

# Modèles de verres de spin et applications interdisciplinaires

Elia Zarinelli

March 26, 2012

## Introduction

Le domaine théorique des verres de spins a été initié en 1975 d'après le travail de Samuel Edwards et Philip Anderson (EA) [1]. Le but de leur étude était d'introduire un modèle pour la description des mélanges dilués magnétiques, classés quelques années auparavant sous le nom de verres de spin.

Pendant la même année, David Sherrington et Scott Kirkpatrick [2], promus par les idées introduites par E-A, étudièrent la limite de champ moyen d'un verre de spin. Hélas, l'approximation de champ moyen, amenait à une entropie négative et ils en conclurent cete limite était mal définie pour cette classe de modèles. Quelques années plus tard, dans une série de travaux inspirés [3, 4], Giorgio Parisi introduisait l'idée et le schéma de Brisure de Symétrie des Répliques complète pour étudier les modèles de verres de spins en champ moyen, qui a permis de résoudre l'incohérence d'une entropie négative et déployé les propriétés physiques de la phase de verre de spins [5]. La stabilité de l'entropie du modèle en champ moyen est obtenue dans la limite d'un nombre infini de brisures de symétrie de répliques dans le schéma proposé par Parisi.

Pendant les années quatre-vingt la solution du modèle de Sherrington et Kirkpatrick (SK) a été revisitée. Beaucoup d'efforts ont été dévoués à l'introduction de modèles de verre de spins qui partageaient les mêmes caractéristiques ou des similarités avec le modèle SK. En 1981, Bernard Derrida introduisait le Random Energy Model [6], suivi par la définition en 1984 du modèle  $p$ -spin, une généralisation du modèle SK, étudiée en grand détail par David Gross et Marc Mézard [7]. Ces deux

derniers modèles, en particulier, sont exactement solubles à travers de l'introduction d'une Brisure de Symétrie des Répliques à un niveau (*one step replica symmetry breaking*). On peut donc classer les modèles de verres de spins dans deux catégories, en fonction du schéma de brisure de symétrie qui rend la solution respective stable: 1RSB et fRSB.

En 1987 Theodore Kirkpatrick et Peter Wolynes remarquaient une analogie entre la phénoménologie des verres de spins 1RSB (définis en champ moyen) et la phénoménologie des liquides surfondus (en dimension finie) [8]. Pendant les années qui suivirent, dans une série de travaux remarquables [9, 10, 11, 12], Kirkpatrick, Thirumalai et Wolynes atteignent une profonde compréhension de cette classe des modèles de verres de spin et introduisent la "Random first Order Theory" pour la transition vitreuse.

D'après le succès de la théorie des verres de spin dans les études des mélanges dilués magnétiques et des liquides surfondus, pendant les années plus récentes, la théorie des verres de spins a trouvé des nouveaux succès dans l'étude de different système physique. Nous dressons simplement une liste:

- Colloidal dispersions [13]
- Quantum glasses [14]
- Random lasers [15]
- Granular materials [16]
- Biological systems [17]

Les problèmes d'optimisation combinatoire sont un dernier exemple des problèmes qui peuvent être étudiés par le langage des verres de spins [18]. Les algorithmes qui sont utilisés pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire présentent une transition easy/hard. Cette transtion a été donc étudiée par des utiles typiques des transitions de phase de la mécanique statistique des systèmes désordonnés [19, 20, 21]. Vice-versa, des algorithmes d'optimisation combinatoire ont été utilisés par les physiciens pour étudier les propriétés du niveau fondamental de systèmes désordonnés.

Le travail présenté dans mon manuscrit de thèse s'inscrit dans le cadre de la recherche théorique des verres des spins et des applications interdisciplinaires. Nous

utilisons des idées récentes dans le cadre de la théorie des verres de spin pour étudier la phase de basse température des liquides surfondus [22]. Des résultats récents de la théorie des matrices aléatoires et de la statistique des valeurs extrêmes nous permettent d'investiguer des aspects des verres de spin [23, 24]. Enfin, d'après la théorie des verres de spins et de l'optimisation combinatoire, nous proposons un nouvel algorithme pour investiguer des problèmes d'inspiration financière [25].

## 1 Partie I: Modèles de verres de spin et transition vitreuse

Si on refroidit un liquide au dessus de sa température de fusion on obtient un liquide surfondu métastable. Si l'on diminue encore la température, la viscosité du liquide augmente rapidement jusqu'à ce que le liquide ne coule plus du tout (tout du moins sur la durée de l'expérience). Plus généralement, ce sont tous les temps principaux de relaxation, caractéristiques du liquide, qui croissent jusqu'à dépasser le temps de l'expérience. Le liquide est alors hors d'équilibre : il apparaît figé, toute réorganisation structurale étant interdite aux échelles de temps considérées. Le liquide est alors amorphe, c'est-à-dire sans ordre à longue portée comme dans un cristal: on l'appelle un verre.

Dans un liquide simple, c'est-à-dire à pression atmosphérique et entre les points de fusion et d'ébullition, le temps caractéristique de relaxation vers l'équilibre est de l'ordre de la picoseconde ( $10^{-12}s$ ). A la transition vitreuse, pour une température  $T_g$  définie arbitrairement comme la température à laquelle le temps caractéristique de relaxation devient de l'ordre de la durée de l'expérience (typiquement  $10^3s$ ), ceci a augmenté d'environ 15 ordres de grandeurs alors que la température a peu diminué (typiquement d'un facteur 2). Les données expérimentales présentées dans la figure 1 peuvent être décrites de différentes manières, mais, le plus souvent, elles sont ajustées sur la loi empirique de Vogel-Fulcher-Tammann:

$$\tau(T) = \tau_0 \exp\left(\frac{DT}{T - T_0}\right) \quad (1)$$

Cette forme présuppose l'existence d'une divergence du temps de relaxation pour  $T = T_0$ , ce qui traduirait l'existence d'une transition de phase vers un verre idéal, c'est-à-dire un solide, à l'équilibre, mais dont l'ordre ne serait pas cristallin.

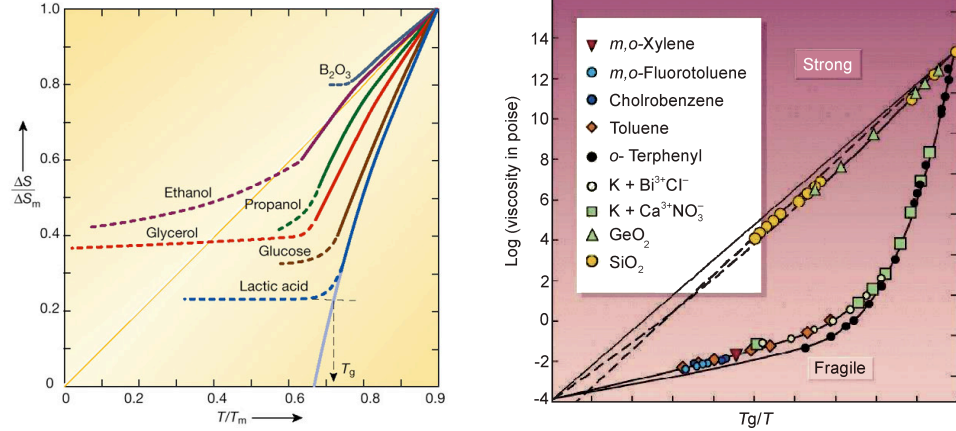


Figure 1: Gauche: evolution avec la température de la différence d'entropie entre différents liquides surfondus et leur cristal associé.  $\Delta S_m$  et  $T_m$  sont la différence d'entropie et la température au point de fusion [26]. Droite: Diagramme d'Arrhenius du temps de relaxation pour différents types de liquides surfondus [27]

Parmi toutes les quantités statiques d'équilibre, l'entropie est la seule à varier de manière significative entre la température de fusion  $T_m$  et  $T_g$ . En effet, l'entropie du liquide surfondu décroît plus rapidement que celle du cristal lorsque la température diminue. Pour les liquides "fragiles", une extrapolation des données conduit à l'annulation de la différence d'entropie (parfois aussi appelée "entropie de configuration"),  $\Delta S = S_{\text{liquide}} - S_{\text{cristal}}$ , pour une température non nulle  $T_K$ , appelée température de Kauzmann (voir la figure 1).

Par analogie avec le ralentissement critique des transitions de phase du second ordre, il est tentant d'associer la divergence (supposée) du temps de relaxation à une divergence des corrélations spatiales dans le liquide surfondu. N'ayant jusqu'alors jamais été observés expérimentalement, les changements structuraux correspondants sont probablement subtils et donc difficiles à déceler.

L'idée d'une "transition vitreuse idéale", renforcée par le comportement singulier de  $\Delta S$  et des grandeurs dynamiques à  $T_0 \sim T_K$ , suggère de possibles analogies avec les transitions de phase dans les verres de spin méritent d'être étudiées. Kirkpatrick, Thirumalai et Wolynes ont avancé l'idée que les modèles généralisés de verres de spin, comme les verres de Potts ou les systèmes avec interactions aléatoires à  $p$  spins ( $p \geq 3$ ), seraient de meilleurs candidats [8]. Par exemple, les modèles avec

interactions aléatoires à  $p$  spins sont définis par le Hamiltonien suivant:

$$H = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} J_{i_1 i_2 \dots i_p} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_p} \quad (2)$$

où les  $s_i$  sont des variables d'Ising ( $s_i = \pm 1$ ) placées sur les sites d'un réseau et où les interactions  $J_{i_1 i_2 \dots i_p}$  sont des variables aléatoires gelées (sans équilibration thermique) qui peuvent prendre des valeurs positives et négatives selon une loi de probabilité donnée. Le comportement de ces systèmes, tout du moins lorsqu'ils sont étudiés dans la limite du champ moyen où la portée des interactions est infinie, présente certaines similitudes avec la phénoménologie des liquides surfondus.

Kirkpatrick et Wolynes ont proposé une approche phénoménologique se proposant cependant d'aller au-delà du champ moyen en introduisant les notions de "gouttelettes entropiques" et de "mosaïque" [12]. Recentement, une réinterprétation de la mosaïque, des gouttelettes entropiques et de leur taille a été proposée [28]. En effet, en gelant le système à l'exception d'une région (sphérique) de taille  $R$  choisie, la partie gelée va exercer un champ extérieur sur le liquide de la région sphérique, favorisant l'état initial au sein de cette dernière. On s'attend à ce qu'en fonction du rayon  $R$  de la sphère, le système au sein de la partie sphérique soit reste piégé dans l'état métastable d'origine pour  $R < \xi$  (le gain entropique est alors inférieur au coût énergétique pour s'adapter à la frontière gelée), soit relaxe en ayant accès à une multitude d'états métastables, ce qui va permettre une réorganisation pour  $R > \xi$  (le gain entropique domine). L'intérêt de cette reformulation réside dans l'origine plus claire de l'organisation en mosaïque de gouttelettes, mais surtout dans la possibilité de pouvoir calculer de manière analytique (dans certains modèles [29]) et numérique (dans les systèmes vitreux [30]) la longueur  $\xi$  via l'introduction de fonctions de corrélation d'ordre élevé, de type *point-to-set*.

Les fonctions de corrélation *point-to-set* ont été introduites en géométrie sphérique. Dans notre travail nous avons considéré une nouvelle géométrie, qu'on a nommé géométrie à "sandwich" (figure 2). Nous avons étudié un modèle de verre de spin avec interaction de Kac dans le cadre de cette géométrie. Nous avons défini et étudié les fonctions de corrélation *point-to-set*. La géométrie à sandwich nous permet aussi de définir et mesurer une énergie libre que le système doit payer pour mettre des états métastable à une distance  $d$ . Nous avons interprété cette énergie libre comme une tension de surface. Les résultats de notre travail sont présentés dans le chapitre 2 de la thèse et sont publiés dans [22].

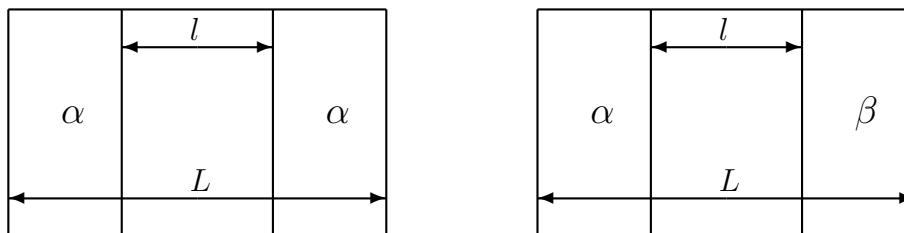


Figure 2: La geometrie à sandwich avec conditions au bord  $\alpha\alpha$  et  $\alpha\beta$ .

## 2 Partie II: Modèles de verres de spin et statistique des valeurs extrêmes

La statistique des valeurs extrêmes ou Extreme Value Statistics (EVS) décrit les fluctuations d'une distribution de probabilité loin de sa moyenne. Elle modélise la probabilité que des événements extrêmes et rares se produisent, dans des contextes très variés comme les tremblements de terre, les inondations, la statistique des records humains, les mutations génétiques ou encore les risques liés aux variations de prix sur les marchés financiers. Ces nombreuses applications en font un domaine de recherche très important.

Dans ce contexte, une question particulièrement intéressante est de savoir quelle est la distribution du maximum d'un ensemble de variables aléatoires  $x_1, \dots, x_n$ . Dans le cas où les variables sont indépendantes identiquement distribuées (iid), on sait que la distribution du maximum dans la limite  $N \rightarrow \infty$  tombe dans l'une des trois classes d'universalité connues sous le nom de Gumbel, Fréchet et Weibull.

Les valeurs propres d'une matrice aléatoire sont des variables aléatoires fortement corrélées, la valeur propre maximale ne tombe donc pas dans l'une des classes d'universalité présentées ci-dessus. En 1994, la célèbre loi de Tracy-Widom pour les matrices aléatoires gaussiennes a été dérivée. Cette loi dit que la distribution de la valeur propre maximale d'une matrice aléatoire gaussienne ou de Wishart tend vers une loi dite de Tracy-Widom quand  $N \rightarrow \infty$ .

La distribution de Tracy-Widom a été démontré être la distribution limite qui décrit les fluctuations d'un grand nombre d'observables physiques dans différents modèles et systèmes physiques. Nous dressons simplement une liste:

- Longest Increasing Subsequence of random permutations [31]

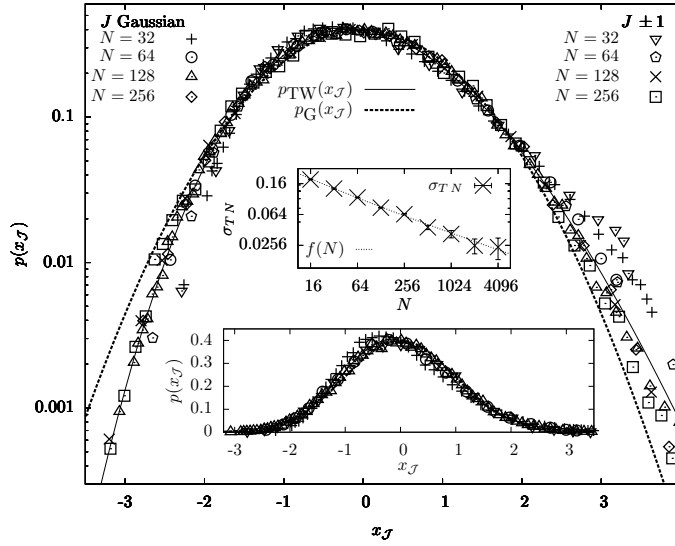


Figure 3: Distribution de probabilité de la pseudo-température critique du modèle de Sherrington et Kirkpatrick.

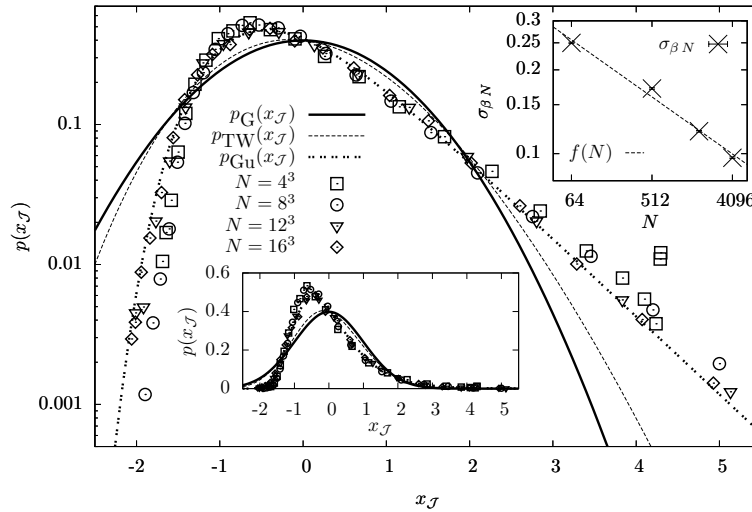


Figure 4: Distribution de probabilité de la pseudo-température critique du modèle d'Edward et Anderson.

- Longest Common Subsequence problem [32]
- directed polymers [33]
- polynuclear growth models [34]
- ballistic deposition models [32]
- equation de Kardar-Parisi-Zhang [35, 36]
- turbulent liquid crystal growth [37, 38]
- Anderson insulators [39, 40]
- random lasers [41]

Si on considère un système de taille infinie, une transition de phase peut être caractérisée par un comportement non analytique des fonctions thermodynamiques. Par contre, si on considère une simulation numérique, la taille du système est toujours finie. Les comportements non analytiques des fonctions thermodynamiques sont supprimés par des maxima. On peut définir une température pseudo-critique du système comme la température en correspondance du maximum. Si on considère un système désordonné, la température pseudo-critique est une variable aléatoire qui dépendra de la réalisation du désordre.

Dans notre travail nous avons étudié les fluctuations de la température pseudo-critique pour des modèles de verres de spin. Nous avons considéré une approche analytique pour étudier les fluctuations de la température pseudo-critique pour le modèle de Sherrington et Kirkpatrick. Les fluctuations suivent la loi de Tracy et Widom. Nous avons considéré une approche numérique pour étudier les fluctuations de la température pseudo-critique pour le modèle de Sherrington et Kirkpatrick et pour le modèle d'Edwards et Anderson. Les fluctuations suivent la loi de Tracy et Widom pour le premier et la loi de Gumbel pour le deuxième. Nous proposons une explication en fonction de fluctuations de la température critique locale pour le deuxième. Les résultats de notre travail sont présentés dans les chapitres 4 et 5 de la thèse et sont publiés dans [23, 24].



## References

- [1] Edwards, S. F. & Anderson, P. W. Theory of spin-glasses. *J. Phys. F* **5**, 965–974 (1975).
- [2] Sherrington, D. & Kirkpatrick, S. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792–1796 (1975).
- [3] Parisi, G. The order parameter for spin glasses: A function on the interval 0-1. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13**, 1101 (1980).
- [4] Parisi, G. Order parameter for spin-glasses. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1946–1948 (1983).
- [5] Mézard, M., Parisi, G. & Virasoro, M. A. *Spin-Glass Theory and Beyond*, vol. 9 of *Lecture Notes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [6] Derrida, B. Random-energy model: An exactly solvable model of disordered systems. *Physical Review B* **24**, 2613 (1981).
- [7] Gross, D. & Mézard, M. The simplest spin glass. *Nuclear Physics B* **240**, 431–452 (1984).
- [8] Kirkpatrick, T. & Wolynes, P. Connections between some kinetic and equilibrium theories of the glass transition. *Phys. Rev. A* **35**, 3072 (1987).
- [9] Kirkpatrick, T. & Wolynes, P. Stable and metastable states in mean-field potts and structural glasses. *Physical Review B* **36**, 8552 (1987).
- [10] Kirkpatrick, T. & Thirumalai, D. Mean-field soft-spin potts glass model: Statics and dynamics. *Physical Review B* **37**, 5342 (1988).
- [11] Thirumalai, D. & Kirkpatrick, T. Mean-field potts glass model: Initial-condition effects on dynamics and properties of metastable states. *Physical Review B* **38**, 4881 (1988).
- [12] Kirkpatrick, T., Thirumalai, D. & Wolynes, P. Scaling concepts for the dynamics of viscous liquids near an ideal glassy state. *Physical Review A* **40**, 1045 (1989).
- [13] Dawson, K., Foffi, G., Sciortino, F., Tartaglia, P. & Zaccarelli, E. Mode-coupling theory of colloids with short-range attractions. *Journal of Physics: Condensed Matter* **13**, 9113 (2001).

- [14] Mueller, M. & Ioffe, L. Glass transition and the coulomb gap in electron glasses. *Physical review letters* **93**, 256403 (2004).
- [15] Angelani, L., Conti, C., Ruocco, G. & Zamponi, F. Glassy behavior of light. *Physical review letters* **96**, 65702 (2006).
- [16] Mehta, A. *Granular Matter: an interdisciplinary approach* (Springer, 1994).
- [17] Amit, D. *Modeling brain function: The world of attractor neural networks* (Cambridge Univ Pr, 1992).
- [18] Mezard, M. & Montanari, A. *Information, physics, and computation* (Oxford University Press, USA, 2009).
- [19] Monasson, R., Zecchina, R., Kirkpatrick, S., Selman, B. & Troyansky, L. Determining computational complexity from characteristic 'phase transitions'. *Nature* **400**, 133–137 (1999).
- [20] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. & Vecchi, M. Optimization by simulated annealing. *science* **220**, 671 (1983).
- [21] Mézard, M., Parisi, G. & Zecchina, R. Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems. *Science* **297**, 812 (2002).
- [22] Zarinelli, E. & Franz, S. Surface tension in kac glass models. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2010**, P04008 (2010).
- [23] Castellana, M. & Zarinelli, E. Role of tracy-widom distribution in finite-size fluctuations of the critical temperature of the sherrington-kirkpatrick spin glass. *Physical Review B* **84**, 144417 (2011).
- [24] Castellana, M., Decelle, A. & Zarinelli, E. Extreme value statistics distributions in spin glasses. *Physical Review Letters* **107**, 275701 (2011).
- [25] Mastromatteo I., Z. E. & M., M. Reconstruction of financial networks for robust estimation of systemic risk. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2012**, P03011 (2012).
- [26] Kauzmann, W. The nature of the glassy state and the behavior of liquids at low temperatures. *Chemical Reviews* **43**, 219–256 (1948).
- [27] Debenedetti, P., Stillinger, F. *et al.* Supercooled liquids and the glass transition. *Nature* **410**, 259–267 (2001).

- [28] Bouchaud, J. & Biroli, G. On the adam-gibbs-kirkpatrick-thirumalai-wolynes scenario for the viscosity increase in glasses. *The Journal of chemical physics* **121**, 7347 (2004).
- [29] Franz, S. & Montanari, A. Analytic determination of dynamical and mosaic length scales in a kac glass model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **40**, F251 (2007).
- [30] Biroli, G., Bouchaud, J., Cavagna, A., Grigera, T. & Verrocchio, P. Thermodynamic signature of growing amorphous order in glass-forming liquids. *Nature Physics* **4**, 771–775 (2008).
- [31] Baik, J., Deift, P. & Johansson, K. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *JOURNAL-AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* **12**, 1119–1178 (1999).
- [32] Majumdar, S. & Nechaev, S. Exact asymptotic results for the bernoulli matching model of sequence alignment. *Physical Review E* **72**, 020901 (2005).
- [33] Johansson, K. Shape fluctuations and random matrices. *Communications in mathematical physics* **209**, 437–476 (2000).
- [34] Prähofer, M. & Spohn, H. Universal distributions for growth processes in  $1+1$  dimensions and random matrices. *Physical review letters* **84**, 4882–4885 (2000).
- [35] Sasamoto, T. & Spohn, H. One-dimensional kardar-parisi-zhang equation: An exact solution and its universality. *Physical review letters* **104**, 230602 (2010).
- [36] Calabrese P. et al. Exact solution for the kardar-parisi-zhang equation with flat initial conditions. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 250603 (2011).
- [37] Takeuchi, K. & Sano, M. Universal fluctuations of growing interfaces: evidence in turbulent liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230601 (2010).
- [38] Takeuchi, K., Sano, M., Sasamoto, T. & Spohn, H. Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invariance. *Scientific Reports* **1** (2011).
- [39] Somoza, A., Ortuno, M. & Prior, J. Universal distribution functions in two-dimensional localized systems. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 116602 (2007).
- [40] Monthus, C. & Garel, T. Statistics of the two-point transmission at anderson localization transitions. *Physical Review B* **79**, 205120 (2009).

- [41] Fridman, M., Pugatch, R., Nixon, M., Friesem, A. & Davidson, N. Measuring maximal eigenvalue distribution of wishart random matrices with coupled lasers. *Arxiv preprint arXiv:1012.1282* (2010).