



**HAL**  
open science

# Modélisation d'un contact dynamique non-linéaire : application au développement et à l'optimisation de modalsens

Seydou Dia

► **To cite this version:**

Seydou Dia. Modélisation d'un contact dynamique non-linéaire : application au développement et à l'optimisation de modalsens. Autre. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2010. Français. NNT : 2010MULH4991 . tel-00683067

**HAL Id: tel-00683067**

**<https://theses.hal.science/tel-00683067>**

Submitted on 27 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2010

# THESE

Présentée pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE HAUTE ALSACE**

Discipline : Mécanique

Par

Seydou DIA

**MODÉLISATION D'UN CONTACT DYNAMIQUE NON-LINEAIRE. APPLICATION AU DÉVELOPPEMENT ET A L'OPTIMISATION DE MODALSENS.**

Soutenance publique le 7 Décembre 2010 devant le jury composé de :

Philippe KAPSA	Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
Didier MARQUIS	INSA de Toulouse	Rapporteur
Mohamed EL MANSORI	ENSAM Châlons	Examineur
Artan SINOIMERI	Université de Haute Alsace	Examineur
Stéphane FONTAINE	Université de Haute Alsace	Directeur de thèse
Marc RENNER	INSA de Strasbourg	Directeur de thèse

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique Textiles (LPMT, EAC 7189 CNRS) de l'université de Haute-Alsace (UHA).

Mes remerciements vont en premier lieu à la Région Alsace et la CAMSA pour avoir financé ce travail de thèse.

Je ne pourrais exposer les résultats de ce travail sans remercier M. Jean-Yves Dréan, Directeur du Laboratoire de Physique et Mécanique Textiles et M. Gérard Binder, Directeur de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs Sud Alsace, pour m'avoir donné les moyens de travailler dans de bonnes conditions.

J'exprime une profonde gratitude et de très sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse, M. Stéphane Fontaine et M. Marc Renner pour tous les encouragements, leur motivation, leur aide, leurs conseils avisés, leur disponibilité et aussi le cadre agréable qu'ils ont su instaurer pour que ce travail de thèse se déroule dans les meilleures conditions. Je tenais à saluer leur professionnalisme, leur enthousiasme et leur dynamisme qui m'ont permis de vivre une expérience professionnelle très enrichissante.

Je remercie aussi tous les personnels du LPMT, de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Sud Alsace, qui ont rendu possible la réalisation de ce travail avec un minimum de difficultés.

Je tiens également à remercier tous les employés du LPMT pour leur gentillesse et leur gaieté ces trois années de thèse.

Que les membres du jury trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'apprécier ce travail de recherche.



# Table des matières

Introduction Générale .....	3
1	
Etat de l'art.....	6
1.1 Introduction.....	7
1.2 Tribologie et structure .....	7
1.3 Frottement sec et Instabilités vibratoires.....	18
1.4 Introduction au <i>Nonlinear Time series analysis</i> .....	27
1.5 Recurrence plot, construction et quantification.....	39
1.6 Modélisation.....	43
1.7 Introduction aux systèmes de Filippov [FA88].....	55
1.8 Conclusion du chapitre.....	60
2	
Démarche expérimentale.....	62
2.1 Introduction.....	63
2.2 Démarche expérimentale.....	63
2.3 Résultats.....	73
2.4 Modélisation du contact fibreux.....	97
2.5 Résultats du modèle de contact fibreux.....	101
2.6 Conclusion du chapitre.....	105
3	
Discussion.....	107
3.1 Introduction.....	108
3.2 Rappel de la démarche expérimentale.....	108
3.3 Campagne n°1 .....	109
3.4 Campagne n°2.....	115
3.5 Conclusion du chapitre.....	127
Conclusions et Perspectives .....	129
Références bibliographiques.....	132
Liste des Figures .....	137
Liste des Tableaux .....	139
Annexe A .....	140
Annexe B .....	149
Annexe C.....	150

## **Introduction Générale**

Le domaine de l'analyse non-linéaire, s'il possède une base théorique solide, est encore un domaine en pleine évolution. Les progrès récents le prouvent, la compréhension du comportement dynamique des systèmes avec la prise en compte des phénomènes non-linéaires a permis de mieux appréhender et de prévoir de façon efficace le comportement des structures complexes.

Dans la nature, les phénomènes linéaires sont l'exception ; rares sont les systèmes réels obéissant exclusivement à des lois linéaires. A l'opposé, les non-linéarités sont impliquées dans tous les processus naturels (réaction chimique, mécanique, économie, etc.). Les systèmes frottant en sont un des exemples les plus courants, avec des applications très variées. Dans les systèmes de freinage, le frottement se trouve être à l'origine de nombreux problèmes d'instabilités. Les types d'instabilités auxquelles on a affaire dans ce cas sont celles des vibrations induites par le frottement. C'est justement sur ces instabilités que repose le principe *Modalsens*, un capteur (une lamelle) vient frotter sur un échantillon et ce frottement génère la vibration de la lamelle.

Ce projet a vu le jour en Septembre 2006 quand Marc Renner a lancé le projet « Modélisation du Chaos » en projet pour les élèves ingénieurs de 3<sup>ème</sup> année de l'Ensisa. Avec Mlle Akhazzane nous avons relevé le défi et pour moi ça sera le début de cette longue coopération avec Marc Renner et Stéphane Fontaine.

Le sujet relève de la tribologie et de l'analyse non-linéaire du signal. De nombreux travaux en cours au niveau international sur cette thématique, par ce travail de thèse nous participons à faire du LPMT un laboratoire en phase avec les problématiques scientifiques internationales actuelles.

Les travaux de recherche ici présentés ont pu voir le jour grâce à un financement conjoint de la Région Alsace et de la M2A (ex Camsa). A ce titre nous remercions encore une fois ces deux organismes.

Le sujet de cette thèse s'inscrit donc dans cette optique : mettre en place des méthodes d'analyse non-linéaires pour permettre de mieux appréhender l'analyse du comportement dynamique de *Modalsens* et de dégager de nouveaux estimateurs pour la caractérisation des surfaces textiles. Ainsi l'objectif principal de cette thèse consiste à définir des outils d'analyse du signal non-linéaire qui permettent de donner un nouveau point de vue quant à l'approche de la méthode *Modalsens*.

Aussi, le travail réalisé dans le cadre de cette thèse de doctorat peut se résumer en 3 approches :

- Une synthèse bibliographique.
- Une approche expérimentale.
- Une modélisation du contact fibreux.

Le Chapitre 1 est une synthèse bibliographique, elle consiste à rappeler dans un premier temps les notions de la science de la tribologie et d'évoquer les problèmes inhérents à la caractérisation des surfaces. Nous abordons ensuite la problématique de la tribologie dans les textiles, donnant ainsi le cadre du développement du projet *Modalsens*. Après cette partie consacrée à la tribologie textile, nous abordons les phénomènes d'instabilité de contact, plus particulièrement des instabilités

vibratoires engendrées par le frottement sec. Après un tour d'horizon des instabilités les plus communément rencontrées, nous précisons l'objectif de notre travail, à savoir : est-il possible de détecter ces instabilités, les mesurer afin d'en faire de nouveaux estimateurs quant à la caractérisation des étoffes ? Partant de là, nous abordons les outils nécessaires en traitement du signal non-linéaire, mais avant nous faisons une introduction de la dynamique non-linéaire et partant des travaux de Poincaré nous guiderons le lecteur dans la reconstruction des espaces de phase. Ces espaces de phases seront les principales lunettes à travers desquelles nous observerons le signal engendré par le capteur *Modalsens*, aussi donnerons-nous les outils et moyens existants pour traiter et analyser ces espaces afin d'en tirer des grandeurs significatives pour pouvoir comparer les différents échantillons entre eux.

Au Chapitre 2 nous abordons l'approche expérimentale ; elle sera basée sur une variété de matériaux fibreux (toiles, sergés, papiers, cuirs, etc.) choisis en fonction de leurs propriétés mécaniques. Après une présentation des échantillons et des critères qui ont guidé leur choix, nous exposons le mode opératoire que nous avons suivi. Ainsi nous donnons les outils qui nous ont permis de reconstruire l'espace de phase mais aussi de les quantifier et d'en tirer des statistiques.

Nous commencerons à aborder la modélisation du contact fibreux déjà dans la synthèse bibliographique, en faisant un état de l'art des modèles existant ainsi que de leurs limites ou inadéquation avec le milieu fibreux. Nous introduirons par la suite une classe de systèmes mathématiques particuliers : les systèmes de Filippov, anticipant ainsi la problématique de la résolution de notre modèle du contact fibreux.

Enfin, dans le Chapitre 3, nous discuterons dans le dernier chapitre les résultats obtenus au terme des deux campagnes expérimentales. Nous y ferons, en outre, l'analyse des premiers résultats que nous tirons de notre modèle du contact fibreux.

# 1

# Etat de l'art

## Sommaire

1.1	Introduction.....	7
1.2	Tribologie et structure.....	7
1.2.1	Histoire et développement de la tribologie.....	7
1.2.2	Surface, coefficient de frottement, rugosité et adhésion.....	9
1.2.3	Le textile et la problématique de la tribologie.....	13
1.2.4	Le dispositif <i>Modalsens</i> .....	15
1.3	Frottement sec et Instabilités vibratoires.....	18
1.3.1	Présentation des instabilités approche théorique.....	19
1.3.2	Conclusion, application à <i>Modalsens</i> et à la tribologie des matériaux fibreux.....	27
1.4	Introduction au <i>Nonlinear Time series analysis</i> .....	27
1.4.1	Introduction.....	28
1.4.2	Système dynamique et dynamique non-linéaire.....	29
1.4.3	Espace de phase à partir de données chronologiques.....	33
1.5	Recurrence plot, construction et quantification.....	39
1.5.1	Recurrence <i>Plots</i> .....	39
1.5.2	Recurrence quantification analysis.....	41
1.6	Modélisation.....	43
1.6.1	Etat de l'art, quelques modèles de contact dynamique.....	43
1.6.2	Vers une modélisation du contact fibreux.....	48
1.7	Introduction aux systèmes de Filippov [FA88].....	55
1.7.1	Méthodes de résolution du système de Filippov.....	58
1.7.2	La méthode dite <i>The event driven simulated method</i> .....	58
1.7.3	Application sur un exemple simple.....	59
1.7.4	Conclusion sur les systèmes de Filippov et <i>The event-driven simulated method</i> .....	60
1.8	Conclusion du chapitre.....	60

## 1.1 Introduction

Dans ce Chapitre nous commençons par revenir sur l'histoire de la Tribologie et le rappel des concepts fondamentaux. A partir de là nous abordons la Tribologie du point de vue des sciences textiles et plus particulièrement de la problématique *Modalsens*. Nous présentons ensuite un résumé des instabilités dues au frottement les plus courantes, ce qui nous permettra de placer *Modalsens* dans le cadre de ce travail et donnera l'objectif des outils issus de la dynamique non-linéaire que nous présentons par la suite.

Nous introduirons ensuite la dynamique non-linéaire repartant des travaux de Poincaré jusqu'à ses ultimes développements. De là nous aborderons l'ensemble des outils de la *Nonlinear Time Series Analysis* (NTSA) avant de finir par le théorème de Takens [Tak81].

Une fois que nous aurons vu comment reconstruire un espace de phase à partir de données expérimentales, nous verrons comment l'analyser et en tirer des statistiques significatives. A cet effet nous verrons les *Recurrence Plot* (RP) et la *Recurrence Quantification Analysis* (RQA).

Enfin pour clore ce chapitre nous abordons la modélisation du contact fibreux et des outils nécessaires à la résolution d'une classe particulière de systèmes : Les systèmes de Filippov [FA88], par des méthodes hybrides.

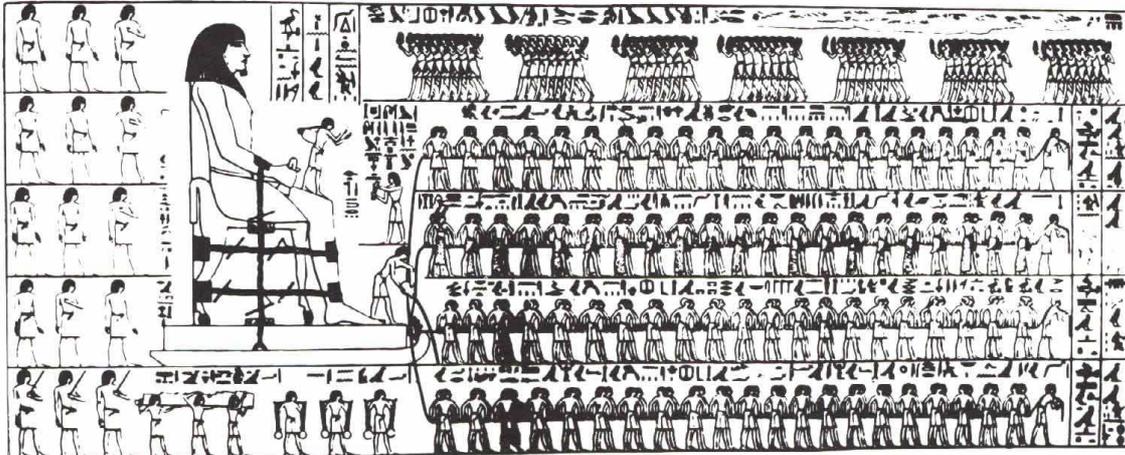
## 1.2 Tribologie et structure

### 1.2.1 Histoire et développement de la tribologie

Dans cette première partie nous présentons un état de l'art de la Tribologie; nous aborderons notamment les différents courants de pensée que nous avons identifiés au cours de l'histoire de cette science. Nous discuterons de l'évolution de cette science en Europe où elle a connu ses développements majeurs; en effet si pendant très longtemps les traités de mécanique rationnelle se sont bornés à étudier des systèmes matériels dénués de tout frottement Joseph Louis Lagrange (1736-1816) puis Paul Painlevé [Pai95], et son célèbre paradoxe éponyme, ont été les premiers à sentir la nécessité d'une théorie générale pour les systèmes doués de frottement. Nous citerons aussi les travaux plus récents de Bowden et Tabor [BTB73], Rabinowicz [Rab58] et Persson [PT96] montrant ainsi les développements actuels dans un domaine en perpétuel évolution.

*"Aux environs de 500.000 avant J.-C., les premiers humains apprirent qu'en frottant énergiquement deux bouts de bois, ils pouvaient créer du feu. Autour de 3500 avant JC, nous apprîmes que le mouvement de roulement nécessite moins d'effort que celui du glissement, ainsi fut créée la roue. Nous apprîmes alors que l'application de certaines substances, comme les graisses animales, pouvait faire que les roues des chariots tournent plus facilement. Ainsi les essieux ne chauffaient plus ni ne s'usaient comme auparavant. Cependant, notre compréhension de ces phénomènes restaient anecdotiques, sans aucune connaissance fondamentale des phénomènes physiques impliqués."*

Ainsi s'exprimait Bob Gresham, Directeur du Développement Personnel de la Society of Tribologists and Lubrication Engineers, dans un article paru dans la revue *Tribology & lubrication technology*, en Juin 2005 [Gre05].



**Figure 1.1** : Utilisation d'un lubrifiant pour le déplacement d'une statue, El-Bersheh, 1880 av J-C.

La tribologie, telle qu'on la conçoit de nos jours, est une science complexe tant par ses effets dans la nature que ses causes. De tout temps on a cherché à comprendre ces phénomènes, avec plus ou moins de succès. C'est aux Anglais Bowden et Tabor [BTB73] que l'on doit d'avoir énoncé pour la première fois des idées claires sur le sujet, mais il est intéressant de considérer les cheminements intellectuels qui ont été suivis au cours des siècles.

Pendant la Renaissance, Leonard De Vinci (1452-1519) a commencé à étudier la nature du frottement, C'est ainsi qu'en 1495, il a formulé les premières lois fondamentales du frottement:

- les forces de frottement varient en proportion des forces normales aux surfaces en contact,
- elles sont indépendantes de l'aire apparente de contact des surfaces en présence,

Pendant des années, il n'a jamais obtenu de crédit pour ces travaux, d'autant plus que rien n'a été formellement publié.

Ce n'est que quelques 200 ans plus tard, en 1699, que Guillaume Amontons [Amo99] redécouvre ces lois fondamentales et en déduit que la friction est principalement le résultat du travail effectué pour soulever une première surface sur la rugosité de la deuxième, en d'autres termes c'est le travail résultant de la déformation et de l'usure des surfaces.

Toutefois, il a fallu attendre que Charles Auguste Coulomb (1736-1806) raffine ces concepts en 1785, pour que la première loi de friction, connue sous le nom de la loi Amontons-Coulomb, soit formalisée telle que nous la connaissons aujourd'hui. Cette loi stipule que la force de frottement est proportionnelle à la force de compression. Bien que cette loi reste valable pour plusieurs combinaisons de matériaux différents, elle n'en est pas pour autant une loi fondamentale, en effet elle est mise en défaut dès que l'on a affaire à de grandes échelles.

Sir Isaac Newton (1642-1727), alors qu'il travaillait sur les principes fondamentaux du mouvement, a ajouté que le frottement dynamique est indépendant de la vitesse; il a ainsi formulé une loi supplémentaire du frottement, même si des travaux ultérieurs prouveront que celle-ci ne s'applique pas toujours.

Phillip Bowden et Tabor David [BTB73] ont donné une explication physique pour les lois de frottement observées. Ils ont établi que la surface réelle de contact, qui dépend des aspérités à la surface des matériaux en présence, n'est qu'un très faible pourcentage de la surface apparente. Quand la force normale augmente, de plus en plus d'aspérités entrent en contact et la surface moyenne de contact de chaque aspérité augmente. Pour qu'il y ait glissement il est donc nécessaire qu'il s'opère un cisaillement au niveau des zones de contact. C'est la preuve que la force de frottement dépend de la surface réelle de contact. Par la suite Bowden et Tabor [BTB73] ont également déterminé que la force de frottement est aussi tributaire des interactions adhésives entre les aspérités en contact. Si on reprend la précédente définition de Bowden et Tabor la force de frottement s'exprime comme le produit de la surface réelle de contact  $A$  et de la contrainte globale de cisaillement au niveau des points de contact  $S$  :

$$F = AS \quad (1)$$

Pour les matériaux à comportement plastique la surface  $A$  peut être remplacée par le rapport de la force normale  $N$  et de la pression nominale  $P_y$  du matériau :

$$\begin{aligned} F &= AS \\ &= (N/P_y)S \\ &= (S/P_y)N \\ &= \mu N \end{aligned} \quad (2)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation classique dans laquelle  $\mu$ , le coefficient de frottement, est lié aux propriétés du matériau.

## 1.2.2 Surface, coefficient de frottement, rugosité et adhésion

### 1.2.2.1 La nature des surfaces

La surface d'un corps, ou plus exactement l'interface corps-gaz ou corps-liquide, a une structure et des propriétés complexes intimement liées à la nature des corps, de la méthode de fabrication et de préparation de la surface du corps et de l'interaction entre la surface et l'environnement. Les propriétés surfaciques des corps sont déterminantes pour l'interaction surfacique. En effet, celles-ci affectent la surface réelle de contact, le frottement, l'usure, la lubrification.

La surface d'un corps, indépendamment de la méthode de fabrication de celle-ci, est faite d'irrégularités, de déviation par rapport à sa forme géométrique voulue [TC99, Whi94, Bhu98]. Les irrégularités d'une surface sont d'ordre allant de la dimension du corps à des distances inter

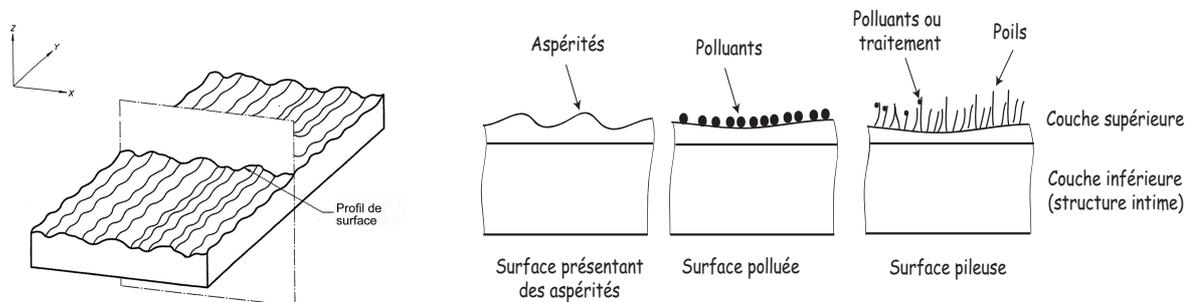
atomiques. Il n'existe pas de méthodes de fabrication, aussi précises soit-elles, pouvant produire une surface d'une planéité de l'échelle moléculaire, sur des matériaux conventionnels. La surface la plus lisse, même celle obtenue par bris de cristal, contient des irrégularités dont l'encombrement excède l'échelle des distances interatomiques. Selon les applications, une description macroscopique autant que microscopique des surfaces peut s'avérer nécessaire.

En plus des déviations surfaciques, la surface d'un corps est composée elle-même de régions de différentes propriétés physico-chimiques propres à la matière du corps [HKG68, Hal69, Buc81]. Si on prend l'exemple d'un corps métallique usiné par un procédé donné, on peut distinguer une zone durcie, au moins déformée, par le procédé d'usinage, au dessus de laquelle se trouve une zone de structure microcristalline ou amorphe appelée la couche de Beilby [BK03]. La zone déformée est aussi présente dans le cas des polymères et des céramiques. Ces couches sont extrêmement importantes par leur propriétés chimiques, au sens de la chimie des surfaces et interfaces, elles peuvent être radicalement différentes du matériau de base du corps. Aussi, leur comportement mécanique est influencé par la quantité et l'importance des déformations des couches surfaciques.

La majorité des surfaces des corps sont chimiquement réactifs. A l'exception de certains métaux nobles, tous métaux et alliages et beaucoup de non-métalliques produisent une couche surfacique oxydée en présence d'air, ou d'autres types de surfaces sous un environnement différent.

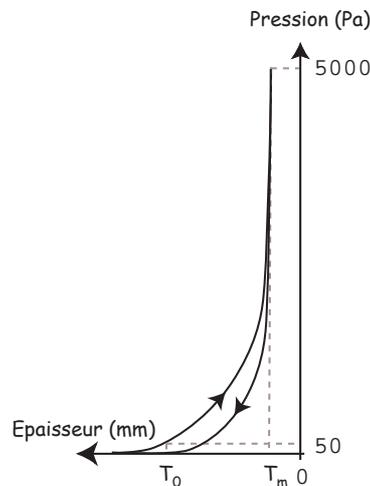
Il existe plusieurs techniques analytiques de caractérisation des couches surfaciques [Buc81, BKBW96]. Les propriétés métallurgiques (structure du grain) peuvent être déterminées en sectionnant la surface et en l'observation au microscope optique ou à balayage électronique (SEM). La structure microcristalline peut être étudiée en préparant des échantillons d'une finesse de quelques centaines de nano de la section et en l'examinant au microscope électronique à transmission (TEM).

Un milieu fibreux, qu'il soit sous forme de tissu, tricot ou non-tissé est défini par la superposition d'une couche inférieure et d'une couche supérieure [S.10]. La couche inférieure est la structure intime constituée de fils et/ou de fibres. La couche supérieure est non seulement constituée de fibres qui forment les aspérités fibreuses ainsi que la pilosité de surface mais aussi de polluants physicochimiques. Cette couche supérieure subit alors, lors d'un frottement, des déformations en compression transverse et en cisaillement.



**Figure 1.2 :** Surface réelle et profil de surface. Illustration schématique d'une structure fibreuse.

Du fait de la forte compressibilité des matériaux fibreux, l'épaisseur prise en compte pour définir la couche superficielle est susceptible de varier énormément selon la gamme de contrainte appliquée. La première difficulté à lever est donc de définir l'épaisseur de la couche superficielle.



**Figure 1.3** : Cycle de compression – KES FB3, [S.10]

En 1980, le professeur S. Kawabata a développé une chaîne de mesure (*Kawabata Evaluation System for Fabrics – KES FB*) [KG80] constituée de 4 appareils. Ces appareils mesurent les comportements, sous très faibles contraintes, en cisaillement, traction (KES-FB1), flexion (KES-FB2), compression transverse (KES-FB3), rugosité et frottement (KES-FB4). Cet appareillage faisant référence dans le domaine textile, nous prendrons pour base les résultats de l'appareil KES-FB3 qui effectue un cycle de compression / décompression transverse entre 0 et 5 kPa, sur une surface.

Comme l'illustre la Figure 1.3, et outre les nombreux paramètres calculés sur le cycle de compression, l'épaisseur  $T_0$  est celle qui est communément retenue pour définir l'épaisseur de la couche superficielle d'une structure fibreuse.

### 1.2.2.2 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement souvent symbolisé par la lettre grecque  $\mu$ , est une valeur scalaire sans dimension qui décrit le rapport entre la force de frottement entre deux corps et la force de pression les maintenant l'un contre l'autre. Le coefficient de frottement dépend des matériaux utilisés et est défini pour un couple de matériaux, par exemple le couple *glace/acier* a un faible coefficient de frottement alors que le couple *caoutchouc/bitume* a un coefficient de frottement élevé. Les valeurs de coefficient de friction vont de zéro et peuvent être supérieur à 1 dans de très bonnes conditions, un pneu sur le béton peut avoir un coefficient de frottement de 1,7.

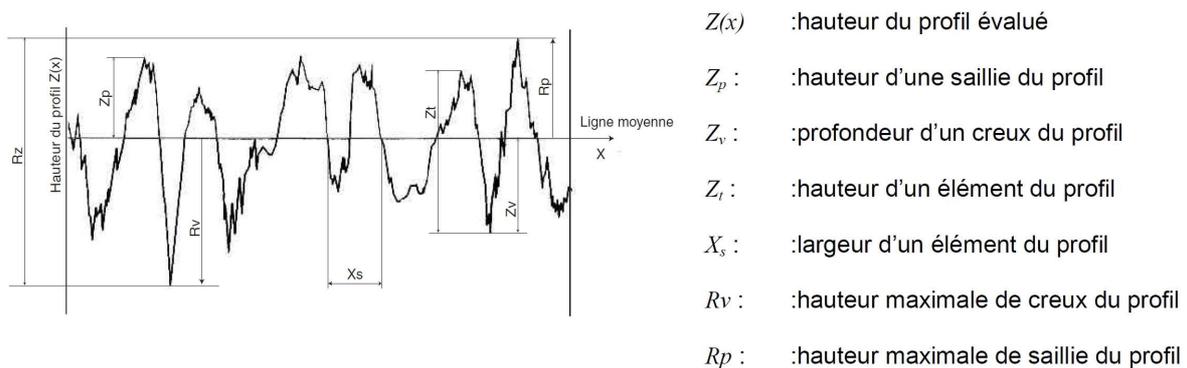
La force de frottement est toujours exercée dans une direction opposée au mouvement (on parle alors de coefficient de frottement dynamique) ou d'un mouvement potentiel (le cas du frottement statique) entre deux surfaces. Le coefficient de frottement est une mesure empirique, il est évalué expérimentalement. La plupart des matériaux, dans des conditions sèches, ont des valeurs de

coefficient allant de 0,1 à 0,6. Les valeurs en dehors de cette plage sont rares, toutefois sur du Téflon® on peut avoir un coefficient aussi bas que 0,04.

Il est souvent soutenu que le coefficient de frottement est strictement inférieur à 1 alors qu'il n'en est rien, du caoutchouc en contact avec d'autres surfaces peut donner des coefficients friction de 1 à 2. Dans la majorité des applications  $\mu$  est inférieur à 1, une valeur supérieure à 1 impliquant simplement que la force nécessaire pour faire glisser un objet le long de la surface est supérieure à la force normale que l'objet applique à la surface.

### 1.2.2.3 Rugosité

La rugosité quantifie le relief d'une surface, c'est est une mesure de la texture géométrique d'une surface. On l'évalue en mesurant les déviations verticales d'une surface réelle par rapport à une forme idéale. Selon la valeur de ces écarts on parlera alors de surface rugueuse ou lisse. La rugosité est généralement considérée comme la fréquence la plus élevée, la plus courte longueur d'onde donc, de la surface mesurée. Le profil d'une surface est représenté par une population de pics et de vallées déterminées par leur hauteur par rapport à une même ligne. Il n'existe pas formellement un paramètre unique de détermination de la rugosité d'une surface, en effet le relief d'une surface peut être quantifié par beaucoup de paramètres issus de la norme [NF EN ISO 4287] et de sources académiques.



**Figure 1.4** : Paramètres géométriques de rugosité.

Il est important de voir ici que ces paramètres sont purement géométriques et l'hypothèse qui sous-tend leur définition est que l'on considère qu'on a affaire à des surfaces solides indéformables. Dès lors, quand on s'intéresse à des surfaces très déformables tels les textiles, cette hypothèse doit être remise en question.

### 1.2.2.4 Adhésion

En physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi, l'énergie nécessaire pour réaliser la séparation s'appelle énergie d'adhésion. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est au contraire la force de

séparation nécessaire. L'adhésion est soit directe, soit médiée par un matériau intermédiaire (ex : polluants physico-chimiques).

Un des premiers développements majeurs dans la compréhension du phénomène d'adhésion est dû aux travaux de Johnson et al. [JKR71] qui ont été les premiers à introduire la notion d'énergie de surface. A partir de ces travaux, Fuller et al. [FT75] ont démontré que la rugosité et le module d'élasticité ont une influence sur l'adhésion.

### 1.2.3 Le textile et la problématique de la tribologie

Après cette introduction abordons la Tribologie sous l'angle de la problématique qui nous occupe ici, à savoir la tribologie sur textiles. C'est ainsi que nous présenterons *Modalsens*, le module de caractérisation tribologique développé au LPMT et sur lequel Cyril Marsiquet [MFR07, FMN+05] a travaillé. Nous montrerons notamment dans quelle optique ce dispositif s'avère un terrain de choix quant à l'investigation par les outils issus de la dynamique non-linéaire.

Il est établi que la loi classique de frottement, avec un coefficient de frottement  $\mu$  qui serait exclusivement lié aux propriétés intrinsèques du matériau, n'est pas applicable aux textiles. Dans le cas des textiles, nous sommes en présence de matériaux qui se déforment de manière viscoélastique et/ou plastique, le coefficient de frottement  $\mu$  dépend alors et de la surface apparente de contact et de la charge normale appliquée. Dans de nombreuses études [GOL53, How59, VMUC89], une relation alternative prenant en compte la relation entre la force de frottement et la force normale, est le sujet d'investigations. Des équations empiriques, à partir d'observations expérimentales, ont été proposées, mais la formulation la plus communément admise est la formulation de puissance :

$$F = aN^n \quad (3)$$

Cette équation, dans laquelle  $a$  et  $n$  sont des constantes, proposée par Bowden et Young [BY51], d'abord tirée de travaux sur des matériaux non-métalliques, fut ensuite appliquée par Lincoln [Lin52] puis par Howell et Mazur [HM53] à des matériaux fibreux. Ces auteurs ont constaté que les constantes  $a$  et  $n$  varient en fonction des types fibres testés, sans pour autant donner une explication à cela. Si les constantes changent en fonction de la nature des fibres testées, on peut dès lors penser qu'elles varient aussi en fonction des structures d'assemblage de ces fibres (type de tissage, maille, non-tissés, etc.). Cependant la nature réelle de ces constantes et la façon dont elles évoluent en fonction ne sont que peu connues.

S'il y a peu de travaux traitant les caractéristiques tribologiques des textiles on peut néanmoins citer les travaux de Wilson [Wil64], qui a étudié les effets de la pression sur le frottement dynamique de textiles. Les résultats théoriques et expérimentaux montrent que la surface de contact est essentielle dans la caractérisation tribologique des textiles et confirment que la loi classique d'Amontons n'est plus valable pour les textiles.

En remarquant que les variations du logarithme de la force de frottement par unité apparente de surface en fonction du logarithme de la force normale par unité de surface, étaient linéaires, Wilson a établi la relation suivante :

$$\log F / A = C + n \log N / A, \quad (4)$$

où  $n$  est la pente de la droite et  $C$  l'ordonnée à l'origine.

Wilson démontra que cette relation obtenue corrobore la théorie de l'adhésion telle que formulée par Bowden et Tabor [BTB73], en faisant l'hypothèse que le nombre  $S$  d'aspérités en contact du textile varie avec la pression selon la relation  $S = \gamma(N/A)^B$  ( $\gamma$  et  $B$  étant des constantes liées aux propriétés du textile). Par cette hypothèse, Wilson a montré que les constantes  $n$  et  $C$  sont liées à  $S$ , et par conséquent à ses variations en fonction de  $N/A$ . Wilson étudia également ces cas spécifiques de valeurs particulières de  $n$  :

1.  $S$  est indépendant de la pression normale, alors  $n$  vaut  $M$ , une constante du matériau ; c'est la valeur minimale possible de  $n$ .
2.  $S$  croît avec pression normale mais moins rapidement que celle-ci, alors  $0.5 < n < 1$ .
3.  $S$  est une fonction linéaire de la pression normale, alors  $n = 1$ .
4.  $S$  croît plus rapidement que la pression normale, alors  $n > 1$ .

L'analyse de Wilson montre également que pour un matériau fibreux donné, la valeur de  $C$  est liée à  $S_1$  ( $S$  rapportée à l'unité de pression). Une grande valeur de  $S_1$  correspondant à une grande valeur de  $C$  (testée expérimentalement sur des filés de fibres, et une petite valeur de  $S_1$  correspondant à une petite valeur de  $C$  (tissus multi-filamentaires).

Wilson a également conduit des tests de frottements dynamiques sur des textiles en corrélant les résultats avec l'équation (4). Les résultats divisaient les échantillons textiles en deux tendances. Le premier groupe (valeur élevée de  $n$  et faible de  $C$ ) correspond aux tissus multi-filamentaires. Le second groupe (faible valeur de  $n$  et élevée de  $C$ ) est constitué des tissus à base de filés de fibre. Wilson explique ces résultats par la variation des aspérités de contact en fonction de la pression normale. Aux faibles pressions il y a plus d'aspérités en contact avec les tissus de filés de fibres que pour les tissus multi-filamentaires. Ainsi  $C$  pour les tissus en filés de fibres est plus élevé que pour les multi-filamentaires.

Thorndike et al. [TV61] ont aussi étudié la détermination de coefficient de frottement sur les textiles. Leurs travaux prenaient en compte la structure des textiles, le type de fil, la reprise et l'acidité. Des textiles en tricot jersey et d'autres en armure sergé ont été testés ; des fils à étirage normal et élevé ont été utilisés. Pour tester l'influence de l'humidité, une température constante a été imposée pour une humidité relative variant entre 45% et 85% .

Le coefficient de frottement statique est approximativement 10% supérieur quand le glissement a lieu dans le sens trame comparé au sens chaîne. Il a été aussi établi qu'une augmentation du flotté avait pour effet de réduire le coefficient de frottement statique. Des conditions expérimentales limitées ont fait que l'influence de la reprise sur le coefficient de frottement n'a pas été formellement établie. Cependant il a été noté une sensible diminution du coefficient de frottement avec l'augmentation de la reprise. Thorndike et al. [TV61] avancent qu'un textile au  $pH$  élevé (alkalin), avec sa main « savonneuse » produit un coefficient de frottement statique plus élevé que le même avec un  $pH$  moins élevé (acide).

Enfin ils ont aussi étudié la relation entre le coefficient de frottement statique et la main d'un textile. Le coefficient de frottement augmentant, la main du textile a tendance à devenir plus revêche.

Aussi citons les travaux de Zurek et al. [ZJF85] qui ont relié les frottements inter-textiles à la texture des textiles mais aussi aux caractéristiques de frottement inter-fils. Ils ont utilisé un dispositif permettant d'évaluer les coefficients de friction statiques et dynamiques et ont testé quatre différents échantillons en armure jersey et deux en satin entièrement en multi-filaments. Leurs résultats ont montré que la force de frottement des textiles multi-filaments dépend de la direction de glissement et de la morphologie des textiles.

Carr et al. [Car95], ont mené une étude pour déterminer les caractéristiques tribologiques d'un panel de textiles pour l'habillement. L'objectif étant de générer des données caractéristiques pour aider au développement d'ensembles automatisés pour les textiles. Les résultats ont montré que le coefficient de frottement dynamique et statique entre textiles diminue quand la force normale par unité de surface augmente. Le précédent modèle de Wilson [Wil64] (cf. Eq. 4) corroborent leurs données.

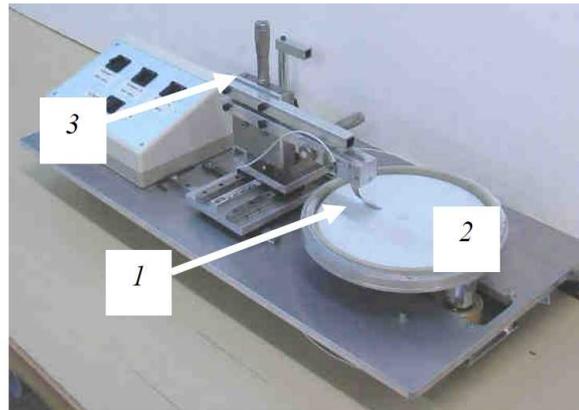
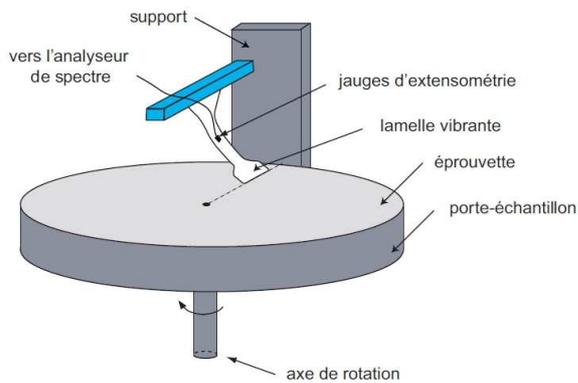
#### 1.2.4 Le dispositif *Modalsens*

La méthode de mesure *Modalsens*, dont les débuts remontent en 2000 [BFR00] a été développée au LPMT afin de répondre à deux interrogations majeures :

- Comment caractériser des surfaces de structures aperiodiques ?
- Comment interagir de manière à appréhender les comportements mécaniques des constituants de la couche surfacique d'un milieu fibreux, que ce soit en compression transverse ou en cisaillement ?

L'idée de base de cette méthode est d'utiliser la sensibilité vibratoire d'un tribomètre multidirectionnel tout en s'assurant de pouvoir mesurer des surfaces périodiques et/ou aperiodiques. Pour ce faire, la vibration du capteur ne devait plus se faire de manière forcée, mais de manière libre : le capteur devait alors entrer en résonance et les faibles variations du couplage capteur/surface mesurée seraient alors susceptibles de provoquer des variations importantes de la réponse dynamique du capteur en termes d'amplitude, d'amortissement et de fréquence de résonance. Le dispositif de mesure développé, à ce jour comprend un porte-échantillon, un bras de mesure ainsi qu'une unité de traitement du signal (analyseur de spectre).

Le capteur (1) sur la Figure 1.5 est une lamelle d'acier de  $50\ \mu\text{m}$  d'épaisseur précontrainte, frottant sur l'échantillon à mesurer, lui même fixé sur le porte échantillon (2), le plateau circulaire entraîné en rotation. Pendant le contact, le capteur vibre dans ses modes propres. Les déformations de la lamelle dues aux vibrations sont mesurées par quatre jauges de déformation.



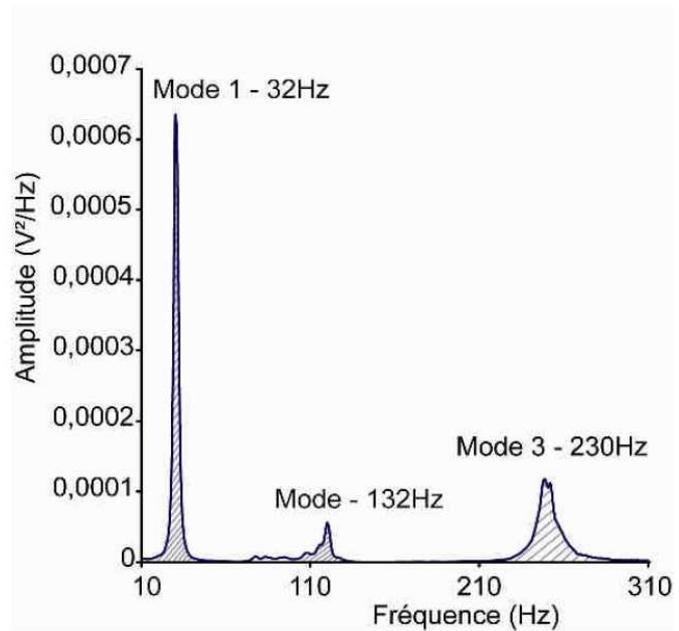
**Figure 1.5 :** Le dispositif *Modalsens* [MFR07].

L'idée initiale est de mesurer un spectre moyen, calculé à partir de 200 auto-spectres instantanés enregistrés durant 20 tours du plateau rotatif. Cet auto-spectre moyen montre plusieurs pics qui correspondent aux modes de résonance de du capteur. L'amplitude des pics, leur énergie spectrale, leur largeur et leur fréquence changent selon le couplage capteur/surface. Ces variations dépendent donc de l'état de surface de l'échantillon étudié.

L'énergie de ces pics est extraite en intégrant la puissance spectrale  $PS(f)$  entre deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  :

$$Energie[f_1, f_2] = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 .df \quad (5)$$

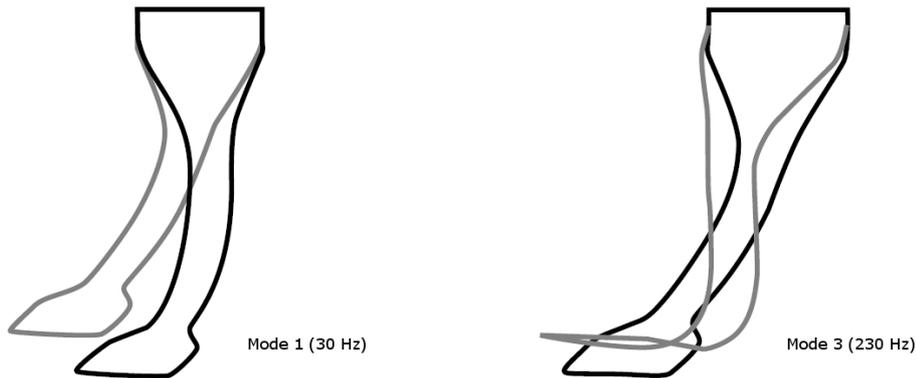
Jusqu'à présent, les seuls modes évalués sont les modes 1 et 3. Les travaux de développement effectués par Cyril Marsiquet [FMN+05] ont montré que ces deux modes sont les plus pertinents pour caractériser une surface. En effet, sur la base d'analyses modales expérimentale et numériques, ces deux modes présentent les déformées montrées à la Figure 1.7. On constate que, au niveau du contact, les oscillations du mode 1 sont issues d'un couplage de déplacements horizontaux et verticaux alors que celles du mode 3 sont essentiellement verticales [MFR07].



**Figure 1.6 :** Le capteur de *Modalsens*. Transformée de Fourier du signal.

Les calculs de ces déformées modales ont aussi permis de positionner précisément les jauges de déformation. Celles-ci sont collées sur les zones de la lamelle où les déformations sont les plus grandes et les perturbations les plus faibles, c'est-à-dire au milieu de l'étranglement qui a pour effet de concentrer les déformations.

Lors du frottement, le capteur exerce des sollicitations dynamiques en compression et en cisaillement sur les aspérités du relief. Ainsi, les déplacements horizontaux et verticaux du capteur au niveau de la ligne de contact dans les modes respectifs 1 et 3, impliquent que le mode 1 est très sensible aux interactions de type cisaillement, alors que le mode 3 est sensible aux sollicitations de type transversal.



**Figure 1.7 :** Calcul des déformées modales du mode 1 (sensible aux interactions de cisaillement) et du mode 3 (solicitations transversales).

Après cette présentation de la méthode *Modalsens* nous allons aborder dans la section suivante une présentation des instabilités de frottement intervenant dans les vibrations induites par frottement. Les vibrations induites par frottement constituent un sujet complexe d'étude, tant par les phénomènes qui sont à leur origine que leur manifestation physique. Les instabilités que nous allons aborder ne rentrent pas dans le cadre d'une approche linéaire des systèmes. Nous voulons ainsi par ce tour d'horizon, montrer que la dynamique de *Modalsens* est probablement sous-exploitée en termes d'identification des estimateurs de caractérisation des textiles.

### 1.3 Frottement sec et Instabilités vibratoires

Dans cette partie nous abordons les vibrations induites par le frottement sec. Par « vibrations induites par le frottement sec » nous retrouvons un grand nombre de phénomènes et de domaines d'application qui ont fait l'objet de travaux. Ainsi nous pouvons citer les travaux de Moiro [MN00] sur les systèmes de freinage, Nguyen [Ngu03] sur les instabilités de contact dans les assemblages freinés, les travaux sur les vibrations des systèmes roue/rail de Petit [PET02] et de Rudd [Rud76], la dynamique des balais d'essuie-glace, Raous [RCC99]. C'est ainsi que nous retrouvons dans chacun des cas cités un ou plusieurs types d'instabilités dues au frottement en même temps. Les travaux ont montré que les conditions d'occurrence de ces instabilités étaient variables de même que les conséquences induites. Ainsi les conséquences peuvent simplement affecter le confort (crissement de freinage, *sprag-slip* de l'essuie-glace) ou alors affecter l'intégrité structurelle des éléments voir la sécurité (broutage qui réduit l'efficacité du freinage, fatigue dues aux vibrations générées par le frottement).

Parlons un peu des travaux sur les systèmes de freinage, car c'est ce domaine qui a généré le plus grand nombre de travaux. Si les instabilités vibratoires peuvent se définir en deux grandes familles : les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues, c'est la deuxième famille qui est en cause dans les systèmes de freinage [SJ07]. En effet le crissement, qui est l'exemple le plus connu de bruits de freinage, est le plus souvent le résultat de vibrations auto-entretenues. C'est le sujet le plus étudié dans le domaine des bruits de freinage. Le crissement est défini comme une vibration auto-entretenu

dont la bande spectrale varie de 0 à 10kHz (on est donc dans le domaine audible). Notons à ce sujet que la classification la plus utilisée pour distinguer les divers phénomènes vibratoires repose sur leur spectre fréquentiel propre et est dû aux travaux de Kobayashi [Kob90]. Par exemple, la notion de « vibrations de freinage » est attribuée pour les vibrations dont la fréquence reste inférieure à 500Hz, au-delà on parle plutôt de « bruits de freinage ».

Un exemple de vibrations auto-entretenues de freinage est le « squeal noise », sa bande spectrale est comprise entre 200 et 500 Hz. Le « judder » est un exemple vibrations forcées, ce sont des trépidations qui correspondent à une résonance de la structure due à une variation non-uniforme de la force de frottement sur la zone de contact sur les disques de frein. Leur origine est liée à deux effets (combinés ou non) d'une instabilité thermique entraînant localement des zones d'échauffement et soit de la présence d'hétérogénéités sur la surface du disque ou alors de variations d'épaisseur du même disque ce qui a pour effet de faire varier le coefficient de frottement.

### 1.3.1 Présentation des instabilités approche théorique

Bien que de nombreuses études existent à ce sujet, il n'existe pas de théorie unique pour expliquer et caractériser les vibrations induites par le frottement. Ces dernières années, de nombreux travaux ont porté sur les vibrations par frottement sec et des phénomènes physiques à l'origine des instabilités qu'elles peuvent générer. Il existe plusieurs travaux pour expliquer les instabilités de frottement, Oden et Martins [OM85] ont isolé quatre phénomènes qui sont les plus en cause dans l'apparition d'instabilité de frottement : le *stick-slip*, le *sprag-slip*, la variation du coefficient de frottement et le couplage de mode. Les approches du *stick-slip* et de la variation du coefficient de frottement reposent sur l'hypothèse principale que c'est un changement de la valeur du coefficient de frottement en fonction de la vitesse relative en glissement qui génère l'instabilité. Quant au *sprag-slip* et au couplage de mode, ils sont essentiellement induits par des considérations géométriques ; l'instabilité peut apparaître à coefficient de frottement constant.

#### 1.3.1.1 Le *stick-slip*

Ce phénomène a été avancé dès 1955 par les travaux de Sinclair et al. [SM55], puis largement étudié et expliqué (ex : Oden et Martins [OM85], Rabinowicz [Rab59], Ibrahim [Ibr94b, Ibr94a]). Pendant longtemps c'est le seul mécanisme qui était considéré lors de l'étude d'instabilité de frottement dynamique. Le *stick-slip*, littéralement « collé-glissé », se manifeste physiquement par des oscillations auto-entretenues dues à la discontinuité du coefficient de frottement entre les phases « collées » et « glissées ».

Le modèle le plus largement présent dans la littérature de *stick-slip* est un modèle à un degré de liberté composé d'un solide de masse  $m$  exerçant une force normale  $N$  sur une surface maintenue par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur  $c$ . Une première version consiste à considérer la surface sur laquelle est posée la masse comme étant en mouvement à une vitesse constante  $V$  (voir Figure

1.8). Une deuxième version est de considérer que l'ensemble du système dynamique est en mouvement à une vitesse  $V$  (voir Figure 1.9).

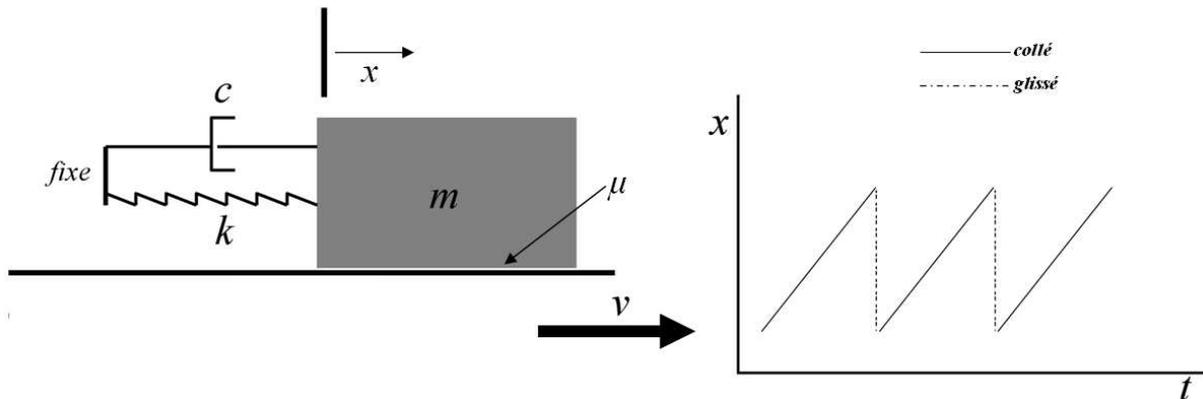


Figure 1.8 : Modèle du *stick-slip*, la surface est en mouvement.

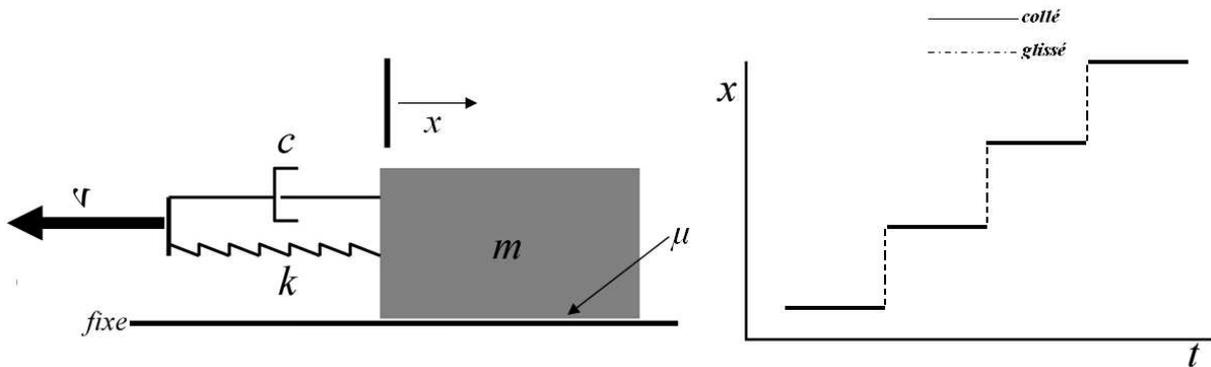


Figure 1.9 : Modèle du *stick-slip*, l'ensemble du système dynamique est en mouvement.

Comme nous le verrons plus loin l'une des clés de la modélisation du *stick-slip* est la modélisation du contact, en particulier du coefficient de frottement. On trouve dans la littérature des cas les plus simples aux plus complexes. Une approche simple consiste par exemple à considérer un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  différent du coefficient dynamique  $\mu_d$  qui lui est constant avec la vitesse de glissement, de telle sorte que  $\mu_d < \mu_s$ . Cette dernière approche peut être rendue plus complexe en considérant par exemple les variations du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

Le *stick-slip* étant considéré comme nuisant dans la plupart des systèmes mécaniques et des études qui lui sont dédiées, de nombreux papiers traitent de la problématique de la réduction de l'amplitude des vibrations engendrées par le *stick-slip*. Parmi les solutions proposées on peut citer Oden et Martins [OM85] et Rabinowicz [Rab65] qui préconisent une augmentation de l'amortissement, Rabinowicz [RR56] et Gao [GKWM94] qui préconise une augmentation de la raideur du ressort.

Pour exposer les principaux résultats du phénomène de *stick-slip* pour le système à un degré de liberté, dégageons les deux cas :

- Le coefficient de frottement est discontinu et ne prend que deux valeurs distinctes  $\mu_s$  et  $\mu_d$  avec  $\mu_d < \mu_s$ ,
- Le coefficient de frottement varie en fonction de la vitesse de glissement.

Dans les deux cas notons que nous considérons une loi de dépendance de type Coulomb.

### 1.3.1.1.1 Le coefficient de frottement est discontinu

C'est l'une des premières modélisations envisagées pour caractériser les vibrations dues au frottement. Ici on considère que le coefficient de frottement statique est strictement plus élevé que le coefficient de frottement dynamique. On reprend le système masse-ressort posé sur une surface en mouvement précédemment présenté. Pour ce modèle, le seuil de déclenchement du glissement est  $\mu_s N$ , et  $\mu_d N$  correspond à la valeur constante de la force de frottement lorsque la vitesse relative est différente de zéro. Physiquement le phénomène de *stick-slip* s'explique de la manière suivante ; quand le tapis est mis en mouvement celui-ci entraîne la masse, ce qui a pour effet d'augmenter la tension du ressort. Cette tension continue de croître jusqu'à atteindre le seuil de déclenchement de glissement, commence alors la phase du « glissé ». Dès ce moment, la force de glissement vaut alors  $\mu_d N$  et est par conséquent inférieure au seuil de glissement et à la tension du ressort à la fin de la phase de « collé », ce qui a pour effet que la masse est rappelé par le ressort. La tension du ressort diminue alors jusqu'à atteindre  $\mu_d N$ , c'est l'équilibre et le début d'une nouvelle phase de « collé » ; ainsi se reproduit le cycle.

Notons ainsi que si le coefficient de frottement statique est égal au coefficient dynamique il ne peut y avoir de phase de « collé » (dès la phase initiale amorcée). La masse continue à glisser et il n'y a pas d'apparition de vibrations du système.

A partir de là, il est intéressant d'étudier la stabilité d'un tel système du point de vue de la stabilité des systèmes non-linéaires du Pr. Ali Hassan Nayfeh [NMC79] (cf. **Annexe B**). Un tel système s'écrit de façon générique par l'équation suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = T(\dot{x} - V) \quad (6)$$

$T$  étant la force de glissement qui dépend donc de la vitesse relative.

On distingue alors les trois cas suivants :

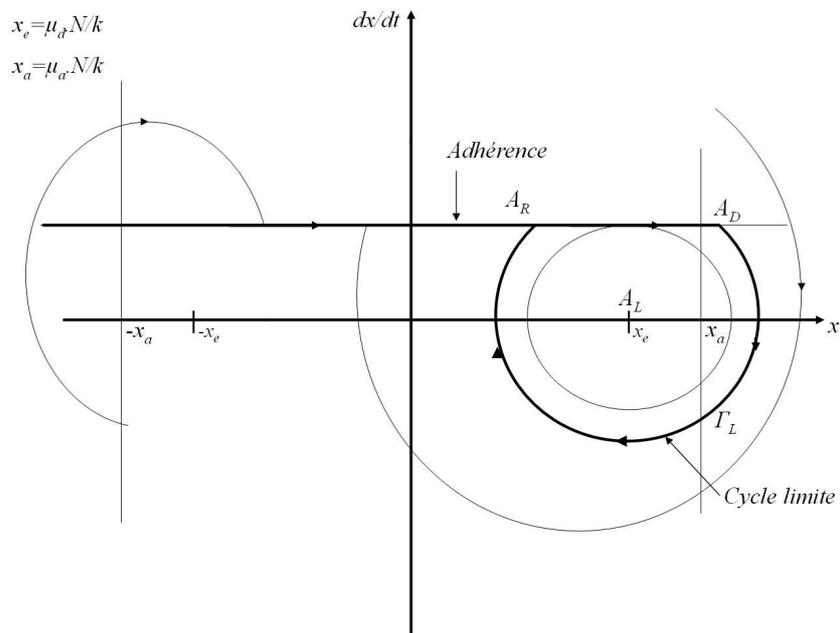
$$\begin{aligned} \text{Adhérence} & \quad \dot{x} - V = 0 \Rightarrow |T(0)| < \mu_s N \\ \text{Glissement positif} & \quad \dot{x} - V \geq 0 \Rightarrow |T(\dot{x} - V)| = \mu_d N < \mu_s N \\ \text{Glissement négatif} & \quad \dot{x} - V \leq 0 \Rightarrow |T(\dot{x} - V)| = -\mu_d N > -\mu_s N \end{aligned} \quad (7)$$

Qu'on peut réécrire plus formellement :

$$\begin{cases} |T| \leq \mu_s N \\ (V - \dot{x})T - |V - \dot{x}| \mu_d N = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Une étude de stabilité dans l'espace de phase donne :

- L'existence d'un point fixe  $A_L(x_E, 0)$ , qui correspond à un point d'équilibre stable. A ce point d'équilibre correspond son bassin d'attraction, c'est la région délimitée par le cercle de centre  $A_L$  et de rayon  $V$ . Autrement dit, toutes  $CI$  de cette région produisent une trajectoire confinée dans cette région, le système oscille (indéfiniment si on néglige l'amortissement).
- L'existence de points adhérents définis par la courbe d'adhérence :  $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$ . Une trajectoire dont la  $CI$  appartient à cette région, décrit  $\Gamma_L$ , qui correspond au *stick-slip* : partant de  $A_R$ , il y a adhérence jusqu'à  $A_D$  puis le système se met à osciller, c'est la portion de l'arc de cercle. Puis recollage en  $A_R$ .  $\Gamma_L$  est un cycle limite attracteur.
- Si les  $CI$  ne se trouvent ni sur le bassin d'attraction, ni sur le cycle limite attracteur, alors au bout d'un certain temps le système se cale inévitablement sur le cycle limite attracteur, et on revient à la manifestation du *stick-slip*.



**Figure 1.10 :** Visualisation des trajectoires dans l'espace de phase (coefficient de frottement discontinu).

### 1.3.1.1.2 Le coefficient de frottement est continu en fonction de la vitesse de glissement

Dans le cas traité précédemment nous considérons que le coefficient de frottement statique était supérieur au coefficient de frottement dynamique, là était l'origine de l'apparition des vibrations. Ici nous allons considérer que le coefficient de frottement varie continuellement avec la vitesse de glissement. Nous devons cette modélisation qui suppose que le coefficient de frottement décroît linéairement en fonction de la vitesse de glissement aux travaux de Mills [Mil38] sur les phénomènes de vibration de crissement.

Reprenons le dispositif précédent, en considérant le coefficient de frottement défini comme une fonction linéaire par rapport à la vitesse de glissement ; l'équation s'écrit alors :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = T(\dot{x} - V) = \mu(\dot{x} - V)N \quad (9)$$

$T$  étant la force de glissement qui dépend linéairement de la vitesse relative.

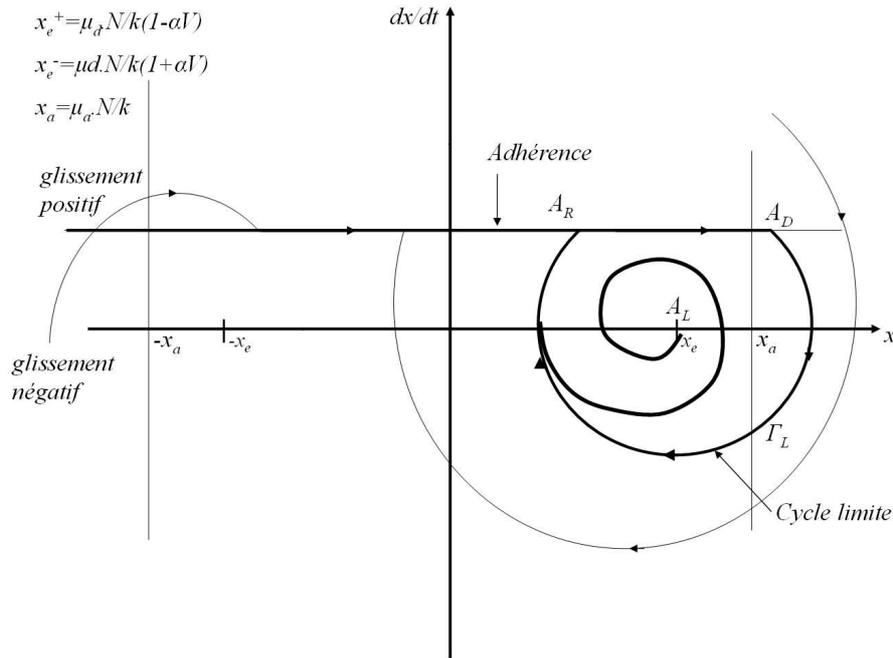
On distingue à nouveau les cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{Adhérence} \quad \dot{x} - V = 0 &\Rightarrow |T(0)| < \mu N \\ \text{Glissement positif} \quad \dot{x} - V \geq 0 &\Rightarrow |T(\dot{x} - V)| = \mu N(1 - \alpha(V - \dot{x})) \\ \text{Glissement négatif} \quad \dot{x} - V \leq 0 &\Rightarrow |T(\dot{x} - V)| = -\mu N(1 + \alpha(V - \dot{x})) \end{aligned} \quad (10)$$

Si nous reprenons les résultats de la stabilité des systèmes présentés en Annexe B, nous déduisons que le système est stable si  $\frac{d\mu}{d\dot{x}}(\dot{x}_0)$  est positif. Or on peut, d'un point de vue physique, supposer que le coefficient de frottement est plutôt une fonction décroissante de la vitesse de glissement ; cependant même si le système est ici instable par nature il est possible de forcer sa stabilisation en augmentant l'amortissement.

L'étude de l'espace de phase donne :

- L'existence d'un point instable  $A_L(x_E^+, 0)$  : toutes les trajectoires correspondant à des C.I assez proches de ce point s'en éloignent.
- Une trajectoire partant de la région  $\dot{x} \leq V$  ont une forme de spirale divergent centrée en  $x_E^+$  : c'est le régime de glissement positif. Au bout d'un certain temps se cale sur  $\Gamma_L$
- Une trajectoire partant de la région  $\dot{x} \geq V$  ont une forme de spirale divergent centrée en  $x_E^-$  : c'est le régime de glissement négatif. Au bout d'un certain temps se cale sur  $\Gamma_L$



**Figure 1.11** : Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement continu)

Une alternative consiste à modéliser l'évolution décroissante du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement par une loi explicite exponentielle, Chambrette [CHA91] :

$$\mu(\dot{x}) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-\dot{x}/V_1}, \text{ avec } \mu_d < \mu_s$$

Dans ce cas la condition de stabilité s'écrit alors :

$$\frac{\mu_s - \mu_d}{V_1} < \frac{c}{N}$$

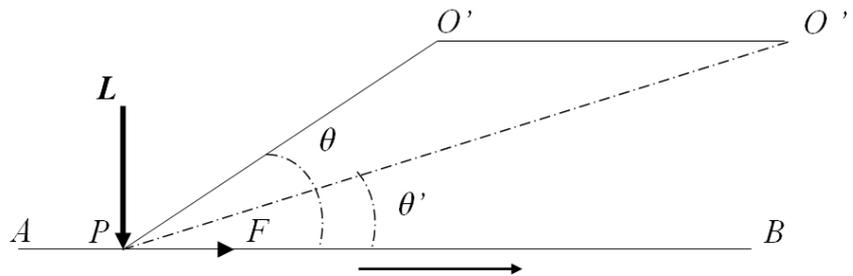
### 1.3.1.1.3 Conclusion sur le *stick-slip*

Les diverses modélisations du *stick-slip* reposent sur deux hypothèses fondamentales sur le coefficient de frottement. Ces modélisations sont adaptées pour des problèmes de relativement basses fréquences, mais insuffisantes pour expliquer bien d'autres phénomènes d'instabilités. Dans des systèmes où le coefficient de frottement reste constant on peut voir apparaître des phénomènes d'instabilités. D'autre part le *stick-slip* suppose des périodes de vitesse de glissement nulle, or on peut supposer, qu'à partir de certaines vitesses ou les phases de « collé » ne peuvent être envisagés, le modèle *sprag-slip* est apparu alors comme une alternative.

### 1.3.1.2 Le *sprag-slip*

Les premiers travaux sur ce phénomène datent de 1961 avec Spurr et al. [Spu61], il s'agissait de combler les lacunes du modèle de *stick-slip* à expliquer de manière adéquate les crissements de freinage. Cette théorie prend en compte, pour la première fois, les paramètres géométriques du

système comme étant la source des instabilités. La configuration géométrique du système et de ses déformations élastiques sont à l'origine de variations de la force normale d'interaction et de la force tangentielle. Ces variations des forces de contact engendrant elles-mêmes une modification de la vitesse de glissement. La théorie du *sprag-slip* est résumée sur la figure suivante :



**Figure 1.12 :** Schéma modèle du *sprag-slip*

La barre rigide  $O'P$  peut pivoter autour de  $O'$  fixe, elle est chargée au point  $P$  par une force  $L$  contre la surface mobile  $AB$ . Le *sprag-slip* est caractérisé par  $\theta$ , l'angle entre la barre  $PO'$  et la surface mobile  $AB$ . L'expression de la force tangentielle de frottement  $F$  s'écrit alors :

$$F = \frac{\mu L}{1 - \mu \tan \theta} \quad (11)$$

La force de frottement tangentielle augmente lorsque le coefficient de frottement se rapproche de  $\cotan \theta$ , en supposant la liaison pivot en  $O'$  parfaitement rigide. Cette force atteint donc des valeurs élevées bloquant parfois le mouvement : ce qui a pour effet de provoquer l'arc-boutement de la barre. L'apparition du phénomène de *sprag-slip* ne tient plus dès lors qu'on suppose que le pivot est élastique, en effet celui-ci jouerait alors le rôle du ressort et l'on se retrouverait dans le cas précédent avec l'appariation d'un *stick-slip*.

Considérons maintenant le deuxième cas où une structure rigide  $O'O''$  est ajoutée au support,  $O'$  n'est plus fixe et l'ensemble  $PO'O''$  est maintenant considéré rigide avec une liaison pivot en  $O''$  fixe. Lorsque  $AB$  est mis en mouvement, le point de contact  $P$  se déplace élastiquement dans la direction de la force de frottement, de telle sorte que l'angle  $\theta$  augmente du fait de la géométrie du système : c'est la phase d'arc-boutement (*sprag*), elle implique une augmentation du moment au point  $O'$ . Ce moment devient si important que l'ensemble  $PO'O''$  peut être considéré comme rigide et le point  $O''$  constitue le nouveau pivot et  $\theta'$  le nouvel angle d'incidence. A partir d'un certain seuil l'énergie élastique stockée par la structure ne peut plus être contenue par la force de frottement, la phase de glissement opère et la force de frottement chute d'autant plus, libérant l'énergie stockée. On peut

résumer ce cycle en deux phases, la première le « *sprag* » correspond à l'arc-boutement de la structure et la deuxième le « *slip* » peut se traduire par un relâchement de cette dernière.

Reprenons le système à un degré de liberté pour étudier théoriquement les conditions de stabilité du système modèle du *sprag-slip*. Nous considérons pour cela un système à un degré de liberté avec un couplage qui relie la force normale  $N$  au contact de déplacement tangent Boudot et al. [BF98]. L'équation dynamique s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = T \quad (12)$$

En écrivant la loi de Coulomb pour le frottement :

$$T = \mu N = \mu Kx \quad (13)$$

Nous obtenons alors l'équation dynamique suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k - \mu K)x = 0 \quad (14)$$

D'après les résultats que nous présentons sur la stabilité des systèmes, nous obtenons la condition de stabilité :

$$K < \frac{k}{\mu} \quad (15)$$

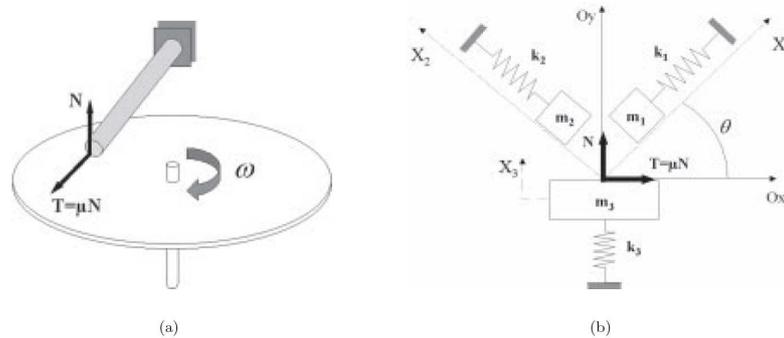
### 1.3.1.3 Le couplage de modes

La notion de couplage de mode est né de la volonté de plusieurs chercheurs qui, s'étant intéressés aux travaux de Spurr sur le *sprag-slip*, ont essayé de placer cette modélisation dans une théorie plus générale. La principale conclusion de ces recherches est que d'un point de vue physique, la notion d'instabilité due au *sprag-slip* peut être interprétée comme la coalescence [SJ07] de plusieurs modes d'une structure ; comme nous l'avons vu précédemment il est nécessaire que le système ait au moins deux degrés de liberté (2 modes de vibration) pour l'occurrence du *sprag-slip*.

Les premiers à se lancer dans les pas de Spurr furent Jarvis et Mills [JM63], qui pour valider la théorie de Spurr, ont développé une étude expérimentale portant sur un système poutre-disque. Il s'agissait d'étudier les vibrations du disque lorsque la poutre frotte dessus avec une inclinaison d'un angle  $\theta$ . Ils confirmèrent ainsi les hypothèses de Spurr selon lesquelles une variation du coefficient de frottement est insuffisante à expliquer ce type d'instabilités. Un modèle analytique a donc été développé reprenant pour base les travaux de Spurr.

Le système mécanique considéré est présenté sur la Figure 1.13, c'est une poutre flexible frottant sur un disque en rotation et encastree à son extrémité et faisant un angle  $\theta$  par rapport au plan du disque. Le contact est considéré ponctuel et le coefficient de frottement constant. Les perturbations dues à la force normale sont négligées de telle sorte à considérer comme permanent le contact poutre-disque. Le modèle mécanique simplifié associé considère un système de trois masses reliées entre elles par

des ressorts. Ce modèle reproduit ainsi le premier mode de traction-compression de la poutre, le premier mode de flexion de la poutre et le premier mode du disque en flexion.



**Figure 1.13** : Système pion-disque (a) et modèle analytique associé (b)

Le système mécanique considéré est présenté sur la Figure 1.13, c'est une poutre flexible frottant sur un disque en rotation et encastrée à son extrémité et faisant un angle  $\theta$  par rapport au plan du disque. Le contact est considéré ponctuel et le coefficient de frottement constant. Les perturbations dues à la force normale sont négligées de telle sorte à considérer comme permanent le contact poutre-disque. Le modèle mécanique simplifié associé considère un système de trois masses reliées entre elles par des ressorts. Ce modèle reproduit ainsi le premier mode de traction-compression de la poutre, le premier mode de flexion de la poutre et le premier mode du disque en flexion.

### 1.3.2 Conclusion, application à *Modalsens* et à la tribologie des matériaux fibreux

Comme nous l'avons les vibrations induites par frottement constituent un sujet complexe d'étude, tant par les phénomènes qui sont à leur origine que leur manifestation physique. Ce tour d'horizon sur les instabilités dues au frottement laisse entrevoir la complexité d'un problème de vibrations induites par le frottement. Sachant que toutes les instabilités dues plus haut ne rentre pas dans le cadre de l'analyse linéaire du signal il faut donc des outils autre que la transformée classique de Fourier pour mieux comprendre la dynamique vibratoire et espérer ainsi tirer de nouveaux estimateurs résultant de l'analyse du signal de *Modalsens*.

Dans la partie qui suit, nous présentons les outils que nous avons choisi pour mener cette analyse non-linéaire ainsi que la philosophie qui sous tend cette méthode d'analyse. Dans le deuxième chapitre du manuscrit nous verrons la mise en œuvre à proprement parlé, de ces nouveaux outils d'analyse.

### 1.4 Introduction au *Nonlinear Time series analysis*

Dans cette partie nous introduisons le *Nonlinear Time Series Analysis* (NTSA), en fait sous cet acronyme se retrouvent des outils de traitement des séries de valeurs ordonnées dans le temps. Nous commençons par une petite introduction sur les séries chronologiques, nous introduirons par la suite

cette branche de la physique qu'est la dynamique non-linéaire. A partir de là nous explorerons l'espace de phase des systèmes dynamiques, mais surtout leur reconstruction à partir des séries de données chronologiques. Ca sera l'occasion de voir les théorèmes de plongement de Whitney puis Takens [Tak81] et leur incidence quant à l'essor des NTSA. Une fois que nous aurons appris comment reconstruire un espace de phase nous introduirons les *Recurrence Plots* (RP), un outil révolutionnaire pour aider à la visualisation du comportement des systèmes dans l'espace de phase, mais nous verrons surtout comment à partir des RP on peut tirer des données quantifiant le comportement du système dans l'espace de phase ; on aura vu alors les *Recurrence Quantification Analysis* (RQA).

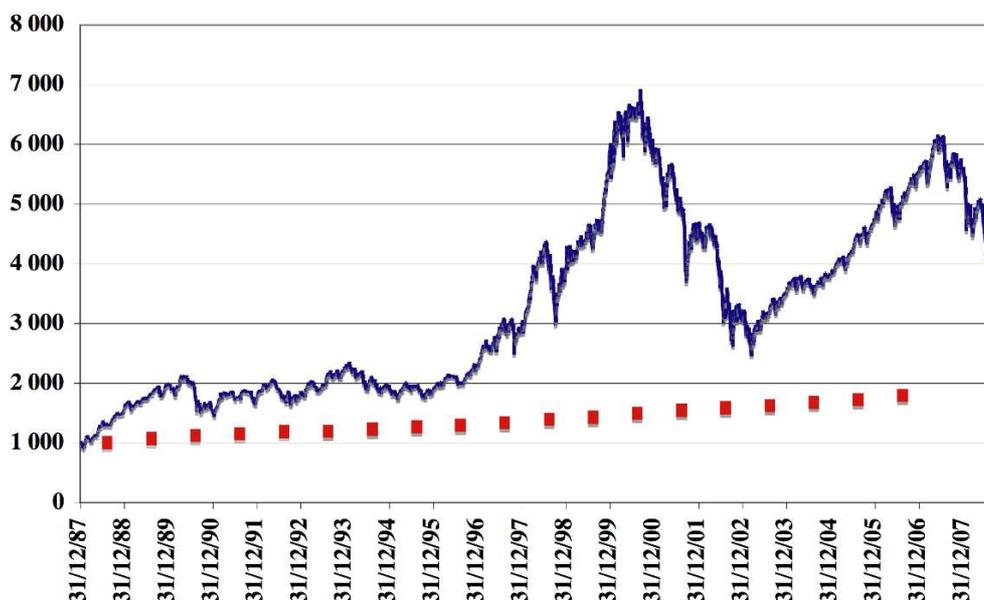
### 1.4.1 Introduction

En statistiques, traitement du signal, économétrie et en finance mathématique, une série chronologique est une suite de valeurs de données, mesurées à des moments successifs régulièrement espacés dans le temps. Nous pouvons citer les exemples suivants de séries temporelles :

- La température journalière
- Bénéfice annuel d'une entreprise.

L'analyse des séries temporelles comprend des méthodes d'analyse des données de séries chronologiques afin d'en extraire des statistiques significatives ou d'autres caractéristiques.

**Le CAC 40 de 1988 à fin septembre 2008 et le PIB par habitant en euros courants jusque 2006 (base 1000 en 1988)**



**Figure 1.14 : Exemple de série temporelle.**

Les données chronologiques ont un ordre naturel dans le temps. Ceci rend l'analyse des séries chronologiques distinctes d'autres problèmes communs d'analyse de données, dans laquelle il n'y a pas d'ordre naturel des observations. Un modèle de série chronologique reflète généralement le fait que les observations rapprochées dans le temps sont plus étroitement liées que les observations plus éloignées. En outre, l'hypothèse fondamentale de la modélisation de données chronologiques est la présence d'une relation d'antériorité qui ordonne l'ensemble des informations : les valeurs pour une période donnée seront exprimées comme découlant d'une certaine façon de valeurs passées, plutôt que par les valeurs futures.

Les méthodes d'analyses des séries chronologiques peuvent être divisées en deux catégories: les méthodes dans le domaine fréquentiel et les méthodes dans le domaine temporel. Les premières comprennent l'analyse spectrale et, récemment, l'analyse par ondelettes, les derniers comprennent l'auto-analyse de corrélation, et ce qui nous intéresse ici, les techniques dites NTSA.

La NTSA est basée sur la dynamique non-linéaire, nous commencerons donc par une introduction de cette discipline.

#### 1.4.2 Système dynamique et dynamique non-linéaire

Un système dynamique consiste en deux ingrédients : une loi ou « dynamique », qui fixe la manière dont évolue le système, et une condition initiale ou « état » duquel le système démarre [tufillaro]. Parmi les lois les plus connues pour décrire les phénomènes naturels nous pouvons citer les équations différentielles. Toutes les théories majeures de la physique sont établies en termes d'équations différentielles. Cette branche des mathématiques a commencé avec la découverte de l'analyse par Newton et Leibniz et continue à se développer.

La théorie des systèmes dynamiques et la dynamique non-linéaire sont nées de l'étude qualitative des équations différentielles, et sont devenues de nouveaux outils pour aider à la compréhension et la prévision des mouvements qui nous entourent : la course des planètes, les vibrations d'une corde. Les deux premiers siècles de cette aventure scientifique, de Newton à Euler, en passant par Hamilton et Maxwell, ont produit de grands succès dans les méthodes de formulation des « lois » régissant le monde qui nous entoure, seulement les méthodes de résolutions adéquates n'étaient pas forcément disponibles. Certains des mouvements qui nous entourent – tel le mouvement de balancier d'un pendule – sont réguliers et s'expliquent aisément, alors que d'autres – les turbulences laissées par une cascade se jetant dans l'eau – sont irréguliers et semblent n'obéir à aucune règle précise.

Le mathématicien français Henri Poincaré (1892) a été le premier à véritablement entrevoir la source réelle du problème : la difficulté réelle réside moins dans la formulation des lois que dans la spécification des conditions initiales. Au début du siècle précédent, dans son essai *Science et méthode* [Poi03], Poincaré écrit :

*« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant*

*initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »*

La découverte par Poincaré de la *sensibilité aux conditions initiales*, ce qui maintenant est plus connu sous l'appellation : *système dynamique chaotique*, a seulement été considérée par la communauté scientifique à partir des années 70. Mathématiciens, physiciens, chimistes, biologistes, ingénieurs, en résumé les scientifiques de toutes spécialités, avec l'aide des récents progrès de l'informatique, sont partis à l'exploration des nouvelles possibilités qu'ouvraient les systèmes non-linéaires.

A ce stade il est nécessaire de distinguer la dynamique non-linéaire de la théorie des systèmes dynamiques. Ce dernier est une branche bien définie des mathématiques, alors que la dynamique non-linéaire est un domaine multidisciplinaire ayant des applications, certes principalement en mathématiques et en sciences physiques, mais aussi dans toutes les sciences en général.

Les scientifiques de toute spécialité se retrouvent unis dans leur quête de trouver des outils adéquats de résolution des équations dynamiques non-linéaires, et chaque spécialité a apporté sa contribution à l'analyse des systèmes non-linéaires. Le météorologiste E. N. Lorenz [Lor63] découvre le premier attracteur étrange dans sa quête d'une meilleure compréhension des lois de la météo et de l'apparente imprédictibilité de leur manifestation. Le biologiste Verhulst [Ver38] a introduit l'étude de l'équation logistique alors qu'il étudiait des problématiques de dynamique des populations. Sans compter tous ces ingénieurs, informaticiens, mathématiciens appliqués qui nous ont donné des problèmes type ainsi que les ressources informatiques de leur résolution, donnant vie aux systèmes non-linéaire sur nos écrans d'ordinateur. La dynamique non-linéaire est interdisciplinaire, et les dynamiciens non-linéaires coopèrent à travers tous les domaines.

Pour définir un système dynamique non-linéaire regardons d'abord le cas d'un système linéaire. Un système dynamique linéaire est défini par le fait que la loi dynamique est linéairement proportionnelle aux variables du système. On peut analyser un système linéaire en morcelant le problème en plusieurs pièces et ensuite additionner celles-ci pour construire la solution complète. Considérons l'exemple de cette équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x. \quad (16)$$

Le système dynamique défini par cette équation différentielle est linéaire, en effet toutes les fonctions impliquées sont linéaires en  $x$ . La dérivée seconde de  $x$  (l'accélération par exemple) est proportionnelle à  $x$ . Résoudre cette équation différentielle linéaire revient à trouver la fonction  $x(t)$

avec la propriété suivante : *la seconde dérivée de  $x$  (par rapport à la variable indépendante  $t$ ) est égale à  $-x$* . Deux solutions viennent immédiatement à notre esprit,

$$x_1(t) = \sin(t) \text{ et } x_2(t) = \cos(t),$$

Autrement dit  $x_1$  et  $x_2$  vérifient l'équation différentielle. Aussi, parce que cette équation différentielle est linéaire, la somme de ces deux fonctions définies par :

$$x_1(t) + x_2(t) = \sin(t) + \cos(t),$$

est aussi solution de (16).

Ainsi on peut additionner à chaque fois les solutions de notre équation différentielle linéaire pour en former de nouvelles ; cette propriété des équations différentielles linéaires est appelée *le principe de superposition*. C'est sur ce principe que repose la construction de toute la théorie linéaire.

Considérons maintenant le cas d'un système dynamique non-linéaire, appliquons-lui la même méthode et regardons ce qu'il se passe. Considérons, par exemple, cette équation différentielle du second ordre non-linéaire :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x^2. \tag{17}$$

Supposons que nous ayons trouvé deux solutions de cette équation différentielle non-linéaire et appelons les une nouvelle fois  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Un calcul rapide nous fixe,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) \\ &\neq -(x_1 + x_2)^2 \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

Par cet exemple nous montrons que la somme des solutions d'une équation différentielle non-linéaire n'est pas, en générale, une solution de l'équation différentielle ; le principe de superposition ne s'applique donc pas dans le cas des équations différentielles non-linéaires.

La méthode usuelle de résolution d'une équation différentielle est tout simplement de trouver une fonction qui vérifie cette même équation. Une trajectoire est alors déterminée en faisant partir la donnée d'une *CI* particulière. Prenons l'exemple suivant, essayons de déterminer la position d'une comète dans 10 ans, à partir de maintenant nous devons mesurer ses positions et vitesse actuelles, écrire l'équation différentielle du mouvement, puis intégrer cette équation partant des conditions initiales mesurées. La vision traditionnelle de la solution consistant à trouver une orbite ou une trajectoire. En d'autres termes, sachant les conditions initiales et la loi, nous sommes en mesure de prédire le futur de la comète. Avant les travaux de Poincaré, il était admis qu'une équation

différentielle non-linéaire avait toujours une solution ; il fallait juste être assez astucieux pour la trouver.

La découverte par Poincaré du comportement chaotique alors qu'il étudiait le problème des trois corps montra qu'une telle vision était fautive. Aussi intelligent et astucieux qu'on puisse être nous ne pourrions jamais trouver la solution exacte de certaines équations modélisant nombre de systèmes non-linéaires. On pouvait s'y attendre, après tout si une solution existait, et elle serait bornée, on peut attendre de cette solution que tout infime changement dans les conditions initiales produise un effet proportionnel sur les trajectoires prédites. Cependant un système chaotique peut produire de grandes différences dans le long terme sur des trajectoires dont les conditions initiales sont proches. Poincaré, réalisant toutes les conséquences de ce simple constat, redéfinit la notion de « solution » d'une équation différentielle.

Henri Poincaré était moins intéressé par une orbite individuelle que par l'ensemble de toutes les orbites possibles. Il décale le point de vue de la solution locale – donnant le comportement exact d'une trajectoire individuelle – à une solution globale – donnant le comportement qualitatif de toutes les trajectoires possibles pour un type de système donné. Si nous reprenons l'exemple de la comète, une solution qualitative de l'équation différentielle gouvernant la trajectoire de la comète est plus aisée à établir dans la mesure où elle ne nécessite pas l'intégration des équations du mouvement pour trouver la position future exacte de la comète. Cependant la détermination complète de la solution qualitative peut souvent poser des difficultés, en effet celle-ci requiert une vision globale de la dynamique du système, ce qui implique l'étude et la prise en compte d'un grand nombre de cas possibles de comportement dynamique.

Trouver des solutions individuelles est l'approche traditionnelle pour résoudre des équations différentielles. A l'opposée, la récurrence est la ligne directrice dans la quête de Poincaré d'analyse qualitative des solutions d'une équation différentielle. Comprendre les propriétés de récurrence d'un système dynamique revient à analyser quelles régions de l'espace de phase sont visitées par une orbite et à quelle fréquence cette orbite retourne dans ces régions. C'est la caractérisation statistique des régions de l'espace qui sont visitées ; c'est la *vision ergodique* en dynamique des systèmes. En outre nous pouvons essayer de comprendre les transformations géométriques que subit par un groupe de trajectoires ; c'est la *théorie topologique* des systèmes dynamiques.

Il existe plusieurs niveaux de récurrence, reprenons l'exemple de la comète, on a alors plusieurs scénarii possibles :

1. la comète s'écrase sur une planète,
2. la comète entre en orbite autour d'une planète,
3. la comète suit une trajectoire chaotique.

Dans le premier cas il ne se passe plus rien, le système atteint un état figé et ne bouge plus. Dans le deuxième cas nous sommes dans le cas d'un mouvement périodique ; la comète reviendra toujours au même point de son orbite après une période de révolution. La récurrence est alors dite périodique, elle est totalement prédictible dans ce cas. Et enfin dans le dernier cas la comète suit une trajectoire

chaotique les récurrences dans ce cas sont des structures complexes, la comète visitant et revisitant différentes régions de l'espace de manière apparemment erratique.

Pour résumer tous ces cas de figure Poincaré a promu l'étude qualitative des équations différentielles. Certes il est probable que l'on perde en précision sur des détails spécifiques à une trajectoire individuelle, mais l'objectif est ici d'esquisser les motifs formés par une large collection de trajectoires différentes. Cette vision globale est motivée par le fait que c'est un non-sens que d'étudier une trajectoire isolée si on a affaire à un système dynamique chaotique. Pour comprendre les mouvements qui nous entourent, lesquels sont largement gouvernés d'après des lois et des interactions non-linéaires, il est nécessaire de développer de nouvelles techniques qualitatives d'analyse des mouvements des systèmes dynamiques non-linéaires ; c'est Poincaré qui jette le premier les fondements de cette nouvelle approche.

### **1.4.3 Espace de phase à partir de données chronologiques**

La modélisation d'un système dynamique déterministe repose sur le concept d'espace de phase : la collection des états possibles du système dynamique. L'état du système étant au temps  $t$  défini par la collection de toutes les informations nécessaires pour déterminer, de façon unique, le futur du système aux temps ultérieurs supérieurs à  $t$ , en général les positions et les vitesses sont de bons candidats. Pour un système modélisable mathématiquement, l'espace des phases se déduit aisément des équations du mouvement.

Pour des systèmes expérimentaux sans une description mathématique accessible, l'espace des phases est inconnu. Les méthodes de reconstruction d'attracteurs ont été développées dans le but de contourner cette difficulté, le *Théorème de Takens* [Tak81], qui a joué un rôle majeur dans ce domaine et qui est sans doute à l'origine de la NTSA, et d'autres travaux qui ont suivi, permettent de faire la relation entre grandeur expérimentale mesurée et espace de phase théorique. Le concept est assez simple, une ou plusieurs grandeurs expérimentales sont observées en fonction du temps. Ces données temporelles sont alors recueillies pour fabriquer les états équivalents de l'espace de phase.

#### **1.4.3.1 Les théorèmes de plongement de Harris Whitney et de Floris Takens**

Suite à une suggestion de ses collègues, en l'occurrence David Ruelle [Rue91], Norman Packard [PCFS80] s'est penché le premier sur la possibilité de reconstruire une espace de phase par d'une série chronologique enregistrée. Il montra par la suite qu'il était possible d'obtenir une reconstruction du portrait de phase grâce aux coordonnées décalées et aux coordonnées dérivées. Floris Takens [Tak81] en a fait par la suite le célèbre théorème qui porte son nom, démontrant qu'il était possible, sous certaines conditions, d'obtenir un difféomorphisme entre le portrait de phase original et le portrait de phase reconstruit. Le théorème de Takens s'inscrit dans une classe particulière en mathématiques, celle des « Théorèmes de plongement différé »<sup>1</sup>. De tels théorèmes donnent les conditions dans lesquelles l'espace des phases d'un système dynamique chaotique peut être reconstruit à partir d'une séquence d'observations de l'état d'un système dynamique. Si les conditions sont remplies, la

reconstruction préserve les propriétés du système dynamique qui restent invariantes par changement régulier de base de coordonnées ; cependant cette reconstruction ne garantit pas la conservation des géométries des structures de l'espace de phase (ex : un cercle peut devenir une ellipse dans l'espace reconstruit).

En 1981, le théorème de plongement différé de Takens donne donc les conditions dans lesquelles un attracteur étrange régulier peut être reconstruit à partir des observations faites à travers d'une fonction générique. Plus tard le théorème sera généralisé aux attracteurs ne répondant pas au critère de régularité, il prendra en compte les attracteurs étranges de type fractal.

Ce théorème est encore plus facile à mettre en œuvre pour des systèmes dynamique discrets dans le temps, ce qui est le cas de la plupart des mesures expérimentales dans le sens où celles-ci sont échantillonnées. Ce théorème peut s'énoncer comme suit :

L'état de phase d'un système dynamique est une variété  $M$  de dimension  $\nu$ , la dynamique est donnée par l'application régulière :

$$f : M \rightarrow M \tag{18}$$

Si  $f$  a un attracteur étrange  $A$  de dimension fractale  $d_A$ , alors  $A$  peut être plongé dans un  $k$ -espace euclidien telle que :

$$k > 2d_A \tag{19}$$

En d'autres termes, il existe un difféomorphisme  $\varphi : A \rightarrow \mathfrak{R}^k$  dont la dérivée est de rang complet.

Le théorème de plongement différé utilise une fonction d'observation pour construire la fonction de plongement. Une fonction d'observation doit être deux fois dérivable et capable d'assigner un nombre réel à chacun des points de  $A$ . La première dérivée de cette fonction doit être de rang complet et ses composantes ne doivent pas présenter une symétrie particulière. Le théorème de plongement différé stipule alors qu'une telle fonction est un plongement de l'attracteur étrange  $A$ .

En réalité le théorème de Takens et ses implications importantes que nous connaissons est lui-même basé sur les travaux antérieurs de Whitney. En topologie différentielle, le théorème de plongement de Hassler Whitney [Whi36] fait le lien entre les notions de *variété abstraite* et de *sous-variété* de l'espace vectoriel réel  $\mathfrak{R}^n$  : Toute variété différentielle de dimension  $m$  peut être plongée dans l'espace euclidien de dimension  $2m$ . Sans entrer dans les détails mathématiques notons que les motivations premières de Whitney étaient l'étude des courbes fermées dans le plan. Son objectif était de donner les conditions dans lesquelles une courbe fermée pouvait être déformée en une autre sans la « couper ». Empruntons un exemple du textile, c'est comme si nous avons à dispositions deux pelottes de laine fermée (dans le sens où les deux bouts en sont noués) et complètement emmêlé. Le travail de Whitney consiste à donner les conditions pour qu'une pelotte soit transformée en l'autre sans jamais utiliser de paires de ciseaux. Son théorème apparait comme un résultat fondamental

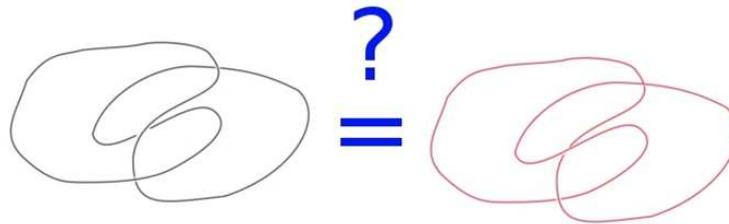
---

<sup>1</sup> Traduit de l'anglais *Delay Embedding Theorem*

dans cette optique, celui-ci dit en effet que la pelotte peut être dépliée dans un espace de dimension double que celui de départ, rendant ainsi plus pratique la comparaison des deux pelottes. L'analogie avec le théorème de Takens et le sujet qui nous intéresse est le suivant : partant d'un signal temporel peut on trouver un moyen de l'emmêler, de l'entrelacer pour qu'il devienne équivalent à la trajectoire de l'espace de phase ?



### Theorème de Plongement (Whitney)



**Figure 1.15** : Application du théorème de plongement sur une variété simple.

#### 1.4.3.2 Des théorèmes de plongements à l'espace de phase reconstruit

Reprenons notre mesure expérimentale que nous allons représenter par une séquence de points  $y(t_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  qui constituent les valeurs expérimentales mesurées à différents moments  $t_i$ . Le théorème de Whitney stipule qu'une application générique d'une variété de dimension  $n$  à valeur dans une  $(2n+1)$ -espace euclidien est un plongement : en effet l'image de la  $n$ -variété est complètement dépliée dans un espace de dimension supérieur (en l'occurrence ici  $2n+1$ ). En particulier, à un point de la  $n$ -variété correspond un unique point de l'espace euclidien de dimension  $2n+1$ . Une conséquence de cette observation est que si l'on considère  $2n+1$  signaux indépendants mesurés à partir d'un système, ces derniers peuvent être vus comme une application de l'ensemble des états vers un espace de dimension  $2n+1$  ; en d'autres termes le théorème de Whitney implique que chaque état peut être identifié de manière unique par un vecteur de  $2n+1$  mesures.

Takens montrera plus tard que le même objectif peut être atteint avec seulement une grandeur scalaire mesurée, c'est là sa contribution majeure. Takens prouvera qu'au lieu des  $2n+1$  signaux génériques, la version différée en temps d'un signal générique (voir Eq. 20) suffit pour plonger la variété de dimension  $n$ .

$$[y(t), y(t-\tau), y(t-2\tau), \dots, y(t-2n\tau)], \quad (20)$$

Où  $\tau$  est le *delay* choisi de manière arbitraire en théorie.

L'analogie avec la théorie des équations différentielles ordinaires est frappante dans l'idée d'utiliser des coordonnées pour représenter l'état d'un système. Dans la théorie des équations différentielles le théorème d'existence pose qu'une solution unique existe pour tout  $[y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots]$  donné. En mécanique gravitationnelle Newtonienne par exemple la connaissance des positions et moments de chaque corps suffit à déterminer l'évolution future du système. Enfin on peut voir l'équation (20) comme une approximation de la dérivée temporelle :

$$\left[ y(t), \frac{y(t) - y(t-\tau)}{\tau}, \frac{y(t) - 2y(t-\tau) + y(t-2\tau)}{\tau^2}, \dots \right] \quad (21)$$

### 1.4.3.3 La reconstruction de l'espace de phase en pratique

Le choix arbitraire de  $\tau$  est théoriquement suffisant pour reconstruire l'attracteur ; cependant ceci n'est vrai qu'avec un nombre infini de données. Un choix judicieux de  $\tau$  est primordial quand on travaille avec un nombre limité de données. Les méthodes pour déterminer un delay approprié sont basées sur les calculs de la fonction d'auto corrélation et de l'information mutuelle [FS86]. Aussi, étant donné que la dimension  $n$  de l'espace de phase est inconnue a priori, un choix doit être fait sur la dimension  $m$  de l'espace de plongement. Nombre de méthodes *ad hoc* ont été proposées et essayées pour estimer si l'espace de plongement est convenablement déplié par une application  $m$ -dimensionnelle donnée Kennel et al.[KBA92] font office de pionniers dans ce domaines. Les méthodes qu'ils proposent reviennent souvent dans la littérature : cette approche est géométrique.

En général, la réussite d'une reconstruction de l'espace de phase repose sur un bon choix des paramètres  $\tau$  et  $m$ , et celui-ci pour être optimal doit être consciemment choisi en fonction du problème à étudier et de l'application particulière. Aussi la grandeur scalaire mesurée doit être en adéquation avec le système étudié ; en effet une fonction d'observation générique au sens mathématique doit contenir tous les degrés de liberté du système, sans quoi la reconstruction de l'espace en sera affectée. Enfin, une attention particulière doit être apportée au choix de l'échantillonnage et du bruit de mesure expérimentale.

#### 1.4.3.3.1 La méthode du Mutual Information

Le *Time-delayed Mutual Information* a été proposé par Fraser et Swinney [FS86] comme un outil pour déterminer un tau optimal: Contrairement à la fonction d'auto corrélation, l'information mutuelle prend également en compte les corrélations non-linéaire. Avec l'Information mutuelle nous essayons en fait, par l'étude de l'évolution de la série temporelle, de détecter sa « mémoire », en d'autres termes ; en

d'autres termes, à partir d'une valeur actuelle donnée, combien de valeurs futures peuvent être influencé par la présente valeur.

L'objectif est donc similaire à la fonction d'auto corrélation, cependant l'approche et la méthode de calculs sont radicalement différentes :

$$AutoCorr(i) = \sum_{j=1}^{N-1} (x_j - \bar{x})(x_{j+i} - \bar{x}) \quad (22)$$

Il est intéressant de noter que quand  $x_j$  et son terme retardé  $x_{j+i}$  sont en même temps inférieurs, ou supérieurs à la moyenne  $\bar{x}$ , alors le terme dans la somme est toujours positif. Ainsi, si nous considérons une série temporelle construite de telle sorte que quand un terme à une grande valeur alors son terme retardé a aussi une grande valeur, de même que si un terme à une valeur faible son terme retardé est faible : alors, tous les termes de la somme sont positifs et vont conduire à une valeur de l'auto corrélation élevée.

L'auto corrélation est donc un moyen très efficace pour détecter des corrélations linéaires entre les termes d'une série, cependant dans le cas de séries temporelles non linéaires cette méthode montre ses limites.

L'approche par l'Information mutuelle est différente, elle prend sa philosophie des travaux sur l'entropie de l'information. Son principe est le suivant, au lieu de considérer l'évolution continue de la série comme pour l'auto corrélation, ici nous divisons la plage de valeurs de la série en plusieurs intervalles disjoints. Si l'entropie d'information consiste à étudier la distribution des valeurs dans les intervalles, l'Information mutuelle, quant à elle, étudie l'évolution des termes entre les différents intervalles dans le temps.

#### 1.4.3.3.2 La méthode du *False Nearest Neighbour*

Une méthode pour déterminer la dimension minimale  $m$  de l'espace de phase a été proposée par Kennel et al. [KBA92]. Elle est appelée la méthode du *False Nearest Neighbour*. L'idée est assez intuitive : supposons que la dimension minimale de l'espace des phases soit  $m_0$  ; cela signifie que dans l'espace de dimension  $m_0$ , l'attracteur reconstruit est une image de l'attracteur dans l'espace des phases d'origine. En particulier, les propriétés topologiques sont préservées. Ainsi, les voisins d'un point donné, de l'espace d'origine, restent voisins dans l'espace reconstruit. En raison de la continuité et de la dérivabilité supposée de la dynamique, les points voisins dans l'espace d'origine restent voisins dans le nouvel espace.

Supposons maintenant que l'espace reconstruit soit de dimension  $m < m_0$  en fait c'est comme si l'on opérait une projection. En raison de cette projection de la structure topologique n'est plus préservée. Des points se retrouvent dans des voisinages auxquels ils n'auraient jamais appartenu dans la bonne dimension. Ces points sont appelés faux voisins "False neighbour". Si maintenant la dynamique est appliquée (laissant le système évoluer, itération), ces faux voisins ne restent pas dans l'image du voisinage, mettant en défaut ainsi l'hypothèse de continuité et de dérivabilité du système dynamique.

### 1.4.3.4 D'autres paramètres de l'espace de phase

#### 1.4.3.4.1 Le diamètre de l'attracteur

L'estimation de la taille de l'enveloppe maximale contenant la trajectoire de phase est facilement évaluée par la formule suivante :

$$\phi = \sqrt{m} |A_{\max} - A_{\min}|$$

où  $m$  est la dimension de l'espace de phase,  $A_{\max}$  et  $A_{\min}$  les amplitudes maximale et minimale du signal temporel du capteur.

#### 1.4.3.4.2 L'entropie de Shannon

Une série temporelle est suite ordonnée de valeurs, c'est Shannon [Sha01] qui a le premier, proposé d'appliquer le concept de l'entropie aux séries temporelles. Cette fonction mathématique sert à quantifier l'information contenue dans un signal reçu par rapport à un émetteur. Du point de vue du récepteur, plus la source émet d'informations différentes, plus grande sera son entropie. A l'opposé plus le signal contient des informations redondantes et plus l'entropie sera faible.

L'entropie de Shannon est définie, pour une variable aléatoire  $X$  avec  $n$  réalisations possibles, par :

$$H = -\sum_{i=1}^n P_i \ln P_i \quad (23)$$

avec  $P_i = P(X = X_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$

Le calcul de cette entropie sur plusieurs catégories de signal laisse apparaître 3 catégories de signal-type :

1. **Signal périodique** : l'entropie dans ce cas est nulle, le récepteur n'a pas besoin de l'intégralité du signal, quelques points et la période lui suffisent amplement.
2. **Signal non-linéaire déterministe** : l'entropie a ici une valeur finie bornée, elle d'autant plus élevée que le signal est riche en informations non-redondantes.
3. **Signal stochastique** : Dans ce cas l'entropie atteint des valeurs infinies, le récepteur ne pourra jamais deviner le prochain signal.

#### 1.4.3.4.3 Le plus grand exposant de Lyapunov

Ce paramètre, introduit par le mathématicien russe Alexandre Mikhaïlovitch Liapunov (1857-1918), quantifie la tendance et la vitesse à laquelle une petite erreur introduite dans les conditions initiales d'un système dynamique est susceptible de faire diverger la réponse de celui-ci.

## 1.5 Recurrence plot, construction et quantification

Les Recurrence Plots (RP) ont été introduit en 1987 par Eckmann et al. [EKR87] pour visualiser le comportement des trajectoires d'un système dynamique dans son espace de phase . Ils écrivirent ainsi « ...les Recurrence Plots sont une aide aisément obtenue pour le diagnostic de systèmes dynamiques. Ils reflètent des informations importantes et facilement interprétables au sujet des échelles de temps, lesquelles sont autrement difficilement accessibles. »

Plus tard cet outil d'analyse de données s'avéra être utile non seulement en tant que technique de visualisation, mais aussi un moyen de détecter et quantifier des taux de divergence locale, et cela même pour des séries temporelles extrêmement limitées. Plus tard, un ensemble d'outils de mesure, constituant ce qu'on appelle Recurrence Quantification Analysis (RQA), ont été proposés pour quantifier les structures présentes dans les Recurrence Plots. Les RQA devinrent très populaires et ont trouvé nombre d'applications dans différents domaines, surtout les systèmes naturels, tels la physiologie [WJZ94], la géologie [MTN02], l'économie [BFCTL02]. Les Recurrences Plots ne sont pas une nouveauté dans le monde scientifique, cependant, malgré le champ des applications qu'il permet d'entrevoir, il n'est revenu que récemment dans les publications, et cela grâce aux travaux de Marwan [Mar08].

### 1.5.1 Recurrence Plots

Comme nous l'avons dit précédemment, un RP visualise la trajectoire d'un système dynamique dans l'espace de phase. Supposons que la série temporelle suivante représente la trajectoire du système dans l'espace de phase, tel que

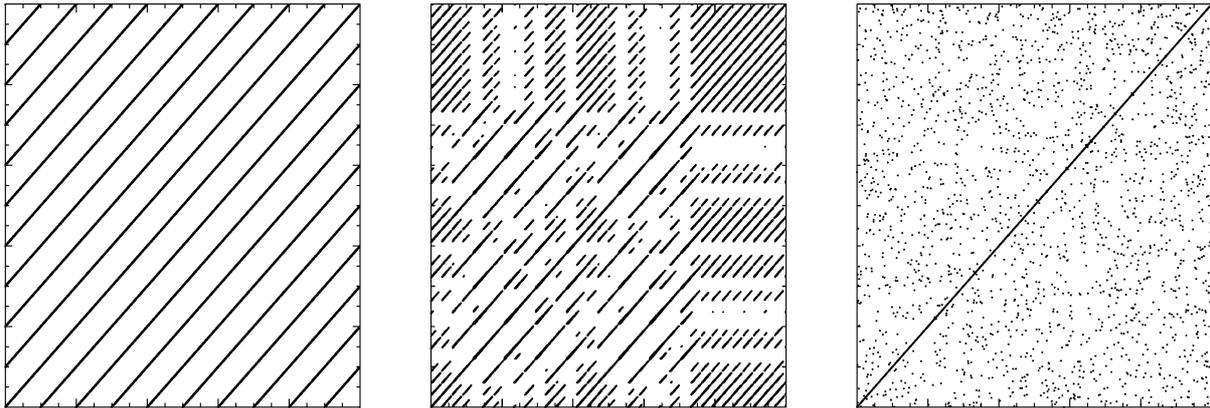
$$\{x_i\}_{i=1}^N, \quad x_i \in \mathfrak{R}^d,$$

alors le RP est construit d'après la relation :

$$R_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (24)$$

où  $\Theta(\cdot)$  est la fonction d'Heaviside,  $\|\cdot\|$  est une norme (ex :Euclidienne) et  $\varepsilon$  est un seuil prédéfini. A travers ce travail nous n'utiliserons que la norme euclidienne. Bien que la fonction d'Heaviside soit systématiquement utilisée pour toutes les analyses et calculs ici, nous aurons recours de temps à temps à une fonction linéaire pour des raisons de clartés de représentation et de confort, on parlera alors de Distance Plot, (cf. 3.3.2).

Un RP est alors une matrice avec des valeurs 1 et 0, souvent dans sa représentation graphique le 1 est codé par un pixel noir et le 0 par un pixel blanc (sauf dans le cas du *Distance Plot* ou on a une matrice en niveau de gris).



**Figure 1.16** : De gauche à droite, RP d'un signal périodique, un signal chaotique et d'un signal aléatoire

Sur la Figure 1.16 nous représentons des formes typiques de RP. Nous observons que le RP d'une fonction périodique montre des lignes diagonales continues distantes de  $T$  période de la fonction. Cela traduit simplement le fait qu'après une période, la position du système dans l'espace de phase est exactement la même, nous avons la même récurrence aussi petit que soit  $\varepsilon$ . Le RP d'un bruit blanc est assez homogène, car toutes les zones de l'espace de phase ont la même probabilité d'être visité par le système. Le RP d'un système chaotique, c'est celui du système de Rössler dont le portrait de phase est présenté sur la Figure 1.17. Les structures prédominantes sont intermédiaires entre le comportement périodique et le comportement purement stochastique :

- La distance entre les lignes diagonales n'est pas constante, c'est la preuve de la présence d'échelles de temps multiples dans le système chaotique.
- Les lignes diagonales sont interrompues, cela est dû au phénomène de divergence exponentielle de trajectoires initialement proches. Lorsqu'une trajectoire du système revient visiter une région voisine précédemment visitée, le système se comporte de façon similaire les deux fois (c'est le déterminisme). Cependant la sensibilité du système à des conditions initiales même très proches, après un certain temps, les trajectoires se séparent et donc formant des lignes discontinues au niveau du RP.

Notons aussi que la longueur des lignes est à relier avec la prédictibilité du système. C'est l'argument principal qui a été utilisé pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov comme inverse de la longueur moyenne des lignes diagonales dans le RP [AA99]. Cependant des travaux réfutent cette dernière hypothèse [MCRTK07].

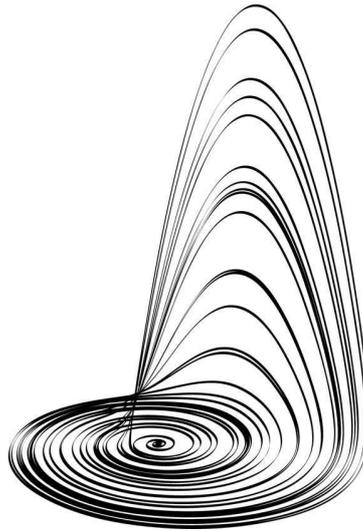


Figure 1.17 : Attracteur étrange du système de Rössler.

### 1.5.2 Recurrence quantification analysis

La Recurrence Quantification Analysis a été introduit dans le milieu des années 90 par les professeurs Charles L. Webber et Joseph P. Zbilut [WJZ94], avec pour objectif de quantifier les structures trouvées dans les RP, et par conséquent aller au delà de l'inspection purement visuel. La quantification des structures diagonales est fondamentale pour la RQA, en effet ces structures sont la clé de la classification des différents comportements dynamiques du système. Les mesures de RQA les plus courants sont :

- **Recurrence Rate (RR)** : c'est le pourcentage de points noirs sur le RP

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (25)$$

On peut noter que la définition du recurrence rate coïncide avec la fonction de corrélation [GP83].

- **Determinism (DET)** : c'est le pourcentage de points noirs se trouvant sur les lignes diagonales de longueur minimales  $l_{\min}$  [Mar03],

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N IP(l)}{\sum_{l=1}^N IP(l)}, \quad (26)$$

$P(l)$  est la probabilité de trouver une ligne diagonale de longueur  $l$  dans le RP. Cette mesure a été introduite pour quantifier la prédictibilité d'un système. Par exemple pour un système périodique on a  $DET = 1$  et pour un système stochastique, elle tend vers zéro. Cependant le

paramètre  $l_{\min}$  est crucial et les résultats dépendent de celui-ci, il apparait cependant que les méthodes de choix de ce paramètre soient controversées [Mar03].

- **Divergence (DIV)** : c'est la mesure qui est utilisé pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov [TGZ+96], elle est définie par :

$$DIV = \frac{1}{L_{\max}}, \quad (27)$$

avec  $L_{\max}$  la plus longue diagonale dans le RP, en excluant la diagonale principale du RP.

- **Entropie (L\_entr et V\_entr)** : c'est l'entropie de Shannon de la probabilité de distribution des lignes diagonales (L\_entr) et verticales (V\_entr).

$$ENTR = - \sum_{l=l_{\min}}^N p(l) \ln p(l) \quad (1)$$

- **Ratio (RATIO)** : c'est le rapport entre DET et RR,

$$RATIO = \frac{DET}{RR} \quad (28)$$

cette mesure a été introduite pour détecter des transitions entre différents états physiologiques qui impliquent un changement du RR alors que DET reste constant.

Les mesures RR, DET, DIV et ENTR peuvent aussi être évalués pour chaque ligne diagonale, il est par exemple possible de les estimer en fonction de la distance par rapport à la diagonale principale [MCRTK07].

Ces mesures quantifient les structures générées par les systèmes dynamiques dans les RP. Cependant le problème qui se pose est la sensibilité de celles-ci et leur dépendance au choix des paramètres  $m$  (dimension de l'espace de phase) et  $\tau$  (le delay).

Les mesures précédentes sont basées sur la distribution des lignes diagonales  $P(l)$ . Marwan et Kurths [MCRTK07] ont introduit trois nouvelles mesures quantifiant les structures verticales (resp. horizontales par symétrie), lesquelles sont :

- **Laminarity (LAM)** : c'est l'analogue du DET, définie comme le pourcentage de pixels noirs appartenant à des lignes verticales de longueur minimale  $l_{\min}$  :

$$LAM = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N l P_v(l)}{\sum_{l=1}^N l P_v(l)} \quad (29)$$

$P_v(l)$  étant la probabilité de trouver une ligne verticale de longueur  $l$  dans le RP. LAM quantifie la présence d'état laminaire pour une trajectoire donnée.

- **Trapping Time (TT)** : c'est la moyenne des lignes verticales,

$$TT = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N l P_v(l)}{P_v(l)} \quad (30)$$

TT mesure le temps moyen où le système reste confiné dans un état donné.

- **Maximal vertical length ( $V_{\max}$ )**, c'est l'analogie de la plus longue ligne diagonale du RP (de même on peut également considérer son inverse)

Nous venons de terminer cette partie consacrée à l'introduction à la Dynamique non-linéaire, l'ensemble des outils de la *Nonlinear Time Series Analysis* (NTSA) et enfin le *Théorème de Takens* [Tak81]. Nous avons aussi vu par quels moyens reconstruire un espace de phase à partir de données expérimentales, et pour finir comment l'analyser et en tirer des statistiques significatives grâce à des outils tels les *Recurrence Plot* (RP) et la *Recurrence Quantification Analysis* (RQA).

Nous allons maintenant, pour clore ce chapitre, aborder une autre partie de ce travail de thèse à savoir la modélisation du contact fibreux.

## 1.6 Modélisation

### 1.6.1 Etat de l'art, quelques modèles de contact dynamique

Dans cette partie nous nous focaliserons dans un premier temps aux modèles faisant intervenir du *stick-slip*. Le *stick-slip* est intimement lié à la nature des phénomènes de frottement et est souvent attribué à la différence entre coefficient de frottement statique et dynamique. Alors que la tribologie est un sujet relativement ancien qui joue un rôle important dans beaucoup de domaines d'ingénierie, nous avons vu qu'elle reste un sujet en perpétuelle évolution, loin d'être maîtrisé. La difficulté essentielle dans la description du phénomène de *stick-slip* vient de la nature supposée de la loi de Coulomb, qui implique le changement de direction de la force de frottement quand la vitesse relative des surfaces en frottement passe par zéro.

Le terme *stick-slip* fait référence au mouvement de corps solides durant lequel apparaissent des vibrations auto-maintenues provoquées par des collés-glissés successifs au niveau de l'interface de friction. Dans nombres de systèmes mécaniques d'échelles allant du nano au géologique on trouve des manifestations de ce phénomène. Le *stick-slip* a fait l'objet d'études depuis plus de 75 ans, et ses développements sont intimement liés à celui de l'étude des instabilités de frottement.

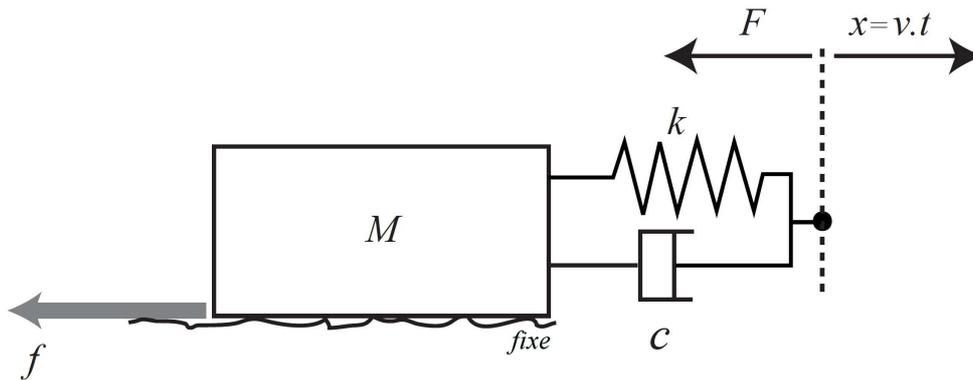
Dans un phénomène de *stick-slip* deux acteurs majeurs entrent en jeu :

- Une composante élastique,
- Une interaction de frottements.

Les cycles du *stick-slip* sont alors dus au transfert d'énergie entre l'énergie potentielle stockée par la composante élastique et l'énergie cinétique de l'objet. Dans certaines publications, il est requis que le

coefficient de frottement à l'interface diminue avec la vitesse[Rab65], cependant il apparait dans beaucoup de travaux que ceci n'est pas une condition sine qua non d'obtention du *stick-slip*.

Nous avons déjà abordé un modèle simple de *stick-slip* en dans la Section 1.3. Nous allons présenter ici une discussion plus approfondie sur le modèle de Wensrich [Wen06] dont l'originalité repose sur la prise en compte de la composante visco-élastique dans la condition d'occurrence du *stick-slip*. Ensuite nous aborderons notre travail proprement dit sur la modélisation du contact fibreux à partir d'une synthèse bibliographique des travaux dont nous nous sommes inspirés. Les équations finales de notre modèle seront présentées au Chapitre 2.



**Figure 1.18** : Modèle viscoélastique de Wensrich.

Les équations du mouvement du système représenté sur la Figure 1.18 sont :

$$\ddot{x} = \omega^2(vt - x) + 2\zeta\omega(v - \dot{x}) - F_f \quad (31)$$

En notant :

- $x(t)$  le déplacement de la masse à l'instant  $t$ ,
- $\omega = \sqrt{k/M}$  la fréquence propre naturelle du système,
- $\zeta = C/(2M\omega)$  est le taux d'amortissement,
- $F_f$  est la force de frottement rapportée à la masse, elle s'oppose au mouvement de la masse.

Dans la forme la plus simple de modélisation le frottement est modélisé par deux paramètres : les coefficients de frottement statique et dynamique respectivement  $\mu_s$  et  $\mu_d$ . Dans la phase de « collé », la masse est alors statique, la force de frottement est comprise entre zéro et sa valeur maximale fixée par le coefficient statique de frottement. Cette force est alors égale, dans cette phase, à la force de rappel du ressort. Une fois que la valeur maximale, fixée par le frottement statique, dépassée la force de frottement est transférée en énergie cinétique. En supposant que la masse ne se déplace que dans un sens que, par convention, nous fixons positifs il vient alors que la force de frottement vaut :

$$F_f = \begin{cases} \min[\omega^2(vt - x) + 2\zeta\omega(v - \dot{x}), \mu_s g] & \text{pour } \dot{x} = 0 \\ \mu_d g & \text{pour } \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (32)$$

Pour des raisons pratiques nous allons passer à l'équation normalisée du système en posant  $x^* = \omega x / v$  et  $t^* = \omega t$ . Les équations normalisées s'écrivent désormais :

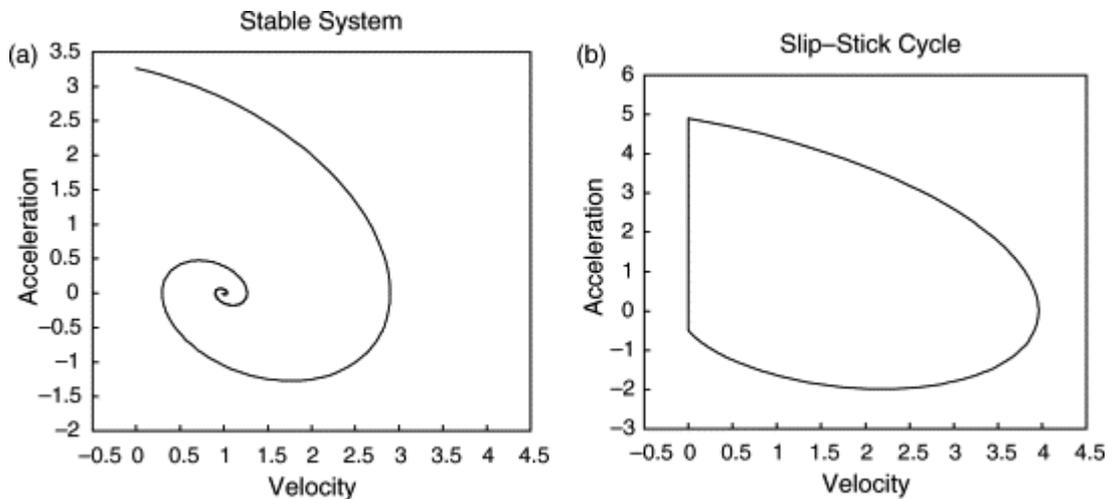
$$\ddot{x}^* = t^* - x^* + 2\zeta(1 - \dot{x}^*) - F_f^* \quad (33)$$

La valeur de la force de frottement devient alors :

$$F_f = \begin{cases} \min\left[t^* - x^* + 2\zeta(1 - \dot{x}^*), \frac{\mu_s g}{\omega v}\right] & \text{pour } \dot{x}^* = 0 \\ \frac{\mu_d g}{\omega v} & \text{pour } \dot{x}^* > 0 \end{cases} \quad (34)$$

Nous allons donc étudier le *stick-slip* prenant pour base les équations précédentes. A partir de maintenant nous allons utiliser exclusivement les dimensions normalisées en omettant la retranscription des astérisques.

La résolution du système précédent montre deux régimes, le premier correspond à un régime stable s'amortissant dans le temps, et le second au *stick-slip* (Figure 1.19). Reprenons les équations précédentes pour comprendre le passage entre la solution *stick-slip* et la solution stable.



**Figure 1.19** : Deux régimes, à gauche le régime stable et à droite occurrence des instabilités *stick-slips* [Wen06].

La discontinuité de la force de frottement présente une difficulté analytique. Nous verrons dans la section suivante comment prendre en compte celle-ci. Pour l'instant et vu qu'on a affaire à un système simple, nous allons lever cette discontinuité en considérant simplement les moments de « glissé ». La force de frottement est alors définie à partir de l'énergie cinétique (générée par le frottement dynamique) et l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{x} = t - x + 2\zeta(1 - \dot{x}) - \frac{\mu_d g}{\omega v} \quad (35)$$

Une phase de « glissé » commence quand la masse est soumise à une force à la limite autorisée par le coefficient statique de friction ; une fois cette phase amorcée il n'y a que deux cas possibles, la masse entre en mouvement soit pour un temps fini, soit pour un temps infini. En prenant les conditions initiales adéquates, nous pouvons, en commençant l'analyse du système au début du « glissé », décrire de manière adéquate l'évolution du système jusqu'au « collé ». Les conditions initiales adéquates consistent à mettre la masse à la limite de glissement à  $t = 0$ . Avec la masse initialement au repos ( $\dot{x}(0) = 0$ ), nous imposons donc la force de frottement initiale à sa valeur limite de glissement :

$$F_f = \frac{\mu_s g}{\omega v} \quad (36)$$

Injectant cette valeur initiale nous obtenons la position initiale de la masse à la limite de glissement :

$$x(0) = -\left(\frac{\mu_s g}{\omega v} - 2\zeta\right) \quad (37)$$

Grâce à cette simplificatrice la discontinuité est levée et nous avons simplement affaire à une équation différentielle aux valeurs initiales, sa résolution en fonction des paramètres nous dira si le système va évoluer de manière régulière et « lisse » ou si au contraire l'instabilité du *stick-slip* va se manifester. Si la solution pour la vitesse du système atteint la valeur du régime permanent ( $\dot{x} = 1$ ) sans que la vitesse ne prenne la valeur nulle à aucun moment, alors nous ne sommes pas dans le cas instable du *stick-slip*. Cependant s'il existe un instant  $t > 0$  où la vitesse atteint une valeur nulle, la masse va « coller » et le régime sera erratique, irrégulier. Partant de là, la condition nécessaire et suffisante d'occurrence du régime de *stick-slip* est  $\dot{x}(t_s) = 0$ , pour un temps  $t_s > 0$ . Si l'on considère uniquement l'instant correspondant au premier « collé », la frontière entre les systèmes qui présentent du *stick-slip* et ceux stables est donnée par les équations qui imposent que  $\dot{x}(t_s) = 0$ , soit un minimum absolu (soit :  $\ddot{x}(t_s) = 0$ ) citer [Wen06].

La résolution du problème aux valeurs initiales donne :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e^{-\zeta t} \left( \frac{(\phi - \zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} t) - \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} t) \right) + 1 \\ \ddot{x}(t) &= e^{-\zeta t} \left( \phi \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{(1 - \zeta\phi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} t) \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Reprenant ce qui a été écrit précédemment (Equation 37), si on se place à la frontière du *stick-slip* les deux termes précédents seront annulés (à  $t_s$ ) :

$$\begin{aligned}
 0 &= e^{-\zeta t_s} \left( \frac{(\phi - \zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} t_s) - \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} t_s) \right) + 1 \\
 0 &= e^{-\zeta t_s} \left( \phi \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} t_s) + \frac{(1 - \zeta \phi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} t_s) \right)
 \end{aligned} \tag{39}$$

Il vient d'après ces équations les valeurs de  $t_s$ , instants où la masse à une accélération nulle :

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left\{ \tan^{-1} \left( -\frac{\phi \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - \zeta \phi} \right) \pm n\pi \right\} \quad n \in \mathbb{N} \tag{40}$$

Cette dernière équation montre que  $t_s$  peut être écrit exclusivement comme étant une fonction de  $\phi$  et  $\zeta$ . En remplaçant cette expression (40), on obtient une équation de la forme :

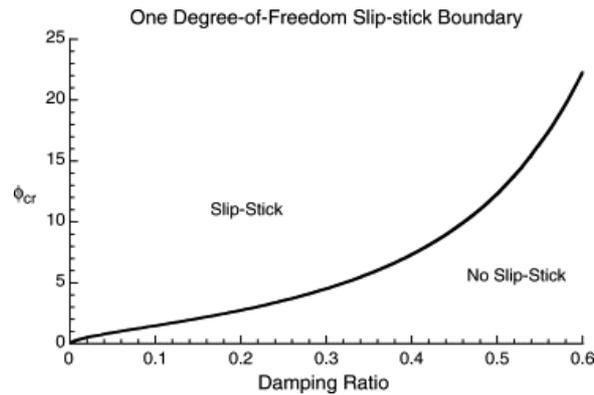
$$\Psi(\phi, \zeta) = 0 \tag{41}$$

Avec  $\Psi$ , une fonction exclusive de  $\phi$  et de  $\zeta$ .

Nous avons alors là une relation entre  $\phi$  et  $\zeta$  montrant la frontière du *stick-slip* de notre système de départ. Seulement,  $\Psi$  est une fonction hautement non-linéaire et une relation explicite entre  $\phi$  et  $\zeta$  est assez particulière au système étudié. Si une relation explicite existe, la frontière entre le *stick-slip* et un régime permanent stable pourrait se définir par :

$$v_{\text{lim}} = \frac{g(\mu_s - \mu_d)}{\omega \phi_{\text{lim}}(\zeta)} \tag{42}$$

Avec  $v_{\text{lim}}$  la vitesse limite entre l'état de *stick-slip* et le régime permanent « lisse ». L'expression de  $\phi_{\text{lim}}$  en fonction de  $\zeta$  peut être déterminée numériquement en utilisant un algorithme non-linéaire de recherches des racines d'une fonction (Newton-Raphson). La résolution de l'équation (38) pour des valeurs successives du coefficient d'amortissement donnerait une cartographie de la frontière entre les états *stick-slip* et stable du système (voir Figure 1.20), [Wen06] où on peut voir ladite frontière en fonction du coefficient d'amortissement. On y voit surtout que l'amortissement est essentiel à l'apparition du *stick-slip* ; en effet le même système sans amortissement montrera systématiquement du *stick-slip* alors qu'infiniment amorti le *stick-slip* disparaît.



**Figure 1.20** : Frontière entre les régions stables et instables (*stick-slip*), en fonction de l'amortissement [Wen06].

Nous avons vu dans cette partie que l'analyse de ce système simple de *stick-slip* a laissé entrevoir les difficultés inhérentes à la résolution des équations de modélisations. Le modèle que nous avons envisagé est basé sur la prise en compte de la séparation des surfaces en contact par le biais d'une variable interne, en outre il prend en compte la formulation d'un cisaillement tangentiel, ce que tous les modèles que nous avons vu jusque là ne prennent en compte. Nous allons dans cette section qui va suivre présenter une rétrospective des travaux desquels nous sommes partis avant de présenter notre modèle au Chapitre 2 du manuscrit.

## 1.6.2 Vers une modélisation du contact fibreux

### 1.6.2.1 Introduction, démarche

Le modèle que nous proposerons dans la deuxième partie de ce manuscrit s'inspire de travaux que nous allons résumer ici, mais on peut d'ores et déjà dire que l'originalité de ce modèle est qu'il prendra en compte le cisaillement du capteur de *Modalsens* sur les aspérités fibreuses par l'intermédiaire d'une variable  $z$ . Ce modèle prend aussi en compte la séparation des surfaces à l'interface de frottement aussi bien que les déformations locales à l'interface de contact : ce sont là les principales causes de la variation de la dynamique de frottement. Reprenant les travaux antérieurs [OL96, Lau92, DN00] le modèle fait la liaison entre le mouvement tangentiel et la séparation normale, nous introduisons à cet effet deux moyens de réaliser le couplage [DN00] entre la dynamique des variables internes et macroscopiques.

Nous aborderons les interactions tribologiques en séparant les cas d'origine statique et dynamique. Ensuite nous présentons le modèle proprement dit en deuxième partie du manuscrit. Nous analyserons les états dynamiques possibles, en particulier l'occurrence du *stick-slip* et ses caractéristiques. Ensuite nous ferons une analyse particulière en isolant des degrés de liberté individuellement ; ceci dans l'objectif de montrer l'existence d'une hystérésis dans les courbes frottement/déplacement et frottement/vitesse. Nous concluons enfin par une discussion sur la contribution de ce présent modèle comparé à celles existant déjà dans la littérature.

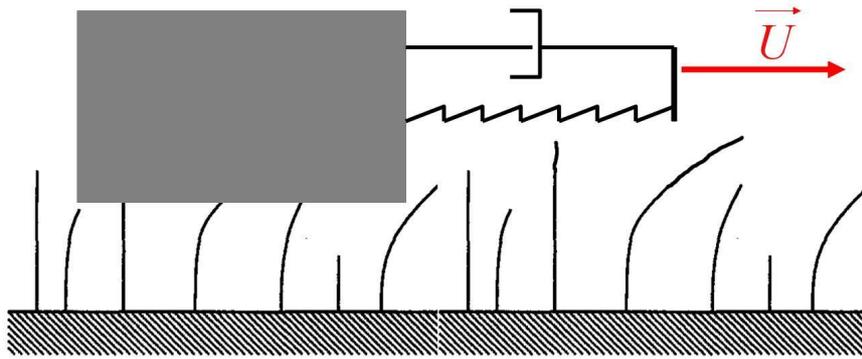


Figure 1.21 : Modèle du contact fibreux à un degré de liberté.

### 1.6.2.2 Interaction surfacique

Comme nous l'avons dit plus haut, l'origine des interactions tribologiques des surfaces repose sur le contact entre les hétérogénéités et aspérités de surface. Nous supposons que les aspérités ont ici les mêmes propriétés physiques, pas nécessairement géométriques. Leur description géométrique est simplifiée ici à la donnée de leur hauteur ; celle-ci est gouvernée par la probabilité de distribution  $\phi(h)$ , où  $h$  est la hauteur relative à une surface de référence plane. Nous supposons ensuite que la distribution spatiale des aspérités est uniforme. Enfin nous supposons qu'une aspérité se déforme indépendamment de ses voisines. Enfin une aspérité est modélisée par un simple ressort linéaire :

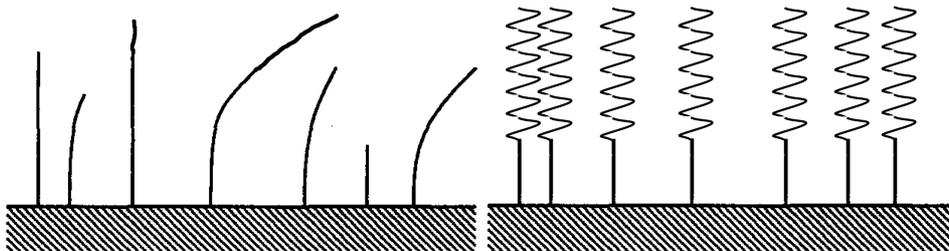
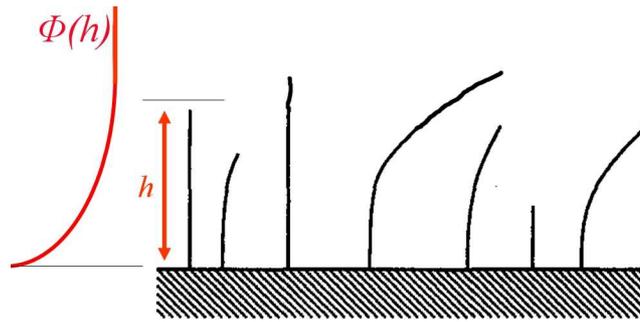


Figure 1.22 : Modélisation des aspérités par de simples raideurs.

Il est communément admis qu'une surface satisfait une distribution Gaussienne, cependant pour des raisons de confort de calculs Greenwood et Williamson [GJM84] ont fait l'hypothèse selon laquelle les aspérités satisfont une distribution exponentielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(h) = \frac{1}{\sigma} e^{-h/\sigma}, \quad h \geq 0 \\ \phi(h) = 0, \quad h < 0 \end{array} \right. \quad (43)$$

Avec  $\sigma$  l'écart-type de la distribution.



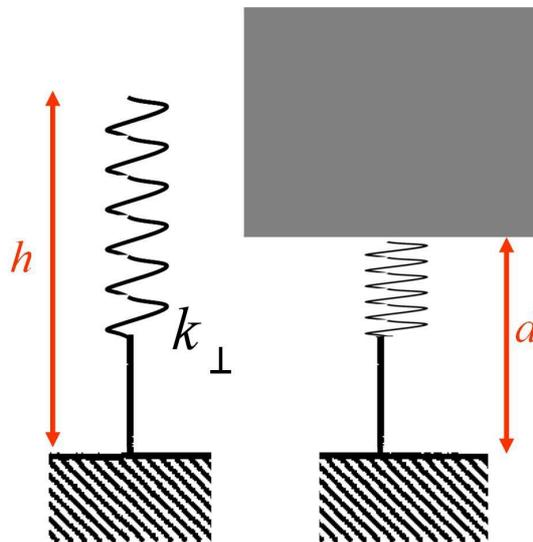
**Figure 1.23** : Définition de la hauteur des aspérités, distribution exponentielle.

### 1.6.2.2.1 Forces statiques et forces quasi-statiques

Si nous notons  $d$ , la séparation entre les surfaces de référence des deux corps interagissant, alors le nombre total d'aspérités en contact est donné par l'intégrale suivante :

$$A_0 \zeta \int_d^{\infty} \phi(h) dh = A_0 \zeta e^{-d/\sigma} \quad (44)$$

Où  $A_0$  est la surface de contact nominale, et  $\zeta$  est la densité des aspérités de surface.



**Figure 1.24** : Définition de la distance de séparation.

En statique, la charge normale appliquée  $N_a$  est supportée en compression simple par les aspérités.

Nous modélisons la charge normale sur une aspérité par la fonction  $f_c(h)$  :

$$\begin{cases} f_c(h) = k_{\perp}(h-d), & k_{\perp} = \text{const} > 0, \text{ si } h > d \\ f_c(h) = 0, & \text{si } h \leq d \end{cases} \quad (45)$$

Nous retrouvons un modèle similaire à celui d'Hertz des sphères déformables [Greenwood1984, Björklund1994].

La charge normale totale sur les aspérités est alors donnée par :

$$N(d) = A_0 \zeta \int_d^{\infty} f_c(h) \phi(h) dh = A_0 \zeta k_{\perp} \sigma e^{-d/\sigma} \quad (46)$$

En statique c'est la seule contribution de la force normale sur les aspérités, d'où si on note  $d_{eq}$  la séparation entre les surfaces de référence à l'équilibre statique il vient :

$$N(d_{eq}) = N_a \Rightarrow N(d) = N_a e^{-\Delta d/\sigma} \quad (47)$$

Avec  $\Delta d = d - d_{eq}$

Nous allons supposer comme [DN00], ce qui nous paraît réaliste, que les aspérités ne se déplacent pas immédiatement par rapport à la masse qui applique la charge, si un déplacement tangentiel est appliqué. Les aspérités sont ainsi capables de « subir » une charge tangentielle par le biais d'un cisaillement. La charge tangentielle maximale qu'une aspérité peut porter avant de glisser sera supposée proportionnelle à la charge normale que celle-ci supporte. Nous définissons ainsi la charge tangentielle maximale totale par :

$$T_{\max}(d) = A_0 \zeta \int_d^{\infty} \mu f_c(h) \phi(h) dh = \mu N(d) \quad (48)$$

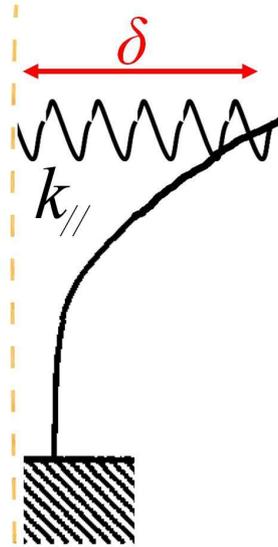
c'est la loi classique de Coulomb,  $\mu$  est homogène au coefficient de frottement.

Par le raisonnement précédent il vient que la déformation tangentielle maximale possible pour une aspérité dépend de la hauteur de celle-ci. Ainsi en imposant un déplacement tangentiel, les aspérités les plus petites, soumises à un effort de compression plus petit, vont commencer à glisser les premiers avant leur voisin plus longs. Ainsi la charge tangentielle totale, ne va atteindre une valeur proche de  $T_{\max}(d)$  qu'à partir d'un déplacement tangentiel suffisamment grand. D'autre part si toutes les aspérités glissent et que le mouvement macroscopique est brusquement inversé, alors les petites aspérités vont commencer à glisser dans le sens opposé en premier, alors que les plus longues seront toujours cisailées dans la direction inverse.

Pour prendre en compte ce comportement quasi statique et local, dans le sens qu'il concerne les aspérités individuellement et que ce n'est pas l'objectif de notre modélisation, nous allons procéder de manière analogue à Canudas et al. [CdWNAB91] repris par Danckowicz et al. [DN00] Nous

introduisons une déformation de cisaillement équivalente,  $z$ , qui décrit une déformation collective des aspérités. Là nous rappelons que les aspérités sont considérées comme des ressorts linéaires, la force tangentielle supportée par une aspérité est :

$$f_s(\delta) = k_{//} \delta, \quad k_{//} = \text{const} > 0, \quad (49)$$



**Figure 1.25** : Déformation tangentielle d'une aspérité.

avec  $\delta$  la déformation de l'aspérité. La déformation moyenne pour une charge tangentielle maximale est alors de :

$$\bar{\delta} = \frac{T_{\max}(d)}{k_{//} A_0 \zeta \int_d^{\infty} \phi(h) dh} = \frac{\mu k_{\perp}}{k_{//}} \sigma \quad (50)$$

Ici nous faisons la même hypothèse que Björklund et al. [BA94] en faisant l'hypothèse  $k_{\perp} \approx k_{//}$  d'où :

$$T(d) = T_{\max}(d) \frac{z}{\bar{\delta}} = \mu N_a e^{-\Delta d/\sigma} \frac{z}{\bar{\delta}} \quad (51)$$

avec  $z \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$ , nous modélisons enfin la déformation équivalente  $z$  par l'équation :

$$\dot{z} = \dot{x} \left( 1 - \text{sign}(\dot{x}) \frac{z}{\bar{\delta}} \right) \quad (52)$$

Quand  $\dot{x} > 0$  (resp.  $\dot{x} < 0$ ),  $z$  augmente vers  $\bar{\delta}$  (resp.  $z$  diminue vers  $-\bar{\delta}$ ). Il est intéressant de noter ici que la déformation  $z$  étant défini par une équation différentielle, celle-ci ne réagit pas instantanément aux changements de vitesse. Cela reste valable pour le décalage entre la direction du mouvement et la charge tangentielle.

### 1.6.2.2.2 Interactions dynamiques

Dans cette partie nous essayons de trouver une formulation adéquate de la variable d'état interne  $\Delta d$ . De ce qui précède, nous déduisons aisément que l'équation (différentielle) régissant cette variable doit traduire son couplage avec le mouvement tangentiel, en d'autres termes le couplage entre dynamique tangentiel et dynamique normale. Un tel couplage est réalisé dans la plupart des études par un transfert de la quantité de mouvement de la direction tangentielle à la normale. A notre connaissance il n'existe pas de modèle d'un tel transfert sur des matériaux fibreux, cette tâche est d'autant plus ardue qu'un tel milieu est sujet à des particules mobiles et bien évidemment ce transfert de moment est très sensible à la disposition des particules (orientation pileuse, forme et taille du grains, traitement surfacique...). Ce n'est pas le propos de notre travail ici, en effet la modélisation d'un tel milieu est complexe et sort des cadres de notre compétence. Nous contentons du modèle simple d'Oancea et al. [OL96] dont l'objectif premier est de s'intéresser en particulier à un modèle mathématique de frottement à travers le couplage entre la séparation normale et le déplacement tangentiel, en modélisant toutes les aspérités par des sphères parfaites.

Nous rappelons que nous nous intéressons à une masse mobile sur une surface d'aspérités, pendant le déplacement de la masse certaines aspérités collent, d'autres glissent et d'autres enfin sont relâchées. Nous avons déjà adressé la question des phases de « collé » et celles de « glissé », notre propos dans cette partie est de modéliser le couplage mentionné plus haut et qui traduit le « décollé » de la masse, en considérant le transfert de quantité de mouvement issue de la collision sur les aspérités et de proposer un modèle équivalent de pression tangentielle et normale.

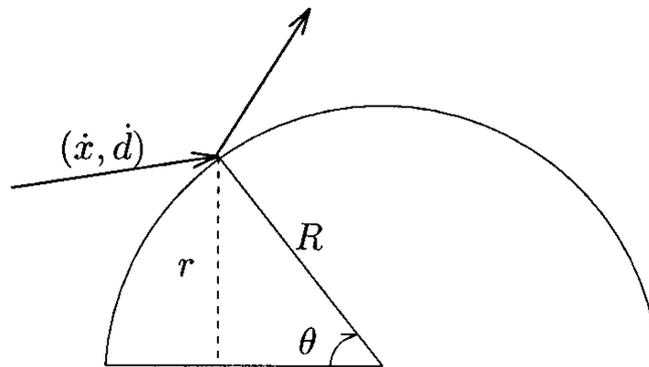


Figure 1.26 : Modélisation de l'interaction dynamique.

Considérons une particule de vitesse  $(\dot{x}, \dot{d})$  projetée sur une sphère fixe, en un point faisant un angle  $\theta$  d'avec l'horizontale par rapport au centre de la sphère. En supposant une collision élastique, sans frottement sur la sphère, le changement de quantité de mouvement de la sphère s'écrit :

$$\Delta p = \begin{bmatrix} \dot{x}(-\cos 2\theta - 1) + \dot{d} \sin 2\theta \\ \dot{x} \sin 2\theta + \dot{d}(\cos 2\theta - 1) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ici, en posant  $r = R \sin \theta$ , Oancea, Danckowicz [OL96, DN00] font l'hypothèse que les aspérités sont plus larges que hautes et que par conséquent  $\theta$  est proche de  $\pi/2$ , soit encore,  $r \approx R$ . Une hypothèse supplémentaire est de dire que les déplacements verticaux sont négligeables devant le déplacement macroscopique :  $\dot{d} \ll \dot{x}$ . Ces dernières hypothèses donnent, en développant au premier ordre en  $1 - r/R$  :

$$\Delta p = \begin{pmatrix} -4\dot{x}(1-r/R) \\ 2\sqrt{2}\dot{x}\sqrt{1-r/R} - 2\dot{d} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Le nombre total de collisions, pendant un intervalle de temps donné, est proportionnel à la vitesse  $\dot{x}$  et au nombre total d'aspérités en contact durant cet intervalle. Sachant que le nombre d'aspérités en contact est lui-même proportionnel à la charge normale  $N(d)$ , la quantité de mouvement résultant de toutes les collisions, et par conséquent la force agissant sur la masse, est proportionnelle à  $\dot{x}N(d)\Delta p$ , d'où :

$$F = N_a \begin{pmatrix} -\alpha\dot{x}\operatorname{sgn}(\dot{x})(1 - \Delta d/d_\infty) \\ \beta\dot{x}^2\sqrt{1 - \Delta d/d_\infty} - \gamma|\dot{x}|\dot{d} \end{pmatrix} e^{-\Delta d/\sigma} \quad (55)$$

Notez ici que la composante suivant  $x$  de la force  $F$  dépend du sens du déplacement - donc de  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ . En outre sa composante verticale ne dépend pas du sens du mouvement, par égard à la symétrie des aspérités. Ce dernier point sera à reconsidérer si nous voulons reproduire un effet *poil/rebrousse poil* par exemple.

A ce stade de nouveaux paramètres ont fait leur entrée :

- $\Delta d$  est une variable, la distance séparant les deux surfaces avant le choc (équivalent de  $r$  quand on ne considèrerait qu'une seule aspérité)
- $d_\infty$  est l'équivalent du rayon  $R$  de l'aspérité, en fait ce paramètre est une constante liée à la géométrie de l'aspérité.
- Enfin  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  sont des constantes d'ajustement.

### 1.6.2.3 En résumé

Ce modèle d'interactions surfaciques, comme tout modèle semi-heuristique, pose le problème de la détermination des paramètres que nous avons défini. La détermination de ces paramètres doit se faire à partir d'observations expérimentales et de simulation numérique. Ainsi une comparaison permettra de dégager des critères pour une meilleure corrélation.

Si nous reprenons les équations précédentes nous en déduisons la force globale de frottement, en faisant la somme de toutes les composantes tangentielles :

$$F_{frott} = -N_a \left[ \alpha \dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}) (1 - \Delta d / d_\infty) + \mu(z / \bar{\delta}) \right] e^{-\Delta d / \sigma} \quad (56)$$

Nous remarquons dans cette précédente équation le couplage entre la séparation normale et la pression normale, ce qui affecte la force de frottement en retour et par conséquent le déplacement tangentiel de la masse. Nous pouvons maintenant écrire les équations du mouvement du système présenté sur la Figure 1.21 :

$$m \ddot{d} = N_a (e^{-d/\sigma} - 1) + N_a \left[ \beta \dot{x}^2 \sqrt{1 - \frac{d}{d_\infty}} e^{-d/\sigma} - \gamma |\dot{x}| \dot{d} e^{-d/\sigma} \right],$$

$$m \ddot{x} = k_1 (Ut - x) + c_1 (U - \dot{x}) - N_a \left[ \mu e^{-d/\sigma} \frac{z}{\bar{\delta}} + \alpha \dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}) \left( 1 - \frac{d}{d_\infty} \right) e^{-d/\sigma} \right], \quad (57)$$

$$\dot{z} = \dot{x} \left( 1 - \text{sign}(\dot{x}) \frac{z}{\bar{\delta}} \right).$$

Nous rappelons que  $U$  est le mouvement macroscopique de la masse (cf. Figure 1.21).

#### 1.6.2.4 Conclusion sur la modélisation du contact fibreux

Ce modèle que nous présentons ici est un résumé de travaux qui ont été fait sur le contact solide. L'originalité de cette approche est la prise en compte dans une variable d'état de la déformation à l'interface de contact. Nous pensons que c'est le modèle le plus adapté à la modélisation du contact dynamique fibreux. Nous présentons dans le Chapitre 2 comment nous adaptons ce modèle à la dynamique du capteur de *Modalsens*, en passant de 1 à 2 degrés de liberté. Auparavant nous allons présenter la méthode numérique que nous utilisons pour la résolution des équations du modèle.

### 1.7 Introduction aux systèmes de Filippov [FA88]

La modélisation d'un système dynamique présentant aussi du *stick-slip* peut se révéler très complexe, par ailleurs la résolution des équations nécessite quelques précautions. En général les solutions classiques d'une équation différentielle sont des fonctions dérivables, par conséquent une équation différentielle doit vérifier un certain nombre de conditions, le terme générique pour nommer de telles conditions est la *régularité*. Cependant, on a vu que le *stick-slip* est une discontinuité dans l'espace de phase, par conséquent les équations différentielles qui modélisent le *stick-slip* ne remplissent pas ces dernières conditions de régularité.

La discontinuité due au *stick-slip* est cependant contrainte dans un sous-espace de l'espace de phase, un tel système sera donc qualifié de Système Régulier par Morceau (PSS : *Piecewise Smooth System*), le *stick-slip* fait partie de ces systèmes appelés systèmes de Filippov. La résolution de tels systèmes nécessitent un traitement spécifique. Dans la littérature, il existe différentes méthodes de prise en compte [KRG03, DBBCK07, PK08]. La caractéristique des systèmes de Filippov est l'existence dans l'espace de phase d'un sous-espace où la trajectoire peut être contrainte. Par

analogie au *stick-slip*, et par extension à l'ensemble des systèmes de Filippov ce mouvement contraint est appelé *sticking*.

Si nous reprenons les équations de notre oscillateur de relaxation simple, qui constituent donc un système de Filippov, on peut voir sur la représentation de l'espace de phase du système la présence de deux régions distinctes de l'espace de phase. Par définition la frontière entre ces deux régions est la surface de discontinuité. Nous allons voir maintenant comment arriver à régulariser le système dans cette surface.

Dans le cas général un système dynamique s'écrit :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathfrak{R}^n \quad (58)$$

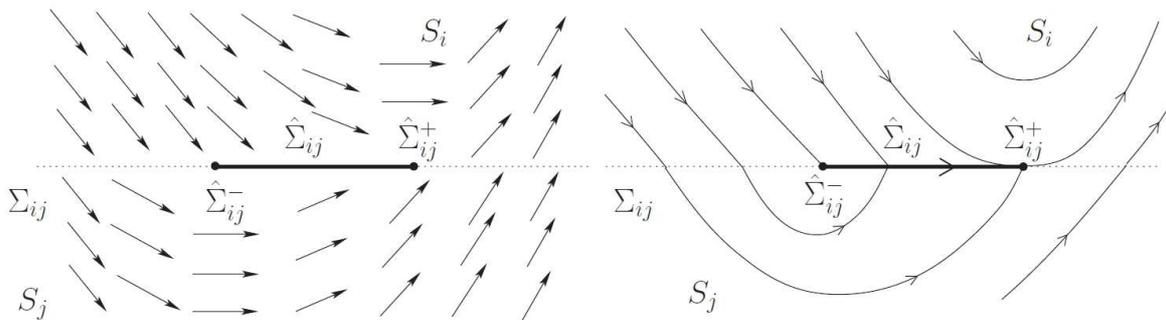
$f(x)$  est un champ vectoriel régulier, tout au moins par morceau.

Supposons que l'espace de phase soit une partition de deux régions  $S_i$  et  $S_j$ , lesquelles sont séparées par la surface de discontinuité  $\Sigma_{ij}$  définie par une fonction scalaire  $h_{ij}(x)$  :

$$\Sigma_{ij} = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid h_{ij}(x) = 0\} \quad (59)$$

Définissons de manière analogue :

$$\begin{aligned} S_i &= \{x \in \mathfrak{R} \mid h_{ij}(x) > 0\} \\ S_j &= \{x \in \mathfrak{R} \mid h_{ij}(x) < 0\} \end{aligned} \quad (60)$$



**Figure 1.27 :** Les deux champs vectoriels  $F_i$  et  $F_j$  et l'ouvert  $\hat{\Sigma}_{ij}$  (gauche), des trajectoires correspondantes (droite).

Nous pouvons alors réécrire (58) :

$$\dot{x} = \begin{cases} F_i(x), x \in S_i \\ F_j(x), x \in S_j \end{cases} \quad (61)$$

$F_i$  et  $F_j$  sont des champs vectoriels suffisamment réguliers définis dans  $\mathfrak{R}^n$ .

Si  $F_i$  et  $F_j$  convergent ou divergent localement et en même temps vers un domaine du sous espace  $\Sigma_{ij}$  alors la dynamique est contrainte à la surface  $\Sigma_{ij}$ , on parle alors de *sticking*. Dans le premier cas c'est évident, dans le deuxième cas c'est une indétermination car le système n'a pas à choisir préférentiellement l'un des champs au détriment de l'autre.

L'ouvert  $\hat{\Sigma}_{ij}$ , domaine du sous-espace  $\Sigma_{ij}$  où le champ vectoriel converge ou diverge en même temps de part et d'autre est appelé *sticking-surface*.

Pour regarder la stabilité de la *sticking-surface* il est nécessaire, à partir de maintenant, d'introduire la *dérivée de Lie*  $\ell_F(h)(x)$  (cf. **Annexe C**) d'une fonction régulière  $h(x)$  le long d'un flux vectoriel régulier  $F(x)$  par :

$$\ell_F(h)(x) := \left. \frac{d}{dt} h(\xi(t)) \right|_{t=0} = \frac{dh(x) \cdot d\xi(t)}{dx \cdot dt} = \left\langle \frac{dh(x)}{dx}, F(x) \right\rangle \quad (62)$$

Où  $\xi(t)$  est une solution de  $\dot{\xi} = F(\xi)$  tel que  $\xi(0) = x$

Dès lors,  $\hat{\Sigma}_{ij}$  est stable si :  $\ell_{F_i-F_j}(h_{ij})(x) < 0, x \in \hat{\Sigma}_{ij}$  et instable si  $\ell_{F_i-F_j}(h_{ij})(x) > 0, x \in \hat{\Sigma}_{ij}$ .

Par analogie aux travaux d'Utkin en automatique (58) peut désormais être étendu à la *sticking* surface si on écrit :

$$\dot{x} = F_{ij}(x), x \in \hat{\Sigma}_{ij} \quad (63)$$

en posant  $F_{ij}(x) = \frac{F_i(x) + F_j(x)}{2} + \frac{F_i(x) - F_j(x)}{2} \mu_{ij}(x)$  et avec  $-1 \leq \mu_{ij} \leq 1$ .

Le mouvement est contraint sur  $\hat{\Sigma}_{ij}$  a pour conséquence que  $F_{ij}$  est tangent à  $\hat{\Sigma}_{ij}$  par conséquent :

$$\ell_{F_{ij}}(h_{ij})(x) = 0 \text{ et d'où } \mu_{ij}(x) = \frac{\ell_{F_i+F_j}(h_{ij})(x)}{\ell_{F_j-F_i}(h_{ij})(x)}. \text{ On remarque au passage que } F_{ij} = F_i \text{ et } F_{ij} = F_j$$

quand  $\mu_{ij}(x) = -1$  et  $\mu_{ij}(x) = 1$  respectivement. D'autre part  $\ell_{F_j-F_i}(h_{ij})(x) \neq 0, \forall x \in \hat{\Sigma}_{ij}$  car les champs vectoriels  $F_i$  et  $F_j$  divergent ou convergent toujours vers la surface de discontinuité. Les frontières de la surface de discontinuité sont définies par :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{ij}^- &= \left\{ x \in \hat{\Sigma}_{ij} \mid \mu_{ij}(x) = -1 \right\} \\ \hat{\Sigma}_{ij}^+ &= \left\{ x \in \hat{\Sigma}_{ij} \mid \mu_{ij}(x) = +1 \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

Ces frontières constituent l'ensemble des points tangents [Piiroinen2008].

On obtient finalement la solution de (58) en faisant la concaténation des solutions dans  $S_i$  et  $S_j$  et la *solution maximale* de la surface de discontinuité. Pour s'assurer de l'unicité de cette solution il est suffisant de supposer qu'elle ne visite pas une zone de la surface de discontinuité où les deux champs vectoriels  $F_i$  et  $F_j$  seraient tangents en même temps (voir Figure 1.27).

### 1.7.1 Méthodes de résolution du système de Filippov

La méthode originale de Filippov pour résoudre le système finalement obtenu dans la section précédente, consiste à réaliser l'inclusion différentielle suivante :

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{F_i(x)\}, x \in S_i \\ \overline{co}(F_i(x), F_j(x)), x \in \Sigma_{ij} \\ \{F_j(x)\}, x \in S_j \end{cases} \quad (65)$$

Avec  $\overline{co}(F_i, F_j)$  le plus petit convexe fermé contenant  $F_i$  et  $F_j$  :

$$\overline{co}(F_i, F_j) = \{f \in \mathfrak{R}^n \mid f = F_i + \lambda(F_j - F_i), \lambda \in [0,1]\} \quad (66)$$

Une solution de cette inclusion différentielle est une fonction  $x(t)$  continue qui satisfasse (65) pour tout  $t$  du domaine de définition. En supposant la régularité de  $F_{ij}$  et  $h_{ij}$ , le *Théorème n2 de Filippov* [FA88] implique l'unicité des solutions de (65) qui ne visitent pas les *sticking* surfaces instables, et des solutions correspondant aux points de  $\Sigma_{ij}$  où les vecteurs  $F_i$  et  $F_j$  sont tangents en même temps. Cette solution de Filippov est sensiblement la même que celle dont nous avons discuté jusque là. Cependant dans l'approche de Filippov, l'unicité de toutes les solutions n'est pas avérée (celles qui partent de la *sticking* surface), alors que dans la formulation de Piiroinen et al. [PK08] c'est le cas, dans la mesure où celles-ci sont contraintes à rester dans  $\hat{\Sigma}_{ij}$ . Cependant dans [PK08] on remarque que différence n'est pas fondamentale dans la majeure partie des applications.

### 1.7.2 La méthode dite *The event driven simulated method*

Cette méthode que nous devons à Piiroinen [PK08], est une méthode de résolution des systèmes de Filippov similaires à l'approche des systèmes hybrides, une méthode mixte de résolution combinant les méthodes usuelles d'intégration des équations différentielles régulières et l'approche *discrete maps field switch*. Concrètement cette méthode permet, partant d'une condition initiale de la zone de régularité, de résoudre le système jusqu'à ce que la trajectoire rencontre la surface de discontinuité, à ce stade le champ vectoriel est potentiellement *switché* selon la valeur d'une fonction d'évènements sur la quelle nous reviendrons dans la suite.

En pratique cette méthode fait appel à des routines de résolutions classiques dans  $F_i$  et  $F_j$ , à savoir *Runge-Kutta*, *Sécante*, *Raphson* etc. La seule condition étant que la méthode soit assez précise pour

localiser la discontinuité et/ou tangenter la surface de discontinuité. La gestion de la décision de traverser ou non la surface de discontinuité est la phase critique. Piironen et al. [PK08] définissent la traversée de la surface comme étant *un évènement* et définissent aussi la fonction scalaire liée à cet évènement : *fonction d'évènement*. Il faut donc en plus des algorithmes classiques précédemment cités, disposer d'une routine de détection d'évènements pour que la méthode *The Event-Driven method* soit efficace. Nous nous servons de la suite Matlab dont un des packages gère parfaitement la détection d'évènement.

Tous les prérequis susmentionnés sont disponibles dans le logiciel d'analyse numérique Matlab ; ce dernier possède des routines natives de détection d'évènements facilement utilisable en parallèle avec une ODE (cf. **Annexe A**).

### 1.7.3 Application sur un exemple simple

L'exemple que nous allons prendre est celui de l'oscillateur de frottement sec, c'est un modèle d'oscillations forcées non-amorti à un degré de liberté, dans lequel on a apparition du phénomène de *stick-slip*. Il s'écrit :

$$\ddot{y} + y = \sin(\omega t) - F \operatorname{sgn}(\dot{y}), \quad (67)$$

où  $\omega$  est la pulsation forcée,  $F$  est l'amplitude de la force de frottement de Coulomb. Dans le but d'intégrer une telle équation nous allons la réécrire sous sa forme autonome équivalente du premier ordre :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \sin(x_3) - F \operatorname{sgn}(x_2) \\ \omega \end{pmatrix} \quad (68)$$

avec  $x = (y, \dot{y}, \omega t \bmod 2\pi)^T$ . Il s'ensuit que nous définissons la surface de discontinuité  $\Sigma_{12}$  de telle sorte que :

$$\Sigma_{12} = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid H_{12}(x) = 0\} \quad (69)$$

cette surface divise l'espace de phase en deux régions distinctes :

$$S_1 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid H_{12}(x) > 0\}, \quad S_2 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid H_{12}(x) < 0\} \quad (70)$$

où le choix de  $H_{12}$  qui s'impose le plus naturellement est :

$$H_{12}(x) = x_2. \quad (71)$$

Nous pouvons maintenant facilement réécrire (68) en :

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ F_2(x), & x \in S_2, \end{cases} \quad (72)$$

avec

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \sin(x_3) - F \\ \omega \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \sin(x_3) + F \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Le système tel que réécrit en (72) est un système classique dans chacun des domaines  $F_1$ , et  $F_2$ . Sa résolution ne pose pas de problème particulier dans ces domaines et se fait aisément dans Matlab. La seule difficulté que nous n'aborderons pas ici réside dans la gestion et la détection de la discontinuité  $H_{12}$  dans Matlab.

#### 1.7.4 Conclusion sur les systèmes de Filippov et *The event-driven simulated method*

La méthode que nous venons d'introduire donne un moyen simple de résolution des systèmes de Filippov en utilisant une approche hybride. Cette méthode ne requiert que les informations sur le champ vectoriel ainsi que la surface de discontinuité. Elle est disponible sous forme de code source Matlab et est d'une grande simplicité d'utilisation. Ce qu'on peut lui reprocher cependant c'est sa grande lenteur par rapport à un programme équivalent en C++ ou *Fortran*. Dans tous les cas sa simplicité d'utilisation et le fait qu'on puisse tester rapidement des idées en fait un outil puissant de simulation. Dans le deuxième chapitre nous allons voir l'application de cette méthode à notre modèle du contact fibreux.

### 1.8 Conclusion du chapitre

Après un historique sur la Tribologie et son développement nous avons redéfinis quelques concepts clé, à savoir la définition d'une surface, le coefficient de frottement, la rugosité, l'adhésion. De là nous avons abordé la problématique de la tribologie dans le textile et donné ainsi le cadre qui a vu naître le projet *Modalsens*. A ce stade il était nécessaire de faire le rapprochement entre le fonctionnement de *Modalsens* et les origines d'instabilités vibratoires, ce que nous avons fait. De par son fonctionnement on peut dire que *Modalsens* est une « machine à *stick-slip* », nous avons donc introduit les différents types d'instabilité vibratoire (dues au frottement) les plus communément rencontrées (*stick-slip*, *sprag-slip* et couplage de modes). Au contraire de l'ingénieur classique qui cherche à supprimer ces instabilités les considérant comme une nuisance, nous avons fait le pari, et c'est là l'originalité de notre travail, de chercher les outils adéquats afin de détecter et d'exploiter ces instabilités. A partir de là nous justifions ainsi l'approche *espace de phase* par l'introduction de nouveaux outils issus de la dynamique non-linéaire.

Si la dynamique non-linéaire peut sembler difficile à aborder, nous avons choisi de l'aborder de façon très concise, évitant de noyer le lecteur dans des détails qui ne soient pas indispensables à notre travail. Nous sommes donc partis de Poincaré et du célèbre « problème des trois corps » pour montrer l'intérêt de penser « espace de phase » au lieu de « signal temporel ». Par la suite nous avons abordé la *Nonlinear Time Series Analysis*, qui est une série d'outils permettant de passer d'une série de données expérimentales chronologiques à un espace de phase reconstruit. Ce qui a nécessité de

revenir sur les travaux de Whitney sur les variétés ; nous avons essayé d'y guider le lecteur de sorte qu'il voie la philosophie qui sous-tend cette reconstruction proprement dite, en abordant ces notions de façon pratique et concrète. Enfin, pour terminer dans la reconstruction de l'espace de phase, nous présentons les méthodes qui nous ont permis de travailler concrètement, à savoir les méthodes du *Mutual Information*, du *False Nearest Neighbour*.

Une fois l'espace de phase reconstruit, l'étape suivante est la quantification du comportement du système dans un tel espace. Nous en avons parlé la récurrence est le concept clé des travaux de Poincaré en dynamique non-linéaire. Aussi nous sommes-nous fixé l'objectif de quantifier les récurrences des trajectoires dans les espaces que nous avons reconstruits. D'où l'introduction des Recurrence Plots (RP), cet outil que nous devons à Eckmann et al. [EKR87], permet de visualiser un espace qui peut être de dimension supérieur à 3 dans une représentation en 2 dimensions. Après cette présentation sur les RP nous introduisons le *Recurrence Quantification Analysis* (RQA) qui permet le calcul d'un certain nombre de statistiques et donc tirer une analyse quantitative des RP. Nous revenons largement sur les RQA dans le deuxième chapitre.

L'autre partie majeure de ce travail est la modélisation du contact fibreux. Après une présentation de quelques modèles existant nous montrons la genèse de notre modèle en partant des travaux majeurs qui nous ont inspiré. Ainsi reprenant les travaux antérieurs de Danckowicz [DN00], Oancea [OL96], et Laursen [Lau92] nous avons adapté leurs principaux résultats d'autant plus que ceux-ci proposent un modèle de contact dynamique prenant en compte le décollement des surfaces mais aussi modélisant la déformation globale des aspérités . Une fois les équations gouvernant le modèle obtenues nous présentons les outils nécessaires à leur résolution. En effet les équations que nous obtenons ne sont pas régulières dans tous les domaines de l'espace de phase, c'est un système type Filippov, d'où la nécessité de méthodes de résolution adaptées. Pour clore ce premier chapitre nous présentons alors la méthode *The event driven simulated method* de Piiroinen et al. [PK08], cette méthode qui repose sur une approche hybride pour résoudre les systèmes de Filippov est simple à mettre en œuvre et ne requiert que les informations sur le champ vectoriel et la définition de la discontinuité.

Dans le deuxième chapitre qui va suivre, nous aborderons la partie expérimentale de ce travail. Ainsi après une présentation de la démarche expérimentale où nous présenterons les divers échantillons sur lesquels nous avons travaillé, nous présenterons aussi le mode opératoire que nous avons suivi. Le mode opératoire comprend les étapes pour mener la reconstruction des espaces de phase, le calcul des matrices de RP ainsi que l'analyse quantitative des RP par RQA. Après cette introduction nous montrerons nos principaux résultats sur les deux campagnes de mesure que nous avons menées. Pour clore ce chapitre nous revenons sur notre modèle de contact fibreux et sa résolution par la méthode hybride. A cet effet nous montrerons comment passer d'un système qui ne remplit les conditions de régularité à sa forme régularisée.

# 2

# Démarche expérimentale

## Sommaire

2.1	Introduction.....	63
2.2	Démarche expérimentale.....	63
2.2.1	Introduction.....	63
2.2.2	Présentation des échantillons.....	64
2.2.3	Mode opératoire.....	69
2.2.4	Détermination des paramètres de l'espace de phase.....	70
2.2.5	Recurrence Plot des échantillons.....	71
2.2.6	Construction des RP.....	72
2.2.7	L'analyse quantitative des Recurrence Plot.....	72
2.2.8	Paramètres globaux supplémentaires.....	72
2.3	Résultats.....	73
2.3.1	Campagne de mesures n°1.....	73
2.3.2	Campagne de mesures n°2.....	80
2.4	Modélisation du contact fibreux.....	97
2.4.1	Modèle du contact fibreux <i>Modalsens</i> , obtention du système de Filippov.....	97
2.4.2	Application de la « The Event Driven Method ».....	99
2.5	Résultats du modèle de contact fibreux.....	101
2.5.1	Observations préliminaires.....	101
2.5.2	Perspectives.....	103
2.5.3	Conclusion.....	104
2.6	Conclusion du chapitre.....	105

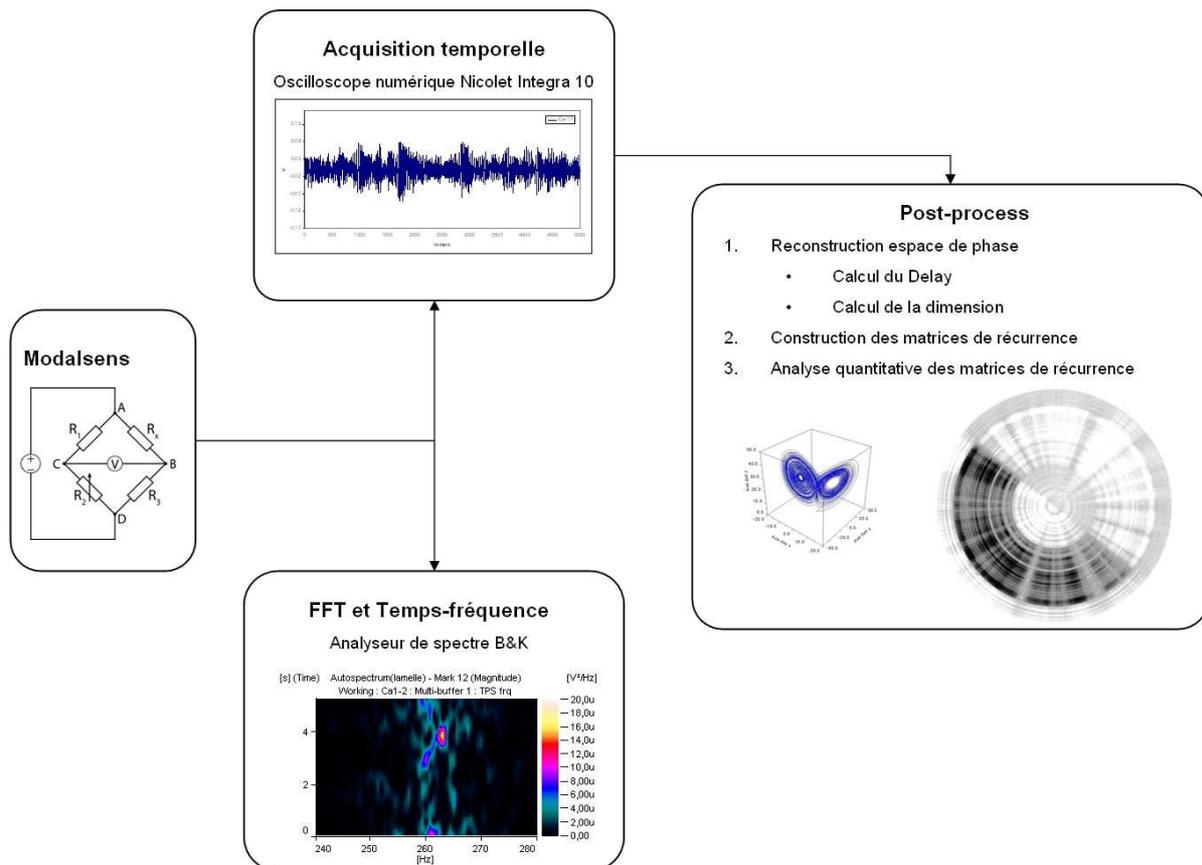
## 2.1 Introduction

Dans ce deuxième chapitre, nous abordons la partie expérimentale de ce travail. Ainsi après une présentation de la démarche expérimentale où nous présenterons les divers échantillons sur lesquels nous avons travaillé, nous évoquerons notre mode opératoire. Le mode opératoire comprend les étapes pour mener la reconstruction des espaces de phase, le calcul des matrices de RP ainsi que l'analyse quantitative des RP par RQA. Après cette introduction nous montrerons nos principaux résultats sur les deux campagnes de mesure que nous avons menées. Pour clore ce chapitre nous revenons sur notre modèle de contact fibreux, sa résolution par la méthode hybride et la présentation des premiers résultats.

## 2.2 Démarche expérimentale

### 2.2.1 Introduction

Dans cette partie nous présentons la démarche expérimentale que nous avons suivie : de l'acquisition des signaux de *Modalsens* jusqu'à l'analyse quantitative des matrices de récurrence.



**Figure 2.1** : Procédure et démarche expérimentale.

Dans le Chapitre 1 nous avons introduit les outils et concepts théoriques nécessaires à la mise en place d'une analyse par la NTSA. Dans cette partie nous abordons la mise en place pratique de tels

outils. Ce chapitre présente donc le cœur du travail de thèse en décrivant la démarche expérimentale choisie, du choix des textiles aux logiciels d'analyse.

La première partie du chapitre vise à décrire les textiles et surfaces testés lors des investigations expérimentales. La deuxième partie montre les résultats des deux campagnes de mesures conduites.

## 2.2.2 Présentation des échantillons

Le panel d'échantillons que nous avons utilisé est le même que celui choisi par Cyril Marsiquet [MFR07]. Ce panel est constitué d'échantillons ayant des caractéristiques différentes formant ainsi des classes de surfaces. Les critères différenciant les surfaces retenues étant :

1. Des matériaux différents
2. Des structures différentes
3. Des pilosités différentes
4. Des masses surfaciques différentes

A partir de ces critères différentes surfaces ont été retenues, elles se composent de tissus de différentes matières différentes, de non tissés de masses surfaciques différentes, de feuilles de papier et cuirs.

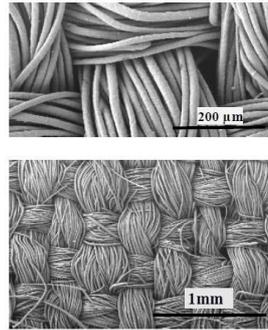
### 2.2.2.1 Les tissus, tricots

Un tissu est un textile obtenu par tissage de fils (filés de fibres ou multi-filamentaires). Le principe du tissage consiste à entrecroiser deux nappes de fils, perpendiculaires entre elles. La nappe de fils positionnée dans le sens de production s'appelle la *chaîne* alors que la nappe perpendiculaire au sens de production est appelée *trame*. Les tissus se distinguent entre eux par l'*armure*, c'est la règle d'entrecroisement les fils de *chaîne* et les fils de *trame*. Les armures les plus communes sont la *toile* et le *sergé*. Par rapport à la *toile*, l'armure *sergé* présente des cotes (ex. le jeans denim). Un tissu est défini par sa *contexture* qui dépend de sa masse surfacique, de la composition et la masse linéique de ses fils (le titre), du nombre de fils en chaîne et en trame par unité de longueur.



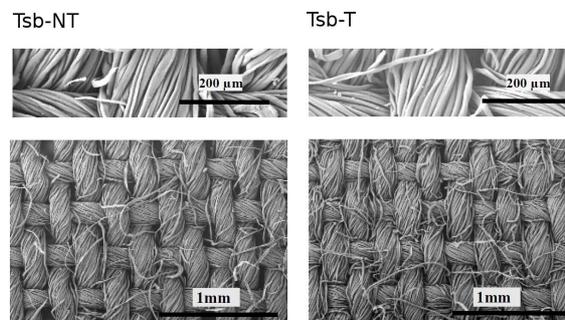
Figure 2.2 : Structures d'un textile : (a) toile, (b) sergé.

Parmi les tissus du panel nous comptons 3 en toiles. Ces toiles sont destinées à l'habillement (chemise, pantalon, jupe). Leurs caractéristiques et leur cliché MEB sont décrites dans les tableaux suivants. La toile de cachemire Ca-T est tissée à partir de fils *compacts*.



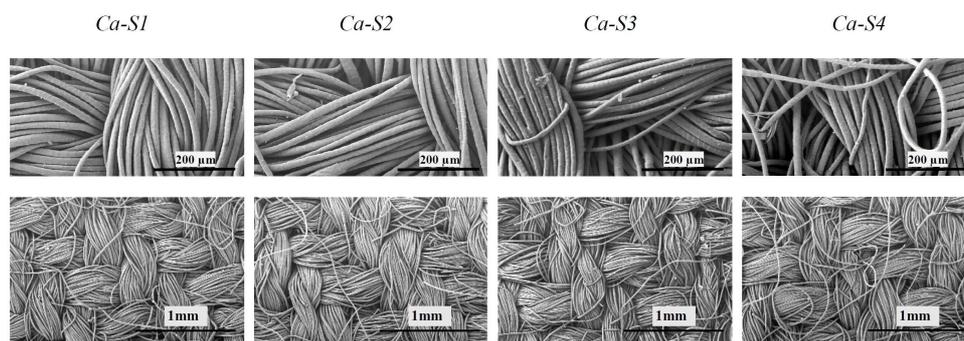
**Figure 2.3 :** La toile de Cachemire, Ca-T

Les toiles de coton traitées ou Téflon© (Tsb-T) et sans traitement (Tsb-NT) sont les mêmes tissus de base. La toile Tsb-T a subi un traitement d'ennoblissement à base de Téflon© afin de le rendre plus glissant et anti-tâche. La toile Tsb-NT n'a quand à elle reçu aucun post-traitement d'ennoblissement.



**Figure 2.4 :** Les toiles de coton, Tsb-T a subi un traitement au Téflon©.

Les sergés testés sont au nombre de 7. Nous disposons de 2 sergés en coton (S-co Faible et S-co Fort), 4 sergés en cachemire (Ca-S1 à Ca-S4) et enfin d'un sergé en microfibres de polyester (MPET).



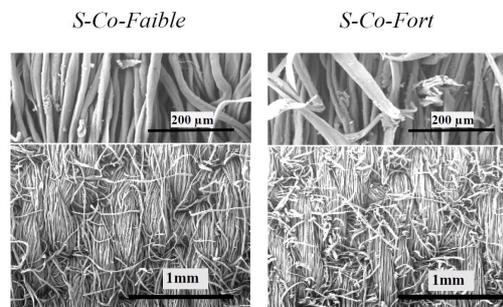
**Figure 2.5 :** Les sergés en Cachemire.

Les sergés en cachemire Ca-S1 et Ca-S3 sont tissés avec des fils de chaîne et des fils de trame obtenus par le procédé de filature *compact*, ce qui a pour effet de donner des fils moins pileux que ceux obtenus par la méthode conventionnelle. Les sergés Ca-S2 et Ca-S4 ne présentent des fils compacts que dans leur chaîne.

**Tableau 2.1 :** Structures et composition des cachemires

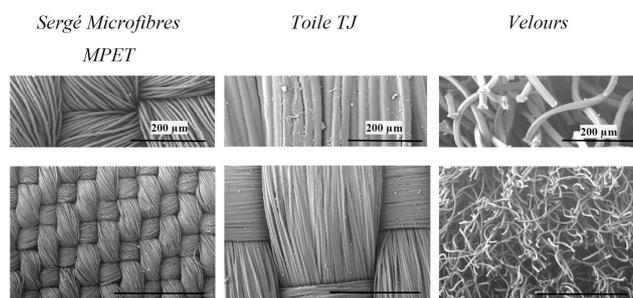
Nom	Masse surfacique	Compte (nbre fils/cm)	Duitage (nbre fils/cm)	Torsion des fils (chaîne/trame)	Titre des fils de chaîne (tex)	Titre des fils de trame (tex)
					<i>Fils compact</i>	<i>Fils compacts</i>
Ca-T	124	36	24	850S	10X2 C	10X2 C
Ca-S1	126	36	26	850S	10X2 C	10X2 C
Ca-S2	133	36	24	830S	10X2 C	12.6X2 T
Ca-S3	135	36	24	760S	10X2 C	12.9X2 C
Ca-S4	128	36	25	760S	10X2 C	10.7X2 T

Les sergés de coton S-co Faible et S-co Fort ont la même base textile mais le second a subi un émerisage plus important. Ces sergés coton sont des tissus fournis par un industriel et le grain du papier émeri utilisé nous est inconnu. Nous savons juste que le grain utilisé pour S-co Fort est plus gros que celui utilisé pour S-co Faible.



**Figure 2.6 :** Les sergés de coton, S-Co-fort a subi un émerisage plus intense.

Le sergé MPET est tel que ses fils de chaîne et trame sont des fils simples multi-filamentaires composés de 97% de PET et 3% d'élasthanne.

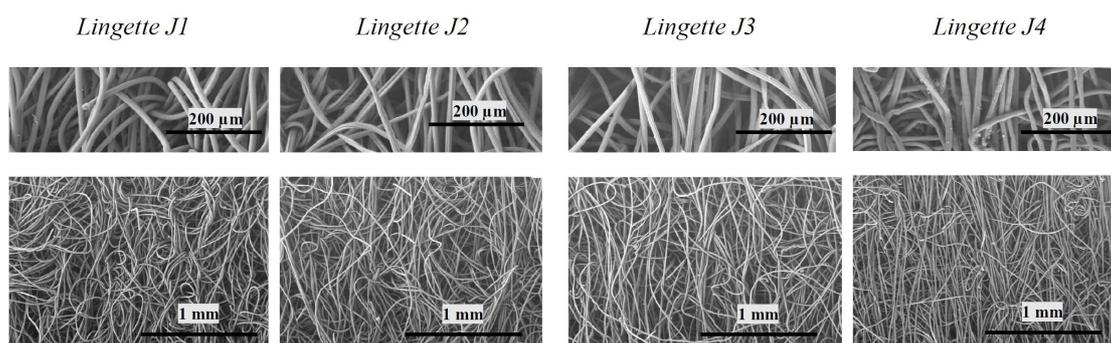


**Figure 2.7:** Les surfaces complémentaires.

Notons enfin la catégorie des surfaces complémentaires composées, en plus du sergé MPET, d'une toile enduite (TJ), d'un tricot de velours (R15) pour siège automobile. La toile TJ est une surface peu compressible, sans aucune pilosité, au contraire du velours R15 qui possède une pilosité de surface importante et orientée présentant un sens *poil* et *rebrousse-poil*, il est par ailleurs très compressible.

### 2.2.2.2 Les non-tissés et papiers

Les non-tissés sont obtenus directement à partir de fibres ou de filaments. Le principe consiste à former un voile de fibres ou de filaments et de les consolider ensuite. Il existe plusieurs méthodes de consolidation ; la méthode classique mécanique fondée sur un entrelacement des fibres par aiguilletage ou par jet d'eau, et la méthode thermique qui génère des points de fusion par calandrage. Les non-tissés sont souvent utilisés pour des produits à usage unique tels que les lingettes bébé, les couches, ou encore pour le nettoyage domestique. Ils sont aussi utilisés de plus en plus comme géotextiles ou pour la filtration.



**Figure 2.8 :** Les 4 lingettes spunlaced.

Les non-tissés de J1 à J4 sont des non-tissés réalisés par liage à jet d'eau destinés à l'hygiène bébé (lingettes). Les non-tissés J1 et J2 sont réalisés avec le même matériau mais ils ont une masse surfacique différente. Les non-tissés J3 et J4 ont une masse surfacique équivalente mais sont composés de matériaux différents (voir Tableau 2.2).

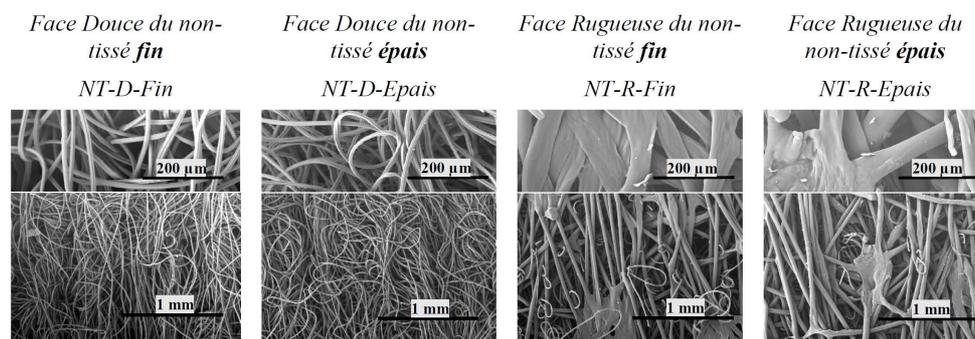
**Tableau 2.2 :** Structure et composition des lingettes.

Nom	Masse surfacique	Composition	Utilisation
J1	75	100% Polyester	Lingettes bébé
J2	38	100% Polyester	
J3	50	65% Rayonne 35% Polyester	
J4	45	100% Rayonne	

Les non-tissés bicouches sont au nombre de 2 de différentes épaisseurs. Ces deux non-tissés présentent la particularité d'avoir deux faces différentes, une face dite « rugueuse » et une face dite « douce » : ce qui fait un total de 4 échantillons :

1. NT-D-F : Face Douce du non-tissé bicouche Fin
2. NT-R-F : Face Rugueuse du non-tissé bicouche Fin

3. NT-D-E : Face Douce du non-tissé bicouche Epais
4. NT-R-E : Face Rugueuse du non-tissé bicouche Epais



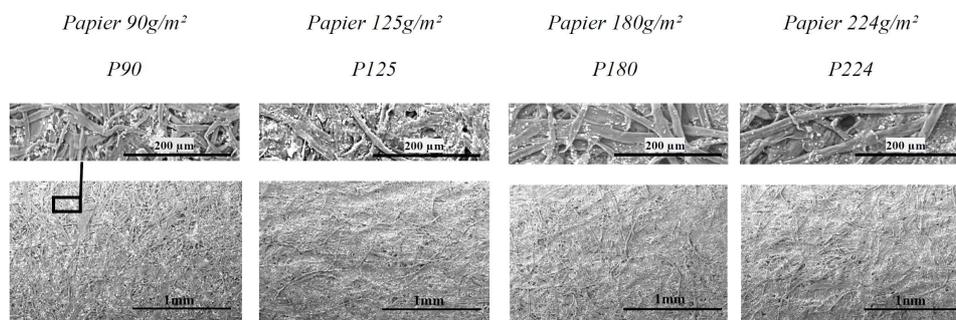
**Figure 2.9** : Les non-tissés bicouches.

Ces non-tissés bicouche, réalisé par liage jet d'eau pour la face douce et calandrage pour la face rugueuse, sont destinés à un usage domestique. Sur les clichés MEB (Figure 2.9) on peut voir les filaments de gros diamètre qui constituent la face rugueuse (NT-R-F et NT-R-E), alors que les filaments de plus faible diamètre correspondent aux faces douces (NT-D-F et NT-D-E). On remarque aussi que pour les non-tissés fins, les fils de petites sections traversent la face rugueuse et sont visibles sur la surface douce. Enfin notons les points de calandrage qui donnent l'aspect rugueux et la cohésion du non-tissé.

**Tableau 2.3** : Structure et composition des non-tissés bicouches.

Nom	Masse surfacique	Composition	Utilisation
NT-D-F/ NT-R-F	60	100% PET	Essuyage domestique
NT-D-E/ NT-R-E	103	100% PET	

Les papiers ont été retenus car les feuilles de papier ne présentent pas de pilosités de surface, mais une rugosité propre à l'usage qui leur est destiné.



**Figure 2.10** : Les papiers.

Les papiers sont au nombre de quatre, leurs caractéristiques sont décrites dans le Tableau 2.4 ci-dessous ainsi que leurs clichés obtenu par Microscope Electronique à Balayage (Figure 2.10).

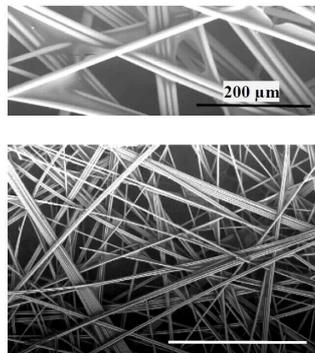
**Tableau 2.4** : Structure et composition des papiers

Nom	Masse surfacique (g/m <sup>2</sup> )	Composition	Utilisation
P90	90	100% Cellulose	Impression
P125	125		Papier dessin Canson©
P180	180		
P224	224		

Enfin les surfaces complémentaires sont composées d'un non-tissé de verre et 4 surfaces en cuir de maroquinerie de grain de peau croissant nommés : C1, C2, C3 et C4. Le non-tissé de verre est utilisé comme renfort pour composite.

*Non tissé de Verre*

*NT-V*



**Figure 2.11** : Le non-tissé de verre.

### 2.2.3 Mode opératoire

Dans cette partie nous présentons la démarche NTSA appliquée à la mesure *Modalsens* (cf. [MFR07]). Nous séparons notre étude en deux campagnes de mesures. Durant la première campagne, sur chacun des lots de surface, les mesures sont réalisées sur 2 tours de plateau, sur une moyenne de 5 échantillons par lot. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 4096 Hz pour une durée d'acquisition de 10 secondes (2 tours). Durant cette première campagne le démarrage de l'acquisition du signal temporel n'est pas maîtrisé, un trigger n'ayant pas été mis en place. Aussi une analyse temps-réel avec l'analyse fréquentielle n'a pas été faite. Pour combler les deux points précédents, une deuxième campagne de mesure a été mise en place. Pour cette seconde campagne, les mesures ont été réalisées sur un seul tour de plateau, pour 5 échantillons par lot. Pour chacune de ces surfaces testées, l'échantillonnage du signal temporel fut fixé à 1000Hz pour une durée d'acquisition de 5 secondes, soit un tour. Afin d'analyser les correspondances entre les diagrammes de récurrences, du signal temporel et de l'analyse FFT, une acquisition *temps fréquences* (sur la même gamme dynamique avec une résolution fréquentielle de 2 pts/Hz) a été menée en parallèle, sur chacun des échantillons. L'objectif de cette analyse comparative est d'observer l'évolution des spectres instantanés pendant la durée de l'acquisition. Grâce à celle-ci, il est possible d'observer les

instants où les modes de résonance de *Modalsens* se développent au cours du temps, permettant ainsi de relier les phénomènes observés à la topographie de surface de chaque échantillon testé. Autre évolution par rapport à la première campagne, un dispositif de contrôle du démarrage de l'acquisition a été mis en place via un trigger, sur un rayon connu de chaque échantillon. Ainsi, chaque échantillon a été positionné de telle manière que la mesure démarre lorsque le capteur de *Modalsens* se trouve perpendiculaire au sens de production de chaque structure testée<sup>2</sup>. Pour chaque lot testé, 5 signaux temporels et 5 diagrammes temps-fréquences ont été analysés afin de déceler chaque spécificité du comportement dynamique non-linéaire généré lors du contact entre *Modalsens* et la surface analysée.

## 2.2.4 Détermination des paramètres de l'espace de phase

Pour le calcul des paramètres relatifs à l'espace de phase nous avons utilisé la suite de calcul scientifique et statistique *R-cran* [R D10] et son package dédié au NTSA *TseriesChaos*. Ce package est composé de routines élaborées par Di Narzo et Hegger et al. [ADN10, HKS99].

### 2.2.4.1 Calcul de la dimension

En fonction des surfaces analysées différentes valeurs de dimension de l'espace de phase ont été trouvées, ceci pour la première campagne de mesure. En effet pour la deuxième campagne nous trouvons des valeurs similaires. Les dimensions des espaces de phases ont été calculées en utilisant la méthode du *false nearest neighbor*.

Nous avons constaté que sur la première campagne de mesures les dimensions trouvées varient très fortement d'un échantillon à l'autre. Cependant pour la deuxième campagne elle reste inchangée quelque soit l'échantillon testé.

### 2.2.4.2 Calcul du delay

Le deuxième paramètre nécessaire à la reconstruction de l'espace de phase est le delay  $\tau$ . Il a été calculé pour chaque échantillon en utilisant la méthode de l'*Average Mutual Information (AMI)*. Le Delay quantifie l'indépendance entre les coordonnées d'un point de la trajectoire dans l'espace de phase. Lorsque le delay augmente pour un échantillon, cela signifie qu'il faut attendre plus longtemps pour trouver deux coordonnées, d'un même vecteur, portant les informations les plus indépendantes possibles. Plus le delay est court, plus il y'aura des informations redondantes proche sur le plan temporel, pour un signal périodique cela se traduit par une période plus courte.

Les conclusions tirées de la deuxième campagne de mesure est le comportement spécifique des papiers comparé aux autres échantillons, notamment les textiles. Des variations significatives entre surface textile sont aussi observées sur les toiles coton traitées au Téflon® ou sur les non-tissés bicouches.

---

<sup>2</sup> Pour la procédure détaillée de la méthode *Modalsens* le lecteur peut se référer à [MFR07].

### 2.2.4.3 Diamètre de l'espace de phase

C'est l'encombrement maximum de la trajectoire dans son espace de phase, on le détermine en calculant la plus grande diagonale de l'hyper volume décrit par la trajectoire dans l'espace de phase :

$$\phi = \sqrt{m} |S_{\max} - S_{\min}|$$

où  $S_{\max}$  et  $S_{\min}$  représentent respectivement les valeurs d'amplitude du signal temporel. Le diamètre occupé par l'espace de phase a ainsi été calculé pour toutes les surfaces analysées.

Pour la deuxième campagne de mesures ce paramètre scinde les échantillons en deux catégories ; d'un côté, on trouve les surfaces dont le diamètre est supérieur à 0.5 (Non-tissés bicouche, velours, Toile multi-filamentaire TJ) et de l'autre les tissés (cachemire, toiles de coton) ainsi que les cuirs. Dans la mesure où tous les échantillons ont la même dimension d'espace de phase, nous pouvons conclure que dans la deuxième campagne de mesure, le diamètre occupé dans l'espace de phase est directement corrélé à l'amplitude du signal temporel de base. Cet indicateur permet de déceler des différences majeures de comportements dynamiques frottant, c'est une première étape nécessaire, et non suffisante, pour l'analyse comparative des surfaces.

## 2.2.5 Recurrence Plot des échantillons

Le calcul des matrices de Recurrence Plot ainsi que leur analyse quantitative (RQA) ont été effectués avec les algorithmes développés par Marwan et al. [MCRTK07] CRP (Command Line Recurrence Plots). Il existe une grande offre de logiciels pour le calcul et l'analyse des RP, cependant ils utilisent tous les mêmes algorithmes basés sur les travaux d'Eckmann [EKR87]. Après en avoir testé quelques uns notre choix s'est orienté vers celui de l'équipe Marwan pour des raisons pratiques. Nous travaillons sous linux et CRP s'est avéré particulièrement pratique pour traiter le grand nombre de fichiers à notre disposition.

### 2.2.5.1 Détermination du paramètre de seuil

La question du choix du seuil de récurrence  $\varepsilon$  (cf. Section 1.5.1) est primordiale ; pourtant ce choix est difficile car il existe plusieurs critères de détermination possible dans la littérature. Nous l'avons vu, un seuil trop petit pourrait accentuer le bruit au niveau des RP et ajouter une fausse information ; a contrario, un seuil trop élevé résulterait d'un RP où tous les pixels sont noirs et donc sans grand intérêt.

Le choix d'un seuil différent pour chaque échantillon pose le problème de la validité de l'étude comparative des récurrences plot. Même si un choix de seuil unique commun à tous les échantillons peut poser le problème des ordres de grandeur de la taille des espaces de phase de chaque échantillon, nous avons opté pour cette dernière alternative sachant qu'en moyenne l'encombrement dans l'espace de phase des échantillons était du même ordre de grandeur.

Pour la deuxième campagne de mesure, nous avons choisi d'imposer un seuil  $\varepsilon = 0.09$  unique pour tous les échantillons. Ce seuil a été choisi car il représente 10% du diamètre de l'espace de phase maximal observé (surface TJ).

### **2.2.6 Construction des RP**

La première étape dans l'exploration des trajectoires de phase est la construction des RP. Si dans la première campagne celles-ci ne sont pas représentées, vue la taille des séries temporelles enregistrées (10 secondes échantillonnées à 4096 Hz), il faut des ressources informatiques et en temps conséquentes pour obtenir une représentation graphique, dont finalement, on ne tirerait qu'une analyse visuelle qualitative. Nous sommes passés directement à l'analyse quantitative de ces premiers RP.

Pour la deuxième campagne de mesures les fichiers générés étant moins conséquent nous les avons représentés. D'autant plus que sachant qu'une analyse fréquentielle a été menée en parallèle, il est intéressant de comparer les RP aux FFT effectuées. Pour mieux comprendre ces diagrammes nous avons décidé de les représenter en coordonnées polaires, et non en cartésiennes comme cela est fait habituellement. La raison en est simple, cette représentation permet de relier directement les zones du RP à des régions des surfaces testées, elle permet de lire les RP par secteurs d'angle liés aux positions successives du capteur par rapport aux structures des échantillons ; sachant que les essais ont été réalisés sur un tour complet de plateau et que la zone de début d'acquisition est parfaitement maîtrisée. Cette représentation particulière permet de profiter du fait que les essais ont été réalisés sur un tour complet. Autour des RP polaire nous avons mis une couronne polaire illustrant le signal temporel brut. Chaque RP polaire se lit en le parcourant du centre vers l'extérieur, ou dans le sens horaire : ces deux directions correspondent au temps croissant.

### **2.2.7 L'analyse quantitative des Recurrence Plot**

De même que pour la construction des RP, nous avons retenu le logiciel CRP pour l'analyse RQA de ceux-ci. Le tableau suivant rappelle les paramètres que nous cherchons à estimer ainsi que leur signification physique (cf. Tableau 2.5) :

### **2.2.8 Paramètres globaux supplémentaires**

Uniquement pour la deuxième campagne de mesure nous avons ajouté deux paramètres globaux supplémentaires que sont l'entropie de Shannon et l'exposant maximal de Lyapunov. Nous présenterons une évaluation de ces paramètres mise en relation avec le diamètre de l'espace de phase précédemment défini.

**Tableau 2.5** : Description des statistiques de la RQA.

Paramètre	Interprétation Physique
Recurrence Rate (RR)	C'est la mesure la plus simple qu'on peut déduire d'un RP. C'est le taux de points dans le RP. Elle correspond à la probabilité qu'un état spécifique soit réalisé ; autrement dit qu'une région de l'espace de phase soit visitée deux fois.
Determinism (DET)	Cette mesure est liée à la prédictibilité du système dynamique. Elle est basée sur la probabilité de distribution des diagonales dans le RP. Nous rappelons que le RP d'un système déterministe présente très peu de points isolés et une majorité de lignes diagonales.
Divergence (DIV)	C'est l'inverse de la longueur de la diagonale la plus longue dans le RP. Elle est à mettre en relation avec le plus grand exposant de Lyapunov du système ; en d'autres termes elle quantifie la sensibilité aux conditions initiales du système dynamique.
L_entr et V_entr	Ces entropies quantifient respectivement la complexité de la structure déterministe du système (lignes diagonales), et celle des régimes intermittents (lignes verticales).
Laminarity (LAM)	C'est le taux de points des lignes verticales. Cette mesure est à mettre en relation avec les phases d'intermittence du système (entre les périodes de turbulence ou de comportement chaotique).
Trapping time (TT) et V_max	Ces quantités mesurent respectivement le temps moyen que met le système confiné dans un état intermittent (TT), ou sa durée maximale (V_max).

## 2.3 Résultats

### 2.3.1 Campagne de mesures n°1

Cette première campagne constitue la première application concrète de la NTSA au capteur de *Modalsens*. En ce sens il y a beaucoup de chose à améliorer dans le protocole expérimentale,

notamment la non-nécessité de traiter un si grand nombre d'enregistrement par échantillon (jusqu'à 66) et à la fréquence de 4096 Hz, ce qui alourdissait considérablement les temps de traitement. Cependant au regard de ces premiers résultats il apparaît déjà des pistes intéressantes d'investigation.

### 2.3.1.1 Conditions expérimentales

Comme nous l'avons dit précédemment, durant cette première campagne de mesure nous effectuons les enregistrements sur 2 tours de plateau, sur une moyenne de 5 échantillons par lot. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 4096 Hz pour une durée d'acquisition de 10 secondes (2 tours). Nous rappelons aussi que le démarrage de l'acquisition du signal temporel n'est pas maîtrisé, un trigger n'ayant pas été mis en place. Aussi une analyse temps-réel avec l'analyse fréquentielle n'a pas été faite. Nous montrerons dans la Section 3.3.1 un échantillon de RP de cette campagne ; en effet vu la forte valeur de fréquence d'échantillonnage, les ressources informatiques à notre disposition ne nous permettent pas de calculer la représentation graphique des RP sur la durée totale d'acquisition.

### 2.3.1.2 Résultats

Nous commençons par établir les paramètres de l'espace de phase, à savoir le delay et la dimension. Une fois ces paramètres établis, nous sommes passés dans cette première campagne à la partie RQA.

#### 2.3.1.2.1 Paramètres de l'espace de phase

##### a. Dimension

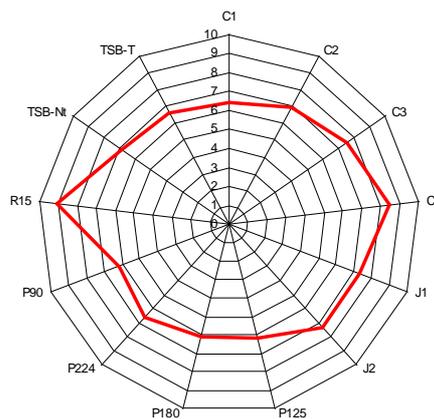


Figure 2.12 : La dimension,  $m$ , de l'espace de phase.

Pour cette première campagne nous trouvons des dimensions différentes en fonction des échantillons. Notons que le velours R15 et le cuir C4 présente les plus grandes valeurs, ce sont aussi les échantillons a plus forte rugosité.

### b. Delay

Il est intéressant de noter que le delay sépare les échantillons en trois classes. Nous distinguons, dans l'ordre croissant du delay, d'abord les papiers, ensuite viennent les cuirs et les toiles de coton, et enfin la dernière classe composée du velours et des non-tissés. Notons que le Delay classe les échantillons selon leur compressibilité. Nous reviendrons sur ce point plus en détail au 3.3.

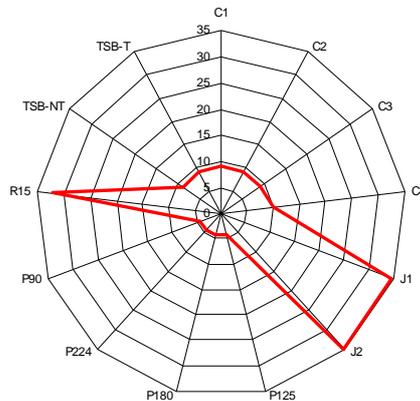


Figure 2.13 : Le delay,  $\tau$

### c. Diamètre

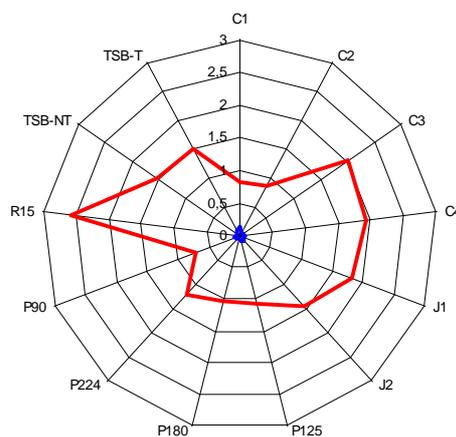


Figure 2.14 : Le diamètre de l'espace de phase.

Contrairement à la deuxième campagne de mesure où le diamètre dans l'espace de phase est directement lié à l'amplitude du signal temporel, pour cette première campagne ce n'est pas le cas, du fait des différences de dimension d'espace.

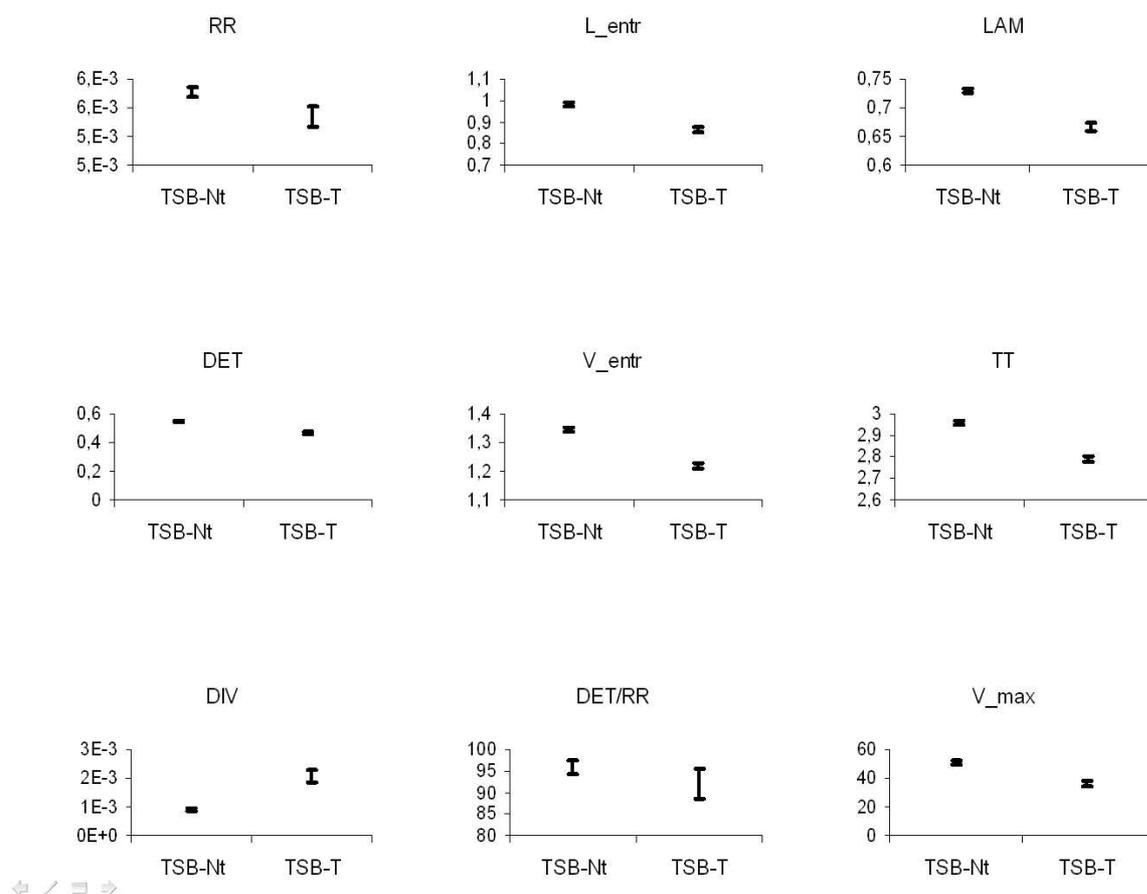
### 2.3.1.2.2 Recurrence Quantification Analysis

Après la construction des espaces de phase, dans cette section nous passons à la construction des matrices RP puis leur quantification, cependant nous ne montrerons pas ici les RP.

#### a. Les tissés

- Les toiles de coton Tsb-T (traité au Téflon©) et Tsb-NT

Comme nous pouvons le voir sur ces premières courbes, le traitement au Téflon© a tendance à diminuer le taux de points récurrents RR et le déterminisme DET du système ; par ailleurs on constate que la divergence DIV a tendance à augmenter avec ce traitement. Enfin la complexité de la structure déterministe ( $L_{entr}$ ) diminue avec le traitement. Ces effets sont contraires à nos attentes sur les propriétés tribologiques de Tsb-T.



**Figure 2.15 :** Résultats des statistiques RQA pour les échantillons Tsb-T et Tsb-NT

En effet on aurait pu s'attendre à ce que le traitement au Téflon© ait pour conséquence la diminution de l'excitation du capteur, or d'après nos résultats il n'en est rien. Nous revenons sur ce point précis en Section 3.4.2 (voir aussi Figure 3.7, P. 120).

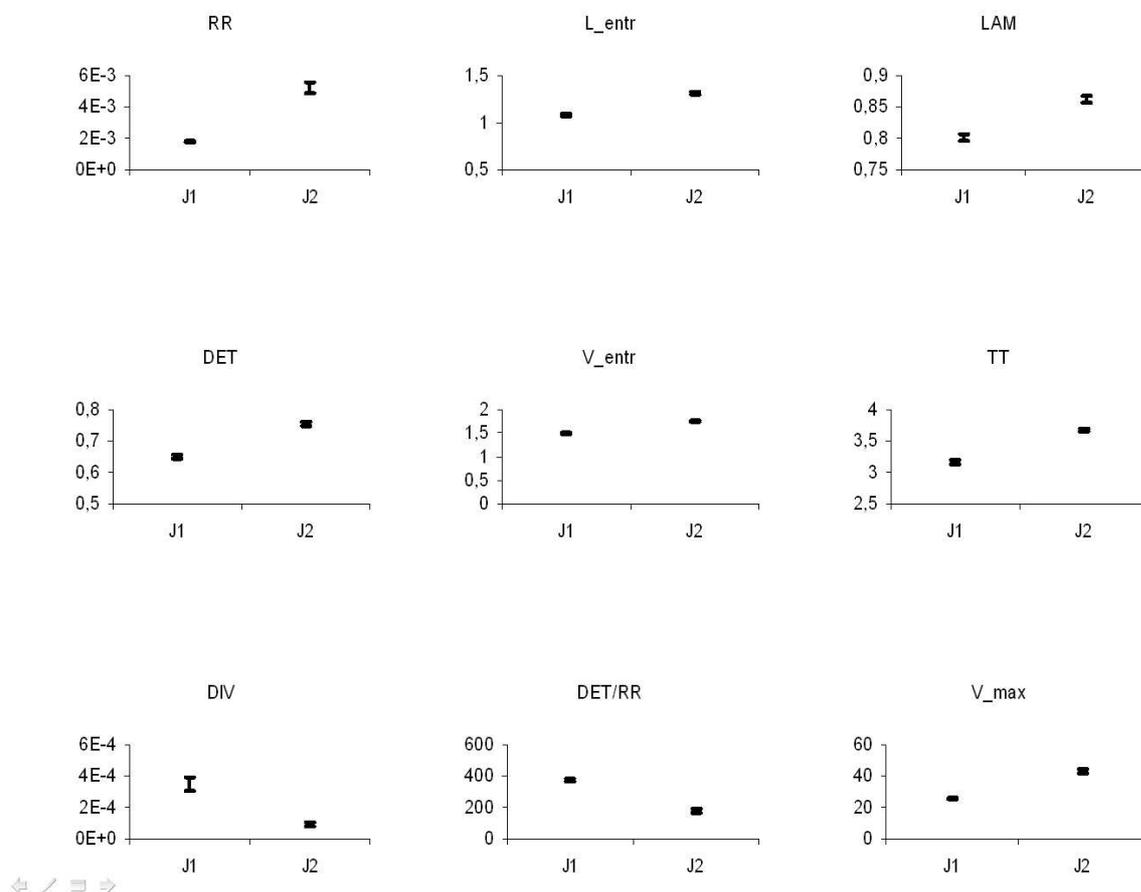
Si nous considérons les phases d'intermittence (LAM) et leur durée moyenne (TT), toutes ces mesures diminuent avec l'ajout du Téflon©. Là aussi ces observations sont contraires à nos attentes.

Pour conclure sur ces échantillons on peut noter que globalement quelque soit le paramètre étudié, la RQA arrive toujours à distinguer les deux échantillons.

### b. Les non-tissés

- Les lingettes spunlaced

Nous rappelons que la différence entre J1 et J2, dans cette première campagne, est uniquement au niveau de leur masse surfacique (plus élevée pour J1). Par conséquent il apparaît que les paramètres RR et DET décroissent avec l'augmentation de la masse surfacique, il en est de même de la complexité de la structure déterministe (L\_entr). Cette augmentation de la masse surfacique a pour autre effet d'accentuer la divergence (DIV) du système. Notre hypothèse est que l'augmentation de la masse surfacique engendre en même temps une modification du relief du non-tissé favorable à accentuer les perturbations enregistrées par le capteur.



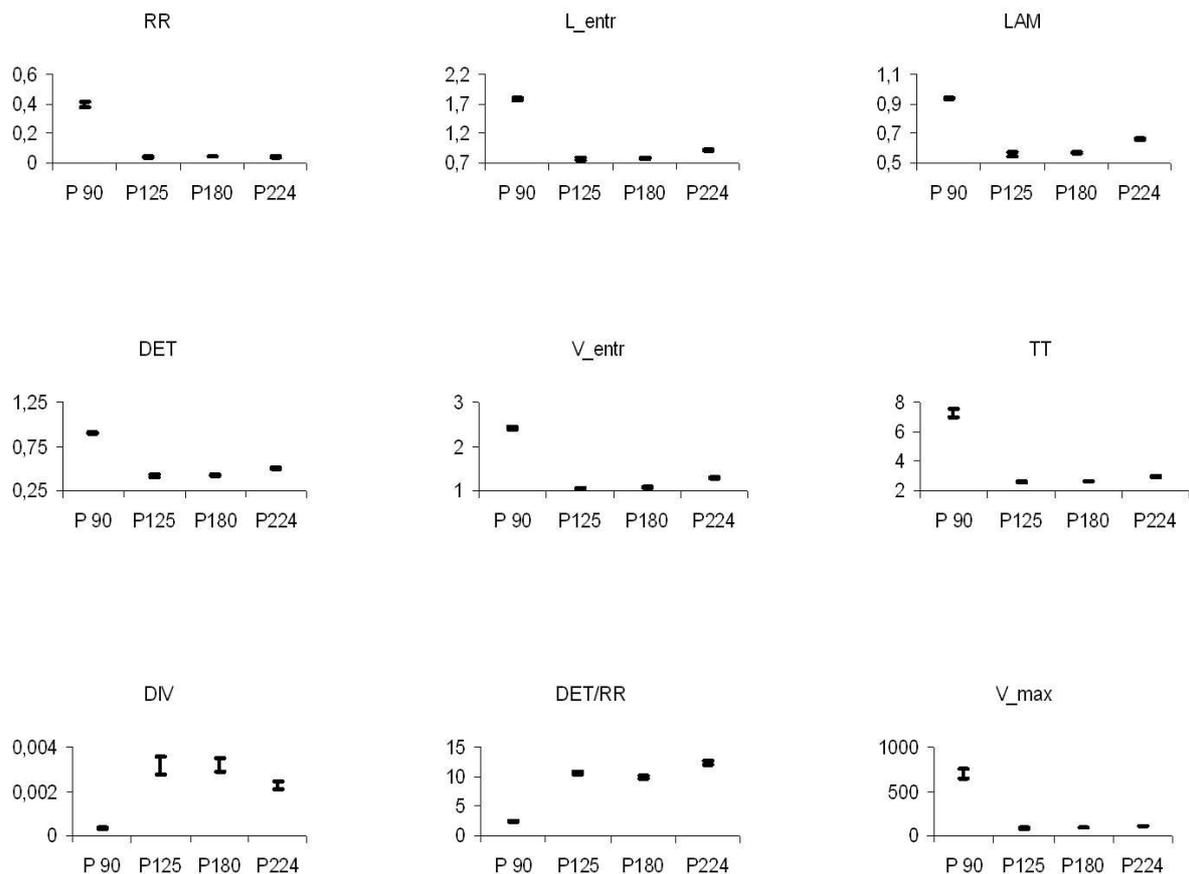
**Figure 2.16** : Résultats des statistiques RQA pour les lingettes spunlaced

Les phases d'intermittence (LAM), leur durée moyenne (TT) et leur complexité (V\_entr) diminuent avec la masse surfacique. La trajectoire dans l'espace de phase a moins tendance à visiter des régions préférentielles dans l'espace de phase et d'y prolonger ses séjours. Ceci pourrait encore s'expliquer par la modification du relief de J1 peu propice à laisser le signal du capteur se stabiliser. Enfin le ratio DET/RR n'est pas jugé pertinent du fait qu'entre les deux échantillons RR n'est pas

constant. Pour conclure sur ces échantillons on peut noter que, la RQA permet dans tous les cas de distinguer les deux non-tissés.

- Les papiers

Au premier regard des résultats RQA pour le papier la première chose qui apparaît est le comportement singulier du papier P90, ce phénomène persiste pour tous les autres paramètres RQA. Pour les autres papiers la RQA parvient à les distinguer et à dégager une tendance.

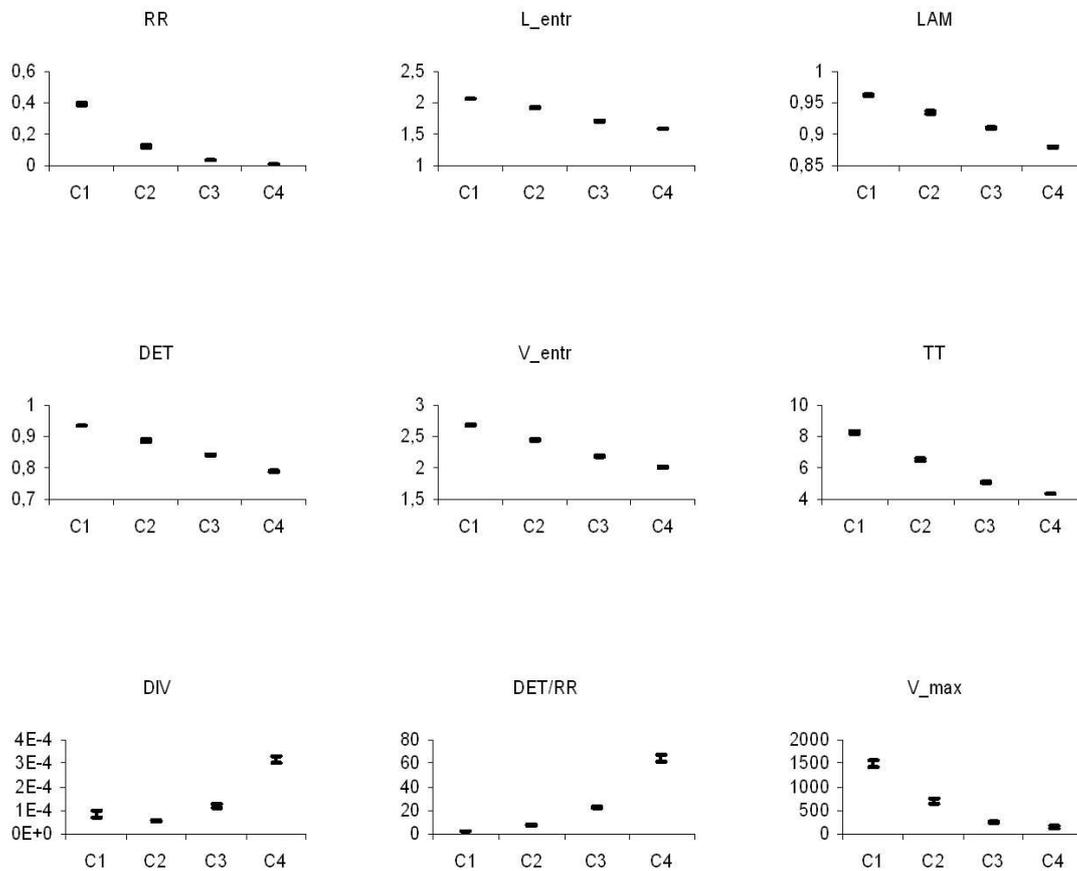


**Figure 2.17 :** Résultats RQA pour les papiers.

Il est intéressant de noter l'augmentation de l'entropie avec la masse surfacique. Notons aussi la même évolution des phénomènes d'intermittence (LAM). Si nous faisons abstraction de P90 nous voyons que la masse surfacique augmentant, il est difficile de voir une tendance du taux RR. Le déterminisme DET a, quant à lui, tendance augmente ainsi que la complexité du déterminisme (L\_entr). La conclusion est moins évidente concernant la divergence (DIV). Notons aussi la quantité d'états intermittents (LAM) et leur durée moyenne (TT) augmente sensiblement avec la masse surfacique des papiers ; il en est de même de la complexité de ces états (V\_entr).

- Les cuirs

Nous rappelons que ces échantillons de cuir se différencient exclusivement par la grosseur de leurs grains de surface. C1 est lisse alors que C4 est le plus granuleux.



**Figure 2.18 :** Résultats des statistiques RQA pour les cuirs.

Au niveau de tous les paramètres RQA ces échantillons sont bien discriminés ; nous pouvons voir sur ces courbes que la RQA montre bien une tendance d'évolution en fonction des grains du cuir. Ainsi, le taux RR diminue bien avec le grain croissant des surfaces de cuir, ce qui est prévisible, la taille des grains accroît l'excitation du capteur car ce paramètre est directement lié à la rugosité. Comme Pour les cas précédent nous verrons au Chapitre 3 que RR est très sensible à la rugosité. Au niveau des paramètres de déterminisme DET et de divergence DIV, les résultats sont conformes à nos attentes, l'augmentation des grains détruit le déterminisme et augmente l'instabilité du système. Par conséquent le système perd en complexité déterministe ( $L_{entr}$ ). Même si le ratio DET/RR montre une tendance intéressante nous ne le jugeons pas pertinent. En ce qui concerne les paramètres liés aux états intermittents, nous notons que le taux de points formant les lignes verticales (LAM) par conséquent la longueur de celles-ci (TT) diminuent avec la grosseur des grains, ce qui était prévisible, la stabilité du système diminuant, la trajectoire dans l'espace de phase à moins l'occasion de rester confinée dans une région particulière.

### 2.3.1.3 Conclusion de la 1<sup>ère</sup> campagne de mesures

Cette première campagne de mesure représente les premiers pas la mise en application du protocole expérimental de NTSA. Elle nous a permis de dégager des pistes intéressantes ; nous avons ainsi remarqué la corrélation du Delay et de la compressibilité des échantillons, au Chapitre 3 de ce manuscrit nous revenons sur ce point avec une discussion plus détaillée. Autre fait intéressant de cette première campagne, c'est les résultats sur les toiles Tsb-NT et Tsb-T – le dernier a eu un traitement au Téflon®. Nous serons particulièrement vigilants aux résultats de la deuxième campagne concernant ces deux échantillons avant d'y revenir plus en profondeur au Chapitre 3. Avec les non-tissés J1 et J2 nous avons vu qu'une augmentation de la masse surfacique a tendance à atténuer la structure déterministe présent dans le signal du capteur ainsi que les régimes d'intermittence de la trajectoire dans l'espace de phase. Enfin derniers échantillons traités : les cuirs, ce sont les échantillons qui ont donné les résultats les plus concluants dans la mesure où les paramètres RQA discriminent nettement les 4 échantillons et sont clairement sensibles à la modification des grains de surface.

Nous allons maintenant passer à la deuxième campagne de mesure où nous verrons de nouveaux échantillons faire leur apparition.

### 2.3.2 Campagne de mesures n°2

Pour cette deuxième campagne de mesure nous avons appliqué un certain nombre de nouvelles mesures avec le recul de la première campagne. C'est ainsi que le trigger fait son apparition, la fréquence d'échantillonnage a été ramenée à une valeur 4 fois inférieure, ce qui a largement contribué à rendre les durées de traitement plus confortables facilitant du coup le calcul et l'affichage des matrices RP. Nous avons aussi rajouté l'évaluation de nouveaux estimateurs l'entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov.

#### 2.3.2.1 Conditions expérimentales

Comme nous l'avons dit plus haut, pour cette seconde campagne, les mesures ont été réalisées sur un seul tour de plateau soit une durée d'acquisition de 5 secondes, avec une fréquence d'échantillonnage plus faible (1000 Hz). Afin d'analyser les correspondances entre les diagrammes de récurrences, du signal temporel et de l'analyse FFT, une acquisition en « temps fréquences » (sur la même gamme dynamique avec une résolution fréquentielle de 2 pts/Hz) a été menée en parallèle, sur chacun des échantillons. L'objectif de cette analyse comparative est d'observer l'évolution des spectres instantanés pendant la durée de l'acquisition. Grâce à elle, il est possible d'observer les instants où les modes de résonance de *Modalsens* se développent au cours du temps, permettant ainsi de relier les phénomènes observés à la topographie de surface de chaque échantillon testé. Autre évolution par rapport à la première campagne, un dispositif de contrôle du démarrage de l'acquisition a été mis en place via un trigger, sur un rayon connu de chaque échantillon. Ainsi, chaque échantillon a été positionné de telle manière que la mesure démarre lorsque le capteur se trouve perpendiculaire au sens de production de chaque structure testée. Pour chaque lot testé, 5 signaux

temporels et 5 diagrammes temps fréquences ont été enregistrés afin de déceler par la suite chaque spécificité du comportement dynamique non linéaire généré lors du contact entre le capteur et la surface analysée.

### 2.3.2.2 Résultats

Comme pour la première campagne, nous commençons par établir les paramètres de l'espace de phase, à savoir le delay et la dimension. Une fois ces paramètres établis, nous sommes passés dans cette première campagne à la partie RQA.

#### 2.3.2.2.1 Paramètres de l'espace de phase

##### a. Dimension

Contrairement à la première campagne de mesure, il apparaît pour la deuxième campagne que tous les échantillons donnent la même dimension d'espace de phase (cf. Figure 2.19).

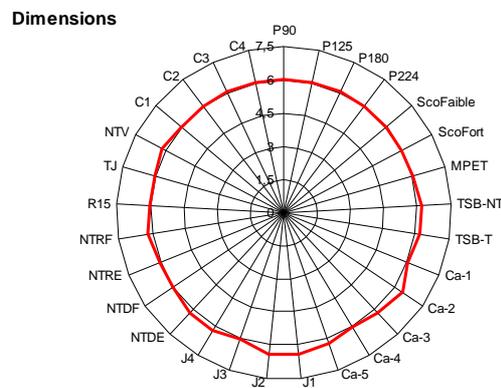


Figure 2.19 : La dimension,  $m$ , de l'espace de phase.

##### b. Delay

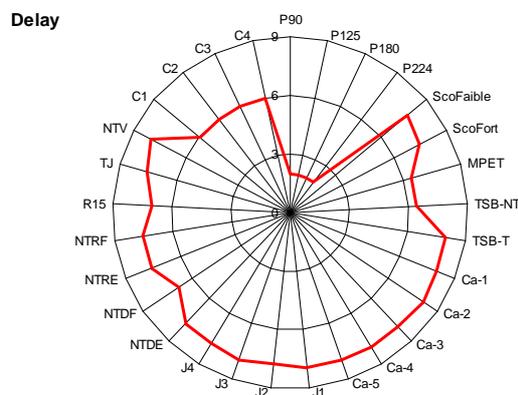
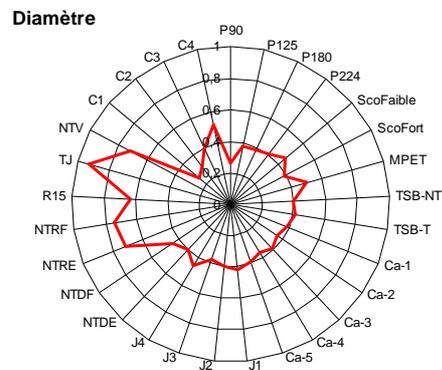


Figure 2.20 : Le delay,  $\tau$

Nous pouvons remarquer que les papiers se démarquent singulièrement au niveau du delay.

### c. Diamètre

Du fait que pour cette campagne de mesure les échantillons présentent tous la même dimension d'espace de phase, le diamètre de l'espace de phase est directement corrélé à l'amplitude du signal temporel. C'est donc naturellement que nous trouvons d'un côté les échantillons les plus rugueux avec des valeurs de diamètre supérieures à 0,5 et tous les autres en deçà.



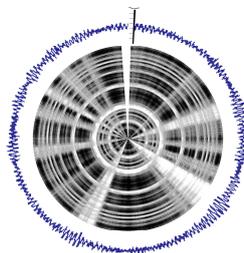
**Figure 2.21** : Diamètre dans l'espace de phase.

#### 2.3.2.2.2 Recurrence Plots des échantillons

Dans cette partie nous montrons les représentations graphiques de RP choisis pour chaque échantillon. Notons que ces représentations ne sont qu'à titre d'illustration, seule l'analyse des paramètres RQA permettant de réellement estimer objectivement ces RP. Nous ferons une première analyse des RP nous basant uniquement sur le taux de points récurrents RR, avant d'y revenir plus en détails dans le Chapitre 3.

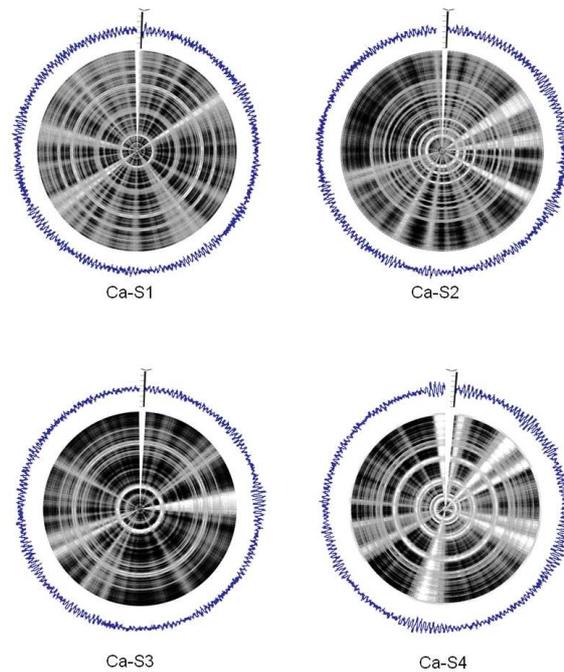
#### a. Tissés

- Les cachemires



**Figure 2.22** : Recurrence plot de la toile de cachemire Ca-T.

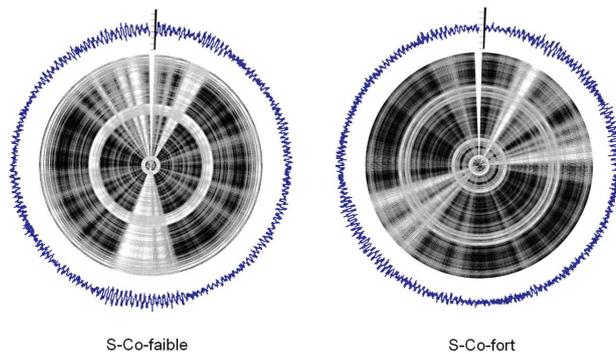
Visuellement les RP des cachemires sont assez homogènes. Les perturbations constatées le long du tour sont présentes sur tous les échantillons mais semblent être plus marquées pour Ca-T.



**Figure 2.23 :** Recurrence Plots des sergés de cachemire.

La valeur du taux de points sur le RP : RR est compris entre 0.78 et 0.85 nous verrons que c'est dans cette plage se situe tous les tissés de cette campagne, exception faite des surfaces particulières sont le velours et la toile enduite TJ.

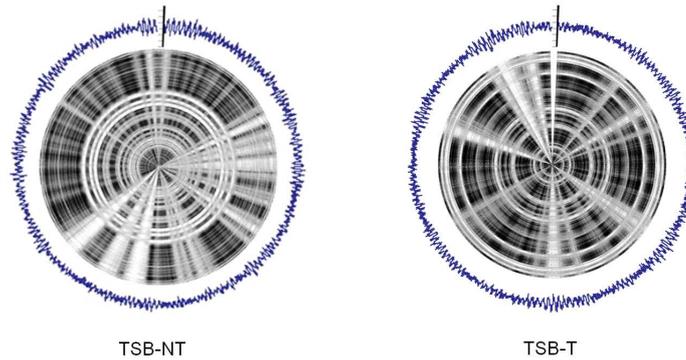
- Les sergés de coton émerisés



**Figure 2.24 :** Recurrence Plots des sergés de coton.

Le taux de points récurrents est plus élevé pour le sergé qui subit l'émerisage le plus fort Sco-fort.. Nous y reviendrons au chapitre suivant. Notons aussi que la valeur de ce taux RR classe ces échantillons sans surprise dans le groupe des textiles, cependant Sco-faible est tres proche des non-tissés.

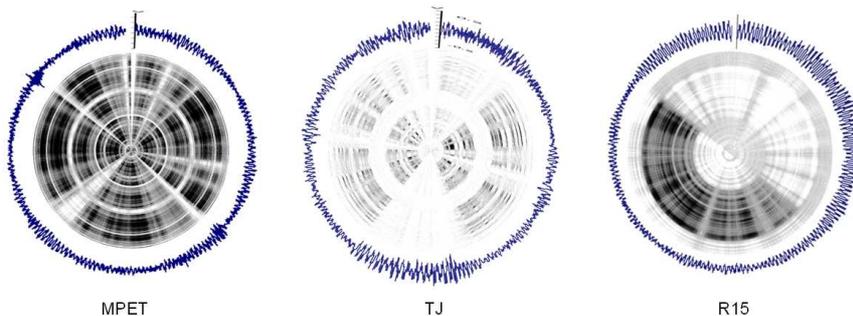
- Les toiles de coton traitées ou non au PTFE



**Figure 2.25 :** Recurrence Plots des toiles de coton.

Le traitement au Téflon<sup>®</sup> a pour effet de diminuer le taux RR, comme nous le verrons au Chapitre 3 c'est contraire à nos attentes. La valeur de RR pour Tsb-Non Traitée se trouve dans la fourchette des tissés, par contre Tsb-traitée est plus proche des non tissés.

- Les autres tissés



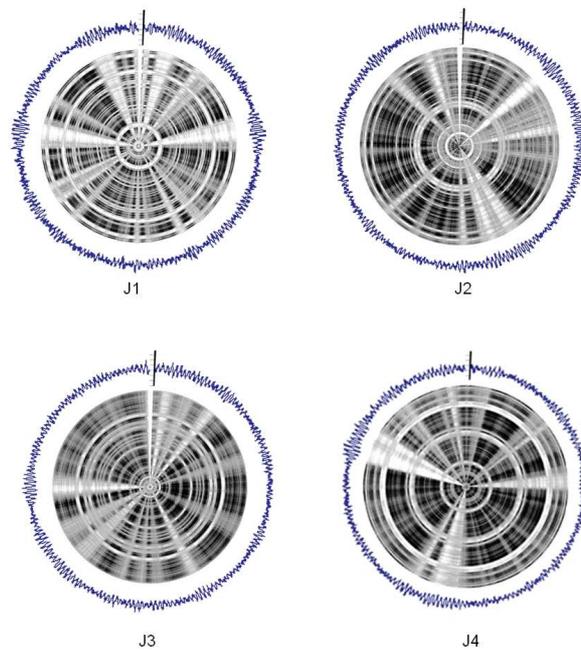
**Figure 2.26 :** Recurrence Plots des surfaces complémentaires.

Sur ces 3 RP le MPET présente le plus grand taux de RR, vient ensuite le velours R15 puis la toile TJ. Le faible taux de RR pour le velours s'explique par la forte excitation du capteur engendrée par l'effet rebrousse-poil de la pilosité orientée de surface. Comme nous le verrons au chapitre suivant cette excitation correspond à un phénomène particulier dans l'espace de phase. Notons que le RP du MPET le classe parmi le groupe des tissés définis plus haut.

#### **b. Les non-tissés**

- Les lingettes spunlaced

Nous rappelons que J1 et J2 ont la même composition cependant le deuxième a une masse surfacique plus élevée. Cela se traduit sur le RP par un taux RR supérieur pour J2. Notons que ce taux se situe pour les deux échantillons aux environs de 0,6 c'est la valeur de référence pour beaucoup de non-tissés.



**Figure 2.27** : Recurrence Plots des non-tissés spunlaced.

Alors que J4 est entièrement en viscose, J3 est composé de viscose et de polyester. La valeur du taux RR pour J4 est similaire que pour les deux premiers non-tissés, alors que pour J3 on trouve une valeur de RR plus élevée proche des valeurs trouvées pour les tissés.

- Les non-tissés bicouches<sup>22</sup>

A première vue il apparaît clairement une différence entre les deux faces des non-tissés bicouches. Sur la face la plus rugueuse on a un taux RR le plus faible, comme nous l'avons remarqué plus haut, une forte excitation du capteur induit cette baisse significative du taux RR.

Le non-tissé bicouche fin a toujours le taux RR le moins élevé quelque soit la face considérée. Sur leur face douce ces échantillons se comportent comme les autres non-tissés cependant sur leur face rugueuse ils présentent le taux de RR parmi les plus bas de tous les autres échantillons.

- Les papiers

Sur les RP des papiers on peut voir que le taux de points de récurrence RR est élevé pour P90 et qu'il décroît au fur et à mesure que la masse surfacique augmente.

Les RP des papiers sont très distinctifs avec la présence de secteurs blancs éparpillés le long du tour. Les papiers P224 et P180 ont un taux RR qui les classe parmi les tissés, alors que P90 et P125 ont des taux RR qui sont les plus élevés parmi tous les échantillons testés, à tel point que sur P90 on peut avoir du mal à distinguer autre chose que des pixels noirs.

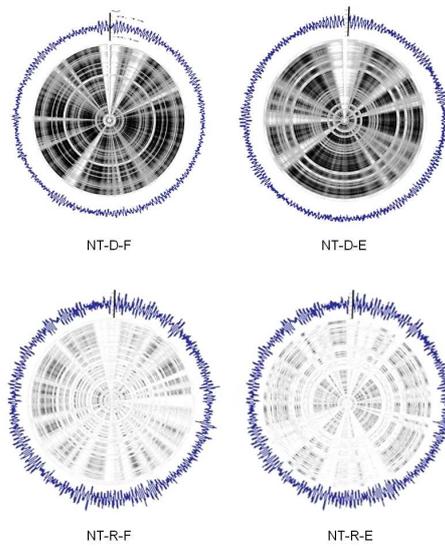


Figure 2.28 : Recurrence Plot des non-tissés bicouches.

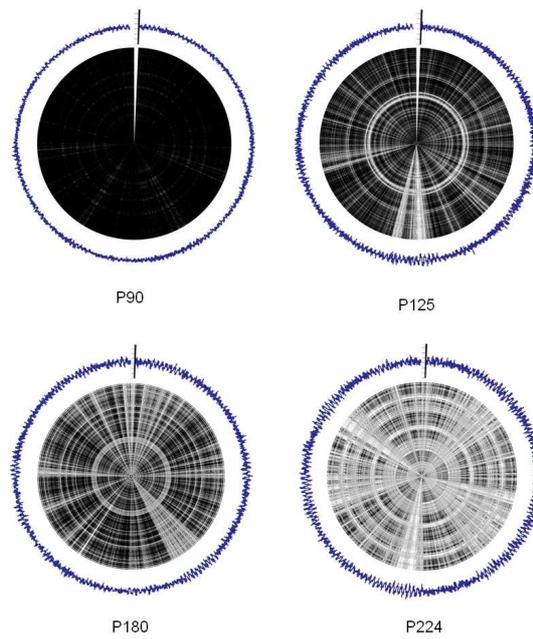
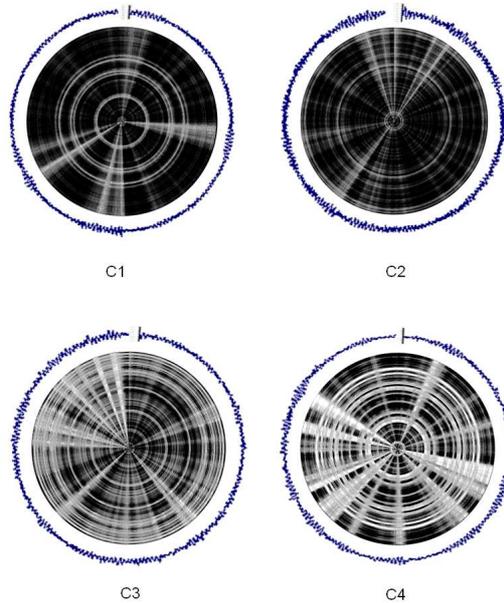


Figure 2.29 : Recurrence Plots des papiers.

- Les cuirs

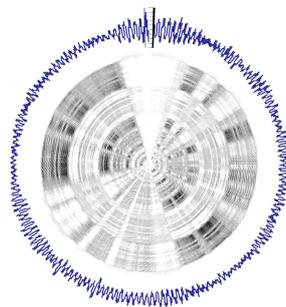
De C1 à C4 le grain de surface va croissant, par conséquent il en de même pour la rugosité. Ce qu'on constate ici c'est que plus la rugosité augmente plus RR diminue. C'est donc le même constat que sur les surfaces précédentes.



**Figure 2.30** : Recurrence Plot des cuirs.

- Les non-tissés de verre

Avec un taux RR de 0.26 le non-tissé de verre NTV présente l'un des taux les plus bas. Sa structure rugueuse excite fortement le capteur ce qui produit cet effet. Cette valeur de RR rapproche ce non-tissé du velours, avec le comportement anisotrope de la pilosité de ce dernier en moins.



**Figure 2.31** : Recurrence Plot du Non-tissé de verre.

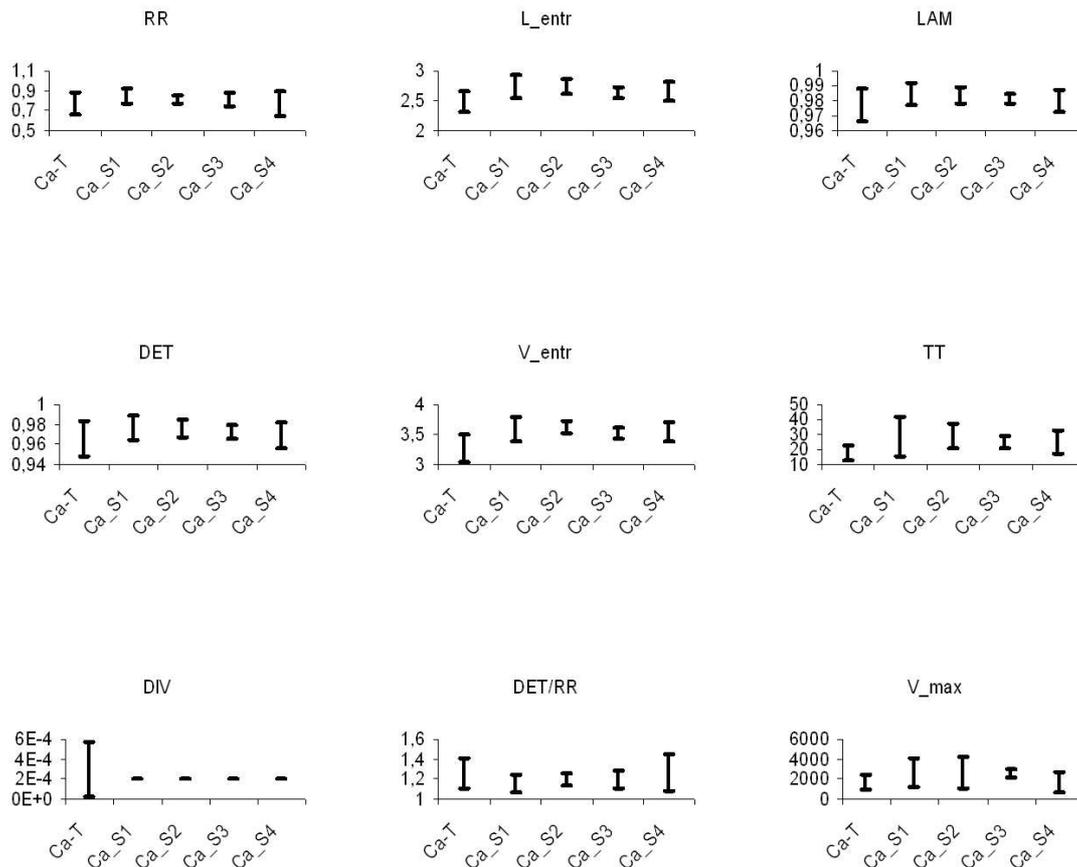
### 2.3.2.2.3 Recurrence quantification analysis

Après l'étape de la reconstruction de la trajectoire dans l'espace de phase, nous construisons les RP avant de passer à leur quantification.

### a. Les tissés

- Les cachemires

Nous rappelons que pour les cachemires, Ca-T, Ca-S1 et Ca-S3 sont tissés avec des fils de chaîne et des fils de trame dits *compacts*. Les sergés Ca-S2 et Ca-S4 ne présentent des fils *compacts* que dans leur chaîne. Enfin tous les échantillons sont des sergés à l'exception de Ca-T qui est une toile.

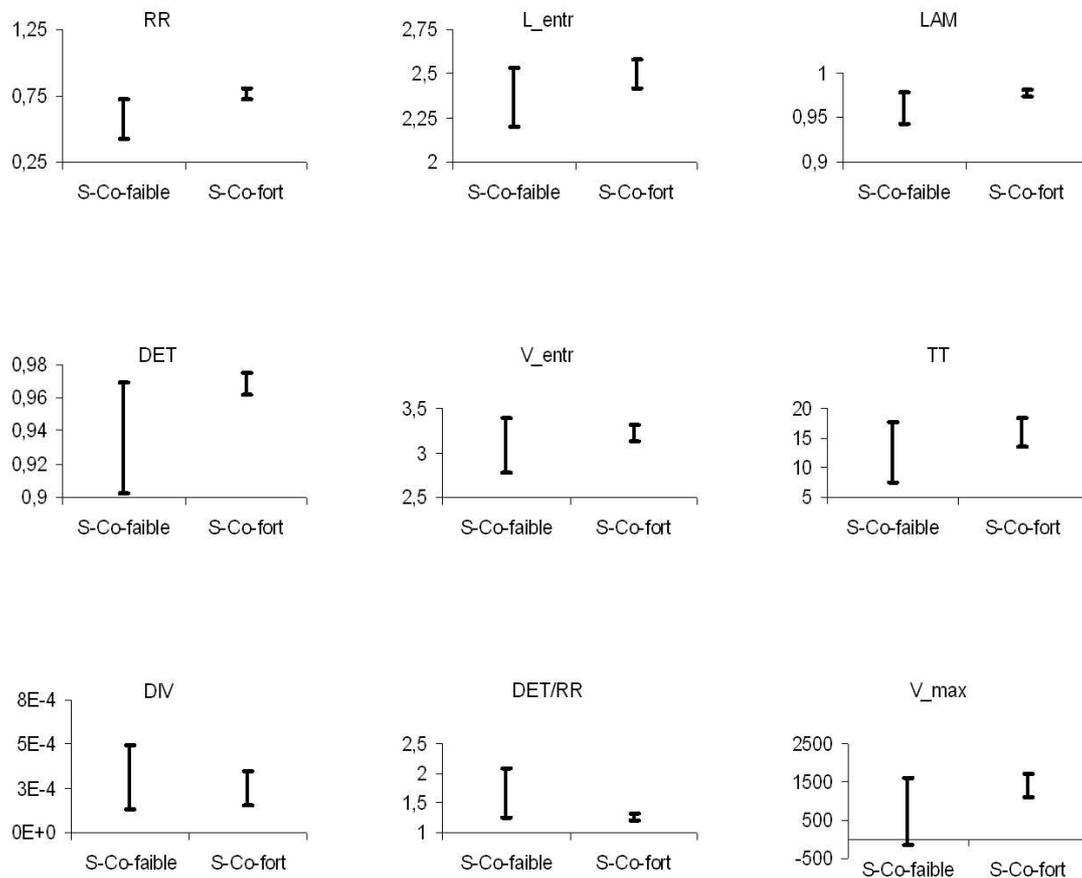


**Figure 2.32** : Résultats des statistiques RQA pour les cachemires.

L'influence de l'insertion des fils compacts est difficile à détecter d'après ces résultats. N'ayant pas de résultat à haut taux d'échantillonnage nous pouvons difficilement analyser ces premiers résultats. Comme nous le verrons plus loin, le principal inconvénient de la baisse de la fréquence d'échantillonnage est qu'elle induit des erreurs de reproductibilité des mesures RQA. En effet si pour la première campagne les intervalles de confiance étaient assez précises c'est moins le cas pour celle-ci. Cependant en regardant de plus près les résultats on peut voir que la toile Ca-T se détache pour toutes les mesures.

- Les sergés de coton émerisés

Ces échantillons font partis des nouveautés de cette seconde campagne. La différence entre ces deux échantillons est le traitement d'ennoblissement surfacique qu'ils ont subi : l'émerisage. SCo-fort ayant subi l'émerisage le plus abrasif.

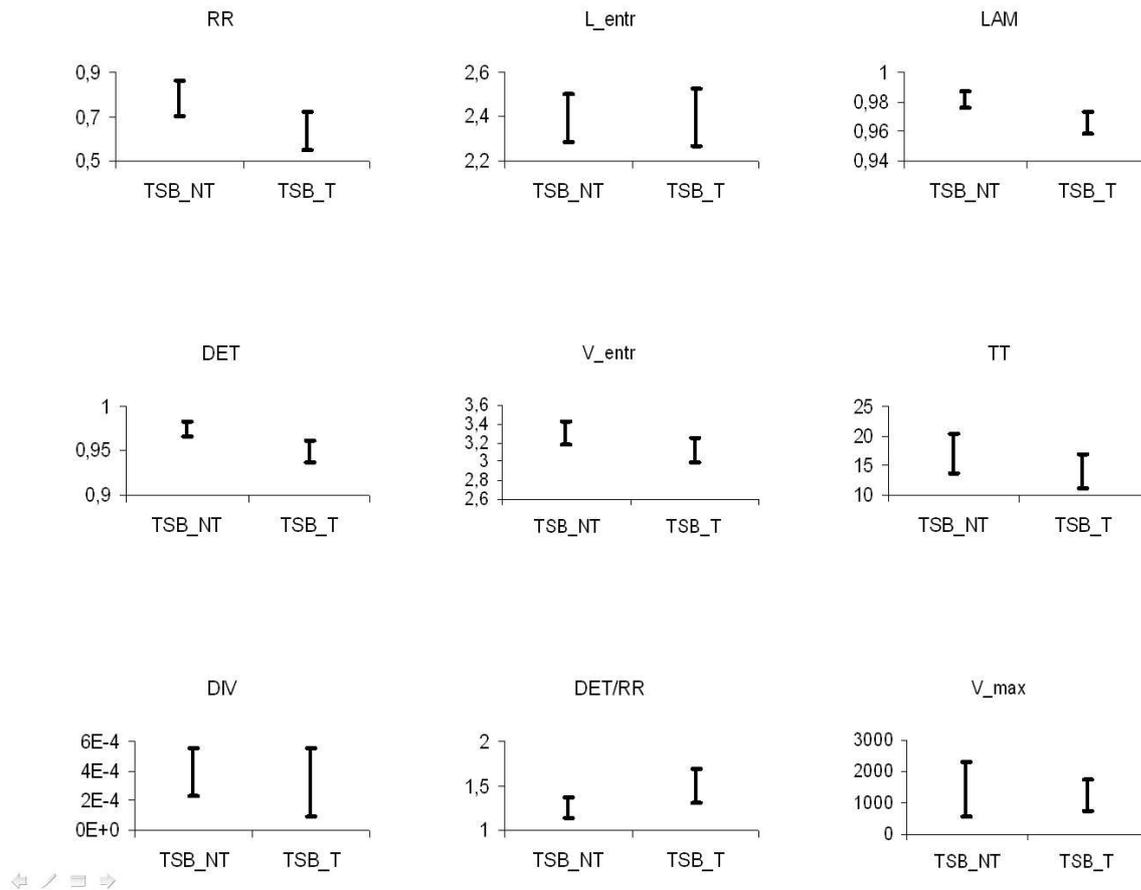


**Figure 2.33** : Résultats des statistiques RQA pour les sergés de coton.

Si on observe le taux RR et le déterminisme DET, ceux-ci ont tendance à augmenter avec l'intensité de l'émerisage. Il en de même pour la mesure de la complexité de la structure déterministe : L\_entr. Ces observations sont conformes à nos attentes, en effet, l'émerisage intensif produit une structure surfacique très douce, peu excitatrice du capteur. Ce qui induit donc des signaux faiblement perturbé, on peut voir que la divergence (DIV) montre une tendance à diminuer avec ce traitement. Si nous regardons les paramètres d'intermittence on peut voir que les phases d'intermittences ainsi que leur durée moyenne augmentent avec l'intensité de l'émerisage.

- Les toiles de coton traitées ou non au PTFE

La différence entre ces deux échantillons est que TSB-T a eu traitement surfacique au Téflon© contrairement à TSB-NT. Cette deuxième campagne a produit des résultats sensiblement similaires à ceux de la première. La différence est au niveau de l'erreur dans la reproductibilité des résultats plus importante ici.



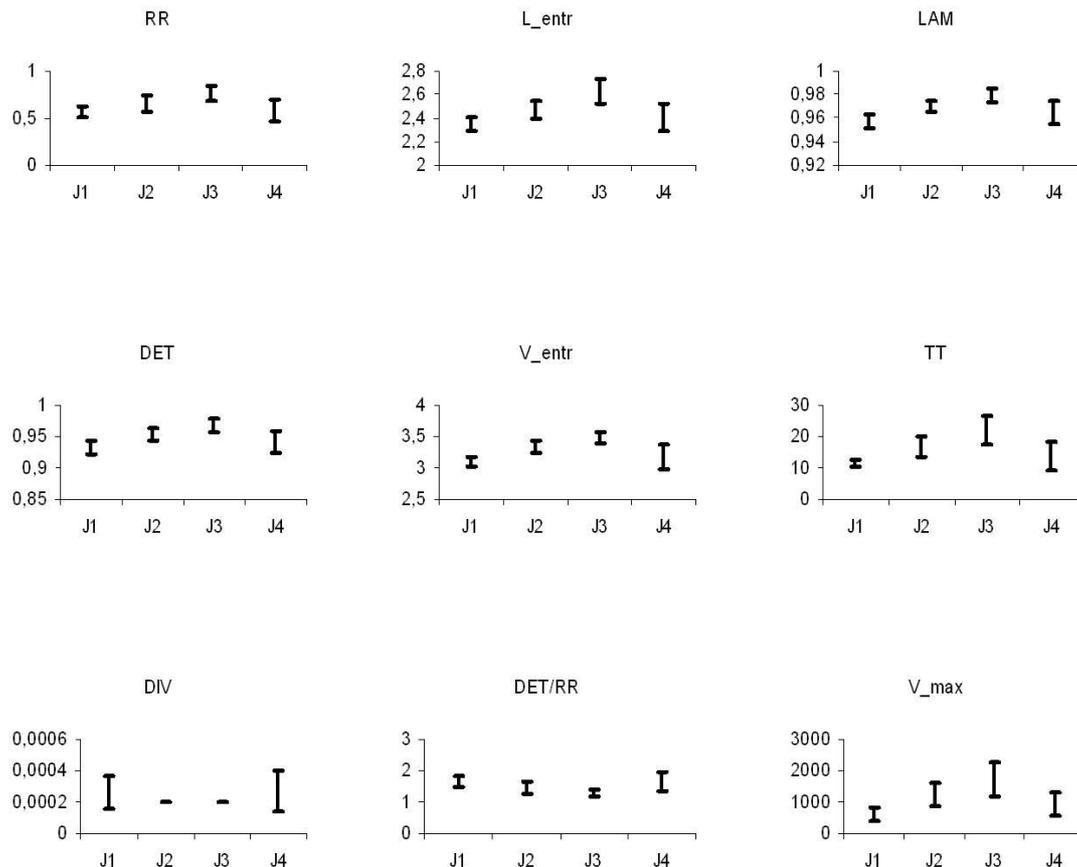
**Figure 2.34 :** Résultats des statistiques RQA pour les toiles de coton.

A la première campagne nous remarquons que la plupart des statistiques RQA donnaient des évolutions contraires à nos attentes. En effet nous nous attendions à ce que le traitement Téflon® diminue l'excitation au niveau du capteur, mais les résultats RQA montraient le contraire. Cette tendance se confirme pour cette seconde campagne. Avec l'ajout du Téflon®, le taux RR et le déterminisme diminue ; il en est de même pour les régimes confinés et leur durée (voir LAM et TT). Aussi notons que la diminution de la complexité des phases intermittentes ( $V_{entr}$ ) est confirmée. Dans cette campagne il est difficile de tirer des conclusions quant à la divergence (DIV), cependant nous rappelons qu'à la première campagne ce paramètre avait tendance à augmenter avec le traitement.

### b. Les non-tissés

- Les lingettes spunlaced

Pour cette seconde campagne de mesure, nous avons testé 4 échantillons, en plus de J1 et J2 nous avons ajouté J3 et J4. Nous rappelons que les deux premiers ont la même composition avec une masse surfacique supérieure pour J1. Alors que J3 et J4 ont la même masse surfacique mais sont de compositions différentes : J3 est composée de 65% de Polyester et de 35% de viscose alors que J4 est composée uniquement de viscose.



**Figure 2.35 :** Résultats des statistiques RQA pour les non-tissés spunlaced.

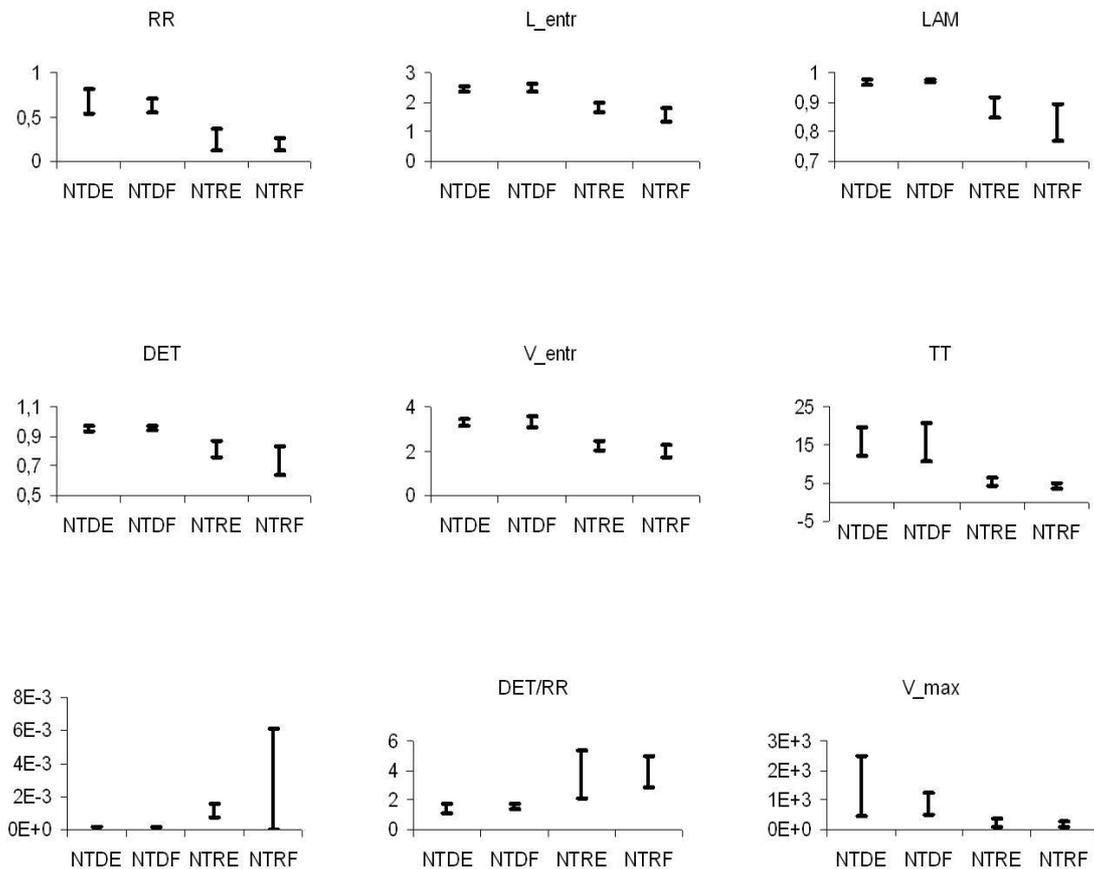
Si nous regardons uniquement J1 et J2, nous observons les mêmes tendances que pour la première campagne ; à ceci près que dans la présente les erreurs sur la reproductibilité des mesures sont plus conséquentes que sur la première. Cela pourrait s'expliquer par la dégradation de la fréquence d'échantillonnage pour cette campagne. Néanmoins nous observons un taux RR, et le déterminisme qui diminue avec la masse surfacique. Il en est de même en ce qui concerne les mesures des régimes de confinement (LAM, TT) : la tendance de la première campagne est respectée.

J4 est de la même composition que J1 et J2 et a une masse surfacique se situant entre les deux échantillons. Comme nous pouvons le voir sur les graphes pour chaque statistique RQA, J4 se situe toujours entre J1 et J2, ce qui est cohérent avec nos attentes.

Enfin concernant l'échantillon J3, on peut voir que l'ajout de viscose augmente le taux RR et le déterminisme. Nous rappelons que J3 et J4 ont des masses surfaciques équivalentes, les différences que nous notons sont donc exclusivement liées à l'ajout de la viscose. Sachant que la viscose apporte un toucher plus doux (moins rugueux donc) au non-tissé, il est conforme à nos attentes que le taux RR et le déterminisme augmente avec l'ajout de celle-ci. De même aussi nous notons une augmentation de la complexité du déterminisme pour J3. Sur la divergence les résultats ne sont pas très concluants. Enfin en ce qui concerne le régime de confinement, J3 présente des phases confinées plus importantes ainsi que la durée de celles-ci.

Pour conclure sur ces non-tissés, nous pouvons dire que cette seconde campagne confirme la première ; en ajoutant J4, nous avons pu estimer la capacité des mesures RQA à détecter la variation de masse surfacique entre J1, J2 et J4. Enfin l'ajout de J3, qui contient de la viscose en plus, nous a montré que la RQA est sensible à la douceur (faible rugosité) des étoffes.

- Les non-tissés bicouches



**2.36** : Résultats des statistiques RQA pour les non-tissés bicouches.

Nous rappelons que nous disposons de deux types de non-tissés bicouche, une fine et une épaisse et que nous considérons à chaque fois soit la face rugueuse soit la face douce. Comme nous le voyons sur les graphiques suivants, si la distinction entre face rugueuse et douce est clairement établie, le RQA ne scinde pas de manière décisive sur la différence d'épaisseur des deux échantillons.

Conformément à nos attentes, le taux RR est nettement inférieur pour les faces rugueuses ; il en est de même pour le déterminisme alors que pour la divergence l'erreur sur NTRF ne nous permet pas de conclure, même si il y a une certaine tendance qui montre des valeurs plus élevées pour les faces rugueuses. La complexité du déterminisme ( $L_{entr}$ ) montre baisse nettement quand on passe de la face douce à la face rugueuse, ce qui est conforme à nos attentes. En ce qui concerne les paramètres d'intermittence, nous notons que pour les faces douces il ya plus d'états confinés (LAM) et de durée moyenne plus élevée (TT) ; c'est la situation pour la durée maximale de confinement observée

(V\_max). Pour conclure sur le cas des non-tissés bicouches notons que le paramètre physique déterminant en termes statistiques RQA est la différence face douce/ rugueuse et non leur épaisseur.

- Les papiers

Si les résultats de la première campagne montraient un comportement singulier du papier P90 pour globalement toutes les statistiques RQA, le phénomène semble avoir disparu pour cette seconde campagne. D'autre part il semblerait que l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage soit fatale à la précision des mesures ; en effet les barres d'erreur établies, sur certaines mesures, sont ici plus importantes que pour la première campagne.

La tendance pour le taux RR, le déterminisme est à la baisse avec l'augmentation de la masse surfacique, alors que la divergence augmente. Lors de la première campagne, même si les erreurs sur les mesures étaient moindres, nous avons du mal à déceler une tendance certaine d'évolution entre les échantillons. La tendance d'évolution de ces paramètres, ici, corroborent nos attentes ; l'augmentation de la rugosité induit celle de la rugosité, ce qui a pour effet d'ajouter de l'excitation dans le signal du capteur. Ce qui explique par conséquent le taux de points récurrents en baisse, et le déterminisme avec ; alors que la divergence augmente.

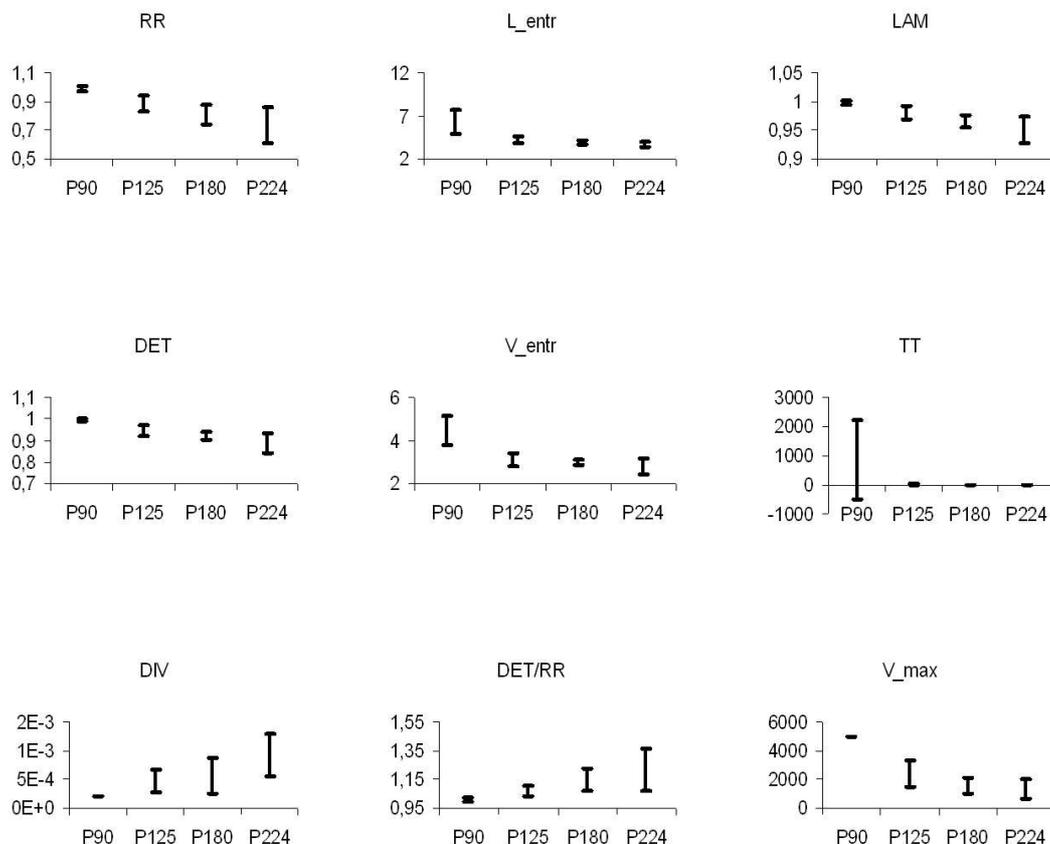
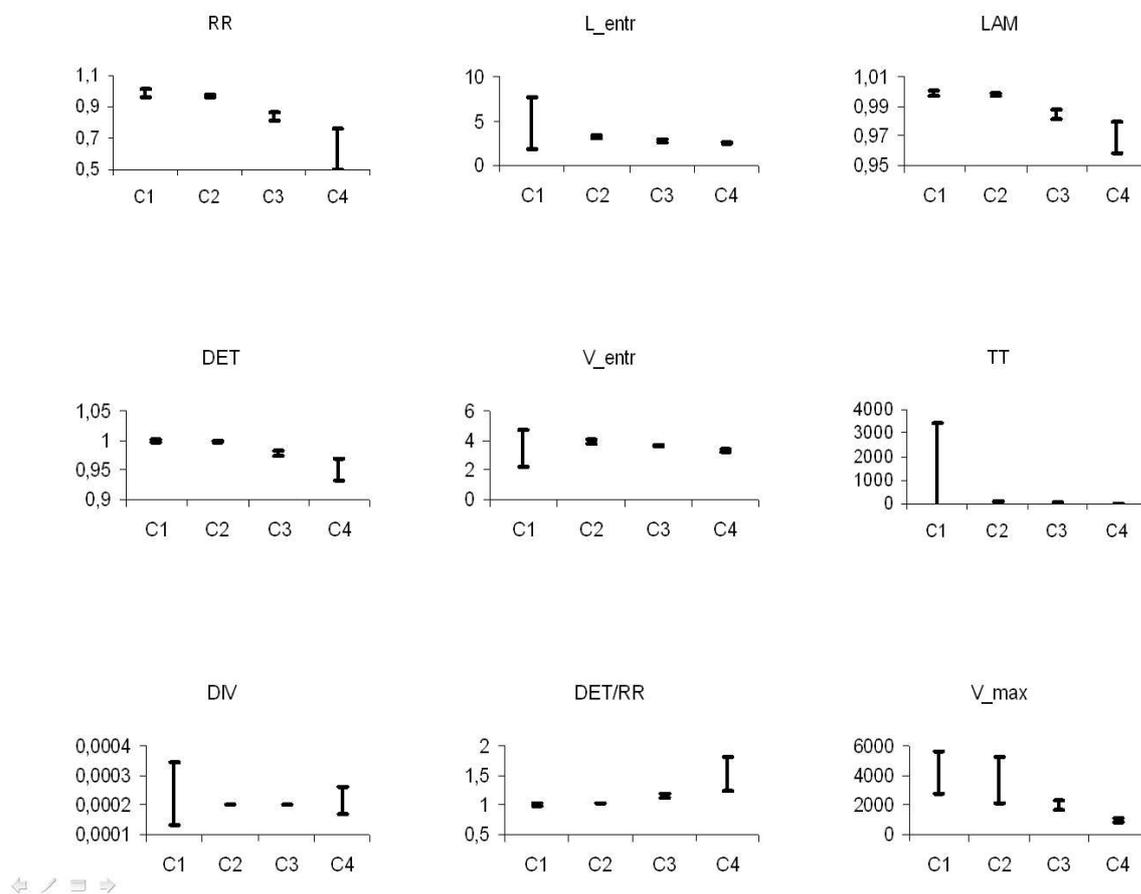


Figure 2.37 : Résultats des statistiques RQA pour les papiers.

Lors de la première campagne nous avons souligné la tendance à l'augmentation des phases d'intermittence (LAM) avec la masse surfacique. Le phénomène semble s'inverser ici, ce qui nous paraît plus logique. Comme nous le soulignons précédemment l'augmentation de la rugosité a pour effet d'ajouter de l'excitation au capteur, cela se traduit par une baisse des phases d'intermittence et la durée de celles-ci (TT). En ce qui concerne les mesures de complexité, que ce soit de la structure déterministe (L\_entr) ou de l'intermittence (V\_entr), la tendance est à la baisse quand la masse surfacique augmente.

- Les cuirs

La caractéristique fondamentale de ces échantillons est la taille croissante de leur grain de surface. Si pour la première campagne le cuir avait donné les résultats les plus concluants, pour celle-ci il semble que la diminution de l'échantillonnage d'enregistrement fasse perdre de la précision en termes de reproductibilité des mesures.



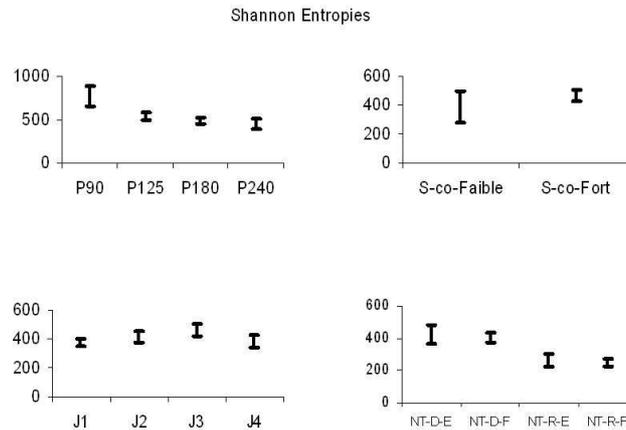
**Figure 2.38 :** Résultats des statistiques RQA pour les cuirs.

En ce qui concerne le taux RR, le déterminisme (DET) et la divergence (DIV) la tendance est sensiblement la même que pour la première campagne : l'augmentation des grains de surfaces diminue le taux de points récurrents ainsi que le déterminisme alors qu'elle augmente la divergence du système. On peut aussi noter la sensible baisse de la complexité du déterminisme (L\_entr). En ce qui concerne les paramètres liés aux états d'intermittence du système, le paramètre LAM (lié à la quantité

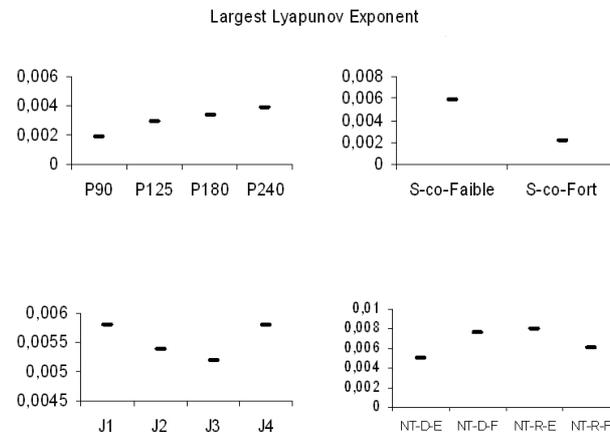
d'état de confinement) montre une tendance à la baisse quand la rugosité augmente. Les résultats obtenus avec TT, la durée des états intermittents, ne nous permettent pas de conclure.

### 2.3.2.2.4 Evaluation de l'Entropie de Shannon, de l'exposant de Lyapunov

Sur les figures suivantes nous comparons l'entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov quelques échantillons.



**Figure 2.39 :** Entropie de Shannon pour les papiers, sergés de coton, non-tissés *spunlaced* et les non-tissés bicouches.



**Figure 2.40 :** Le plus grand exposant de Lyapunov pour les papiers, sergés de coton, non-tissés *spunlaced* et non-tissés bicouches.

Nous remarquons déjà que les papiers présentent les plus grandes valeurs d'entropie de Shannon, et que celle-ci diminue avec la masse surfacique des papiers. A l'opposée, les deux types (bicouches et *spunlaced*) de non-tissés ont les plus faibles valeurs d'entropie : pour les non-tissés J l'entropie diminue avec la masse surfacique et atteint sa valeur maximale pour J3 qui contient de la viscose. Pour le sergé de coton l'entropie augmente avec l'intensité de l'émerisage et enfin pour les non-tissés bicouches l'entropie est bien sensible aux faces (douce/ rugueuses), ce n'est pas le cas en ce qui concerne la masse surfacique des échantillons.

En ce qui concerne les valeurs de l'exposant maximal de Lyapunov, nous trouvons les mêmes gammes de valeurs pour tous les échantillons. Globalement l'Entropie de Shannon et l'exposant maximal de Lyapunov ont des évolutions inverses : tout comme  $L_{entr}$  et DIV en RQA. Si nous reprenons le cas des papiers nous pouvons déduire que l'augmentation de la masse surfacique induit de la rugosité qui, comme nous l'avons vu en RQA, a tendance de détruire la complexité du signal (entropie) au profit d'une augmentation de l'instabilité (Lyapunov). Nous reviendrons en détails sur cette analyse dans la Section 3.4.3.

### 2.3.2.3 Conclusion de la 2ème campagne de mesure

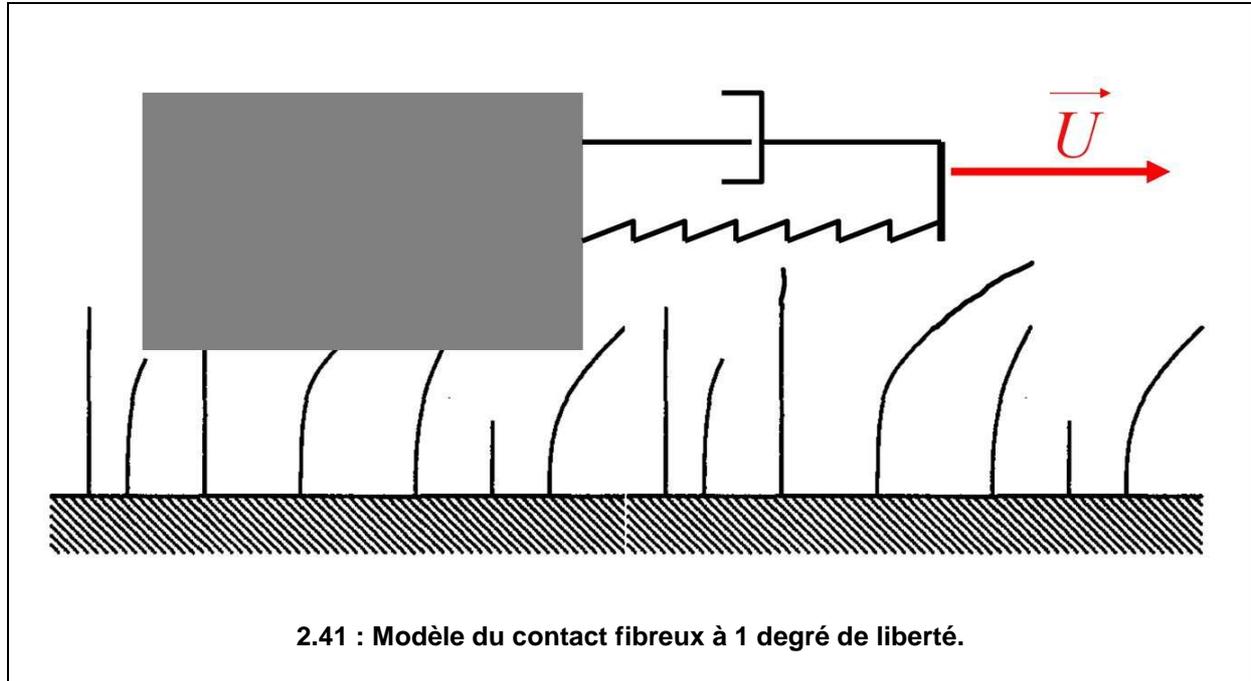
La contribution majeure de la deuxième campagne de mesure est d'abord un choix plus large d'échantillons testés ainsi que la mise en place du trigger. D'autre part la fréquence d'échantillonnage a été revue à la baisse, ce qui nous a permis de donner des représentations des RP ; cependant nous avons que, dans certains cas, il s'est posé le problème que, due à la réduction de la fréquence d'échantillonnage, les barres d'erreurs des mesures étaient plus importantes pour cette seconde campagne.

La première partie de cette campagne a consisté à la reconstruction des espaces de phase par la détermination des delay et des dimensions. Par la suite nous avons procédé à la reconstruction des matrices RP puis de leur quantification. Le bilan de cette seconde campagne pour les cachemires est assez décevant dans la mesure ou nous n'avons pas identifier de réelles tendances entre les 5 échantillons. En ce qui concerne les sergé Sco et les toiles Tsb, les résultats se sont révélés plus intéressants : les tendances de la première campagne se sont confirmées et nous notons encore l'influence singulière du traitement Téflon®. Dans le cas non-tissés J, le fait d'avoir ajouté J4 qui est de la même composition que les échantillons de la première campagne mais de masse surfacique différente a permis de confirmer l'influence de celle-ci sur les statistiques RQA. Nous avons aussi vu comment l'ajout de viscose modifier la dynamique du capteur. Une autre famille de non-tissés a été sélectionnée pour cette campagne, il s'agit des bicouches. Les résultats se sont révélés très intéressant dans la mesure par la RQA on arrive à clairement discerner les deux faces (douce/rugueuse) mais l'influence de l'épaisseur n'a été pas détectée. En ce qui concerne les papiers, si pour la première campagne on avait le phénomène récurrent du papier qui se démarquait singulièrement à chaque fois ce fait a disparu à cette campagne. Cependant il s'est posé le problème de l'incertitude sur les mesures qui s'est accentuée avec la baisse de la fréquence d'échantillonnage. Enfin les derniers échantillons étudiés dans cette campagne sont les cuirs, globalement les résultats observés à la première campagne ont été confirmés.

En dernière partie de cette seconde campagne nous avons présenté les résultats des entropies de Shannon et de l'exposant maximal de Lyapunov évalué sur certains échantillons ; les premiers résultats sont déjà très intéressants nous y reviendrons dans le Chapitre 3.

## 2.4 Modélisation du contact fibreux

Nous rappelons le système à 1 degré de liberté dont nous avons établi les équations en Section 1.6.2.4.



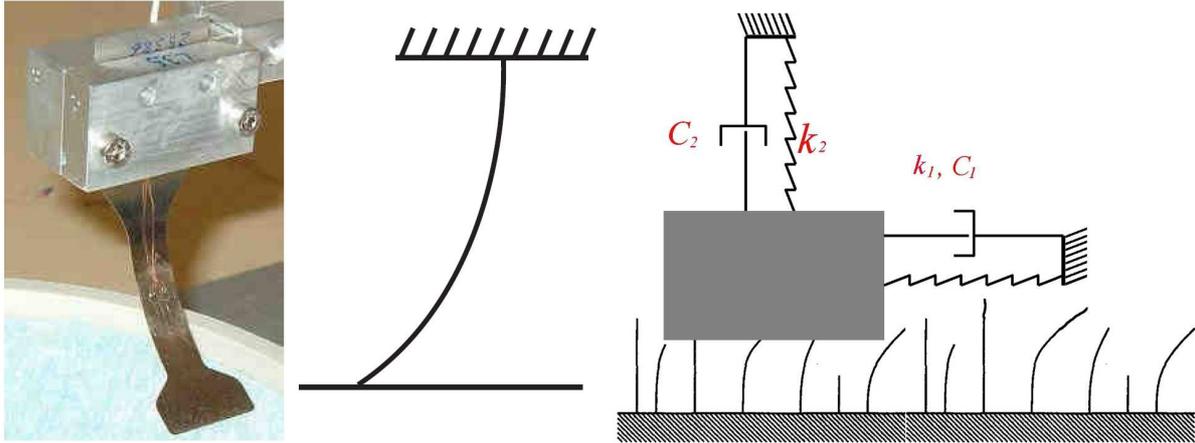
Nous rappelons ces équations :

$$\begin{cases} m\ddot{d} = N_a(e^{-d/\sigma} - 1) + N_a \left[ \beta \dot{x}^2 \sqrt{1 - \frac{d}{d_\infty}} e^{-d/\sigma} - \gamma |\dot{x}| \dot{d} e^{-d/\sigma} \right] \\ m\ddot{x} = k_1(Ut - x) + c_1(U - \dot{x}) - N_a \left[ \mu e^{-d/\sigma} \frac{z}{\delta} + \alpha \dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) \left( 1 - \frac{d}{d_\infty} \right) e^{-d/\sigma} \right] \\ \dot{z} = \dot{x} \left( 1 - \operatorname{sign}(\dot{x}) \frac{z}{\delta} \right) \end{cases} \quad (74)$$

La première étape est de l'adapter au capteur de *Modalsens* en rajoutant un degré de liberté supplémentaire.

### 2.4.1 Modèle du contact fibreux *Modalsens*, obtention du système de Filippov

Nous modélisation le système *Modalsens* par le modèle équivalent suivant :



**Figure 2.42** : Capteur de *Modalsens* (droite) et sa modélisation par un système masse-ressort.

Nous allons donc adapter le système différentiel précédent à notre modèle équivalent, nous aboutissons aux équations suivantes ; il suffit pour cela de rajouter les raideur et viscosité verticales pour le transformer en modèle à deux degrés de libertés.

$$\begin{cases} m\ddot{d} = N_a(e^{-d/\sigma} - 1) - k_2 d - c_2 \dot{d} + N_a \left[ \beta \dot{x}^2 \sqrt{1 - \frac{d}{d_\infty}} e^{-d/\sigma} - \gamma |\dot{x}| \dot{d} e^{-d/\sigma} \right] \\ m\ddot{x} = k_1(Ut - x) + c_1(U - \dot{x}) - N_a \left[ \mu e^{-d/\sigma} \frac{z}{\bar{\delta}} + \alpha \dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}) \left(1 - \frac{d}{d_\infty}\right) e^{-d/\sigma} \right] \\ \dot{z} = \dot{x} \left(1 - \text{sign}(\dot{x}) \frac{z}{\bar{\delta}}\right) \end{cases} \quad (75)$$

Nous rappelons que ici

- $m$  est la masse
- $d$  est le décollement du capteur,
- $x$  le mouvement de translation du capteur,
- $z$  est la variable interne qui gère le cisaillement,
- $U$  la vitesse en translation du plateau,
- $k_1, C_1$ , coefficients de raideur et d'amortissement du mouvement horizontal,
- $k_2, C_2$ , coefficients de raideur et d'amortissement du mouvement vertical,
- $\bar{\delta}$ , déformation globale moyenne des aspérités,
- $\mu$  équivalent du coefficient de frottement de Coulomb en statique,
- $N_a$ , charge normale résiduelle en statique

- $\alpha, \beta, \gamma$ , paramètres d'ajustement liés au phénomène de décollement de la masse par les aspérités : la dynamique verticale du capteur.

La prochaine section présente l'application de la méthode présentée au chapitre précédent et la réécriture du système différentiel, afin de pouvoir appliquer la méthode de résolution « The Event Driven Method ».

## 2.4.2 Application de la « The Event Driven Method »

### 2.4.2.1 Système du premier ordre équivalent

Pour appliquer la méthode de résolution des systèmes de Filipov présentée au premier chapitre, nous allons d'abord réécrire le système sous sa forme équivalente du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathfrak{R}^n \quad (76)$$

Posons  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$  et faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} d & \rightarrow x_1 \\ \dot{d} & \rightarrow x_2 \\ x & \rightarrow x_3 \\ \dot{x} & \rightarrow x_4 \\ z & \rightarrow x_5 \\ Ut & \rightarrow x_6 \end{cases}$$

notre système du premier ordre s'écrit simplement :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathfrak{R}^6, \text{ avec :}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} \left\{ N_a (e^{-x_1/\sigma} - 1) - k_2 x_1 - c_2 x_2 + N_a \left[ \beta x_4^2 \sqrt{1 - \frac{x_1}{d_\infty}} e^{-x_1/\sigma} - \gamma |x_4| x_2 e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \\ \frac{1}{m} \left\{ k_1 (x_6 - x_3) + c_1 (U - x_4) - N_a \left[ \mu e^{-x_1/\sigma} \frac{x_5}{\delta} + \alpha x_4^2 \operatorname{sgn}(x_4) \left( 1 - \frac{x_1}{d_\infty} \right) e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \left( 1 - \operatorname{sgn}(x_4) \frac{x_5}{\delta} \right) \\ U \end{pmatrix}$$

### 2.4.2.2 Définition de la surface de discontinuité et de la fonction associée

A ce stade il faut définir la surface de discontinuité, dans l'équation celle-ci intervient sur la variable  $x_4$ , c'est sur cette variable que porte les deux fonctions non-régulières (valeur absolue et signe). Nous définissons donc la surface discontinue  $\Sigma_{12}$  de telle sorte que :

$$\Sigma_{12} = \{x \in \mathfrak{R}^6 \mid H_{12}(x) = 0\},$$

cette surface divise l'espace de phase en deux régions distinctes :

$$S_1 = \{x \in \mathfrak{R}^6 \mid H_{12}(x) > 0\}, \quad S_2 = \{x \in \mathfrak{R}^6 \mid H_{12}(x) < 0\}, \quad (77)$$

à cette surface nous associons la fonction  $H_{12}$ , fonction réelle à valeur dans  $\mathfrak{R}^6$  suivante :

$$H_{12}: \begin{cases} \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R} \\ x \mapsto x_4 \end{cases} \quad (78)$$

$H_{12}$  est simplement la fonction qui à un vecteur de  $\mathfrak{R}^6$  donné, associe sa 4<sup>è</sup> coordonnée.

### 2.4.2.3 Réécriture du nouveau système régularisé

Nous pouvons maintenant réécrire (75) en :

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ F_2(x), & x \in S_2, \end{cases} \quad (79)$$

avec :

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} \left\{ N_a (e^{-x_1/\sigma} - 1) - k_2 x_1 - c_2 x_2 + N_a \left[ \beta x_4^2 \sqrt{1 - \frac{x_1}{d_\infty}} e^{-x_1/\sigma} - \gamma x_4 x_2 e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \\ \frac{1}{m} \left\{ k_1 (x_6 - x_3) + c_1 (U - x_4) - N_a \left[ \mu e^{-x_1/\sigma} \frac{x_5}{\delta} + \alpha x_4^2 \left( 1 - \frac{x_1}{d_\infty} \right) e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \left( 1 - \frac{x_5}{\delta} \right) \\ U \end{pmatrix}$$

et,

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} \left\{ N_a (e^{-x_1/\sigma} - 1) - k_2 x_1 - c_2 x_2 + N_a \left[ \beta x_4^2 \sqrt{1 - \frac{x_1}{d_\infty}} e^{-x_1/\sigma} + \gamma x_4 x_2 e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \\ \frac{1}{m} \left\{ k_1 (x_6 - x_3) + c_1 (U - x_4) - N_a \left[ \mu e^{-x_1/\sigma} \frac{x_5}{\delta} - \alpha x_4^2 \left( 1 - \frac{x_1}{d_\infty} \right) e^{-x_1/\sigma} \right] \right\} \\ x_4 \left( 1 + \frac{x_5}{\delta} \right) \\ U \end{pmatrix}$$

Nous venons donc de réécrire les équations de notre modèle de telle sorte à les rendre régulière, nous pouvons maintenant résoudre celles-ci par la méthode présentée au premier chapitre. En Annexe A nous présentons le code Matlab nécessaire et nous reviendrons sur l'interprétation que nous faisons de ce modèle au Chapitre 3.

Enfin notons que la dimension de l'espace de phase pour ce modèle est de 6, tout comme la dimension trouvée à la deuxième campagne. Même si formellement les composantes de ces espaces, celui du modèle et celui reconstruit expérimental, ne veulent physiquement pas dire la même chose, nous savons par Takens que les attracteurs reconstruits sont équivalents topologiquement parlant aux théoriques, par conséquent ceux-ci évoluent dans les mêmes dimensions. Enfin l'exploitation des résultats du modèle théorique pourra être aisément mise en parallèle avec les résultats de la deuxième campagne de mesure.

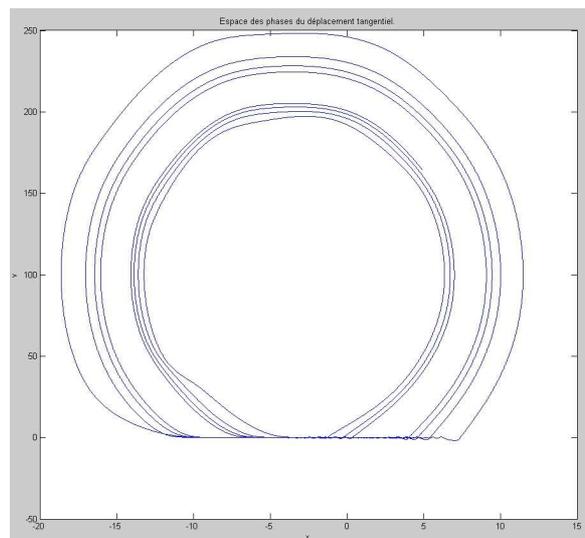
## 2.5 Résultats du modèle de contact fibreux

Dans cette partie nous présentons quelques résultats issus de la résolution du modèle de contact fibreux que nous avons auparavant établi. Le travail que nous présentons ici est en développement et nous donnerons en perspectives les évolutions futures nécessaires pour achever le modèle.

### 2.5.1 Observations préliminaires

Après avoir transcrit les équations de notre modèle en Matlab (voir Annexe A), nous avons testé sur des cas simples la cohérence des solutions numériques par rapport à nos attentes. Avec les paramètres (voir Annexe A) nous avons étudié le déplacement tangentiel (variable  $x$ ), pour voir si la discontinuité dans l'espace était respectée en cas d'occurrence du *stick-slip*. Ensuite nous avons testé la variable  $d$  pour remarquer si le décollement de la masse était bien prise en compte lors de la simulation. Enfin nous avons regardé si la variable d'état interne jouait son rôle de modifier la force tangentielle de frottement par l'intermédiaire du cisaillement à l'interface de contact.

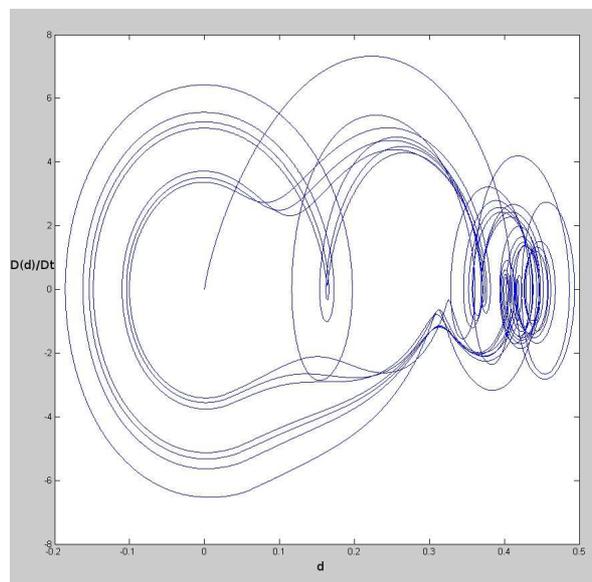
### 2.5.1.1 *Stick-slip*



**Figure 2.43** : Observation du *stick-slip* pour le modèle du contact fibreux.

Sur la Figure 2.43 nous avons établi les paramètres de telle sorte être dans le cas de l'occurrence du *stick-slip*. Sur la figure nous voyons typiquement l'espace de phase d'un système présentant du *stick-slip*. Comme nous le voyons la surface de discontinuité a bien été prise en compte lors de la résolution des équations par la méthode de [PK08].

### 2.5.1.2 Mouvement suivant d (*Tapping*)

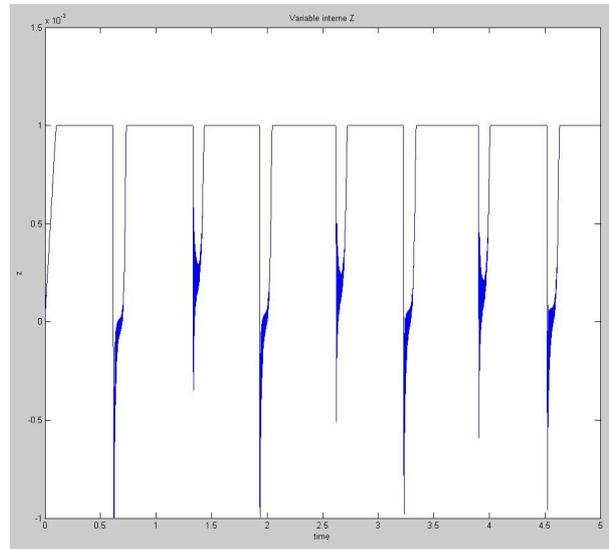


**Figure 2.44** : Déplacement vertical de la masse dans son espace de phase.

L'observation dans son espace de phase (voir Figure 2.44) de la dynamique verticale est déjà très intéressante. Elle permet déjà d'avoir une idée de la complexité des trajectoires dans l'espaces de

phase. On distingue, par exemple, à droite de l'image cette zone où la trajectoire reste confinée préférentiellement comparée aux autres régions de l'espace.

### 2.5.1.3 Cisaillement et variable d'état interne (*microslip*)



**Figure 2.45 :** Evolution de la variable interne  $Z$ , modélisant le cisaillement à l'interface de contact.

Sur la Figure 2.45 **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** on peut voir l'évolution de la variable d'état interne  $z$ . Cette variable évolue entre sa valeur minimale -1 et sa valeur maximale 1. Quand elle est à son minimum cela correspond au réarrangement des aspérités de surface qui restent collés à la masse. Les aspérités sont donc déformées jusqu'à la limite maximale avant qu'il ne se produise le glissement entre les aspérités et la masse. Ce glissement correspond à la valeur maximale de  $z$  soit 1.

## 2.5.2 Perspectives

Dans cette partie nous donnons les directions futures pour exploiter le modèle de contact fibreux que nous avons établi.

### 2.5.2.1 Identification des paramètres

Une étape ultérieure nécessaire consiste à relier les paramètres du modèle tels que nous les avons définis aux Chapitres 1 et 2 à des propriétés physiques des surfaces. Des paramètres tels que  $\alpha, \beta, d_\infty$  sont directement liés à la géométrie des aspérités et il serait intéressant de pouvoir les déterminer directement à partir d'étoffes réelles.

Cependant le travail de détermination des paramètres à partir des échantillons réels peut s'avérer complexes, il serait alors plus indiqué de se rapprocher de nos collègues automaticiens et autres familiers des problèmes d'identification, je pense notamment à des personnes comme le Professeur Michel Basset du MIPS qui travaille dans le domaine.

### 2.5.2.2 Analyse de stabilité, bifurcation

D'un point de vue de la dynamique non-linéaire il est intéressant de discuter la stabilité du système par rapport, par exemple, à la vitesse  $U$  de défilement de la surface, ou de la répartition spatiale des aspérités. Avec le modèle que nous proposons ainsi que les outils pour le résoudre cela ne pose pas de difficulté particulière. Il sera alors intéressant de faire le parallèle avec des RP réalisés sur des simulations du modèle.

### 2.5.2.3 Evolution du modèle

Une évolution envisageable du modèle est certainement de revoir la définition de la variable d'état interne  $z$ . Si dans ce travail son choix a été dicté en grande partie par des considérations mathématiques, il serait intéressant de le lier à, par exemple, des données physiologiques modélisant le contact en cisaillement d'un doigt humain. Cela est fort envisageable.

### 2.5.3 Conclusion

Dans cette partie sur le modèle de contact fibreux nous avons commencé par rappeler les équations du modèle à un degré de liberté présenté au Chapitre 1, que nous avons ensuite adapté au capteur *Modalsens* (voir Figure 2.42). Une fois les nouvelles équations obtenues, nous avons appliquées la méthodologie présentée au Chapitre 1 afin de les rendre régulières ; cela pour pouvoir appliquer la méthode de Piiroinen et al. [PK08]. C'est ainsi que nous avons défini les champs  $F_1$ ,  $F_2$  ainsi que la surface de discontinuité  $H_{12}$ . Il ne restait plus qu'à écrire les codes Matlab à partir du modèle-canevas de Piiroinen et al.[PK08]. Nous avons alors testé la cohérence du modèle, à savoir nous avons bien vérifié que la surface de discontinuité était bien prise en compte. Nous avons aussi pu avoir un aperçu de la complexité du mouvement vertical de la masse (suivant  $d$ ). Nous avons aussi vérifié l'évolution de la variable  $z$  modélisant le cisaillement des aspérités, une des originalités de ce modèle.

Enfin nous indiquons les perspectives de développement du modèle comme le problème d'identification des paramètres. Une fois ce problème adressé nous pourrions alors étudier du point de vue de la dynamique non-linéaire des sujets tels l'influence de la vitesse de défilement ou de la géométrie des aspérités sur la stabilité du système. Autre direction intéressante il pourrait être envisagé de compléter le modèle avec des données physiologiques pour la simulation du toucher par exemple.

## 2.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons commencé par une introduction de la procédure expérimentale dans laquelle, nous avons présenté les échantillons et les campagnes de mesures.

Pour les deux campagnes nous avons suivi la même démarche ; nous avons d'abord établi les paramètres de l'espace de phase à savoir le delay et la dimension par les méthodes respectives du *mutual information* et du *false nearest neighbour*. Une fois cela fait nous avons établi pour chaque échantillon le diamètre dans l'espace de phase. Une fois l'espace de phase reconstruit nous avons expliqué la démarche pour le choix des seuils de tolérance afin de construire les matrices de récurrence. Si pour la deuxième campagne nous présentons les versions polaires de ces matrices, nous les avons omis pour la première campagne, leur construction demandant un traitement long et encore plus leur affichage du point de vue ressource graphique. Une fois les matrices de récurrence obtenues, l'étape suivante est le calcul des paramètres de RQA, c'est l'analyse quantitative des RP ; ces paramètres sont donc évalués pour chaque échantillon et à chaque fois les valeurs sont données en moyenne avec une erreur basée sur un intervalle de confiance à 95%. Le traitement s'arrête là pour la première campagne de mesure, pour la deuxième campagne, nous avons en plus estimé deux paramètres supplémentaires que l'entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov pour chaque échantillon. C'est une évolution majeure dans notre travail dans la majeure où ces nouveaux estimateurs ouvrent de nouveaux horizons à la compréhension de la dynamique du frottement.

Durant la première campagne de mesure, nous avons noté la corrélation du Delay et de la compressibilité des échantillons. Autre fait intéressant de la première campagne, notons les résultats sur les toiles Tsb-NT et Tsb-T – le dernier a eu un traitement au Téflon® qui n'a pas eu l'effet que nous attendions sur la RQA ; nous revenons sur ce point dans le Chapitre 3. Dans le cas des non-tissés J1 et J2 nous avons vu qu'une augmentation de la masse surfacique a tendance à atténuer la structure déterministe du signal du capteur ainsi que les régimes d'intermittence de la trajectoire dans l'espace de phase. Enfin, les cuirs, ce sont les échantillons qui ont donné les résultats les plus concluants dans la mesure où les paramètres RQA discriminent nettement les 4 échantillons et sont clairement sensibles à la modification des grains de surface.

Pour la seconde campagne, le bilan des cachemires est assez décevant dans la mesure où nous n'avons pas identifié de réelles tendances des 5 échantillons sur la RQA. En ce qui concerne les sergés de coton (Sco fort/faible) nous avons montré que la RQA était sensible à l'intensité de l'émerisage. Pour les toiles (Tsb-T et Tsb-NT) notre remarque de la première campagne sur l'influence du Téflon® a été confirmée (voir plus haut). Dans le cas non-tissés J, le fait d'avoir ajouté deux nouveaux échantillons a permis de confirmer l'influence de la masse surfacique sur la RQA, par ailleurs nous avons aussi observé l'influence de la viscose sur la dynamique du capteur. Dans le cas des non-tissées bicouches (douce/rugueuse) la RQA est sensible aux faces testées, cependant l'influence de l'épaisseur n'est pas établie. En ce qui concerne les papiers, si pour la première campagne on avait le phénomène récurrent du papier qui se démarquait singulièrement à chaque fois

ce fait a disparu à cette campagne. Enfin les derniers échantillons étudiés dans cette campagne sont les cuirs, globalement les résultats observés à la première campagne ont été confirmés.

En dernière partie de cette seconde campagne nous avons présenté les résultats des entropies de Shannon et de l'exposant maximal de Lyapunov évalué sur certains échantillons ; les premiers résultats sont déjà très intéressants. Nous y reviendrons plus en détails dans le Chapitre 3.

Dans la dernière partie du Chapitre, après avoir énoncé les équations du modèle, nous avons appliquées la méthodologie présentée au Chapitre 1 afin de les rendre régulières ; cela pour pouvoir appliquer la méthode de Piiroinen et al. [PK08]. Par conséquent après avoir défini les champs  $F_1$ ,  $F_2$  ainsi que la surface de discontinuité  $H_{12}$  nous avons pu écrire le code Matlab de résolution. Nous avons alors testé la cohérence du modèle, à savoir nous avons bien vérifié que la surface de discontinuité était bien prise en compte. Après avoir simulé quelques variables telles que les déplacements tangentiel et vertical, ainsi que le cisaillement des aspérités, nous avons pu avoir un premier aperçu sur les possibilités ouvertes par ce modèle en termes de Tribologie sur matériaux fibreux.

Nous allons passer maintenant au dernier chapitre du manuscrit où nous discuterons des principaux résultats des campagnes de mesures.

# 3

# Discussion

## Sommaire

3.1	Introduction.....	108
3.2	Rappel de la démarche expérimentale.....	108
3.2.1	Les échantillons.....	108
3.3	Campagne n°1.....	109
3.3.1	Reconstruction de l'espace de phase et premières observations.....	109
3.3.2	Calcul des matrices de RP et analyse par RQA.....	110
3.3.3	Analyse par échantillons.....	112
3.3.4	Conclusion de la première campagne de mesures.....	114
3.4	Campagne n°2.....	115
3.4.1	Recurrence Plot.....	115
3.4.2	<i>Recurrence Quantification Analysis</i> .....	118
3.4.3	Comparaison de l'entropie de Shannon, du diamètre de l'espace de phase et de l'exposant maximum de Lyapunov.....	123
3.4.4	Conclusion de la seconde campagne.....	125
3.5	Conclusion du chapitre.....	127

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons exposé la démarche expérimentale ainsi que les résultats que nous avons tirés de cette étape. Dans ce chapitre nous présentons une discussion de ces résultats. Dans la première partie nous faisons un rappel des points majeurs de notre procédure expérimentale, nous ferons notamment le point sur les échantillons que nous avons retenus et les outils d'investigation vers lesquels nous nous sommes tournés. Ensuite nous aborderons la discussion des deux campagnes de mesures. Dans un premier temps nous revenons sur l'analyse des grandeurs propres à la reconstruction de l'espace de phase à savoir la dimension  $m$  et le delay  $\tau$ , puis dans un second temps nous revenons sur le calcul proprement dit des matrices RP. L'étape suivante est l'établissement des statistiques RQA dont nous donnerons une analyse qui nous permettra de lier la dynamique du capteur à la physique du frottement.

En ce qui concerne la première campagne de mesures, la discussion s'arrêtera au niveau de la RQA alors que pour la seconde campagne nous continuerons avec l'analyse de paramètres globaux : *Entropie de Shannon, Exposant de Lyapunov*.

### 3.2 Rappel de la démarche expérimentale

#### 3.2.1 Les échantillons

##### 3.2.1.1 Les papiers

Le choix de ces surfaces est dicté par la volonté d'étudier l'évolution de la rugosité à propriétés des matériaux constants. En effet la masse surfacique augmentant, la rugosité des papiers augmentent à cause du grain des papiers. Ce grain est constitué de fibres très courtes, émergeant de la surface des échantillons. Ici la rugosité sera la principale caractéristique géométrique qui sera discuté plus loin.

##### 3.2.1.2 Les sergés de coton Sco-Fort, Sco-Faible et le velours

Ces deux textiles viennent de l'industrie et ont subi un traitement abrasif d'ennoblissement avec des papiers émeris de deux types (un à grains fins, et le second à gros grains). Le procédé d'émerisage a pour objectif de créer une pilosité de surface augmentant ainsi la sensation de douceur du toucher du textile. Le papier à grains fins crée une pilosité disparate pas très dense alors que les gros grains ont pour effet de produire une pilosité fine mais dense.

L'influence de ces deux types de traitement sera soulignée en termes de comportement non-linéaire du capteur.

Enfin le velours a été choisi dans l'objectif d'identifier l'influence d'une pilosité dense et orientée.

### 3.2.1.3 Les toiles de coton Tsb-T et Tsb-NT

Ces deux échantillons ont été choisis parce que résultant du même process de fabrication. Le premier a reçu un traitement consistant à le plonger dans un bain de Téflon<sup>®</sup>. L'addition du PTFE a pour effet de réduire le frottement inter-fibres et de surface. L'influence d'un tel traitement aura pour effet de changer les transitions entre les états de frottement et par conséquent la dynamique du frottement.

### 3.2.1.4 Les non-tissés spunlaced J, et bicouches NTXX

Les non-tissés J sont fabriqués par un procédé hydraulique (par jets d'eau), on les appelle « structure spunlaced ». Tous les J viennent de la même ligne de production. Le fournisseur de ces lingettes voulait savoir la conséquence du changement de masse surfacique (J1, J2) et de l'ajout de viscose dans les matériaux (J3 et J4). Notre discussion sera donc faite par rapport à ces deux paramètres

En outre les non-tissés bicouche sont constituées d'une face douce et d'une face rugueuse sur la quelle les fibres sont liées par un procédé de calandage. Ces structures complexes proviennent du même procédé de fabrication le seul paramètre changeant est la masse surfacique. Nous comparerons les deux faces afin de comprendre l'influence des masses surfaciques.

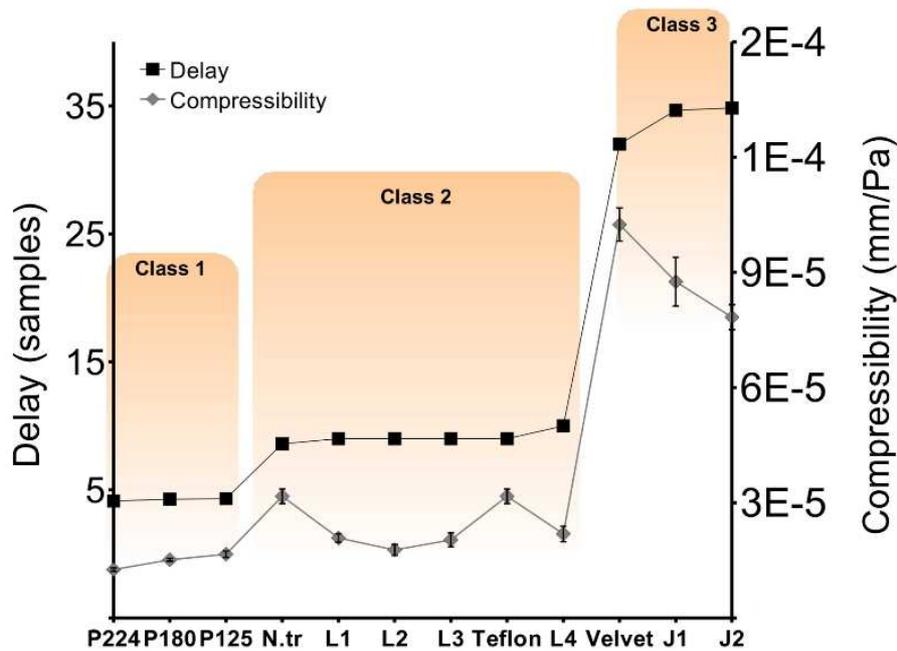
Après ce résumé sur les principaux échantillons nous allons passer aux campagnes de mesures.

## 3.3 Campagne n°1

### 3.3.1 Reconstruction de l'espace de phase et premières observations

La première étape du travail sur cette première campagne a donc été la reconstruction de la trajectoire de phase pour chaque échantillon. Le delay et la dimension ont donc été évalués en utilisant la méthode la *Mutual Information* et le *False nearest neighbor* présentées au premier chapitre.

Une première analyse des delay des échantillons, montre que le delay classe les échantillons en trois classes (Figure 3.1). La première classe est essentiellement composée des papiers (Class 1), la seconde classe est composée des cuirs, des tissés de coton (Class 2) et enfin la dernière classe est composée du velours et des non-tissés (Class 3).



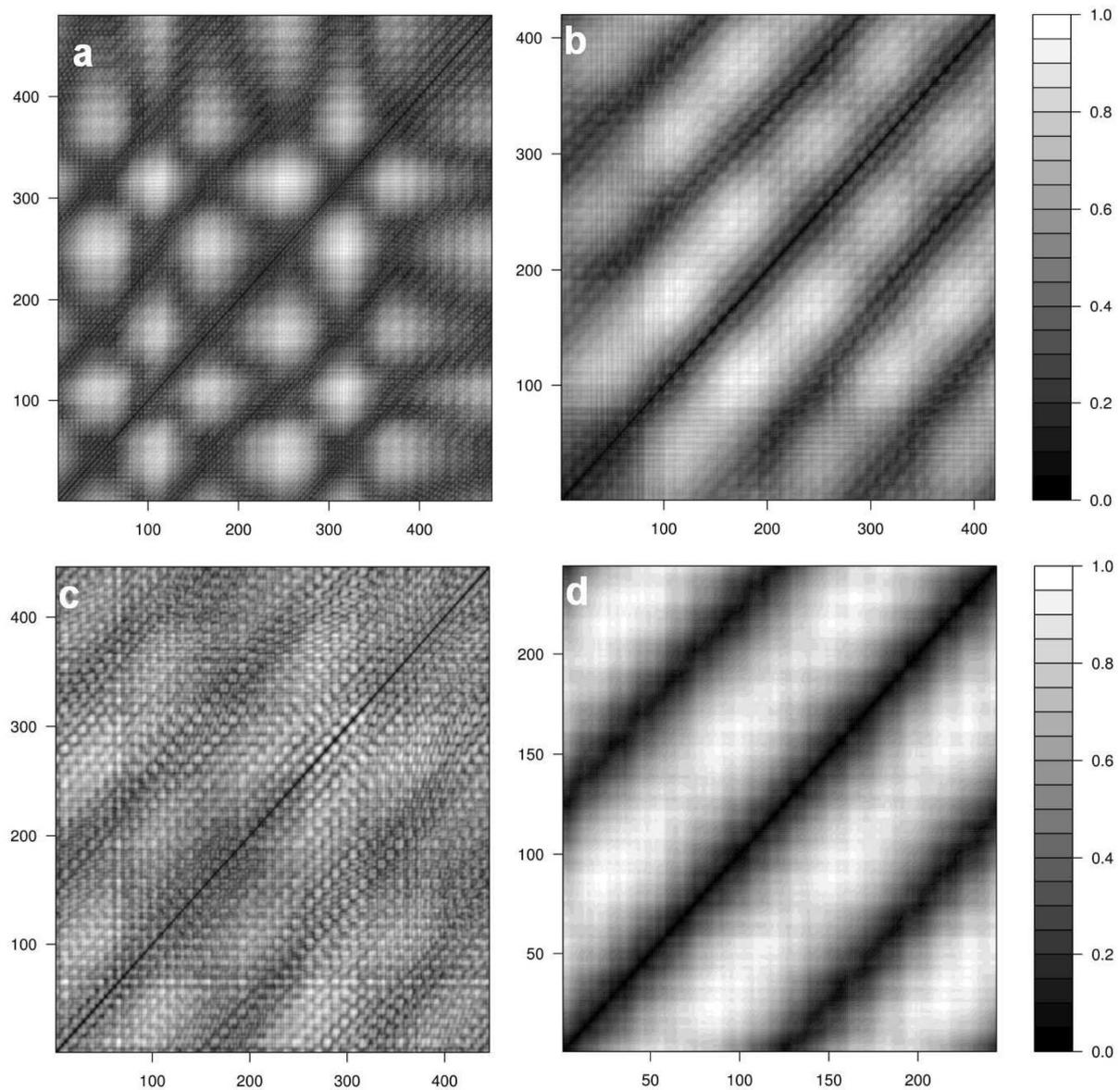
**Figure 3.1** : Le Delay classe les échantillons suivant trois classes de compressibilité.

Pour comprendre l'influence de la compressibilité sur le delay, il est nécessaire de revenir à la signification de ce paramètre. En effet, si nous considérons la définition du delay au Chapitre 1, le delay est le temps entre deux coordonnées d'un point de la trajectoire, représenté par le vecteur  $\vec{X}$ , de telle sorte que la corrélation entre ces coordonnées soit minimale. En d'autres termes,  $\tau$ , est la distance entre deux coordonnées qui maximise l'indépendance entre chaque coordonnée. Quand le delay augmente, le temps séparant deux coordonnées indépendantes augmente : le signal reste donc confiné dans les mêmes gammes d'amplitudes.

Dans la dynamique du capteur de *Modalsens*, une surface appartenant à une classe plus compressible implique des états de confinement plus longs. Une surface compressible aura tendance à amortir les vibrations. La principale conséquence de cet amortissement est de raccourcir dans le temps la durée d'occurrence des grandes amplitudes et le capteur retourne plus rapidement dans un état de vibrations de faibles amplitudes. Proportionnellement la durée de ces états de faibles amplitudes va donc augmenter et il en est de même que pour  $\tau$ .

### 3.3.2 Calcul des matrices de RP et analyse par RQA

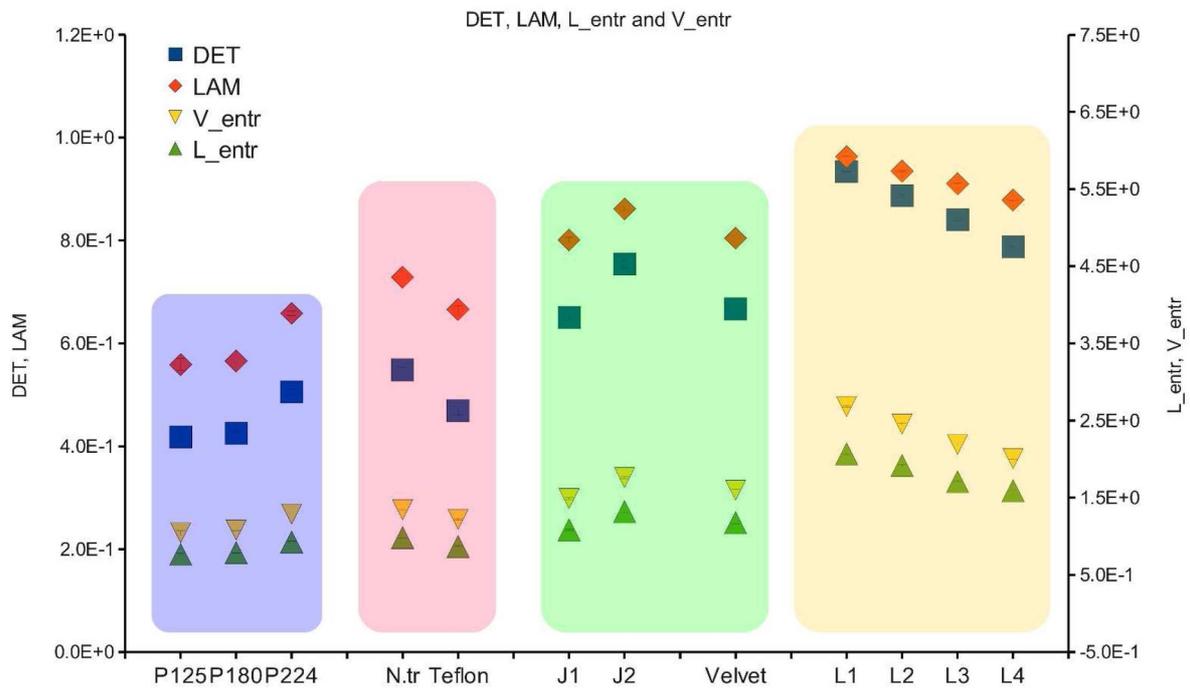
L'étape suivante la reconstruction de l'espace de phase est le calcul des matrices de Recurrence Plot. Une fois que les RP sont construits pour chaque surface, nous procédons à l'analyse RQA. Nous présentons à but d'illustration des RP de cette première campagne sur la Figure 3.2.



**Figure 3.2** : Distance Plot (DP) d'une sélection d'échantillons de la 1<sup>ère</sup> campagne. (a) Papiers, (b) Cuir, (c) Toile de coton, (d) Velours.

Sur la Figure 3.3, il apparaît que les variables RQA, DET, LAM, V\_entr et L\_entr évolue dans le même sens. Comme nous le définissons au Chapitre 1, le déterminisme (DET) est le ratio de points récurrents formant les structures diagonales du RP par rapport au nombre total de points du RP, il est relié à la prédictibilité du système. De manière analogue à la définition de DET, LAM est obtenue en calculant le rapport entre les points formant les structures verticales et le nombre total de points du RP. Les variations de DET et LAM sont assez intéressantes, en effet ces deux paramètres ont le même comportement à travers les échantillons testés. Les structures diagonales révèlent la présence de séquences cycliques dans le signal vibratoire. Quant aux structures verticales, elles reflètent le fait que la trajectoire dans l'espace de phase reste confinée dans une région particulière de cet espace.

Les deux paramètres  $L_{entr}$  et  $V_{entr}$  sont respectivement les entropies de Shannon de la fréquence de distribution des longueurs des lignes diagonales et des lignes verticales. Ces paramètres reflètent respectivement la complexité de la structure déterministe du RP et celle des régimes de confinement.



**Figure 3.3 :** Évaluation des statistiques RQA sur les échantillons de la 1<sup>ère</sup> campagne.

Sur la Figure 3.3 nous pouvons voir l'influence des propriétés physiques sur les statistiques RQA établis. Si nous regardons le groupe des papiers par exemple, il apparaît que LAM et DET augmente avec la masse surfacique. Par ailleurs le traitement au Téflon® sur les toiles de coton a l'effet inverse de diminuer ces deux paramètres. Comme pour les papiers, l'augmentation de la masse surface des non-tissés J génère une augmentation de DET et LAM. Dans le cas des cuirs l'augmentation de la rugosité induit une diminution de DET et LAM.

Nous notons qu'en fonction des familles de surface testées, les variations dans les paramètres RQA changent significativement en fonction des traitements et/ou de la structure des surfaces.

L'analyse des RQA révèle la présence phénomènes cycliques complexes et intermittents dans la dynamique vibratoire du capteur.

### 3.3.3 Analyse par échantillons

#### 3.3.3.1 Tsb-T et Tsb-NT

La principale remarque que nous faisons sur ces premiers résultats est que le traitement au Téflon® a tendance à diminuer le taux RR et le déterminisme du système d'une part et que d'autre part la divergence DIV a tendance à augmenter avec ce traitement.

Ce fait interpelle car on pourrait s'attendre à ce que l'ajout du Téflon© dans un tissu améliore ses propriétés tribologiques (diminution du frottement), ce qui aurait eu pour conséquence une excitation modérée du capteur, mais si nous regardons le signal temporel de lamelle on peut voir que ce traitement a pour conséquence d'ajouter de la perturbation au capteur. Cette perturbation se traduit dans le RP par une diminution du taux RR, après avoir confirmé cette tendance à la deuxième campagne, nous avons mis en relation ce phénomène avec une modification structurelle des tissus due à l'ajout de Téflon©.

Par ailleurs l'ajout du Téflon© a tendance à diminuer la divergence DIV et les entropies évaluées à partir du RP. Sachant que le paramètre DIV est lié à la stabilité du système, dans la mesure où il est lié au plus grand exposant de Lyapunov du système, nous pouvons conclure que malgré le fait que le capteur soit plus excité par l'ajout du Téflon©, elle aurait moins tendance à tendre facilement vers un comportement chaotique. Quant aux paramètres d'entropie  $V_{entr}$  et  $L_{entr}$  leur diminution veut dire que le signal est plus déterministe (par opposition à aléatoire).

La présence d'état intermittent (LAM) et le temps moyen passé dans ces états TT à tendance à diminuer avec le traitement Téflon©. Enfin le traitement au Téflon© diminue la plus longue diagonale du RP ( $V_{max}$ ).

Pour tenter de mieux appréhender ces interactions complexes nous avons ajouté à la deuxième campagne de mesure des statistiques supplémentaires basés cette fois sur le signal et non sur le RP comme l'entropie de Shannon du signal, le plus grand exposant de Lyapunov en plus du diamètre de l'espace de phase.

### **3.3.3.2 Les lingettes spunlaced:**

J1 et J2 sont tous deux composés de polyester à 100%, avec une masse surfacique plus élevée pour J1. Les résultats de cette première campagne laisse apparaître que l'augmentation de la masse surfacique diminue le taux RR et le paramètre DET. Cette tendance qui a été confirmée à la deuxième campagne de mesure. Notre hypothèse est que du fait de l'augmentation de la masse surfacique du non-tissé, la pilosité augmente aussi. Ce qui a pour effet, comme dans le cas précédent, d'ajouter de la perturbation dans le signal du capteur. Cela se traduit donc par une perte en déterminisme du signal (d'où la chute de DET). Ce qui expliquerait aussi que la divergence DIV augmente consécutivement à cette augmentation de masse surfacique.

Pour les paramètres d'entropie ainsi que LAM, TT et  $V_{max}$ , ces deux non-tissés donnent le même résultat, à savoir qu'une augmentation de la masse surfacique fait chuter ces paramètres. Le fait que l'entropie chute voudrait dire que le signal ait gagné en ordre, ce qui contredit ce que nous avançons plus haut. Pour la deuxième campagne de mesure nous avons repris ces mêmes échantillons complétés de deux nouveaux non-tissés spunlaced : J3 et J4. Nous établirons aussi pour ces échantillons le calcul de l'entropie de Shannon du signal ainsi que le plus grand exposant de Lyapunov.

### **3.3.3.3 Les papiers**

Le protocole expérimental tel que nous l'avons établi pour cette première campagne n'est pas adapté à l'analyse des papiers. En effet au premier regard des résultats RQA pour le papier la première chose qui apparaît est le comportement singulier du papier P90, ce phénomène persiste pour tous les autres paramètres RQA. Même si pour les autres papiers de grammage plus élevé la RQA parvient à les distinguer et à dégager une tendance, nous arrivons difficilement à analyser les résultats globalement.

Si nous ne tenons compte de tous les papiers excepté P90, nous arrivons à tirer des conclusions. Si nous prenons l'exemple du déterminisme DET par exemple la tendance montre une augmentation de ce taux quand la masse surfacique, et par conséquent la rugosité, augmente. Si par contre nous regardons le taux RR, les trois échantillons P125, P180 et P224 aurait à chaque fois le même taux de points récurrent sur le RP, ce qui a été infirmé lors de la deuxième campagne de mesure.

Nous pensons que à la fréquence d'échantillonnage de 4kHz, nous atteignons les limites du capteur, en termes de sensibilité, pour la surface P90.

### **3.3.3.4 Les cuirs:**

Les échantillons de cuir sont différents par leur taille de grains de surface, C1 présente la plus lisse et C4 la plus rugueuse. Si regardons le taux RR nous remarquons que C1 a la valeur la plus élevée, en fait les échantillons sont classés par ordre croissant de taille de grains de telle sorte que RR décroît quand la taille des grains augmente. Cette observation est conforme à nos attentes, en effet plus la taille des grains augmente plus la rugosité augmente. Par conséquent le capteur est plus excité avec la taille des grains augmentant, ce qui a pour effet de baisser le niveau du taux RR. C'est le même phénomène qui se produit avec le déterminisme DET.

Si regardons le paramètre de divergence, il se produit un phénomène singulier, en effet ce paramètre n'a pas une évolution monotone en fonction de la taille des grains de surface, elle atteint un minimum pour C2 et continue de croître au-delà (C3 et C4).

Pour les autres paramètres RQA, les entropies, LAM, TT et V\_max, la tendance est de diminuer avec l'augmentation du grain de surface.

## **3.3.4 Conclusion de la première campagne de mesures**

Pour l'analyse des premiers résultats de cette campagne nous avons commencé par présenter une vision globale. C'est ainsi que nous avons remarqué que les résultats du delay sur tous les échantillons montré une corrélation de ce paramètre avec la compressibilité des échantillons. Nous avons ainsi dégagé trois classes principales d'échantillons qui se dégageaient en fonction de la valeur des delay. Nous avons poursuivi cette analyse globale en regardant les tendances qui se dégageait pour certains paramètres RQA que nous avons choisi, cette première étape nous a permis de mieux appréhender la démarche de liaison entre les résultats de la RQA et les propriétés physiques des échantillons.

Après cette première étape nous avons pris les différents échantillons un à un afin de voir ce qu'on pouvait tirer comme analyse des résultats RQA. L'analyse des toiles Tsb-non traitée et Tsb-traitée qui a subi un traitement au Téflon®, nous on révélé des choses intéressantes. Alors que l'on s'attendait avec le traitement Téflon® que le taux RR diminue, les résultats ont été contraires à nos attentes. Nous avançons que l'hypothèse que le traitement Téflon® modifie structurellement les échantillons et les RP y sont sensibles.

L'analyse des deux non-tissés spunlaced J1 et J2 nous révélé qu'une augmentation de la masse surfacique aboutissait à une diminution du taux RR et du déterminisme DET. Nous avons expliqué cela par le fait que l'augmentation de la masse surfacique s'accompagnait d'une augmentation de la pilosité, susceptible par conséquent d'ajouter de la perturbation au signal du capteur.

Les résultats des papiers n'ont pas été concluants ; d'une part l'échantillon P90 semblait être hors échelle quelque soit le paramètre RQA, d'autres part les autres échantillons n'étaient pas significativement discriminés.

Les derniers échantillons de cette campagne sont les cuirs, mis à part le paramètre de divergence tous les paramètres RQA ont donné des résultats classant les échantillons par ordre de taille des grains de surface. Les résultats sont conformes à nos attentes.

Pour mieux explorer les pistes que nous sentons se dessiner à la fin de cette première campagne nous avons lancé la deuxième campagne avec un nouveau protocole expérimental ; c'est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

### **3.4 Campagne n°2**

#### **3.4.1 Recurrence Plot**

Pour une meilleure comparaison des RP des échantillons et en vertu du mode fonctionnement de *Modalsens*, nous avons choisi de représenter les RP de la deuxième campagne de mesures en coordonnées polaires. Cela nous permet de lire les RP par secteur angulaire et la mise en place du Trigger sur *Modalsens* nous permet de pouvoir placer directement ces secteurs angulaires sur les échantillons réels.

Une première inspection visuelle des RP nous révèle déjà des caractéristiques propres à chaque échantillon testé. Ainsi sur les papiers les RP sont caractérisés par la présence de rayons clairs, éparse le long du tour. Alors que d'autres échantillons présentent des RP avec des secteurs blancs très marqués, c'est la preuve d'un comportement dynamique multipolaire. La structure naturelle des surfaces testés (l'alignement des fibres ou des fils, l'effet de pilosité, l'orientation du grain de surface) laissent penser que le comportement dynamique de *Modalsens* change de manière cyclique selon les secteurs sur l'échantillon et selon le type d'interactions de contact.

Par type d'interactions de contact nous entendons la nature du relief de l'échantillon, sa capacité à être ou non déformée, les conditions dans lesquelles les aspérités et les polluants de surface sont cisailées ou compressées. Notons aussi que la présence de secteurs blancs sur le RP sont à lier

avec des vibrations en grandes amplitudes de la lamelle, ce qui correspond sur l'échantillon à des secteurs de grandes rugosité (sens rebrousse poil, sens perpendiculaire au la direction privilégiée d'orientation des fibres sur les non-tissés).

Pour comprendre la réponse fréquentielle vibratoire de la lamelle *Modalsens* et sa corrélation avec le RP, nous pouvons observer la Figure 3.4, où le RP est cette fois représentée en coordonnées cartésiennes. Nous y représentons les cas extrêmes des papiers P224 et du velours ainsi que leur diagramme temps-fréquence respectif. Il apparaît alors que les secteurs blancs du RP sont corrélés aux amplitudes élevées du mode 1 de résonance à 30 Hz. Nous observons aussi des variations subtiles dans ces secteurs blancs selon que les mode 2 (130 Hz) et 3 (260 Hz) apparaissent en même temps ou non avec le premier mode. Notons que ces dernières remarques sont valables pour tous les échantillons.

Notons aussi la présence des diagonales ondulées dans le RP, nous rappelons au passage qu'un régime périodique se manifeste dans le RP par des diagonales régulièrement espacées de la période du régime. Ces diagonales ondulées qui apparaissent à la fréquence fondamentale (1<sup>er</sup> mode 30 Hz), sont la preuve que le comportement de la lamelle est non-linéaire. Ce phénomène se produit le long du tour de manière incessante, la seule chose qui change est l'amplitude de vibration à laquelle ce phénomène se produit. Il peut donc être conclut que quand un mode ou plusieurs sont excités, la trajectoire dans l'espace de phase reste confinée dans une zone déterminée, avec de grandes amplitudes sans pour autant qu'elle passe par le même endroit, en d'autres termes il n'y a pas de récurrence d'où des secteurs blancs dans le RP. Cependant en dehors de ces zones de fortes amplitudes, aux vibrations de faibles amplitudes, la présence de pavés sombres sur le RP traduisent le fait que la trajectoire reste confinée mais cette fois elle décrit plusieurs fois le même cycle, on peut imaginer qu'elle s'enroule dans une région de l'espace.

En première approche des illustrations des RP, nous pouvons séparer plusieurs types. Le cas des papiers laisse par exemple voir l'existence de faisceaux radiaux blancs, dont la position angulaire le long d'un tour semble être très aléatoire. Contrairement à globalement tous les autres surfaces qui produisent des RP où l'on peut distinguer des secteurs blancs très marqués, c'est la conséquence principale de comportements dynamiques multipolaires sur un tour de plateau. Cela s'explique par la configuration des surfaces textiles, (type de tissage, effet poil/rebrousse poil,...), le comportement dynamique de *Modalsens* change de manière cyclique donc en fonction des interactions surfaciques. Ces interactions surfaciques dépendent de la nature du relief, de sa capacité à se déformer et des conditions dans lesquelles les aspérités et les polluants de surface sont soumis au cisaillement lors des mesures.

## Discussion

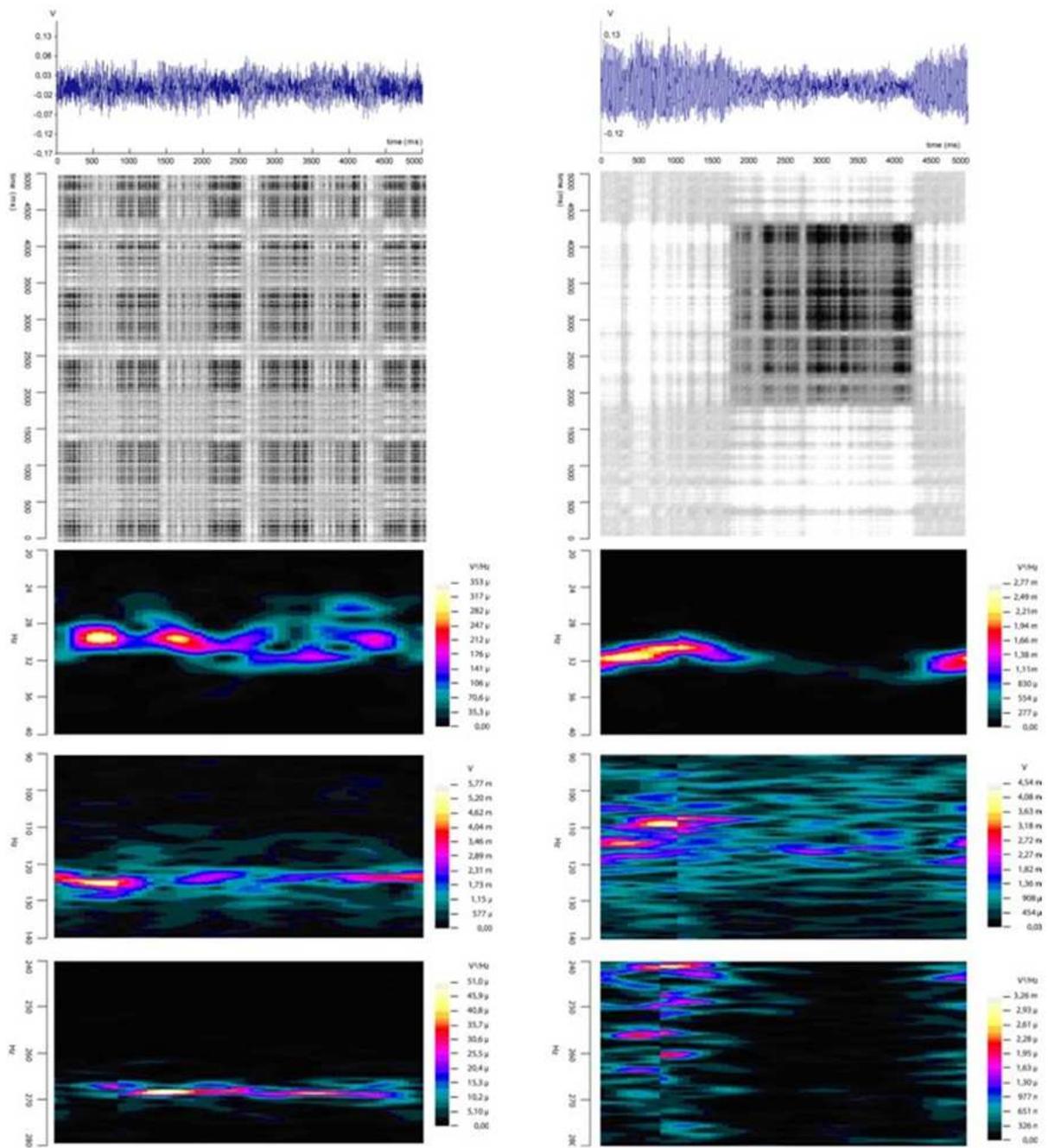
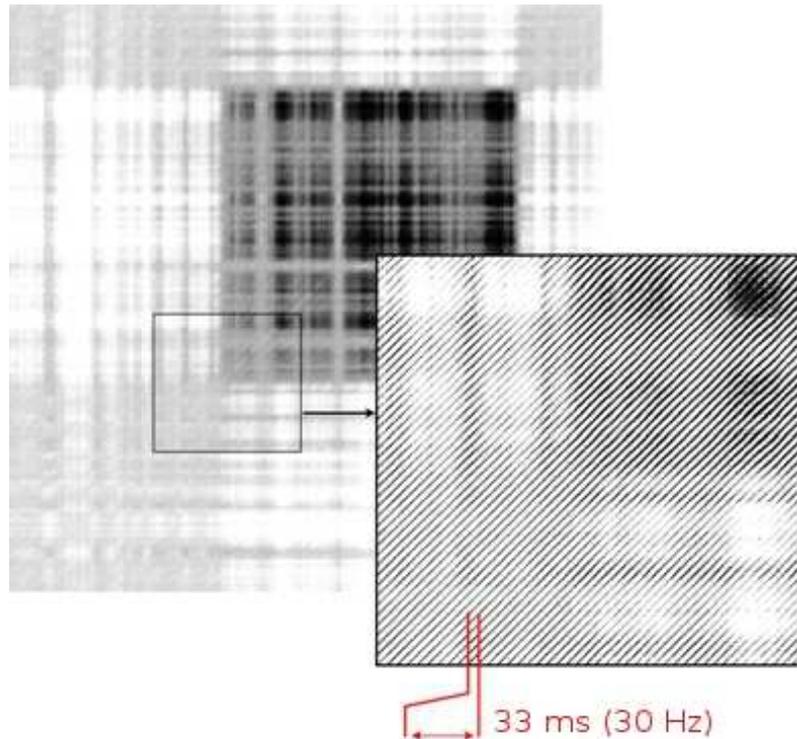


Figure 3.4 : Comparaison entre RP et diagramme Temps-fréquence.



**Figure 3.5 :** Mesure d'un mode dans le RP (ici le mode 1 à 30Hz). Notez au passage que les lignes diagonales sont légèrement ondulées.

Comme nous le voyons sur la représentation des RP combinés avec le signal temporel, les secteurs blancs sont systématiquement liés aux grandes amplitudes dynamiques du signal. Nous avons noté que ce comportement correspond à des régions des échantillons où les rangées de fils sont parallèles au capteur, ou à la présence de phénomène de rebrousse poil.

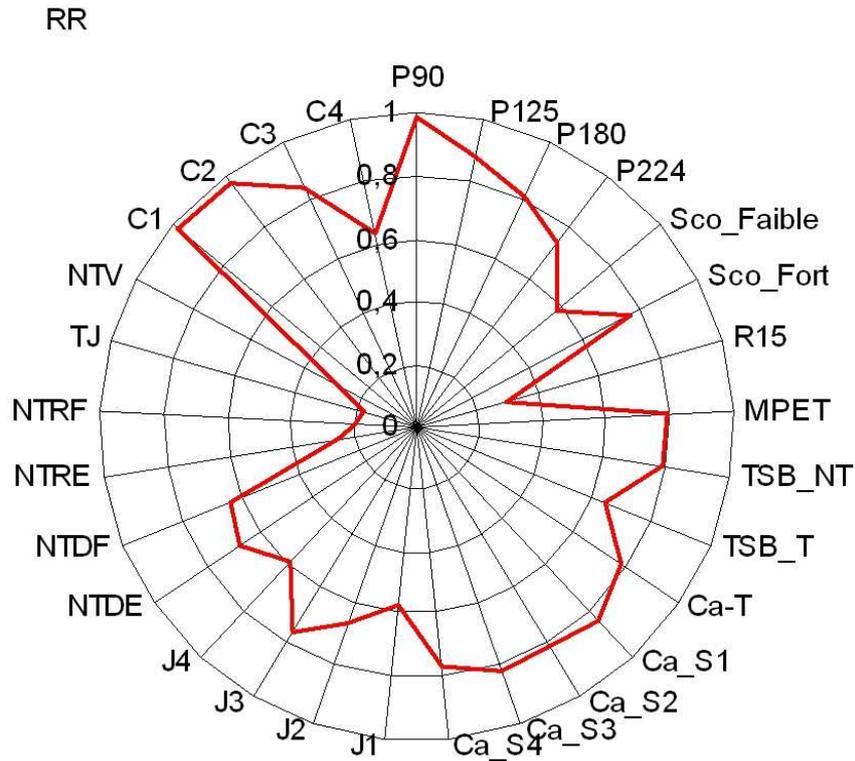
Ce que peut aussi conclure c'est que lors du développement d'un mode, la trajectoire dans l'espace de phase visite des régions particulière de l'espace, dans le sens où celles sont peu fréquentées ce qui a pour effet d'éclaircir le RP. Et inversement, en dehors des secteurs de fortes oscillations, la lamelle est peu excitée et la trajectoire reste confinée dans un petit sous-hyper volume ; ce qui se traduit dans le RP par des bandes sombres.

### 3.4.2 *Recurrence Quantification Analysis*

#### 3.4.2.1 **Recurrence Rate**

##### 3.4.2.1.1 **Première approche**

Les résultats montrent une tendance des papiers à avoir un taux de récurrence plus élevé, alors que les surfaces très texturées, dont certaines ont des aspérités de surface peu compressibles (NTRE, NTRF, TJ et NTV) ont de faibles taux de récurrence (Figure 3.6).



**Figure 3.6** : Le taux RR, pour tous les échantillons de la campagne n°2.

Il est à noter aussi la texture fortement anisotrope de la pilosité surfacique du velours qui induit un taux de récurrence assez faible. Le taux RR est sensible aux traitements surfaciques mécaniques tels que l'émérissage, en effet la présence de pilosité longue et dense génère un taux de récurrence plus élevé. Aussi notons le fait que le traitement chimique au Téflon® fait baisser le taux de récurrence. En outre, en observant les lingettes J1 et J2, on peut en déduire qu'une augmentation de la masse surfacique entre ses deux échantillons a tendance à augmenter le taux de récurrence, alors que l'ajout de viscosité (J3 par rapport à J4) le réduit. La conclusion qu'on peut tirer de l'étude des cachemires est que les modifications des structures de fils n'est pas significative sur le taux de récurrence.

Pour conclure cette partie nous pouvons dire que le taux RR est affecté par les changements de structures et de composition. Ces paramètres affectent donc le comportement dynamique de *Modalsens* en termes de redondance des régions de l'espace de phase. Cet indicateur vient en complément de la FFT à eux deux ils chiffrent l'ampleur des perturbations générées par la surface des échantillons.

#### 3.4.2.1.2 Analyse par groupe d'échantillons

- Les cachemires

Les cachemires présentent des RP très homogènes. Les perturbations présentes le long du tour sont présentes sur tous les échantillons mais sont plus importantes pour Ca-S1. La valeur du taux RR est

compris dans une fourchette de 0.78 à 0.85, en fait c'est dans cette plage de valeurs que se situent tous les tissés testés.

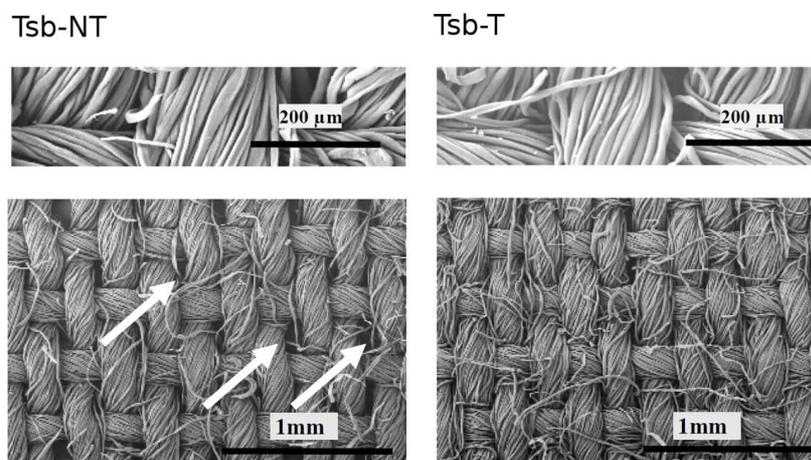
- Les sergés Sco-fort et Sco-faible

Le taux RR est plus élevé pour le sergé Sco-fort qui a subi l'émerisage le plus intensif. L'émerisage a pour principale conséquence d'adoucir la rugosité des échantillons en créant une pilosité de surface. Les valeurs du taux RR sont de 0,73 pour Sco-fort et de 0,57 pour Sco-Faible. Ce qui classe Sco-fort dans le groupe des tissés alors que Sco-faible plus proche des non-tissés.

- Les toiles Tsb-T et Tsb-NT

Le bain dans du PTFE subi par Tsb-T a pour objectif d'améliorer son frottement. Dans notre cas ce traitement a eu pour effet de diminuer le taux RR, alors que normalement si le frottement entre le capteur et l'échantillon est diminué ce dernier est moins excité et par conséquent les vibrations résultantes sont moindres. Nous pouvons penser que peut être l'ajout du Téflon® a provoqué d'autres modifications structurelles dans le tissé : si on regarde le cliché MEB de ces deux échantillons nous remarquons que sur l'échantillon ayant subi le traitement le tissu forme un maillage plus dense, moins aéré que pour le premier. On peut le voir sur les clichés car sur le premier on note la présence de jours, preuve d'un tissage plus lâche que dans le second cas. Notre point de vue est que le processus d'ajout de Téflon® a entraîné le gonflement des fils et par conséquent le resserement des mailles.

Les valeurs du taux RR sont de 0,63 pour Tsb-traitée et de 0,78 pour Tsb-non traitée. Ce qui rapproche Tsb-traitée des non-tissés.



**Figure 3.7** : Changement structurel provoqué par le traitement Téflon®, on peut voir que sur le TSB-T le tissage s'est resserré, la structure est plus dense..

- Le cas du MPET, du velours R15 et de la toile TJ

Pour le sergé MPET, le taux RR vaut 0,78 ce qui est la valeur moyenne normale pour un tissé de ce type.

## Discussion

Pour le velours R15, le taux RR est très faible 0,3. En fait cela est dû à la forte orientation pileuse de cet échantillon.

Enfin pour la toile enduite TJ, ce taux vaut 0,17 cette faible valeur s'explique par le fait que cet échantillon est très peu compressible et présente une forte rugosité.

- Les lingettes spunlaced J

Le taux RR pour J2 est de 0,65 plus élevé que celui de J1 (0,56) qui a une masse surfacique plus faible. Nous pensons que dans le cas de ces non-tissés ce n'est pas la rugosité qui entre en jeu mais l'amortissement du fait de l'absorption des vibrations par le volume formé par les fibres.

Alors que J4 est entièrement en viscose, J3 est composé de viscose et de polyester. La valeur de du taux RR pour J4 est similaire à ceux des deux premiers non-tissés, alors que pour J3 on trouve une valeur de RR plus élevée proche des valeurs trouvées pour les tissés. L'ajout de viscose diminue donc l'excitation du capteur.

- Les non-tissés bicouche: NTDF/ NTRF et NTRE/NTDE

L'influence de la rugosité sur le taux RR est plus qu'ailleurs visible dans le cas des non-tissés bicouche ; en effet pour les deux échantillons la face rugueuse se caractérise par une chute brutale RR comparée à la face douce. Ainsi nous passons de  $RR = 0,67$  pour la face douce du non-tissé épais à 0,24 pour sa face rugueuse. De même pour le non-tissé fin RR passe de 0,63 pour la face douce à 0,19 pour la face épaisse. En plus de la rugosité des faces entre en compétition l'épaisseur des échantillons qui modifie l'amortissement entre les deux cas de figure. Le non-tissé bicouche fin a toujours le taux RR le moins élevé quelque soit la face considérée.

- Les papiers: P90, P125, P180 et P224

Sans surprise les papiers qui parmi l'ensemble des échantillons sont les plus lisses, donnent les taux RR les plus élevés. Ces échantillons sont très peu compressibles, la seule contribution à RR est donc la rugosité. P90 présente le taux RR le plus élevé à 0,98, c'est la surface la plus lisse, RR décroît au fur et à mesure que la masse surfacique augmente et donc la rugosité (0,88 pour P125, 0,80 pour 180 et 0,73 pour P224).

- Le non tissé de verre: NTV

Avec un taux RR de 0.26 le non-tissé de verre NTV présente l'un des taux les plus bas. Sa structure rugueuse excite fortement le capteur ce qui produit cet effet. Nous verrons plus loin que par ailleurs cet échantillon présente l'un des encombrements les plus élevés dans l'espace de phase.

- Les cuirs: C1, C2, C3, C4

Même remarque que pour les papiers le taux RR est sensible ici à la rugosité, C1 qui est l'échantillon le plus lisse donne une valeur de 0,98 et C4 qui présente un grain de surface important donne  $RR=0,63$ . Pour cette étude sur les cuirs l'influence de la compressibilité n'est pas écartée.

En conclusion de cette analyse des différents taux RR obtenu pour les échantillons nous pouvons dire que les surfaces lisses ont tendance à avoir un taux RR très élevé, alors que les surfaces très

texturées, présentant des aspérités de surface ou une rugosité importante ont les taux les plus faibles. Par ailleurs le paramètre RR est aussi sensible à la composition des matériaux, nous l'avons vu avec les échantillons Tsb-T et le non-tissé comportant de la viscose J3. Le paramètre RR est très intéressant en première approche, il est aisé à comprendre et permet déjà d'identifier différentes tendances parmi les échantillons.

### 3.4.2.2 Analyse des autres statistiques RQA

Ces paramètres RQA sont établis en termes soit de taux de points récurrents (ex : le taux de points formant une diagonale pour DET) ou d'entropie de points récurrents. Comme le taux RR, ces paramètres quantifient le comportement complexe du capteur, l'apparition de perturbations complexes dans l'espace de phase et donc par conséquent les différentes hétérogénéités du frottement dynamique sur un tour de plateau.

D'une part DET, L\_entr, mesurent le déterminisme et la complexité de l'activité périodique de la trajectoire dans l'espace de phase. D'autre part LAM, TT et V\_entr mesurent respectivement le nombre d'états confinés dans l'espace de phase, la durée moyenne de ces états et leur complexité.

Le fait qu'une augmentation de DET coïncide avec celle de LAM, suggère que l'activité périodique du frottement dynamique apparaît quand la trajectoire dans l'espace de phase est confinée avec de faibles amplitudes. Cette observation est à mettre en relation avec ce que nous disions plus haut sur l'inspection visuelle des RP, nous mettions alors en relation les hautes amplitudes aux secteurs clairs sur le RP alors que les secteurs sombres correspondent aux faibles amplitudes. Ces dernières régions correspondent à celles qui maximisent DET.

L'entropie des lignes diagonales évolue dans le même sens que l'entropie des lignes verticales. Une diminution de ces paramètres traduit une augmentation de l'ordre et par conséquent de la reproductibilité de l'activité périodique (confinée donc) de la trajectoire dans l'espace de phase. En outre il peut être noté que les diminutions de DET et LAM sont presque toujours suivies par une diminution des deux paramètres d'entropie. On pouvait s'y attendre, les zones où l'activité périodique est confinée apparaît correspondent à des amplitudes faibles. Etant donné que c'est la plage de linéarité du capteur, cette zone correspond par conséquent à un comportement ordonné, réversible de la réponse du capteur.

### 3.4.2.3 Résumé de la RQA par famille d'échantillons

- Les papiers

Pour cette famille de surface la caractéristique du relief est à l'origine des interactions dynamiques. Quand la masse surfacique augmente (et par conséquent la rugosité) une chute du paramètre L\_entr est observée. La dynamique non-linéaire est plus homogène, moins déterministe et confinée quand la rugosité augmente. L'augmentation de la rugosité ici change donc la structure de la trajectoire de phase, et plus le relief excite le capteur, et moins le comportement est déterministe.

- Les sergés Sco-Fort et Sco-Faible

La pilosité générée par l'émerisage provoque une augmentation significative des deux paramètres  $L_{entr}$  et  $V_{entr}$ . Un grain d'émeris plus abrasif générant de longs poils flexibles masquant les aspérités de la structure tissée. Cette couche pileuse, voulue car elle augmente la douceur du toucher du textile, augmente l'entropie de l'activité périodique et confinée du coup elle diminue le caractère homogène du frottement dynamique.

- Les toiles de coton Tsb-T et Tsb-NT

Si nous comparons les résultats de cette deuxième campagne à la première nous avons tendance à conclure que cette dernière est moins concluante que la première. Le fait d'avoir diminué la fréquence d'échantillonnage ne permet pas de significativement distinguer les deux échantillons par rapport à la première campagne. Si le taux RR et le déterminisme DET sont pertinents comme estimateur discriminant, il n'en est pas pour autant des statistiques d'entropie  $L_{entr}$  et  $V_{entr}$ . Même si les tendances constatées lors de la première campagne sont respectées, ces deux estimateurs ne peuvent pas être comme statistiquement significatifs pour cette deuxième campagne.

Nous restons sur notre analyse de la première campagne ainsi que ce qui a été dit plus haut sur le taux RR.

- Les non-tissés J1, J2, J3, J4, NTDRE, NTDRF

L'évolution des entropies moyennes  $L_{entr}$  et des longueurs des diagonales sont modérées. Quand on diminue la masse surfacique (de J2 à J1) la dynamique du frottement est plus ordonnée.

L'addition de viscose au polyester induit un effet opposé et cause une augmentation des entropies aussi bien que de la durée TT. La viscose induit moins d'ordre du frottement dynamique avec des activités périodiques confinées.

Sur ces lingettes pour bébé, la modification de la masse surfacique ou des matériaux induisent donc des effets opposés sur le frottement dynamique et par conséquent sur la qualité des surfaces.

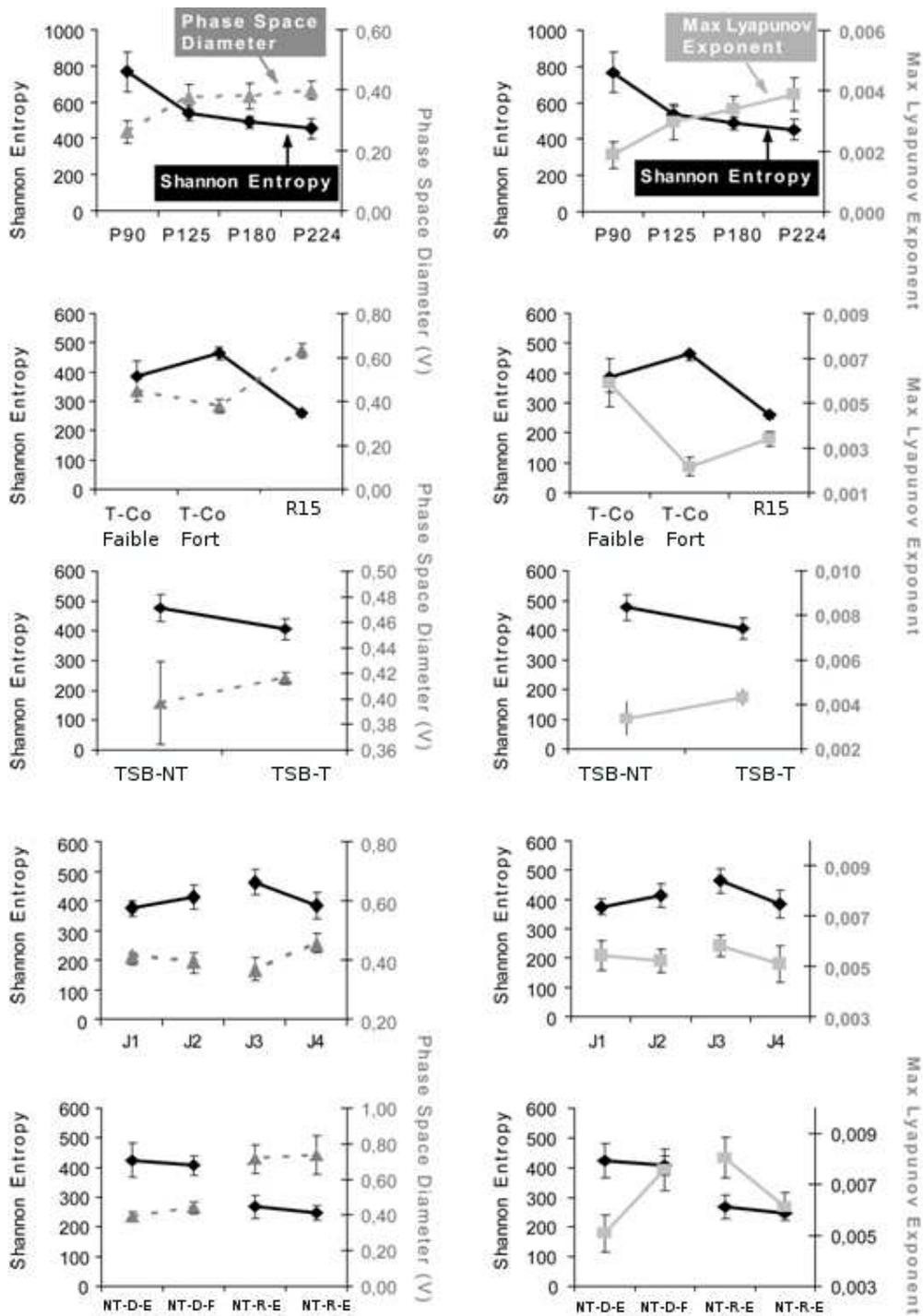
Finalement, au regard des résultats provenant des non-tissés bicouches, il vient que la face douce induit une activité périodique. D'autre part sur les faces rugueuses, caractérisées par une faible compressibilité, la diminution de la masse surfacique induit l'apparition d'activités périodiques plus courtes dans le temps, plus confinées de la trajectoire de phase.

### **3.4.3 Comparaison de l'entropie de Shannon, du diamètre de l'espace de phase et de l'exposant maximum de Lyapunov**

Sur la figure suivante nous comparons l'évolution de ces paramètres quand la surface change. Nous comparons l'entropie de Shannon et le diamètre d'espace d'une part et d'autre part l'entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov.

Nous avons remarqué en première approche la distinction de différentes classes de comportement dynamique en fonction du niveau d'entropie de Shannon : les plus grandes valeurs d'entropie concernent les papiers, alors que à l'opposée les structures non-tissés et les velours induisent de

faibles valeurs. Entre ces deux cas extrêmes nous trouvons les tissés, pour une analyse plus fine, regardons ce qui se passe par famille de surfaces.



**Figure 3.8 :** Le diamètre d'espace de phase comparé à l'Entropie de Shannon d'une part et du plus grand exposant de Lyapunov d'autre part.

- Les papiers

La rugosité dans le cas des papiers génère au niveau de la trajectoire de phase de plus en plus de cycles ce qui a pour conséquence d'augmenter la reproductibilité de la dynamique du frottement. En même temps une augmentation de la rugosité induit plus de tendance du comportement de la dynamique vers du chaos, et augmente le volume du diamètre.

- Les non-tissés spunlaced et bicouches

Dans le cas des non-tissés J1 et J2, une diminution de la masse surfacique induit une augmentation de l'Entropie de Shannon, il n'y a pas d'influence significative sur l'exposant de Lyapunov et le diamètre de l'espace de phase. L'effet de la diminution de la masse surfacique est de générer un signal temporel plus chargé en information. Ce qui est cohérent si on sait que l'augmentation de la masse surfacique augmente l'amortissement.

Sur les non-tissés bicouche, si nous considérons uniquement faces douces, l'augmentation de la masse surfacique entraîne la diminution de l'exposant de Lyapunov alors qu'elle laisse constant l'entropie de Shannon et le diamètre de l'attracteur. Ce qu'on peut dire ici c'est que l'augmentation de la masse surfacique diminue la tendance au chaos du système sans rien modifier à la complexité du signal. A l'inverse si on considère les faces rugueuses cette même augmentation produit exactement l'effet inverse.

- Sco-Fort Sco-Faible

L'émerisage fort provoque une dynamique du frottement hétérogène, une diminution de l'exposant de Lyapunov et du diamètre dans l'espace de phase.

- Le cas du velours

Le velours est un cas à part à cause de sa pilosité très orientée. Du fait des larges déplacements du capteur dans le sens rebrousse-poil, il en résulte un important diamètre dans l'espace de phase, cependant l'entropie de Shannon et l'exposant de Lyapunov n'évolue pas dans le sens auquel on aurait pu s'attendre, en effet leurs valeurs ne sont pas si élevées comparées aux autres échantillons.

- Les toiles Tsb-NT et Tsb-T

L'ajout du Téflon® diminue l'entropie de Shannon et l'exposant de Lyapunov alors que le diamètre dans l'espace de phase augmente. Cet ajout a eu pour conséquence une meilleure homogénéité du signal, et la tendance à une transition au chaos.

### 3.4.4 Conclusion de la seconde campagne

La différence majeure entre cette seconde campagne et la première a été l'augmentation du panel des échantillons testés ; nous avons aussi changé la fréquence d'échantillonnage pour le traitement du signal (4 kHz pour la première campagne à 1 kHz pour la seconde).

En conclusion de cette seconde campagne, en première approche du comportement dans l'espace de phase, nous notons principalement la coexistence de deux types de comportement dynamique. Le premier type de comportement est lié aux grandes réponses du capteur, à cause des grandes forces

de frottement générées au contact. Cela se traduit sur le RP par des secteurs blancs, peu d'ordre, un taux de RR bas et sont connectés à la réponse modale du capteur. Le second type de comportement correspond aux zones où l'amplitude de vibrations est faible et où la dynamique du frottement induit dans l'espace de phase des trajectoires ordonnées et périodiques. L'équilibre entre ces deux états vibratoires sont en fait le reflet réel de l'influence des surfaces testées sur les échantillons ; ce que ne montrait pas l'analyse traditionnelle par FFT.

Pour tirer le bilan des statistiques RQA de cette seconde campagne nous avons commencé par analyser le taux de points récurrents sur le RP, à savoir le paramètre RR. Ce paramètre atteint sa valeur maximale sur les papiers et sa valeur minimale sur les surfaces fortement texturées : la face rugueuse des non-tissés bicouches : NTRE/F, la toile enduite TJ et le non-tissé de verre NTV. De ces premières analyses notre conclusion principale a été que RR est sensible en priorité à la structure des surfaces. En effet RR est sensible au traitement mécanique comme l'émerisage ; le taux RR diminue quand on passe de Sco-fort à Sco-faible. Nous avons aussi souligné que le traitement chimique au Téflon® subi par les toiles de coton a une incidence sur le RR, confirmant nos observations de la première campagne. Notre conclusion sur ce point est que l'ajout du Téflon® modifie structurellement la toile, se répercutant sur la valeur du taux RR. Notons enfin que dans le cas des non-tissés spunlaced, nous observons que l'ajout de viscose fait baisser le taux RR de même qu'une augmentation de la masse surfacique. Pour les échantillons de cuir la variation des grains de surface à une incidence directe sur ce taux, conformément à nos attentes quand la taille des grains augmente, le taux RR diminue. Cela rejoint ce que nous disions sur la dépendance directe de RR à la structure surfacique. Enfin notons le cas des cachemires où nous obtenons des résultats peu concluants, les taux RR pour les 5 échantillons sont très proches, même si la toile de Ca-t semble suivre une tendance légèrement différente des autres sergés.

Après ce premier point sur le taux RR, nous nous sommes penchés sur les autres statistiques RQA. Sur la plupart des échantillons nous avons noté une corrélation entre les variations de DET et de LAM ; la conclusion que nous avons tirée de ce constat est que l'activité périodique du signal coïncide avec un état confiné à de faibles amplitudes dans l'espace de phase.

Si nous analysons les résultats du RQA par famille d'échantillons nous avons pour les papiers, par exemple, l'augmentation de la rugosité qui fait chuter le déterminisme DET et les paramètres entropiques  $L_{entr}$  et  $V_{entr}$  ; nous en déduisons donc que la rugosité induit un comportement moins périodique mais plus homogène (en terme de quantité d'information). Si nous prenons le cas des sergés Sco-faible et Sco-fort, il apparaît que ces paramètres entropiques ont tendance à augmenter avec la pilosité due à l'émerisage. Pour le cas des toiles Tsb-T et Tsb-NT les résultats de cette seconde campagne sont moins concluant que pour la première campagne, même si la tendance est plutôt à la confirmation des résultats de la première campagne, il n'en reste pas moins que ces derniers permettaient de mieux discerner les deux échantillons. Enfin pour terminer sur les RQA soulignons les cas des non-tissés spunlaced J où on note une diminution des paramètres entropiques.

Enfin la dernière partie de cette deuxième campagne porte sur l'estimation de quelques paramètres globaux du signal, à savoir l'Entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov. Nous

résumons l'analyse de ces paramètres dans le Tableau 3.1. Nous avons utilisé ici l'entropie de Shannon, le plus grand exposant de Lyapunov et le diamètre de l'attracteur pour caractériser la dynamique du frottement, en observant l'homogénéité du signal, son amplitude dans l'espace de phase et sa tendance ou non à transiter vers le chaos, nous avons mis en évidence que la rugosité, la composition des échantillons, la pilosité modifient le contact dynamique de diverses façons.

**Tableau 3.1** : Modification du contact dynamique quand les propriétés des surfaces changent.

	<b>Evolution structurelle</b>	<b>Homogénéité du Signal</b>	<b>Sensibilités aux Conditions initiales</b>	<b>Diamètre dans l'espace de phase</b>
<b>Papiers</b>	Augmentation de la rugosité	+	+	+
<b>S-Co faible à fort</b>	Génération d'une pilosité	-	-	-
<b>Tsb-NT à Tsb-T</b>	Traitement au Téflon®	+	+	+
<b>J2 à J1</b>	Diminution de la masse surfacique	-	Pas de variations significatives	Pas de variations significatives
<b>J4 à J3</b>	Ajout de polyester à la viscosité	-	+	-
<b>NTD-Epais à Fin</b>	Diminution de la masse surfacique	Pas de variations significatives	+	Pas de variations significatives
<b>NTR-Epais à Fin</b>	Diminution de la masse surfacique	Pas de variations significatives	-	Pas de variations significatives

L'évaluation de ces invariants de l'espace de phase illustrent bien les propriétés de la dynamique du frottement et nous donne des informations cruciales sur les différents états dynamiques du capteur durant le frottement.

### 3.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous discutons des résultats des campagnes de mesure présentée au Chapitre 2. L'analyse propriétés des espaces de phase de la première campagne nous a révélé la corrélation entre le Delay et la compressibilité des échantillons. L'analyse des toiles Tsb-NT et Tsb-T nous ont révélé des choses intéressantes, nous avons émis l'hypothèse que la RQA est sensible à la modification structurelle subie par Tsb-T. En ce qui concerne les non-tissés J1 et J2 nous sommes arrivés à la conclusion que l'augmentation de la masse surfacique s'accompagnait d'une augmentation de la pilosité ; ce qui explique les variations sur RR et DET que nous observons. Les résultats des papiers, en RQA, n'ont pas été concluants ; il semblerait que là on commence à effleurer les limites de la sensibilité du capteur. Les derniers échantillons de la première campagne sont les cuirs, mis à part le paramètre de divergence tous les paramètres RQA se sont révélés sensibles au grain de surface.

Pour la deuxième campagne de mesures, nous avons mis en évidence la coexistence de deux types de comportement dynamique. Le premier type de comportement est lié aux grandes réponses du capteur qui se traduit sur le RP par des secteurs blancs. Le second type de comportement correspond

## Discussion

aux zones où l'amplitude de vibrations est faible et où la dynamique du frottement induit dans l'espace de phase des trajectoires ordonnées et périodiques.

En ce qui concerne le bilan RQA, le taux RR atteint sa valeur maximale sur les papiers et sa valeur minimale sur les surfaces fortement texturées : la face rugueuse des non-tissés bicouches : NTRE/F, la toile enduite TJ et le non-tissé de verre NTV. Nous sommes arrivés à la conclusion que ce paramètre est sensible en priorité au traitement mécanique. L'analyse des autres paramètres RQA par famille d'échantillons, nous révèle, dans le cas des papiers, nous avons conclu que la rugosité induisait un comportement moins déterministe et moins complexe. Pour le cas des toiles Tsb-T et Tsb-NT la tendance est plutôt à la confirmation des résultats de la première campagne : le traitement subi Tsb-T l'emporte sur les propriétés du Teflon. Enfin pour terminer sur les RQA soulignons les cas des non-tissés spunlaced J où l'arrivée de J4 a permis de confirmer l'influence de la masse surfacique dans la RQA, nous avons aussi vu que l'ajout de viscosité a une influence dans la dynamique du frottement.

Enfin nous avons terminé ce chapitre en analysant les paramètres globaux que sont l'entropie de Shannon et l'exposant maximal de Lyapunov. Leur analyse a montré que l'espace de phase contient toute l'information relative à la dynamique du capteur durant le frottement.

## **Conclusions et Perspectives**

L'objectif initial de ce travail de thèse était dans un premier temps d'appréhender le problème de la méthode de caractérisation des surfaces textiles par *Modalsens* d'un point de vue de la dynamique non-linéaire. Et enfin, partant de là, de proposer une modélisation de contact dynamique non-linéaire. Pour y parvenir nous avons présenté une synthèse des travaux antérieurs ; partant de la tribologie au sens large à la problématique du textile, fixant, en outre, le cadre du développement de *Modalsens*. A partir de là nous avons fait le rapprochement entre le principe de la méthode *Modalsens* et les instabilités vibratoires dues au frottement. Notre objectif était dès lors de nous munir des outils adéquats afin de tirer parti de ces non-linéarités et de proposer à la science du textile de nouveaux estimateurs d'états de surface des étoffes. D'où l'introduction de l'approche « espace de phase » et l'ensemble des outils NTSA.

L'introduction de l'approche « espace de phase » débute par un rappel des concepts fondamentaux de la dynamique non-linéaire, partant d'Henri Poincaré [Poi03] à ses développements les plus ultimes. Le cadre était posé pour aborder les outils de la NTSA, fondamentaux pour la reconstruction de l'espace de phase, dont on peut fixer les origines au célèbre théorème éponyme de Takens [Tak81].

Afin de mesurer l'influence de chaque surface testée sur la dynamique du capteur dans son espace de phase, il est de nécessaire de pouvoir tirer des mesures de cet espace ; à cet effet nous avons introduit dans un premier temps les Recurrence Plots (RP) puis la Recurrence Quantification Analysis.

Après l'introduction des outils nécessaires à ce travail, nous avons abordé leur application proprement dite avec une démarche expérimentale. Pour introduire le travail expérimental nous avons commencé par présenter les échantillons que nous avons choisis et justifier ces choix par les propriétés mécaniques de ceux-ci. La démarche expérimentale tient en tout en deux campagnes de mesures ; en effet après une première campagne, qui nous a essentiellement servi à tester pour la première fois l'ensemble de la démarche proposée, nous avons pu mener une deuxième campagne tirant les leçons de la première ; c'est ainsi que nous avons revu certains de nos choix de la première campagne (fréquence d'échantillonnage) pour améliorer la deuxième campagne (mise en place d'un trigger). Une évolution de la deuxième campagne a été de proposer en plus des statistiques de la RQA l'évaluation de nouveaux paramètres globaux tels l'entropie de Shannon et le plus grand exposant de Lyapunov.

Parmi les résultats fondamentaux de la première campagne de mesure nous avons observé la corrélation entre le Delay établi pour chaque surface et de la compressibilité de celles-ci. Nous avons par la suite montré que le Delay classé les échantillons en 3 classes principales. L'analyse individuelle des échantillons s'est aussi révélée très intéressante ; en effet le cas des toiles de coton Tsb-T et Tsb-NT n'a pas produit les résultats que nous escomptions au niveau des paramètres RQA, nous avons lié cela à une modification structurelle due à l'ajout du Téflon®. Globalement sur tous les échantillons les résultats RQA se sont révélés pertinents, mis à part les cas du papier dont leur analyse a posé des difficultés. A la fin de la première campagne de mesures nous avons déjà pris des mesures d'amélioration afin préparer la seconde.

La seconde campagne de mesure nous permis de distinguer deux types de comportement dynamique majeur que l'analyse classique de Fourier ne permettait pas de voir jusqu'ici : un pour les grandes amplitudes du capteur et un deuxième pour les petites amplitudes. Cela se traduit sur le RP par des

secteurs blancs, un taux déterminisme et de RR faibles. Le second type de comportement correspond aux zones où l'amplitude de vibrations est faible et où la dynamique du frottement induit dans l'espace de phase des trajectoires ordonnées et périodiques.

Le bilan des statistiques RQA de la seconde campagne s'est fait en analysant d'abord le taux RR. Nous avons prouvé alors que ce paramètre est très sensible à la structure des surfaces (rugosité, pilosité) ainsi qu'aux traitements mécaniques (ex : émerisage). Cependant notre intuition de la première campagne au sujet du traitement au Téflon® s'est trouvée confirmée dans cette seconde campagne. Cependant nous avons souligné le cas particulier des cachemires où le taux RR ne permet pas de distinguer significativement l'armure toile du sergé.

L'observation des autres paramètres RQA pour la deuxième campagne de mesures a aussi révélé un autre résultat fondamental. En observant la corrélation entre les variations du déterminisme DET et de la laminarité LAM nous sommes arrivés à la conclusion que l'activité périodique du signal coïncide avec un état confiné à de faibles amplitudes dans l'espace de phase.

Enfin la dernière partie de la seconde campagne de mesure a porté sur l'estimation de quelques paramètres globaux d'Entropie de Shannon et du plus grand exposant de Lyapunov. Nous avons mis en évidence la relation entre les changements structurels sur les échantillons testés et leur influence ou non sur ces nouveaux paramètres, il est apparu à l'issue de cette dernière partie que ces paramètres globaux corroboraient les résultats issus de la RQA.

Une autre direction importante du travail de thèse portait sur la modélisation du contact fibreux. Après un travail de recherche bibliographique, nous avons porté notre choix sur un modèle à 1 degré de liberté que nous avons présenté au Chapitre 1. Nous avons donc présenté ce modèle et adapté au cas du capteur de *Modalsens*. Par ailleurs nous avons eu à introduire un certains nombres d'outils de résolutions de systèmes différentiels non-réguliers, ce qui nous a amené à présenter les travaux de Piiroinen et al. [PK08] sur les systèmes de Filippov. Après résolution des équations du système nous donnons un certain nombre de résultats préliminaires au Chapitre 2.

Ce que ce travail de thèse apporte à la méthode de caractérisation *Modalsens*, c'est une meilleure compréhension de la dynamique du capteur en fonction des étoffes. Alors que l'analyse modale classique repose sur la théorie linéaire et par conséquent fait l'impasse sur beaucoup d'informations enregistrées par le capteur, par cette méthode nous pouvons suivre en temps réel et de manière pertinente les régimes de vibration du capteur. Notre travail est le premier qui fait un tel rapprochement entre Tribologie textile et la NTSA, par conséquent l'analyse des résultats a été une tâche difficile. Cependant le *Nonlinear Time Series Analysis* (NTSA) est un domaine en pleine effervescence et nous pensons qu'un tel projet doit continuer.

Pour terminer, en termes de direction future potentielle de ce travail, nous pensons que sur le plan expérimental il y a plusieurs points qui pourraient améliorer. Nous pensons, qu'il serait avantageux de sortir du cadre de la *Modalsens*, pour appliquer ces outils à d'autres champs de caractérisation des textiles. On pourrait envisager, par exemple, des tests dynamiques de flexion d'étoffes ou de compressibilité.

## Références bibliographiques

- [AA99] F.M. Atay and Y. Altıntas. Recovering smooth dynamics from time series with the aid of recurrence plots. *Physical Review E*, 59(6):6593–6598, 1999.
- [ADN10] F.D.N. Antonio and M.A.F. Di Narzo. Package *seriesChaos*™ *dimension*, 1, 2010.
- [Amo99] G. Amontons. De la Resistance Cause'e dans les Machines (1). *JOURNAL-JAPANESE SOCIETY OF TRIBOLOGISTS*, 44:229–235, 1999.
- [BA94] S. Bjorklund and S. Andersson. A numerical method for real elastic contacts subjected to normal and tangential loading. *Wear*, 179(1-2):117–122, 1994.
- [BF98] J.P. BOUDOT and D. FIORINA. Prédiction des bruits de freinage: Détection automatique d'instabilités par la méthode des éléments finis= Prediction of break noises: Automatic detection of instabilities using the finite element method. In *Journées européennes du freinage*, pages 93–100, 1998.
- [BFCTL02] J. Beldaire-Franch, D. Contreras, and L. Tordera-Lledó. Assessing nonlinear structures in real exchange rates using recurrence plot strategies. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 171(4):249–264, 2002.
- [BFR00] MA Bueno, S. Fontaine, and M. Renner. Dispositif pour évaluer l'état de surface d'un matériau et procédé de mise en œuvre dudit dispositif. *patent N US*, 6, 2000.
- [Bhu98] B. Bhushan. Micro/Nano Tribology. *Washington, DC, USA*, 1998.
- [BK03] B. Bhushan and P.L. Ko. Introduction to tribology. *Applied Mechanics Reviews*, 56:B6, 2003.
- [BKBW96] B. Bhushan, A.V. Kulkarni, W. Bonin, and J.T. Wyrobek. Nanoindentation and picoindentation measurements using a capacitive transducer system in atomic force microscopy. *Philosophical Magazine A*, 74(5):1117–1128, 1996.
- [BTB73] F.P. Bowden, D. Tabor, and R. Bruderer. *Friction: an introduction to tribology*. Anchor Press New York, 1973.
- [Buc81] D.H. Buckley. *Surface effects in adhesion, friction, wear, and lubrication*. Elsevier, 1981.
- [BY51] FP Bowden and JE Young. Friction of diamond, graphite, and carbon and the influence of surface films. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 208(1095):444, 1951.
- [Car95] C.M. Carr. *Chemistry of the textiles industry*. Springer, 1995.
- [CdWNAB91] C. Canudas de Wit, P. Noel, A. Aubin, and B. Brogliato. Adaptive friction compensation in robot manipulators: Low velocities. *The International Journal of Robotics Research*, 10(3):189, 1991.
- [CHA91] P. CHAMBRETTE. Dynamic systems stability with dry friction: Application to brake disc squealing (Stabilité des systèmes dynamiques avec frottement sec: Application au crissement des freins à disque) (Ph. D. Thesis). 1991.
- [DBBCK07] M. Di Bernardo, C. Budd, AR Champneys, and P. Kowalczyk. Piecewise smooth dynamical systems: theory and applications *Applied mathematical sciences*, vol. 163, 2007.
- [DN00] H. Dankowicz and A.B. Nordmark. On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 136(3-4):280–302, 2000.
- [EKR87] J.P. Eckmann, S.O. Kamphorst, and D. Ruelle. Recurrence plots of dynamical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 4:973, 1987.

## Références

- [FA88] A.F. Filippov and FM Arscott. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Springer, 1988.
- [FMN<sup>+</sup>05] S. Fontaine, C. Marsiquet, N. Nicoletti, M. Renner, and M.A. Bueno. Development of a sensor for surface state measurements using experimental and numerical modal analysis. *Sensors and Actuators A: Physical*, 120(2):507–517, 2005.
- [FS86] A.M. Fraser and H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2):1134–1140, 1986.
- [FT75] KNG Fuller and D. Tabor. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 345(1642):327–342, 1975.
- [GJM84] JA Greenwood, KL Johnson, and E. Matsubara. A surface roughness parameter in hertz contact. *Wear*, 100(1-3):47–57, 1984.
- [GKWM94] C. Gao, D. Kuhlmann-Wilsdorf, and D.D. Makel. The dynamic analysis of stick-slip motion. *Wear*, 173(1-2):1–12, 1994.
- [GOL53] N. Gralén, B. Olofsson, and J. Lindberg. Measurement of friction between single fibers. *Textile Research Journal*, 23(9):623, 1953.
- [GP83] P. Grassberger and I. Procaccia. Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, 50(5):346–349, 1983.
- [Gre05] R.M. Gresham. The right answer? Well, it depends... *Tribology & lubrication technology*, 61(2):24–25, 2005.
- [Hal69] AJ Haltner. The physics and chemistry of surfaces: surface energy, wetting and adsorption. *Boundary Lubrication. edited by FF Ling, EE Klaus, and RS Fein. New York: American Society of Mechanical Engineers*, 1969.
- [HKG68] H.R. Huff, S. Kawaji, and H.C. Gatos. Electronic configuration of indium antimonide surfaces. *Surface Science*, 10(2):232–238, 1968.
- [HKS99] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. Practical implementation of nonlinear time series methods: The [small-caps TISEAN] package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 9:413, 1999.
- [HM53] HG Howell and J. Mazur. AMONTONS' LAW AND FIBRE FRICTION. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 44(2):59–69, 1953.
- [How59] HG Howell. *Friction in textiles*. Textile Book Publishers in association with the Textile Institute, 1959.
- [Ibr94a] RA Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part I: Mechanics of contact and friction. *Applied Mechanics Reviews*, 47:209, 1994.
- [Ibr94b] RA Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part II: Dynamics and modeling. *Applied Mechanics Reviews*, 47:227, 1994.
- [JKR71] KL Johnson, K. Kendall, and AD Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 324(1558):301–313, 1971.
- [JM63] RP Jarvis and B. Mills. Vibrations induced by friction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 178(32):847–857, 1963.

## Références

- [KBA92] M.B. Kennel, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6):3403–3411, 1992.
- [KG80] S. Kawabata and N.S.K. Gakki. *The standardization and analysis of hand evaluation*. Textile Machinery Society of Japan Osaka, 1980.
- [Kob90] M. Kobayashi. Sound and Vibration in Brakes. *Japanese Journal of Tribology*, 35(1):561–567, 1990.
- [KRG03] Y.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING*, 13(8):2157–2188, 2003.
- [Lau92] T.A. Laursen. Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements. 1992.
- [Lin52] B. Lincoln. Frictional and elastic properties of high polymeric materials. *British Journal of Applied Physics*, 3:260, 1952.
- [Lor63] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow1. *Atmos. Sci*, 1963.
- [Mar03] N. Marwan. *Encounters with neighbours: current developments of concepts based on recurrence plots and their applications*. Norbert Marwan, 2003.
- [Mar08] N. Marwan. A historical review of recurrence plots. *The European Physical Journal-Special Topics*, 164(1):3–12, 2008.
- [MCRTK07] N. Marwan, M. Carmen Romano, M. Thiel, and J. Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5-6):237–329, 2007.
- [MFR07] C. MARSQUET, S. Fontaine, and M. Renner. Interactions tribologie—vibrations entre une lamelle vibrante et la surface en contact avec celle-ci. 2007.
- [Mil38] HR Mills. Brake squeal. *Institution of Automobile Engineers*, 1938.
- [MN00] F. Moirrot and QS Nguyen. Brake squeal: a problem of flutter instability of the steady sliding solution? *Archives of Mechanics*, 52(4-5):645–661, 2000.
- [MTN02] N. Marwan, M. Thiel, and NR Nowaczyk. Cross recurrence plot based synchronization of time series. *Arxiv preprint physics/0201062*, 2002.
- [Ngu03] Q.S. Nguyen. Instability and friction. *Comptes Rendus Mecanique*, 331(1):99–112, 2003.
- [NMC79] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, and Ebooks Corporation. *Nonlinear oscillations*. Wiley Online Library, 1979.
- [OL96] VG Oancea and TA Laursen. Dynamics of a state variable frictional law in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 22(1):25–40, 1996.
- [OM85] JT Oden and JAC Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1-3):527–634, 1985.
- [Pai95] P. Painlevé. *Leçons sur le Frottement*. A. Hermann, 1895.
- [PCFS80] N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, and R.S. Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9):712–716, 1980.
- [PET02] JM PETIT. Matériel roulant ferroviaire besoins en freinage= Railway rolling stock requirements in braking. In *Journées européennes du freinage*, pages 3–10, 2002.
- [PK08] P.T. Piiroinen and Y.A. Kuznetsov. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 34(3):1–24, 2008.
- [Poi03] H. Poincaré. *Science and method*. Dover Pubns, 2003.

- [PT96] B.N.J. Persson and E. Tosatti. *Physics of sliding friction*. Springer, 1996.
- [R D10] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. ISBN 3-900051-07-0.
- [Rab58] E. Rabinowicz. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proceedings of the Physical Society*, 71:668, 1958.
- [Rab59] E. Rabinowicz. A study of the stick-slip process. *Friction and Wear*, 1959.
- [Rab65] E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. Wiley New York, 1965.
- [RCC99] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4):383–399, 1999.
- [RR56] E. Rabinowicz and BG Rightmire. LOW-SPEED SLIDING, 1956.
- [Rud76] MJ Rudd. Wheel/rail noise—Part II: Wheel squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 46(3):381–394, 1976.
- [Rue91] D. Ruelle. *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 1991.
- [S.10] Fontaine S. Tribologie et Dynamique nonlinéaire en milieu fibreux, 2010, HDR. 2010.
- [Sha01] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 5(1):3–55, 2001.
- [SJ07] J.J. Sinou and L. Jezequel. Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(1):106–122, 2007.
- [SM55] D. Sinclair and NJ Manville. Friction Vibration. *Journal of Applied Mechanics*, pages 207–213, 1955.
- [Spu61] RT Spurr. A theory of brake squeal. *ARCHIVE: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Automobile Division 1947-1970*, 1961(1961):33–52, 1961.
- [Tak81] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, pages 366–381, 1981.
- [TC99] T.R. Thomas and Ebooks Corporation. *Rough surfaces*. Imperial College Press London, 1999.
- [TGZ<sup>+</sup>96] LL Trulla, A. Giuliani, JP Zbilut, CL Webber, et al. Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients. *Physics Letters A*, 223(4):255–260, 1996.
- [TV61] GH Thorndike and L. Varley. Measurement of the coefficient of friction between samples of the same cloth. *Journal of the Textile Institute Proceedings*, 52(6):255–271, 1961.
- [Ver38] P.F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Phys*, 10:113–121, 1838.
- [VMUC89] G. Viswanathan, VG Munshi, AV Ukidve, and K. Chandran. A critical evaluation of the relationship between fiber quality parameters and hairiness of cotton yarns. *Textile Research Journal*, 59(11):707, 1989.
- [Wen06] C. Wensrich. Slip-stick motion in harmonic oscillator chains subject to Coulomb friction. *Tribology International*, 39(6):490–495, 2006.
- [Whi36] H. Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, 37(3):645–680, 1936.
- [Whi94] D.J. Whitehouse. *Handbook of surface metrology*. Taylor & Francis, 1994.
- [Wil64] D. Wilson. A study of fabric-on-fabric dynamic friction. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 55(2):163–164, 1964.

## Références

- [WJZ94] CL Webber Jr and JP Zbilut. Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. *Journal of Applied Physiology*, 76(2):965, 1994.
- [ZJF85] W. Zurek, D. Jankowiak, and I. Frydrych. Surface frictional resistance of fabrics woven from filament yarns. *Textile Research Journal*, 55(2):113, 1985.

## Liste des Figures

Figure 1.1 : Utilisation d'un lubrifiant pour le déplacement d'une statue, El-Bersheh, 1880 av J-C.....	8
Figure 1.2 : Surface réelle et profil de surface. Illustration schématique d'une structure fibreuse.....	10
Figure 1.3 : Cycle de compression – KES FB3, [S.10].....	11
Figure 1.4 : Paramètres géométriques de rugosité.....	12
Figure 1.5 : Le dispositif <i>Modalsens</i> [MFR07].....	16
Figure 1.6 : Le capteur de <i>Modalsens</i> . Transformée de Fourier du signal.....	17
Figure 1.7 : Calcul des déformées modales du mode 1 (sensible aux interactions de cisaillement) et du mode 3 (solicitations transversales).....	18
Figure 1.8 : Modèle du <i>stick-slip</i> , la surface est en mouvement.....	20
Figure 1.9 : Modèle du <i>stick-slip</i> , l'ensemble du système dynamique est en mouvement.....	20
Figure 1.10 : Visualisation des trajectoires dans l'espace de phase(coefficient de frottement discontinu).....	22
Figure 1.11 : Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement continu).....	24
Figure 1.12 : Schéma modèle du <i>sprag-slip</i> .....	25
Figure 1.13 : Système pion-disque (a) et modèle analytique associé (b).....	27
Figure 1.14 : Exemple de série temporelle.....	28
Figure 1.15 : Application du théorème de plongement sur une variété simple.....	35
Figure 1.16 : De gauche à droite, RP d'un signal périodique, un signal chaotique et d'un signal aléatoire.....	40
Figure 1.17 : Attracteur étrange du système de Rössler.....	41
Figure 1.18 : Modèle viscoélastique de Wensrich.....	44
Figure 1.19 : Deux régimes, à gauche le régime stable et à droite occurrence des instabilités <i>stick-slips</i> [Wen06]. .....	45
Figure 1.20 : Frontière entre les régions stables et instables ( <i>stick-slip</i> ), en fonction de l'amortissement [Wen06]. .....	48
Figure 1.21 : Modèle du contact fibreux à un degré de liberté.....	49
Figure 1.22 : Modélisation des aspérités par de simples raideurs.....	49
Figure 1.23 : Définition de la hauteur des aspérités, distribution exponentielle.....	50
Figure 1.24 : Définition de la distance de séparation.....	50
Figure 1.25 : Déformation tangentielle d'une aspérité.....	52
Figure 1.26 : Modélisation de l'interaction dynamique.....	53
Figure 1.27 : Les deux champs vectoriels $F_i$ et $F_j$ et l'ouvert $\hat{\Sigma}_{ij}$ (gauche), des trajectoires correspondantes (droite).....	56
Figure 2.1 : Procédure et démarche expérimentale.....	63
Figure 2.2 : Structures d'un textile : (a) toile, (b) sergé.....	64
Figure 2.3 : La toile de Cachemire, Ca-T.....	65
Figure 2.4 : Les toiles de coton, Tsb-T a subi un traitement au Téflon®.....	65
Figure 2.5 : Les sergés en Cachemire.....	65
Figure 2.6 : Les sergés de coton, S-Co-fort a subi un émerisage plus intense.....	66
Figure 2.7: Les surfaces complémentaires.....	66
Figure 2.8 : Les 4 lingettes spunlaced.....	67
Figure 2.9 : Les non-tissés bicouches.....	68
Figure 2.10 : Les papiers.....	68
Figure 2.11 : Le non-tissé de verre.....	69
Figure 2.12 : La dimension, $m$ , de l'espace de phase.....	74
Figure 2.13 : Le delay, $\tau$ .....	75
Figure 2.14 : Le diamètre de l'espace de phase.....	75
Figure 2.15 : Résultats des statistiques RQA pour les échantillons Tsb-T et Tsb-NT.....	76
Figure 2.16 : Résultats des statistiques RQA pour les lingettes spunlaced.....	77
Figure 2.17 : Résultats RQA pour les papiers.....	78
Figure 2.18 : Résultats des statistiques RQA pour les cuirs.....	79
Figure 2.19 : La dimension, $m$ , de l'espace de phase.....	81
Figure 2.20 : Le delay, $\tau$ .....	81
Figure 2.21 : Diamètre dans l'espace de phase.....	82
Figure 2.22 : Recurrence plot de la toile de cachemire Ca-T.....	82
Figure 2.23 : Recurrence Plots des sergés de cachemire.....	83

Figure 2.24 : Recurrence Plots des sergés de coton. ....	83
Figure 2.25 : Recurrence Plots des toiles de coton.....	84
Figure 2.26 : Recurrence Plots des surfaces complémentaires.....	84
Figure 2.27 : Recurrence Plots des non-tissés spunlaced. ....	85
Figure 2.28 : Recurrence Plot des non-tissés bicouches.....	86
Figure 2.29 : Recurrence Plots des papiers. ....	86
Figure 2.30 : Recurrence Plot des cuirs.....	87
Figure 2.31 : Recurrence Plot du Non-tissé de verre.....	87
Figure 2.32 : Résultats des statistiques RQA pour les cachemires.....	88
Figure 2.33 : Résultats des statistiques RQA pour les sergés de coton. ....	89
Figure 2.34 : Résultats des statistiques RQA pour les toiles de coton. ....	90
Figure 2.35 : Résultats des statistiques RQA pour les non-tissés spunlaced. ....	91
2.36 : Résultats des statistiques RQA pour les non-tissés bicouches. ....	92
Figure 2.37 : Résultats des statistiques RQA pour les papiers. ....	93
Figure 2.38 : Résultats des statistiques RQA pour les cuirs. ....	94
Figure 2.39 : Entropie de Shannon pour les papiers, sergés de coton, non-tissés spunlaced et les non-tissés bicouches.....	95
Figure 2.40 : Le plus grand exposant de Lyapunov pour les papiers, sergés de coton, non-tissés <i>spunlaced</i> et non-tissés bicouches. ....	95
2.41 : Modèle du contact fibreux à 1 degré de liberté. ....	97
Figure 2.42 : Capteur de <i>Modalsens</i> (droite) et sa modélisation par un système masse-ressort.....	98
Figure 2.43 : Observation du <i>stick-slip</i> pour le modèle du contact fibreux.....	102
Figure 2.44 : Déplacement vertical de la masse dans son espace de phase.....	102
Figure 2.45 : Evolution de la variable interne $Z$ , modélisant le cisaillement à l'interface de contact. ....	103
Figure 3.1 : Le Delay classe les échantillons suivant trois classes de compressibilité.....	110
Figure 3.2 : Distance Plot (DP) d'une sélection d'échantillons de la 1 <sup>ère</sup> campagne. (a) Papiers, (b) Cuir, (c) Toile de coton, (d) Velours.....	111
Figure 3.3 : Évaluation des statistiques RQA sur les échantillons de la 1 <sup>ère</sup> campagne. ....	112
Figure 3.4 : Comparaison entre RP et diagramme Temps-fréquence.....	117
Figure 3.5 : Mesure d'un mode dans le RP (ici le mode 1 à 30Hz). Notez au passage que les lignes diagonales sont légèrement ondulées. ....	118
Figure 3.6 : Le taux RR, pour tous les échantillons de la campagne n°2. ....	119
Figure 3.7 : Changement structurel provoqué par le traitement Téflon©, on peut voir que sur le TSB-T le tissage s'est resserré, la structure est plus dense.. ....	120
Figure 3.8 : Le diamètre d'espace de phase comparé à l'Entropie de Shannon d'une part et du plus grand exposant de Lyapunov d'autre part. ....	124

## Liste des Tableaux

Tableau 2.1 : Structures et composition des cachemires .....	66
Tableau 2.2 : Structure et composition des lingettes.....	67
Tableau 2.3 : Structure et composition des non-tissés bicouches.....	68
Tableau 2.4 : Structure et composition des papiers.....	69
Tableau 2.5 : Description des statistiques de la RQA. ....	73
Tableau 3.1 : Modification du contact dynamique quand les propriétés des surfaces changent. ....	127

## Annexe A

Nous présentons dans cette section les fichiers code Matlab ainsi que leur explication de la méthode de résolution « The event Driven Method » appliquée à la résolution du modèle de contact fibreux que nous avons présenté au Chapitre 2.

### A1. Comment utiliser le code Matlab, application sur un exemple simple

Nous avons présenté dans le Chapitre 1 une méthode de résolution des systèmes de Filippov. Nous en avons montré l'exemple dans le cas d'une unique discontinuité sur un oscillateur de frottement. Le code est constitué d'un ensemble de fichiers Matlab que nous allons décrire ici. Ces fichiers sont basés sur des exemples cités dans l'article de Piironen [PK08].

Le programme consiste en 3 fichiers principaux :

- `run_oscillator.m`
- `filippov.m`
- `vectorfields.m`
- `pfunction.m` [optionnel]

Le fichier `run_oscillator.m` est le programme principal dans lequel différents paramètres sont définis par l'utilisateur :

- les paramètres du modèle,
- les conditions initiales,
- les champs vectoriels régularisés,
- le nom du solveur d'équation différentielle ordinaire de Matlab
- les paramètres du solveur (tolérances, erreur, etc...)
- les pas d'intégration en temps,

Comme toute simulation sous Matlab, l'utilisateur doit faire attention au choix des solveurs en choisissant celui qui est le plus adapté au problème. Aussi les erreurs et les tolérances doivent être choisies selon la précision et la rapidité de traitement attendue.

Le fichier `run_oscillator.m` appelle aussi le fichier `filippov.m`, lequel prend en charge la gestion d'évènements (voir 1.7) en appelant la routine interne de Matlab, une fonction détecteur d'évènement. Notons que le fichier `filippov.m` fait aussi appel au solveur d'équation différentielle de Matlab. Dans le fichier de champ vectoriel `vectorfields.m`, lequel est utilisé par `filippov.m`, l'utilisateur définit les différents champs vectoriels  $(F_1, F_2)$ , la fonction définissant la surface de discontinuité  $(H_{12}(x))$ ,

en option l'utilisateur peut éventuellement définir une section de Poincaré. Dans le fichier optionnel `pfunction.m` le fichier définit l'action à entreprendre au niveau de la section de Poincaré.

Avant de continuer nous pouvons remercier les auteurs de ce code : Piironen et al. [PK08] qui ont fait l'effort de rendre ce code aussi transparent que possible pour les utilisateurs novices que nous sommes. Par leur effort d'optimisations, nous pouvons modifier le code et l'adapter à notre cas particulier de manière très aisée.

Nous allons maintenant montrer comment remplir les différents fichiers en utilisant l'exemple de l'oscillateur de frottement présenté au Chapitre 1. Nous rappelons qu'après régularisation nous obtenons le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ F_2(x), & x \in S_2, \end{cases}$$

$$\text{avec } x = (x_1, x_2, x_3)^T, \text{ et } F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \sin(x_3) - F \\ \omega \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \sin(x_3) + F \\ \omega \end{pmatrix}.$$

$F$ , et  $\omega$  sont des constantes. Voici donc la façon dont les différents fichiers doivent être édités :

#### run\_oscillator.m

##### **Choix du solveur d'équation différentielle.**

```
solver = 'ode45';
```

##### **Les propriétés du solveur**

```
opts = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6,'MaxStep', 0.01) ;
```

##### **Le nom du fichier contenant la définition des champs vectoriels.**

```
vfields = 'vectorfields';
```

##### **Le nom du fichier contenant la définition de la section de Poincaré.**

```
pfunction = 'pfunction';
```

##### **Le parameter de Filippov**

```
C = 1;
```

##### **Définition des parameters du modèle.**

```
F = 0.4; omega = 1/3; params = [F,omega];
```

##### **Définition des conditions initiales.**

```
y0 = [1,2,0];
```

##### **Définition de la durée d'intégration.**

```
T = 2*pi/omega*10; tspan = [0,T]; (10 périodes)
```

#### vectorfields.m

##### **Le champ vectoriel sera appelé par la fonction suivante:**

```
function [F1,F2,H,dH,h,hdir] = vectorfields(t,y,params,str)
```

##### **Définition des parameters.**

```
F = params(1);omega = params(2);
```

**Définition du premier champ vectoriel :**  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | H_{12}(x) > 0\}$   
 $F1 = [y(2); -y(1)+\sin(y(3))-F;\omega];$

**Définition du deuxième champ vectoriel :**  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | H_{12}(x) < 0\}$   
 $F2 = [y(2); -y(1)+\sin(y(3))+F;\omega];$

**Définition de la surface de discontinuité :**  $\Sigma_{12} = \{x \in \mathbb{R}^3 | H_{12}(x) = 0\}$   
 $H = y(2);$

**Définition du vecteur normal à la surface de discontinuité: gradient de H.**  
 $dH = [0, 1, 0];$

**Définition de la section de Poincaré [option].**  
 $h = y(3)-2*\pi;$

**Définition de la direction pour la section de Poincaré.**  
 $hdir = 1;$

### pfunction.m

**L'action à la section de Poincaré est appelée par une fonction:**  
 $function [y1] = pfunction(t,y,params)$

**L'action à la section de Poincaré.**  
 $y1 = [y(1),y(2),0];$

Après avoir vu sur l'exemple simple de l'oscillateur de frottement à un degré de liberté, nous allons pouvoir réécrire les fichiers Matlab pour notre modèle du contact fibreux.

## **A2. Code Matlab de notre modèle de contact fibreux.**

### run\_oscillator.m

```
solver = 'ode45';

opts = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6,'MaxStep',0.01);

vfields = 'vectorfields';

pfunction = '';

jacobians='';

C = 1;

u=100;
k1=10000;
c1=0.1;
k2=10000;
c2=0.1;
delta_bar=0.001;
mu=1;
n_a=10;
alpha=0.1;
beta=0.1;
gamma=0.1;
```

## Annexe A

```
m=10;
d_inf=1;
sigma=0.1;
params=[u,k1,c1,k2,c2,delta_bar,mu,n_a,alpha,beta,gamma,m,sigma,d_inf];

y0 = [0,0,0,0,0,0];

T = 15;tspan = [0,T];

[t,y,te,ye,ie,se] =
filippov(vfields,jacobians,pfunction,solver,tspan,y0,params,C,opts);

figure(1)
plot(t,y(:,1),'b')
title('Séparation inter-surfacique')
xlabel('time (t)'), ylabel('d')

figure(2)
plot(t,y(:,3)-y(:,6),'b')
title('Déplacement tangentiel.')
xlabel('time'), ylabel('x')

figure(3)
plot(t,y(:,5),'b')
title('Variable interne Z')
xlabel('time'), ylabel('z')

%figure(3)
%plot(y(:,1),y(:,2),'b')
%title('A phase plot of x_2 versus x_1.')
%xlabel('x_1'), ylabel('x_2')

%figure(4)
%plot(y(:,3),y(:,2),'b')
%title('A plot of x_2 versus the scaled time t.')
%xlabel('scaled time (x_3)'), ylabel('x_2')
```

### vectorfields.m

```
function [F1,F2,H,dH,h,hdir] = vectorfields(t,y,params,str)

%Parameters
u=params(1);
k1=params(2);
c1=params(3);
k2=params(4);
c2=params(5);
delta_bar=params(6);
mu=params(7);
n_a=params(8);
alpha=params(9);
beta=params(10);
gamma=params(11);
m=params(12);
```

## Annexe A

```
sigma=params(13);
d_inf=params(14);

F1 = [y(2);(1/m)*(n_a*(exp(-y(1)/sigma)-1)-k2*y(1)-
c2*y(2)+n_a*(beta*y(4)^2*sqrt(1-y(1)/d_inf)*exp(-y(1)/sigma)-
gamma*y(4)*y(2)*exp(-y(1)/sigma)));y(4);(1/m)*(k1*(y(6)-y(3))+c1*(u-y(4))-
n_a*(mu*exp(-y(1)/sigma)*y(5)/delta_bar+alpha*y(4)^2*(1-y(1)/d_inf)*exp(-
y(1)/sigma )));y(4)*(1-y(5)/delta_bar);u];

F2 = [y(2);(1/m)*(n_a*(exp(-y(1)/sigma)-1)-k2*y(1)-
c2*y(2)+n_a*(beta*y(4)^2*sqrt(1-y(1)/d_inf)*exp(-
y(1)/sigma)+gamma*y(4)*y(2)*exp(-y(1)/sigma)));y(4);(1/m)*(k1*(y(6)-
y(3))+c1*(u-y(4))-n_a*(mu*exp(-y(1)/sigma)*y(5)/delta_bar-alpha*y(4)^2*(1-
y(1)/d_inf)*exp(-y(1)/sigma )));y(4)*(1+y(5)/delta_bar);u];

H = y(4);

dH = [0,0,0,1,0,0];

h=y(6);

hdir=1;
```

### filippov.m

```
function [tvect,yvect,te,ye,ie,se] =
filippov(vfields,jacobians,pfunction,solver,tspan,y0,params,C,inopts)
% Version 2006-07-12
% [tvect,yvect,te,ye,ie,se] =
filippov(vfields,jacobians,pfunction,solver,tspan,y0,params,C,inopts)

t1 = tspan(end);
t0 = tspan(1);

[state,dir] = findstate(vfields,jacobians,t0,y0,params);

options = odeset(inopts,'Events',@fevents);

yvect = [];tvect = [];
te = []; ye = []; ie = []; se = [];
stopit = 0;

while ~stopit
    [t,y,TE,YE,IE] =
feval(solver,@filippovfunc,tspan,y0,options,vfields,jacobians,params,C,stat
e,dir);

    y0 = y(end,:);

    yvect = [yvect;y];
    tvect = [tvect;t];
    te = [te;TE];
    ye = [ye;YE];

    tspan = [t(end),t1];

    if ~isempty(IE) & (t(end)~=t1)
        for k = 1:length(IE)
```

```

ie = [ie;IE(k)];
if IE(k) == 4
    if ~isempty(pfunction)
        y0 = feval(pfunction,t,y0,params);
    end
else
    switch 1
        case state(3)
            switch IE(k)
                case {2,3}
                    state(IE(k)-1) = -state(IE(k)-1);
                    state(3) = -state(3);
                    state(4) = -state(4);
                    state(5) = -state(5);
                    dir([1,IE(k)]) = -[1,dir(IE(k))];
                case 5,

                    otherwise
                        disp('Error, there is something wrong with
the event in filippov')
            end
        case state(4)
            switch IE(k)
                case 1,
                    state(1)=-state(1);
                    state(2)=-state(2);
                    dir(IE(k)) = -dir(IE(k));
                case {2,3}
                    state(4) = -state(4);
                    state(5) = -state(5);
                    dir(IE(k)) = -dir(IE(k));
                case 5,

                    otherwise
                        disp('Error, there is something wrong with
the event in filippov')
            end
        case state(5)
            switch IE(k)
                case 1,
                    state(1)=-1;
                    state(2)=-1;
                    state(3)=-state(3);
                    dir(IE(k)) = -dir(IE(k));
                case {2,3}
                    state(4) = -state(4);
                    state(5) = -state(5);
                    dir(IE(k)) = -dir(IE(k));
                case 5,

                    otherwise
                        disp('Error, there is something wrong with
the event in filippov')
            end
        otherwise
            disp('Error, There is something wrong with the
state vector in filippov')
    end
end
se = [se;state];
end

```

```

elseif ~isempty(IE)
    stopit =1;
    ie = [ie;IE];
    se = [se;state];
else
    stopit =1;
end
end
end

%----- findstate -----

function [state,dir] = findstate(vfields,jacobians,t0,y0,params);

state = -1*ones(1,5);

[F1,F2,H,dH,h1,hdir] = feval(vfields,t0,y0,params, '');

dHF1 = dH*F1;
dHF2 = dH*F2;

dir = [-sign(H),-sign(dHF1),-sign(dHF2)];

if H > 0
    state(1) = -state(1);
elseif H < 0
    state(2) = -state(2);
elseif sign(dHF1)*sign(dHF2) < 0
    state(3) = -state(3);
else
    if sign(dHF1) > 0
        state(1) = -state(1);
    else
        state(2) = -state(2);
    end
end

if sign(dHF1)*sign(dHF2) > 0
    state(4) = -state(4);
elseif sign(dHF1)*sign(dHF2) < 0
    state(5) = -state(5);
else
    if isempty(jacobians)
        state(4) = -state(4);
    else
        [J1,J2,d2H] = feval(jacobians,t0,y0,params, '');
        if dHF1 == 0
            HxF1x_F1Hxx = dH*J1 + F1'*d2H;
            sig = sign(HxF1x_F1Hxx*F1)*sign(dHF2);
            dir(2) = -sign(HxF1x_F1Hxx*F1);
        elseif dHF2 == 0
            HxF2x_F2Hxx = dH*J2 + F2'*d2H;
            sig = sign(HxF2x_F2Hxx*F2)*sign(dHF1);
            dir(3) = -sign(HxF2x_F2Hxx*F2);
        else
            disp('ERROR: Something is wrong in filippov:findstate')
            sig = 1;
        end

        if sig < 0
            state(5) = -state(5);
        else

```

## Annexe A

```

        state(4) = -state(4);
    end
end
end

%----- filippovfunc -----
function dy = filippovfunc(t,y,vfields,jacobians,params,C,state,dir);
dy=zeros(length(y),1);
[F1,F2,H,dH,h1,hdir] = feval(vfields,t,y,params,'');
switch 1
    case state(1)
        % Vector field in region 1
        F = F1;
    case state(2)
        % Vector field in region 2
        F = F2;
    case state(3)
        % Vector field on sliding region

        Fa = 0.5*F1;
        Fb = 0.5*F2;
        dHF1 = dH*F1;
        dHF2 = dH*F2;
        Hu = -((dHF1+dHF2)/(dHF2-dHF1));
        F = (Fa + Fb) + Hu*(Fb - Fa) - C*H*dH';
    otherwise
        disp('Error, there is something wrong with the state vector in
filippov:filippovfunc')
end

dy = F;

%----- filippovevents -----
function [value,isterminal,direction] =
fevents(t,y,vfields,jacobians,params,C,state,dir);
[F1,F2,H,dH,h,hdir] = feval(vfields,t,y,params,'');
dHF1 = dH*F1;
dHF2 = dH*F2;
value = [H,dHF1,dHF2,h];
direction = [dir,hdir];

switch 1
    case {state(1),state(2)}
        direction(1) = -state(1);
    case state(3)
        value(1) = 1;

        if isempty(jacobians)
            value = [value,1];
            direction = [direction,0];
        else
            [J1,J2,d2H] = feval(jacobians,t,y,params,'');

```

```

dHF1_p_dHF2 = dHF1+dHF2;
dHF2_dHF1   = dHF2-dHF1;

Hu    = -((dHF1_p_dHF2)/(dHF2_dHF1));

F2_F1 = F2-F1;
F2_F1_2 = 0.5*F2_F1;
F1_p_F2 = F1+F2;
F1_p_F2_2 = 0.5*F1_p_F2;

J2_J1 = J2-J1;
J2_J1_2 = 0.5*J2_J1;
J1_p_J2 = J1+J2;
J1_p_J2_2 = 0.5*J1_p_J2;

dHu = -(((F1_p_F2')*d2H+dH*(J1_p_J2))*(dHF2_dHF1)-...
        ((F2_F1')*d2H +
dH*(J2_J1))*(dHF1_p_dHF2))/(dHF2_dHF1^2);
F    = (F1_p_F2_2) + (F2_F1_2)*Hu - C*H*dH';

dHuF = dHu*F;
value = [value,dHuF];
direction = [direction,0];

end

otherwise
    disp('ERROR: Wrong event in filippov:fevents')
end

isterminal = [1,1,1,1,0];

```

## Annexe B

Dans cette partie nous présentons l'étude générale de stabilité d'un système masse-ressort. Le lecteur trouvera de plus amples détails dans [NMC79]. Cette étude est utile dans la compréhension de la Section 1.3 sur les instabilités vibratoires. Nous considérons un système masse-ressort classique pouvant être soumis à divers type de sollicitations. L'équation dynamique d'un tel système s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(x, \dot{x}, t) \quad (\text{B.1})$$

Pour étudier la stabilité d'un tel système, nous nous plaçons autour d'un état  $(x_0, \dot{x}_0)$  position d'équilibre du système (statique par exemple) puis nous effectuons une linéarisation du système par rapport à chacune de ses variables au point donné. Une approximation de  $F$  au voisinage de  $(x_0, \dot{x}_0)$  est alors son développement par série de Taylor :

$$F(x, \dot{x}, t) = F_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t)(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (\text{B.2})$$

en injectant l'approximation de  $F$  dans (B.1), l'équation devient :

$$m\ddot{x} + \left[ c - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t) \right] \dot{x} + \left[ k - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) \right] x = 0 \quad (\text{B.3})$$

Nous pouvons reconnaître dans (B.3) une équation linéaire, homogène du second ordre à coefficients constants. Dans le cas  $m > 0$  d'après [NMC79] nous obtenons la condition de stabilité suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(x, \dot{x}, t) \text{ stable} \Leftrightarrow \begin{cases} c > \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t) \\ k > \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

C'est la condition que nous avons appliquée à la Section 1.3.1 pour discuter de la stabilité du système modèle simple de *stick-slip*.

## Annexe C

Dans cette annexe nous abordons la définition de la dérivation au sens de Lie. Nous avons abordé ce concept à la Section 1.7. La *Dérivée de Lie* est une opération de différenciation sur les champs de tenseurs et les formes différentielles. C'est une généralisation de la *Dérivation Directionnelle* d'une fonction sur une variété différentielle. Nous allons donc commencer par introduire cette dernière notion avant d'introduire la *Dérivée de Lie*.

### D1. Dérivée directionnelle

En analyse, la dérivée directionnelle est un outil d'analyse à une variable applicable aux fonctions à plusieurs variables. Il permet de décrire les variations infinitésimales d'une fonction dans une direction particulière. On peut définir cette dérivée dans le cadre des espaces vectoriels normés ou des variétés différentielles.

#### D1.1. Dérivation pour une fonction définie sur un ouvert d'un espace vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, les éléments de  $E$  sont appelés *vecteurs*. Soit  $U$  un ouvert de  $E$ , les éléments de  $U$  sont appelés *points*. Soit  $f$  une fonction définie sur  $U$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  :  $f : U \rightarrow F$ . Soient enfin  $u$  un point de  $U$  et  $h$  un vecteur de  $E$ .

Nous définissons alors la dérivée de  $f$  au point  $u$  selon le vecteur  $h$ , si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction de la variable réelle  $t \rightarrow f(u + th)$  :

$$D_h f(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} \quad (\text{D1.1})$$

Si  $h$  est le vecteur nul, cette dérivée directionnelle existe toujours et a la valeur nulle. Dans la suite nous supposons que  $h$  n'est pas nul.

Lorsque l'espace  $E$  est de dimension finie  $n$  et muni d'une base  $\{e_i\}$ , la fonction  $f$  peut être vue comme une fonction de  $n$  variables réelles, et le calcul des dérivées directionnelles selon les vecteurs de base correspondent au calcul des dérivées partielles de  $f$  :

$$D_{e_i} f(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \quad (\text{D1.2})$$

En remplaçant  $h$  par un vecteur colinéaire  $\alpha h$ , le calcul de dérivée est identique à la multiplication par le facteur  $\alpha$  près :

$$D_{\alpha h} f(u) = \alpha D_h f(u) \quad (\text{D1.3})$$

Par conséquent l'existence en un seul point de la dérivée selon un vecteur est suffisant pour garantir l'existence de celle-ci selon tout vecteur de même direction. On parle alors de **dérivée directionnelle de  $f$  au point  $u$  dans la direction de  $h$**  lorsque le vecteur  $h$  est unitaire.

Si la fonction  $f$  est différentiable au point  $u$ , alors elle admet des dérivées en ce point dans la direction de tout vecteur. Cette dérivée se calcule à partir de l'application différentielle en  $u$  (notée  $df(u)$ ) par l'application de la formule :

$$D_h f(u) = (df(u))(h) \quad (D1.4)$$

L'application ici (Eq. D1.4) est linéaire, en effet :

$$D_{h+h'} f(u) = D_h f(u) + D_{h'} f(u) \quad (D1.5)$$

Enfin si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$  muni d'une base  $\{e_i\}$ , il est possible de calculer toutes les dérivées directionnelles en termes de dérivées partielles :

$$D_h f(u) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (D1.6)$$

Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien et  $f$  une application différentiable à valeurs réelles, il est possible d'utiliser le *gradient* de  $f$  pour exprimer la dérivée directionnelle :

$$D_h f(u) = \langle \nabla f(u) | h \rangle \quad (D1.7)$$

Lorsque  $f$  présente un extrémum local en un point  $u$  d'un ouvert, le gradient est nul en ce point, ainsi que toutes les dérivées directionnelles.

## D1.2. Dérivée directionnelle pour les variétés

### D1.2.1. Définition

Soit  $f$  une fonction numérique sur une variété différentielle  $M$ . Avec une définition analogue à la précédente, nous pouvons introduire la dérivée de  $f$  en un point  $m$  de  $M$  et dans la direction d'un vecteur tangent  $h$  en  $m$  à la variété. Comme la notion de droite dirigée par  $h$  n'a plus de sens, il faut la remplacer par une courbe passant par  $m$  et de vecteur tangent  $h$  en ce point.

Soit  $\gamma$  une courbe tracée sur  $M$ , continûment dérivable, vérifiant  $\gamma(0) = m$  et  $\gamma'(0) = h$ . Si la fonction  $f \circ \gamma$  admet une dérivée en 0, elle est appelée dérivée de  $f$  au point  $m$  dans la direction de  $h$ .

### D1.2.1 Extension : Dérivée de Lie

Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur la variété  $M$  et si  $f$  est une fonction numérique  $C^\infty$  sur  $M$ , il est possible de calculer les dérivées partielles de  $f$  en chaque point  $p$  selon le vecteur  $X(p)$ . La fonction obtenue en considérant toutes ces dérivées est notée  $X \cdot f = \Gamma_X f$ , c'est la dérivée de Lie de  $f$  par  $X$ .

**Sources :**

1. Dérivée directionnelle. (2010, août 25). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. Page consultée le 14:42, octobre 25, 2010 à partir de [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9riv%C3%A9e\\_directionnelle&oldid=56487922](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9riv%C3%A9e_directionnelle&oldid=56487922).
2. F. Reinhardt, H. Soeder, *Calcul différentiel dans Alta des mathématiques*, éd. Pochothèque, p. 321.
3. Michel Berliaire, *Introduction à l'optimisation différentiable*, éd. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006, p.34.

