Mais ce n'est pas cette problématique qui leur a donné naissance. Ils résultent de besoins qui conduisent les mathématiciens à réfléchir sur les mathématiques déjà produites.

Besoin d'*expliquer* : ainsi Dorier 1997 montre dans le livre déjà cité (Première partie-Ch.1) comment, après qu'Euler eut entrevu la complémentarité entre le nombre de relations de dépendance dite inclusive des équations et le nombre d'indéterminations des inconnues, l'introduction par Frobenius de la notion de dépendance et d'indépendance linéaires simultanément pour les n-uplets et pour les équations lui permet d'élucider la concordance observée par Euler, un travail dans lequel s'élaborent les premiers concepts linéaires et en particulier celui de rang.

Besoin de *formaliser* des notions pas ou mal définies, dont le caractère approximatif conduit à des démonstrations contestées, invalidées par des contre-exemples : l'analyse de Lakatos (traduit en 1984) autour de la formule d'Euler pour les polyèdres est bien connue.

Besoin d'*unifier*, d'*organiser* : c'est un tel souci qui anime Peano dont "l'approche axiomatique apparaît comme une volonté de donner de meilleurs fondements à l'ensemble des résultats sur l'algèbre linéaire en dimension finie" (Dorier 1997, p.75). Dans un texte intitulé "Les processus de formalisation en mathématiques, problèmes didactiques", M.Rogalski repère un tel processus d'unification formelle pendant toute la deuxième moitié du XIXè siècle et le XXe siècle :

> "Il s'agit souvent d'une démarche réflexive, consciente, et qui demande, de la part de ses auteurs, mais aussi des contemporains (et cela n'a pas toujours été de soi) *une "foi" en la puissance créatrice de la pensée unificatrice*.
> C'est typiquement une démarche de nature algébrique (même si elle a lieu aussi en analyse !), où l'analogie entre les problèmes, les démarches de résolution, les calculs, joue un grand rôle. La réflexion de nature "méta" est intrinsèquement liée à cette formalisation (G.Mokobodzski dit ainsi qu'un calcul qui a marché n'est vraiment compris que lorsqu'on lui ajoute "l'idée du calcul"). C'est l'aspect de la méthode axiomatique qui est devenu le plus courant aujourd'hui." p. 5

Une telle analyse montre le caractère très réducteur, en tout cas du point de vue d'un apprentissage authentique des mathématiques, d'une centration sur la résolution de problèmes, surtout s'ils sont isolés. A partir de cette conception, les travaux du courant "méta" sur l'enseignement de l'algèbre linéaire prennent le parti de faire dévolution aux étudiants de certaines questions de nature réflexive "SUR ce qu'ils manipulent, sur la nature des êtres mathématiques rencontrés, leur raison d'être" (Robert et Robinet 1996, p. 165). C'est ce qui me conduit à les mettre en relation avec le courant du "*Conceptual Development*", même si l'objectif affiché par celui-ci n'est pas la formation aux pratiques réflexives des mathématiciens.

Bilan, évolutions

Le bilan dressé par (Robert et Robinet 1996) est très réservé. Les expérimentations réalisées sont toujours de longue durée, "ne serait-ce que pour établir les changements d'habitudes qu'elles impliquent chez les élèves" (*ibidem,* p. 169). C'est le cas pour l'enseignement de méthodes en Terminale C, pourtant certainement l'expérience la plus ciblée de toutes : il faut du temps pour faire entrer, à ce niveau de la scolarité, les élèves dans la pratique des recherches longues, en petits groupes, de problèmes qui supposent de leur part des initiatives importantes quant au choix et à l'adaptation des méthodes. C'est a fortiori le cas pour les enseignements d'algèbre linéaire où les changements de contrat sont multiples, du fait de la diversité des activités réflexives dont on vise la dévolution aux étudiants. Ainsi, rendant compte d'un travail autour de la formule d'interpolation de Gregory, Dorier, Robert, Robinet & Rogalski 1997 (p. 199) note :

> "la dimension méta sera assumée grâce à ce contrat explicitement, comme une partie officielle de l'activité, sur le même plan institutionnel que l'aspect mathématique […] les étudiants auront à résoudre des questions mathématiques, mais aussi à donner une opinion explicite jugeant la validité de différentes méthodes pour résoudre des problèmes identiques dans des contextes différents."

Dans la mesure où le jugement de validité évoqué ici est plus exactement un jugement sur l'efficacité ou l'ergonomie des méthodes, il apparaît dans cette citation une dimension centrale dans la réflexion que j'ai développée sur les savoirs pratiques : ils ne sont pas régis par le même régime de validation que les savoirs mathématiques académiques, leur présence dans la classe suppose donc l'installation d'un contrat spécifique, autrement dit un dédoublement du contrat didactique relatif aux savoirs qui vivent dans la classe. On verra plus loin (V) que c'est un point dont G. Brousseau met en doute la viabilité.

De longue durée, ces expérimentations sont également complexes en ce qu'elles engagent toujours plusieurs changements, ne serait-ce que le travail en groupes, les tâches non standard et les interventions méta explicites. Il en résulte qu'en tant qu'objets de recherche, ces ingénieries sont très difficiles à évaluer (ce qui ne signifie pas que du point de vue des enseignants impliqués le bilan soit aussi limité). Il est en particulier délicat de repérer les effets qui pourraient résulter de la prise en compte du méta. Des méthodologies spécifiques (par exemple, enregistrement et analyse des échanges pendant les séances de recherche en groupes pour la Terminale C) sont introduites mais tendant vers l'analyse clinique, elles peuvent être considérées comme des éléments de validation très relatifs.

On est donc en présence de réalisations effectives mais difficilement accessibles à une validation scientifique dans le cadre de la recherche académique. Or, il apparaît par ailleurs progressivement que la conception des scénarios d'enseignement, plus spécifiquement le choix et la régulation des interventions méta, sont plus délicats, demandent plus de préparation que ce qui avait pu être envisagé *a priori* :

> "Il y a donc là un travail de préparation à faire, non seulement pour mettre au point le contenu de ces commentaires, mais encore pour que l'enseignant ne s'embarque pas à perte dans des généralités qui n'éclairent que lui. Il faut au contraire qu'il tienne, au bon moment […] un discours qui vise juste." (*ibidem,* p. 212)

A un moment où pouvait être envisagée la diffusion dans des contextes plus ordinaires d'expérimentations jusque là réalisées par des enseignants très au fait de la didactique, sinon par les chercheurs eux-mêmes, le développement de la conscience de cette complexité, ajouté à l'obstacle de l'évaluation, se traduit par la mise sous le boisseau à la fin des années 90 des recherches de type ingénierie menées par le courant méta. Il s'agit là d'une évolution générale au sein de la communauté des didacticiens français qui, confrontés à la difficulté du transfert des enseignements expérimentaux réalisés jusque là, recentrent les recherches sur l'étude des pratiques ordinaires. Sous l'impulsion d'A. Robert, la prise en compte du méta s'est intégrée à des recherches sur l'analyse des discours de l'enseignant (voir le livre *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*, 2008). Au sein de ces travaux, la notion d'aide constructive me semble relayer, au niveau d'interventions ponctuelles, la prise en compte plus globale, plus massive, du méta dans les travaux présentés précédemment :

> " Les aides, dites "constructives", ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter […] Ces aides peuvent présenter une petite décontextualisation de ce que les élèves ont mis en œuvre, par exemple le cas générique correspondant, ou indiquer comment faire le type de tâches concerné, ou expliquer pourquoi on a fait ces choix." (Robert 2008, p.52)

3. Les Parcours d'Etude et de Recherche

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) s'est d'abord centralement préoccupée de l'écologie des phénomènes didactiques, c'est-à-dire de l'étude des contraintes et conditions qui déterminent les possibles et les impossibles des systèmes institutionnels d'enseignement. Mais au début des années 2000, une problématique clairement expérimentale est apparue, avec la notion d'AER (Activité d'Etude et de Recherche) d'abord, puis de PER (Parcours d'Etude et de Recherche) introduite en 2004 par Y.Chevallard et dont on trouve une présentation dans les Actes du Premier congrès de la TAD qui s'est déroulé en 2005 (Chevallard 2007). Dans les lignes qui suivent j'utilise le vocabulaire utilisé dans le cours donné par Y. Chevallard à l'école d'été de 2009.

Une organisation praxéologique constitue un enjeu pour un système didactique si ce système cherche à créer les conditions pour que certains sujets (les élèves) intègrent cette praxéologie à leur équipement praxéologique. Au fondement de la problématique des AER et PER, le principe suivant : c'est en menant l'étude de certaines questions Q, dites génératrices, que les sujets *x*, accompagnés par un aide à l'étude *y*, réaliseront l'apprentissage visé relatif à une praxéologie qui est en jeu dans la réponse aux questions traitées. AER et PER se distinguent fondamentalement par le niveau des organisations praxéologiques dont l'apprentissage est visé, ponctuelles et locales dans le premier cas, régionales et globales dans le second. On remarquera qu'il s'agit d'étudier des questions et non nécessairement de résoudre des problèmes. Si l'on veut ici parler de résolution de problèmes, ce ne peut être que dans la conception très élargie considérée en II.4. En particulier, les différentes questions réflexives envisagées par le courant méta sont envisageables. Dans tous les cas, les questions initiales sont très larges, elles se ramifient en nouvelles questions, qui apparaissent dans le processus de l'étude. Ce qui a pour effet que les PER sont en général sous-déterminés, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de prévoir complètement *a priori* quelles praxéologies seront finalement atteintes.

Il n'y a pas jusque là d'incompatibilité avec la TSD, notamment avec les développements les plus récents qui sont donnés de la notion de Situation Fondamentale (voir l'intervention de G. Brousseau à l'école d'été de 2005, accessible sur le Cédérom accompagnant les Actes et le cours d'A. Bessot à l'école d'été de 2009). En revanche, c'est au niveau du milieu de l'étude, c'est-à-dire des ressources mobilisées par les élèves *x* et l'aide *y* pour construire une réponse aux questions, que se produit une rupture, à mon sens radicale car elle délaisse l'approche piagétienne de l'apprentissage privilégiée dans les ingénieries développées par la TSD. En effet, le modèle dit Herbartien de l'étude, prévoit que seront recherchées par *x* et *y*, examinées et éventuellement prises en compte, des réponses aux questions Q, reconnues (estampillées) dans certaines institutions. A ceci s'ajoute si nécessaire l'étude d'autres œuvres, menées avec le niveau d'approfondissement qui apparaîtra utile pour répondre à Q. Il s'agit, dit Y. Chevallard, de passer du *paradigme de la visite des savoirs* au *paradigme du questionnement du monde* :

> "Un système didactique scolaire aura ainsi à rendre des comptes *sur les questions qu'on y aura étudiées* plutôt que sur les praxéologies que cette étude aura conduit à rencontrer."(version provisoire du cours p.29)

La figure *x* est très loin d'être celle d'un individu doté de ses seules ressources, *x* a accès à un environnement culturel très riche qu'il lui faut savoir trouver et critiquer. Toutefois, il y a un risque de glissement que l'enthousiasme présent autour du développement des dimensions nouvelles de cette approche pourrait encourager : on passerait de l'idée d'intégration d'une praxéologie (à l'équipement de l'élève) à celle de rencontre avec la praxéologie en question. Dans le premier cas, il y a une visée d'apprentissage qui s'exprime en référence à des praxéologies mathématiques, dans le second, il s'agirait plutôt d'apprendre à mener à bien l'enquête critique qui permet de répondre à la question qu'on se pose. Il me semble qu'alors on ne serait pas loin de la toute première conception du *Problem Solving*. Il est pour moi évident que cela ne peut pas être le point de vue de la TAD : le sujet qui mène l'étude ne saurait être une version connectée à Internet du voyageur sans bagage. Il faut poser la question des connaissances dont doit disposer *x* pour traiter les ressources culturelles auxquelles il a accès. C'est une analyse en terme de milieu au sens classique de la TSD. Elle réintroduit pour la partie de l'équipement praxéologique qui est à intégrer par *x* la thématique de l'enseignement/apprentissage, des moments de l'étude et du travail de la technique. Autrement dit, si le paradigme du questionnement du monde conduit à revisiter un paradigme de l'enseignement des savoirs, il ne le rend pas obsolète. Mais Y. Chevallard dit-il autre chose ?

> "ce que j'ai appelé le *paradigme de questionnement du monde* […] n'annule pas mais situe autrement, au double plan épistémologique et didactique, le *paradigme de la visite des savoirs" (*cours de l'école d'été, p. 40)

IV. Assumer explicitement le pari de la généricité pratique dans le cadre de la préparation au CAPES

Au sein du monde des travaux qui ont d'une façon ou d'une autre à voir avec la résolution de problèmes, mes recherches se situent dans une perspective que l'on pourra considérer comme peu enthousiasmante. Je me situe dans une perspective d'adaptation à ce qui transparaît des attentes institutionnelles dans les épreuves de concours : l'objectif est que les étudiants utilisent les savoirs géométriques enseignés dans des problèmes qui, s'ils requièrent plus que de simples applications directes, n'en sont pas moins essentiellement des tissages de types de questions classiques, pour lesquels il existe une culture de techniques connues qu'il faut mobiliser dans le temps limité des épreuves. Dans cette perspective, la distinction routinier/non routinier usuelle dans les textes du *Problem Solving* n'est pas suffisante pour analyser ce qui fait la difficulté des problèmes. J'aurai recours pour le faire aux outils introduits par A. Robert dès 1998, affinés par la suite (Robert & Rogalski 2002) et que j'ai repris à mon compte dans Castela 2008a en les considérant comme une grille d'analyse des tâches, alors que A. Robert les envisage à un niveau cognitif pour décrire l'activité (potentielle) des élèves. Dans l'article cité, je m'intéresse à l'enseignement secondaire (voir VII) mais, puisque j'en ai l'occasion, je vais utiliser la même approche pour éclairer le travail réalisé pour le CAPES, nettement antérieur puisqu'ayant donné lieu à des publications en 1997 et 2000.

1. Outils d'analyse des tâches mathématiques

Selon le point de vue qui est celui d'A. Schoenfeld et des "Enseignements de Méthodes" réalisés par le courant "méta", je postule que sont en jeu dans les problèmes de multiples types de tâches classiques en mathématiques, pour lesquelles existent un répertoire de façons de faire que l'on peut tenter d'utiliser, en les adaptant au contexte. C'est ce que j'ai appelé le *pari de la généricité pratique*. Dans cette perspective, j'utilise très clairement depuis le cours que j'ai donné en 2005 à l'école d'été de didactique (Castela 2008b) la notion d'organisation praxéologique pour décrire les savoirs et savoir-faire mathématiques :

> "La Théorie Anthropologique du Didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche t* d'un certain *type T, au moyen* d'une certaine *technique* τ, *justifiée* par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ. En bref, toute activité humaine *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter [T, τ, θ, Θ] et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*." (Chevallard 2002, p.3)

Ce modèle explicite le fait que le savoir théorique n'est pas le tout du savoir en jeu dans la résolution de problèmes. A travers la notion de type, il met en avant l'importance du repérage des relations entre tâches, en tant qu'organisateurs des ressources disponibles, particulièrement des façons de faire.

Dans le cadre de mon travail sur la résolution de problèmes, j'ai proposé des évolutions de ce modèle relatives à la composante technologique, je les présenterai un peu plus loin (VII). On verra que je serai conduite à renoncer à l'expression Organisation Mathématique (OM) généralement utilisée dans le cadre de la TAD pour désigner les organisations praxéologiques mathématiques. Mais en l'état, le modèle est suffisant pour différencier des questions qui font intervenir une praxéologie donnée en définissant des *niveaux d'intervention d'une OM dans une tâche* (Castela 2008a).
La notion de tâche associe dans le cas présent un énoncé d'exercice (ou de problème ou de question) et le contexte dans lequel cette tâche est prescrite : par exemple, on n'analyse pas de la même façon, un exercice qui suppose l'intervention d'un théorème si cet exercice est posé dans le chapitre qui enseigne ce théorème ou un an après sans révision.
Le premier axe d'analyse différencie deux degrés :

- l'OM intervient au niveau *"t-convoquée"* (convoquée par la tâche) lorsque l'énoncé et/ou le contexte contiennent des indices qui orientent directement le résolveur vers LA technique à utiliser ;
- l'OM intervient au niveau *"r-convoquée"* (convoquée par le résolveur) dans le cas contraire qui peut se produire si l'identification du type de tâches *T* est à la charge du résolveur ou (non exclusif) si celui-ci doit choisir la technique parmi plusieurs techniques connues pour *T*.

A. Robert formule cela différemment : dans le premier cas, il s'agit du niveau de mise en fonctionnement de la connaissance nommé "mobilisable", dans le second c'est le niveau "disponible". Des difficultés maintes fois constatées de différenciation des adjectifs mobilisable/disponible m'ont conduite à ce changement de vocabulaire, dont on peut aussi considérer qu'il est justifié par le passage du point de vue de l'activité de l'élève à celui de la tâche.

Le deuxième axe d'analyse prend en compte le fait que les techniques mathématiques en jeu doivent être adaptées au contexte particulier, ce qui amène à procéder à diverses formes d'adaptation. La liste des classes d'adaptation dégagée par les travaux utilisant ce type d'analyse s'est un peu allongée au fil des ans (7 types d'adaptation sont distinguées dans Robert 2008). Personnellement, bien que coïncidant totalement avec les analyses de tâches réalisées par A. Robert, je n'utilise pas cette catégorisation dans laquelle je me sens trop enfermée. Dans Castela 2008a, dans le contexte du secondaire, j'ai centré l'analyse sur le point suivant : la technique est-elle ou non utilisée en y impliquant des objets dont l'apprentissage est en cours ou récent ? Dans le cas du CAPES, on peut utiliser cette entrée en distinguant des OM de niveau universitaire et des OM de niveau lycée. Mais, au moins pour l'algèbre et la géométrie, cette approche laisserait échapper l'essentiel des difficultés, dans la mesure où le nombre de théorèmes de niveau universitaire en jeu est limité, et cette tendance des épreuves se renforce au fil des ans. Sans avoir mené d'étude systématique, j'avancerai que beaucoup de difficultés des étudiants sont liées au schéma suivant : une première OM intervient dans la question, au niveau "*t-convoquée"*, la mise en œuvre de la technique passe par l'introduction de tâches intermédiaires, dont il faut identifier le type et pour lesquelles il faut rechercher une technique connue (OM *r-convoquée*). Il est nécessaire de coordonner plusieurs OM (ce qui amène à mélanger les cadres et la nature des objets manipulés), d'introduire des étapes et des objets, d'utiliser des résultats antérieurs : on retrouve là trois des grands types distingués par A. Robert. La question du problème de 2009 citée dans l'introduction me permettra d'illustrer ce style d'analyse :

Montrer que

1. le plus petit convexe contenant une partie F du plan est l'intersection de tous les convexes contenant F,
2. que l'ensemble G des barycentres à coefficients positifs de familles finies de points de F est ce plus petit convexe.

Je m'intéresserai à la question 2. La question 1 ouvre une première piste : il s'agit de montrer que G est l'intersection de tous les convexes contenant F.
T : montrer l'égalité de deux ensembles
Plusieurs techniques connues : a. montrer deux inclusions, par exemple par implication directe et réciproque b. montrer directement l'égalité, par exemple par équivalence ; il y a d'autres techniques dans d'autres contextes.
C'est (a) qui est efficace et on rencontre un nouveau type : "Montrer qu'un ensemble est inclus dans une intersection", ce qui se fait en montrant que G est inclus dans tout convexe contenant F.
Impossible de s'en tenir à un point de vue ensembliste global, il faut changer de point de vue et passer à un travail sur les éléments de G. Ce qui suppose d'introduire une famille finie de points pondérés, à coefficients positifs.
A ce niveau, il faut reconnaître un type très général : "Etablir qu'une propriété qui fait intervenir un entier naturel n est vraie pour tout n". A ce type, devrait être associée la technique de démonstration par récurrence. Ceci est un exemple caractéristique du niveau OM *r-convoquée* puisque rien dans l'énoncé n'appelle cette OM (c'est l'étudiant qui doit introduire un entier *n* pour traduire l'idée de famille finie).
La mise en œuvre de la récurrence fait apparaître le type de tâches : "Montrer qu'un point est le barycentre d'une famille de deux points", dans un contexte où le point en question est le barycentre d'une famille de n points. La technique la plus efficace utilise le théorème d'associativité. On peut discuter sur le fait de juger que cette OM est ou non convoquée par la tâche en cours de résolution : le nombre de théorèmes relatifs aux barycentres n'est pas très élevé et le théorème d'associativité est un outil très utilisé dans le cadre de la préparation aux épreuves orales (prise en compte des éléments de contexte de formation). Mais, dans tous les cas, il faut l'utiliser dans un contexte littéral, après avoir enchaîné un certain nombre d'étapes intermédiaires.
La deuxième inclusion est délicate car elle résulte du fait que G est convexe et demande donc pour l'établir d'adopter cette fois un point de vue ensembliste. Par contre, la preuve de la convexité va de nouveau faire intervenir le théorème d'associativité, en l'utilisant dans le sens de la distributivité à condition d'avoir introduit deux familles de n et p points pondérés.
Je noterai pour terminer que sans la question 1, un autre type de tâches était directement présent dans la deuxième question : "Montrer qu'un objet o est le plus petit élément d'un ensemble E ordonné", certainement plus connu des étudiants dans le cadre numérique avec la technique classique : montrer que o est un minorant de E et que o est un élément de E, OM plutôt du niveau de l'université mais *t-convoquée* par l'énoncé même de la question.

Bien qu'elle n'implique que des OM assez anciennes pour les étudiants, cette question peut être considérée comme représentative d'un niveau très élevé de difficulté (rarement atteint) parce qu'elle accumule les adaptations et les interventions au niveau *r-convoquée*. Elle donne une idée de la diversité des types de tâches qui sont susceptibles d'intervenir et pour lesquels il est préférable d'être déjà outillé quand on aborde ce niveau de problème.
Ce deuxième axe d'analyse, centré sur les adaptations peut se traduire par deux degrés d'intervention d'une OM :

- l'OM intervient au niveau *simple et isolée* : c'est ce qu'on considère en général comme une application directe ; il n'y a aucune adaptation, pas de coordination avec d'autres questions, pas d'utilisation d'objets venant d'un autre cadre (c'est le sens du qualificatif isolé), pas d'étape, pas d'objet à introduire ;
- l'OM intervient avec des *adaptations.*

Le vocabulaire est ici celui d'A. Robert. Cette classification peut paraître trop frustre, au regard de l'analyse des adaptations. Ceci étant, le travail réalisé par J. Pian (1999) dont j'ai déjà parlé montre que c'est précisément cette échelle qui lui permet de rendre compte des résultats qu'il obtient : seules les tâches qui correspondent au niveau "Intervention Simple et Isolée" sont réussies par plus de la moitié des étudiants. Pour obtenir une grille de niveaux plus fine, prenant mieux en compte les adaptations, on peut privilégier un type d'adaptations. C'est ce que j'ai fait dans Castela 2008a en m'intéressant à la sensibilité des objets manipulés. On pourrait pour les problèmes de CAPES prendre en compte le nombre d'OM ou le nombre d'étapes à introduire.

Le croisement des deux axes d'analyse fournit alors un outil qui permet de dépasser la dichotomie routinier/non routinier. Il est ainsi possible de mieux saisir ce que peut vouloir dire "former les étudiants à utiliser les savoirs mathématiques dans des exercices qui ne sont pas des applications directes", objectif que j'ai tenté d'atteindre pour la géométrie élémentaire dans le cadre d'un module de 30h, intitulé "Géométrie élémentaire" inscrit dans la préparation au CAPES.

2. Les savoirs sur le fonctionnement mathématique

Le module évoqué a été construit sur la base des deux hypothèses suivantes, qui sous-tendent autant les travaux d'A. Schoenfeld que ceux de l'enseignement de méthodes en France :

- des connaissances non prises en charge par le savoir théorique sont utiles, sinon nécessaires dans les problèmes de type CAPES, pour utiliser efficacement concepts et théorèmes ;
- il est possible d'organiser un enseignement explicite de certaines de ces connaissances, ce qui suppose donc de les reconnaître par des savoirs.

Dans Castela 2000, j'ai entrepris de distinguer, à l'intérieur du champ de connaissances que l'article d'A. Robert et J. Robinet (1996) avait au contraire cherché à unifier, un ensemble de savoirs susceptibles d'être construits, partagés et légitimés par les mathématiciens, du fait de la nature de l'objet auquel ils réfèrent, que j'ai nommé *le fonctionnement mathématique*. Il s'agit de considérer que se donne à voir dans l'ensemble des textes de solution aux problèmes déjà résolus, par l'intermédiaire de différents ostensifs, toute une économie qui implique les objets mathématiques, concepts et théorèmes dans la production de preuves.

> "le fonctionnement mathématique [est] l'ensemble des modes d'intervention des objets mathématiques dans les solutions des différents problèmes, qui se donnent à voir dans les textes de démonstration." (*ibidem*, p. 344).

Le fonctionnement mathématique n'est pas l'activité d'un mathématicien, il ne s'agit donc absolument pas de s'intéresser à des savoirs relatifs à la métacognition ou à l'expérience individuelle d'une personne. Mais il n'est pas non plus le fonctionnement d'une communauté de mathématiciens, il en est le produit, réorganisé, dépersonnalisé, par un travail d'écriture qui élimine les péripéties de la recherche. Ne relèvent donc pas du champ des savoirs sur le fonctionnement mathématique ce qui concerne directement les pratiques, par exemple la gestion de la recherche ("regarder des cas particuliers, des cas limites, pour se faire une idée"[16]) ou des avertissements relatifs à des erreurs fréquentes. Cette restriction vise à cerner un objet suffisamment dépersonnalisé pour que l'on puisse envisager

- que des savoirs socialement partageables soient produits à son sujet, condition nécessaire à ce que l'on puisse organiser l'enseignement explicite de tels savoirs ;
- qu'ils circulent dans certains cercles plus ou moins restreints de la recherche mathématique (dans les équipes, entre un chercheur chevronné et ses étudiants de thèse par exemple), c'est-à-dire que de tels savoirs puissent être reconnus par la communauté mathématique comme dotés d'une certaine authenticité, condition nécessaire à ce que l'enseignement envisagé puisse dépasser le niveau d'une initiative isolée et soit intégré comme dimension d'un enseignement institutionnel.

Par ailleurs, le fonctionnement mathématique, produit d'activités fugitives, est quant à lui stabilisé dans des écrits que le lecteur peut étudier à loisir. Cette dimension constitue un point d'appui pour engager les étudiants dans un processus réflexif producteur de savoirs

[16] Mes travaux ultérieurs ont intégré ce type de savoirs en tant que technologie de praxéologies relevant de l'expertise heuristique des mathématiciens (Castela 2009a, p. 12)

personnels[17]. Je montrerai rapidement dans la section 3 comment ce potentiel a été utilisé dans certaines séances du module.

Je vais maintenant donner une idée du type de savoirs considérés. J'ai choisi ici de le faire grâce à des exemples qui renvoient à des épisodes tout à fait particuliers de ma vie mathématicienne, puisqu'il me reste une mémoire très nette, dans certains cas plus de trente ans après, des circonstances de leur élaboration (on pourra trouver des exemples non repris ici dans Castela 2000, 2008a, 2009a). Ce faisant, mon objectif est de montrer une dimension centrale de mon rapport à la pratique et à l'apprentissage des mathématiques, dimension qui a exercé une influence sur les thèmes de recherche que j'ai choisis, sur les voies par lesquelles je les ai abordés et sur les interprétations que j'ai pu donner des résultats obtenus. A l'heure de porter un regard réflexif sur mes recherches en didactique, il me paraît intéressant de tenter un effort d'élucidation de ce qui est embarqué de moi dans les objets que je prétends scientifiquement étudier, tentant ainsi sans illusion, de donner un écho à la réflexion d'E. Morin sur la sociologie en tant que discipline scientifique : "Sur le terrain de la sociologie du présent – c'est-à-dire engagée dans la contemporanéité et la dialectique observateur-phénomène observé – il n'y a pas de recette d'objectivité, le seul recours est la prise de conscience permanente de la relation observateur-phénomène, c'est-à-dire l'autocritique permanente. […] La vérification scientifique n'est pas seulement un processus externe sur l'objet, c'est un processus interne du sujet-chercheur." (Morin 1984, p.78 et p.81)

J'ai fréquemment surmonté les difficultés que j'ai rencontrées en mathématiques par mes propres moyens, en m'appuyant sur l'étude des solutions d'exercices m'ayant posé problème pour repérer des façons de faire à réinvestir.

Premier exemple : à propos de l'étude des familles paramétriques de fonctions

En classe de Mathématiques Spéciales (Bac +2), l'année a commencé par l'étude de familles paramétriques de fonctions. J'ai encore le souvenir de la grande confusion où je me trouvais la veille du devoir portant sur ce thème. Pourtant habituée depuis la Seconde à étudier le signe de trinômes dépendant d'un paramètre, je ne parvenais pas à organiser la gestion des différents cas à envisager. L'analyse des solutions des exercices déjà traités m'a permis de dégager les éléments suivants : suivre le plan habituel d'étude d'une fonction en prêtant une attention systématique aux conditions de validité des calculs à réaliser (est-ce que l'équation à résoudre est toujours du second degré ? est-ce que la limite est toujours de la forme "L/∞ avec L finie ? etc.) ; à chaque étape, traiter d'abord les cas particuliers numériques puis reprendre le cas général jusqu'à rencontrer la nécessité de poser de nouvelles conditions.

La rationalisation tout à fait explicite que j'ai réalisée a été très efficace puisque j'ai obtenu la meilleure note de la classe au devoir portant sur le sujet.

Deuxième exemple : à propos de l'intérêt de la dimension finie pour définir des objets

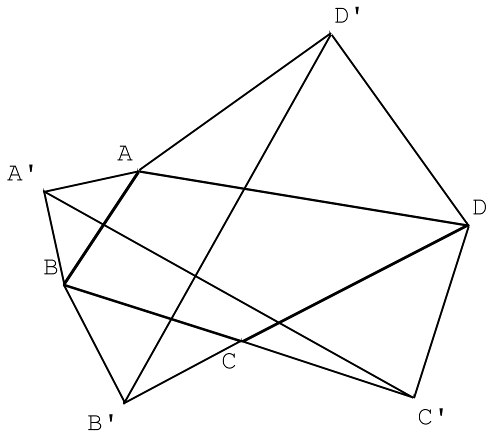
Au même niveau, je me souviens très bien d'avoir identifié l'intérêt de la dimension finie permettant par exemple de définir un objet vérifiant certaines contraintes en réduisant la question à un nombre fini de choix. Exemple d'application : démontrer qu'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, tous deux de dimension finie, est surjective si et seulement si il existe une application linéaire g de F dans E telle que fog est

[17] Comme je l'ai déjà précisé, l'expression *'savoir personnel'* fait référence aux travaux de F. Conne. On pourrait la préciser ici puisque F. Conne distingue plusieurs catégories de savoirs personnels. Dans le cas présent, il s'agit de savoirs réfléchis : "un *savoir-réfléchi* ne s'arrête pas au seul produit objectif de l'interaction avec la situation [...] mais réfléchit la manière dont ce produit a été obtenu..." (Conne 1992, p. 254)

l'identité de F. J'avais à la fois repéré la technique de définition de g et son lien avec la notion de base et le caractère fini de celle-ci.

Troisième exemple : à propos de l'utilisation de transformations pour l'étude de configurations planes

En tant que professeur de Terminale C, j'ai été confrontée par le programme de Septembre 1986 à des exercices de géométrie ponctuelle dont la solution devait utiliser des transformations, notamment des isométries. Je n'avais à cette époque aucune familiarité avec ces techniques auxquelles j'ai dû me former pour les enseigner. Pour plus de précision, je donne ci-dessous un exemple tout à fait classique dans le cadre d'une culture de la géométrie que mon cursus, y compris universitaire, ne m'avait pas fait acquérir.
Il s'agit de l'étude de la configuration dite de Von Aubel.



Dans le plan orienté, on considère quatre points deux à deux distincts A, B, C et D. On construit les triangles rectangles isocèles indirects ABA', BCB', CDC', DAD' (angles droits en A', B', C', D').
Montrer que les diagonales du quadrilatère A'B'C'D' sont orthogonales et de même longueur.

La propriété à établir est reformulée en procédant à la fois à un changement de point de vue et à un changement de cadre : l'égalité de longueur et l'égalité angulaire sont considérées comme deux dimensions d'une seule et même propriété : une diagonale est l'image de l'autre par une rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui peut se prouver en exhibant une rotation affine transformant A' en B' et C' en D'.

Les hypothèses sont également reformulées en termes de transformations (ici des similitudes directes classiquement associées aux triangles rectangles isocèles).

Connaissant le but visé, on cherche à obtenir la transformation recherchée ; dans ce type de configurations, obtenue en réalisant des constructions analogues pour un certain nombre de points qui sont échangés par permutation circulaire, des compositions sont à envisager. Il faut dans un premier temps se laisser guider par la règle suivante : les compositions doivent s'enchaîner naturellement, sans entraîner la construction de points nouveaux.
Ce dernier point est un guide pour se repérer parmi la multiplicité des compositions envisageables. Ainsi dans le cas présent, il conduit à introduire deux compositions, S'oS et sos' où S (resp. S') désigne la similitude directe de centre A (resp. C), d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ (resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}$), s (resp. s') la similitude directe de centre A (resp. C), d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (resp. $\sqrt{2}$).

L'étude des solutions proposées par le manuel de la classe m'avait conduite à dégager cette règle d'orientation, dotée d'un domaine d'efficacité non négligeable, et à laquelle je me suis donc tenue jusqu'à rencontrer dans un exercice le besoin de la transgresser. Je me souviens encore d'avoir à ce moment pris conscience de m'être laissée enfermer par la technique qui m'avait été utile jusque là. Ainsi dans le cas présent, pour montrer que les deux compositions S'oS et sos' qui sont deux rotations de même angle sont égales, on montre par exemple qu'elles donnent de C la même image (on sait qu'on pourrait aussi montrer qu'elles ont même centre). Et la preuve de cette propriété suppose d'introduire l'image de C par S.
A mesure que mon champ d'expérience s'est agrandi avec ce type de problèmes, j'ai donc développé un savoir relatif à leur traitement avec une technique à deux niveaux : dans une première phase de la recherche, éviter les points nouveaux mais en cas d'impasse, ne pas s'enfermer dans cette orientation.

J'insiste sur le fait suivant : comme nous venons de le voir, les savoirs dont je donne ici des exemples ont bien pour moi (nous sommes au niveau des savoirs personnels) une valeur de vérité mais cela résulte de leurs formes le plus souvent modalisées, modestes et souvent pluralistes (il est en général, il est souvent, intéressant de …, on peut penser à utiliser tel et tel outil…). Autrement dit, il n'est pas question de prétendre que la mise en œuvre de ces savoirs permet dans tous les cas et sans grand effort de produire une solution. On retrouve une idée clé, déjà repérée dans III.2, les savoirs sur le fonctionnement mathématique ne sont pas régis par le régime de validité du savoir mathématique : il est presque toujours impossible de préciser un domaine exact d'efficacité des techniques et de vérité des énoncés qui les concernent.
Une seconde dimension est illustrée dans ce qui précède : les savoirs sur le fonctionnement mathématique mettent en relation deux types d'objets de savoirs, concepts et théorèmes d'une part, types de problèmes reconnus en tant qu'objets de savoirs à part entière d'autre part. Ceci est un point sur lequel Castela 2000 insiste particulièrement, ce qui m'a logiquement conduite à m'emparer dans la suite de la notion de praxéologie. Ces savoirs visent à favoriser la résolution de problèmes nouveaux en proposant des outils d'analyse des questions rencontrées par rapprochement avec des types déjà constitués. En même temps, ils contribuent à la compréhension du savoir mathématique théorique (par exemple, dans les exemples cités, de la notion de base ou de l'égalité des transformations géométriques).

Le premier et le troisième exemple que je viens de présenter correspondent à des apprentissages réalisés à l'occasion d'un échec ou d'une difficulté. On peut penser que l'analyse de la solution est orientée et favorisée par la recherche des initiatives qu'on n'a pas su prendre et des erreurs qu'on a pu commettre. Mais mon expérience est que d'autres occasions peuvent avoir des effets constructifs analogues. Ainsi, en classe préparatoire, le programme de révision des interrogations orales hebdomadaires comprenant des parties de cours et donc des démonstrations souvent complexes, j'ai acquis l'habitude, pour me préparer à les restituer, d'en repérer les points clés. Je n'ai pas de souvenir précis concernant l'exemple relatif à la notion de dimension ; le savoir en question me paraît avoir été dégagé à l'occasion de la préparation d'un devoir en classe, laquelle me conduisait systématiquement cette année-là à reprendre le cours et le corpus abondant des exercices déjà faits, à défaut d'en chercher de nouveaux, par manque de temps. En Licence, sans suivre l'enseignement de topologie dispensé à l'université, je me suis formée en m'appuyant exclusivement sur l'étude du manuel de Gustave Choquet : je savais en restituer toutes les démonstrations, "exploit" dont on imagine bien qu'il ne reposait pas sur un apprentissage aveugle mais intégrait le repérage des modalités de démonstration des propriétés topologiques (ouvert, fermé, compact, etc.) puis de leurs implications dans les démonstrations des théorèmes suivants, d'abord objets donc puis outils. A travers l'analyse de ce qui m'était montré de l'activité mathématique, j'estime avoir atteint

dans un dialogue quasi solitaire avec le manuel un bon niveau de compréhension des concepts en jeu et une efficacité certaine face aux problèmes de ce domaine.
Enfin, ma thèse de troisième cycle en Théorie des nombres elle-même n'est au fond que le transfert, moyennant certaines adaptations, de la technique déjà utilisée pour une extension quadratique au cas des extensions diédrales de corps de nombres.

Mon expérience personnelle de l'activité mathématique, y compris lors de mon incursion dans la recherche, est donc que l'on peut aller très loin en investissant dans des problèmes nouveaux le très gros corpus de savoirs et de références construit à partir des solutions existantes à des problèmes, qu'on ait soi-même échoué à les résoudre ou pas. En d'autres mots, venant d'un monde qui n'avait rien à voir avec les mathématiques, j'ai mené toute ma scolarité en étant persuadée et en vérifiant que je pouvais trouver moi-même les dessous de la réussite en mathématiques par l'étude de ce que d'autres me donnaient à voir de leurs productions, dans le but d'y repérer leurs façons de faire. Je ne crois pas avoir jamais en mathématiques été créative au niveau conceptuel. Par contre, je sais que, grâce à l'étude des textes de démonstration, j'ai été régulièrement engagée dans un processus de décontextualisation débouchant sur la construction de savoirs sur le fonctionnement mathématique. Il est tout à fait évident que cette expérience, ce rapport aux mathématiques, modèle mon travail didactique en me conduisant à privilégier certaines entrées et en me rendant aveugle à d'autres. C'est avec la volonté d'élargir mon champ de vision que j'entreprends le travail d'explicitation dont cette note me fournit l'occasion.

3. Description des choix didactiques du module "Géométrie élémentaire" dans une préparation au CAPES

Le module dont il est question ici a été présenté dans (Castela 1997) et (Castela & Eberhard 1999). J'en suis à la fois la conceptrice et l'enseignante. Le travail proposé repose exclusivement sur la résolution de problèmes au moyen des résultats enseignés au secondaire. Souvent issus de manuels de ce niveau, les énoncés sont modifiés de façon à éliminer la plupart des apprêts qui les rendent accessibles aux élèves de lycée. Les premières séances sont consacrées aux différentes fonctions outils des principaux concepts mais la formation est pour l'essentiel structurée autour de types de problèmes (étude de configurations : alignement, concours, orthogonalité, cocyclicité ; problèmes de lieux, problèmes de construction). Pour chaque outil, on traite régulièrement les mêmes types de problèmes de façon à ce que se diversifient les techniques connues pour un type. Une réflexion sur les critères qui peuvent conduire à privilégier telle ou telle technique est menée, mettant notamment en avant la différence entre des contextes purement affines et affines euclidiens. Les situations étudiées sont choisies de façon à atteindre les objectifs suivants : traiter des problèmes qui font référence, à la fois pour le caractère riche et représentatif de leurs solutions et pour la place qu'ils conservent dans la culture géométrique ; montrer que la multiplicité des techniques efficaces pour un même problème n'est pas exceptionnelle.

Plusieurs types de travaux sont accomplis à propos de ces problèmes.
Tous sont l'objet de **recherches longues** pendant les séances (3 ou 4 sujets pour 2 heures), **en groupes**. En termes de formation mathématique, l’objectif est double : confronter les étudiants à des recherches non encadrées, ce qui les conduit à assumer la responsabilité de l’initiative, du contrôle et de la mobilité ; les mettre en situation d’inventer une technique ou de la mobiliser en toute autonomie s’ils l’ont déjà rencontrée.
Pour une ou deux situations, la recherche de la solution est outillée par la distribution de la solution d'un exercice de même type, dont les étudiants sont supposés s'inspirer pour **transférer la technique** utilisée à l'exercice qu'ils ont à traiter (par exemple, la preuve du théorème de Desargues par composition d'homothéties est distribuée avant la recherche de la

démonstration du théorème de Ménelaüs avec le même outil). L'adaptation au nouveau contexte suppose un certain repérage des points clés de la technique donnée à voir dans le texte distribué.
Ensuite, chaque étudiant est chargé de **rédiger** chez lui **la solution** de l'un des exercices cherchés en groupe. Les copies font l'objet d'une correction très précise attentive aux deux aspects suivants : la rigueur mathématique des solutions proposées ainsi que l'organisation du texte et la mise en page. Il s'agit ici en premier lieu de prolonger la dévolution faite aux étudiants de la responsabilité de contrôler leur production en instituant un contrat de méticulosité : contrairement à ce qui se passe lors de la recherche en groupe ou lors d'un examen, ils ont le devoir et le temps de surveiller les détails. En second lieu, je fais l'hypothèse que le travail de rédaction et de mise en page provoque une étude de la solution favorable à une première prise de conscience des initiatives qui se sont révélées efficaces. Cette option est inspirée par l'analyse que R. Duval propose des spécificités de l'écrit :

> "Le discours écrit échappe à la linéarité de la parole et donne un moyen de contrôle de la pensée. [...] L'écriture [...] conduit à une désubjectivation de la pensée en ce sens qu'au cours de l'écriture c'est le déjà écrit qui devient la référence à la place du vécu. [...] Cette désubjectivation de la pensée s'effectue d'abord personnellement dans la sphère privée et en ce sens elle permet une véritable appropriation.[...] Elle constitue un processus d'auto-interaction permettant une fonction d'objectivation indépendamment de toute communication.[…] Les conditions d'intermittence[18]et de simultanéisation[19] (modalité visuelle) ouvrent la possibilité d'un traitement global, ainsi que de tous les retours en arrière et tous les délais de réflexion dont le sujet, en position d'écriture ou de lecture, peut avoir besoin." (1998, p.86-88)

Deux autres types de tâches, basés sur un enjeu de communication et de formulation, sont proposés une fois. Ils poursuivent l'objectif de repérage des techniques efficaces, l'hypothèse sous-jacente étant que dans les deux cas, la tâche prescrite suppose d'approfondir l'étude de la solution produite : présentation au tableau, de mémoire, d'une solution ; rédaction d'énoncés destinés à des élèves de niveau donné.
Les différentes formes de travail constituent un parcours, censé déboucher sur le niveau final visé, c'est-à-dire la construction de savoirs personnels explicites par **la décontextualisation des techniques mises en oeuvre dans les solutions et la production d'une technologie.** Une ou deux fois au cours du module, cet objectif apparaît explicitement sous la forme d'une tâche intitulée "Dégagez les idées à retenir". Il s'agit pour les étudiants d'expliciter les leçons qu'ils peuvent tirer d'un corpus de solutions précédemment produites, rédigées et corrigées. Le travail s'appuie sur les échanges entre pairs et donne lieu à des productions écrites mises en commun par affichage.
Enfin, une des séances sur les problèmes de lieux est consacrée à la recherche de plusieurs solutions d'un même problème, elle se conclut par une étude comparative. Ce travail conduit à repérer certains points clés sur lesquels diffèrent les techniques utilisées (structure du raisonnement, nature de la caractérisation du lieu, outils utilisés, etc.).

Comme il l'a été précisé plus haut, les différentes tâches présentées ici ont pour objectif de prolonger la formation mathématique des étudiants à deux niveaux : entraînement à la résolution de problèmes dans lesquels les OM interviennent au niveau *r-convoquée* et avec des adaptations multiples ; construction d'un certain bagage de savoirs sur le fonctionnement mathématique dont je fais l'hypothèse qu'il favorise le traitement de tels problèmes. La conception de cet enseignement est inspirée par la TSD. L'ambition est de proposer aux étudiants une suite de situations a-didactiques dans lesquelles les connaissances à construire interviennent comme impliquées dans des stratégies efficaces. Il faut préciser que la référence à la TSD et aux situations a-didactiques doit plutôt être comprise comme un

---

[18] Possibilité de différer l'appréhension de ce qui suit, par opposition à la fluence du discours oral ou de la pratique.
[19] Par opposition à la séquentialité du discours oral ou de la pratique qui provoque l'oubli rapide de ce qui vient d'être (dit ou agi) et rend incertain ce qui va être.

horizon. Je dirais qu'en général, le milieu de la situation est trop pauvre pour jouer véritablement le rôle de système antagoniste dans les jeux proposés. Ainsi pour la rédaction d'un énoncé de problème, qui vise donc à mettre des élèves du secondaire en situation de produire eux-mêmes une solution (ce que j'assimile à une situation de formulation), les étudiants n'ont pas l'occasion de poser l'exercice élaboré à de véritables élèves, ils n'ont donc aucune rétroaction vis-à-vis de ce qu'ils ont produit.
L'explicitation des connaissances sur le fonctionnement mathématique en savoirs est également "dévolue" aux étudiants au terme du processus. En cela, ce module se distingue des Enseignements de méthodes évoqués dans III.2. Par sa structure organisée autour des types de problèmes, par les épisodes "Dégagez des idées à retenir", ce module vise à construire le fonctionnement mathématique en objet de savoirs chez les étudiants, des savoirs dotés d'une légitimité mathématique puisque ayant une place dans l'enseignement. Mais les choix opérés ont un coût temporel, difficile à maintenir. Le pari est qu'ayant pris conscience de l'utilité de savoirs pratiques en mathématiques grâce à leur émergence institutionnelle en tant qu'objets enseignés, les étudiants prendront en charge à titre personnel leur construction en reproduisant des formes d'étude dont ils auront fait l'expérience. Ceci rejoint l'un des objectifs métacognitifs du courant "méta".

Ce module n'a pas été l'objet d'une étude systématique, l'orientation de mes recherches vers l'enseignement secondaire m'ayant détournée de cet objet. Je ne pourrai donc pas en dresser un bilan scientifique. Du point de vue des étudiants, il est très apprécié et fréquenté assidûment jusqu'à la fin. Du point de vue de l'enseignante, je crois pouvoir repérer une influence effective du travail accompli qui se traduit par une façon plus "détendue", plus mobile et plus organisée d'aborder les exercices. On trouve dans les questions ouvertes du questionnaire d'évaluation rempli en fin de formation, chez plus du tiers des étudiants, des réponses spontanées qui corroborent la présence de telles évolutions[20]. Les échanges pendant les travaux de groupes évoluent au fil du module, vers des discussions sur le choix des méthodes et les formes de raisonnement. Ceci est particulièrement vrai chez la plupart des redoublants. Classiquement, il semble qu'une durée suffisante soit requise pour tirer profit de ce style de travail, les progrès étant lents. Par ailleurs, un bagage géométrique minimal est nécessaire.

4. Un module poursuivant également des visées professionnelles

Le module "Géométrie élémentaire" répond à un objectif de formation des étudiants en tant que géomètres résolveurs de problèmes. Pour cette raison, il est affiché comme élément de la préparation à l'écrit du concours. Mais il relève également de la préparation aux deux épreuves orales, plus particulièrement de la deuxième, dite épreuve sur dossier. Depuis 1994 (BO Spécial n°5, 21-10-1993), cette épreuve présente une seule modalité[21] :

---

[20] "Le fait d'avoir constaté que quasiment tous les exercices de géométrie avaient différents types de résolution m'a encouragée dans mes recherches. Si l'une des méthodes envisagées ne fonctionnait pas, j'en choisissais une autre ou je cherchais le plus de méthodes possibles pour résoudre un exercice."
"J'ai l'impression d'avoir acquis "une méthode". Je réfléchis sur la marche à suivre avant de me lancer dans la résolution d'exercices."
"Le point qui me paraît le plus important est l'analyse des problèmes et des méthodes, c'est-à-dire la recherche des caractéristiques qui nous "aiguillent" plus vers une méthode qu'une autre. Et aussi la recherche de toutes les méthodes permettant la résolution d'un problème (d'habitude, dès qu'on a une solution, on est satisfait)."

[21] Une forme assez proche de cette deuxième épreuve orale avait été instituée par le BO spécial n°5, 26-06-1986 ("Présentation d'un choix d'exemples et d'exercices sur un thème donné"), elle remplaçait une interrogation basée sur la résolution d'un exercice. Le rapport de jury de 1987 dit ainsi à propos de cette épreuve : "Cette épreuve est axée sur l'étude, à travers un choix d'exercices, d'un <u>type de problème mathématique</u>, les concepts apparaissent ici comme des <u>outils</u> au service de cette étude. […] Si le titre du sujet préconise l'emploi de plusieurs outils, il convient d'analyser leur pertinence respective." (p. 108). Pour les sessions de 1992 et 1993, le candidat pouvait

"Cette épreuve est axée sur l'étude pratique, à travers un choix d'exercices, d'un sujet mathématique. Le terme "exercice" est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant des notions prises dans d'autres disciplines."

"Il [le candidat] explique dans son exposé la façon dont il a compris le sujet qu'il a retenu et les objectifs recherchés dans ses exercices : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Il analyse la pertinence des différents outils mis en jeu."

Il s'agit d'une épreuve avec documents, le candidat pouvant apporter des manuels ou tout autre texte en vente dans le commerce.

Les sujets qui doivent être illustrés par le candidat appartiennent à une liste d'environ 90 items. Ceux-ci sont relatifs à un type de problèmes ou bien à un outil mais dans ce cas, le domaine d'applications est généralement limité par la référence à un type de problèmes[22] :

Exemples de problèmes d'alignement et de concours portant sur le triangle

Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de constructions géométriques dans le plan

Analyse comparée de différentes méthodes (calcul vectoriel, transformations, emploi d'un repère, nombres complexes, …) pour la recherche d'un *même problème* de lieu géométrique du plan.

Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples ; Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour obtenir des majorations et encadrements.

Exemples de méthodes d'approximation du nombre *e*. à l'aide de suites. Irrationalité du nombre *e*.

Le texte définissant l'épreuve et la nature de cette liste sont des manifestations de l'importance accordée par la noosphère aux types de problèmes et aux techniques qui peuvent leur être associées. Sans prétendre ici rendre compte d'une étude historique ordonnée, il me semble intéressant de voir dans cette épreuve et dans la forme de 1986 qui l'a précédée un des effets du mouvement de réaction à la Réforme des Mathématiques Modernes. Je voudrais citer pour étayer cette affirmation quelques lignes extraites de l'article déjà cité de J-L. Ovaert et D. Lazet (1981) :

"C'est pourquoi il nous faut organiser l'enseignement de l'analyse autour de quelques *grands problèmes* conduisant à des *situations riches* et *liées aux autres disciplines*. Par exemple

[…] recherche d'approximations de nombres ou de fonctions ; recherche de maximums et de minimums issus de problèmes d'optimisation simples

Dans la rubrique "Quelques aspects fondamentaux de l'activité en analyse", les auteurs envisagent différentes formes d'activités, dont aucune ne doit être négligée, notamment

"*des activités de recherche de plusieurs méthodes de résolution et de comparaison de leur performance*

[…] Exemple : choix et comparaison de méthodes variées de résolution d'équations numériques (dichotomie, trichotomie, interpolation…)"

Et plus loin,

"*l'étude de quelques grands problèmes* : il ne s'agit plus ici d'activités isolées de résolution d'exercices et de problèmes, mais d'une étude suivie, et reprise à divers niveaux d'approfondissement, de quelques grands thèmes jouant un rôle important dans le secteur considéré et choisis en fonction d'objectifs généraux de formation."

J-L.Ovaert, Inspecteur Générale de l'Education Nationale, membre actif des IREM, a exercé une influence importante sur l'évolution du CAPES dont il a présidé le jury au moment de la réforme de 1986. Le lien entre l'approche qu'il développe dans l'article cité et la deuxième épreuve orale est manifeste. Même si l'inscription explicite dans les programmes de Seconde de quelques uns des grands problèmes évoqués ci-dessus par la réforme de 1981 a été rapidement remise en cause (1984), on peut interpréter la définition de l'épreuve sur dossier de la façon suivante : l'institution de recrutement attend des professeurs de mathématiques du secondaire qu'ils aient une connaissance des types de problèmes qui sont au cœur du développement des mathématiques (on voit dans la citation que les grands problèmes

---

choisir entre deux modalités, celle qui est adoptée en 1994 et une seconde qui prenait appui sur un dossier réalisé pendant l'année de formation.

[22] D'autres sujets concernent l'algèbre, les probabilités et la statistique.

considérés ne sont jamais isolés) et des méthodes associées, qu'ils sachent choisir un ensemble d'exercices permettant aux élèves de rencontrer cette culture.
Sans que cela soit véritablement explicité, un certain nombre d'éléments plus ou moins informels (composition des jurys, situation de la formation professionnelle et des stages après le concours, échanges entre préparateurs, contenus des listes proposés par les étudiants suivant la préparation de Rouen et ayant obtenu de très bons résultats) font penser qu'une sélection correspondant à une progression pour l'enseignement n'est pas attendue. Elle pourrait même être pénalisante si elle ne réalise pas en même temps l'un des deux projets suivants (Castela & Eberhard 1999) :

- *Projet technique et transversal*

La plupart des sujets étant définis à partir d'un couple (outil, type de problèmes), une première approche consiste à déterminer sur quels points essentiels les solutions apportées aux problèmes du type à l'aide de l'outil imposé peuvent différer ; il s'agit alors de proposer des exercices illustrant au maximum ces variations.

- *Projet prospectif et génétique*

Il s'agit de placer le thème donné dans la perspective de ses développements ultérieurs, on choisira ainsi des problèmes qui, avec les connaissances du niveau envisagé, font naître des questionnements, présentent des situations dont le traitement général, à l'aide de nouveaux concepts sera abordé plus tard ou utilisent des techniques classiques du lycée pour la résolution de questions qui deviendront typiques dans le supérieur.

On voit que le premier type de projets est directement lié aux réflexions que j'ai développées jusqu'à présent. Il est le plus adapté pour les thèmes de géométrie. Ainsi le travail réalisé dans le module "Géométrie élémentaire" est également finalisé par l'oral du concours et ceci est très facilement perçu par les étudiants. Inversement, les séances consacrées spécifiquement à la préparation des sujets de géométrie de la deuxième épreuve prolongent ce qui a été commencé, notamment parce que l'élaboration de l'exposé dans lequel le candidat doit expliciter son projet et les critères qui ont prévalu à la sélection des énoncés suppose un effort important de décontextualisation et la maîtrise d'un certain discours sur le fonctionnement mathématique. Au demeurant, dans leurs réponses aux questionnaires d'évaluation du module, certains étudiants attribuent un caractère professionnel au travail proposé dans le module, entre autres aux épisodes "Dégagez des idées à retenir" :

> " Ce mode de travail nous prépare en même temps à l'épreuve d'oral II et à l'enseignement dans le sens où l'on apprend à structurer les différentes façons de résoudre un exercice."

Je terminerai cette réflexion sur ce module en remarquant que le passage d'un horaire de 30h à 24 h ces toutes dernières années s'est traduit par l'abandon des formes de travail autres que la recherche longue par groupes qui occupe maintenant la totalité du temps en classe et la rédaction a posteriori des solutions. Aucune autre option n'est envisageable puisque les résolutions de problèmes de types variables, avec une multiplicité de techniques constituent un préalable aux activités de formulation et décontextualisation. Ce préalable se révèle d'autant plus nécessaire que la pratique géométrique au secondaire est restreinte depuis la dernière réforme des programmes (2002 en Terminale), les universités de Haute-Normandie ne compensant pas ce déficit. Parallèlement, l'épreuve sur dossier a été modifiée depuis la session 2005 : le candidat reçoit un énoncé d'exercice et doit répondre à son propos à quelques questions posées par le jury (on demande toujours de repérer les savoirs et méthodes en jeu) ; puis il doit proposer lui-même deux ou trois exercices relevant du même thème. Mais les thèmes sont très larges, centrés soit sur un outil, soit sur un type de problèmes. Par ailleurs, la partie de l'exposé consacrée aux exercices du candidat est réduite par rapport à la forme précédente de cette épreuve. Dans ces conditions, il n'est ni possible ni nécessaire d'élaborer une liste qui prétende un tant soit peu à une illustration exhaustive. Ceci se traduit selon moi par un changement important dans la nature et la précision des connaissances en jeu : il est de nouveau crucial de savoir résoudre un exercice inconnu, il est moins important de posséder une culture approfondie des grands problèmes et des méthodes.

V. Les principales objections à l'enseignement de savoirs méta

Je m'intéresse dans cette partie à deux textes qui développent les objections les plus déterminées à l'enseignement heuristique ou méta. Le premier est l'article "Fondements et méthodes de la didactique" de G. Brousseau publié en 1986[23] ; le second, " Sens et situations : une mise en question de l’enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques", est écrit par B. Sarrazy. Publié en 1997 dans la revue RDM, il peut être considéré en partie comme une réponse à celui d'A. Robert et J. Robinet sur la prise en compte du "méta". Je l'interprète également comme un effort d'élucidation des objections de G. Brousseau auquel celui-ci n'est certainement pas étranger.

J'ai repris une dernière fois dans ce titre l'expression "savoirs méta", avec le souci de resituer les écrits pris en compte dans le contexte des années 1985-2000. Mais ce dont il s'agit est pour moi de discuter des objections à l'enseignement de savoirs pratiques, c'est-à-dire de savoirs ayant trait à l'utilisation des savoirs théoriques mathématiques. Relèvent de ces savoirs pratiques des savoirs sur le fonctionnement mathématique d'une part et d'autre part des savoirs concernant l’activité de résolution proprement dite, considérée comme dotée de traits relativement invariants, d'une situation de recherche à l'autre et d'un sujet à l'autre. Ni les chercheurs du courant "méta", ni ceux qui ont principalement argumenté contre leurs options n'opèrent la distinction que je viens de faire. Ainsi, dans la partie "Heuristique et didactique" de l'article, G. Brousseau affirme :

> "Avec Glaeser (1984-1985), nous pouvons appeler "procédologie" "tout le répertoire de recettes éprouvées" (sur les stocks de problèmes classiques) que l'enseignement …inculque" (p.151) et qui ne sont pas des théorèmes ou des métathéorèmes. L'enseignement ne semble pas avoir pour mission explicite d'inculquer ces recettes […]
> […] il n'y a pas de différence de nature entre un usage réservé et légitime de "l'heuristique normative" de Polya, en vue de "l'éducation mathématique" et une fine procédologie du second ordre" (p.71)

Je rappelle enfin qu' A. Robert et J. Robinet (1996) intègrent également sous le préfixe "méta" des connaissances développées par un sujet à propos de sa propre cognition.

1. Des connaissances utiles peut-être, mais pas des savoirs validés

La TSD suppose que l'utilisation du savoir sollicite chez le sujet un ensemble de connaissances dont une grande partie n'est pas prise en charge par, congruente à, un savoir. G. Brousseau est-il convaincu que les savoirs pratiques dont je parle décrivent des connaissances nécessaires ? Je n'en suis pas certaine. Ainsi, il a pu dire récemment :

> "Les connaissances sont nécessaires à l'exercice des savoirs mais elles ont un statut et des interventions très différentes. Par exemple, les heuristiques sont des connaissances mais pas des savoirs. Elles sont des moyens, utiles à l'occasion, mais erratiques et douteuses." (Cité par A.Bessot dans son cours à l'EE 2009, issu d'un entretien non publié datant de 2008)

"Utiles à l'occasion, erratiques, douteuses", les termes utilisés sont plutôt négatifs. On peut cependant sur ce point trouver des traces d'hésitations puisqu'il est aussi dit :

> "Comme pour les analogies, l'usage –naïf ou systématique– des heuristiques est un excellent moyen de recherche des solutions de problèmes […] à condition d'être mis en œuvre sous la responsabilité exclusive de son utilisateur." (Brousseau 1986, p.71)

B.Sarrazy défend quant à lui une position plus tranchée, qu'il documente par les travaux expérimentaux réalisés dans sa thèse au niveau de l'enseignement élémentaire[24] :

---

[23] L'article originel date de 1986, il a été intégré au livre *Théorie des Situations Didactiques*, publié en 1998. Toutes les pages renvoient à cette édition plus récente.

[24] Des séries de problèmes d'arithmétique analogues sont présentées à des élèves de CM1 dans des contextes institutionnels différents. Le traitement statistique des données fait apparaître que les conditions de production

> "un même problème recevra des réponses, radicalement différentes selon les situations dans lesquelles il sera proposé et ce, quel que soit le niveau scolaire des élèves en mathématiques ;" (p. 150).

C'est l'hypothèse de la localité : le sens d'un énoncé est indissociable de la situation, l'actualisation d'une procédure de résolution est liée au contexte, "aux rapports singuliers et intentionnels que l'élève établit à l'égard de la situation", (p. 150), rapports de l'élève au milieu qui s'établissent dans des institutions particulières. Ainsi serait invalidée l'hypothèse de transversalité considérée comme caractéristique des interventions "méta", ou de généricité selon l'expression que j'ai utilisée :

> "l'enseignement de méthodes, de stratégies métacognitives, de procédures de résolution n'auraient aucun sens, aucun intérêt, si ces méthodes, ces stratégies … restaient attachées à une situation particulière puisque leur enseignement vise précisément à permettre aux élèves de les utiliser, de les instancier, dans des situations nouvelles, dans des problèmes de même type." (p. 139)

Aucune connaissance relative à l'utilisation d'un savoir ne pourrait donc être construite, l'exercice d'un savoir étant si l'on suit cette position entièrement pris dans la contingence. D'autres passages de l'article de B. Sarrazy conduisent à envisager une reformulation un peu moins radicale : admettons que des connaissances pratiques puissent être construites, elles ne sont pas ou ne sont guère utiles en contexte. Cette position se situe dans la perspective des travaux de Wittgenstein :

> "Wittgenstein s'oppose à l'idée selon laquelle la mémoire devrait être conçue comme un "réservoir" de significations, un "entrepôt" et qu'un "mécanisme hypothétique" viendrait guider, contrôler leur usage. Autrement dit, par l'emploi de "mécanisme", il dénie le caractère *causal* qui semble exister entre une règle et son application." (note 5, p. 140)
>
> "C'est à cette idée d'un mécanisme que Wittgenstein s'opposera en montrant qu'une règle est analogue à un poteau indicateur ; comme la règle, il ne comporte pas en lui-même, les conditions de son application." (p. 148)

On retrouve ici le scepticisme de G.Brousseau (mais aussi de certains mathématiciens) quant à l'efficacité en mathématiques des stratégies heuristiques, y compris chez des experts. Il s'agirait de postuler que dans les activités de résolution de problèmes, ce n'est pas l'usage conscient de règles et de principes qui détermine l'action mais plutôt des associations fulgurantes et souterraines prises dans le feu de l'action particulière, associées à des habitudes pratiques non nécessairement conscientes et en tout cas non nécessairement verbalisées.

J'ai argumenté dans Castela 2000 (pp. 340-342) contre l'hypothèse de l'inefficacité pour l'action mathématique des savoirs pratiques et heuristiques, hypothèse également défendue à propos de la pratique par Pierre Bourdieu (1984). M'appuyant sur l'analyse des spécificités de l'écrit proposée par R.Duval, je mettais en avant les ressources offertes au mathématicien par les traces écrites des actions réalisées, script permanent, constitué en objet extérieur à l'acteur et donc plus facilement accessible à l'autocritique, au contrôle. Non pressé par l'urgence, bénéficiant de la possibilité de retarder sa réponse et de reprendre ses actes pour les modifier au gré des évaluations intermédiaires, le mathématicien est engagé dans une pratique dont je continue à prétendre qu'elle ne relève pas de l'analyse générique du sens pratique et donc, qu'en cas de difficultés, la mise en œuvre consciente des techniques et autres stratégies heuristiques n'y est pas totalement vaine.

Le problème est qu'aucune affirmation concernant les mécanismes mentaux d'un sujet cognitif en situation de résolution de problèmes n'est raisonnablement réfutable, depuis le champ de savoirs et de pratiques scientifiques qui est celui de la didactique. Du fait qu'un écart est postulé entre l'action effective, en situation, et toutes les représentations que le sujet peut en donner, les déclarations de très nombreux mathématiciens affirmant avoir eu recours à des connaissances sur le fonctionnement mathématique ou sur les manières de gérer la recherche d'une solution ne sont pas considérées comme preuves de l'utilité de telles

---

sont plus déterminantes dans le type de décision prises par l'élève que son niveau scolaire. (Sarrazy 1997, p. 158-159) connaissances (discussion avec B. Sarrazy, 14-12-2009, séminaire Bordeaux II). Peut-être les études des verbalisations d'experts en situation de recherche peuvent-elles apporter des indices plus probants mais on peut arguer du caractère exceptionnel de la pratique exigée du résolveur pour ne pas en être convaincu. Quant à G. Brousseau, il dénie aux mathématiciens toute possibilité de pouvoir affirmer l'intérêt de ce type de connaissances puisqu'ils ne pourraient le faire que par naïveté épistémologique :

> "l'heuristique pourrait n'être qu'une rationalisation fondée sur l'épistémologie des professeurs, une invention didactique pour les besoins du contrat, récupérée et développée par les mathématiciens en guise d'épistémologie spontanée." (Brousseau 1986, p. 72)

Une approche qui prétend s'en tenir aux connaissances du sujet cognitif pour déterminer les connaissances utiles pour la résolution de problèmes débouche sur des affirmations indécidables, il n'est pas possible de porter un jugement de validité, d'utilité, d'efficacité sur une connaissance pratique déclarée. C'est une impasse.

2. L'enseignement heuristique comme palliatif aux faiblesses de la didactique

Une première direction envisageable pour en sortir est, conformément au parti pris par la TSD, de modéliser les connaissances par des situations. Il me semble que, dans le contexte de scepticisme qui transparaît dans les articles analysés ici, les arguments de G. Brousseau relativement aux besoins du contrat ne se comprennent bien que sous l'hypothèse suivante : c'est le champ d'exercice à un niveau donné des savoirs mathématiques enseignés qu'il faut caractériser, et ceci sans lier spécialement ce travail à l'existence de savoirs pratiques explicites et reconnus que l'on chercherait à faire construire par les élèves. C'est le sens de ce que je propose dans VII.1. avec la notion de *curriculum praxique* (Castela 2008a).
Mais le contrat didactique détermine les obligations du professeur :

> "Le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances [… il] assure donc que les acquisitions antérieures et les conditions nouvelles donnent à l'élève la possibilité de l'acquisition." (p. 61)
> "le professeur à coté des problèmes, doit donner des moyens de les résoudre (le savoir théorique par exemple) et rendre compte que les moyens déjà enseignés, permettaient bien de construire la solution." (p.69)

Le glissement heuristique, c'est-à-dire l'explicitation par le professeur de savoirs pratiques qui vont se substituer aux savoirs théoriques visés, est alors interprété comme une conséquence du contrat dans un contexte où, faute d'une analyse didactique appropriée, le professeur n'aurait pas donné à ses élèves les moyens suffisants pour résoudre certains des problèmes posés.

> "il n'y a pas de raison de déclarer *a priori* illégitime, pour le maître, de donner des indications[25] de cette nature […], on peut considérer qu'elles ont, en l'absence d'une authentique science de la didactique, une nécessité professionnelle" p.71

Cette interprétation ne peut se comprendre qu'à partir de la conviction que le savoir mathématique académique renferme tout ce qu'il est nécessaire d'enseigner[26], à un niveau scolaire donné pour traiter les problèmes mathématiques qui doivent être rendus accessibles à ce niveau. Quant aux autres connaissances impliquées, le rôle du professeur serait de créer les conditions de leur construction par les élèves grâce à une suite de situations didactiquement pertinentes. La plupart des situations d'apprentissage en question restant à créer, le professeur recourt, par défaut, à l'enseignement direct de savoirs pratiques, par exemple de méthodes.

---

[25] Ce passage fait suite à un extrait cité précédemment ; les indications évoquées sont "l'heuristique normative" de Pólya et une fine procédologie du second ordre.

[26] Le terme 'enseigner' est ici utilisé pour désigner une action didactique dont l'enjeu d'apprentissage est finalement explicité sous forme de savoirs institutionnalisés, en tout cas explicités et partagés dans la classe. Conformément à l'étymologie latine, enseigner un savoir c'est le désigner (en espagnol, 'enseñar' signifie aussi 'montrer').

3. L'illusion d'un moindre coût didactique de l'enseignement de savoirs pratiques

Une autre façon d'aborder la question des connaissances utiles à la résolution de problèmes est de poser au niveau social la question de la validation. En l'occurrence, il s'agit, comme j'en avais évoqué la nécessité dans (Castela 2000), de rechercher des savoirs pratiques dans l'ensemble des savoirs qui circulent dans les différents cercles du monde des mathématiciens, en voyant dans cette diffusion l'indice d'une reconnaissance sociale d'une certaine valeur générique. Je ne pense pas qu'un tel travail ait été accompli, avec une méthodologie suffisamment précise pour évaluer le niveau de validité attribué aux savoirs repérés et mettre à jour les mécanismes qui construisent des légitimités plus ou moins locales. On pourrait considérer que relèvent de ces indicateurs de reconnaissance les nombreux articles écrits par des mathématiciens impliqués dans des réflexions sur l'enseignement des mathématiques, comme le sont la plupart des chercheurs français du courant "méta" et les chercheurs états-uniens évoqués dans la section A.I.3. (spécifiquement ceux qui s'engagent dans des projets de réforme curriculaire). Personnellement je ne trouve pas que l'on puisse sans autre forme d'enquête attribuer à une épistémologie spontanée des mathématiciens l'importance attribuée dans ces articles à des façons de faire, *habits of mind*, *ways of thinking* et autres méthodes et techniques.

C'est dans la perspective de définir un objet de savoir susceptible d'être construit et partagé par les mathématiciens que j'ai défini le fonctionnement mathématique. On peut à propos de cet objet produire des affirmations dont la validation repose sur l'étude des textes mathématiques, validation que tout mathématicien acceptant de réaliser l'étude a tout loisir de reprendre. Ceci ne clôt pas le débat sur l'utilité de tels savoirs en situation de résolution de problèmes mais l'on dispose au moins d'un corpus de savoirs pratiques qui peuvent être pris comme objets d'enseignement. Comme je l'ai tenté dans le module décrit en IV.3-4, l'enseignement organisé peut s'inspirer de la TSD. Ceci suppose de déterminer des situations dans lesquelles des connaissances définies *a priori* par l'intermédiaire des savoirs pratiques considérés sont au principe des stratégies gagnantes.

Mais un enseignement direct est en général envisagé. L'argumentation de B. Sarrazy peut être interprétée comme un avertissement contre l'illusion que le simple fait d'expliciter des règles heuristiques aurait pour effet immédiat d'améliorer l'utilisation que font les élèves de leurs connaissances mathématiques, dérive qui existe :

> "on peut avancer l'hypothèse que l'usage de leviers "méta" conduit à donner l'illusion qu'il serait possible d'améliorer, voire d'accélérer, au moindre coût […] le processus décontextualisation / recontextualisation des connaissances enseignées sous estimant l'importance du jeu des situations a-didactiques/ situations didactiques." (Sarrazy 1997, p.139)

C'est un point de vue que je partage complètement. Il ne suffit pas que l'enseignant énonce des stratégies heuristiques, des règles d'action, pour qu'elles soient aussitôt intériorisées par l'élève en tant que connaissances efficaces. Pourquoi se distingueraient-elles en cela des autres savoirs ? C'est donc tout un processus didactique qu'il faut organiser.

Mais, si l'on se place dans l'hypothèse, considérée ici, où certains savoirs pratiques sont explicités, ils devront coexister avec les savoirs mathématiques et ce bien que ces deux catégories de savoirs soient de statuts très différents et supposent donc que soient noués à leur propos des contrats didactiques différents. G. Brousseau semble postuler qu'il est impossible de satisfaire cette condition. Selon lui, les heuristiques ne peuvent pas être reçues pour ce qu'elles sont la plupart du temps, c'est-à-dire des façons de faire envisageables, d'efficacité avérée mais toujours à vérifier en contexte, sous la responsabilité de l'usager, moyennant des adaptations à inventer :

> "L'algorithme est pratiquement le seul moyen "officiel" de déblocage….Et il sert de modèle unique ou presque à toutes les approches culturelles de l'enseignement.

> On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode : comme des moyens "efficaces " de résoudre les problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur les choisit de façon à ce qu'elles relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident *sans* toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique, seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes et aux théorèmes pour l'autre." (Brousseau 1986, p.69)

Dans ces conditions, enseigner des méthodes est considéré comme contreproductif : les élèves en viennent à considérer qu'il existe toujours une "bonne" méthode pour résoudre chaque problème, qu'ils ne peuvent eux-mêmes la trouver et qu'il est donc vain de s'engager dans la recherche d'une solution qui serait de fait moins efficace. Ce point de vue est défendu dans le courant du *Problem Solving* pour justifier le travail sur des problèmes non routiniers (voir Schoenfeld, 1992, p.343), les problèmes routiniers ayant pour fonction d'exercer les élèves à l'usage d'une technique sur une classe de problèmes où elle sera efficace. Mais G. Brousseau généralise l'objection en considérant que tout apport heuristique est reçu sur le même mode qui fait donc obstacle à la dévolution aux élèves de la responsabilité d'inventer pour résoudre un problème. Dans le cadre de la TSD, ceci est rédhibitoire.

L'enseignement de méthodes expérimenté par I.Tenaud me semble questionner la généralité du postulat d'une transformation inévitable des méthodes en algorithmes. Le travail réalisé conduit à un théorème d'existence : sous certaines conditions, il est possible d'obtenir que des élèves de Terminale s'emparent de savoirs pratiques au point de les utiliser sous leur contrôle comme ingrédients de résolution de problèmes. Parmi les conditions réunies, je retiendrai : l'âge des élèves ; l'existence d'un corpus déjà assez étendu de savoirs mathématiques et de techniques associées, tel que plusieurs techniques relatives à un même type de problèmes soient disponibles ; l'importance accordée explicitement par le professeur à des objets de savoirs pratiques comme les types de problèmes, les outils et les techniques ; la confrontation répétée, en petits groupes, à des problèmes qui engagent la responsabilité des élèves dans le choix et l'adaptation des techniques, ce qui suppose que de tels problèmes existent ; la place accordée aux résolutions diverses produites par les élèves, donc à la multiplicité potentielle des solutions. Ces mêmes conditions sont également réunies dans les *Problem Solving Classes* d'A. Schoenfeld.

On voit bien le caractère illusoire d'une croyance en un moindre coût de l'enseignement heuristique. Même dans les cas où les savoirs pratiques sont introduits à l'initiative du professeur, le processus d'appropriation par les élèves est long. C'est tout autant le cas si les élèves sont mis en situation de construire des connaissances pratiques puis de les décontextualiser en savoirs. La question de la nécessité de consacrer du temps scolaire à ces savoirs particuliers, au détriment du savoir mathématique, ne peut être évitée.

VI. Des pistes pour penser le potentiel développemental des savoirs

Dans cette section, je veux, au contraire de la précédente, envisager des arguments qui plaident en faveur d'une certaine utilité d'un enseignement de savoirs pratiques socialement reconnus. Ce faisant, je vais côtoyer dangereusement, sinon franchir, la frontière de mes ignorances. Je choisis de le faire en considérant cette audace comme inhérente au jeu de la note de synthèse : le travail que je tente de réaliser vise non seulement à mettre en évidence la cohérence des recherches déjà réalisées mais aussi à en saisir les limites pour entrevoir des pistes nouvelles. J'évoquerai ainsi des cadres théoriques dont je ne connais que très peu de choses, comme autant de domaines dont l'exploration est envisageable, mais repoussée au-delà du présent écrit.

1. L'approche instrumentale des règles de sécurité

Le travail auquel je vais référer relève de l'ergonomie cognitive et se réfère à un cadre théorique très éloigné de celui que j'utilise prioritairement mais qui vit en didactique, à savoir

la théorie de la genèse instrumentale développée par P. Rabardel (1995). P. Mayen et C. Vidal-Gomel (2005) s'intéressent "à l'apprentissage, à l'usage et au développement de l'usage de cette catégorie d'artefacts que sont les artefacts prescriptifs, et plus particulièrement les règlements et les règles de sécurité." (p. 109)
J'ai trouvé intéressant de solliciter cet article comme une contribution à la discussion des arguments de B. Sarrazy et de la référence à Wittgenstein sur le rôle que peuvent jouer des règles d'action et plus largement des savoirs pratiques pour l'exercice d'une pratique.
Comme j'ai essayé de le montrer, la position de B. Sarrazy peut être interprétée de deux manières : 1. l'enseignement de savoirs relatifs à l'emploi de savoirs mathématiques est rejeté au motif qu'un sujet n'agirait pas en appliquant des règles mais en utilisant de manière nécessairement toujours contextualisée (thèse de la localité) les connaissances qu'il a construites 2. un tel enseignement pourrait être envisagé, les règles étant analogues à des "poteaux indicateurs' qui orienteraient l'action du sujet sous son contrôle mais il serait illusoire d'attendre des effets directs d'une simple communication aux élèves de savoirs pratiques. P. Mayen et C. Vidal-Gomel se situent clairement dans la seconde perspective puisqu'ils considèrent comme des ressources pour l'action les répertoires de règles d'action qu'il n'est pas souvent possible d'inventer de toutes pièces (*ibidem*, p. 114) dans les contextes professionnels qu'ils étudient. Leurs terrains d'observation sont la RATP, la SNCF et la Poste, systèmes à risques dans lesquels les règles de sécurité font partie des moyens qui contribuent à la fiabilité :

> "Elles [les prescriptions] ont pour but principal […] d'orienter l'action de ceux à qui elles sont destinées vers certains buts et dans le respect de certaines procédures ; autrement dit, de les amener à adopter des modalités d'action exprimées dans les procédures et à les inclure dans l'organisation de l'action. Pour réussir à orienter ainsi l'action, les prescriptions tendent, surtout dans le cas où elles forment des règlements de l'ampleur de ceux qui tendent à régir le travail dans des systèmes à risques, à prendre en charge une partie de l'activité des opérateurs […], y compris de prise d'information sur la situation ou de contrôle." (*ibidem*, pp. 110-111)

On peut ici penser aux fines procédologies évoquées par G. Brousseau. Ces savoirs sont considérés comme potentiellement utiles (des ressources) mais cette utilité n'est ni immédiate, ni automatique, c'est le résultat d'un processus d'appropriation par les opérateurs, processus qui ne réduit pas à néant le besoin d'adaptation au spécifique dans le contexte des situations. C'est ce que la théorie de la genèse instrumentale permet de prendre en compte, comme le précisent les auteurs :

> "En considérant que les règlements ou les règles de sécurité sont des artefacts prescriptifs, nous nous inscrivons dans le cadre des activités avec instruments (Rabardel 1995) et nous soulignons d'une part que les instruments qu'ils permettent de constituer ne sont pas donnés d'emblée et qu'il ne s'agit pas uniquement d'"appliquer". L'usage de ces instruments nécessite le développement des compétences sur le long terme" (*ibidem*, p. 114-115)

Introduite par P. Rabardel, développée en didactique des mathématiques à propos de l'utilisation de différents logiciels (voir Guin &Trouche 2002), l'approche instrumentale distingue *artefact* (*artis factum* : "fait de l'art", objet issu d'une production humaine) et *instrument* qui est composé d'un artefact et de schèmes d'utilisation. La genèse instrumentale désigne le processus dans lequel l'utilisateur de l'outil fait de celui-ci un instrument pour lui, processus dans lequel il met l'outil à sa main tout en se faisant la main, la genèse associant deux composantes : *l'instrumentalisation* (l'usager adapte l'artefact à ses habitudes de travail), *l'instrumentation* (les contraintes de l'artefact contribuent à structurer l'action de l'usager)[27].

Dans l'article que je considère ici, ce ne sont pas des outils matériels qui sont pris comme artefacts. Certes, les règlements sont mis en textes, sont constitués en recueils consultables en cas de nécessité, toutefois il est évident que les mots seuls ne constituent pas l'artefact, mais bien aussi les savoirs qu'ils signifient. Dans les formations initiales ou

[27] Ces lignes figurent presque à l'identiques dans la note de synthèse de G.Gueudet (p. 49)

continues étudiées par P. Mayen et C. Vidal-Gomel, ces savoirs sont enseignés dans des cours magistraux qui reprennent la réglementation, à partir d'un modèle du sujet que les auteurs définissent de la façon suivante :

> "pour gérer des risques professionnels, l'opérateur doit appliquer les règles de sécurité qu'il a apprises en formation. La règle de sécurité est présentée comme le seul moyen efficace pour gérer les risques. Il s'agit donc d'appliquer, telle quelle et sans la remettre en cause ou la discuter, une règle de sécurité conçue par d'autres. […] Ainsi, en formation, les "opérateurs apprennent à exécuter le *One best way* trouvé par ceux d'en haut", pour reprendre des termes connus." (*ibidem*, p. 113)

Même s'il existe des théories (de la circulation ferroviaire, de la distribution du courrier), celles-ci ne sont enseignées qu'au niveau du collège cadre :

> "Les principes managériaux en vigueur se basent sur le principe "d'obéissance passive et absolue au règlement" rappelé au sein même de ceux-ci." (*ibidem, p. 115)*

On est donc tout à fait dans l'illusion dénoncée par B. Sarrazy. La recherche s'attache à mettre à jour ce que, ainsi formés, des techniciens, d'ancienneté variable, font avec les règles de sécurité lorsqu'ils ont à procéder aux interventions que ces règles sont supposées encadrer. Plus précisément, le travail mené à la SNCF met en évidence quatre niveaux de relation à la règle qui sont vus comme des étapes du processus de genèse instrumentale. Compte tenu du choix de formation mentionné ci-dessus, le premier niveau consiste en une application simple de la règle, reçue comme n'étant pas à discuter ; il n'est que très rarement présent chez les expérimentés, il est le plus souvent contesté par les débutants en formation. Très rapidement, suit le deuxième niveau, celui de la remise en cause : les savoirs pratiques enseignés sont considérés inutiles, les opérateurs font confiance à leur expérience et à leur intelligence de la situation. Le problème est que dans une entreprise comme la SNCF, toutes les données pertinentes ne sont pas situées dans le contexte accessible à l'agent ; ses interventions, si elles sortent du cadre prévu par le règlement, peuvent avoir des effets en chaîne sur l'organisation complexe de l'action collective et donc sur la sécurité de la circulation ferroviaire. Or, P. Mayen et C. Vidal-Gomel ont constaté que certains des agents les plus expérimentés pouvaient se situer à ce niveau, ce qu'on peut voir comme un effet des choix de formation qui privent les agents des moyens d'une intelligence des raisons d'être du règlement, ce dans un contexte où le milieu de l'action perceptible ne produit pas de rétroactions permettant à l'opérateur de mesurer certains des effets potentiels de ses actes. Selon les auteurs, une formation ne doit pas chercher à éviter cette étape, il faut, au contraire, la susciter pour la discuter, de façon à ce que l'efficacité, réelle mais potentiellement périlleuse en l'occurrence, d'une intelligence intuitive des situations ne fasse pas obstacle à l'accès au troisième niveau de développement instrumental, correspondant à une application des procédures par connaissance des causes. Enfin, le quatrième niveau correspond à une instrumentalisation contrôlée, au développement de la règle :

> "Certaines configurations d'évènements les [les facteurs] conduisent à développer les règles inscrites dans le règlement, à s'en servir pour atteindre, en plus des buts prévus par l'institution, d'autres buts pour "tirer leur épingle du jeu". D'autres fois, le règlement est durci et des règles propres complètent les règles formelles. D'autres fois encore, sans remettre en cause la validité des règles ni des causes qui les fondent, ils les transgressent, mais dans ce cas, la transgression reste sous contrôle. […] Ces derniers, [les facteurs-tuteurs qui sur des tournées qu'ils connaissent très bien s'autorisent des écarts au règlement] dès l'apparition d'une situation inédite, savent d'ailleurs très vite revenir à la règle…" (*ibidem, p. 119)*

Cette dimension de l'article est complétée par la présentation des résultats d'une recherche consacrée aux opérateurs de maintenance des systèmes électriques à la RATP. On y voit clairement comment une même règle, Faire une vérification d'absence de tension "au plus près du lieu de travail", donnent naissance à des schèmes d'utilisation différents suivant les opérateurs, donc à plusieurs instruments "qui remplissent les fonctions prévues par le concepteur […] mais aussi d'autres fonctions, [on y voit aussi] que de nouveaux instruments [complémentaires] sont élaborés." (p.119)

En résumé, je retiens de cet article qu'enseigner des règles d'action ne doit pas être rejeté au motif d'inutilité puisque ces règles peuvent donner naissance à des instruments efficaces pour le traitement contextualisé des situations. Je retiens également que, si un tel enseignement peut adopter une présentation directe, celle-ci n'est que le premier pas d'un processus d'appropriation individuelle dont on ne peut pas faire l'économie. C'est pourquoi il me semble beaucoup plus intéressant, grâce à la notion de genèse instrumentale, de comparer les règles d'action et autres savoirs pratiques à des artefacts qu'à des poteaux indicateurs orientant l'action.

2. Quels cadres théoriques pour regarder tout savoir socialement reconnu comme ressource potentielle pour l'apprentissage des individus ?

N'est-ce pas entraîner l'approche instrumentale bien loin de ses bases que de prétendre finalement utiliser la notion d'artefact pour tout savoir pratique et a fortiori pour tout savoir, puisqu'il n'y a pas véritablement de raison de distinguer ici deux catégories ? Est-ce que ce point de vue sur les savoirs apporte quelque chose par rapport aux théories usuelles de l'apprentissage ? Malgré mon insuffisante expertise dans le domaine, j'avancerai que cela marque une différence avec l'approche constructiviste de Piaget en faisant de l'existence des savoirs-artefacts une donnée, un ingrédient du processus de construction des connaissances. Celui-ci n'est pas considéré comme résultant seulement [28]des actions du sujet sur les objets du monde qu'il s'agit de connaître, les savoirs sociaux n'intervenant qu'a posteriori pour institutionnaliser les connaissances et savoirs personnels élaborés. Il ne s'agit pas non plus de se contenter de voir dans les savoirs les fondements de l'élaboration par les professeurs des situations dont ils font dévolution aux élèves pour qu'ils y construisent les connaissances visées, comme c'est le cas dans la TSD. Introduire un point de vue artefact sur le savoir c'est postuler que la rencontre avec un savoir socialement mis à disposition contribue à l'apprentissage. Un tel point de vue me semble tout à fait relever de l'approche vygotskienne, ce qui n'a rien d'étonnant puisque le courant de l'ergonomie cognitive auquel appartient P. Rabardel se réclame de cette référence. En différenciant concepts quotidiens et concepts scientifiques, Vygotsky envisage l'enseignement comme la forme privilégiée de l'entrée dans le processus de développement des concepts scientifiques :

> "*l'enseignement délibéré à un élève de nouveaux concepts* et formes de mots non seulement est possible mais *peut même être le point de départ d'un développement supérieur des concepts propres, déjà formés, de l'enfant* et un travail direct sur le concept est réalisable dans le processus d'apprentissage scolaire. Mais ce travail […] constitue non pas la fin mais le début du développement du concept scientifique et, loin d'exclure les processus propres de développement, il leur imprime des directions nouvelles et établit entre ceux-ci et les processus de l'apprentissage scolaire des rapports nouveaux et au plus haut point favorables aux buts ultimes de l'école. " (Vygotsky 1934, traduction 1997, p.214)

On voit que ce que j'envisage est une double extension : de concept à savoir et de savoir scientifique au savoir socialement reconnu. Je ne pense pas que la première extension soit en contradiction avec l'approche de Vygotsky. Par contre, même si selon J. Rogalski (2008, p. 438), "le terme de concepts *scientifiques* recouvre souvent celui de concepts *enseignés*" dans le chapitre 6 de *Pensée et Langage*, il est clair que la deuxième extension demande à être interrogée, particulièrement lorsqu'on se propose de prendre en compte des savoirs pratiques :

> **Quelles sont les spécificités des savoirs qui, comme les concepts scientifiques, pourraient être en tant qu'artefact, au départ du développement des connaissances du sujet ?**

[28] "Le constructivisme piagétien affirme que les connaissances sur les objets se construisent à partir des actions sur ces objets (et l'ambition de Piaget est de montrer la validité de son approche sur l'ensemble des grands domaines de la connaissance). Ces actions du sujet ne sont pas limitées aux actes physiques sur les objets du monde, mais avec le développement de la conceptualisation, la construction des connaissances fait intervenir aussi des opérations mentales." (Rogalski 2008, p. 432)

J. Rogalski résume ainsi les analyses de Vygotsky :

> "la force d'un concept scientifique c'est à la fois sa généralité en termes d'abstraction et de domaine de mise en œuvre […] et le fait qu'il est conscient. […] il a été construit "pour" être conscient, et avec les "mots pour le dire". […] La force d'un concept scientifique est en revanche dans sa généralité, et dans le caractère cohérent du système de concepts dont il fait partie." (*ibidem*, p. 440)

J. Rogalski semble un peu plus loin appeler à s'interroger sur l'extension possible de l'approche proposée pour les concepts scientifiques, à d'autres types de concepts, les concepts pragmatiques introduits en didactique professionnelle (voir chapitre 3), mais la question n'est pas soulevée explicitement. Toutefois, en conclusion d'une partie consacrée à la ZPD qui pointe le rôle médiateur attribué aux concepts scientifiques, elle signale le potentiel de "la conceptualisation de Vygotsky sur les modes d'existence et de développement des concepts quotidiens et scientifiques [qui] permet une approche développementale cohérente tout au long de la vie du sujet" et précise en note :

> "Cela appelle toutefois un travail de nature épistémologique sur les relations entre les concepts issus de l'interaction avec le monde de l'action (concepts spontanés et quotidiens en ce qui concerne les grandes catégories de la connaissance du monde, concepts pragmatiques en ce qui concerne la connaissance opératoire dans les situations de travail) et ceux que permet le développement social scientifique et technique." (*ibidem*, p. 442)

Je ne pense pas que cet appel au travail épistémologique recouvre complètement celui que j'ai introduit par la question posée ci-dessus dans la mesure où le point de vue du sujet cognitif et de ses connaissances est toujours présent dans la réflexion de J. Rogalski, alors que je veux m'intéresser aux savoirs, considérant que des modalités de leur reconnaissance sociale dépend leur potentiel développemental. Quoi qu'il en soit, on entrevoit des directions de questionnement communes.

Poursuivant encore un peu ce travail d'exploration de domaines non familiers, je prolongerai le questionnement sur l'intérêt de considérer les savoirs comme des artefacts en pointant l'idée de médiation, classique dans une perspective vygotskienne et évoquée ci-dessus à propos des concepts scientifiques. Dans les lignes citées, il s'agit d'une médiation conceptuelle mais J. Rogalski évoque aussi plus loin la médiation instrumentale symbolique, notamment via l'existence d'un langage approprié. J'avancerai qu'il faut *a priori* envisager que jouissent également d'un potentiel médiatif tous les dispositifs et outils matériels produits pour et produits dans le processus de reconnaissance des savoirs socialement partagés. Ceci introduit clairement la Théorie de la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2007) comme un cadre potentiel pour analyser la contribution des savoirs reconnus à la formation des individus, perspective qu'il convient clairement de rapprocher du cadre aujourd'hui développé au sein de la TAD par le modèle herbartien de l'étude évoqué dans III.3. dans lequel une dialectique des medias et des milieux joue un rôle central (Chevallard 2008).

VII. Des outils pour décrire les enjeux d'apprentissage relatifs à la résolution de problèmes dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique

A partir de l'année 2002, mon attention s'est déplacée vers l'enseignement secondaire, plus particulièrement la filière scientifique du lycée, en continuant à m'intéresser à la résolution de problèmes. Cela m'a conduite, pour des raisons que j'expliquerai dans cette partie, à faire évoluer ma problématique. Parallèlement, le modèle praxéologique développé par Y. Chevallard s'étant imposé comme un outil familier des didacticiens français, permettant de prendre en compte la dimension générique de la résolution de problèmes qui est au cœur de mon approche, j'ai accompli au sujet de cette notion et plus particulièrement de la composante technologique un travail de développement (Castela 2008a) que je présente dans ce chapitre, l'objectif étant d'intégrer les savoirs pratiques dans le modèle. Enrichi par des travaux ultérieurs, ce travail théorique s'est prolongé pour aboutir à une proposition qui est l'objet du dernier chapitre de cette note.

1. La notion de curriculum praxique

Comme on l'a vu dans la section IV.1, les épreuves écrites de concours confrontent les étudiants à des contextes d'utilisation des savoirs théoriques qui présentent certains traits communs avec les pratiques expertes, exigeant plus d'autonomie que ce à quoi ils sont confrontés en licence : le résolveur porte la responsabilité de la détermination des outils pertinents au sein d'un vaste ensemble de savoirs potentiellement utiles, sans respect particulier des cloisonnements usuels du texte du savoir en secteurs spécialisés. Ce contexte m'a conduite à tabler sur la nécessité de construire des connaissances sur le fonctionnement mathématique et à en organiser un enseignement explicite dans le cadre de la préparation. Le transfert de cette perspective au niveau du lycée ne peut pas être automatique. Il convient d'abord d'examiner les problèmes posés aux élèves : peut-on y repérer des niveaux de difficulté qui, à échelle réduite, solliciteraient un bagage pratique comparable à celui des étudiants préparant le CAPES ? Pour outiller un tel travail, j'ai emprunté plusieurs éléments aux travaux d'A. Robert, c'est un point que j'ai déjà évoqué dans IV.1, j'y reviens ici dans le cas du secondaire.
Deux axes d'analyse sont croisés pour définir des *niveaux d'intervention d'une* Organisation Mathématique donnée, $OM_0 = [T_0, \tau_0, \theta_0, \Theta_0]$, dans un problème. Le premier axe repose sur la distinction *"OM t-convoquée"/"OM r-convoquée"* présentée dans IV.1. Au sein du niveau d'intervention *r-convoquée*, deux cas sont distingués. Dans le premier, une seule technique est connue pour le type T_0, le résolveur porte néanmoins la responsabilité de la convocation de OM_0 du fait qu'il doit identifier lui-même le type de tâches auquel il a affaire. Dans le second, que T_0 soit ou non clairement annoncé par le contexte, le résolveur doit choisir parmi plusieurs techniques connues.
Le second axe d'analyse privilégie l'un des types d'adaptation défini par A. Robert. Il s'agit de prendre en compte "les mélanges de cadres et de notions" (Robert 2008, p. 50), plus précisément de s'intéresser aux objets mathématiques présents dans le contexte de la tâche analysée. Trois possibilités sont distinguées : objets anciens, objets d'enseignement récent, objets en cours d'enseignement.

Plusieurs exemples sont détaillés dans Castela 2008a et 2009a. J'en donnerai seulement ici une idée minimale.

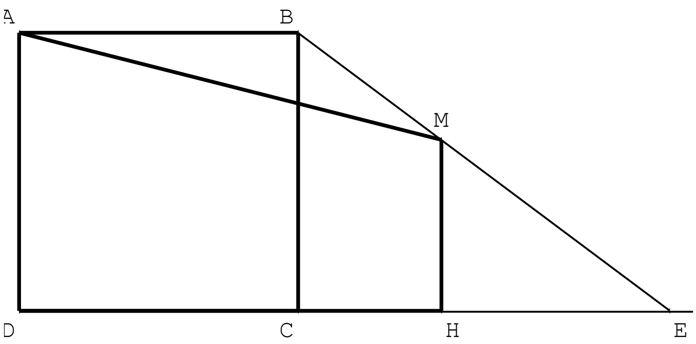
- *OM r-convoquée par nécessité de reconnaître le type*

L'OM considérée est relative au type de tâches T : " Résoudre une équation faisant intervenir un quotient d'expressions dans lesquelles l'inconnue intervient au premier degré". Elle apparaît dans un premier exemple relevant d'un chapitre de géométrie de la classe de Seconde, pour mener à bien un calcul de longueurs traité par l'emploi du théorème de Thalès, technique convoquée par une figure tout à fait prototypique. Les longueurs connues sont telles que la grandeur à calculer AM intervient dans une relation de la forme $\frac{AM}{AM + 3,6} = \frac{3}{7,5}$. Les élèves doivent donc reconnaître T et mettre en œuvre la technique de résolution qui leur a été enseignée dans un chapitre d'algèbre. L'identification du type de tâches ne va pas de soi dans la mesure où cet exercice relève d'un chapitre de géométrie et où aucun des ostensifs usuels de l'algèbre n'est présent. Dans ce cas, tous les objets manipulés relèvent du collège et peuvent être considérés comme familiers. On retrouve ce même type de tâches dans un exemple de Première S figurant dans le chapitre consacré aux suites numériques : la méthode classique d'étude des suites homographiques par introduction d'une suite annexe $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$ introduit une tâche du type T en y faisant intervenir des objets en cours d'enseignement, à savoir les suites et les ostensifs associés dont l'apprentissage constitue une difficulté.

Dans les deux cas, l'identification du type *T* suppose que les élèves prennent leur distance avec une caractérisation des équations par l'ostensif *x* pour aboutir à une conception nouvelle de *T*, liée à la détermination de nombres inconnus.

- *OM r-convoquée par nécessité de choisir une technique*

Un premier exemple figure dans Castela 2009a (p.19). C'est un exercice du chapitre Fonctions, nouveauté au niveau de la Seconde.



On considère un carré ABCD tel que AB = 3. On place le point E sur la demi-droite [D,C) de sorte que DE = 7. Soit M un point de [B,E] tel que EM = x et soit H le projeté orthogonal de M sur (DE). Le but de ce problème est d'étudier l'aire du trapèze ADHM.

1. Calculer BE.

2.a) Exprimer les distances MH et EH en fonction de x.

b) En déduire la distance DH en fonction de x.

3. Exprimer l'aire du trapèze ADHM en fonction de x.

Le type de tâches impliqué est un calcul de longueur. A ce niveau, les élèves français connaissent plusieurs techniques (emploi des théorèmes de Pythagore, de Thalès, recours à la trigonométrie, formule analytique). Le contexte n'oriente pas immédiatement vers l'une ou l'autre de ces techniques ; en particulier les figures prototypiques associées aux théorèmes mentionnés doivent être extraites. La responsabilité du choix de la technique pertinente est donc du côté du résolveur.
Par ailleurs, je me suis intéressée (Castela 2008a, pp. 159-163) à un type de tâches fondamental en analyse, caractérisé par un travail sur des inégalités et scindables en 4 sous-types : Démontrer une inégalité, Etudier le signe d'une expression, Résoudre une inéquation, Trouver une condition suffisante pour qu'une inégalité soit vérifiée. J'ai mis en évidence douze techniques connues à la fin du lycée par des élèves de la filière scientifique. Ces techniques créent entre les sous-types une circulation qui justifie à mes yeux de les intégrer dans un unique type. Progressivement rencontrées entre la troisième et la Terminale, elles sont justifiées par des résultats théoriques nombreux qui relèvent de deux domaines mathématiques distincts (algèbre et analyse) et en analyse de deux secteurs (théorie de la dérivation et théorie de l'intégration). Pour déterminer les attentes de l'institution scolaire relativement à l'utilisation de ces diverses techniques, j'ai analysé le corpus constitué par la liste de 31 énoncés, dont 16 d'analyse, publiée sur un site officiel (www.eduscol.education.fr) en 2003-2004 à l'occasion de la réforme de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat de la Série S. Il ressort de cette étude que toutes les techniques évoquées ci-dessus sont mises en jeu dans l'un ou l'autre des exercices, toutes intervenant au moins une fois au niveau *OM r-convoquée*. Il apparaît donc que l'institution scolaire escompte qu'à l'issue de la classe de Terminale S, les élèves soient capables de choisir à bon escient l'une ou l'autre des nombreuses techniques présentées au cours de leur scolarité. Il est vraisemblable que le corpus étudié définisse une attente maximale, considérée comme nécessaire aux études supérieures en mathématiques, les sujets de baccalauréat définissant au contraire des objectifs minimaux.

En croisant les deux axes que je viens d'illustrer, on obtient une grille d'analyse des interventions d'une OM dans un problème donné qui permet de distinguer neuf niveaux, depuis une intervention au niveau 1, *OM t-convoquée* avec des objets familiers, jusqu'à une intervention au niveau 9, *OM r-convoquée*, avec choix de techniques et objets en cours d'enseignement (un niveau 0 correspond aux interventions simples et isolées, cf. IV.1). Les exemples présentés montrent que, dès la Seconde, certaines OM sont sollicitées au niveau 9. Ceci correspond quasiment à une nécessité écologique : pour dépasser l'exercice routinier des techniques nouvelles, le professeur les met en fonctionnement dans des problèmes qui sollicitent des OM anciennes ; les aides apportées par l'énoncé portent sur le nouveau et fort rarement sur l'ancien, qui, datant souvent d'années antérieures, est considéré comme non problématique, quasi transparent. Par ailleurs, si le professeur a le souci de proposer des questions de difficultés échelonnées, il hésitera à être trop exigeant pour les savoirs en cours d'enseignement et centrera les questions les plus difficiles sur les OM anciennes. Ainsi, le moment du travail d'une technique (Chevallard 2002) se prolonge alors que l'OM en question n'est plus un objet sensible parce que les savoirs théoriques qui y sont en jeu ne le sont plus.

On peut ainsi décrire l'empan de l'apprentissage relatif à l'utilisation des OM requis par l'enseignement secondaire, avec au niveau 9, des interventions qui, à échelle réduite, peuvent être comparées à ce que rencontrent les étudiants préparant le CAPES. Mais l'existence de tels enjeux n'est pas explicitée dans les textes officiels qui décrivent les programmes, c'est pourquoi j'ai parlé d'*enjeux ignorés d'apprentissage*. Le problème de l'organisation didactique du processus d'apprentissage dont la nécessité est mise en évidence est alors posé. Pour le lycée, comme pour la préparation au CAPES, je postule que la construction par les élèves de certains savoirs pratiques personnels est cruciale. Néanmoins, dans le contexte du secondaire, il faut envisager que de tels savoirs ne soient pas pris comme objets explicites d'enseignement puisqu'ils ne figurent pas dans les textes institutionnels, y consacrer du temps d'horloge ne fait donc pas avancer le temps didactique. L'accompagnement des élèves repose alors sur la constitution par le professeur d'un parcours de tâches, *un curriculum praxique*, dont la dimension "construction de connaissances" reste implicite. Il est envisageable que ce curriculum soit conçu comme une suite de situations a-didactiques à laquelle ne manqueraient que les phases d'institutionnalisation (Assortiments didactiques, Genestoux 2002). Mais le rythme de l'enseignement au lycée fait obstacle à une telle hypothèse. L'objectif est plus modeste : il s'agit d'envisager un ensemble de tâches dans lesquelles les OM enseignées interviennent aux différents niveaux définis par la grille d'analyse présentée ci-dessus, pour entraîner progressivement les élèves vers le niveau 9. Cette grille constitue donc un outil pour le professeur qui a la responsabilité du choix des tâches. Elle permet aussi de modéliser les apprentissages relatifs à l'utilisation des OM sans avoir recours à des savoirs pour décrire les connaissances à construire ; selon l'approche de la TSD, celles-ci sont prises en compte par le biais des situations dont elles sont les principes actifs. Il suffit que la formation des professeurs les initie à l'utilisation de la grille, les savoirs pratiques peuvent restés tus.

Il reste cependant qu'un tel curriculum praxique peut difficilement être déployé dans son intégralité s'il reste institutionnellement ignoré. Castela 2008a (pp. 170-173) examine la question de la compatibilité entre les différents niveaux d'intervention d'une OM et l'organisation du curriculum explicite, exprimé presque exclusivement en termes de savoirs théoriques : "faire le programme", prescription institutionnelle forte pour le professeur, est donc avoir enseigné tous les objets de savoir théoriques. Ceci fait obstacle au développement du travail des techniques, surtout si les OM sont nombreuses au regard du temps disponible, ce qui est le cas dans la filière scientifique. Or travailler à des problèmes qui font intervenir une OM aux niveaux d'intervention intermédiaires, particulièrement, OM *r-convoquée* avec des objets familiers n'est pas chose aisée. En effet, dès lors qu'une tâche sollicitant une OM est donnée au cours du chapitre où cette OM est objet d'enseignement, celle-ci est, par contrat, automatiquement convoquée par le contexte, la situation où plusieurs techniques seraient justifiées par la même technologie étant très rare. Des dispositifs particuliers, au sein desquels puissent vivre plusieurs OM non différenciées par le contrat, sont susceptibles d'accueillir les étapes intermédiaires du curriculum praxique. Je citerai seulement ici ce moment tout à fait exceptionnel de reprise de l'ensemble du programme de géométrie du collège qu'organisait le programme de Seconde en vigueur de Septembre 2000 à Juin 2009 : une rubrique intitulée "Les configurations du plan", non associée à un élément de savoir particulier, constituait un cadre tout à fait approprié à la confrontation des élèves à la responsabilité de convoquer les techniques disponibles et d'y choisir la plus pertinente. De tels moments de réexamen des acquis antérieurs suspendent l'avancée du temps didactique tant que celui-ci n'est pas officiellement rythmé par les étapes d'un curriculum praxique institutionnellement affiché. Ils sont donc écologiquement peu viables. *C'est pourquoi j'appelle de mes vœux l'explicitation par les programmes, sans doute en terme de capacités, des niveaux d'utilisation des savoirs enseignés qu'il convient de faire rencontrer aux élèves.*

Dans les conditions actuelles, je fais l'hypothèse de l'existence de passages obligés, d'exercices classiques sollicitant des OM anciennes au niveau 9, que tous les professeurs d'un niveau *n* donné sont amenés à poser à leurs élèves du fait des besoins trophiques des OM nouvelles, mais je table sur une grande diversité des parcours praxiques intermédiaires proposés par les professeurs :

> "les apprentissages […] nécessaires au niveau *n* pour les OM anciennes sont institutionnellement ignorés et donc non explicitement motivés. Y préparer les élèves dépend des choix de tâches des professeurs, ceux des années antérieures qui doivent donc anticiper sur la suite, ceux de l'année *n* qui doivent savoir à quel niveau ces OM anciennes ont fonctionné jusque là. Dans le cas de changement d'institutions particulièrement, cette connaissance peut faire défaut, ce qui, cumulé à la difficile insertion du travail des niveaux intermédiaires, rend hautement probable l'existence de ruptures." (Castela 2008a, p. 175)

L'analyse du curriculum praxique est donc, selon moi, une problématique adaptée à la compréhension d'une partie des *phénomènes de rupture entre institutions consécutives* (collège/lycée, Seconde/Première S, Secondaire/Supérieur) : les élèves seraient confrontés pour des OM anciennes à des interventions au niveau *r-convoquée* sans y avoir été préparés et ce dans des chapitres consacrés à des concepts nouveaux. Parallèlement, même si des mécanismes de régulation, dont l'étude est à mener, peuvent homogénéiser les curriculums praxiques, notamment à l'intérieur d'un établissement scolaire, je vois dans leur vraisemblable diversité entre établissements une contribution importante au processus de *différenciation scolaire*, des parcours d'ambition réduite aggravant les ruptures pour les élèves qui réussissent à entrer dans les institutions suivantes. J'ai envisagé dans Castela 2008a des recherches comparatives entre institutions successives et entre institutions de même niveau mais situées dans des zones socialement différenciées pour interroger ces hypothèses, comparaisons pour lesquelles la grille d'analyse que j'ai définie procure un premier outil. Un travail relevant de cette direction a été réalisé par C. Bezol (2007) dans un mémoire de Master que j'ai dirigé. Y sont notamment comparés relativement à l'utilisation de la relation de Chasles comme technique pour établir des relations vectorielles les corpus d'exercices proposés en Seconde dans un lycée de banlieue populaire et dans un lycée de banlieue très aisée accueillant des classes préparatoires. Il a été nécessaire d'affiner les critères utilisés pour analyser les niveaux d'intervention en prenant en compte les adaptations au niveau *t-convoquée*, de loin le plus présent. Ce travail montre clairement une différence entre les deux établissements quant à la place accordée à ce niveau à des exercices strictement vectoriels, des exercices que les textes officiels enjoignent explicitement de marginaliser en Seconde. Or l'année de Première Scientifique commence fréquemment en géométrie par un chapitre sur le produit scalaire ou sur le barycentre ; travailler en Seconde avec la relation de Chasles, c'est préparer l'entrée dans ce chapitre où elle interviendra sous la responsabilité de l'élève en lien avec des objets totalement nouveaux. Les professeurs du lycée de centre ville s'autorisent à enfreindre les instructions, atténuant ainsi pour leurs élèves la rupture qui marque l'entrée en Première S. Ce n'est pas le cas dans l'autre établissement ; dans ce cas, le professeur de Première S réalise les apprentissages relatifs au calcul vectoriel en commençant par un chapitre consacré à l'espace, au prix d'un moindre approfondissement de l'étude du barycentre.

2. Pourquoi ne peut-on taire totalement les savoirs pratiques ?

L'organisation didactique que je viens d'envisager postule que les connaissances visées seront construites dans la confrontation aux tâches du curriculum praxique, sans que jamais aucun savoir pratique ne soit explicité dans la classe. Ceci suppose que les élèves aient développé un rapport stratégique aux situations (Castela 2008b, dans le présent texte, I.3) qui les conduise à considérer les exercices cherchés comme dotés d'une généricité et comme sources de connaissances. En effet, les conditions de l'enseignement au lycée, les contraintes de temps et le nombre d'OM à enseigner, limitent le moment du travail des techniques nouvelles, a fortiori les possibilités de revenir aux niveaux intermédiaires d'intervention pour les techniques anciennes. Le curriculum praxique ne peut pas être suffisamment dense pour obtenir un apprentissage grâce à l'accumulation et à la diversité des situations traitées, quasiment par un effet d'entraînement et sans engagement constructif[29] volontaire des élèves. Or, tant les travaux de sociologie de M. de Certeau (1980) que les recherches plus récentes en Sciences de l'Education menées autour du rapport au savoir par l'équipe ESCOL (Bautier et Al. 1992, 1998, Charlot 1997, 1999) et celles de M-J. Perrin (1993), D. Butlen et M. Pezard (2003) sur les "classes faibles", montrent que le rapport stratégique est très loin d'être également présent dans tous les milieux et en tout cas dans le contexte scolaire, partagé par tous les élèves. Nombreux sont ceux qui n'inscrivent pas spontanément les tâches qui leur sont proposées par le professeur dans une perspective d'apprentissage ; ayant un rapport tactique aux situations (Castela 2008b, p.102 et section I.1. dans ce texte), ils font le pari de la créativité, de l'ingéniosité pour l'à-venir et de l'oubli du passé, échec ou réussite. Ceci me fait postuler, qu'au moins dans certaines classes, il est impossible que le professeur taise totalement les enjeux d'apprentissage visés par le curriculum praxique. Il doit pouvoir développer un discours relatif à l'utilisation des techniques qui lui permette pour le moins de donner une idée aux élèves des types de connaissances pratiques qu'ils peuvent envisager de construire, connaissances qui doivent donc apparaître en partie et, provisoirement peut-être, en tant que savoirs explicités. Comme c'était le cas pour l'enseignement "méta" (III. 2), l'objectif de telles interventions est de faire évoluer le rapport des élèves aux situations : on escompte qu'ils entrevoient l'intérêt de développer à titre personnel un capital stratégique adapté à la généricité des exercices.

Je rappellerai par ailleurs que toutes les expériences d'enseignement de méthodes évoquées dans I.3. et II. 2. accordent une importance cruciale aux interactions verbales dans les phases de recherche en groupes de problèmes non routiniers. Ceci suppose que les élèves disposent d'un langage pour formuler des réflexions pratiques, langage partagé avec le professeur pour lequel il constitue également un outil pour développer ses commentaires, notamment pendant les phases de correction des exercices (voir la notion d'aide constructive déjà évoquée dans III.2 -Robert 2008, p.52).

Pour toutes ces raisons relatives à l'enseignement, c'est-à-dire à la formation de novices, je considère que les savoirs pratiques relatifs à l'utilisation des savoirs mathématiques théoriques ne peuvent pas être cantonnés dans un statut de construction personnelle. Même si, sensible aux objections de G. Brousseau et B. Sarrazy, je n'envisage pas l'inscription d'objets de savoirs pratiques au curriculum officiel du secondaire (contrairement à certains projets portés par le courant AMT aux USA -cf. II.3), il faut selon moi les aborder explicitement dans la formation des professeurs, en tant qu'outils pour

[29] Ce terme fait référence à la théorie de l'activité, plus précisément aux régulations sur le long terme de l'activité, qui ont des effets de développement des structures cognitives du sujet (accommodation, déséquilibration/rééquilibration chez Piaget). Voir (Rogalski 2008, p. 235)

élaborer le curriculum praxique et pour faciliter une médiation entre les élèves et les connaissances qu'ils peuvent (doivent) construire. C'est pourquoi le fait de centrer mon travail sur la résolution de problèmes au niveau du lycée ne m'a finalement pas conduite à abandonner une problématique formulée en termes d'existence de savoirs socialement identifiés. Ces savoirs sont forgés dans les diverses institutions utilisant les mathématiques pour les produire, les enseigner ou les employer dans d'autres domaines scientifiques ou professionnels (voir chapitre 3). Dans cette perspective, je me suis attachée à développer le modèle praxéologique de la TAD pour qu'il soit adapté à la prise en compte de cette catégorie de savoirs. J'utilise ici tout à fait sciemment le verbe 'développer' en choisissant de rester dans l'ambiguïté que permettent ses nombreux sens, révéler, déplier, donner de l'ampleur, agrandir. On pourra considérer que ce que je propose est une extension dans le cas des OM ; dans la perspective d'ensemble développée par la TAD, j'y vois plutôt un processus de déploiement : il s'agit d'ouvrir un éventail praxéologique trop souvent replié, pour l'utiliser dans des contextes plus variés, de façon à prendre en compte les phénomènes transpositifs provoqués par la circulation des savoirs entre institutions (voir chapitre 3).

3. Composante théorique, composante pratique de la technologie d'une technique

L'objectif poursuivi est donc de disposer d'un modèle qui soit à même de prendre en compte toutes les formes de savoirs relatifs à une technique. Je rappelle ici quelques lignes dues à Y. Chevallard (1999, pp.226-227) qui caractérisent la technologie d'une technique :

> "[c'est] un *discours rationnel* […] ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T […] une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer* la technique. […] Enfin une dernière fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la *production* de techniques. »

Dans le cas des Organisations Mathématiques, les éléments de savoir retenus dans la technologie sont généralement des résultats produits et validés par les théories mathématiques. Cette approche exclut la plupart des savoirs pratiques. C'est pourquoi, j'ai distingué dans Castela 2008a deux composantes au sein de la technologie relative à une technique mathématique :

> "Aux côtés d'éventuels éléments de savoirs empruntés à certaines théories pertinentes (nous parlerons dans la suite de « la *composante théorique* » de la technologie, notée θ^{th}) figurent dans la technologie ces savoirs qui, selon les domaines de recherche, sont qualifiés d'opératoires, pragmatiques, pratiques. Oeuvre collective forgée dans l'expérience, cette *composante pratique* de la technologie (notée dans la suite θ^p) exprime et capitalise la science de la communauté des praticiens confrontés dans les mêmes conditions matérielles et institutionnelles aux tâches du type T, elle en favorise la diffusion au sein du groupe." (Castela 2008a, p. 143)

On notera le caractère "localement situé" de cette composante : elle est relative aux conditions d'utilisation de la technique par les sujets[30] d'une institution donnée. Cette composante pratique θ^p pourrait également être qualifiée d'*empirique* en reprenant l'usage que font M. Bosch et J. Gascón de cet adjectif pour qualifier la praxéologie didactique du professeur (2002, p.24) : "existant dans une institution concrète et un moment historique déterminé, avec des caractéristiques et des limitations particulières". Néanmoins θ^p est porteuse d'une généricité spécifique dans l'institution utilisatrice. C'est bien d'ailleurs ainsi que certains proposent de considérer mon travail du point de vue de la TAD : θ^p serait exclusivement une production didactique qui n'aurait de raison d'être que dans une perspective d'enseignement, elle serait destinée à des novices en formation. Cependant, dans le dernier chapitre, j'évoquerai une recherche qui a montré comment l'utilisation d'une technique mathématique

[30] Si j'ai pu précédemment, au cours de quelques incursions dans une perspective psychologique, utiliser le terme sujet au sens du sujet cognitif, ce terme est désormais utilisé dans le cadre de la TAD pour désigner le sujet d'une institution.

par une science appliquée comme l'automatisme donne lieu au développement d'une technologie pratique prenant en compte les conditions spécifiques du domaine. Enfin, sans avoir avancé du point de vue de la recherche sur ce point depuis Castela 2000, je continue à conjecturer que les savoirs pratiques construits par les experts circulent dans certains cercles du monde de la recherche mathématique.
Faut-il considérer que de tels savoirs institutionnellement indexés ne relèvent pas du modèle proposé par la notion d'Organisation Mathématique ? Une OM serait en quelque sorte *une épure praxéologique*, libre de toute spécificité contextuelle et donc à la fois défonctionnalisée et disponible pour toute refonctionnalisation dans des contextes variés. Ce point de vue correspond bien à un état du savoir mathématique académique, produit par un processus qu'il est intéressant de prendre en compte. Je l'admettrai en utilisant désormais l'expression *praxéologies mathématiques* (Π_M) – et non OM - pour désigner les développements fonctionnels auxquels donnent lieu les utilisations institutionnelles des OM, ce qui de mon point de vue fournit un cadre de travail riche de potentialités pour *l'étude des processus transpositifs*, point qui sera développé dans le dernier chapitre de cette note. Ainsi c'est un type de tâches didactique que de développer la praxéologie mathématique Π_M issue d'une OM au programme, en l'enrichissant des savoirs pratiques qui vont en favoriser l'utilisation par les élèves. Π_M est alors l'artefact dont j'ai envisagé pour conclure la partie VI.2 d'étudier le potentiel médiateur. C'est aussi une dimension de la recherche en mathématiques que de créer les conditions d'usage efficace pour des questions nouvelles d'une OM récemment mise à disposition. Si des ingénieurs s'emparent de la même OM, ils ne produiront pas la même praxéologie, singulièrement pas la même technologie pratique.

En complément des exemples de savoirs sur le fonctionnement mathématique que j'ai donnés dans IV. 2, Castela 2008a (pp.146-147) et Castela 2009a (pp.10-11) détaillent des OM enseignés au secondaire et développent leur composante pratique (Calcul d'intégrale par la méthode d'intégrations par parties, Démonstration du concours de trois droites, Etablissement d'une relation vectorielle par la relation de Chasles). On y voit en particulier comment θ^p contient des éléments liés aux utilisateurs, à l'état de leurs savoirs théoriques, aux difficultés et erreurs habituelles :

> A propos de l'intégration par parties : "des erreurs dans l'utilisation de la formule résultent d'une confusion entre les quatre fonctions u,v, u' et v' ; pour les éviter, il est recommandé d'écrire ces quatre fonctions en les disposant de manière stable, par exemple, dans le tableau suivant $\begin{matrix} u(t) = & u'(t) = \\ v'(t) = & v(t) = \end{matrix}$"
>
> A propos de l'emploi de la relation de Chasles (la notion de base du plan n'étant pas connue au niveau considéré):
> "s'il y a de nombreux points ou vecteurs dans la figure, déterminez lesquels ont été définis indépendamment des autres (des points de base en quelque sorte) et utilisez les pour exprimer tous les vecteurs que vous devez manipuler."

La composante pratique n'est donc pas réduite aux savoirs sur le fonctionnement mathématique, elle peut intégrer des éléments plus directement liés à l'activité de résolution proprement dite et de ce fait, elle est plus sensible à la communauté dans laquelle est utilisée la technique.

Les adjectifs utilisés pour distinguer les deux composantes de la technologie d'une technique semblent faire écho à la distinction introduite par A. Sierpinska (2000) entre deux modes de pensée, pensée pratique (*practical thinking*) et pensée théorique (*theoretical thinking*). Or il n'est pas possible d'identifier totalement ces deux emplois du couple (pratique-théorique). On peut certainement dire que la technologie pratique, orientée vers un traitement efficace des tâches du type *T*, est produite par et outille la pensée pratique. Par contre, la technologie théorique, qui réfère à la technique, ne relève pas directement de la pensée théorique, dont le but est le développement théorique. On pourrait dire que cette composante est produite par une pensée théorique qui se donne des visées pratiques.

4. Les fonctions de la technologie

J'utilise ici des outils introduits dans le cadre de l'accompagnement du travail de thèse d'A. Romo Vázquez (2009), pour analyser les discours technologiques produits dans des institutions de formation professionnelle à propos de la transformation de Laplace. Chronologiquement, je n'en disposais donc pas pour mes travaux sur les savoirs en jeu dans la résolution de problèmes. Je les présente néanmoins ici dans la mesure où ils sont également pertinents dans ce cas.
Nous avons été amenées à distinguer six fonctions pour les savoirs technologiques d'un bloc [T, τ] : *décrire, motiver, faciliter, valider, expliquer, évaluer.* On peut considérer qu'elles sont ou non prises en charge par les verbes utilisés dans la citation d'Y. Chevallard rappelée ci-dessus, à savoir *justifier, rendre intelligible* et *produire,* suivant le sens qu'on leur attribue.

Décrire la technique

Il s'agit ici de considérer la production d'un discours descriptif des gestes qui composent une technique comme un fait de savoir non identifiable à la maîtrise de la technique elle-même. L'élaboration d'un système de représentations, notamment d'un langage partagé dont l'importance a été mise en avant dans la section VII.2., est ici en jeu. Je ne chercherai pas à illustrer particulièrement cette fonction, de multiples descriptifs ayant été produits dans les développements antérieurs.

Faciliter la mise en œuvre de la technique

De tels savoirs permettent aux usagers d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations mais aussi d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. Ce domaine de savoirs est un terrain privilégié des élaborations technologiques d'utilisateurs. Il produit des effets de reprise du descriptif, qui le spécifient en l'adaptant aux conditions particulières du contexte institutionnel d'utilisation et l'enrichissent de la mémoire des expériences accumulées, y compris, dans le contexte de l'enseignement, de la mémoire du professeur sur les difficultés de ses élèves. Les deux exemples cités à la page précédente pour le contexte scolaire relèvent de cette fonction.

Motiver la technique et les gestes qui la composent

Les savoirs en question participent d'une intelligence des fins : ce sont les buts atteints qui justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Il s'agit d'écrire une histoire de la technique qui situe ses composantes les unes par rapport aux autres : pour quoi (pour faire quoi ?) accomplit-on tel geste à tel moment ? Les savoirs de motivation sont aussi souvent des savoirs sur le type de tâches puisqu'ils en analysent les buts. Ils permettent d'anticiper les étapes à atteindre et donc jouent un rôle heuristique important lorsque la mise en œuvre de la technique nécessite des adaptations.

> *Motivation heuristique et logique de la phase d'analyse dans la résolution d'un problème de construction par Analyse-Synthèse :*
> Si l'on n'a initialement aucune idée pour définir des objets candidats à être solutions, l'analyse permet d'obtenir des procédés de construction possibles.
> Par ailleurs, elle fournit une condition nécessaire pour que des objets soient solutions, contribuant donc au niveau logique à l'établissement d'une équivalence, nécessaire si l'on demande de construire l'ensemble des solutions au problème[31].

[31] La thèse d'A. Romo Vázquez ne contient aucun développement relatif à la résolution de problèmes mathématiques. Les exemples cités ici ne relèvent donc pas de son travail.

Valider la technique

La fonction considérée correspond à ce qui est en général entendu sous le terme *justifier* dans les textes qui définissent la notion de praxéologie. Il s'agit de savoirs qui établissent que la technique produit bien ce qu'elle dit qu'elle produit, que les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

> *Validation de l'Analyse-Synthèse*
> L'Analyse-Synthèse produit une nouvelle caractérisation de l'ensemble S des objets que le problème demande de construire car l'analyse définit un ensemble de conditions nécessaires d'appartenance à S et la synthèse prouve qu'elles sont suffisantes. On aboutit donc à une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à S.

Expliquer la technique

Il est de nouveau question de rationalité mais c'est cette fois une intelligence des causes qui est en jeu : on inclut à la technologie des savoirs qui analysent comment il se fait que la technique et ses différents gestes permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

> *Une explication concernant l'efficacité de l'intégration par parties*
> L'intégration par parties peut être intéressante, à condition de choisir de manière appropriée les deux fonctions, car la dérivation, en changeant la nature de l'un des termes du produit, peut faire disparaître ce qui faisait obstacle au calcul d'une primitive.

On sait depuis la diatribe des géomètres autour des méthodes analytiques de Descartes qu'il existe même en mathématiques des validations qui n'expliquent pas. J'ai aussi évoqué le besoin d'expliquer comme dimension à part entière du travail mathématicien et source de développement théorique (dans III.2. à propos de certains aspects du courant "méta"). Mais, il existe aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de l'institution qui examine cette question de la validité (sur le rôle des institutions voir chapitre 3), en s'appuyant par exemple sur des analogies. Elles contribuent à la compréhension des causes par les sujets et est donc très liée à leur culture partagée. Il est évident que cette fonction joue un rôle important dans le cas scolaire.

Evaluer la technique

Les savoirs envisagés ici portent sur l'étendue, les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs. Les fonctions évaluer, faciliter et motiver sont parfois intimement associées : la mise en évidence de certaines difficultés (*évaluer)* peut entraîner au bout d'un certain temps la production d'améliorations (*faciliter)* dont la motivation est donc fournie par l'évaluation.

> *Evaluation des techniques d'Analyse-Synthèse et d'allègement des contraintes*
> L'Analyse-Synthèse est particulièrement intéressante dans le cas où le but est de construire l'ensemble des objets solutions du problème (problème fort). Dans le cas d'un problème faible (seule la construction d'une solution est demandée), si on a une méthode pour construire une solution, l'Analyse-Synthèse n'est pas indispensable.
> La technique d'allègement des contraintes est une façon d'obtenir une solution. Elle est donc adaptée dans le cas faible. Dans le cas du problème fort, il reste à prouver que toutes les solutions construites conviennent bien, ce qui est souvent délicat.

Il faut bien considérer l'effort d'explicitation accompli ici dans une perspective d'utilisation, il s'agit d'un outil d'analyse à prendre sans rigidité. Comme je l'ai évoqué ci-dessus, il n'est pas toujours simple de distinguer les six fonctions ainsi dégagées, Evaluer/Faciliter/Motiver par exemple, ou Expliquer/Motiver. Ceci revient dans certains cas à refermer l'éventail technologique en se cantonnant aux verbes utilisés par Y. Chevallard, mais en ayant au moins la conscience qu'y sont incorporés des savoirs répondant à des finalités qui peuvent être distinguées si nécessaire. Par ailleurs, ce modèle a été élaboré pour analyser un discours précis, il se transfère bien dans celui des mathématiques scolaires. Je n'exclus pas du tout que la prise en compte d'autres fonctions soit pertinente dans d'autres contextes. Par exemple, la fonction *Produire des types de tâches et des techniques* n'apparaît pas. Dans l'état actuel des contextes dans lesquels j'ai travaillé, j'ai tendance à considérer que toutes les fonctions sont impliquées dans la production dont elles détaillent diverses dimensions. En mathématiques, nous savons que théories et technologies donnent naissance à des techniques inédites mais les mêmes éléments de savoirs assurent indissociablement a posteriori l'une ou l'autre des autres fonctions, notamment *Valider* et *Motiver*. Mais il est possible que, dans une étude plus centrée sur les phases d'émergence technique que celle que j'ai réalisée (voir chapitre 3, la notion d'ethnopraxéologie), il soit intéressant de considérer cette fonction comme distincte des autres.

5. Les praxéologies mathématiques complexes associées à un type de tâches

Pour en terminer avec les réflexions développées ici quant à l'utilisation des techniques mathématiques, je reviendrai au cas des interventions au niveau *r-convoquée* où le résolveur porte la responsabilité de reconnaître un type *T* et de choisir parmi plusieurs techniques connues pour traiter certaines tâches de ce type. De telles situations suscitent un besoin de réorganisation des praxéologies mathématiques "mono-techniques" relatives à *T* qui ont été successivement produites ou enseignées, ce que j'ai proposé de prendre explicitement en charge dans le modèle praxéologique en envisageant des Praxéologies Mathématiques intégratrices, désignées par l'expression *praxéologie mathématique ponctuelle complexe relative à un type T* :

> "A partir de ces éléments, peut être construite une nouvelle organisation praxéologique associée à *T* qui se décrit de la façon suivante : $[T, (\tau_k, \theta_k^p\text{-}\theta_k^{th}, \Theta_k)_k, \theta^T]$ où θ^T, la technologie associée à *T*, intègre les technologies θ_k dans un ensemble plus large situant les techniques les unes par rapport aux autres, cernant leurs domaines respectifs d'efficacité." (Castela 2008a, p. 168)

Cette coordination ne se traduit pas par une simple juxtaposition des technologies relatives aux techniques τ_k, elle est l'occasion de développer des savoirs d'évaluation, qui s'efforcent de cerner les secteurs de plus grande pertinence des τ_k, qui facilitent les choix des utilisateurs en définissant des points de repères (je pense par exemple aux questions relatives au type de tâches "Déterminer noyau et image d'une application linéaire" présentées par M. Rogalski pour guider le choix de la technique -1997, p. 176, cf. II.3.). L'exemple des tâches relatives aux inégalités étudié dans (Castela 2008a) montre qu'il n'est pas nécessairement pertinent d'attendre de ce travail qu'il redéfinisse des types de tâches restreints plutôt associés à une seule technique. Comme le mettent en évidence les recherches sur les pratiques expertes, la flexibilité est l'une de leurs grandes forces, elles s'accommodent mal de structures trop cloisonnées.

Une telle multiplicité de techniques au sein d'une même OM associée à un type de tâches *T* n'est pas exclue de la TAD. Ainsi M. Bosch et Y. Chevallard (1999) envisagent qu'une OM ponctuelle soit "un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches" (p.86). Mais la plupart des textes qui se réclament de ce cadre insistent sur le caractère normalisant des institutions, lesquelles privilégient souvent une technique. Sans avoir spécifiquement travaillé ce domaine, il me semble par exemple que certaines Banques d'Exercices en Ligne actuellement disponibles contredisent cette affirmation, en élaborant des corpus d'exercices pour faire travailler une multiplicité de techniques : c'est ainsi le cas de l'UeL (Université en Ligne) qui prévoit des interfaces conçues sur la base d'une liste de méthodes (Cazes &Vandebrouck 2008, p. 193).

Il me paraît particulièrement nécessaire de mettre en avant le type d'organisation des savoirs que constituent les Π_M complexes pour la raison suivante : elles transgressent souvent la structuration du texte du savoir mathématique, tel qu'il est notamment enseigné, déterminé par les savoirs théoriques. Les techniques associées dans les Π_M complexes sont en général validées par des éléments technologiques théoriques différents, qui peuvent être issus de plusieurs théories. C'est pourquoi ces Praxéologies Mathématiques qui ne relèvent pas souvent du même thème, peuvent aussi appartenir à des secteurs, voire des domaines différents (Chevallard 2002). Ceci fait écho à la difficulté signalée dans VII.1 de leur prise en compte en tant qu'enjeu d'apprentissage (y compris au niveau implicite du curriculum praxique) et crée des obstacles objectifs à la construction par les élèves de telles organisations, si elle n'est pas accompagnée par l'enseignement.

VIII. Synthèse

Du parcours réalisé dans ce chapitre, je retiendrai trois axes permettant d'analyser les situations rencontrées par un individu ou un groupe et les conditions dans lesquelles cet individu ou ce groupe affrontent la situation :

- Singulier[32] $\leftrightarrow$ Générique
- Inédite $\leftrightarrow$ Familière
- Démuni $\leftrightarrow$ Outillé

Le premier axe décrit le caractère plus ou moins isolé de la situation. On oppose aujourd'hui plutôt 'spécificique' à 'générique', mais à mon sens, il est intéressant de conserver à l'adjectif 'spécifique', qui fait référence à la notion d'espèce, sous-groupe du genre en Sciences Naturelles, une certaine dimension de généralité locale, totalement absente du terme 'singulier'. J'ai été tentée d'opposer Régulier à Singulier. Mais cet adjectif renvoie à la notion de règles : est régulier ce qui est conforme à la règle, initialement dans un contexte juridique. Il est intéressant de noter qu'un léger jeu sur les mots, substituant 'loi', au sens scientifique du terme, à 'règle', permet de dire que le Générique est bien le Régulier en tant que, potentiellement au moins, modélisable par des lois, ce que justement n'est en aucun cas le Singulier.

Le deuxième axe est relatif au rapport de l'individu ou du groupe à la situation. Il ne coïncide pas avec le premier. Certes, le singulier au sens strict est nécessairement inédit, mais si l'on néglige la dimension temporelle, une situation unique, susceptible de reproduction à l'identique, peut être à la fois singulière et familière. Par ailleurs, le générique peut être également inédit ; il s'agit d'envisager ici la confrontation à un genre (ou un type) nouveau de situations que l'individu ou le groupe entreprend de traiter dans sa généralité. Le couple (Inédit, Singulier) est à la base d'une créativité tactique face à la nouveauté, le couple (Inédit, Générique) d'une créativité stratégique qui pousse à la thématisation et à la conceptualisation. La première configuration est le royaume des explorateurs, des pionniers[33], des premières incursions dans des terres inconnues où l'on ne reviendra peut-être pas si elles se révèlent inhospitalières, la seconde celle des fondateurs[34], des bâtisseurs, des organisateurs et … des théoriciens. On a vu dans ce qui précède que ces deux types de démarches vivent au sein de la recherche mathématique.

Le troisième axe est relatif aux ressources dont dispose l'individu ou le groupe pour traiter la situation. Face à l'Inédit, il faut au moins inventer un usage nouveau des outils disponibles (Inédit-Outillé), et parfois créer des outils nouveaux (Inédit-Démuni). L'Inédit est donc le pôle de la créativité, qu'en est-il du Familier ? L'association Familier-Démuni existe : ce sont les situations dont on sait qu'on ne sait pas les traiter ou bien celles dont on se souvient qu'on les a affrontées avec succès sans avoir retenu comment. Ces deux cas ne sont pas identiques, le premier est porteur d'une certitude d'impuissance, le second d'un certain optimisme, fondé sur

[32] Singulier est emprunté au latin *singularis*, unique, isolé, solitaire, qui se rapporte à un seul (Dictionnaire historique de la langue française, Le Robert).

[33] Pionnier : homme qui est le premier à se lancer dans une entreprise, qui fraye le chemin. (Petit Robert)

[34] Fonder s'emploie dès l'origine au sens matériel 'd'établir sur des fondations'. Il signifie aussi au figuré et comme en latin, instituer, établir (Dictionnaire historique de la langue française, Le Robert).

une confiance dans des capacités d'invention situées dans l'ici et maintenant. Un rapport tactique aux situations (Castela 2008b) qui, misant sur l'improvisation, n'engage pas dans la capitalisation stratégique, fait de l'association Familier-Démuni une normalité. L'histoire humaine tend au contraire à produire les ressources matérielles et intellectuelles permettant d'affronter le Familier-Générique qui, ainsi outillé, devient affaire de reproduction, de réinvestissement.
Mais il n'y a de stricte reproduction qu'en l'absence de variations, c'est le cas d'un Singulier répétitif dont on sait bien qu'il existe au sein des activités humaines. Cependant, les situations d'un même genre ont le plus souvent des caractéristiques singulières qui les différencient et font que la familiarité avec le générique n'exclut pas la rencontre d'inédit : les utilisations d'outils déjà disponibles nécessitent en général des adaptations, donc une certaine créativité. Et inversement, les situations, mêmes inédites et singulières telles que celles qui occupent une partie du temps des chercheurs en mathématiques, le sont rarement totalement et il est exceptionnel que l'outillage accumulé soit absolument inutile. Ces explorateurs ne sont pas des naufragés, contrairement à ce que tendrait à faire croire la conception que mettent en avant certaines visions du *Problem Solving*.
En résumé, sur chacun des trois axes d'analyse des situations que je viens de décrire, les curseurs peuvent occuper différentes positions entre les pôles Singulier-Générique, Inédit-Familier et Démuni-Outillé, auxquelles correspondent des répartitions différentes, au sein de l'activité requise, entre création et utilisation de savoirs. J'estime que l'éducation mathématique se doit de confronter les élèves à des tâches qui réalisent tous les équilibres possibles. C'est nécessairement un choix idéologique que de privilégier l'un au détriment des autres. Je choisis de ne pas mettre en avant l'inventivité associée au triplet Singulier-Inédit-Démuni et de revendiquer une approche du triplet Générique-Familier-Outillé qui accorde une place non dévaluée à la généricité pratique des situations d'utilisation et aux processus de familiarisation et d’outillage (au sens de production d’outils) qu’elle permet.

Or les analyses que j'ai présentées dans ce premier chapitre des savoirs en jeu dans la résolution de problèmes me conduisent à considérer que l'essentiel du bagage technique et technologique dont je soutiens qu'il favorise l'utilisation des savoirs théoriques mathématiques n'est pas directement enseigné, ni dans l'enseignement supérieur, ni au lycée. Il appartient donc aux étudiants, aux élèves de les construire à partir de leurs propres expériences de résolution, du parcours praxique qu'ils ont accompli. Ceci confère au travail personnel, à l'étude réalisée en dehors de la classe, une importance décisive. Le travail personnel a donc constitué l'objet de recherches dont je rends compte dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Le travail personnel en mathématiques dans le supérieur et au lycée

I. Introduction

Comme je l'ai dit dans la conclusion du chapitre précédent, j'ai été amenée à m'intéresser au travail personnel des étudiants dans un premier temps, des lycéens de la filière scientifique ensuite, pour la raison suivante : les activités de résolution de problèmes, prescrites institutionnellement et organisées par les enseignants à l'intention des élèves[35], ont une dimension générique qui n'est pas totalement prise en charge par le savoir essentiellement théorique explicitement enseigné et institutionnalisé. En d'autres termes, les problèmes donnés à résoudre suscitent des besoins de connaissances mais le processus de construction de ces connaissances pratiques utiles n'est que partiellement accompagné didactiquement, il exige donc de l'étudiant qu'il prolonge son étude au-delà de la situation didactique, en s'appuyant sur les diverses ressources que celle-ci lui aura fournies, dont les activités de résolution de problèmes réalisées. C'est à cette dimension du travail personnel que je me suis particulièrement intéressée, c'est-à-dire à ce que l'étudiant est amené à faire en plus du travail organisé par l'enseignant pour que les savoirs enseignés et plus largement les expériences mathématiques vécues aient des effets d'apprentissage. Plus précisément, j'ai centré mon attention sur les apprentissages évalués dans les cadres institutionnels considérés, c'est-à-dire ceux qui, explicités ou non par l'institution, y déterminent ou au moins y favorisent la réussite.

Les travaux que j'ai réalisés apportent des éléments d'information sur l'éventail des gestes d'étude réalisés par les élèves ou étudiants, qu'ils soient voulus, organisés, par l'institution d'enseignement ou qu'ils ne le soient pas. En ce sens, ils contribuent à dépasser le diagnostic simpliste qui explique l'échec par le manque de travail : comme l'a montré A. Barrère (1997), la figure la plus représentée en lycée est celle de l'élève qui travaille beaucoup pour des résultats décevants, c'est la nature du travail accompli qu'il s'agit donc de questionner. Et l'on sait peu de choses sur ce domaine qui reste aujourd'hui encore largement inexploré. Mais j'insisterai sur le fait suivant : la motivation première de mon orientation dans cette direction de recherche est la conviction qu'au moins à partir du lycée, une partie de l'étude personnelle qui conditionne la réussite n'est pas encadrée par le système didactique ; si elle est initiée, elle ne l'est que fugitivement et du bout des lèvres. Les lycéens, les étudiants doivent donc investir un territoire de l'étude autonome. Tous n'y réussissent pas également parce que tous n'y ont pas été également préparés par leur histoire personnelle, notamment par leur scolarité antérieure et par leur éducation familiale. Je postule en particulier que les jeunes d'origine populaire, du fait de la position sociale de leurs familles relativement aux mondes de production et de transmission du savoir académique, sont particulièrement mis en difficulté par l'injonction paradoxale que représente le fait de devoir s'assujettir à une institution dont la fonction est l'organisation des apprentissages en se faisant lycéen ou étudiant tout en ayant à se poser comme auto-didacte. Comme la plupart des didacticiens, je ne peux pas accepter de déléguer au parcours non scolaire l'entière responsabilité de susciter chez les enfants et adolescents le développement de capacités indispensables à la réussite scolaire ou universitaire. C'est pourquoi il m'intéresse de mieux connaître les gestes de l'étude et spécifiquement ceux qui complètent l'organisation didactique et ce dans le but de concevoir des dispositifs visant à en favoriser la constitution chez les élèves. C'est pourquoi également,

[35] Par commodité, je vais dans ce qui suit, utiliser comme on le fait en anglais le terme élève au sens générique de *student*, c'est-à-dire pour désigner aussi bien l'étudiant universitaire que l'élève de CPGE, lycée, collège ou école primaire. J'ai tenté d'utiliser plutôt étudiant mais j'ai échoué à sortir de l'ornière linguistique qui fait qu'en français, c'est plutôt le nom 'élève' qui est convoqué dans un écrit sur l'apprentissage.

il m'intéresse d'explorer cette thématique dans plusieurs institutions d'enseignement, ainsi que je l'ai fait dans la recherche comparant élèves de Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (CPGE) et étudiants sortant de licence (Castela 2004), de façon à repérer en quoi certaines dimensions du fonctionnement institutionnel sont plus ou moins favorables à la construction de certains gestes d'étude.

Dans ce chapitre, je montrerai comment, pour analyser le travail personnel, j'utilise, en le complétant pour l'élève, le modèle de structuration du milieu, construit dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques. Cet outil sera ensuite investi dans la présentation des travaux que j'ai consacrés aux gestes d'étude des lycéens de Première Scientifique d'une part, des élèves de CPGE et des étudiants de la filière universitaire de Licence d'autre part. Le deuxième volet centré sur l'enseignement supérieur sera précédé d'un tour d'horizon succinct des recherches consacrées en France au travail étudiant, essentiellement dans une perspective sociologique. Je terminerai en envisageant des pistes de futures recherches sur un sujet fort peu exploré.

II. Analyser les gestes de l'étude grâce au modèle de structuration du milieu

Pour interroger l'idée de complémentarité au travail organisé par l'enseignant et en proposer une analyse, je me suis appuyée sur un outil clé de la Théorie des Situations Didactiques, à savoir le modèle de structuration du milieu, introduit par G. Brousseau, modifié par C. Margolinas puis complété par I. Bloch pour le professeur et par F. Génestoux pour l'élève (voir Margolinas 2002, p.145).

Apparaissent dans ce modèle des positions que vont venir occuper (ou ne pas occuper) des personnes, professeur ou élève, soumis à certains assujettissements institutionnels, donc plus exactement des sujets. Dans la suite, je parlerai ainsi des positions de E ou de P.

Tableau 1 : Modèle de structuration du milieu (C. Margolinas, I. Bloch, F. Génestoux)

M3 : M-de construction		P3 : P noosphérien	S3 : Situation noosphérienne	Sur-didactique
M2 : M-de projet		P2 : P constructeur	S2 : Situation de construction	
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P projeteur	S1 : Situation de projet	
M0 : M-d'apprentissage	E0 : Elève	P0 : Professeur-pour -l'élève	S0 : Situation didactique	
M-1 : M-de référence	E-1 : Elève apprenant	P-1 : Professeur en action	S-1 : Situation d'apprentissage	A- didactique
M-2 : Milieu objectif	E-2 : E agissant	P-2 : P Observateur	S-2 : Situation de référence	
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E objectif		S-3 : Situation objective	

Dans le cours que j'ai donné, en 2005, à la XIIIième école d'été de didactique des mathématiques sur le thème de la différenciation scolaire (Castela 2008b), j'ai proposé une version de ce modèle qui reformule certaines expressions et définit des positions de E aux deux premiers niveaux surdidactiques, E1 et E2. J'en ai ensuite présenté une nouvelle version

lors d'une intervention en 2006 au séminaire national de didactique des mathématiques (Castela 2007a), version qui malencontreusement n'a pas été publiée dans les Actes mais que je reprendrai plus loin dans cette note.
Pour illustrer mon propos, je m'appuierai dans cette partie sur le contexte de l'enseignement en Seconde et Première Scientifique. Pour ce faire, j'aurai besoin de préciser en quoi les conditions de l'étude des praxéologies mathématiques y sont différentes de celles qui sont réalisées au collège.

1. Etude des praxéologies mathématiques : un processus de désengagement du système didactique

Selon l'analyse développée par Y. Chevallard (2002), le processus de reconstruction didactique d'une organisation mathématique comporte six moments : Moment de la première rencontre avec *T*, Moment de l'exploration de *T* et de l'émergence de la technique τ, Moment de la construction du bloc technologico-théorique, Moment de l'institutionnalisation, Moment du travail de la praxéologie et en particulier de la technique, Moment de l'évaluation (de l'efficacité et des limites de la technique au regard des tâches relevant de *T* mais aussi des acquis relatifs à cette OM de celui qui étudie). Le fait que j'envisage la construction d'une praxéologie mathématique Π_M, fonctionnelle et destinée à des débutants, donc dotée d'une technologie spécifique adaptée à ce contexte, ne me conduit en rien à modifier ce modèle.

Comme je l'ai déjà signalé, si les savoirs théoriques apparaissent explicitement dans les programmes, la plupart des Π_M associées en sont absentes, elles sont au mieux très fugitivement évoquées. Dans ce contexte, le professeur est fortement assujetti à organiser l'étude des savoirs théoriques ; par contre, les assujettissements relatifs aux praxéologies, et particulièrement l'élaboration de la composante pratique de la technologie sont plus flous. Ils dépendent en premier lieu de la valeur relative attribuée dans l'institution à la pratique, relativement à la théorie. Ainsi, certains éléments mis en évidence par la recherche que j'ai consacrée aux objets d'étude des étudiants de l'enseignement supérieur, donnent à penser qu'en CPGE, institution orientée vers la formation d'ingénieurs, se transmet une culture dont on peut dire, a minima, qu'elle valorise l'utilisation des savoirs mathématiques et fait apparaître la construction des Π_M comme des enjeux d'apprentissage clairement identifiés[36].
La situation dans l'enseignement secondaire général est différente dans la mesure où la perspective professionnelle est plus éloignée. L'étude du savoir théorique finalise l'enseignement et le structure, régissant notamment la répartition du temps scolaire attribué aux mathématiques. Si la dotation temporelle est assez généreuse au regard du nombre de praxéologies à étudier, P0 peut organiser dans S0 les différents moments de l'étude des praxéologies associées aux savoirs théoriques nouveaux. En ce sens, les praxéologies en question sont constituées pour le professeur comme des enjeux didactiques. Toutefois la façon dont l'existence de ces enjeux est rendue perceptible aux élèves peut être variable.

On peut considérer que l'institutionnalisation est le moyen le plus direct, le plus explicite, de manifester l'existence de ce que G. Brousseau (1996, pp.23-26) appelle un contrat fortement didactique. Or, contrairement à ce qui se passe par la force des choses dans un manuel, P0 peut décider, par manque de temps ou par crainte de s'engager dans l'enseignement de recettes (voir les objections relatives à l'enseignement de méthodes, Ch1.V), de ne pas recourir lui-même à l'écrit lorsqu'il s'agit d'institutionnaliser la technologie, du moins sa composante pratique, se contentant d'interventions orales. Mais, tous les entretiens que j'ai pu réaliser avec des élèves de Première S le montrent, prendre en

[36] Je n'ai pas réalisé d'observations de classe qui me permettraient de repérer les voies de cette identification aujourd'hui, je ne pourrai donc qu'évoquer mon expérience. Il y a presque 40 ans, dans la classe de Mathématiques Spéciales que j'ai fréquentée, un rituel partagé par professeur et élèves mettait en avant les 'Astuces' rencontrées au cours de démonstrations ou d'exercices.

notes les commentaires du professeur est une pratique rare et limitée en mathématiques. Ainsi, l'explicitation orale de la technologie pratique, clairement associée à la technique, peut ne pas avoir de fonction institutionnalisante pour certains élèves ; pour tous, c'est une forme affaiblie d'institutionnalisation qui minore l'importance accordée aux savoirs technologiques non théoriques.
Il reste que le bloc practico-technique [T, τ] peut demeurer un enjeu didactique pour P0 qui en organise l'étude en développant les moments d'exploration du type de tâches T, d'émergence puis de travail et d'évaluation de la technique τ. C'est une forme de contrat d'ostension (Brousseau 1996, p.46) qui se noue autour de la praxéologie, je ferai l'hypothèse que le temps consacré à l'étude, s'il est suffisant, peut être perçu par les élèves comme la manifestation des intentions didactiques du professeur. De plus, même sans institutionnalisation formelle, les commentaires accompagnant la correction des exercices qui font travailler la technique peuvent, si ces exercices sont assez nombreux, réaliser une manière d'institutionnalisation par répétition. Encore faut-il que les élèves entendent ce message indirect. J'utilise à dessein le verbe 'entendre' pour manifester le lien très direct des réflexions développées ici avec la notion de 'malentendus scolaires' qui, avec celle de 'secondarisation' (Bautier & Goigoux 2004), est au coeur des analyses consacrées par les chercheurs du groupe Escol aux inégalités d'apprentissage (Bautier & Rayou 2009). Par l'ensemble des tâches dans lequel il les engage, P0 cherche à créer pour ses élèves, le bloc [T, τ] comme enjeu d'un apprentissage que simultanément il cherche à favoriser par un exercice suffisamment développé de la technique. Mais les élèves qui ont un rapport tactique aux activités mathématiques ne peuvent pas saisir les signaux qui leur sont ainsi adressés.
La recherche consacrée par C. Félix (2002) aux gestes d'étude en mathématiques et en histoire de collégiens de Troisième, confirmée par plusieurs déclarations des élèves de Première S en réussite que j'ai interviewées (Castela 2007c), me conduit à affirmer qu'au collège, le rythme didactique permet à P0 de déployer l'étude des praxéologies contrôlées par les savoirs théoriques du programme et que les bons élèves réalisent pour l'essentiel en classe les apprentissages visés. Ils identifient notamment la généricité des types de tâches sous la diversité des exercices, ce qui n'est pas le cas des élèves en difficulté interrogés par C. Félix. Ceux-ci éprouvent le besoin de constituer ce que C. Félix considère comme un milieu auxiliaire de l'étude en cherchant des exercices complémentaires, c'est-à-dire qu'ils éprouvent le besoin de prolonger le parcours organisé par P0.

La situation change au lycée et particulièrement à l'entrée en Première S. Le rythme didactique s'accélère, les objets de savoir théoriques sont plus nombreux, P0 doit renoncer à prendre à sa charge l'organisation des apprentissages relatifs à certaines des praxéologies qu'il introduit pour illustrer le savoir théorique. Il en engage l'étude, manifestant à ceux des élèves qui ont conscience du caractère générique de tout exercice proposé par le professeur, l'existence d'enjeux d'apprentissage, en l'occurrence des objets praxéologiques, mais l'étude en est vite abandonnée, elle est à prolonger par les élèves.

Il reste enfin à prendre en compte le fait qu'au lycée (comme a fortiori dans le supérieur) les praxéologies plus anciennes sont sollicitées dans le cadre de situations didactiques consacrées à des objets de savoir nouveaux, dans des conditions qui appellent leur évolution (Ch1-VII.1) et leur intégration à des praxéologies ponctuelles complexes (Ch1-VII.5), c'est-à-dire regroupant dans une même organisation plusieurs techniques, contrôlées par des savoirs théoriques distincts, dont nécessairement au plus un seul fait partie du présent didactique. Les contraintes chronogénétiques rendent très difficiles l'intégration de ces objets dans S0, le professeur ne peut guère s'y consacrer et les élèves n'osent pas interpeller le professeur à leur sujet, puisque relevant du passé didactique, ils sont censés n'être plus enjeux d'apprentissage, tout à leur propos est supposé maîtrisé. S'y consacrer pour reprendre l'étude relève d'une décision individuelle.

2. Différencier les positions de E aux niveaux a-didactique et didactique

Le modèle que je commenterai maintenant est aujourd'hui le suivant :

Tableau 2 : Modèle de structuration du milieu modifié

M3 : M-de construction		P3 : P noosphérien		Sur-didactique
M2 : M-de projet	**E2** **E-étudiant autonome**	P2 : P constructeur		
M1 : M-didactique	**E1 :** **E-étudiant localement autonome**	P1 : P projeteur		
M0 : **M- de résolution de problèmes**	**E0 :** **E-élève-du-Professeur**	P0 : Professeur-pour -l'élève	S0 : Situation Didactique	Didactique
M-1 : M-de référence	**E-1 :** **E-résolveur de problèmes**	P-1 : Professeur en action	**S-1 : Situation de résolution de problèmes**	A- didactique
M-2 : Milieu objectif	E-2 : E agissant	P-2 : P Observateur	S-2 : Situation de référence	
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E objectif		S-3 : Situation objective	

La première modification que j'ai apportée au tableau 1 concerne le niveau -1, c'est-à-dire celui de la situation a-didactique. Je considère qu'il y est fait dévolution à E de la position de mathématicien, plus spécifiquement en général de résolveur de problèmes, et non d'apprenant. Je fais donc ici une distinction entre processus de production de savoirs et processus d'apprentissage : résoudre un problème, établir qu'une assertion est vraie en ayant résolu le problème que représente sa validation ne doivent pas être automatiquement associés à une nouvelle construction cognitive chez le résolveur. Selon la perspective que j'ai adoptée dans le cours de l'école d'été, consacré à une approche didactique des processus différenciateurs à l'œuvre dans le système scolaire, il s'agit de se défier d'une interprétation trop simpliste du constructivisme en prenant acte des travaux qui, comme ceux du groupe Escol (Bautier, Charlot & Rochex 1992 ; Charlot 1997, 1999) dans un cadre plutôt sociologique ou en didactique des mathématiques, ceux de M-J. Perrin (1993), D. Butlen et M. Pezard (2003), montrent que certains élèves sont dans un rapport tactique aux situations affrontées et ne cherchent pas à y apprendre pour l'avenir. Problématiser le lien résolution-apprentissage s'impose particulièrement dans le cas de problèmes isolés, a fortiori si ces activités n'ont que de très courtes phases a-didactiques comme c'est très souvent le cas dans l'enseignement ordinaire, particulièrement à partir du lycée. Mais l'expérience a prouvé que ce point de vue était également pertinent dans le cas des ingénieries élaborées dans le cadre de la TSD puisque l'existence d'une phase d'institutionnalisation menée par le professeur dans la situation didactique est apparue comme une nécessité dans tous les cas. Même si le but premier de cette phase est la mise en relation explicite des savoirs reconnus dans la classe avec les savoirs mathématiques historiquement construits, elle prend d'abord une dimension plus locale qui joue un rôle important dans l'identification de la généricité de ce qui a été accompli et l'homogénéisation des parcours cognitifs des élèves dans les phases a-didactiques. Ce processus de décontextualisation-institutionnalisation étant intégré dans les ingénieries, le travail de M-J. Perrin dans les classes faibles a montré qu'elles n'en restaient pas moins inefficaces pour certains élèves.

Dans cette perspective, la position E-1 est celle d'un résolveur de problèmes. Ce sont les positions suivantes qui intègrent un projet d'apprentissage relatif aux objets de savoirs mathématiques (savoirs théoriques et praxéologies mathématiques). Dans les niveaux didactique et surdidactique, E est tout à la fois apprenant et étudiant en ce qu'il veut apprendre et sait que cet apprentissage dépend de son propre engagement dans l'étude. Les travaux sociologiques déjà évoqués ont montré que la dévolution de cette posture n'est pas réalisée pour tous les enfants qui entrent dans le système scolaire. La modification du modèle que je propose permet de rendre compte d'un tel phénomène. Elle n'a pas pour conséquence de nier que certains élèves apprennent pendant qu'ils résolvent des problèmes. L'emboîtement des niveaux ne correspond pas à un enchaînement chronologique, des élèves, comme le professeur d'ailleurs, peuvent, au cours de la même séquence, occuper diverses positions dans l'échelle des situations. Certains élèves, sincèrement impliqués dans la recherche d'une solution au problème posé, cherchent simultanément ce que le professeur a voulu qu'ils y apprennent, voire ont déjà le pli d'apprendre en toute indépendance des intentions scolaires.

3. Différencier les positions de E aux niveaux didactique et surdidactique

Ce point étant maintenant précisé, il faut travailler à la différenciation entre les niveaux 0, 1 et 2 pour analyser le travail personnel attendu des élèves et éclaircir l'idée de gestes d'études complémentaires.

Comme je viens de l'affirmer, ce n'est pas la posture d'apprenant qui caractérise E0 puisqu'elle est commune aux positions didactique et surdidactique. C'est cette réflexion qui m'a conduite à faire évoluer à partir du séminaire de 2006, la dénomination de la position E0 en renonçant à l'expression E-apprenant figurant dans (Castela 2008b). Le niveau 0 est caractérisé par l'interaction didactique entre E0 et P0 : E0 est animé du projet de réaliser les apprentissages que lui désigne P0 et s'engage pour ce faire dans le parcours d'étude organisé par le professeur au sein de la situation didactique. C'est pourquoi j'ai finalement repris l'idée d'Elève présente dans le modèle de C. Margolinas en désignant E0 comme la position d'Elève-du-Professeur. Le travail personnel qui relève de ce niveau est celui qui est prescrit par P0, en relève par exemple tout ce qui est réalisé au niveau S-1. Mais cette partie de l'étude ne se déroule pas nécessairement en classe, la préparation des exercices ou devoirs à la maison est partie prenante de la situation didactique puisque la relation didactique autour de ce travail continue au moment de la correction ; E0 pourra valider sa propre production par comparaison avec celle du professeur, repérer les erreurs ou les maladresses, il pourra interpeller P0 pour obtenir des explications complémentaires et éventuellement solliciter un examen de sa propre solution si celle-ci est très différente de celle du professeur.

Les interviews réalisés avec des élèves de Première S ont montré que cette partie du travail ne respectait pas nécessairement l'avancée du temps de S0 : les moments de révision des contrôles peuvent être l'occasion pour certains élèves de reprendre pour le terminer le travail relevant de S0.

Le niveau surdidactique se définit par la clôture de la relation didactique, étudiants et professeur ne coopèrent plus et en conséquence par une évolution *topogénétique* : à partir de S1, l'étudiant prend la responsabilité de son étude. Il est mis en situation de le faire au lycée parce que, comme nous l'avons vu dans la section 1, P0 doit renoncer à prendre à sa charge l'organisation des apprentissages relatifs à certaines praxéologies.

Les praxéologies introduites dans S0 pour illustrer les savoirs théoriques nouveaux, sont construites comme enjeux d'apprentissage, au moins pour ceux des élèves qui ont depuis le collège compris que tout exercice posé par P0 avait un objectif second d'apprentissage. Les débuts de l'étude réalisés dans le cadre de S0, en particulier les quelques résolutions proposées, et leurs corrections constituent un milieu qui contient des objets dont l'étude est à mener[37] par des gestes dont l'initiative est à la charge de E1. J'ai nommé cette position

[37] Ce que C.Félix dans sa thèse appelle un milieu à « trous » (Félix 2002, Félix et Joshua 2002).

'E-autodidacte local' dans le cours de l'école d'été, 'E-étudiant localement autonome' ensuite, inspiré par la formulation de F. Génestoux (2002). Celle-ci, s'intéressant au travail de l'élève hors système scolaire, ne considère qu'une seule position sur-didactique alors que j'en distingue deux comme je vais l'expliquer. J'ai renoncé à l'adjectif autodidactique, certainement excessif ici puisque E1 ne détermine pas lui-même ses objets d'étude, directement désignés par l'actualité du temps didactique et par P0, puisque également E1 s'appuie sur un milieu issu de l'interaction didactique dans S0.

Mais le travail de reprise des praxéologies anciennes conduit les élèves à se consacrer à des objets que P0 ne leur désigne pas comme enjeux d'apprentissage. C'est en position E2 qu'ils le font, position différenciée de E1 par l'existence d'une responsabilité *chronogénétique* d'introduction autonome d'objets d'étude. Dans cette position, l'étudiant doit également agir au niveau *mésogénétique*. Il intègre au milieu de son étude, de sa propre initiative, non seulement la situation didactique la plus récente et son développement éventuel dans S1, mais aussi d'autres éléments dispersés dans le temps et dans l'organisation théorique du cours, ce qui constitue une deuxième différence avec E1. C'est une vision plus globale du savoir enseigné qui est impliquée, ce qui a motivé l'usage de l'expression 'E-autodidacte global' dans le cours de l'école d'été, que j'ai ultérieurement remplacée par 'E autonome' qui tient compte du fait que la position considérée étant encore assujettie à une institution d'enseignement, la notion d'autodidacte reste excessive.

L'action de E2 est donc à la fois chronogénétique et mésogénétique : E2 prend des initiatives relativement au choix des objets de son étude, qui le conduisent à développer un milieu chronologiquement et mathématiquement transversal. Mais la prise en charge de la constitution du milieu pour l'étude n'est pas caractéristique de ce niveau. Elle peut être présente au niveau S1. Si le nombre de rencontres avec une technique donnée organisée par P0 est très faible, E1 peut décider de résoudre de nouveaux exercices, dans le but de disposer d'un domaine d'expérience plus large, ce que C. Félix nomme 'milieu auxiliaire de l'étude', mieux à même d'étayer un repérage de la généricité et la construction praxéologique. Les éléments recueillis en Première S donnent à penser que cette extension de la pratique est avant tout réalisée grâce à la sollicitation de systèmes didactiques auxiliaires (recueils d'exercices corrigés, annales d'examen, banques d'exercices en ligne) dans lesquels E1 décide de reprendre une position E0. Il n'est pas automatique qu'une fois ce travail complémentaire accompli, l'élève réoccupe la position E1 pour tirer parti de la nouvelle situation didactique élargie qu'il a constituée : les élèves faibles interrogés par C. Félix qui, contrairement aux élèves en réussite, n'ont pas réussi à repérer la généricité des exercices travaillés dans S0, n'y parviennent pas plus à partir de leur pratique complémentaire.

Les positions E1 et E2 étant définies, on peut se demander s'il y a une quelconque légitimité à les situer aux mêmes niveaux 1 et 2 que les situations de Projet et de Construction du Professeur. En toute rigueur, je n'en suis pas certaine : P1 élabore une leçon, P2 conçoit l'enseignement d'un thème (Margolinas 2002). Une seule situation de niveau 2 contrôle (dans une analyse descendante) ou prend pour milieu (dans une analyse ascendante) plusieurs situations de niveau 1, comme le fait E2 dans les deux cas évoqués ci-dessus. C'est ce qui justifie l'identification des niveaux E2 et P2. Par contre, il me semble que l'étudiant autonome est amené à solliciter des situations de niveaux 0 et 1 plus éloignées temporellement et surtout mathématiquement que celles du professeur qui travaille sur un thème puisque, autant pour la reprise d'une praxéologie ancienne que pour la construction de praxéologies complexes, plusieurs thèmes relevant parfois de plusieurs secteurs sont en jeu. Mais, peut-être cette remarque interroge-t-elle avant tout la conception de la position P2 : est-il légitime de restreindre le travail accompli à ce niveau à l'étude d'un thème, ce terme étant bien pris dans le sens que lui donne l'échelle des niveaux de co-détermination (Chevallard 2002) ? Je ne m'avancerai pas sur cette piste de réflexion, n'ayant pas pris le professeur comme objet de mon travail. Néanmoins les réflexions développées dans le chapitre 1 (IV.4) suggèrent que l'Education Nationale attend des professeurs de mathématiques du secondaire, au moins dans leur choix de problèmes, qu'ils n'enferment pas leur travail dans une structuration par les thèmes.

Il existe enfin une position P3 de professeur-noosphérien : dans cette position, le professeur s'intéresse à des questions plus ou moins générales concernant l'enseignement des mathématiques. L. Coulange a proposé d'introduire un niveau E3 correspondant à la position d'Ecolier, c'est-à-dire de sujet de l'Ecole[38], terme utilisé dans le sens générique de toute institution d'enseignement, comme dans l'échelle des niveaux de co-déterminations (Chevallard 2002). Seraient en jeu à ce niveau la socialisation dans l'institution, le rapport au savoir au sens donné à cette expression dans (Bautier, Charlot & Rochex 1992), la découverte et l'appropriation des différentes positions pour l'élève existant dans l'institution considérée, les conduites sociales et cognitives attendues. Mais E3 n'est pas exclusivement concerné par des questions généralistes, non disciplinaires. Dans cette position, se construisent à partir des situations de niveaux inférieurs des connaissances relatives à la nature des mathématiques, à leur apprentissage et à leur utilisation ; c'est alors le processus d'acculturation mathématique qui se joue (voir Ch1-II.2). Il pourrait donc être intéressant de distinguer une position E3, encore concernée par le niveau Discipline de l'échelle des niveaux de co-détermination, d'une position E4 dont l'enjeu serait l'assujettissement aux institutions supérieures, plus génériques, en particulier à l'Ecole. Cette distinction permet au moins de dresser une manière de carte des recherches développées sur le thème du travail personnel : réalisées par des chercheurs en sciences de l'éducation ou sociologie, négligeant souvent l'analyse des spécificités disciplinaires, elles ne peuvent s'intéresser qu'à E4 et laissent inexplorés les autres strates du modèle. J'évoquerai ce point plus loin pour l'enseignement supérieur où l'influence de la nature des savoirs enseignés peut difficilement être négligée sans limiter fortement la validité des généralisations opérées à partir des études réalisées.

4. Brèves réflexions sur la notion de milieu

En utilisant le modèle de structuration du milieu, je fais très clairement référence à la TSD et aux développements proposés par C. Margolinas, particulièrement à son intervention à l'école d'été de 2001. Elle y discute les notions de milieu antagoniste et allié, distinction introduite par D. Fregona dans sa thèse[39] :

> "On dira qu'un milieu est antagoniste s'il est susceptible de produire des rétroactions sur les connaissances du sujet. On dira qu'un milieu est de nature alliée s'il ne permet que l'action du sujet, mais n'est pas susceptible de produire des rétroactions. Introduire ces distinctions laisse bien entendu entière la difficulté de savoir si un milieu potentiellement antagoniste est effectivement antagoniste dans une situation donnée, en s'inspirant de Perrin-Glorian 1999." (Margolinas 2002, p. 148)

Un milieu est antagoniste s'il n'est pas entièrement sous le contrôle de l'acteur, il peut produire des rétroactions que celui-ci n'avait pas prévues.

Dans son analyse des milieux du jeu du professeur dans les positions surdidactiques, C. Margolinas considère que le milieu M_{n+1} de P dans S_{n+1} intègre deux composantes : d'une part, selon l'interprétation du modèle de structuration proposé par G.Brousseau, la situation S_n devient milieu de la situation S_{n+1} ; d'autre part, suivant une proposition de M-J. Perrin, certains éléments issus de la situation supérieure S_{n+2} s'incorporent également à M_{n+1}. Dans tout ce qui précède, je n'ai utilisé que la première composante : le milieu de la situation d'étude de E1 est construit dans S0, certains élèves y adjoignant des situations auxiliaires S'0. Est-il légitime de considérer qu'il s'agit bien là d'un milieu au sens de la TSD ? Ce milieu est-

[38] Cette proposition n' a pas encore été intégrée dans un texte publié par L. Coulange.

[39] Je n'ai pas inclus cette thèse dans mes références où figurent seulement les textes que j'ai directement étudiés. lire.

il susceptible de produire des rétroactions qui en contrant les actions de E vont l'engager sur la voie de la construction de nouvelles connaissances ?
Il ne suffit pas pour répondre à cette question d'insister comme le font C. Félix et S. Joshua (2002, pp. 91-92) sur le fait que le milieu de l'étude est un milieu "à trous", c'est-à-dire contenant des ignorances : pour que les élèves construisent de nouvelles connaissances, pour qu'ils modifient leur rapport à certains objets de savoir, il faut que le professeur crée de l'ignorance, c'est-à-dire fasse naître un besoin de nouveau. Pour moi, c'est de dévolution qu'il est ici question et cela est pris en compte dans le modèle de structuration du milieu, dévolution nécessaire à ce que l'élève occupe une position donnée E_n. Dans les réflexions développées précédemment, le niveau 2 se distingue des précédents par le fait que cette dévolution n'y est pas prise en charge par le professeur, E2 doit se donner des objectifs d'apprentissage. Mais reste qu'une fois cet appel au savoir nouveau créé, rendu sensible à l'élève, demeure entière la question des rétroactions du milieu aux actions réalisées par E pour traiter l'ignorance. Il m'a toujours paru que la TSD ne pouvait être généralisée en dehors de l'école primaire (et même dans ce champ) sans que soit envisagée la nécessité pour l'élève de jouer contre lui-même. C'est un point que j'ai soulevé dans (Castela 2000) : dans le jeu de la recherche mathématique, le milieu est pour l'essentiel inerte, passif, en ce sens que ce n'est que sollicité par le mathématicien lui-même qu'il pourra réagir aux actions, aux affirmations du chercheur. C'est en général le couple (milieu, joueur) qui peut-être antagoniste au joueur lui-même qui accepte d'animer le milieu pour en faire un adversaire, avec le projet de pallier finalement son ignorance : c'est toute la question du contrôle. Autrement dit, dans la TSD, le milieu n'est pas en général antagoniste en soi, il a un potentiel d'antagonisme moyennant la dévolution au joueur du rôle de solliciteur de rétroactions. C'est le cas dans la situation a-didactique pour la résolution de problème, c'est le cas pour l'étude dans les niveaux sur-didactiques ; dans S0, l'élève peut partager avec le professeur cette responsabilité, mais à trop s'en décharger, il ne gagnera pas le jeu de l'apprentissage qui se joue à ce niveau.
Cette interprétation de la notion de milieu dans le cadre de la TSD me conduit à considérer qu'elle est bien en jeu dans la modélisation du travail de l'élève que je propose. A partir du niveau 0, le milieu pour l'étude est l'ensemble des ressources dont dispose E pour combler les ignorances dont le professeur P0 lui a fait dévolution ou qu'il a lui-même perçues en tant qu'étudiant autonome. Parmi les gestes d'étude qu'il devra réaliser, certains sont des gestes d'auto-contradictions, de sollicitation du pouvoir antagoniste du milieu. Dans cette perspective, il ne me semble pas qu'il y ait lieu de voir une différence entre la notion de milieu en jeu dans la TSD et celle qui apparaît dans la thèse de C. Félix :

> "le triptyque "élève-professeur-savoir" doit pouvoir déployer ses effets dans un *milieu pour l'étude*, dans le sens où les géographes parlent de "milieu pour le développement des relations humaines". L'étude consiste alors en l'exploration et l'appropriation, puis la maîtrise de cet espace." (Félix & Joshua 2002, p. 90)

C'est bien également à mes yeux la même notion de milieu, dénué d'intention didactique mais doté d'un potentiel antagoniste, qui est considérée par Y. Chevallard dans la dialectique médias-milieux (Chevallard 2008).

III. Les gestes de l'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique

Les analyses développées dans II.1. sur le processus de désengagement du système didactique dans la construction des praxéologies mathématiques à l'entrée au lycée et de manière plus radicale en Première S m'ont conduite à avancer l'hypothèse suivante : l'inadéquation de leur travail personnel est un facteur qui contribue fortement à l'échec en filière scientifique d'élèves qui avaient été suffisamment en réussite au collège et en Seconde pour être acceptés dans cette section. Convaincue que, comme l'a établi la recherche d'A. Barrère (1997), c'est dans nombre de cas plus une question de modalités du travail que de quantité qui est au cœur

des difficultés rencontrées, je me suis intéressée aux gestes d'étude réalisés en considérant qu'il s'agissait là d'un territoire largement inconnu, que les élèves soient en échec ou en réussite. Ce travail est avec la thèse de C. Félix que j'ai déjà évoquée le seul qui se soit intéressé à ce sujet dans la communauté didactique française et plus largement en Sciences de l'éducation pour ce qui concerne spécifiquement les mathématiques. Au niveau international, je n'ai trouvé aucune publication sur ce sujet au niveau des enseignements primaire et secondaire, sachant que je ne prends pas ici en compte les recherches nombreuses qui se penchent sur la position E-1, c'est-à-dire sur l'activité et les interactions en situation de résolution de problèmes. J'aborderai plus loin les travaux relatifs au travail personnel dans l'enseignement supérieur, également très rares pour le domaine des mathématiques.
J'ai réalisé en 2005 une série d'entretiens d'environ 45 minutes auprès de 10 élèves d'une classe de Première S qui ont accepté de me rencontrer pour me parler de leur façon de travailler[40]. Ces élèves étaient scolarisés dans le principal lycée de centre ville de Rouen, établissement de public socialement favorisé, accueillant les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs. Ce choix n'était évidemment pas fortuit : il s'agissait de s'intéresser à des élèves dont l'origine sociale ne pouvait pas être considérée comme facteur explicatif des difficultés. La question de la méthodologie constituant un point épineux pour cette direction de recherche, je retiendrai quelques éléments.

Tout d'abord, les élèves ont été contactés en dehors de la présence du professeur, celui-ci étant seulement prévenu de l'existence de la recherche, je n'ai jamais assisté à un cours de mathématiques. Ceci a des conséquences sur le plan des informations en ma possession sur S0 (par exemple, je ne sais pas jusqu'où va le professeur dans ses commentaires technologiques), ce qui limite l'interprétation des gestes d'étude et leur attribution aux différentes positions de E dans le modèle. Mais cette option vise à bien distinguer le chercheur du professeur et de l'institution de façon à créer un climat de confiance avec les élèves : ils doivent pouvoir parler de leur travail personnel même s'ils sentent qu'il ne correspond pas aux canons institutionnels. J'ai pris cette option à la suite d'une première expérience, au cours de laquelle j'avais joué régulièrement un rôle de deuxième professeur en TD (Travaux Dirigés) et qui avait débouché sur une impasse, les élèves ne souhaitant pas venir me rencontrer en entretien. Dans les conditions réunies en 2005, il reste que seuls des élèves volontaires ont pris part à la recherche, ils avaient donc nécessairement un certain désir de parler sur leur travail personnel et d'en parler à une chercheure. Ceci peut expliquer que deux garçons seulement ont été interviewés. L'échantillon ne peut donc pas prétendre à la représentativité et ce, quelle que soit la proportion d'élèves interviewés dans une classe.

Concernant la conduite des entretiens, elle s'inspire de la technique de l'explicitation avec une consigne initiale centrée sur le récit de la préparation du contrôle précédant la rencontre. L'évocation est recherchée mais il s'agit plutôt d'un horizon dans la mesure où, par exemple, j'ai laissé se développer des phases consacrées à des habitudes générales. Par contre, j'ai systématiquement cherché à ce que les élèves illustrent leurs considérations d'exemples précis, la plupart du temps reconstitués à partir de leurs seuls souvenirs (y compris au niveau des énoncés d'exercices).
Les résultats que je vais évoquer ont été présentés au Séminaire national de Didactique des Mathématiques en 2006, le cas des trois meilleurs élèves est particulièrement analysé dans le

[40] L'échantillon est composé de 2 garçons et 8 filles. Sur le plan de la réussite en mathématiques, 2 élèves -les 2 garçons - se sont vu proposer un redoublement en fin d'année (moyennes inférieures à 8), 3 élèves (Laura, Justine et Pauline) ont eu toute l'année une moyenne supérieure à 15, les autres se situant entre 10 et 12.
Les entretiens ont été réalisés entre Fin Janvier et fin Mai, les changements entre Seconde et Première S ont pu à ce moment commencer à produire des effets sur le travail personnel.

cadre d'un chapitre (Castela 2007c) d'un livre réalisé avec des chercheurs de Sciences du langage, coordonné par M-C. Penloup (*Les connaissances ignorées. Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves*) et dans un article publié par la revue NOMAD (Castela 2009a). Ces deux dernières publications avaient également comme but de diffuser le modèle praxéologique dans des communautés ignorant tout ou presque de la TAD.

1. Par rapport au collège, nécessité d'un développement du travail de E0 en dehors de la classe

Dans l'article déjà cité de C. Félix et S. Joshua (2002, pp. 94-95), les auteurs avancent que "l'essentiel de l'étude, pour les « bons » élèves de collège, se déroule essentiellement en classe". Les entretiens que j'ai réalisés montrent que ce n'est plus le cas en Première S, y compris pour les trois très bonnes élèves. Le rythme adopté en classe rend difficile la compréhension complète en temps réel des savoirs en jeu. Sont apparus trois types de gestes prolongeant S0, à des moments différents : entre deux séances, gestes de reprise du cours ou des exercices ; dans la phase de révision du contrôle, gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage réalisé relativement aux exercices et gestes visant à pallier les ignorances diagnostiquées.

Les premiers répondent à un sentiment d'incompréhension ressenti en classe et vécu comme insupportable : ceci est très fortement exprimé par deux des meilleures élèves, Laura et Pauline, qui disent avoir été déstabilisées au passage en Première S par la rencontre avec une telle expérience, nouvelle pour elles. Elles ont su y remédier en consacrant du temps à la maison à la reprise sans délai de ce qui est vécu en classe, et pour l'une, en s'adaptant finalement au rythme des séances. Ce comportement se rencontre également chez des élèves de résultats plus moyens mais n'est pas le cas de tous. Pour les autres, l'étude entre deux séances est consacrée à la recherche des exercices donnés par P0 ; le retour sur ce qui s'est déroulé en classe est repoussé.

Dans la phase de préparation d'un contrôle, la première étape est en général consacrée à une reprise du cours lui-même. Le geste le plus commun est une relecture accompagnée d'une vérification de la mémorisation des résultats dont l'importance est repérée par leur usage dans les exercices, plus particulièrement des formules. Dans cette perspective, quatre élèves moyennes réalisent des fiches-résumés. Inversement, d'autres considèrent que c'est dans le retour sur les exercices que s'effectuent l'apprentissage et la révision du cours. Les démonstrations sont relues mais pas par tous. Deux élèves font référence à un travail plus spécifique : les démonstrations constituent un outil pour lever des difficultés de compréhension concernant une notion ou un résultat chez Alice, élève dont il n'est pas inintéressant de noter que, partant de résultats très moyens, elle n'a cessé de progresser pour finalement intégrer une classe préparatoire ; elles sont refaites par Laura.

Gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage relatif aux exercices faits dans S0.

L'essentiel du travail de prolongation de S0 concerne donc les exercices déjà résolus avec trois gestes possibles de reprise de contact et d'auto-évaluation : 1. lire directement le corrigé, 2. refaire de tête puis confronter au corrigé dans des allers et retours portant sur des parties plus ou moins courtes, 3. refaire entièrement par écrit à partir de l'énoncé d'origine puis confronter au corrigé. Thomas et Julien, les deux élèves en difficulté, et Alice sont les seuls à ne pas refaire par écrit la majorité des exercices traités avec le professeur. Les autres se sont rendu compte qu'ils ne pouvaient plus réaliser en classe tous les apprentissages nécessaires ni se fier à leur seule impression pour évaluer leurs acquis et décider si l'étude pouvait être close ou devait être prolongée. Ils ont certainement d'autant plus raison que, comme l'ont établi les travaux réalisés par l'équipe "Pratiques enseignantes" du LDAR, les exercices effectivement traités par les élèves dans S0 ne sont pas ceux dont ils ont l'énoncé : dans la mesure où le professeur intervient très rapidement en donnant des aides qui réduisent systématiquement le niveau d'intervention des praxéologies, l'exercice véritablement résolu est plus facile que celui qui a été initialement posé. Les deux garçons quant à eux sélectionnent les exercices qu'ils refont par écrit selon des critères peu assurés et se contentent au mieux du premier geste pour les autres. Alice utilise le deuxième geste pour les exercices de base ; pour les exercices plus compliqués, elle se contente d'une relecture, comme les bons élèves de Troisième. Ayant le sentiment d'avoir compris ces exercices, elle n'éprouve pas le besoin d'un diagnostic plus strictement fondé (ou elle n'a pas envie, c'est un élément récurrent dans son discours). Mais en réalité, c'est plus un geste d'étude que de validation de ses acquis qu'elle accomplit en lisant : elle dit bien qu'elle cherche par cette lecture à mémoriser des façons de faire mais elle ne tente pas de les mettre elle-même en œuvre. Alice ne prolonge pas S0 mais investit S1 en tentant de repérer les techniques sous-jacentes aux tâches isolées proposées par P0.

Gestes visant à pallier les ignorances diagnostiquées

Qu'ils soient moyens ou forts, les élèves se sont donc dotés d'un geste d'auto-évaluation plus strict que ce qu'ils pouvaient s'autoriser au collège. Ceci marque donc un changement d'une institution à l'autre, que les élèves en difficulté interrogés ne semblent pas avoir perçu ou dont ils n'assument pas bien toutes les implications. Face à un diagnostic d'apprentissage insuffisant, quatre types de gestes visant à pallier ces manques dans le cadre de S0 ont été repérés.

Certains élèvent *lisent*, éventuellement plusieurs fois, *le corrigé* avec deux finalités possibles, non également mentionnées dans les entretiens : comprendre d'une part, mémoriser d'autre part. L'efficacité d'une telle lecture dépend de toute évidence de l'activité intellectuelle qui l'accompagne, activité dont les entretiens ne donnent que rarement idée (il aurait fallu aller plus loin sur la voie de l'explicitation). Comme je l'ai dit plus haut pour Alice, cette lecture peut engager dans un processus de décontextualisation qui ne relève plus de S0. Inversement, un objectif annoncé de compréhension peut être finalement identifié à une mémorisation, qui ici n'est pas vérifiée par écrit ; le savoir refaire est pris comme critère de compréhension des objets de savoir abordés dans S0. Ce point de vue sous-tend généralement la deuxième stratégie rencontrée qui consiste à *refaire l'exercice par écrit* jusqu'à obtenir une solution identique à celle du professeur. Dans un contexte où la relation didactique est close, les élèves cherchent à terminer par leurs ressources propres ce que P0 a initié, ou peut-être plutôt à se remettre à l'heure didactique du professeur,

Certains élèves *sollicitent l'aide du professeur*, provoquant ainsi le prolongement de l'étude coopérative caractéristique de S0. Ainsi Mathilde, une élève moyenne qui s'efforce de ne pas prendre de retard sur P0 en travaillant entre chaque séance, commence très tôt ses révisions et interpelle le professeur quand elle échoue à savoir refaire un exercice malgré ses efforts. Mais tous les élèves n'osent pas recourir ainsi au professeur ou n'en ont pas l'occasion car ils ne prolongent l'étude qu'au moment crucial de la préparation du contrôle.

Pour remédier à cette clôture de la situation didactique principale, certains ont alors *recours à des systèmes didactiques auxiliaires*. L'intervention de personnes susceptibles d'aider à l'étude apparaît dans la plupart des entretiens : un autre élève, les parents ou la fratrie et une fois un cours particulier[41]. Cinq élèves sollicitent le manuel de la classe ou des livres complémentaires comme synthèse du cours et comme sources d'exercices corrigés.

[41] Seul un élève sur 10 fait donc référence à un cours particulier en tant qu'aide à l'étude. Ceci est une proportion très faible par rapport à ce qu'on sait du recours à ce dispositif. Néanmoins, sur 102 élèves du même établissement interrogés en Octobre 2007, 80 % choisissent la réponse Jamais pour l'item : "Si, dans le cadre de la préparation d'un contrôle, je n'arrive pas à refaire un exercice, je demande de l'aide pendant mon cours particulier".

Pourquoi un tel acharnement sur les exercices proposés par le professeur ?

Les élèves interviewés s'efforcent, d'une manière plus ou moins rigoureuse, de se rendre capables de reproduire les solutions des exercices corrigés par le professeur. Ils font tous le même pari sur le contrat : le professeur posera au contrôle des exercices assez voisins de ceux qui ont été traités en classe. A ceci s'ajoute chez Laura l'idée, partagée par d'autres, que le corpus proposé dans S0 constitue un entraînement suffisant. Par ailleurs, Laura compte sur sa capacité, validée par son expérience, à adapter ce qu'elle a appris dans ses révisions aux exercices du contrôle : elle se consacre ainsi à la maîtrise des seuls exercices introduits dans S0, parce qu'elle sait que son invention tactique lui permettra d'adapter en situation ce qu'elle a appris à la nouveauté limitée du contrôle. Seule à expliciter ce point de vue, elle est ce que j'ai appelé apprenant tactique (Castela 2008b, p.103), c'est-à-dire qu'elle mémorise les expériences comme ressources pour le futur, sans chercher spécifiquement à en dégager des idées décontextualisées. On verra toutefois dans la partie suivante que, face à la difficulté de reproduire la solution du professeur, elle se montre tout à fait capable de dégager un savoir pratique efficace.

2. Des gestes de prolongement de l'étude attribués aux niveaux sur-didactiques.

Gestes de développement des moments du travail et de l'évaluation d'une technique nouvelle

Pour prolonger le travail de la technique au-delà de ce que P0 a organisé dans S0, l'élève en position E1 doit pouvoir résoudre des exercices nouveaux. Si quatre d'entre eux évoquent la résolution d'exercices non traités avec le professeur, deux seulement cherchent dans ce contexte des exercices non corrigés dans leur manuel, il s'agit d'exercices de base. Les deux autres, Chloé et Thomas, ont recours à des énoncés corrigés du manuel ou de livres parascolaires ; autrement dit, leur passage en position E1 consiste d'abord à s'assujettir à une institution didactique auxiliaire qui ici se substitue à P0 pour prolonger l'étude. Ces élèves n'ont pas d'autre solution pour élargir leur champ de pratique dans la mesure où ils n'osent pas assumer la responsabilité de la validation. En s'appuyant sur le milieu construit par P0 et étendu grâce aux manuels, Chloé accomplit un travail personnel d'appropriation qu'on ne trouve pas chez tous les élèves : elle met à l'épreuve ce qu'elle a compris par l'étude d'un exercice dans d'autres énoncés de même type au lieu de refaire le même. Pour justifier ce mode de travail, elle évoque, comme Laura, l'idée d'entraînement mais elle est aussi engagée dans une construction praxéologique qui relève de E1.

Gestes de développement de la technologie et d'institutionnalisation d'une technique nouvelle

Comme je l'ai pointé dans I.1, dans les conditions de l'enseignement en Première S, l'élaboration de la composante pratique de la technologie, l'institutionnalisation de la technique sont largement placées sous la responsabilité de E1. Captives comme les autres du corpus d'exercices corrigés avec le professeur, Justine et Pauline prolongent clairement le travail sur les corrections d'une démarche de décontextualisation qui les amène à formuler des éléments de technologie dont elles fournissent toutes les deux des exemples précis dans l'entretien. Cette démarche donne sens au travail réalisé sur les exercices du professeur, elle situe les apprentissages dans une perspective de généralisation qui prépare au contrôle. Notons que c'est la seule façon pour un élève de prolonger l'étude commencée en classe s'il n'a pas recours à un système didactique auxiliaire.

Il est clair que le dispositif d'interview conduit ces élèves à décontextualiser peut-être plus qu'elles ne le font pour elles-mêmes. Néanmoins, la présence chez ces deux élèves du même geste consistant à faire un récit oral de la solution d'un exercice atteste de l'existence d'un processus de prise de distance par rapport à l'exercice particulier. Cette attitude réflexive et, me semble-t-il, décontextualisante se retrouve chez Laura à propos d'une praxéologie ancienne ; peut-être peut-on en déceler une forme moins assumée chez Alice. Les autres élèves ne font pas mention d’un tel travail qui pourrait donc constituer un geste spécifique de la réussite.

Gestes de reprise d'une praxéologie ancienne

Deux élèves ont relaté des épisodes se rapportant à des praxéologies anciennes qui relèvent de la position E2.

Dans le cadre de la préparation du contrôle sur le produit scalaire situé en mars, Laura est confrontée à la difficulté d'utiliser à bon escient la relation de Chasles (règle du parallélogramme) pour établir une relation vectorielle. La praxéologie impliquée est abordée en Seconde et revue en début de Première S, dans le cadre de chapitres sur les barycentres et la géométrie dans l'espace. C'est bien parce qu'elle a repris complètement par écrit l’exercice qu'elle a pris conscience de l'inefficacité de sa gestion du calcul au regard de celle du professeur ; elle a réussi à dégager une technique relativement élaborée (partir du but visé et faire intervenir dans les décompositions vectorielles des vecteurs sur lesquels portent des hypothèses) et a vérifié l’efficacité de cette technique. Le contrôle lui a donné l’occasion d’utiliser ce qu’elle avait ainsi appris. Selon ses dires[42], P0 n’avait rien explicité en classe sur cette technique, considérant sans doute que cette praxéologie ancienne n’était plus un objet sensible dans S0 (voir dans le chapitre 1, VII.1, ce qui est dit de la recherche de C. Bezol sur l'enseignement de la relation de Chasles en Seconde).

Julien a quant à lui des difficultés avec l’étude du signe de la dérivée de fonctions trigonométriques. Une première fois confronté à un échec sur ce point, il n'a pas profité de la séance consacrée à la préparation du contrôle pour obtenir une aide car il n'ose pas demander des explications au professeur. En fait, il ne semble pas avoir suffisamment construit le lien dialectique entre les deux types de tâches en jeu : 'Résoudre une inéquation $f(x) > 0$' et 'Etudier le signe de $f(x)$'. Ceci est envisageable : en Première S, les élèves travaillent régulièrement la technique consistant à ramener la résolution de l’inéquation à l’étude du signe, celle-ci s’obtenant avec ou sans étude du sens de variation ; par contre, le passage inverse est rare. Dans le contexte complexe des fonctions trigonométriques pour lesquels ce deuxième passage est en jeu, Julien ne réussit pas à revenir au signe de $1\text{-}2\sin x$ quand il a résolu l’inéquation $\sin x>1/2$. Or ce rapprochement entre les deux types de tâches est travaillé depuis la Seconde et concerne deux praxéologies anciennes. On peut penser que le professeur n’a pas éprouvé le besoin de développer des commentaires sur ce point particulier, se concentrant plutôt sur le nouveau, c’est-à-dire les inéquations trigonométriques. Ainsi c’est en position E2 que Julien doit seul affronter cette ignorance, il n’y réussit pas et échoue de nouveau au contrôle.

Julien me semble représentatif du sort des élèves en difficulté. Pour eux, le deuxième niveau sur-didactique est beaucoup plus développé que pour les autres : pour certaines praxéologies anciennes, ils n’ont pas construit au moment où elles étaient les enjeux de l’enseignement le rapport visé par S0 ; dans des situations didactiques ultérieures où ces praxéologies sont sollicitées au service des praxéologies nouvelles, ces élèves sont confrontés à ces « retards d’apprentissage » dont le rattrapage sollicite E2. On peut raisonnablement faire l’hypothèse qu’en difficulté, ils sont encore moins que les autres susceptibles de poser le bon diagnostic et d’assumer la responsabilité auto-didactique associée.

3. Synthèse et prolongement de la recherche

De cette recherche, j'ai retenu les éléments suivants.

Les élèves moyens et bons se distinguent des faibles par le caractère plus systématique et plus rigoureux des gestes qu’ils accomplissent pour évaluer l’état de leur apprentissage à l’issue de la séquence pour laquelle le contrôle représente une forme de clôture.

[42] La méthodologie utilisée me prive de tout moyen de contrôle sur ce que P0 a dit en classe sur le sujet.

Les élèves se distinguent ensuite entre eux par ce qu'ils font pour se rendre capables de résoudre les exercices traités avec le professeur. Dans le prolongement du premier point, les élèves moyens et bons semblent viser une capacité à reproduire exactement la solution du professeur pour tous les exercices quand les faibles sont moins exigeants, travaillant seulement certains exercices et se contentant de gestes de lecture.

Majoritairement, les élèves sont captifs du corpus des exercices traités avec le professeur ; ils ont tous dit leur besoin de disposer de corrigés pour appuyer leur étude. Fort peu ont recours aux exercices corrigés proposés par le manuel ou autres outils parascolaires. Ceci leur rend extrêmement difficile l'investissement des niveaux sur-didactiques, particulièrement le développement du moment de travail de la technique (rencontré une seule fois). Par contre, un travail de décontextualisation et d'élaboration technologique peut s'appuyer sur les ressources issues de S0, constituant le milieu de l'étude aux niveaux 1 et 2 ; il semblerait que les bons élèves se différencient des moyens par leur capacité à développer cette dimension du travail personnel, à propos des praxéologies sensibles ou anciennes.

A la suite de ce travail, j'ai réuni en Juin 2007 une équipe formée des professeurs de mathématiques des trois classes de Première S que comportait un lycée de la banlieue rouennaise de recrutement mixte, mi rural, mi urbain "populaire". L'objectif du projet d'innovation pédagogique, soutenu par le rectorat, était l'élaboration de dispositifs d'aide à l'évolution du travail personnel des élèves en Première S. Sur le plan de la recherche, il s'agissait dans mon esprit d'engager une recherche-action qui, en provoquant des phénomènes nouveaux par les interventions proposées, mettrait à jour des aspects du travail personnel des élèves non révélés par la campagne d'entretiens dont je viens de rendre compte. Les expérimentations engagées pourraient ultérieurement déboucher sur une ingénierie.
Chaque classe disposait d'heures hors emploi du temps pour développer des travaux spécifiquement consacrés au travail personnel en mathématiques. Pendant ces séances, nous avons envisagé des interventions visant dans un premier temps à aider les élèves à déterminer des gestes d'étude leur permettant d'être capables de refaire les exercices déjà résolus puis de repérer leur proximité avec d'autres tâches. L'idée de mettre les élèves en situation de raconter des solutions a également été proposée dans le prolongement du geste rencontré chez Justine et Pauline. Le deuxième temps envisagé était centré sur l'introduction d'un classeur praxéologique, organisé autour des types de tâches et des techniques associées. Il s'agissait d'expliciter les types de tâches comme objets de savoirs, savoirs à construire essentiellement par les élèves eux-mêmes mais dont l'existence et la nature étaient présentées par un travail commun autour de quelques exemples. En complément, il était prévu d'encourager les élèves à prendre des notes à partir des commentaires oraux du professeur et à ajouter des réflexions personnelles sur leur cahier. Enfin, le projet annonçait l'intention de favoriser l'étude en groupes, en considérant que le travail collectif sur le corpus limité des exercices résolus aurait un effet d'enrichissement du milieu des niveaux surdidactiques par réunion des milieux constitués par chaque élève au niveau S0[43].

Au cours de l'année scolaire 2007-2008, les trois collègues ont expérimenté certaines des options envisagées *a priori* mais nous nous sommes heurtés à une difficulté prévisible : deux des enseignants impliqués n'avaient aucune expérience de la conception et de la gestion de séances centrées sur l'activité des élèves en petits groupes. Or il est évident que le travail

[43] Une étude réalisée dans les années 1980 à l'université Berkeley de Californie (Treisman 1992) s'est intéressée aux modalités de travail des étudiants issus de minorités, dans le but de comprendre les différences très nettes de performances entre les étudiants d'origine asiatique et ceux d'origine latine et afroaméricaine. L'élément déterminant mis en avant est l'organisation collective de l'étude chez les premiers quand les seconds restent isolés. Cette référence m'a été signalée par A. Schoenfeld comme étant la seule étude connue de lui sur le travail personnel des étudiants.

envisagé ne pouvait que prendre cette forme mais il constituait un terrain inadapté pour que les collègues découvrent une modalité nouvelle d'enseignement. Par ailleurs, autre évidence, il est apparu que la modification des habitudes des élèves, par exemple pour la prise de notes, ne pouvait résulter d'interventions fugitives et exigeait donc un investissement constant du professeur qui, venant en sus du reste des sollicitations, s'est avéré difficile à assumer. Enfin, l'inégal investissement des élèves dans les séances supplémentaires proposées a été un problème que les enseignants ont longtemps hésité à résoudre en réservant ces interventions à des volontaires.

A la suite de cette première année et du bilan dressé, les trois collègues étaient décidés à poursuivre. Les perturbations importantes qu'ont provoquées la réforme de la formation des enseignants et celle des lycées ont gêné notre collaboration. Mais les collègues ont également mis en avant une difficulté qu'ils considéraient comme exacerbée dans les trois Premières S en 2008-2009 : le refus des élèves, pourtant volontaires, participant aux séances, d'allonger la durée de leur travail à la maison et ce jusqu'à une période très avancée de l'année. Une enquête réalisée en tout début d'année, en 2007 et en 2008, auprès des élèves des classes participant à l'expérience relaie cette impression des enseignants. 158 élèves ont ainsi renseigné un questionnaire concernant les modalités de leur travail pendant la séance de mathématiques, entre deux séances et pour la révision des contrôles. Plus de 27 % d'entre eux commencent la révision au plus tôt la veille du contrôle. 24 % retravaillent tous les exercices et 59 % seulement ceux qui leur ont posé problème, ce qui, compte tenu des aides données en séance, restreint nécessairement beaucoup l'étendue des reprises. 57 % se contentent pour cette reprise de gestes de lecture. Ceci me conduit à interroger la pérennité des résultats de la recherche d'A. Barrère (1997) : plus de 10 ans après, on doit envisager que l'attitude des lycéens vis-à-vis du travail ait évolué, et ce particulièrement dans les milieux populaires.
Ce questionnaire a également été renseigné par 102 élèves de Première S fréquentant le lycée de centre ville dans lequel ont été réalisés les entretiens dont j'ai parlé précédemment. L'exploitation statistique de ces données n'a pas été formalisée mais il semble que deux variables soient plus particulièrement productrices de différences significatives (au sens statistique du terme) : il s'agit de l'établissement fréquenté mais aussi du genre. Les résultats scolaires en mathématiques par contre ne seraient pas particulièrement associés à des gestes d'étude précis évoqués dans le questionnaire. Or celui-ci a été bâti à partir des résultats d'une campagne d'entretiens au cours de laquelle, je le rappelle, je n'ai pas rencontré de garçons moyens ou en réussite. A quoi il faut ajouter bien sûr le nombre réduit d'élèves interviewés. Il me semble donc tout à fait nécessaire de reprendre cette étude dans l'espoir de repérer d'autres formes de travail efficaces, peut-être plus présentes chez les garçons. Serait en particulier visée une meilleure exploration du ou certainement plutôt des gestes de lecture, avec la difficulté méthodologique que représente l'accès à un niveau d'évocation suffisant pour obtenir l'explicitation des actes cognitifs accomplis.
Par ailleurs, cette nouvelle campagne devrait multiplier les entretiens avec des élèves qui, à l'occasion du passage en Première S, perdent le contact avec la moyenne tout en travaillant. Il s'agit de considérer ces interviews sur l'objet précis qu'est le travail personnel comme occasions d'en savoir un peu plus sur le réel du vécu mathématique de ces élèves, considéré comme largement inconnu.
Je reviendrai sur les perspectives de recherche envisagées en dernière partie de ce chapitre.

IV. Les recherches sur le travail étudiant

Comme pour le travail personnel des lycéens, celui des étudiants du supérieur n'a guère été étudié dans le cadre de la didactique des mathématiques et ce quel que soit le pays. Par contre, il a donné lieu à de nombreux travaux en Sciences de l'éducation et en Sociologie, spécifiquement en France à partir des années 90 quand la massification de l'accès aux études supérieures s'accompagne d'un échec important des étudiants dans les premières années du cursus universitaire. J'ai donc accompli à l'occasion de cette note une exploration de ce domaine de publications.

1. Tour d'horizon

Il me semble que ces recherches se sont dans un premier temps essentiellement intéressées aux processus d'affiliation du jeune adulte à l'institution d'enseignement supérieur dans laquelle il poursuit son cursus, au sortir du lycée. On étudie les pratiques étudiantes dans leurs dimensions génériques, sans prendre en compte la nature du savoir étudié. Pour ce qui concerne plus particulièrement l'étude, c'est donc la position E4 qui est prise pour objet. Les institutions non sélectives de l'enseignement supérieur étant marquées au regard du lycée mais aussi des autres filières sélectives (Classes préparatoires aux Grandes Ecoles, Médecine, IUT et STS) par un moindre encadrement du travail étudiant (peu d'heures d'enseignement et peu de travail personnel exigé), l'occupation du temps et l'organisation de l'étude est un thème récurrent de recherche[44]. Ainsi, le travail pionnier que B. Lahire consacre aux manières d'étudier (Cahier de l'OVE - Observatoire de la Vie Etudiante -, 1997)[45] met en évidence ce qu'il désigne comme une socialisation silencieuse des étudiants par les rythmes de travail universitaires et l'emploi du temps. Au-delà d'une simple répartition horaire, "ce sont quasiment des styles de vie et de travail qui se dessinent dans ces différences."(p. 27).

Dans la note de synthèse qu'ils réalisent pour *La Revue Française de Pédagogie* en 2001, S. Alava et M. Romainville appellent à "tenir davantage compte des spécificités des types de savoirs" (p. 173). Sauf deux exceptions (Montfort 2000 ; Adangnikou 2007) sur lesquelles je reviendrai, les travaux réalisés excluent les filières mathématiques et physique-chimie et s'intéressent aux domaines suivants : SVT (Sciences et Vie de la Terre), AES (Administration économique et sociale), Droit, Psychologie, Histoire, Ethnologie et Sociologie. Dans ce cadre qui s'explique sans doute en partie par la formation même des chercheurs impliqués, relevant plutôt des Lettres et Sciences Humaines, les travaux relatifs aux pratiques étudiantes dont j'ai pris indirectement connaissance à travers la lecture d'articles se tiennent à une distance respectable des spécificités des savoirs en jeu dans les filières qu'ils comparent. Ainsi la recherche consacrée à l'hétérogénéité et à la réussite en premier cycle (rapport publié en 1999 par M. Trinquier, J. Clanet et S. Alava) aborde les pratiques d'étude d'étudiants de premier cycle en SVT, AES et psychologie par un questionnaire commun dans lequel l'étude du cours focalise l'attention avec deux dimensions : le travail sur les notes prises en cours d'une part, la réalisation de lectures complémentaires et d'éventuelles fiches associées d'autre part. Je vais revenir sur ces points qui apparaissent régulièrement dans les publications comme particulièrement sensibles. Mais je tiens à remarquer ici que les gestes d'étude considérés ne sont pas essentiels en mathématiques[46], au moins dans les débuts de l'université. Le sont-ils en SVT ? Je l'ignore mais il semble étrange de ne pas tenir compte de la dimension expérimentale de cette discipline dans les comparaisons réalisées. Le sont-ils vraiment et de manière indifférenciée dans les autres champs de savoirs impliqués dans les filières

[44] L'ouvrage réalisé en 2005 par l'OVE intitulé "Vingt questions sur la vie étudiante" et publié à la Documentation française, consacre quatre de ces questions à l'agenda de la Vie étudiante. En Mai 2005, OVE Infos n°11 a pour titre "La disparité des emplois du temps".

Le Chapitre 6 du livre de M. Millet (2003, voir plus loin pour une présentation plus précise) a pour titre "L'emploi qu'ils font du temps". A. Frickey et J-L. Primon (2004) qui s'intéressent plus spécifiquement aux bacheliers technologiques dans des filières AES, Droit et Psychologie choisissent entre autres axes d'étude la planification et le rythme du travail.

[45] Les textes de Lahire d'une part, Trinquier &Al. d'autre part ne sont pas cités en références dans la mesure où je ne les ai pas étudiés moi-même.

[46] Toutefois le travail de N. Adangnikou montre que la réalisation de fiches à partir du cours est une pratique majoritaire en DEUG (L1 et L2) comme en classes préparatoires.

comparées ? Du fait de ma sensibilité didactique, je dirais que je n'en sais rien *a priori*. Et je suis encouragée à la prudence par l'étude comparative fouillée réalisée par M. Millet (2003) ; celle-ci montre de manière très documentée que si ces gestes sont centraux en sociologie, ce sont des gestes presque systématiquement opposés qui sont efficaces en Médecine. J'évoquerai plus loin ce travail. Les études réalisées en sociologie et sciences de l'éducation demanderaient donc sans doute à être prolongées par des approches plus didactiques. En tout état de cause, elles sont difficilement transférables au domaine des mathématiques. Or j'ai été frappée par la propension de certains chercheurs, non didacticiens, à généraliser sans examen critique à toutes les filières de l'université les manières d'étudier spécifiques des Sciences Humaines et Sociales qu'ils connaissent par leur formation personnelle. Ainsi P. Rayou les considère avec insistance comme caractéristiques d'un monde universitaire tout entier orienté vers la transmission aux étudiants d'un rapport critique à des savoirs toujours en développement :

> "Le savoir universitaire est très rarement évoqué [par les étudiants] comme le résultat de ce que peut dire la recherche à un moment donné, mais plutôt dans les termes "classiques" de la culture scolaire, comme quelque chose qui transcende la personne des étudiants et des enseignants et qui rend incontestables les propos de ces derniers. " (Rayou 2004 a)

Selon cet auteur, l'université se secondariserait à se concevoir comme un lieu de transmission d'un savoir accumulé. Or, si ce point de vue est tout à fait pertinent pour la sociologie par exemple comme l'analyse épistémologique développée par M. Millet le montre très bien, il n'en est de même ni pour les mathématiques ni pour la médecine. Cet appel à la prudence critique étant fait, je dois reconnaître que ce parcours au sein de travaux consacrés aux sciences humaines m'a amenée à m'intéresser plus que je ne l'avais fait jusqu'à présent aux gestes d'étude d'un cours vu comme étant à questionner pour se l'approprier.
Pour compléter cette vue d'ensemble, je signalerai que l'intérêt relatif à l'étude du travail étudiant semble s'être évanoui à partir de 2004. Si l'on excepte l'axe de l'emploi du temps, ce thème n'apparaît plus dans les colloques RESUP (Réseau d'études sur l'enseignement supérieur) ni dans les publications de l'OVE. Des chercheurs qui s'y étaient consacrés jusque là tels M. Romainville semblent avoir orienté leurs travaux vers l'enseignant[47]. D'autres sont engagés dans l'expérimentation de dispositifs de tutorat ou autres modalités d'accompagnement[48]. On a peut-être considéré que la réalité du travail étudiant était suffisamment connue et qu'il y avait urgence à intervenir. Mais la difficulté méthodologique à accéder à cet objet d'étude a pu également contribuer à cet abandon à un stade où pourtant l'analyse didactique était demeurée très superficielle.

2. Les niveaux surdidactiques et l'étude du savoir théorique

Comme je l'ai signalé précédemment la question de l'étude associée aux cours magistraux est centrale dans les travaux réalisés par les chercheurs en sociologie et sciences de l'éducation. La prise de notes est une première dimension étudiée : elle conditionne ce que l'étudiant devra réaliser pour s'approprier le savoir transmis par P0 : parcellaires, non étayées par des polycopiés, elle appellera des gestes de "complétion", le plus souvent par sollicitation de systèmes didactiques auxiliaires. Mais le message de P0 ainsi reconstruit peut ou non constituer le milieu de l'étude autonome à réaliser en position surdidactique. L'existence, au niveau E1, d'une composante mésogénétique de développement de ce que j'appellerai le milieu théorique de l'étude par référence à la composante théorique du modèle praxéologique, apparaît comme un élément notable de différence entre les filières scientifiques d'une part, les filières de Lettres et Sciences Humaines d'autre part. En témoignent deux recherches

[47] M. Romainville, N. Rege Colet, (2006) *La pratique enseignante en mutation à l'université*. Bruxelles : De Boeck
[48] B. Raucent, C. Verzat, L. Villeneuve (2010), *Accompagner des étudiants.* Bruxelles : De Boeck.

indépendantes dont les auteurs ont le souci de prendre en compte l'influence des spécificités disciplinaires dans leur approche sociologique.
R. Boyer et C. Coridian (2004) comparent les pratiques d'étude d'étudiants de DEUG en Sciences et Vie de la Terre, Histoire et Droit. Ces auteurs ont en préalable recueilli les conseils donnés par les enseignants. Une différence notable émerge à propos du milieu de l'étude :

> "Pour les enseignants de Sciences, les polycopiés ou les plans de cours, les feuilles ou les recueils d'exercices de TD et de TP, constituent, avec les notes de cours retravaillées, l'essentiel des outils dont les étudiants ont besoin. Les scientifiques estiment souvent que si les étudiants de première année fournissent un travail intense sur l'ensemble de ce qui leur est dispensé et proposé en cours, l'utilisation d'autres outils - manuels et ouvrages divers- n'est pas nécessaire.
> En revanche, en Histoire et en Droit, les enseignants insistent beaucoup sur la nécessité d'une fréquentation assidue des bibliothèques. Dans ces disciplines des lectures autonomes sont en effet indispensables. *J'insiste surtout sur la lecture et le fait que le cours ne suffit pas à acquérir les bases nécessaires,* déclare un historien. […] Essentielle à une entrée dans le travail universitaire ces lectures autonomes présupposent une curiosité intellectuelle, qualité dont le manque est souvent relevé par les enseignants." (*ibidem*, pp. 150-151)

En Sciences, mathématiques comprises au moins à l'université, l'étude de l'exposé du savoir théorique proposé par l'enseignant en cours magistral, relève pour l'essentiel d'un travail pointé comme nécessaire mais non organisé, donc relevant de E1 (c'est par exemple, le cas du 'retravail' des notes évoqué dans la citation). Par contre, dans cette position, l'étudiant scientifique n'est pas supposé développer le milieu, ce qui est au contraire attendu à travers les lectures, comme une composante caractéristique de l'approche universitaire, dans les autres disciplines étudiées.
M. Millet dans sa thèse (2003) compare le travail étudiant en Médecine et en Sociologie. Il postule, au moins pour l'enseignement supérieur, ce qu'il appelle le primat d'une matrice de socialisation disciplinaire, dont on pourrait dire, par référence à Y. Clot (2002), qu'elle détermine un genre du travail étudiant dans la filière, genre au sein duquel les conditions sociales d'origine, le parcours social et scolaire antérieur, spécifient des styles différents. Je ne présenterai pas l'analyse passionnante que développe M. Millet des raisons d'être de la forme de l'étude dans les premières années de Médecine décrite ici :

> " Les objectifs du travail, délimités par des sanctions institutionnelles pointues […] font explicitement porter l'attention sur la maîtrise détaillée des cours […] et la difficulté sur la capacité des étudiants à répondre justement, et qui plus est rapidement, aux questions de cours qui leur sont proposées." (p. 171)
> " Les étudiants médecins sont amenés à voir dans la documentation personnelle un risque de dispersion. […] C'est ainsi en termes du "danger potentiel" que les étudiants de DCEM1[49] parlent de la lecture de textes universitaires, du reste explicitement découragée, dès la première année, par certains enseignants" (p. 172)
> "Lorsqu'un cours est bien fait ou lorsqu'il est correctement pris en notes, point n'est besoin de lire par ailleurs." (p. 183)

On retrouve ici un rapport au milieu issu de S0 comparable à celui des SVT, mais sous une forme exacerbée par l'orientation professionnelle d'une formation qui vise à ce niveau du processus une maîtrise précise d'un savoir médical stabilisé et codifié. M. Millet montre que c'est un point de vue opposé qui sous-tend la conception du travail étudiant en sociologie, du fait même de la nature des savoirs de cette discipline :

> "en sociologie, les connaissances organisent, le plus souvent un ensemble de reconstructions interprétatives insubstituables de la réalité historique, et se développent en un capital discontinu d'intelligibilités partielles […ces acquis d'intelligibilité] ne sauraient être totalement débarrassés des "points de vue spécifiquement particuliers" à partir desquels l'activité ordonnatrice de la connaissance du monde historique est orientée" (p. 187)

[49] Troisième année de Médecine.

> "Le travail des étudiants de sociologie ne réside pas dans l'appropriation de corpus clairement délimités, définis une fois pour toutes et "déjà-là". […] Loin de se suffire à eux-mêmes, les cours opèrent une série de renvois textuels" p. 190
>
> "Autant que l'apprentissage de "contenus" *stricto sensu*, le travail universitaire des étudiants sociologues implique qu'ils apprennent à s'orienter dans les allées du savoir, se familiarisent avec l'esprit de la recherche et s'emparent des textes savants. Le savoir n'étant pas tout entier donné et structuré de l'extérieur sous la forme de contenus de cours clos sur eux-mêmes, ni les apprentissages délimités par un programme d'études défini, ce dernier relève tout autant d'un ensemble de cheminements intellectuels et de parcours lectoraux." (p. 191)
>
> "C'est à travers la fréquentation régulière et répétée des auteurs et des œuvres que les étudiants sociologues trouvent le moyen d'élaborer leur propre savoir." (p. 193)

Je ne peux évidemment pas m'avancer sur le domaine de l'enseignement universitaire en sociologie dont j'ignore tout, mais je fais l'hypothèse que l'état actuel du modèle de structuration devrait offrir un premier grain d'analyse des réquisits universitaires de cette filière en différenciant les responsabilités de développement du milieu d'une part, d'invention des gestes d'étude d'autre part, qui relèvent déjà de la position E1, puis celles qui s'y ajoutent au niveau E2, relatives à la définition des objets d'étude et des enjeux d'apprentissage (voir ci-dessus la référence à l'inexistence d'un programme d'études bien défini).
Au-delà du cas de la sociologie, la question des lectures complémentaires et de l'étude critique qui en est attendue semble être un point très sensible du travail des étudiants en Lettres et Sciences Humaines, composante clé de la rupture entre lycée et université. En Sciences comme en Médecine, le savoir savant enseigné pendant les premières années d'université est attesté, il n'est pas relatif à la personne qui l'expose et donc l'étudiant n'a pas à compléter le discours de P0 par des points de vue complémentaires sur les mêmes objets. Par contre, l'étude qu'il en réalise en vue de se l'approprier suppose la réalisation de gestes critiques (voir les réflexions sur la notion de milieu dans II.4) qui ne sont pas spécialement encouragés par la nature certaine des savoirs.

3. L'imposition très indirecte des normes universitaires de l'étude en Sciences

Deux recherches s'intéressent au travail réalisé par les étudiants "autour" des Travaux Dirigés (TD) en Sciences, SVT pour le travail déjà cité de R. Boyer et C. Coridian, Mathématiques et Physique pour celui de V. Monfort (2000). Ces travaux montrent d'une part que les enseignants attendent des étudiants qu'ils travaillent avant les séances sur des feuilles d'exercices distribuées au préalable et d'autre part qu'une minorité seulement d'étudiants réalise ce travail préparatoire. R. Boyer et C. Coridian constatent ainsi que, parmi les étudiants de première année de Sciences reçus dès la session de Juin (donc considérés comme en réussite) qu'ils ont interrogés, seulement 25 % déclarent préparer très régulièrement les TD (ils sont 77,5 % en Droit et 68,6 % en Histoire). Ainsi, pour la majorité, s'il y a recherche des exercices, celle-ci ne peut avoir lieu que pendant les séances. Effectivement, la quasi-totalité des mêmes étudiants affirment participer activement aux séances en cherchant régulièrement des réponses aux exercices de TD.
Or, V. Montfort (2000) a observé en mathématiques des séances consistant exclusivement en la correction des exercices, par l'enseignante ou par des étudiants. Cette même pratique est choisie en Physique par tous les chargés de TD sauf un qui organise des séances de recherche en groupes. Dans une recherche plus récente, N. Grenier-Boley (2009) conclut son étude d'un TD d'algèbre linéaire de la façon suivante :

> "Plus les notions abordées dans les exercices sont nouvelles (types 1 et 2), moins cet enseignant laisse chercher. Plus les notions abordées dans les exercices sont vues au travers de tâches simples et isolées (type 4), plus cet enseignant laisse chercher.
>
> […] L'enseignant consent à laisser chercher les étudiants dès le début (types 3, 4 et 5) lorsque la nouveauté est minoritaire ou absente (types 3 et 4) ou lorsqu'il souhaite que les étudiants réinvestissent leurs connaissances (type 5) et alors la recherche est plutôt courte." (Grenier-Boley 2009, p. 37)

Dans de telles conditions, même s'ils sont actifs, les étudiants ne sont guère en situation de chercher des exercices.

V. Montfort s'intéresse aux modes de constitution et d'imposition des normes de travail. Elle note trois facteurs qui conduisent à ce que les échanges entre étudiants ne permettent pas la diffusion de repères sur des modalités efficaces d'étude : l'absence d'échanges entre promotions, le caractère tardif des évaluations par les partiels et examens, l'ignorance dans laquelle sont les étudiants d'un même groupe des performances des uns et des autres. Concernant la transmission par les enseignants d'informations sur les gestes d'étude qu'ils attendent et qui seraient donc à leurs yeux constitutifs de la position d'étudiant universitaire, elle constate que les signaux envoyés aux étudiants sur ce terrain sont réduits (ayant suivi pendant plusieurs mois les TD d'une enseignante de Mathématiques, elle a constaté que celle-ci n'a explicité qu'une seule fois la nécessité de préparer les exercices), brouillés du fait de l'hétérogénéité des attentes et des pratiques d'un enseignant à l'autre.

> " La norme de travail ne s'impose pas au nom de l'ensemble des enseignants, ce qui lui aurait donné la force d'une norme institutionnelle, mais enseignant par enseignant. En effet, ce que cherche à imposer un enseignant de façon isolée n'est pas légitimé par la pratique de ses collègues et semble aux étudiants arbitraire et non nécessaire. " (Montfort 2000, p. 68)

On voit donc très clairement combien l'enseignant universitaire de sciences, en position P0, ne fait qu'initier une étude dont les gestes doivent être largement inventés par les étudiants. Impuissants à assumer cette responsabilité, nombre d'entre eux puisent dans leur expérience lycéenne en consacrant leur travail de préparation des examens à la reprise des exercices résolus en TD. Les deux recherches évoquées ici, comme mon propre travail (voir V) le prouvent :

> "deux tiers des étudiants de Sciences en réussite (réussite en Juin) déclarent ré-effectuer régulièrement les démonstrations réalisées en TD, et un peu moins de la moitié s'efforcent de s'entraîner de façon plus poussée en effectuant des exercices de même nature que ceux qui ont été travaillés en TD." (Boyer & Coridian 2004, p. 165)

Par comparaison, la thèse de M. Millet montre que le système didactique S0 prend en charge l'acquisition des gestes d'étude attendus des étudiants de Première année de médecine, avec notamment l'intervention de systèmes auxiliaires privés.

4. Etude de l'efficacité de la formation en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles.

Dans les années 1960, P. Bourdieu et son équipe se sont intéressés aux étudiants de CPGE. Ces travaux sont présentés dans *La noblesse d'état* (1989)[50]. Il est notamment mis en évidence que dans ces filières la productivité du travail étudiant est incomparablement plus élevée que dans les premières années de l'université (DEUG). Dans la perspective des concours, dans le contexte de programmes très chargés et d'un nombre élevé d'heures encadrées (cours, devoirs à la maison et en classe, interrogations), on apprend aux élèves à travailler dans l'urgence, à faire un usage intensif du temps. Dans sa thèse (2007), N. Adangnikou cherche à savoir dans quelle mesure cette productivité se maintient durablement dans le cursus ultérieur. Dans le cadre de cette recherche, il a réalisé une enquête sur leurs façons de travailler auprès d'étudiants en première année d'études d'ingénieur dans des écoles accueillant d'anciens élèves de CPGE mais aussi en forte proportion des étudiants issus d'autres filières, notamment de DEUG et d'IUT. L'échantillon interrogé au moyen d'un questionnaire intègre des représentants des différentes populations, ce qui permet notamment une comparaison DEUG/CPGE à laquelle je vais me restreindre. Les écoles les plus prestigieuses ne réalisant pas ce recrutement multiple, les meilleurs élèves de CPGE ne sont pas touchés par cette étude.

[50] Bourdieu P. (1989), *La noblesse d'état.* Paris : Editions de Minuit

Le questionnaire est formé de 74 propositions qui sont associées à des stratégies d'apprentissage extraites d'une grille d'analyse définie par des chercheurs canadiens[51]. Quatre composantes sont différenciées : stratégies cognitives, stratégies métacognitives, affectives et de gestion des ressources[52]. Les stratégies cognitives envisagées sont de cinq types :

> Stratégies cognitives de répétition (consiste à reprendre l'information telle qu'elle est présentée sans la modifier), d'élaboration (imposer une signification aux connaissances afin de les rendre plus compréhensibles et ainsi de mieux les assimiler), d'organisation (établir des liens au sein des nouvelles connaissances à apprendre), de généralisation et de discrimination (savoir quand et pourquoi apprendre un savoir ou utiliser une technique).

Le questionnaire demande aux étudiants d'évaluer la fréquence de certains gestes avant et après leurs deux premières années d'études supérieures.
A la fin de ces deux années, les gestes de répétition (mémoriser la structure du cours, réaliser des fiches reprenant les titres) sont accomplis fréquemment par une majorité d'étudiants dans les deux populations mais plus souvent[53] en CPGE. Il en est de même pour les gestes relatifs à l'étude des démonstrations pour comprendre et pour faciliter l'apprentissage (stratégies d'élaboration). L'évolution des élèves de CPGE entre début et fin de formation sur ces items est spectaculaire : ils sont beaucoup plus nombreux à les réaliser en fin de parcours. Si les étudiants de DEUG développent eux aussi, mais dans une moindre mesure, le travail concernant les démonstrations, une proportion non négligeable a renoncé après deux ans aux gestes de répétition. Par contre, la réécriture personnalisée du cours dans les fiches, la réalisation de schémas de synthèse (stratégie d'organisation) minoritaire en CPGE, est le fait d'une majorité à l'issue du DEUG. N. Adangnikou interprète cette différence par le caractère complet et structuré des cours proposés en CPGE, dans le souci d'éviter aux élèves entre autre travail les lectures complémentaires qui leur feraient perdre du temps : effectivement 59 % des élèves de CPGE considèrent le cours du professeur comme complet et suffisant pour réussir. Ils ne sont que 36 % dans ce cas en DEUG, toutefois on ne sait comment ils interprètent cette question compte tenu de la séparation structurelle entre cours magistraux et TD à l'université. Une majorité de ces étudiants disent de manière cohérente avoir fréquemment recours à des sources d'informations complémentaires (manuels, ouvrages, …). Mais près de la moitié des élèves de CPGE également. Il est donc difficile d'interpréter ce résultat, peut-être s'agit-il d'annales ou autres recueils d'exercices. Quoiqu'il en soit, N. Adangnikou retient que les étudiants de DEUG sont ceux qui accomplissent le plus de travail à propos du cours.

Relativement aux exercices, un peu plus de la moitié des étudiants de DEUG disent fréquemment prendre note des subtilités de résolution rencontrées dans les exercices (stratégie d'organisation), c'est le cas d'environ 45 % des élèves de CPGE. Ce résultat n'est pas cohérent avec ce qu'a établi ma propre étude. Par ailleurs, le fait de chercher à changer les données des exercices que l'on vient de résoudre (stratégie de généralisation) est une pratique très minoritaire, plus présente en DEUG qu'en CPGE[54]. Peut-être peut-on voir là l'indice d'une

---

[51] Boulet, Savoie-Zajc & Chevrier 1996, *Les stratégies d'apprentissage à l'université*. Presses de l'université du Québec

[52] Stratégies métacognitives de planification (organisation de l'activité scolaire de l'étudiant), de contrôle (évaluer la qualité et l'efficacité des activités cognitives), de régulation (manière dont l'étudiant va réguler l'intensité du traitement qu'il opère).
Stratégies affectives de maintien de la motivation et de la concentration
Stratégies de gestion des ressources temporelles, matérielles (identification des sources d'informations complémentaires disponibles) et humaines (identifier les personnes susceptibles d'apporter une aide).

[53] Sauf pour le cas des fiches reprenant les suites, il s'agit dans tout ce qui suit de différences significatives.

[54] Pourtant, plus de la moitié des élèves de classes préparatoires disent que les examinateurs des interrogations écrites ou orales leur demandent souvent ce qui se passe quand les données varient. Cette opinion n'est partagée que par un quart des étudiants de DEUG.

insuffisance du milieu de l'étude constitué par les exercices résolus dans S0 pour le DEUG qui conduirait une minorité (20 %) d'étudiants à introduire ce geste d'étude autonome en position E1. En CPGE, ce geste serait superflu, bien que correspondant à une attente institutionnelle, le questionnaire élaboré par N. Adangnikou ne permet pas d'en savoir plus sur les raisons de ce phénomène : geste inutile du fait de la richesse du travail dans S0 ou remplacé par un autre geste d'élaboration technologique comme j'ai pu le rencontrer chez les très bonnes élèves de Première S ?
Les principales conclusions de la thèse sont les suivantes :

> " au regard de la grille d'analyse fournie par les stratégies d'apprentissage, il apparaît que les étudiants des classes préparatoires ne se distinguent singulièrement des autres que pour quelques domaines spécifiques. […] ils se distinguent des autres concernant la priorité qu'ils accordent au travail scolaire, le rythme soutenu et la persévérance dans le travail, le stress lié au rythme et l'interrogation sur la pertinence de tout ce qu'ils apprennent. […] ils semblent avoir une capacité de travail plus affirmée durant la formation bac+2, un pouvoir de concentration plus important, une plus grande capacité à suivre un rythme de cours soutenu, une plus grande aptitude d'organisation du travail, une plus grande persévérance, une plus forte capacité d'apprentissage et des connaissances en mathématiques et en physique plus importantes. Cependant, les données collectées en matière d'évaluation scolaire au cours des deux premières années d'école d'ingénieurs ne vont pas dans le sens supposé d'une différence de réussite en [leur faveur]." (*ibidem*, pp. 224-225)
>
> Ce dernier résultat est interprété par les directeurs des écoles concernées par trois facteurs : motivation inférieure due à une entrée par défaut dans ces écoles non prestigieuses, niveau moyen de ces élèves de CPGE et homogénéisation à l'intérieur de l'école d'ingénieurs.

Comme on le constate, l'auteur n'a pas retenu les différences en termes de gestes d'étude que j'ai résumées ci-dessus. Il est vrai que le thème des modalités du travail personnel est très peu abordé dans le questionnaire (15 items sur 74) ce qui rend leur interprétation difficile faute de possibilités de croisement. Ceci me semble assez caractéristique du champ des recherches menées dans une perspective généraliste, auxquelles fait défaut l'analyse didactique nécessaire à une meilleure prise en compte des formes de l'étude spécifiques d'une discipline.

V. Etude comparative des objets et des modalités de l'étude des mathématiques en Licence et en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles

La recherche dont je vais résumer les résultats dans cette partie en les revisitant à l'aide du modèle de structuration du milieu présenté au début de ce chapitre a donné lieu à une présentation exhaustive dans le cahier Didirem n°40 (Castela 2002) et à un article dans la revue *Educational Studies in Mathematics* (2004).

A l'origine de cette étude s'est trouvé un constat réalisé sur plusieurs années à l'IUFM de Rouen : les étudiants ayant effectué une partie de leur scolarité post-baccalauréat dans une classe préparatoire réussissent mieux au CAPES[55] de mathématiques que ceux dont le cursus a été entièrement universitaire. Même si on peut invoquer le niveau de performance plus élevé des lycéens entrant en CPGE pour expliquer cette différence de réussite au concours, l'analyse que j'ai présentée dans le chapitre 1 relativement aux connaissances utiles pour la résolution de problèmes me conduit à formuler la conjecture suivante :

> Les classes préparatoires favorisent plus que l'université la construction par les étudiants des connaissances praxéologiques, notamment la technologie pratique, qui jouent un rôle important dans les épreuves écrites du CAPES comme je l'ai montré dans le premier chapitre.

La technologie pratique est susceptible d'apparaître explicitement dans S0 mais je postule que sa construction relève largement des positions sur-didactiques. Dans cette perspective, j'ai donc réalisé via un questionnaire une enquête comparative sur le travail personnel des

[55] Capes : concours de recrutement des professeurs de collège et lycée. Voir Ch.1

étudiants dans les deux institutions. Ont été interrogés en tout début d'année, 108 étudiants préparant le CAPES, considérés comme représentatifs des étudiants de Licence, et en Janvier 66 élèves de deuxième année de CPGE. Les écarts statistiquement significatifs (déterminés par application d'un test bilatéral d'homogénéité appliqués aux couples de pourcentages comparés, voir Castela 2002, pp. 18-19, pour plus de détails sur les hypothèses) entre les deux populations sont interprétés en termes d'inégal potentiel de construction de connaissances technologiques et mis en relation avec des différences relatives à l'organisation des études dans chaque institution. En effet, dans le cadre de la TAD, le travail étudiant est considéré comme déterminé en première instance par les conditions et contraintes institutionnelles. Au sein de chaque population, la recherche des écarts significatifs est appliquée aux réponses de deux sous-ensembles déterminés suivant un critère de réussite en mathématiques[56], ce dans le but de chercher des corrélations entre réussite et modalités du travail personnel. Pour des raisons de taille de la population, cette partie de l'enquête est de portée limitée pour la classe préparatoire.

1. Le questionnaire

Le questionnaire comporte deux volets, le premier est constitué d'une question ouverte, le second de trois questions fermées. Pour les étudiants préparant le Capes, la question est formulée de la façon suivante :

Supposons que, peu de temps avant l'examen final d'une UV de licence, à une date où vous considérez vos révisions comme achevées, on vous demande d'établir une liste des éléments se rapportant à l'UV que vous avez en mémoire (la vôtre, pas celle d'une machine !), quelles différentes catégories de "choses" figureraient dans votre liste ?

> Pour chaque catégorie, vous attribuerez une note de 1 à 4 selon l'échelle suivante :
> Pour résoudre un problème relevant du domaine mathématique au programme du devoir, cette catégorie de souvenirs est : 4 = indispensable 3 = souvent utile 2 = plutôt inutile 1 = superflue
> (Problème est à prendre au sens usuel de "problème de maths")
>
> Exemples : Théorèmes (3), anecdotes concernant le cours (4)...........

Le questionnaire fermé destiné à la même population figure à la page suivante. Une version adaptée de chaque volet a été élaborée pour l'autre population.
J'ai choisi de présenter ici de manière détaillée les résultats obtenus pour la raison suivante : c'est la mise en perspective de multiples indices dont aucun n'emporte à lui seul la conviction qui fait sens et permet des interprétations, il m'est donc apparu impossible d'argumenter à partir d'une présentation trop résumée des données recueillies.

2. Le rapport au savoir théorique

Bien que non orienté vers ce sujet, le questionnaire apporte des éléments d'information sur le rapport des étudiants au texte du savoir théorique, évoqué sous le terme de 'cours'[57].
Les trois premiers items de la deuxième question du volet fermé de l'enquête[58] concernent explicitement l'importance accordée à l'étude du cours dans une perspective de réussite aux examens (connaissance des définitions et théorèmes, étude des démonstrations). Le quatrième peut être également interprété comme tel si l'on considère la nomenclature classique qui fait suivre les énoncés (définitions ou théorèmes) d'exemples à des fins d'illustration ; toutefois, on ne peut exclure que ce terme ne renvoie pour certains étudiants à des exercices.

---

[56] Les populations notées L et MP sont divisées en trois groupes de niveau de taille grossièrement égale et l'on compare les extrêmes, L+ et L-, MP+ et MP-.
[57] Je ne développerai pas ici les arguments qui conduisent à penser qu'il n'y a pas d'ambiguïté pour les étudiants quant à l'interprétation de ce terme, opposé depuis les débuts du collège à celui d'Exercice et à l'université à celui de TD (Travaux Dirigés).
[58] Dans toute la suite, les questions successives du volet fermé seront désignées par QI, QII et QIII.

Questionnaire destiné aux étudiants issus de l'université

I. Tout au long d'une UV, vous êtes amenés à chercher un certain nombre d'exercices et de problèmes ; ces exercices et ces problèmes sont-ils pour vous

	Toujours	Souvent	Parfois	Jamais
un jeu intellectuel				
un entraînement à la résolution de questions mathématiques				
Une occasion de vérifier si vous avez bien compris le cours				
Un apport d'exemples qui illustrent le cours				
Une aide à la résolution d'autres exercices				
Une source d'idées à retenir				
Des prototypes proches de ceux qui seront posés à l'examen				

Pour chaque proposition, mettez une croix dans la case qui correspond le mieux à votre opinion

II. Que trouvez-vous utile pour réussir un examen?
Pour chaque proposition, mettez une croix dans la case qui correspond le mieux à votre opinion.

	Indispensable	Souvent utile	Plutôt inutile	Superflu
Connaître les définitions				
Connaître les théorèmes				
Etudier les démonstrations du cours				
Connaître des exemples				
Comprendre les commentaires de l'enseignant chargé du cours				
Résoudre soi-même beaucoup d'exercices				
Etudier les corrections d'exercices qu'on a vraiment cherchés et trouvés				
Etudier les corrections d'exercices qu'on a vraiment cherchés et pas trouvés				
Etudier les corrections d'exercices qu'on a peu ou pas cherchés				
Réfléchir aux erreurs qu'on a commises				
Comprendre les commentaires de l'enseignant chargé des TD				

III. En général, quelle est votre attitude par rapport à un exercice non trivial, une fois qu'il a été corrigé ?
Pour chacune des propositions suivantes, attribuez une note de 1 à 4 suivant l'échelle suivante :

4 = correspond à quelque chose que je fais systématiquement, 3 = quelque chose que je fais souvent
2 = quelque chose que je fais rarement 1 = je ne fais jamais cela

Il fait partie du passé, je ne reviens pas dessus	4 3 2 1
Je relis grossièrement la correction	4 3 2 1
Je cherche à comprendre dans le détail la solution	4 3 2 1
Je le refais cahier fermé	4 3 2 1
J'essaie de voir où ont servi les hypothèses	4 3 2 1
Je dégage le plan de la solution	4 3 2 1
J'étudie particulièrement la solution apportée aux points que je n'ai pas su résoudre	4 3 2 1
J'essaie de dégager des idées à retenir	4 3 2 1
Je mémorise grossièrement la situation étudiée	4 3 2 1
J'oublie assez rapidement l'exercice	4 3 2 1

Entourez la note que vous attribuez

La question ouverte apporte des éléments complémentaires sur ce même thème, mais ils sont assez fragiles et viennent seulement conforter les apports du questionnaire ou ouvrir des perspectives pour des études possibles. Il a par exemple été recherché des indices soutenant l'hypothèse de la présence chez les étudiants d'un apprentissage sélectif des résultats énoncés dans le cours, marquant une certaine prise de distance. Ainsi 12 étudiants du groupe L sur 99 ayant répondu à cette question (aucun du groupe MP) distinguent plusieurs groupes de théorèmes auxquels ils attribuent des niveaux d'utilité différents (étudiants différenciateurs).
Certaines citations d'étudiants du groupe L fournissent des éclaircissements quant aux critères présidant à leur différenciation des théorèmes :

> « Définitions [4][59]. *Théorèmes* [4] qui revêtent une importance particulière ; je m'explique, théorèmes nominatifs (Dini, Heine, Bolzano-Weierstrass, Cayley-Hamilton, Thalès etc.), dont la démonstration n'est pas triviale et nécessite l'emploi de plusieurs propositions précédemment vues, qui énonce un résultat général non évident. Autres *Propositions* [3]. "
>
> « Apprendre les Définitions [4] (afin de savoir de quoi on parle). Retenir les théorèmes : les *Théorèmes* [4] importants : les apprendre [4] et faire quelques exercices d'application simples [3] pour pouvoir les utiliser rapidement ou pour repérer leur domaine ou le cadre de leur utilisation plus rapidement ; les théorèmes moins utilisés : visualiser leur domaine d'action par des exercices types qui permettent en même temps de les retenir sans avoir à apprendre "par cœur" ; les Propriété*s* [4] : apprendre [4] par cœur les plus utilisées et savoir retrouver [4] à partir d'une propriété, les autres qui en découlent (pour limiter la quantité à apprendre). »

On entrevoit ainsi dans la première citation une orientation interne au savoir théorique lui-même, qui n'est pas explorée dans le questionnaire, et, dans la seconde, une orientation vers l'utilisation dans les exercices. D'autres étudiants différencient théorèmes et propositions par exemple. Mais, aucune question ne traitant frontalement cette problématique, les effectifs concernés sont assez faibles (22 % de différenciateurs dans le groupe L et 9,4 % dans le groupe MP), les écarts mis en évidence étant de ce fait difficilement significatifs.
Par ailleurs, deux items de QI abordent la contribution des exercices à l'apprentissage du cours, en tant qu'occasions de vérifier la compréhension du cours et sources d'exemples.

De la connaissance du cours vers la résolution de problèmes.

- Utilité de la connaissance des résultats énoncés dans le cours

Plus de 88 % des étudiants considèrent comme indispensable (pour réussir aux examens) de connaître les définitions et les théorèmes. Ce consensus n'a rien de surprenant mais plusieurs nuances ont été mises en évidence.

Il apparaît que les étudiants des deux institutions n'ont pas exactement le même comportement vis à vis de ces deux types d'énoncés, le groupe L accordant plus d'importance aux définitions, le groupe MP aux théorèmes. Il est possible que le poids attribué aux théorèmes dans les réponses de MP corresponde à une structuration institutionnelle très différenciée des résultats, la désignation comme *Théorème*, utilisée avec parcimonie selon les déclarations de l'enseignant de la classe, manifestant clairement la nécessité pour les élèves de connaître ces énoncés. Ceci pourrait également expliquer la faible présence des énoncés secondaires du texte du cours (*Propositions*, *Propriétés*…) dans les réponses de ces élèves à la question ouverte.

Plusieurs éléments convergents plaident en faveur de l'hypothèse suivante : indépendamment de l'institution, les étudiants des sous-groupes forts ont vis à vis de la connaissance du cours une position plus nuancée que les autres :

> - ils considèrent moins souvent définitions et théorèmes comme indispensables (différences significatives au moins à 5% entre la réunion des deux groupes forts et celle des deux groupes faibles),

[59] Rappel : le numéro entre crochets correspond à l'un des quatre niveaux d'utilité introduits par la question ouverte (cf. page précédente)

- ils sont moins nombreux que les autres étudiants à adopter dans la question ouverte l'attitude non différenciatrice qui place au même niveau tous les énoncés et inversement fournissent en proportion plus élevée des réponses différenciatrices dans la question ouverte (différences significatives à 4 %).

- Utilité de l'étude des démonstrations du cours

L'étude des démonstrations du cours est considérée comme indispensable ou souvent utile (cette deuxième modalité est de loin la plus présente) par 80 % du groupe L, 65 % de MP. Cet écart est statistiquement significatif (au seuil de 3 %), il est confirmé par la question ouverte, les étudiants de L citant les démonstrations spontanément plus souvent que ceux de MP. Au sein du groupe L, on trouve également une différence entre sous-groupes de niveau, L+ renforçant la position de L. La position relative des deux populations ne confirme pas les résultats trouvés par N. Adangnikou, la population universitaire accordant ici une importance plus élevée à ce geste d'étude.
Dans la question ouverte, quelques étudiants de la population L donnent certains détails sur le rôle joué par l'étude des démonstrations : conjuguée avec un travail a posteriori sur les solutions des exercices rencontrés, celle-ci peut constituer un point d'appui pour le repérage et l'apprentissage de méthodes, on se situe alors dans la perspective de futures résolutions de problèmes ; elle peut également être finalisée par l'apprentissage du cours, aidant à comprendre et à mémoriser les résultats.
On trouve par ailleurs une différenciation de l'intérêt suivant le niveau de difficulté : pour certains étudiants, une démonstration ne doit pas « être trop dure à suivre » pour remplir l'un ou l'autre des rôles signalés précédemment ; inversement, la complexité de la preuve apparaît dans une réponse comme une mesure de l'importance du théorème. Nous rencontrons ici une première fois une opposition simple/complexe que nous retrouverons dans ce qui suit.

- Utilité de la connaissance d'exemples

Les deux institutions ne se distinguent pas de manière significative sur ce sujet. L'item *Exemples* est cité de la même manière dans la question ouverte. Dans QII, 75 % du groupe L et 70 % du groupe MP considèrent que connaître des exemples pour réussir aux examens est au moins souvent utile, l'avis indispensable étant marginal dans les deux cas. Entre les sous-groupes de niveau, un seul phénomène notable a été mis en évidence : dans le volet ouvert de l'enquête, près de la moitié des étudiants de L+ mentionne spontanément les exemples, ce qui est significativement plus que dans le reste de la population L (au seuil de 9 %).

Les commentaires qui accompagnent l'item *Exemples* lient étroitement les exemples aux résultats du cours avec les deux orientations déjà rencontrées, compréhension ou application, et comme pour les démonstrations, deux tendances que l'on peut considérer comme opposées : mémoriser des exemples significatifs ou des exemples simples.

De la résolution d'exercices vers l'apprentissage du cours.

Pour une très grande majorité des étudiants des deux institutions (voir tableau page suivante), les exercices constituent toujours ou souvent une occasion de vérifier leur compréhension du cours, un peu moins souvent un apport d'exemples et une source d'idées à retenir. Les deux populations sont significativement différenciées par la fréquence de l'avis Toujours : la contribution des exercices à l'étude du cours est moins mise en avant en MP qu'en L. C'est le contraire pour l'item "Sources d'idées à retenir", nettement plus présent chez les élèves de Classes Préparatoires que la fonction d'illustration du cours. Pour au moins 20 % des élèves de ce groupe, les idées retenues ne sont donc pas orientées vers l'étude du cours, on peut alors penser qu'elles sont plutôt dirigées vers la résolution d'exercices.

Question I	**Occasion de vérifier la compréhension du cours**		**Apport d'exemples qui illustrent le cours**		**Une source d'idées à retenir**	
	Toujours ou Souvent	Toujours	Toujours ou Souvent	Toujours	Toujours ou Souvent	Toujours
L	90,7	42,1	69,2	23,4	65,4	11,2
MP	89,4	28,8	59,1	6,1	78,8	28,8
Significatif au seuil de	NS : Non Significatif	8 %	NS	0,1 %	7 %	1 %

Tableau 1[60]

Les sous-groupes de niveau de L ont des comportements analogues vis à vis des points abordés ici. Par contre, MP+ se distingue du reste de la population en minorant la fonction d'aide à la compréhension : on peut penser que la forte représentation des redoublants dans le sous-groupe MP+ (15 sur 22 élèves) joue ici un rôle.

L'idée selon laquelle les exercices joueraient un rôle important dans la compréhension et la mémorisation du cours est explicitée dans quelques réponses du groupe L à la question ouverte. Certains privilégient nettement cette fonction, au point parfois de ne citer les exercices que pour une telle contribution à l'apprentissage, ce qui les différencie alors très peu des exemples et applications donnés par l'enseignant ; comme pour les démonstrations et les exemples, cette perspective conduit certains étudiants à privilégier les exercices simples, les applications les plus directes des théorèmes, du moins au plan de ce qu'il leur paraît important de mémoriser.

Interprétations

Exception faite de ce qui concerne la connaissance des théorèmes, les différents résultats que nous venons de rappeler ici vont tous dans le même sens : l'apprentissage du cours est un enjeu qui est plus mis en avant par la population universitaire que par les élèves de la classe préparatoire. Ceci rejoint la tendance mise en évidence par N. Adangnikou : ce sont les étudiants de DEUG qui accomplissent le plus de travail réorganisateur sur le cours. Il est possible que ceci résulte d'une certaine inefficacité de l'enseignement en amphithéâtre tel qu'il est dispensé à l'université, au moins pendant les deux premières années, le travail nécessaire à la compréhension du cours étant dans ces conditions plus conséquent, c'est un point qu'il ne faut pas négliger ; en CPGE, le cours est au contraire complet et structuré pour alléger le travail complémentaire des étudiants.

Mais ce phénomène peut être interprété comme l'expression d'une différence dans le rapport des deux institutions au savoir mathématique. En classes préparatoires, celui-ci est largement envisagé dans une perspective d'application aux autres disciplines scientifiques (il s'agit de préparer à des écoles d'ingénieurs), ce qui dans la classe de mathématiques oriente l'attention vers la résolution de problèmes. A l'université, les finalités professionnelles sont beaucoup plus lointaines ; les enseignants sont pour une large part des chercheurs en mathématiques pour lesquels le savoir savant a un intérêt en soi, on peut penser qu'ils contribuent par leur discours à installer les étudiants dans un rapport qui valorise le cours en tant que porteur du savoir théorique, celui-ci constituant un objet d'intérêt à part entière, indépendamment de toutes les perspectives d'utilisation. Cette hypothèse fait écho à la conception du monde universitaire qui émerge des travaux sociologiques étudiés dans le parcours bibliographique de la section précédente. L'organisation de l'enseignement (à l'université, séparation de l'exposé du savoir en cours et de ses mises en œuvre en TD, cours magistraux et TD étant

[60] Ce tableau, comme les suivants, donne des pourcentages.

assurés par des enseignants de statuts différenciés[61] ; en CPGE, imbrication des deux avec un seul enseignant) contribue vraisemblablement aussi à créer cette différence entre les deux institutions.
Dans ce contexte, les éléments mis en évidence relativement à la connaissance des théorèmes peuvent être interprétés de plusieurs manières. Dans la mesure où l'évaluation à laquelle il est fait référence dans le questionnaire repose exclusivement sur des résolutions de problèmes, il est possible que différencier le savoir savant présenté en repérant les résultats les plus souvent en jeu dans les solutions soit un atout pour la réussite. En premier lieu, on peut penser que dans le cas d'une épreuve à programme étendu comme en classes préparatoires ou au Capes visant plutôt une maîtrise généraliste, un apprentissage très détaillé est une tâche difficile et sans doute inutile. Cette hypothèse est cohérente avec l'idée d'une centration des élèves de CPGE sur un petit nombre de théorèmes mis en exergue par l'enseignant qui prendrait ainsi en charge la sélection des résultats à connaître absolument et ceci pourrait expliquer la plus forte importance accordée à ces résultats en MP. Pour les examens plus spécialisés de l'université, une sélection des résultats retenus peut être l'effet d'un réalisme tactique d'adaptation à l'évaluation. Dans des discussions informelles, certains très bons étudiants font effectivement la différence entre l'apprentissage qu'ils développent par intérêt pour les mathématiques et celui qu'ils réalisent pour l'examen. Limiter la mémorisation du cours dégage un espace pour des connaissances pratiques sur le fonctionnement mathématique (dont le repérage des théorèmes efficaces fait d'ailleurs partie). Or nous allons voir dans ce qui suit l'importance accordée par les étudiants du groupe L à la connaissance détaillée des exercices rencontrés, effort particulièrement coûteux, difficilement compatible avec un apprentissage exhaustif des résultats du cours. Encore faut-il que l'étudiant s'autorise à prendre ainsi ses distances par rapport au savoir enseigné et qu'il sache choisir à bon escient les éléments retenus, deux dimensions qui font sans doute plus ou moins défaut aux étudiants en difficulté et ce, dans les deux institutions.
Il apparaît donc que le savoir théorique présenté dans les cours magistraux soit, à l'université plus qu'en classes préparatoires, pointé dans S0 comme un objet d'étude important. Mais, sauf cas rares, il n'apparaît pas que ce travail y soit organisé autrement qu'au lycée ou dans les classes préparatoires : exposé du cours par P0, utilisation du savoir dans la résolution d'exercices, apprentissage des définitions et théorèmes. C'est donc en position E1 que les étudiants doivent inventer et réaliser les gestes qui vont leur permettre d'interpeller le milieu ainsi mis à disposition pour en faire l'un des moteurs d'une dynamique d'apprentissage. Sur ce point, la filière mathématique rejoindrait donc celle de Lettres et Sciences Humaines, malgré les différences épistémologiques profondes des champs de savoir impliqués.

3. Le rapport à la résolution de problèmes

Il s'agit ici d'envisager le rapport que les étudiants entretiennent avec les activités de résolution de problèmes auxquels ils sont confrontés en tant que sujets de l'institution où ils étudient, activités considérées comme déterminant la réussite ou l'échec. Dans cette perspective, les éléments apportés par l'enquête ont permis de dégager plusieurs stratégies que peuvent avoir les étudiants pour améliorer leurs capacités à résoudre les problèmes posés par l'institution.

[61] Cette dichotomie n'est d'ailleurs pas sans relation avec la valorisation du savoir théorique mais il n'est pas certain que les étudiants perçoivent la différence de statut des enseignants. Ainsi V. Montfort (2000, p.68) constate que des étudiants de DEUG se conduisent de la même façon avec un PU de Physique, responsable de l'évaluation, et avec un jeune enseignant doctorant.

La réussite vue comme une question d'entraînement

	Q.I : les exercices sont un entraînement à la résolution de questions mathématiques		**Q.II : pour réussir un examen, résoudre soi-même beaucoup d'exercices est**	
	Toujours ou Souvent	Toujours	Indispensable ou Souvent utile	Indispensable
L	90,7	40,2	91,7	41,7
MP	72,7	33,3	78,8	31,8
Significatif au seuil de	1 %	NS	2 %	NS

Tableau 2

L'idée selon laquelle pour réussir aux examens (QII), résoudre soi-même beaucoup d'exercices est pour le moins souvent utile est, dans tous les sous-groupes de niveau sauf un, partagée par près de 90 % des étudiants. MP+ fait exception avec un pourcentage réduit à 54,5 %, il s'en suit un écart significatif entre L et MP. On retrouve un phénomène analogue dans QI : les exercices sont plus souvent considérés comme un entraînement à la résolution de questions mathématiques dans L que dans MP ; ce point de vue est nettement moins présent dans MP+ que dans les autres sous-groupes, les autres étudiants de classe préparatoire faisant écho, de manière atténuée, au comportement de MP+. Les sous-groupes L+ et L- ne sont pas différenciés par ces items.

Plus précisément, les étudiants issus de l'université sont nettement plus nombreux que ceux de classe préparatoire à considérer que la résolution est avant tout une affaire de pratique, sans transfert d'un exercice à l'autre :

> 45 % du groupe L considèrent que les exercices constituent toujours ou souvent un entraînement mais ne sont que parfois, voire jamais, une aide à la résolution d'autres exercices, ce pourcentage est de 29 % dans MP (significatif au seuil de 4 %).

Les deux populations sont homogènes sur ce point qui n'est pas lié aux performances. Ce rapport tactique à la résolution de problèmes, peu propice aux postures réflexives visant à tirer les leçons des expériences antérieures, est donc plus présent à l'université qu'en classes préparatoires.

La réussite vue comme une question de maîtrise des exercices corrigés

Plusieurs items des questions I et II ainsi que la question III explorent l'importance accordée par les étudiants à un travail a posteriori sur la solution des exercices qui leur ont été proposés ou qu'ils ont rencontrés dans des annales ou livres d'exercices corrigés.

Question II	**Etudier les corrections d'exercices vraiment cherchés et pas trouvés**		**Etudier les corrections d'exercices vraiment cherchés et trouvés**		**Etudier les corrections d'exercices qu'on a peu ou pas cherchés**	
	Indispensable Souvent utile	Indispensable	Indispensable Souvent utile	Indispensable	Indispensable Souvent utile	Indispensable
L	98,2	63,9	38,9	7,4	52,8	31,5
MP	90,9	42,4	54,5	10,6	42,4	9,1
Significatif au seuil de		1 %	5 %	NS	NS	0,1 %

Tableau 3

Dans les deux institutions, l'utilité d'une réflexion sur les erreurs commises fait très largement consensus (plus de 90 % d'avis Indispensable ou Souvent utile, plus de 50 % d'avis Indispensable). Il en est de même du retour sur les exercices véritablement cherchés et qui ont été l'occasion d'échecs, cependant significativement plus considéré comme Indispensable par le groupe L. Par contre, les avis sont nettement plus partagés sur les exercices que l'étudiant a cherchés et su résoudre lui-même d'une part, sur les exercices qui n'ont pas été l'objet d'un travail personnel préalable conséquent d'autre part, les deux populations se distinguant significativement. Plus de la moitié des étudiants considèrent le retour sur ces exercices comme plutôt inutile ou superflu. Mais les étudiants de la population L sont plus nombreux que ceux de MP à accorder une utilité au retour sur les solutions d'exercices lorsque ceux-ci n'ont été que peu ou pas du tout cherchés ; inversement, l'étude des corrections d'exercices que l'étudiant a su résoudre occupe une place plus importante en MP.

Dans la question III centrée sur les modalités de l'étude des corrigés d'exercices, les étudiants de L sont plus nombreux que ceux de MP à répondre qu'ils reviennent systématiquement sur les corrections[62]. De plus, parmi les pratiques d'étude proposées, trois sont plus présentes dans L que dans MP (deux pratiques qui font l'objet d'un large consensus dans les deux groupes : revenir sur les échecs, comprendre dans le détail, et une pratique moins répandues : refaire cahier fermé). Seul l'item « J'essaie de dégager des idées à retenir » est plus répandu dans MP que dans L mais l'écart n'est pas significatif. Cette approche plus décontextualisante sera prise en compte plus spécifiquement dans la partie suivante.

Question III	**J'étudie particulièrement les points que je n'ai pas su résoudre.**		**Je cherche à comprendre dans le détail la solution**		**Je refais cahier fermé**	
	Souvent ou Systématique-ment	Systématique-ment	Souvent ou Systématique-ment	Systématique-ment	Souvent ou Systématique-ment	Systématique-ment
L	92,6	45,4	84,2	33,3	53,7	6,5
MP	81,8	28,8	83,3	19,7	36,4	7,6
Significatif au seuil de	3 %	3 %	NS	6 %	3 %	NS

Tableau 4

Deux items supplémentaires apportent des informations permettant d'interpréter ces résultats. Les exercices proposés dans le cadre institutionnel sont considérés comme étant toujours ou souvent des prototypes proches de ceux qui seront posés lors des examens (QI) par 43 % des étudiants de L alors que 24 % seulement des élèves de MP adoptent ce point de vue[63]. Par ailleurs, près de 40 % des élèves de MP déclarent (QIII) qu'oublier assez rapidement les exercices leur arrive systématiquement ou souvent alors que c'est seulement le cas de 16 % des étudiants de L. Ces deux écarts sont significatifs au seuil de 2 % et 0,1 % respectivement.

Les sous-groupes de L peu différenciés par QI et QII le sont par contre nettement par QIII. La pratique consistant à revenir systématiquement sur les solutions est notablement plus répandue chez les meilleurs étudiants de L (59 % contre 33 %, significatif au seuil de 4 %). Cette différence de comportement est confirmée au niveau des modalités de l'étude a posteriori ; il apparaît en particulier que les étudiants de L+ sont significativement plus nombreux que ceux de L- à choisir les réponses Systématiquement/Souvent pour la proposition « Je refais cahier fermé » (67 % contre 47 %, significatif au seuil de 5 %). Par

[62] Il s'agit de l'avis Jamais pour la proposition "Il fait partie du passé, je n'y reviens pas".

[63] Pourtant, dans le cas de l'institution MP, les exercices sont comparés aux épreuves d'évaluation qui ont lieu dans le cours de l'année et non spécifiquement aux concours.

ailleurs, on relève que les étudiants de L+ sont un peu plus nombreux que ceux de L- à associer exercices prescrits et épreuves d'examen, moins nombreux à les oublier assez rapidement ; ces différences vont dans le même sens que celles que nous avons notées entre L et MP mais elles sont de moindre portée. Il semble donc qu'une stratégie de réussite en licence consiste à revenir précisément sur les corrections d'exercices dans la perspective de savoir résoudre des problèmes voisins lors de l'examen.

Dans le groupe MP, la comparaison entre sous-groupes donne pratiquement sur tous les points des résultats inversés par rapport à ceux de la population L, avec une significativité en général très relative vue la taille des effectifs. Que les exercices aient été cherchés ou non, trouvés ou non, les élèves de MP+ accordent moins d'importance que ceux de MP- à l'étude a posteriori des corrections, ils sont moins nombreux à revenir sur les points non résolus, à mémoriser grossièrement les situations et à refaire cahier fermé ; par contre, ils ont plus tendance à ne pas revenir sur les exercices ou à les oublier assez rapidement. Enfin ils associent moins souvent exercices prescrits et devoirs en classe. Le sous-groupe MP- a quant à lui un comportement assez voisin de celui de la population L, se situant à plusieurs reprises entre L- et L+. Il semble donc que le style de travail dont nous avons ci-dessus conjecturé l'efficacité en licence soit bien présent en classes préparatoires mais s'y révèle inadapté. Il est tout à fait possible qu'un certain nombre d'élèves, parmi les plus à l'aise, se dispense totalement ou presque d'un retour explicite sur les corrections. Mais plusieurs éléments issus de la question ouverte ainsi que des deux items référant aux idées à retenir (QI et QIII) conduisent à envisager la présence, dans le sous-groupe MP+ particulièrement, d'un second style de travail a posteriori sur les solutions, accordant une large part à la décontextualisation de méthodes. Nous allons y venir maintenant.

La réussite vue comme une question de connaissances sur le fonctionnement mathématique et de transfert.

Dans les questions fermées, trois items font référence à une idée de transfert et/ou de décontextualisation : il s'agit dans la question I des propositions « les exercices sont une aide à la résolution d'autres exercices », « les exercices sont une source d'idées à retenir » et dans la question III, « j'essaie de dégager des idées à retenir ».

Dans les deux populations, près de 90 % des étudiants disent essayer systématiquement ou souvent de dégager des idées à retenir à partir des corrections, les pourcentages des deux avis positifs étant plus élevés dans MP que dans L. Ces écarts sont confortés par d'autres éléments :

- dans le premier groupe, le point de vue "Exercices comme sources d'idées à retenir" est plus présent que le point de vue « Exercices comme entraînement », c'est le contraire dans L avec dans ce groupe un écart de près de 25 % entre les pourcentages respectifs d'avis Toujours/ Souvent (voir tableaux 1 et 2) ;
- les exercices sont également plus souvent vus comme une aide à la résolution d'autres exercices dans MP que dans L. Plus précisément, les étudiants qui choisissent un avis Systématiquement ou Souvent pour cet item tout en ne comptant pas sur une proximité des examens aux exercices déjà rencontrés, c'est-à-dire pour qui l'aide ne consiste pas en une simple reproduction, représentent 41 % du groupe MP et 29 % du groupe L (écart faiblement significatif : seuil de 11 %).

Même si les idées retenues ne sont pas nécessairement orientées vers la résolution d'autres exercices (elles peuvent apporter des illustrations, voire des résultats complémentaires pour le cours), ces résultats font écho aux observations réalisées à partir des apparitions dans les réponses à la question ouverte des items qui évoquent explicitement des savoirs sur le fonctionnement mathématique de portée plus ou moins générique, à savoir *Méthodes* et *Astuces*. Ceux-ci sont, de manière spontanée, significativement plus cités par les élèves de MP que par ceux de L. Dans sa thèse, N. Adangnikou (2007) rencontre des éléments concordants au cours d'entretiens réalisés auprès d'étudiants de classes préparatoires et de première année d'école d'ingénieurs :

> "Ils [les élèves de CPGE] accordent une importance particulière à trouver des "astuces" pour faire les exercices qui n'apparaît pas chez les premiers [les étudiants des autres formations] ("plus tu fais d'exercices et plus tu as une panoplie d'astuces, de trucs, de techniques, de méthodes et plus tu es rapide"). Dans ces exercices, la démonstration occupe une place de choix ("en prépa, on essaie de voir tout le cheminement tandis qu'à la fac il s'agit simplement de connaître la formule", "c'est comme du Descartes, on essaie de résoudre un problème en pleins de petits problèmes plus faciles"). Il y aurait là une capacité à rentrer dans les détails et une capacité d'abstraction que n'auraient pas les autres." (*ibidem*, p.118)

Concernant la comparaison des sous-groupes de niveau, les étudiants de L+ sont plus nombreux que ceux de L- à essayer systématiquement de dégager des idées à retenir à partir des solutions d'exercices, les deux populations ayant des comportements similaires pour les deux items de la question I. Dans la question ouverte, L+ cite plus souvent que L- les *Méthodes*, les *Astuces* et les *Exemples*.

Dans MP, 45 % des élèves de MP+ affirment dans QIII essayer systématiquement de dégager des idées à retenir, c'est le plus fort pourcentage de toutes les sous-populations étudiées. Pour l'item correspondant de QI, MP+ est très hétérogène puisque les pourcentages d'avis Toujours d'une part, d'avis Rarement/Jamais d'autre part y sont plus élevés que dans les autres sous-groupes de MP (dans les deux cas, l'écart avec le reste de MP est significatif). Enfin, dans la question ouverte, MP+ cite plus que MP- les *Astuces* et les *Exercices-types*.

Interprétations

- Importance accordée à l'université aux exercices non cherchés

Parmi les étudiants du groupe L, la nécessité de revenir sur les solutions d'exercices non trouvés est majoritairement mise en avant, que les exercices aient ou non été véritablement cherchés. Sans doute ce résultat a-t-il à voir avec le fonctionnement des Travaux Dirigés évoqué dans IV.3 : sauf à se cantonner à un très petit nombre d'exercices qu'ils auraient eu l'occasion de chercher et de ne pas trouver, les étudiants doivent se consacrer à ceux qu'ils n'ont pas cherchés. Notons au passage qu'ils ont donc aussi fort peu l'occasion de commettre ces erreurs dont ils plébiscitent la contribution à leur processus d'étude des solutions.

En classes préparatoires, ce sont les exercices véritablement cherchés qui sont privilégiés. Il est vraisemblable que l'encadrement du travail étant beaucoup plus insistant, la quantité des exercices qui ont été l'objet d'une recherche personnelle est telle qu'est minorée la place accordée à ceux qui ne l'ont pas été. Cette différence entre les deux institutions contribue sans doute à l'écart constaté à propos de la nécessité de résoudre soi-même beaucoup d'exercices, les étudiants de L mettant en avant ce qui constitue peut-être pour eux le fruit plus ou moins tardif d'une prise de conscience personnelle : même si l'institution ne vous y oblige pas, en mathématiques, il faut chercher des problèmes. En classes préparatoires, la densité du travail prescrit est telle que les élèves n'éprouvent pas le besoin (et n'ont guère le temps) de développer le corpus des exercices cherchés dans le cadre de S0.

- Différents types de rapport aux exercices

La nature des épreuves d'évaluation contribue probablement dans une large mesure aux différences rencontrées. Si l'on se réfère aux réponses des étudiants de la population L, il semble qu'à l'université, les problèmes d'examen comprennent une part importante d'exercices nécessitant peu d'adaptations par rapport à ceux qui ont été abordés en formation. Une recherche récente réalisée par G. Gueudet et M-P. Lebaud (2008) s'intéresse à l'élaboration des textes d'évaluation dans un module d'enseignement de mathématiques à l'intention d'étudiants de Physique-Chimie en L1. Ce travail confirme l'hypothèse d'une grande proximité entre TD et examens. Les auteurs interprètent ce phénomène en termes de

contraintes pesant sur les enseignants : durée courte des épreuves, utilisation des examens pour piloter le travail étudiant puisque la tradition universitaire d'autonomie des étudiants fait qu'il n'est encadré par aucun autre dispositif, contrainte du taux de réussite particulièrement vive dans une phase de désaffection, qui conduit à élaborer des épreuves à la portée des étudiants travailleurs, solution la moins coûteuse en termes de bouleversement des conceptions pédagogiques des enseignants universitaires et de recherches didactiques. Dans de telles conditions, les étudiants ont tout intérêt à revenir sur la correction des exercices qui leur auront été institutionnellement proposés (voire figurant dans des annales ou des livres d'exercices), qu'ils les aient cherchés eux-mêmes ou non. Les résultats obtenus dans l'étude que j'ai réalisée convergent sur ce point avec ceux de R. Boyer et C. Coridian (IV.3).
Mais, l'objectif étant de savoir résoudre à moyen terme des exercices relativement proches, ils leur suffit de se livrer à une étude précise visant une compréhension locale et la mémorisation jusqu'à l'examen des situations rencontrées ; une prise de distance limitée suffit. Le retour sur des exercices réussis peut dans ces conditions apparaître comme superflu.
Ce style de travail, orienté vers la **reproduction** des exercices rencontrés en TD, est plus présent chez les étudiants du groupe universitaire que chez ceux de classe préparatoire ; le fait qu'il le soit aussi plus chez les étudiants en réussite en Licence que chez ceux qui ont éprouvé des difficultés à passer toutes les unités étaye les interprétations proposées. Ainsi, la nature des évaluations permettrait que les formes de l'étude efficaces au lycée (voir III) continuent à assurer la réussite à l'université. C'est en Mathématiques le phénomène de secondarisation repéré dans les Sciences Humaines et Sociales : faute d'élaborer des dispositifs permettant aux étudiants de découvrir les gestes d'étude permettant de réaliser les apprentissages souhaités, l'université serait conduite à transiger sur le point crucial de l'évaluation de façon à apparaître comme respectant sa part d'un contrat social et didactique qui lui impose de préparer efficacement les étudiants aux examens.
Les étudiants moins performants seraient au contraire plus nombreux à miser sur des capacités d'improvisation ou, pour les plus travailleurs, sur l'idée que le progrès en mathématiques résulte d'un **entraînement** conçu naïvement comme affaire de quantité sans retour réflexif sur la pratique, activité de résolution qu'ils peuvent compléter d'un apprentissage très détaillé du cours non orienté vers la pratique (cf. V.2).

En classes préparatoires, le rapport institutionnel aux épreuves d'évaluation diffère sur plusieurs points de celui qui est en vigueur à l'université. Je citerai particulièrement l'existence pour les concours (y compris le CAPES) d'un programme annuel unique qui impose un travail à plus long terme et qui élargit le champ des problèmes susceptibles d'être posés ainsi que le domaine des connaissances potentiellement en jeu dans une épreuve (voir l'analyse des épreuves du CAPES proposée dans le premier chapitre). Au cours de l'année, l'enseignant n'est pas soumis à la contrainte du taux de réussite puisque celle-ci ne se mesurera qu'en fin de cycle par le succès à des épreuves dont il ne maîtrise aucunement l'élaboration. Enfin, fait exceptionnel dans le système éducatif français, les notes obtenues n'ont pas véritablement d'importance, seul compte le classement des élèves, y compris dans l'année. Ainsi, les enseignants de classes préparatoires ont-ils les moyens de résister aux transactions à la baisse (mais c'est au prix d'une constance dans les notes faibles que certains élèves ne parviennent pas à supporter).
Dans ce contexte, dès lors que les énoncés proposés aux concours qui inspirent directement les évaluations en cours de scolarité, ne sont pas réduits à des transpositions plus ou moins directes d'exercices classiques, mémoriser le corpus des exercices rencontrés au cours de l'année apparaît comme une mission quasi impossible dont l'efficacité est par ailleurs peu assurée. Le fait que le style de travail orienté vers la reproduction soit plus présent dans le groupe des élèves faibles de classe préparatoire soutient cette hypothèse d'inefficacité. Que le lien entre pratique quotidienne et évaluation finale soit aussi indirect peut conduire certains

étudiants à considérer le travail prescrit comme une simple occasion d'entraînement sur lequel il serait inutile de porter un regard réflexif, ce point de vue est certainement présent dans la population MP mais l'étude montre qu'il y est moins répandu que dans L. On peut donc penser que la prise en compte de l'expérience mathématique quotidienne passe en classes préparatoires par une certaine prise de distance, ce que j'ai appelé un rapport stratégique.
Hormis certains exemples typiques, la plupart des exercices peuvent être oubliés sur le long terme. Le travail n'est pas centré sur la maîtrise des exercices déjà rencontrés, ceux-ci sont considérés comme l'occasion de rencontrer des façons de faire qu'il s'agit de repérer et de capitaliser sous des formes plus ou moins décontextualisées de façon à construire un savoir fonctionnel condensé, dans la perspective d'un **transfert** possible à des problèmes relativement éloignés de ceux qui ont été résolus précédemment. Rencontrées explicitement dans cette étude via les notions de méthodes, d'astuces et d'exercices-types, les connaissances praxéologiques sont plus souvent reconnues comme utiles en classe préparatoire que dans l'enseignement universitaire de licence. Le style de travail correspondant sur les exercices est plus présent dans la première institution que dans la seconde. Remarquons qu'un tel travail peut s'appliquer également à des solutions qu'on a su trouver puisque la question n'est pas seulement de résoudre un problème mais également de repérer ce qu'il peut apprendre de général ; ceci peut expliquer le poids plus important accordé en classe préparatoire au retour sur cette catégorie d'exercices.
Dans le contexte d'un enseignement orienté vers l'encadrement du travail étudiant tel que signalé aussi bien par P. Bourdieu (*La noblesse d'état, 1989)* que par N. Adangnikou (2007), on peut envisager que la technologie pratique apparaisse explicitement (par exemple pratiques reconnues comme astuces) dans la situation didactique en CPGE. La très forte présence des termes 'techniques', 'méthodes' et 'astuces' dans le volet ouvert de l'enquête soutient cette conjecture. Une partie des apprentissages praxéologiques et plus spécifiquement technologiques serait donc organisée dans S0, et ainsi fortement pointée comme étant à poursuivre par E1, grâce à des gestes qui ne seraient pas complètement à inventer.
Cette forme de l'étude est particulièrement présente chez les élèves du sous-groupe fort de MP. Ceci étant, il apparaît nettement qu'elle ne constitue pas la seule clé de la réussite en classe préparatoire. En proportion non négligeable, certains élèves en réussite dans cette institution affirment ne pas revenir sur les exercices déjà résolus. Ceci ne signifie pas nécessairement qu'ils ne construisent pas de manière différente les connaissances en question ici, une certaine aisance leur permettant de tirer parti de l'activité de résolution au cours même de son déroulement ou pendant les phases de correction en classe ; mais rien ne permet d'étayer cette hypothèse dans l'enquête réalisée.
Inversement, on ne peut pas dire que les élèves en échec en classe préparatoire négligent véritablement le point de vue décontextualisation. En fait cette population semble tenter d'effectuer toutes les formes possibles de l'étude, apprentissage exhaustif du cours, étude détaillée des exercices et décontextualisation ; tout se passe comme si ces élèves ne parvenaient pas à choisir entre plusieurs façons de travailler, continuant à accomplir les tâches qui leur avaient réussi au lycée tout en étant sensibles au nouveau contrat en vigueur en classe préparatoire.
Par ailleurs, même si ce style de travail est moins présent dans L+ que dans MP+, il y est toutefois plus que dans L-. Plusieurs précisions données dans la réponse à la question ouverte laissent penser que, si une centration sur la reproduction des exercices vus en TD suffit au succès en Licence, certains étudiants s'appuient à la fois sur les démonstrations du cours et sur les solutions d'exercices pour repérer méthodes et exercices-types.

4. Lien avec la conjecture initiale

Il s'agit maintenant de voir en quoi les éléments obtenus soutiennent la conjecture énoncée, à savoir : " les classes préparatoires favorisent plus que l'université la construction par les étudiants des connaissances praxéologiques qui jouent un rôle important dans les épreuves écrites du CAPES".

Nous avons vu que l'étude du cours est une préoccupation plus centrale chez les étudiants de la population universitaire enquêtée que chez ceux de classes préparatoires. Ceci me semble un élément allant dans le sens de la conjecture. En effet, je ne considère pas que le travail relatif au savoir théorique soit spontanément producteur des connaissances praxéologiques recherchées. D'une part, il n'est pas nécessairement orienté vers l'utilisation dans les problèmes ; d'autre part, il est naturellement inducteur d'une organisation centrée sur les concepts et théorèmes et débouche plus difficilement sur une structuration autour des types de problèmes, particulièrement dans le cas des praxéologies complexes (Ch1-VII.5). Je ne conteste nullement qu'il soit possible à travers l'étude de l'ensemble du cours, notamment des démonstrations, d'acquérir des connaissances pratiques tout à fait élaborées (c'est bien ce dont j'ai fait personnellement l'expérience -Ch1-IV.2), mais je fais l'hypothèse que ceci n'est pas le lot de la majorité des étudiants : nous venons de voir dans la section 2 consacrée au rapport au savoir théorique que des objectifs de compréhension, d'illustration et de mémorisation pouvaient favoriser la sélection des éléments les plus simples dont la portée est en général limitée sur le plan de la résolution de problèmes.

Par ailleurs, je considère que les points de vue « Entraînement » et « Reproduction » sur les exercices ne favorisent pas la construction de connaissances orientées vers la pratique[64], le premier militant contre l'idée même que des connaissances non savantes pourraient être utiles pour résoudre des problèmes, le deuxième centrant l'apprentissage sur une mémorisation pointilliste peu propice à la prise de distance. Le point de vue "Transfert" est quant à lui, pratiquement par définition, orienté vers la construction de connaissances sur le fonctionnement mathématique. Or, les résultats obtenus nous conduisent à avancer que les deux premiers points de vue sont plus fréquents chez les étudiants de la population universitaire que chez les élèves de classes préparatoires, le troisième étant au contraire plus présent chez les seconds que chez les premiers. Ceci plaide à nouveau en faveur de la conjecture initiale.

Si je résume maintenant les facteurs institutionnels qui me paraissent de nature à expliquer ces différences, je retiendrai que les élèves de classes préparatoires sont encouragés à construire des connaissances praxéologiques par l'orientation de la formation vers l'utilisation des mathématiques, par un développement important et très encadré d'une pratique effective de résolution de problèmes, par la présence dans le cadre même de la situation didactique de moments d'élaboration de la technologie pratique, par la nature des épreuves de concours. A l'université, le savoir théorique est un objet d'étude qui émerge comme important mais les étudiants ne sont pas accompagnés dans la découverte des gestes qu'il leur faudrait accomplir pour interagir avec le milieu ainsi mis à leur disposition. Par ailleurs, ils sont peu incités à mettre à profit les Travaux Dirigés pour avoir une pratique personnelle de résolution. Dans ces conditions, sauf à provoquer un fort taux d'échec socialement insupportable et dont ils porteraient la responsabilité, les enseignants ne peuvent prendre pour référence des examens les apprentissages visés par l'université qui restent orientés vers la culture de la recherche en mathématiques. Ils en sont réduits à construire des évaluations proches de la

[64] Ceci étant, je n'exclus pas que des connaissances utiles pour la résolution de problèmes soient construites par des étudiants professant l'un ou l'autre des deux premiers points de vue, particulièrement dans le cas où leur pratique personnelle est suffisamment abondante et variée.

pratique proposée en Travaux Dirigés, encourageant ainsi les étudiants sérieux à un prolongement des manières de travailler du secondaire.

VI. Perspectives

1. Etude du travail personnel en mathématiques

Tant pour le lycée que pour le supérieur, le travail personnel des élèves ou étudiants est un objet encore trop insuffisamment étudié. Tout se passe comme si l'on considérait comme définitivement inaccessible la part réellement constructive (Rogalski 2008a) du travail personnel. Sans nier que tout un pan de l'activité qui provoque des apprentissages est involontaire et inconsciente, je continue à penser que l'étude (en tant qu'activité organisée consciente) en mathématiques constitue un thème de recherche pertinent. Mais il soulève des questions d'ordre méthodologique difficiles, l'obstacle fondamental résidant dans le fait que ce travail se déroule normalement dans des lieux qui relèvent de la sphère privée de l'étudiant.

Mes propres recherches n'ont fait qu'effleurer la réalité des gestes accomplis. Comme je l'ai signalé dans la section III.3, les résultats que j'ai obtenus par les entretiens réalisés en Première S sont vraisemblablement très marqués par le genre des élèves interviewés. Pour l'étude dans le supérieur, un tiers environ de la population MP+ ne s'est retrouvé dans aucune des suggestions du questionnaire. Il y a donc un déficit du côté des gestes efficaces mais il est encore plus profond pour le travail des élèves ou étudiants en difficulté sur lequel je n'ai pas eu l'occasion de me pencher en détail. Même si les formes du travail personnel ne déterminent certainement pas totalement les performances scolaires, on ne peut pas supposer qu'elles n'y jouent pas un rôle important. Or il ressort clairement de la recherche sur le supérieur que, tels que définis par les items du questionnaire, les mêmes gestes sont, dans la même institution, partagés par des étudiants de niveau de réussite variable. Il conviendrait donc de regarder de plus près les pratiques réalisées, en particulier celles qui reposent sur la lecture.

La réalisation d'entretiens avec une population plus nombreuse, de composition plus équilibrée quant au genre et aux performances me paraît indispensable pour explorer la diversité des formes de travail, ce aussi bien au niveau du lycée que de l'université. Je conjecture que devraient ainsi émerger des façons de travailler différentes, sans doute moins centrées sur l'écrit. Cette première approche, de nature clinique, devrait déboucher sur des enquêtes à dimension statistique grâce à l'élaboration de questionnaires moins influencés par mes propres façons d'étudier les mathématiques que ceux que j'ai pu utiliser jusqu'à présent.

Ces deux méthodologies complémentaires ont cependant l'inconvénient de reposer sur les déclarations des sujets concernés. Il est difficile de dépasser cet obstacle. On peut penser dans une perspective légèrement différente à la rédaction de journaux dans lesquels les élèves consignent le travail qu'ils réalisent (voir Barrère 1997). Mais il me semble entrevoir des pistes méthodologiques plus intéressantes en ce qu'elles permettent de dépasser l'obstacle du déclaratif dans les travaux de J. Lithner (2003) et de C. Cazes et F. Vandebrouck (2008). Le premier s'intéresse à la façon dont sont utilisés les manuels en début d'université ; plus précisément, il filme l'activité réalisée par trois étudiants qu'il met individuellement en situation de résolution d'exercices relatifs à des contenus déjà enseignés, des manuels étant à leur disposition. Ceci lui permet notamment de repérer une stratégie commune qui consiste à rechercher des exercices résolus disponibles dans le but de copier ('*mimicking*') les techniques utilisées. Des pratiques observées il déduit que les étudiants semblent peu enclins à dégager des idées générales à partir de leurs expériences ni à chercher une compréhension par des raisons mathématiques globales. Je ne dirais pas que cette méthodologie donne accès aux gestes réalisés dans le but d'apprendre. En revanche, on peut considérer qu'elle procure des informations sur les ressources utilisées par les étudiants pour résoudre des exercices nouveaux et sur ce qu'ils font à leur propos pour y trouver une aide à la résolution d'exercices nouveaux. C. Cazes et F. Vandebrouck (2008) quant à eux s'intéressent à l'utilisation des

Banques d'Exercice en Ligne (BeL), leurs recherches ne sont pas directement orientées vers le travail personnel. Toutefois il me semble que la méthodologie utilisée, croisant enregistrement de séances de travail et traces informatiques des parcours de résolution d'exercices réalisées par les élèves, pourrait être employée pour donner une idée des gestes réalisés en phase de révision. Mais ceci est pour moi un domaine inconnu et j'ignore si dans l'état actuel, ces banques permettent de dépasser le pur travail de la technique : fournissant à l'envi des occasions d'étendre le corpus des exercices traités, il n'est pas certain qu'elles favorisent les élaborations technologiques et permettent de repérer si l'étudiant construit des types de problèmes assez génériques ou cherche à l'opposé à identifier des séries de situations particulières qu'il s'entraîne à traiter. Il doit être possible avec ce type d'outils d'approcher des pratiques effectives visant à obtenir un certain apprentissage relativement aux exercices. Mais ceci nécessiterait peut-être d'enrichir les banques proposées pour qu'elles autorisent une diversité de stratégies d'étude.

2. Le cas particulier de l'étude des cours théoriques

Pour ce qui concerne l'université, on a vu que l'étude du texte du savoir théorique constituait une dimension du travail espéré par l'institution en tant que composante caractéristique d'une approche critique des savoirs liée à la recherche. On sait que la plupart des étudiants échouent à mener à bien un tel travail auquel ils n'ont pas été initiés au secondaire. Si l'université veut sauvegarder la place qu'elle lui attribue dans son échelle de valeurs, cette composante de l'activité mathématique attendue des étudiants doit être l'objet d'un apprentissage organisé. C'est un territoire que je n'ai personnellement pas exploré dans mes recherches antérieures et qui me semble d'autant plus digne d'intérêt que les conditions de l'étude y sont particulièrement difficiles. L'étudiant y est confronté à un milieu particulièrement inerte puisque, contrairement à ce qui se passe pour la résolution de problèmes, il n'y a pas de questions initiales. L'étude suppose donc notamment la réalisation des gestes d'animation, d'interpellation du milieu que j'ai évoqués précédemment (II.4). Une telle direction de recherche me semble pouvoir s'inscrire dans la ligne des travaux développés au sein de la TAD sur les Parcours d'Etude et de Recherche.
Dans un cadre de référence théorique complètement différent, T. Dreyfus et I. Kidron ont publié dans la revue RDM (2006) un article qui me semble une source d'inspiration tout à fait intéressante. La recherche s'intéresse au travail réalisé de manière totalement autonome par le deuxième auteur pour développer ses connaissances sur le thème des phénomènes de bifurcation dans les systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre (c'est-à-dire le doublement de la période des états limites de suites récurrentes). Les connaissances initiales d'I. Kidron sur le sujet sont visiblement limitées. Elle dispose de différents medias (livres, Internet) qu'elle sollicite à plusieurs moments de l'étude pour obtenir de nouvelles informations et du logiciel Matematica. Le processus d'étude est reconstitué a posteriori à partir des notes chronologiquement ordonnées et des traces des utilisations du logiciel, ce matériau étant complété par un retour introspectif qui aboutit à une reconstitution, sans doute méthodologiquement au mieux de ce que l'on peut espérer dans le cas d'un travail sur quinze jours, difficile à filmer en continu. L'article permet de repérer certains gestes fondamentaux : générer des questions (notamment à partir de la volonté constante d'expliquer les informations trouvées, d'explorer les liens entre des résultats initialement sans rapport connu), faire des bilans écrits de l'état du travail, vérifier expérimentalement par Matematica et produire des données en étudiant des cas particuliers, changer de représentations. Mais, le compte rendu n'est pas détaillé sur ce point car tel n'est pas l'objet de la recherche dont le but se situe au niveau de la modélisation des actions cognitives du sujet. Cet article ne se situe donc pas dans la perspective d'une exploration des gestes d'étude qui est l'objet sur lequel je voudrais

continuer à travailler mais d'un point de vue méthodologique, il constitue une contribution intéressante.

3. Etude de l'influence des institutions et des enseignants

Si les gestes de l'étude personnelle des élèves sont vraisemblablement très influencés par le milieu familial, si leur formation relève plutôt des enjeux ignorés d'apprentissage, il faut aussi se demander quels facteurs peuvent les influencer dans le cadre du système éducatif. Cet axe de travail a deux dimensions, correspondant à des échelles différentes, celle des institutions scolaires et universitaires, celle des pratiques enseignantes.

Par des études comparatives menées dans des institutions différentes (voir V), on peut chercher à mettre en évidence certaines caractéristiques des organisations didactiques qui semblent influencer les modalités du travail personnel. A l'université, il me semble opportun de prendre comme objets de recherche d'un point de vue didactique les dispositifs spécifiques orientés vers le travail personnel des étudiants en mathématiques, tels qu'ils ont été encouragés récemment par le plan Réussite Licence. La réforme des lycées quant à elles devrait donner lieu à une multiplication de dispositifs expérimentaux d'aides aux élèves, certains étant centrés sur le travail personnel, qui pourront donc être étudiés. Mais au moins pour l'enseignement supérieur qui se ramifie en institutions très différentes, je pense qu'il faut également s'intéresser à l'organisation globale des études. Je conjecture en effet que le développement de dispositifs réservés aux étudiants en difficulté atteint très vite ses limites et qu'il faudrait concevoir des évolutions destinées à l'ensemble des étudiants. La question des modalités de l'évaluation des étudiants par l'institution est alors un point clé. Selon une perspective anthropologique, il s'agit de tabler sur le fait que des assujettissements institutionnels exercés également sur tous les sujets occupant une position donnée provoquent des adaptations de chacun d'entre eux. Suivant Y. Chevallard (2003), je postule que ces effets de formation s'exercent d'autant plus efficacement que se construit une communauté des sujets concernés :

> "*A priori* tribu parmi d'autres […], le groupe de formation (la classe, la promotion, etc.), pourra ainsi fonctionner comme une *contre-tribu* […]. Référé à la tribu ou au clan au sein duquel il s'institue, le changement cognitif apparaît selon un processus dans lequel chacun aide l'autre à assumer le changement *parce que tous changent ensemble*, chacun étant le témoin du changement des autres et témoignant de son acceptation *non tant de son propre changement que du changement des autres*. […] L'immense majorité des personnes change en fait *solidairement*, au sein d'un groupe, d'une bande, d'une tribu, d'une classe, d'un "collège invisible." (*ibidem*, p. 13[65])

La constitution de telles "contre-tribus" favoriserait les effets de formation, voire même rendrait possibles des évolutions autrement empêchées par certaines dimensions des histoires personnelles marquées par les cultures d'autres "tribus". Ainsi les recherches comparatives évoquées doivent se pencher sur deux dimensions sans doute indissociables : les modalités de la transmission des normes et les phénomènes de socialisation de l'étude, c'est-à-dire d'émergence de "tribus étudiantes" de nature à favoriser la constitution et la diffusion de façons de mener à bien l'étude en mathématique. Dans cette direction, même si elle ne concerne pas les mathématiques, la recherche de M. Millet (2003) évoquée dans IV.2 ouvre des perspectives intéressantes. Cette approche constituera vraisemblablement une des dimensions d'une thèse qui commence, centrée sur les filières de l'enseignement supérieur conduisant aux Grandes Ecoles de commerce, classes préparatoires et université.

Si les institutions influencent les modalités du travail des élèves, on peut faire l'hypothèse qu'à l'autre extrémité de l'échelle (de taille et non de valeur), les enseignants ne l'excluent pas de leur champ d'action. Que pensent-ils du travail que leurs élèves doivent

---

[65] Pour ce texte, les numéros de pages renvoient à la version électronique disponible sur le site Yves.Chevallard.free.fr

réaliser ? Que font-ils pour favoriser les formes de travail qu'ils préconisent ? Avec quels effets ? Dans la perspective des recherches sur les pratiques enseignantes réalisées au LDAR (*La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*, coordonné par F. Vandebrouck, 2008), une approche clinique de ces questions, basée notamment sur l'enregistrement de séances effectives, permettrait en particulier de repérer dans les discours de l'enseignant les interventions qu'il consacre au travail à la maison et aux façons d'apprendre. Si les travaux évoqués ont étudié la question de la présence de telles aides constructives (Robert 2008, p. 51) en troisième et seconde, en mettant en évidence leur rareté, ce sujet est selon moi à prolonger au niveau de la filière scientifique du lycée et plus encore à l'université, comme a commencé à le faire N. Grenier-Boley (2009). Mais je propose de ne pas séparer l'étude des interventions de l'enseignant, surtout si elles ne sont qu'orales, d'une évaluation de leur réception par les élèves. Les commentaires donnent lieu à des reformulations, des glissements de vocabulaire, qui peuvent être sources de difficultés et de malentendus, auxquels s'ajoutent ensuite les questions de prise de notes puis d'étude de ces notes, une problématique centrale dans les cursus de Lettres et Sciences Humaines à l'université.
Par ailleurs, certains enseignants s'efforcent d'accompagner la construction par les élèves de connaissances qu'ils n'enseignent pas en ce sens qu'elles ne sont l'objet d'aucun processus d'institutionnalisation, notamment par les tâches mathématiques qu'ils proposent. Développer l'étude du curriculum praxique (chapitre 1, VII.1) créé par des enseignants sur une période assez longue et de ses effets sur les élèves est une autre direction possible de travail.

4. Conception et expérimentation de dispositifs relatifs au travail personnel

Une approche différente des précédentes consiste à concevoir et expérimenter des dispositifs visant à la formation de nouveaux gestes d'étude dont on postule qu'ils sont de nature à améliorer la réussite en mathématiques des élèves. Je ne pense pas que l'on puisse attendre d'une telle approche qu'elle apporte des conclusions tranchées comme on l'espère d'une ingénierie didactique qui, par définition, table sur une confrontation des effets prévus et des effets obtenus pour valider ou modifier les hypothèses initiales. Même si des avancées de ce type sont possibles, je considérerai que l'intervention expérimentale est une méthodologie d'étude du travail personnel : elle met à jour des dimensions cachées dans le fonctionnement ordinaire par les perturbations qu'elle introduit, les phénomènes qu'elle provoque. En cela, tout en s'appuyant sur les résultats des approches exploratoires envisagées précédemment, elles les complètent. La réforme des lycées et le plan Réussite en Licence peuvent créer des conditions institutionnelles favorables à l'expérimentation dans ce domaine.
Dans cette perspective, on peut s'appuyer sur un ensemble de recherches réalisées dans l'enseignement universitaire. Je pense par exemple à différents dispositifs visant à aider les élèves dans leur étude du savoir théorique expérimentés au Danemark (Grønbæk & Winslow 2007) et au Royaume-Uni (Meehan 2007). Ces travaux ont ceci de particulièrement intéressant que, destinés à l'ensemble des étudiants suivant une unité d'enseignement, ils prennent en compte la nécessité de faire évoluer le processus institutionnel d'évaluation, dimension que je considère comme l'un des leviers majeurs d'une action sur les modalités du travail personnel à l'université.

Chapitre 3

Que savent les institutions ? Comment apprennent-elles ?
Le modèle praxéologique : un outil pour analyser les dynamiques de la cognition institutionnelle

I. Introduction

Les recherches dont j'ai fait la synthèse jusqu'à présent se sont développées dans une seule direction : jusqu'en 2003, j'ai creusé le sillon des savoirs en jeu dans la résolution de problèmes et de leur construction par les élèves et étudiants. Dans le présent chapitre, mon objectif est de montrer comment l'irruption de nouveaux objets d'étude ainsi que la rencontre avec l'approche socioépistémologique de l'éducation mathématique développée par des chercheurs mexicains ont nourri une reprise du travail que j'avais réalisé autour de la notion de praxéologie, me conduisant à un développement de ce modèle qui me permet aujourd'hui de donner une lecture cohérente des différentes directions de recherche que j'ai empruntées et d'envisager de nouvelles perspectives.

Je m'appuie très fortement pour rédiger ce troisième chapitre sur deux textes non encore publiés que je vais en réalité dépasser. Il s'agit d'une part d'une communication réalisée au IIIème congrès de la TAD en Janvier 2010, intitulée "Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs" (à paraître dans les actes de ce congrès), d'autre part d'un article publié en 2011 par la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, cosigné avec A. Romo Vázquez et intitulé "Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs" .

Des positions que j'ai développées dans le chapitre 1, je rappellerai les lignes directrices.

1. Savoir des mathématiques, c'est, sinon exclusivement, du moins fondamentalement, être capable d'utiliser les savoirs mathématiques pour répondre à des questions, pour résoudre des problèmes.
2. Je choisis de ne pas mettre en avant l'inventivité associée au triplet Singulier-Inédit-Démuni introduit dans la synthèse du premier chapitre. Au contraire, tout problème est d'abord envisagé comme doté d'une certaine généricité, celui qui l'affronte cherche *a priori* à le mettre en relation, plus ou moins étroite, avec un ou des types de tâches pour lesquelles il a déjà construit des praxéologies de traitement ; inversement, toute nouvelle manière de faire est considérée comme potentiellement généralisable et donc à capitaliser.
3. Ce que j'ai appelé épures praxéologiques, c'est-à-dire les praxéologies mathématiques dont la composante technologique est limitée à une composante θ^{th} (cf. Ch1.VII.3) justifiée par les théories mathématiques, ne prennent pas en charge l'ensemble des savoirs[66] nécessaires à un usage efficace des techniques. Il faut leur adjoindre une composante pratique θ^{p}, construite et validée dans le cours des utilisations de la ou des techniques.

Une première interprétation de cette proposition est de situer la composante pratique obtenue au niveau des constructions individuelles. Issue de l'expérience personnelle d'une personne, validée par celle-ci, elle est alors susceptible de toutes les approximations, lacunes et incohérences que provoquent et autorisent un champ limité de mise à l'épreuve et des modes

[66] Par définition, la technologie ne prend pas en compte les connaissances implicites, non reconnues.

de validation plus ou moins tolérants. Ce n'est pas à ce type de constructions que je vais m'intéresser dans la suite.

4. Je postule qu'une composante pratique est socialement construite et reconnue au sein de la communauté des mathématiciens, au moins au niveau des équipes de recherche. Et l'analyse que j'ai présentée des conditions de la reconstruction par les élèves des praxéologies mathématiques me conduit à considérer comme nécessaire la reconnaissance dans les institutions d'enseignement de certains savoirs pratiques relatifs à l'utilisation des savoirs théoriques enseignés.

Le modèle praxéologique auquel j'aboutis à ce stade du travail se présente en résumé de la façon suivante :

$$\left[T, \tau, \begin{array}{c} \theta^{\text{th}}, \Theta \\ \theta^{\text{p}} \end{array} \right]$$

Une telle praxéologie est un objet socialement construit et légitimé (en cela, c'est une généralisation de la notion de savoir telle qu'utilisée au moins dans le monde latin de la didactique des mathématiques). Les savoirs technologiques de la composante théorique sont validés, suivant les normes mathématiques, par une théorie Θ. Ceux qui relèvent de la composante pratique ne le sont pas mais ils sont l'objet d'une évaluation collective qui leur reconnaît une certaine valeur de vérité et d'intérêt pour la pratique, c'est-à-dire pour ce que la communauté qui valide doit faire avec [T, τ], par exemple faire de la recherche mathématique ou apprendre à des novices à utiliser la technique.

S'adjoint donc ici un axe Individuel ↔ Social aux trois axes définis dans la synthèse du chapitre 1, Singulier ↔ Générique, Inédit ↔ Familier et Démuni ↔ Outillé. Dans cet espace à quatre dimensions, je privilégie la dimension sociale du processus de construction des outils permettant d'affronter efficacement la généricité des situations problématiques. Ceci est le résultat d'une position philosophique. Je prends le parti d'une conception socioculturelle de l'essence humaine : une personne est le fruit de la rencontre d'un potentiel individuel et de ressources sociales. Pour actualiser ce qui n'est qu'un potentiel d'humanité, un individu doit tout au long de sa vie rencontrer des ressources culturelles situées en dehors de lui-même, socialement et historiquement produites et rendues disponibles par certaines organisations. Et c'est bien cette conception de l'anthropologique qui m'oriente vers la TAD, comme ayant introduit en didactique des instruments conceptuels qui me permettent de développer cette approche socioculturelle, les concepts associés d'institution, de sujet et de praxéologie. En tant qu'organisations sociales stables, les institutions déterminent une écologie d'un champ donné de l'activité humaine, elles encadrent l'action de leurs sujets par les assujettissements exercés, en même temps qu'elles la rendent possible par les ressources praxéologiques mises à disposition. Mais elles sont aussi le cadre indispensable du développement praxéologique, des processus d'évaluation, d'amélioration et de légitimation qui transforment des inventions individuellement ou localement produites pour traiter la généricité des problèmes rencontrés en innovations partagées[67]. Elles seules peuvent enfin créer les conditions de la diffusion géographique et de la transmission aux nouvelles générations qui assurent la pérennité du capital praxéologique produit. Ceci définit la perspective adoptée dans ce dernier chapitre participant d'un projet *a priori* non réduit aux mathématiques, ce que j'aurais envie de nommer une *épistémologie de la cognition institutionnelle*, domaine de la didactique conçue comme la science qui étudie "les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein

[67] J'ai utilisé ici une distinction invention/innovation empruntée aux paléontologues et archéologues :
" 'Invention' désignera le premier stade de l'innovation, laquelle est le processus qui conduit de la conception d'une idée nouvelle à son acceptation généralisée." (A. de Beaune 2008, p.6)

des institutions humaines" (Chevallard 2007, p. 719). Cette épistémologie s'intéresse à l'analyse des ressources cognitives produites par les institutions et aux processus de production de telles ressources, elle n'épuise pas le didactique puisque la cognition individuelle n'en relève pas.

Dans ce qui suit, je montrerai en quoi l'étude réalisée avec A. Romo Vázquez de l'enseignement de la transformée de Laplace dans la formation de techniciens et d'ingénieurs a soutenu l'hypothèse du développement d'une technologie pratique partagée, adaptée aux besoins des institutions utilisatrices d'une technique mathématique, et m'a donc encouragée à persévérer dans mon travail du modèle praxéologique. Je m'intéresserai ensuite au niveau théorique [θ^{th}, Θ] en envisageant que les effets transpositifs produits par la circulation d'une praxéologie mathématique puissent également profondément modifier la théorie en jeu et les normes de validation acceptées ; je m'appuierai pour ce faire sur une étude comparative de l'enseignement de la géométrie au Chili et en France. L'exemple du calcul symbolique développé par O. Heaviside[68] permettra d'envisager le cas inverse d'une praxéologie non encore justifiée mathématiquement mais néanmoins théoriquement fondée pour la communauté des physiciens qui l'utilisait. Ces considérations me conduiront à la proposition d'un modèle praxéologique "développé", particulièrement adapté à la prise en compte des effets transpositifs. Je montrerai que ce modèle peut être mis en relation avec plusieurs lignées de recherches consacrées aux mondes professionnels, ce qui constitue pour moi une forme de validation a posteriori de mon propre travail. Je terminerai en envisageant quelques-unes des questions de recherche qu'il permet de poser.

II. A propos de l'utilisation en automatique d'une praxéologie mathématique : un exemple de technologie pratique

J'ai été sollicitée en 2004 par M. Artigue pour co-diriger la thèse de didactique des mathématiques qu'A. Romo Vázquez souhaitait consacrer à la formation mathématique des ingénieurs. Cette proposition a eu des répercussions profondes sur le cours de mes travaux en me conduisant sur un terrain qui m'était alors totalement inconnu. Le modèle praxéologique qui est au cœur de ce chapitre mais aussi l'analyse des fonctions de la technologie présentée dans le premier chapitre doivent beaucoup à l'effort théorique accompli pour rendre compte du réel étudié.

1. Un contexte transpositif multi-institutionnel

La thèse d'A. Romo Vázquez (2009) est centrée sur une institution, l'Institut Universitaire Professionnalisé (IUP) de l'Université d'Evry. La formation y est caractérisée par une liaison étroite avec le monde de l'entreprise, dimension qui se traduit notamment par un dispositif particulier, dit des projets d'ingénierie : chaque groupe d'étudiants doit proposer une réponse à une commande présentée comme venant d'un monde professionnel, laboratoire ou entreprise ; les problèmes posés sont véritablement ouverts. Le cœur de la thèse porte sur l'étude de la place des mathématiques dans la réalisation de trois de ces projets. L'un d'entre eux confronte les étudiants à un problème d'asservissement d'un système continu. Les techniques de résolution ont un fort arrière-plan mathématique puisqu'il s'agit de résoudre des équations différentielles en utilisant la transformation de Laplace. Nous sommes donc dans le cas où des praxéologies mathématiques complètes (il existe aujourd'hui une théorie qui permet de justifier intégralement les techniques), produites par la recherche mathématique $P(M)$, sont utilisées dans un domaine scientifique (à visées appliquées), l'automatique $P(AU)$, dont les

[68] Suivant le principe adopté pour l'ensemble de ce texte, la liste des références ne mentionne aucune œuvre d'O. Heaviside puisque je ne les ai pas étudiées directement, les réflexions que j'ai développées s'appuyant sur Remaud 2004 et Camarena 1999

productions sont elles-mêmes reprises dans des activités professionnelles, ici simulées dans le dispositif didactique des projets.
Mais les savoirs mathématiques les plus sophistiqués qui sont en jeu n'apparaissent pas explicitement. En effet, le traitement proposé s'appuie sur le logiciel Matlab qui prend en charge la résolution des équations et permet une démarche d'ajustement par essais-erreurs. Il a donc fallu reconstituer, à partir de notre culture de mathématiciennes, les techniques embarquées par le logiciel et leurs justifications théoriques. Ceci nous a conduites à nous intéresser à l'enseignement de la transformée de Laplace qui, suivant les institutions de formation, peut être pris en charge dans un cours de mathématiques $E(M)$ ou directement dans un cours d'automatique $E(AU)$. Les praxéologies mathématiques en question sont donc mises à disposition des futurs ingénieurs selon deux parcours inter-institutionnels :

$P(M) \rightarrow E(M) \rightarrow E(AU) \leftarrow P(AU)$, c'est le cas des Ecoles des Mines[69] dont nous avons étudié un cours de mathématiques consacré aux fonctions holomorphes (niveau L3 - 3ème année universitaire) ;

$P(M) \rightarrow P(AU) \rightarrow E(AU)$, c'est le cas de l'IUP d'Evry mais aussi de deux autres institutions dont nous avons étudié les cours d'automatique au niveau L2[70].

Ces trois textes se sont révélés très différents, particulièrement dans la façon dont ils se positionnent par rapport aux institutions de recherche $P(M)$ et $P(AU)$ qui ont produit les praxéologies utilisées. L'analyse des effets de transposition subis par les praxéologies mathématiques liées à la transformée de Laplace s'est déployée suivant plusieurs axes. Nous avons choisi de rendre compte de la distance prise avec le monde mathématique en étudiant les formes de validation de la technique et de la technologie, par comparaison au cours de mathématiques considéré comme un représentant acceptable de la norme dans $P(M)$. Pour la distance à $P(AU)$ et au monde professionnel, deux dimensions ont été prises en compte, d'une part les exemples donnés pour faire travailler les techniques mathématiques présentées et d'autre part les savoirs technologiques correspondant aux fonctions Expliquer, Motiver, Evaluer, Faciliter (voir Ch1.VII.4) Cette étude est l'objet de l'article paru dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* qui a été évoqué dans l'introduction. Je ne reprendrai ici que le dernier point : il m'intéresse à ce stade de l'argumentation en ce qu'il fournit un exemple de technologie pratique développée dans le cadre de l'utilisation d'une praxéologie mathématique au sein d'une institution non mathématique, ici l'automatique.

2. Analyse d'une technologie de la technique de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants par transformation de Laplace

Le cours dont j'extrais ici quelques éléments est intitulé "Asservissements continus". Il est destiné à des étudiants d'IUT.
Quelques éléments de compréhension des types de tâches traités par l'automatique sont nécessaires. J'emprunte ces explications à l'auteur du cours analysé.

> "Notre problème est donc d'asservir une grandeur physique $y(t)$ [ce qui] consiste à essayer d'obtenir $y(t) = y_e(t)$ où $y_e(t)$ représente la loi de consigne[71] qu'on s'est fixée. […] Avant de pouvoir asservir $y(t)$, il faut pouvoir agir sur $y(t)$ par modification d'une grandeur de commande $x(t)$. […] $y(t)$ ne dépend pas

[69] Ces écoles ne relèvent pas de l'université ; la plupart de leurs étudiants, recrutés par concours, sont issus d'un cycle d'étude en 2 ans, tout à fait spécifique, les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, dont l'enseignement est essentiellement théorique et très ambitieux. A la suite, un cycle d'étude de 3 ans mène au diplôme d'ingénieur.
[70] L'un disponible en ligne (site iutenligne.net/ressources/automatique, auteur M. Verbeken) s'adresse aux étudiants de Génie Electrique et Informatique Industrielle des Instituts Universitaires Technologiques (IUT, formation universitaire courte de techniciens supérieurs), l'autre est proposé dans le cadre d'une Licence (formation universitaire en 3 ans) de Sciences et Technologie pour l'Ingénieur.
[71] La loi de consigne décrit le fonctionnement souhaité, auquel la régulation ramène le fonctionnement réel quand des perturbations l'en écartent.

seulement de $x(t)$ mais est aussi sensible à d'autres grandeurs qui varient de façon imprévisible et qu'on appelle perturbations. […] Quand une perturbation se manifeste, il faudra réagir sur la commande pour rétablir $y(t)$ à sa valeur consigne. Ceci ne peut être obtenu que par une boucle fermée."(p.2-3)

La commande en boucle fermée suppose qu'un capteur transforme $y(t)$ en une nouvelle grandeur dont les variations doivent enclencher le processus de correction. Il est impératif que le capteur soit fiable (pas de distorsion par rapport aux variations de y) et véloce, c'est-à-dire qu'il rende le plus rapidement possible compte de l'évolution de y.

Je me propose maintenant de donner une idée du discours technologique présenté dans le cours analysé relativement à l'utilisation de la technique de résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace, ceci à l'intention de lecteurs dont je suppose qu'ils ne sont familiers ni avec le contexte de l'automatique ni même avec la théorie mathématique impliquée. Ceci me conduit à ne pas respecter l'organisation du texte original et à produire un discours explicatif complémentaire.

A propos de la constante de temps

Les éléments suivants relèvent du chapitre 2 "Réponse temporelle des Systèmes Linéaires". Les systèmes considérés sont tels qu'une relation différentielle lie les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$. Lorsqu'il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, celle-ci est présentée sous la forme $\tau \cdot dy(t)/dt + y(t) = A \cdot x(t)$ et τ est appelée constante de temps. L'extrait de cours suivant (§2.3.3) traite du cas où $x(t) = a \cdot u(t)$ ($u(t) = 0$ pour $t < 0$ et 1 pour $t > 0$). La fonction de sortie est notée $y_{ind}(t)$:

" Donc $y_{ind}(t) = aA(1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$. C'est une courbe exponentielle qui, à partir de la valeur initiale, varie de $\Delta y = a \cdot A$ où a représente l'amplitude de l'échelon, A le gain position (gain statique) du système.

Au paragraphe 2.2.3. nous avons déterminé les temps correspondant à des valeurs. Ainsi nous savons que <u>le régime permanent est atteint au bout d'un temps $t_\infty = 7\tau$ …</u>"[72]

Ainsi si une fonction d'entrée passe d'une valeur constante à une autre, il faut un temps estimé à 7τ pour que la fonction de sortie soit elle-même stabilisée. Si le système en question est le capteur contrôlant la grandeur asservie $y(t)$ envisagée plus haut, 7τ est le temps nécessaire à une prise en compte fidèle d'une variation de y.

L'extrait suivant *valide* l'affirmation soulignée ci-dessus, dans le contexte d'utilisation qui considère comme négligeable un écart relatif inférieur à 1% :

"Calculons le temps t_α tel que $e_\alpha^{-t/\tau} = \alpha / 100$:

$e_\alpha^{t/\tau} = 100 / \alpha$ d'où $t_\alpha = \tau . \ln(100 / \alpha)$.

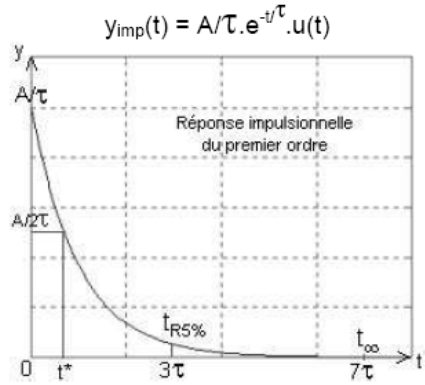
A.N. : $\alpha = 50 \quad t^* = \tau . \ln .2$

$\alpha = 36,8 \qquad t \cong \tau$

$\alpha = 5 \qquad t_{R5\%} = 3\tau$

$\alpha = 1 \qquad t_{R1\%} = 5\tau$

$\alpha < 1 \qquad t_\infty = 7\tau$ »



Plus loin une partie est consacrée au cas où la fonction $x(t)$ est une fonction linéaire at. Pour une équation différentielle du premier ordre, il est montré que la solution $y(t)$ présente alors, une fois établi le régime permanent, un décalage par rapport à la fonction $x(t)$:

"L'erreur de traînage [c'est-à-dire la différence $x(t)$ - $y(t)$] est proportionnelle à la constante de temps du système. Ainsi, si le système du premier ordre est un capteur dont la précision statique est supposée

[72] Dans ce qui suit, sont soulignés les éléments de discours dont j'analyse la fonction.

> excellente, la mesure d'une grandeur qui varie en forme de rampe [fonction linéaire] peut être erronée si la constante de temps du capteur n'est pas négligeable. Pour une régulation la constante de temps du capteur n'a pas d'importance capitale. Par contre pour un asservissement où la consigne varie en permanence, il faut que la constante de temps du capteur soit négligeable (en pratique 100 fois plus petite que la plus grande constante de temps du processus). " pp. 26-27

Ces éléments justifient l'intérêt accordé à la constante de temps : elle doit être la plus petite possible pour obtenir une réactivité suffisante et limiter l'effet retard (*motiver*) ; elle est le paramètre décisif parce que l'erreur de traînage lui est proportionnelle (*valider-expliquer*).

A propos de la résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Les extraits examinés se situent dans le chapitre 1 "Transformation de Laplace. Relation Equation Différentielle-Fonction de transfert". Les éléments suivants devraient suffire pour comprendre ce qui est en jeu : la transformation de Laplace est une application linéaire injective définie sur un ensemble que je ne spécifierai pas –à l'instar du cours analysé– de fonctions d'une variable réelle ; sa propriété fondamentale est que si $F(p)$ est la transformée d'une fonction f, $pF(p)- f(0)$ est celle de la dérivée f'. Ceci a pour conséquence que par application de la transformation de Laplace, une équation différentielle à coefficients constants $b_n\, y^{(n)} + b_{n-1}\, y^{(n-1)} +\ldots+ b_1\, y' + b_0\, y = a_m\, x^{(m)} + a_{m-1}\, x^{(m-1)} +\ldots+ a_1\, x' + a_0\, x$ est, si toutes les conditions initiales sont nulles, transformée en l'équation algébrique suivante :
$b_n\, p^n\, Y+ b_{n-1}\, p^{n-1}\, Y+\ldots+ b_1\, pY + b_0\, Y = a_m\, p^m X + a_{m-1}\, p^{m-1} X +\ldots+ a_1\, pX + a_0\, X$, où Y et X désignent les transformées des fonctions x et y. Y étant donnée par la formule $Y = T(p) \cdot X$ où $T(p)$ qu'on appelle Fonction de Transfert est un rapport de deux polynômes en p, la résolution de l'équation différentielle suppose de déterminer la fonction dont $T(p) \cdot X$ est la transformée de Laplace. Ce type de tâches est traité dans la partie 1.8 "Transformation inverse" du cours, que je reproduis en y mettant en évidence les différentes fonctions assurées par les commentaires développés :

> "3 méthodes s'offrent à nous, mais seulement la dernière sera exploitée.
> […] 1.8.3. Table de Transformées de Laplace
> C'est grâce à cette table que nous pourrons exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs. Cette table est présentée à la page suivante. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Evitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique (*évaluer, faciliter*).
> Pour les fonctions $F(p)$ compliquées il faudra faire une décomposition de cette fonction en une somme d'éléments simples puis prendre l'originale de chaque élément afin d'en faire à nouveau la somme (*décrire*).
> Il est préférable d'exprimer une exponentielle en faisant apparaître la valeur de la constante de temps τ plutôt que son inverse a (*évaluer, faciliter*). En effet nous montrerons au chapitre suivant que la durée de vie de cette exponentielle est égale à 7 fois τ (*motiver*). Ceci nous oblige à mettre $F(p)$ [la fonction dont on cherche l'inverse] sous une forme canonique en mettant toutes les constantes en facteur (*décrire, faciliter*). Par exemple, on transformera $(3p+2)$ en $2(1+1{,}5p)$, la valeur 1,5 représente alors la constante de temps (1,5s) de l'exponentielle qui interviendra dans la fonction $f(t)$. Ainsi on sait qu'au bout de 7 fois 1,5 soit à peu près 10 secondes, l'exponentielle sera nulle (*motiver*)."

La dernière partie du chapitre suivant propose une *description* synthétique de la technique, *motivée* par l'interprétation de la constante de temps :

> "Nous avons montré que la réponse temporelle d'un système quelconque peut être considérée comme la somme de réponses de systèmes élémentaires […]. Donc c'est la constante de temps la plus grande qui détermine la durée totale du régime transitoire : $t_\infty = 7\tau_{\max}$. […] Il faut prendre l'habitude d'écrire une fonction de transfert sous forme canonique factorisée et ordonnée, de façon à mettre en évidence en première position au dénominateur le facteur $1+\tau_{\max}\, p$."

L'influence de l'institution d'utilisation sur la praxéologie mathématique apparaît clairement dans cet exemple. La technique mathématique est modifiée (et donc également sa description) par rapport à la technique initiale, telle que par exemple on la trouve exposée dans un cours de mathématique où, dans la décomposition en éléments simples, les dénominateurs sont de la forme $(p\text{-}p_i)^k$. Les adaptations proposées augmentent l'ergonomie de la technique compte tenu des besoins spécifiques du contexte d'utilisation, ces motivations sont explicitées dans le texte du cours en ligne, dont une des caractéristiques est précisément le souci constant de motiver les praxéologies présentées et d'en faciliter l'utilisation. Même si on peut supposer que c'est la perspective didactique qui conduit l'auteur du cours à expliciter à l'intention de novices ces éléments de la technologique pratique, je n'en considère pas moins que ce qu'il explicite là est un savoir partagé dans le monde de l'automatique. A. Romo Vázquez et moi-même n'avons pas mené une enquête permettant de tester cette hypothèse, je considèrerai néanmoins que la pérennité de ce cours sur le site national des IUT est une forme de légitimation institutionnelle de ses contenus qui me conduit à ne pas y voir le simple discours d'une personne.

III. Exemples d'influences institutionnelles sur le bloc théorique

1. France et Chili, deux choix de transposition didactique du cadre théorique de la géométrie élémentaire

Je veux envisager ici le phénomène suivant. Soit une épure praxéologique (cf. chapitre 1, VII.3) mathématique $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ validée par la communauté des mathématiciens $P(M)$. Un système d'enseignement prend $[T, \tau, \theta^{th}, \text{-}]$ comme objet d'enseignement, parce que le traitement des tâches de type T par la technique τ est considéré comme un enjeu ou (non exclusif) parce que l'enseignement des savoirs technologiques est visé et leur investissement dans des techniques considéré comme nécessaire à leur apprentissage. Mais au niveau scolaire en question, la théorie mathématique savante ne peut véritablement être enseignée. Ce phénomène a été mis en évidence, par exemple à propos de l'enseignement des limites de fonctions dans le secondaire espagnol (Bosch, Espinoza & Gascón 2003) ; l'expression « OM incomplète » (Bosch, Fonseca & Gascón 2004) est utilisée pour y faire référence en signalant l'insuffisance du bloc technicologico-théorique. Je voudrais ici montrer que la transposition didactique peut affronter ce problème de différentes façons. Pour ce faire, je m'appuierai sur une recherche réalisée dans le cadre d'un projet de coopération Ecos-Conicyt (Castela & Al. 2006).

Il s'agissait de réaliser une étude comparative de l'enseignement de la géométrie au Chili et en France. Dans les limites imposées par les modalités de la coopération, une grande partie du travail a été consacrée à la dimension institutionnelle de la réalité étudiée, étude des programmes et des documents d'accompagnement émanant des ministères de l'éducation, étude d'une sélection de manuels. Plus précisément nous avons cherché à situer les choix opérés par rapport aux paradigmes géométriques distingués par C. Houdement et A. Kuzniak (2000) : la Géométrie Naturelle, la Géométrie Axiomatique Naturelle, la Géométrie Axiomatique Formaliste. Seuls les deux premiers (GI, GII dans la suite) interviennent aux niveaux de scolarité primaire et secondaire que nous avons étudiés. Ces paradigmes se différencient par leurs objets, leur mode de validation et la place qu'y jouent les instruments. GI est une géométrie des dessins instrumentés acceptant l'usage de certains de ces instruments pour la validation, des résultats peuvent ainsi être déterminés par mesure sur un dessin. GII est une géométrie d'objets abstraits modélisant les tracés aux instruments mais définis par des propriétés. Le seul mode de validation admis est la démonstration dont le calcul est une modalité pour ce qui concerne la détermination de mesures. Ceci confère à la géométrie axiomatique naturelle une véritable légitimité au regard de la science mathématique experte, y compris contemporaine, même si certaines questions relatives au système d'axiomes peuvent faire débat.

Nous nous sommes donc particulièrement intéressés aux formes de la validation en géométrie et au rôle attribué aux dessins au long du cursus primaire et secondaire dans les deux pays. Quelques thèmes particuliers ont fait l'objet d'un examen plus précis dans les manuels,

théorème de Pythagore, aire et périmètre du disque, figures semblables. Il ressort de ce travail que les deux pays se distinguent nettement.
En France[73], le lien de l'activité géométrique avec le dessin instrumenté est très fort à l'école primaire, il s'affaiblit au collège et disparaît totalement au lycée. Dès les premières années du collège, il est choisi de faire entrer les élèves dans le paradigme de la science mathématique experte, c'est-à-dire de reconnaître la seule démonstration comme moyen de validation, la géométrie en constitue le cadre privilégié d'apprentissage (même s'il n'est pas le seul). Dans le cas où un théorème ne peut pas être établi à partir du corpus des résultats disponibles, ce théorème est déclaré admis, statut figurant explicitement dans les programmes. Ceci signifie que l'institution scolaire invoque officiellement la tutelle, l'aval épistémologique, de la communauté mathématique $P(M)$. C'est par exemple le cas du théorème de Thalès[74] au collège (une démonstration par les aires figurait au programme de seconde au moment où la recherche a été réalisée). Si des validations locales sur des configurations particulières ou expérimentales par mesures sur dessins sont proposées, le fait qu'elles ne suffisent pas à valider le théorème est mis en évidence. On peut dire que l'incomplétude de la praxéologie est assumée, la théorie manque, c'est une garantie experte qui s'y substitue.
Au Chili, le choix est très différent. Le paradigme de la géométrie scolaire n'est pas celui des mathématiques expertes. Tout au long de la scolarité, y compris quand, à partir de l'équivalent de la Seconde (Segundo Medio), la démonstration commence à apparaître comme objectif d'apprentissage, des modalités expérimentales de validation sont acceptées, sans jamais être mises totalement à l'écart ; le raisonnement est seulement peu à peu présenté comme préférable mais il ne devient pas clairement le mode exclusif de validation, le statut de théorème admis n'existe pas. Ceci peut s'expliquer par deux raisons. L'une relève du niveau de détermination de la pédagogie (Chevallard 2002) : comme le prônent les instructions ministérielles, il ne s'agit pas d'enseigner les théorèmes mathématiques comme des vérités assenées, il faut grâce à un ensemble d'activités conduire les élèves à découvrir et comprendre les résultats énoncés. La seconde raison relève des choix de la société chilienne concernant les finalités de l'enseignement obligatoire (jusqu'à 18 ans) : une école pour tous, donnant aux élèves les moyens de s'intégrer dans un monde en constante évolution, de faire face aux défis de la vie quotidienne et professionnelle, de développer leur personnalité. Ceci se traduit dans le cas des mathématiques par l'importance accordée institutionnellement au traitement de situations venant de contextes variés, accordant une place assumée aux instruments de mesure et par rapport à la France, à une minoration de l'apprentissage de la démonstration.
Pour préciser à quel type de théorie recourt l'enseignement chilien du lycée, je m'appuierai sur l'exemple de la praxéologie de détermination d'une grandeur inaccessible[75] telle qu'elle est enseignée dans un manuel (*Arrayán*) de *Segundo Medio*, dans le cadre de l'unité consacrée aux figures semblables.

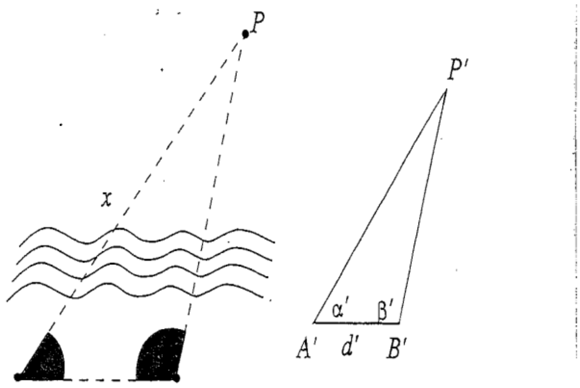
> La situation suivante[76] :
> Une autre application de la similitude des triangles est celle qui permet de calculer la distance à un point lointain ou inaccessible par exemple la largeur d'un fleuve, la distance entre un point et un bateau

[73] Ce résumé fait évidemment référence à l'état de l'enseignement au moment où l'étude a été effectuée (2003-2004) ; depuis, une réforme des programmes du collège a introduit quelques évolutions, au moins dans les programmes.
[74] Nous avons été amenés à nous pencher particulièrement sur ce théorème dans le cadre de l'étude du thème des figures semblables ; il me servira à illustrer les considérations générales développées.
[75] J'ai présenté une étude plus complète de plusieurs praxéologies de détermination de distances inaccessibles, dans l'enseignement général et professionnel au colloque EMF de Dakar en 2009 (Castela 2009b). Je préciserai seulement qu'en France dans le cadre de l'enseignement des mathématiques au secondaire, la technique présentée ici est totalement exclue puisqu'elle s'appuie sur des mesures. La technique véritablement enseignée dans le cas général est une application de la formule des sinus.
[76] Dans cet article, les traductions sont assurées par mes soins, les notations chiliennes sont conservées.

visible en haute mer, etc. Supposons que tu désires calculer la distance entre un point A situé sur la rive d'un fleuve et un arbre situé en un point P de la rive opposée.
Pour calculer cette distance, tu peux procéder de la façon suivante :

- Situer un point B à une certaine distance de A.
- Par visée, mesurer les angles déterminés $\prec$ PAB et $\prec$ ABP ; mesurer $\overline{AB}$.
- Construire à l'échelle un triangle auxiliaire A'B'P' semblable au triangle ABP. (critère AA de similitude)
- Mesurer avec une règle ou un mètre ruban la longueur de $\overline{A'P'}$.

Calculer la longueur de $\overline{AP}$ en prenant en compte le rapport de l'échelle employée $\frac{d}{d'}$.



La praxéologie présentée par le manuel peut se décrire de la manière suivante :
Type de tâches T : déterminer la distance d'un point inaccessible à un point accessible.
Technique :
Le descriptif cité plus haut commence par une phase de mesurage (détermination aux instruments des mesures nécessaires) ; celle-ci est ici seulement évoquée, aucun instrument n'est considéré mais à la lecture des instructions officielles de l'année suivante, je fais l'hypothèse que les intentions institutionnelles sont bien d'importer la pratique effective de mesurage dans l'enseignement des mathématiques (ce qui suppose que celui-ci sorte de la salle de classe). La deuxième phase de la technique consiste à construire aux instruments un triangle de l'espace de la feuille de papier, qui soit une représentation à l'échelle du triangle de l'espace initial dans le cas où l'on connaît la longueur d'un côté AB et les mesures des angles en A et B. La troisième phase est un mesurage sur le dessin obtenu ; elle se situe donc dans le paradigme G I. La dernière phase est un traitement mathématique d'une situation de proportionnalité.
Technologie :
Nous nous intéressons ici aux savoirs mathématiques qui assurent que la technique utilisée donne bien le résultat recherché. La technique d'obtention de la représentation à l'échelle est justifiée par le cas de similitude noté AA (deux triangles ayant deux angles respectivement égaux sont semblables), le retour aux dimensions réelles l'est par la définition des triangles semblables (proportionnalité des côtés et égalités des angles). Ces théorèmes sont enseignés dans l'unité étudiée. Par contre, les savoirs numériques relatifs au traitement de l'égalité de rapports sont anciens.

Venons en maintenant à la théorie. Il s'agit de savoir comment à son tour est justifiée la technologie, ce qui nécessite une organisation cohérente de savoirs qui constitue au moins un embryon de théorie au sens classique de ce terme (voir IV.2 pour une discussion de cette conception). Dans le manuel considéré, l'organisation en question est la suivante :

Le théorème de Thalès est énoncé sous sa forme générale de conservation des rapports par projection parallèle et sous sa forme spécifique au triangle (3 rapports égaux) ;
ce dernier résultat est utilisé pour démontrer ce qui est désigné comme "théorème fondamental de similitude" (lorsqu'on mène dans un triangle ABC une parallèle à l'un des côtés, on détermine un triangle semblable à ABC) ;
les cas de similitudes sont énoncés sans démonstration mais il est précisé en marge qu'ils peuvent être démontrés à partir du théorème fondamental (auquel il faut associer les cas d'isométries enseignés l'année précédente).

Ce descriptif laisse à penser que la théorisation ainsi proposée relève du paradigme GII dans lequel le seul mode de validation accepté est la démonstration. Mais ce n'est pas le cas pour les différents énoncés du théorème de Thalès : ceux-ci sont établis par mesurage sur des dessins puis institutionnalisés comme théorèmes sans qu'à aucun moment ne soit mis en évidence un quelconque changement de statut (par exemple, de conjecture à théorème admis ou à théorème qui peut se démontrer, comme c'est le cas pour les cas de similitude). Il y a donc co-existence de modes de validation relevant des paradigmes GI et GII : si la démonstration est présentée comme préférable, il semble à tout moment possible d'incorporer au corpus théorique des énoncés attestés sur une base expérimentale. Si la liste des résultats utilisés pour justifier la technologie de la technique proposée pourrait très bien être importée dans l'enseignement secondaire français, les normes qui régissent la validation ne peuvent pas l'être. Les institutions d'enseignement chilienne et française n'adoptent donc pas les mêmes choix de transposition relatifs au bloc théorique [θ^{th}, Θ] : la première assume l'incomplétude, la seconde adopte un paradigme mixte de validation, non légitime par rapport aux mathématiques expertes.

2. L'exemple de la transformée de Laplace

La recherche relative à l'enseignement de la transformée de Laplace a fait apparaître des effets de transposition sur le bloc théorique, différents suivant les institutions, qui ne sont pas sans rappeler les choix des systèmes éducatifs chilien et français. Je n'en dirai ici que quelques mots (voir pour plus de détails Castela & Romo Vázquez 2011), préférant, pour diversifier les contextes, m'intéresser dans la section suivante à la phase d'émergence des praxéologies de résolution des équations différentielles linéaires aujourd'hui vues comme applications de la transformée de Laplace.
Si les praxéologies liées à la transformée de Laplace sont maintenant entièrement justifiées par une théorie mathématique, la présentation exhaustive de celle-ci est très lourde comme le montre le cours de l'Ecole des Mines évoqué dans la partie II. Certaines institutions de formation de techniciens supérieurs comme les IUT, d'ingénieurs comme l'IUP d'Evry, choisissent de ne pas réaliser un tel détour. Les cours d'automatique qu'A. Romo Vázquez et moi–même avons analysés sont conduits à adapter la théorie, jusque dans la formulation de ses énoncés et à transiger avec la validation mathématique : l'existence d'une validation par les mathématiciens est parfois invoquée explicitement comme garantie du résultat (cf. le statut de théorème admis dans l'enseignement secondaire français), mais il arrive également que des démonstrations très approximatives soient proposées, sans que leur écart à la norme mathématique soit signalé (cf. la validation mixte des théorèmes géométriques au Chili). Nous avons également constaté que si la fonction de validation du discours technologique était parfois marginalisée, l'intelligibilité des causes restait prise en charge par des explications ne répondant certes pas aux normes mathématiques mais faisant clairement sens dans le contexte de l'automatique. Un exemple tout à fait intéressant de tel comportement concerne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac[77]. Après avoir invoqué la garantie apportée par la théorie des distributions, un des cours propose deux niveaux d'arguments complémentaires, une validation mathématique par les limites de suites de fonctions qui ignore radicalement toutes les questions délicates et une justification par référence aux phénomènes concrets d'impulsions. On peut considérer ces discours technologiques comme des explications, il est vraisemblable que pour les destinataires, ils aient un potentiel validant plus convaincant qu'une éventuelle présentation de la théorie des distributions.

Peut-être peut-on relire dans cette même perspective, le tout premier travail que j'ai réalisé sur les conceptions de la notion de tangente chez des élèves de lycée (Castela 1995), en considérant qu'y est mis en évidence la construction par les élèves de Terminale Scientifique d'une théorie "hétérogène" : une définition issue de la tangente au cercle (une droite qui a un seul point commun avec la courbe, au moins localement) est associée à des exemples protypiques permettant de prendre en compte les cas qui font exception à la caractérisation

[77] L'impulsion de Dirac vaut 0 pour tout réel non nul, en 0 elle est infinie et son intégrale vaut 1. C'est ce qui a pu être appelée une fonction généralisée avant la formalisation apportée par la théorie des distributions développée par L. Schwartz (1947) à la demande des physiciens. Voir Schwartz L. *Théorie des distributions.* Paris : Hermann.

géométrique (point anguleux, point d'inflexion). Mais l'étude considérée s'est située au niveau des individus, ce sont des praxéologies personnelles qui sont mises en évidence.

3. Emergence d'une praxéologie de traitement d'un type de tâches mathématiques dans une institution non mathématique

A la fin du XIXe siècle, le développement des premiers systèmes de télécommunication comme le télégraphe, introduit la nécessité de s'intéresser en électricité à l'étude des régimes transitoires dans les phénomènes électriques. Or la mise en équation des régimes transitoires nécessite dans la plupart des cas l'utilisation d'équations différentielles avec pour corollaire la difficulté d'établir leurs solutions. Oliver Heaviside (1850-1925) qui est un chercheur en physique développe (1880-1887) pour ce faire des techniques dites de calcul symbolique qui transforment les équations différentielles en équations algébriques mais sans attribuer de signification spécifique aux reformulations qu'il propose. P. Remaud a consacré sa thèse (2004) à la genèse de l'automatique en France. A propos des travaux de Heaviside, il précise :

> "Heaviside compare les solutions symboliques avec les solutions explicites connues et déterminées par des méthodes classiques de résolution, pour des problèmes types choisis. Par induction, Heaviside généralise cette approche et obtient les solutions concernant d'autres problèmes. Mais dans tout ce travail, Heaviside ne prend pas le temps de fournir des justifications mathématiques à la communauté scientifique, ce qui lui valut l'opposition des mathématiciens tout au long de sa vie.
> Le calcul symbolique qui découle de l'idée d'Heaviside met quelques décennies pour s'imposer. Il faut attendre la fin des années 1930 et le début des années 1940 pour que l'emploi du calcul symbolique soit justifié à partir des intégrales de Carson et de Laplace. En automatique où l'on rencontre le même problème de régime transitoire d'un système régi par une équation différentielle, le calcul symbolique s'impose naturellement." (Remaud 2004, pp74-75)

Dans ses travaux, Heaviside ne se soucie pas de questions de validité interne au domaine mathématique, le calcul symbolique fonctionne comme un outil heuristique permettant de trouver l'expression de solutions dont l'existence est établie du fait que les équations à résoudre modélisent des phénomènes physiques effectifs et que le physicien peut valider en dernier ressort par retour à ces mêmes phénomènes :

> "el físico puede aplicar procesos matemáticos no formales si después de hacer pruebas queda satisfecho con la veracidad de los resultados." (Heaviside 1949[78], pp.119-121, cité dans Camarena, p.58)

Je proposerai d'interpréter le processus rapidement décrit ici de la façon suivante : dans un premier temps, une institution utilisatrice de mathématiques qui est une institution productrice de praxéologies en électromagnétisme est confrontée à un type de tâches mathématiques T (résoudre des équations différentielles) et développe des techniques de traitement qui sont validées par induction d'une part, dans l'empirie de leurs utilisations pour traiter des questions relevant de l'électromagnétisme d'autre part. Même si l'absence de validation par la communauté des mathématiciens agit comme un frein à la reconnaissance de ces praxéologies, les travaux de Heaviside qui les utilisent ont été reconnus par ses pairs dès la fin du XIX^{e} siècle. Sont donc légitimées de fait dans et par cette communauté scientifique des praxéologies dont le bloc technologico-théorique est validé selon un paradigme mixte qui accepte les normes des sciences expérimentales. Comme le mentionne dans l'extrait cité P. Remaud, il a fallu attendre la fin des années 1930 pour que les techniques du calcul symbolique commencent à trouver une place dans l'édifice mathématique. Une validation théorique complète est réalisée une dizaine d'année plus tard dans le cadre de la théorie des distributions développée par L. Schwartz.

Les exemples présentés dans les sections 1 et 3 illustrent des mouvements de directions opposées. Dans le premier cas (l'approche de la géométrie au Chili), une praxéologie

[78] Heaviside O. (1949), *Electromagnetic Theory*. Il s'agit d'une édition sous forme d'un volume des trois volumes initialement publiés en 1893, 1899 et 1912.

mathématique complète est transposée pour être enseignée et ceci conduit à une modification du paradigme de validation du bloc technologico-théorique. Dans le second (calcul symbolique), une praxéologie de traitement de tâches mathématiques est développée et légitimée dans une institution scientifique. Cette praxéologie est complète selon les normes de cette institution qui reconnaît des formes de validation expérimentales, elle ne le deviendra qu'ultérieurement du point de vue des mathématiques.

J'en suis donc maintenant arrivée à ce qui est pour moi l'étape cruciale de cette synthèse. J'ai présenté les trois directions de recherche que j'ai empruntées dans mon parcours, résolution de problèmes, approche comparative internationale, enseignement des mathématiques en formation professionnelle. Si je me suis essentiellement consacrée à la première de ces directions, les deux autres ont été particulièrement bénéfiques : en me dépaysant par la rencontre avec des approches des mathématiques très différentes de celle dans laquelle j'avais été élevée, elles m'ont permis de prendre de la hauteur par rapport à l'ici et maintenant de mon monde mathématique en l'inscrivant dans une temporalité et dans une géographie institutionnelle. C'est pourquoi les histoires de recherche que j'ai vécues convergent aujourd'hui dans un intérêt passionné pour ce que j'ai appelé l'épistémologie de la cognition institutionnelle Le développement du modèle praxéologique que je propose maintenant se situe dans cette perspective, il réalise la synthèse des différents exemples présentés dans cette note.

IV. Un modèle qui prend en compte la multi-détermination institutionnelle des praxéologies

Le terme 'cognition' désigne à la fois un processus et ses produits. Une épistémologie de la cognition institutionnelle s'intéresse donc aux ressources cognitives des institutions et aux modalités de leur production et de leur circulation : en paraphrasant l'anthropologue M. Douglas (1987), que savent les institutions ? Comment apprennent-elles c'est-à-dire comme augmentent-elles leur capital cognitif ? La notion de praxéologie a pour ambition d'outiller l'étude de la première question en proposant un modèle permettant de décrire et analyser les activités humaines et les ressources produites pour les mener à bien. C'est un outil particulièrement puissant à condition de ne pas en donner une interprétation trop restrictive.
Rappelons d'abord que les ressources considérées ne sont pas exclusivement cognitives dès lors qu'on inclut dans la notion de technique non seulement les gestes qui la composent mais aussi les artefacts qu'elle utilise et les dispositifs organisationnels qui l'accueillent et la rendent possible. Par ailleurs, la fonction *Décrire* de la technologie permet de prendre en charge les outils sémiotiques produits pour représenter la technique, notamment le vocabulaire produit.

Ce modèle doit ensuite pouvoir rendre compte de tous les états et de toutes les formes de développement de la cognition institutionnelle. Je vais m'intéresser particulièrement dans ce qui suit à deux classes de praxéologies, *les ethnopraxéologies* et *les épures praxéologiques*. Ces deux classes n'épuisent pas l'ensemble des praxéologies, bien au contraire puisque, dépourvue de composante pratique, toute épure est complétée pour être utilisée.

1. La problématique des ethnopraxéologies comme révélatrice de processus généraux

L'expression "ethnopraxéologie" est utilisée par M. Bosch et J. Gascón (2002, p. 24) à propos des praxéologies du professeur, qualifiées de spontanées. J'en retiens la caractérisation proposée mais il est possible que ce soit avec un sens très légèrement différent dans la mesure où je ne considère pas d'élaboration individuelle. Les ethnopraxéologies sont des objets sociaux. Elles se forgent à partir de la nécessité pour les sujets d'une institution d'affronter les tâches d'un certain type ; les techniques qui les composent ne dérivent pas d'un discours technologico-théorique disponible *a priori*, qui aurait été systématisé et validé à l'avance. Pourtant, ces techniques sont partagées, elles possèdent une certaine légitimité. Elles finissent par intégrer une composante technologique mais celle-ci n'est pas validée par une théorie.

Comprendre le mystère des processus qui produisent les ethnopraxéologies est une direction de recherche à part entière d'une épistémologie qui n'analyse pas la culture sociale dans les seuls termes du savoir. Par quelles voies dans une institution *I,* l'invention technique produite empiriquement par un individu ou par un petit groupe de sujets pour traiter les tâches d'un certain type se convertit-elle en une pratique partagée, stabilisée et légitimée au sein de *I* ? Ce questionnement, que je formule ici dans les termes de la TAD, a fait irruption dans mon champ de travail grâce à un hasard heureux de ma biographie de chercheure, à savoir la rencontre avec les travaux de l'école mexicaine de l'approche socioépistémologique, plus particulièrement ceux que dirige R. Cantoral.

Une des caractéristiques de la socioépistémologie est de mettre en avant le rôle des pratiques sociales et l'influence du contexte historique, social et culturel dans la construction des connaissances mathématiques. Les premiers travaux réalisés se sont centrés sur l'étude de moments particuliers de l'histoire relativement récente des mathématiques, les pratiques sociales prises en compte impliquant pour l'essentiel des acteurs savants des époques concernées. Mais plus récemment, une forte impulsion a été donnée à l'étude de pratiques sociales non savantes de façon à étudier les modes de fonctionnement des connaissances mathématiques qui peuvent y être repérées. Ainsi, dans son travail de maîtrise consacré au rôle des connaissances mathématiques dans les pratiques traditionnelles de construction villageoise dans la culture maya, N. Covián (2005) pose explicitement la question suivante :

> " Desde esta perspectiva no solamente se preguntan la influencia del momento histórico, sino que ahora se tiene en cuenta el estudia de estos eventos para entender el proceso de institucionalización que dio pie a muchos de estos conocimientos, es decir, la perspectiva socioepistemológica se pregunta por qué es considerado importante este conocimiento?" p. 47 [79]

Elle propose de définir la pratique sociale de la façon suivante :

> " La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen".
>
> "Es entonces a través del proceso de institucialización que la práctica social viene a ejercer la función normativa, a constituirse en algo que ya no es proprio del individuo, sino del grupo social; es a través de este proceso que la construcción del conocimiento llega a constituirse para formar parte de un sistema o grupo social." (*ibidem,* p. 160)[80]

Ce point de vue est aujourd'hui partagé dans l'approche socioépistémologique :

> " La *práctica social* la entedemos como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica." (Cantoral, Farfán, Lezama, & Martinez Sierra 2006, p.85)[81]

Si j'ai cité longuement ces éléments, c'est qu'ils sont à l'origine du point de vue sur l'apprentissage institutionnel que je vais présenter maintenant. Comme on a pu le lire, deux idées sont mises en avant, celle de fonction normative des pratiques sociales et celle d'institutionnalisation des dites pratiques. Je vais importer ces points clés dans le cadre de la TAD en les appliquant aux praxéologies.

---

[79] Traduit par mes soins : "Dans cette perspective, on ne se contente pas de s'interroger sur l'influence du moment historique mais on prend également en compte l'étude de ces évènements pour comprendre le processus d'institutionnalisation qui a donné naissance à bon nombre de ces connaissances. C'est-à-dire que la perspective socioépistémologique cherche à comprendre pourquoi telle connaissance a été considérée comme importante."

[80] "La pratique sociale n'est pas ce que fait l'individu ou le groupe mais ce qui lui fait faire ce qu'il fait.

C'est donc par le biais du processus d'institutionnalisation que la pratique sociale exerce sa fonction normative, à se constituer en quelque chose qui n'est pas le propre de l'individu mais du groupe social ; c'est par ce processus que la construction de la connaissance parvient à se réaliser pour former une partie d'un système ou d'un groupe social."

[81] "Nous considérons la pratique sociale comme normative de l'activité, plutôt que comme activité humaine réflexive ou comme réflexion sur la pratique."

Une praxéologie Π reconnue par une institution *I* fournit aux sujets de *I* des ressources pour traiter les tâches d'un type *T*. En même temps, elle norme leurs façons d'affronter ces tâches dans *I*. L'apprentissage d'un sujet de *I* relatif à Π est le processus par lequel cet individu se soumet aux normes de Π et s'approprie ses ressources, autrement dit se fait sujet de Π. On peut donc considérer qu'une praxéologie Π est une institution. Et l'étude de l'apprentissage institutionnel, c'est-à-dire du développement par une institution de son capital praxéologique, intègre celle des formes et des phases du processus qui stabilise et légitime Π dans *I* et ce faisant l'institue, c'est-à-dire la fait institution, deux raisons de considérer qu'il s'agit d'un processus d'institutionnalisation. Dans les phases d'émergence des ethnopraxéologies, on peut penser que l'institutionnalisation est inséparable de, se produit en partie par, la diffusion de la technique qui développe la fonction normative. Ainsi le fait que dans les villages mayas, un fils puisse construire à son tour sa maison avec l'aide de son père, parce qu'il dispose de place et de matériaux, est une tradition qui assure la transmission des praxéologies en jeu. Une praxéologie s'institue ou s'institutionnalise[82] parce qu'elle se répand géographiquement et se transmet aux nouvelles générations, autrement dit parce qu'elle est l'objet d'un processus didactique. C'est pourquoi, le praxéologique et le didactique sont inséparables. Même dans les cas où cette didactique des techniques est largement basée sur l'ostension directe et le compagnonnage, on peut difficilement imaginer qu'elle ne suscite pas l'élaboration d'un langage (verbal et symbolique) et conjointement d'un savoir technologique de nature à favoriser l'initiation des novices par les plus expérimentés et plus largement le partage des acquis empiriques. Le travail réalisé par N. Covián donne à voir un exemple très intéressant de tel développement.

> N. Covián a mis en évidence l'existence d'un élément clé de la stabilisation des proportions des constructions villageoises mayas, à savoir l'existence d'une unité de mesure, la *vara*, qui est définie en fonction de la taille de l'homme qui habitera la maison construite :
>
> > "La vara, que es la medida tomada cuando ya termino de crecer una persona, con una cuerda de fibra, esto se hace pegando a la persona a un poste, se toma con la cuerda la medida exacta de la altura de la persona, a esta cuerda (que da la medida de la altura del individuo) se dobla por la mitad, llamandose a esta medida vara"[83] (Covián 2005, p. 91)
>
> Or, les données réunies (dont l'interview d'un villageois Gilberto et une sorte de traité pour l'autoconstruction) motivent toute une partie des dimensions des réalisations par les besoins de l'habitant, certaines étant clairement liées à sa taille :
>
> > "La altura de los Horcomes (poteaux verticaux) es de 2 ½ varas más ½ de vara que serán enterrados, es decir la longitud total del Horcom será de 3 varas **para que** la persona que habita la casa pueda arreglarla por ella misma y alcanzar todos los objetos que se puedan colgar."[84] (*ibidem*, p.101)
>
> De même, la longueur du rectangle de base est choisie en fonction de celle du hamac.
>
> Un autre facteur est décisif, il s'agit de l'inclinaison du toit qui est explicitement motivée par une recherche d'étanchéité, elle dépend du rapport largeur/hauteur dont la proportion efficace doit donc être conservée dans les adaptations liées à la taille du propriétaire. La *vara* apparaît comme l'outil technique

---

[82] Il s'agit du processus qui fait d'une praxéologie une institution reconnue dans une institution cadre. On peut dire instituer ou institutionnaliser. Mais le nom correspondant pour le processus ne peut être qu'institutionnalisation, celui d'institution étant plutôt réservé au produit du processus. Je pense personnellement que l'usage que nous faisons en didactique des termes institutionnaliser et institutionnalisation sont compatibles avec le sens général que je veux considérer ici mais j'ai constaté que certains collègues ressentaient quelques difficultés à l'entendre ainsi.

[83] "La vara, qui est la mesure prise lorsque la personne a fini de grandir, avec une corde de fibre se détermine en appuyant la personne à un piquet, on prend avec la corde la mesure exacte de la taille de la personne ; puis l'on plie en deux cette corde ; cette mesure s'appelle la vara."

[84] "La hauteur des Horcomes (poteaux verticaux) est de 2 ½ varas plus ½ de vara qui sera enterrée ; c'est-à-dire que la longueur totale des Horcomes sera de 3 varas **pour que** la personne qui habite la maison puisse l'adapter à elle-même et puisse atteindre tous les objets qui puissent s'y ranger. (Díaz, Manual de autoconstrucción)"
Notons l'existence d'un vocabulaire technique d'une dizaine de mots pour désigner notamment les différents éléments de la charpente.

(matériel et conceptuel) qui va permettre l'intégration en acte dans la technique des besoins de proportionnalité sans qu'à aucun moment ne soit nécessaire une conception plus explicite, plus mathématique de cette notion. Par contre, l'arrivée d'outils de mesure métriques peut introduire une perturbation sur laquelle les données réunies n'informent guère : le manuel d'auto-construction exprime toutes les mesures en varas, donc proportionnelles à la taille de l'habitant, et en parallèle fournit des mesures en mètres qui sont donc fixes. Les écrits de N. Covián ne permettent pas de savoir si la question d'une adaptation des mesures métriques est envisagée.

Les aspects didactiques de transmission/diffusion n'épuisent pas la réalité des processus qui instituent une praxéologie au sein d'une institution donnée. Il faut particulièrement s'interroger sur les modalités de la validation de la technique (elle est reconnue efficace) et de la technologie (ces savoirs sont tenus pour vrais). Aucun de ces aspects ne va de soi dans les cas où il n'existe pas de théorie ; il est donc peu pertinent d'approcher une ethnopraxéologie sans s'intéresser aux modalités de son institutionnalisation.

2. La variété des épures praxéologiques

S'étant développé à partir du cas des mathématiques, le modèle praxéologique, y compris dans la forme que j'en ai donnée au début de ce chapitre, dérive d'une épure praxéologique $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ dans laquelle l'existence d'une théorie mathématique produit et valide une technique et la composante théorique de sa technologie ; même si la recherche suit souvent des chemins moins directs, c'est sous cette seule forme qu'une praxéologie mathématique est aujourd'hui reconnue comme appartenant au capital cognitif de l'institution $P(M)$ productrice des savoirs mathématiques. Cette configuration peut être généralisée aux autres institutions scientifiques, avec leurs formes de validation spécifiques qui, contrairement aux mathématiques, ne sont pas exclusivement théoriques.

La caractéristique de cette forme de développement praxéologique que je vais retenir pour la généraliser est que le processus de production est délocalisé par rapport à l'utilisation : la fonction institutionnelle des chercheurs n'est pas limitée au traitement de tâches de T, elle est de développer et valider une praxéologie relative à T. Ce détour par rapport à la pratique et ses contraintes, ce délai par rapport à ses rythmes, n'est pas l'apanage de la science. Ainsi la recherche technique, pourtant prioritairement intéressée par la pratique et le développement des techniques (alors que la science a d'abord des visées épistémiques), se donne le temps d'une validation organisée et systématique de ses inventions. Ce faisant, elle développe une technologie, laquelle peut être exclusivement expérimentale, sans justification théorique : en résistance des matériaux par exemple, de très nombreuses formules en jeu dans le bâtiment résultent de processus de modélisation-vérification expérimentale en laboratoire[85].

Il faut noter qu'en envisageant la possibilité qu'une technologie systématiquement validée ne soit pas accompagnée d'une théorie, je fais un usage plus restreint de la notion de 'théorie' que ne le fait Y. Chevallard. Pour lui en effet, la théorie est la technologie de la technologie, c'est-à-dire tout discours rationnel qui justifie, rend intelligible et produit la technologie. Cette théorie peut être, est en général, évanescente. Ce n'est pas la position que je choisis. Comme je l'ai fait dans (Castela 2008a), je généralise le point de vue adopté par D. Lecourt dans la définition suivante :

---

[85] Il existe de fait des praxéologies de modélisation avec une technologie (analyse dimensionnelle) permettant de produire des équations modélisant les situations rencontrées. Ainsi on peut lire dans un cours de mécanique des fluides (Ecole Centrale de Nantes-voir la thèse d'A. Romo Vázquez ch5 partie IV.2.1.1 p.139) :

> « On présente ici une analyse systématique *aveugle* fondée sur la dimension des variables descriptives du problème étudié. Le principe fondamental repose sur l'homogénéité dimensionnelle. Il faut :
>
> 1) recenser les variables du problème (intuition, expérience…)
>
> 2) former avec ces variables une équation hypothétique (généralement un développement généralisé de type polynomial),
>
> 3) appliquer à cette relation le principe d'homogénéité dimensionnelle ;
>
> 4) effectuer quelques expériences pour déterminer les coefficients constants qui subsistent dans l'équation. »
>
> (Cours de mécanique des fluides, p.111)

"La notion de théorie scientifique implique une mise en forme logique de principes et de conséquences qui regroupent des résultats préexistants." (Lecourt 2004, p. 940)

Une théorie est un ensemble structuré de savoirs qui possède une dynamique propre permettant que, de certains éléments avérés, puissent être déduits des conséquences qui s'intègreront pour ce qui nous concerne à la technologie d'une technique. Ainsi, je ne reconnais pas comme théorie d'une formule de résistance des matériaux un discours qui dirait : "cette formule est vraie parce qu'elle a été validée au laboratoire ; de plus, on ne connaît pas de cas pratique où son application a produit des effets indésirables". Cette phrase exprime la mémoire de processus de validation expérimentale et empirique et elle résume une position de l'institution "Résistance des matériaux" (*P*(*RdM*)) quant aux modalités de la validation. Elle ne dit donc presque rien du processus expérimental effectivement réalisé, rien non plus du processus historique et social qui a conduit à la légitimation par *P*(*RdM*) du paradigme de validation évoqué. Prendre la notion de théorie dans un sens aussi large ne me paraît pas efficace du point de vue de l'étude d'une phase essentielle de l'apprentissage institutionnel, c'est-à-dire de la validation des praxéologies par les institutions. C'est pourquoi je m'en tiens pour l'instant à une conception plus classique : une théorie apparaît dans une praxéologie si par son propre développement, elle a validé un élément de la technologie. Si ce n'est pas le cas, la place de la théorie reste vide, ce qui met en évidence la nécessité d'enquêter sur les processus qui ont institué socialement cette praxéologie, technologie comprise.

En résumé, partant du cas des mathématiques, j'ai décrit une voie du développement praxéologique qui s'appuie sur les productions d'institutions situées dans une position de spectateur vis-à-vis des types de tâches concernées, ce qui m'a parfois conduite à les nommer *institutions théoriciennes*. J'ai renoncé à cette expression, source potentielle d'incompréhension dans la mesure où la référence à la théorie est aujourd'hui beaucoup trop éloignée de l'étymologie du mot. Ainsi, la pensée théoricienne définie par A. Sierpinska (2000) n'a pas pour seule caractéristique d'avoir des visées épistémiques, dépourvues d'intérêts pratiques, elle est plus précisément intéressée au développement de théories. Or, comme je viens de le dire pour la recherche technique, il est possible qu'aucune théorie ne soit sollicitée pour valider les savoirs technologiques produits. C'est pourquoi je parle aujourd'hui plutôt d'*institutions de production praxéologique* ou encore d'*institutions de recherche*. La première formulation met l'accent sur le fait que la fonction de ces institutions est précisément de produire directement (recherche technique) ou indirectement (recherche scientifique) des développements praxéologiques, la seconde renvoie à un domaine aujourd'hui bien identifié des activités humaines, je l'utiliserai dans la suite parce que plus légère et peut-être plus immédiatement accessible. Les épures praxéologiques ont donc la caractéristique d'être produites et validées par une institution de recherche I_r, elles se présentent sous la forme $[T, \tau, \theta^r, \Theta]$ où θ^r est composée de savoirs validés selon les normes en vigueur dans I_r, la cohérence conduit à la nommer "*technologie de recherche*" même si l'on pressent bien que cette expression n'est pas ergonomique[86].

Même s'il existe une théorie pertinente, la validation n'est pas pure formalité. Tout d'abord, parce que la justification de la technologie par la théorie, est l'objet, on le sait bien en mathématiques, d'examens méticuleux par différents dispositifs critiques dans I_r. Ensuite parce que la théorie elle-même est soumise à un processus de légitimation. Est-elle exempte de contradictions internes ? Est-elle corroborée par l'expérience ? Est-elle productive ? Plus généralement, il s'agit de contrôler que les différents savoirs composant la praxéologie ont bien été validés suivant les normes de I_r. Et ceci n'est que la phase finale d'un processus de production et légitimation des normes en question, dans I_r et en dehors.

[86] Je l'ai nommée technologie scientifique dans mon intervention au IIIème colloque de la TAD, expression possible mais qui supporte mal l'extension au cas des épures sans théorie bien que systématisées que j'ai déjà évoqué et dont je donnerai d'autres exemples plus loin.

Lien avec la distinction entre praxéologies de modélisation et praxéologies de déduction

Sur plusieurs points, les réflexions développées dans ce chapitre font écho à celles qu'avance depuis plusieurs années M. Schneider (2011). Je me réfèrerai ici au cours qu'elle a donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques. Elle y distingue, pour les mathématiques et essentiellement dans une perspective didactique, deux types de dynamiques de développement praxéologique, de modélisation et de déduction :

> "Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes intra ou extra-mathématiques constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991)" (p.190). "Comme ces objets n'existent pas encore comme objets d'une théorie et que le but est précisément de les constituer comme tels, le discours qui justifie ces techniques et les rend intelligibles eu égard à la tâche visée ne peut être théorique, au sens où l'entendraient des mathématiciens. Et, c'est ce qui rend nécessaire, me semble-t-il, l'existence d'un niveau de discours que Chevallard appelle discours technologique. […] Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive." (p.191)

Le point de vue de M. Schneider revient à considérer que, pour les mathématiques, une praxéologie sans théorie peut émerger dans une dynamique de modélisation en tant qu'une étape d'un processus qui conduit à une formalisation théorique. La seconde dynamique, dite de déduction, renvoie à des types de tâches portant sur le développement théorique lui-même :

> "Entrent en jeu alors les praxéologies de type « déduction » dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies « modélisation ». Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des "proof-generated concept" au sens de Lakatos […]. Il peut s'agir aussi de déduire tel résultat théorique d'axiomes et/ou de théorèmes antérieurement démontrés, d'établir un système d'axiomes « simple » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement des théorèmes,etc." (p.191)

Les praxéologies de modélisation et de déduction modélisent le travail des mathématiciens. Une partie du travail de validation des théories dont j'ai pointé précédemment l'existence relève des praxéologies de déduction envisagées comme le montre clairement la considération suivante relative à ce qui vient occuper le niveau de la théorie dans les praxéologies de déduction :

> "Quant à la théorie, il s'agit en quelque sorte d'une théorie des théories ou ce que Popper appelle « la logique de la connaissance scientifique » qui soulève des questions épistémologiques concernant la nature des concepts scientifiques, la falsifiabilité des théories, le problème méthodologique de la simplicité, la hiérarchie des disciplines scientifiques, le refus du mélange des genres dans l'établissement de la causalité,…" (P.192)

Les deux dynamiques sont donc productrices de praxéologies complètes mais M. Schneider met clairement en avant que les théories obtenues dans l'une et l'autre sont de nature généralement différente :

> "Ces deux types de praxéologies conduisent à des développements mathématiques presque étrangers les uns aux autres. Si une praxéologie de type « déduction » peut conduire à une théorie mathématique standardisée, plus ou moins globale, il n'en va pas de même des praxéologies « modélisation » qui débouchent sur des argumentations non assimilables à des théories canoniques plus ou moins locales.[…]
> les praxéologies « modélisation » autorisent des modes de validation plus pragmatiques qui seront récusés dans les secondes, tel celui qui consiste à tester la pertinence d'une technique nouvelle pour résoudre un problème dont la solution est déjà connue par ailleurs." (p. 192

Dans ces lignes est envisagée la possibilité qu'une dynamique de modélisation débouche sur des praxéologies relatives à des types de tâches mathématiques dont la théorie ne correspond pas (ou pas entièrement) aux normes mathématiques. Ces réflexions font très clairement écho à l'exemple des praxéologies du calcul symbolique évoqué dans III.3.

3. Circulation des épures praxéologiques

D'autres institutions I_u reconnaissent la validation réalisée par les institutions de recherche et s'approprient les praxéologies produites pour les utiliser : elles les mettent à disposition de ceux de leurs sujets qui ont à traiter des tâches de type T. C'est le processus de circulation interinstitutionnelle des praxéologies qui suppose une phase didactique, aujourd'hui souvent organisée dans des institutions spécifiques d'enseignement ou plus généralement de formation. Dans ce cas, comme j'ai voulu le montrer dans les parties II (évolution de la technique) et III.1, les effets transpositifs peuvent affecter les quatre instances de l'épure produite dans I_r, y compris comme nous l'avons vu pour la géométrie au Chili son niveau théorique, avec éventuellement changement des normes de validation. L'acceptation d'une telle modification ne peut pas être *a priori* considérée comme une formalité simple. On voit bien que la solution adoptée par l'enseignement chilien a été jusqu'à présent rejetée par l'enseignement français. Pourtant les déclarations d'intentions officielles dans les deux pays sont tout à fait comparables. Quel jeu de déterminations fait-il qu'au Chili puisse être institutionnellement validé pour l'enseignement un paradigme mathématique mixte ? Puisque la transposition didactique substitue au bloc $[\theta^{th}, \Theta]$ validé par la communauté experte $P(M)$ un bloc $[\theta^{*th}, \Theta^*]$ basé sur un paradigme différent, dans quelle institution concrète I_r^* (sans doute identifiable à la noosphère) ce bloc a-t-il été légitimé ? Quels processus historiques peuvent-ils expliquer que la double détermination de cette institution noosphérienne par la communauté experte $P(M)$ et par l'Ecole, institution utilisatrice, se traduise par des résultats si différents en France et au Chili ? L'étude du processus de légitimation d'un changement de théorie et plus largement de paradigme dans une institution utilisatrice relève d'une épistémologie de la cognition institutionnelle : il ne s'agit pas seulement d'analyser des effets de transposition mais au-delà de mettre en évidence les conditions qui les ont rendus possibles (ou impossibles).
Enfin, comme l'ont montré la partie II mais aussi une grande partie du chapitre 1 dans le cas de l'utilisation des praxéologies mathématiques pour résoudre des problèmes mathématiques, l'utilisation d'une épure praxéologique donne lieu au développement d'une composante technologique θ^p orientée vers la pratique, validée et instituée dans et par I_u. Pour ces savoirs, la question de la validation et plus largement de l'institutionnalisation se pose dans les mêmes termes que pour les ethnopraxéologies.

4. Un modèle praxéologique élargi

Les différents éléments exposés précédemment me conduisent à proposer la modélisation suivante qui vise à la fois à faire apparaître les différentes formes de ressources praxéologiques socialement produites, les institutions qui ont à faire avec la praxéologie Π considérée et les processus de validation et plus largement d'institutionnalisation de Π réalisés dans et par ces institutions qui sont donc figurés par les flèches situées à droite :

$$I_{\rightarrow}\left[T, \tau, \begin{matrix}\theta^{r}, \Theta \\ \theta^{p}\end{matrix}\right]\begin{matrix}\leftarrow I_r \\ \leftarrow I_u\end{matrix}$$

La partie gauche du schéma explicite le fait que le développement praxéologique est initié par l'existence d'un besoin institutionnel. Dans le cas des ethnopraxéologies, le niveau $[\theta^r, \Theta] \leftarrow I_r$ est vide, dans le cas des épures praxéologiques, c'est au contraire le niveau $\theta p \leftarrow I_u$ qui l'est. Par ailleurs, la situation représentée suppose que la circulation de l'institution de recherche I_r productrice de l'épure $[T, \tau, \theta^r, \Theta]$ à l'institution utilisatrice I_u se fait sans effet transpositif, ce qui est simplificateur. La représentation suivante rend mieux compte des effets possibles de la circulation. Elle introduit en particulier l'institution noosphérienne I^*_r, qui relève bien du niveau des institutions productrices de praxéologies désengagées de l'utilisation, elle est soumise aux déterminations venant des deux institutions I_r et I_u.

$$I \to \left[T^*, \tau^*, \begin{matrix} \theta^{*\,r}, \\ \theta^{p} \end{matrix} \Theta^* \right] \begin{matrix} \leftarrow I^*_r \begin{matrix} \swarrow \mathrm{Ir} \\ \nwarrow \mathrm{Iu} \end{matrix} \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Le symbole * exprime l'existence d'une transposition de la praxéologie initiale.

Je viens de faire référence aux niveaux de détermination didactique (Chevallard 2002, p.49). Ce n'est évidemment pas un hasard : le modèle praxéologique présenté peut être considéré comme ayant d'une part déployé le modèle proposé par Y. Chevallard en y distinguant des composantes technologiques peut-être initialement intégrées dans une même instance et comme ayant d'autre part greffé à la représentation proposée un embryon d'échelle de niveaux de détermination.

Mais la greffe n'est ni un embryon, ni une échelle. L'image de l'échelle n'est pas fidèle puisqu'on le voit d'emblée plusieurs institutions interviennent directement au même niveau. Le jeu des déterminations est donc ramifié. Par ailleurs, ce n'est un embryon que par simplification : il faut dans tous les cas considérer des enchaînements d'institutions. Les processus d'élaboration praxéologique et de validation se déroulent dans une chaîne d'institutions emboîtées et selon une chronologie qu'il faut envisager *a priori* comme complexe. De même, le fait de distinguer les niveaux de la recherche d'une part, de l'empirie pratique d'autre part est une schématisation qui demande à être utilisée avec tolérance, il faut envisager des variantes mixtes : il y a jeu entre les niveaux, comme le représente d'ailleurs la codétermination de l'institution noosphérienne par les institutions de recherche ET par les institutions utilisatrices. Ce besoin de souplesse est un élément que met en avant la partie suivante.

V. Confrontation à d'autres travaux

Avant d'envisager pour finir ce chapitre des perspectives possibles de travail, je veux mettre à l'épreuve le modèle praxéologique proposé. Je ne développerai pas le fait qu'il permet de prendre en compte les différentes considérations et résultats de recherche que j'ai présentés précédemment. Mon propos dans ce qui suit est de montrer la pertinence de cette représentation en la confrontant essentiellement à quelques travaux relatifs aux activités professionnelles. Mon objectif n'est pas de présenter une mise en relation exhaustive, seulement de choisir des points particuliers qui font sens par rapport au travail du modèle praxéologique et donnent une idée des collaborations plus étendues qu'il est possible d'envisager.

1. A propos des savoirs en jeu dans les praxéologies didactiques

Aussi étrange que cela puisse paraître, je m'accorderai l'autorisation d'évoquer pour commencer le cas de l'état actuel de l'univers culinaire, et ce pour la raison qu'il me semble être très instructif pour celui des pratiques didactiques. Jusqu'à une période très récente, la technologie des techniques culinaires était selon moi développée à deux niveaux : essentiellement dans l'empirie pour les pratiques quotidiennes ; dans des moments de recherche expérimentale en marge des activités ordinaires directement orientées vers la clientèle pour certaines des pratiques professionnelles créées par des chefs innovateurs. Ces dernières donnent lieu à des développements technologiques pour lesquels j'étendrai l'usage du niveau θ^r en retenant la posture de retrait par rapport à la pratique professionnelle ordinaire

prise par le cuisinier. Dans le monde concurrentiel de la restauration, l'essentiel de ce savoir θ^r est à diffusion restreinte. Néanmoins certains chefs s'engagent dans la vulgarisation de leurs praxéologies et ceci donne lieu au développement, y compris pour des techniques de base, de savoirs technologiques plus précis, qui demandent également des modes de production particuliers par rapport à l'empirie culinaire ordinaire : sur un sujet aussi simple que celui de la réalisation d'une crème anglaise, il y a une grande différence entre la technologie usuelle qui fait référence à des critères assez flous (disparition de la mousse par exemple) et des recettes plus récentes qui donnent une température à atteindre et ne pas dépasser (ce qui suppose l'apparition du thermomètre comme instrument important, au moins en pâtisserie).
Nous sommes ainsi dans le cas d'une praxéologie dont les composantes technologiques sont développées à partir de la pratique (pratique $\rightarrow \theta^p \rightarrow \theta^r$). Mais l'univers culinaire a récemment connu un changement d'importance avec le développement à l'initiative du chimiste français Hervé This d'une approche scientifique de la cuisine : la gastronomie moléculaire vise à comprendre les phénomènes physico-chimiques qui se réalisent au sein des différentes techniques culinaires ; ce faisant, elle montre le caractère erroné de certains savoirs professionnels mais surtout elle permet de sortir des limites que l'empirie leur avait fixées en permettant d'entrevoir des possibles totalement nouveaux, difficilement accessibles par évolutions des pratiques ordinaires. Ainsi comprendre que c'est la présence de protéines qui permet d'obtenir en battant la consistance des blancs en neige a permis de généraliser le principe pour obtenir des mousses très variées à partir de jus de fruits et de gélatine. Une école de cuisine moléculaire, entraînée par des chefs comme Ferran Adriá en Espagne, Pierre Gagnaire en France, utilise les savoirs scientifiques $[\theta^r, \Theta]$ (ici la technologie est issue de la théorie) ainsi produits pour développer des techniques totalement nouvelles, techniques dont la mise en œuvre et la diffusion nécessitent très vraisemblablement l'élaboration de savoirs empiriques complémentaires pour en assurer la fonctionnalité. Je n'en dirai pas plus mais la question de la légitimation de ces praxéologies nouvelles dans la profession est particulièrement vive en ce moment.

Ainsi l'univers culinaire fournit un exemple dans lequel des savoirs technologiques de trois origines différentes peuvent contribuer aux pratiques ; il permet également de mettre en évidence le saut qualitatif permis par l'injection de savoirs issus de la science. Toute chose n'étant pas égale par ailleurs, (notamment la nature des pratiques humaines en jeu dans l'univers didactique), je considère néanmoins le cas de la cuisine comme une analogie intéressante pour le monde de l'enseignement. Il s'agit ici de considérer des types de tâches professionnelles pour les enseignants, singulièrement des types de tâches didactiques. Il me semble qu'il faut reconnaître l'existence de savoirs d'origine empirique, de savoirs issus de recherches scientifiques, en particulier didactiques[87], qui s'appuient sur des cadres théoriques et enfin d'un troisième type de savoirs intermédiaires, produits dans une démarche dégagée de l'urgence empirique et répondant à des critères de validation à tendance scientifique. Les IREM sont des institutions dont la fonction est bien de production praxéologique, les travaux qui s'y réalisent peuvent relever de la recherche scientifique mais ce n'est pas le cas dominant ; l'idéal visé par ces institutions semble plutôt être d'atteindre des niveaux de dépersonnalisation et d'évaluation tels que l'on puisse considérer les savoirs produits comme relevant de la composante θ^r, même si l'outillage théorique est restreint. Cependant, les articles publiés dans la revue des IREM, *Repères*, montrent bien que certains travaux ne relèvent pas de ce niveau : des enseignants rapportent des séquences qu'ils ont réalisées et dont ils s'estiment satisfaits, sans que des dispositifs particuliers d'évaluation des effets aient été mis sur pied (la satisfaction et l'engagement des élèves sont considérés comme critères

[87] Il est clair que la recherche en didactique n'est pas la seule institution productrice de ces savoirs scientifiques. Sociologie, psychologie, neurosciences sont des exemples d'autres champs de recherche qui peuvent contribuer au bloc technologico-théorique scientifique des praxéologies professionnelles de l'enseignant.

suffisants). Ces communications me semblent correspondre à la volonté de participer à la maintenance du métier que l'on trouve également dans les publications des associations professionnelles (APMEP), les savoirs produits correspondent généralement à la composante θ^p. Il faudrait étudier les modes de légitimation de cette composante, où, me semble-t-il, les Inspecteurs Pédagogiques Régionaux jouent un rôle important en promouvant certains enseignants et leurs pratiques selon des critères qui pourraient être étudiés. Il me semble qu'envisager la question des savoirs professionnels avec cette grille d'analyse permettrait d'éclairer certains débats et d'outiller certaines recherches autour de la formation des enseignants.

2. Ouverture sur les travaux britanniques consacrés à la place des mathématiques dans le monde du travail

Au Royaume Uni, un groupe de chercheurs, comprenant notamment C. Hoyles, P. Kent, R. Noss et S. Pozzi s'est particulièrement intéressé aux mondes professionnels, y recherchant les traces d'un usage de savoirs mathématiques[88]. Je m'appuie dans la suite sur une intervention de P. Kent et R. Noss dans un symposium consacré à la formation des ingénieurs en 2002 (I.E.E. Second annual symposium on engineering education). Cette communication est intitulée "*The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics*" et se centre sur une recherche essentiellement consacrée à la place des mathématiques dans le monde du génie civil et du génie des structures.

Je me contenterai ici de retenir l'analyse développée par les auteurs de ce qui en anglais est désigné par l'expression '*Codes of Practice'*.

> "Underlying the use of mathematics is the general structuring of design knowledge and practice through **Codes of Practice**[89]. The codes provide recommendations for the practical design of steel, concrete, timber, etc structures, **based on a combination of accepted construction practice, experimental work on structures and analytical knowledge**. It is worth noting that much of what is done in structural engineering practice is only partially understood at an analytical level."
> "Since the construction Codes of Practice represent the base knowledge of normal practice, much of the work of the analytical specialist lies in interpreting the Codes (which are **a compromise of the current state of understanding of practical experience and theory**, and Codes in different countries often reach different compromises) and extending them into non-standard areas, but **using the same "language" and style as the codes do**, offering equations that the designer can make use of."

Les Codes de Pratiques sont issus des différents domaines de savoirs que j'ai envisagés dans III.2 : théoriques, expérimentaux et pratiques. Les codes relèvent de la composante $[\theta^r, \Theta]$ et l'on perçoit très bien à travers l'idée de compromis qu'ils sont le fruit d'un travail d'élaboration et de transaction dans une institution I_r* où collaborent et se confrontent institutions de recherche et institutions professionnelles. P. Kent et R. Noss ont aussi pu constater que, si ces codes sont les ressources de base pour le travail ordinaire de conception de structures, ils sont aussi féconds dans les cas hors normes : ils fournissent une interface permettant aux ingénieurs analystes qui inventent des solutions adaptées à ces situations extraordinaires, de les rendre accessibles aux ingénieurs de terrain, grâce notamment au langage utilisé. Ressources pour l'activité, les codes le sont, mais ils imposent aussi des normes, le passage suivant évoque un aspect du processus d'assujettissement :

> "The Codes for structural design are not legally-prescriptive documents: there is always the liberty of not following codes, but that comes at a price. **Working within the codes, design calculations will be familiar to other engineers, and to official building inspectors; but going outside could involve a lot**

[88] Plusieurs de ces auteurs viennent de publier un livre sur ce domaine :
Hoyles C., Noss R., Kent, P., Bakker A. (2010), *Improving Mathematics at Work: The need for techno-mathematical literacies*. Oxford: Routledge.
[89] Les passages en gras sont de mon fait, ils visent à faire apparaître les éléments décisifs pour mon commentaire.

> **of time and effort to produce a convincing argument** that a structure will behave as predicted, and this may be in the form of a mathematical analysis that requires the input of an analytical specialist."

C'est ainsi la double dimension, facilitante et contraignante, de la praxéologie forgée dans les institutions de recherche qui est particulièrement exhibée. Mais d'autres passages de la conférence évoquée ici laissent entrevoir d'autres résultats qui entrent en résonance avec le modèle praxéologique, en mettant en évidence l'existence d'une technologie contextualisée, référée aux situations professionnelles, notamment pour expliquer et motiver, ce qu'on pourrait appeler en utilisant un terme introduit par C. Hoyles et R. Noss (1996) dans l'expression *situated abstraction*, une technologie située.

3. Ouverture sur les travaux français d'ergonomie cognitive

Je cherche maintenant à situer le modèle et les trois niveaux qu'il distingue dans le bloc des savoirs par rapport aux travaux développés par l'école française d'ergonomie cognitive (notamment P.Pastré, P. Rabardel, J. Rogalski et R. Samurçay) autour de la notion de concept pragmatique. Je prends comme référence la revue de travaux réalisée par C. Vidal-Gomel et J. Rogalski (2007). L'objet central de cet article est la conceptualisation, particulièrement dans les situations de travail. En tant que processus relevant du sujet cognitif et produisant des constructions individuelles, la conceptualisation n'est pas un objet que j'ai cherché à prendre en compte dans le modèle praxéologique. C'est à une conceptualisation sociale que je m'intéresse, plus exactement aux différentes formes de manifestation d'un tel processus et d'intervention des concepts produits. Ainsi les notions de concept et théorème-en-acte introduites par G. Vergnaud (1990) en tant que modélisations produites par le chercheur d'inaccessibles et hypothétiques élaborations cognitives du sujet ne relèvent pas du point de vue socioculturel que j'ai adopté. S'il existe des invariants interindividuels dans l'action, non socialement représentés, ils sont en tant que tels pris en charge au niveau de la technique. Par contre, la revue de travaux réalisée par Vidal-Gomel et Rogalski distingue trois types de concepts qui relèvent effectivement du bloc technologico-théorique du modèle praxéologique, concepts scientifiques, techniques et pragmatiques. Ces concepts appartiennent eux-mêmes à trois champs de savoir : science, technique et savoirs professionnels. Science et technique produisent des connaissances sur le réel avec une ambition comparable de systématisation. Les concepts techniques sont "regardés comme issus d'une démarche systématique de construction sociale, parente de la démarche scientifique" (Samurçay & Rabardel 2004, p. 178)

> "les concepts techniques sont plutôt issus d'une conduite de détour, de la volonté explicite de théoriser suffisamment un phénomène pour s'assurer de la cohérence d'ensemble, de l'amplitude du domaine de validité et de l'utilité du concept technique." (Vidal-Gomel & Rogalski 2007, p. 62)

Toutes deux en position de désengagement par rapport à l'action, science et technique se distinguent par leur visée respective, épistémique pour la science (produire de la connaissance), pragmatique pour la technique (produire un effet). Néanmoins, compte tenu de l'acception donnée à la notion d'institutions de recherche, ces deux types de concepts relèvent de la composante $[\theta^r, \Theta]$.

Les concepts pragmatiques quant à eux relèvent très clairement de la composante θ^p.

> "[Ce sont] des représentations schématiques et opératives, élaborées par et pour l'action, qui sont le produit d'un processus historique et collectif, et qui sont transmises essentiellement par expérience et compagnonnage." (Samurçay & Rogalski 1992, p. 235)
>
> "les concepts pragmatiques permettent de penser et de comprendre pour agir en situation, ici et maintenant. […ils] sont inséparables de l'organisation de l'action." (Vidal-Gomel & Rogalski 2007, p. 62)
>
> "les concepts pragmatiques sont verbalisés par les opérateurs. Ils sont transmis par les communautés professionnelles sous des formes langagières diverses." (*ibidem*, p. 69)

Les derniers éléments cités montrent que, contrairement aux concepts-en-actes, les concepts pragmatiques appartiennent bien à la technologie. Il est intéressant pour mieux spécifier la composante θ^p de préciser ce qui les distingue des concepts techniques :

> "dans un domaine professionnel, on n'entreprend pas de démarche systématique de validation des concepts pragmatiques, contrairement aux domaines scientifiques et techniques." (*ibidem*, p. 62)
> "Un concept pragmatique est une construction mentale dont les propriétés l'apparentent aux concepts techniques ou scientifiques mais, à la différence de ceux-ci, son domaine de validité est précisément circonscrit à une catégories de situations de travail dans un domaine professionnel précis, et la pierre de touche de cette construction n'est pas la validation théorique mais l'efficacité pratique." (*ibidem*, p. 75)

Dans ce qui précède, il me semble pouvoir avancer que de tels concepts pragmatiques ont été rencontrés à deux reprises : la *vara*, concept d'unité de mesure d'abord, proportionnelle à la taille de l'habitant ensuite, qui joue réellement un rôle d'organisateur de l'ensemble des techniques de construction, permettant que le concept de proportionnalité reste implicite, concept-en-acte donc ; le concept de *constante de temps* peut-être aussi.

Ajoutons pour finir que le caractère non isolé des concepts pragmatiques est mis en avant avec insistance

> "Ils s'inscrivent dans un réseau de relations, qui intègre des concepts pragmatiques et les relie à des paramètres directement observables." (*ibidem,* p.. 52)

Mis en relation pour produire une représentation conceptuelle de la situation, ils sont également intégrés dans un champ de savoirs professionnels qui relèvent de la composante θ^p. Dans quelle mesure une telle organisation pourrait-elle être prise en compte, sous certaines conditions, en tant que "théorie pragmatique" qui viendrait occuper la place laissée vide de la théorie au niveau pratique ? C'est une question pour moi totalement ouverte.

Ainsi apparaît une convergence tout à fait stimulante de deux approches privilégiant des dimensions très différentes puisque les travaux développés par les chercheurs cités ici le sont dans une optique psychologique alors que, dans le cadre de la TAD, je m'intéresse à la dimension socioculturelle. Mais je le fais en accordant *a priori* crédit aux productions cognitives non aristocratiques si je peux dire, à celles qui ne sont pas développées par les institutions de recherche, autrement dit au *folklore* au sens étymologique du terme en anglais. C'est ce qui autorise la convergence avec une ergonomie cognitive qui de son côté fait référence à l'approche Vygotskienne du psychologique humain et prend donc inévitablement en compte les productions de la cognition sociale. C'est aussi ce qui me fait rencontrer les travaux développés autour de Y. Clot en Clinique de l'activité.

4. Ouverture sur les travaux français de clinique de l'activité

Comme je l'ai évoqué à la fin de la partie IV.2, toute une chaîne d'institutions emboîtées est impliquée dans la légitimation des praxéologies. C'est le cas pour les institutions de recherche, il est inutile de développer ici la série des examens critiques subis par un résultat scientifique. C'est également vrai dans les institutions utilisatrices. Je vais ainsi postuler qu'au sein d'une institution utilisatrice professionnelle I_u, les sujets peuvent localement constituer des communautés de pratiques (au sens de Wenger 1998) stables, identifiables dans certains cas à des institutions en ce sens qu'elles ressourcent et encadrent les activités que leurs membres réalisent. Ces communautés inscrivent leur travail dans le cadre déterminé par les praxéologies instituées dans et par I_u, elles en respectent *a priori* les normes et profitent des ressources ainsi mises à leur disposition. En particulier, les sujets n'ont pas à reprendre le processus de validation, c'est une question réglée par I_u qui est garante de la praxéologie.
Mais ces communautés sont en même temps le lieu privilégié du développement du niveau pratique des praxéologies, pour utiliser au mieux les marges de manœuvre laissées par les normes en temps normal mais aussi pour affronter les désajustements des techniques

instituées aux conditions effectives de travail lorsque celles-ci évoluent[90]. Une communauté de sujets peut produire des ressources praxéologiques pour elle-même dans une logique interne d'amélioration du travail de la communauté ; elle ne contribuera véritablement aux processus producteurs de praxéologies dans I_u qu'en s'inscrivant dans une logique externe de transmission vers la profession, ce que Y. Clot et J-L. Roger appellent dimension transpersonnelle du métier :

> "le travail collectif de réorganisation de la tâche [qui] en assure ou non la "maintenance". Cette dimension transpersonnelle est l'objet et le résultat du travail que le collectif fait sur lui-même pour conserver, transmettre et finalement "retenir" sa mémoire du travail, et "refaire" le métier tout en le faisant." (Roger 2007, p.20).

Le concept clé de *genre d'activité*, plus largement de *genre professionnel*, généralisations de la notion de genre de discours due à S.Bakhtine, est ce qui, dans cette ligne de travaux, prend en charge le champ des productions praxéologiques développées par les communautés de sujets, cette mémoire du travail évoquée dans la citation précédente.

> "Le genre professionnel est ici compris comme une sorte de pré-fabriqué, histoire socialement et collectivement élaborée par le milieu de travail, ne relevant pas de la prescription officielle et définissant les diverses façons admissibles dont les professionnels doivent se comporter dans l'exercice de leur métier, mais aussi les variantes acceptables ou déplacées des manières de travailler. Une telle histoire est une mémoire qui permet de mieux affronter le cours des évènements dans la situation de travail. Elle est le répondant collectif de l'activité individuelle, collectif dans l'individu, retenant les attendus d'une situation et préparant à ses inattendus, réglant ou déréglant l'action personnelle. Il s'agit, en quelque sorte, d'un "stock" diversifié de "mises en mots" et de "mises en actes" prêt à servir et qui préfigure l'action. Ce "stock" est à la fois contrainte et ressource pour agir. Pour réussir à faire ce qu'ils ont à faire, les professionnels, de façon largement insue, le mobilisent, le défaisant et le refaisant sans cesse, renouvelant du même coup la mémoire vivante du métier." (conférence conjointe de Y.Clot et J-L. Roger tenue en 2004 à l'IUFM de Rouen et citée dans (Roger 2007, p. 18))

Cette citation présente, à mes yeux, l'intérêt de mettre en évidence la nécessité d'une grande subtilité pour approcher les ethnopraxéologies qui composent les genres professionnels tels que définis par Y. Clot et J-L. Roger, encadrant le travail tout en n'étant pas nécessairement perçues par les acteurs[91].

L'introduction du niveau pratique permet de prendre en compte dans la théorie la contribution, non pas des sujets individuels, mais des communautés de sujets de I_u au développement des praxéologies, dont ils sont pourtant aussi les sujets puisqu'ils y inscrivent leurs actions relatives aux tâches de *T*. Il s'agit de pouvoir ainsi faire une place aux contributions des sujets à la dynamique cognitive des institutions :

> "Ainsi les sujets d'une institution, qui permettent déjà à celle-ci de vivre, contribuent-ils en même temps *à la faire évoluer*, en exerçant une pression institutrice sur les rapports institutionnels." (Chevallard 2003, p. 5)

Notons pour finir qu'il n'y a pas d'automatisme à ce que les collectifs de sujets se constituent en communautés de pratiques, institutions participant de la chaîne des I_u. C'est un point qu'examine particulièrement J-L. Roger dans le livre cité dans lequel il rend compte d'interventions auprès de collectifs que l'on pourrait décrire comme en souffrance par manque de réactions partagées à des situations de désajustement du genre, des soignants dans des

[90] Ainsi, dans les villages mayas, l'apparition des tôles métalliques a produit des changements quant à l'inclinaison des toits : plus étanches que les matériaux végétaux traditionnels, elles supportent une moindre vitesse d'écoulement des eaux de pluie et permettent donc une moindre inclinaison.

[91] Ceci trouve un écho dans la notion de "monde commun" que P. Béguin et P. Pastré empruntent à E. Cassirer, pour envisager la possibilité que sur une même scène professionnelle puissent se côtoyer des mondes différents, par exemple le monde des opérateurs et celui des concepteurs dans un processus de conception de dispositifs de simulation pour la formation professionnelle. Mais je n'ai pas exploré cette voie. Voir les contributions de ces auteurs dans *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement.* Toulouse : Octares Editions.

services de séjour de fin de vie en gériatrie et des enseignants. Il précise donc dans l'introduction de son livre :

> "Encore faut-il que les collectifs de professionnels puissent assumer cette double dimension psychologique et sociale. De tels collectifs ne peuvent être compris comme de simples groupes ou collections d'individus assemblés simplement et formellement par la tâche partagée, comme c'est aujourd'hui souvent le cas dans les milieux de travail, même sous couvert de travail collectif. Il faut que ce soient des collectifs s'inscrivant effectivement dans l'histoire d'un milieu." (*ibidem*, p. 23)

VI. Perspectives

Les réflexions que j'ai présentées dans ce chapitre débouchent sur plusieurs directions possibles de travail.

Etude des effets de transposition produits par l'utilisation des praxéologies mathématiques

Je commencerai par celle qui m'intéresse actuellement le plus. Il s'agit de prolonger ce qui a été commencé avec A. Romo Vázquez, c'est-à-dire l'exploration de la transposition des praxéologies mathématiques dans les sciences utilisatrices de mathématiques et plus largement dans les mondes professionnels, ce d'abord dans une perspective épistémologique. Je pense en effet que la nature de la formation mathématique des didacticiens, spécifiquement des didacticiens français, les empêche trop souvent d'imaginer les formes de vie des techniques mathématiques transposées pour les utiliser. En particulier, l'importance de la validation théorique est selon moi surestimée au détriment d'autres fonctions technologiques comme la motivation des gestes et l'explication située. C'est une perspective de travaux possibles à propos de la physique. Mais, au moment où se pose de manière très aiguë à l'université la question d'une intégration réussie dans des licences professionnelles de publics variés, issus des filières techniques et technologique de l'enseignement secondaire, il y a urgence à développer des recherches sur ce type de parcours. Or, avant que de prétendre avancer des propositions didactiques concernant l'enseignement des mathématiques aux différents niveaux de la formation professionnelle, il est nécessaire d'explorer avec esprit d'ouverture la réalité des praxéologies vivantes, en s'attachant à différencier les professions. Si le métier d'ingénieur est très certainement aujourd'hui d'une grande diversité, il n'y a aucune raison de généraliser à toutes les formations un modèle d'enseignement des mathématiques adapté aux ingénieurs-analystes par exemple, évoqués par P. Kent et R. Noss. J'envisage plus particulièrement de m'intéresser aux métiers utilisateurs de géométrie, dans le bâtiment mais aussi, par exemple, en chaudronnerie, ce qui poursuivrait la direction de recherche ouverte par plusieurs didacticiens français comme A. Bessot, M. Eberhard et C. Laborde (Bessot & Eberhard 2006) et plus récemment C. Bulf dans sa thèse (2008).

Etude des phénomènes de légitimation institutionnelle des praxéologies

Cette deuxième direction de recherche est tout d'abord un complément indispensable de la précédente pour l'étude des phénomènes transpositifs : il s'agit fondamentalement de se pencher sur la transposition en tant que processus où peuvent être mises en doute les légitimités acquises dans les institutions dont sont issues les praxéologies, où, par ailleurs, des modifications et des développements, notamment de la technique et/ou de la technologie pratique, sont opérés, qui doivent donc être légitimés. Quels sont les acteurs de cette remise en chantier praxéologique ? Dans quelles institutions, sur quelles bases, selon quels critères, par quels processus se reconstruit la légitimité, se valident les éléments nouveaux incorporés à la praxéologie ? Dans quelle mesure y contribue la garantie de l'institution productrice ? Quels rôles jouent les sujets utilisateurs ? Telles sont les questions que je suggère d'aborder dans le cas des utilisations de mathématiques dans certains contextes scientifiques ou professionnels.

Les phénomènes de transposition didactique peuvent également être abordés dans cette perspective. Il s'agit de s'intéresser aux processus de multi-déterminations institutionnelles qui, dans des pays différents ou dans des institutions scolaires différentes d'un même pays, conduisent à des choix transpositifs distincts. D'où vient par exemple la difficulté à faire vivre dans l'enseignement secondaire belge autant que français des praxéologies produites dans une dynamique de modélisation telles qu'évoquées par M. Schneider ? Qu'est-ce qui conduit certains pays à accepter des paradigmes de validation ne répondant pas aux normes mathématiques quand d'autres les refusent ? On se situe alors à un niveau macro-didactique et ce sont les déterminations exercées par des institutions relevant des niveaux supérieurs de l'échelle introduite par Y. Chevallard (2002), société et civilisation, qu'il s'agit de prendre comme objets d'étude. Dans une perspective réformatrice éventuelle, l'enjeu est de comprendre à quels niveaux se situent les verrous qui empêchent certaines options de vivre dans certains systèmes et sur lesquels il faudrait agir. C'est la dynamique de la réflexion théorique qui me conduit à envisager la possibilité et l'intérêt de tels travaux mais rien dans mes recherches antérieures ne m'outille méthodologiquement pour les aborder dans la mesure où ils ont nécessairement une forte dimension sociologique et historique. Je ne conçois guère de m'engager dans cette direction en dehors d'une collaboration interdisciplinaire.
Enfin, la lignée des recherches développées par la socioépistémologie au sujet des ethnopraxéologies est absolument passionnante. Il s'agit de s'intéresser à des praxéologies développées dans certaines communautés, praxéologies qui pourraient être validées par certains savoirs mathématiques avec lesquels cependant les communautés en question n'ont eu aucun contact. Le contenu des praxéologies en question, les processus par lesquels elles sont validées, s'institutionnalisent et normalisent les comportements sont pris pour objets d'étude. La perspective éducative de ces recherches est de concevoir des dispositifs didactiques qui s'appuient sur les praxéologies existantes pour enseigner les savoirs mathématiques qui leur sont liés. Je ne sais si on peut facilement réaliser en France de tels travaux. Toutefois il est possible que, dans certaines professions, l'éloignement des utilisateurs avec les savoirs mathématiques validant certaines techniques utilisées soit tel que ces savoirs ne participent nullement à la praxéologie effectivement présente chez les professionnels experts, celle-ci s'apparentant alors à une ethnopraxéologie.

Etude de la productivité praxéologique des enseignants de terrain

Une troisième direction de recherche concerne l'évolution des praxéologies didactiques et la formation des enseignants de mathématiques. Je ne suis pas certaine qu'on ait jusqu'à présent pris comme objet d'étude la productivité praxéologique des enseignants de terrain. Spécifiquement, dans l'époque de désajustements majeurs que nous vivons, où se multiplient ce que G. Cirade (2006) et Y. Chevallard (2010 par exemple) pointent comme des problèmes de la profession, n'existe-t-il pas des communautés d'enseignants qui produisent des réponses et contribuent à l'entretien du genre professionnel ? L'approche que j'ai développée dans ce chapitre conduit à considérer que cette question doit être examinée. Si l'on ne postule pas que les solutions aux problèmes de la profession ne viendront que d'en haut, il faut étudier les conditions écologiques d'une productivité venant également d'en bas. C'est ce qu'a entrepris J-L. Roger dans sa thèse (2007). C'est aussi l'objet de la thèse de J-P. Georget (2009) et plus largement cela correspond à une voie de travail sur laquelle sont engagés G. Gueudet et L. Trouche (2009) à propos de l'usage collaboratif des ressources documentaires. Il est intéressant de noter que ces deux chercheurs, particulièrement L. Trouche, ont d'abord abordé les questions didactiques du point de vue des apprentissages individuels, en s'inscrivant notamment dans le cadre de l'approche instrumentale développée à partir des travaux d'ergonomie cognitive. On retrouve le phénomène de convergence autour du rôle des communautés de sujets déjà pointé dans V.3. Ce n'est pas le moindre intérêt du modèle praxéologique élargi que de permettre cette rencontre en favorisant la prise en compte par la Théorie Anthropologique du Didactique des sujets, du moins des communautés stables qu'ils forment, et de leur participation à la dynamique cognitive des institutions.

Conclusion

J'ai introduit cette note en distinguant deux directions dans l'ensemble de mes travaux Les chapitres 2 et 3 où s'achève la synthèse des travaux relevant respectivement de l'une et l'autre directions ont présenté les prolongements que j'envisage d'en donner. La présente conclusion sera donc brève.

Les deux flux de recherche que j'ai présentés dans cette note sont nés d'une même problématique, celle des savoirs impliqués dans l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes de mathématiques. Ils divergent ensuite, le premier vers l'étude du travail personnel des élèves et étudiants, le second vers l'étude des processus qui constituent au niveau institutionnel les dynamiques cognitives de production et de circulation des praxéologies. Je voudrais conclure cette synthèse en envisageant une convergence possible autour d'une généralisation de la problématique des 'enjeux ignorés d'apprentissage' qui est à la base de l'intérêt pour l'étude autonome des élèves. Il s'agit de prendre en compte le fait suivant : la diffusion/transmission des praxéologies est une condition *sine qua non* de la productivité praxéologique institutionnelle, mais la transmission organisée dans des dispositifs affichant une intention didactique n'est qu'une forme possible du processus par lequel une institution peut obtenir l'assujettissement de l'action de ses sujets aux normes d'une praxéologie. Ceci est particulièrement vrai pour ce qui dans le praxéologique ne s'appuie pas sur une légitimité forgée dans un détour théorique et plus largement scientifique au sein d'institutions de recherche. Ainsi se trouve soulevée une problématique des processus ignorés de normalisation, en tant que dimension intrinsèque de la cognition institutionnelle, une problématique qui semble notamment incontournable pour l'étude de la productivité praxéologique des communautés de sujets. Et, symétriquement, les recherches évoquées dans le chapitre 2 sur le travail autonome des élèves suggèrent la nécessité de considérer la problématique duale de la sensibilité différenciée des sujets aux effets normatifs, vue tout à la fois comme une plus ou moins grande faculté à s'emparer des ressources institutionnellement mises à disposition et comme une propension plus ou moins marquée à la soumission à la *doxa*, donc peut-être un potentiel créatif plus ou moins limité.

Cette conclusion me satisfait esthétiquement en ce qu'elle rapproche les deux composantes de cette synthèse mais j'ai la lucidité d'en percevoir l'artifice : elle ne prendra réellement corps qu'investie dans des questions de recherche que je suis bien loin de pouvoir soulever maintenant. J'avais pour ce travail décidé de côtoyer parfois les limites de ma réflexion pour envisager l'avenir, c'est bien ce par quoi je termine.

Bibliographie

ADANGNIKOU N. (2007), *Une évaluation de l'efficacité de l'enseignement supérieur français : le cas des classes préparatoires scientifiques.* Thèse de doctorat : université de Bourgogne.
A. DE BEAUNE S. (2008), *L'homme et l'outil. L'invention technique durant la préhistoire.* CNRS Editions.
ALAVA S., ROMAINVILLE M (2001), Les pratiques d'étude, entre socialisation et cognition. *Revue Française de Pédagogie,* 136, 159-180.
ARTIGUE M., HOUDEMENT C. (2008), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 365-382.
BARRERE A. (1997), *Les lycéens au travail. Tâches objectives, épreuves subjectives.* Pédagogie d'aujourd'hui, PUF.
BARTOLINI BUSSI M. G., MARIOTTI M. A. (2007), Semiotic mediation in the mathematics classroom. In L. English & Al. (Eds) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). Mahvah N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.
BAUTIER E., CHARLOT B., ROCHEX J-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues… et ailleurs*. Collection Formation des enseignants, Paris : Armand Colin.
BAUTIER E., GOIGOUX R. (2004), Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue Française de Pédagogie*, 148, 89-100.
BAUTIER E., RAYOU P. (2009), *Les inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaires.* Collection : Education & Société, Paris : PUF.
BAUTIER E., ROCHEX J-Y. (1998), *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?* Collection Formation des enseignants, Paris : Armand Colin.
BESSOT A. (2011), L'ingénierie didactique au coeur de la recherche en théorie des situations didactiques. In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques* –Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009- (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
BESSOT A., LABORDE C. (2006), Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. In C. Castela & C. Houdement (Eds) *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques, Année 2005* (pp.39-76). Paris : IREM Paris 7.
BEZOL C. (2007), *Etude des difficultés rencontrées par les élèves de première S en calcul vectoriel. Etude du cas particulier de la relation de Chasles lors de la transition seconde-Première S*. Mémoire de master 2 : université Paris 7.
BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
BOSCH M., ESPINOZA L. & GASCON J. (2003), El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espóntaneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 79-136.
BOSCH M., FONSECA C., GASCÓN J. (2004), Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24(2/3), 205-250.
BOSCH M., GASCON J. (2002), Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In J-L. Dorier & Al. (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* –Corps, 21-30 Août 2001- (pp. 23-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.
BOSCH M., GASCON J. (2005), La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A.Mercier & C.Margolinas (Eds) *Actes de la 12ème école d'été de didactique des mathématiques* –Corps, 20-29 Août 2003- (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOURDIEU P. (1984), *Le sens pratique.* Paris : Editions de Minuit.
BOYER R., CORIDIAN C. (2004), Réussir en première année d'université. In E. Annoot & M-F. Fave-Bonnet (Eds) *Pratiques pédagogiques dans l'enseignement supérieur* (pp. 143-166). Paris : L'Harmattan.
BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.
BROUSSEAU, G. (1996), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise R. & Al. (Eds) *Actes de la 8ème Ecole d'été de didactique des mathématiques* –Sainte Sauves d'Auvergne, 22-31 Août 1995- (pp. 16-46). Clermont-Ferrand : IREM.
BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
BULF C. (2008), *Etude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Thèse de doctorat : Université Paris 7.
BUTLEN D., PEZARD M. (2003) Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (3), 41-78.
CAMARENA P. (1999), *Las funciones generalizadas en ingenería. Construcción de una alternativa didáctica*. Serie Investigaciones, Anuies, México.
CANTORAL R., FARFÁN R., M., LEZAMA J., MARTINEZ SIERRA G. (2006), Socioepistemología y representación: algunos ejemplos, *Relime,* 9(1), 83-102.
CARLSON M.P., BLOOM I. (2005), The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics,* 58, 45-75.
CASTELA C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 7-47.
CASTELA C. (1997), Enseignement de méthodes : propositions pour un renouvellement de la problématique à partir d'une pratique à dimension expérimentale de préparation au CAPES et de plusieurs regards théoriques. In Bailleur M. & Al. (Eds) *Actes de la 9ème école d'été de Didactique des Mathématiques* –Houlgate-19-27 Août 1999- (pp. 249-255).
CASTELA C. (2000), Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique**.** *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 331-380.
CASTELA C. (2002), *Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, Université et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles*. Cahier de Didirem n°40. Paris : IREM Paris 7.
CASTELA C. (2004), Institutions influencing Mathematics students' private work: a factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics,* 57, 33-63.
CASTELA C. (2007a), Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique. In G.Gueudet & Y.Matheron (Eds) *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques, Année 2006,* (pp.33-77). Paris : IREM Paris 7.
CASTELA C. (2007b), Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique. In Ruiz-Higueras et Al. (Eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 117-138). Jaén : publicaciones de la Universidad de Jaén.
CASTELA C. (2007c), Les ressources autodidactes en mathématiques de très bons élèves de classes scientifiques. In Penloup (Ed.) *Les connaissances ignorées. Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves* (pp.173-202). Paris : INRP.
CASTELA C. (2008a), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 28(2), 135-182.

CASTELA C. (2008b), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. In A.Rouchier et I.Bloch (Eds) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours à la 13ème école d'été de Didactique des mathématiques* (pp. 89-114). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CASTELA C. (2009a), An anthropological approach to a transitional issue: analysis of the autonomy required from mathematics students in the French Lycée. *NOMAD (Nordisk Mathematikk Didaktikk)*, 14(2), 5-27.

CASTELA C. (2009b), Au sujet de la détermination de distances inaccessibles, comparaison de plusieurs institutions d'enseignement. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds) *Actes du Colloque EMF* –Dakar 2009 : Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal. A paraître.

CASTELA C. (2010), Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs. Troisième Conférence Internationale sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Sant Hillari Sacalm, Catalogne (Espagne), 25-29 Janvier 2010. Actes à paraître.

CASTELA C., CONSIGLIERE L., GUZMAN I., HOUDEMENT C., KUZNIAK A., RAUSCHER J-C. (2006), *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français.* Cahier de Didirem Spécial n°6. Paris : IREM Paris 7.

CASTELA C., EBERHARD M. (1999), Quels types de modification du rapport mathématique en vue de la possibilité de quels gestes professionnels ? In M. Bailleul (Ed.) *Actes de la 10ème école d'été de Didactique des Mathématiques* –Houlgate, 18-25 Août 1999-, Tome I (pp. 164-172).

CASTELA C., ROMO VAZQUEZ A. (2011), Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 31(1), 79-130.

CAZES C., VANDEBROUCK F. (2008), L'activité des élèves sur les bases d'exercices en ligne. In F.Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (pp. 183-195). Toulouse : Octarès éditions.

CHARLOT B. (1997), *Du rapport au savoir. Eléments pour une théorie*. Paris : Anthropos.

CHARLOT B. (1999), *Le rapport au savoir en milieu populaire. Une recherche dans les lycées professionnels de banlieue.* Paris : Anthropos.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné (2ième édition).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73-112.

CHEVALLARD Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(3), 17-54.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. In J-L. Dorier & Al. (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* –Corps, 21-30 Août 2001- (pp. 3-22 et pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2003), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S.Maury et M.Caillot (Eds) *Rapport au savoir et didactique* (pp. 81-104). Paris : Editions Fabert ou site Yves.Chevallard.free.fr.

CHEVALLARD Y. (2007), Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruiz-Higueras & Al. (Eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría*

Antropológica de lo Didáctico (TAD) (pp. 705-746). Jaén : publicaciones de la Universidad de Jaén.
CHEVALLARD Y. (2008), Un concept en émergence dialectique : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y.Matheron (Eds) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques, 2007* (pp. 344-366). Paris : IREM Paris 7.
CHEVALLARD Y. (2010), Didactique et formation des enseignants. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_et_formation_des_enseignants-2.pdf
CHEVALLARD Y. (2011), La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques* –Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009- (pp.81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.
CIRADE G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en iufm. Les mathématiques comme problème professionnel.* Thèse de doctorat. Marseille : Université Aix-Marseille I. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709
CLOT Y. (2002), De Vygotsky à Léontiev via Bakthine. In Y.Clot (Ed) *Avec Vygotski* (pp.191-211). Paris : La Dispute.
CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(2/3), 221-270.
COVIÁN CHÁVEZ N. (2005), *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la Cultura Maya*. Tésis de Maestra en Ciencias : Cinvestav, México DF.
CUOCO A., GOLDENBERG E., MARK J. (1997), Habits of mind: an organizing principle for mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.
D'AMBROSIO U. (2007), Problem solving: a personal perspective from Brazil. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 39(5-6), 515-521.
DE CERTEAU M. (1980), *L'invention du quotidien. 1.Arts de faire*. Paris : Gallimard, Folio Essais n°146, 1990 ; rééd. 2002.
DOORMAN M., DRIJVERS P., DEKKER T., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M., DE LANGE J., WIJERS M. (2007), Problem Solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 405-418.
DORIER J-L (1997), Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels. In Dorier J-L. (Ed.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 23-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
DORIER J-L, ROBERT A., ROBINET J., ROGALSKI M. (1997), A propos du levier "méta". In Dorier J-L. (Ed.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 185-213). Grenoble : La Pensée Sauvage.
DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5-31.
DOUGLAS M. (1987), *How institutions think?* Londres : Routledge & Kigan Paul.
DREYFUS T., KIDRON I. (2006), Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26(3), 295-336.
DUVAL R. (1998), Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In J. Houdebine (Ed.) *Actes du colloque « Produire et lire des textes de démonstration »* (pp.79-98). Rennes : IRMAR.
FELIX C. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire.* Thèse de doctorat : Université d'Aix-Marseille.
FELIX C., JOSHUA S. (2002) : Le travail des élèves à la maison : une analyse didactique en termes de milieu pour l'étude. *Revue Française de Pédagogie,* 141, 89-97.

FRICKEY A., PRIMON J-L. (2004), Les bacheliers technologiques à l'université. Spirales, 33, 71-88.
GEORGET J-P. (2009), *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat : Université Paris 7.
GENESTOUX-ESMANJAUD F. (2000), *Le fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques.* Thèse de doctorat : Université de Bordeaux I.
GENESTOUX-ESMANJAUD F. (2002), Les assortiments didactiques, In J-L. Dorier & Al. (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* –Corps, 21-30 Août 2001- (pp. 177-186). Grenoble : La Pensée Sauvage.
GRENIER D. (2010), Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In L. Coulange & C. Hache (Eds) *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques, Année 2009* (pp.161-177). Paris : IREM Paris 7.
GRENIER-BOLEY N. (2009), *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de mathématiques à l'Université.* Cahier de Didirem n°59. Paris : IREM Paris 7
GRØNBÆK, N., WINSLØW, C. (2007), Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 187-220.
GUEUDET G., M-P. LEBAUD (2008), Quelle évaluation à l'université en mathématiques ? Communication au Colloque *Questions de pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*. Brest.
GUEUDET G., TROUCHE L. (2009), Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? In I.Bloch & F. Conne (Eds) *Actes de la 14ème école d'été de didactique des mathématiques* –Sainte Livrade, 18-24 Août 2007- (pp. 109-133). Grenoble : La Pensée Sauvage.
GUIN D., TROUCHE L. (Eds) (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil en instrument du travail mathématique, un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
HALMOS P. (1980), The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.
HAREL G., SOWDER L. (2005), Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its nature and Its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.
HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-115.
IANNONE P., NARDI E. (2007), The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: mathematician perspectives. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds) *Proceedings of the 5th Conference of theEuropean society for Research in Mathematics Education* (pp. 2300–2309). Disponible sur http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG14.pdf
KENT P., NOSS R. (2002) The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios, Institution of Electrical Engineers, London, January 2002,(2)* 39/1-39/7.
LAHIRE B. (2000), Savoirs et techniques intellectuelles à l'école primaire. In A.Van Zanten (Ed.) *L'école, l'état des savoirs* (pp.170-188). Paris : la Découverte.
LAKATOS I. (1984), *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Paris : Hermann.
LAZET D., OVAERT J-L. (1981), Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse. Bulletin InterIrem, Décembre 1981 (pp. 3-8).
LECOURT D. (2004), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*. Paris : Quadrige, PUF.
LITHNER J. (2003), Students'mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 29-55.

MARGOLINAS C. (2002), Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J-L. et al. (Eds) *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001-* (pp. 141-155). Grenoble : La Pensée Sauvage.
MARTIGNONE F. (2007), Mathematical background and problem solving: how does knowledge influence mental dynamics in game theory problems? In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds), *Proceedings of the 5th Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2340–2348).
Disponible sur http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG14.pdf
MAYEN P., VIDAL-GOMEL C. (2005), Conception, formation et développement des règles de travail. In P.Rabardel & P.Pastré (Eds) *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 109-128). Toulouse : Octarès Editions.
MEEHAN M. (2007), Student generated examples and the transition to advanced mathematical thinking. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds) *Proceedings of the 5th Conference of theEuropean society for Research in Mathematics Education* (pp. 2349–2358). Disponible sur http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG14.pdf
MILLET M. (2003), *Les étudiants et le travail universitaire. Etude sociologique*. Lyon : PUL.
MONTFORT V. (2000), Normes de travail et réussite scolaire chez les étudiants de première année de Sciences. *Sociétés contemporaines* 40, 57-76.
MORIN E. (1984), *Sociologie* (édition revue et augmentée par l'auteur). Collection Essais, Points. Paris : Fayard.
NOSS R., HOYLES C. (1996), *Windows on Mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
NOSS R., HOYLES C. , POZZI S. (2000), Working knowledge: Mathematics in use. In A. Bessot & J. Ridgway (Eds) *Education for Mathematics in the workplace* (pp.17-35). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
PERRIN-GLORIAN M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13 (1/2), 95-118.
PERRIN-GLORIAN M-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(3), 279-322.
PIAGET J. et GARCIA R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris : Flammarion, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
PIAN J. (1999), *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels.* Cahier de Didirem n° 34. Paris : IREM Paris 7.
PÓLYA G. (1945), *How to solve it (2è édition 1957).* Princeton : Princeton University Press.
RABARDEL P. (1995), *L'homme et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.
RAYOU P. (2004 a), Des étudiants en quête de certitude. In E. Annoot & M-F. Fave-Bonnet (Eds) *Pratiques pédagogiques dans l'enseignement supérieur. Enseigner, apprendre, évaluer* (pp. 167-182). Paris : L'Harmattan.
RAYOU P. (2004 b), Travailler à l'école, au lycée, à l'université. *Spirale*, 33, 139-151.
REMAUD P. (2004), *Une histoire de la genèse de l'automatique en France 1850-1950. De l'école de la régulation française au début du XXe siècle à l'émergence de l'automatique en France après la seconde guerre mondiale.* Thèse de doctorat : Université de Poitiers.
RESNIK L. (1988), Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R.Charles & E.Silver (Eds) *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 32-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ROBERT A., (1992), Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12(2/3), 181-220.
ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18(2), 139-190.
ROBERT A. (1999), Pratiques et formation des enseignants. *Didaskalia*, 15, 123-157.
ROBERT A. (2008), Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In F.Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (pp. 31-68). Toulouse : Octarès Editions.
ROBERT A., ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(2), 145-176.
ROBERT A., ROGALSKI M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x,* 60, 6-25.
ROBERT A., TENAUD I. (1988), Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9(1), 31-57.
ROGALSKI J. (2008a), Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In F.Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (pp. 23-57). Toulouse : Octarès Editions.
ROGALSKI J. (2008b), Mise en regard des théories de Piaget et Vygotsky sur le développement et l'apprentissage. In F.Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (pp. 431-445). Toulouse : Octarès Editions.
ROGALSKI M. (1997), L'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille. In Dorier J-L. (Ed.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 111-124). Grenoble : La Pensée Sauvage.
ROGER J-L. (2007), *Refaire son métier. Essai de clinique de l'activité*. Préface d'Y. Clot. Toulouse : Eres
ROMO VAZQUEZ A. (2009), *La formation mathématique des ingénieurs.* Thèse de doctorat : Université Paris Diderot.
ROUCHIER A. (1996), Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16, 177-196.
SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J-P., PAQUELIER Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(1), 57-90.
SALIN M-H. (2002), Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In J-L. Dorier & Al. (Eds), *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques* – Corps, 21-30 Août 2001, pp. 3-22 et pp. 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.
SAMURÇAY R., RABARDEL P. (2004), Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences, propositions. In R. Samurçay & P.Pastré (Eds), *Recherches en didactique professionnelle* (pp. 163-180). Toulouse : Octarès Editions.
SAMURÇAY R., ROGALSKI J. (1992), Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes. *Education permanente*, 111, 227-242.
SANTOS-TRIGO M. (2007), Mathematical Problem Solving: an evolving research and practice domain. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 523-536.
SARRAZY B. (1997), Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(2), 135-166.
SCHNEIDER M. (2011), Ingénieries didactiques et situations fondamentales : quel niveau praxéologique ? In C. Margolinas & Al. (Eds) *Actes de la 15ème école d'été de didactique*

des mathématiques –Clermont-Ferrand, 16-22 Août 2009-, pp.175-205. Grenoble : La Pensée Sauvage.
SCHOENFELD A.H. (1985), *Mathematical Problem Solving.* Orlando, FL : Academic Press.
SCHOENFELD A.H. (1987), What's all the fuss with metacognition ? In *Cognitive Science and mathematics education,* 189-215. Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.
SCHOENFELD A.H. (1992), Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A.Grouws (Ed.) H*andbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York : Macmillan Publishing Company
SELDEN A., SELDEN J. (2005), Perspectives on Advanced mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.
SIERPINSKA A. (2000), On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Dordrecht : Kluwer Academic publishers.
SRIRAMAN B., LESH R. (2006), Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik Mathematik,* 38(3), 247-254.
SZENDREI J. (2007), When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970-2007: research and theory, practics and politics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 443-458.
TREISMAN U. (1992), Studying students studying calculus: a look at the lives of minority mathematics students in college. *The College mathematics Journal*, 23(5), 362-372.
VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170.
VIDAL-GOMEL C., ROGALSKI J. (2007), La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *Activités, revue électronique, 4(1),* 49-84.
VYGOTSKI L. (1934, traduction 1985), *Pensée et langage.* Paris : Messidor.
WENGER E. (1998), *Community of Practice: Learning, meaning and identity*, Cambridge : Cambridge University Press.