Propriétés combinatoires et modèle-théoriques des groupes

Azadeh Neman

Université Claude Bernard – Lyon 1

N^o d'ordre: 098 - 2009 **Année 2009**

PROPRIETES COMBINATOIRES ET MODELE-THEORIQUES DES GROUPES

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 7 juillet 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Claude Bernard – Lyon 1

(arrêté du 7 août 2006)

Spécialité: Mathématiques (CNU25)

par

Azadeh NEMAN

Composition du jury

Rapporteurs :	M. Alexandre Borovik University of Manchester	
	Mme. Katrin Tent Universität Bielefeld	
Examinateurs :	Mme. Zoé Chatzidakis	Université Paris 7
	M. Eric Jaligot	Université Claude Bernard Lyon 1
	M. Anand Pillay	University of Leeds
	M. Bertrand Rémy	Université Claude Bernard Lyon 1
	Mme. Katrin Tent	Universität Bielefeld
Directeur de thèse :	Eric Jaligot	Universitè Lyon 1

Institut Camille Jordan — UMR 5208

A mes parents

برتر ز سپهر خاطرم روز نخست

لوح و قلم و بهشت و دوزخ می جست

پس گفت مرا معلم از رای درست

لوح وو قلم و بهشت و دوزخ با تست

حکیم عمر خیام نیشابوری

Pen, tablet, heaven and hell I looked to see,
Above the skies, from all eternity;
At last the master sage instructed me,
"Pen, tablet, heaven and hell are all
in thee."

English translation from Persian by
Edward Henry Whinfield 1883

Au delà de la Terre,
au delà de l'Infini,
Je cherchais à voir le Ciel et l'Enfer.
Une voix solennelle m'a dit :
"Le Ciel et l'Enfer sont en toi."

Traduits du Persan par
Franz Toussai

Remerciements

It is never easy to thank all those who help one to get through big transitions in life and my years in France certainly qualify for such a description. They were a transition both in scientific terms and social. The richness of the MATHLOGAPS and MODNET scientific circles offered great opportunities for progress to students like me while the socio-political active environment of my surroundings connected me back to my roots. I am hence indebted to many.

First and foremost my thanks go to my supervisor Eric Jaligot whose patience and knowledge gave me not only a Ph.D. subject but also ideas and motivation for many years of research after graduation. I would also like to thank Frank Wagner who kindly offered me the opportunity to study in Lyon in such a lively and dynamic group.

I am grateful to Amador Martin-Pizarro for his friendship and support both in the university life and outside. The workshops we held with him and Thomas Blossier were of enormous value to my work. I should not forget to mention Juan Pons Llopis who was better than any mathematical logic encyclopaedia during my first year. I thank them all from the bottom of my heart for the friendly welcoming environment they created and for the knowledge and help they offered.

I am grateful to Alexandre Borovik and Katrin Tent for accepting to be the external examiners of my thesis and for their valueless reports. I would also like to express my gratitude to Zoé Chatzidakis, Anand Pillay, Bertrand Rémy and again Katrin Tent for accepting the task of being a member of the jury. The wide range of their expertise makes their presence and remarks even more constructive and valuable to me.

The years in the faculty here would have been a lot less easy had it not been for efficiency and kindness of Monique Gaffier, not to mention the hard work of Simona Biagioli and Sybil Caraboeuf.

I arrived at Lyon not being able to make a French phrase having to find an apartment, to open a bank account and do all those daunting tasks of life. So when Minoo Eghbal so generously and kindly offered her time, advice and help with all administrating matters and welcomed me in Lyon, I was more than grateful. The same goes to my friends Anthony Kieken and Cécile Mercadier who patiently went through my French writings, correcting my mistakes and giving me invaluable feedback. Words are not enough to express my gratitude for the kindness of their hearts and minds.

In a more private note, my biggest thanks goes to my family and my closer than good friends Louise Andersen, Farzin Akbari Aghdam and Stephanie Gil for their support and for believing in me more than I ever deserved. But my most special thoughts are for my father whose illness prevented him from being present at my defence. Disabled or in good health, he has been my rock throughout my life. His honesty, sincerity and believes are my guidance and my passion.

Histoire et motivation

Tout ce que l'on a fait ici a été motivé par la conjecture d'algébricité de G. Cherlin (en 1975) et B. Zilber (en 1977)

> **Conjecture principale (Cherlin-Zilber) :** Un groupe rangé simple est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Ceci est un corollaire du *Principe du Nirvana* disant : "Aucun événement fâcheux ne peut se produire dans un univers rangé." [45]. Un groupe qui contredirait cette conjecture, s'il existe et s'il est d'un certain type, est appelé un "mauvais groupe". On suit les travaux motivés par cette conjecture, depuis 15 ans environ.

Effectivement un mauvais groupe simple de rang de Morley 3 est un groupe CSA [9, 42]. Cela fonctionne aussi dans le sens inverse. À savoir un groupe CSA^* non-abélien de rang de Morley fini contient un groupe simple mauvais. Alors le problème d'existence de mauvais groupes de rang 3 (après les recherches faites par A. Borovik, G. Cherlin, L. J. Corredor, E. Jaligot, A. Nesin, A. Ould-Houcine, B. Poizat et d'après un conseil de B. Poizat) se résume à comprendre la classe de groupes CSA existentiellement clos.

Définie par O. Veblen (qui a en fait pris un terme de E. Kant), une théorie ayant seulement un modèle, à isomorphisme près, est appelée *catégorique*. Il s'ensuit donc, d'après Löwenheim-Skolem, qu'une théorie du premier ordre est catégorique si et seulement si elle n'a pas de modèles infinis. Effectivement si T est une théorie du premier ordre qui a des modèles infinis, alors la forme la plus forte de catégoricité possible pour T est dans certains cardinaux infinis λ. Si T a exactement un modèle de cardinalité λ, à isomorphisme près, on dit alors qu'elle est *λ-catégorique*. On se pose la question d'existence de tels cardinaux et leurs valeurs possibles pour une théorie T donnée. En 1954 J. Łoś a remarqué, pour les théories complètes au-dessus de langages dénombrables avec au minimum un modèle infini, qu'il pouvait seulement trouver 4 cas possibles de catégoricité. À savoir pour κ un cardinal :

- soit T est totalement catégorique, i.e. T est κ-catégorique pour tous les cardinaux infinis κ,
- soit T est infiniment catégorique, i.e. T est κ-catégorique si et seulement si κ est un cardinal infini et non-dénombrable.
- soit T est dénombrablement catégorique, i.e. T est κ-catégorique si et seulement si κ est un cardinal dénombrable.
- ou bien T est catégorique en aucun cardinal infini.

J. Łoś a donc demandé : "si une théorie est catégorique dans un cardinal infini, alors est-elle catégorique dans tous les cardinaux infinis ?". En 1963 Morley a trouvé une réponse positive à cette question et a montré que les 4 cas mentionnés ci-dessus sont les seuls possibles. Une des idées fondamentale d'analyse de Morley était que les modèles d'une théorie infiniment catégorique, sans modèles finis, ont un nombre minimal des types d'éléments. Ces idées ont été par la suite étendues et affinées par S. Shelah entraînant la théorie de la stabilité et celle de la classification. Exemples de théories $\aleph_1$-catégorique :

- une théorie dans un langage vide avec seulement les modèles infinis,
- la théorie des groupes abéliens infinis dans lesquels chaque élément a un ordre p, pour un entier premier p, ou bien celle des groupes abéliens divisibles sans torsion.
- la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique donnée.

Pour le deuxième cas, il faut noter que chaque groupe abélien divisible sans torsion est une somme directe des copies de $(\mathbb{Q}, +)$. Il s'ensuit que le type d'isomorphisme d'un tel groupe G est déterminé par le nombre de copies des rationnels utilisées dans sa décomposition. Si G est de cardinalité infini $\kappa > \aleph_0$, alors dans la décomposition de G on trouve κ copies des rationnels. Donc deux groupes abéliens divisibles sans torsion infini et non-dénombrable sont isomorphes.

En topologie les *caractéristiques cardinales* sont les caractéristiques d'un espace préservées par les homomorphismes formulés par les cardinaux et les familles d'ensembles. Effectivement dès qu'une théorie est infiniment catégorique, ses modèles sont déterminés par une caractéristique cardinale qui est une notion de dimension sur un de ses ensembles définissables et par rapport à une relation de dépendance. Le travail suivant le concept de catégoricité dans la logique du premier ordre a révélé une base sous-jacente de cette théorie : la classe des structures *fortement minimales* . À la fin des années 1970 ou au début des années 1980, B. Zilber conjecturait que les géométries des ensembles fortement minimaux émanaient toutes des exemples existants.

> **Trichotomie de Zilber :** Soit X un ensemble fortement minimal. Alors précisément un des cas suivants est vrai pour X.
> (i) X a une géométrie triviale dans le sens que la clôture algébrique (au-dessus d'un modèle de la théorie de X) définit une pré-géométrie dégénérée. À savoir, pour chaque sous-ensemble A de X on a $acl(A) = \bigcup_{a \in A} acl(\{a\})$
> (ii) X a essentiellement la géométrie d'un espace vectoriel.
> (iii) X a une géométrie bi-interprétable avec celle d'un corps algébriquement clos.

Les cas particuliers de cette conjecture ont été démontrés depuis [22]. Cette conjecture avait un grand impact dans la théorie des modèles même si elle a été réfutée par E. Hrushovski [21]. La méthode créée par Hrushovski dans [21] se compose de la construction d'une tour de théories et puis d'un "collapse" de celles-ci. On invite le lecteur à consulter [14] pour une explication plus claire de l'idée.

En 2006 A. Baudisch, M. Hils, A. Martin Pizarro et F.O. Wagner ont montré l'existence d'un mauvais corps en utilisant la méthode de Hrushovski [2]. (Un mauvais corps est un corps K de rang de Morley 2 ayant un sous-groupe définissable de K^* de rang de Morley 1.)

> **Question :** Est-il possibile de trouver un mauvais groupe par la méthode de Hrushovski ?

Pendant des années, les tentatives ont échoué pour trouver un mauvais groupe par cette méthode. En 1996 Baudisch a construit un groupe avec une géométrie non localement modulaire [1]. Malheureusement ce n'est pas un mauvais groupe. Il s'agit d'un groupe d'exposant p et de classe de nilpotence 2 ; il est de rang de Morley 2 et son centre est de rang de Morley 1. On a essayé de continuer d'une manière similaire mais cette opération s'est trouvée bien difficile. Eventuellement une pré-géométrie qui peut être utilisée dans la méthode de Hrushovski appliquée aux groupes, si elle existe, doit refléter le rang de Morley 3 d'un mauvais groupe.

Alors on commence à étudier d'autres stratégies. Cela signifie que l'on doit bien comprendre la classe qui contiendrait les mauvais groupes, i.e. celle des groupes CSA existentiellement clos pour verifier s'ils contiennent des groupes qui sont potentiellement mauvais. On doit aussi bien comprendre les constructions de nouveaux groupes à partir de quelques groupes CSA donnés.

Table des matières

Chapitre 1

Théorie des modèles

1.1 Préliminaires

Un *langage*, $\mathcal{L}$, est l'union (disjointe) d'ensembles $\mathcal{C}$, de constantes, $\mathcal{F}$, de symboles de fonctions et $\mathcal{R}$, de symboles de relations. Un entier n, qui s'appelle l'*arité*, est associé à chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $R \in \mathcal{R}$ indiquant le nombre d'arguments de celle-ci.

Soit M un ensemble quelconque. On construit une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ de domaine M par l'interprétation des ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}$ dans M. Avec cette définition d'un langage et d'une structure, les $\mathcal{L}$-termes sont définis de manière récursive comme suit.

- chaque constante et chaque variable de $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{L}$-terme.
- si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est aussi un $\mathcal{L}$-terme.

Une $\mathcal{L}$-formule *atomique* est une expression de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes. La collection des $\mathcal{L}$-formules est définie de manière récursive comme suit.

- chaque $\mathcal{L}$-formule atomique est une $\mathcal{L}$-formule.

– si φ et ψ sont des $\mathcal{L}$-formules, alors leurs combinaisons booléennes sont des $\mathcal{L}$-formules aussi.

– si φ est une $\mathcal{L}$-formule et x est une variable, alors les quantifications $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont les $\mathcal{L}$-formules.

De plus on peut étendre l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}$ par une réunion de nouvelles constantes C avec $\mathcal{C}$. Dans ce cas là les fomules définies ci-dessus seront les $\mathcal{L}(C)$-formules. Les variables d'une formule peuvent être reliées aux quantificateurs ; si ce n'est pas le cas on dit qu'elles sont libres. Une $\mathcal{L}$-formule sans variable libre est un *énoncé*. Les énoncés consistants et déductivement clos de $\mathcal{L}$ se regroupent, formant une $\mathcal{L}$-*théorie*. Si cela ne cause aucune confusion on écrit simplement une *théorie*. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ qui satisfait une $\mathcal{L}$-théorie T est un modèle de T. On le dénote par $\mathcal{M} \models T$. Une classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures est *axiomatisable* s'il existe un ensemble Σ d'énoncés sans paramètre tel que $\mathcal{K}$ est exactement l'ensemble des structures satisfaisant Σ.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle d'une théorie T et $A \subset M$; on dit que φ est une formule sur A si c'est une formule dans $\mathcal{L}(A)$. On note par $\varphi(\mathcal{M})$ l'ensemble

$$\{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})\},$$

où φ a n variables. Parallèlement un ensemble $X \subset M^n$ est *définissable sur A dans $\mathcal{M}$* si $X = \psi(\mathcal{M})$ pour une formule quelconque ψ au-dessus de A ayant n variables libres. On peut dire aussi que X est A-définissable dans $\mathcal{M}$. Par ailleurs une fonction $f : A \longrightarrow B$ entre deux sous-ensembles (manifestement définissables) de M est $\mathcal{M}$-*définissable* si le graphe de f, i.e. le sous-ensemble $\{(a, f(a)) : \ a \in A\}$ de l'ensemble $A \times B$, est $\mathcal{M}$-définissable.

Parfois on trouve, dans la base d'un modèle, des ensembles naturels qui ne sont pas directement définissables dans celui-ci mais qui sont des quotients de sous-ensembles définissables par des relations d'équivalence définissables.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathcal{M}$ un modèle et soit A un sous-ensemble définissable de M^n et soit $\equiv$ une relation d'équivalence définissable sur A. Alors toutes les combinaisons booléennes des ensembles qui sont de la forme $A/\equiv$ sont* $\mathcal{M}$-interprétables*.*

Par exemple si H est un sous-groupe normal et définissable d'un groupe G, le groupe G/H n'est pas une structure définissable dans G. Mais elle reste une structure G-interprétable. Une fonction $f : A \longrightarrow B$ entre deux sous-ensembles $\mathcal{M}$-interprétables de M est appelée $\mathcal{M}$-interprétable si son graphe l'est.

Un *univers* est une collection non-vide $\mathcal{U}$ d'ensembles interprétables qui satisfait les axiomes suivants.

U1- *Clôture par opérations booléennes :* Si A et B sont deux ensembles interprétables, alors leurs combinaisons booléennes $A \cap B, A \cup B$ et $A \setminus B$ sont aussi interprétables.

U2- *Clôture par produit :* Si A et B sont deux ensembles interprétables, alors leur produit cartésien, $A \times B$, les deux projections canoniques

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \text{ et } \pi_2 : A \times B \longrightarrow B,$$

ainsi que les images de chaque π_i, $i = \{1, 2\}$ de sous-ensembles interprétables de $A \times B$, sont interprétables. La diagonale $\{(a, a) : a \in A\}$ de $A \times A$ est aussi interprétable.

U3- *Ensembles finis :* Si A est interprétable et $a \in A$, alors le singleton $\{a\}$ l'est aussi.

U4- *Factorisation :* Si $E(x, y)$ est une relation d'équivalence interprétable sur un ensemble interprétable A, alors l'ensemble A/E des classes d'équivalence et la surjection canonique $A \longrightarrow A/E$ sont interprétables.

Maintenant on peut parler d'un univers "rangé" dans lequel chaque ensemble interprétable sera attaché à un entier, qui se comporte comme sa dimension. Soit $\mathcal{U}$ un univers. Une fontion $rg : \mathcal{U} \setminus \varnothing \longrightarrow \mathbb{N}$ est appelée un *rang* si les axiomes suivants sont satisfaits pour chaque ensemble interprétables A et B de $\mathcal{U}$. Par souci de simplicité, on pose $rg(\varnothing) = -1$.

R1- *Définition (monotonicité) du rang :* $rg(A) \geq n + 1$ si et seulement s'il existe une infinité de sous-ensembles interprétables de A non vides, deux-à-deux disjoints et de rangs supérieurs ou égaux à n.

R2- *Définissabilité du rang :* Si f est une fonction interprétable de A dans B, alors l'ensemble $\{b \in B : rg(f^{-1}(b)) = n\}$ est interprétable pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

R3- *Additivité du rang* Si f est une surjection interprétable de A dans B et si $rg(f^{-1}(b))$ est égal à un entier n pour chaque $b \in B$, alors $rg(A) = rg(B) + n$.

R4- *Elimination des quantificateurs infinis :* Pour toute fonction interprétable f de A dans B, il existe un entier m tel que, pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b)$ soit infini dès qu'il contient m éléments distincts.

On fixe un univers $\mathcal{U}$ avec un rang rg. On trouve que

Fait 1.1.2 *[3, Lemmes* 4.8 *et* 4.9*] Soient A et B deux ensembles interprétables de $\mathcal{U}$. Alors :*
(i) Si $A \neq \varnothing$, alors $rg(A) = 0$ si et seulement si a est fini.
(ii) Si $A \subseteq B$, alors $rg(A) \leq rg(B)$.
(iii) $rg(A \cup B) = max\{rg(A), rg(B)\}$.
(iv) Si $f : A \longrightarrow B$ est une surjection, alors $rg(A) \leq rg(B) + n$ où $n = max_{b \in B}\{rg(f^{-1}(B))\}$.

Si B est un sous-ensemble interprétable d'un ensemble interprétable A, on dit qu'il est *générique* dans A si $rg(B) = rg(A)$.

Fait 1.1.3 *[44, Lemme* 2.5*] Soit G un groupe rangé. Une partie définissable A de G est générique si et seulement si G est recouvert par un nombre fini de translatés de A.*

De plus A est dit de *degré* 1 si $rg(B) < rg(A)$ ou $rg(A \setminus B) < rg(A)$ pour chaque sous-ensemble interprétable B de A. On dit que A est de degré d s'il est une réunion de d sous-ensembles interprétables de rang égal au rang de A et de degré 1. Chaque ensemble interprétable A a un unique degré que l'on note $deg(A)$. Clairement le degré d'un ensemble fini non vide interprétable est le nombre de ses éléments.

Un ensemble consistant de formules p dans n variables $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un *n-type*. Manifestement la consistance de p est vérifiée relativement à une théorie T. Cette notion peut être relativisée au-dessus d'un ensemble de paramètres. Étant donné A, un sous-ensemble de M, un ensemble consistant de formules au-dessus de A est un *n-type sur* A dans la théorie de $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M})$. Clairement un type d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ n'est qu'un ensemble de $\mathcal{L}(M)$-formules cohérent avec la théorie complète de $\mathcal{L}(M)$, $TH(\mathcal{M}, M)$ et qui a un nombre fini de variables. On dénote par $tp(a/A)$ le type d'un élément de M sur A.

Définition 1.1.4 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $p(x)$ un type sur $\mathcal{M}$. On dit que $p(x)$ est* définissable *si pour toute formule $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ de $\mathcal{L}$, il existe une formule*

$d\psi(\bar{y}, \bar{z})$ avec (éventuellement) paramètres dans M et un uplet $\bar{b}$ d'une puissance de M, tel que

$$\text{pour chaque uplet } \bar{a} \text{ d'une puissance de } M, \psi(\bar{x}, \bar{a}) \in p \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models d\psi(\bar{a}, \bar{b}).$$

En d'autres termes la $\mathcal{L}$-structure $(\mathcal{M}, dp)$ est définissable, avec paramètres, dans la structure $\mathcal{M}$. La structure $(\mathcal{M}, dp)$ est construite de base $\mathcal{M}$ dans le langage $\mathcal{L}$ augmenté d'un symbole relationelle $d\phi(\bar{y})$ pour chaque formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ de $\mathcal{L}$.

En particulier soit $\mathcal{M}$ une structure assez grande et saturée, i.e. une structure où tous les types définis au-dessus d'un ensemble de taille $|M|$ sont satisfaits dans $\mathcal{M}$. Alors un *rang de Morley* est une fonction de la classe de tous les types (au-dessus de n'importe quel sous-ensemble de M) dans la classe d'ordinaux qui satisfait :

> $rm(p) \geq \alpha + 1$ si et seulement si p a une extension p' telle que chaque formule $\varphi \in p'$ contient un nombre infini de types deux-à-deux disjoints et contradictoires p_i où $rm(p_i) \geq \alpha$.

On ne travaille que dans un langage du premier ordre. Cela signifie que dans un langage $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, où dans chaque formule il y a un nombre fini de sous-formules liées par les disjonctions et conjonctions, toutes les formules sont finies.

S'il y a un théorème absolument indispensable dans la théorie des modèles, ce serait celui de compacité. Celui-ci est un corollaire du théorème de complétude de Gödel et a été trouvé d'abord par Gödel et aussi indépendamment par Skolem et Mal'cev. Il est basé sur la structure booléenne de la logique propositionelle et donne un instrument pour déterminer si une théorie a, ou n'a pas, une propriété donnée.

> **Compacité(pour la logique du premier ordre)** : Soit T une théorie du premier ordre. Si chaque sous-ensemble fini de formules de T a un modèle, alors T a un modèle.

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Soit $M \subseteq N$ et pour chaque formule φ de $\mathcal{L}$ et uplet $\bar{a}$ de M, si $\varphi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{N}$, alors il est vrai dans $\mathcal{M}$. On dit que $\mathcal{M}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathcal{N}$ ou que $\mathcal{N}$ est une *extension élémentaire* de $\mathcal{M}$.

Supposons que $(X, <)$ est un ensemble ordonné et que k est un entier. On écrit $[(X, k)]^k$ pour l'ensemble de tous les k-uplets $<$-croissants d'éléments de

X. Soit f une application qui a $[(X,k)]^k$ pour domaine. Un sous-ensemble ordonné $(Y,<)$ de $(X,<)$ est *f-indiscernable*, si pour chaque deux k-uplets $<$-croissants $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de Y, on a $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$. En particulier si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure et A un sous-ensemble de M (peut-être vide), un sous-ensemble ordonné de M, $(X,<)$, est dit *A-indiscernable*, si tous les k-uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de X, ont le même type sur A.

1.2 Propriétés modèle-théoriques locales

Pour une propriété arbitraire P de $\mathcal{L}$-structures et une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ on dit que $\mathcal{M}$ a *localement* la propriété P si chaque partie finie de $\mathcal{M}$ a la propritété P. Fixons un langage du premier ordre $\mathcal{L}$. Dans ce qui suit T sera une théorie complète sans modèles finis dans $\mathcal{L}$. Il y a deux propriétés qui nous intéressent particulièrement, les propriétés d'indépendance et d'ordre, et en leur absence, la "NIP" (*dépendance*) et la "NOP" (*stabilité*).

Définition 1.2.1 *Une formule $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ a la* propriété d'indépendance *relativement à T, si pour chaque entier $n<\omega$, T contient l'énoncé*

$$(IP)_T \qquad \exists \bar{x_1}, \ldots, \exists \bar{x_n} \bigwedge_{\sigma \subseteq \{1,\ldots,n\}} (\exists \bar{y}_\sigma) \left(\bigwedge_{i\in\sigma} \varphi(x_i, y_\sigma) \wedge \bigwedge_{i\notin\sigma} \neg\varphi(x_i, y_\sigma) \right)$$

T a la propriété d'indépendance, notée IP, si une telle formule existe.

On peut définir la propriété d'indépendance par rapport à une classe. Si $\mathcal{G}$ est une classe de $\mathcal{L}$-structures, alors on dit que la formule $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ a la *propriété d'indépendance* relativement à $\mathcal{G}$ si pour chaque entier n il existe une structure $G_n \in \mathcal{G}$ et des suites $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ et y_σ, où il y a 2^n indices σ correspondant à l'ensemble des sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$, tels que

$$G_n \models \varphi(x_i, y_\sigma) \text{ si et seulement si } i \in \sigma.$$

La propriété d'indépendance est une propriété symétrique qui coupe un ensemble comme suit.

Fait 1.2.2 *[44, Théorème 12.17] Une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ a, dans une théorie T, la propriété d'indépendance si et seulement s'il existe une suite indiscernable sécable, formée de uplets $\bar{a}_i$ de même longueur que $\bar{x}$, qui est découpée en deux parties cofinales par une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$.*

Cela exprime le fait que la véracité d'une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ est constante dans un modèle quelconque de T sauf pour un ensemble fini d'éléments de celui-ci.

Définition 1.2.3 *Une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ a la* propriété d'ordre*, si pour chaque entier n l'énoncé*

$$(OP)_T \qquad \exists x_1, \ldots, \exists x_n, \exists y_1 \ldots \exists y_n \bigwedge_{i \leq j} \varphi(x_i, y_j) \wedge \bigwedge_{i > j} \neg\varphi(x_i, y_j)$$

est dans T. La théorie T a la propriété d'ordre, notée OP, si une telle formule existe.

On peut également donner une définition de la propriété d'ordre par rapport à une classe $\mathcal{G}$. On dit que la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ a la *propriété d'ordre* relativement à $\mathcal{G}$ si pour chaque entier n il existe une structure $G_n \in \mathcal{G}$ et des suites $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ et $y_1, \ldots, y_j, \ldots$ telles que $G_n \models \varphi(x_i, y_j)$ si et seulement si $i \leq j$.

Plus généralement, la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ a la *propriété d'ordre strict* si on peut trouver un ensemble $\{\bar{b}_i\}$ dans un modèle $\mathcal{M}$ de T, tel que pour les entiers finis n et m, on a

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_n) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_m) \text{ si et seulement si } n < m.$$

Cela signifie que le pré-ordre défini par $\forall \bar{x}, \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{z})$ a des chaînes infinies.

1.3 Dépendance et stabilité

L'absence de la propriété d'ordre est conservée par des combinaisons booléenes et la négation :

Fait 1.3.1 *[61, Lemme 0.2.10] Supposons que φ et ψ n'ont pas la propriété d'ordre. Alors ni la négation $\neg\varphi$ ni $\varphi \vee \psi$, n'ont la propriété d'ordre. En particulier aucune combinaison booléenne de formules sans la propriété d'ordre n'a cette propriété.*

On peut définir la stabilité du point de vue des types. On dénote par $S_n(A)$ l'espace des types complets au-dessus de A.

Définition 1.3.2 *Soit λ un cardinal (infini). Alors une théorie T est* λ-stable *si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T et $A \subseteq M$ avec $|A| \leq \lambda$, $|S_n(A)| \leq \lambda$ pour chaque entier n. Une théorie T n'est pas stable si elle est λ-stable pour aucun cardinal λ.*

En règle générale, une structure est stable s'il n'y a pas "trop" de relations entre ses éléments. S. Shelah a démontré que les propriétés d'indépendance et d'ordre donnent celle de la non stabilité. Un point très intéressant, qui peut expliquer l'engouement exprimé pour la stabilité, ou plutôt pour son absence, est que si une théorie d'un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ n'est pas stable, alors il a 2^κ modèles deux-à-deux non-isomorphes pour chaque cardinalité $\kappa >| \mathcal{L} |$ [55]. Il faut noter que dans les modèles d'une théorie stable, tous les types sont définissables. Une théorie qui satisfait la définition ci-dessus quand $\lambda = \omega$ est appelée *ω-stable*.

Comme on l'a déjà mentionné, dans les modèles d'une théorie infiniment catégorique il existe une relation de dépendance avec une notion correspondante de dimension. Effectivement, c'est la ω-stablité d'une théorie infiniment catégorique qui donne lieu à cette relation de dépendance.

Fait 1.3.3 *[58, Théorèmes 2.2 et 4.7]*

(I) Relativement à une théorie T, une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ n'est pas stable si elle a la propriété d'ordre,

(II) T n'est pas stable si et seulement si elle a la propriété d'indépendance ou la propriété d'ordre strict,

(III) $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ n'est pas stable si et seulement si elle a la propriété d'indépendance ou pour un entier $n < \omega, \eta \in {}^n2$,

$$\psi_\eta(\bar{x}; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = \bigwedge_{l<n} \varphi(\bar{x}; \bar{y}_l)^{\eta[l]}$$

a la propriété d'ordre strict.

Si une théorie a la propriété d'ordre strict alors elle a la propriété d'ordre et donc n'est pas stable. On dit que T a la *dépendance* (*"Not the Independence Property", NIP*), si elle n'a pas la propriété d'indépendance. Mais malheureusement NIP ne donne pas la stabilité. En effet ni l'absence de la propriété d'ordre strict peut impliquer l'absence de la propriété d'indépendance ni vice-versa l'absence de la propriété d'indépendance peut impliquer l'absence de la propriété d'ordre strict. (Même si chacune donne la propriété d'ordre et donc l'absence de la stabilité.) Effectivement on peut trouver une théorie ayant la propriété d'ordre strict sans avoir la propriété d'indépendance, i.e. ayant NIP ; l'exemple le plus canonique est celui des réels, et plus généralement toute théorie o-minimale.

Fait 1.3.4 *[61, théorème* 0.2.11*] Soient α un ordinal, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule et π un type partiel. On définit*

$$\Gamma^{\alpha}_{\varphi}(\pi) := \{\varphi^{\mu(n)}(\bar{x}_n, \bar{y}_{\mu\restriction n}) | \mu \in 2^{\alpha}, n \in \alpha\} \cup \{\pi(\bar{x}_\mu) : \mu \in 2^{\mu}\}.$$

Alors sont équivalents :

1. *T est stable,*
2. *chaque type (au-dessus de n'importe quel ensemble de paramètre) est définissable,*
3. *aucune formule n'a la propriété d'ordre,*
4. *pour chaque formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ l'ensemble $\Gamma^{\alpha}_{\varphi}(\pi)$ est inconsistant si $\alpha = \omega$ et $\pi = \top$, où $\varphi^0 = \varphi$ et $\varphi^1 = \neg\varphi$.*

Il faut remarquer que par compacité $\Gamma^{\alpha}_{\varphi}(\pi)$ est inconsistant pour tous les α infinis si et seulement si $\Gamma^{\omega}_{\varphi}(\pi)$ est inconsistant si et seulement si $\Gamma^{k}_{\varphi}(\pi)$ est inconsistant pour un entier $k < \omega$ et un ensemble fini de sous-ensemble π_0 de π.

Définition 1.3.5 *Soit $k \geq 2$. On dit qu'une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ a la* propriété d'arbre de degré k *s'il existe des uplets $\bar{a}_s (s \in \omega^{\omega})$ tels que*

- *pour chaque $f \in \omega^{\omega}$ l'ensemble des formules $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_{f\restriction n}) | \ n < \omega\}$ est consistant,*
- *pour chaque $s \in \omega^{<\omega}$ l'ensemble $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_{s\frown i}) | \ i < \omega\}$ est k-inconsistant. À savoir chaque sous-ensemble de taille k est inconsistant.*

Une formule φ a la propriété d'arbre *s'il a la propriété d'arbre de degré k pour un entier k quelconque.*

Une théorie T est dite *simple* si elle ne contient aucune formule avec la propriété d'arbre. La simplicié est une notion introduite par Shelah comme une généralisation de stabilité. On invite le lecteur à consulter les travaux de E. Casanovas dans [7], B. Kim et A. Pillay dans [32] et S. Shelah dans [56] pour une compréhension plus profonde de ces concepts. Des définitions données ci-dessus, la ω-stabilité est la plus forte suivie par la stabilié, la dépendance ou celle de la simplicité respectivement. Dans les grandes lignes les théories ω-stables sont contenues dans l'ensemble des théories stables, qui est contenu dans l'ensemble des théories dépendantes ou des théories simples. Alors on a

Fait 1.3.6 *[56, 7] Toute formule avec la propriété d'arbre n'est pas stable.*

Clairement il y a plusieurs manières de montrer qu'une théorie T n'est pas stable, soit en comptant le nombre de types sur certains ensembles de paramètres, soit en trouvant une formule ayant une des 3 propriétés du fait 1.3.4.

Chapitre 2

Théorie des groupes

2.1 Préliminaires

Un groupe G peut toujours être caractérisé par une présentation

$$G = \langle A | R = 1; R \in \mathcal{R} \rangle$$

où A est un ensemble quelconque, appelé l'*alphabet* et où $\mathcal{R}$ est un ensemble de relations ou de mots de groupe R, appelé les *relations définissantes*. De plus, cette paire ordonnée nous donne tous les éléments de G. Chaque relation R est un mot de groupe sur l'ensemble $A \cup A^{-1}$, composé par les éléments de A et leurs inverses. On peut dire également qu'ils sont les formes simplifiées des *termes* dans le langage des groupes ajoutés des constantes de A.

On dit qu'une présentation $\langle\, A \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ est *finie* si les ensembles A et $\mathcal{R}$ sont tous les deux finis. Un groupe est *finiment présenté* s'il a une présentation finie. Il est consistant de supposer que toutes les relations R sont irréductibles et cycliquement réduites. Cette supposition ne pose aucune condition préalablement restrictive. Par abus de notation, on utilise le même symbole, $\langle\, A \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$, pour une présentation et pour un certain groupe donné par cette présentation. Dans cette présentation toutes les constantes de A sont interprétées telles que G est engendré par leurs interprétations. De plus toutes les relations $\ulcorner R = 1 \urcorner$, $R \in \mathcal{R}$, sont vraies dans G, et toutes les autres relations de cette forme qui sont vraies dans G, sont seulement les conséquences groupe-théoriques des R

de $\mathcal{R}$.

Les *réductions cycliques* des relations définissantes ne sont que les “déplacements cycliques” de ces relations et les simplifications des paires de lettres réciproquement inverses et situées l'une à côté de l'autre. Cela ne change pas le groupe donné par cette présentation. Donc chaque groupe a une présentation où toutes les relations définissantes sont cycliquement réduites. Les présentations, ou les ensembles des relations définissantes, dans lesquels toutes les relations définissantes sont cycliquement réduites, sont aussi appelés *cycliquement réduits*.

Une présentation cycliquement réduite $\langle A \,\|\, \mathcal{R} \rangle$, ou un ensemble de relations définissantes $\mathcal{R}$, est appelé *symétrisé* si $\mathcal{R}$ contient l'*inverse visuel* R^{-1} de chaque relation R et pour toute relation $R \equiv XY \in \mathcal{R}$ le *déplacement cyclique* YX de R est aussi dans $\mathcal{R}$. Par exemple l'inverse visuel de $ab^{-1}c$ est $c^{-1}ba^{-1}$. La *clôture symétrisée* ou une *symétrisation* de $\mathcal{R}$ est le plus petit ensemble symétrisé de relations définissantes contenant $\mathcal{R}$.

L'antonyme de “symétrisé” est “concis” : suivant [8], on dit qu'une présentation cycliquement réduite $\langle A \,\|\, \mathcal{R} \rangle$, ou un ensemble de relations définissantes $\mathcal{R}$, est *concis* si on ne peut pas trouver de relations distinctes de $\mathcal{R}$ telles que l'une soit un déplacement cyclique de l'autre ou l'inverse visuel d'un déplacement cyclique de l'autre.

Définition 2.1.1 *Soit $G = \langle g_1, \ldots ; r_1 \ldots \rangle$ et $H = \langle h_1, \ldots ; s_1 \ldots \rangle$ deux groupes donnés où $\{g_1, \ldots\}$ et $\{h_1, \ldots\}$ sont les ensembles de génerateurs disjoints et r_i, s_j sont les relations définissantes. Leur* produit libre *est un groupe donné par la présentation*

$$G * H = \langle g_1, \ldots, h_1, \ldots ; r_1, \ldots, s_1, \ldots \rangle$$

On dit que chaque groupe G ou H est un facteur *de ce produit libre.*

Les éléments conjugués à un facteur G ou H sont dits *elliptiques* et les autres sont dits *hyperboliques*.

Fait 2.1.2 *[37, Lemme 1.1] Le produit libre $G * H$ est uniquement déterminé par les groupes G et H.*

La définition d'un produit libre peut être généralisée pour une famille de groupes $\{A_i : i \in I\}$. $*A_i$ est le groupe engendré par l'union disjointe des générateurs de tous les A_i et leur relations définissantes.

Les éléments d'un produit libre de deux groupes $G * H$ sont les juxtapositions alternées des éléments de chaque facteur. Pour chaque présentation d'un élément ou d'un mot dans un produit libre il existe une *forme normale.* C'est-à-dire pour tout mot ou chaque élément de $G * H$ représenté par la série $s_1, \ldots, s_n, n \geq 0$ les propriétés suivantes sont satisfaites

- $s_i \neq 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- chaque s_i est dans un facteur G ou H, et
- pour tout i les s_i et s_{i+1} ne sont pas dans le même facteur.

Fait 2.1.3 *[37, Le Théorème du sous-groupe de Kurosh] Soit $G = *A_i$ et H un sous-groupe de G. Alors H est un produit libre, $H = \mathbb{F} * (*H_j)$ où $\mathbb{F}$ est un groupe libre et chaque H_j est l'intersection de H et d'un conjugué d'un facteur A_i de G.*

Introduite par G. Higman, B. H. Neumann et H. Neumann en 1949, une extension HNN est définie pour un groupe G avec deux sous-groupes isomorphes A et B comme suit. Soit $\phi \colon A \to B$ un isomorphisme. L'*extension HNN* de G par rapport à A et B est le groupe

$$G^* = \langle G, t | \ t^{-1}at = \phi(a), a \in A \rangle$$

Définition 2.1.4 *Soit G un groupe. On définit ses* sous-groupes caractéristiques *d'une manière inductive comme suit*

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G], \qquad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

On note $\gamma_2(G)$ par G' et on l'appelle le sous-groupe dérivé *de G.*

Manifestement $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$. On continue de la même façon et on définit inductivement une suite de sous-groupes

$$G' = [G, G], \quad G'' = [G', G'], \ldots, G^k = [G^{k-1}, G^{k-1}].$$

On dit qu'un groupe est *résoluble* si $G^k = 1$ pour un entier k. Par exemple, le sous-groupe $D(n)'$ du groupe diédral $D(n)$ se compose des relations propres d'un plan euclidien, d'où $D(n)'' = \{e\}$. Alors $D(n)$ est un groupe résoluble de longueur dérivée inférieure ou égale à deux. De tels groupes sont appelés *métabéliens.* On peut dire également qu'un groupe G est métabélien si le groupe des automorphismes intérieurs de G est abélien. $A = G/Z(G)$ est le *groupe des automorphismes intérieurs* de G. Clairement A n'est pas cyclique, sauf si G est abélien quand $A = 1$.

Définition 2.1.5 *La* suite centrale descendante *d'un groupe G est la suite*

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots.$$

Définition 2.1.6 *Un groupe G est* nilpotent *s'il existe un entier c tel que $\gamma_{c+1}(G) = 1$. C'est-à-dire si la suite centrale descendante est finie.*

Les p-groupes finis où p est un entier premier sont des exemples de groupes nilpotents aussi bien que les groupes abéliens où clairement $c = 1$.

2.2 Problème des mauvais groupes

On a parlé du concept d'un univers rangé. Maintenant on voit cette notion quand la structure de base de notre univers est en fait un groupe. Alors un groupe rangé est aussi appelé un groupe *(ω-stable) de rang de Morley fini.* C'est simplement parce que les structures ω-stables ont été découvertes par M. Morley en 1965. Plus tard A. Borovik considérait les groupes rangés et un résultat de B. Poizat a relié les deux notions.

Fait 2.2.1 *[45, Corollaire* 2.14 *et théorème* 2.15*] Les groupes de rang de Morley fini et les groupes rangés coïncident.*

Soit G un groupe de rang de Morley fini avec un sous-groupe définissable H. Alors la décomposition en coset à gauche G/H montre que H est d'indice fini dans G si et seulement s'il est générique dans G. Dans ce cas là on a

$$deg(G) = [G : H] deg(H).$$

Comme le rang et le degré de G sont des entiers positifs, ils ne peuvent pas chuter infiniment. En appliquant cette remarque à une chaîne décroissante de sous-groupes définissables de G, on trouve que cette chaîne doit devenir stationnaire en un nombre fini d'étapes. Cette condition, appelée la *condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables*, est une des nombreuses contraintes algébriques fondamentales imposées par la finitude du rang. On dit qu'un groupe est *connexe* s'il n'y a aucun sous-groupe propre et définissable d'indice fini.

Une grande recherche pour comprendre les groupes de rang de Morley fini est commencé, et par conséquent on a une meilleure compréhension de ces groupes. B. Poizat et J. Reineke ont montré qu'un groupe connexe de rang de Morley 1 est abélien. G. Cherlin en 1979 a montré que si G est un groupe connexe de rang de Morley 2, alors il est résoluble [9]. Le terme "mauvais groupe" est forgé par ce dernier auteur quand dans le même article il a caractérisé les groupes connexes non-résolubles de rang de Morley 3 comme les "bons" (PSL_2) et les "mauvais" qui n'ont aucun sous-groupe définissable de rang 2.

Selon la conjecture principale, un groupe rangé simple devrait être algébrique. Mais on peut trouver des exemples de groupes rangés et pas simple qui ne sont pas algébriques. Par exemple le p-groupe de Prüfer, où p est un nombre premier et définit comme

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{x \in \mathbb{C} : \quad x^{p^n} = 1 \ \text{ pour un entier } \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Il s'agit même d'un groupe $\aleph_1$-catégorique.

On peut maintenant énoncer le premier résultat non trivial de la théorie des groupes de rang de Morley fini. Soit G un groupe de rang de Morley fini et Q un sous-groupe définissable de G, alors un sous-ensemble définissable X de G est dit *Q-indécomposable* si les cosets de Q partitionnent X en une infinité de sous-ensembles, dès qu'ils partitionnent X en plus d'un sous-ensemble. En outre X est dit *indécomposable* s'il est Q-indécomposable pour chaque sous-groupe définissable Q de G. On attire l'attention du lecteur sur le fait qu'un sous-groupe définissable de G est indécomposable si et seulement s'il est connexe.

Fait 2.2.2 ***(Théorème des Indécomposables de Zil'ber) :****[44] Soit $(A_i)_i$ une famille quelconque de sous-ensembles indécomposables d'un groupe G de rang de Morley fini, telle que chaque A_i contienne l'identité de G. Alors le* *sous-groupe engendré par les sous-ensembles A_i est définissable et connexe. De plus il y a un nombre fini d'indices $i_1, \ldots, i_m$ (qui ne sont pas nécessairement distincts) tels que*

$$\langle \bigcup_i A_i \rangle = A_{i_1} \ldots A_{i_m} \text{ pour un } m \leq 2rg(G).$$

Définition 2.2.3 *Un groupe G est un* mauvais groupe *si c'est un groupe non-résoluble et connexe de rang de Morley fini dont tous ses sous-groupes propres et connexes sont nilpotents.*

Fait 2.2.4 *[3, Proposition 13.2] Soit G un groupe connexe non-nilpotent de rang de Morley fini. Alors soit un corps algébriquement clos est interprétable dans G, soit G interprète un mauvais groupe simple.*

Dans le fait ci-dessus un “mauvais” groupe est un groupe comme dans la définition 2.2.3.

Fait 2.2.5 *[45, Corollaire 3.20] Si G est un groupe connexe résoluble non-nilpotent de rang de Morley fini, on peut y interpréter un corps K algébriquement clos.*

Il est à noter qu'il existe des groupes ressemblant à des mauvais groupes (sans avoir de rang de Morley fini). Un exemple a été construit par S. V. Ivanov : un groupe G en deux générateurs dont les sous-groupes maximaux sont infinis, cycliques et conjugués. Il n'est pas de rang de Morley fini car les sous-groupes maximaux de G sont les centralisateurs d'éléments non-triviaux. Ils sont tous cycliques, infinis et définissables, mais un groupe cyclique infini n'a pas de rang de Morley fini car il ne satisfait pas la condition de chaînes descendante sur les sous-groupes définissables (voir [24] pour plus de détails).

Définition 2.2.6 *Soit G un groupe. Un sous-groupe $B \leq G$ est appelé un* sous-groupe de Borel *si B est un sous-groupe maximal parmis les sous-groupes connexes, définissables et résolubles de G.*

On attire spécialement l'attention du lecteur sur le fait que dans un groupe de rang de Morley fini on a la condition de chaîne ascendante sur les sous-groupes définissables et connexes, et ainsi les sous-groupes de Borel y sont bien définis. La *condition de chaîne ascendante* est la condition duale de celle de chaîne descendante.

Les groupes de Borel dans un mauvais groupe sont très particuliers. A. Borovik et B. Poizat dans [4] et Corredor dans [12] ont montré le résultat suivant :

Fait 2.2.7 *Soit G un mauvais groupe simple. Alors*

i. Les sous-groupes de Borel de G sont conjugués.

ii. Les sous-groupes de Borel distincts de G sont deux à deux disjoints.

iii. Chaque élément de G est dans un sous-groupe de Borel.

iv. Chaque sous-groupe fini de G est dans un sous-groupe de Borel de G et est nilpotent d'ordre impair. En particulier, G n'a aucune involution.

v. $N_G(B) = B$ pour chaque sous-groupe de Borel B de G.

vi. Si B est un sous-groupe de Borel de G et $a \in G \setminus B$, alors

$$G = BaB.BaB.\ldots.BaB,$$

où le nombre de double cosets BaB dans ce produit est borné par une constante qui ne dépend ni du choix de a et ni de celui de B.

Si on appelle les sous-groupes abéliens maximaux des groupes construits par Ivanov, les sous-groupes de Borel, alors son groupe a toutes les propriétés de mauvais groupes données ci-dessus.

Les parties *ii.* et *v.* du fait 2.2.7 donnent la malnormalité d'un sous-groupe de Borel.

Définition 2.2.8 *Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe A de G est* malnormal*, si $A^g \cap A = 1$ pour tout $g \in G \setminus A$.*

Plus généralement, un groupe G avec un sous-groupe propre C est un *groupe de Frobenius* si C est malnormal. Si de plus $G = \bigcup_{g \in G} C^g$ on dit que G est un *groupe de Frobenius rempli* [25]. Les groupes de Frobenius remplis sont *semisimples*. Cela signifie que les sous-groupes abéliens normaux maximaux d'un groupe de Frobenius rempli sont triviaux. De plus il n'y a aucune involution (élément d'ordre 2) dans ces groupes. Manifestement dans un mauvais groupe tous les sous-groupes de Borel sont des groupes de Frobenius. La question d'existence de groupes de Frobenius remplis de rang de Morley fini est hautement ouverte.

Dans ce qui suit, un groupe G est dit *pur* si son langage est un langage "pur" de groupes, i.e. si $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$.

Fait 2.2.9 *[25, proposition 3.3] Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rempli, tel que G est de rang de Morley fini et connexe. Alors*

(i) $C_G(c) = C_C(c)$ est infini pour chaque élément non trivial c de C.

(ii) C est connexe et définissable dans le groupe pur G.

(iii) $CgC \cap Cg^{-1}C = \varnothing$ pour chaque élément g de $G \setminus C$.

(iv) $rg(G) \geq 2rg(C) + 1$ où rg dénote le rang de Morley.

Preuve. (i). Supposons qu'il existe un élément $c \in C$ qui a un centralisateur fini dans G. La classe de conjugaison de c aussi bien que celle de c^{-1} sont des sous-ensembles génériques de G. Comme la classe de conjugaison de c^{-1} est de degré 1, elle ne peut pas contenir deux sous-ensembles génériques disjoints [9]. Donc il y a $g \in G$ tel que $c^g = c^{-1}$, et $C_G(c)$ est d'indice 2 dans le sous-groupe d'éléments qui centralisent ou inversent c. Ce dernier est fini, et il contient une involution. Cela est impossible et termine la preuve de (i).
(ii). On remarque que

$$\langle C_G(c)^\circ | \; c \in C \setminus \{1\} \rangle$$

est un sous-groupe normal non trivial de C. Cela est définissable par le théorème des Indécomposables de Zil'ber [63] et donc son normalisateur, qui est précisément C, est aussi définissable dans le groupe pur G. Comme G est connexe couvert par les copies disjointes de C, aet on déduit que C doit être connexe.
(iii). Soit $g \in G \setminus C$. Si $cgc' = g^{-1}$ pour deux éléments c et c' de C, alors $(cg)^2$ est centralisé par cg et donc est un élément non trivial de C. Il s'ensuit que cg et g sont tous les deux dans C. C'est une contradiction qui prouve le (iii).
(iv). Comme C entrecroise C^g d'une manière triviale, alors $rg(CgC) = 2rg(C)$. D'où on trouve $rg(G) \geq 2rg(C)$. Cela avec (iii) et la connexité de G montre que l'inégalité est stricte. □

Un groupe de rang de Morley fini est dit *définissablement simple* s'il n'a pas de sous-groupe définissable, normal, propre et non trivial.

Fait 2.2.10 *[25, proposition 3.4] Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rempli, tel que G est de rang de Morley fini et connexe. Alors il existe un sous-groupe définissable simple non trivial G_1 de G tel que $(C \cap G_1) < G_1$ est un groupe de Frobenius rempli.*

Preuve. Soient G et C comme ci-dessus. D'abord on montre que si G_1 est un sous-groupe définissable simple non trivial de G, alors il est un groupe de Frobenius rempli. Afin de le faire, on note que

$$G_1 = \bigcup_{g \in G} (G_1 \cap C^g)$$

et si on dénote par Γ_g les intersections non triviales, alors chaque $\Gamma_g < G_1$ est un groupe de Frobenius. En particulier, la classe de conjugaison de Γ_g est générique dans G_1 :

$$rg\big(\bigcup_{l \in G_1} \Gamma_g^l\big) = rg(\Gamma_g) + rg(G_1/N_{G_1}(\Gamma_g)) = rg(G_1).$$

Comme ce dernier est supposé être connexe, ces sous-groupes Γ_g sont conjugués dans G_1. C'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

Pour la preuve du fait 2.2.10, soit G_1 un sous-groupe définissable non trivial de G, qui n'est pas contenu dans un conjugué de C, et minimal avec toutes ces propriétés. Alors G_1 n'est pas abélien mais il reste définissablement simple. Sinon par la minimalité de G_1, un sous-groupe propre simple définissable est contenu dans un conjugué de C. De plus, le normalisateur de ce sous-groupe est aussi contenu dans ce conjugué qui est une contradiction. Alors par un corollaire du théorème des Indécomposables de Zil'ber qui dit qu'être définissablement simple est, pour les groupes de rang de Morley fini, égal à être simple, on a que G_1 est simple. On peut supposer que G_1 a une intersection non triviale avec C en prenant un conjugué si nécessaire. □

Chapitre 3

Propriétés combinatoires des groupes

Cherchons toujours un mauvais groupe ; on continue par essayer de comprendre la classe qui les contiendrait s'ils existent. Cette classe est effectivement celle des groupes CSA. Comme il a été montré dans [4] un mauvais groupe ne contient aucun élément d'ordre 2. Alors on commence par une classe de groupes CSA et l'on continue par jeter les éléments d'ordre 2 et on essaye de mieux comprendre les propriétés modèle-théoriques de cette classe.

3.1 Groupes hyperboliques et groupes CSA

La méthode que l'on utilise pour comprendre les groupes hyperboliques est géométrique aussi bien que combinatoire comme on essaye de comprendre leur graphe de Cayley. L'hyperbolicité est une définition pour les espaces métriques ou les arbres réels et donc est une propriété géométrique. Manifestement on travaille avec les groupes finiment engendrés ou plutôt finiment présentés. On fixe un groupe G de type fini avec un système fini de générateurs A. Par souci de simplicité on peut supposer que A ne contient jamais d'élément neutre de G et qu'il est symétrique (pour chaque $a \in A$ l'inverse a^{-1} est aussi dans A).

Pour chaque élément $g \in G$, on dénote par $\ell_A(g)$ la *longueur* de g relativement à A, le nombre minimal de générateurs de A nécessaires à l'écriture de l'élément g. Si $g_1, g_2 \in G$, on note $d_A(g_1, g_2)$ et on appelle *distance* entre g_1 et g_2 relative à A l'entier $l_A(g_1^{-1}g_2)$.

On fixe un espace métrique quelconque (X, d). Soient x_0 et x_1 deux éléments de X et $s = d(x_0, x_1)$ la distance entre x_0 et x_1. Un *segment géodésique* dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 est une isométrie $f : [0, s] \to X$ telle que $f(0) = x_0$ et $f(s) = x_1$. X est un *espace géodésique* si, pour toute paire de points $x_0, x_1 \in X$, il existe un segment géodésique $[0, d(x_0, x_1)] \to X$ d'extrémités x_0 et x_1.

Définition 3.1.1 *On fixe un nombre $\delta \geq 0$. Un espace métrique géodésique X est dit hyperbolique si pour tout triangle géodesique Δ de X, la distance d'un point quelconque d'un côté de Δ à la réunion des deux autres côtés est majorée par δ. Un groupe de type fini G est hyperbolique si le graphe de Cayley défini par G et un système fini de générateurs de G est hyperbolique.*

D'une manière générale, il y a “peu" de relations entre les générateurs de ces groupes et leurs graphes de Cayley ressemblent bien aux graphes de Cayley de groupes libres en le voyant de loin. En particulier on a

Fait 3.1.2 *[13, Proposition 31] Tout groupe libre finiment engendré est hyperbolique.*

Fait 3.1.3 *[48, théoreme 5.32] Soit G un groupe où le centre de G, $Z(G)$, est d'indice fini. Alors le sous-groupe dérivé de G, G', est fini.*

Preuve. (par Ornstein) Soit $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les représentants de cosets de $Z(G)$ dans G. C'est-à-dire, chaque élément x de G a la forme $x = g_i z$ où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $z \in Z(G)$. Pour tous les $x, y \in G$, on a

$$[x, y] = [g_i z, g_j z] = [g_i, g_j] .$$

Donc chaque commutateur a la forme $[g_i, g_j]$ pour les entiers i, j de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Cela signifie que G' a un nombre fini de générateurs majoré par n^2.

On peut écrire chaque élément $g' \in G'$ comme un mot de groupe $c_1 \ldots c_t$, où chaque c_i est un commutateur. Il faut remarquer qu'aucune puissance est nécessaire, car $[x, y]^{-1} = [y, x]$. Il suffit de montrer que si une décomposition de g' est choisie telle que $\ell = \ell(g')$ est minimale, alors $\ell(g') < n^3$ pour tout $g' \in G'$.

On montre d'abord, par induction sur $r \geq 1$, que si a et b sont deux éléments de G, alors $[a, b]^r = (aba^{-1}b^1)^r = (ab)^r(a^{-1}b^1)^r u$, où u est un produit de $r - 1$ commutateurs. Ce fait est évident quand $r = 1$. On note, pour les étapes inductives, que l'on peut écrire le produit de deux éléments de G comme son inverse multiplié par un commutateur quelconque, c. C'est-à-dire pour tous les éléments x et y de G, $xy = yxx^{-1}y^{-1}xy = yx[x^{-1}, y^{-1}] = yxc$. Par conséquent, si $r > 1$,

$$\begin{aligned}(aba^{-1}b^{-1})^{r+1} &= aba^{-1}b^{-1}(aba^{-1}b^{-1})^r \\ &= ab[a^{-1}b^{-1}]\{(ab)^r(a^{-1}b^{-1})^r\}u \\ &= ab\{(ab)^r(a^{-1}b^{-1})^r\}[a^{-1}b^{-1}]cu\end{aligned}$$

pour un commutateur quelconque c, comme voulu.

Puisque les faits $yx = x^{-1}(xy)x$ et $[G : Z(G)] = n$ impliquent $(ab)^n \in Z(G)$, on peut deduire $yx^n = x^{-1}(xy)^n x = (xy)^n$. Donc,

$$(a^{-1}b^{-1})^n = ((ba)^{-1})^n = ((ba)^n)^{-1} = ((ab)^n)^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$(*) \qquad [a, b] \text{ est le produit de } n - 1 \text{ commutateurs.}$$

Prenons une expression de $g' \in G'$ comme un produit de commutateurs $c_1 \ldots c_\ell$ où le ℓ est minimal. Si $\ell \geq n^3$, il y a des commutateurs c_i qui se trouvent m fois, où comme il y a moins de n^2 commutateurs différents, $m > n$. Dans chaque expression xyx, on ajoute un conjugué de y sous la forme de $(xyx^{-1})x^2$. Alors on peut remplacer les commutateurs dans $c_1 \ldots c_\ell$ par leurs conjugués. Ceux-ci sont toujours des commutateurs et donc le nombre total de commutateurs est toujours ℓ. Par conséquent tous les commutateurs c_i peuvent être regroupés comme c_i^m. D'après $(*)$, la longueur de l'expression minimal de g' est réduite.

C'est une contradiction qui donne $\ell < n^3$. Alors G' consiste en un nombre fini d'éléments de longueur finie et donc l'est lui même. $\square$

Il existe une classe de groupes qui peut être vue comme une généralisation combinatoire des groupes hyperboliques sans torsion de Gromov.

Définition 3.1.4 *On dit qu'un groupe G est* CSA, Conjugately Separated Abelian, *si chaque sous-groupe maximal abélien A de G est malnormal. Alternativement, on peut dire qu'un groupe G est CSA si et seulement si le centralisateur de chaque élément non-trivial est abélien et auto-normalisant.*

Leur classe est universellement axiomatisée par les énoncés suivants :

- $\forall x \; \forall y \; \forall z \; (x \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \wedge [x, z] = 1) \rightarrow [y, z] = 1.$
- $\forall x \; \forall y \; (x \neq 1 \wedge [x, x^y] = 1) \Rightarrow [x, y] = 1.$

Lemme 3.1.5 *Soit G un groupe sans torsion.*
a. Si G est virtuellement cyclique, i.e. s'il contient un sous-groupe cyclique d'indice fini, alors G est cyclique.
b. Si les centralisateurs d'éléments non triviaux de G sont cycliques, alors G est CSA.

Preuve. *a.* Supposons G virtuellement cyclique. D'abord, il faut remarquer que dans chaque groupe sans torsion virtuellement cyclique le centre a un indice fini. Ceci se vérifie aussi pour les groupes virtuellement cyclique sans aucun élément d'ordre deux. Également, un cas particulier du fait 3.1.3 dit que si dans un groupe sans torsion le centre a un indice fini, alors ce groupe est abélien. Donc G est abélien.

Dans un groupe abélien sans torsion, deux sous-groupes cycliques se coupent d'une manière triviale ou bien sont contenus dans un même sous-groupe cyclique. Il s'ensuit que G est cyclique.

b. Supposons maintenant que les centralisateurs d'éléments non triviaux de G sont cycliques. En particulier, la commutation est une relation d'équivalence sur $G \setminus \{1\}$. Soit A un sous-groupe arbitraire maximal abélien de G. Alors A est infini et cyclique. Supposons que A n'est pas malnormal. Cela signifie qu'il existe un générateur a de A, et un élément b de $G \setminus A$ tels que $A \cap A^b \neq \{1\}$. Dès lors que la commutativité est transitive et A est maximal, on obtient $A = A^b$. Par conséquent, $a^b \in \{a^{\pm 1}\}$, et donc $(a^b)^b = a$. Comme a commute avec b^2, et b^2 commute avec b, on a que a commute avec b. D'où $b \in A$, et c'est une contradiction. Alors A est malnormal et donc G est CSA. □

Fait 3.1.6 *[13, Théorème 38] Soit G un groupe hyperbolique. Le centralisateur dans G de tout élément d'ordre infini contient un sous-groupe cyclique d'indice fini.*

C'est une propriété fondamentale des espaces (ou les graphes de Cayley des groupes) hyperboliques que de "ressembler aux arbres". Le fait ci-dessus avec le lemme 3.1.5 donne le fait suivant :

Fait 3.1.7 *[40, Proposition 12] Chaque groupe hyperbolique sans torsion est CSA.*

Il faut remarquer que, outre ce fait, le lemme 3.1.5 implique que tous les sous-groupes abéliens maximaux d'un groupe hyperbolique sans torsion sont cycliques.

Définition 3.1.8 *Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et soit $\mathcal{K}$ une classe des $\mathcal{L}$-structures. On dit qu'une structure $\mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ est existentiellement close si pour chaque ensemble fini E des équations et inéquations avec paramètres dans M, s'il y a des solutions de E dans une extension $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ où $\mathcal{N}$ est toujours dans $\mathcal{K}$, alors on peut trouver des solutions de E dans $\mathcal{M}$.*

On peut limiter la torsion de groupes CSA avec lesquels on travaille par l'introduction d'une fonction particulière. Soit f une fonction de l'ensemble des entiers premiers dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit qu'un groupe est CSA_f, s'il est un groupe CSA qui ne contient aucun p-sous-groupe abélien élémentaire de rang $f(p)+1$ pour chaque entier p tel que $f(p)$ soit fini. Dès qu'une telle fonction f est fixée, la classe du premier ordre des groupes CSA_f devient inductive.

Cela exprime que c'est une classe qui est fermée sous les chaînes des unions et contenant toutes les structures isomorphes à ses structures. Maintenant comme il est démontré dans le fait suivant, on peut trouver des groupes CSA_f existentiellement clos dans cette classe.

Fait 3.1.9 *[10, Proposition 3.1] Soit $\mathcal{K}$ une classe inductive de $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{M}$ une structure dans $\mathcal{K}$. Alors il en existe une existentiellement close $\mathcal{M}^*$ dans $\mathcal{K}$ qui contient $\mathcal{M}$.*

Preuve. Soit $\{P_\alpha : \quad \alpha < \tau\}$ l'ensemble de tous les énoncés existentiels dans le langage $\mathcal{L}$, où $\tau = max\{|\mathcal{M}|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$. On part de $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ et on continue à définir les $\mathcal{L}$-sructures $\mathcal{M}_\alpha$ comme suit. Si $\alpha = \beta + 1$ et s'il existe une structure $\mathcal{M}'$ contenant $\mathcal{M}_\beta$ telle que $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{M}' \models P_\beta$, alors on met $\mathcal{M}_{\beta+1} = \mathcal{M}'$. Sinon $\mathcal{M}_{\beta+1} = \mathcal{M}_\beta$. Enfin si $\alpha \neq 0$ est un ordinal limite, alors $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$. Toutes ces structures restent dans $\mathcal{K}$ car c'est une classe inductive.

Mettons $\mathcal{M}^1 = \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{M}_\alpha$. Clairement $\mathcal{M}^1 \in \mathcal{K}$ et pour chaque énoncé P défini dans $\mathcal{M}$, si $\mathcal{N} \models P$ pour une extension quelconque $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}^1$, alors par la construction on a $\mathcal{M}^1 \models P$. La construction que l'on a faite pour $\mathcal{M}^1$, peut être réalisée à nouveau commençant de $\mathcal{M}^1$ et ainsi de suite. On obtient une chaîne dénombrable

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^1 \subseteq \mathcal{M}^2 \subseteq \dots$$

Soit $\mathcal{M}^* = \bigcup_n \mathcal{M}^n$, alors $\mathcal{M}^* \in \mathcal{K}$. De plus chaque énoncé existentiel P qui est défini dans $\mathcal{M}^*$ est défini dans un $\mathcal{M}^i$ pour un entier i. Celui-ci est vrai comme il n'y a qu'un nombre fini de termes dans chaque P. En revanche si $\mathcal{N}^* \models P'$ pour une extension quelconque $\mathcal{N}^*$ de $\mathcal{M}^*$ et un énoncé existentiel P', alors par construction $\mathcal{M}^{i+1} \models P'$. Donc $\mathcal{M}^* \models P'$ et par conséquent $\mathcal{M}^*$ est existentiellement clos dans $\mathcal{K}$. □

Fait 3.1.10 *[18, chapitre 10, §3] Si H est un sous-groupe normal quelconque d'un groupe G et B est le sous-groupe dérivé de G, alors $\langle H, B\rangle/H$ est le sous-groupe dérivé de G/H.*

Fait 3.1.11 *[40, Remarque7] Un groupe CSA avec une involution, i.e. un élément d'ordre 2, est abélien.*

Preuve. Soit G un groupe CSA non-abélien et supposons qu'il y a un élément non-trivial u de G tel que $u^2 = 1$. Alors la clôture normale de u dans G est aussi non-abélien (sinon on trouve une contradiction à l'hypothèse que G est CSA). D'où il existe deux involutions dans G qui ne commutent pas. Elles engendrent un sous-groupe dihédral non-abélien de G. Cela aboutit à une contradiction de l'hypothèse. □

Dans le cadre des propriétés modèle-théoriques, comme les groupes abéliens sont tous stables, ils nous intéressent peu. Alors on travaille sur des groupes CSA sans involutions, c'est-à-dire que l'on fixe une fonction f telle que $f(2) = 0$ et on travaille avec les groupes CSA_f.

Il était bien montré dans [31] que la classe de groupes CSA_f existentiellement clos n'est pas ω-stable car elle a $2^{\aleph_0}$ modèles finiment engendrés non-isomorphes. De la même manière, la théorie du premier ordre d'un groupe CSA_f existentiellement clos a $2^{\aleph_0}$ types sur $\varnothing$. Suivant ce travail, on voudrait trouver une réponse complète sur la question de la stabilité de ces groupes.

Fait 3.1.12 *[31, Théorème 1.2] Supposons que $f(2) = 0$ et soit G un groupe CSA existentiellement clos dans la classe des groupes CSA_f. Alors G est simple et si C est un sous-groupe maximal abélien de G on a :*

- $G = \bigcup_{g \in G} C^g$
- *C est une somme directe $(\bigoplus_{p\in\pi}(\bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty})) \oplus (\bigoplus_I \mathbb{Q})$ pour quelques ensembles d'indices I_p avec un cardinal infini si $f(p) = \infty$ et de cardinal de $f(p)$ sinon, et un ensemble quelconque d'indices I.*

Fait 3.1.13 *[31, Théorème 5.1] Supposons $f(2) = 0$, et soit G un groupe CSA_f existentiellement clos. Alors G vérifie l'énoncé suivant :*

$$\forall a \ \forall b \ \exists x \ \exists t \ ((a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge a \neq b) \ \Rightarrow \ t^{-1}bx^{-1}axt = ax^{-1}ax)$$

En particulier chaque groupe élémentairement équivalent à G est simple.

Fait 3.1.14 *[20, Corollaire 6.5.3] Si T est une théorie dans un langage du premier ordre, alors les modèles de la partie universelle de T, $T_\forall$, sont précisement les sous-structures de modèles de T.*

Fait 3.1.15 *Supposons $f(2) = 0$ et soit G un groupe ayant la même théorie universelle qu'un groupe CSA_f existentiellement clos. Alors tous les groupes CSA_f se plongent dans un modèle de la théorie du premier ordre de G.*

Preuve. Dans la preuve du corollaire 8.2 de [31], il est montré que la théorie universelle d'un groupe CSA_f existentiellement clos est vraie dans n'importe quel groupe CSA_f. Maintenant le fait 3.1.14 temine cette démonstration. $\square$

3.2 Petites simplifications

Dans ce qui suit, toutes les présentations des groupes, $\langle \mathcal{A} | R = 1; R \in \mathcal{R} \rangle$ devraient être supposées cycliquement réduites. La longueur d'un mot X sera notée par $|X|$.

Définition 3.2.1 *Si $R_1 \equiv XY_1$ et $R_2 \equiv XY_2$ sont deux mots distincts dans un ensemble symétrisé $\mathcal{R}$, alors on appelle X une* pièce *(de R_1) relative à $\mathcal{R}$.*

Les tailles des pièces partagées entre les relations distinctes trahissent, dans les grandes lignes, une "dépendance" entre ces relations. Par conséquent si les pièces partagées sont très grandes par rapport à la taille d'une relation R', alors ce qui reste dans R est négligable.

Définition 3.2.2 *Soit λ un nombre réel dans $[0, 1]$. Soit $\langle \mathcal{A} \| \mathcal{R} \rangle$ une présentation d'un groupe, et $\tilde{\mathcal{R}}$ la symétrisation de $\mathcal{R}$. Alors l'ensemble $\mathcal{R}$, ou la présentation $\langle \mathcal{A} \| \mathcal{R} \rangle$, satisfait la* condition $C'(\lambda)$, *si $|X| < \lambda |R|$ pour chaque $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ et pour chaque sous-mot X de R qui est une pièce relativement à $\tilde{\mathcal{R}}$.*

La condition $C'(\lambda)$ avec λ "petit" est un exemple classique de "condition de petite simplification". Il y a diverses telles conditions de petite simplification qui, en général, sont utilisées pour montrer que de grandes traces des relations définissantes restent dans toutes leurs conséquences. Comme il est montré dans le fait suivant, la condition $C'(\lambda)$ peut être utilisée pour une construction de groupes hyperboliques.

Fait 3.2.3 *[13, théorème 33] Soit G un groupe qui admet une présentation finie satisfaisant l'hypothèse de petite simplification $C'(1/6)$. Alors le groupe G est hyperbolique.*

On donne quelques notions topologiques. Soit G un groupe avec la présentation $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$. Soit $\pi = (p_1, \ldots, p_n)$ une suite quelconque d'éléments de G. Alors une *transformation de Peiffer du premier genre* se compose d'un remplacement de π par un $\pi' = (p'_1, \ldots, p'_n)$, où pour $1 \leq i < n$ on a soit

$$p'_i = p_{i+1} \qquad \text{et} \qquad p'_{i+1} = p_{i+1}^{-1} p_i p_{i+1}$$

ou

$$p'_i = p_i p_{i+1} p_i^{-1} \qquad \text{et} \qquad p'_{i+1} = p_i$$

et dans les deux cas $p'_j = p_j$ pour $j \neq i, i+1$. Une *transformation de Peiffer du deuxième genre* se compose d'un remplacement de π par un

$$\pi' = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+2}, \ldots, p_n),$$

où $p_i p_{i+1} = 1$. Clairement dans les deux genres, les deux produits $p_1, \ldots, p_n$ et $p'_1, \ldots, p'_n$ représentent le même élément de G.

Dans la topologie algébrique, on construit les formes depuis des "cellules" de dimensions différentes. Une *n-cellule* est un groupe de construction qui a la dimension n. Par exemple une 0-cellule est un point, de même qu'une 1-cellule est un segment d'une courbe et une 2-cellule n'est qu'une surface. Les n-cellules sont closes dans le sens qu'elles contiennent leurs points d'extrémités. Un *CW-complexe* ou un *complexe cellulaire* est un espace construit d'une manière inductive en joignant les n-cellules dans un ordre croissant de dimension. Par exemple un CW-complexe 1-dimensionel est simplement un graphe avec ses sommets, qui sont les 0-cellules, et ses bords, qui se composent des 1-cellules. $\mathbb{R}^2$ est un CW-complexe 2-dimensionel avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour 0-cellules, les intervalles ouverts pour 1-cellules et l'intérieur des carrés unités pour 2-cellules.

Définition 3.2.4 *[8] Pour chaque présentation $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$, soit $K(\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle)$ le CW-complexe 2-dimensionel qui réalise $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$. Alors*

(A) $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$ est asphérique *si $K(\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle)$ est (topologiquement) asphérique.*

(CA) $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$ *est* combinatoirement asphérique *si (quand on a abandonné les conjugués superflus et leur inverses dans* $\mathcal{R}$*) le complexe de Cayley,* $C(\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle)$ *(obtenu du revêtement universel de* $K(\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle)$ *par l'identification de certaines surfaces) est asphérique.*

(DA) $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$ *est* diagrammatiquement asphérique *si chaque suite d'identité au-dessus de* $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$ *peut être transformée à la suite vide par les opérations Peiffer.*

(SA) $\langle \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \rangle$ *est* singulièrement asphérique *si elle est diagrammatiquement asphérique et concise et si aucune relation définissante dans* $\mathcal{R}$ *peut être décomposée comme une concaténation de plusieurs copies du même sous-mot (à savoir elle ne représente pas une puissance propre dans le groupe libre* $\langle \mathcal{A} \,\|\, \varnothing \rangle$*).*

Si un groupe G a une présentation qui satisfait une des définitions données ci-dessus, alors on dit que G est, dans ce sens approprié, asphérique. Les définitions que l'on a donné sont liées par le diagramme suivant ;

$$\begin{array}{ccc} SA & \Rightarrow & A \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ DA & \Rightarrow & CA \end{array}$$

Le concept de CW-complexe était créé par J. H. C. Whitehead pour gérer des problèmes de théorie de l'homotopie. En parallèle le concept d'asphéricité se connecte à la topologie aussi bien qu'à la théorie combinatoire des groupes. Ainsi on invite les lecteurs à consulter les travaux énormes effectués dans [62], [17], [37] ou [43] pour mieux les cerner. Par conséquent on peut affirmer que la partie (A) ci-dessus peut être remplacée par la définition simplifiée suivante.

Fait 3.2.5 *[37, Proposition 10.1] Une présentation est asphérique si et seulement si dans l'ensemble des relations définissantes il n'y en a aucune qui est une identité non-triviale.*

Par exemple la présentation $\langle a, b \,\|\, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ est asphérique et la présentation $\langle a, b, c \,\|\, aba^{-1}b^{-1} = aca^{-1}c^{-1} = bcb^{-1}c^{-1} = 1 \rangle$ n'est pas asphérique. La motivation pour étudier la propriété d'asphéricité vient du fait que si un groupe G a une présentation asphérique, alors le problème d'identité a une solution simple. Comme son nom l'indique, le problème d'identité, dans sa formulation originelle, consiste à trouver toutes les identités dans les relations définissantes $R \in \mathcal{R}$. Sans rentrer dans les détails, il est équivalent de déterminer les modules de relations de G qui sont définis comme suit. Un module au-dessus d'un anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$ est appelé un *G-module*. Un G-module $M = N/[N, N]$, où $G = F/N$ est donné par la présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ avec N comme son noyau, est appelé un *module de relation* de G.

Fait 3.2.6 *Une présentation satisfaisant la condition $C'(1/5)$ est diagrammatiquement asphérique.*

L'asphéricité diagrammatique d'une présentation d'un groupe implique beaucoup de propriétés algébriques de groupes. Ce qui suit est une conséquence importante.

Fait 3.2.7 *[43, Théorème 13.4] Si $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ est une présentation diagrammatiquement asphérique et concise d'un groupe, alors les relations définissantes sont indépendantes. C'est-à-dire, aucune relation dans l'ensemble de relations*

$$\{\, \ulcorner R = 1 \urcorner \,|\, R \in \mathcal{R} \,\}$$

n'est une conséquence des autres.

Fait 3.2.8 *[43, Corollaire 32.1] Si une présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ d'un groupe G est asphérique et si aucune relation $R \in \mathcal{R}$ n'est une puissance propre dans le groupe libre F, alors le module de relation de G est un module libre de G avec la base $\{\bar{R}_{R \in \mathcal{R}}\}$ où $\bar{R} = R[N, N]$.*

Les groupes d'homologie de groupes cycliques et finis avec les dimensions impaires sont non triviaux [5]. Ceci avec le fait 3.2.8 empêche la présence de torsion. Et on a alors

Fait 3.2.9 *[39, Lemma 64] Chaque groupe avec une présentation singulièrement asphérique est sans torsion.*

3.3 Propriété d'indépendance et groupes hyperboliques

Un des principaux résultats de la présente thèse est le théorème suivant, publié dans [29].

Théorème 3.3.1 *Il existe un mot de groupe $w(x,y)$ en deux variables tel que la formule $\ulcorner w(x,y)=1\urcorner$ a la propriété d'indépendance relativement à la classe des groupes hyperboliques sans torsion.*

Preuve. Fixons un mot $w(x,y)$ en deux lettres x et y. Par exemple

$$w(x,y) = xy^7x^2y^6x^3y^5x^4y^4x^5y^3x^6y^2x^7y.$$

Pour un entier $n \geq 1$, soit A un ensemble de $n+2^n$ éléments $a_1,\dots,a_i,\dots,a_n$ et b_σ, avec 2^n indices σ variant dans l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$. On définit deux ensembles de relations :

$$\mathcal{R} = \{\, w(a_i,b_\sigma) \,|\, 1 \leq i \leq n\,;\, \sigma \in 2^n\,;\, i \in \sigma \,\}$$

et

$$\mathcal{S} = \{\, w(a_i,b_\sigma) \,|\, 1 \leq i \leq n\,;\, \sigma \in 2^n \,\}.$$

On note par $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ les symétrisations respectives de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. Manifestement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont toutes les deux concises.

On examine maintenant le groupe finiment présenté

$$G = \langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle = \langle\, \mathcal{A} \,\|\, \tilde{\mathcal{R}} \,\rangle,$$

et on note par F le groupe libre $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \varnothing \,\rangle$, de rang $n+2^n$. Alors G est le quotient de F par la clôture normale de $\mathcal{R}$. On remarque que l'on considère $\mathcal{R}$ comme un sous-ensemble de F.

On peut vérifier directement que chaque pièce relative à $\tilde{\mathcal{S}}$ de chaque relation de $\tilde{\mathcal{S}}$ est soit de la forme $(a_i^m b_\sigma^n)^{\pm 1}$, ou soit $(b_\sigma^n a_i^m)^{\pm 1}$. Alors on en déduit que la longueur d'une telle pièce est au maximum 8. Comme la longueur de chaque relation est 7×8, on obtient

$$|X| \leq \frac{1}{7}|R| < \frac{1}{6}|R|$$

pour chaque $R \in \tilde{\mathcal{S}}$ et chaque pièce X de R relativement à $\tilde{\mathcal{S}}$. Donc la présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{S} \,\rangle$ satisfait $C'(1/6)$. En particulier, la sous-présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ satisfait $C'(1/6)$.

Il s'ensuit du fait 3.2.3 que G est hyperbolique. Par le fait 3.2.6, la présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{S} \,\rangle$ est diagrammatiquement asphérique. Comme aucun élément de $\mathcal{S}$ n'est une puissance propre dans le groupe libre F, la présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{S} \,\rangle$ est en fait singulièrement asphérique. Par conséquent la sous-présentation $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{R} \,\rangle$ est aussi singulièrement asphérique. Le fait 3.2.9 maintenant implique que G est sans torsion.

Finalement, en appliquant le fait 3.2.7 à $\langle\, \mathcal{A} \,\|\, \mathcal{S} \,\rangle$, on obtient que pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$G \models w(a_i, b_\sigma) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad i \in \sigma.$$

Comme n est un entier, la formule $\ulcorner w(x, y) = 1 \urcorner$ a la propriété d'indépendance relativement à la classe des groupes hyperboliques sans torsion. $\square$

D'après le théorème 3.3.1 on a le résultat suivant.

Corollaire 3.3.2 *Supposons $f(2) = 0$ et soit G un groupe CSA_f existentiellement clos, ou plus généralement un groupe ayant la même théorie universelle qu'un groupe CSA_f existentiellement clos. Alors la théorie du premier ordre de G a la propriété d'indépendance.*

Preuve. Selon le théorème 3.3.1, il existe un mot de groupe $w(x, y)$ en deux variables x et y tel que la formule $\ulcorner w(x, y) = 1 \urcorner$ a la propriété d'indépendance relativement à la classe des groupes hyperboliques sans torsion. Cela signifie que pour chaque entier positif n, il existe un groupe hyperbolique sans torsion G_n avec des suites d'éléments $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, et y_σ, avec $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$, telles que

$$G_n \models w(x_i, y_\sigma) = 1 \quad \text{si et seulement} \quad i \in \sigma.$$

Par le fait 3.1.7, chaque groupe hyperbolique sans torsion G_n est un groupe CSA, et en plus, comme c'est sans torsion, il est un groupe CSA_f pour une fonction arbitraire f.

On note par $\mathrm{Th}(G)$ la théorie du premier ordre d'un groupe G ayant la même théorie universelle qu'un groupe CSA_f existentiellement clos. Du fait 3.1.15, chaque groupe G_n se plonge dans un modèle de $\mathrm{Th}(G)$. En particulier, comme la véracité de la formule $\ulcorner w(x,y)=1\urcorner$ est conservée par morphismes injectifs, $\mathrm{Th}(G)$ contient la formule

$$(\exists_{1\leq i\leq n}\, x_i)\,(\exists_{\sigma\in 2^n}\, y_\sigma)\,\big[(\bigwedge_{i\in\sigma} w(x_i,y_\sigma)=1)\wedge(\bigwedge_{i\notin\sigma} w(x_i,y_\sigma)\neq 1)\big].$$

Comme c'est vrai pour tous les entiers positifs n, la formule $\ulcorner w(x,y)=1\urcorner$ a la propriété d'indépendance relativement à $\mathrm{Th}(G)$. Donc $\mathrm{Th}(G)$ a la propriété d'indépendance. $\square$

3.4 Probabilités

Fait 3.4.1 *[44, Théorème 12.18] Si dans T il y a une formule $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ avec la propriété d'indépendance, il y en a une où $\bar{x}$ se compose d'une seule variable.*

Preuve. Soit une formule $\varphi(x_1 \frown \bar{x},\bar{y})$ ayant la propriété d'indépendance ; par symétrie, et d'après le fait 1.2.2, on peut trouver une suite indiscernable de uplets $\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_n,\ldots$ et un uplet $\bar{b}\frown\bar{c}$, tels que $\varphi(b,\bar{c},\bar{a}_n)$ soit vrai si n est pair, et faux si n est impair. Comme on cherche à construire une formule comme cela où le $\bar{x}$ soit de longueur minimale, on peut supposer qu'aucune formule $\psi(\bar{c},\bar{z})$, quelle que soit la longueur k de $\bar{z}$, ne peut partager en deux parties cofinales une suite indiscernable de k-uplets ; sinon on trouverait une formule avec la propriété d'indépendance ayant un $\bar{x}$ moins long.

Alors dans ces conditions on peut en outre supposer que les $\bar{a}_n$ forment une suite indiscernable sur $\bar{c}$. Pour le prouver, on vas montrer par induction sur m la consistance de la théorie comprenant les axiomes suivants :

i- les axiomes $\psi(\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_n)\leftrightarrow\psi(\bar{a}_{i_0},\ldots,\bar{a}_{i_n})$, où $i_0<\ldots<i_n$, exprimant que la suite $\bar{a}_n$ est indiscernable sur $\varnothing$,

ii- les axiomes $\varphi(b,\bar{c},\bar{a}_{2n}),\neg\varphi(b,\bar{c},\bar{a}_{2n+1})$,

iii- pour chaque $k\leq m$, les axiomes affirmant qu'un k-uplet de $\bar{a}_i$ d'indices croissants a même type sur $\bar{c}$ que $\bar{a}_0\frown\ldots\frown\bar{a}_{k-1}$.

On suppose donc que l'on dispose, à l'étape m, d'un modèle de ces axiomes. Grâce à ces $\bar{a}_i$ on peut interpréter chaque fragment fini du système d'axiomes qu'on obtient à l'étape $m+1$. D'où la consistance de cet ensemble d'axiome. On procède comme suit.

On fixe $i_0 < \ldots < i_{m-1}$, supposés mis dans l'ordre croissant. Par conséquent la suite des $\bar{a}_0 \frown \ldots \frown \bar{a}_{m-1} \frown \bar{a}_n$, pour $n > i_{m-1}$, est indiscernable. Alors elle ne peut être coupée en deux parties cofinales par une formule de paramètre $\bar{c}$. Donc pour n assez grand, tous les $\bar{a}_n$ satisfont $\psi(\bar{c}, \bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{m-1}}, \bar{y})$, ou alors satisfont toutes ses négations.

Cela consiste à supposer que cela se produit dès que $n > i_{m-1}$. En effet il suffit d'extraire une sous-suite de la manière suivante ; on part de $A_0 = \{\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{m-1}}\}$ on ajoute à A_0 un $\bar{a}_n$, où n est de même parité que m, à partir duquel la véracité de $\psi(\bar{c}, \bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{m-1}}, \bar{y})$ reste constante. Formant ainsi un A_1 ; puis on ajoute à A_1 un $\bar{a}_n$ d'indice supérieur à ceux de chacun de ses éléments, de même parité que $m+1$, et tel qu'on ait cette constance pour toutes les formules ψ correspondant à un m-uplet extrait de A_1 et ainsi de suite. Quand on a fini, il suffit de renuméroter la suite extraite.

Cette manipulation que l'on a faite pour une seule formule ψ, on peut également la faire quand il y a un nombre fini de formules $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Alors par compacité, il est consistant de supposer qu'à tout m-uplet croissants est associé un type p_s, où $s = (i_0, \ldots, i_{m-1})$, au-dessus de $\bar{c}$. De plus ce type est réalisé par tous les $\bar{a}_s \frown \bar{a}_n$, où $\bar{a}_s$ désigne le concaténé $\bar{a}_{i_0} \frown \bar{a}_{i_1} \frown \ldots \frown \bar{a}_{m_1}$, dès que $n > i_{m-1}$.

En outre, on peut supposer qu'il existe $\bar{a}_\omega$ tel que la suite $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n, \ldots, \bar{a}_\omega$ soit indiscernable (sur $\varnothing$) et telle que pour tout m-uplet croissant d'indices s, $\bar{a}_s \frown \bar{a}_\omega$ réalise p_s. En effet, dans un fragment fini de la théorie qui affirme cela, $\bar{a}_\omega$ peut être interprété par un $\bar{a}_n$, pour un entier n assez grand.

Etant donné une formule $\theta(\bar{c}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_m)$, on dit qu'il existe un entier N, tel que tous les p_s correspondant à une suite s dont le plus petit élément majore N contiennent θ, ou bien tous contiennent $\neg\theta$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite $s_0 < s_1 < \ldots < s_n < \ldots < s_i < s_j$ signifiant que le plus petit élément de s_j est strictement supérieur au plus grand de s_i, telle que le type p_{s_n} contient θ si n est pair, $\neg\theta$ si n est impair. Or la suite des $\bar{a}_{s_n} \frown \bar{a}_\omega$ est indiscernable, elle est coupée en deux parties cofinales par la formule θ. Alors on a trouvé une contradiction à l'hypothèse.

Par conséquent, en supprimant un nombre pair d'éléments au début de la suite, et en renumérotant, on voit que l'on peut supposer que les p_s contiennent tous θ, ou bien contiennent tous $\neg\theta$. On fait cela pour un nombre fini $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de formules. Par compacité, on peut supposer que tous les types p_s sont égaux. C'est précisément ce que l'on voulait démontrer.

On peut donc supposer que la suite $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ est indiscernable au-dessus de $\bar{c}$. C'est-à-dire que la suite $\bar{c} \frown \bar{a}_0, \ldots, \bar{c} \frown \bar{a}_n, \ldots$ est indiscernable. Elle est découpée en deux parties cofinales par la formule $\varphi(b, \bar{x}, \bar{y})$ et il suffit de faire passer $\bar{x}$ du côté des $\bar{y}$ pour avoir une formule en la seule variable x_1 qui a la propriété d'indépendance. $\square$

Le mot de groupe $w(x, y)$ construit dans la preuve du théorème 3.3.1 est en deux variables et il n'a aucune constante supplémentaire. Donc sans le fait 3.4.1, on trouve dans le corollaire 3.3.2 directement une formule sans paramètre qui a la propriété d'indépendance ayant seulement deux variables simples.

Fait 3.4.2 *[54] Un groupe hyperbolique sans torsion est stable.*

Il s'ensuit que les groupes hyperboliques sans torsion ne peuvent avoir la propriété d'indépendance. Ainsi on ne peut pas imaginer une version du théorème 3.3.1 où la classe de groupes se composerait de groupes élémentairement équivalents à un groupe hyperbolique sans torsion donné, ou d'une manière plus générale, à un ensemble fixé et *fini* de groupes hyperboliques sans torsion. La preuve du théorème 3.3.1 fournit cependant un ensemble dénombrable de groupes hyperboliques sans torsion.

La démonstration donnée fournit un mot de groupe $w(x, y)$ tel que la formule $\ulcorner w(x, y) = 1 \urcorner$ a la propriété d'indépendance relativement à la classe de groupes finiment presentés sans torsion satisfaisant la condition $C'(1/6)$. Cette classe est significativement plus petite que celle de tous les groupes hyperboliques sans torsion. Choisissant w assez long, on peut produire de la même façon de nouvelles formules ayant la propriété d'indépendance relative à la classe des groupes finiment presentés sans torsion satisfaisant la condition $C'(\lambda)$ avec λ arbitrairement petit. En effet, si on note par P_n la "probabilité" pour un mot de groupe cycliquement réduit $w(x,y)$ de longueur $n \geq 1$ donnant la propriété d'indépendance relative à la classe des groupes sans torsion satisfaisant la condition $C'(\lambda)$ (avec la formule $\ulcorner w(x,y) = 1 \urcorner$), on peut vérifier que

$$P_n \geq 1 - \frac{n^2}{2^{\lambda n}} - \frac{4n}{2^{\lambda n}},$$

et donc P_n tend rapidement vers 1 quand n tend vers l'infini. Cette estimation peut vérifier que la "probabilité" d'occurrence d'un sous-mot d'un déplacement cyclique de w de longueur $\lceil \lambda n \rceil$ dans deux "positions" données distinctes par rapport à w n'est pas plus grande que $1/2^{\lambda n}$, et que la "probabilité" pour un déplacement cyclique de w contenant une syllabe de longueur $\lceil \lambda n \rceil$ est moins que $4n/2^{\lambda n}$. Par exemple, la probabilité que dans un mot de groupe cycliquement réduit $w(x,y)$ de longueur au minimum 6, le même mot de longueur 4 se trouve comme un sous-mot commençant de la première lettre et aussi commençant de la troisième lettre, est au maximum $1/(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2) = 1/54$; en effet, comme toutes les lettres de w sauf les 4 premières sont fixées, il y a au maximum une manière de compléter w pour obtenir un mot dont le sous-mot initial de longueur 4 commence la troisième lettre, mais il y a au minimum $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ façon de finir ce mot par obtenir un mot de groupe cycliquement réduit.

On fixe un $\lambda > 0$. D'une manière générale, chaque fois que l'on choisit un mot de groupe arbitraire mais suffisamment long w, on obtiendra "très probablement" la formule $\ulcorner w(x,y) = 1 \urcorner$ avec la propriété d'indépendance relativement à la classe de groupes sans torsion finiment présenté satisfaisant la condition $C'(\lambda)$.

Parallèlement on peut se demander si $\mathrm{Th}(G)$, la théorie du premier ordre d'un groupe CSA existentiellement clos G, a la propriété d'ordre strict. Soit $w(x,y)$ un mot de groupe donné. Alors on examine l'existence des propriétés plus faibles que l'ordre strict pour les formules $\phi(x,y)$ de la forme

$$\ulcorner w(x,y) = 1 \urcorner.$$

Définition 3.4.3 *[60]*

(i) On dit qu'une formule $\phi(\bar{x},\bar{y})$ (ou un type $p(\bar{x},\bar{y})$) illustre la propriété d'ordre strict *dans un modèle $\mathcal{M}$ s'il définit un ordre partiel sur M avec les chaînes infinies des indiscernables.*

(ii) On dit qu'une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ (ou un type $p(\bar{x}, \bar{y})$) illustre la propriété d'ordre de degré *n, SOP_n dans un modèle $\mathcal{M}$ s'il définit sur $\mathcal{M}$ un graphe avec les chaînes infinies des indiscernables et aucun cycle de taille n.*

(iii) On dit qu'une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ (ou un type p) illustre la propriété d'ordre de degré *$\leq n$, $SOP_{\leq n}$, pour un entier $n \geq 3$, dans un modèle $\mathcal{M}$ s'il définit sur $\mathcal{M}$ un graphe avec les chaînes infinies des indiscernables et aucun cycle de taille $\leq n$.*

*(iv) On dit qu'un type $p(\bar{x}, \bar{y})$ (avec $\bar{x}, \bar{y}$ de taille possiblement infinie) illustre la propriété d'ordre !forte*propriété d'ordre forte, *SOP, dans un modèle $\mathcal{M}$ s'il définit sur $\mathcal{M}$ un graphe avec les chaînes infinies des indiscernables et aucun cycle.*

On invite le lecteur à consulter [57, Sect. 2] pour une discussion plus détaillée sur ces définitions et on rappelle le corollaire 2.6 du même article exprimant (pour $n \geq 3$) que

$$\begin{array}{lll} \text{la propriété d'ordre strict} & \Longrightarrow & \cdots \\ & \Longrightarrow & \mathrm{SOP}_{n+1} \\ & \Longrightarrow & \mathrm{SOP}_n \\ & \Longrightarrow & \cdots \\ & \Longrightarrow & \mathrm{SOP}_3 \quad \Longrightarrow \text{ pas simplicité} \end{array}$$

Soit w un mot de groupe cycliquement réduit, "long" et "arbitrairement choisi" dans deux variables x et y. Alors il est "très probable" que la formule $\ulcorner w(x, y) = 1 \urcorner$ ne manifestera pas la SOP_n. On peut utiliser un argument essentiellement similaire à celui utilisé dans la démonstration du théorème 3.3.1 afin de trouver des groupes sans torsion satisfaisant $C'(1/6)$ qui sont engenerés par les éléments $a_1 \ldots, a_n$ dans lesquels $w(a_i, a_j) = 1$ si et seulement si $j = i + 1$ modulo n. Ainsi le graphe défini par la formule $\ulcorner w(x, y) = 1 \urcorner$ sur un groupe CSA_f existentiellement clos contient des cycles de taille n. C'est une contradiction à une des conditions exigées pour l'existence de SOP_n. (L'autre est l'existence d'une chaîne infinie dans ce graphe dans un modèle donné.) Par conséquent on peut être tenté de travailler avec les mots "courts".

Dans le contexte des groupes commutatifs transitifs, le mot pur court $[x, y]$ attestant la commutation de x et y se résume à une relation d'équivalence, et donc est inutile. À ce propos, la formule $\phi(x, y)$ utilisée dans [60, Proposition 4.1] pour montrer que la théorie des groupes "en général" a SOP_3 est

$$(xyx^{-1} = y^2) \wedge (x \neq y).$$

Dans le contexte des groupes CSA, cela implique $y = 1$ et donc on a immédiatement, dans notre cas, l'absence de certains triangles (a_1, a_2, a_3) satisfaisant

$$\phi(a_1, a_2) \wedge \phi(a_2, a_3) \wedge \phi(a_3, a_1)$$

(donné par [59, p. 493] dans le contexte des groupes arbitraires). Mais on ne peut espérer trouver une chaîne infinie dans le graphe associé à la formule $\phi(x, y)$. Par conséquent cette formule ne peut illustrer la SOP_3 dans notre contexte des groupes CSA. Cela signifie qu'une formule illustrant la SOP_n d'un groupe CSA existentiellement clos, s'il existe, ne peut impliquer seulement une équation de “longueur arbitrairement choisie”, et il ne semblerait pas impliquer seulement des équations “courtes".

Chapitre 4

Divers amalgames

Comme on l'a déjà mentionné dans "Histoire et motivation" la méthode de Hrushovski s'averait très difficile pour démontrer l'existence de mauvais groupe. Donc on ne peut pas touver une réponse ni négative ni positive pour leur existence. On examine les manières différentes de constructions de nouveaux groupes depuis quelques groupes donnés. L'éventuelle existence de mauvais groupes se trouve peut-être dans des assemblages de telles constructions.

4.1 Stabilité et produits libres

Après les huit articles de Sela sur la théorie du groupe libre, de [49] à [54] (et en cherchant les mauvais groupes), la question de la stabilité d'un produit libre de deux groupes stables arbitraires a été soulevée par E. Jaligot, avec comme conjecture une réponse positive [26]. Cependant, il semblerait qu'une solution entière soit un grand projet de généralisation, des groupes libres aux produits libres, des travaux de Sela sur le groupe libre. La première étape dans ce processus est de comprendre les diagrammes de Makanin-Razborov pour les produits libres, ce qui sera publié dans [27]. Dans l'attente de ce résultat, on examine la stabilité des mots de groupe quand la longueur des éléments est bornée.

Supposons que $G * H$ soit un produit libre de deux groupes G et H. Pour avoir l'unicité des représentations des éléments de $G * H$ en forme normale, on peut choisir l'identité de G (et non de H) comme l'élément trivial de $G * H$.

Pour un entier $r \geq 1$, soit $B_r(G * H)$ la boule de rayon r, l'ensemble des éléments de $G * H$ de longueur $\leq r$. Par abus de notation et de language on peut dire qu'un uplet est dans un ensemble si chaque élément de cet uplet est dans cet ensemble.

Fait 4.1.1 (Théorème de Ramsey Fini) *Pour chaque triplet (k, n, m) d'entiers, il existe un entier $R(k, n, m)$ tel que chaque fois que les n-uplets non ordonnés d'un ensemble de taille au minimum $R(k, n, m)$ sont coloriés en k couleurs, alors il existe un sous-ensemble monochrome de taille m.*

Définition 4.1.2 *Soient $\mathcal{M}$ une structure et $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule dans le language de $\mathcal{M}$ (peut-être contenant des paramètres de M). Soit B un sous-ensemble de M. On dit que ϕ est* stable relativement à $(\mathcal{M}, B)$ *s'il existe un entier maximal fini m, pour lequel il existe $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_j$ dans B, $1 \leq i, j \leq m$, tels que*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \text{ si et seulement si } i \leq j.$$

Le maximum des tels m est appelé l'indice de stabilité *ou* l'indice d'échelle *de ϕ relativement à $(\mathcal{M}, B)$.*

Bien qu'on ne les ait pas utilisé ici, une définition analogue peut être donnée pour la propriété d'indépendance au lieu de la propriété d'ordre.

Fait 4.1.3 *Les formules stables relativement à $(\mathcal{M}, B)$ sont closes par l'adjonction de paramètres de B et par combinaisons booléennes.*

Preuve. Les cas pour l'adjonction de paramètres de B et pour la négation sont clairs. Alors, pour les combinaisons booléennes, il suffit de montrer le cas pour la disjonction.

Soient $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ deux formules stables relativement à $(\mathcal{M}, B)$, avec les indices de stabilité n_ϕ et n_ψ respectivement. Soit μ un entier supérieur au $\max\{n_\phi, n_\psi\}$. On montre que le nombre de Ramsey $R(2, 2, \mu)$ est une borne pour l'indice de stabilité de $[\phi \vee \psi]$ relativement à $(\mathcal{M}, B)$.

Supposons, en vue d'une contradiction, qu'il existe des uplets

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_m \text{ et } \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_j, \ldots, \bar{b}_m$$

dans B, avec $m > R(2, 2, \mu)$, tels que la formule $[\phi \vee \psi](\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ est vraie si et seulement si $i \leq j$. On attache à chaque paire $\{i, j\}$ de $\{1, \cdots, m\}$ une couleur, disons verte si $\phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ ou $\phi(\bar{a}_j, \bar{b}_i)$ est vraie, et rouge si $\psi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ ou $\psi(\bar{a}_j, \bar{b}_i)$ est vraie. Par hypothèse, chaque paire $\{i, j\}$ a une couleur (verte, rouge, ou les deux).

Il est consistant de supposer, par le fait 4.1.1, qu'il existe un sous-ensemble de $\{1, \cdots, m\}$ de taille au minimum μ dont les paires d'éléments sont monochromes. Comme $\phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ et $\psi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ ne sont jamais vrais pour $i > j$, on trouve que sur le nouveau sous-ensemble monochrome, $\phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ est vrai si et seulement si $i \leq j$ ou $\psi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ est vrai si et seulement si $i \leq j$. Mais c'est une contradiction avec la supposition que $\mu > \max\{n_\phi, n_\psi\}$. $\square$

Une structure $\mathcal{M}$ est *stable sans-quantificateurs* si les formules sans quatificateurs sont toutes stables relativement à $(\mathcal{M}, M)$. Cela correspond à la notion usuelle de stabilité de $\mathcal{M}$ pour les formules sans quantificateurs. Du fait 4.1.3, c'est équivalent à la condition affirmant que les formules atomiques $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans paramètre définissent des ensembles stables dans $\mathcal{M}$ dans le sens traditionnel. Certainement, ce fait est exprimé dans la théorie universelle de $\mathcal{M}$.

On montre un lemme technique :

Lemme 4.1.4 *Soient G et H deux groupes stables sans quantificateurs, et $w(\bar{x}, \bar{y})$ un mot de groupe où chaque uplet de variables $\bar{x}$ et $\bar{y}$ est coupé en deux parties ("sous-uplets") :*

$$\bar{x} = (\bar{x}^G, \bar{x}^H), \quad \bar{y} = (\bar{y}^G, \bar{y}^H).$$

Alors il existe un entier n (qui dépend que de w et de la séparation des variables ci-dessus) qui est une borne pour l'ensemble des entiers m pour lesquels il y a des interprétations naturelles

$$\bar{a}_i = (\bar{a_i}^G, \bar{a_i}^H) \text{ et } \bar{b_j} = (\bar{b_j}^G, \bar{b_j}^H)$$

dans $G * H$ de $\bar{x} = (\bar{x}^G, \bar{x}^H)$ et $\bar{y} = (\bar{y}^G, \bar{y}^H)$ respectivement, $1 \leq i, j \leq m$, telles que pour chaque i et chaque j dans $\{1, \cdots, m\}$ on a :

– $w(\bar{a}_i, \bar{b_j}) = 1$ *si et seulement si* $i \leq j$, *et*
– *chaque coordonnée des uplets* $\bar{a}_i{}^G$, $\bar{b_j}^G$ *(respectivement* $\bar{a}_i{}^H$, $\bar{b_j}^H$*) est dans* G *(respectivement dans* H*).*

Preuve. Le mot $w(\bar{x}, \bar{y})$ peut être décomposé (de façon unique) comme

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = u_1(\bar{x}^{\epsilon_1}, \bar{y}^{\epsilon_1}) \cdots u_k(\bar{x}^{\epsilon_k}, \bar{y}^{\epsilon_k}) \cdots u_\ell(\bar{x}^{\epsilon_\ell}, \bar{y}^{\epsilon_\ell})$$

où $\ell \geq 1$ et, pour $1 \leq k \leq \ell$, on dénote par ϵ_k le symbole G ou H alternativement.

On procède par induction sur ℓ. Pour $\ell = 1$ tout se trouve dans le même groupe, G ou H, et ainsi le lemme est vrai dans ce cas grâce à la stabilité sans quantificateurs de G et H.

Supposons qu'on a un contre-exemple $w(\bar{x}, \bar{y})$, où le ℓ correspondant (ℓ est clairement plus grand que 1) est minimal. Par l'hypothèse inductive, pour chaque sous-expression formelle "propre" du produit

$$w = u_1 \cdots u_\ell,$$

il existe une borne m sur l'existence d'éléments avec nos conditions exigées (pour cette sous-expression formelle). Selon le fait 4.1.3, il existe toujours une telle borne quand on considère la négation de telles sous-expressions formelles. En d'autres termes, pour chaque produit propre Πu_i de $u_1 \cdots u_\ell$, où les parties avec le même exposant G ou H sont enchaînées. On trouve donc, une borne comme définie dans le lemme pour les ensembles de solutions pour les formules $\Pi u_i = 1$ et $\Pi u_i \neq 1$. Soit μ un entier (fini) plus grand que le maximum de toutes ces bornes.

On montre que le nombre de Ramsey $R(4^\ell, 2, \mu)$ a la propriété exigée.

Sinon, on trouve deux suites $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_m$ et $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b_j}, \ldots, \bar{b}_m$, avec $m > R(4^\ell, 2, \mu)$, telles que

$$w(\bar{a}_i, \bar{b_j}) = 1 \text{ si et seulement si } i \leq j$$

On colorie les paires $\{i, j\}$ de $\{1, ..., m\}$ avec 4^ℓ couleurs décrivant, pour chaque $k \in \{1, \cdots, \ell\}$, quand :

(A) $u_k(\bar{a}_i^{\epsilon_k}, \bar{b}_j^{\epsilon_k}) = 1$ et $u_k(\bar{a}_j^{\epsilon_k}, \bar{b}_i^{\epsilon_k}) \neq 1$ pour $i < j$;
(B) $u_k(\bar{a}_i^{\epsilon_k}, \bar{b}_j^{\epsilon_k}) \neq 1$ et $u_k(\bar{a}_j^{\epsilon_k}, \bar{b}_i^{\epsilon_k}) = 1$ pour $i < j$;
(C) $u_k(\bar{a}_i^{\epsilon_k}, \bar{b}_j^{\epsilon_k}) \neq 1$ et $u_k(\bar{a}_j^{\epsilon_k}, \bar{b}_i^{\epsilon_k}) \neq 1$;
(D) $u_k(\bar{a}_i^{\epsilon_k}, \bar{b}_j^{\epsilon_k}) = 1$ et $u_k(\bar{a}_j^{\epsilon_k}, \bar{b}_i^{\epsilon_k}) = 1$.

Il faut noter que chaque paire $\{i, j\}$ est bien définie et uniquement coloriée dans cette manipulation. Par la définition de $R(4^\ell, 2, \mu)$ et le fait 4.1.1, il existe un sous-ensemble monochrome de $\{1, \cdots, m\}$ de taille au minimum μ.

Suivant le fait que μ est plus grand que les indices de stabilité de formules $u_k = 1$ et $u_k \neq 1$ dans le groupe ϵ_k, il est consistant de supposer que pour chaque “coordonnée” u_k, les deux premières couleurs (A) et (B) figurant ci-dessus sont exclues. Cela signifie que pour chaque coordonnée u_k la valeur de u_k est toujours 1 ou différente de 1 sur notre sous-ensemble monochrome.

Manifestement il y a au minimum une coordonnée u_k constamment égale à 1 sur notre sous-ensemble monochrome. Sinon toutes les interprétations de l'expression formelle

$$w = \Pi_{k=1}^{\ell} u_k$$

dans $G * H$ engendreraient une forme normale dans le produit libre $G * H$, puisque tous les u_k auraient des interprétations non-triviales alternativement dans G ou H (et comme $\ell > 1$!). À ce moment-là, on trouverait une valeur non-triviale pour tous les termes $w(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$. C'est une contradiction comme environ une moitié des termes, ceux pour lesquels $i > j$, sont triviaux.

Maintenant on peut jeter les coordonnées u_k qui sont constamment égales à 1. Dès lors l'hypothèse d'induction s'applique aux sous-mots *propres* de $w = u_1 \cdots u_\ell$ qui restent. À ce moment-là μ est plus grand que l'indice de stabilité de ces sous-mots propres. C'est une contradiction avec l'hypothèse d'induction. □

On va maintenant étudier la stabilité des boules de produits libres de groupes dans le théorème suivant. Par un “changement de variables” approprié cela va se réduire au lemme 4.1.4.

Théorème 4.1.5 *Soit $G * H$ un produit libre de deux groupes sans quantificateur stables, G and H. Soient $w(\bar{x}, \bar{y})$ un mot de groupe et $r \geq 1$ un entier.*

Alors il existe un entier n (dépendant de w et, a priori, de r) qui borne l'ensemble des entiers naturels m pour lesquels il existe des suites $\bar{a}_1$, ..., $\bar{a}_i$, ..., $\bar{a}_m$ *et* $\bar{b}_1$, ..., $\bar{b}_j$, ..., $\bar{b}_m$ *dans* $B_r(G*H)$ *telles que* $w(\bar{a}_i, \bar{b}_j) = 1$ *si et seulement si* $i \leq j$.

Preuve. Supposons en vue d'une contradiction que pour chaque m, il existe des suites $\bar{a}_1$, ..., $\bar{a}_i$, ..., $\bar{a}_m$ et $\bar{b}_1$, ..., $\bar{b}_j$, ..., $\bar{b}_m$ dans $B_r(G * H)$ telles que $w(\bar{a}_i, \bar{b}_j) = 1$ si et seulement si $i \leq j$. Alors on contredit le Lemme 4.1.4 par un "changement de variables" approprié.

Chaque élément de $B_r(G * H)$ peut être écrit comme un produit de $r + 1$ éléments de G et H (alternativement). Cela signifie que chaque élément z de $B_r(G * H)$ a la forme

$$(*) \qquad z = z_1^G z_2^H \cdots z_{r+1}^{G \text{ ou } H}$$

avec tous les facteurs de ce produit alternativement dans G ou H, comme indiqué naturellement par la notation en exposant. Il faut noter que l'on utilise $r + 1$ indices au lieu de r. C'est simplement car on ne sait jamais si une expression dans la forme proposée dans $(*)$ commence par un élément non-trivial de G ou H. Alors dans cette forme soit le premier soit le dernier élément est l'identité.

Maintenant chaque variable des uplets $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans le mot $w(\bar{x}, \bar{y})$ peut être formellement remplacée par une expression comme dans la partie droite de l'équation $(*)$, i.e. chaque variable de l'uplet $\bar{x}$ est remplacée par une expression de la forme $x'^G_1 \cdots x'^{G \text{ ou } H}_{r+1}$ et chaque variable de l'uplet $\bar{y}$ est remplacée par une expression de la forme $y'^G_1 \cdots y'^{G \text{ ou } H}_{r+1}$. (En particulier on a multiplié le nombre original de variables dans $w(\bar{x}, \bar{y})$ par $r + 1$).

Après toutes ces substitutions, on trouve un nouveau mot w' en ces nouvelles variables comme suit : quand un inverse d'une variable originale apparaît, on prend l'inverse visuel de son expression comme dans $(*)$, et pour les produits on prend simplement les concaténations. On attire spécialement l'attention du lecteur sur le fait que l'on ne procède pas aux simplifications avec les nouvelles variables comme on le ferait avec les éléments d'un groupe. Le nouveau mot que l'on trouve a la forme

$$w'(\bar{x'}, \bar{y'}) = w'((\bar{x'}^G, \bar{x'}^H), (\bar{y'}^G, \bar{y'}^H))$$

On peut maintenant appliquer le lemme 4.1.4 avec ce nouveau mot w'. Sans aucun doute on trouve une contradiction à l'hypothèse du lemme 4.1.4 avec l'interprétation naturelle de $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_j$ dans les nouvelles variables comme dans l'égalité $(*)$. Cela termine notre démonstration. □

Remarque 4.1.6 *Malheureusement, la preuve ci-dessus du théorème 4.1.5 est fortement dépendante de r. Quand w est fixé, la borne n dans le théorème 4.1.5 augmente avec r. On note cependant que dans notre démonstration, r apparaît seulement dans le changement de variables, et en particulier pas via le lemme 4.1.4. Certainement, une démonstration de la stabilité sans quantificateurs du produit libre de deux (ou plus) groupes stables sans quantificateurs exige une technique qui ne repose pas sur tel changement de variables fixé.*

En revanche le nombre de groupes dans le produit libre est en aucun cas limité à deux. Les notions de longueur d'un élément et de boule dans un produit libre d'un nombre arbitraire de groupes ont une généralisation naturelle. Une généralisation du théorème 4.1.5 peut s'écrire comme suit.

Théorème 4.1.7 *Soient $\{G_s : 1 \leq s \leq k\}$ une famille de groupes stables sans quantificateurs et $*G_s$ leur produit libre. Supposons que $w(\bar{x}, \bar{y})$ est un mot de groupe et que $r \geq 1$ est un entier. Alors il existe un entier n qui ne dépend que de w et r et qui est une borne pour l'ensemble des m tels qu'il existe*

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_m \text{ et } \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_j, \ldots, \bar{b}_m$$

dans $B_r(*G_s)$ telles que $w(\bar{a}_i, \bar{b}_j) = 1$ si et seulement si $i \leq j$. En particulier chaque formule sans quantificateur (possiblement avec quelques paramètres) est stable relativement à $(*G_i, B_r(*G_i))$.

Preuve. On refait ce que l'on a fait dans la démonstration du théorème 4.1.5. Pour le changement de variables, on a besoin de décomposer chaque élément de $B_r(*G_i)$ comme un produit prenant les variables attachées à chaque G_s. Cela donnerait une expression plus longue que celle de l'égalité $(*)$ dans la démonstration de théorème 4.1.5. Mais puisque tous les sous-mots u'_k restent finis, la décomposition $w' = u'_1 \cdots u'_\ell$ de $w(\bar{x}, \bar{y})$ sera finie aussi. On continue par une séparation de variables en k pièces au lieu de 2 et par induction sur ℓ.

Notre dernière affirmation est une application du fait 4.1.3. □

4.2 Autres constructions par tours

Pour un entier $n > 1$, on dénote par F_n le groupe libre en n générateurs. Rappelons que tous les groupes G sont considérés comme des structures du premier ordre $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ où $\cdot$, $^{-1}$ et 1 dénotent respectivement la multiplication, l'inverse, et l'identité d'un groupe.

Fait 4.2.1 *[50, 51, 52, 54]*

(1) Pour chaque $2 \leq n \leq m$, le morphisme injectif naturel $F_n \leq F_m$ est un morphisme injectif élémentaire.

(2) Pour chaque $n \geq 2$, la théorie complète de F_n, $Th(F_n)$ est stable.

Soit F un groupe libre avec un nombre dénombrable de générateurs. Le fait 4.2.1 donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2 *Les morphismes injectifs naturels*

$$F_2 \leq, \ldots F_n \leq \ldots \leq F$$

sont tous élémentaires. En particulier chaque F_n est une sous-structure élémentaire de F, et la théorie complète de F est stable.

Lemme 4.2.3 *Soit $k \geq 2$, et soit G un groupe CSA sans torsion et dénombrable dans lequel les sous-groupes maximaux abéliens sont cycliques. Soit a_0 un générateur quelconque d'un sous-groupe maximal abélien de G. Alors G se plonge dans un groupe CSA sans torsion $H = \langle F, r\rangle$ dans lequel les sous-groupes maximaux abéliens sont cycliques. Où F est un groupe libre sur un nombre dénombrable de générateurs et $r^k = a_0$, et où les sous-groupes maximaux abéliens de G sont conjugués par H. Surtout chaque élément de G a une racine k-ème dans H.*

Preuve. Le groupe G a un nombre dénombrable de sous-groupes maximaux abéliens. En outre, il y a un nombre dénombrable de classes de conjugaison de tels sous-groupes maximaux abéliens. Ces classes peuvent être énumérées par $i < \omega$.

Pour chaque telle classe de conjugaison, on fixe un sous-groupe maximal (cyclique) abélien, A_i, et dans A_i on fixe un générateur a_i. Il faut observer que l'on peut toujours prendre comme a_0 n'importe quel générateur donnée d'un sous-groupe maximal abélien de G.

On définit de manière inductive sur i une famille croissante de sur-groupes G_i de G.

1. $G_0 = G$
2. G_{i+1} est l'extension HNN de G_i, $\langle G_i, t_i | a_i^{t_i} = a_{i+1} \rangle$.

Notamment chaque G_{i+1} est engendré par G_0, ainsi que par les éléments $t_0, \ldots, t_i$.

Soit

$$G_\omega = \bigcup_{i<\omega} G_i$$

Il s'ensuit que G_ω est engendré par G_0 ainsi que par les éléments t_i. Par la construction et par [37, le lemme de Britton], il n'y a pas d'éléments distincts t_i et t_j dans G_ω qui satisfont une relation quelconque. En particulier ils engendrent un groupe libre en deux générateurs t_i et t_j.

De plus, dans G_ω tous les sous-groupes maximaux abéliens de G_0 sont deux-à-deux conjugués par un sous-groupe de G_ω engendré par tous les éléments t_i. En particulier dans G_ω on a ;

$$G_0 \subseteq \langle a_0 \rangle^{\langle (t_i)_{i<\omega} | \rangle}$$

et G_ω est engendré par $\langle a_0 \rangle$ et $\langle (t_i)_{i<\omega} | \rangle$.

On considère maintenant un sur-groupe cyclique abélien sans torsion R de $A_0 = \langle a_0 \rangle$ engendré par un élément r tel que $r^k = a_0$. Comme $k \geq 2$ par l'hypothèse, r n'appartient pas au sous-groupe $\langle a_0 \rangle$ de R.

On forme le produit libre de R et G_ω avec $\langle a_0 \rangle$ comme un sous-groupe amalgamé. Cela signifie que

$$G_{\omega+1} = R *_{\langle a_0 \rangle} G_\omega$$

comme $r^k = a_0$ et G_ω est engendré par a_0 et les t_i ainsi que par r. Donc on a

$$G_{\omega+1} = \langle r, (t_i)_{i<\omega} \rangle$$

et le deuxième ensemble de générateurs engendre librement le groupe libre F.

Le morphisme injectif naturel

$$G \simeq G_0 \leq G_{\omega+1} \simeq H$$

est le plongement qui satisfait notre lemme. Il faut noter que la classe des groupes CSA est inductive. Comme H est une limite directe de groupes CSA, c'est aussi un groupe CSA et de plus les sous-groupes maximaux abéliens de H sont cycliques par [31]. $\square$

Selon le lemme 4.2.3, on peut trouver une série infinie de plongements

$${}^1G \leq {}^2G \leq \ldots {}^{k-1}G \leq {}^kG \ldots$$

où ${}^1G$ est un groupe libre dénombrable et non-abélien tel que pour chaque $k \geq 2$ le morphisme injectif ${}^{k-1}G \leq {}^kG$ est comme dans le lemme 4.2.3, à savoir tel que les sous-groupes maximaux abéliens de ${}^{k-1}G$ sont conjugués dans ${}^kG$ et chaque élément dans ${}^{k-1}G$ est k-divisible dans ${}^kG$. On remarque que chaque groupe ${}^kG$ est un groupe CSA sans torsion dans lequel les sous-groupes maximaux abéliens sont cycliques.

On fixe maintenant le groupe

$$G = \bigcup_{k \geq 1} {}^kG$$

Par l'inductivité de la classe des groupes CSA, G est un groupe CSA. Comme les sous-groupes maximaux abéliens coïncident avec les centralisateurs d'éléments non-triviaux dans les groupes CSA, il s'ensuit que les sous-groupes maximaux abéliens de G sont conjugués par construction. Une fois de plus la construction implique que chaque élément g de G est n-divisible pour chaque n, et comme les sous-groupes maximaux abéliens coïncident avec les centralisateurs d'éléments non-triviaux, on conclut que les sous-groupes maximaux abéliens sont divisibles.

Certainement G n'est pas abélien puisqu'il contient le groupe libre non-abélien ${}^1G$, et on note qu'il est de plus sans torsion. On obtient par conséquent un groupe CSA non-abélien dans lequel les sous-groupes maximaux abéliens sont conjugués et divisibles, comme une union dénombrable de groupes CSA sans torsion dans lesquels les sous-groupes maximaux abéliens sont cycliques.

Puisqu'un groupe libre est stable, la question de la stabilité de ce groupe G se présente. Pour vérifier la stabilité d'ensembles définissables sans quantificateurs, on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.2.4 *Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule sans quantificateurs dans le langage des groupes. Cela signifie qu'elle est une combinaison booléenne d'équations dans les variables $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Si un groupe G est une union d'une famille croissante de sous-groupes G_i, et si φ définit un ensemble stable dans chaque G_i avec une borne uniforme sur les indices de stabilité de φ dans chaque G_i, alors φ définit un ensemble stable dans G.*

Preuve. Par hypothèse, il existe une borne uniforme sur les indices de stabilité de φ dans G_i quand i change. Par conséquent il existe un entier n plus grand que tous les indices de stabilité de G_i. Alors aucun sous-groupe G_i ne peut avoir un indice de stabilité de taille n.

On voit que G ne peut pas avoir un indice de stabilité de taille n. Sinon tous les éléments de uplets associés dans une telle échelle appartiendraient à un sous-groupe G_i. C'est une contradiction comme φ est stable sans quantificateur.

Cela montre que la formule φ définit un ensemble stable dans G. □

Une autre construction d'un groupe CSA non-abélien où les sous-groupes maximaux abéliens sont conjugués et divisibles est comme suit. Cette fois on ajoute toutes les racines simultanément et non étape par étape. Il faut noter que la tentative de garder certaines parties de la stabilité des groupes libres est toujours présente.

Au lieu de commencer par le groupe libre F, commençons par ${}^1G = \mathbb{Q} * F$. Fixons a_0 comme un élément qui correspond à l'élément 1 de $\mathbb{Q}$ (dans la notation additive). On passe de ${}^1G$ à ${}^2G$ et on continue comme suit. Numérotons par $a_1, a_2, \ldots$, etc, les générateurs de sous-groupes cycliques maximaux abéliens de ${}^1G$. On inclut précisément un sous-groupe cyclique maximal abélien dans chaque classe de conjugaison de tels sous-groupes. On trouve un morphisme injectif plongeant $\langle a_0 \rangle$ dans une copie de $\mathbb{Q}$, de telle façon que a_0 représente 1 dans $\mathbb{Q}$ et toujours dans la notation additive. On forme le produit libre de ${}^1G$ et cette nouvelle copie de $\mathbb{Q}$ avec $\langle a_0 \rangle$ comme sous-groupe amalgamé. On trouve un nouveau groupe CSA. On peut conjuguer a_0 à a_1 en formant une extension *HNN* appropriée avec un élément t_0. La manipulation que l'on a faite dans le lemme 4.2.3, on la continue afin d'obtenir dans chaque étape des groupes CSA à l'aide des résultats de [31].

Si on visualise ${}^2G$ comme une union, on se rend compte que c'est un groupe CSA avec une classe de conjugaison de sous-groupes maximaux abéliens divisibles. De plus ${}^2G$ est engendré par ces sous-groupes et un groupe libre dénombrable (engendré par tous les t_i ajoutés pendant les formations successives des extensions HNN).

Ensuite on peut construire, de la même façon, une suite infinie de morphismes injectifs

$$ {}^1G \leq {}^2G \leq \ldots {}^{k-1}G \leq {}^kG \ldots $$

telle que pour chaque $k \geq 2$ le morphisme injectif ${}^{k-1}G \leq {}^kG$ est comme dans la méthode mentionnée ci-dessus. En particulier chaque ${}^kG$ est engendré par un groupe abélien divisible qui est isomorphe à $\mathbb{Q}$ et un groupe libre F. Encore l'union de ces groupes est un groupe CSA dans lequel les sous-groupes maximaux abéliens sont conjugués et divisibles.

Question : Est-ce que des groupes construits par des manipulations comme ci-dessus sont stables ?

Index

Bibliographie

[1] A. Baudisch. *A new uncountably categorical group.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 348, no. 10, 3889–3940, 1996.

[2] A. Baudisch, M. Hills, A. Martin Pizarro, F. O. Wagner, *Die böse Farbe.* Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu. accéssible sur http ://math.univ-lyon1.fr/∼wagner/publ.html

[3] A. Borovik and A. Nesin. Groups of finite Morley rank, volume 26 of *Oxford Logic Guides.* The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 1994.

[4] A. Borovik and B. Poizat. Simple groups of finite Morley rank without nonnilpotent connected subgroups. Preprint mimeographed by VINITI, N2062B-B,(in Russian) 1990.

[5] K. S. Brown. Cohomology of groups, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[6] S. Buechler. Essential stability theory, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[7] E. Casanovas. The number of types in simple theorie, *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 98 no. 1-3, 69–86,1999.

[8] I. M. Chiswell, D. J. Collins et J. Huebschmann. *Aspherical group presentations.* Math. Z., vol. 178, no. 1, 1–36, 1981.

[9] G. Cherlin. Groups of small Morley rank, *Ann. Math. Logic*, vol. 17 no. 1-2, 1–28,1979.

[10] Paul M. Cohn. Universal algebra, volume 6 of *Mathematics and its Application.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] M. Coornaert, T. Delzant et A. Papadopoulos. Géométrie et théorie des groupes, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics.* D.Reidel Publishing, Dordrecht, 1981. Revised edition.

[12] L. J. Corredor. Bad groups of finite Morley rank, *J. Symbolic Logic*, vol. 54 no.3, 768–77,1987.

[13] É. Ghys et P. de la Harpe, editeurs. Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[14] J. B. Goode. *Hrushovski's geometries.* Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory (Wendisch-Rietz, 1989), vol. 104, 106–1176, 1989.

[15] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[16] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[17] J. C. Hart. Using the CW-Complex to Represent the Topological Structure of Implicit Surfaces and Solids accessible sur http ://graphics.cs.uiuc.edu/∼jch/papers/cw.pdf.

[18] H. Hilton. *An Introduction to the Theory of Groups of finite order,* Clarendon press,Oxford, 1908.

[19] J. Hirschfeld et W. H. Wheeler. Forcing, arithmetic, division rings, volume 454 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[20] W. Hodges. Model theory, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[21] E. Hrushovski. *A new strongly minimal set.* Ann. Pure Appl. Logic, vol. 62, no. 2, 147–166, 1993.

[22] E. Hrushovski et B. Zilber. *Zariski geometries.* J. Amer. Math. Soc., vol. 9, no. 1, 1–56, 1996.

[23] J. Huebschmann. *Cohomology theory of aspherical groups and of small cancellation groups*. J. Pure Appl. Algebra, vol. 14, no. 2, 137–143, 1979.

[24] S. V. Ivanov and A. Yu. Ol'shanskii. Some applications of graded diagrams in combinatorial group theorys. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 160 ,258–308, 1991.

[25] E. Jaligot. Full Frobenius groups of finite Morley rank and the Feit-Thompson theorem. *Bull. Symbolic Logic*, vol. 7, no. 3, 315–328, 2001.

[26] E. Jaligot. *Groups of finite dimension in model theory.* In C. Glymour, W. Wang, and D. Westerstahl, editors, *Proceedings from the 13th Interna-*

tional Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Sciences, Beijing, august 2007. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, King's College Publications, London, 2008.

[27] E. Jaligot and Z. Sela. *Makanin-Razborov diagrams over free products.*

[28] E. Jaligot. *Contributions à la Classification des groupes simples de rang Morley fini.* Thèse, présenté devant l'université Claude bernard de Lyon 1, 1999.

[29] E. Jaligot, A. Muranov, and A. Neman. Independence property and hyperbolic groups. *Bull. Symbolic Logic*, vol. 14, no. 1, 88–98, 2008.

[30] E. Jaligot and A. Neman. Embeddings and chains of free groups. En préparation, 2008.

[31] E. Jaligot et A. Ould Houcine. *Existentially closed CSA-groups.* J. Algebra, vol. 280, no. 2, 772–796, 2004.

[32] B. Kim et A. Pillay. *Simple theories.* Ann. Pure Appl. Logic, vol. 88, no. 2-3, 149–164, 1997.

[33] A. Karrass et D. Solitar. *On finitely generated subgroups of a free productp.* Math. Z., vol. 108, 285–287, 1969.

[34] A. Karrass et D. Solitar. *The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 150, 227–255, 1970.

[35] A. Karrass et D. Solitar. *Subgroups of* HNN *groups and groups with one defining relation.* Canad. J. Math., vol. 23, 627–643, 1971.

[36] A. Karrass et D. Solitar. *The free product of two groups with a malnormal amalgamated subgroup.* Canad. J. Math., vol. 23, 933–959, 1971.

[37] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[38] M. Morley. *Categoricity in power.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 114, 514–538, 1963.

[39] A. Yu. Muranov. *Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width.* Internat. J. Algebra Comput., vol. 17, no. 3, pages 607–659, 2007.

[40] A. G. Myasnikov et V. N. Remeslennikov. *Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups.* Internat. J. Algebra Comput., vol. 6, no. 6, pages 687–711, 1996.

[41] A. Neman. *Stability and bounded balls of free products.*. Submitted, 2008.

[42] A. Nesin. *Nonsolvable groups of Morley rank* 3. J. Algebra., vol. 124, no. 1, 199–218, 1989.

[43] A. Yu. Ol'shanskiĭ. Geometry of defining relations in groups, volume 70 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series).* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin.

[44] B. Poizat. Cours de théorie des modèles. Bruno Poizat, Villeurbanne, 1985. Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].

[45] B. Poizat. Groupes stables. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah [Light of Logic and Knowledge], no 2, Lyon, 1987. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. [An attempt at reconciling algebraic geometry and mathematical logic].

[46] M. Rosenlicht. *On a result of Baer.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 13, no. 1, pages 99–101, 1962.

[47] P. Rothmaler. Introduction to model theory, volume 15 of *Algebra, Logic and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, 2000 Prepared by Frank Reitmaier, Translated and revised from the 1995 German original by the author.

[48] J. J. Rotman. An introduction to the theory of groups, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[49] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, vol. 93,31–105, 2001.

[50] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. V_1. Quantifier elimination. I *Israel J. Math.*, vol. 150, 1–197, 2005.

[51] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. V_2. Quantifier elimination. II *Geom. Funct. Anal.*, vol. 16, no. 3, 537–706, 2006.

[52] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group *Geom. Funct. Anal.*, vol. 16, no. 3, 707–730, 2006.

[53] Z. Sela. Diophantine geometry over groups VII : The elementary theory of hyperbolic groups. preprint : http ://www.ma.huji.ac.il/∼zlil/, 2002.

[54] Z. Sela. Diophantine geometry over groups VIII : Stability. preprint : http ://www.ma.huji.ac.il/∼zlil/, 2007.

[55] S. Shelah. The number of non-isomorphic models of an unstable first-order theory, *Israel J. Math.*, vol. 9, 473–487, 1971.

[56] S. Shelah. Simple unstable theories. *Ann. Math. Logic*, vol. 19, no. 3, 177–2030, 1980.

[57] S. Shelah. Toward classifying unstable theories. *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 80, no. 3, 229–255, 1996.

[58] S. Shelah. Classification theory and the number of nonisomorphic models, volume 92 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[59] J. R. Stallings. Non-positively curved triangles of groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 491–503. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[60] S. Shelah and A. Usvyatsov. Banach spaces and groups—order properties and universal models. *Israel J. Math.*, vol. 152, 245–270, 2006.

[61] F. O. Wagner. *Stable groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[62] G. W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*. Springer-Verlag, New York, 1978.

[63] B. I. Zil'ber. Groups and rings whose theory is categorical. *Fund. Math.*, vol. 95, no. 3, 173–188, 1977.

<u>Resumé :</u> Notre travail ici concerne certaines pistes pour des constructions de nouveaux groupes, et en particulier de contre-exemples à la conjecture de Cherlin-Zilber.

On parvient à trouver une réponse pour la stabilité de groupes CSA existentiellement clos. On exhibe un mot de groupe en deux variables qui a la propriété d'indépendance par rapport à la classe de groupes hyperboliques sans torsion. On en déduit que l'équation correspondante donne la propriété d'indépendance des groupes CSA existentiellement clos, ce qui en particulier implique leur instabilité.

En outre, on prouve que les équations, et en particulier les ensembles définissables sans quantificateurs, définissent des ensembles stables dans les boules bornées des produits libres de groupes, en utilisant la version finie du théorème de Ramsey.

Enfin, on introduit certains groupes construits comme tours particulières de produits libres et d'extensions HNN.

<u>Abstract :</u> Our work here relates to certain routes for the construction of new groups, and in particular, of counter-examples to the Cherlin-Zilber conjecture.

We managed to find an answer for the stability of existentially closed CSA-groups. We build a group word in two variables that has the independence property relatively to the class of torsion-free hyperbolic groups. We deduced that the corresponding equation gives the independence property of existentially closed CSA groups which in turn implies their instability.

Moreover, we demonstrate that group words, and in particular quantifier-free definable sets, define stable sets in bounded balls of free products of groups using a finite version of Ramsey's theorem.

Finally, we introduce certain groups constructed as special towers of free products and HNN-extensions.