



HAL
open science

Optique des ondes de surface : super-résolution et interaction matière-rayonnement

Alexandre Archambault

► **To cite this version:**

Alexandre Archambault. Optique des ondes de surface : super-résolution et interaction matière-rayonnement. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112293 . tel-00678073

HAL Id: tel-00678073

<https://theses.hal.science/tel-00678073>

Submitted on 12 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du
GRADE de DOCTEUR

par

Alexandre ARCHAMBAULT

Spécialité : Physique

École doctorale : Ondes et matière (EDOM)

Laboratoire : Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique *Graduate School*,
de l'Université Paris-Sud 11 et du CNRS

Optique des ondes de surface : super-résolution et interaction matière-rayonnement

Soutenue le 9 décembre 2011

Jury :	MM.	AGIO	Mario	
		DEREUX	Alain	Président
		ENOCH	Stefan	Rapporteur
		GENET	Cyriaque	
		GREFFET	Jean-Jacques	Directeur de thèse
		MARQUIER	François	
		VAN LABEKE	Daniel	Rapporteur

Introduction

Les plasmons-polaritons de surface (SPP) ont été observés expérimentalement au cours des années 1950 à la surface de films métalliques, notamment d'aluminium (voir figure 1). Ces SPP se présentent déjà sous forme de quanta, émis par des électrons réfléchis par le film métallique. RITCHIE (1957) modélise ces films par un gaz d'électrons et explique l'origine des excitations observées. Il distingue parmi elles les plasmons de surface. Il est à noter que près de 50 ans auparavant (COLLIN 2004), ZENNECK (1907) puis SOMMERFELD (1909) avaient mis en évidence analytiquement cette solution particulière des équations de Maxwell que constituent les ondes de surface (et dont les SPP sont un cas particulier) – non pas à la surface des métaux, mais à la surface de la Terre, dans le domaine des ondes radio où cette dernière est conductrice. À la suite de

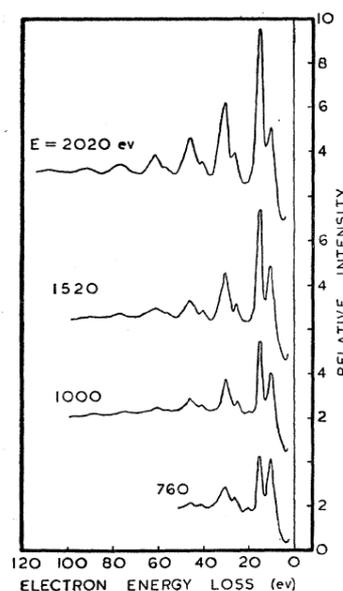


FIGURE 1 – Spectre de perte d'énergie des électrons réfléchis par un film d'aluminium. Chacune des 4 courbes correspond à une énergie initiale donnée de l'électron, indiquée sur la gauche de la courbe en eV. Les pics correspondent à des multiples de 10,3 et 15,3 eV, énergies attribuables respectivement aux plasmons de surface et aux plasmons de volume du film. Image extraite de (POWELL et SWAN 1959).

l'observation des SPP dans les années 1950, la recherche sur ces derniers se développe et atteint un premier paroxysme au cours des années 1970 avec le développement de la théorie électromagnétique des réseaux (HUTLEY et MAYSTRE 1976 ; PETIT, BOTTEN et al. 1980). Un bon résumé des travaux de cette période se trouve dans (RAETHER 1988). Les années 1980 et 1990 voient les techniques de nanofabrication faire des progrès considérables. Les SPP reviennent sur le devant de la scène dans les années 1990 avec le développement

de la microscopie en champ proche, notamment du NSOM, qui sonde le champ proche, où les ondes de surface jouent un rôle important. La première observation directe de SPP en champ proche est publiée en 1994 (DAWSON et al. 1994). À la fin des années 1990, EBBESEN et al. (1998) sont surpris par leurs mesures de coefficients de transmission de la lumière à travers des films métalliques percés de nanotrous, plus élevés que ce à quoi ils s'attendaient. Cette « transmission extraordinaire » s'appuyant notamment sur les SPP (LIU et LALANNE 2008), a souligné le potentiel de ces derniers pour la manipulation de la lumière à des échelles nanométriques et suscité depuis un effort de recherche considérable autour des SPP. La capacité à confiner et guider la lumière couplée aux développements des techniques de nanofabrication conduisent à l'avènement de la plasmonique : on commence à développer des composants basés sur les propriétés des plasmons (BARNES et al. 2003 ; BOZHEVOLNYI et al. 2006). Les domaines d'application actuels et à venir de la plasmonique sont nombreux : circuits photoniques (OZBAY 2006 ; EBBESEN et al. 2008), optique sub-longueur d'onde (ZAYATS et al. 2005), détecteurs biologiques (ANKER et al. 2008), spectrométrie (KNEIPP et al. 1997 ; NIE et EMORY 1997), cellules solaires (CATCHPOLE et POLMAN 2008), information quantique (AKIMOV et al. 2007 ; KOLESOV et al. 2009). Analogues aux SPP à la surface des cristaux polaires, les phonons-polaritons de surface (SPhP), trouvent des applications dans l'émission thermique cohérente (GREFFET et al. 2002), la microscopie de champ proche (DE WILDE et al. 2006), ou encore l'optique sub-longueur d'onde (TAUBNER et al. 2006a).

L'objectif de cette thèse est de revisiter plusieurs aspects théoriques associés aux ondes de surface. L'une des motivations est la description quantique de l'amplification d'un plasmon, et la description de l'interaction des phonons-polaritons de surface (SPhP) avec des électrons situés dans un puits quantique. On souhaite connaître les taux d'émission spontanée et d'émission induite d'ondes de surface. Pour cela, il faut disposer d'un traitement quantique du champ des ondes de surface qui puisse prendre en compte les propriétés optiques expérimentales des milieux.

Ce traitement quantique nécessite de pouvoir écrire le champ des ondes de surface sous forme de somme de modes et de connaître l'énergie de ce champ. Or, en présence de matériaux à pertes, ce qui est toujours le cas en pratique, les ondes de surface ont deux relations de dispersion (voir figure 2), l'une présentant une asymptote, l'autre non. La première correspond au cas où les pertes sont prises en compte via une pulsation ω complexe (et un vecteur d'onde \mathbf{K} réel), dont on peut déduire un facteur de qualité $Q = \frac{\omega'}{-2\omega''}$. La seconde correspond à un vecteur d'onde complexe tenant compte des pertes (et une pulsation ω réelle), dont on peut déduire une longueur d'atténuation $L_{att} = \frac{1}{2K''}$, avec $K = \sqrt{\mathbf{K}^2}$. Dans ce dernier cas, la relation de dispersion n'a pas d'asymptote et présente un repliement. Ainsi, on peut se demander si les deux relations sont contradictoires ou complémentaires. En présence de pertes, les électrons « voient »-ils des SPhP avec des grands vecteurs d'onde (première relation de dispersion) ou pas (seconde relation de dispersion) ? Ceci pose alors une question cruciale : le confinement transverse du champ est-il limité par les pertes ? La densité d'états au voisinage de la surface est-elle limitée par les pertes ?

Dans le chapitre 1, on obtient deux expressions du champ des ondes de surface, correspondant à chacune des relations de dispersion. On montre ainsi que ces dernières sont complémentaires, et sont adaptées à différents types d'excitation des ondes de surface. La première relation de dispersion sera adaptée dans le cas de sources impulsionnelles (finies dans le temps), alors qu'il sera préférable d'utiliser la seconde pour des sources

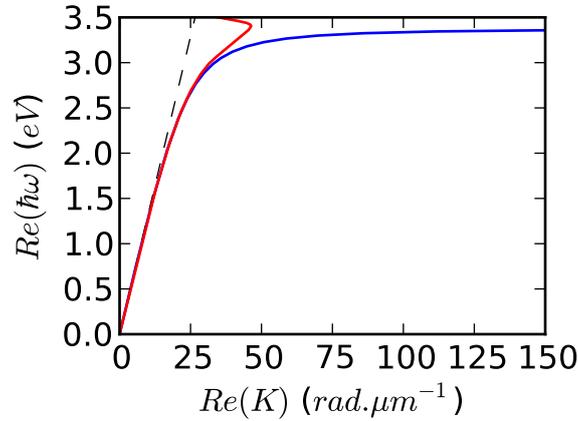


FIGURE 2 – Relations de dispersion des SPP d’une interface verre-argent. Rouge : vecteur d’onde \mathbf{K} complexe, pulsation ω réelle. Bleu : vecteur d’onde \mathbf{K} réel, pulsation ω complexe. Tirets noirs : cône de lumière $K = n\frac{\omega}{c}$. L’indice du verre vaut $n = 1,5$.

stationnaires (harmoniques).

L’expression du champ obtenue dans le cas d’un vecteur d’onde complexe et une pulsation ω réelle a la forme d’un développement angulaire, analogue (à deux dimensions) du développement angulaire du champ électromagnétique dans un demi-espace vide. Dans ce dernier cas, ce développement angulaire permet de retrouver le « principe » d’Huygens-Fresnel et l’optique de Fourier. Dans le chapitre 2, nous poserons ainsi les bases d’une optique de Fourier et d’une optique géométrique *pour les ondes de surface*.

Le champ obtenu dans le cas d’une pulsation ω complexe et d’un vecteur d’onde réel fait apparaître que les ondes de surface avec de grands vecteurs d’onde (correspondant à l’asymptote de la relation de dispersion) existent toujours en présence de pertes. La superlentille de PENDRY (2000) s’appuie sur les ondes de surface afin de construire l’image d’un objet (PENDRY et RAMAKRISHNA 2003). En régime harmonique, les vecteurs d’onde accessibles pour les ondes de surface sont limités par les pertes, ce qui limite la résolution atteignable par la superlentille. Dans le chapitre 3, nous verrons qu’il est possible, d’améliorer la résolution spatiale en travaillant en régime impulsionnel.

La relation de dispersion des ondes de surface avec une pulsation ω complexe montre que l’on passe continument d’un traitement avec pertes des ondes de surface à un traitement sans pertes. Ainsi, on développe dans le chapitre 4 un traitement quantique des ondes de surface s’appuyant sur une description sans pertes de ces dernières, et qui a toujours un sens en présence de faibles pertes. On établit notamment les coefficients d’Einstein d’émission spontanée et stimulée pour un système à deux niveaux en présence d’une onde de surface.

Enfin, le chapitre 5 traite des SPhP dans les puits quantiques et de leur interaction avec les électrons du puits par transitions intrabandes (inter- et intrasousbandes) pour l’émission de rayonnement térahertz. Les puits quantiques, constitués, ainsi que leurs barrières, d’un cristal polaire, supportent des SPhP, dans le domaine térahertz pour le puits GaAs/AlGaAs que l’on traitera ici. En tant qu’ondes de surface, ces SPhP pré-

sentent des analogies avec les SPP des films métalliques. Toutefois, aux fréquences mises ici en jeu, la structure avec puits quantique est beaucoup plus sub-longueur d'onde et ses SPhP présentent des caractéristiques originales. Certains d'entre-eux interagissent fortement avec les électrons du puits et ont permis la réalisation d'un modulateur d'ondes térahertz contrôlé électriquement.

Table des matières

Introduction	iii
1 Champ des ondes de surface à l'aide du formalisme de Green [<i>Phys. Rev. B</i> 79, 195414 (2009)]	5
1.1 Introduction originale	6
1.2 Surface plasmon dispersion relation	8
1.3 General field representations	9
1.4 Discussion	14
1.5 Conclusion	16
2 Optique de Fourier des ondes de surface	17
2.1 Équation de Helmholtz pour les ondes de surface	19
2.2 Principe d'Huygens-Fresnel	28
2.3 Diffraction d'ondes de surface	35
2.4 Focalisation d'ondes de surface	40
2.5 Optique géométrique des ondes de surface	46
3 Superlentille en champ proche en régime impulsionnel	49
3.1 Superlentille hors régime harmonique	55
3.2 Images de sources ponctuelles	66
4 Quantification des ondes de surface [<i>Phys. Rev. B</i> 82, 035411 (2010)]	75
4.1 Introduction originale	76
4.2 Modal description of surface waves	77
4.3 Energy of a surface wave	80
4.4 Quantization of surface waves	81
4.5 Emission rates : comparison with the classical case, Einstein's coefficients	82
4.6 Conclusion	87
5 Interaction électrons – SPhP dans les puits quantiques	89
5.1 Phonons dans les puits quantiques	92
5.2 Interaction électrons-phonons	103
5.3 Couplage aux ondes progressives et simulations électroniques	114
Conclusion générale	121

A Conventions de calcul et notations	123
A.1 Notations	123
A.2 Transformées de Fourier	123
A.3 Racines complexes	124
B Ondes de surface dans les hétérostructures	127
B.1 Séparation des variables	128
B.2 Par transformée de Fourier, sans pertes	129
B.3 Cas avec pertes	132
B.4 Énergie et quantification	133
C Annexes du chapitre « Champ des ondes de surface à l'aide du formalisme de Green »	135
C.1 Calculations of the surface plasmon field	135
C.2 Surface plasmon field of a dipole	137
D Annexes du chapitre « Optique de Fourier des ondes de surface »	139
D.1 Identité de Green en dimension 2	139
D.2 Expressions mathématiques du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface	141
D.3 Composantes parallèles et perpendiculaire du champ des ondes de surface	145
D.4 Relation de dispersion des ondes de surface dans un milieu stratifié	146
D.5 Vecteur de Poynting des ondes de surface	147
D.6 Équation de Helmholtz des ondes de surface en milieu inhomogène	148
E Annexes du chapitre « Superlentille en champ proche en régime impulsionnel »	151
E.1 Séparation des différentes contributions de la transmission à travers une superlentille	151
E.2 Obtention de la fonction de Green du potentiel électrostatique	153
F Annexes du chapitre « Quantification des ondes de surface »	157
F.1 Dielectric constant model	157
F.2 Derivation of the energy	158
F.3 Quantum calculation of the surface plasmon emission rate of a dipole	162
F.4 Derivation of the emission rate of a dipole in the classical lossy case	164
F.5 Derivation of the energy	166
F.6 Equivalence of the quantum and classical approach : equality of the contribution of surface plasmons to the Purcell factor	171
G Énergie et quantification de modes électromagnétiques en présence de milieux dispersifs	173
G.1 Bilan d'énergie avec milieux dispersifs	173
G.2 Énergie d'un mode unique en présence de milieux dispersifs	174
G.3 Quantification d'un mode unique en présence de milieux dispersifs	176

H Annexes du chapitre « Interaction électrons – SPhP dans les puits quantiques »	179
H.1 Relation de dispersion et taux d'interaction de la structure Lapsus simplifiée	179
H.2 Éléments de matrice	182
H.3 Taux d'interaction électroniques	185
H.4 Taux d'interaction d'un mode de SPhP donné	186
Bibliographie	189

Champ des ondes de surface à l'aide du formalisme de Green

[*Phys. Rev. B* 79, 195414 (2009)]

Sommaire

1.1	Introduction originale	6
1.2	Surface plasmon dispersion relation	8
1.3	General field representations	9
1.3.1	Surface plasmon field representation with a real wavevector	11
1.3.2	Surface plasmon field representation with a real frequency	11
1.3.3	Surface plasmon field generated by a dipole	13
1.4	Discussion	14
1.4.1	Super resolution	14
1.4.2	Local density of states	15
1.5	Conclusion	16

Une particularité des ondes de surface – on considère ici celles existant au niveau d'une interface simple – est de pouvoir posséder des vecteurs d'onde \mathbf{K} plus importants que ceux des ondes progressives des milieux diélectriques environnants (voir figure 1.1, les vecteurs d'onde des ondes de surface sont « hors du cône de lumière »). À une fréquence donnée, les ondes de surface peuvent donc posséder une longueur d'onde $\lambda_{sp} = \frac{2\pi}{K}$ plus faible que les ondes progressives et ainsi résoudre plus de détails qu'elles ou être potentiellement concentrées dans des volumes plus petits.

Les propriétés des ondes de surface sont souvent discutées en considérant un mode de la forme $E(z) \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]$, caractérisé par une pulsation ω et un vecteur d'onde $\mathbf{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$. Cependant, pour décrire la diffraction ou la focalisation d'ondes de surface, l'expression d'un mode simple n'est pas suffisante. Lorsque l'on décrit la diffraction ou la focalisation d'ondes progressives, on écrit le champ électromagnétique sous forme de superposition linéaire de modes. Pour les ondes de surface, différentes solutions de remplacement ont été utilisées, négligeant souvent la polarisation (WEEBER et al. 2001 ; FENG et al. 2007 ; ZIA et BRONGERSMA 2007). De plus, une expression du champ des ondes de surface sous forme de somme de modes orthogonaux entre-eux est nécessaire pour quantifier ces ondes et écrire les opérateurs qui leur sont associées.

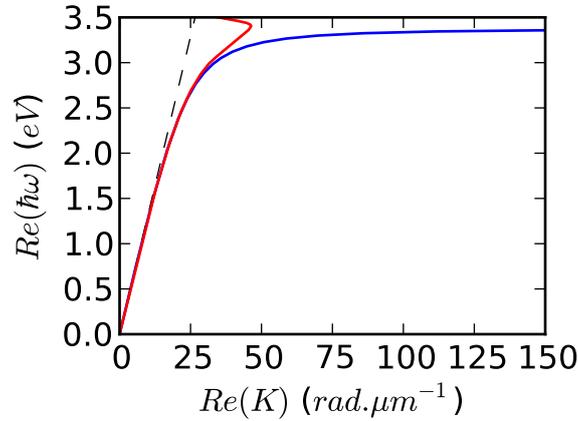


FIGURE 1.1 – Relations de dispersion des SPP d'une interface argent/verre. Rouge : vecteur d'onde \mathbf{K} complexe, pulsation ω réelle (constante diélectrique de l'argent : (PALIK et GHOSH 1998)). Bleu : vecteur d'onde \mathbf{K} réel, pulsation ω complexe (constante diélectrique de l'argent : (ARCHAMBAULT et al. 2009)). Tirets noirs : cône de lumière $K = n \frac{\omega}{c}$. L'indice du verre vaut $n = 1,5$.

Un des buts de ce chapitre est d'obtenir une expression rigoureuse du champ des ondes de surface. Nous nous appuyerons pour cela sur le formalisme de Green et les notations de SIPE (1987).

La présence de pertes dans les matériaux conduit à l'existence de deux relations de dispersion pour les ondes de surface (voir figure 1.1). La première, pour laquelle les pertes sont prises en compte via une pulsation ω complexe, présente une asymptote. La seconde, pour laquelle les pertes sont prises en compte via un vecteur d'onde \mathbf{K} complexe, ne présente plus d'asymptote mais un repliement. L'existence conjointe de ces deux relations de dispersion a été discutée dans le cadre des mesures de relation de dispersion par réflexion totale atténuée (ATR) par ALEXANDER et al. (1974). Toutefois, la discussion se limite aux cas des expériences ATR. Ici, nous obtiendrons ainsi deux expressions du champ des ondes de surface correspondant à chaque relation de dispersion. Ces deux expressions nous permettront de discuter de problèmes non résolus par ALEXANDER et al. (1974), concernant l'interprétation des relations de dispersion dans le contexte de la limite de résolution des ondes de surface ainsi que la densité d'état qui leur est associée.

La suite de ce chapitre et l'annexe C qui l'accompagne correspondent au contenu de (ARCHAMBAULT et al. 2009), auquel le lecteur peut se reporter s'il le souhaite.

1.1 Introduction originale

Surface plasmons have been known since the pioneering work of Ritchie in the 1950s (RITCHIE 1957). Considerable advances made in nanotechnology in recent years and the desire to control and manipulate light at nanoscale have renewed the interest in surface plasmons (BARNES et al. 2003). Numerical simulations and experiments have demonstrated unique properties of different plasmonic nanostructure such as extraordinary transmission (EBBESSEN et al. 1998 ; LIU et LALANNE 2008), guiding (WEBBER et al. 2001 ; BOZHEVOLNYI et

al. 2006 ; QUINTEN et al. 1998 ; MAIER et al. 2003), fluorescence enhancement (ANDREW et BARNES 2001 ; ANGER et al. 2006 ; KÜHN et al. 2006 ; RIGNEAULT et al. 2005b ; KHURGIN et al. 2008), field enhancement (TALLEY et al. 2005 ; PRODAN et al. 2003 ; KELLY et al. 2003), focussing (LIU et al. 2005), superresolution (FANG et al. 2005 ; SMOLYANINOV et al. 2005 ; TAUBNER et al. 2006b), omnidirectional absorption (TEPERIK et al. 2008 ; MARQUIER et al. 2004), coherent thermal emission (GREFFET et al. 2002 ; MARQUIER et al. 2004 ; LAROCHE et al. 2005).

In this paper, we shall focus on surface plasmons propagating along flat surfaces. Propagation of surface plasmons on a flat surface perpendicular to the z axis is often discussed using a mode $E(z) \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]$ characterized by a frequency ω and a wave vector $\mathbf{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$ parallel to the interface. However, the surface plasmon fields diffracted by edges, guided by ridges, focussed by lenses cannot be described by a simple mode. It is well-known that a finite size beam propagating in a vacuum has to be described in terms of a linear superposition of plane waves. Different ansatz, often neglecting polarization, have been used in the literature to address this question (WEEBER et al. 2001 ; FENG et al. 2007 ; ZIA et BRONGERSMA 2007). One of the goals of this paper is to derive a rigorous representation for the surface plasmon field. Such a superposition is the equivalent of the angular plane wave spectrum for surface plasmons. It can be used to develop a framework for surface plasmon Fourier optics.

In doing so, a difficulty arises. When losses are taken into account, a mode with real \mathbf{K} and real ω is no longer a valid solution. Although we can still use a Fourier representation with real \mathbf{K} and real ω , it is not convenient to deal with waves that are not a solution. Elementary solutions using either a complex \mathbf{K} or a complex ω can be found. However, we cannot assume that they form a basis. The first issue is thus to derive a general representation for the surface plasmon field as a superposition of modes. The second issue is related to the dispersion relation. A dispersion relation can be found when using either a complex \mathbf{K} and a real ω or vice versa. These two choices lead to different shapes as seen in Fig.1.2. One dispersion relation has an asymptote for very large values of K while the other has limited values of K and presents a backbending.

This issue was first noted by Arakawa et al. (ARAKAWA et al. 1973) and later discussed by Alexander et al. (ALEXANDER et al. 1974). Alexander remarked that when plotting the position of the dips in a reflectivity experiment where the angle of incidence is varied at fixed frequency, one finds the dispersion relation with backbending. Instead, when plotting the points obtained from a spectrum at fixed angle, one finds the dispersion relation without backbending. This approach seems simple and easily applicable. It is sufficient to explain the attenuated total reflection (ATR) experiments. Nevertheless, it is not a general prescription that can be used to discuss all possible issues. Let us illustrate this point by addressing two questions regarding the most important properties of surface plasmons : confinement of the fields and large density of states. For a theoretical discussion of these applications, different dispersion relations lead to different predictions. Confinement of the field is the key property regarding applications such as optical lithography, enhanced non-linear effects or super-resolution issues. The dispersion relation with a backbending predicts a cut-off spatial frequency and therefore a resolution limit whereas the dispersion relation without backbending does not predict any resolution limit. Enhancement of the local density of states (or Purcell effect) is fundamental for fluorescence enhancement and more light emission assisted by surface plasmons. The dispersion relation with a backben-

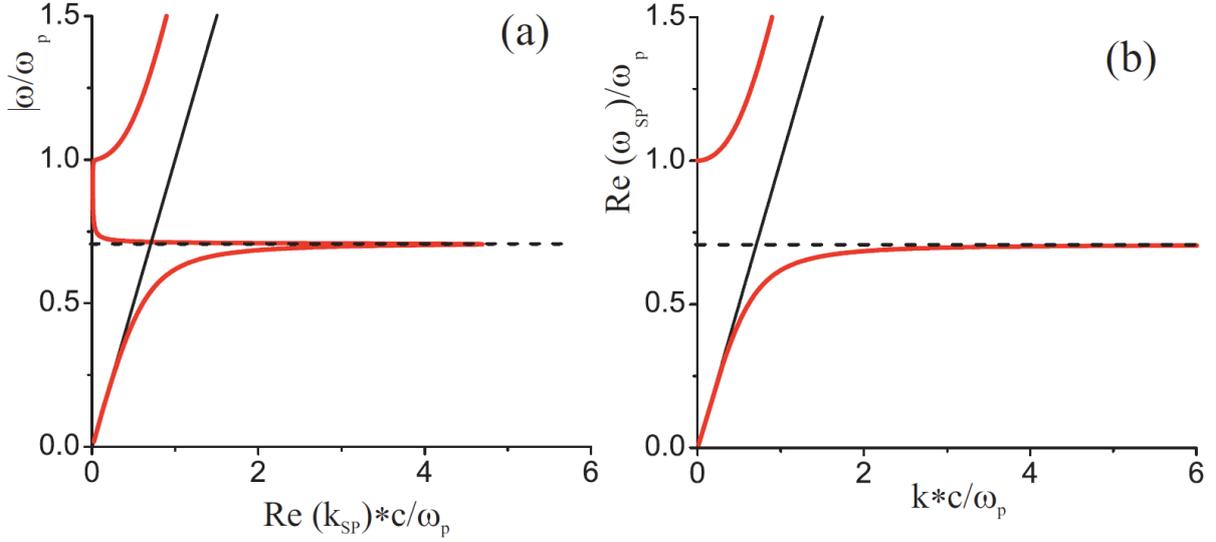


FIGURE 1.2 – (color online) Dispersion of surface plasmons propagating along the metal/air interface. (a) Real ω is chosen to obtain a complex K_{sp} . (b) Real K is chosen to obtain a complex ω_{sp} . The flat asymptote (dashed line) situated at $\omega_p/\sqrt{2}$ represents the nonretarded surface plasmon solution. The slanting solid line represents the light cone inside which a wave is propagating (radiative) and outside which is evanescent (surface).

ding again predicts a cut-off spatial frequency and therefore an upper limit to the LDOS. No limit is predicted by the other dispersion relation. A general discussion on the applicability of the different dispersion relations is thus needed.

In this paper we start by deriving two general representations of the surface plasmon field in terms of linear superpositions of modes having the structure $\exp[i(K_x x + K_y y + \gamma z - \omega t)]$ with a well-defined polarization. Each representation is associated with either a complex frequency or a complex wavevector and therefore to a particular dispersion relation. We then show that the most convenient choice depends on the physical problem to be discussed. We introduce a prescription that allows to choose complex or real frequency and the associated dispersion relation. We then apply our analysis to discuss the resolution limit issue and the LDOS issue. The paper is organized as follows. For the sake of completeness, we briefly summarize the derivation of the dispersion relation in the next section. The following section introduces the general representations of the surface plasmon field. We then discuss the physical content of these representations.

1.2 Surface plasmon dispersion relation

Let us consider a flat metal surface $z = 0$ bounded by dielectric media with dielectric constant ϵ_1 . For convenience, we describe the dielectric response of the metal to an electric field using the local Drude model

$$\epsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}, \quad (1.1)$$

where ω_p is the bulk plasmon frequency and ν_e is a phenomenological bulk electron relaxation rate. We derive the dispersion relation of surface plasmons propagating along the metal/dielectric interface.

We search a solution of Maxwell equations for an interface between two linear isotropic and local media characterized by dielectric constants ϵ_m where $m = 1, 2$ denotes medium 1 ($z < 0$) or 2 ($z > 0$). A surface wave solution has a structure $\exp[i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \gamma_m |z| - \omega t)]$ with

$$\mathbf{K}^2 + \gamma_m^2 = \epsilon_m \omega^2 / c^2 \quad (1.2)$$

where γ_m is chosen so that $\Im \gamma_m > 0$. Boundary conditions impose the continuity of the tangential components of the electric field and ϵE_z . It follows that a p-polarized field can exist provided that $\epsilon_1 \gamma_2 = -\epsilon_2 \gamma_1$. One finds that a solution is given by

$$K^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (1.3)$$

When dealing with an interface separating a dielectric from a non lossy metal, $\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ yields a unique solution to the problem. When accounting for losses in the material, $\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ is a complex number so that the dispersion relation cannot be solved using real K and real ω . It is necessary to consider a complex frequency or a complex wvector to find roots of the equation. Let us first choose ω real. We denote K_{sp} the complex root of the equation (4.4). Fig.1.2(a) shows the dispersion curve obtained from the surface plasmon dispersion relation Eq. (4.4) when plotting ω versus $\Re K_{sp}$. This curve exhibits a back-bending in the vicinity of the frequency of non-retarded surface plasmon $\omega_p / \sqrt{2}$. The second possible choice is to keep a real wvector \mathbf{K} . We denote ω_{sp} the complex root of the equation Eq. (4.4). Fig.1.2(b) shows the dispersion curve obtained when plotting $\Re \omega_{sp}$ versus K . It is seen in Fig.1.2(b) that this curve exhibits an asymptote for large wvectors.

Let us make two remarks regarding the dispersion relation. We first note that Eq.(4.4) is also a solution of $\epsilon_1 \gamma_2 = \epsilon_2 \gamma_1$ which defines a zero of the reflection factor, i.e. the Brewster angle. It can be checked that the upper branch in Fig.1.2(b) is not a surface wave but the locus of the Brewster angle in the (ω, K) plane. Finally, we note that a surface plasmon is a collective oscillation of charge density. When the frequency ω is smaller than ν_e , the collective electron oscillation is overdamped. In this frequency regime, Eq.(4.4) describes a surface wave that has no longer the character of a surface plasmon. Thus, Eq.(4.4) describes the Brewster angle for $\omega > \omega_p$, a surface plasmon for $\omega_p > \omega > \nu_e$, a surface wave for $\nu_e > \omega$.

1.3 General field representations

The aim of this section is to derive a general form of the surface plasmon field. To this aim, we first use the simple interface Green's tensor that yields the general form of the field for any given source distribution. We then extract the surface plasmon contribution which is defined to be the pole contribution to the Green's tensor. We will show that this procedure leads in a natural way to different representations that make use of either a complex wvector or a complex frequency. We emphasize that both representations will describe the same electromagnetic surface plasmon field $\mathbf{E}_{sp}(x, y, z, t)$.

Let us suppose that an arbitrary source is located nearby the dielectric-metal interface. The electric field generated by the source $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ is given by the relation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \int dt' \int d^3\mathbf{r}' \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}, \quad (1.4)$$

where μ_0 is vacuum permeability. A Fourier representation can be written in the form

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) e^{i[\mathbf{K}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \omega(t-t')]}, \quad (1.5)$$

Here, the integration variables ω and K_x, K_y are real. The explicit form of the Green's tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)$ in the presence of the interface is given in Appendix A. It is seen that the Fourier transform of the Green's tensor has poles given by the denominator of the Fresnel factors for p -polarized field. For a dielectric/metal interface, they correspond to the surface plasmon as discussed previously. Thus, the Green's tensor can be split into two terms : the pole contribution that yields the surface plasmon and the remaining contribution that yields a regularized Green's tensor.

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}} = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{reg} + \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}, \quad (1.6)$$

where the pole contribution to the Green's tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}$ can be explicitly derived using the residue theorem. $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{reg}$ is the contribution of the regularized Green's dyadic. It can be shown that the Green's tensor can be evaluated using a contour deformation in the complex plane and that the regularized term is essentially due to the contribution along the branch cut. This contribution is often termed cylindrical wave or creeping wave. The relative importance of these terms is well documented in classical texts for radiowaves (BAÑOS 1966 ; FELSEN et MARCUVITZ 1994). The analysis of their respective contribution was of practical importance in the early days of telecommunications as radiowaves were guided by the earth. This issue has been discussed recently in the context of optics (LALANNE et HUGONIN 2006 ; LIU et LALANNE 2008). In this paper, we shall not pursue this discussion and focus instead on the surface wave contribution defined as the pole contribution.

$$\mathbf{E}_{sp}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \int dt' \int d^3\mathbf{r}' \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}. \quad (1.7)$$

When solving Eq.(4.4), we can consider that ω is real and find a complex K_{sp} or we can impose a real value to K and find a complex root ω_{sp} . Thus, when extracting the poles, it is a matter of choice to consider that they are poles in the complex frequency plane or in the complex wavevector plane. We find either a couple of poles ω_{sp} and $-\omega_{sp}^*$ or a complex wavevector pole K_{sp}^2 hence two poles for the component of the wavevector along the x axis $K_{x,sp}$ and $-K_{x,sp}$ for a given component along the y axis K_y as $K_{sp}^2 = K_{x,sp}^2 + K_y^2$. It follows that we can cast the pole contribution to the Green's tensor in the form :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{g}}_{sp}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}(\mathbf{K}, z, z')}{\omega - \omega_{sp}} + \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-\omega_{sp}^*}(\mathbf{K}, z, z')}{\omega + \omega_{sp}^*}, \quad (1.8)$$

where $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}(\mathbf{K}, z, z')$ and $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-\omega_{sp}^*}(\mathbf{K}, z, z')$ are the residues of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at ω_{sp} and $-\omega_{sp}^*$ respectively, or in the form :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{g}}_{sp}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{K_{x,sp}}(K_y, z, z', \omega)}{K_x - K_{x,sp}} + \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-K_{x,sp}}(K_y, z, z', \omega)}{K_x + K_{x,sp}}$$

where $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{K_{x,sp}}(K_y, z, z', \omega)$ and $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-K_{x,sp}}(K_y, z, z', \omega)$ are the residues of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at $K_{x,sp}$ and $-K_{x,sp}$ respectively.

These two choices leads to two different forms of the surface plasmon field given by Eq.(1.7). We now examine these forms in detail.

1.3.1 Surface plasmon field representation with a real wavevector

In this section we derive the analytical form of the surface plasmon field using real wavevectors. For this purpose we evaluate the pole contribution to the Green's tensor by integrating in the complex ω plane. The complex pole ω_{sp} then yields a contribution for $t - t' > 0$ that varies as $\exp(-i\omega_{sp}(t - t'))$. After integration, we find :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp} = H(t - t') 2\Re \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} (-i) \overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}(\mathbf{K}, z, z') e^{i[\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega_{sp}(t-t')]} \quad (1.9)$$

where $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}(\mathbf{K}, z, z')$ is the residue of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at ω_{sp} . It is given in the appendix C.1. It follows from Eq.(1.7) that the field can be cast in the form of a linear superposition of modes with real wavevector and complex frequency :

$$\mathbf{E}_{sp} = 2\Re \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} E(\mathbf{K}, t) (\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_m} \mathbf{n}_m) e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + \gamma_m |z| - \omega_{sp} t)}, \quad (1.10)$$

where the amplitude $E(\mathbf{K}, t)$ is given in appendix C.1, $\mathbf{n}_m = -\hat{\mathbf{z}}$ if $z < 0$ and $\hat{\mathbf{z}}$ if $z > 0$, and $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/K$. The surface plasmon field takes a form that looks as a mode superposition *except that the amplitude $E(\mathbf{K}, t)$ depends on the time t* . Indeed, when describing a stationary field using modes that have an exponential decay, the amplitude is necessarily time dependent. In order to obtain a superposition of modes with fixed amplitudes, it is necessary to assume that all sources are extinguished after time $t = 0$ so that we observe the field after it has been excited. In that case, the decay of the mode is well described by the imaginary part of ω_{sp} . Eq. (1.10) is thus well suited for fields excited by pulses. Note that the polarization of each mode is specified by the complex vector $\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_m} \mathbf{n}_m$, whose component along the z axis depends on the medium from which the field is evaluated.

1.3.2 Surface plasmon field representation with a real frequency

Let us now turn to the alternative choice. We consider the complex poles $K_{x,sp}$ and $-K_{x,sp}$. The Green function can be cast in the form :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp} = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dK_y}{2\pi} \overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{K_{x,sp}}(K_y, z, z', \omega) e^{iK_{x,sp}(x-x')} e^{iK_y(y-y')} e^{-i\omega(t-t')} \quad (1.11)$$

if $x - x' > 0$, and :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{sp}} = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dK_y}{2\pi} \overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-K_{x,\text{sp}}}(K_y, z, z', \omega) e^{-iK_{x,\text{sp}}(x-x')} e^{iK_y(y-y')} e^{-i\omega(t-t')} \quad (1.12)$$

if $x - x' < 0$. $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{K_{x,\text{sp}}}(K_y, z, z', \omega)$ and $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-K_{x,\text{sp}}}(K_y, z, z', \omega)$ are the residues of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at $K_{x,\text{sp}}$ and $-K_{x,\text{sp}}$. They are given in appendix C.1. When inserting this form in Eq.(1.7), we again obtain a form for the field that is a superposition of modes whose amplitude depends on x :

$$\mathbf{E} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dK_y}{2\pi} \left[E_{>}(K_y, \omega, x) (\hat{\mathbf{K}}^+ - \frac{K_{\text{sp}}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m) e^{i(K_{x,\text{sp}}x + K_y y + \gamma_m |z| - \omega t)} + E_{<}(K_y, \omega, x) (\hat{\mathbf{K}}^- - \frac{K_{\text{sp}}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m) e^{i(-K_{x,\text{sp}}x + K_y y + \gamma_m |z| - \omega t)} \right] \quad (1.13)$$

where $\hat{\mathbf{K}}^+ = (K_{x,\text{sp}}\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}})/K_{\text{sp}}$ and $\hat{\mathbf{K}}^- = (-K_{x,\text{sp}}\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}})/K_{\text{sp}}$. The amplitudes $E_{>}(K_y, \omega, x)$ and $E_{<}(K_y, \omega, x)$ are given in appendix C.1. Again, it seems natural to have amplitudes of the modes that depend on x if one describes a homogeneous field using modes with a decay along x . A proper mode representation should use only fixed amplitudes. This is possible if all the sources lie in the $x < 0$ region and the region of interest is the $x > 0$ region. We then obtain a surface plasmon field that can be cast in the form :

$$\mathbf{E} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dK_y}{2\pi} (\hat{\mathbf{K}} - \frac{K_{\text{sp}}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m) E_{>}(K_y, \omega) e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + \gamma_m |z| - \omega t)} \quad (1.14)$$

where $\mathbf{K} = K_{x,\text{sp}}\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}$ is complex and $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/K_{\text{sp}}$. We conclude that stationary monochromatic fields with a finite size are well described by a representation that uses complex wavevectors and real frequencies. This equation is one of the main result of this paper. Indeed, it provides a framework to develop surface plasmon Fourier optics. Similar representations have been postulated as ansatz to surface plasmons interferences (ZIA et BRONGERSMA 2007), propagation along a stripe (WEEBER et al. 2001) or focussing (FENG et al. 2007). The framework introduced above provides a rigorous derivation of the form of the surface plasmon field valid in a region with no sources. Let us emphasize that this representation is well suited to discuss propagation for $x > x_0$ of a surface plasmon field known along a line $x = x_0$. It is seen on Eq.(1.14) that propagation over a distance d amounts to multiply each mode by a factor $\exp(iK_x d)$. In general, this involves modifying both the phase and the amplitude of the mode. Thus, it allows to discuss any surface wave diffraction problem. Finally, let us stress that this representation is valid for a complex wavevector \mathbf{K} and a real frequency ω so that this representation is necessarily associated with a dispersion relation with backbending.

To summarize, we have shown that the surface plasmon field can be represented using modes that have either a complex frequency or a complex wavevector. However, the amplitudes may still depend on either time or space. In the case of a field excited by a pulse, the representation that uses a complex frequency is well suited. It is associated with the dispersion relation without backbending. In the case of a stationary monochromatic excitation localized in space, a representation using modes with complex wavevectors is well suited. It corresponds to a dispersion relation with backbending. This simple analysis yields a simple prescription to

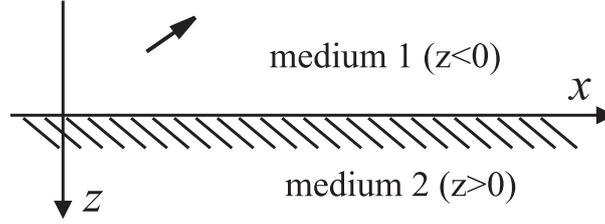


FIGURE 1.3 – A point-like dipole located nearby the dielectric-metal interface

choose the proper dispersion relation. Note that in the case of pulses limited in space, both representations can be used.

1.3.3 Surface plasmon field generated by a dipole

For many applications, it is useful to know the field generated by a dipole. For instance, when considering the field scattered by a subwavelength particle, the source can be represented by an electric dipole. In addition, any source can be decomposed as linear superposition of dipolar sources. Here, we derive the surface plasmon field generated by a monochromatic point-like dipole characterized by its dipole moment \mathbf{p}_0 (see Fig. 1.3). Note that there are other contributions to the field generated by the dipole at a distance typically smaller than a wavelength. The surface plasmon contribution is typically dominant for larger distances (PINCEMIN et al. 1994 ; LALANNE et HUGONIN 2006).

For a vertical dipole $\mathbf{p}_0 e^{-i\omega_0 t} = p_0 e^{-i\omega_0 t} \mathbf{z}$ located at a distance d below the interface, at $x = y = 0$, we obtain, using the cylindrical basis $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}$:

$$\mathbf{E}_m = 2\Re\left\{ \left[H_1^{(1)}(K_{sp}\rho) \hat{\rho} + i \frac{K_{sp}}{\gamma_m} H_0^{(1)}(K_{sp}\rho) \mathbf{n}_m \right] M(K_{sp}, \omega_0) \frac{1}{\epsilon_0} \left(-i \frac{K_{sp}}{\gamma_1} \right) p_0 e^{i\gamma_1 d} e^{i\gamma_m |z|} e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad (1.15)$$

where $H_0^{(1)}$ and $H_1^{(1)}$ are Hankel functions of the first kind of zero-th and first order respectively, K_{sp} is complex and verifies Eq. (4.4) with $\omega = \omega_0$, $M(K_{sp}, \omega_0)$ is given in appendix C.2 and the other notations are defined above. The details of the calculation are given in appendix C.2. Using the asymptotic forms of the Hankel functions, we obtain for the field of a vertical dipole, for ρ greater than a few $1/|K_{sp}|$:

$$\mathbf{E}_m = 2\Re\left[\frac{e^{iK_{sp}\rho}}{\sqrt{K_{sp}\rho}} \left(\hat{\rho} - \frac{K_{sp}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m \right) M'_v(K_{sp}, \omega_0) p_0 e^{i\gamma_1 d} e^{i\gamma_m |z|} e^{-i\omega_0 t} \right] \quad (1.16)$$

where $M'_v(K_{sp}, \omega_0)$ is given in appendix C.2. Thus the surface plasmon field is analogous to a damped cylindrical wave $\frac{e^{iK_{sp}\rho}}{\sqrt{K_{sp}\rho}}$ with a polarization vector $\hat{\rho} - \frac{K_{sp}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m$. For a dipole oriented along the x axis

$\mathbf{p}_0 e^{-i\omega_0 t} = p_0 e^{-i\omega_0 t} \hat{\mathbf{x}}$, we obtain :

$$\mathbf{E}_m = 2\Re\left\{ \left[\left([H_1^{(1)}(K_{sp}\rho)]' \hat{\mathbf{p}} - i \frac{K_{sp}}{\gamma_m} H_1^{(1)}(K_{sp}\rho) \mathbf{n}_m \right) \cos \theta - \frac{H_1^{(1)}(K_{sp}\rho)}{K_{sp}\rho} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \right] M(K_{sp}, \omega_0) \frac{1}{\epsilon_0} p_0 e^{i\gamma_1 d} e^{i\gamma_m |z|} e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad (1.17)$$

where $\theta = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Using the asymptotic forms of the Hankel functions, we obtain :

$$\mathbf{E}_m = 2\Re\left[\frac{e^{iK_{sp}\rho}}{\sqrt{K_{sp}\rho}} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{K_{sp}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m \right) \cos \theta M_h'(K_{sp}, \omega_0) p_0 e^{i\gamma_1 d} e^{i\gamma_m |z|} e^{-i\omega_0 t} \right] \quad (1.18)$$

where $M_h'(K_{sp}, \omega_0)$ is given in appendix C.2. The surface plasmon field is analogous to a damped cylindrical wave $\frac{e^{iK_{sp}\rho}}{\sqrt{K_{sp}\rho}}$ with the same polarization vector $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{K_{sp}}{\gamma_m} \mathbf{n}_m$, times a factor $\cos \theta$, making the field vanishing in the direction perpendicular the dipole (here the y direction) and more intense in the dipole's direction (here the x direction).

1.4 Discussion

In this section, we revisit two fundamental issues in the field of surface plasmons : field confinement and large density of states. Confinement and superresolution are related to the existence of wavevectors with a modulus much larger than ω/c . In this respect the choice of the proper dispersion relation plays a key role as one has a cut-off wavevector whereas the other predicts no limit for the dispersion relation. Is there a limit to the resolution? Is there a limit to the local density of states?

1.4.1 Super resolution

Let us first discuss the issue of resolution when imaging with a surface plasmon driven at frequency ω by an external source. Recent experiments on far-field optical microscopy (SMOLYANINOV et al. 2005) launched a debate (SMOLYANINOV et al. 2007 ; DREZET et al. 2007) about the role of surface plasmons in super-resolution imaging effects. In (SMOLYANINOV et al. 2005) the dispersion curve with the asymptotic behaviour has been invoked to stress the role of surface plasmons in the image formation with nano-resolution. The resolution was estimated to be $\lambda_{sp}/2$. Therefore, if the dispersion curve with the asymptotic behaviour is chosen, there seems to be no diffraction limit and only the amplitude decay of surface plasmon due to Ohmic losses in the metal limits the resolution. The effect of the back-bending of surface plasmon dispersion discussed in (DREZET et al. 2007) limits the surface plasmon wavelength $2\pi/\Re K_{sp}$ and therefore, the resolution. Clearly, both dispersion relations do not lead to the same conclusion and a prescription to choose one or the other is needed. Let us consider a situation where a surface plasmon is excited locally by a stationary monochromatic field. From section 3, we know that it is valid to use a representation with fixed amplitudes using modes with complex wavevectors and real frequencies. This implies that the dispersion relation with real frequency (with

backbending) is relevant. It follows that there is a cut-off spatial frequency. Indeed, as K_x may be complex, the propagation term $\exp(iK_x x)$ introduces damping. In the case of a lossy medium, damping may be due to losses. However, even for a non-lossy medium (K_{sp} is real), $K_x = (K_{sp}^2 - K_y^2)^{1/2}$ can be imaginary. This occurs when K_y exceeds the value K_{sp} . This situation is the 2D analog of the evanescent waves with wavevector K larger than ω/c that cannot propagate in a vacuum. Clearly, K_{sp} is a cut-off frequency and the propagation term $\exp(iK_x x)$ works as a low-pass filter that prevents propagation of fields associated with spatial frequencies larger than K_{sp} . When dealing with lossy media, it is the real part of K_{sp} that specifies the cut-off spatial frequency. It is seen in Fig.1.2 that it is limited by the backbending of the dispersion relation.

In summary, when discussing imaging using stationary monochromatic surface plasmons, the relevant representation is based on modes with a complex wavevector and a real frequency given by Eq.(1.14). This corresponds to a dispersion relation that has a backbending. It follows that the resolution is limited by the cut-off spatial frequency given by the maximum value of $\Re K_{sp}$.

1.4.2 Local density of states

Let us now discuss the Local Density of States (LDOS). The density of states (DOS) is a quantity that plays a fundamental role in many domains. In particular, it allows to derive all thermodynamic properties of a system. In the case of an interface, the surface modes are confined close to the interface so that it is useful to introduce the Local Density of States (LDOS) that depends on the distance to the interface (JOUAIN et al. 2003 ; JOULAIN et al. 2005). It allows to account for the huge increase of energy density close to an interface when surface waves are excited (SHCHEGROV et al. 2000 ; JOULAIN et al. 2005). It also plays a key role in defining the lifetime of a single emitter close to an interface (CHANCE et al. 2007 ; HENKEL et JOULAIN 2006 ; ABAJO et KOCIAK 2008 ; NELAYAH et al. 2007 ; CHICANNE et al. 2002). In this context, the increase of the projected LDOS is usually normalized by the LDOS in a homogeneous medium (e.g. a vacuum) yielding the so-called Purcell factor. It is well-known in solid state physics that the density of states can be derived from the dispersion relation. More specifically, the DOS increases at a frequency ω when the dispersion relation is flat at that particular frequency. A quick look at Fig.1.2 shows that different dispersion relations seem to predict different LDOS. While Fig.1.2(b) predicts a very large peak at $\omega_{sp}/\sqrt{2}$ due to the asymptote and no states above this frequency, Fig.1.2(a) predicts a smaller peak and a non zero LDOS between $\omega_{sp}/\sqrt{2}$ and ω_{sp} . Again, we see that a prescription is needed to choose the right dispersion relation.

A standard procedure to derive the DOS in the reciprocal space is based on the periodic boundary conditions. Assuming a surface of side L , the wavevector takes the form $\mathbf{K} = n_x \frac{2\pi}{L} \hat{\mathbf{x}} + n_y \frac{2\pi}{L} \hat{\mathbf{y}}$. In the plane K_x, K_y , a mode has an area $4\pi^2/L^2$. It follows that the number of modes per unit area in $d^2\mathbf{K}$ is given by $d^2\mathbf{K}/4\pi^2$. When performing this analysis, both K_x and K_y are real. Thus the relevant representation uses real wavevectors and complex frequencies. The corresponding dispersion relation has no backbending and therefore presents a singularity. This is in agreement with another approach of the LDOS based on the use of the Green's tensor that predicts an asymptotic behaviour proportional to $1/(z^3|\epsilon + 1|^2)$ (JOUAIN et al. 2003 ; JOULAIN et al. 2005). Of course, this divergence is non physical. It is related to the modelling of the medium using a continuous description of the metal. This model cannot be valid on an atomic scale. Before

reaching the atomic scale, non-local effects must be taken into account.

1.5 Conclusion

The purpose of this work is to clarify several issues regarding surface plasmons on flat surfaces. The first issue deals with the mode representation of the surface plasmon field. We have shown that a surface plasmon field can be represented as a sum of modes with either a complex wavevector or a complex frequency. We have shown that a representation using complex frequencies is well adapted to fields excited by pulses and that a representation using complex wavevectors is well adapted to stationary monochromatic fields excited in a finite area. The latter representation provides a rigorous formula that can be used to analyse the diffraction of a stationary surface plasmon field. This should be very useful in order to develop a surface plasmon Fourier optics framework. This formula clearly shows that the maximum value of $\Re K_{sp}$ is a cut-off spatial frequency that gives an upper limit to the resolution or confinement that can be obtained using surface plasmons. As a by product, we have derived the form of the surface plasmon excited by a dipole located below the interface. Finally, we have discussed how to choose the dispersion relation (with or without backbending) depending on the issue. To illustrate this procedure, we have shown that there is a resolution limit given by the maximum value of the wavevector at the backbending point. We have also shown that the local density of states should be analysed using the dispersion relation with a real wavevector. This yields a LDOS that diverges close to the interface in agreement with the result obtained from the Green's tensor approach.

Optique de Fourier des ondes de surface

Sommaire

2.1	Équation de Helmholtz pour les ondes de surface	19
2.1.1	Équation de Helmholtz pour les ondes de surface	19
2.1.2	Relation de dispersion des ondes de surface	23
2.1.2.1	Interface simple	24
2.1.2.2	Cas général	24
2.1.3	Développement angulaire du champ des ondes de surface	25
2.2	Principe d’Huygens-Fresnel	28
2.2.1	Rappels généraux	28
2.2.2	Principe d’Huygens-Fresnel pour les ondes de surface	30
2.3	Diffraction d’ondes de surface	35
2.3.1	Ouverture simple	35
2.3.2	Fentes d’Young	35
2.4	Focalisation d’ondes de surface	40
2.4.1	Lentille zonée de Fresnel	40
2.4.2	Focalisation sur une surface de carbure de silicium	41
2.4.2.1	Approximation de Kirchhoff	43
2.4.2.2	Champs obtenus	44
2.5	Optique géométrique des ondes de surface	46
2.5.1	Équation eikonale pour les ondes de surface	46
2.5.2	Équation des rayons d’ondes de surface en milieu inhomogène	48

L’optique géométrique traite le champ électromagnétique en termes de rayons lumineux, d’objets et d’images, éventuellement ponctuels. Dans le cadre plus général des équations de Maxwell, on montre que l’image d’un point, après avoir traversé un système optique, ne peut être rigoureusement ponctuelle.

Avec des ondes progressives, on ne peut concentrer l’énergie électromagnétique dans des volumes de dimensions inférieures à $\lambda/2$. Réciproquement, on ne peut observer *via* ces ondes progressives de détails de dimensions inférieures à $\lambda/2$. Cela a pour conséquence notamment de limiter la résolution de la microscopie classique avec de la lumière visible à quelques centaines de nanomètres (RIGNEAULT et al. 2005a). Comme nous l’avons vu au chapitre précédent, les ondes de surface ont la particularité de posséder des vecteurs d’ondes « hors du cône de lumière », et donc des longueurs d’ondes inférieures à celles des ondes progressives. Cette

propriété peut être exploitée afin de focaliser l'énergie électromagnétique dans des volumes dont au moins l'une des dimensions est plus faible que $\lambda/2$ – la limite est désormais $\lambda_{sp}/2$, où λ_{sp} est la longueur d'onde des ondes de surface. Il y a donc un grand intérêt à revisiter les principes de l'optique en exploitant cette propriété des ondes de surface. Ce chapitre se propose de donner un cadre théorique à l'optique de Fourier et l'optique géométrique des ondes de surface.

Ainsi, de nombreuses expériences ont démontré la possibilité de focaliser les ondes de surface à l'aide d'une lentille zonée de Fresnel pour les ondes de surface (FENG et al. 2007) ou à l'aide de diffuseurs à proximité d'une surface disposés en arc-de-cercle (EVLYUKHIN et al. 2007 ; HUBER et al. 2008). Plusieurs groupes ont démontré la possibilité de réaliser des composants optiques passifs pour les ondes de surface (tels que des lentilles ou des miroirs paraboliques (HOHENAU et al. 2005 ; FENG et al. 2007), ainsi que des composants plus originaux de l'optique transformationnelle tels que les lentilles de Lüneburg et de Eaton (ZENTGRAF et al. 2011)). ZAYATS et al. (2005) passent en revue de nombreux travaux portant notamment sur la réflexion et la diffusion d'ondes de surface.

Il est à noter que d'autres outils peuvent être utilisés pour concentrer l'énergie électromagnétique dans des volumes sub-longueur d'onde, notamment les plasmons et phonons de surface localisés (SCHULLER et al. 2010) ou encore le retournement temporel en milieu diffusant (LEROSEY et al. 2007 ; CARMINATI et al. 2007).

Afin de modéliser des résultats d'optique à l'aide d'ondes de surface plus simplement qu'en traitant le champ électromagnétique dans tout l'espace, certains groupes ont transposé le principe d'Huygens-Fresnel aux ondes de surface, en traitant ces dernières comme une onde scalaire (LALUET et al. 2007 ; KIM et al. 2008 ; ZIA et BRONGERSMA 2007 ; HUBER et al. 2008). D'autres groupes ont utilisé une expression approchée du champ vectoriel des ondes de surface (CHANG et al. 2005 ; YIN et al. 2005).

Il est à noter que la connaissance du champ électromagnétique complet des ondes de surface est également importante en microscopie de champ proche, où la grandeur cartographiée dépend de la sonde utilisée (VAN LABEKE et BARCHIESI 1993 ; PORTO et al. 2000).

Dans ce chapitre, partant des équations de Maxwell, nous allons établir rigoureusement plusieurs outils pour décrire la propagation des ondes de surface, tenant compte du caractère vectoriel de leur champ : nous allons montrer que le champ des ondes de surface satisfait une équation de Helmholtz « 2D », nous allons également établir un principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface (sous forme d'une équation intégrale de Helmholtz et Kirchhoff, voir BORN et WOLF 1999). Ceci permettra de jeter les bases rigoureuses d'une optique de Fourier des ondes de surface. Enfin, nous verrons ensuite comment écrire une équation eikonale pour les ondes de surface décrivant leur propagation dans une limite « géométrique », analogue à la limite de l'optique géométrique pour les ondes électromagnétiques usuelles.

Certains de ces résultats, concernant le propagateur de Fourier et le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, ont été publiés dans (ARCHAMBAULT et al. 2009) et (TEPERIK et al. 2009) respectivement.

2.1 Équation de Helmholtz pour les ondes de surface

Dans cette section, nous allons établir une équation de Helmholtz pour les ondes de surface. Dans les sections suivantes, nous établirons un principe d'Huygens-Fresnel et une équation eikonale pour les ondes de surface. Ces résultats s'appliquent aux ondes de surface d'une hétérostructure quelconque. Il peut s'agir d'une interface simple entre de l'air ou un diélectrique et un métal (tel que l'or ou l'argent) ou un cristal polaire (tel que le carbure de silicium), ou d'un film constitué d'un métal ou d'un cristal polaire entouré d'air ou d'un diélectrique (figure 2.1), mais il peut s'agir de systèmes plus complexes, dont la forme générale est représentée



FIGURE 2.1 – Exemples de systèmes stratifiés considérés dans ce chapitre. Gauche : interface simple entre de l'air ou un diélectrique (haut), et un métal (tel que de l'argent ou de l'or) ou un cristal polaire (tel que le carbure de silicium), supportant des SPP (métal) ou des SPhP (cristal polaire). Droite : film constitué d'un métal ou d'un cristal polaire, entouré d'air ou d'un milieu diélectrique, supportant des SPP ou des SPhP symétriques (*short range*) et antisymétriques (*long range*). Il ne s'agit que d'exemples, les résultats établis dans ce chapitre s'appliquent à tout type d'hétérostructure supportant des ondes de surface.

sur la figure 2.2. Ses interfaces sont perpendiculaires à l'axe z et on note la constante diélectrique $\epsilon(z, \omega)$.

Nous nous plaçons en régime harmonique de pulsation ω réelle. Dans ce cas, à cause des pertes dans les matériaux présents, les relations de dispersion des ondes de surface présentent un repliement (*back-bending*), comme sur la figure 2.3.

Afin de rappeler les résultats correspondants de l'optique de Fourier usuelle, à trois dimensions, et de montrer l'analogie entre celle-ci et l'optique de Fourier des ondes de surface, nous considérerons également un milieu uniforme d'indice n . Nous noterons $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ le champ électrique des ondes de surface, et $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ le champ électrique du milieu uniforme d'indice n . Dans ce qui suit, nous rappellerons des résultats bien connus de l'optique de Fourier pour $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ puis établirons des résultats correspondants pour $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

2.1.1 Équation de Helmholtz pour les ondes de surface

Dans la géométrie étudiée, il est possible de séparer les champs de polarisation TE et de polarisation TM. Les champs construits avec des ondes de polarisation TE (ou s) sont caractérisés par un champ électrique E_z nul. Les champs construits avec des ondes de polarisation TM (ou p) sont caractérisés par un champ magnétique H_z nul. Dans ce qui suit, on cherche une solution de polarisation TM, de sorte que $H_z = 0$.

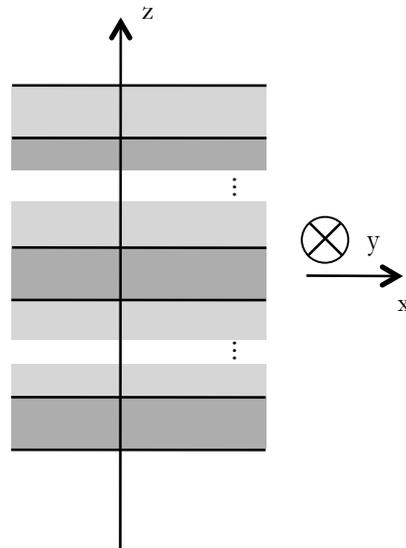


FIGURE 2.2 – Forme générale d'hétérostructure considérée dans ce chapitre. Le système est invariant par translation dans les directions x et y . Les différents milieux sont séparés par des interfaces planes perpendiculaires à l'axe z .

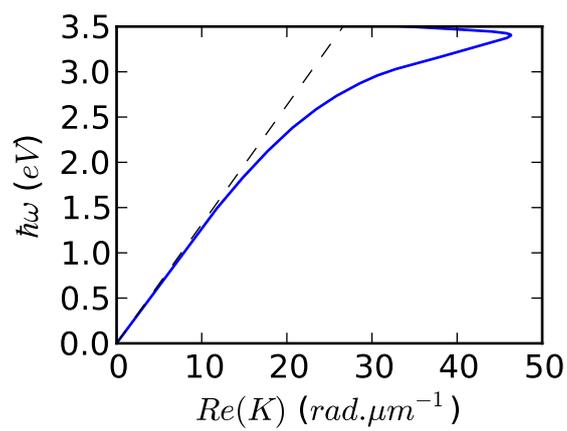


FIGURE 2.3 – Relation de dispersion des SPP d'une interface argent/air, avec une pulsation ω réelle.

Nous allons nous intéresser à la composante E_z du champ électrique des ondes de surface, car nous pourrions en déduire toutes les autres composantes de \mathbf{E} et \mathbf{H} . Nous allons supposer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y)f(z). \quad (2.1)$$

Cette écriture de $E_z(\mathbf{r})$ se justifie par les rôles différents joués par les directions parallèles, x et y , et perpendiculaire, z , des hétérostructures des figures 2.1 et 2.2. Nous nous intéressons à E_z car il s'agit de la seule composante du champ électromagnétique des ondes de surface à être non-nulle (non-nulle sur toute la structure) quelle que soit la direction de propagation des ondes de surface. Les différents résultats concernant l'optique des ondes de surface porteront sur l'amplitude $\mathcal{E}(x, y)$. En multipliant les résultats obtenus par $f(z)$, ceux-ci s'appliqueront également à $E_z(\mathbf{r})$. De plus, la formule

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} \left[\frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right] = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} [\mathcal{E}(x, y)] \frac{df}{dz}, \quad (2.2)$$

que nous pourrions montrer (voir partie D.3.2), permet de déduire toutes les autres composantes de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. K_{sp} désigne le module du vecteur d'onde des ondes de surface, et $\nabla_{//} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}$ désigne la partie « parallèle » (aux interfaces) de l'opérateur ∇ .

On retrouve dans l'écriture $\mathcal{E}(x, y)$ le caractère 2D de l'optique des ondes de surface, $\mathcal{E}(x, y)$ ne dépend que de x et de y , ainsi que le fait que les ondes de surface ne possèdent qu'une seule polarisation, et $\mathcal{E}(x, y)$ est scalaire mais permet de retrouver toutes les composantes du champ électrique des ondes de surface. Les équations de Maxwell donnent ensuite le champ magnétique.

En reportant l'expression (2.1) dans l'équation de Helmholtz vérifiée par $E_z(\mathbf{r})$,

$$\Delta E_z(\mathbf{r}) + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} E_z(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3)$$

on obtient après quelques manipulations algébriques simples,

$$\frac{\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y)}{\mathcal{E}(x, y)} = - \frac{\frac{d^2 f}{dz^2} + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} f(z)}{f(z)}. \quad (2.4)$$

On a introduit ici l'opérateur laplacien parallèle $\Delta_{//} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Les membres de l'équation (2.4) dépendent de variables spatiales différentes (le membre de gauche dépend de x et y , le membre de droite de z), ils sont égaux à une même valeur, que l'on note $-K_{sp}^2$. On justifie ci-dessous que K_{sp} correspond au module, éventuellement complexe, du vecteur d'onde des ondes de surface à la pulsation ω considérée. On déduit du membre de gauche de (2.4) l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface,

$$\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2 \mathcal{E}(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Toute l'information sur le problème de la propagation de l'onde de surface dans le plan xy est contenu dans

l'équation (2.5). Une solution particulièrement simple de cette équation est $\mathcal{E}(x, y) = e^{i(K_x x + K_y y)}$ avec $K_x^2 + K_y^2 = K_{sp}^2$. K_{sp} peut ainsi être interprété comme le module du vecteur d'onde des ondes de surface. La variable z n'intervient pas dans (2.5). Toute l'information sur la géométrie de l'hétérostructure dans la direction z est comprise dans le module du vecteur d'onde K_{sp} .

De manière analogue, le champ électrique $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ des ondes progressives d'un milieu uniforme d'indice n vérifie l'équation de Helmholtz,

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

où $k = n \frac{\omega}{c}$ est le module du vecteur d'onde des ondes progressives du milieu d'indice n à la pulsation ω considérée. L'équation (2.6) porte sur $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, qui est une grandeur vectorielle (le champ des ondes progressives possède 2 polarisations), alors que l'équation (2.5) porte sur la grandeur scalaire $\mathcal{E}(x, y)$. (2.6) contient le laplacien usuel à trois dimensions, Δ , alors que (2.5) contient un laplacien parallèle $\Delta_{//}$ n'agissant que sur les deux coordonnées parallèles, x et y .

On peut déduire du membre de droite de (2.4) une seconde équation,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2 \right] f(z) = 0. \quad (2.7)$$

Contrairement à (2.5), cette équation fait intervenir z .

Il reste à utiliser les relations de continuité de $\epsilon(z, \omega) E_z$ et $\mathbf{E}_{//}$. Il est commode de considérer que $\mathcal{E}(x, y)$ est continu¹. On adjoint alors à (2.7) la continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ à chaque interface. La continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ découle de celle de $D_z(\mathbf{r}) = \epsilon(z, \omega) E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) [\epsilon(z, \omega) f(z)]$ à la traversée de chaque interface, celle de $\frac{df}{dz}$ découle de la continuité de $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$, comme on le montre dans la partie D.3.1. L'équation (2.7), munie de ces deux conditions, conduit aux relations de dispersion des ondes de surface de l'hétérostructure, reliant K_{sp} à la pulsation ω . Nous développerons ces calculs dans la partie 2.1.2, et nous verrons que pour une valeur de ω , la relation de dispersion des ondes de surface fournit une valeur K_{sp} (éventuellement plusieurs dans le cas de plusieurs interfaces – les développements ultérieurs s'appliquent alors à chacune d'entre elles).

Pour résumer, on sépare les dépendances parallèles et perpendiculaire de la composante E_z du champ des ondes de surface (équation 2.1),

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) f(z).$$

La partie perpendiculaire $f(z)$ vérifie l'équation (2.7),

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2 \right] f(z) = 0,$$

qui, munie des relations de continuité aux interfaces, fixe le module K_{sp} du vecteur d'onde des ondes de surface, car (2.7) permet de retrouver la relation de dispersion des ondes de surface, voir partie 2.1.2. La

1. $\mathcal{E}(x, y)$ pourrait par exemple être discontinu aux interfaces, en restant uniforme dans chaque couche.

partie parallèle, $\mathcal{E}(x, y)$, vérifie l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface,

$$\Delta_{//}\mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2\mathcal{E}(x, y) = 0.$$

On déduit $E_z(\mathbf{r})$ de $\mathcal{E}(x, y)$ à l'aide de l'équation (2.1), et $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$ avec (2.2).

2.1.2 Relation de dispersion des ondes de surface

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation (2.7), dont nous allons rechercher les solutions. Nous verrons que celles-ci n'existent que pour des valeurs précises de K_{sp} , ce qui fixera sa valeur. K_{sp} en fonction de la pulsation ω correspond à la relation de dispersion des ondes de surface de l'hétérostructure considérée. Cette hétérostructure peut consister en une interface simple entre deux milieux (dont les constantes diélectriques sont opposées, voir figure 2.1, gauche), en un film (dont la constante diélectrique est opposée à celle des milieux qui l'entourent, voir figure 2.1, droite), ou à une hétérostructure quelconque (figure 2.2 ou 2.4).

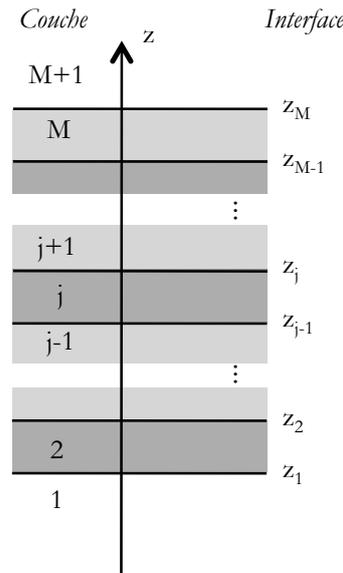


FIGURE 2.4 – Hétérostructure considérée dans ce chapitre. Il s'agit d'une hétérostructure, constituée de $M+1$ couches, indexées de $j = 0$ à $j = M$, séparées par M interfaces, de $z = z_1$ à $z = z_M$. Chaque couche est uniforme et constituée d'un milieu de constante diélectrique $\epsilon_j(\omega)$ (j est l'indice de la couche). On notera également $\epsilon(z, \omega) = \epsilon_j(\omega)$ avec $z_{j-1} < z < z_j$. Le système entier est supposé non magnétique ($\mu = 1$). La j -ième couche est comprise entre les interfaces $z = z_{j-1}$ et $z = z_j$, et son épaisseur est $d_j = z_j - z_{j-1}$. On notera $z_0 = -\infty$, $z_{M+1} = \infty$ et $d_1 = d_{M+1} = \infty$ pour les demi-espaces $j = 0$ et $j = M+1$.

Avant de résoudre cette équation pour une hétérostructure quelconque telle que représentée sur les figures 2.2 et 2.4, nous allons étudier le cas, plus simple, d'une seule interface séparant deux demi-espaces semi-infinis et uniformes.

2.1.2.1 Interface simple

On considère le cas le plus simple d'une interface unique séparant deux demi-espaces semi-infinis et uniformes, de constantes diélectriques $\epsilon_1(\omega)$ ($z < 0$) et $\epsilon_2(\omega)$ ($z > 0$). L'équation (2.7) devient alors

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_1^2 f(z) = 0 \quad z < 0, \quad (2.8a)$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_2^2 f(z) = 0 \quad z > 0, \quad (2.8b)$$

avec $\gamma_1 = \sqrt{\epsilon_1(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$ et $\gamma_2 = \sqrt{\epsilon_2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$. Les termes sous ces deux racines sont a priori complexes et ont deux racines opposées. Les conventions choisies pour les racines complexes, voir annexe A.3, entraînent $\gamma_1'' > 0$ ou $\gamma_1'' = 0$ et $\gamma_1' > 0$, de même pour γ_2 . Les solutions de (2.8) peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z) = \begin{cases} \alpha_1 e^{i\gamma_1 z} + \beta_1 e^{-i\gamma_1 z} & \text{si } z < 0 \\ \alpha_2 e^{i\gamma_2 z} + \beta_2 e^{-i\gamma_2 z} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $\gamma_1'' > 0$, il faut $\alpha_1 = 0$ pour que $f(z)$ ne diverge pas en $-\infty$. Sinon, $\gamma_1'' = 0$ et $\gamma_1' > 0$, et on choisit $\alpha_1 = 0$ ce qui revient à imposer qu'il n'y ait pas d'onde incidente provenant de $z = -\infty$ sous le système. Dans tous les cas, on a donc $\alpha_1 = 0$. De la même manière, dans le milieu 2, il faut $\beta_2 = 0$. La continuité de $\epsilon(z, \omega)f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ conduit alors au système d'équations

$$\epsilon_1(\omega)\beta_1 = \epsilon_2(\omega)\alpha_2, \quad -i\gamma_1\beta_1 = i\gamma_2\alpha_2, \quad (2.10)$$

qui n'a de solutions non nulles que si son déterminant est nul, soit

$$\epsilon_1(\omega)\gamma_2(K_{sp}, \omega) + \epsilon_2(\omega)\gamma_1(K_{sp}, \omega) = 0. \quad (2.11)$$

En multipliant le membre de gauche par son expression conjuguée $\epsilon_1(\omega)\gamma_2(K_{sp}, \omega) - \epsilon_2(\omega)\gamma_1(K_{sp}, \omega)$, on obtient la relation de dispersion bien connue des ondes de surface d'une interface simple,

$$K_{sp}^2 = \frac{\epsilon_1(\omega)\epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)} \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.12)$$

2.1.2.2 Cas général

Le cas général est résolu dans l'annexe D.4. Là encore, l'équation (2.7) n'a de solutions que pour certaines valeurs de K_{sp} . K_{sp} en fonction de ω correspond à la relation de dispersion des ondes de surface du système considéré. On trouve que cette relation de dispersion correspond à l'annulation du déterminant du système

d'équations

$$\epsilon_j(\omega) \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} + \beta_j \right] = \epsilon_{j+1}(\omega) \left[\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right], \quad (2.13a)$$

$$i\gamma_j(K, \omega) \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} - \beta_j \right] = i\gamma_{j+1}(K, \omega) \left[\alpha_{j+1} - \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right]. \quad (2.13b)$$

avec $1 \leq j \leq M$, $\alpha_1 = \beta_{M+1} = 0$, et $\gamma_j = \sqrt{\epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$ (Les conventions pour les racines complexes sont précisées dans l'annexe A.3.) Les inconnues sont $(\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_M, \beta_M, \alpha_{M+1})$, soit $2M$ inconnues pour $2M$ équations. La relation de dispersion dépend de la constante diélectrique $\epsilon_j(\omega)$ et de l'épaisseur d_j de chaque couche j comme attendu.

L'annulation du déterminant de (2.13) donne une équation implicite reliant K_{sp}^2 à ω . En pratique, on résout ce système numériquement.

2.1.3 Développement angulaire du champ des ondes de surface

Dans le cas des ondes progressives en milieu homogène 3D, l'équation (2.6) a une solution générale qui est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i(K_x x + K_y y + \gamma z)} \mathbf{E}(K_x, K_y, z=0), \quad (2.14)$$

avec $\gamma = \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - K_x^2 - K_y^2}$ (voir annexe A.3 pour les conventions de signe des racines complexes). Cette solution met en évidence la présence d'ondes évanescentes pour $K_x^2 + K_y^2 > n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$. Ceci est l'origine physique de la limite de résolution. De surcroît, on peut interpréter le terme $e^{i\gamma z}$ comme un propagateur de Fourier donnant le spectre $\mathbf{E}(K_x, K_y, z) = \mathbf{E}(K_x, K_y, 0) e^{i\gamma z}$, où $\mathbf{E}(K_x, K_y, z) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i(K_x x + K_y y)} \mathbf{E}(x, y, z)$ est la transformée de Fourier par rapport à x et y du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dans le plan z constant. Nous allons voir dans cette section que l'on peut déduire de (2.5) un développement analogue pour le champ des ondes de surface.

En ce qui concerne les ondes de surface, on peut aisément un développement analogue du champ des ondes de surface. On considère la transformée de Fourier par rapport à y de $\mathcal{E}(x, y)$, $\mathcal{E}(x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iK_y y} \mathcal{E}(x, y)$, qui vérifie

$$\mathcal{E}(x, y) = \int \frac{dK_y}{2\pi} e^{iK_y y} \mathcal{E}(x, K_y) \quad (2.15)$$

(transformée de Fourier inverse). De (2.5), on déduit l'équation vérifiée par $\mathcal{E}(x, K_y)$,

$$\frac{\partial^2 [\mathcal{E}(x, K_y)]}{\partial x^2} + K_{x,sp}^2 \mathcal{E}(x, K_y) = 0, \quad (2.16)$$

avec $K_{x,sp} = \sqrt{K_{sp}^2 - K_y^2}$. Les solutions de cette équation sont de la forme $\mathcal{E}(x, K_y) = \alpha(K_y) e^{iK_{x,sp} x} + \beta(K_y) e^{-iK_{x,sp} x}$. Le terme $\beta(K_y) e^{-iK_{x,sp} x}$ correspond à des ondes de surface se propageant vers les x négatifs. Si les ondes de surface considérées se propagent uniquement vers la droite (par exemple si toutes les sources d'ondes de surface se situent à gauche de l'aire d'observation), ce dernier terme est nul. On peut alors

écrire

$$\mathcal{E}(x, K_y) = \mathcal{E}(x = 0, K_y) e^{iK_{x,sp}x}, \quad (2.17)$$

et on obtient en insérant cette expression dans (2.15),

$$\mathcal{E}(x, y) = \int \frac{dK_y}{2\pi} e^{i(K_{x,sp}x + K_y y)} \mathcal{E}(x = 0, K_y). \quad (2.18)$$

Il est à noter qu'en présence d'absorption, on ne retrouve pas une distinction nette entre des ondes progressives et des ondes évanescentes. On a tracé sur la figure 2.5 les parties réelles et imaginaires de $K_{x,sp}$ en

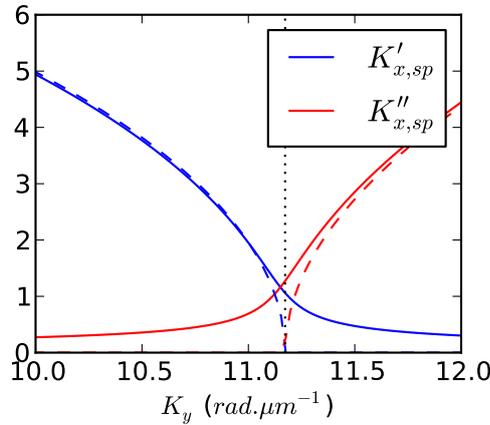


FIGURE 2.5 – $K'_{x,sp}$ et $K''_{x,sp}$ en fonction de K_y . Cas particulier d'une interface simple or/air à $\lambda_0 = 400$ nm. Unités en ordonnées : $\text{rad}.\mu\text{m}^{-1}$. Trait continu : avec pertes, tirets : sans pertes. Pointillés : $K_y = K'_{sp}$. La frontière entre les ondes de surface progressives ($K''_{x,sp}$ faible) et évanescentes ($K''_{x,sp}$ non négligeable) n'est pas nette en présence d'absorption.

fonction de K_y pour un cas particulier. On voit sur la figure que $K''_{x,sp}$ n'est jamais nulle à cause de l'absorption, puis augmente fortement pour $|K_y| > K'_{sp}$ alors que $K'_{x,sp}$ tend vers 0. K'_{sp} apparaît comme une fréquence spatiale de coupure dans la direction x . En régime monochromatique, (ω réel) et en présence de pertes, le repliement de la relation de dispersion limite les valeurs accessibles de K'_{sp} et impose une limite de résolution. On a tracé la relation de dispersion des SPP d'une interface verre/argent sur la figure 2.6 (gauche), ainsi que la longueur de propagation de ces SPP (droite). Sur cet exemple, pour des longueurs de propagation raisonnables (supérieures à quelques μm), les valeurs accessibles de K'_{sp} restent proches des valeurs de K permises avec les ondes progressives, situées à gauche du cône de lumière (tirets sur la figure 2.6).

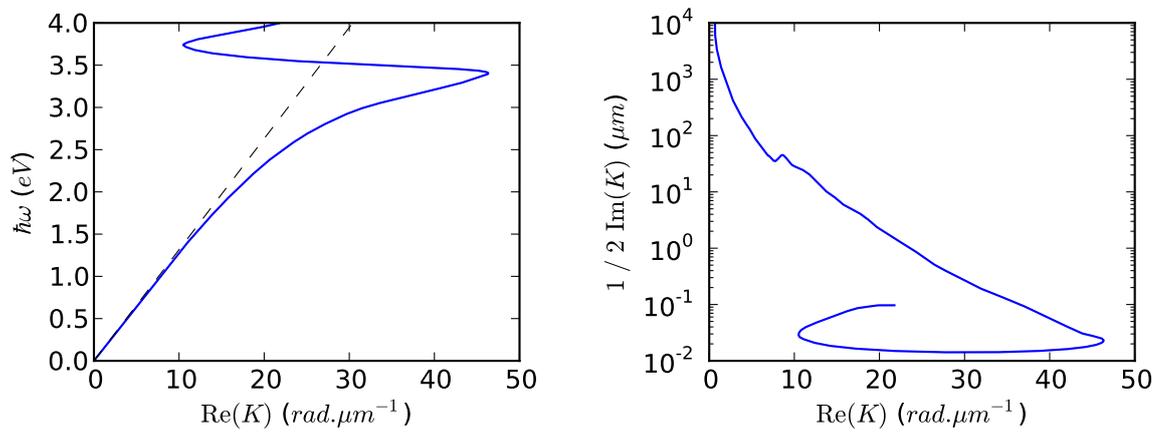


FIGURE 2.6 – Relation de dispersion et longueur de propagation des SPP d’une interface verre/argent. Gauche : relation de dispersion (trait bleu) et cône de lumière du verre $K = n \frac{\omega}{c}$ avec $n = 1,5$. Droite : longueur de propagation $(\frac{1}{2\text{Im}(K)})$.

2.2 Principe d'Huygens-Fresnel

2.2.1 Rappels généraux

Dans le cadre de l'électromagnétisme, il est possible de démontrer le principe d'Huygens-Fresnel. Nous commençons par rappeler la procédure habituelle du cas 3D avant d'établir le résultat correspondant pour les ondes de surface.

Le « principe » d'Huygens-Fresnel permet d'obtenir le champ électrique des ondes progressives en un point \mathbf{r} à l'intérieur d'un volume V délimité par une surface S en fonction du champ (et de ses dérivées) sur S (voir figure 2.7). Sa forme mathématique exacte se déduit de l'équation intégrale de Helmholtz et Kirchhoff (BORN

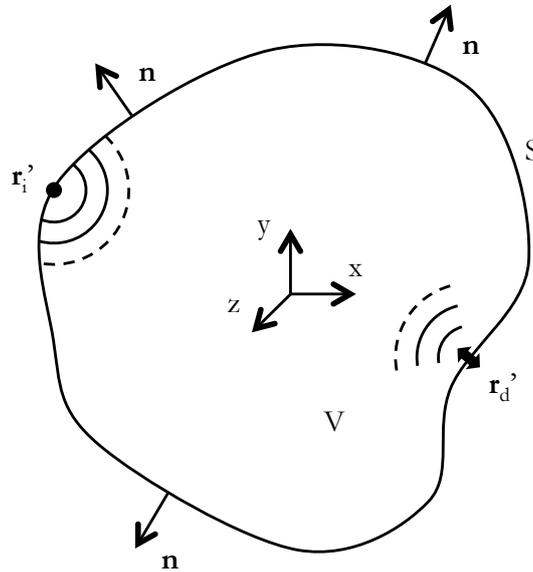


FIGURE 2.7 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes progressives. On calcule le champ à l'intérieur d'un volume V ayant pour frontière une surface S . Les points de S sont vus comme des sources secondaires isotropes (\mathbf{r}'_i) ou directionnelles (\mathbf{r}'_d). Le principe d'Huygens-Fresnel (équation 2.19) fait intervenir la dérivée du champ électrique sur S selon la normale sortante \mathbf{n} .

et WOLF 1999) qui peut s'écrire

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS \left\{ \underbrace{\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')]]}_{\tilde{\mathbf{E}}_{1,\mathbf{r}'(\mathbf{r})}} - \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)}_{\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}'(\mathbf{r})}} \right\} \quad (2.19)$$

où la frontière S du volume V est parcourue par \mathbf{r}' , $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}$ désigne la dérivée (par rapport à \mathbf{r}') selon la normale sortante de S en \mathbf{r}' (voir figure 2.7), et \mathbf{r} est un point de V . Cette équation exprime le champ en un point \mathbf{r} de V en fonction du champ et de sa dérivée normale sur la frontière S . Les points \mathbf{r}' de la surface S peuvent être vus comme les sources (on parle de « sources secondaires ») de deux ondes, une première onde,

sphérique et proportionnelle à la dérivée normale du champ en \mathbf{r}' ,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{1,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')], \quad (2.20)$$

et une seconde onde simplement proportionnelle au champ en \mathbf{r}' ,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (2.21)$$

Cette seconde onde a pour direction privilégiée la normale de S en \mathbf{r}' . En effet, on peut ré-écrire le terme dérivé dans l'équation précédente,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \quad (2.22a)$$

$$= -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \cos(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (2.22b)$$

Le terme en $\cos(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{n})$ est de module maximal lorsque $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ est parallèle à \mathbf{n} .

La surface S de l'expression (2.19) peut être ouverte dans certains cas. Si au-delà d'une certaine distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe $(x, y) = (0, 0)$, S coïncide avec le plan $z = 0$ (voir figure 2.8), si toutes les sources à

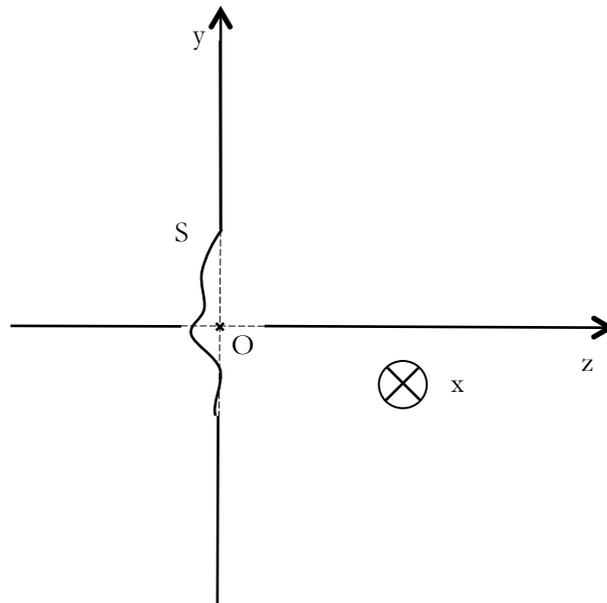


FIGURE 2.8 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel usuel avec une surface S ouverte. Vue en coupe d'une surface S ouverte, coïncidant avec le plan $z = 0$ loin de l'axe Oz .

l'origine du champ considéré se situent dans le demi-espace à gauche de S , et si la *condition de rayonnement*

de Sommerfeld

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ik\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial R} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (2.23)$$

est satisfaite, alors l'expression (2.19) s'applique avec cette surface S ouverte.

Si cette surface ouverte S coïncide avec le plan $z = 0$ (figure 2.9), on a (GOODMAN 2005)

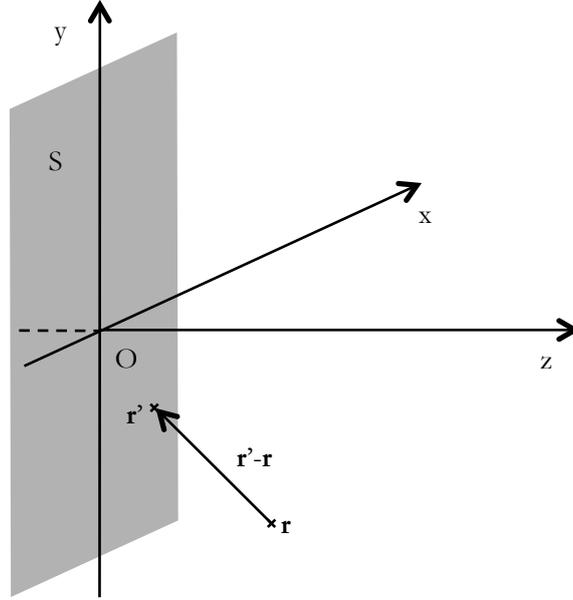


FIGURE 2.9 – Surface S coïncidant avec le plan $z = 0$.

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_S dS \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \quad (2.24a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_S dS \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')]. \quad (2.24b)$$

Les équations (2.24) ont l'avantage de dépendre soit du champ sur S , soit de sa dérivée normale – seul l'un des deux champs a besoin d'être connu.

2.2.2 Principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface

Un principe d'Huygens-Fresnel, présentant des propriétés analogues à celui des s'appliquant aux ondes progressives (rappelé dans la partie 2.2.1), peut être obtenu pour les ondes de surface. On montre dans l'annexe D.2.1 que l'on peut écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{4i} \int_L dL \left\{ \underbrace{H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)}_{\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}') - \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\underbrace{H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)}_{\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})} \right] \right\}, \quad (2.25)$$

où $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$, $\vec{\rho}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$, $|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, L est un chemin fermé du plan xy (voir figure 2.10) parcouru par le vecteur $\vec{\rho}'$. Il faut que $\vec{\rho}$ soit dans la surface S délimitée par L . $H_0^{(1)}$

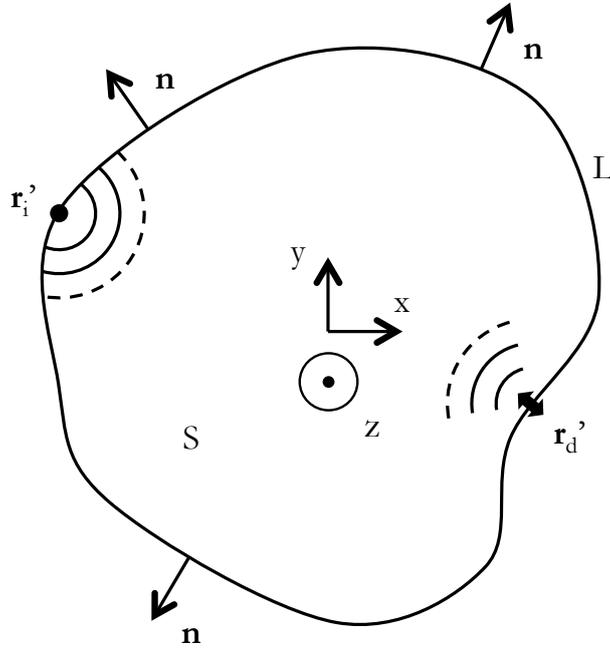


FIGURE 2.10 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface. On calcule le champ à l'intérieur de la surface S délimitée par le chemin L . Les points de L sont vus comme des sources secondaires isotropes (r'_i) ou anisotropes (r'_d).

est la fonction de Hankel d'ordre 0 du premier type – son argument $K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|$ est complexe, ses parties réelle et imaginaire sont tracées pour plusieurs valeurs du rapport entre les parties imaginaire et réelle de son argument sur la figure 2.11.

L'égalité (2.25) exprime le champ en un point $\vec{\rho}$ de la surface S en fonction du champ sur sa frontière, le chemin fermé L . Chaque point de L est vu comme la source de deux ondes, une première onde, isotrope et proportionnelle à la dérivée du champ $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$ selon la normale sortante de L ,

$$\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'), \quad (2.26)$$

et une seconde onde, proportionnelle au champ en $\vec{\rho}'$,

$$\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = -\mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right]. \quad (2.27)$$

Cette seconde onde est anisotrope, et a pour direction privilégiée la normale de L en $\vec{\rho}'$. En effet, on peut

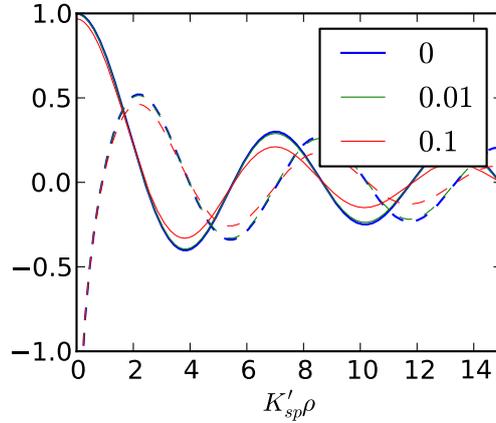


FIGURE 2.11 – Parties réelle et imaginaire de la fonction de Hankel d'ordre 0 de type 1, $H_0^{(1)}$. Trait continu : partie réelle. Tirets : partie imaginaire. On a représenté $H_0^{(1)}(K_{sp}'\rho)$ en fonction de $K_{sp}'\rho$, pour différentes valeurs du rapport $F = 2K_{sp}''/K_{sp}'$ (légende).

ré-écrire le terme dérivé dans l'équation précédente,

$$\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = -\mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] \quad (2.28a)$$

$$= K_{sp} \mathcal{E}(\vec{\rho}') \cos(\vec{\rho} - \vec{\rho}', \mathbf{n}) H_1^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|). \quad (2.28b)$$

Le terme $\cos(\vec{\rho} - \vec{\rho}', \mathbf{n})$, dépendant de l'angle entre $\vec{\rho} - \vec{\rho}'$ et la normale sortante à L en $\vec{\rho}'$, \mathbf{n} , est fonction de la direction de $\vec{\rho} - \vec{\rho}'$ et est à l'origine de l'anisotropie de la source.

L'expression (2.25) a l'inconvénient de faire intervenir une somme le long d'un chemin *fermé*, mais celui-ci peut être ouvert dans certains cas. Si toutes les sources d'ondes de surface se situent à des abscisses $x < 0$, si les extrémités de L coïncident avec des portions de l'axe $x = 0$ (voir figure 2.12) et si $\mathcal{E}(x, y)$ remplit la *condition de rayonnement*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left[iK_{sp} \mathcal{E}(x, y) - \frac{\partial}{\partial R} \mathcal{E}(x, y) \right] = 0 \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (2.29)$$

l'expression (2.25) s'applique toujours, avec un chemin L ouvert désormais.

Dans le cas où ce chemin L ouvert coïncide avec l'axe $x = 0$ (voir figure 2.13), les sommes sur L des deux contributions à $\mathcal{E}(x, y)$, $\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})$ et $\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})$, sont égales. On montre dans l'annexe D.2.3 que l'on peut alors écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \frac{1}{2i} \int_L dL \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] \quad (2.30a)$$

$$= -\frac{1}{2i} \int_L dL H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'). \quad (2.30b)$$

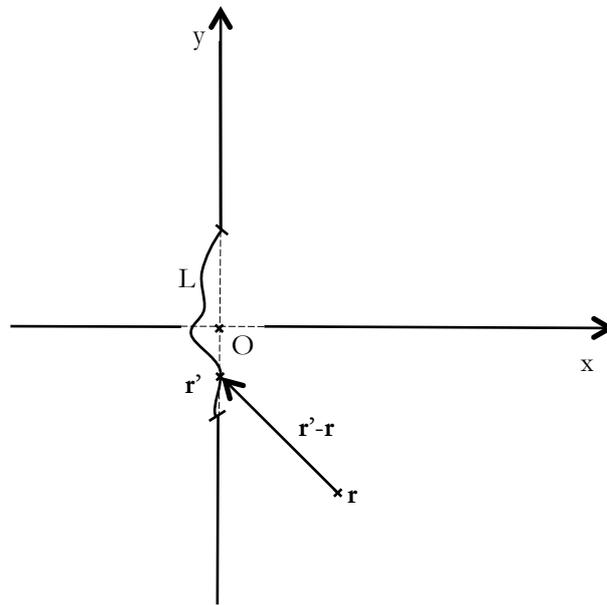


FIGURE 2.12 – Géométrie pour le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface avec un chemin L ouvert.

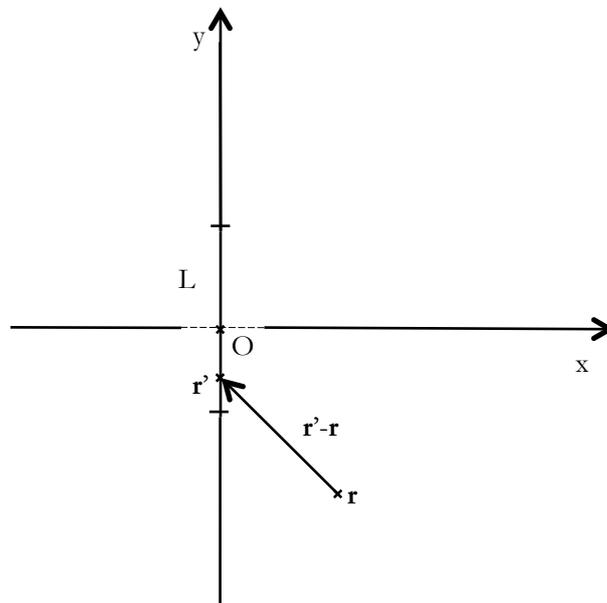


FIGURE 2.13 – Géométrie pour le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface avec un chemin L coïncidant avec l'axe $x = 0$ (équation 2.30).

Ces deux expressions correspondent soit à une somme d'ondes anisotropes (équation 2.30a), soit à une somme d'ondes isotropes (équation 2.30b). Elles font intervenir soit $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$, soit $\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}(\vec{\rho}')$: il suffit de connaître un seul de ces deux champs sur L pour calculer $\mathcal{E}(\vec{\rho})$.

On retrouve là encore une analogie entre les ondes électromagnétiques usuelles et les ondes de surface. Le principe d'Huygens-Fresnel exprime le champ en un point à l'intérieur d'un volume (ondes électromagnétiques usuelles, équation 2.19) ou d'une surface (ondes de surface, équation 2.25) en fonction du champ à la frontière de ce volume ou cette surface. Chaque point de la frontière est vu comme une source « secondaire » de deux ondes, l'une isotrope (en $\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ pour les ondes électromagnétiques usuelles, en $H_0^{(1)}(K_{sp}|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)$ pour les ondes de surface), l'autre anisotrope (dérivée normale des termes précédents). L'onde isotrope est proportionnelle à la dérivée normale du champ à la frontière, l'onde anisotrope simplement au champ.

Dans les deux cas, sous certaines conditions, on peut exprimer le champ après une surface S (ondes progressives) ou un chemin L (ondes de surface) en fonction soit du champ sur cette surface ou ce chemin, soit de la dérivée normale du champ sur cette surface ou ce chemin (équations 2.24 pour les ondes progressives, 2.30 pour les ondes de surface). Les expressions rigoureuses établies ici diffèrent des expressions scalaires utilisées dans la littérature. La dérivée normale de $H_0^{(1)}$ introduit des termes de champ proche ainsi que des effets d'anisotropie à plus grande distance.

2.3 Diffraction d'ondes de surface

Afin d'illustrer le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface déterminé dans la partie précédente, nous allons maintenant nous intéresser à différents systèmes diffractant et focalisant les ondes de surface.

2.3.1 Ouverture simple

Une ouverture simple permet de visualiser les différences d'intensité entre les différentes composantes du champ des ondes de surface. Une manière de réaliser ce système, analogue à celui de ZIA et BRONGERSMA (2007), est représentée sur la figure 2.14. Un ruban métallique guide les SPP jusqu'à un film métallique sur

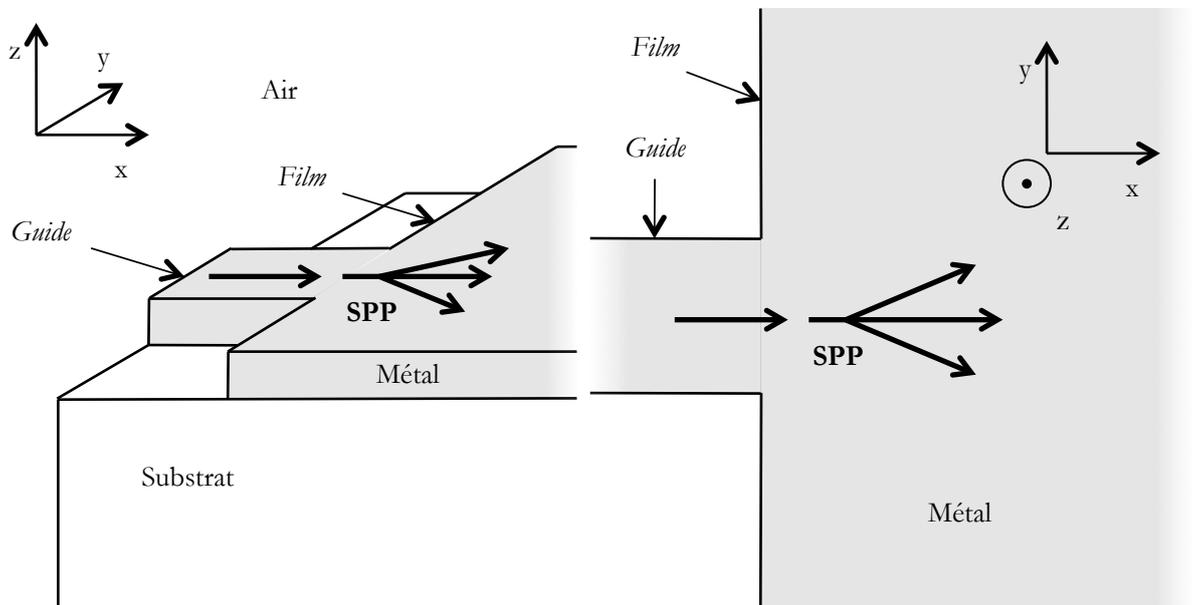


FIGURE 2.14 – Système diffractant les SPP incidents d'une ouverture simple. Gauche : vue en coupe de la jonction guide/film semi-infini. Droite : vue de dessus.

lequel ils peuvent se propager librement. Les SPP du guide ont été préalablement excités, via un réseau ou par éclairage direct par exemple). La jonction entre le ruban et le film constitue l'ouverture « source » de SPP. On a représenté sur les figures 2.15 et 2.16 les trois composantes du champ des SPP émis par deux ouvertures de tailles différentes, l'une sub-longueur d'onde (largeur w plus faible que la longueur d'onde des SPP λ_{sp}), l'autre non. La première ouverture sera ainsi peu directionnelle, la seconde le sera plus. On voit dans les deux cas que la composante E_y du champ diffère fortement de E_x et E_z : elle est notamment nulle sur l'axe Ox .

2.3.2 Fentes d'Young

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet également de tracer les composantes du champ des SPP de l'expérience des fentes d'Young plasmoniques réalisée par ZIA et BRONGERSMA (2007). Le

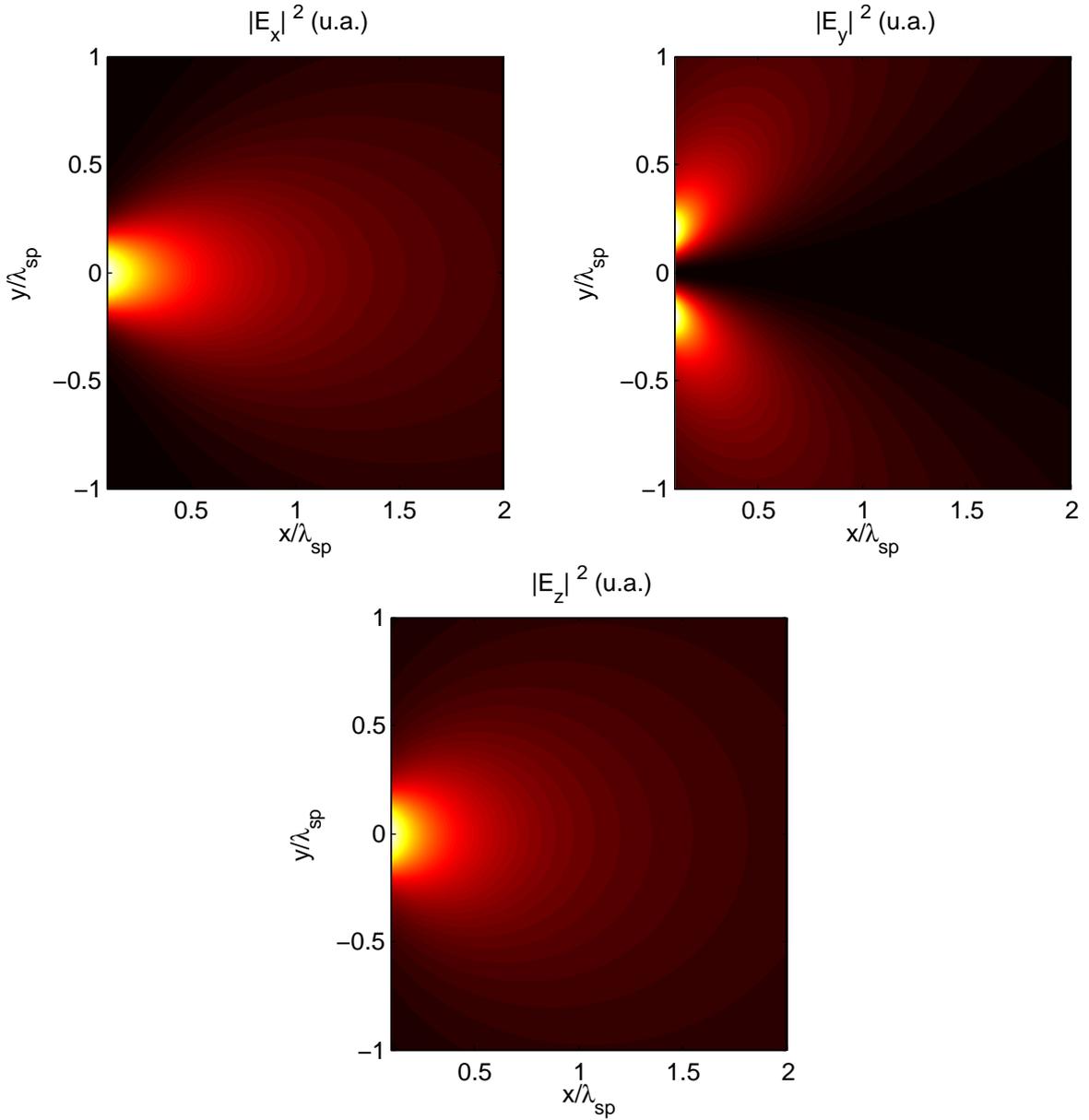


FIGURE 2.15 – Composantes du champ des plasmons-polaritons de surface (SPP) émis par une ouverture de largeur $w = 0,5 \lambda_{sp}$. $K_{sp} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \approx (1,6427 + i0,0128) rad.\mu m^{-1}$ calculé pour les SPP d'une interface or/air à $\lambda_0 = 657$ nm (longueur d'onde des SPP : $\lambda_{sp} = 400$ nm). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,126 pour $|E_x|^2$, 0,057 pour $|E_y|^2$ et 1 pour $|E_z|^2$. Le champ « source » sur l'axe $x = 0$ vaut $\mathcal{E}(x = 0, y) = \cos(\pi \frac{y}{w})$ si $|y| \leq \frac{w}{2}$, et 0 sinon, forme s'approchant de celle indiquée graphiquement par ZIA et BRONGERSMA (2007).

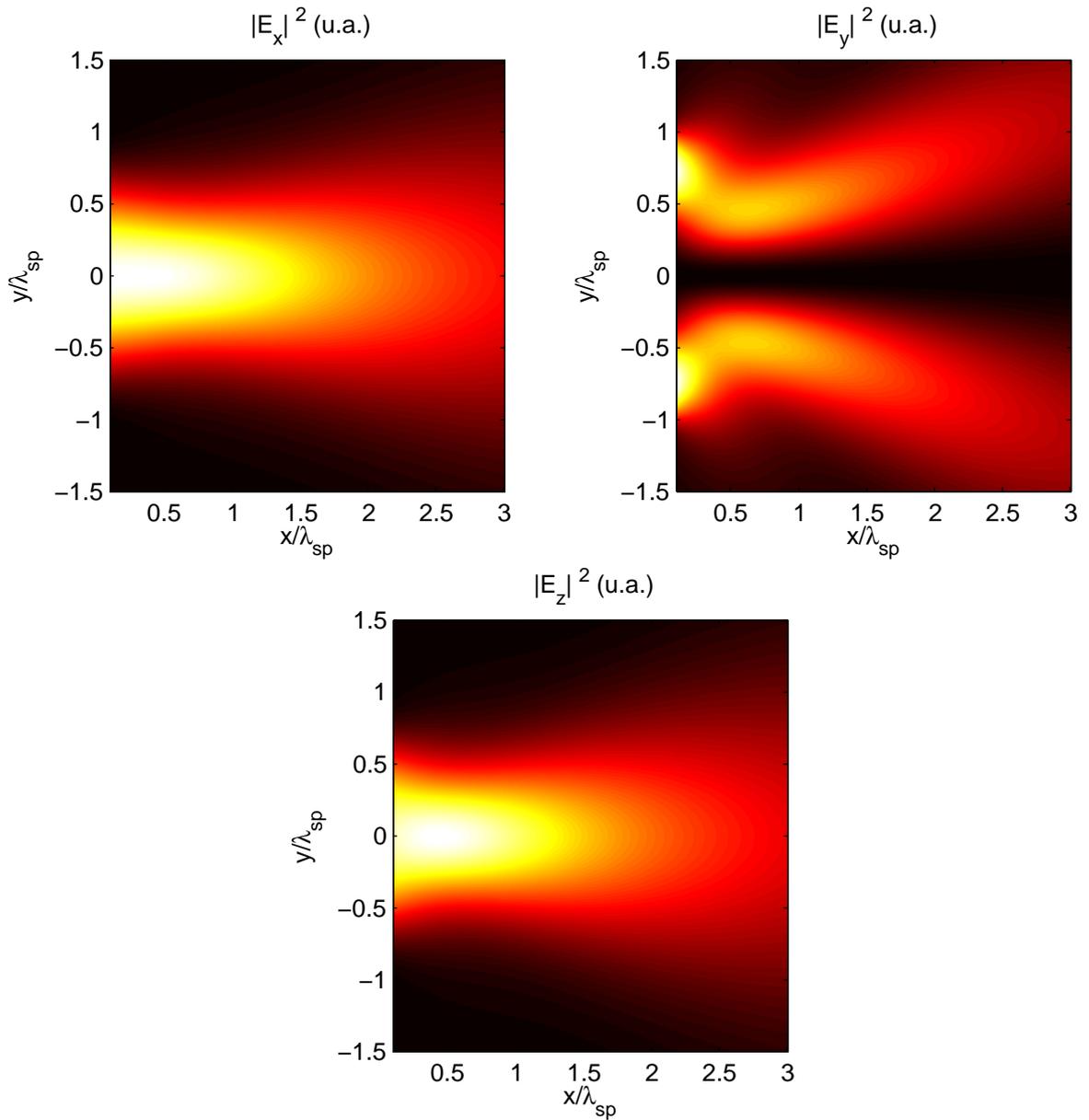


FIGURE 2.16 – Composantes du champ des SPP émis par une ouverture de largeur $w = 2 \lambda_{sp}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,146 pour $|E_x|^2$, $8,90 \times 10^{-3}$ pour $|E_y|^2$ et 1 pour $|E_z|^2$. Voir également les commentaires de la figure 2.15 pour l'expression du champ « source » sur l'axe $x = 0$.

principe de cette expérience est rappelé sur la figure 2.17. Cette expérience consiste à observer la propagation

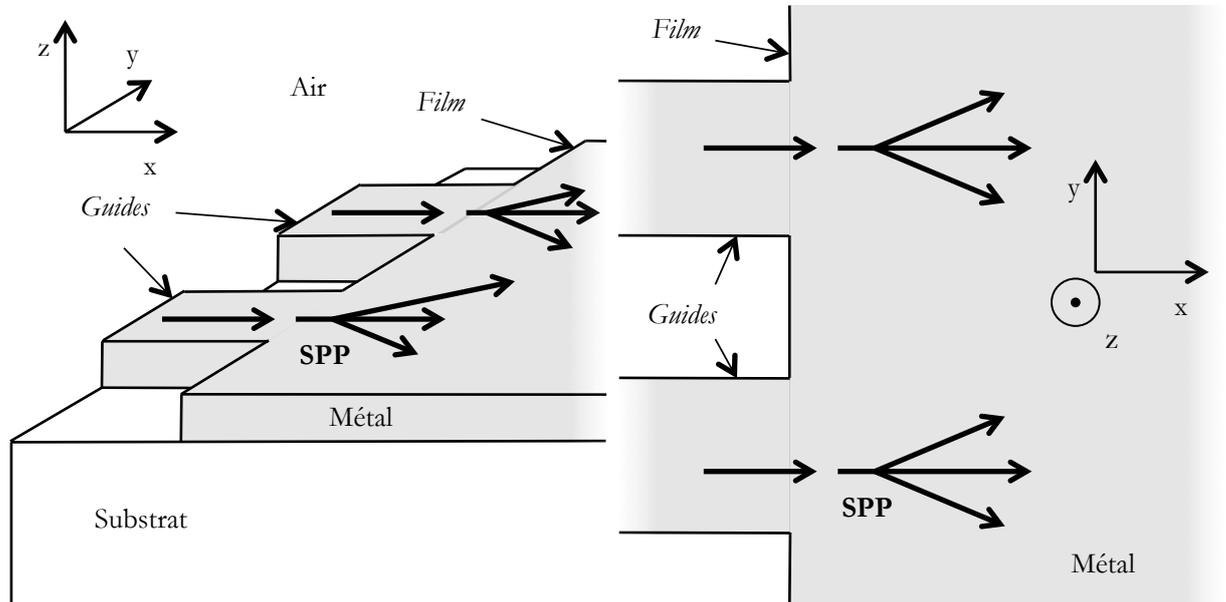


FIGURE 2.17 – Analogie plasmonique de l'expérience des fentes d'Young. Gauche : vue en coupe des jonctions guides/film semi-infini. Droite : vue de dessus.

des SPP émis par deux ouvertures placées en bordure d'un film métallique. Lors de leur propagation, les SPP émis interfèrent, et ces interférences sont observées en champ proche à l'aide d'un SNOM dont la pointe scanne la surface du film. On a représenté les trois composantes du champ calculées à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, ainsi que la somme du carré de leurs modules, sur la figure 2.18.

La figure expérimentale obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007) est reproduite sur la figure 2.19 pour comparaison. On remarque qu'on obtient un bon accord (divergence des deux faisceaux, largeur et évolution le long de l'axe x des interférences constructives et destructives) entre la figure calculée pour $|\mathbf{E}|^2$ (figure 2.18, en bas à droite) et la figure obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007) (figure 2.19), aux franges d'interférences de cette dernière près (vraisemblablement dues au faisceau excitateur des modes des guides). Il est à noter que les auteurs ne donnent pas la forme exacte du champ utilisé dans les calculs qu'ils effectuent en s'appuyant sur une version scalaire du principe d'Huygens-Fresnel, et n'indiquent pas la fréquence à laquelle l'expérience est réalisée – on l'a ici supposée correspondant à $\lambda_0 = 780$ nm, longueur d'onde employée par ZIA et al. (2006) indiqués en référence par ZIA et BRONGERSMA (2007).

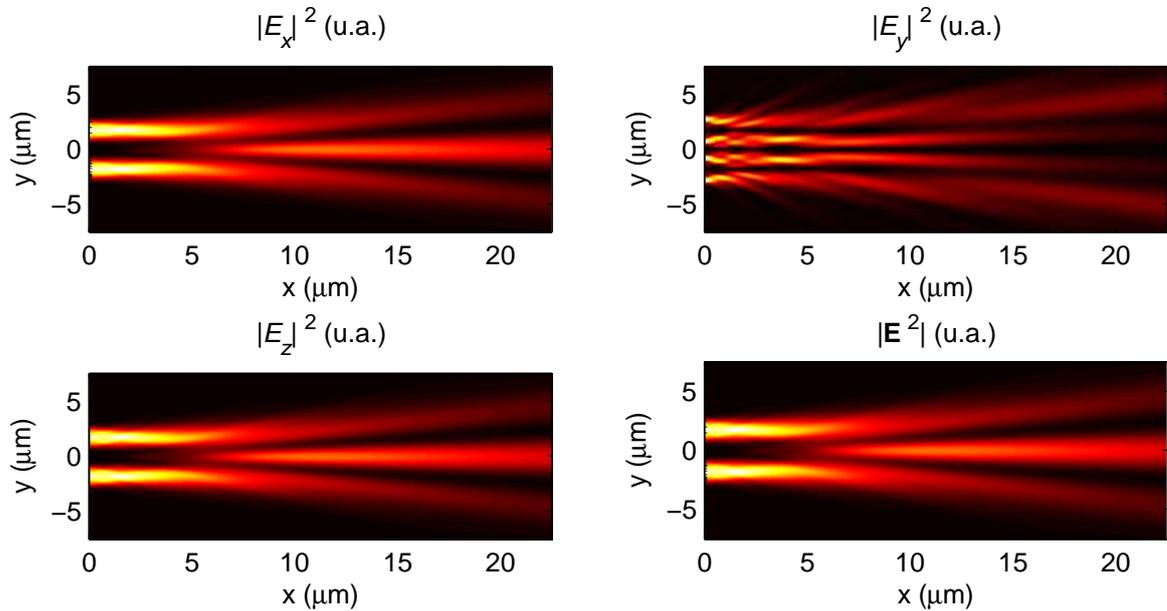


FIGURE 2.18 – Composantes du champ des SPP d'un analogue plasmonique des fentes d'Young (ZIA et BRONGERSMA 2007). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,87 pour $|E_x|^2$, 0,025 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,87 pour $|\mathbf{E}^2| = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$. La forme du champ de chaque faisceau incident est donné en note de la figure 2.15. Afin de reproduire au mieux la forme du champ incident de ZIA et BRONGERSMA (2007), la largeur des deux faisceaux utilisée est $w = 2,7 \mu\text{m}$ et la distance entre leurs centres est de $d = 3,5 \mu\text{m}$.

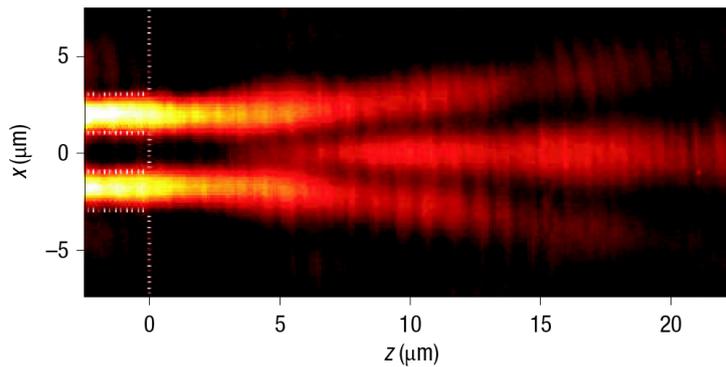


FIGURE 2.19 – Image du champ de l'expérience des fentes d'Young pour les SPP obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007). Les deux guides sont indiqués en pointillés blancs sur la gauche, la partie droite de la figure correspond au film sur lequel se propagent les SPP. La largeur des guides est de $2 \mu\text{m}$ et ils sont espacés de $2 \mu\text{m}$ également (distance entre leurs centres de $4 \mu\text{m}$). L'abscisse $x = 0$ des images de la figure 2.18 correspond à la terminaison des guides (ouvertures le long de la ligne verticale).

2.4 Focalisation d'ondes de surface

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface peut notamment être utilisé afin de modéliser des systèmes focalisant des ondes de surface. De nombreux groupes ont étudié de tels systèmes expérimentalement (voir introduction du chapitre). Afin d'illustrer les possibilités offertes par le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, nous allons nous intéresser à deux systèmes particuliers : une « lentille zonée de Fresnel » (*Fresnel zone plate*) pour les ondes de surface, dont nous précisons le principe – un modèle simple permettra de la décrire, et un système focalisant des phonons-polaritons de surface (SPhP) d'une interface SiC/air, réalisé expérimentalement par HUBER et al. (2008).

2.4.1 Lentille zonée de Fresnel

Le principe de fonctionnement de la lentille zonée de Fresnel pour ondes de surface est schématisé sur la figure 2.20. Cette lentille est constituée d'un ensemble d'ouvertures, situées sur l'axe Oy , dont les centres sont

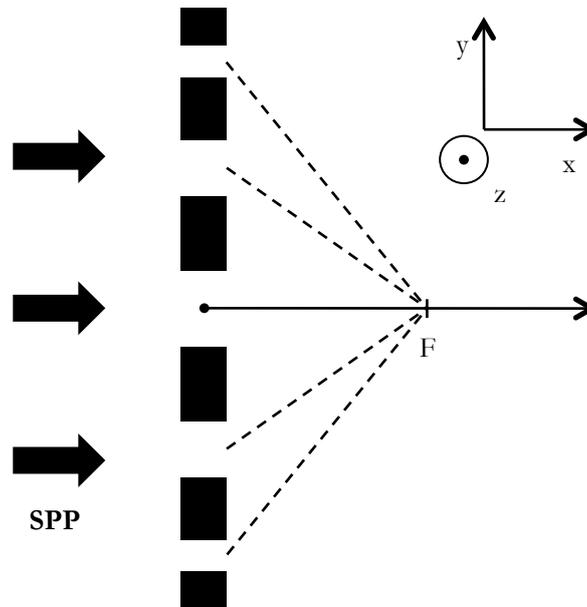


FIGURE 2.20 – Lentille zonée de Fresnel pour les ondes de surface. Un faisceau de SPP incident est mis en forme par des absorbeurs, de sorte que leur champ immédiatement après les absorbeurs puisse être calculé avec une approximation de Kirchhoff.

situés à une distance $|j|\lambda_{sp}$ du foyer F de la lentille (voir figure 2.20), et dont les extrémités sont à une distance de $(|j| \pm \frac{1}{6})\lambda_{sp}$ de F (j entier). Par analogie avec le principe de Kirchhoff pour les ondes progressives (NIETO-VESPERINAS 2006), qui consiste, lors d'expériences de diffraction, à déterminer un champ initial à l'aide de l'optique géométrique, on suppose $\mathcal{E}(x, y)$ égal à 1 au niveau des ouvertures sur l'axe Oy , et nul sur Oy hors des ouvertures.

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet alors de déterminer le champ des ondes de surface après la lentille. Les modules au carré des trois composantes de ce champ, ainsi que leur somme,

sont représentés sur les figures 2.21 et 2.22.

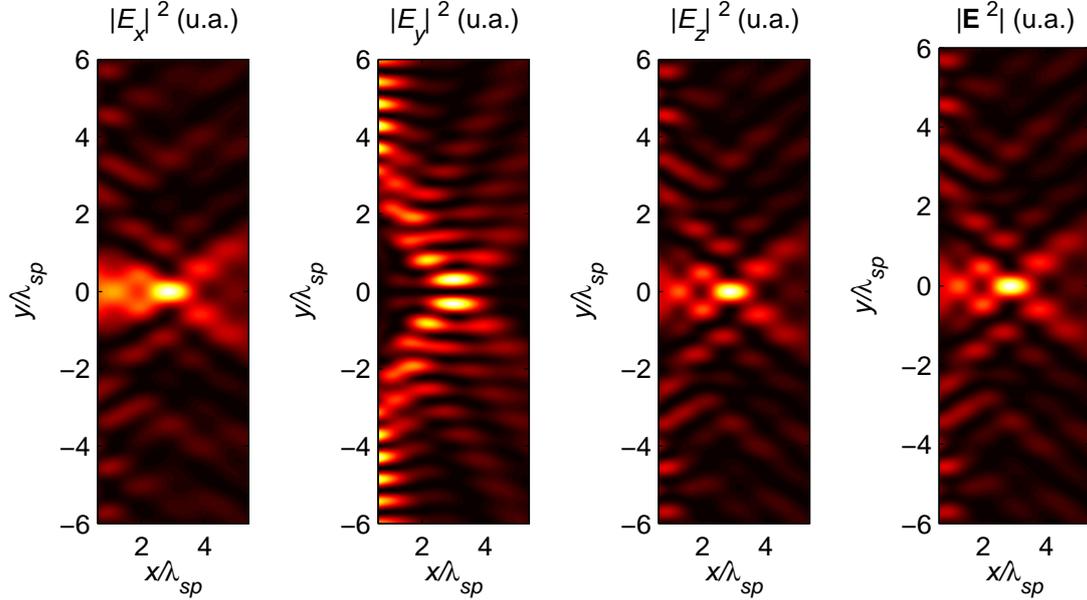


FIGURE 2.21 – Composantes du champ des SPP d'une lentille de Fresnel pour les ondes de surface. $f = 3\lambda_{sp}$. $K_{sp} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(1,643 + i0,0128)$ calculé pour les ondes de surface d'une interface or/air à $\lambda_0 = 400 \text{ nm}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,099 pour $|E_x|^2$, 0,031 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,099 pour $|\mathbf{E}^2| = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$.

Comme dans le cas du champ après une ouverture simple (figures 2.15 et 2.16), la composante E_y diffère fortement de E_x et E_z . Dans tous les cas, on remarque que les modules au carré des composantes E_x et E_y sont plus faibles d'un à deux ordres de grandeur que celui de E_z . Dans le cas de la plus courte focale ($f = \lambda_{sp}$, figure 2.22), la composante E_x s'éloigne plus de E_z que pour la focale plus importante $f = 3\lambda_{sp}$, notamment à proximité immédiate de la lentille.

2.4.2 Focalisation sur une surface de carbure de silicium

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet également de modéliser des systèmes plus complexes, dont le champ n'est a priori connu que sur un chemin courbe. C'est le cas du système étudié expérimentalement par HUBER et al. (2008). Le principe de cette expérience est représenté sur la figure 2.23. Une structure en or, réalisée à la surface d'un substrat en carbure de silicium (SiC), est éclairée par le faisceau émis par un laser CO_2 à une longueur d'onde de $\lambda = 10,85 \mu\text{m}$. Le laser incident conduit à l'apparition de courants induits dans la structure en or. Ces courants induits, proches de la surface de SiC, excitent des SPhP de celle-ci.

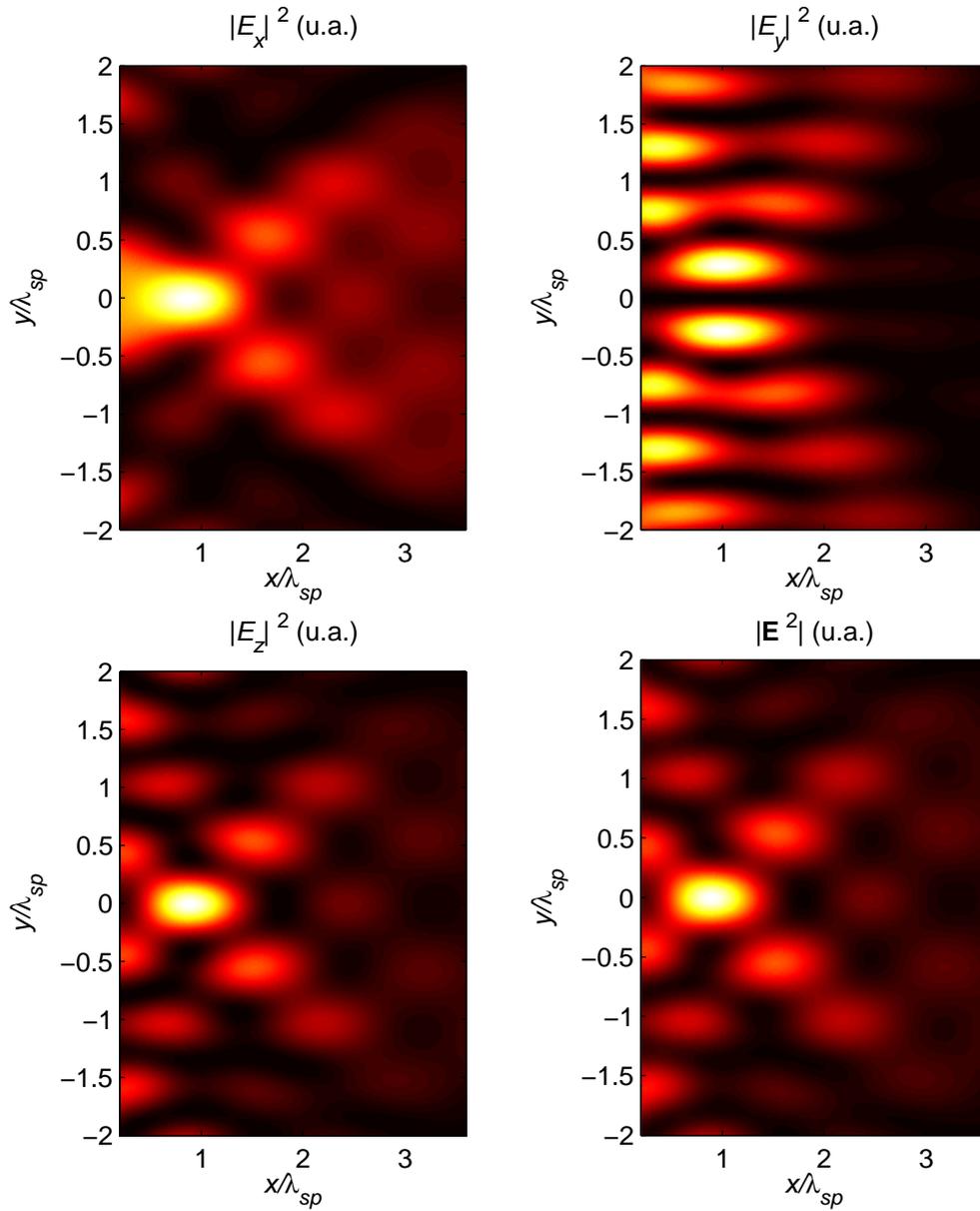


FIGURE 2.22 – Composantes du champ des SPP d’une lentille de Fresnel pour les ondes de surface. $f = \lambda_{sp}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,069 pour $|E_x|^2$, 0,048 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,07 pour $|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$.

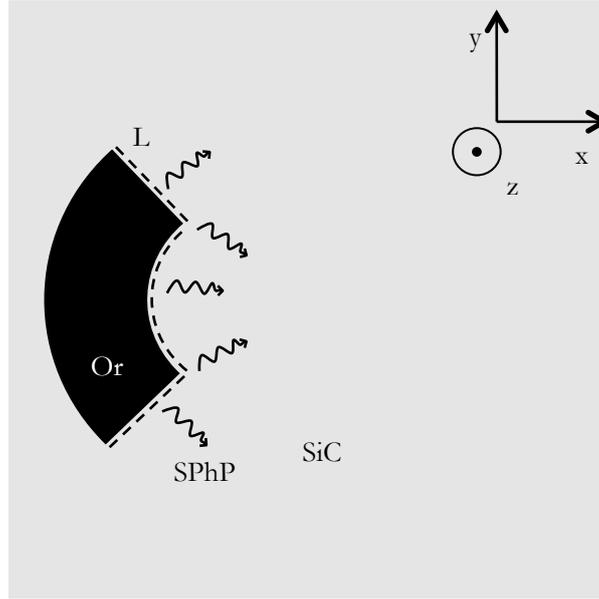


FIGURE 2.23 – Structure en or sur une surface de SiC focalisant ses SPhP. La structure en or est éclairée par un laser à $\lambda = 10,85 \mu\text{m}$. Les courants induits dans l'or excitent les SPhP de la surface de SiC. Le chemin L sur lequel sont disposées les sources secondaires est représenté en pointillés.

2.4.2.1 Approximation de Kirchhoff

Afin de déterminer à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel le champ des ondes de surface émis une telle structure, on suppose que l'on connaît le champ $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ à proximité de la structure en or, sur le chemin L schématisé sur la figure 2.23. Toutefois, la connaissance de $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ n'est pas suffisante ici. En effet, la frontière de la structure en or est courbe, et l'on ne peut plus utiliser la formule (2.30a) afin de calculer le champ des ondes de surface dans la structure. L'équation (2.25) doit être utilisée, et il faut, pour cela, connaître également la dérivée normale du champ, $\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}(\vec{\rho})$.

Afin de la déterminer, nous allons effectuer une approximation dans l'esprit de l'approximation de Kirchhoff (ou du plan tangent) dans le cadre de la diffusion par une surface rugueuse (NIETO-VESPERINAS 2006). Cette approximation consiste à supposer le rebord diffusant l'onde incidente comme localement plat. Le long de ce rebord plat, le champ des ondes de surface est supposé proportionnel au champ incident, $\mathcal{E}(\vec{\rho}_{reb}) \propto E_{z,inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}}$ avec $\mathbf{r} = \vec{\rho}_{reb} + z\mathbf{z}$ et $\vec{\rho}_{reb}$ est la position d'un point du rebord (z peut correspondre à l'altitude approximative du rebord, mais est en fait arbitraire, seule la dépendance vis-à-vis de $\vec{\rho}$ nous intéresse ici). L'onde de surface émise correspondra alors à une onde plane de la forme $\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \vec{\rho}}$, et la composante tangentielle de \mathbf{K} est fixée par le champ incident sur le rebord, $K_t = k_{inc,t}$. En effet, la phase de l'onde émise est égale à la phase de l'onde incidente le long du rebord. La composante normale de \mathbf{K} s'en déduit connaissant son carré K_{sp}^2 , $K_n = \sqrt{K_{sp}^2 - K_t^2}$. Ainsi la dérivée normale du champ sur le rebord vaut finalement $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n}(\vec{\rho}_{reb}) = iK_n \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \vec{\rho}_{reb}} = i\sqrt{K_{sp}^2 - k_{inc,t}^2} \mathcal{E}(\vec{\rho}_{reb})$.

2.4.2.2 Champs obtenus

$|E_z|^2$ et $|\mathbf{E}|^2$ calculés à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface sont représentés sur les figures 2.24(a) à 2.24(d). 2.24(c) est à comparer aux résultats obtenus par HUBER et al. (2008), reproduits sur la figure 2.24(e). 2.24(f) reproduit le champ des SPhP uniquement tel que calculé par HUBER et al. (2008) à l'aide d'un principe d'Huygens-Fresnel scalaire, on peut la comparer à 2.24(a). Pour tracer les figures 2.24(a) à 2.24(d), on a supposé que les sources secondaires n'étaient disposées que sur l'arc de cercle intérieur du rebord en or ainsi que sur les segments inférieur et supérieur joignant les deux arcs. Le rayon de l'arc intérieur du rebord, qui n'est pas précisé explicitement par HUBER et al. (2008), a été fixé à $R = 26 \mu\text{m}$.

On constate que la théorie scalaire (figure 2.24(f)) reproduit convenablement le résultat de la théorie vectorielle que nous avons proposée (figure 2.24(a)). La figure du champ total (figure 2.24(c)) reproduit bien les principales caractéristiques de la figure obtenue expérimentalement (figure 2.24(e)).

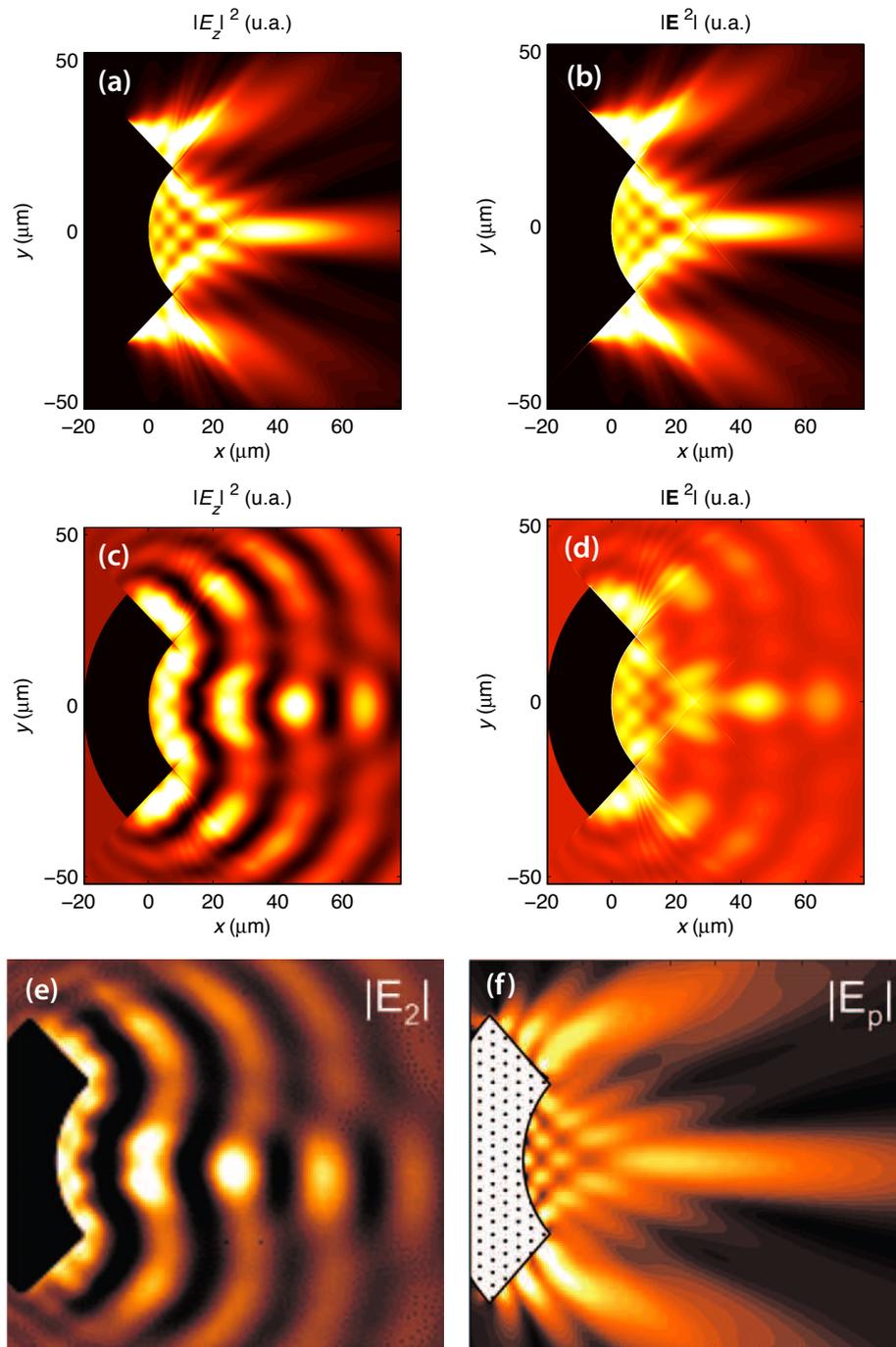


FIGURE 2.24 – Champ des SPhP excités par une structure en or sur une surface de SiC. (a) à (d) : champs calculés à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface. (a) et (b) : champ des SPhP uniquement, (c) et (d) : champ des phonons-polaritons de surface et champ incident superposés (des interférences se forment entre le champ incident et le champ des SPhP). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 1 pour $|E_z|^2$ (gauche) et 1,33 pour $|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (droite). (e) : champ mesuré (SPhP + champ incident), et (f) : et champ des SPhP seul déterminé numériquement, extraits de (HUBER et al. 2008).

2.5 Optique géométrique des ondes de surface

Nous abordons ici la possibilité d'utiliser la notion de limite de l'optique géométrique. Bien que l'atténuation des ondes de surface limite les distances mises en jeu, des observations expérimentales suggèrent que la notion de rayon peut être utile pour décrire la propagation des ondes de surface (HOHENAU et al. 2005 ; SMOLYANINOV et al. 2005 ; ZENTGRAF et al. 2011). L'objectif de cette section est d'établir les lois de la propagation en milieu inhomogène des rayons d'ondes de surface.

2.5.1 Équation eikonale pour les ondes de surface

Pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D, l'équation eikonale permet de relier les équations de Maxwell à l'optique géométrique. Pour la retrouver, on cherche une solution de (2.6) sous la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})e^{ik_0\tilde{S}(\mathbf{r})}, \quad (2.31)$$

avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. En utilisant l'équation de Helmholtz (équation 2.6) et en supposant la longueur d'onde dans le vide λ_0 faible devant les échelles de longueur des variations de l'amplitude $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ et de la phase $\tilde{S}(\mathbf{r})$, on obtient l'équation eikonale

$$\left(\nabla\tilde{S}\right)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (2.32)$$

Cette équation décrit l'évolution (spatiale) de la grandeur $\tilde{S}(\mathbf{r})$, directement reliée à la phase du champ électrique. Les iso- \tilde{S} correspondent aux fronts d'onde de l'onde considérée. Cette équation permet également de montrer que les « rayons » lumineux se propagent en ligne droite dans les milieux d'indice constant (BORN et WOLF 1999). On peut également obtenir une équation eikonale pour les ondes de surface. Pour cela, on cherche une solution de l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface (équation 2.5) sous la forme

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0(x, y)e^{ik_0S(x, y)}. \quad (2.33)$$

En reportant cette solution dans (2.5), on obtient

$$\Delta_{//}\mathcal{E}_0 + ik_0 [\nabla_{//}\mathcal{E}_0 \cdot \nabla_{//}S + \mathcal{E}_0(x, y)\Delta_{//}S] - k_0^2 [(\nabla_{//}S)^2 - n_{sp}^2] = 0, \quad (2.34)$$

où $n_{sp} = K_{sp}/k_0$ est l'indice effectif des ondes de surface. Comme pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D, on suppose λ_0 petit devant l'échelle des variations de $\mathcal{E}_0(x, y)$ et $S(x, y)$. Le terme en $k_0^2 = (\frac{2\pi}{\lambda_0})^2$ domine alors dans l'expression ci-dessus, et on peut écrire l'équation eikonale pour les ondes de surface,

$$(\nabla_{//}S)^2 = n_{sp}^2. \quad (2.35)$$

Cette équation est très proche de l'équation eikonale pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D (équation 2.32). Les ondes de surface ne se propagent que dans les directions x et y , la fonction phase S qui y figure ne dépend que de x et y , contrairement à celle de (2.32) qui dépend également de z . Pour les ondes de

surface, les cas où la partie imaginaire de l'indice n_{sp} est faible devant sa partie réelle sont moins fréquents que pour les ondes progressives. n_{sp} est le plus souvent complexe, S l'est également : les rayons d'ondes de surface sont absorbés au cours de leur propagation. On peut alors définir des « rayons » d'ondes de surface, en procédant par analogie avec les ondes électromagnétiques en milieu 3D. Nous allons supposer $|\nabla S''| \ll |\nabla S'|$ et $|n''_{sp}| \ll n'_{sp}$, c'est-à-dire que l'absorption est faible (la fonction $S(x, y)$ est complexe à cause de l'absorption des ondes de surface). L'équation (2.35) permet alors d'écrire $(\nabla S')^2 = n_{sp}'^2$. On calcule dans l'annexe D.5 le vecteur de Poynting associé aux ondes de surface (équation D.33). En intégrant ce vecteur dans la direction z , on définit un vecteur flux d'énergie 2D (équation D.34b),

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \int dz \left[\epsilon(z, \omega) |f(z)|^2 \right] \frac{\nabla_{//} S'}{n_{sp}'^2} \right\}. \quad (2.36)$$

Avec les hypothèses précédentes sur $\nabla_{//} S$ et n_{sp} , on peut écrire

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \frac{1}{n_{sp}'} \int dz \left[\epsilon(z, \omega) |f(z)|^2 \right] \right\} \frac{\nabla_{//} S'}{n_{sp}'}. \quad (2.37)$$

Ce vecteur flux d'énergie est ainsi colinéaire à $\nabla_{//} S'$, et on définit les rayons d'ondes de surface comme les courbes tangentes en tout point aux lignes $S'(x, y)$ constant. En notant s l'abscisse curviligne le long d'un de ces rayons et $\mathbf{r}(s)$ une fonction parcourant ce dernier, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ est unitaire et tangent au rayon, donc égal à $\frac{\nabla_{//} S'}{|\nabla_{//} S'|}$, et on peut traduire la définition d'un rayon sous forme d'équation,

$$n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla_{//} S'. \quad (2.38)$$

En différenciant cette équation par rapport à s , on peut obtenir l'équation d'évolution d'un rayon,

$$\frac{d}{ds} \left(n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla S') \quad (2.39a)$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla S' \quad (2.39b)$$

$$= \frac{1}{n_{sp}'} (\nabla S' \cdot \nabla) \nabla S' \quad (2.39c)$$

$$= \frac{1}{2n_{sp}'} \nabla \left[(\nabla S')^2 \right], \quad (2.39d)$$

soit

$$\frac{d}{ds} \left(n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

car $(\nabla_{//} S')^2 = n_{sp}'^2$ est uniforme, ce qui entraîne

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$, où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs constants. Elles correspondent à des droites : les rayons d'ondes de surface se propagent en ligne droite sur une surface uniforme, comme attendu.

2.5.2 Équation des rayons d'ondes de surface en milieu inhomogène

On étend en annexe D.6 le formalisme précédent pour un système dont la géométrie varie lentement dans les directions x et y . On aboutit à une équation analogue à (2.5),

$$\Delta_{//}\mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2(x, y)\mathcal{E}(x, y) = 0, \quad (2.42)$$

où le carré du vecteur d'onde $K_{sp}^2(x, y)$ dépend désormais des coordonnées x et y : l'indice $n_{sp}(x, y) = K_{sp}(x, y)/k_0$ peut ainsi varier. On peut alors étendre facilement les calculs effectués dans la partie précédente. On définit un vecteur flux d'énergie 2D (voir équation 2.37) par

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \frac{1}{n_{sp}(x, y)} \int dz \left[\epsilon_{x, y}(z, \omega) |f_{x, y}(z)|^2 \right] \right\} \frac{\nabla_{//} S'}{n'_{sp}(x, y)}. \quad (2.43)$$

On définit également les rayons d'ondes de surface comme les courbes perpendiculaires en tout point aux courbes $S'(x, y)$ constant (qui correspondent aux « fronts d'onde »), ce qui se traduit à nouveau sous forme d'équation,

$$n'_{sp}(x, y) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla_{//} S'. \quad (2.44)$$

Là encore, en différenciant cette équation par rapport à s , on peut obtenir l'équation d'évolution d'un rayon. Les calculs sont analogues aux équations (2.39a) à (2.40), au passage de (2.39d) à (2.40) près, qui permet d'écrire ici

$$\frac{d}{ds} \left[n'_{sp}(x, y) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n'_{sp}(x, y). \quad (2.45)$$

Cette équation permet de justifier les calculs effectués par ZENTGRAF et al. (2011) pour dimensionner les dispositifs d'optique transformationnelle pour SPP (lentilles de Lüneburg et Eaton). Dans cet article, les auteurs mettent en forme (la partie réelle de) l'indice n'_{sp} des SPP afin de dévier les « rayons » de SPP comme le prévoirait l'optique géométrique. Il est à noter que d'autres approches ont été étudiées afin de transposer des composants de l'optique transformationnelle aux ondes de surface, consistant à implémenter des éléments d'optique transformationnelle 3D dans des hétérostructures supportant des ondes de surface (KADIC et al. 2010). En tenant compte d'une éventuelle anisotropie du tenseur diélectrique ainsi que du tenseur magnétique, le modèle développé dans ce chapitre peut être étendu aux systèmes contenant ce type de matériaux, et ce modèle permettrait de modéliser des éléments étudiés par KADIC et al. (2010), choisis de sorte qu'ils varient lentement dans le plan de propagation des ondes de surface.

Superlentille en champ proche en régime impulsif

Sommaire

3.1 Superlentille hors régime harmonique	55
3.1.1 Potentiel en régime impulsif	55
3.1.2 Réponse impulsif	56
3.1.3 Potentiel dans le cas général	58
3.1.4 Impulsion de fréquence complexe	59
3.1.5 Régime libre	63
3.2 Images de sources ponctuelles	66
3.2.1 Impulsion fréquence complexe	67
3.2.2 Régime libre	70
3.2.3 Comparaison et évolution de la largeur à mi-hauteur au cours du temps	70

Dans le chapitre 2, nous avons étudié un principe d’Huygens-Fresnel pour les ondes de surface. Celui-ci s’appuie sur la représentation des ondes de surface avec un vecteur d’onde complexe et une pulsation réelle (voir figure 3.1). Dans cette représentation, les pertes dans les matériaux présents font que la relation de dispersion des ondes de surface ne présente pas d’asymptote. Nous avons vu que cela a notamment pour conséquence de limiter la résolution spatiale atteignable. La superlentille proposée par Pendry, dans la limite électrostatique, se base sur la présence des ondes de surface et de l’asymptote de la relation de dispersion pour augmenter la résolution. Toutefois, le problème reste identique et en présence de pertes, en régime harmonique, les ondes de surface ne présentent plus d’asymptote, ce qui limite finalement la résolution. Nous allons voir qu’il est possible, en mettant en forme la dépendance temporelle des objets à imager, de s’appuyer de nouveau sur les ondes de surface de cette asymptote. Celle-ci est en effet présente lorsque l’on considère une pulsation complexe, comme sur la figure 3.1. La résolution spatiale obtenue peut ainsi être façonnée par une mise en forme *temporelle* du faisceau éclairant le système. En d’autres termes, nous allons montrer que la mise en forme *temporelle* du faisceau incident permet de modifier la résolution *spatiale* d’un système d’imagerie.

La superlentille la plus générale s’appuie sur les matériaux possédant à la fois une permittivité ϵ et une perméabilité μ négative. Ces matériaux ont été étudiés initialement par VESELAGO (1968). L’une des propriétés particulières de ces matériaux est la réfraction négative qui peut avoir lieu à leur interface avec un milieu

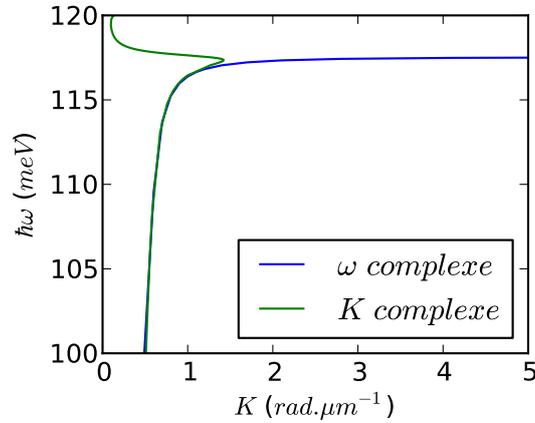


FIGURE 3.1 – Relation des ondes de surface d’une interface SiC/air. Bleu : relation de dispersion avec une pulsation ω complexe et un vecteur d’onde de module K réel. Vert : relation de dispersion avec une pulsation ω réelle et un vecteur d’onde de module K complexe. Avec une pulsation complexe, la relation de dispersion présente une asymptote, à une pulsation ω_{sp} complexe vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$. Avec un vecteur d’onde de module complexe, la relation de dispersion présente un repliement, la partie réelle du module des vecteurs d’onde K est limitée.

de permittivité et perméabilité positives. Cette propriété permet de concevoir avec de tels matériaux une lentille « sans axe optique ». À la suite des travaux de Veselago, Pendry a souligné qu’une telle lentille exalte les ondes évanescentes provenant d’un objet, en plus de réfracter les ondes progressives. Pendry souligne notamment que théoriquement, l’image formée par une telle lentille n’est pas soumise à la limite usuelle de diffraction (PENDRY 2000 ; PENDRY et RAMAKRISHNA 2003). De tels matériaux n’ayant pas encore été réalisés aux fréquences visibles (SHALAEV 2007), Pendry fait remarquer que dans la limite électrostatique (module des vecteurs d’onde dans le plan de la lentille grands devant ω/c), la condition $\epsilon = -1$ suffit pour obtenir une superlentille (plus de condition sur μ), et qu’un métal tel que l’argent permet d’approcher cette condition dans le visible.

Afin d’étudier la superlentille, nous utilisons l’approximation électrostatique, car les distances mises en jeu sont telles que les effets de retard sont négligeables. On peut alors se contenter de calculer les potentiels créés par des charges. On peut aisément en déduire les champs électriques créés par des dipôles si nécessaire. On considère un film de constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ entouré d’air (voir figure 3.3). Dans la limite électrostatique, on peut écrire en un point d’observation le potentiel créé par une charge ponctuelle située de l’autre côté du film (LARKIN et STOCKMAN 2005),

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K\rho) e^{-K(z-h)} t_p^{(es)}(K, \omega) e^{Kz_0}, \quad (3.1)$$

où z est la coordonnée du point d’observation selon l’axe Oz perpendiculaire au film, et z_0 la coordonnée de la charge selon cet axe. q est la valeur de la charge considérée. ρ est la distance du point d’observation à l’axe

Oz . La charge est supposée située sur cet axe. $t_p^{(es)}(K, \omega)$ est le coefficient de transmission en polarisation p dans la limite électrostatique, et vaut

$$t_p^{(es)}(K, \omega) = \frac{4\epsilon(\omega)e^{-Kh}}{[\epsilon(\omega) + 1]^2 - [\epsilon(\omega) - 1]^2e^{-2Kh}}. \quad (3.2)$$

Sauf cas particulier, le terme $[\epsilon(\omega) + 1]^2$ figurant au dénominateur n'est pas nul. Aux grands K , ce terme domine au dénominateur, et $t_p^{(es)}(K, \omega)$ décroît exponentiellement. L'amplitude du potentiel est alors atténuée à la traversée du film. Mais à la fréquence particulière où $\epsilon(\omega) + 1 = 0$, $t_p^{(es)}(K, \omega)$ vaut e^{Kh} : le coefficient de transmission du film croît exponentiellement, et le potentiel est exalté à la traversée du film. On peut alors écrire ce potentiel sous la forme

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K\rho) e^{-K[z - (z_0 + 2h)]} = \frac{q/(4\pi\epsilon_0)}{\sqrt{\rho^2 + [z - (z_0 + 2h)]^2}}. \quad (3.3)$$

Le potentiel du côté opposé à la charge est ainsi celui d'une charge image de même valeur q située à une distance $2h$ (vers les z croissant) de la charge q , éventuellement du même côté que la charge objet, voire dans le film (figure 3.2). Le module K des composantes de Fourier dans le plan parallèle au film n'est ici pas limité

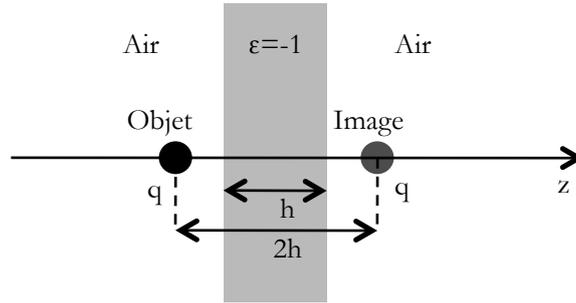


FIGURE 3.2 – Superlentille parfaite dans la limite électrostatique. L'image d'une charge objet q est une charge image de même valeur située à une distance $2h$ de la charge objet, où h est l'épaisseur du film vérifiant $\epsilon = -1$ et jouant le rôle de superlentille.

par le film, il n'y a pas de limite de résolution. On peut donner une autre vision du fonctionnement de cette superlentille. Dans la limite électrostatique, les ondes de surface d'une interface simple air/matériau du film ont une unique pulsation ω_{sp} vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$. À cette pulsation, deux ondes évanescentes décroissant en s'éloignant d'une interface satisfont les relations de passage au niveau de l'interface (interface de droite), et constituent le champ d'une onde de surface. Solution moins courante, deux ondes évanescentes *croissant* en s'éloignant de l'interface satisfont également ces relations de continuité (interface de gauche). Nous parlerons alors d'« anti-onde de surface ». Dans le cas d'un film et avec un objet source à partir duquel décroît une onde évanescente, on peut ainsi construire une solution des équations de Maxwell composée d'une anti-onde de surface et d'une onde de surface partageant leur champ dans le film. Une telle solution est représentée schématiquement sur la figure ci-dessus. Les ondes de surface présentant une asymptote (voir figure 3.1) à la

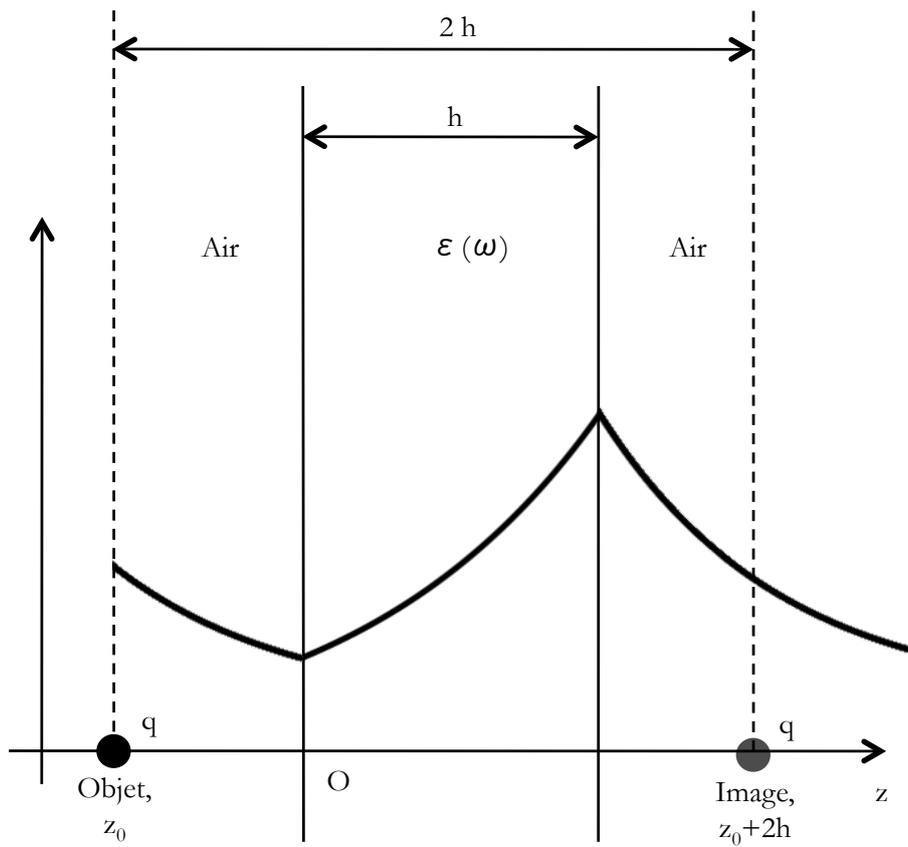


FIGURE 3.3 – Principe de fonctionnement d'une superlentille dans la limite électrostatique. On a tracé en trait épais le potentiel d'une des ondes de surface et anti-onde de surface (voir ci-dessous) contribuant à la construction de l'image.

pulsation ω_{sp} vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$, ces solutions existent pour un grand nombre de vecteurs d'onde \mathbf{K} à cette pulsation, et permettent de reconstruire l'image d'un point source (PENDRY et RAMAKRISHNA 2003).

Le mode de fonctionnement d'une telle superlentille s'explique donc notamment par le fait qu'elle exalte les ondes évanescentes incidentes (PENDRY et RAMAKRISHNA 2003). Cette lentille ne fonctionne théoriquement qu'à la pulsation à laquelle $\epsilon(\omega) = -1$ (pour une lentille entourée d'air), qui correspond à la pulsation de l'asymptote des ondes de surface d'une interface simple entre de l'air et le matériau de permittivité $\epsilon(\omega)$.

Si maintenant nous nous intéressons à un cas plus proche de la réalité, la constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ est complexe à cause des pertes du matériau du film et cette pulsation ω_{sp} est nécessairement complexe. On l'approche par sa partie réelle, $\omega'_{sp} = Re(\omega_{sp})$, et $\epsilon(\omega'_{sp}) + 1$ est faible mais n'est plus nul. Le dénominateur de l'équation (3.2) fait ainsi apparaître une fréquence (spatiale) de coupure K_c , pour laquelle $[\epsilon(\omega'_{sp}) + 1]^2 \sim [\epsilon(\omega'_{sp}) - 1]^2 e^{-2K_c h}$, soit $Im[\epsilon(\omega'_{sp})] \sim 4e^{-2K_c h}$. Au delà de K_c , $t_p^{(es)}(K, \omega'_{sp})$ cesse de croître exponentiellement et tend vers 0, comme cela est représenté sur la figure 3.4 (voir partie 3.1.1). Les valeurs de K correspondantes ne participent plus à la construction de l'image, ce qui conduit à une perte de résolution, bien que celle-ci reste inférieure à la limite de diffraction $\lambda/2$. Par la suite, ces pertes sont le facteur limitant la résolution de la superlentille. Dans les cas non traités ici de matériaux rugueux ou de métamatériaux, la rugosité et la non-homogénéité du matériau peuvent constituer le principal facteur limitant la résolution plutôt que cette fréquence de coupure (MAYSTRE et ENOCH 2004).

LIU et al. (2003) ont vérifié expérimentalement qu'un film d'argent exaltait effectivement les ondes évanescentes incidentes, à condition que l'épaisseur du film d'argent ne soit pas trop importante. La distance entre les plans objet et image de la superlentille (égale à deux fois l'épaisseur du film) est limitée également par ce facteur. Plusieurs groupes ont ensuite montré qu'un film d'argent était effectivement capable de former une image sub-longueur d'onde dans la configuration proposée par Pendry (MELVILLE et BLAIKIE 2005 ; MELVILLE et al. 2004 ; FANG et al. 2005). TAUBNER et al. (2006b) ont également montré qu'un film de carbure de silicium permettait de réaliser une superlentille dans le moyen infrarouge. Les articles de revue (SHALAEV 2007 ; KAWATA et al. 2009) résument ces avancées et discutent également de la possibilité de transmettre l'image formée par la superlentille en champ lointain pour une observation par microscopie « classique ».

Plusieurs groupes ont étudié théoriquement des systèmes s'écartant de celui décrit par Pendry ou en ont affiné la description. ANANTHA RAMAKRISHNA et PENDRY (2003) proposent d'utiliser un milieu à gain afin d'augmenter la résolution de la superlentille. LARKIN et STOCKMAN (2005) discutent de l'influence de la dispersion spatiale sur les performances de la superlentille. KIK et al. (2004) ont notamment étudié les images obtenues dans le cas d'impulsions gaussiennes, centrées ou non sur la fréquence de l'asymptote des ondes de surface. HALDANE (2002) analyse la formation d'images par une superlentille en termes d'ondes de surface du film formant la superlentille. L'asymptote de la relation de dispersion de ces modes est nécessairement coupée à partir d'une certaine valeur du module de leur vecteur d'onde K , pour des raisons physiques (rugosité des interfaces du film, dispersion spatiale des matériaux). Les composantes de Fourier de fréquence spatiale plus grande que cette valeur maximale ne seront pas restituées par la superlentille, ce qui constitue une première limite à sa résolution.

En procédant de manière analogue au chapitre 2, nous allons séparer les contributions des différents

modes de ce système lors de la formation d'une image. Nous verrons que le champ de cette image n'est pas formé uniquement de ces modes, et nous donnerons une expression de l'amplitude de ces différentes contributions en fonction de la forme temporelle du champ provenant des objets à imager. Nous verrons qu'avec une impulsion de la forme $H(t)e^{-i\omega_{sp}t}$, ainsi qu'en régime libre, il est possible d'obtenir une meilleure résolution qu'en régime harmonique. Nous interpréterons ce résultat en termes d'ondes de surface, symétriques et antisymétriques, du film formant la superlentille.

3.1 Superlentille hors régime harmonique

3.1.1 Potentiel en régime impulsionnel

Nous avons vu en introduction qu'à la pulsation ω_{sp} vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$, le coefficient de transmission du film considéré $t_p^{(es)}(K, \omega)$ valait e^{Kh} , où h est l'épaisseur du film. Le potentiel électrostatique est alors exalté à la traversée du film. Toutefois, dans le cas d'un matériau à pertes pour le film, ω_{sp} est nécessairement complexe, et est approché en régime harmonique par $\omega'_{sp} = \text{Re}(\omega_{sp})$. Afin d'étudier les écarts au cas idéal, nous allons écrire le coefficient de transmission sous la forme

$$t_p^{(es)}(K, \omega) = e^{Kh} \tilde{t}(K, \omega). \quad (3.4)$$

Ainsi, si le film agit effectivement en superlentille, on aura $\tilde{t}(K, \omega) = 1$.

Les équations (3.1) et (3.4) permettent d'écrire

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K\rho) e^{-K[z-(z_0+2h)]} \tilde{t}(K, \omega). \quad (3.5)$$

Ainsi, on voit à l'aide de cette expression que le terme $\tilde{t}(K, \omega)$ agit comme un filtre spatial du champ à imager : le champ image correspond au champ de la charge source translaté de $2h$ et filtré par $\tilde{t}(K, \omega)$.

Nous illustrerons les résultats obtenus avec le cas d'un film de carbure de silicium (SiC), d'épaisseur $h = 440$ nm, entouré d'air. Ce système est proche de celui utilisé par TAUBNER et al. (2006b), le diélectrique entourant le film de SiC est ici remplacé par de l'air afin de simplifier les calculs. Nous modélisons la constante diélectrique du carbure de silicium par un modèle de Lorentz,

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_{LO}^2 - \omega_{TO}^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right) \quad (3.6)$$

avec $\epsilon_\infty = 6,7$, $\omega_{TO} = 793 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_{LO} = 969 \text{ cm}^{-1}$ et $\Gamma = 4,76 \text{ cm}^{-1}$ (données de SPITZER et al. 1959 et PALIK et GHOSH 1998, ajustées par MARQUIER 2004).

On a représenté, sur la figure 3.4, $\tilde{t}(K, \omega)$ à la pulsation ω'_{sp} , ainsi qu'à des pulsations proches. On remarque sur cette figure que $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ est constant et vaut 1 aux faibles K et décroît exponentiellement aux grandes valeurs de K . On observe que la fréquence (spatiale) de coupure est plus grande pour $\omega = \omega'_{sp}$. Ceci illustre à la fois le rôle joué par les ondes de surface pour augmenter la résolution et l'existence d'une fréquence de coupure due aux pertes.

Nous allons voir qu'il est possible, hors du régime harmonique, de tirer parti des propriétés de $\tilde{t}(K, \omega)$ afin de compenser partiellement sa décroissance rapide, ce qui permettra d'améliorer la résolution de la superlentille. Nous souhaitons étudier le potentiel induit par des sources de forme temporelle quelconque. Ainsi, nous sommons sur les pulsations ω l'expression (3.5) (multipliée par sa dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$),

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \varphi(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.7)$$

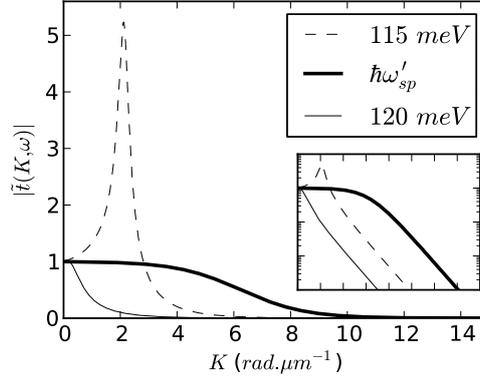


FIGURE 3.4 – $|\tilde{t}(K, \omega)|$ pour différentes pulsations ω . On a $\hbar\omega'_{sp} \approx 117,5 \text{ meV}$. À la pulsation complexe ω_{sp} , $\tilde{t}(K, \omega_{sp})$ est indépendant de K . Pour des pulsations réelles, $\tilde{t}(K, \omega)$ est la plus large à la pulsation ω'_{sp} (trait épais), est la plus proche de ω_{sp} . Encart : même figure, ordonnée en échelle logarithmique. Même graduation en abscisse, ordonnée de 0,001 à 10.

soit

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K\rho) e^{-K[z-(z_0+2h)]} \tilde{t}(K, t). \quad (3.8)$$

Cette expression fait intervenir un filtre spatial dépendant du temps, d'expression

$$\tilde{t}(K, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{t}(K, \omega). \quad (3.9)$$

3.1.2 Réponse impulsionnelle

Nous nous intéressons maintenant au filtre spatial $\tilde{t}(K, t)$ (équation 3.9), figurant dans l'expression (3.8) du potentiel créé par une charge impulsionnelle $\delta(t)$ n'existant qu'à $t = 0$. On montre en annexe E.1 que $\tilde{t}(K, \omega)$, qui figure dans l'expression (3.9), peut se séparer en contributions des modes du film, ainsi que d'une contribution de la réponse instantanée du système. En utilisant l'équation (E.3), on peut alors effectuer l'intégrale figurant dans (3.9), et on obtient pour $\tilde{t}(K, t)$,

$$\tilde{t}(K, t) = S_K \delta(t) - iR_{S,K} H(t) e^{-i\omega_{S,K} t} - iR_{A,K} H(t) e^{-i\omega_{A,K} t} + c.c., \quad (3.10)$$

où l'expression *c.c.* (complexe conjugué) s'applique uniquement aux deux termes $-iR_{S,K} H(t) e^{-i\omega_{S,K} t}$ et $-iR_{A,K} H(t) e^{-i\omega_{A,K} t}$. Le terme $S_K \delta(t)$ est une réponse instantanée du système (elle est proportionnelle à la dépendance temporelle $\delta(t)$ de la charge source). Le terme $-iR_{S,K} H(t) e^{-i\omega_{S,K} t}$ et son complexe conjugué sont la contribution du mode symétrique du film, de relation de dispersion $\omega_{S,K}$ tracée sur la figure 3.5(a, rouge), et de potentiel représenté sur la figure 3.6 (gauche). Le terme complexe conjugué $[-iR_{S,K} H(t) e^{-i\omega_{S,K} t}]^* = iR_{S,K}^* H(t) e^{-i(-\omega_{S,K}^*) t}$ est dit « antirésonant » au sens où sa pulsation $-\omega_{S,K}^*$ a une partie réelle négative. De la même manière, le terme $-iR_{A,K} e^{-i\omega_{A,K} t}$ et son complexe conjugué

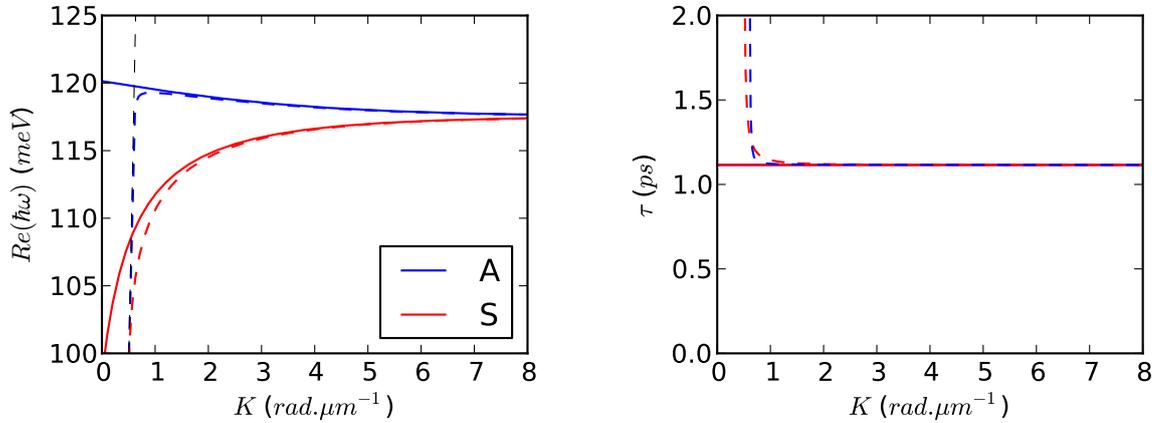


FIGURE 3.5 – Relation de dispersion des phonons-polaritons de surface d'un film de SiC, entouré d'air, de 440 nm d'épaisseur. Gauche : partie réelle de la pulsation. Droite : durée de vie τ des modes ($\tau = \frac{1}{-2\omega''}$). Bleu : modes symétriques, rouge : modes antisymétriques. Traits continus : dans l'approximation électrostatique, tirets : sans l'approximation électrostatique. Tirets fins noirs (figure de gauche) : cône de lumière de l'air $K = \frac{\omega}{c}$. Dans le cas d'un film métallique, les modes symétriques correspondent aux plasmons-polaritons de surface *short range*, et les modes antisymétriques aux plasmons-polaritons de surface *long range*.

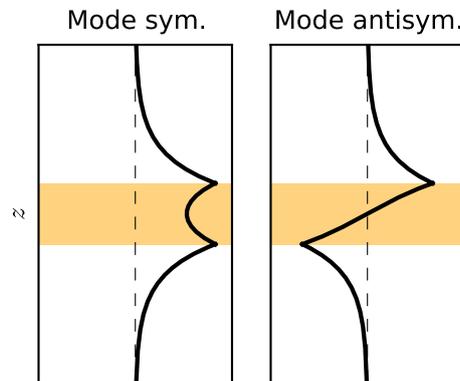


FIGURE 3.6 – Potentiel des phonons-polaritons de surface d'un film de SiC, entouré d'air, de 440 nm d'épaisseur. Gauche : potentiel du mode symétrique. Droite : potentiel du mode mode antisymétrique. L'amplitude de ce potentiel est complexe de manière générale, mais peut être choisie réelle ici. Le potentiel de ces modes est de la forme $\varphi_p(\mathbf{r}, t) = \varphi_{p,0} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} f_p(z) e^{-i\omega_p, K t} + c.c.$ ($p = S$ ou A). Les fonctions $f_p(z)$ peuvent être choisies réelles et sont représentées ci-dessus. La zone orangée représente le film. Le trait en tirets fins correspond au zéro de l'abscisse. On a représenté le potentiel des modes à $K = 5 \text{ rad}\cdot\mu\text{m}^{-1}$.

correspondent à la contribution du mode antisymétrique, de relation de dispersion $\omega_{A,K}$ tracée sur la figure 3.5(a,bleu) et de potentiel représenté sur la figure 3.6, et le complexe conjugué est dit antirésonant.

La figure 3.5(b) montre la durée de vie des modes associés aux relations de dispersion. On voit qu'à une excitation impulsionnelle correspond une réponse (oscillante) amortie dont la durée est donnée par la durée de vie des plasmons. Le point clé est qu'il n'y a plus de repliement dans la relation de dispersion. On a accès ici à tous les vecteurs d'onde. Le prix à payer est la courte durée de vie de ces modes, qui est ici constante et vaut $\tau \approx 1,1$ ps.

3.1.3 Potentiel dans le cas général

L'expression (3.8) correspond au potentiel $\varphi(\mathbf{r}, t)$ créé par une charge source impulsionnelle $\delta(t)$ (il s'agit donc d'une fonction de Green de notre problème). Afin d'obtenir le potentiel électrostatique créé par des charges sources de dépendance temporelle quelconque $f(t)$, nous effectuons un produit de convolution entre $\varphi(\mathbf{r}, t)$ et $f(t)$,

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \int dt' \varphi(\mathbf{r}, t - t') f(t'), \quad (3.11)$$

soit

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K\rho) e^{-K[z-(z_0+2h)]} \Pi(K, t). \quad (3.12)$$

Cette expression fait intervenir un nouveau filtre spatial, remplaçant le filtre impulsionnel $\tilde{t}(K, t)$ (équation 3.10), d'expression

$$\Pi(K, t) = \int dt' \tilde{t}(K, t - t') f(t') \quad (3.13a)$$

$$= S_K f(t) + R_{S,K} \alpha_{S,K}(t) + R_{A,K} \alpha_{A,K}(t) + t.a.r., \quad (3.13b)$$

où les termes antirésonants *t.a.r.* se déduisent de $R_{S,K} \alpha_{S,K}(t)$ et $R_{A,K} \alpha_{A,K}(t)$ en substituant $-R_{S,K}^*$ et $-R_{A,K}^*$ à $R_{S,K}$ et $R_{A,K}$, et $-\omega_{S,K}^*$ et $-\omega_{A,K}^*$ à $\omega_{S,K}$ et $\omega_{A,K}$ dans $\alpha_{S,K}(t)$ et $\alpha_{A,K}(t)$. Là encore, le terme $S_K f(t)$ correspond à une réponse instantanée du système, les termes $R_{S,K} \alpha_{S,K}(t)$ et $R_{A,K} \alpha_{A,K}(t)$ et les termes antirésonants correspondent aux modes symétriques et antisymétriques du film. Les amplitudes $\alpha_{S,K}(t)$ et $\alpha_{A,K}(t)$ sont données par

$$\alpha_{S,K}(t) = -i \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_{S,K}(t-t')} f(t'), \quad (3.14a)$$

$$\alpha_{A,K}(t) = -i \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_{A,K}(t-t')} f(t'). \quad (3.14b)$$

Elles sont solutions des équations différentielles

$$\frac{\partial \alpha_{S,K}}{\partial t}(t) + i\omega_{S,K}\alpha_{S,K}(t) = -if(t), \quad (3.15a)$$

$$\frac{\partial \alpha_{A,K}}{\partial t}(t) + i\omega_{A,K}\alpha_{A,K}(t) = -if(t), \quad (3.15b)$$

On reconnaît la forme d'équations différentielles régissant l'amplitude d'oscillateurs harmoniques amortis de pulsations complexes $\omega_{S,K}$ et $\omega_{A,K}$, et pilotés par le terme $-if(t)$. On retrouve une interprétation du fonctionnement de la superlentille en termes d'oscillateurs couplés correspondant aux ondes de surface symétriques et antisymétriques du film (GÓMEZ-SANTOS 2003 ; WEE et PENDRY 2011).

En régime harmonique de pulsation ω , $f(t) = e^{-i\omega t}$, et on retrouve le filtre $\tilde{t}(K, \omega)$, multiplié par sa dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$,

$$\Pi(K, t) = \tilde{t}(K, \omega)e^{-i\omega t}. \quad (3.16)$$

$\tilde{t}(K, \omega)$ est représenté pour $\omega = \omega'_{sp}$ ainsi que des pulsations proches sur la figure 3.4.

3.1.4 Impulsion de fréquence complexe

On a tracé le module des différentes contributions à $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ sur la figure 3.7 (gauche).

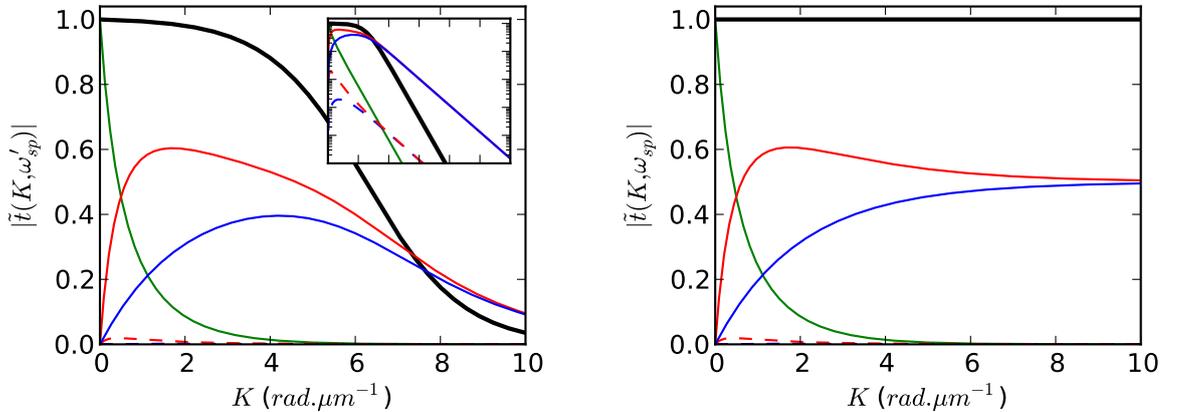


FIGURE 3.7 – Poids des différentes contributions à $\tilde{t}(K, \omega)$. Noir : $|\tilde{t}(K, \omega)|$ (gauche : $\omega = \omega'_{sp}$, droite : $\omega = \omega_{sp}$), vert : module de la contribution de la constante $|S_K|$, rouge : module des contributions des modes antisymétriques (trait continu : terme résonant, tirets : terme anti-résonant), bleu : module des contributions des modes symétriques (idem, le mode anti-résonant est trop faible pour être visible sur les graphes). Encart gauche : idem figure principale, échelle logarithmique en ordonnée. Même échelle en abscisse, ordonnée de 10^{-5} à 1, 1.

Sur cette figure, on peut remarquer que les contributions des modes symétriques et antisymétriques décroissent exponentiellement et sont proportionnelles pour $K \gtrsim 6 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ à e^{-Kh} . Pour $K \gtrsim 8 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$,

on remarque également que le module de $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ est inférieur à la somme des modules des contributions des modes symétriques et antisymétriques. On peut vérifier (non représenté) que les contributions des modes symétriques et antisymétriques sont opposées à ces valeurs de K . Ceci s'explique par les signes opposés des potentiels de ces deux modes s'ils sont excités en phase. Lorsque les pertes sont faibles – aux faibles K , le terme $\frac{1}{\omega'_{sp} - \omega_{p,K}}$ (voir équations 3.17 ci-dessous, $p = S$ ou A) a des signes différents pour chacun de ces modes, et ils sont de nouveau en phase. Si les pertes sont importantes, comme c'est le cas ici, on a $\frac{1}{\omega'_{sp} - \omega_{p,K}} \sim \frac{1}{-Im(\omega_{p,K})}$, dont le signe est le même pour les modes symétriques et antisymétriques, qui s'opposent à nouveau. Ainsi, $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ varie asymptotiquement comme leur différence, en e^{-2Kh} et non plus e^{-Kh} : la décroissance de $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ est accentuée par rapport à celle des contributions séparées des modes du film.

Sur la figure 3.7 (droite), nous avons représenté les différentes contributions de $\tilde{t}(K, \omega_{sp})$. On voit dans ce cas que les contributions des modes symétriques et antisymétriques sont constantes aux grands K , et $\tilde{t}(K, \omega_{sp})$ également.

Afin d'exploiter les propriétés de $\tilde{t}(K, \omega_{sp})$, nous allons employer une charge source avec une dépendance temporelle de la forme $f(t) = H(t)e^{-i\omega_{sp}t}$, représentée sur la figure 3.8, et que nous nommerons ici « im-

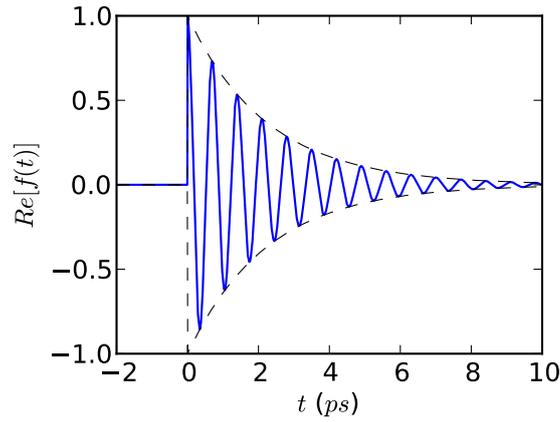


FIGURE 3.8 – Partie réelle de l'impulsion FC $f(t) = H(t)e^{-i\omega_{sp}t}$. Tirets noir : enveloppe des oscillations. L'échelle des oscillations n'est pas respectée.

pulsion de fréquence complexe » (impulsion FC). Sa transformée de Fourier $f(\omega) = \frac{i}{\omega - \omega_{sp}}$ a la particularité de présenter un pôle en ω_{sp} , ce qui permet de faire intervenir $\tilde{t}(K, \omega_{sp})$ dans les expressions des amplitudes obtenues. Une solution particulière de (3.15) dans ce cas est

$$\alpha_{S,p,K}(t) = \frac{H(t)e^{-i\omega_{sp}t}}{\omega_{sp} - \omega_{S,K}}, \quad (3.17a)$$

$$\alpha_{A,p,K}(t) = \frac{H(t)e^{-i\omega_{sp}t}}{\omega_{sp} - \omega_{A,K}}. \quad (3.17b)$$

Avec cette solution particulière, on aurait $\Pi_p(K, t) = H(t)e^{-i\omega_{sp}t}$. Ce filtre a la propriété remarquable de

ne plus dépendre de K , et donc d'être non dispersif spatialement : on retrouverait parfaitement l'image d'une charge ponctuelle à une distance $2h$ de la charge source. Ce résultat correspond à l'analyse théorique du chapitre précédent : lorsque la pulsation est complexe, la relation de dispersion présente une asymptote et permet bien d'accéder aux grands K . Toutefois, cette solution particulière n'est pas continue en $t = 0$. Afin d'assurer cette continuité, il est nécessaire de lui ajouter pour $t > 0$ une solution homogène de (3.15), de la forme

$$\alpha_{S,h,K}(t) = \alpha_{S,0,K} e^{-i\omega_{S,K}t}, \quad (3.18a)$$

$$\alpha_{A,h,K}(t) = \alpha_{A,0,K} e^{-i\omega_{A,K}t}, \quad (3.18b)$$

où les constantes $\alpha_{S,0,K}$ et $\alpha_{A,0,K}$ sont déterminées en écrivant $\alpha_{S,p,K}(t) + \alpha_{S,h,K}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $\alpha_{A,p,K}(t) + \alpha_{A,h,K}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$. On obtient finalement

$$\alpha_{S,K}(t) = \frac{H(t) [e^{-i\omega_{sp}t} - e^{-i\omega_{S,K}t}]}{\omega_{sp} - \omega_{S,K}}, \quad (3.19a)$$

$$\alpha_{A,K}(t) = \frac{H(t) [e^{-i\omega_{sp}t} - e^{-i\omega_{A,K}t}]}{\omega_{sp} - \omega_{A,K}}. \quad (3.19b)$$

Les amplitudes des modes symétriques et antisymétriques (équations 3.19) décroissent exponentiellement, à cause des parties imaginaires des pulsations ω_{sp} , $\omega_{S,K}$ et $\omega_{A,K}$, et présentent des battements (entre ω_{sp} et $\omega_{S,K}$ pour $\alpha_{S,K}(t)$ et ω_{sp} et $\omega_{A,K}$ pour $\alpha_{A,K}(t)$). À $t = 0$, ces amplitudes sont nulles à cause de la présence du régime transitoire (correspondant à la solution homogène, termes en $e^{-i\omega_{sp}t}$). Leur module n'est maximal qu'après une demi-période des battements. Ces périodes sont représentées sur la figure 3.9. On remarque qu'elles croissent exponentiellement avec K en e^{Kh} . Les battements ont en effet pour période

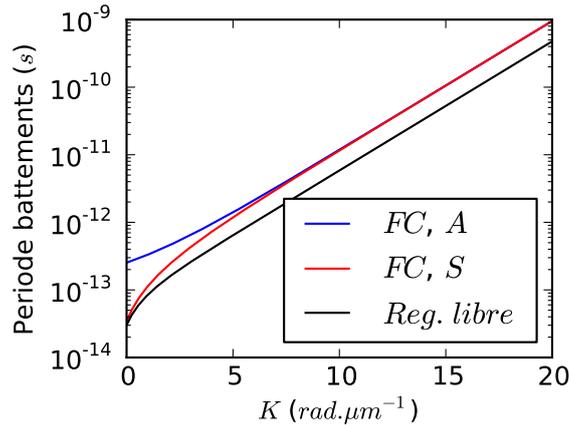


FIGURE 3.9 – Ordre de grandeur des battements pour une impulsion FC et en régime libre. Impulsion FC : bleu, $1/|\omega'_{sp} - \omega'_{A,K}|$, rouge, $1/|\omega'_{sp} - \omega'_{S,K}|$. Régime libre : noir, $1/(\omega'_{A,K} - \omega'_{S,K})$.

$\omega_{sp} - \omega_{p,K}$, proportionnel asymptotiquement à e^{-Kh} . Ainsi, les amplitudes $\alpha_{S,K}(t)$ et $\alpha_{A,K}(t)$ n'atteindront

leur maximum qu'après des temps longs devant leur durée caractéristique de décroissance $1/(-2\omega''_{sp})$, et la difficulté à les observer augmente avec K .

Le filtre correspondant (équation 3.13b) peut s'écrire sous la forme $\Pi(K, t) = H(t)e^{-i\omega_{sp}t} - R_{S,K} \frac{H(t)e^{-i\omega_{S,K}t}}{\omega_{sp} - \omega_{S,K}} - R_{A,K} \frac{H(t)e^{-i\omega_{A,K}t}}{\omega_{sp} - \omega_{A,K}} + t.a.r.$, où les termes antirésonants *t.a.r.* se déduisent de $-R_{S,K} \frac{H(t)e^{-i\omega_{S,K}t}}{\omega_{sp} - \omega_{S,K}}$ et $-R_{A,K} \frac{H(t)e^{-i\omega_{A,K}t}}{\omega_{sp} - \omega_{A,K}}$ en substituant $-R_{S,K}^*$, $-R_{A,K}^*$, $-\omega_{S,K}^*$ et $-\omega_{A,K}^*$ à $R_{S,K}$, $R_{A,K}$, $\omega_{S,K}$ et $\omega_{A,K}$. Il peut se réécrire sous la forme

$$\Pi(K, t) = H(t)e^{-i\omega_{sp}t} \left[1 - R_{S,K} \frac{e^{-i(\omega_{S,K} - \omega_{sp})t}}{\omega_{sp} - \omega_{S,K}} - R_{A,K} \frac{e^{-i(\omega_{A,K} - \omega_{sp})t}}{\omega_{sp} - \omega_{A,K}} + t.a.r. \right]. \quad (3.20)$$

Ce filtre est représenté à différents instants sur la figure 3.10. Le filtre en régime harmonique $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$

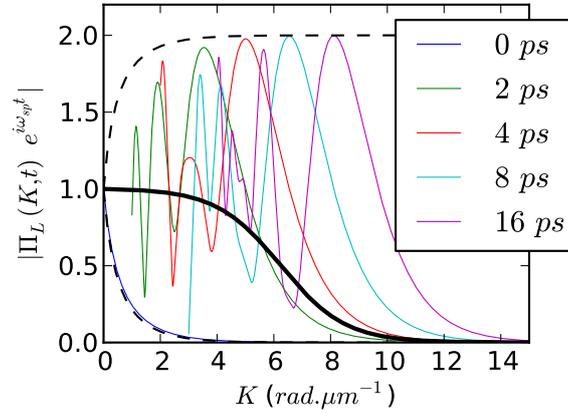


FIGURE 3.10 – Filtre des fréquences spatiales $|\Pi(K, t)|$, multiplié par $e^{-\omega''_{sp}t}$, pour une impulsion FC. Traits colorés : $|\Pi(K, t)|e^{-\omega''_{sp}t}$ à différents instants (voir légende). Ces courbes ont été tronquées pour plus de clarté (à $K = 1, 2, 3$ et $4 \text{ rad.}\mu\text{m}^{-1}$ pour les courbes correspondant respectivement à $t = 2, 4, 8$ et 16 ps). Le filtre $\Pi(K, t)$ (couleur), multiplié par $e^{-\omega''_{sp}t}$, peut ainsi être plus large que le filtre en régime harmonique $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ (module en trait épais noir, sur la figure 3.4 également). $\Pi(K, t)$ est multiplié par $e^{-\omega''_{sp}t}$ afin de compenser sa décroissance au cours du temps (indépendante de K). L'enveloppe des battements de $|\Pi(K, t)|e^{-\omega''_{sp}t}$ est représentée en tirets noirs. L'enveloppe supérieure a une limite constante aux grands K . Ainsi, elle ne limite pas la résolution atteignable avec ce type d'impulsion.

est également représenté sur cette figure pour comparaison. On retrouve des battements, comme pour les amplitudes $\alpha_{S,K}(t)$ et $\alpha_{A,K}(t)$. L'enveloppe supérieure de ce filtre est indépendante de K à un instant donné mais décroît exponentiellement en fonction de t (cette décroissance étant compensée sur la figure 3.10 par un terme $e^{-\omega''_{sp}t}$). Comme pour les amplitudes, la durée à attendre pour que le filtre soit maximal à une valeur de K donnée augmente avec K , augmentant la difficulté d'observation des fréquences spatiales élevées rendues accessibles ici. Ainsi, la résolution est également limitée par les pertes. Cependant, la limite est maintenant liée au rapport signal sur bruit uniquement.

En résumé, comme on pouvait le supposer à partir de l'étude des relations de dispersion, lorsque l'on

utilise une fréquence complexe, on excite de façon uniforme les ondes de surface caractérisées par des vecteurs d'onde réels arbitrairement grands. Ceci restaure en principe la résolution. Toutefois, la présence du régime transitoire avec un temps de décroissance égal et des pulsations proches de celles de l'impulsion excitatrice « masque » ce champ, dont les propriétés ne se révèlent que lentement, au fur et à mesure qu'il se déphase avec le régime transitoire.

3.1.5 Régime libre

Nous avons vu ci-dessus qu'en régime harmonique, aux grandes valeurs de K , les contributions des modes symétriques et antisymétriques à $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ décroissent en e^{-Kh} et sont opposées. Ainsi $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ est proportionnel à la différence de leurs modules, et varie asymptotiquement en e^{-2Kh} (ordre suivant d'un développement limité en e^{-Kh}). Nous allons voir qu'en régime libre, il est possible d'obtenir un filtre présentant des battements, dont l'enveloppe supérieure décroît en e^{-Kh} , et non plus e^{-2Kh} .

Nous étudions tout d'abord le cas d'un régime libre après un régime harmonique à la pulsation ω'_{sp} , la dépendance temporelle de la charge source est alors décrite par $f(t) = H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t}$, voir figure 3.11. Une

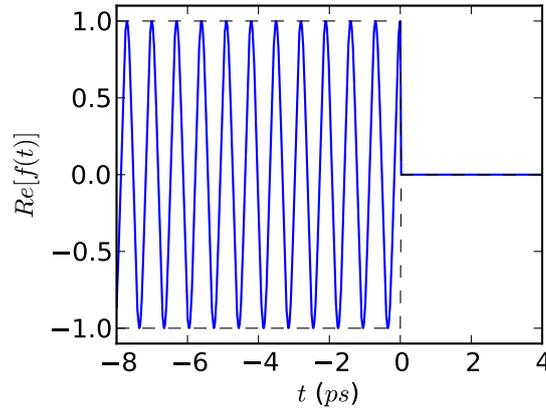


FIGURE 3.11 – Partie réelle de l'impulsion source en régime libre $f(t) = H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t}$. Tirets noir : enveloppe des oscillations. L'échelle des oscillations n'est pas respectée.

solution particulière de (3.15) est alors

$$\alpha_{S,p,K}(t) = \frac{H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{S,K}}, \quad (3.21a)$$

$$\alpha_{A,p,K}(t) = \frac{H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{A,K}}. \quad (3.21b)$$

Là encore, cette solution particulière n'est pas continue en 0, et il faut lui adjoindre une solution homogène de la forme donnée par (3.18a). En écrivant $\alpha_{S,p,K}(0^-) = \alpha_{S,p,K}(0^+) + \alpha_{S,h,K}(0^+)$ et $\alpha_{A,p,K}(0^-) =$

$\alpha_{A,p,K}(0^+) + \alpha_{A,h,K}(0^+)$, on trouve finalement

$$\alpha_{S,K}(t) = \frac{H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t} + H(t)e^{-i\omega_{S,K}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{S,K}}, \quad (3.22a)$$

$$\alpha_{A,K}(t) = \frac{H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t} + H(t)e^{-i\omega_{A,K}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{A,K}}. \quad (3.22b)$$

Pour $t < 0$, ces deux amplitudes oscillent à la même pulsation ω'_{sp} . Comme expliqué au début de la section 3.1.4, aux grands K , les contributions des termes symétriques et antisymétriques à $\Pi(K, t)$ (voir équation 3.13b) décroissent asymptotiquement en e^{-Kh} mais sont opposées, de sorte que leur somme décroît en e^{-2Kh} . Pour $t > 0$, ces deux amplitudes n'oscillent plus à la même pulsation. Leur somme, approximativement égale au filtre $\Pi(K, t)$, présente ainsi des battements, dont la période est représentée sur la figure 3.9. À $t = 0$, dans la continuité du régime harmonique à $t < 0$, les amplitudes $\alpha_{S,K}(t)$ et $\alpha_{A,K}(t)$ sont opposées et les battements sont à leur minimum. Il est nécessaire d'attendre une demi-période de leur battement afin que leur valeur maximale soit atteinte. Toutefois, la décroissance exponentielle au cours du temps, due aux parties imaginaires de ces pulsations, augmente la difficulté à observer les fréquences spatiales élevées.

Le filtre résultant s'écrit

$$\Pi(K, t) = H(-t)e^{-i\omega'_{sp}t}\tilde{t}(K, \omega'_{sp}) + H(t) \left[R_{S,K} \frac{e^{-i\omega_{S,K}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{S,K}} + R_{A,K} \frac{e^{-i\omega_{A,K}t}}{\omega'_{sp} - \omega_{A,K}} + t.a.r. \right] \quad (3.23)$$

où les termes antirésonants se déduisent des deux termes qui précèdent de la même manière que (3.13b). Il est représenté sur la figure 3.12. Le filtre en régime harmonique $\tilde{t}(K, \omega'_{sp})$ est également représenté pour comparaison. On remarque que l'enveloppe supérieure des battements de $\Pi(K, t)$ est plus large que le filtre en régime harmonique, ce qui permet d'obtenir une résolution plus importante. Là encore, l'enveloppe des battements décroît exponentiellement au cours du temps, et la résolution sera en pratique limitée par le rapport signal sur bruit. Toutefois, contrairement au cas de l'impulsion FC de la partie précédente, la source qui éclaire les objets est éteinte aux instants où l'on observe le champ. On est en quelque sorte dans une situation de détection sur fond sombre, pour laquelle on s'attend à ce que le bruit soit moindre (moins de bruit engendré par la source).

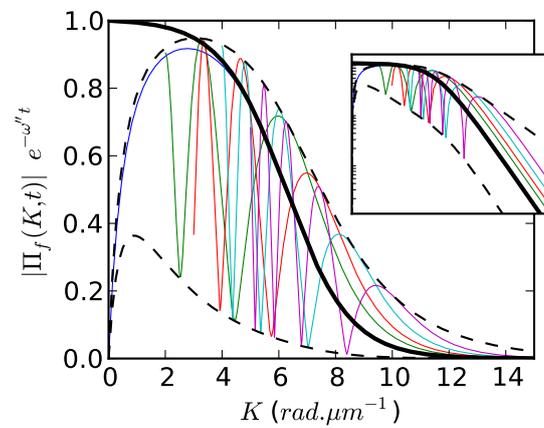


FIGURE 3.12 – Filtre des fréquences spatiales du potentiel en régime libre après arrêt du régime harmonique à $t = 0$. Les couleurs correspondent aux mêmes instants que la figure 3.10. Trait continu épais : filtre en régime harmonique (voir figure 3.4). Tirets noirs : enveloppe des battements de $|\Pi(K, t)|$. Les courbes en couleur ont été tronquées pour plus de clarté (à $K = 1, 2, 3$ et $4 \text{ rad.}\mu\text{m}^{-1}$ pour les courbes correspondant respectivement à $t = 2, 4, 8$ et 16 ps). Encart : même graphique avec une échelle logarithmique en ordonnée. Même échelle en abscisse, ordonnée de 10^{-3} à 1, 5.

3.2 Images de sources ponctuelles

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés aux fonctions $\Pi(K, t)$ qui filtrent spatialement le potentiel de l'image formée par la superlentille. Nous avons pu mettre en évidence qu'en régime libre et à l'aide d'une impulsion « fréquence complexe » (« FC »), il est possible d'accéder à des fréquences spatiales plus élevées qu'en régime harmonique. Nous allons maintenant étudier les images que l'on peut former dans ces différents cas.

Pour cela, nous cherchons à déterminer l'image d'un diffuseur ponctuel disposé dans un plan parallèle au film, à sa proximité. Un champ incident éclaire le système et est diffusé par cet objet. On assimile ce champ diffusé à celui d'un dipôle (voir figure 3.13). On déduit tout d'abord le potentiel $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ créé par ce dipôle

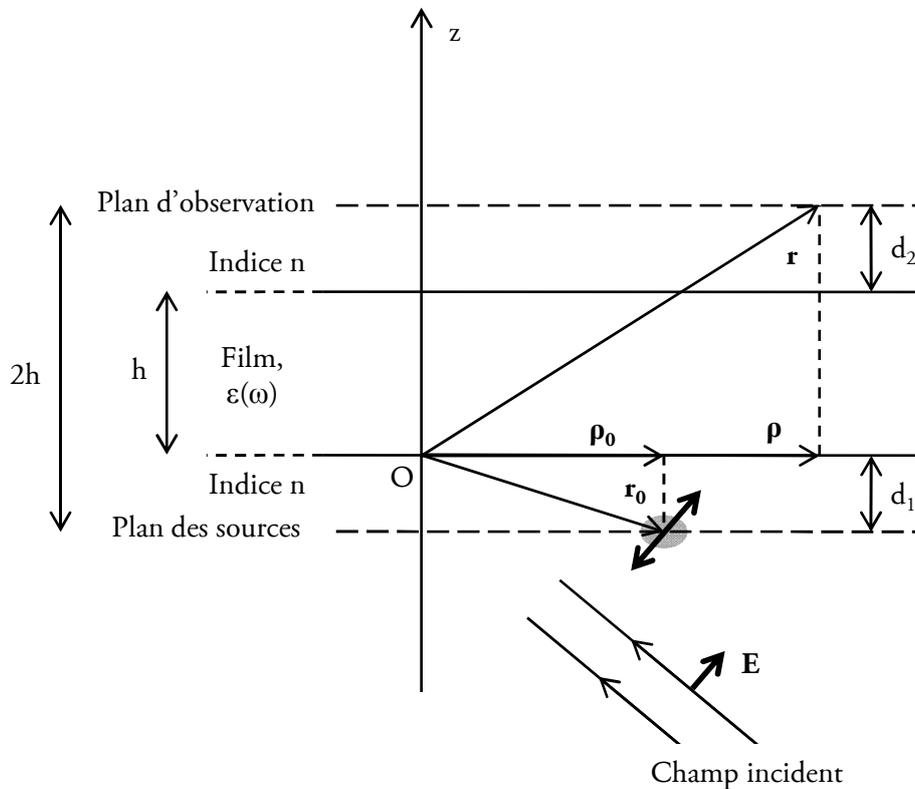


FIGURE 3.13 – Système considéré afin d'étudier l'effet de superlentille en champ proche. Le film, d'épaisseur h , compris entre les interfaces en $z = 0$ et $z = h$, est constitué d'un matériau de constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ et est non magnétique ($\mu = 1$). Il est infiniment étendu dans les directions x et y . Il est situé dans un milieu d'indice optique n . Le plan des sources, ou plan objet, dans le milieu extérieur, est situé à une distance d_1 du film (son équation est $z = -d_1$.) On ne considère ici que des sources dirigées selon la direction z . Le plan d'observation, ou plan image, dans le milieu extérieur également, est situé à une distance d_2 du film (son équation est $z = h + d_2$.) Les plans des sources et d'observation sont séparés d'une distance totale $d_1 + h + d_2 = 2h$. Une onde incidente est à l'origine de dipôles induits au niveau des objets que l'on souhaite imager. On modélise ces objets par des dipôles ponctuels. Pour représenter les résultats obtenus, on choisit un film constitué de carbure de silicium, d'épaisseur $h = 440$ nm, entouré d'un milieu d'indice $n = 1$.

du potentiel $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ d'une charge ponctuelle en lui appliquant l'opérateur $\mathbf{p}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}$, où \mathbf{r}_0 désigne à la fois la position de la charge source et du dipôle, et \mathbf{p}_0 est le moment dipolaire du dipôle induit,

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) \quad (3.24)$$

soit

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^\infty dK \nabla_{\mathbf{r}_0} \left\{ J_0(K\rho) e^{-K[z-(z_0+2h)]} \right\} \Pi(K, t). \quad (3.25)$$

On a $\mathbf{r}_0 = \vec{\rho}_0 + z_0 \mathbf{z}$. Afin d'introduire $\vec{\rho}_0$, la partie parallèle de la position de la charge et du dipôle, dans $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ pour le calcul de $\nabla_{\mathbf{r}_0}$, on pose $\rho = |\vec{\rho} - \vec{\rho}_0|$ où $\vec{\rho}$ désigne la partie parallèle au film du point d'observation \mathbf{r} .

On déduit le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ de $\tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{r}, t)$ en calculant le gradient de $\tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{r}, t) \quad (3.26a)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}_0} \left\{ J_0(K\rho) e^{-K[z-(z_0+2h)]} \right\} \mathbf{p}_0 \Pi(K, t), \quad (3.26b)$$

où la juxtaposition $\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}_0}$ correspond à un produit tensoriel. Dans l'annexe E.2, on retrouve rigoureusement cette expression à partir du tenseur de Green retardé pour le champ électrique du système considéré.

À noter que par la suite, sur les figures 3.14 à 3.17, les champs tracés correspondent à $\frac{4\pi\epsilon_0}{p_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, en μm^{-3} , où p_0 est le module du moment dipolaire \mathbf{p}_0 . Ainsi, les champs au carré en unité arbitraire sont calculés à partir de $\frac{4\pi\epsilon_0}{p_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et sont en μm^{-6} .

3.2.1 Impulsion fréquence complexe

On a représenté l'intensité obtenue dans le plan image (voir figures 3.3 et 3.13) dans le cas de dipôles source parallèles sur les figures 3.14(a,b), et perpendiculaire au film, figures 3.14(c,d). On remarque que les images obtenues dans le cas d'un dipôle source perpendiculaire au film ont une largeur à mi-hauteur plus petite que dans le cas parallèle. La résolution s'améliore encore si l'on ne s'intéresse qu'à la composante E_z du champ électrique, figures 3.14(e,f).

La largeur à mi-hauteur dans les configurations traitées sur la figure 3.14, ainsi que la valeur maximale du module du carré du champ, sont étudiées plus en détails sur la figure 3.15. Cette figure représente l'évolution de ces deux grandeurs au cours du temps (a et b), ainsi que la FWHM en fonction de la valeur maximale du champ.

Les tracés d'intensité (figures 3.14a-d) font ressortir la présence de « pieds » importants en plus du pic principal, que l'on ne retrouve que dans une moindre mesure dans le cas d'un dipôle perpendiculaire en observant la composante E_z du champ électrique (figures 3.14e et 3.14f).

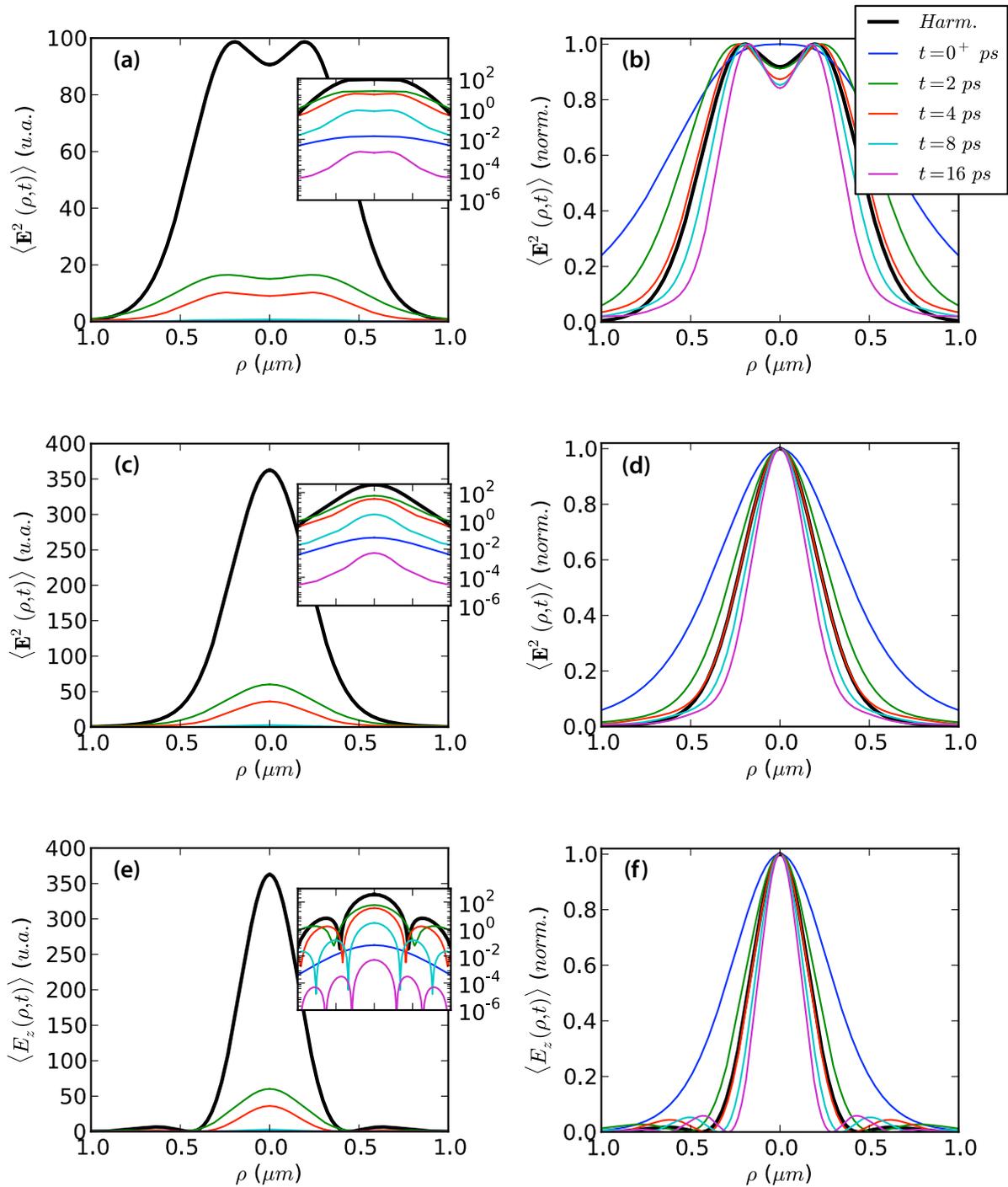


FIGURE 3.14 – Pour une impulsion FC, champ dans le plan image à différents instants, d'un dipôle source parallèle (a,b) ou perpendiculaire au film (c-f). Champs représentés : « intensité » $\langle \mathbf{E}^2(\rho, t) \rangle$ (a-d), $\langle E_z^2(\rho, t) \rangle$ (e,f). Trait épais noir : régime harmonique. Couleur : impulsion FC à différents instants (légende sur (b), les couleurs correspondent aux mêmes instants que la figure 3.10). Sur les figures de droite, chaque courbe est normalisée par son maximum.

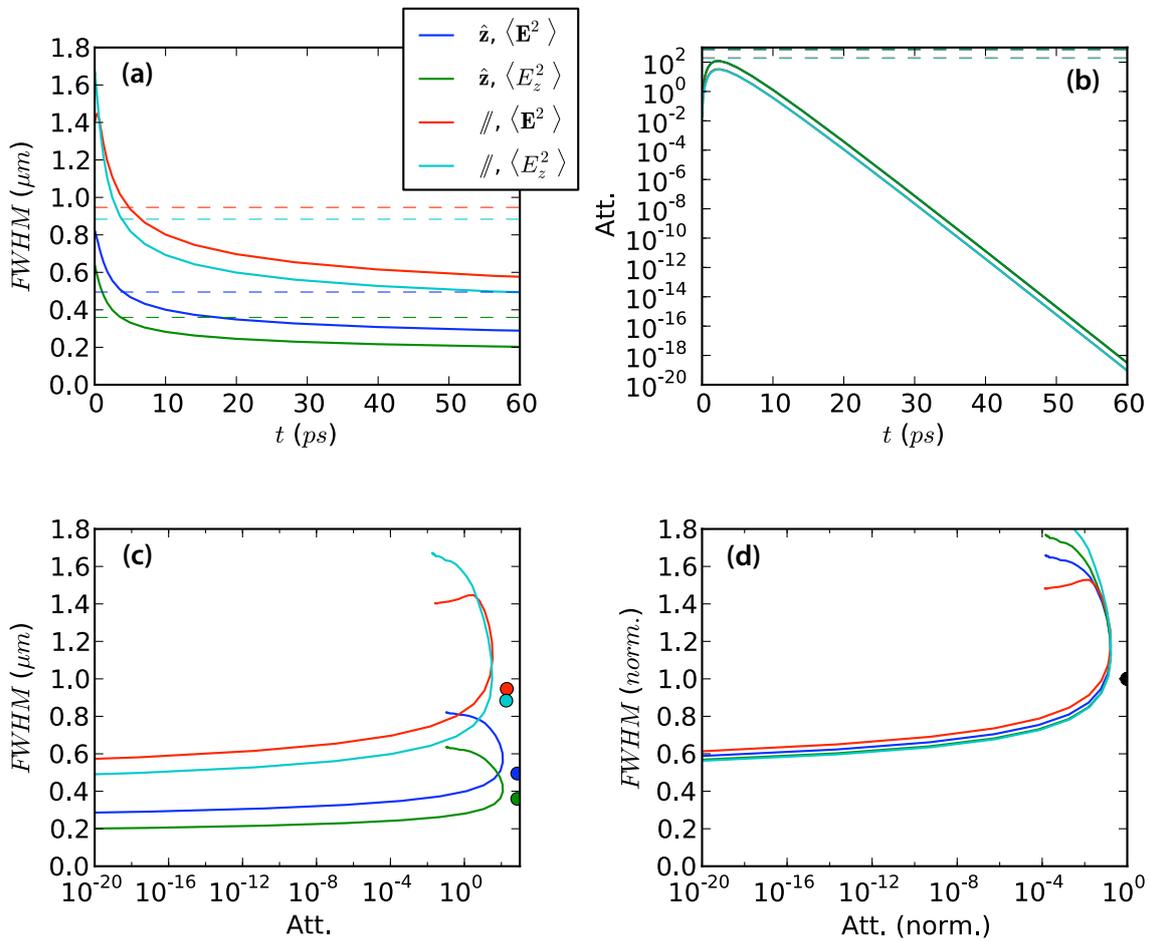


FIGURE 3.15 – Largeur à mi-hauteur et atténuation de l’image d’un dipôle source, pour une impulsion FC. (a) : évolution de la largeur à mi-hauteur (FWHM) de l’image en fonction du temps (trait continu) et FWHM en régime harmonique – indépendante du temps – pour comparaison (tirets). (b) : valeur minimale du module du carré du champ (cf. notes de la figure 3.14) en fonction du temps (trait continu) et en régime harmonique (tirets). Les traits cyan et rouge (dipôle parallèle, courbes inférieures), et bleu et vert (dipôle perpendiculaire, courbes supérieures), sont proches et paraissent superposés sur cette figure. (c) : graphe FWHM en fonction de la valeur minimale du module du carré du champ (trait continu) et valeurs obtenues en régime harmonique (ronds). Pour une valeur de champ mesurable, ce graphe donne la FWHM accessible. La droite de chaque courbe correspond aux premiers instants, la partie gauche aux temps plus grands. (d) : idem, la FWHM et les valeurs maximales du champ sont normalisées par les valeurs en régime harmonique. Le champ $\langle E_z^2(\rho, t) \rangle$ pour un dipôle parallèle (cyan) n’est pas tracé sur la figure 3.14.

3.2.2 Régime libre

Les champs obtenus dans le cas du régime libre sont représentés pour les mêmes configurations que l'impulsion FC sur la figure 3.16. La résolution s'améliore dès les premiers instants. On constate la présence de « pieds » importants sur les figures d'intensité (figure 3.16,a-d), que l'on ne retrouve que dans une moindre mesure en observant la composante E_z du champ électrique dans le cas d'un dipôle perpendiculaire (figures 3.16,e et f).

3.2.3 Comparaison et évolution de la largeur à mi-hauteur au cours du temps

Sur la figure 3.18, on a superposé les courbes des figures 3.15(c,d) et 3.17(c,d). Comme on peut le voir sur cette figure, le régime libre permet d'atteindre des faibles FWHM avec des champs plus importants que l'impulsion FC.

Sur les figures 3.15(a) et 3.17(a), la FWHM décroît au cours du temps. Cette FWHM tend vers 0, ce que l'on peut voir sur la figure 3.19. Cette figure représente l'inverse de la FWHM en fonction du temps, avec le temps en échelle logarithmique. On voit ainsi qu'après un premier régime où la FWHM est constante, son inverse évolue en $A + B \ln t$, où A et B sont des constantes. Ainsi, asymptotiquement, et la FWHM tend vers 0 – à un rythme extrêmement lent qui varie en $1/\ln t$.

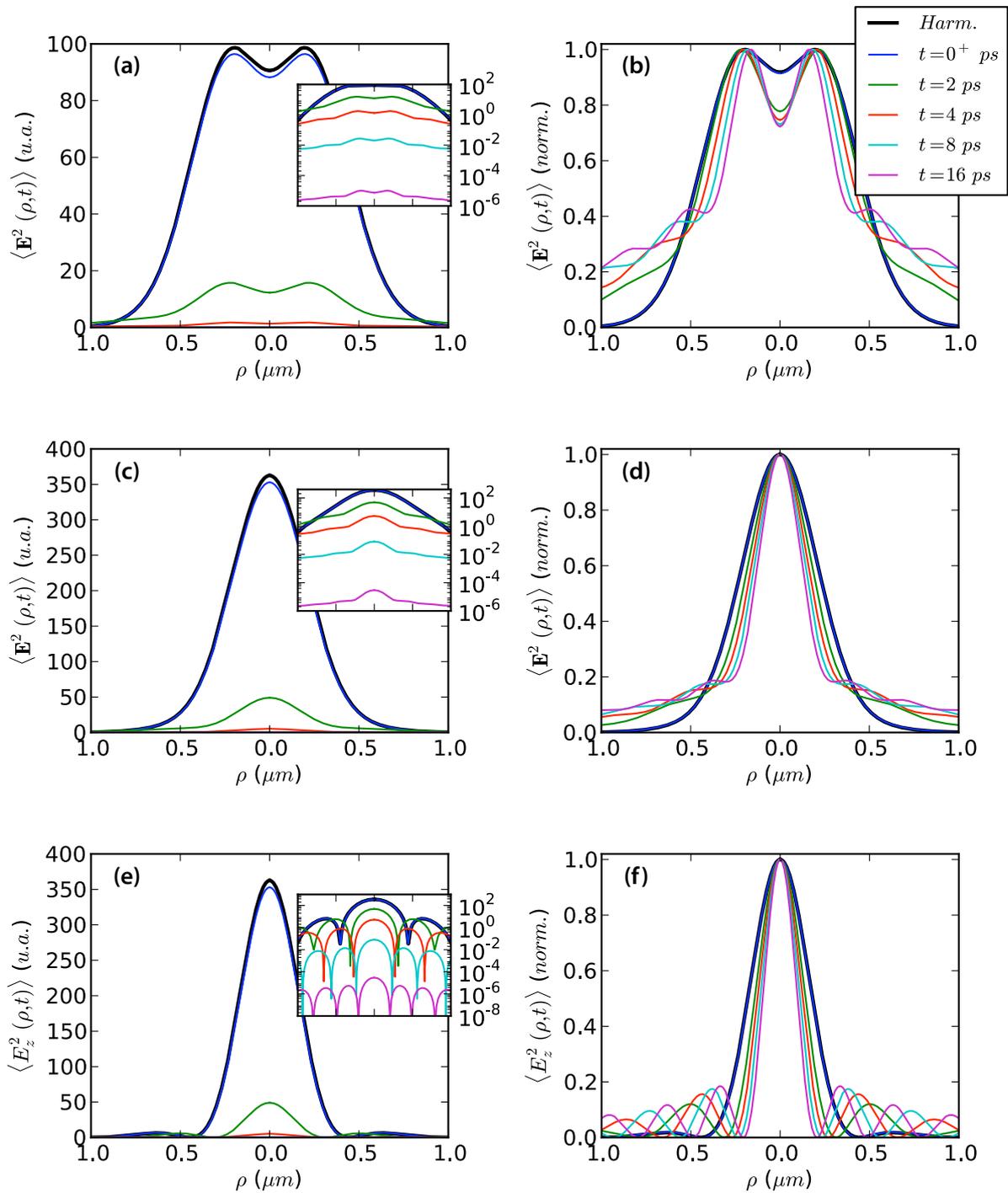


FIGURE 3.16 – En régime libre, champ dans le plan image à différents instants, d'un dipôle source parallèle (a,b) ou perpendiculaire au film (c-f). Voir notes de la figure 3.14.

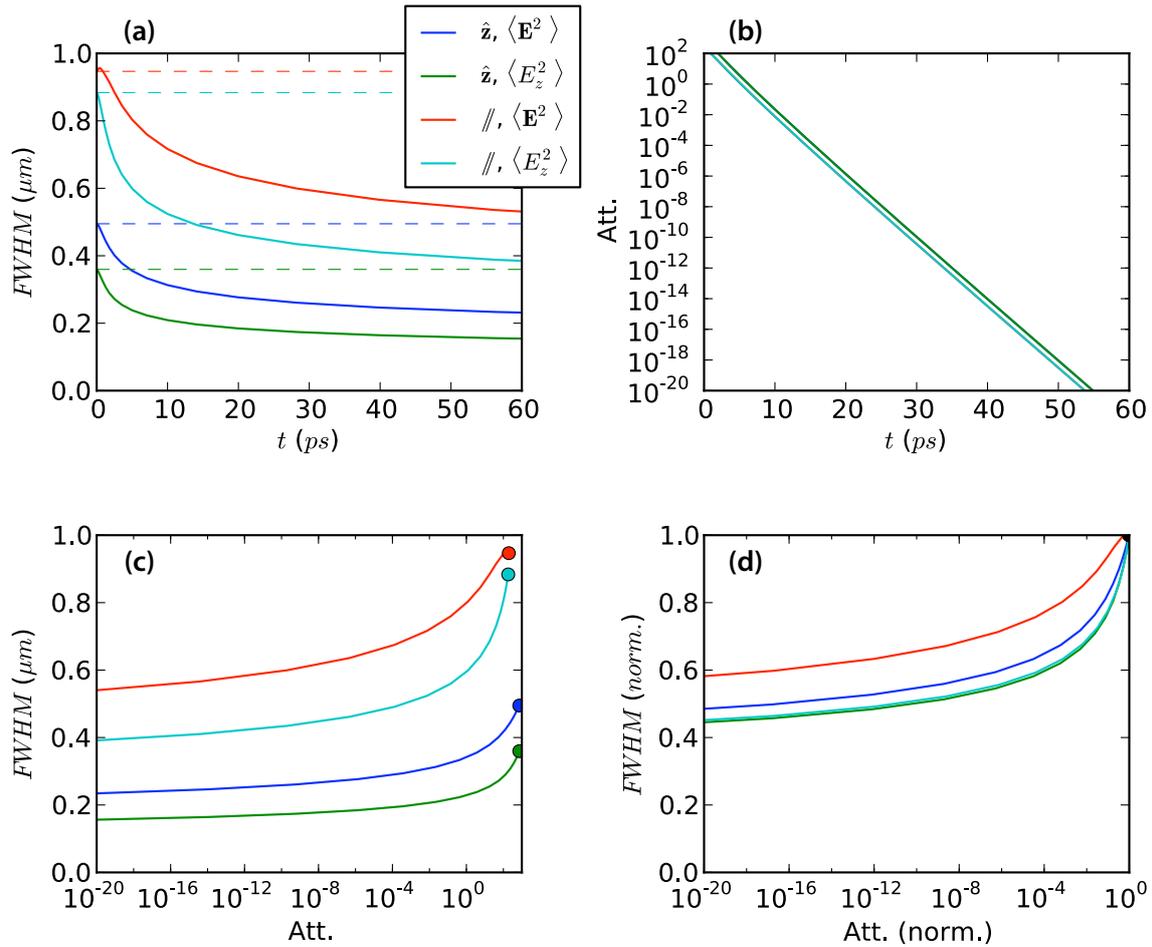


FIGURE 3.17 – Largeur à mi-hauteur et atténuation de l’image d’un dipôle source, en régime libre. Cf. notes de la figure 3.15.

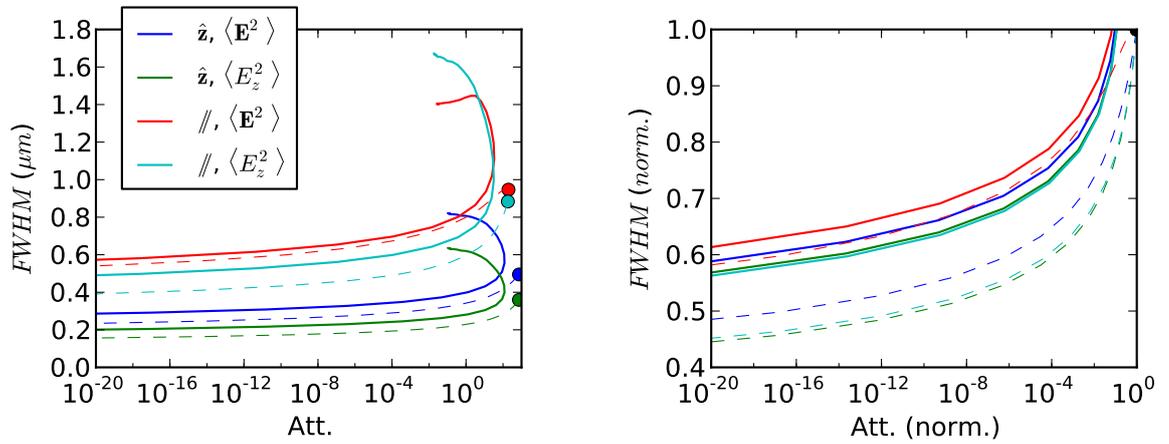


FIGURE 3.18 – Comparaison des graphes FWHM / valeur maximale du champ pour une impulsion FC et en régime libre. Voir notes de la figure 3.15 pour l'interprétation de ces courbes. Trait continu : impulsion FC, tirets : régime libre.

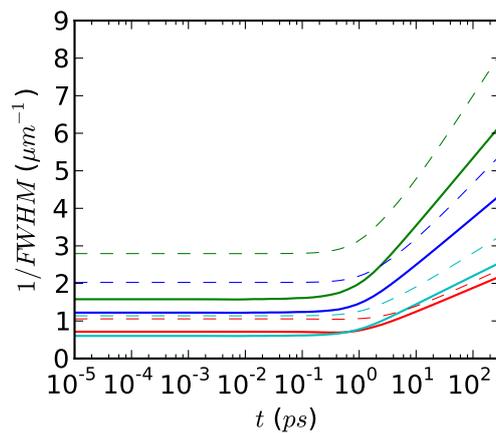


FIGURE 3.19 – Évolution de l'inverse de la FWHM au cours du temps. Inverse de la largeur à mi-hauteur en fonction du temps. Le temps t est en échelle logarithmique. Trait continu : impulsion FC, tirets : régime libre. Voir figure 3.18 pour la légende.

Conclusion

L'analyse de la relation de dispersion suggérait que des fréquences complexes permettent d'accéder à des ondes de surface de grand vecteur d'onde, et donc à une superrésolution. Ceci conduit à penser que si l'on éclaire avec un faisceau ayant une structure temporelle judicieusement choisie, on peut améliorer la résolution spatiale. On a étudié ces idées dans le domaine spatial et temporel. On a montré qu'il est effectivement possible d'améliorer la résolution. Une augmentation de la résolution de 50% par rapport au régime harmonique peut être obtenue sur la largeur à mi-hauteur au prix d'une baisse de signal de 4 ordres de grandeur. L'augmentation de résolution est potentiellement infinie, mais elle s'accompagne cependant d'une chute drastique du signal (figure 3.18, droite).

Quantification des ondes de surface

[*Phys. Rev. B* 82, 035411 (2010)]

Sommaire

4.1	Introduction originale	76
4.2	Modal description of surface waves	77
4.3	Energy of a surface wave	80
4.4	Quantization of surface waves	81
4.5	Emission rates : comparison with the classical case, Einstein's coefficients	82
4.5.1	Spontaneous emission of a dipole above a metallic interface	82
4.5.1.1	Quantum calculation	82
4.5.1.2	Classical approach	83
4.5.1.3	Comparison with the lossy case	84
4.5.2	Einstein's coefficients	84
4.6	Conclusion	87

Dans ce chapitre, à partir d'une expression du champ des ondes de surface sous forme de somme de modes obtenue dans le chapitre 1, on détermine l'énergie associée à chacun de ces modes, puis on les quantifie canoniquement, chacun d'entre-eux étant analogue à un oscillateur harmonique – comme les modes du champ électromagnétique du vide (LOUDON 2000). On obtient alors une expression des opérateurs associés au champ des ondes de surface, qui permet, dans le chapitre 5, de modéliser l'émission et l'absorption de phonons-polaritons de surface par transitions inter- et intrasousbandes des électrons d'un puits quantique.

Nous serons amenés au cours de ce chapitre à définir un facteur de Purcell associé à l'émission d'ondes de surface. Nous donnerons une expression de ce facteur de Purcell à partir du formalisme quantique que l'on développera, ainsi qu'à partir de l'expression du champ des ondes de surface dans le cas d'une fréquence complexe, obtenue au chapitre 1. Le traitement quantique négligeant les pertes des ondes de surface, une comparaison des deux facteurs de Purcell permettra d'estimer dans quelle mesure ce traitement quantique s'applique en présence de pertes.

La suite de ce chapitre et l'annexe F qui l'accompagne correspondent au contenu de (ARCHAMBAULT et al. 2010), auquel le lecteur peut se reporter s'il le souhaite.

4.1 Introduction originale

Quantum theory of light is a useful tool to describe microscopic interactions between light and matter. The electromagnetic state is represented by photon number states and the electromagnetic field becomes an operator (LOUDON 2000). Such a description of light provides a quantitative description of absorption, spontaneous and stimulated emission of photons by a two-level system. In particular, it allows to derive a quantitative treatment of light amplification. It also predicts pure quantum effects, such as photon coalescence or antibunching. Quantum theory of light can be extended to non-dispersive and non-lossy media. Each photon in the material corresponds to the excitation of a mode characterized by a wave vector \mathbf{k} and circular frequency ω , such as $k = n\omega/c$, where n is the refractive index of the medium and c the light velocity in a vacuum. It is the purpose of this paper to introduce a quantification scheme for surface waves propagating along an interface.

It is well known that electromagnetic surface waves called surface plasmons exist at interfaces between metals and dielectrics (RAETHER 1988). Their quantum nature has been demonstrated by energy loss spectroscopy experiments on thin metallic films reported by Powell and Swan (POWELL et SWAN 1959). Single optical plasmons have been excited recently along a metallic nanowire (AKIMOV et al. 2007 ; KOLESOV et al. 2009). Surface plasmons are associated with collective oscillation of free electrons in the metal at the surface. Similar electromagnetic fields exist also on polar materials and are called surface phonon-polariton. Both surface plasmon-polaritons and surface phonon-polaritons propagate along the interface and decrease in the direction perpendicular to the surface. Such a resonance is therefore called surface wave in a more general way. Most studies deal with a plane interface between air or vacuum and a non-lossy material. In this case, it is well known (RAETHER 1988) that a surface wave can exist if the dielectric constant $\epsilon(\omega)$ has a real part lower than -1 .

Losses are often a serious limitation for many practical applications envisioned for surface plasmons. This problem could be circumvented by introducing gain in the system. Studies have been made in such a way with metallic nanoparticles embedded in a gain medium both numerically with dye molecules (SMUK et LAWANDY 2006) or quantum dots (BERGMAN et STOCKMAN 2003 ; LI et al. 2005) and experimentally (NOGINOV et al. 2007). Seidel et al. reported the first experiment demonstrating the amplification of surface plasmons on a flat silver film surrounded by a solution of dye molecules (SEIDEL et al. 2005). Since then, a few studies have dealt with stimulated emission of surface plasmons on flat interfaces both experimentally (AMBATI et al. 2008b ; NOGINOV et al. 2008) and theoretically (DE LEON et BERINI 2008). Such works have paved the way to active plasmonics (AMBATI et al. 2008a ; MACDONALD et al. 2008 ; CAO et BRONGERSMA 2009) and nanolasers (PROTSENKO et al. 2005 ; BERGMAN et STOCKMAN 2004) or more precisely to spasers (BERGMAN et STOCKMAN 2003 ; ZHELUDEV et al. 2008), or surface plasmon amplification by stimulated emission introduced by Bergman and Stockman and demonstrated experimentally recently (NOGINOV et al. 2009 ; OULTON et al. 2009).

It is clear that a quantum treatment of surface plasmon could be useful for many applications. For instance an efficient single photon emitter could be optimized (BARNES et al. 2002). A quantum treatment allows to

model stimulated emission and therefore to specify gain conditions and laser operation. It could also allow to analyse pure quantum effects for surface plasmons such as single plasmon interferences, quantum correlations FASEL et al. 2006, bunching, strong coupling regime CHANG et al. 2006 ; GONG et VUCKOVIC 2007 or single photon excitation of surface plasmon ALTEWISCHER et al. 2002 ; MORENO et al. 2004 ; FASEL et al. 2005 ; TAME et al. 2008. To our knowledge, the first quantization scheme for surface plasmon on a metallic surface has been reported by Elson and Ritchie ELSON et RITCHIE 1971. In their work, the metal is characterized by a non-lossy Drude model so that real optical properties cannot be included. Using Green's approach, Gruner and Welsch introduce a quantization scheme for electromagnetic fields in dispersive and absorptive materials (GRUNER et WELSCH 1996). It should hence be possible to quantize the field associated with surface waves using their model. Note that due to losses, they cannot obtain operators for modes but only local operators : one recovers the usual creation/annihilation operators in the limit of zero losses. A related work, reported in the early nineties by Babiker et al., dealt with the quantization of interface optical phonons in quantum well, which could appear also as a confined surface phonon in a heterostructure BABIKER et al. 1993.

In this paper, a quantization scheme that is not based on a specific model of the dielectric constant is introduced. The aim is to quantize the field by accounting for the experimental dispersion properties of the medium. The procedure follows the quantization scheme for photons in a vacuum. We will first introduce a classical mode description of the surface waves and discuss the dispersion relation. A key issue for quantization is the definition of the energy of surface waves for dispersive lossy media. The problem of electromagnetic energy in a dispersive and lossy medium has been recently addressed in a paper by Stallinga (STALLINGA 2006). The third section addresses the problem of the electromagnetic energy associated with surface waves in a simpler case following Landau and Lifchitz for non-lossy dielectric material LANDAU et LIFSHITS 1984. The quantization scheme is finally described in the fourth section. In order to check our results, we apply our formalism in the fifth section to the calculation of the spontaneous emission of a two-level system in the presence of surface plasmons. The Purcell factor (i.e. the local density of states normalized by the vacuum density of states) and Einstein's coefficients are also derived using this model.

4.2 Modal description of surface waves

Let us consider surface waves propagating on a plane interface at $z = 0$ separating two semi-infinite media (Fig. 4.1). One of them is a vacuum or air and the second is a metal or a polar material. A surface mode is characterized by its circular frequency ω and the projection of the wave vector \mathbf{K} on the plane perpendicular to the z -axis. The material has a dielectric constant $\epsilon(\omega)$. We use Coulomb's gauge ($\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$) to write the magnetic and electric fields :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.2)$$

The field produced by any distribution of sources in the presence of an interface can be computed using

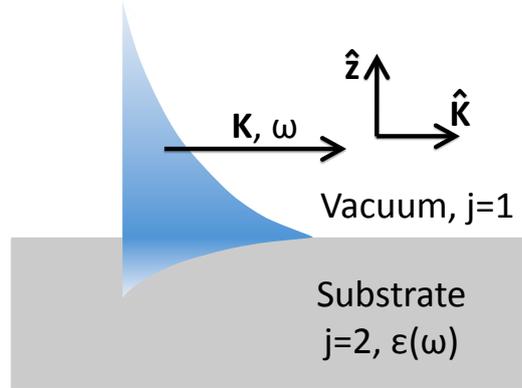


FIGURE 4.1 – Surface wave on a plane interface. The surface mode is characterized by its circular frequency ω and the projection of the wave vector along the interface \mathbf{K} . $\hat{\mathbf{K}}$ and $\hat{\mathbf{z}}$ are unit vectors along and perpendicular to the plane interface respectively.

Green's tensor. By extracting the pole contribution, it is possible to derive the general form of the surface plasmon field. The details of this procedure can be found in (ARCHAMBAULT et al. 2009). The corresponding vector potential can be cast in the form :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \alpha_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega_{sp}t) + c.c. \quad (4.3)$$

where *c.c.* stands for complex conjugate. In this equation, \mathbf{K} is a real wave vector parallel to the interface and the circular frequency ω_{sp} is a complex root of the equation :

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega) + 1}} \quad (4.4)$$

The term $\alpha_{\mathbf{K}}$ is an amplitude associated with wave vector \mathbf{K} in the decomposition. The vectors $\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$ are given by :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) = \frac{1}{\sqrt{L(\omega_{sp})}} \exp(i\gamma_j z) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (4.5)$$

where $L(\omega_{sp})$ has the dimension of a length and will be fixed later by Eq. (F.66) to normalize the energy of each mode. γ_j is the projection of the wave vector along the z -axis, $j = 1$ in the region $z > 0$, and $j = 2$ in the region $z < 0$, so that $\gamma_j^2 = \epsilon_j(\omega_{sp})\omega_{sp}^2/c^2 - K^2$. The sign of γ_j is then chosen such as the field goes to zero when z goes to $\pm\infty$. Let us note that in the non-lossy case, γ_1 and γ_2 are purely imaginary, so that the electric field decays exponentially along the z -axis. $\hat{\mathbf{K}}$ and $\hat{\mathbf{z}}$ are unit vectors directed along \mathbf{K} and the z -axis respectively.

Figure 4.2 shows the dispersion relation of surface plasmons as well as the variation of the imaginary part

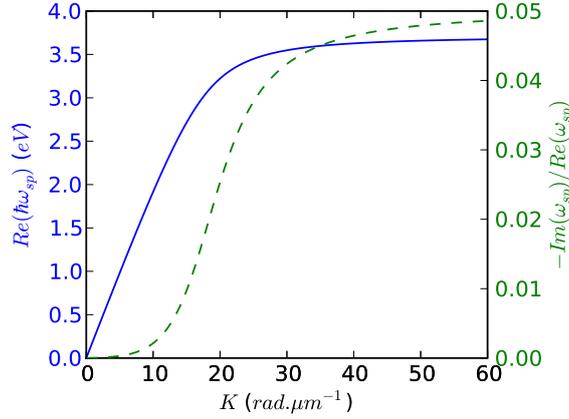


FIGURE 4.2 – (Color online). Dispersion relation of a surface plasmon on a plane interface between air and silver (solid line, left axis) and variation of the imaginary part of ω (dashed line, right axis). The dispersion relation has been obtained using the silver dielectric constant given in Appendix F.1

of the frequency with K on a plane interface of silver. To perform the calculations when a complex frequency is needed, it has been useful to fit the experimental values of the dielectric constant $\epsilon(\omega)$ given by (PALIK et GHOSH 1998) with an analytical model. The real part of the silver dielectric constant is very well represented by a Drude model given in (AMBATI et al. 2008a). For the imaginary part we add to this Drude model a conductivity term, so that the modeled dielectric constant is in very good agreement with the experimental data. The model we used is given in appendix F.1. In this example, $\text{Im}(\omega_{sp})$ is small, less than 5%, comparing to $\text{Re}(\omega_{sp})$. In other words, the lifetime of the surface mode is long enough to have a few tens of periods for the oscillating electromagnetic field on the asymptotic part of the dispersion relation and hundreds of periods on the linear part, close to the light cone. Note that this point seems to be rather general. Indeed we found similar ratios for many other materials supporting surface waves.

From the dispersion relation, it is possible to derive the density of states. To this aim, it is convenient to introduce a virtual box, which is in fact a virtual square in the $x - y$ plane of sides L_x and L_y and size $S = L_x \times L_y$. Born-Von Karman's conditions yields a quantized value of the wave vector $K_x = n_x 2\pi/L_x$, $K_y = n_y 2\pi/L_y$, where $n_{x,y}$ are relative integers. Let us note that a different expansion of the surface plasmon field can be used with a complex wave vector and a real frequency as discussed in (ARCHAMBAULT et al. 2009). We stress here that the Born-von Karman procedure imposes a real wave vector. It follows that the relevant dispersion relation has no backbending as seen in Fig. 4.2. The reader is referred to (ARCHAMBAULT et al. 2009) for more details. Substituting the discrete sum $\frac{1}{S} \sum_{\mathbf{K}}$ over the quantized wave vector \mathbf{K} and the discrete amplitude $SA_{\mathbf{K}}$ to $\int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2}$ and $\alpha_{\mathbf{K}}$ respectively, the vector potential can be cast as

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (4.6)$$

where we have omitted the subscript sp for the circular frequency ω . We can insert this form in Eqs. (4.1) and (4.2) to obtain the electric and magnetic fields. Introducing the notations $\mathbf{k}_j = \mathbf{K} + \gamma_j \hat{\mathbf{z}}$ and $\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) =$

$\mathbf{k}_j \times \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$, we have :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \omega A_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (4.7b)$$

4.3 Energy of a surface wave

The quantization procedure is based on the fact that the energy of the field has the structure of a sum of harmonic oscillators. It is thus a key issue to derive the energy of the surface plasmon field. In this section, we give a brief outline of the derivation and leave the details to appendix F.2 and F.5. In a vacuum, the energy density is given by (JACKSON 1999) :

$$u_1 = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \quad (4.8)$$

The electromagnetic energy in a lossy dispersive material is a more subtle issue. This problem has been addressed for the first time by Brillouin (BRILLOUIN 1960). He considered a very simple case, with two perfectly monochromatic waves in the material. Landau and Lifchitz analysed (LANDAU et LIFSHITS 1984) the energy of an electromagnetic field in a non-lossy dispersive medium, whose frequencies form a narrow continuum around the mean frequency ω_0 . They dealt with fields such as $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) \exp(-i\omega_0 t)$, $\mathbf{E}_0(t)$ varying slowly over the period $2\pi/\omega_0$. In the appendix, we follow this method. The main idea is to derive the work done by an external operator to build adiabatically the field amplitude. This work is equal to the total amount of electromagnetic energy of the surface waves for a non-lossy medium. Note that more recently, Stallinga derived an expression of the energy for dispersive and lossy materials (STALLINGA 2006). The result is the same provided that ϵ is replaced by $\text{Re}(\epsilon)$. This suggests that it is possible to neglect losses in the calculation of the energy. Actually, it is essential to deal with a non-lossy medium to have well-defined modes. A key issue regarding this approximation is whether the dispersion relation is modified by the presence of losses. Indeed, the density of states critically depends on the dispersion relation. We compared the dispersion relation obtained using $\text{Re}(\omega_{sp})$ for a lossy medium with the dispersion relation with a non-lossy medium in the case of silver. We found a relative difference between the two dispersion relations always less than 1.5×10^{-3} .

We will thus neglect the losses of the medium in the derivation of the energy. The calculation outlined in appendix F.2 gives the total energy of the surface waves :

$$U = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 \omega^2 S [A_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}}^* + A_{\mathbf{K}}^* A_{\mathbf{K}}]. \quad (4.9)$$

We emphasize that this convenient expression for the energy is obtained using the right normalization condi-

tion on $L(\omega)$ or equivalently on $\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$ given respectively by Eqs. (F.66) and (F.69).

4.4 Quantization of surface waves

We now turn to the quantization of the electromagnetic field of surface plasmons. We first notice that the expression $\epsilon_0\omega^2 S [A_{\mathbf{K}}A_{\mathbf{K}}^* + A_{\mathbf{K}}^*A_{\mathbf{K}}]$ of the energy for each mode \mathbf{K} , has the structure of the energy of a harmonic oscillator, hence the quantized hamiltonian :

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{K}} \frac{\hbar\omega}{2} [\hat{a}_{\mathbf{K}}\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger\hat{a}_{\mathbf{K}}] \quad (4.10)$$

with the equivalence

$$A_{\mathbf{K}} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega S}} \hat{a}_{\mathbf{K}} \quad (4.11)$$

$$A_{\mathbf{K}}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega S}} \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger. \quad (4.12)$$

The surface wave field is thus quantized by association of a quantum-mechanical harmonic oscillator to each mode \mathbf{K} . We introduce $\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger$ and $\hat{a}_{\mathbf{K}}$ which are respectively the creation and annihilation operators for the mode \mathbf{K} . As in the harmonic oscillator theory, $\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger$ and $\hat{a}_{\mathbf{K}}$ act on surface wave number states $|n_{\mathbf{K}}\rangle$ which are eigenvectors associated with eigenvalues $(n_{\mathbf{K}} + 1/2)\hbar\omega$ of the Hamiltonian ($n_{\mathbf{K}}$ is an integer). Operators $\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger$ (respectively $\hat{a}_{\mathbf{K}}$) allow to create (respectively destroy) a quantum of energy $\hbar\omega$ according to the operating rules (LOUDON 2000) :

$$\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger |n_{\mathbf{K}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{K}} + 1} |n_{\mathbf{K}} + 1\rangle \quad (4.13)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{K}} |n_{\mathbf{K}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{K}}} |n_{\mathbf{K}} - 1\rangle \quad (4.14)$$

Different surface modes are independent so that their associated operators commute :

$$[\hat{a}_{\mathbf{K}}, \hat{a}_{\mathbf{K}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{K},\mathbf{K}'}. \quad (4.15)$$

We can now write the fields as operators acting on the surface plasmon number quantum states $|n_{\mathbf{K}}\rangle$:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 S}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \hat{a}_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + h.c. \quad (4.16)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega S}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \hat{a}_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + h.c. \quad (4.17)$$

where $h.c.$ denotes the hermitian conjugate.

4.5 Emission rates : comparison with the classical case, Einstein's coefficients

4.5.1 Spontaneous emission of a dipole above a metallic interface

The quantization scheme that we have introduced allows to derive an expression of the electromagnetic field using operators. Hence, we can write interaction hamiltonians and describe the coupling between light and matter. In order to test this quantization procedure, we performed the calculation of the lifetime of a two-level system placed in the vicinity of a metal-vacuum interface so that surface plasmons can be excited. This result is interesting as the lifetime can also be computed using a classical approach as shown for instance by Ford and Weber (FORD et WEBER 1984). More specifically, they showed how to find the surface plasmon contribution to the lifetime by extracting the pole contribution. By comparing both results, we can assess the validity of the quantum theory of surface plasmon within the approximation of a dispersive but non-lossy medium.

4.5.1.1 Quantum calculation

In the quantum approach, we first derive the decay rate associated to the spontaneous emission of surface plasmons of a two-level quantum system close to an interface, using Fermi's golden rule. This gives the surface plasmon spontaneous emission rate as a function of the matrix element $\langle 2|\hat{\mathbf{D}}|1\rangle = \mathbf{D}_{12}$ of the dipole moment operator $\hat{\mathbf{D}}$. The details of the calculation are given in appendix F.3.

We obtain the following expression for the spontaneous emission rate :

$$\gamma_{spont}(\mathbf{D}_{12}, \omega_0, z) = \frac{\omega_0 |\mathbf{D}_{12}|^2}{2\epsilon_0 \hbar} K \frac{dK}{d\omega} \frac{1}{L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)} \quad (4.18)$$

in which $\mathbf{d}_{12} = \mathbf{D}_{12}/|\mathbf{D}_{12}|$ is the (possibly complex) polarization of the dipole, $d_{12,z} = \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{d}_{12,||} = \mathbf{d}_{12} - d_{12,z} \mathbf{z}$. We introduced the effective length of the surface plasmon mode $L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)$,

$$\frac{1}{L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)} = \frac{\exp(2i\gamma_1 z)}{L(\omega_0)} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{d}_{12,||}|^2 - \epsilon(\omega_0) |d_{12,z}|^2 \right]. \quad (4.19)$$

It will be seen later that this length allows to define an effective volume of the plasmon mode.

For comparison with the classical calculation, we normalize $\gamma_{spont}(\mathbf{D}_{12}, \omega_0, z)$ with the spontaneous emission rate of the same two-state quantum system in a vacuum, given by (LOUDON 2000) $\gamma_{spont}^0 = \frac{\omega_0^3 |\mathbf{D}_{12}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$. This gives the Purcell factor associated to the emission of surface plasmons :

$$F_P(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = \frac{3\pi c^3}{2\omega_0^2} K \frac{dK}{d\omega} \frac{1}{L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)} \quad (4.20)$$

which does not depend anymore on the amplitude of \mathbf{D}_{12} , but only on its polarization \mathbf{d}_{12} , its frequency ω_0 and its distance to the interface z . As expected, the Purcell factor decreases exponentially as the dipole goes farther from the interface, and can have rather high values (see Fig. 4.3 and comments below) as ω_0 gets closer

to the asymptotic frequency of surface plasmons if the dipole is not too far from the interface.

This Purcell factor can also be cast under the form :

$$F_P(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = \omega_0 g(\omega_0) \frac{\lambda_0^3}{V_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)} \frac{3}{8\pi} \quad (4.21)$$

where the (global) density of states of surface plasmons $g(\omega)$ is given by $g(\omega) = S \frac{K}{2\pi} \frac{dK}{d\omega}$ and $V_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0) = SL_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)$ is the volume of the surface plasmon modes of frequency ω_0 for a dipole polarization \mathbf{d}_{12} in which the emission occurs. Eq. (4.21) is thus similar to the Purcell factor F_P of a dipole interacting with a single damped mode (PURCELL et al. 1946). ($F_P = Q \frac{\lambda^3}{V} \frac{3}{4\pi^2}$, or equivalently $F_P = \omega g(\omega) \frac{\lambda^3}{V} \frac{3}{8\pi}$ using the density of states of the single mode at resonance, $g(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{\omega}$.)

When dealing with an isotropic distribution of dipoles, the average of the rate of spontaneous emission (4.18), over the orientations of the dipole \mathbf{D}_{12} , should be considered. Let us first introduce the total effective length of the surface plasmon mode, defined as the inverse of the average of $\frac{1}{L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)}$ over the directions of \mathbf{d}_{12} :

$$\frac{1}{L_{eff,total}(z, \omega_0)} = \frac{1}{3} \frac{\exp(2i\gamma_1 z)}{L(\omega_0)} [1 + |\epsilon(\omega_0)|], \quad (4.22)$$

Calculating the averaged rate of spontaneous emission then amounts to replacing $L_{eff}(z, \mathbf{d}_{12}, \omega_0)$ by $L_{eff,total}(z, \omega_0)$ in Eq. (4.18) :

$$\gamma_{spont,total}(|\mathbf{D}_{12}|, \omega_0, z) = \frac{\omega_0 |\mathbf{D}_{12}|^2}{2\epsilon_0 \hbar} K \frac{dK}{d\omega} \frac{1}{L_{eff,total}(z, \omega_0)}. \quad (4.23)$$

More details are given in appendix F.3.

4.5.1.2 Classical approach

In the previous section, we considered a two-level quantum system having a given polarization \mathbf{d}_{12} and Bohr circular frequency ω_0 , and we normalized its spontaneous emission rate by its value in a vacuum. The power radiated by a classical harmonic dipole having the same polarization \mathbf{d}_{12} and a circular frequency ω_0 can also be normalized by its value in a vacuum. Both expressions give the normalized local density of states, which is a classical quantity. They are therefore equal, that is the normalized radiated power gives the normalized spontaneous emission rate. The normalized radiated power can be expressed as a function of Green's tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ of the system :

$$F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = \frac{6\pi c}{\omega_0} \text{Im} \left[\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(z\mathbf{z}, z\mathbf{z}, \omega_0) \mathbf{d}_{12} \right]. \quad (4.24)$$

Following the steps detailed in (ARCHAMBAULT et al. 2009), the pole contribution $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}$ of Green's tensor of a plane interface can be derived, and inserted in Eq. (4.24). We use here the pole contribution of the surface plasmon with a complex frequency (see (ARCHAMBAULT et al. 2009)). The details of the calculation are given

in appendix F.4. One finds for the normalized radiated power in the non-lossy case :

$$F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = \frac{3\pi c^3}{\omega_0^3} K^3 \frac{dK}{d\omega} R(K, \omega_0) \exp(2i\gamma_1 z) \left[\frac{1}{2} |\mathbf{d}_{12,\parallel}|^2 - \epsilon(\omega_0) |d_{12,z}|^2 \right]. \quad (4.25)$$

Using Eq. (F.71) and comparing Eq. (4.25) to Eq. (4.20), we see easily that $F_P(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z)$. We thus recover the quantum spontaneous emission rate in the non lossy limit of the above classical approach. This result is not surprising. Indeed the normalized spontaneous emission rate yields the local density of states. The latter is a classical quantity. In the quantum approach, it has been calculated using the dispersion relation. In the classical approach, it has been calculated using the Green's tensor. We have thus checked that the mode approach and the Green's formalism approach are equivalent. We now go one step further and compare the quantum approach (without losses) with the Green's tensor approach that accounts for losses. We compute the spontaneous emission rate for both cases in order to assess the role of losses.

4.5.1.3 Comparison with the lossy case

The lossy and non lossy emission rates are compared using Eqs. (4.20) and (F.40). The result is seen on Fig. 4.3 for a dipole located at three different distances of a silver surface (10, 75 and 250 nm). It appears that the differences between both curves in this case are still very small as long as the frequency is not too close from the asymptote of the dispersion relation. This is not surprising considering the fact that at this asymptotic value the losses are the most important. Moreover, when the distance between the dipole and the interface increases, the part of the electromagnetic field due to the higher surface plasmons wave vector decreases, so that the part due to the surface plasmons lying on the linear part of the dispersion relation is more important. As seen in Fig.4.2, these surface waves have less losses and the quantum approach is thus more accurate. It follows the important conclusion that the non-lossy medium approximation in the quantum treatment is reasonable to deal with surface waves provided that the frequency is not too close to the asymptotic value.

Note that (FORD et WEBER 1984) provides an expression for the surface plasmon emission rate of a dipole close to an interface, which can be compared to ours (details not given here). In the non lossy case, it can be proved analytically that their results lead to the same normalized emission rate as Eq. (4.20). In the lossy case, one finds a normalized emission rate close to the one used here (Eq. (F.40)), although they are not rigorously equal. Our method gives an expression of the normalized surface plasmon emission rate as a sum over the modes \mathbf{K} (see Eq. (F.36)), which provides a better understanding of the difference between the lossy and the non lossy cases.

4.5.2 Einstein's coefficients

A quantum approach for surface waves allows us also to derive easily Einstein's coefficients for spontaneous and stimulated emission. The same example of a dipole above the interface is taken. Once again, it is possible to follow the approach described for photons in (LOUDON 2000) for instance. Einstein's coefficient for surface plasmon spontaneous emission has already been calculated : $A_{21} = \gamma_{spont}(\mathbf{D}_{12}, \omega_0, z)$ (see Eq. (4.18)). In

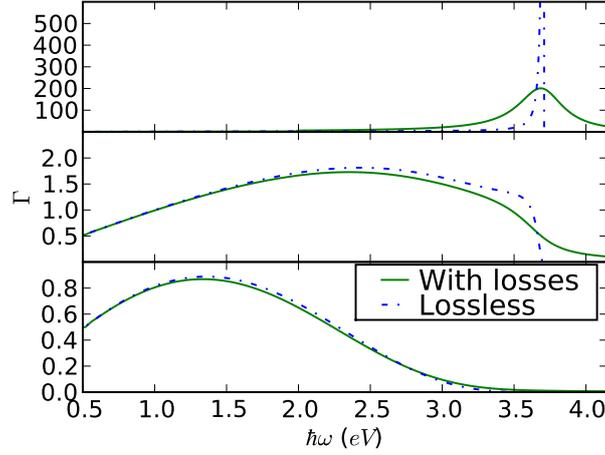


FIGURE 4.3 – (Color online). Normalized emission rate F_P of a vertical dipole located at 10 nm (top), 75 nm (center) and 250 nm (bottom) from the surface when taking into account losses (solid lines) comparing to the non-lossy cases (dashdotted lines).

order to obtain Einstein's coefficient for stimulated emission, one needs to start from Eq. (F.28). In this equation, the term proportional to $n_{\mathbf{K}}$ is the matrix element for stimulated emission. We note $\langle W(\omega) \rangle$ the energy density of the radiation per unit surface and we assume that it varies slowly for frequencies near ω_0 . The total energy in the single mode $n_{\mathbf{K}}$ is now replaced by :

$$n_{\mathbf{K}}\hbar\omega \rightarrow S \int d\omega \langle W(\omega) \rangle \quad (4.26)$$

The transition rate due to stimulated emission can thus be written :

$$\gamma_{stim}(\mathbf{D}_{12}, \omega_0, z) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int d\omega \langle W(\omega) \rangle \frac{1}{2\epsilon_0} |\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(\mathbf{r})|^2 \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.27)$$

It follows that Einstein's coefficient for stimulated emission in mode \mathbf{K} , $B_{21} = \gamma_{stim}(\mathbf{D}_{12}, \omega_0, z) / \langle W(\omega_0) \rangle$, is given by :

$$B_{21} = \frac{\pi |\mathbf{D}_{12}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \frac{\exp(2i\gamma_1 z)}{L(\omega_0)} \left| d_{12, //} \cos \phi - \frac{K}{\gamma_1} d_{12, z} \right|^2 \quad (4.28)$$

where $d_{12, //}$ and $d_{12, z}$ are defined above, and ϕ is the angle between the projection of \mathbf{D}_{12} on the interface and \mathbf{K} . When dealing with an isotropic distribution of dipoles, B_{12} should be averaged over the directions of \mathbf{D}_{12} , in the same way as in Sec. (4.5.1.1). We get the total Einstein coefficient for stimulated emission in mode \mathbf{K}

$$B_{21, total} = \frac{\pi |\mathbf{D}_{12}|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \frac{\exp(2i\gamma_1 z)}{L(\omega_0)} [1 - \epsilon(\omega_0)] \quad (4.29)$$

To describe the amplification of a surface plasmon beam by an amplifying medium, it is interesting to derive the ratio $r(\omega_0, z) = A_{21}^{(i)}(|\mathbf{D}_{12}|, \omega_0, z) / B_{21, total}(|\mathbf{D}_{12}|, \omega_0, z)$, where $A_{21}^{(i)}(|\mathbf{D}_{12}|, \omega_0, z) = \gamma_{spont}^0 \langle F_{P, cl}^{(i)}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) \rangle$ stands for the total spontaneous emission rate of the dipole close to the interface ((i) denotes interface), and

γ_{spont}^0 is given above. It can be computed with Eq. (4.24), using Green's tensor of a plane interface (this rate includes all the waves that can be emitted, not only surface plasmons). $\langle \cdot \rangle$ stands for average over the orientations \mathbf{d}_{12} of the dipole. $r(\omega_0, z)$ gives the threshold energy per unit surface $W_c(\omega_0)$ at which the stimulated emission rate equals the spontaneous one. It can be written as :

$$r(\omega_0, z) = r^0(\omega_0) \frac{\langle F_{P,cl}^{(i)}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) \rangle}{\exp(2i\gamma_1 z) [1 - \epsilon(\omega_0)]} L(\omega_0) \quad (4.30)$$

where $r^0(\omega_0) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$ is the ratio of the Einstein's coefficients in a vacuum. Fig. 4.4 shows $r(\omega, z)$ as a function of ω . From 0 to approximately 35 nm, the ratio decreases, mainly because the (total) spontaneous emission rate $A_{21}^{(i)}$ decreases. Above 35 nm, the ratio increases, as B_{21} decreases, because of the exponential decay of the surface plasmon field away from this interface. Note that for a given frequency ω , $r(\omega_0, z)$ rises at lower distances for ω closer to the surface plasmon asymptote frequency.

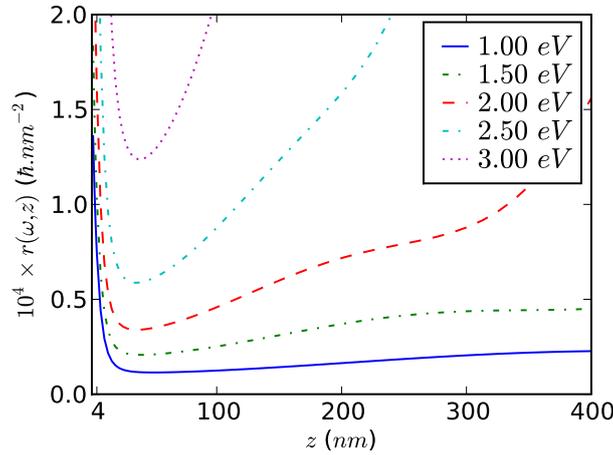


FIGURE 4.4 – (Color online). Ratio of Einstein's coefficients $r(\omega, z)$ for (total) spontaneous emission and stimulated emission of surface plasmons as a function of the distance to the interface, for several values of ω (see legend).

These results can be used to calculate the amount of power that undergoes stimulated emission of surface plasmons in a gain medium in close vicinity of the silver interface. We consider a parallel beam of surface plasmons, and suppose that they are excited via a grating or a prism by a He-Ne laser whose emission has a linewidth of about $\Delta\omega = 10$ MHz centered around $\omega_0 = 2$ eV, and that they carry $P = 1$ mW of power per μm . The spectral power at maximum, assuming a lorentzian profile, is given by $P_\omega(\omega_0) = P/\pi\Delta\omega$, and the associated spectral energy per unit surface is $W(\omega_0) = P_\omega(\omega_0)/v_g = \frac{P}{\pi\Delta\omega v_g}$ where $v_g = \frac{dK}{d\omega}$ is the group velocity of surface plasmons, close to c below the asymptote frequency. The spectral energy per unit surface at maximum of these surface plasmons is then $W(\omega_0) \approx \frac{P}{\pi\Delta\omega c} \approx 10^3 \hbar.\text{nm}^2$. This value is far above those of Fig. 4.4 : stimulated emission in a freely propagating surface plasmon beam is several orders of magnitude higher than spontaneous emission.

4.6 Conclusion

In this paper, we have extended previous work on quantization of surface plasmons by introducing a formalism that can use experimental values of the dielectric constant instead of using a specific model for the free electron gas. The key step is the derivation of the energy of a surface plasmon in a dispersive non-lossy medium. The standard quantization scheme in Coulomb's gauge yields the quantum form of the field. This scheme can be extended in a straightforward way to thin metallic films. To illustrate the formalism, we have derived the spontaneous emission rate of surface plasmons by a two-level system placed close to an interface supporting surface waves as well as Einstein's coefficients. This quantized theory of surface plasmon will be useful to analyse specific quantum effects such as antibunching, single plasmon interference, quantum coherence properties, but also to derive the interactions of surface waves with other quantum objects, as quantum wells for example.

Interaction électrons – SPhP dans les puits quantiques

Sommaire

5.1	Phonons dans les puits quantiques	92
5.1.1	Comparaison des SPhP d'un puits quantique et des SPP d'un film métallique	93
5.1.1.1	Cas simple d'une interface plane	93
5.1.1.2	Cas d'une double interface	94
5.1.2	SPhP d'un puits GaAs/Al _{0,33} Ga _{0,67} As et de la structure <i>Lapsus</i> complète	96
5.1.3	Phonons confinés	98
5.2	Interaction électrons-phonons	103
5.2.1	Paramètres clés de l'interaction électrons-SPhP	103
5.2.2	Hamiltonien d'interaction	104
5.2.3	Éléments de matrice	107
5.2.4	Durées de vie électroniques	108
5.2.5	Taux d'émission et d'absorption de chaque mode de SPhP	110
5.3	Couplage aux ondes progressives et simulations électroniques	114
5.3.1	Simulations de transport électronique par méthode de Monte Carlo	114
5.3.2	Absorption résonante	117

Les travaux développés dans ce chapitre s'inscrivent dans le cadre d'un projet financé par l'ANR et nommé *Lapsus* pour « laser assisté par phonons-polaritons de surface » (aujourd'hui, il ne s'agit plus d'un laser, mais d'une source de rayonnement). Ce projet, démarré en 2007, implique trois laboratoires, le Laboratoire Photonique et Nanostructures (LPN, Marcoussis), l'Institut d'Électronique Fondamentale (IEF, Orsay) et le laboratoire Charles Fabry. Au LPN, Fabrice Pardo et Jean-Luc Pelouard participent à la conception et à la fabrication des dispositifs, à l'IEF, Jérôme Saint-Martin et Philippe Dolfus participent à la simulation du comportement électrique des dispositifs, enfin au laboratoire Charles Fabry, Simon Vassant, François Marquier, Jean-Jacques Greffet et moi-même, participons à la modélisation, à la fabrication et à la caractérisation des dispositifs.

Ce projet est apparu comme une suite logique des travaux précédents de l'équipe de Jean-Jacques Greffet sur le rayonnement thermique spatialement cohérent (GREFFET et al. 2002 ; MARQUIER et al. 2004). La source thermique considérée dans ces études est constituée d'un cristal polaire (SiC) sur lequel est gravé un

réseau. Il a été démontré que la cohérence spatiale du rayonnement a pour origine l'existence de phonons-polaritons de surface (SPhP) à la surface de ce cristal polaire. Le réseau couple les SPhP, non radiatifs, au rayonnement. La grande longueur de propagation des SPhP permet de mettre en phase des points éloignés de la source conduisant à la cohérence spatiale du rayonnement. Dans l'expérience du rayonnement thermique spatialement cohérent, les SPhP sont excités thermiquement en chauffant le cristal polaire. Le but du projet *Lapsus* est d'exciter les SPhP électriquement, via un puits quantique situé à proximité de la surface du cristal polaire et du réseau, comme décrit sur la figure 5.1. Un courant d'électrons circule dans le puits quantique,

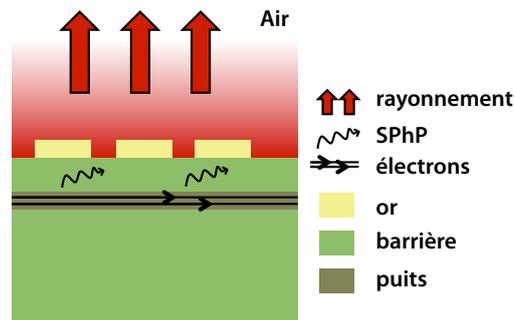


FIGURE 5.1 – Idée initiale du projet *Lapsus*. Des électrons circulent dans un puits quantique, situé à proximité d'une interface supportant des SPhP. Un recouvrement entre le puits et le champ des SPhP permet aux électrons d'émettre des SPhP (aux énergies considérées, par transitions inter- et intrasousbandes). Ces SPhP sont couplés aux ondes progressives au-dessus du puits via un réseau. On obtient ainsi une source de rayonnement, à la fréquence des SPhP de la structure, située dans le domaine térahertz pour le GaAs.

parallèlement aux interfaces du puits. Ce puits est peuplé par modulation de dopage, de sorte que des électrons sont présents dans la bande de conduction du puits, et permettent le transport d'un courant (WEISBUCH et VINTER 1991). Le confinement des électrons dans le puits conduit à une quantification de leur quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire aux interfaces, de sorte que dans le puits, les niveaux d'énergie pour les électrons sont eux-mêmes quantifiés et forment des sousbandes (WEISBUCH et VINTER 1991). Celles-ci sont représentées schématiquement plus loin sur la figure 5.12. Les électrons peuvent émettre des SPhP en passant d'une sousbande donnée à une sousbande inférieure.

La figure 5.2 représente une structure, effectivement fabriquée dans le cadre du projet *Lapsus*, étudiée par Simon Vassant (2011) dans le cadre de sa thèse. Cette figure illustre le fonctionnement d'une structure agissant en *modulateur* dans le domaine térahertz. Ceci constitue une première application de cette structure dans laquelle les électrons d'un puits quantique interagissent fortement avec des SPhP couplés au rayonnement via un réseau. Ce point sera abordé dans la partie 5.3.2.

Le but du projet *Lapsus* est donc de réaliser une structure dans laquelle les électrons d'un puits quantique interagissent fortement avec des SPhP, eux-mêmes couplés au rayonnement via un réseau. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser dans un premier temps aux différents SPhP de la structure (ils existent potentiellement à chaque interface), et nous verrons que certains de ces SPhP peuvent interagir fortement avec les

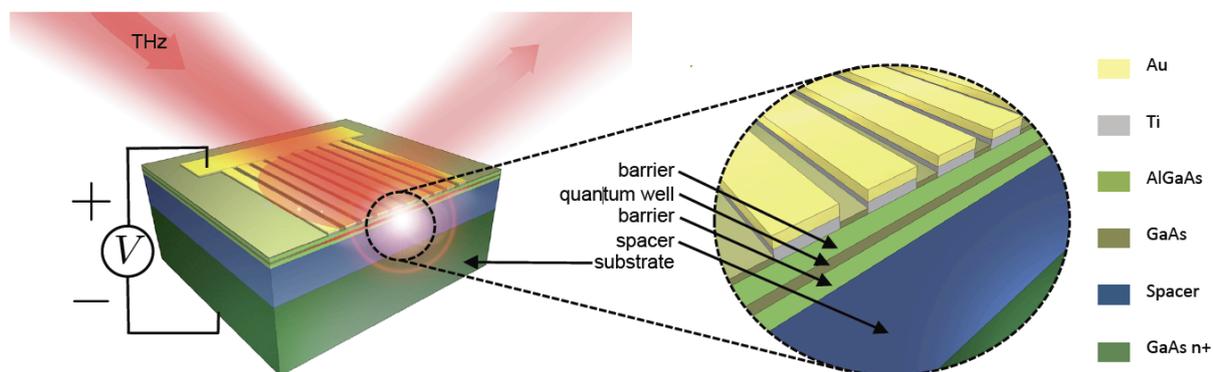


FIGURE 5.2 – Structure réalisée pour le projet *Lapsus*. La vue en perspective (gauche) et l’agrandissement (droite) indiquent la géométrie de la structure réalisée. Voir la figure 5.24 pour les dimensions des différents éléments. (Le faisceau incident sur la structure ainsi que la tension appliquée permettent de décrire le fonctionnement en tant que modulateur de la structure et sont donc secondaires ici). Image extraite de (VASSANT et al. 2011).

électrons du puits quantique. Nous verrons que ces SPhP ont des propriétés différentes des SPhP d’une interface simple cristal polaire/air, et présentent des analogies avec les plasmons-polaritons de surface (SPP) d’un film métallique. Nous modéliserons ensuite leur interaction avec les électrons d’un puits, en nous basant sur le formalisme quantique développé au chapitre 4. Nous discuterons du phénomène d’absorption résonante permis par ces modes, et ayant conduit à la réalisation d’un modulateur THz contrôlé électriquement, ainsi que des premiers calculs de simulation de transport électronique réalisés par l’équipe de l’IEF (voir ci-dessus).

5.1 Phonons dans les puits quantiques

Lorsque l'on modélise l'interaction électrons-phonons dans les puits quantiques, on décrit généralement les phonons comme des phonons de volume du matériau du puits (ROSENCHER et VINTER 2002). Lorsque l'on prend en compte les différentes interfaces de la structure, deux types de phonons, SPhP et phonons confinés, se substituent en fait aux phonons optiques longitudinaux de volume (« phonons LO »). Ces derniers constituent le principal canal de désexcitation des électrons dans les puits quantiques, avec des durées de vie de l'ordre de la picoseconde, voire du dixième de picoseconde. Ceci limite sévèrement la possibilité de réaliser des sources de rayonnement basées sur des puits quantiques aux longueurs d'onde des phonons. L'énergie transmise aux phonons est généralement considérée comme perdue (LIU et CAPASSO 2000 ; ROSENCHER et VINTER 2002). En s'appuyant sur un modèle plus précis de ces phonons, le projet *Lapsus* a pour but de tirer parti de l'énergie transmise à ces phonons, en couplant certains d'entre-eux au rayonnement via un réseau.

Au cours des années 1980 et 1990, une littérature abondante a discuté de ce problème de modélisation des phonons dans les puits quantiques. Le but poursuivi par ces auteurs était notamment d'augmenter les durées de vie des électrons associées à leur interaction avec les phonons (qui constituent le principal canal de pertes dans les puits quantiques) afin d'exploiter les transitions intersousbandes pour obtenir un gain optique et réaliser un laser aux fréquences de ces dernières, ce qui sera fait par FAIST et al. (1994) avec des structures à « cascades quantiques ». Le principal point à l'origine de controverses concerne les relations de passage des différentes grandeurs, champ électrique et déplacement ioniques notamment, au niveau des interfaces du puits. En effet, champ électrique et déplacements ioniques sont liés et se déduisent a priori l'un de l'autre – dans le cadre d'un modèle local, le champ électrique en un point \mathbf{r} , $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, et le déplacement ionique en ce point, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, sont liés par une formule de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = \alpha(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. Or, les conditions mécaniques imposent des relations de continuité sur $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, et les équations de Maxwell en imposent sur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, et ces relations peuvent être incompatibles.

Ainsi, plusieurs catégories de modèles ont été développés. Le modèle dit « hydrodynamique » tient compte des relations de continuité mécaniques et fait l'impasse sur celles du champ électromagnétique (RIDLEY et BABIKER 1991). Ce modèle prédit correctement les symétries mises en évidence lors d'observations par mesures Raman de ces phonons – ces mesures, au cours desquelles le vecteur d'onde n'est pas conservé constituent, avec les mesures de durées de vie électroniques, les points d'appui expérimentaux de ces modèles théoriques. Le modèle dit du continuum diélectrique (DCM, pour *dielectric continuum model*), s'appuie sur les équations de Maxwell et sur une modélisation du comportement des matériaux par leur constante diélectrique, supposée locale (DEREUX et al. 1988 ; MORI et ANDO 1989). Les symétries des modes prévus par ce modèle sont contradictoires avec celles prédites par le modèle hydrodynamique. Au cours des années 1990, deux modèles sont venus résoudre cette controverse. Le premier est le modèle « hybride » de Ridley (RIDLEY 1993 ; RIDLEY et al. 1994 ; RIDLEY 1997), où des phonons LO et TO (obtenus par un modèle où déplacements ioniques et champ électrique sont liés par une relation *non locale*) ainsi que des phonons de surface sont superposés afin de satisfaire aux relations de continuité mécaniques et électromagnétiques. Toutefois, ce modèle ne tient pas compte de la réponse non locale des matériaux lors de l'écriture de la composante normale du déplacement et

de sa continuité aux interfaces, mélangeant à la fois des modèles locaux et non locaux. Un second modèle, plus élégant, s'appuie sur des constantes diélectriques *non locales*, et montre que leurs relations de continuité électromagnétiques et mécaniques peuvent être satisfaites en même temps sans problème (PEREZ-ALVAREZ et al. 1993 ; COMAS et al. 1997).

Dans le cadre de cette thèse, nous nous appuyerons sur le modèle du continuum diélectrique (DCM). Bien qu'il ne tienne pas compte des relations de continuité mécaniques, ce modèle présente l'avantage de permettre de s'appuyer sur des outils développés pour les équations de Maxwell. De plus, nous nous intéresserons à des phonons de faible vecteur d'onde (proches de $\frac{\omega}{c}$, quelques μm^{-1} au plus) donc de grande longueur d'onde auxquelles les modèles locaux s'appliquent, et l'accord théorie-expérience obtenu par VASSANT (2011) nous ont conforté dans cette voie. Il faut ajouter à cela que ce modèle permet de tenir compte très facilement des pertes des matériaux, ce qui à notre connaissance n'a été fait dans le cadre d'aucun des modèles abordés ci-dessus. Nous verrons que certains de ces modes sont très amortis, avec des facteurs de qualité compris entre 20 et 50, ce qui soulève des doutes sur la validité de l'approximation sans pertes effectuée pour décrire l'interaction de ces modes avec les électrons. (Toutefois, les modes les plus intéressants pour nous auront des facteurs de qualité supérieurs à 100.)

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux différents modes de type phonons présents dans une structure à puits quantique. Nous discuterons tout d'abord des SPhP, dont on sait qu'ils présentent des analogies avec les SPP existant au niveau d'interfaces métalliques. Nous verrons que certains de ces modes ont un champ important dans le puits quantique, et pourront donc interagir fortement avec ses électrons.

Nous expliquerons également ce que sont les « phonons confinés », modes optiques qui ont la particularité d'avoir un champ entièrement compris dans une unique couche de cristal polaire, et d'exister uniquement à la fréquence des phonons LO de cette couche. Ces phonons confinés constitueront le principal canal de désexcitation « parasite » pour les électrons du puits quantique.

5.1.1 Comparaison des SPhP d'un puits quantique et des SPP d'un film métallique

5.1.1.1 Cas simple d'une interface plane

Revenons tout d'abord au cas le plus simple d'une interface plane séparant un métal ou un cristal polaire du vide. Cette interface porte des ondes de surface (SPhP ou SPP). En tant que modes du champ électromagnétique, les SPhP présentent des analogies avec les SPP. Dans les deux cas, il s'agit d'ondes électromagnétiques confinées à proximité d'une ou plusieurs interfaces planes, dont certaines séparent des milieux de constantes diélectriques opposées. Ces deux types d'ondes nécessitent ainsi au moins un matériau dont la constante diélectrique peut être négative : métal pour les SPP, cristal polaire pour les SPhP. Les cristaux polaires sont caractérisés par les pulsations de leurs phonons optiques de volume, longitudinaux (ω_{LO}) ou transverses (ω_{TO}), entre lesquelles leur constante diélectrique est négative et des SPhP peuvent exister. Ces pulsations se situent généralement dans l'infrarouge lointain ou le domaine térahertz.

Comme pour les SPP, le module du vecteur d'onde des SPhP, dans le plan de l'interface, prend des valeurs supérieures à $\frac{\omega}{c}$ (« hors du cône de lumière »), inaccessibles pour les ondes progressives, et l'on ne peut les

exciter en éclairant simplement une surface parfaitement plane. Un moyen courant d'exciter les ondes de surface est d'utiliser un réseau. Dans ce cas, une onde progressive incidente excite par diffraction l'onde de surface. Cela est possible avec les SPP (WOOD 1904 ; HUTLEY et MAYSTRE 1976) et les SPhP (WATANABE et al. 1989 ; VASSANT et al. 2010).

5.1.1.2 Cas d'une double interface

De même que pour l'interface plane, on peut comparer les SPhP d'un film mince constitué d'un cristal polaire et les SPP d'un film mince métallique, abondamment étudiés dans la littérature (SARID 1981 ; BERINI 2000 ; DE LEON et BERINI 2010).

En ce qui concerne les SPhP d'un film constitué d'un cristal polaire, on retrouve également une analogie avec les SPP. La figure 5.3 (gauche) montre la relation de dispersion des SPhP d'un film de GaAs, d'épais-

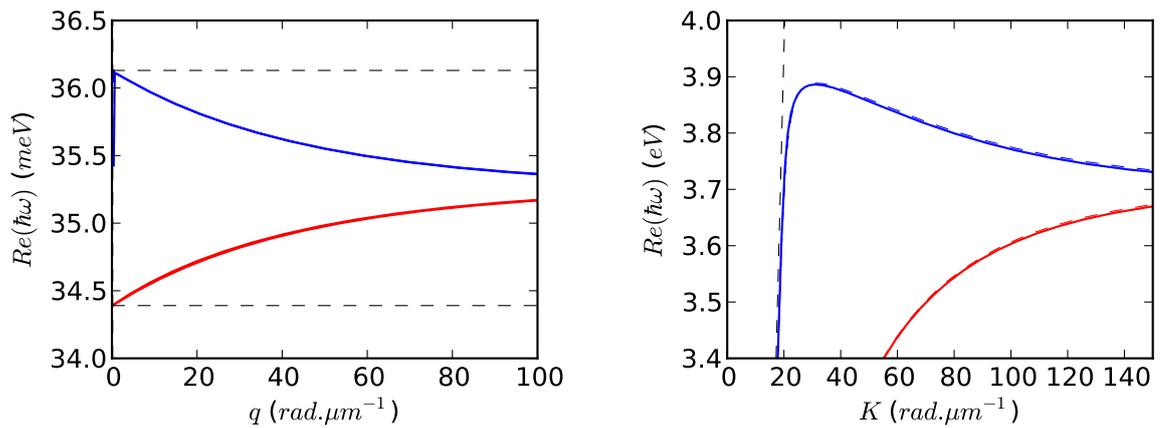


FIGURE 5.3 – Relation de dispersion des SPhP d'un puits GaAs/ $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ et d'un des SPP d'un film d'argent entourés d'air. Épaisseur du film de GaAs : 21,6 nm [constantes diélectriques de GaAs et $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$: (KIM et SPITZER 1979)]. Épaisseur du film d'argent : 20 nm [constante diélectrique pour l'argent : (ARCHAMBAULT et al. 2010)]. Bleu : modes de champ antisymétrique (« LRSPP »). Rouge : modes de champ symétrique (« SRSPP »). Tirets noirs : à gauche, intervalle de fréquences pour lequel les constantes diélectriques de GaAs et $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ sont opposées (ω_{LO} du caractère GaAs de $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$, et de GaAs), à droite, cône de lumière $K = \frac{\omega}{c}$. Les modes déterminés ici ont une pulsation complexe. Un modèle analytique de constante diélectrique est utilisé afin d'évaluer ces dernières en des pulsations ω complexes. Le modèle de constante diélectrique de l'argent utilisé ici ne s'applique plus au delà de 3,75 eV. Les relations de dispersion et les modes correspondant au delà de 3,75 eV doivent donc être vus comme propres au modèle utilisé et ne s'appliquent que de manière limitée à un film d'argent.

seur 20 nm, inclus dans de l' $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$, et pour comparaison, la figure 5.3 (droite) montre la relation de dispersion des SPP d'un film d'argent entouré d'air, d'épaisseur 20 nm également. Dans les deux cas, cette relation de dispersion est constituée de branches correspondant à des modes dont le champ est symétrique (branche inférieure) ou antisymétrique (branche supérieure). Les notions de symétrie et antisymétrie

du champ électrique sont rappelées sur la figure 5.4. Pour les SPP, on parle habituellement de SPP *short range*

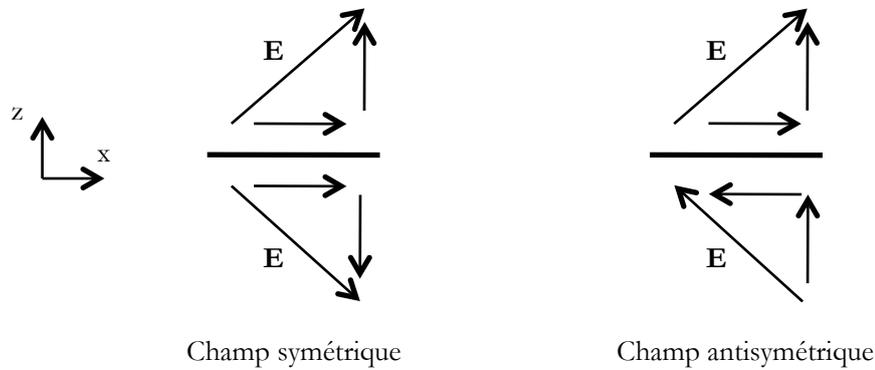


FIGURE 5.4 – Représentation des symétries des SPhP d'un puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As. Gauche : champ électrique \mathbf{E} symétrique (composante E_x paire, composante E_z impaire). Droite : champ électrique \mathbf{E} antisymétrique (composante E_x impaire, composante E_z paire). Trait épais : plan de symétrie.

(SRSPP) et *long range* (LRSPP), pour les modes symétriques et antisymétriques respectivement.

Dans le cas courant où le métal utilisé est de l'or ou de l'argent, les épaisseurs minimales technologiquement atteignables sont de l'ordre de 10 à 20 nm, soit $\lambda_p/20$ environ, où λ_p est la longueur d'onde correspondant à la pulsation plasma ω_p , caractéristique du métal et vérifiant $\epsilon(\omega_p) = 0$ (uniquement $Re[\epsilon'(\omega_p)] \approx 0$ en présence de pertes dans le métal).

L'épaisseur typique des puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As utilisés dans nos structures est également typiquement de 20 nm. Toutefois, la longueur d'onde correspondant à l'asymptote des SPhP est ici proche de 35 μm . Ainsi, l'épaisseur du puits est ici d'environ $\lambda_{LO}/1750$, où λ_{LO} est la longueur d'onde correspondant à la pulsation des phonons LO du cristal polaire, pour laquelle on a $\epsilon(\omega_{LO}) \approx 0$ (ω_{LO} est donc analogue à ω_p pour les métaux qui vérifie également $\epsilon(\omega_p) \approx 0$). Cette valeur de $\lambda/1750$ est à comparer à $\lambda/10 - 20$ pour les SPP d'un film d'argent de 20 nm, voir ci-dessus. On se situe donc dans une configuration beaucoup plus sub-longueur d'onde que lorsqu'on étudie les SPP d'un film métallique. Les deux branches de la relation de dispersion se repoussent ainsi beaucoup plus l'une par rapport à l'autre qu'usuellement avec des SPP. La branche supérieure de la relation de dispersion des SPhP s'approche à certains vecteurs d'onde de ω_{LO} (voir figure 5.3).

Pour le champ des SPhP de cette branche, la composante E_z du champ électrique est quasi-uniforme sur l'épaisseur du film et discontinue à ses interfaces. Aux faibles valeurs K du vecteur d'onde, la branche supérieure des SPhP du puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As pour laquelle le GaAs est de constante diélectrique négative, se rapproche de la pulsation ω_{LO} pour laquelle la constante diélectrique du GaAs est nulle. Ceci a une conséquence spectaculaire en ce qui concerne la structure spatiale du champ électrique. En effet, la continuité de $D_z = \epsilon E_z$ avec $|\epsilon|$ faible dans le puits conduit à un champ E_z dans le puits beaucoup plus grand qu'à l'extérieur. Sur la figure 5.5, on a représenté la répartition en énergie des branches supérieures des SPhP et

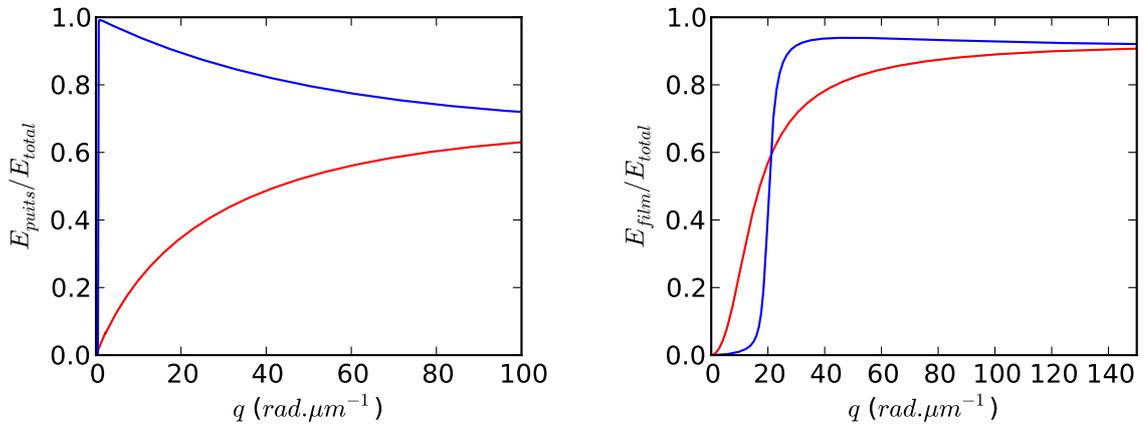


FIGURE 5.5 – Fraction de l'énergie dans le puits ou le film des SPhP d'un puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As et des SPP d'un film d'argent. La figure de gauche (droite) correspond au puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As (film d'argent). L'ordonnée correspond à la fraction d'énergie dans le puits ou dans le film d'argent. Les courbes bleues (rouges) correspondent aux modes antisymétriques (symétriques), comme sur la figure 5.3. La répartition de l'énergie dans les différentes couches est déterminée à l'aide des résultats de l'annexe B.4. On remarque sur la figure de gauche qu'à certains vecteurs d'onde, l'énergie du SPhP antisymétrique est quasi-entièrement dans le puits.

SPP en fonction de leur vecteur d'onde K . On remarque qu'aux faibles K , les SPhP ont un comportement nettement différent des SPP. Pour les SPhP, l'énergie du mode est quasi-entièrement dans le puits, ce qui contraste avec les SPP, dont le champ se situe en grande partie hors du film métallique dans la même gamme de vecteur d'onde q (ce qui minimise leurs pertes, d'où la dénomination de *long range*). Notons que malgré ce confinement, les pertes de ces SPhP n'augmentent pas de manière démesurée, car la partie imaginaire de la constante diélectrique du GaAs reste faible aux pulsations correspondantes, contrairement au cas du métal.

5.1.2 SPhP d'un puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As et de la structure *Lapsus* complète

Le puits simple représenté sur la figure 5.6 est constitué de deux matériaux : GaAs et Al_{0,33}Ga_{0,67}As. Ces deux matériaux sont des cristaux polaires et ont des résonances allant de 7,9 à 11,4 THz (de 32,8 à 47,1 meV). Leurs constantes diélectriques sont tracées sur la figure 5.7. On remarque sur cette figure trois intervalles de fréquences pour lesquelles les signes des constantes diélectriques du GaAs et du Al_{0,33}Ga_{0,67}As sont opposés : des ondes de surface existeront donc dans ces intervalles de fréquences. L'intervalle de fréquences les plus faibles correspond à la résonance GaAs du Al_{0,33}Ga_{0,67}As (« A » sur la figure 5.7, la constante diélectrique du Al_{0,33}Ga_{0,67}As est négative, à cause de la résonance due à son caractère GaAs), l'intervalle central à la résonance du GaAs (« B » sur la figure 5.7, la constante diélectrique du GaAs est négative), et l'intervalle supérieur à la résonance AlAs du Al_{0,33}Ga_{0,67}As (« C » sur la figure 5.7). Nous nous intéresserons principalement aux SPhP de l'intervalle B – ce sont ces SPhP qui interagiront le plus avec les électrons, comme nous le verrons plus loin, dans la section 5.2. On a comparé ces SPhP aux SPP d'un film métallique dans la partie 5.1.1.



FIGURE 5.6 – Puits GaAs/AlGaAs.

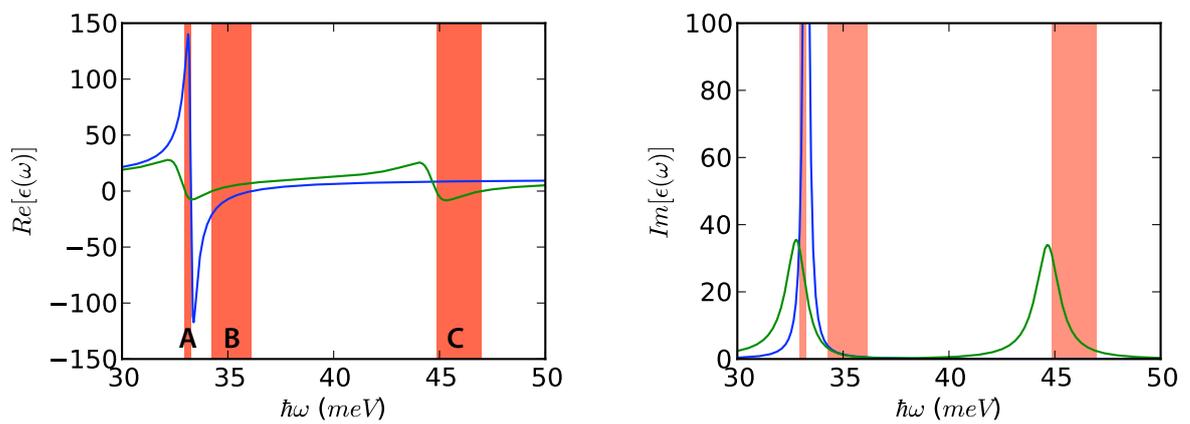


FIGURE 5.7 – Constantes diélectriques de GaAs et $Al_{0,33}Ga_{0,67}As$. Les intervalles de fréquence A, B et C, correspondent à ceux pour lesquels les parties réelles des constantes diélectriques de GaAs et $Al_{0,33}Ga_{0,67}As$ sont opposées et auxquelles des SPhP peuvent exister.

Les relations de dispersion de ces ondes de surface sont tracées sur la figure 5.8. Chaque intervalle de

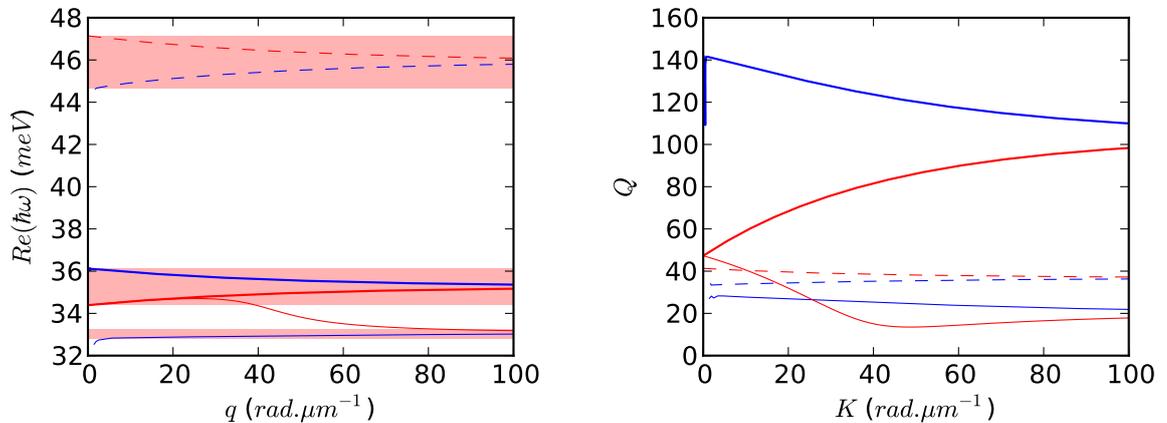


FIGURE 5.8 – Relation de dispersion (gauche) et facteurs de qualité (droite) des SPhP d'un puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As. Les intervalles de fréquence de la figure 5.7 sont reproduits sur la figure de gauche. On remarque que certaines parties des relations de dispersion ne sont pas incluses dans les intervalles de fréquences attendus, voire ont un comportement surprenant en passant d'un intervalle à l'autre (branche en trait fin rouge) – les pulsations correspondantes ont une partie imaginaire importante, et les constantes diélectriques correspondantes s'éloignent de la figure 5.7. On remarque que la branche en trait bleu épais, dont nous avons discuté dans la partie 5.1.1.2, a des facteurs de qualité supérieurs à 100.

fréquence est à l'origine de deux branches de la relation de dispersion : une correspond aux modes symétriques (traits rouges sur la figure), l'autre aux modes antisymétriques (traits bleus). On a tracé le champ de certains de ces modes sur les figures 5.9, où l'on peut constater qu'à des faibles vecteurs d'onde, le champ du mode antisymétrique « B » est quasi-entièrement dans le puits.

Dans l'annexe H.1, on traite le cas d'une structure plus proche (figure H.1) de celle représentée sur la figure 5.2. Les relations de dispersion obtenues (figure H.2) ont notamment des branches proches de celles obtenues ici pour un puits simple, et présentent des symétries proches, et les branches supplémentaires interagissent peu avec les électrons.

5.1.3 Phonons confinés

Nous avons rappelé en introduction que l'interaction électrons-phonons dans les puits quantiques s'appuie en général sur une modélisation approximative des phonons, où l'on suppose qu'il s'agit des phonons de volume du matériau du puits. Parmi ces phonons de volume, figurent les phonons optiques longitudinaux (« phonons LO »), les seuls possédant un champ électrique significatif. Une modélisation plus fine des modes électromagnétiques de la structure, prenant en compte ses différentes interfaces, montre qu'il existe deux types de phonons possédant un champ électrique : les SPhP du puits que nous avons vus dans les parties précédentes, ainsi que les phonons confinés, que nous allons étudier dans cette partie, dont nous verrons qu'ils consistent

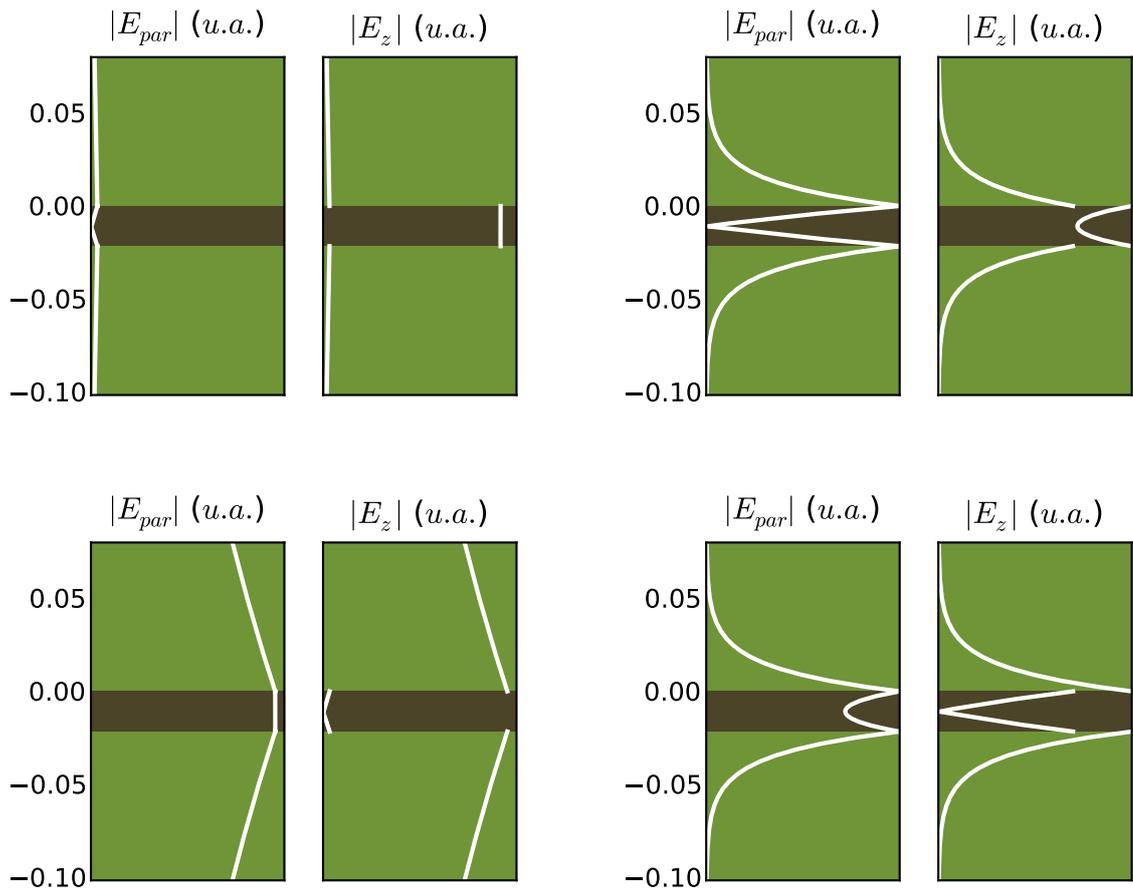


FIGURE 5.9 – Champ électrique des SPhP d'un puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As correspondant aux branches supérieure (haut) et inférieure (bas) des branches « B » (voir figures 5.7 et H.2), à des vecteurs d'onde $K = 3 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ (gauche) et $80 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ (droite). L'échelle des champs électriques est arbitraire mais les deux composantes sont normalisées de la même manière (les valeurs relatives de $|E_{//}|$ et $|E_z|$ peuvent être comparées entre elles sur une même figure).

en une superposition de phonons LO dans une couche de cristal polaire dont le champ est parfaitement nul à l'extérieur de cette couche (NASH 1992).

Les phonons confinés ont la particularité de n'exister qu'à la pulsation ω à laquelle $\epsilon(\omega) = 0$. Leur champ est entièrement confiné dans une couche de la structure dont la constante diélectrique vérifie cette condition.

Nous allons nous intéresser ici aux phonons confinés de la couche de GaAs qui constitue le puits, et négliger les phonons confinés des barrières d' $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$, les fonctions d'onde des électrons prenant des valeurs relativement faibles dans les barrières. On s'intéresse en effet principalement aux modes susceptibles d'interagir avec des électrons du puits.

On peut déterminer le champ de ces modes simplement. On part des équations de Maxwell sans sources, dans un milieu non magnétique,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1b)$$

$$\nabla \cdot \epsilon(z, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -i\frac{\omega}{c^2}\epsilon(z, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (5.1d)$$

et l'on ne s'intéresse qu'à la couche pour laquelle $\epsilon(\omega) = 0$. Il vient directement

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (5.2c)$$

(l'équation 5.1c est alors tout le temps satisfaite). Parmi les solutions de ces équations, on s'intéresse à celles vérifiant $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, qui ne possèdent donc qu'un champ électrique. Les solutions de $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}), \quad (5.3)$$

où $\phi(\mathbf{r})$ est une fonction scalaire, qui doit prendre en compte les relations de continuité aux interfaces de la couche considérée. On cherche des solutions pour lesquelles le champ est nul hors de celle-ci, ce qui présente l'avantage de ne pas avoir à s'intéresser à la géométrie à l'extérieur de la couche considérée – le champ y est simplement nul. Cette condition, ainsi que les précédentes, n'empêcheront pas l'existence d'un grand nombre de solutions. Les conditions aux limites nous donnent aux interfaces :

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \epsilon(z, \omega)E_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.4)$$

La seconde condition est automatiquement satisfaite car $\epsilon(z, \omega) = 0$. La première équation impose

$$\nabla_{//}\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

aux interfaces de la couche. On utilise alors l'invariance par translation dans les directions x et y pour nous intéresser à la transformée de Fourier par rapport à x et y de $\phi(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{K}, z)$ vérifiant $\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{K}, z)$. La condition aux limites (5.5) peut alors se mettre sous la forme $i\mathbf{K}\phi(\mathbf{K}, z) = \mathbf{0}$, soit $\phi(\mathbf{K}, z) = 0$ aux limites de la couche. On peut alors développer $\phi(\mathbf{K}, z)$ sous forme de série de Fourier, $\phi(\mathbf{K}, z) = \sum_{n>0} \phi_n(\mathbf{K}) \sin(n\pi \frac{z}{a})$, où a est l'épaisseur de la couche considérée comprise entre $z = 0$ et $z = a$. On a finalement

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n>0} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \sin(n\pi \frac{z}{a}) \phi_n(\mathbf{K}), \quad (5.6)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n>0} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\frac{n\pi}{a}z} - e^{-i\frac{n\pi}{a}z}}{2i} \phi_n(\mathbf{K}), \quad (5.7)$$

qui montre que les phonons confinés sont une superposition de deux phonons LO de vecteurs d'onde $\mathbf{K} + \frac{n\pi}{a}\mathbf{z}$ et $\mathbf{K} - \frac{n\pi}{a}\mathbf{z}$, et d'extension limitée à une couche de la structure (voir figure 5.10). Leur relation de dispersion

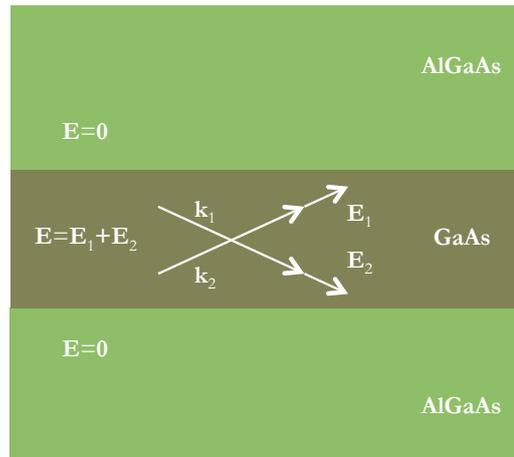


FIGURE 5.10 – Représentation des phonons confinés sous forme de superposition de deux phonons LO.

est représentée sur la figure 5.11 pour une couche de GaAs. Celle-ci est plate. En effet, la pulsation de phonons confinés est constante (et vaut ω_{LO}) et tous les vecteurs d'onde leur sont accessibles. Dans l'expression (5.6), n représente l'ordre des phonons confinés – un phonon confiné d'ordre n a un potentiel présentant n ventres.

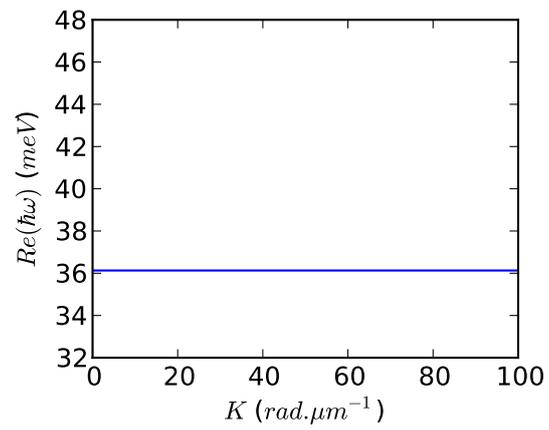


FIGURE 5.11 – Relation de dispersion des phonons confinés d'une couche de GaAs.

5.2 Interaction électrons-phonons

Dans cette section, nous allons étudier l'interaction des électrons avec les SPhP, ainsi que les taux d'émission et d'absorption de chacune des branches de SPhP par une population d'électrons dans la bande de conduction du puits quantique (transitions inter- ou intrasousbandes). L'objectif initial du calcul de ces taux d'interaction est leur utilisation dans un code de calcul Monte Carlo permettant de simuler le fonctionnement du dispositif du projet *Lapsus*. Ces taux indiquent également l'intensité de l'interaction entre électrons et SPhP. Nous verrons tout d'abord quels sont les paramètres clés favorisant l'interaction entre électrons et SPhP. Nous déterminerons ensuite une expression de ces taux en effectuant quelques approximations. Nous tracerons ces différents taux pour un puits simple et pour la structure *Lapsus* afin de mettre en évidence quels SPhP interagissent le plus avec les électrons, et comparer les durées de vie qui leur sont associées avec celles des phonons confinés. Enfin, nous déterminerons les taux d'émission et d'absorption de chaque mode de SPhP avec une population donnée d'électrons, et nous étudierons numériquement le cas d'une population d'électrons thermalisée.

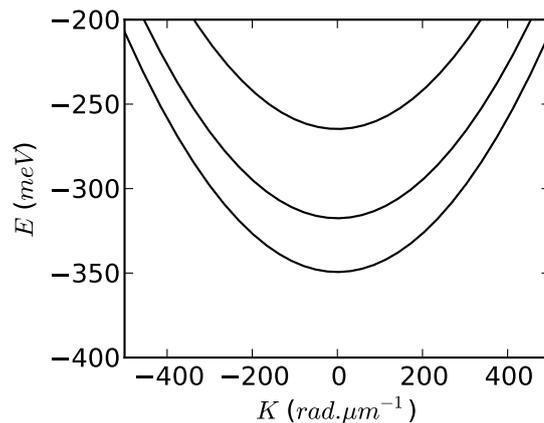


FIGURE 5.12 – Relation de dispersion des électrons dans la bande de conduction d'un puits quantique. Les électrons se répartissent dans des sousbandes (on en a représenté 3 ici). On a considéré un puits quantique rectangulaire de largeur 20 nm, dont le puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As du dispositif du projet *Lapsus* se rapproche.

5.2.1 Paramètres clés de l'interaction électrons-SPhP

Les énergies des SPhP sont pour les matériaux qui nous intéressent de l'ordre de quelques dizaines de meV. À ces énergies, les électrons interagissent avec ces SPhP via des transitions inter- et intrasousbandes. Dans un second temps, le réseau couple ces phonons de surface au rayonnement. On obtient ainsi une structure commandée électriquement capable d'émettre un rayonnement à la fréquence de ces SPhP.

Toutefois, plusieurs problèmes doivent être surmontés pour que cette structure fonctionne de cette manière. Il faut tout d'abord que les fonctions d'onde des électrons et le champ des SPhP émis se recouvrent.

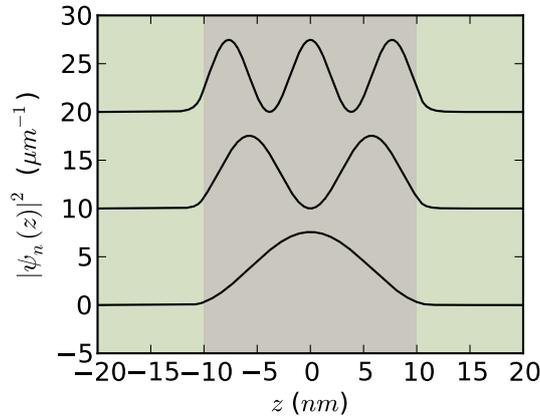


FIGURE 5.13 – Module au carré des fonctions enveloppes des électrons dans les premières sousbandes d'un puits rectangulaire GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As. L'épaisseur du puits est de 20 nm. On suppose le puits rectangulaire, et l'influence du potentiel créé par la charge des électrons sur leurs fonctions enveloppes (qui dépend de la densité – variable – d'électrons dans le puits) a été ignorée.

Pour mieux fixer les idées, nous avons représenté sur la figure 5.13 les fonctions enveloppes des trois premières sousbandes d'un puits rectangulaire, proche de celui de la structure de la figure 5.1. La figure 5.9 montre que certains SPhP (pour certains \mathbf{K}) ont un champ important dans le puits et peuvent donc interagir avec les électrons. Nous donnerons dans la partie 5.2.3 une expression des intégrales de recouvrement traduisant ce recouvrement entre les fonctions enveloppes des électrons et le champ des SPhP.

La structure considérée étant invariante par translation dans les directions parallèles aux interfaces, le moment dans ces directions parallèles doit être conservé. La conservation de l'énergie et du moment parallèle est représentée graphiquement sur la relation de dispersion des électrons sur la figure 5.14. Les composantes du vecteur joignant les états de départ et d'arrivée de l'électron (vecteur d'onde horizontalement et énergie verticalement) doivent correspondre à un point de la relation de dispersion des SPhP (figure H.2).

Comme on le voit sur la figure 5.14, l'ordre de grandeur des vecteurs d'onde électroniques est d'environ $100 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ et ces derniers peuvent dépasser les $1000 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$. Cela correspond à de grands vecteurs d'onde pour les SPhP, au sens où ces valeurs sont très éloignées du cône de lumière ($\frac{\omega}{c} < 1 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ aux fréquences considérées). Les SPhP émis auront un vecteur d'onde parallèle approximativement compris entre 0 et environ $1000 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$. Le réseau à proximité du puits ne permet de coupler efficacement au rayonnement que *quelques* intervalles, séparés de $2\pi/a$, où a est la période du réseau, figure 5.15. Ainsi, seule une très faible fraction des SPhP émis sera susceptible de rayonner, ce qui pénalise l'efficacité de la structure.

5.2.2 Hamiltonien d'interaction

Avant d'utiliser la règle d'or de Fermi afin de calculer des taux d'interaction entre électrons et SPhP, il faut exprimer l'élément de matrice du hamiltonien d'interaction (équation 5.10) entre deux états du système

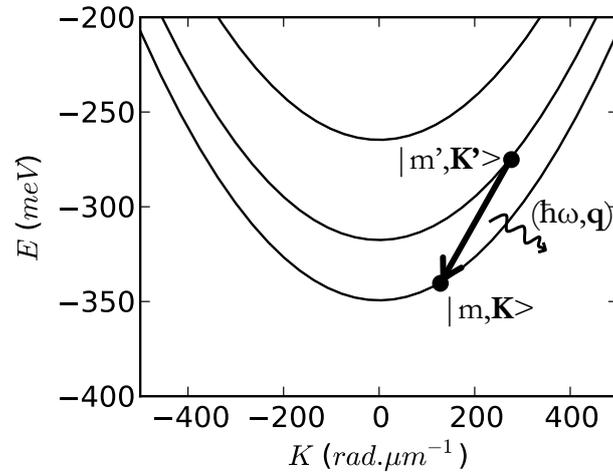


FIGURE 5.14 – Conservation du moment parallèle et de l'énergie lors de l'interaction électrons-SPhP. Moment parallèle en ordonnée, énergie en abscisse. Le vecteur d'onde \mathbf{K} a deux composantes, une seule est représentée ici (en abscisse). On a représenté le passage de l'électron d'un état $|m', \mathbf{K}'\rangle$ à un état $|m, \mathbf{K}\rangle$ par émission d'un SPhP. L'énergie ($\hbar\omega$) et le vecteur d'onde (\mathbf{q}) du SPhP correspondent aux composantes du vecteur joignant $|m', \mathbf{K}'\rangle$ à $|m, \mathbf{K}\rangle$. ($\hbar\omega, \mathbf{q}$) doit correspondre à un point de la relation de dispersion des SPhP (figure H.2) – le processus d'émission n'est pas possible dans le cas contraire. L'absorption correspond au processus inverse.

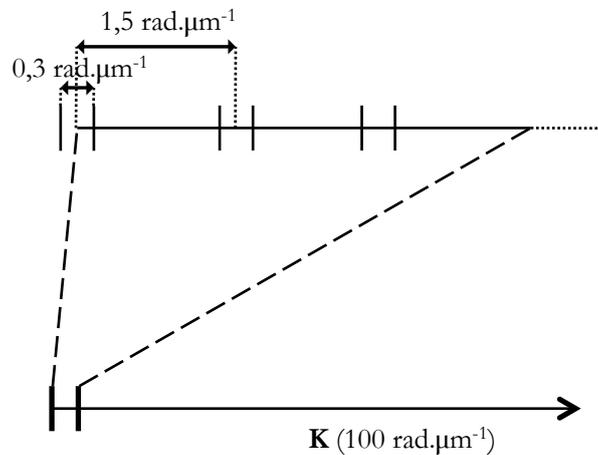


FIGURE 5.15 – Comparaison des intervalles de vecteurs d'onde émis (ordres de grandeur jusqu'à $100 \text{ rad.}\mu\text{m}^{-1}$, vecteur du bas) et couplés au rayonnement par le réseau (intervalles de largeur $2\frac{\omega}{c} \approx 0,3 \mu\text{m}^{-1}$, séparés de $\frac{2\pi}{a} \approx 1,5 \text{ rad.}\mu\text{m}^{-1}$, où a est la période du réseau en or, voir figure 5.2 – symbolisés par des traits fins verticaux, axe en haut). Seuls les premiers intervalles (premiers ordres diffractés par le réseau) sont couplés efficacement au rayonnement.

{électrons + SPhP}. Dans cette partie, nous allons détailler les raisons conduisant au choix de l'hamiltonien d'interaction \mathbf{A}_p entre les électrons de la bande de conduction du puits quantique et les SPhP. L'expression « hamiltonien d'interaction » désigne le terme perturbatif du hamiltonien du système {électrons + SPhP} *en représentation d'interaction* (représentation de Schrödinger pour les électrons et représentation de Heisenberg pour les SPhP).

Les SPhP sont issus d'un couplage entre des photons et des phonons. Aux grands vecteurs d'onde (grands devant $\frac{\omega}{c}$), le caractère « phonon » prédomine : le champ électrique des SPhP vérifie approximativement $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ et dérive donc d'un potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r})$ dont on déduit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ avec $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$. Un hamiltonien d'interaction possible serait alors le hamiltonien $e\phi$, utilisé pour l'interaction électrons-phonons LO (ROSENCHER et VINTER 2002),

$$W_{e\phi} = e\phi(\hat{\mathbf{r}}), \quad (5.8)$$

qui fait intervenir la charge e des électrons et le potentiel scalaire dont dérive le champ des phonons considérés, dont l'argument est l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}$.

À des vecteurs d'onde plus faibles, le caractère « photon » est plus important. On ne peut négliger le champ magnétique des SPhP et leur champ électrique ne dérive plus d'un potentiel scalaire. On pourrait alors être tenté d'utiliser l'hamiltonien $\mathbf{E}\mathbf{D}$, couramment employé pour décrire l'interaction entre la lumière (les photons) et un système à deux niveaux (LOUDON 2000 ; ROSENCHER et VINTER 2002),

$$W_{ED} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \hat{\mathbf{D}}, \quad (5.9)$$

où $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t)$ désigne l'opérateur champ électrique à la position \mathbf{r}_0 du système à deux niveaux (il ne s'agit plus de l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}$) et $\hat{\mathbf{D}} = e\hat{\mathbf{r}}$ désigne l'opérateur moment dipolaire du système à deux niveaux avec e la charge de ce système. Toutefois, cet hamiltonien est une approximation du hamiltonien \mathbf{A}_p , plus général, et cette approximation n'est valide que si le champ électromagnétique considéré varie peu à l'échelle du système à deux niveaux (LOUDON 2000), ce qui n'est pas le cas ici à cause des fortes discontinuités du champ aux interfaces du puits et également dans le puits pour des vecteurs d'onde de module $K \gtrsim \frac{1}{a}$ où a est l'épaisseur du puits.

Nous utiliserons donc par la suite l'hamiltonien \mathbf{A}_p pour décrire l'interaction entre les SPhP et les électrons,

$$W_{A_p} = \frac{e}{m} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.10)$$

où $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ désigne l'opérateur potentiel-vecteur du champ considéré (ici celui des SPhP) évalué en $\hat{\mathbf{r}}$, l'opérateur position des électrons. $\hat{\mathbf{p}}$ désigne l'opérateur impulsion des électrons, e leur charge et m leur masse. Comme cela est montré par BASTARD (1988), si l'on retire des états électroniques leurs parties périodiques dues aux réseaux cristallins sous-jacents¹, il faut substituer à la masse m figurant dans W_{A_p} la masse *effective*

1. Dans le cadre de l'approximation de la fonction enveloppe, un état électronique $|\psi\rangle$ a une expression de la forme $\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = f(\mathbf{r})u(\mathbf{r})$ où $u(\mathbf{r})$ est une fonction présentant les mêmes propriétés de symétrie et de périodicité que le matériau sous-jacent au point \mathbf{r} . Ci-dessus, les opérateurs considérés ne s'appliquent qu'à la partie « enveloppe » $f(\mathbf{r})$ de l'état $|\psi\rangle$, et les états électroniques ne contiennent que cette dernière et sont donnés par l'expression (H.2).

m^* des électrons dans le puits. L'opérateur potentiel-vecteur des SPhP se déduit de l'équation (B.34b). En adaptant les notations à celles de ce chapitre, on obtient

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_p(q)S}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}^{(p)}(z) \hat{a}_p(\mathbf{q}) e^{-i\omega_p(q)t} + h.c. \quad (5.11)$$

\mathbf{q} désigne le vecteur d'onde des SPhP, p est un indice parcourant les branches de SPhP, et $\omega_p(q)$ est la pulsation du SPhP de la branche p de vecteur d'onde de norme q .

5.2.3 Éléments de matrice

Après avoir détaillé les raisons conduisant au choix du hamiltonien \mathbf{A}_p pour décrire l'interaction entre électrons et SPhP, nous allons déterminer dans cette partie une expression des éléments de matrice de ce hamiltonien. Certaines étapes de ce calcul sont détaillées dans l'annexe H.2. Ces éléments de matrice imposeront une conservation du moment parallèle lors de l'interaction, et feront notamment intervenir des intégrales de recouvrement entre les fonctions enveloppes des électrons et le champ des SPhP.

On considère donc l'émission et l'absorption d'un mode de SPhP de vecteur d'onde \mathbf{q} entre des états électroniques « fondamental » et « excité », $|m, \mathbf{K}\rangle$ et $|m', \mathbf{K}'\rangle$, La figure 5.14 illustre le cas de l'émission. La relation de dispersion des SPhP contient plusieurs branches (voir figure 5.8 pour un puits, et figure H.2 pour la structure complète). Nous nous intéresserons à l'émission et l'absorption des SPhP d'une unique branche au cours de ces calculs, et les expressions obtenues s'appliqueront à chacune des branches de SPhP. On note les états du système {électrons + SPhP}, $|g\rangle = |m, \mathbf{K}, n_{\mathbf{q}} + 1\rangle$ et $|e\rangle = |m', \mathbf{K}', n_{\mathbf{q}}\rangle$, où $n_{\mathbf{q}}$ est le nombre de quanta dans le mode \mathbf{q} de la branche de SPhP à laquelle on s'intéresse (\mathbf{q} est le vecteur d'onde de SPhP émis ou absorbé).

Du hamiltonien d'interaction (5.10), on ne s'intéresse qu'aux termes correspondant au mode \mathbf{q} , dont on ne garde que les termes en $e^{-i\omega t}$ pour l'absorption et ceux en $e^{i\omega t}$ pour l'émission (LAVERNE 1994), ce qui revient à ne conserver que les termes en $\hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ pour l'émission et $\hat{a}_{\mathbf{q}}$ pour l'absorption – on note W_a et W_e les expressions résultantes.

Le calcul des éléments de matrice correspondant, $\langle g|W_e|e\rangle$ et $\langle e|W_a|g\rangle$ est détaillé dans l'annexe H.2. On trouve que leurs modules au carré sont égaux, et valent

$$|\langle g|W_e|e\rangle|^2 = |\langle e|W_a|g\rangle|^2 \quad (5.12a)$$

$$= \hbar^2 \frac{e^2}{m^{*2}} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S} \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{q}, \mathbf{K}'} \left| i\mathbf{K}\cdot\mathbf{q} I_{m, m', q}^{(//)} + I_{m, m', q}^{(z)} \right|^2 (n_{\mathbf{q}} + 1). \quad (5.12b)$$

Dans cette expression, ω désigne la pulsation du SPhP émis ou absorbé. Celle-ci sera fixée par la condition de conservation de l'énergie dans la règle d'or de Fermi. Les moments \mathbf{K} , \mathbf{K}' , \mathbf{q} , pour lesquels on évalue cette expression sont a priori quelconques, mais cet élément de matrice sera nul si la conservation du moment $\mathbf{K} + \mathbf{q} = \mathbf{K}'$ n'est pas vérifiée, comme l'indique le symbole de Kroenecker $\delta_{\mathbf{K}+\mathbf{q}, \mathbf{K}'}$. Cette expression fait également intervenir des intégrales de recouvrement entre le champ des SPhP et les fonctions enveloppes des

électrons,

$$I_{m,m',q}^{(//)} = \int dz' \zeta_{m'}^*(z') \zeta_m(z') e_{q, //}(z'), \quad (5.13a)$$

$$I_{m,m',q}^{(//)} = \int dz' \zeta_{m'}^*(z') \frac{d\zeta_m}{dz'} e_{q,z}(z'). \quad (5.13b)$$

Ces intégrales de recouvrement font intervenir à la fois les fonctions enveloppes des états électroniques $\zeta_m(z)$ et $\zeta_{m'}(z)$ et le champ des SPhP (via les composantes $e_{q, //}(z)$ et $e_{q,z}(z)$ du vecteur $\mathbf{e}_q(z)$). Si ces trois fonctions présentent une symétrie par rapport au milieu du puits, des règles de sélection apparaissent. Il est important de le signaler car ces règles de sélection se feront encore ressentir lorsque l'environnement du puits ne sera plus exactement symétrique, comme cela est le cas dans le dispositif final.

5.2.4 Durées de vie électroniques

À partir des éléments de matrice calculés dans la partie précédente et des relations de dispersion des électrons et des SPhP, on peut déterminer les taux d'émission et d'absorption de SPhP d'un électron dans un état donné. Les calculs de cette partie sont détaillés dans l'annexe H.3.

Pour l'émission, on considère ainsi un électron dans un état $|m', \mathbf{K}'\rangle$ (voir la figure 5.14) et on exprime le taux d'émission de SPhP de la branche considérée à l'aide de la règle d'or de Fermi, en sommant sur les états d'arrivée de l'électron ($\sum_{\mathbf{K}}$) ainsi que sur les SPhP pouvant être émis ($\sum_{\mathbf{q}}$),

$$w_e = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K}} \sum_{\mathbf{q}} |\langle g | W_e | e \rangle|^2 \delta(E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m', \mathbf{K}'}). \quad (5.14)$$

Dans cette expression, $E_{m, \mathbf{K}}$ ($E_{m', \mathbf{K}'}$) désigne l'énergie des électrons dans l'état $|m, \mathbf{K}\rangle$ ($|m', \mathbf{K}'\rangle$) et ω est la pulsation des SPhP de vecteur d'onde \mathbf{q} . Le calcul de ce taux d'émission est effectué dans l'annexe H.3. On obtient au final

$$w_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*} \frac{1}{K'} 2 \int_{|\cos\theta'| < 1} dq (n_q + 1) \frac{1}{\omega} \frac{1}{|\sin\theta'|} \left| iK'q \cos\theta' I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right|^2. \quad (5.15)$$

Cette expression fait intervenir la masse m^* effective, le module du moment initial de l'électron K' ainsi que les indices des sousbandes m et m' , qui sont connus. L'intégrale fait intervenir le module du vecteur d'onde des SPhP émis q ainsi que leur pulsation ω (donnée par leur relation de dispersion) et leur angle d'émission par rapport à \mathbf{K}' , noté θ' (angle entre \mathbf{K}' et \mathbf{q} , voir la figure 5.16). θ' est donné par l'expression

$$\cos\theta' = \frac{q}{2K'} \left[1 - \frac{2m}{\hbar^2 q^2} (\epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega) \right]. \quad (5.16)$$

Cette égalité se déduit à la fois de la conservation du moment $\mathbf{K} + \mathbf{q} = \mathbf{K}'$ et de l'énergie $E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega = E_{m', \mathbf{K}'}$. Le membre de droite ne dépend que de q , les autres variables étant fixées. Pour que l'équation (5.16) soit valide, son membre de droite doit être compris entre -1 et 1 : les valeurs de q pour lesquelles c'est le cas

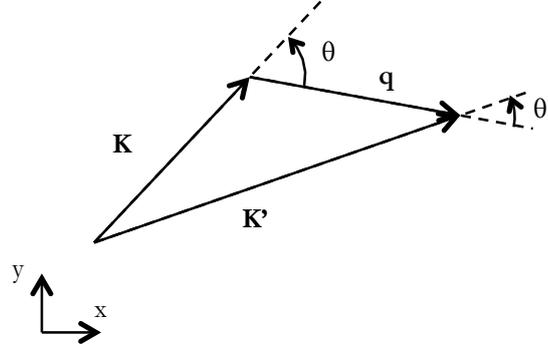


FIGURE 5.16 – Représentation de la conservation du moment lors de l'émission ou de l'absorption d'un SPhP. \mathbf{q} est le vecteur d'onde du SPhP, \mathbf{K} et \mathbf{K}' les vecteurs des états « fondamentaux » et « excités » de l'électron. θ désigne l'angle entre \mathbf{K} et \mathbf{q} et θ' celui entre \mathbf{K}' et \mathbf{q} .

forment l'intervalle d'intégration de l'intégrale figurant dans (5.15). Ainsi, cette intégrale est une somme sur les modules permis des SPhP émis. Pour chaque valeur de q de ce module, (5.16) indique l'angle du vecteur d'onde \mathbf{q} .

De plus, on a supposé que le nombre $n_{\mathbf{q}}$ de SPhP dans chaque mode (caractérisé par le vecteur d'onde \mathbf{q}) est isotrope (on le note alors n_q), ce qui permet de simplifier la somme $\sum_{\mathbf{q}}$ figurant dans (5.14), mais peut ne pas être valide si le réseau en or joue un rôle important.

On calcule le taux d'absorption de SPhP d'un électron à l'aide de la règle d'or de Fermi de manière analogue. L'état de départ de l'électron est cette fois-ci $|m, \mathbf{K}\rangle$, et le taux d'absorption est donné par

$$w_a = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K}'} \sum_{\mathbf{q}} |\langle e|W_a|g\rangle|^2 \delta(E_{m',\mathbf{K}'} - \hbar\omega - E_{m,\mathbf{K}}). \quad (5.17)$$

Le calcul de ce taux d'absorption est effectué dans l'annexe H.3, et a pour résultat

$$w_a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*} \frac{1}{K} 2 \int dq_{|\cos\theta|<1} (n_q + 1) \frac{1}{\omega} \frac{1}{|\sin\theta|} \left| iKq \cos\theta I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right|^2. \quad (5.18)$$

Cette expression présente de fortes similarités avec le taux d'émission (équation 5.15). Le module du vecteur d'onde initial est ici K et non plus K' . Les intégrales de recouvrement ne sont pas exactement les mêmes ($I_{m,m',q}^{(//)}$ et $I_{m,m',q}^{(z)}$ des équations (H.13) pour l'émission, $I_{m,m',q}^{(//)}$ et $I_{m,m',q}^{(z)}$ des équations (H.9) pour l'ab-

sorption). L'angle θ dans (5.18) est l'angle entre les moments \mathbf{K} et \mathbf{q} , donné par l'expression

$$\cos \theta = \frac{q}{2K'} \left[-1 - \frac{2m}{\hbar^2 q^2} (\epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega) \right]. \quad (5.19)$$

Cette égalité présente des similarités avec (5.16) (K est substitué à K' , et certains signes changent). Les valeurs de q pour lesquelles le membre de droite de cette égalité est compris entre -1 et 1 sont les valeurs permises pour le module des vecteurs d'onde des SPhP émis, et l'intégrale figurant dans (5.18) porte sur ces valeurs.

On a représenté sur la figure 5.17, les taux d'émission et d'absorption des SPhP d'un puits simple. On voit ainsi que parmi les SPhP, les modes de l'intervalle B (figure 5.7, GaAs résonnant) prédominent, suivis par ceux de l'intervalle C (caractère AlAs de $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ résonnant). Aux faibles vecteurs d'onde électroniques, les modes de l'intervalle B peuvent prédominer également sur les phonons confinés (figure 5.17a). Toutefois, ils ont tendance plus généralement à avoir des taux d'interaction environ 6 à 7 fois inférieurs, et donc non négligeables devant eux.

Dans l'annexe H.1, on a tracé sur la figure H.3 les taux d'émission et d'absorption obtenus dans le cas d'une structure proche de celle représentée sur la figure 5.2. Les branches de la relation de dispersion de cette structure proches de celle d'un puits simple ont également des taux d'interaction avec les électrons présentant peu d'écart avec ceux d'un puits simple.

5.2.5 Taux d'émission et d'absorption de chaque mode de SPhP

Les calculs de taux d'émission et d'absorption de SPhP par un électron donné, effectués dans la partie précédente, ne fournissent pas directement d'informations sur le vecteur d'onde des SPhP émis ou absorbés. Cette information est contenue implicitement dans les sommes sur les modules q des vecteurs d'onde des SPhP figurant dans les équations (5.15) et (5.18), l'angle par rapport au moment initial de l'électron étant donné par les équations (5.16) et (5.19). Toutefois, il ne s'agit que des vecteurs d'onde des SPhP émis par un électron dans un état donné, et non émis par l'ensemble des électrons.

Afin de savoir dans quelle mesure chaque mode de SPhP interagit avec les électrons, on se propose de calculer les taux d'émission et d'absorption de SPhP d'un mode donné d'une branche p de SPhP et pour un vecteur d'onde \mathbf{q} . Ces taux indiqueront dans quelle mesure les SPhP couplés au rayonnement via le réseau sont susceptibles d'interagir avec les électrons par rapport aux autres modes.

On cherche ces taux d'émission et d'absorption à l'aide de la règle d'or de Fermi. Dans un premier temps, on ne conserve du hamiltonien d'interaction (équation 5.10) que les termes concernant le mode de la branche p de vecteur d'onde \mathbf{q} ,

$$W_{\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e}{m^*} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}^{(p)}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.20)$$

avec

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}}^{(p)}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_p(q)S}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}^{(p)}(z) \hat{a}_p(\mathbf{q}) e^{-i\omega_p(q)t} + h.c. \quad (5.21)$$

Les états fondamental et excité du système {électrons + SPhP} sont les mêmes que dans les parties 5.2.3

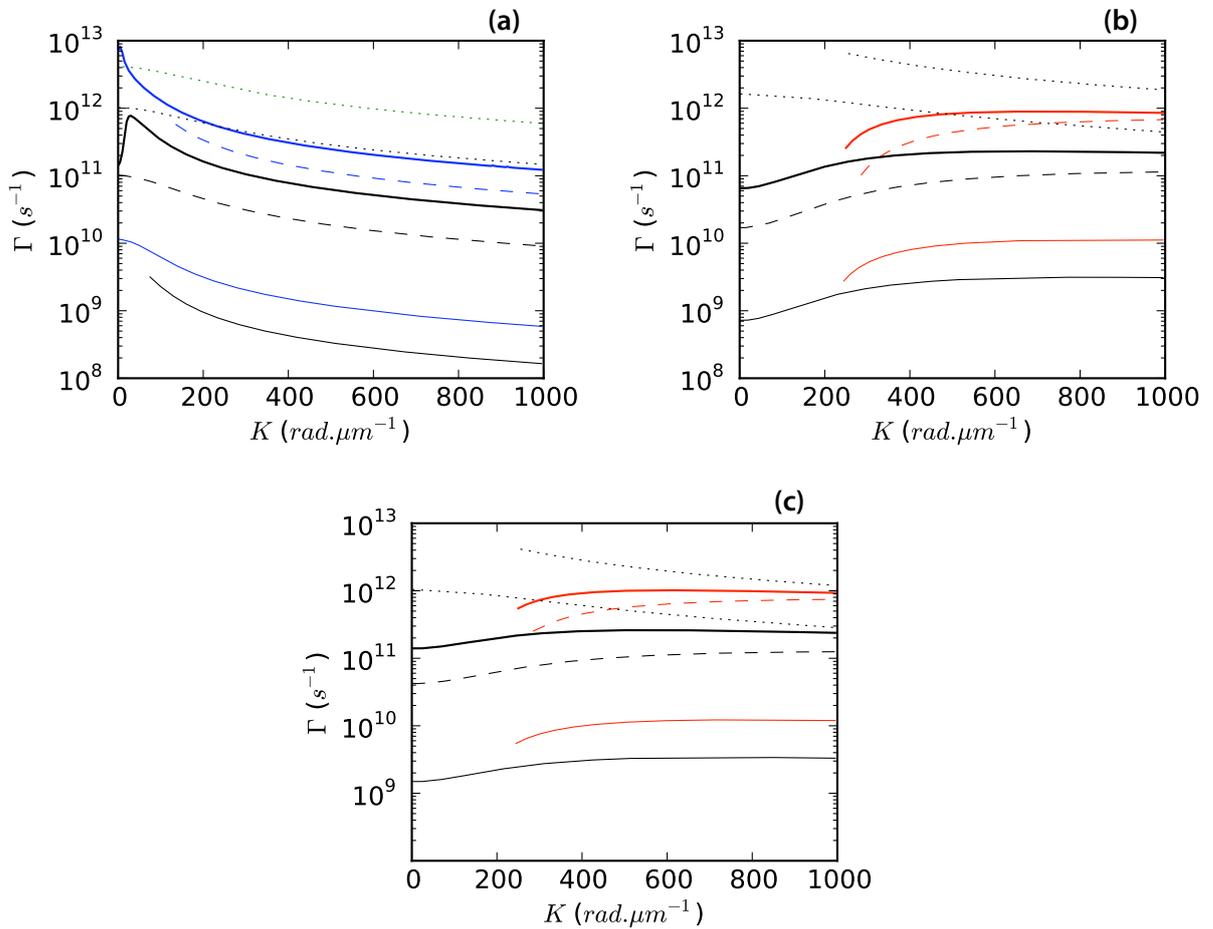


FIGURE 5.17 – Taux d'émission et d'absorption de chaque branche de SPhP d'un électron dans un puits quantique (figure 5.6). Transitions (a) : $2 \leftrightarrow 1$ (émission $2 \rightarrow 1$, absorption $1 \rightarrow 2$), (b) : $1 \leftrightarrow 1$, (c) : $2 \leftrightarrow 2$. Pour les taux d'émission, les couleurs et traits correspondent à la figure 5.8. Les différents traits bleus correspondent aux modes antisymétriques, et les traits rouges correspondent aux modes symétriques. Sur la figure (a), les symétries rendent impossible l'émission et absorption de modes symétriques, de même pour les modes antisymétriques pour les figures (b) et (c). Les taux d'absorption sont représentés en noir, avec le même type de trait (épaisseur, tirets) que les taux d'émission. Les taux d'absorption d'une branche donnée se situent juste en deçà de ses taux d'émission, identifiables grâce à leur couleur. Les taux d'émission et d'absorption de phonons confinés (sommé sur les ordres n) sont représentés en pointillés (courbe supérieure pour l'émission, inférieure pour l'absorption). Le peuplement des différents modes de phonons de surface et d'interface sont calculés à l'aide de la statistique de Bose-Einstein, avec une température $T = 300$ K.

et 5.2.4, $|g\rangle = |m, \mathbf{K}, n_{\mathbf{q}} + 1\rangle$ et $|e\rangle = |m', \mathbf{K}', n_{\mathbf{q}}\rangle$. Les éléments de matrice de (5.20) sont les mêmes que dans la partie 5.2.3 et sont donnés par l'équation (5.12b).

La règle d'or de Fermi permet d'exprimer les taux d'émission et d'absorption de quanta de ce mode de SPhP par une population d'électrons décrite par une fonction de distribution $f(m, \mathbf{K})$ ($f(m, \mathbf{K})$ est la probabilité qu'un état $|m, \mathbf{K}\rangle$ soit occupé, et est donnée par la distribution de Bose-Einstein si la population d'électrons est en équilibre thermique). Le taux d'émission est ainsi déterminé dans l'annexe H.4 et vaut

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 (n_{\mathbf{q}}^{(p)} + 1) \int dK_y f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})]. \quad (5.22)$$

On détermine également le taux d'absorption du processus inverse,

$$w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 n_{\mathbf{q}}^{(p)} \int dK_y f(m, \mathbf{K}) [1 - f(m', \mathbf{K}')], \quad (5.23)$$

et lorsque les électrons sont thermalisés (à une température T_e), on trouve que la différence entre $w_{e,\mathbf{q}}^{(p)}$ et $w_{a,\mathbf{q}}^{(p)}$ (taux d'émission « net ») se met sous la forme

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} - w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \Gamma_{e^-, \mathbf{q}}^{(p)}(T_e) [n_{\mathbf{q}}^{(p)} - n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T_e)], \quad (5.24)$$

avec

$$\Gamma_{e^-, \mathbf{q}}^{(p)}(T_e) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 \int dK_y [f_{T_e, \mu_e}(m', \mathbf{K}') - f_{T_e, \mu_e}(m, \mathbf{K})]. \quad (5.25)$$

Ce taux d'interaction donne la vitesse à laquelle chaque mode de SPhP tend vers $n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T_e)$, sa valeur d'équilibre avec la population d'électrons thermalisée. L'expression de $n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T_e)$ est donnée par la statistique de Bose-Einstein.

On a représenté sur la figure 5.18 ces taux d'interaction calculés pour les SPhP d'un puits simple (figure 5.6). On a supposé que la densité d'électrons dans le puits était de $n_s = 1,14 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, et que la température électronique était de 300 K.

Dans l'annexe H.1, on a tracé sur la figure H.4 les taux d'interaction obtenus dans le cas de la structure proche de celle représentée sur la figure 5.2. Là encore, on obtient des résultats très proches de ceux d'un puits simple.

On voit que le taux d'interaction des SPhP antisymétriques de l'intervalle de fréquence B (courbe bleue en trait épais sur la figure 5.18a) interagissent fortement avec électrons, via la transition intersousbande $2 \rightarrow 1$. Cette interaction est particulièrement forte pour les SPhP de faible vecteur d'onde, supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à la plupart des autres phonons présents. Bien qu'il existe un nombre important de ces autres modes de phonons qui interagissent avec les électrons (voir figure 5.17), on s'attend à ce que les électrons circulant dans le puits émettent une quantité de SPhP couplés au rayonnement permettant l'obtention d'un rayonnement térahertz avec un rendement acceptable.

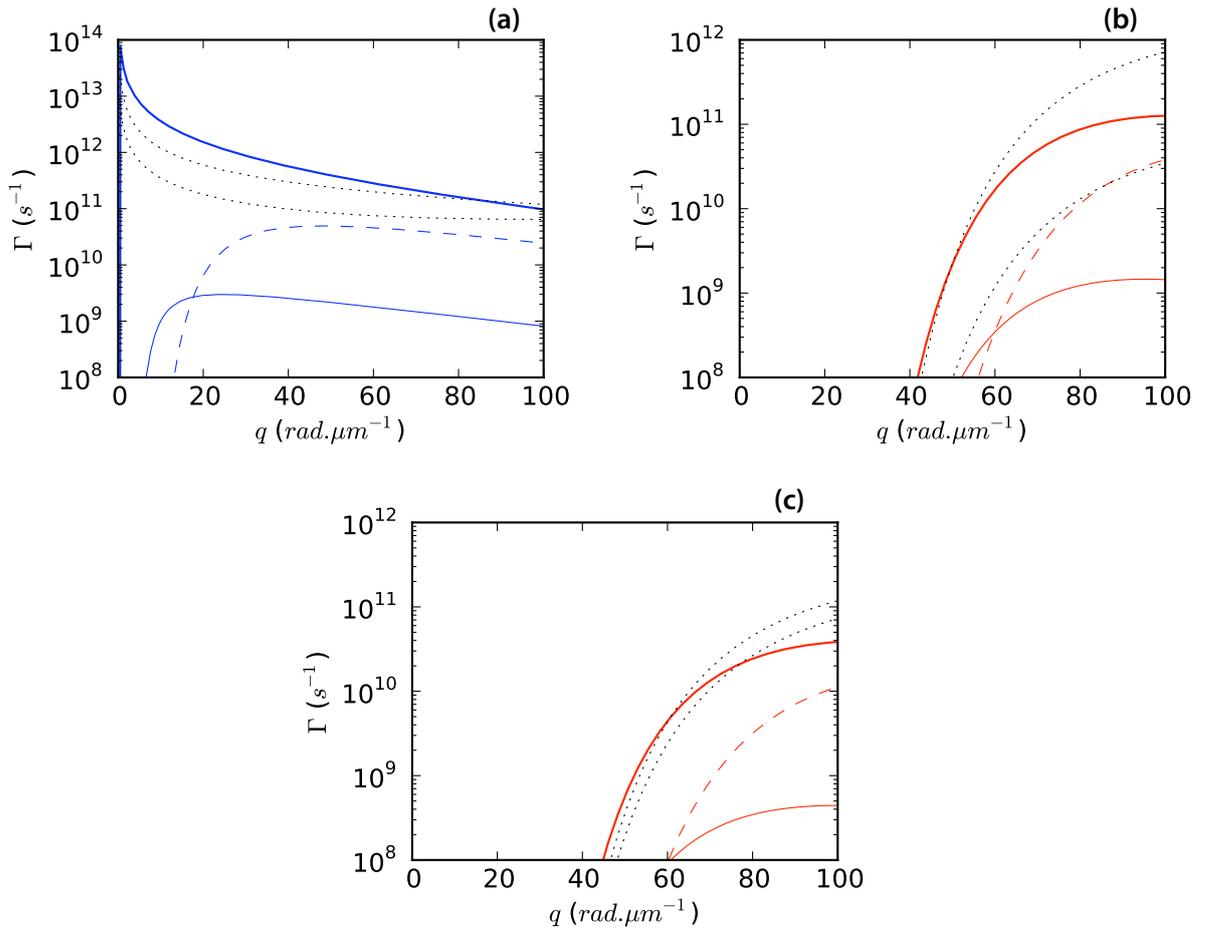


FIGURE 5.18 – Taux d'interaction de chaque mode de SPhP avec une population d'électron, dans un puits simple. Transitions (a) : $2 \leftrightarrow 1$, (b) : $1 \leftrightarrow 1$, (c) : $2 \leftrightarrow 2$. Les couleurs et traits correspondent à la figure 5.8. Les remarques de la figure 5.17 s'appliquent. Les pointillés correspondent aux ordres de phonons confinés dont les taux d'interaction avec les électrons sont les plus importants ((a) : $n = 4$ et 2 , (b) et (c) : $n = 1$ et 3).

5.3 Couplage aux ondes progressives et simulations électroniques

Dans cette section, nous allons discuter des simulations de transport électronique s'appuyant sur la méthode de Monte Carlo et simulant le fonctionnement de structure du type de celle présentée dans ce chapitre. Les résultats présentés s'appuient sur des calculs et une structure préliminaire du projet *Lapsus*, et nous expliquerons en quoi la structure que nous avons étudié conduira à des résultats plus prometteurs. Nous discuterons également du phénomène d'absorption résonante étudiée par VASSANT (2011), qui illustre notamment l'excitation de SPhP via un réseau dans la structure étudiée dans les sections précédentes.

5.3.1 Simulations de transport électronique par méthode de Monte Carlo

Les calculs de taux d'interaction présentés dans ce chapitre s'inscrivent dans la continuité de premières simulations de transport électronique par méthode de Monte Carlo (SAINT-MARTIN et al. 2006), publiés dans (MAZZAMUTO et al. 2009). Nous allons dans un premier temps rappeler brièvement leurs résultats. Ces premiers calculs s'appuient sur une modélisation des SPhP de la structure employée comme SPhP d'une interface simple GaAs/air. Dans un second temps, nous justifierons les raisons qui font que la structure étudiée dans ce chapitre permettra d'obtenir de meilleurs résultats.

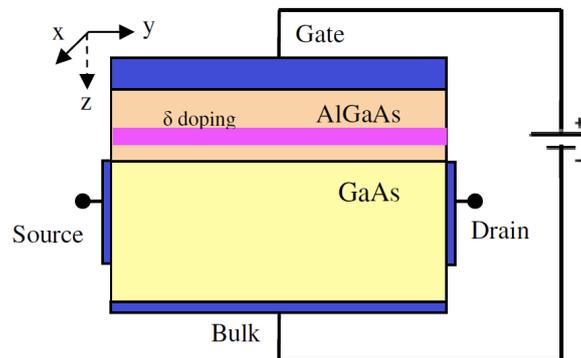


FIGURE 5.19 – Structure modélisée dans le cadre des simulations de transport électronique par méthode de Monte Carlo. Figure extraite de (MAZZAMUTO et al. 2009).

Ces calculs consistent à simuler le transport des électrons dans un puits quantique situé dans une structure telle que celle représentée sur la figure 5.19. Lors de ces calculs, on considère que les électrons interagissent avec trois types de phonons : les phonons acoustiques « bulk », les phonons optiques « bulk », ainsi que les SPhP.

Dans la structure considérée (figure 5.19), le plan de dopage (« δ doping ») induit un puits triangulaire dans le GaAs à l'interface avec AlGaAs. Les électrons circulent dans le puits entre la source et le drain, et une grille permet d'appliquer un champ électrique statique dans le puits, ce qui permet d'ajuster les écarts en énergie entre les sousbandes du puits (par effet Stark, voir WEISBUCH et VINTER 1991 ; ROSENCHER et VINTER 2002).

Dans ces premiers calculs, nous n'avions pas encore développé le traitement quantique des SPhP dans les hétérostructures (annexe B), et les SPhP étaient modélisés comme ceux d'une interface GaAs/air. L'influence de $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ et de la grille était négligée, malgré l'impact que ces couches pouvaient avoir sur ces SPhP (la couche de $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ a une constante diélectrique qui varie fortement aux fréquences considérées et présente elle-même des SPhP, et la grille, métallique, a une constante diélectrique très élevée). Leur relation de dispersion est représentée sur la figure 5.20. On a tracé sur la figure 5.21 la valeur normalisée de la composante

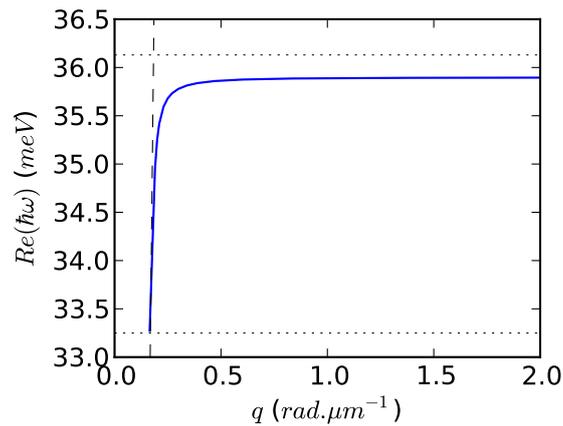


FIGURE 5.20 – Relation de dispersion des SPhP d'une interface GaAs/air. Bleu : relation de dispersion. Tirets noirs : cône de lumière $q = \frac{c}{\epsilon}$. Pointillés noirs : pulsations des phonons TO (bas) et LO (haut) de GaAs. La relation de dispersion se prolonge aux q plus grands, en restant plate (elle garde la même pulsation).

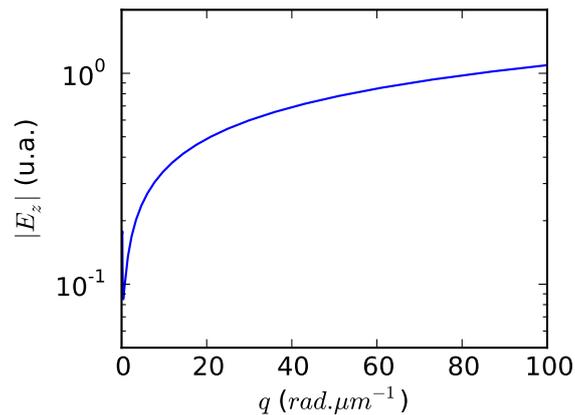


FIGURE 5.21 – Composante E_z du champ normalisé des SPhP d'une interface GaAs/air, dans GaAs, à l'interface avec l'air. Abscisse : vecteur d'onde des SPhP. La composante E_z du champ normalisé décroît fortement aux faibles vecteurs d'onde.

E_z de leur champ électrique dans le GaAs à proximité immédiate de l'interface avec l'air. Ce champ normalisé

intervient directement dans les intégrales de recouvrement (équations H.9b et H.13b) apparaissant dans les éléments de matrice de l'hamiltonien d'interaction électrons-SPhP. Comme on peut le voir, aux faibles vecteurs d'onde q , ce champ normalisé tend vers 0 : les SPhP de faible vecteur d'onde interagissent ainsi très peu avec les électrons du puits. Ainsi, bien que les taux d'émission de SPhP soient proches des taux d'émission de phonons optiques (voir figure 5.22), le spectre des vecteurs d'onde des SPhP émis (figure 5.23) révèle que le

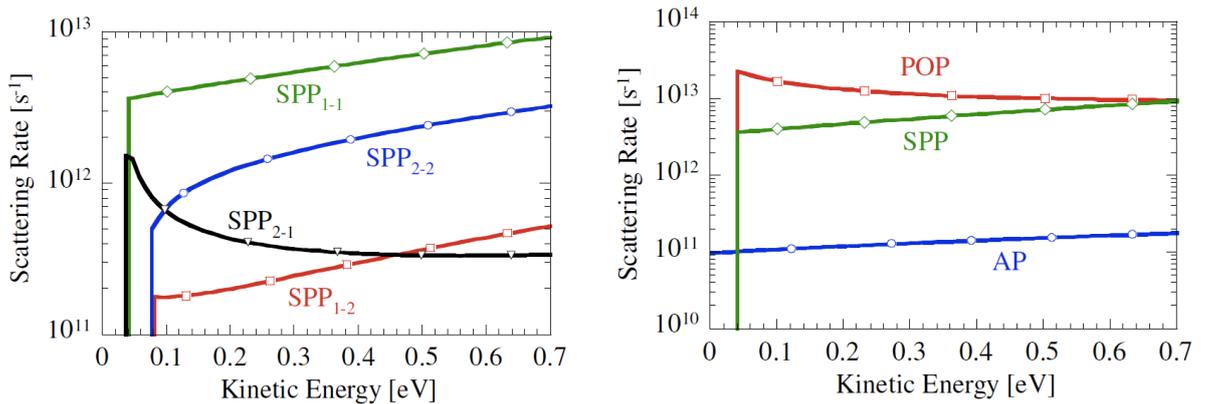


FIGURE 5.22 – Taux d'émission de phonons calculés par MAZZAMUTO et al. (2009). Gauche : taux d'émission de SPhP pour différentes transitions inter- et intrasousbandes (les sousbandes de départ et d'arrivée sont indiquées en indice sur le schéma). Droite : taux d'émission de phonons optiques (« POP »), acoustiques (« AP »), et de SPhP (pour les SPhP, par transitions intrasousbandes de la sousbande 1, transition de taux d'émission les plus élevés, voir figure de gauche). Les taux d'émission de SPhP représentés sur la figure de droite sont jusqu'à un ordre de grandeur inférieurs aux taux d'émission de phonons optiques. Images extraites de (MAZZAMUTO et al. 2009).

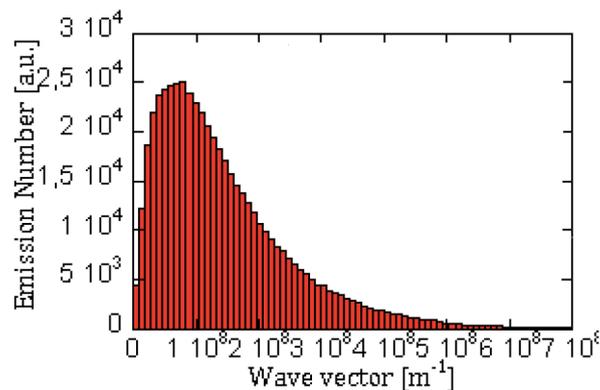


FIGURE 5.23 – Spectre des vecteurs d'onde des SPhP émis déterminé par MAZZAMUTO et al. (2009). Le spectre est maximal aux alentours de $100 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$, et est important de quelques dizaines à environ $300 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$. Image extraite de (MAZZAMUTO et al. 2009).

nombre de SPhP émis aux faibles vecteurs d'onde tend vers 0 également, minisant la probabilité d'émission de SPhP dont le vecteur d'onde les rend susceptibles d'être couplés au rayonnement. Deux facteurs contribuent

à minimiser l'émission de SPhP pouvant rayonner : la fraction relativement faible de SPhP susceptible de rayonner comparée à l'ensemble des SPhP (voir figure 5.15, partie 5.2.1), et la faiblesse du champ normalisé des SPhP susceptibles de rayonner (figure 5.21).

La structure étudiée dans les sections 5.1 et 5.2 de ce chapitre, s'appuyant sur un puits rectangulaire, présente l'avantage de lever la seconde limitation. Comme cela est représenté sur la figure 5.5 (partie 5.1.1.2), le champ du mode antisymétrique de l'intervalle de fréquences B est de plus en plus confiné dans le puits, où se situent les électrons. Ainsi, les SPhP de faible vecteur d'onde de cette branche interagissent fortement avec les électrons, comme le montre le calcul de taux d'interaction des modes individuels, figure 5.18.

5.3.2 Absorption résonante

Dans la partie 5.1.2, nous avons vu qu'une des branches de SPhP du puits GaAs/Al_{0,33}Ga_{0,67}As et de la structure *Lapsus* simplifiée a, à certains vecteurs d'onde, un champ très confiné dans le puits (sans être rigoureusement nul à l'extérieur de celui-ci – il s'agit de la branche antisymétrique de l'intervalle de fréquence « B », aux faibles vecteurs d'onde, voir figures 5.7 et H.2). Ce fort confinement peut s'expliquer par la faible valeur de la constante diélectrique de GaAs aux fréquences d'existence de ces SPhP, proches de la pulsation des phonons LO de GaAs, ω_{LO} .

Les propriétés des matériaux ayant une constante diélectrique proche de zéro ont déjà fait l'objet de quelques travaux. On parle de matériau (ou d'effet) « ENZ » pour *epsilon near zero*. Les propriétés des matériaux ENZ permettent de concevoir des guides d'ondes « parfaits » (SILVEIRINHA et ENGHETA 2006 ; EDWARDS et al. 2008). Ici, nous obtenons des modes très confinés dans un volume extrêmement sub-longueur d'onde (couche de GaAs d'environ 20 nm d'épaisseur à une longueur d'onde dans le vide d'environ 35 μm).

L'existence de ce mode, dont nous avons souligné le confinement dans le puits dans la partie 5.1.1.2 (illustré par la figure 5.5), permet d'abord d'obtenir un phénomène d'absorption résonante, qui peut dans un deuxième temps être exploité afin de réaliser un modulateur THz contrôlé électriquement, comme cela est représenté sur la figure 5.2.

La figure 5.24 donne le détail de la géométrie utilisée. Cette structure présente un substrat en GaAs dopé, séparé des couches du puits, des barrières, et du réseau en or, par un espaceur constitué d'une alternance de monocouches GaAs/AlAs (matériau choisi pour sa facilité de déposition, et de propriétés proches de celle de Al_{0,50}Ga_{0,50}As). Cette partie inférieure de la structure permet de former une cavité qui exalte le champ dans le puits, effet qui se superpose à l'effet ENZ décrit ci-dessus. La figure 5.25 (gauche) représente la réflectivité de la structure précédente (à une incidence de 45°). Le creux de réflectivité à $\lambda_0 = 34,34\mu\text{m}$ est attribuable aux effets ENZ et de cavité dont on vient de discuter. Le champ correspondant est représenté sur la figure 5.26, sur laquelle on peut voir l'exaltation de champ dans le puits. La figure 5.25 représente la fraction de puissance incidente absorbée dans le puits en fonction de l'angle d'incidence, à $\lambda_0 = 34,34\mu\text{m}$. Comme on peut le voir, jusqu'à 70% de celle-ci peut être absorbée dans le puits. (Cette valeur peut dépasser 80% avec un substrat plus réfléchissant.)

L'obtention par la suite d'un modulateur térahertz s'appuie sur une modulation de la densité d'électrons dans le puits, en polarisant ce dernier. On module alors leur contribution à l'absorption dans le puits via

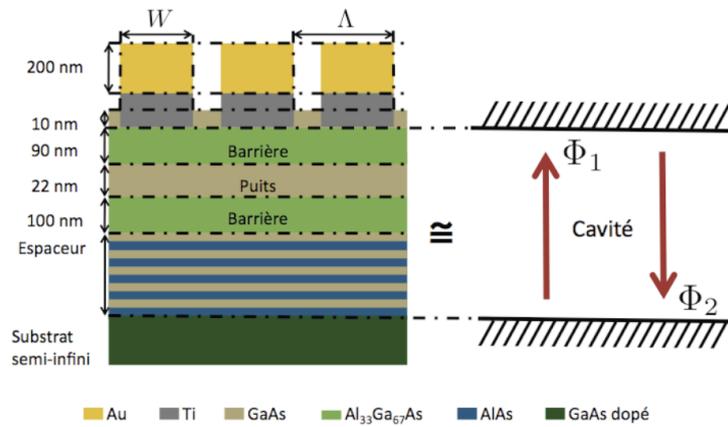


FIGURE 5.24 – Géométrie et matériaux utilisés dans la conception de la structure *Lapsus*. Figure extraite de (VASSANT 2011).

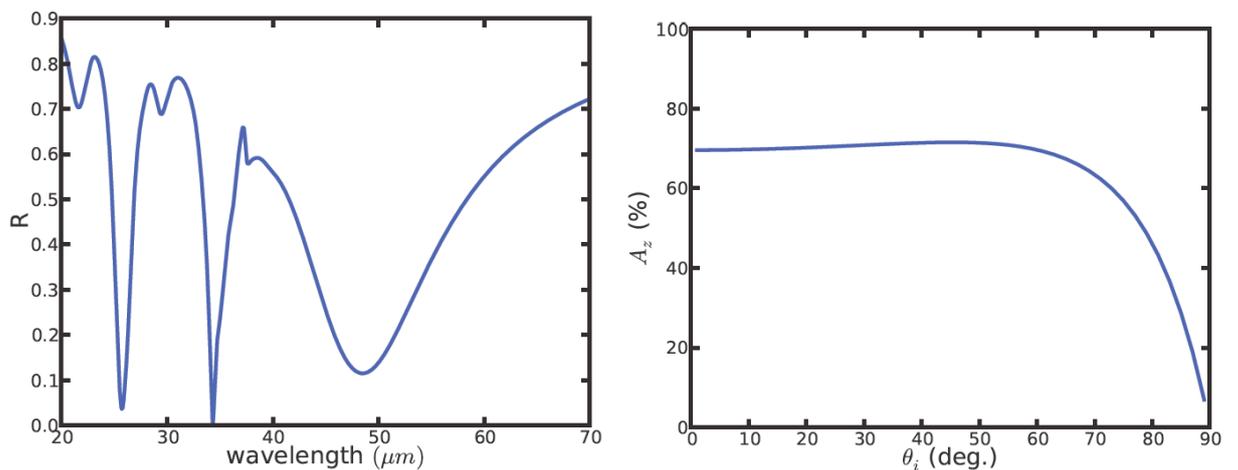


FIGURE 5.25 – Réflectivité (angle d'incidence : 45°) et fraction de la puissance incidente absorbée dans le puits à $\lambda_0 = 34, 34 \mu\text{m}$. Figure extraite de (VASSANT 2011).

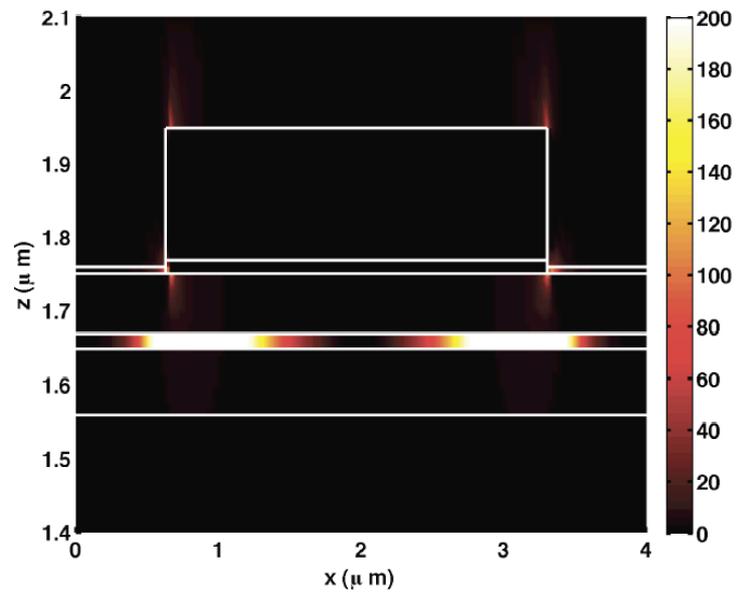


FIGURE 5.26 – Champ ($|E_z|^2$) dans la structure en incidence normale à $\lambda_0 = 34,34\mu\text{m}$. Les traits blancs représentent la géométrie de la structure. Le module du champ incident est 1. Figure extraite de (VASSANT 2011).

la partie imaginaire de sa constante diélectrique (contribution non prise en compte dans les calculs effectués dans ce chapitre), ce qui module l'efficacité de l'absorption résonante et la réflectivité de la structure, et permet d'obtenir un modulateur térahertz.

Conclusion

Au cours de ce manuscrit, nous avons posé les bases théoriques de plusieurs questions concernant la modélisation des ondes de surface, notamment l'optique s'appuyant sur celles-ci (optique sub-longueur d'onde 2D et super-résolution) et l'interaction des ondes de surface avec un autre système (traitement quantique des ondes de surface). Dans le chapitre 1, nous avons discuté de problèmes soulevés par la relation de dispersion des ondes de surface en nous appuyant sur des expressions du champ des ondes de surface correspondant à chacune de ces relations de dispersion, obtenues à l'aide du formalisme de Green.

Nous nous sommes intéressés par la suite aux limites de résolution de systèmes s'appuyant sur le caractère sub-longueur d'onde des ondes de surface afin d'imager des détails de dimensions inférieures à la limite de diffraction usuelle des ondes progressives. Dans le chapitre 2, nous avons déduit des équations de Maxwell une équation de Helmholtz scalaire pour les ondes de surface, dont on peut déduire toutes les composantes du champ électromagnétique (vectoriel) des ondes de surface. Nous avons pu obtenir un « principe » d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface ainsi qu'une équation eikonale pour les « rayons » d'ondes de surface, dont les conditions d'application apparaissent clairement en cours de calcul. Nous avons illustré le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface en l'appliquant à différents dispositifs de diffraction et de focalisation d'ondes de surface. Dans le chapitre 3, nous avons étudié analytiquement le comportement de la superlentille de Pendry en régime impulsionnel, afin d'améliorer sa résolution par rapport au régime harmonique en présence de pertes. Nous avons montré qu'une impulsion de même fréquence et décroissant au même rythme que les ondes de surface de grand vecteur d'onde, et le régime suivant l'arrêt du régime harmonique, permettent d'améliorer cette résolution de quelques dizaines de pourcents, au prix toutefois d'une décroissance importante du signal.

Dans les chapitres suivants, nous nous sommes intéressés à l'interaction des ondes de surface avec un autre système. Dans le chapitre 4, nous avons développé un traitement quantique des ondes de surface, s'appuyant sur une modélisation sans pertes de celles-ci. Nous avons comparé les facteurs de Purcell prédits par ce modèle quantique à un calcul classique de ce facteur, et mis en évidence la validité de notre modèle dans la limite de faibles pertes. Dans le chapitre 5, nous avons étudié les phonons-polaritons de surface d'un puits quantique et leur interaction avec les électrons du puits par transitions inter- et intrasousbandes. Nous avons mis en évidence que certains de ces phonons-polaritons de surface de faible vecteur d'onde ont un champ important dans le puits grâce à la constante diélectrique de ce dernier qui approche zéro (comportement que l'on ne retrouve pas avec des plasmons-polaritons de surface), et interagissent fortement avec les électrons du puits. Ces résultats ont ouvert la voie à la réalisation d'un modulateur d'ondes térahertz contrôlé électriquement, et permettent d'envisager la réalisation d'une source électrique de rayonnement térahertz s'appuyant sur la même structure.

Conventions de calcul et notations

A.1 Notations

c désigne la célérité de la lumière dans le vide, ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Ces trois grandeurs vérifient $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$.

Si z est une grandeur complexe, z' désigne sa partie réelle et z'' sa partie imaginaire.

On utilise les notations de SIPE (1987) pour les vecteurs unitaires. \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} , désignent les vecteurs unitaires respectifs des axes x , y et z . Dans les autres cas, la notation $\hat{}$ (chapeau) désigne un vecteur unitaire de mêmes direction et sens que le vecteur sans chapeau. On a par exemple pour un vecteur \mathbf{v} , $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$.

$H(t)$ désigne la fonction de Heaviside, qui vérifie

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Transformées de Fourier

A.2.1 Transformées de Fourier par rapport aux variables x et y

On note les variables conjuguées de x et y , K_x et K_y respectivement et on associe à ces variables un vecteur d'onde $\mathbf{K} = K_x\hat{x} + K_y\hat{y}$ dont elles sont les composantes. Si $f(\vec{\rho})$ correspond à une fonction dans l'espace direct, on note $f(\mathbf{K})$ sa transformée de Fourier (on substitue simplement \mathbf{K} à $\vec{\rho}$), et on a

$$f(\vec{\rho}) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\vec{\rho}} f(\mathbf{K}) \quad (\text{A.2})$$

$$f(\mathbf{K}) = \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{K}\cdot\vec{\rho}} f(\vec{\rho}) \quad (\text{A.3})$$

avec $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Par exemple, si $f(\vec{\rho}) = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0)$, on a $f(\mathbf{K}) = e^{-i\mathbf{K}\cdot\vec{\rho}_0}$.

A.2.2 Transformées de Fourier par rapport au temps

La variable conjugué du temps t est la pulsation ω . Pour une fonction du temps $f(t)$, on note $f(\omega)$ sa transformée de Fourier (on substitue ω à t), et on a

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f(\omega) \quad (\text{A.4})$$

$$f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad (\text{A.5})$$

Par exemple, si $f(t) = e^{-i\omega_0 t}$, on a $f(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$.

A.3 Racines complexes

On est amené au cours des différents chapitres de cette thèse à définir certaines grandeurs comme des racines carrées d'expressions éventuellement complexes. Or, un nombre complexe a deux racines carrées possibles, opposées entre elles, et le signe des grandeurs ainsi définies a un sens physique important : il s'agit généralement de constantes de propagation, que l'on peut noter γ par exemple, figurant dans des expressions de la forme $e^{i\gamma z}$. Le signe de la constante de propagation γ définit ainsi un sens de propagation de l'onde considérée (dans la direction z) – z croissants si $Re(\gamma) > 0$, z décroissants si $Re(\gamma) < 0$. Dès que $Im(\gamma) \neq 0$, $e^{i\gamma z}$ diverge, l'onde est atténuée ou amplifiée, et son module croît dans une direction et décroît dans l'autre – $e^{i\gamma z}$ diverge lorsque $z \rightarrow -\infty$ si $Im(\gamma) > 0$, ou lorsque $z \rightarrow \infty$ si $Im(\gamma) < 0$.

On choisit ici parmi les deux racines carrées possibles celle de partie imaginaire positive. Cela conduit à introduire dans le plan complexe une ligne de coupure, le long de l'axe des réels positifs – la fonction racine carrée ainsi définie présente une discontinuité à la traversée de cette ligne de coupure (voir figure A.1). Cela revient, lors du calcul des racines carrées, à choisir l'argument du complexe dont on prend la racine carrée entre 0 et 2π , puis à diviser cet argument par deux pour obtenir celui de la racine carrée, comme cela est représenté sur la figure A.1.

Si les deux racines carrées ont une partie imaginaire nulle, on est dans le cas où le carré est sur l'axe des réels positifs. On choisit alors la racine positive.

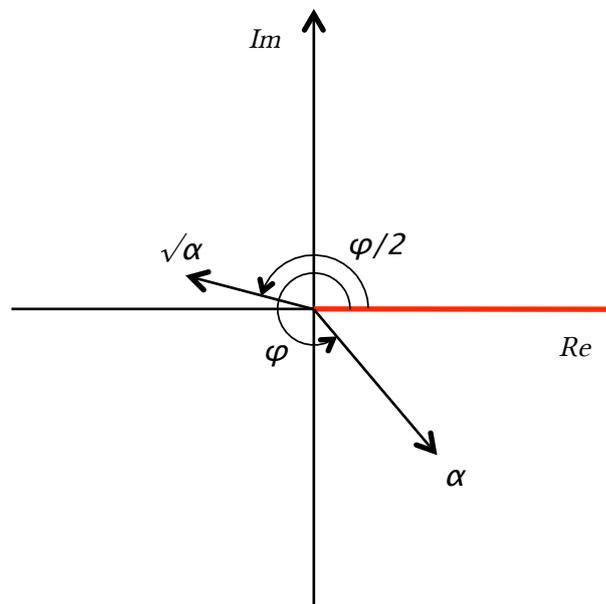


FIGURE A.1 – Coupure introduite dans le plan complexe lors du choix de signe des racines carrées complexes. En rouge, la ligne de coupure induite par la convention choisie pour la fonction racine carrée complexe. On a représenté un nombre complexe α et sa racine $\sqrt{\alpha}$, ainsi que leurs phases respectives φ et $\varphi/2$.

Ondes de surface dans les hétérostructures

Dans cette annexe, nous allons obtenir une expression du champ des ondes de surface dans les hétérostructures de forme générale représentée sur la figure B.1.

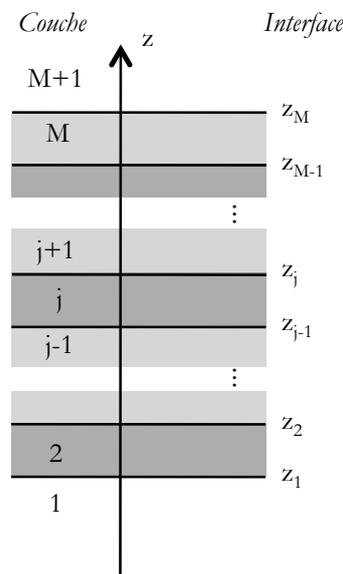


FIGURE B.1 – Système considéré dans cette thèse lorsque l'on traite d'hétérostructures. L'hétérostructure contient M interfaces, de plans $z = z_j$, $1 \leq j \leq M$. Ces interfaces séparent $M + 1$ milieux matériels, indexés de $j = 1$ à $M + 1$. Dans la couche j avec $2 \leq j \leq M$, la coordonnée z vérifie $z_{j-1} < z < z_j$. Cette inégalité peut s'étendre aux milieux extrémaux 1 et $M + 1$ en posant $z_0 = -\infty$ et $z_{M+1} = \infty$.

Nous donnerons deux méthodes pour obtenir ce champ, une première s'appuyant sur une séparation des variables d'espace (coordonnées parallèles x et y d'une part, coordonnée perpendiculaire z d'autre part), et une seconde, plus générale, s'appuyant sur les distributions. Dans les hétérostructures comportant plusieurs interfaces séparant des milieux dont les constantes diélectriques peuvent être opposées (et dont les ondes de surface ont donc une relation de dispersion comportant plusieurs branches), la première méthode fournit le champ de chacune des branches de la relation de dispersion des ondes de surface séparément, alors que la seconde méthode donne une seule expression du champ comportant une somme sur ces branches. L'optique de Fourier développée dans le chapitre 2 s'appuie sur les expressions fournies par la première méthode. La quantification des ondes de surface dans les hétérostructures s'appuie sur celles obtenues par la seconde méthode. Ces deux méthodes conduisent à un même système d'équations homogène. L'annulation de son déterminant

donne la relation de dispersion des ondes de surface, et sa résolution donne les coefficients intervenant dans les expressions du champ de ces ondes de surface.

Par la suite, nous quantifierons ces ondes de surface et nous donnerons une expression des opérateurs de leur champ. Préalablement, nous déterminerons l'énergie de ces ondes de surface, dont l'expression est indispensable pour les quantifier.

La dissipation de l'énergie de ces ondes de surface (dans les matériaux à pertes présents) peut poser des problèmes formels. La première méthode d'obtention du champ des ondes de surface tient compte de ces pertes dès le départ. La seconde méthode suppose que ces pertes sont absentes, et ses résultats sont généralisés au cas avec pertes.

B.1 Séparation des variables

Une première manière d'obtenir les relations de dispersions et le champ des ondes de surface d'une hétérostructure sont présentés dans le chapitre 2. On rappelle ici les grandes lignes de cette méthode. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 2 ainsi que dans l'annexe D qui l'accompagne.

Cette méthode a pour point de départ l'équation de Helmholtz pour la composante E_z du champ électrique, en régime harmonique de pulsation ω ,

$$\Delta E_z(\mathbf{r}) + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} E_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Elle consiste à rechercher des solutions de cette équation de la forme

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) f(z), \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire à effectuer une séparation des coordonnées parallèles, x et y , et perpendiculaire à l'interface, z ,

On montre alors que la continuité de $D_z(\mathbf{r}) = \epsilon(z, \omega) E_z(\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$ à la traversée de chaque interface entraîne celle de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$. De l'équation de Helmholtz (B.1), on déduit les équations différentielles vérifiées par $\mathcal{E}(x, y)$ et $f(z)$,

$$\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2 \mathcal{E}(x, y) = 0, \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2 \right] f(z) = 0, \quad (\text{B.3b})$$

où l'on a introduit la constante K_{sp}^2 , dont on montre qu'il s'agit du carré du vecteur d'onde des ondes de surface à la fréquence considérée¹

La résolution de (B.3b) en tenant compte de la continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ permet d'obtenir $f(z)$,

$$f(z) = \alpha_j e^{i\gamma_j |z - z_{j-1}|} + \beta_j e^{i\gamma_j |z - z_j|}, \quad z_{j-1} < z < z_j, \quad (\text{B.4})$$

1. et pour la branche considérée si la relation de dispersion des ondes de surface a plusieurs branches.

où les coefficients α_j et β_j sont solutions du système d'équations (D.24), que l'on rappelle ici,

$$\begin{aligned}\epsilon_j(\omega) \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} + \beta_j \right] &= \epsilon_{j+1}(\omega) \left[\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right], \\ i\gamma_j \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} - \beta_j \right] &= i\gamma_{j+1}(\omega) \left[\alpha_{j+1} - \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right].\end{aligned}$$

$\mathcal{E}(x, y)$ doit simplement satisfaire l'équation (B.3a). Une solution particulièrement simple est $\mathcal{E}(x, y) = e^{i\mathbf{K}\cdot\vec{\rho}}$ avec $\vec{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ et \mathbf{K} un vecteur de carré K_{sp}^2 .

On déduit $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$ de $E_z(\mathbf{r})$ avec la formule (2.2),

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} \left[\frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right] = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} [\mathcal{E}(x, y)] \frac{df}{dz},$$

B.2 Par transformée de Fourier, sans pertes

Nous ne nous plaçons pas ici en régime harmonique, et nous considérons donc $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Sa transformée de Fourier par rapport à t ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.5})$$

vérifie l'équation de Helmholtz,

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (\text{B.6})$$

L'invariance par translation dans les directions x et y de ce système conduisent à étudier la transformée de Fourier par rapport à x et y de ce champ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \int dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{B.7})$$

D'après l'équation de Helmholtz, $\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega)$ vérifie

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$\epsilon(z, \omega)$ étant constante par morceaux dans chaque couche de l'hétérostructure, cette équation se résout facilement. Dans la couche j ($z_{j-1} < z < z_j$), on a $\epsilon(z, \omega) = \epsilon_j(\omega)$ et :

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega) e^{i\gamma_j z} + \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega) e^{-i\gamma_j z} \quad (\text{B.9})$$

avec $\gamma_j = \gamma_j(K, \omega) = \sqrt{\epsilon_j \frac{\omega^2}{c^2} - K^2}$, cf. annexe A.3 pour les conventions de signe pour les racines complexes. γ_j vérifie ainsi $K^2 + \gamma_j^2 = \epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$.

Dans les couches extrémales $j = 1$ et $j = M + 1$, on annule respectivement $\mathbf{E}_0^{(+)}(\mathbf{K}, \omega)$ et $\mathbf{E}_{M+1}^{(-)}(\mathbf{K}, \omega)$,

i.e. on suppose qu'il n'y a pas d'ondes incidentes provenant de $z = \pm\infty$.

Intéressons-nous maintenant à la polarisation de cette onde. L'équation $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ conduit dans chaque couche à

$$i\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) + \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) \cdot \mathbf{z}] = 0, \quad (\text{B.10})$$

soit, en utilisant (B.9),

$$i\mathbf{K} \cdot \left[\mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega) e^{i\gamma_j z} + \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega) e^{-i\gamma_j z} \right] + i\gamma_j \mathbf{z} \cdot \left[\mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega) e^{i\gamma_j z} - \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega) e^{-i\gamma_j z} \right] = 0, \quad z_{j-1} < z < z_j. \quad (\text{B.11})$$

En regroupant les termes en $\mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega)$ et $\mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega)$, et (B.11) étant vraie pour une infinité de valeurs de z ,

$$(\mathbf{K} + i\gamma_j \mathbf{z}) \cdot \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega) = 0, \quad (\text{B.12a})$$

$$(\mathbf{K} - i\gamma_j \mathbf{z}) \cdot \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega) = 0. \quad (\text{B.12b})$$

On pose alors

$$\mathbf{k}_j^\pm = \mathbf{K} \pm i\gamma_j \mathbf{z}, \quad \hat{\mathbf{k}}_j^\pm = \frac{\mathbf{k}_j^\pm}{\sqrt{\epsilon_j \frac{\omega}{c}}}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathbf{p}_j^\pm(\mathbf{K}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j \frac{\omega}{c}}} (\gamma_j \hat{\mathbf{K}} \mp K \mathbf{z}) = \frac{\gamma_j}{\sqrt{\epsilon_j \frac{\omega}{c}}} (\hat{\mathbf{K}} \mp \frac{K}{\gamma_j} \mathbf{z}), \quad (\text{B.13b})$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{p}_j^\pm \times \hat{\mathbf{k}}_j^\pm = \hat{\mathbf{K}} \times \mathbf{z}. \quad (\text{B.13c})$$

Les vecteurs $(\hat{\mathbf{k}}_j^\pm, \mathbf{p}_j^\pm, \mathbf{s})$ et $(\hat{\mathbf{K}}, \mathbf{z}, \mathbf{s})$ forment alors des bases, et les équations (B.12) peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{\mathbf{k}}_j^+ \cdot \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{K}, \omega) = 0, \quad (\text{B.14a})$$

$$\hat{\mathbf{k}}_j^- \cdot \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{K}, \omega) = 0. \quad (\text{B.14b})$$

Ainsi, dans la base $(\hat{\mathbf{k}}_j^\pm, \mathbf{p}_j^\pm, \mathbf{s})$, $\mathbf{E}_j^+(\mathbf{K}, \omega)$ se décompose sur les vecteurs \mathbf{p}_j^+ et \mathbf{s} uniquement. De la même manière, $\mathbf{E}_j^-(\mathbf{K}, \omega)$ se décompose sur \mathbf{p}_j^- et \mathbf{s} . Les composantes sur \mathbf{s} correspondent à la polarisation s du champ, les composantes restantes à la polarisation p .

On ne s'intéresse désormais qu'à la polarisation p du champ. On a ainsi $\mathbf{E}_j^+(\mathbf{K}, \omega) \propto \mathbf{p}_j^+(\mathbf{K}, \omega) \propto \hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \mathbf{z}$ et $\mathbf{E}_j^-(\mathbf{K}, \omega) \propto \mathbf{p}_j^-(\mathbf{K}, \omega) \propto \hat{\mathbf{K}} + \frac{K}{\gamma_j} \mathbf{z}$. En introduisant les constantes de proportionnalité $f_j(\mathbf{K}, \omega)$ et $b_j(\mathbf{K}, \omega)$, l'équation (B.9) peut s'écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = f_j(\mathbf{K}, \omega) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \mathbf{z} \right) e^{i\gamma_j z} + b_j(\mathbf{K}, \omega) \left(\hat{\mathbf{K}} + \frac{K}{\gamma_j} \mathbf{z} \right) e^{-i\gamma_j z}. \quad (\text{B.15})$$

Afin de simplifier les calculs, on multiplie les constantes $f_j(\mathbf{K}, \omega)$ et $b_j(\mathbf{K}, \omega)$ par $e^{i\gamma_j z_{j-1}}$ et $e^{-i\gamma_j z_j}$, et on obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = f_j(\mathbf{K}, \omega) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{i\gamma_j |z - z_{j-1}|} + b_j(\mathbf{K}, \omega) \left(\hat{\mathbf{K}} + \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{i\gamma_j |z - z_j|}. \quad (\text{B.16})$$

La continuité de $D_z(\mathbf{K}, z, \omega) = \epsilon(z, \omega) E_z(\mathbf{K}, z, \omega)$ et $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{K}, z, \omega)$ permettent d'obtenir le système d'équations

$$f_{j-1} e^{i\gamma_j d_{j-1}} + b_{j-1} = f_j + b_j e^{i\gamma_j d_j}, \quad (\text{B.17a})$$

$$\frac{\epsilon_{j-1}}{i\gamma_{j-1}} f_{j-1} e^{i\gamma_j d_{j-1}} - \frac{\epsilon_{j-1}}{i\gamma_{j-1}} b_{j-1} = \frac{\epsilon_j}{i\gamma_j} f_j - \frac{\epsilon_j}{i\gamma_j} b_j e^{i\gamma_j d_j}, \quad (\text{B.17b})$$

pour $j = 2$ à $M+1$ (on a omis la dépendance en \mathbf{K}, ω des coefficients f_j et b_j afin d'alléger les notations). Ce système est analogue à celui des équations (D.24) en substituant (α_j, β_j) à (f_j, b_j) et en multipliant (B.17b) par i .

Le système (B.17) se résout en utilisant les propriétés des distributions. On peut l'écrire sous forme matricielle,

$$M(K, \omega) \begin{bmatrix} \vdots \\ f_j(\mathbf{K}, \omega) \\ b_j(\mathbf{K}, \omega) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Si l'on considère \mathbf{K} comme fixé, le membre de gauche de (B.18) est un produit de distributions de ω , qui s'annule. Si l'on note $\{\omega_p(K)\}$ l'ensemble des valeurs de ω annulant le déterminant de $M(K, \omega)$, les solutions de (B.18) sont de la forme

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ f_j(\mathbf{K}, \omega) \\ b_j(\mathbf{K}, \omega) \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_p c_p(\mathbf{K}) \begin{bmatrix} \vdots \\ f_j^{(p)}(K) \\ b_j^{(p)}(K) \\ \vdots \end{bmatrix} \delta[\omega - \omega_p(K)] \quad (\text{B.19})$$

Notons que les coefficients de la matrice $M(K, \omega)$ font intervenir $\epsilon_j(\omega)$ et $\gamma_j(K, \omega)$ qui vérifient (en l'absence de pertes et pour ω réel)

$$\epsilon_j(-\omega) = \epsilon_j(\omega), \quad (\text{B.20a})$$

$$\gamma_j(K, -\omega) = -\gamma_j^*(K, \omega). \quad (\text{B.20b})$$

On en déduit

$$M(K, -\omega) = M^*(K, \omega), \quad (\text{B.21})$$

ce qui implique que les pulsations ω_p annulant le déterminant de $M(K, \omega)$ forment des couples $(\omega_p, -\omega_p)$

(on réordonne les indices p de sorte que $\omega_{-p} = -\omega_p$) de vecteurs-solutions associés

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ f_j^{(p)}(K) \\ b_j^{(p)}(K) \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \vdots \\ f_j^{(p)*}(K) \\ b_j^{(p)*}(K) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

En posant

$$\mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) = f_j^{(p)}(K) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{i\gamma_j |z-z_{j-1}|} + b_j^{(p)}(K) \left(\hat{\mathbf{K}} + \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{i\gamma_j |z-z_j|}, \quad (\text{B.22})$$

où γ_j dépend de $[\mathbf{K}, \omega_p(K)]$, l'équation (B.16) s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}, z, \omega) = \sum_p c_p(\mathbf{K}) \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \delta[\omega - \omega_p(K)], \quad (\text{B.23})$$

de transformée de Fourier inverse

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_p \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_p(K)t} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) c_p(\mathbf{K}). \quad (\text{B.24})$$

À noter que

$$\mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(-p)}(z) = f_j^{(p)*}(K) \left(\hat{\mathbf{K}} + \frac{K}{\gamma_j^*} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{-i\gamma_j^* |z-z_{j-1}|} + b_j^{(p)*}(K) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j^*} \hat{\mathbf{z}} \right) e^{-i\gamma_j^* |z-z_j|} \quad (\text{B.25a})$$

$$= -\mathbf{e}_{-\mathbf{K}}^{(p)*}(z), \quad (\text{B.25b})$$

et que la réalité de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ requiert $\mathbf{E}(-\mathbf{K}, z, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{K}, z, \omega)$, ce qui impose alors $c_p(\mathbf{K}) = -c_{-p}^*(-\mathbf{K})$.

On peut alors écrire $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p>0} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_p(K)t} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) c_p(\mathbf{K}) + c.c., \quad (\text{B.26})$$

où la somme $\sum_{p>0}$ correspond à une somme sur les branches de pulsations $\omega_p(K)$ positives.

On obtient ainsi une expression du champ électrique des ondes de surface sous forme de somme sur les branches de leur relation de dispersion ($\sum_{p>0}$) ainsi que sur les vecteurs d'onde \mathbf{K} , d'ondes de polarisation et dépendance par rapport à z données par $\mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z)$, d'amplitude $c_p(\mathbf{K})$ et de pulsation $\omega_p(K)$.

B.3 Cas avec pertes

Afin d'obtenir une expression du champ des ondes de surface avec pertes, on généralise l'expression (B.26) par analogie avec les expressions du champ avec pertes pour une interface simple obtenues au chapitre 1.

Ainsi, en complexifiant la pulsation $\omega_p(K)$ des ondes de surface, on obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p>0} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega_p t} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) c_p(\mathbf{K}, t) + c.c., \quad (\text{B.27})$$

où la pulsation $\omega_p(K)$ est désormais complexe (de partie imaginaire négative en présence de pertes) et l'amplitude $c_p(\mathbf{K}, t)$ dépend du temps t (de sorte que le produit $e^{-i\omega_p(K)t} c_p(\mathbf{K}, t)$ ne diverge pas quand t tend vers $-\infty$).

En complexifiant la composante K_x du vecteur d'onde \mathbf{K} , on obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p>0} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{dK_y}{2\pi} [e^{i\mathbf{K}^+\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}^+}^{(p)}(z) c_p^+(K_y, \omega, x) + e^{i\mathbf{K}^-\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}^-}^{(p)}(z) c_p^-(K_y, \omega, x)], \quad (\text{B.28})$$

avec $\mathbf{K}^+ = K_{x,sp}(K_y, \omega)\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{K}^- = -K_{x,sp}(K_y, \omega)\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}$ et $K_{x,sp}(K_y, \omega) = \sqrt{K_{sp}^2(\omega) - K_y^2}$ (cf. annexe A.3 pour les conventions de signe pour les racines complexes). On obtient deux termes, l'un en \mathbf{K}^+ correspondant aux ondes atténuées dans la direction des x croissants, l'autre en \mathbf{K}^- correspondant aux ondes atténuées dans la direction des x décroissants. Les amplitudes $c_p^+(K_y, \omega, x)$ et $c_p^-(K_y, \omega, x)$ dépendent désormais de K_y, ω ainsi que de x afin que les produits $e^{i\mathbf{K}^+\cdot\mathbf{r}} c_p^+(K_y, \omega, x)$ et $e^{i\mathbf{K}^-\cdot\mathbf{r}} c_p^-(K_y, \omega, x)$ ne divergent pas lorsque x tend vers $\pm\infty$.

B.4 Énergie et quantification

Nous allons déterminer l'énergie des ondes de surface à l'aide des résultats de l'annexe G, qui fournit une expression permettant de déterminer l'énergie de modes du champ électromagnétique en présence de milieux dispersifs, supposés sans pertes toutefois. Les modes considérés doivent être normalisables. Pour cela, on utilise les conditions aux limites de Born-von Karman dans les directions parallèles x et y . On suppose ainsi que l'espace a une période L dans ces directions (et on pose $S = L \times L$). Les vecteurs d'onde \mathbf{K} sont alors discrets (et de la forme $\mathbf{K} = n_x \frac{2\pi}{L} \hat{\mathbf{x}} + n_y \frac{2\pi}{L} \hat{\mathbf{y}}$), et l'équation (B.26) devient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega_p(K)t} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) c_p(\mathbf{K}) + c.c., \quad (\text{B.29})$$

(La dimension de l'amplitude $c_p(\mathbf{K})$ change par rapport à B.26).

L'équation (G.27) permet d'écrire l'énergie associée à ces modes,

$$U = \epsilon_0 \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} \int_V d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(z, \omega)] \left| \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right|^2 + \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times [e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z)] \right|^2 \right\} |c_p(\mathbf{K})|^2. \quad (\text{B.30})$$

On normalise alors le vecteur $\mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z)$ à l'aide de la condition

$$\frac{1}{2} \int dz \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(z, \omega)] \left| \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right|^2 + \left| \frac{\epsilon(z, \omega)}{K} \frac{\omega}{c} e_{\mathbf{K},z}^{(p)}(z) \right|^2 \right\} = 1, \quad (\text{B.31})$$

(cette condition est différente de G.29). On a utilisé l'égalité $\left[e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right] = -i \frac{\epsilon(z, \omega)}{K} \frac{\omega}{c} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e_{\mathbf{K},z}^{(p)}(z) \mathbf{z} \times \mathbf{K}$ afin de simplifier l'expression du second terme entre crochets. U vaut alors

$$U = 2\epsilon_0 S \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} |c_p(\mathbf{K})|^2 = \epsilon_0 S \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} [c_p(\mathbf{K}) c_p(\mathbf{K})^* + c_p(\mathbf{K})^* c_p(\mathbf{K})]^2. \quad (\text{B.32})$$

On quantifie canoniquement ces modes à l'aide des relations

$$c_p(\mathbf{K}) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 S \omega_p(K)}} \hat{a}_p(\mathbf{K}), \quad (\text{B.33a})$$

$$c_p(\mathbf{K})^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 S \omega_p(K)}} \hat{a}_p^+(\mathbf{K}). \quad (\text{B.33b})$$

Le hamiltonien des ondes de surface et l'opérateur associé à leur champ électrique sont alors

$$\hat{H} = \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} \hbar \omega_p(K) \left[\hat{a}_p^+(\mathbf{K}) \hat{a}_p(\mathbf{K}) + \frac{1}{2} \right], \quad (\text{B.34a})$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} i \sqrt{\frac{\hbar \omega_p(K)}{2\epsilon_0 S}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \hat{a}_p(\mathbf{K}) e^{-i\omega_p(K)t} + h.c. \quad (\text{B.34b})$$

Les expressions (B.30) et (B.31), faisant intervenir des intégrales selon la coordonnée z , permettent de donner la répartition de cette énergie selon l'axe z . On peut en effet ré-écrire (B.30) et (B.31) sous la forme

$$U = \underbrace{\int dz \epsilon_0 \sum_{p>0} \sum_{\mathbf{K}} \int dx \int dy \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(z, \omega)] \left| \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right|^2 + \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times \left[e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right] \right|^2 \right\} |c_p(\mathbf{K})|^2}_{u(z)}, \quad (\text{B.35a})$$

$$\underbrace{\int dz \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(z, \omega)] \left| \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^{(p)}(z) \right|^2 + \left| \frac{\epsilon(z, \omega)}{K} \frac{\omega}{c} e_{\mathbf{K},z}^{(p)}(z) \right|^2 \right\}}_{f_{\mathbf{K}}^{(p)}(z)} = 1, \quad (\text{B.35b})$$

où $u(z)$ est une énergie par unité de longueur dans la direction z , et $f_{\mathbf{K}}^{(p)}(z)$ une fonction de distribution de l'énergie du mode (p, \mathbf{K}) dans cette direction, normalisée par l'équation B.31.

Annexes du chapitre « Champ des ondes de surface à l'aide du formalisme de Green »

C.1 Calculations of the surface plasmon field

For the plane interface system, it is convenient to use the representation due to Sipe (SIPE 1987) that consists of a decomposition over elementary plane waves. We consider the interface such as the lower medium $z < 0$ is denoted as medium 1 and the upper medium $z > 0$ is medium 2. We use the dyadic notation for the tensor. For instance, the s -component of the electric field is given by $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{E} = \hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E})$. Using the notations of Eq. (1.5), we have for the field in the lower half-space $z < 0$ and currents below z ($z' < z$):

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \overleftarrow{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}, z, z', \omega) + \frac{i}{2\gamma_1} [\hat{\mathbf{s}}r_s\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_1^- r_p \hat{\mathbf{p}}_1^+] e^{-i\gamma_1 z'} e^{-i\gamma_1 z} \quad (\text{C.1})$$

where $\overleftarrow{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}, z, z', \omega)$ denotes the Fourier transform of the Green's tensor of an infinite space filled by medium 1.

For the field in the upper half-space ($z > 0$) and currents still in the lower half-space ($z' < 0$), one has :

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \frac{i}{2\gamma_1} [\hat{\mathbf{s}}t_s\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_2 t_p \hat{\mathbf{p}}_1^+] e^{-i\gamma_1 z'} e^{i\gamma_2 z} \quad (\text{C.2})$$

The Fresnel reflection and transmission factors are given by :

$$r_s = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad r_p = \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\gamma_1 \epsilon_2 + \gamma_2 \epsilon_1} \quad (\text{C.3})$$

$$t_s = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad t_p = \frac{2\gamma_1 \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2}}{\gamma_1 \epsilon_2 + \gamma_2 \epsilon_1} \quad (\text{C.4})$$

$\gamma_m = \sqrt{\epsilon_m \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2}$ for $m = 1, 2$ is chosen so that $\Im \gamma_m > 0$. This way, using $\epsilon_m(-\omega^*) = \epsilon_m^*(\omega)$, one has $\gamma_m(K^*, -\omega^*) = -\gamma_m^*(K, \omega)$. The square roots of dielectric constants $\sqrt{\epsilon_m}$ are chosen so that $\Re \sqrt{\epsilon_m} \geq 0$. $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K} \times \mathbf{z}/K$, $\hat{\mathbf{p}}_1^\pm = (K\mathbf{z} \mp \gamma_1 \mathbf{K}/K)/(k_0 \sqrt{\epsilon_1})$ and $\hat{\mathbf{p}}_2 = (K\mathbf{z} - \gamma_2 \mathbf{K}/K)/(k_0 \sqrt{\epsilon_2})$, $k_0 = \omega/c$ and $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ is chosen so that $\Im K > 0$ or $\Im K = 0$ and $\Re K > 0$. This way, one has $\hat{\mathbf{p}}(-\mathbf{K}, -\omega^*) = -\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{K}, \omega)^*$ when \mathbf{K} is real and ω complex and $\hat{\mathbf{p}}(-\mathbf{K}^*, -\omega) = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{K}, \omega)^*$ when \mathbf{K} is complex and ω real.

We extend the definition of $\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)$ to complex values of ω and assume that the denominator of

the Fresnel coefficients r_p and t_p (whose nullity is equivalent to Eq. (4.4)) has two roots ω_{sp} and $-\omega_{sp}^*$:

$$\frac{1}{\gamma_1 \epsilon_2 + \gamma_2 \epsilon_1} = \frac{C(K, \omega)}{(\omega - \omega_{sp})(\omega + \omega_{sp}^*)} \quad (\text{C.5})$$

with $\Im \omega_{sp} < 0$. $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ then features two poles at ω_{sp} and $-\omega_{sp}^*$. The residues of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at these poles can be calculated with $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\tilde{\omega}}(\mathbf{K}, z, z') = \lim_{\omega \rightarrow \tilde{\omega}} [(\omega - \tilde{\omega}) \overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)]$ where $\tilde{\omega}$ denotes ω_{sp} or $-\omega_{sp}^*$. It comes :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}(\mathbf{K}, z, z') = i \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{C(K, \omega_{sp})}{2\Re \epsilon \omega_{sp}} \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_m} \mathbf{n}_m \right) \hat{\mathbf{p}}_1^+ e^{-i\gamma_1 z'} e^{i\gamma_m |z|} \quad (\text{C.6})$$

where \mathbf{n}_m denotes $-\hat{\mathbf{z}}$ for $z < 0$ and $\hat{\mathbf{z}}$ for $z > 0$, γ_m denotes γ_1 for $z < 0$ and γ_2 for $z > 0$. γ_1 and γ_2 depends on K and ω_{sp} and $\hat{\mathbf{p}}_1^+$ on \mathbf{K} and ω_{sp} .

Using $\epsilon_m(-\omega^*) = \epsilon_m^*(\omega)$, $\gamma_m(K, -\omega^*) = -\gamma_m^*(K, \omega)$, and $\hat{\mathbf{p}}_1^+(\mathbf{K}, -\omega^*) = -\hat{\mathbf{p}}_1^+(-\mathbf{K}, \omega)^*$, we have :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-\omega_{sp}^*}(\mathbf{K}, z, z') = -\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\omega_{sp}}^*(-\mathbf{K}, z, z') \quad (\text{C.7})$$

Using Eq. (1.7), (1.9) and (C.6), one can find the amplitudes in Eq. (1.10) :

$$E(\mathbf{K}, t) = -\mu_0 \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{C(K, \omega_{sp})}{2\Re \epsilon \omega_{sp}} \int d^2 \mathbf{r}' e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} \int_{-\infty}^0 dz' e^{-i\gamma_1 z'} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega_{sp} t'} \hat{\mathbf{p}}_1^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'}(\mathbf{r}', t') \quad (\text{C.8})$$

We now extend the definition of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)$ to complex values of K_x and assume¹ that the denominator of the Fresnel coefficients r_p and t_p has two roots $K_{x, sp} = \sqrt{K_{sp}^2 - K_y^2}$ and $-K_{x, sp}$:

$$\frac{1}{\gamma_1 \epsilon_2 + \gamma_2 \epsilon_1} = \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \frac{1}{(K_x - K_{x, sp})(K_x + K_{x, sp})} \quad (\text{C.9})$$

with $\Im K_{x, sp} > 0$, and where K_{sp} depends on ω and is given by the dispersion relation. $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ then features two poles at $K_{x, sp}$ and $-K_{x, sp}$.

The residues of $\overleftrightarrow{\mathbf{g}}$ at these poles can be calculated with $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{\tilde{K}_x}(K_y, z, z', \omega) = \lim_{K_x \rightarrow \tilde{K}_x} [(K_x - \tilde{K}_x) \overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)]$ where \tilde{K}_x denotes $K_{x, sp}$ or $-K_{x, sp}$. It comes :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{K_{x, sp}}(K_y, z, z', \omega) = \frac{i}{2K_{x, sp}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \left(\hat{\mathbf{K}}^+ - \frac{K}{\gamma_m} \mathbf{n}_m \right) \hat{\mathbf{p}}_1^+(K_{x, sp} \hat{\mathbf{x}} + K_y \hat{\mathbf{y}}, \omega) e^{-i\gamma_1 z'} e^{i\gamma_m |z|} \quad (\text{C.10})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}_{-K_{x, sp}}(K_y, z, z', \omega) = -\frac{i}{2K_{x, sp}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \left(\hat{\mathbf{K}}^- - \frac{K}{\gamma_m} \mathbf{n}_m \right) \hat{\mathbf{p}}_1^+(-K_{x, sp} \hat{\mathbf{x}} + K_y \hat{\mathbf{y}}, \omega) e^{-i\gamma_1 z'} e^{i\gamma_m |z|} \quad (\text{C.11})$$

where $\hat{\mathbf{K}}^+ = \frac{K_{x, sp} \hat{\mathbf{x}} + K_y \hat{\mathbf{y}}}{K_{sp}}$, $\hat{\mathbf{K}}^- = \frac{-K_{x, sp} \hat{\mathbf{x}} + K_y \hat{\mathbf{y}}}{K_{sp}}$, and the other notations are defined above.

1. This is the case for a vacuum/metal (Drude model) interface.

Using Eq. (1.7), (1.11), (1.12), (C.10) and (C.11), one can find the amplitudes in Eq. (1.13) :

$$E_{>}(K_y, \omega, x) = \mu_0 \frac{1}{2K_{x,sp}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \int_{-\infty}^x dx' e^{-iK_{x,sp}x'} \int dy' e^{-iK_y y'} \int_{-\infty}^0 dz' e^{-i\gamma_1 z'} \int dt' e^{i\omega t'} \hat{\mathbf{p}}_1^+(K_{x,sp}\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}, \omega) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'}(\mathbf{r}', t') \quad (\text{C.12})$$

$$E_{<}(K_y, \omega, x) = \mu_0 \frac{1}{2K_{x,sp}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \int_x^{\infty} dx' e^{-iK_{x,sp}x'} \int dy' e^{-iK_y y'} \int_{-\infty}^0 dz' e^{-i\gamma_1 z'} \int dt' e^{i\omega t'} \hat{\mathbf{p}}_1^+(-K_{x,sp}\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}, \omega) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t'}(\mathbf{r}', t') \quad (\text{C.13})$$

C.2 Surface plasmon field of a dipole

The currents associated with the dipole $\mathbf{p}_0 e^{-i\omega_0 t}$ at a distance d above the interface are given by $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 2\Re \mathbf{e} [e^{-i\omega_0 t} (-i)\omega_0 \mathbf{p}_0] \delta(\mathbf{r} - (-d)\hat{\mathbf{z}})$. Using the form of the surface plasmon field given by Eq. (1.14), one can compute the amplitude with this expression and Eq. (C.12) :

$$E_{>}(K_y, \omega) = -\frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \frac{\gamma_1 \epsilon_2}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} \frac{1}{2K_{x,sp}} e^{i\gamma_1 d} \mu_0 \omega_0^2 \hat{\mathbf{p}}_1^+ \cdot [2\pi \delta(\omega - \omega_0) \mathbf{p}_0 + 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \mathbf{p}_0^*] \quad (\text{C.14})$$

Hence, using Eq. (1.14) and the properties $K(-\mathbf{K}^*) = -K^*(\mathbf{K})$, $K_{x,sp}(K_y, -\omega) = -K_{x,sp}^*(K_y, \omega)$, $\gamma_m(K^*, -\omega) = -\gamma_m^*(K, \omega)$, $\epsilon_m(-\omega) = \epsilon_m^*(\omega)$ and the definition of $\hat{\mathbf{p}}_1^+$, it comes :

$$\mathbf{E}_m = -\Re \mathbf{e} \left[e^{i\gamma_m |z|} e^{-i\omega_0 t} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\epsilon_0} \int \frac{dK_y}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{K_{x,sp}} \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_m} \hat{\mathbf{n}}_m \right) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_1} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot \mathbf{p}_0 \right] \quad (\text{C.15})$$

By derivating $\int \frac{dK_y}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{K_{x,sp}} = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(K_{sp}\rho)$ with respect to x or y one finds $\int \frac{dK_y}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{K_{x,sp}} \hat{\mathbf{K}} = \frac{i}{2} H_1^{(1)}(K_{sp}\rho) \hat{\boldsymbol{\rho}}$ and $\int \frac{dK_y}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{K_{x,sp}} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} \left[[H_1^{(1)}(K_{sp}\rho)]' \hat{\boldsymbol{\rho}} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{H_1^{(1)}(K_{sp}\rho)}{K_{sp}\rho} \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$. Using these relations and the value of \mathbf{p}_0 , with $M(K, \omega) = -\frac{\gamma_1 \gamma_2}{4} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}$, we get Eq.(1.15) and (1.17). According to Eq.(1.14), the field found in Eq.(1.15) and (1.17) only apply in the $x > 0$ half-space. Using symmetries arguments, one find easily that they also apply in the $x < 0$ half-space.

Eq.(1.15) and (1.17) can then be simplified using the asymptotical form of the Hankel functions $H_n(z) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - \frac{1}{2}\pi i(n + \frac{1}{2})}$. Denoting $M'_v(K_{sp}, \omega_0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} M(K_{sp}, \omega_0) \frac{K_{sp}}{\gamma_1 \epsilon_0}$, we obtain Eq.(1.16). Using also the property of the Hankel functions $H_1'(z) = H_0(z) - \frac{1}{z} H_1(z)$ and denoting $M'_h(K_{sp}, \omega_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} M(K_{sp}, \omega_0) \frac{1}{\epsilon_0}$, we obtain Eq.(1.18).

Annexes du chapitre « Optique de Fourier des ondes de surface »

Sommaire

C.1 Calculations of the surface plasmon field	135
C.2 Surface plasmon field of a dipole	137

D.1 Identité de Green en dimension 2

On montre, en dimension 3, en intégrant la quantité $\nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla \cdot (v \nabla u)$ sur un volume V de frontière S à l'aide de la formule de Green-Ostrogradski et en utilisant les relations $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + (\nabla f) \cdot \mathbf{A}$ et $\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$, l'identité de Green,

$$\int_V dV [u \Delta v - v \Delta u] = \int_S dS \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right], \quad (\text{D.1})$$

qui exprime une intégrale sur le volume V dépendant des valeurs des champs scalaires u et v sur V (membre de gauche), sous forme d'une intégrale sur la frontière S de ce volume, dépendant des valeurs de u et v sur S uniquement (voir figure D.1). $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée selon la normale sortante de S ($\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$).

Celle-ci se généralise aisément en dimension 2. Si l'on considère deux champs scalaires u et v fonctions de x et y uniquement, on peut leur associer les deux champs scalaires 3D \tilde{u} et \tilde{v} vérifiant $\tilde{u}(x, y, z) = u(x, y)$ et $\tilde{v}(x, y, z) = v(x, y)$. On considère également une surface S de frontière L du plan xy (figure D.2, gauche), à laquelle on associe le volume \tilde{V} de frontière \tilde{S} et de hauteur h (figure D.2, droite).

En écrivant l'identité de Green (D.1) pour les champs \tilde{u} et \tilde{v} sur \tilde{V} , on obtient

$$\int_{\tilde{V}} dV [\tilde{u} \Delta \tilde{v} - \tilde{v} \Delta \tilde{u}] = \int_{\tilde{S}} dS \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Le membre de gauche de cette équation vérifie

$$\int_{\tilde{V}} dV [\tilde{u} \Delta \tilde{v} - \tilde{v} \Delta \tilde{u}] = h \int_S dS [u \Delta_{//} v - v \Delta_{//} u]. \quad (\text{D.3})$$

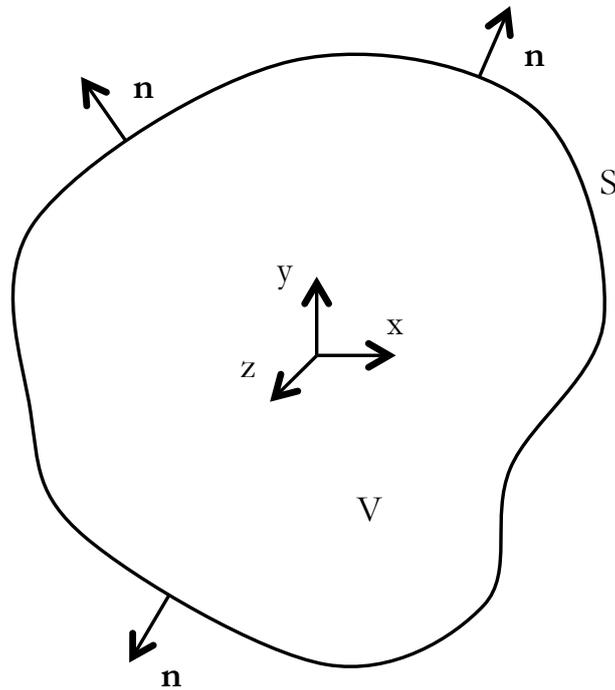
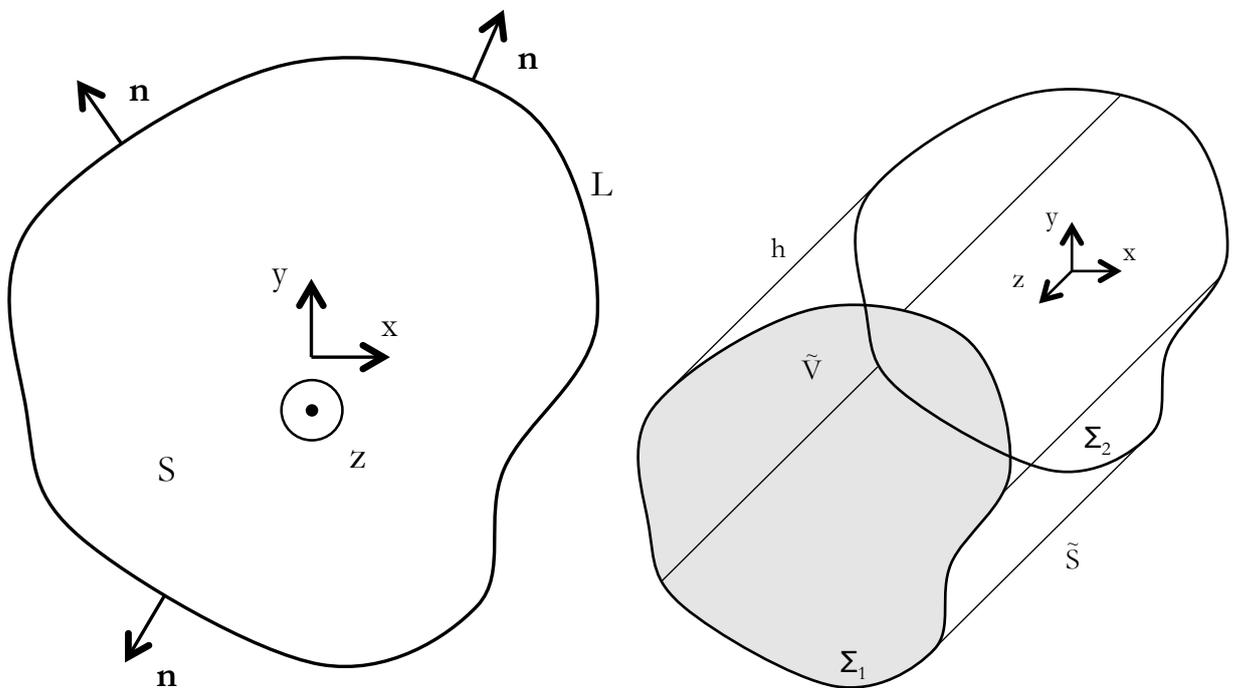


FIGURE D.1 – Illustration de l'identité de Green 3D.

FIGURE D.2 – Illustrations de l'identité de Green 2D. Gauche : surface S de frontière L , droite : volume \tilde{V} de frontière \tilde{S} se déduisant de S et L (voir corps du texte).

Les sommes sur les extrémités Σ_1 et Σ_2 (voir figure D.2) de la somme sur \tilde{S} de (D.2) sont nulles car sur ces surfaces, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}$, et \tilde{u} et \tilde{v} ne dépendant pas de z , leurs dérivées normales sont nulles. Le membre de droite de (D.2) vérifie alors

$$\int_{\tilde{S}} dS \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right] = h \int_L dL \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right]. \quad (\text{D.4})$$

En utilisant les équations (D.2), (D.3) et (D.4), on peut alors écrire

$$\int_S dS [u \Delta_{//} v - v \Delta_{//} u] = \int_L dL \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right]. \quad (\text{D.5})$$

D.2 Expressions mathématiques du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface

D.2.1 Obtention du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface

Nous allons montrer ici comment on détermine la forme mathématique du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface (équation 2.25). On écrit pour cela la fonction de Green,

$$G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = i\pi H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|), \quad (\text{D.6})$$

solution de l'équation

$$\Delta_{//} G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') + K_{sp}^2 G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = -4\pi \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (\text{D.7})$$

(l'opérateur $\Delta_{//}$ s'applique à la variable $\vec{\rho}'$). En multipliant cette équation par $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$ et en utilisant (2.5), on obtient

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}') \Delta_{//} G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') - \Delta_{//} \mathcal{E}(\vec{\rho}') G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = -4\pi \mathcal{E}(\vec{\rho}) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \quad (\text{D.8})$$

On somme alors cette expression sur une surface S du plan xy (voir figure 2.10),

$$\int_S dS [\mathcal{E}(\vec{\rho}') \Delta_{//} G(\vec{\rho} - \vec{\rho}') - \Delta_{//} \mathcal{E}(\vec{\rho}') G(\vec{\rho} - \vec{\rho}')] = -4\pi \int_S dS \mathcal{E}(\vec{\rho}) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \quad (\text{D.9})$$

Le membre de gauche de cette équation peut s'exprimer sous forme de somme sur la frontière L de S à l'aide de l'identité de Green (voir annexe D.1). Le membre de droite vaut $-4\pi \mathcal{E}(\vec{\rho})$ si $\vec{\rho}$ est dans S , 0 sinon. On peut alors écrire

$$\frac{1}{4i} \int_L dl \left\{ \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} [H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)] - H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} [\mathcal{E}(\vec{\rho}')] \right\} = \begin{cases} \mathcal{E}(\vec{\rho}) & \text{si } \vec{\rho} \text{ dans } S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Le cas où $\vec{\rho}$ est dans S permet de retrouver l'équation (2.25).

D.2.2 Sources secondaires sur une courbe ouverte

L'équation (2.25) exprime $\mathcal{E}(x, y)$ sous forme d'une intégrale le long d'un contour *fermé*. Sous certaines conditions, souvent remplies, nous allons voir que celle-ci peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale le long d'une portion de courbe, pas nécessairement fermée, ce qui permettra d'obtenir un principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface sous une forme plus pratique à utiliser.

Nous considérons maintenant la courbe fermée L représentée sur la figure D.3, constituée de la réunion

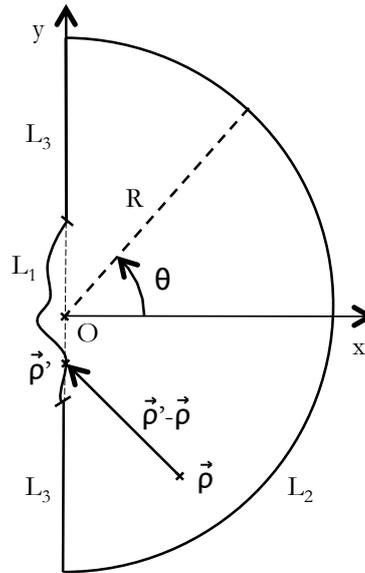


FIGURE D.3 – Géométrie utilisée pour obtenir un principe d'Huygens-Fresnel sur une courbe ouverte.

des courbes L_1 , L_2 et L_3 . L_1 consiste en une portion de courbe à proximité de l'origine O , d'extrémités situées sur l'axe Oy . L_2 est un demi-cercle de centre O et de rayon R . L_3 est constitué de deux portions de l'axe Oy , joignant les extrémités de L_1 et L_2 .

Nous allons utiliser cette géométrie afin de modéliser un système dont les sources d'ondes de surface se situent dans une région limitée de l'espace (près de L_1), où l'on peut supposer le champ nul le long d'un axe de part et d'autre des sources (ici, L_3), et où il n'y a pas d'autres sources d'ondes de surface (ce qui permettra d'écrire une condition de rayonnement de Sommerfeld pour les ondes de surface). Le terme de droite de l'équation (2.25) peut se décomposer en trois intégrales, sur L_1 , L_2 et L_3 ,

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \frac{1}{4i} \int_{L_1} dL \left\{ \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] - H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}') \right\} \quad (\text{D.11})$$

$$+ \frac{1}{4i} \int_{L_2} dL \dots + \frac{1}{4i} \int_{L_3} dL \dots, \quad (\text{D.12})$$

(on intègre trois fois la même expression).

L'intégrale le long de L_3 est nulle, car on a supposé $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ et sa dérivée normale nuls sur L_3 .

Nous allons voir que l'intégrale le long de L_2 tend vers 0 quand R tend vers ∞ . Considérons la contribution de L_2 au terme de droite de (D.11), et notons-la $\mathcal{E}_2(\vec{\rho})$. Pour R suffisamment grand, L_2 est loin des points d'observation et plusieurs simplifications peuvent être effectuées. On a $\vec{\rho}' - \vec{\rho} \approx \vec{\rho}' = R\hat{\rho}$, $\mathbf{n} \approx \hat{\rho}$ (vecteur unitaire radial), et $\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial R}$. Les expressions asymptotiques des fonctions de Hankel permettent d'écrire¹ $H_1^{(1)}(K_{sp}R) \approx -iH_0^{(1)}(K_{sp}R) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(-i)\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$. L'intégrale le long de L_2 peut se ré-écrire sous la forme $\int_{L_2} dL = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \mathcal{E}_2(\vec{\rho})$ peut alors être considérablement simplifié,

$$\mathcal{E}_2(\vec{\rho}) = \frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{iK_{sp}R}}{\sqrt{K_{sp}}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sqrt{R} \left[iK_{sp} \mathcal{E}(R\hat{\rho}) - \frac{\partial}{\partial R} \mathcal{E}(R\hat{\rho}) \right]. \quad (\text{D.13})$$

Cette intégrale s'annule lorsque $R \rightarrow \infty$ si la *condition de rayonnement de Sommerfeld pour les ondes de surface* est satisfaite (ce qui est notamment le cas pour les ondes cylindriques générées par un dipôle),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left[iK_{sp} \mathcal{E}(R\hat{\rho}) - \frac{\partial}{\partial R} \mathcal{E}(R\hat{\rho}) \right] = 0 \quad (\text{D.14})$$

L'équation (D.11) peut donc s'écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \frac{1}{4i} \int_{L_1} dL \left\{ \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] - H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}') \right\}. \quad (\text{D.15})$$

Là encore, l'intégrale le long de L_1 et les dérivées dans la direction normale $\frac{\partial}{\partial n}$ s'effectuent par rapport à la variable $\vec{\rho}'$. Pour cette géométrie très fréquente en pratique, on voit qu'il est ainsi possible d'obtenir une expression du champ en fonction d'une intégrale le long d'une courbe non nécessairement fermée.

D.2.3 Sources secondaires sur une droite

Dans l'équation (D.15) figure non seulement $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$ le long de L_1 , mais également sa dérivée dans la direction normale à L_1 , $\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}')$. Dans le cas où L_1 est une droite, nous allons voir que l'intégrale figurant dans (D.15) peut s'exprimer soit en fonction de $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$, soit en fonction de $\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}')$, leurs deux contributions dans (D.15) étant ici égales. Nous choisissons donc L_1 coïncidant avec l'axe Oy (figure D.4). Soit alors $\vec{\rho}''$ le symétrique de $\vec{\rho}$ par rapport à l'axe Oy (voir figure D.4). $\vec{\rho}''$ se situant en dehors de S , l'équation (D.10) permet d'écrire

$$\int_L dL \left\{ \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho}'' - \vec{\rho}'|) \right] - H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho}'' - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}') \right\} = 0. \quad (\text{D.16})$$

Comme précédemment, l'intégrale le long de L peut se décomposer en trois intégrales, le long de L_1 , L_2 et L_3 , et les intégrales le long de L_2 et L_3 s'annulent. De plus, $\vec{\rho}$ et $\vec{\rho}''$ étant symétriques l'un de l'autre, on a sur L_1 , $|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = |\vec{\rho}'' - \vec{\rho}'|$ et $\frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho}'' - \vec{\rho}'|) \right] = -\frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right]$, où les dérivées

1. Asymptotiquement, pour $|z|$ grand, on a $H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$ et $H_1^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (-i) \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$ (FESHBACH et MORSE 1953).

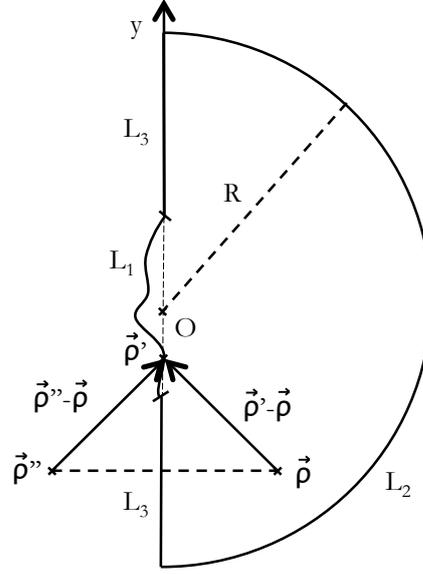


FIGURE D.4 – Géométrie utilisée pour obtenir un principe d’Huygens-Fresnel avec un champ connu sur une droite.

normales s’effectuent toujours par rapport à $\vec{\rho}'$. On a donc finalement :

$$\int_{L_1} dL \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] = - \int_{L_1} dL H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'). \quad (\text{D.17})$$

Les équations (D.15) et (D.17) permettent alors d’écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \frac{1}{2i} \int_{L_1} dL \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] \quad (\text{D.18a})$$

$$= -\frac{1}{2i} \int_{L_1} dL H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'). \quad (\text{D.18b})$$

On voit ainsi que dans le cas simple d’un champ d’ondes de surface incident connu le long d’une droite, on peut écrire le champ des ondes de surface après propagation en fonction de la seule connaissance de l’amplitude du champ le long de la droite en question (équation D.18a), ou bien en fonction uniquement de sa dérivée normale (équation D.18b).

D.3 Composantes parallèles et perpendiculaire du champ des ondes de surface

D.3.1 Continuité du champ parallèle $E_{//}$

La séparation des variables pour la composante E_z du champ des ondes de surface a conduit à introduire une fonction $f(z)$ contenant la dépendance par rapport à la variable z de $E_z(\mathbf{r})$, voir équation (2.1). La continuité de $\epsilon(z, \omega)f(z)$ à la traversée de chaque interface est immédiate à partir de celle de $\epsilon(z, \omega)E_z(\mathbf{r})$. Nous allons maintenant montrer que $\frac{df}{dz}$ est également continue à la traversée de chaque interface.

Dans chaque couche de l'hétérostructure, on a $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, soit $\frac{\partial E_x}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}(x, y)\frac{df}{dz} = 0$. Cette égalité permet d'écrire

$$\frac{df}{dz} = -\frac{1}{\mathcal{E}(x, y)} \left[\frac{\partial E_x}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\mathbf{r}) \right]. \quad (\text{D.19})$$

Les composantes parallèles E_x et E_y étant continues à la traversée de chaque interface, leurs dérivées *dans les directions parallèles x et y* le sont elles aussi, ce qui entraîne que $\frac{df}{dz}$ l'est également.

D.3.2 Champ parallèle $E_{//}$ en fonction du champ perpendiculaire E_z

Les composantes E_x et E_y du champ électrique peuvent s'écrire sous la forme de sommes de termes proportionnels² à $e^{\pm i\gamma_j z}$. L'équation de Helmholtz $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon(z, \omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ permet alors d'écrire

$$\Delta_{//}\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \underbrace{\left[\epsilon(z, \omega)\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right]}_{K_{sp}^2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (\text{D.20})$$

L'équation $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ peut s'écrire sous la forme $\nabla_{//}\cdot \mathbf{E}_{//} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. En prenant le gradient parallèle de cette expression, on obtient

$$\nabla_{//}[\nabla_{//}\cdot \mathbf{E}_{//}] + \nabla_{//}\frac{\partial E_z}{\partial z} = \mathbf{0}. \quad (\text{D.21})$$

Or on peut montrer que $\nabla_{//}[\nabla_{//}\cdot \mathbf{E}_{//}] = \Delta_{//}\mathbf{E}_{//}$ en utilisant $B_z = 0$, d'où $\nabla_{//}[\nabla_{//}\cdot \mathbf{E}_{//}] = -K_{sp}^2\mathbf{E}_{//}$, ce qui permet alors d'écrire

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \frac{1}{K_{sp}^2}\nabla_{//}\left[\frac{\partial E_z}{\partial z}\right] = \frac{1}{K_{sp}^2}\nabla_{//}[\mathcal{E}(x, y)]\frac{df}{dz}. \quad (\text{D.22})$$

2. On peut en fait le montrer en séparant les variables de E_x et E_y : $E_x = \mathcal{E}_x(x, y)f_x(z)$, $E_y = \mathcal{E}_y(x, y)f_y(z)$. L'équation $\mathbf{z} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$, valide pour les ondes polarisées p , permet d'écrire $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}f_y(z) - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}f_x(z) = 0$. $f_x(z)$ et $f_y(z)$ sont donc proportionnelles, on peut les supposer égales sans perte de généralité à une même fonction $f_{//}(z)$. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ permet d'écrire $\left[\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y}(x, y) \right] f_{//}(z) + \mathcal{E}(x, y)\frac{df}{dz} = 0$. Ainsi, $f_{//}(z)$ est proportionnelle à $\frac{df}{dz}$, que l'on peut écrire sous la forme de somme de termes en $e^{\pm \gamma_j z}$ (voir annexe D.4). On peut supposer $f_{//}(z) = \frac{df}{dz}$ sans perte de généralité. Ainsi $f_{//}(z)$ s'écrit bien sous la forme voulue.

D.4 Relation de dispersion des ondes de surface dans un milieu stratifié

Nous cherchons ici à résoudre l'équation (2.7), qui porte sur la dépendance en z , $f(z)$, de E_z (voir équation 2.1), dans le cas d'un milieu stratifié quelconque (voir figure 2.4, sur laquelle sont précisées les notations).

Les notations sont précisées dans la note de la figure 2.4. Dans la couche j du système ($z_{j-1} < z < z_j$), on a $\epsilon(z, \omega) = \epsilon_j(\omega)$. En posant $\gamma_j = \sqrt{\epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$ (voir annexe A.3 à propos des racines complexes), l'équation (2.7) dans la couche j peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_j^2 f(z) = 0, \quad (\text{D.23})$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(z) = \alpha_j e^{i\gamma_j(z-z_{j-1})} + \beta_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)}$. Dans les deux espaces semi-infinis des extrémités ($j = 1$ et $j = M + 1$), il faut $\alpha_1 = \beta_{M+1} = 0$ afin que le champ loin de la structure ne diverge pas (si γ_1 ou γ_{M+1} complexe) et qu'il n'y ait pas d'onde incidente sur la structure (si γ_1 ou γ_{M+1} réel positif).

Pour chaque interface $z = z_j$ ($j = 1$ à M), on peut alors écrire 2 équations de continuité (continuité de $\epsilon(z, \omega)f(z)$ et $\frac{df}{dz}$),

$$\epsilon_j(\omega) [\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} + \beta_j] = \epsilon_{j+1}(\omega) [\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}}], \quad (\text{D.24a})$$

$$i\gamma_j [\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} - \beta_j] = i\gamma_{j+1}(\omega) [\alpha_{j+1} - \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}}]. \quad (\text{D.24b})$$

On rappelle que l'on a supposé $\alpha_1 = \beta_{M+1} = 0$ afin qu'il ne se pose pas de problème d'intégrales divergentes. On obtient ainsi un total de $2M$ équations pour $2M$ inconnues (2 par couche pour $M+1$ couches soit $2M+2$ inconnues, moins les deux valeurs imposées $\alpha_1 = 0$ et $\beta_{M+1} = 0$).

Il s'agit d'un système linéaire et homogène d'équations. Ses solutions α_j et β_j seront toutes nulles sauf si son déterminant est nul. Ce déterminant dépend de la géométrie de la structure, via les épaisseurs d_j et les constantes diélectriques $\epsilon_j(\omega)$, ainsi que de la constante K_{sp} et de ω , via les termes γ_j et $\epsilon_j(\omega)$. Son annulation fournit une équation implicite reliant K_{sp} et ω , qui constitue la relation de dispersion des ondes de surface de ce système. Pour chacun des couples (K_{sp}, ω) de la relation de dispersion, le système d'équations (D.24) a un ensemble de solutions non nulles de la forme

$$(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n, \tilde{\alpha}_{n+1}), \quad (\text{D.25})$$

où les coefficients $\tilde{\alpha}_j$ et $\tilde{\beta}_j$ sont des fonctions de K_{sp} ou ω (ils dépendent du point de la relation de dispersion considéré). Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 1, toutes les solutions sont proportionnelles entre elles. À chacune de ces solutions correspond une fonction $f(z)$ de la forme

$$f(z) = \tilde{\alpha}_j e^{i\gamma_j(z-z_j)} + \tilde{\beta}_j e^{i\gamma_j(z_{j+1}-z)}, \quad (\text{D.26})$$

qui permet d'obtenir le champ E_z de l'onde de surface correspondante.

D.5 Vecteur de Poynting des ondes de surface

Afin de définir la notion de rayon d'ondes de surface, nous allons calculons au préalable leur vecteur de Poynting. Pour cela, nous allons déterminer d'abord déterminer une expression de leur champ magnétique.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{D.27a})$$

$$= \frac{1}{i\omega} \left\{ \nabla_{//} \times \mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) + [\nabla_{//} E_z(\mathbf{r})] \times \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \times \left[\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (\text{D.27b})$$

En utilisant les expressions (2.1), (2.2) et (2.7), on obtient au final

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega} \frac{\epsilon(z, \omega)}{n_{sp}^2} \left[-\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right] f(z). \quad (\text{D.28})$$

On s'intéresse alors au vecteur de Poynting correspondant.

$$\langle \Pi(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})] \quad (\text{D.29a})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r}) + E_z(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})]. \quad (\text{D.29b})$$

On ne s'intéresse qu'à la partie de $\langle \Pi(\mathbf{r}, t) \rangle$ dans le plan parallèle xy , que l'on note $\langle \Pi_{//}(\mathbf{r}, t) \rangle$, ce qui permet de simplifier le terme $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})$, parallèle à $\hat{\mathbf{z}}$. En utilisant (2.1) et (D.28), on obtient

$$\langle \Pi_{//}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left\{ \frac{1}{i\omega} \frac{\epsilon(z, \omega)}{n_{sp}^2} |f(z)|^2 [\mathcal{E}^*(x, y) \nabla_{//} \mathcal{E}(x, y)] \right\}. \quad (\text{D.30})$$

On calcule alors le terme $\mathcal{E}^*(x, y) \nabla_{//} \mathcal{E}(x, y)$ en utilisant (2.33),

$$\mathcal{E}^*(x, y) \nabla_{//} \mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0^*(x, y) e^{ik_0 S(\mathbf{r})} \left\{ [\nabla_{//} \mathcal{E}_0(x, y)] e^{ik_0 S(x, y)} + \mathcal{E}_0(x, y) ik_0 [\nabla_{//} S] e^{ik_0 S(x, y)} \right\} \quad (\text{D.31a})$$

$$= \mathcal{E}_0^*(x, y) \nabla_{//} \mathcal{E}_0(x, y) e^{-2k_0 S''(x, y)} + |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} ik_0 \nabla_{//} S. \quad (\text{D.31b})$$

On a supposé k_0 grand. On ne conserve alors que le terme de plus haut degré en k_0 ,

$$\mathcal{E}^*(x, y) \nabla_{//} \mathcal{E}(x, y) \approx |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} ik_0 \nabla_{//} S. \quad (\text{D.32})$$

En ré-injectant l'expression (D.32) dans (D.30), on obtient

$$\langle \Pi_{//}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y) f(z)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left[\frac{\epsilon(z, \omega)}{n_{sp}^2} \nabla_{//} S \right]. \quad (\text{D.33})$$

On intègre $\langle \Pi_{//}(\mathbf{r}, t) \rangle$ selon la direction z afin d'obtenir un flux dans le plan parallèle (2D),

$$\mathbf{P}(x, y) = \int dz \langle \Pi_{//}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (\text{D.34a})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \int dz \left[\epsilon(z, \omega) |f(z)|^2 \right] \frac{\nabla_{//} S}{n_{sp}^2} \right\}. \quad (\text{D.34b})$$

D.6 Équation de Helmholtz des ondes de surface en milieu inhomogène

Afin d'étendre la notion de « rayon » d'ondes de surface au cas de milieux inhomogènes (pour les ondes de surface, c'est-à-dire non invariants par translation dans les directions x et y), nous allons généraliser les équations (2.5) et (2.7) à ce cas. On considère ainsi un système proche de celui considéré dans la majeure partie du chapitre 2 (figure 2.2), mais dont la géométrie peut désormais varier *lentement* dans les directions x et y . Ce système peut consister par exemple en un substrat métallique sur lequel on dépose un couche diélectrique dont l'épaisseur varie (voir figure D.5, et (CAI et BRONGERSMA 2010 ; LIU et al. 2010 ; HUIDOBRO et al.

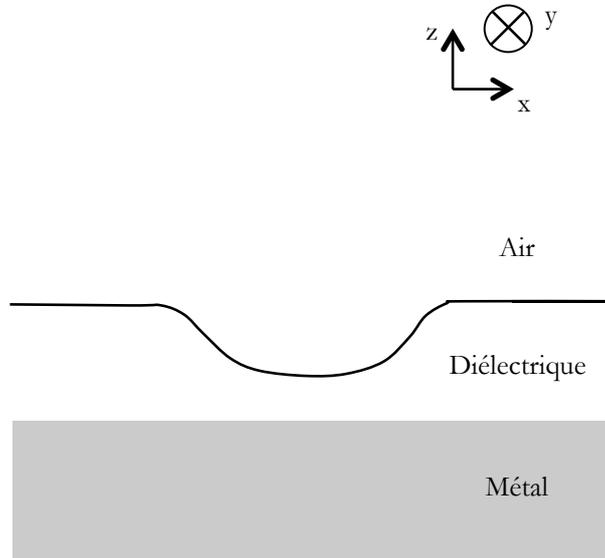


FIGURE D.5 – Exemple de système dont la géométrie varie lentement dans les directions x et y .

2010)).

L'équation de Helmholtz pour $E_z(\mathbf{r})$ (équation 2.3) s'applique toujours à ceci près que la constante di-

électrique peut désormais également dépendre *lentement* de x et y ,

$$\Delta E_z(\mathbf{r}) + \epsilon_{x,y}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} E_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{D.35})$$

On recherche des solutions de cette équation par séparation des variables, comme dans l'équation (2.1), mais là aussi, $f(z)$ dépend *lentement* de x et y , et on le note $f_{x,y}(z)$,

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) f_{x,y}(z). \quad (\text{D.36})$$

On peut alors écrire une équation analogue à (2.4),

$$\frac{\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y)}{\mathcal{E}(x, y)} = - \frac{\frac{\partial^2 f_{x,y}}{\partial z^2} + \epsilon_{x,y}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} f_{x,y}(z)}{f_{x,y}(z)}. \quad (\text{D.37})$$

Dans l'équation (2.4), le membre de gauche dépendait de x et y , le membre de droite de z . Ainsi, ces deux expressions étaient égales à une même valeur indépendante des variables spatiales. Ici, les deux expressions dépendent de x et y , mais le membre de droite n'en dépend que lentement. Ainsi les deux expressions sont égales à une même valeur, indépendante de z et pouvant dépendre lentement de x et y – on la note ici $-K_{sp\ x,y}^2$. L'équation (D.36) permet alors d'écrire deux équations, analogues à (2.5) et (2.7),

$$\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y) + K_{sp\ x,y}^2 \mathcal{E}(x, y) = 0, \quad (\text{D.38a})$$

$$\frac{\partial^2 f_{x,y}}{\partial z^2} + \left[\epsilon_{x,y}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp\ x,y}^2 \right] f_{x,y}(z) = 0. \quad (\text{D.38b})$$

Il faut également tenir compte des relations de passage du champ aux interfaces. Pour un système invariant par translation dans les directions parallèles, les relations de passage obtenues – continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ – s'appliquaient rigoureusement (aucune approximation n'était faite). Ici, les interfaces ne sont pas parfaitement planes, et l'on ne peut plus simplement écrire des relations de passage portant sur $E_z(\mathbf{r})$ et $D_z(\mathbf{r})$. Ces relations de passage sont désormais $\mathbf{E}(\mathbf{r}) - [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ continus, que l'on ne peut plus a priori traduire simplement sous forme de condition sur $f_{x,y}(z)$. Afin de poursuivre, nous allons ainsi supposer que les interfaces sont approximativement perpendiculaires à l'axe z et que l'on peut généraliser la formule (2.2) par

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \frac{1}{K_{sp\ x,y}^2} \nabla_{//} \left[\frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right] = \frac{1}{K_{sp\ x,y}^2} \nabla_{//} [\mathcal{E}(x, y)] \frac{\partial f_{x,y}}{\partial z}. \quad (\text{D.39})$$

On écrit alors que $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$ et $D_z(\mathbf{r})$ sont continus à la traversée de chaque interface, soit

$$\epsilon_{x,y}(z, \omega) f_{x,y}(z) \text{ et } \frac{\partial f_{x,y}}{\partial z} \text{ continus.} \quad (\text{D.40})$$

Ainsi, pour un système dont la géométrie varie lentement dans les directions x et y (figure D.5), on résout l'équation (D.38b) accompagnée des relations de continuité (D.40) de la même manière que l'on

résolverait (2.7) avec la continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$. On obtient ainsi la fonction $f_{x,y}(z)$ ainsi que le carré du vecteur d'onde des ondes de surface $K_{sp\ x,y}^2$. On peut alors résoudre (D.38a), qui correspond à l'équation (2.42), avec un vecteur d'onde au carré $K_{sp\ x,y}^2$ ou un indice $n_{sp\ x,y} = K_{sp\ x,y}/k_0$ variables.

Annexes du chapitre « Superlentille en champ proche en régime impulsionnel »

Sommaire

D.1 Identité de Green en dimension 2	139
D.2 Expressions mathématiques du principe d’Huygens-Fresnel pour les ondes de surface	141
D.2.1 Obtention du principe d’Huygens-Fresnel pour les ondes de surface	141
D.2.2 Sources secondaires sur une courbe ouverte	142
D.2.3 Sources secondaires sur une droite	143
D.3 Composantes parallèles et perpendiculaire du champ des ondes de surface	145
D.3.1 Continuité du champ parallèle $E_{//}$	145
D.3.2 Champ parallèle $E_{//}$ en fonction du champ perpendiculaire E_z	145
D.4 Relation de dispersion des ondes de surface dans un milieu stratifié	146
D.5 Vecteur de Poynting des ondes de surface	147
D.6 Équation de Helmholtz des ondes de surface en milieu inhomogène	148

E.1 Séparation des différentes contributions de la transmission à travers une superlentille

Les ondes de surface d’une des interfaces du film considérée isolément, excitées par l’objet source (voir la description de la superlentille, notes de la Figure 3.3), ne sont pas des modes propres du film. En effet, les modes propres des deux interfaces du film se couplent et sont à l’origine de modes propres symétriques et antisymétriques faisant intervenir les deux interfaces du film. Nous allons identifier les contributions de ces modes propres au coefficient de transmission du film. Cette décomposition permettra de calculer en pratique les fonctions filtre $\tilde{t}(K, t)$ et $\Pi(K, t)$ intervenant dans l’image de charges ou de dipôles sources (équations 3.8 et 3.12). Elle permettra également de comprendre l’origine des conditions particulières dans lesquelles on obtient une meilleure résolution qu’en régime harmonique.

Nous allons tout d’abord séparer l’expression $\tilde{t}(K, \omega) = e^{-Kh} t_p^{(es)}(K, \omega)$ (cf. équation 3.4) en contributions des modes propres du film et d’une réponse instantanée du système, puis nous pourrions effectuer l’intégrale figurant dans l’équation (3.9).

Dans le cas courant où la constante diélectrique du film peut se mettre sous la forme $\epsilon(\omega) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)}$ avec A et B des polynômes de degré¹ 2, on peut écrire

$$\tilde{t}(K, \omega) = \frac{4A(\omega)B(\omega)}{[A(\omega) + B(\omega)]^2 e^{2Kh} - [A(\omega) - B(\omega)]^2}. \quad (\text{E.1})$$

En mettant en facteur les termes exponentiels au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\tilde{t}(K, \omega) = \frac{4A(\omega)B(\omega)}{[A(\omega) + B(\omega)]^2 e^{2Kh} - [A(\omega) - B(\omega)]^2}. \quad (\text{E.2})$$

L'expression de $\tilde{t}(K, \omega)$ est une fraction rationnelle (par rapport à ω), que l'on peut décomposer en éléments simples. Son dénominateur est de degré 4. En utilisant la propriété $\epsilon(-\omega^*) = \epsilon^*(\omega)$, on montre que si ω est une racine de ce dénominateur, $-\omega^*$ l'est également. On peut alors noter ses 4 racines $\omega_s(K)$, $\omega_a(K)$, $-\omega_s^*(K)$ et $-\omega_a^*(K)$. $\omega_s(K)$ et $\omega_a(K)$ sont les relations de dispersion des ondes de surface du film, représentées sur la figure 3.5(a). $\omega_s(K)$ correspond aux ondes symétriques par rapport au plan de symétrie du film, $\omega_a(K)$ aux ondes antisymétriques par rapport à ce plan. On a représenté sur la figure 3.6 les champs de ces modes dans les directions parallèle et perpendiculaire au film en fonction de z .

Le numérateur de $\tilde{t}(K, \omega)$ étant de même degré que son dénominateur, sa décomposition en éléments simples fait apparaître un terme constant et s'écrit

$$\tilde{t}(K, \omega) = S_K + \frac{R_{S,K}}{\omega - \omega_{A,K}} + \frac{R_{A,K}}{\omega - \omega_{S,K}} - \frac{R_{S,K}^*}{\omega + \omega_{S,K}^*} - \frac{R_{A,K}^*}{\omega + \omega_{A,K}^*}. \quad (\text{E.3})$$

Dans cette expression, les termes $\frac{R_{S,K}}{\omega - \omega_{S,K}}$ et $\frac{-R_{S,K}^*}{\omega + \omega_{S,K}^*}$ correspondent à la contribution des modes symétriques à $\tilde{t}(K, \omega)$, les termes $\frac{R_{A,K}}{\omega - \omega_{A,K}}$ et $-\frac{R_{A,K}^*}{\omega + \omega_{A,K}^*}$ aux modes antisymétriques, et le terme S_K ne correspond à aucun mode – nous verrons qu'il correspond à une réponse « instantanée » du système. Afin d'évaluer le poids de ces différents termes, leur module en fonction de K est représenté sur la figure 3.7 pour les pulsations ω_{sp} (pulsation de l'asymptote des ondes de surface d'une interface simple, vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$) et ω'_{sp} . On remarque qu'à la pulsation ω_{sp} , $\tilde{t}(K, \omega_{sp}) = 1$ et est bien indépendant de K .

On peut également remarquer qu'à ces pulsations, aux faibles K , la contribution de la réponse instantanée doit être prise en compte pour obtenir pour obtenir l'effet de superlentille ($\tilde{t}(K, \omega)$ constant). Cette contribution n'est pas négligeable devant celle des modes du film, et peut même être plus importante qu'eux. Toutefois, la validité de la limite électrostatique à ces valeurs de K peut être questionnée (voir Figures 3.5 et E.1).

On peut effectuer l'intégration par rapport à ω figurant dans (3.9) par la méthode des résidus (à l'exception

1. C'est le cas notamment dans le cadre des modèles de constante diélectrique de Drude et de Lorentz, couramment utilisés afin de modéliser la constante diélectrique des métaux et des cristaux polaires, voir par exemple (VIAL et al. 2005) et (KIM et SPITZER 1979).

du terme en S_K qui s'intègre directement),

$$\begin{aligned} \tilde{t}(K, t) = & S_K \delta(t - t') + (-i)R_{S,K} H(t - t') e^{-i\omega_{S,K}(t-t')} + (-i)R_{A,K} H(t - t') e^{-i\omega_{A,K}(t-t')} \\ & + iR_{S,K}^* H(t - t') e^{i\omega_{S,K}^*(t-t')} + iR_{A,K}^* H(t - t') e^{i\omega_{A,K}^*(t-t')}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

E.2 Obtention de la fonction de Green du potentiel électrostatique

Dans cette annexe, nous dérivons rigoureusement la fonction de Green de ce système à partir du tenseur de Green du système constituant la superlentille. On retrouve notamment l'équation (3.26b).

E.2.1 Expression du tenseur de Green

Au cours des développements ci-dessous, nous rappelons brièvement quelques propriétés importantes du formalisme de Green. Nous nous appuyons notamment sur les notations de SIPE (1987) et le développement de Weyl du tenseur de Green. Des présentations plus détaillées peuvent être trouvées notamment dans (MULET 2003) et (JOULAIN et al. 2005).

On considère le film représenté sur la figure 3.13. Le formalisme de Green permet d'exprimer le champ en tout point de ce système en fonction des sources de courant présentes $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3\mathbf{r}' \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) i\omega\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega). \quad (\text{E.5})$$

On s'intéresse ici à un ensemble de dipôles induits, à l'origine d'un moment dipolaire par unité de volume $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)$. $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)$ est relié à $\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)$ par l'équation $\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) = -i\omega\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)$. On écrit ainsi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3\mathbf{r}' \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega), \quad (\text{E.6a})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mu_0\omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega). \quad (\text{E.6b})$$

L'invariance par translation du système considéré conduit à effectuer un développement de Weyl du tenseur $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$, c'est-à-dire à nous appuyer sur sa transformée de Fourier par rapport aux variables x et y ,

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega). \quad (\text{E.7})$$

L'équation (E.6b) permet de relier le développement de Weyl de $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ à celui du tenseur de Green $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$,

$$\overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \mu_0\omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega). \quad (\text{E.8})$$

Pour le système considéré (voir figure 3.13), les dipôles sources sont situés sous le film ($z' < 0$) et les points d'observation au dessus du film ($z > h$). De plus, on ne s'intéresse qu'à la polarisation p du champ

électromagnétique. On peut alors écrire (MULET 2003)

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \frac{i}{2\gamma_1} \mathbf{p}_1^+ t t_p(K, \omega) \mathbf{p}_1^+ e^{i\gamma_1(z-h-z')}, \quad (\text{E.9})$$

avec $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2}$, $\mathbf{p}_1^+ = \frac{1}{c}(K\mathbf{z} - \gamma_1\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{K}}{K}$, et le coefficient de transmission du film $t_p(K, \omega)$ est donné par

$$t_p(K, \omega) = \frac{4\epsilon\gamma_1\gamma_2 e^{i\gamma_2 h}}{(\gamma_2 + \epsilon\gamma_1)^2 - (\gamma_2 - \epsilon\gamma_1)^2 e^{2i\gamma_2 h}}, \quad (\text{E.10})$$

avec $\gamma_2 = \sqrt{\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} - K^2}$. On peut ainsi écrire

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = -\frac{t_p(K, \omega)\gamma_1}{2i\epsilon_0 n^2} \left(\mathbf{K} - \frac{K}{\gamma_1}\mathbf{z}\right) \left(\mathbf{K} - \frac{K}{\gamma_1}\mathbf{z}\right) e^{i\gamma_1(z-h-z')} \quad (\text{E.11})$$

E.2.2 Approximation électrostatique

Nous allons maintenant nous placer dans l'approximation électrostatique, dans laquelle le module K des vecteurs d'onde dans la direction parallèle au film est grand devant $\frac{\omega}{c}$. Dans cette limite, on a essentiellement $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx iK$, et

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = -\frac{t_p^{(es)}(K, \omega)K}{2\epsilon_0} (\mathbf{K} + i\mathbf{z})(\mathbf{K} + i\mathbf{z}) e^{-K(z-h-z')} \quad (\text{E.12})$$

où le coefficient de transmission dans l'approximation électrostatique, $t_p^{(es)}(K, \omega)$, vaut

$$t_p^{(es)}(K, \omega) = \frac{4\epsilon(\omega)e^{-Kh}}{[1 + \epsilon(\omega)]^2 - [1 - \epsilon(\omega)]^2 e^{-2Kh}}. \quad (\text{E.13})$$

(Afin d'estimer les limites de validité de l'approximation électrostatique, γ_1 et γ_2 sont représentés pour un film de SiC entouré d'air sur la figure E.1.)

Remarquons que sans film ($\epsilon(\omega) = 1$, $h \rightarrow 0$) et près du plan des dipôles sources ($z' \rightarrow z$), le tenseur $\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega)$ devient

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}) = -\frac{K}{2\epsilon_0} (\mathbf{K} + i\mathbf{z})(\mathbf{K} + i\mathbf{z}), \quad (\text{E.14})$$

d'où

$$\overleftarrow{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = t_p^{(es)}(K, \omega) e^{-K(z-h-z')} \overleftarrow{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}). \quad (\text{E.15})$$

Le tenseur $\overleftarrow{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K})$ est associé au champ sans film et près des sources, c'est-à-dire au champ que l'on souhaite imager. La présence du film conduit à l'apparition des termes $t_p^{(es)}(K, \omega) e^{-K(z-h-z')}$, qui atténuent et « filtrent » le champ.

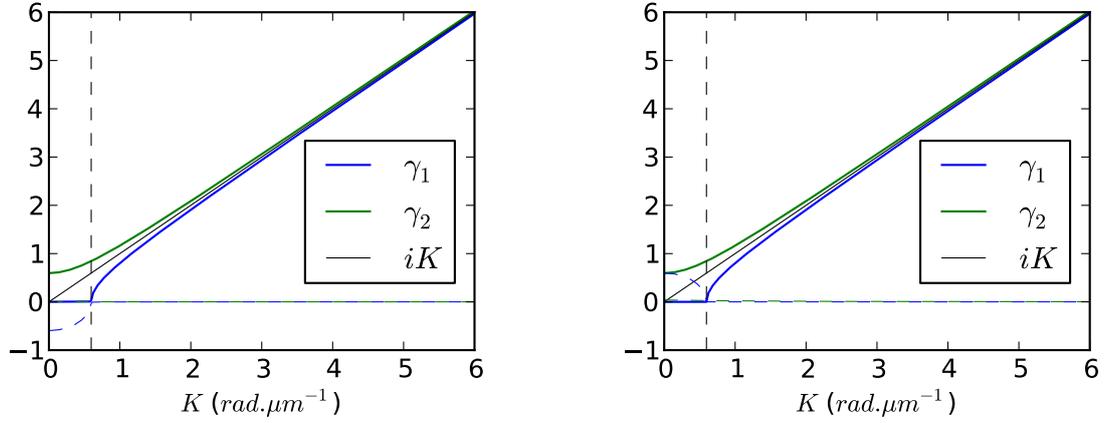


FIGURE E.1 – γ_1 et γ_2 en fonction de K aux pulsations ω_{sp} et ω'_{sp} pour un film de SiC entouré d'air. Gauche : $\gamma_1(K, \omega_{sp})$, $\gamma_2(K, \omega_{sp})$. Droite : $\gamma_1(K, \omega'_{sp})$, $\gamma_2(K, \omega'_{sp})$. Bleu : γ_1 , vert : γ_2 . Trait continu colorés : parties imaginaires, tirets fins colorés : parties réelles. Trait fin noir : partie imaginaire de γ_1 et γ_2 dans l'approximation électrostatique. (La partie réelle est nulle dans l'approximation électrostatique.) Tirets fins noirs : limite du cône de lumière ($K = \frac{\omega}{c}$). ω_{sp} est la pulsation de l'asymptote des ondes de surface d'une interface simple matériau du film/milieu extérieur, vérifiant $\epsilon(\omega_{sp}) + 1 = 0$. γ_1 et γ_2 sont proches de leur valeur électrostatique dès $K \approx 2 \text{ rad} \cdot \mu\text{m}^{-1}$.

E.2.3 Potentiel électrostatique

On a, dans l'approximation électrostatique, $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0}$. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ dérive alors d'un gradient, et on peut écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}, \omega), \quad (\text{E.16})$$

où $\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ désigne le potentiel électrostatique.

En utilisant les expression (E.7) et (E.12), on peut remarquer que l'on a

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}'} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{-t_p^{(es)}(K, \omega)}{2\epsilon_0 K} e^{-K(z-h-z')}, \quad (\text{E.17})$$

où la juxtaposition $\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}'}$ correspond à un produit tensoriel. En ré-écrivant l'intégrale sur les vecteurs \mathbf{K} , $\int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2}$, sous la forme $\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dK K \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$, en effectuant l'intégrale sur les angles θ , en utilisant l'équation (3.4) et en simplifiant l'expression résultante, on obtient

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK J_0(K|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) e^{-K(z-2h-z')} \tilde{t}(K, \omega). \quad (\text{E.18})$$

On peut alors utiliser cette fonction de Green pour déterminer le champ électrique d'un dipôle ponctuel \mathbf{p}_0 situé en $\mathbf{r}_0 = \vec{\rho}_0 + z_0\hat{\mathbf{z}}$ de spectre $f(\omega)$ (moment dipolaire par unité de volume correspondant : $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) =$

$\mathbf{p}_0 f(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$), à l'aide de l'équation (E.6a),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dK \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \left[J_0(K|\vec{\rho} - \vec{\rho}_0|) e^{-K(z-2h-z_0)} \right] \mathbf{p}_0 \tilde{t}(K, \omega) f(\omega), \quad (\text{E.19})$$

qui correspond à la transformée de Fourier de (3.26b).

Annexes du chapitre « Quantification des ondes de surface »

F.1 Dielectric constant model

When cases with losses are considered in this paper, we must sometimes consider the case of complex frequencies. An analytical model for the dielectric constant is needed to evaluate $\epsilon(\omega)$ when ω is complex. The dielectric constant model which has been used in this paper is the following :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\beta\omega} + i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \quad (\text{F.1})$$

where we take the values $\epsilon_{\infty} = 5$, $\hbar\omega_p = 9.1$ eV and $\hbar\beta = 0.021$ eV of Drude's model given by (AMBATI et al. 2008a). We add also a conductivity term to have a better fit of the imaginary part of the dielectric constant, we take $\hbar\sigma/\epsilon_0 = 1.8$ eV. Fig. F.1 compares the experimental data (PALIK et GHOSH 1998) and both Drude's model from (AMBATI et al. 2008a) and the model used in this paper in Eq.(F.1).

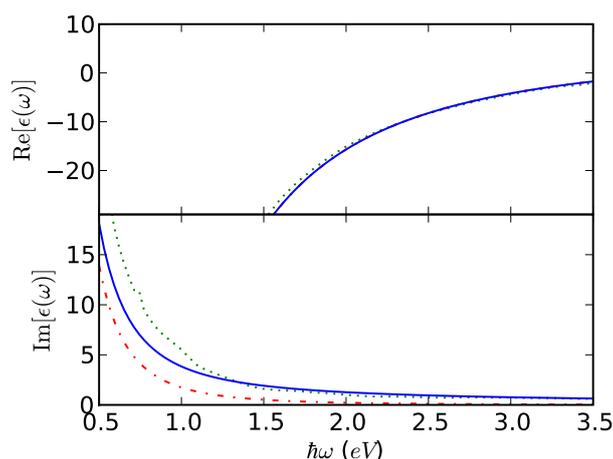


FIGURE F.1 – (Color online). Real and imaginary part of the dielectric constant for silver. Experimental data from (PALIK et GHOSH 1998) (dotted line), Drude's model from (AMBATI et al. 2008a) (dashdotted line) and fit used in this paper (solid line) are plotted.

F.2 Derivation of the energy

In this section, we focus on the derivation of the electromagnetic energy associated with surface waves. The main idea is to derive the work done by an external operator to build adiabatically the field amplitude in a non-lossy medium. The energy balance from time $t = 0$ to $t = T$ reads :

$$U = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} (-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{F.2})$$

in which $\int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} (-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$ is the operator's work on the system between $t = 0$ and $t = T$. T must be large for this work to be adiabatic. U then does not depend on T . In other words, this is also the total electromagnetic energy of the system. Due to the exponential decrease along the z -axis, the contribution of the Poynting vector, which should appear in the left term of equation (F.47), drops to zero. We want hence to derive the first term of equation (F.47) to obtain the electromagnetic energy.

The first step is to introduce time-dependent amplitudes in Eq. (4.6) : $A_{\mathbf{K}}$ is then replaced by $A_{\mathbf{K}}(t)$ in which $A_{\mathbf{K}}(t) = A_{\mathbf{K}} \times f(t)$. This accounts for operator's work. For the sake of convenience, we take a $2T$ -periodic function for which $f(0) = f(2T) = 0$ and $f(T) = 1$, so that we can write $f(t) = \sum_n f_n \exp(i2\pi n \frac{t}{2T})$. T is the typical time of variation of the amplitude $A_{\mathbf{K}}(t)$. T has to be taken sufficiently large to consider the work done by the operator as adiabatic. (For instance $f(t) = \sin(\pi \frac{t}{2T})$.) Let us first derive the energy in the material medium denoted medium 2 for $z < 0$. We have :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.3})$$

Using $A_{\mathbf{K}}(t) = A_{\mathbf{K}} f(t)$ and the Fourier series expansion of $f(t)$ given above, the field can be cast as a sum of terms varying as $\exp[-i(\omega + \frac{\pi n}{T})t]$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n i \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) f_n \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.4})$$

Hence the displacement vector

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n i \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) f_n \epsilon_j \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.5})$$

and its time derivative

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right)^2 f_n \epsilon_j \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.6})$$

As $1/T \ll \omega$, we have $(\omega - \frac{\pi n}{T})^2 \epsilon_j(\omega - \frac{\pi n}{T}) \approx \omega^2 \epsilon_j(\omega) - \frac{\pi n}{T} \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega}$. Taking the inverse of the Fourier

series expansions in Eq. (F.51), we get

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{\mathbf{K}}(t) + i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{\mathbf{K}}(t) \right\} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.7})$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = & \\ -\epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} e^{i(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}'}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] & \left\{ \omega'^2 \epsilon_j(\omega') A_{\mathbf{K}'}(t) + i \frac{d[\omega'^2 \epsilon_j(\omega')]}{d\omega'} \partial_t A_{\mathbf{K}'}(t) \right\} e^{-i(\omega + \omega')t} \\ -\epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} e^{i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}'}^*(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] & \left\{ \omega'^2 \epsilon_j(\omega') A_{\mathbf{K}'}^*(t) - i \frac{d[\omega'^2 \epsilon_j(\omega')]}{d\omega'} \partial_t A_{\mathbf{K}'}^*(t) \right\} e^{-i(\omega - \omega')t} \\ & + c.c. \quad (\text{F.8}) \end{aligned}$$

Integrating this term over the surface S and using $\int dx \int dy \exp(i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}) = S \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'}$ (δ is the Kroenecker symbol, which verifies $\delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} = 1$ if $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$, $\delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} = 0$ else), we find

$$\begin{aligned} \int dx \int dy \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = & \\ -\epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{-\mathbf{K}}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] & \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{-\mathbf{K}}(t) + i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{-\mathbf{K}}(t) \right\} \exp(-2i\omega t) \\ -\epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}}^*(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] & \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{\mathbf{K}}^*(t) - i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t) \right\} \\ & + c.c. \quad (\text{F.9}) \end{aligned}$$

The first term on the right hand side of Eq. (F.54) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$. For T sufficiently large, all the terms vanish except the one proportional to $A_{\mathbf{K}}(t) A_{-\mathbf{K}}(t)$ which gives the first term on the right hand side of Eq. (F.55). The second term on the right hand side of Eq. (F.54) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$ too. The terms proportional to $A_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}}^*$ and $\partial_t A_{\mathbf{K}} \partial_t A_{\mathbf{K}}^*$ are pure imaginary and give no contribution once added to their complex conjugate and opposite. The terms proportional to $A_{\mathbf{K}} \partial_t A_{\mathbf{K}}^*$ and $\partial_t A_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}}^*$, once added to their complex conjugate, both vary as $\partial_t |A_{\mathbf{K}}|^2$ and are easily integrated to give the last term on the right hand side of Eq. (F.55). Notice that these two terms vary

respectively as $\omega^2\epsilon(\omega)$ and $\frac{d\omega^2\epsilon(\omega)}{d\omega}$, and that their sum simplifies and varies as $\frac{d\omega\epsilon(\omega)}{d\omega}$, as written in Eq. (F.55) :

$$\int_0^T dt \int dx \int dy \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{-\mathbf{K}}(z) i\omega^3 \epsilon_j(\omega) \int_0^T dt [A_{\mathbf{K}}(t) A_{-\mathbf{K}}(t) \exp(-2i\omega t)] + c.c. + \epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \omega^2 \frac{d[\omega\epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.10})$$

Let us now calculate the energy associated with the term $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}$ in Eq. (F.47).

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}}(t) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.11})$$

$$\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) [\partial_t A_{\mathbf{K}}(t) - i\omega A_{\mathbf{K}}(t)] \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.12})$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{\mathbf{K}'}(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}'}(t) - i\omega' A_{\mathbf{K}'}(t)] \exp[-i(\omega + \omega')t] \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{\mathbf{K}'}^*(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}'}^*(t) + i\omega A_{\mathbf{K}'}^*(t)] \exp[-i(\omega - \omega')t] + c.c. \quad (\text{F.13}) \end{aligned}$$

Integration over the surface S as previously for $\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}$ yields :

$$\begin{aligned} \int dx \int dy \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{-\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{-\mathbf{K}}(t) - i\omega A_{-\mathbf{K}}(t)] \exp(-2i\omega t) \\ &+ \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t) + i\omega A_{\mathbf{K}}^*(t)] + c.c. \quad (\text{F.14}) \end{aligned}$$

The first term on the right hand side of Eq. (F.59) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$. For T sufficiently large, the term proportional to $A_{\mathbf{K}}(t) \partial_t A_{-\mathbf{K}}(t)$ vanishes, and we get the first term on the right hand side of Eq. (F.60). The second term on the right hand side of Eq. (F.59) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$ too. The term proportional to $A_{\mathbf{K}}(t) A_{\mathbf{K}}^*(t)$ is a pure imaginary, and gives no contribution once added to its complex conjugate. The term varying as $A_{\mathbf{K}}(t) \partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t)$, once added to its complex conjugate, varies as $\partial_t |A_{\mathbf{K}}(t)|^2$ and is easily integrated to give the last term on the right hand side

of Eq. (F.60).

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int dx \int dy \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \\ \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} i \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{-\mathbf{K}}(z) \int_0^T dt [A_{\mathbf{K}}(t) \omega A_{-\mathbf{K}}(t) \exp(-2i\omega t)] + c.c. \\ + \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 |A_{\mathbf{K}}|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

We now add Eqs. (F.55) and (F.60). The first terms on the right hand sides of these two equations cancel each other (so do their complex conjugates), so that we get

$$\int_0^T dt \int dx \int dy [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.16})$$

Before integrating this expression over z , let us remark that it can be cast under a somewhat clearer form

$$\int_0^T dt \int dx \int dy [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = S \sum_{\mathbf{K}} \left[\epsilon_0 \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right]. \quad (\text{F.17})$$

where $\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z) = i\omega A_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$ and $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z) = iA_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)$ so that $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z) \exp(-i\omega t) + c.c.$ and $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z) \exp(-i\omega t) + c.c.$. Eq. (F.62) gives the energy per unit length along the z direction of surface plasmons. $\epsilon_0 S \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ and $\frac{1}{\mu_0} S |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ are then the electric and magnetic contribution of each mode \mathbf{K} to the former energy per unit length.

We now would like to integrate Eq. (F.61) over z . In both half spaces $z > 0$ and $z < 0$ ($j = 1, 2$), we have $|\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \exp[-2\text{Im}(\gamma_j)z] \left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2}\right)$, $\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) = (K\hat{\mathbf{K}} + \gamma_j \hat{\mathbf{z}}) \times \frac{1}{\sqrt{L(\omega)}} \exp(i\gamma_j z) (\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\sqrt{L(\omega)}} \exp(i\gamma_j z) \frac{\epsilon_j \omega^2}{\gamma_j c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{K}}$ (we used the property $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{K}} = 0$), hence $|\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \exp[-2\text{Im}(\gamma_j)z] \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^4}{c^4}$. Now writing

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} = \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2}\right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \quad (\text{F.18a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^4}{c^4} \quad (\text{F.18b})$$

Integrating Eq. (F.61) over z using Eqs. (F.63), we get

$$U = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left[\left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2} \right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right] |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.19})$$

We now use the degree of freedom to set $L(\omega)$ as we wish, to simplify this equation. We set

$$L(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left[\left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2} \right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right]. \quad (\text{F.20})$$

Using Eq. (4.4), the definition of γ_j , and $\epsilon(\omega) \leq -1$ at the frequencies of surface plasmon of a single interface, Eq. (F.65) writes

$$L(\omega) = \frac{-\epsilon(\omega)}{2|\gamma_1|} + \frac{1}{4|\gamma_2|} \left[\frac{1 - \epsilon(\omega)}{-\epsilon(\omega)} \frac{d[\omega \epsilon(\omega)]}{d\omega} - 1 - \epsilon(\omega) \right] \quad (\text{F.21})$$

This is equivalent to set

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] = 1 \quad (\text{F.22})$$

(the term inside the brackets comes from Eq. (F.61)). Using the expressions of $|\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ and $|\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ given above, Eq. (4.4) and the definition of γ_j , this gives a normalization condition on $\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + |\epsilon_j(\omega)| \frac{|1 + \epsilon(\omega)|}{1 + |\epsilon(\omega)|} \right] |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = 1. \quad (\text{F.23})$$

Eqs. (F.68) and (F.69) can also be written

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{\epsilon_0}{2} \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] = \epsilon_0 \omega^2 |A_{\mathbf{K}}|^2, \quad (\text{F.24})$$

with the notations used in Eq. (F.62).

With this choice of $L(\omega)$ or this normalization condition of $\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$, Eq. (F.64) can be written :

$$U = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 2 |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.25})$$

F.3 Quantum calculation of the surface plasmon emission rate of a dipole

We follow the same steps as in the derivation of the photon emission rate by a two-level system in a vacuum. The fundamental and excited states of the two-level system are denoted $|1\rangle$ and $|2\rangle$ respectively,

associated with energies E_1 and E_2 . We define a circular frequency ω_0 , so that $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$. The two-level system is initially in its excited state, and there are $n_{\mathbf{K}}$ surface plasmons so that the global initial state can be written : $|i\rangle = |2, n_{\mathbf{K}}\rangle$. In the final state, the dipole is in its fundamental state and a surface plasmon has been created in a mode \mathbf{K} . We denote the final global state $|f\rangle = |1, n_{\mathbf{K}} + 1\rangle$. The interaction Hamiltonian is $-\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, where $\hat{\mathbf{D}}$ is the electric-dipole moment operator and $\hat{\mathbf{E}}$ the quantum electric field operator introduced in section 4.4, at the position of the emitter. The emission rate (inverse of the lifetime τ of the excited state) is given by Fermi's golden rule :

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | i \rangle|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega). \quad (\text{F.26})$$

This expression can be rewritten as a sum over the modes \mathbf{K} :

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K}} M_{\mathbf{K}} \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega), \quad (\text{F.27})$$

where $M_{\mathbf{K}} = |\langle 1, n_{\mathbf{K}} + 1 | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | 2, n_{\mathbf{K}} \rangle|^2$. We note $\langle 2 | \hat{\mathbf{D}} | 1 \rangle = \mathbf{D}_{12}$.

Using the former expression and Eqs. (4.13), (4.14) and (4.16), we obtain the following matrix element :

$$M_{\mathbf{K}} = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 S} |\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{u}_{1,\mathbf{K}}(z)|^2 (n_{\mathbf{K}} + 1). \quad (\text{F.28})$$

In this equation, the $n_{\mathbf{K}}$ term stands for the stimulated emission and the constant term 1 accounts for the spontaneous emission. This section is devoted to the spontaneous emission so that we do not consider the term associated to $n_{\mathbf{K}}$.

Using Eqs. (F.27) and (F.28), substituting a continuous sum over the vectors \mathbf{K} in polar coordinates to the discrete sum $\sum_{\mathbf{K}}$, and now writing γ_{spont} instead of γ we get

$$\gamma_{spont} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_0^\infty dK K \frac{S}{(2\pi)^2} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 S} \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega) \times \int_0^{2\pi} d\theta |\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{u}_{1,\mathbf{K}}(z)|^2. \quad (\text{F.29})$$

The integration over the directions θ of \mathbf{K} can now be performed using Eq.(4.5). We first write

$$|\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{u}_{1,\mathbf{K}}(z)|^2 = |\mathbf{D}_{12}|^2 \frac{1}{L(\omega_{sp})} \exp(2i\gamma_j z) \times \left[|\mathbf{d}_{12, //} \cdot \hat{\mathbf{K}}|^2 + |d_{12,z} \frac{K}{\gamma_j}|^2 + 2\text{Re} \left(\mathbf{d}_{12, //} \cdot \hat{\mathbf{K}} d_{12,z}^* \frac{K}{\gamma_j^*} \right) \right] \quad (\text{F.30})$$

The third term inside the square brackets on the right hand side of Eq. (F.30) vanishes after integration over θ , as this term depends on θ only through $\hat{\mathbf{K}}$ and as $\int_0^{2\pi} d\theta \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$. The integration thus gives :

$$\int_0^{2\pi} d\theta |\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{u}_{1,\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{2\pi}{L_{eff}(z, d_{12}, \omega_0)} |\mathbf{D}_{12}|^2 \quad (\text{F.31})$$

$L_{eff}(z, d_{12}, \omega_0)$ is defined by Eq. (4.19). The spontaneous emission rate of surface plasmon can then be cast

in the form given by Eq. (4.18).

Averaging γ_{spont} over all the possible directions (θ, ϕ) and all the precession angles ψ of \mathbf{D}_{12} , we get the "total" spontaneous emission rate of surface plasmons

$$\gamma_{spont,total}(|\mathbf{D}_{12}|, \omega_0, z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \gamma_{spont}(\mathbf{R}_{\theta,\phi,\psi}(\mathbf{D}_{12}), \omega_0, z) \quad (\text{F.32})$$

where $\mathbf{R}_{\theta,\phi,\psi}(\mathbf{D}_{12})$ is \mathbf{D}_{12} rotated by Euler's angles for nutation, precession and intrinsic rotation θ, ϕ and ψ respectively. The result of the integration over θ, ϕ and ψ is given by Eq. (4.23).

F.4 Derivation of the emission rate of a dipole in the classical lossy case

The aim of this section is to derive an explicit form of the Purcell factor due to the presence of surface plasmons by using the Green's tensor approach. Using (ARCHAMBAULT et al. 2009), one can write the surface plasmon contribution to the Green's tensor evaluated at the position of the source \mathbf{r} :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z)}{\omega - \omega_{sp}} - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{f}}^*(-\mathbf{K}, z, z)}{\omega + \omega_{sp}^*} \right] \quad (\text{F.33})$$

where $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z)$ is given by

$$\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z) = -g(K, \omega_{sp}) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_1} \hat{\mathbf{z}} \right) \left(\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_1} \hat{\mathbf{z}} \right) \exp(2i\gamma_1 z) \quad (\text{F.34})$$

as $z > 0$, with $g(K, \omega_{sp}) = \frac{c^2 \gamma_1^2 \epsilon(\omega_{sp})}{\omega_{sp}^2} R(K, \omega_{sp})$ and $R^{-1}(K, \omega_{sp}) = -i \frac{\partial}{\partial \omega} [\gamma_1(K, \omega) \epsilon(\omega) - \gamma_2(K, \omega)] |_{\omega=\omega_{sp}}$. Injecting Eq. (F.33) in Eq. (4.24), we obtain :

$$F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) = \frac{6\pi c}{\omega} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \text{Im} \left[\frac{\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z) \mathbf{d}_{12}}{\omega - \omega_{sp}} - \frac{\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{f}}^*(-\mathbf{K}, z, z) \mathbf{d}_{12}}{\omega + \omega_{sp}^*} \right]. \quad (\text{F.35})$$

Writing $F_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) = \mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z) \mathbf{d}_{12} = F'_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) + i F''_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z)$ and $\rho'_{\omega_{sp}}(\omega) = \frac{\omega - \omega'_{sp}}{(\omega - \omega'_{sp})^2 + \omega''_{sp}{}^2}$, $\rho''_{\omega_{sp}}(\omega) = \frac{\omega''_{sp}}{(\omega - \omega'_{sp})^2 + \omega''_{sp}{}^2}$, we find :

$$F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) = \frac{6\pi c}{\omega} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \left[F'_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) \rho''_{\omega_{sp}}(\omega) + F''_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) \rho'_{\omega_{sp}}(\omega) \right. \\ \left. - F'_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) \rho''_{-\omega_{sp}^*}(\omega) + F''_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}_{12}, \omega, z) \rho'_{-\omega_{sp}^*}(\omega) \right]. \quad (\text{F.36})$$

This expression is to be compared to Eq. (F.27) in the non lossy case. Both expressions are written as sums over the modes \mathbf{K} , of the contribution of each mode to the spontaneous emission rate. When losses are low, the last two terms on the right hand side of Eq. (F.36) are antiresonant, as $\rho''_{-\omega_{sp}^*}(\omega)$ and $\rho'_{-\omega_{sp}^*}(\omega)$ are

centered around $-\omega'_{sp}$. The second term has also a small contribution as the average value of $\rho'_{\omega_{sp}}(\omega)$ is 0. The main contribution comes from the first term, as $\rho''_{\omega_{sp}}(\omega)$ goes to $-i\pi\delta(\omega - \omega_{sp})$ in the non lossy limit. Its extremum value is $\frac{-2Q}{\omega_{sp}}$. Starting again from Eq. (F.33), we write

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dK K \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{sp}} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z) \right] - \frac{1}{\omega + \omega_{sp}^*} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\overleftrightarrow{\mathbf{f}}^*(-\mathbf{K}, z, z) \right] \right\}, \quad (\text{F.37})$$

aiming at performing the integral over the directions θ of \mathbf{K} . We first calculate :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[\overleftrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{K}, z, z) \right] = -2\pi g(K, \omega_{sp}) \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}), \quad (\text{F.38})$$

where $\overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) = \exp(2i\gamma_1 z) \left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{y}) - \epsilon(\omega_{sp})\mathbf{z}\mathbf{z} \right]$. Inserting Eq. (F.38) in Eq. (F.37) yields :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{sp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dK K \left[\frac{-g(K, \omega_{sp})}{\omega - \omega_{sp}} \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) + \frac{g^*(K, \omega_{sp})}{\omega + \omega_{sp}^*} \overleftrightarrow{\mathbf{U}}^*(z, \omega_{sp}) \right]. \quad (\text{F.39})$$

Inserting Eq. (F.39) in Eq. (4.24), one finds :

$$F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = \frac{3c}{\omega_0} \int_0^\infty dK K \text{Im} \left[\frac{-g(K, \omega_{sp})}{\omega_0 - \omega_{sp}} \mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) \mathbf{d}_{12} + \frac{g^*(K, \omega_{sp})}{\omega_0 + \omega_{sp}^*} \mathbf{d}_{12} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{U}}^*(z, \omega_{sp}) \mathbf{d}_{12}^* \right]. \quad (\text{F.40})$$

with $\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) \mathbf{d}_{12} = \exp(2i\gamma_1 z) \left[\frac{1}{2} |\mathbf{d}_{12, //}|^2 - \epsilon(\omega_{sp}) |d_{12,z}|^2 \right]$. In the non lossy case, $g(K, \omega_{sp})$ and $\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) \mathbf{d}_{12}$ are real, and $\text{Im} \frac{1}{\omega - \omega_{sp}}$ goes to (NOVOTNY et HECHT 2006) $-i\pi\delta(\omega - \omega_{sp})$. Hence, assuming $\omega > 0$ and using the expressions of $\mathbf{d}_{12}^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{U}}(z, \omega_{sp}) \mathbf{d}_{12}$ and $g(K, \omega_{sp})$ given above, one gets Eq. (4.25).

We need the relation

$$R(K, \omega_{sp}) = \frac{\omega_{sp}}{K^2} \frac{1}{2L(\omega_{sp})}, \quad (\text{F.41})$$

in order to prove that $F_P(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z)$. Using the definitions of $R(K, \omega_{sp})$ and of γ_j given above, we get

$$R^{-1}(K, \omega_{sp}) = -i \frac{\epsilon\omega/c^2}{\gamma_1} - i\gamma_1 \frac{d\epsilon}{d\omega} + i \frac{\frac{d\epsilon}{d\omega} \frac{\omega^2}{c^2} + 2\omega\epsilon/c^2}{2\gamma_2} \quad (\text{F.42})$$

Inserting $\frac{d\epsilon}{d\omega} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{d\omega\epsilon}{d\omega} - \epsilon \right]$ in Eq. (F.42), and using $\gamma_1 = i|\gamma_1|$, $\gamma_2 = -i|\gamma_2|$, we find

$$R^{-1}(K, \omega_{sp}) = -\frac{\epsilon\omega/c^2}{|\gamma_1|} \left(1 + \frac{|\gamma_1|^2}{\omega^2/c^2} \right) - \frac{\epsilon\omega/c^2}{2|\gamma_2|} + \left(|\gamma_1| \frac{1}{\omega} - \frac{\omega/c^2}{2|\gamma_2|} \right) \frac{d\omega\epsilon}{d\omega} \quad (\text{F.43})$$

Using Eq. (4.4) and the definition of γ_j , we can simplify the terms inside the parentheses and write

$$R^{-1}(K, \omega_{sp}) = \frac{\epsilon\omega/c^2}{|\gamma_1|} \frac{\epsilon}{|1+\epsilon|} - \frac{\epsilon\omega/c^2}{2|\gamma_2|} - \frac{\omega/c^2}{2|\gamma_2|} \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \frac{d\omega\epsilon}{d\omega} \quad (\text{F.44})$$

Multiplying this expression by $\frac{\omega}{K^2} = \frac{c^2}{\omega} \frac{\epsilon+1}{\epsilon}$, we get

$$\frac{\omega}{K^2} R^{-1}(K, \omega_{sp}) = \frac{-\epsilon}{|\gamma_1|} - \frac{\epsilon+1}{2|\gamma_2|} - \frac{1}{2|\gamma_2|} \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \frac{d\omega\epsilon}{d\omega} \quad (\text{F.45})$$

Comparing this expression to Eq. (F.66), we can write

$$\frac{\omega}{K^2} R^{-1}(K, \omega_{sp}) = 2L(\omega) \quad (\text{F.46})$$

which gives Eq. (F.71).

F.5 Derivation of the energy

In this section, we focus on the derivation of the electromagnetic energy associated with surface waves, already introduced in appendix F.2. The energy balance from time $t = 0$ to $t = T$ reads :

$$U = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} (-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{F.47})$$

in which $\int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} (-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$ is the operator's work on the system between $t = 0$ and $t = T$. Let us recall that T must be large for this work to be adiabatic, and that U then does not depend on T and is also the total electromagnetic energy of the system. Due to the exponential decrease along the z -axis, the contribution of the Poynting vector, which should appear in the left term of equation (F.47), drops to zero. We want to derive the first term of equation (F.47) to obtain the electromagnetic energy.

We introduce again (like in appendix F.2) time-dependent amplitudes in Eq. (6) of the article : $A_{\mathbf{K}}$ is then replaced by $A_{\mathbf{K}}(t)$ in which $A_{\mathbf{K}}(t) = A_{\mathbf{K}} \times f(t)$. This accounts for operator's work. For the sake of convenience, we take a $2T$ -periodic function for which $f(0) = f(2T) = 0$ and $f(T) = 1$, so that we can write $f(t) = \sum_n f_n \exp(i2\pi n \frac{t}{2T})$. T is the typical time of variation of the amplitude $A_{\mathbf{K}}(t)$. T has to be taken sufficiently large to consider the work done by the operator as adiabatic. (For instance $f(t) = \sin(\pi \frac{t}{2T})$.) Let us first derive the energy in the material medium denoted medium 2 for $z < 0$. We have :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.48})$$

Using $A_{\mathbf{K}}(t) = A_{\mathbf{K}} f(t)$ and the Fourier series expansion of $f(t)$ given above, the field can be cast as a sum

of terms varying as $\exp[-i(\omega + \frac{\pi n}{T})t]$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n i \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) f_n \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.49})$$

Hence the displacement vector

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n i \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) f_n \epsilon_j \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.50})$$

and its time derivative

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}} \sum_n \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right)^2 f_n \epsilon_j \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) \exp \left[i \left(\frac{\pi n}{T} - \omega \right) t \right] + c.c. \quad (\text{F.51})$$

As $1/T \ll \omega$, we have $(\omega - \frac{\pi n}{T})^2 \epsilon_j(\omega - \frac{\pi n}{T}) \approx \omega^2 \epsilon_j(\omega) - \frac{\pi n}{T} \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega}$. Taking the inverse of the Fourier series expansions in Eq. (F.51), we get

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{\mathbf{K}}(t) + i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{\mathbf{K}}(t) \right\} \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.52})$$

Hence

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \\ & -\epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}'}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \left\{ \omega'^2 \epsilon_j(\omega') A_{\mathbf{K}'}(t) + i \frac{d[\omega'^2 \epsilon_j(\omega')]}{d\omega'} \partial_t A_{\mathbf{K}'}(t) \right\} \exp[-i(\omega + \omega')t] \\ & -\epsilon_0 \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}'}^*(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \left\{ \omega'^2 \epsilon_j(\omega') A_{\mathbf{K}'}^*(t) - i \frac{d[\omega'^2 \epsilon_j(\omega')]}{d\omega'} \partial_t A_{\mathbf{K}'}^*(t) \right\} \exp[-i(\omega - \omega')t] \\ & + c.c. \quad (\text{F.53}) \end{aligned}$$

Integrating this term over the surface S and using $\int dx \int dy \exp(i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}) = S \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'}$ (δ is the Kroenecker symbol, which verifies $\delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} = 1$ if $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$, $\delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} = 0$ else), we find

$$\begin{aligned} & \int dx \int dy \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \\ & -\epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{-\mathbf{K}}(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{-\mathbf{K}}(t) + i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{-\mathbf{K}}(t) \right\} \exp(-2i\omega t) \\ & - \epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{K}}^*(z) [-i\omega A_{\mathbf{K}}(t) + \partial_t A_{\mathbf{K}}(t)] \left\{ \omega^2 \epsilon_j(\omega) A_{\mathbf{K}}^*(t) - i \frac{d[\omega^2 \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t) \right\} \\ & + c.c. \quad (\text{F.54}) \end{aligned}$$

The first term on the right hand side of Eq. (F.54) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$. For T sufficiently large, all the terms vanish except the one proportional to $A_{\mathbf{K}}(t)A_{-\mathbf{K}}(t)$ which gives the first term on the right hand side of Eq. (F.55). The second term on the right hand side of Eq. (F.54) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$ too. The terms proportional to $A_{\mathbf{K}}A_{\mathbf{K}}^*$ and $\partial_t A_{\mathbf{K}}\partial_t A_{\mathbf{K}}^*$ are pure imaginary and give no contribution once added to their complex conjugate and opposite. The terms proportional to $A_{\mathbf{K}}\partial_t A_{\mathbf{K}}^*$ and $\partial_t A_{\mathbf{K}}A_{\mathbf{K}}^*$, once added to their complex conjugate, both vary as $\partial_t |A_{\mathbf{K}}|^2$ and are easily integrated to give the last term on the right hand side of Eq. (F.55). Notice that these two terms vary respectively as $\omega^2\epsilon(\omega)$ and $\frac{d\omega^2\epsilon(\omega)}{d\omega}$, and that their sum simplifies and varies as $\frac{d\omega\epsilon(\omega)}{d\omega}$, as written in Eq. (F.55) :

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int dx \int dy \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \\ \epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{u}_{-\mathbf{K}}(z) i\omega^3 \epsilon_j(\omega) \int_0^T dt [A_{\mathbf{K}}(t)A_{-\mathbf{K}}(t) \exp(-2i\omega t)] + c.c. \\ + \epsilon_0 S \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \omega^2 \frac{d[\omega\epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |A_{\mathbf{K}}|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.55})$$

Let us now calculate the energy associated with the term $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}$ in Eq. (F.47).

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}}(t) \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.56})$$

$$\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) [\partial_t A_{\mathbf{K}}(t) - i\omega A_{\mathbf{K}}(t)] \exp(-i\omega t) + c.c. \quad (\text{F.57})$$

Hence

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{\mathbf{K}'}(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}'}(t) - i\omega' A_{\mathbf{K}'}(t)] \exp[-i(\omega + \omega')t] \\ + \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \exp[i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{\mathbf{K}'}^*(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t) + i\omega A_{\mathbf{K}}^*(t)] \exp[-i(\omega - \omega')t] + c.c. \end{aligned} \quad (\text{F.58})$$

Integration over the surface S as previously for $\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}$ yields :

$$\begin{aligned} \int dx \int dy \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{-\mathbf{K}}(z) A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{-\mathbf{K}}(t) - i\omega A_{-\mathbf{K}}(t)] \exp(-2i\omega t) \\ + \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 A_{\mathbf{K}}(t) [\partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t) + i\omega A_{\mathbf{K}}^*(t)] + c.c. \end{aligned} \quad (\text{F.59})$$

The first term on the right hand side of Eq. (F.59) can be expanded and integrated from $t = 0$ to $t = T$. For T sufficiently large, the term proportional to $A_{\mathbf{K}}(t)\partial_t A_{-\mathbf{K}}(t)$ vanishes, and we get the first term on the right hand side of Eq. (F.60). The second term on the right hand side of Eq. (F.59) can be expanded and

integrated from $t = 0$ to $t = T$ too. The term proportional to $A_{\mathbf{K}}(t)A_{\mathbf{K}}^*(t)$ is a pure imaginary, and gives no contribution once added to its complex conjugate. The term varying as $A_{\mathbf{K}}(t)\partial_t A_{\mathbf{K}}^*(t)$, once added to its complex conjugate, varies as $\partial_t |A_{\mathbf{K}}(t)|^2$ and is easily integrated to give the last term on the right hand side of Eq. (F.60).

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int dx \int dy \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \\ \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} i \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) \cdot \mathbf{b}_{-\mathbf{K}}(z) \int_0^T dt [A_{\mathbf{K}}(t)\omega A_{-\mathbf{K}}(t) \exp(-2i\omega t)] + c.c. \\ + \frac{S}{\mu_0} \sum_{\mathbf{K}} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 |A_{\mathbf{K}}|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

We now add Eqs. (F.55) and (F.60). The first terms on the right hand sides of these two equations cancel each other (so do their complex conjugates), so that we get

$$\int_0^T dt \int dx \int dy [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.61})$$

Before integrating this expression over z , let us remark that it can be cast under a somewhat clearer form

$$\int_0^T dt \int dx \int dy [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = S \sum_{\mathbf{K}} \left[\epsilon_0 \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right]. \quad (\text{F.62})$$

where $\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z) = i\omega A_{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$ and $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z) = iA_{\mathbf{K}} \mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)$ so that $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z) \exp(-i\omega t) + c.c.$ and $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z) \exp(-i\omega t) + c.c.$. Eq. (F.62) gives the energy per unit length along the z direction of surface plasmons. $\epsilon_0 S \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ and $\frac{1}{\mu_0} S |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ are then the electric and magnetic contribution of each mode \mathbf{K} to the former energy per unit length.

We now would like to integrate Eq. (F.61) over z . In both half spaces $z > 0$ and $z < 0$ ($j = 1, 2$), we have $|\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \exp[-2\text{Im}(\gamma_j)z] \left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2}\right)$, $\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z) = (K\hat{\mathbf{K}} + \gamma_j \hat{\mathbf{z}}) \times \frac{1}{\sqrt{L(\omega)}} \exp(i\gamma_j z) (\hat{\mathbf{K}} - \frac{K}{\gamma_j} \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\sqrt{L(\omega)}} \exp(i\gamma_j z) \frac{\epsilon_j \omega^2}{\gamma_j c^2} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{K}}$ (we used the property $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{K}} = 0$), hence $|\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \exp[-2\text{Im}(\gamma_j)z] \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^4}{c^4}$. Now writing

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} = \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2}\right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} \quad (\text{F.63a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^4}{c^4} \quad (\text{F.63b})$$

Integrating Eq. (F.61) over z using Eqs. (F.63), we get

$$U = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 \frac{1}{L(\omega)} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left[\left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2} \right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right] |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.64})$$

We now use the degree of freedom to set $L(\omega)$ as we wish, to simplify this equation. We set

$$L(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2|\gamma_j|} \left[\left(1 + \frac{K^2}{|\gamma_j|^2} \right) \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + \left| \frac{\epsilon_j}{\gamma_j} \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right]. \quad (\text{F.65})$$

Using Eq. (4.4), the definition of γ_j , and $\epsilon(\omega) \leq -1$ at the frequencies of surface plasmon of a single interface, Eq. (F.65) writes

$$L(\omega) = \frac{-\epsilon(\omega)}{2|\gamma_1|} + \frac{1}{4|\gamma_2|} \left[\frac{1 - \epsilon(\omega)}{-\epsilon(\omega)} \frac{d[\omega \epsilon(\omega)]}{d\omega} - 1 - \epsilon(\omega) \right] \quad (\text{F.66})$$

With this choice of $L(\omega)$, Eq. (F.64) can be written :

$$U = \sum_{\mathbf{K}} \epsilon_0 S \omega^2 2 |A_{\mathbf{K}}|^2. \quad (\text{F.67})$$

Using Eqs. (F.63), one finds that Eq. (F.66) is equivalent to set

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] = 1. \quad (\text{F.68})$$

Using the expressions of $|\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ and $|\mathbf{b}_{\mathbf{K}}(z)|^2$ given above, Eq. (4.4), and the definition of γ_j , this gives a normalization condition on $\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} \left[\frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} + |\epsilon_j(\omega)| \frac{|1 + \epsilon(\omega)|}{1 + |\epsilon(\omega)|} \right] |\mathbf{u}_{\mathbf{K}}(z)|^2 = 1. \quad (\text{F.69})$$

Eqs. (F.68) and (F.69) can also be written

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{\epsilon_0}{2} \frac{d[\omega \epsilon_j(\omega)]}{d\omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(z)|^2 \right] = \epsilon_0 \omega^2 |A_{\mathbf{K}}|^2, \quad (\text{F.70})$$

with the notations used in Eq. (F.62).

F.6 Equivalence of the quantum and classical approach : equality of the contribution of surface plasmons to the Purcell factor

In order to prove the equivalence of our quantum approach and the classical approach in the non lossy case (we aim at checking $F_P(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z) = F_{P,cl}(\mathbf{d}_{12}, \omega_0, z)$), we need the relation

$$R(K, \omega_{sp}) = \frac{\omega_{sp}}{K^2} \frac{1}{2L(\omega_{sp})} \quad (\text{F.71})$$

between the factor $R(K, \omega_{sp})$ appearing in the surface plasmons' Green's tensor in the classical calculation, and the normalisation length $L(\omega_{sp})$ used in the quantum calculation.

For the sake of simplicity, we shall write ω instead of ω_{sp} in the developments below (but ω still depends on K , and its value is given by Eq. (4.4)). We start from the definitions of $R(K, \omega)$ and of γ_j given in the chapter 4, and write

$$R^{-1}(K, \omega) = -i \frac{\epsilon\omega/c^2}{\gamma_1} - i\gamma_1 \frac{d\epsilon}{d\omega} + i \frac{\frac{d\epsilon}{d\omega} \frac{\omega^2}{c^2} + 2\omega\epsilon/c^2}{2\gamma_2} \quad (\text{F.72})$$

Inserting $\frac{d\epsilon}{d\omega} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{d\omega\epsilon}{d\omega} - \epsilon \right]$ in Eq. (F.72), and using $\gamma_1 = i|\gamma_1|$, $\gamma_2 = -i|\gamma_2|$, we find

$$R^{-1}(K, \omega) = -\frac{\epsilon\omega/c^2}{|\gamma_1|} \left(1 + \frac{|\gamma_1|^2}{\omega^2/c^2} \right) - \frac{\epsilon\omega/c^2}{2|\gamma_2|} + \left(|\gamma_1| \frac{1}{\omega} - \frac{\omega/c^2}{2|\gamma_2|} \right) \frac{d\omega\epsilon}{d\omega} \quad (\text{F.73})$$

Using Eq. (4.4), and the definition of γ_j , we can simplify the terms inside the parentheses and write

$$R^{-1}(K, \omega) = \frac{\epsilon\omega/c^2}{|\gamma_1|} \frac{\epsilon}{|1 + \epsilon|} - \frac{\epsilon\omega/c^2}{2|\gamma_2|} - \frac{\omega/c^2}{2|\gamma_2|} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \frac{d\omega\epsilon}{d\omega} \quad (\text{F.74})$$

Multiplying this expression by $\frac{\omega}{K^2} = \frac{c^2}{\omega} \frac{\epsilon+1}{\epsilon}$, we get

$$\frac{\omega}{K^2} R^{-1}(K, \omega) = \frac{-\epsilon}{|\gamma_1|} - \frac{\epsilon+1}{2|\gamma_2|} - \frac{1}{2|\gamma_2|} \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{d\omega\epsilon}{d\omega}. \quad (\text{F.75})$$

Comparing this expression to Eq. (F.66), we can write

$$\frac{\omega}{K^2} R^{-1}(K, \omega) = 2L(\omega) \quad (\text{F.76})$$

which gives Eq. (F.71).

Énergie et quantification de modes électromagnétiques en présence de milieux dispersifs

G.1 Bilan d'énergie avec milieux dispersifs

Les équations de Maxwell en l'absence de charges externes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (\text{G.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{G.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (\text{G.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} \quad (\text{G.4})$$

(tous les champs sont fonction de \mathbf{r} et t) permettent d'écrire le bilan d'énergie

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{G.5})$$

En présence uniquement de milieux non dispersifs électriquement ($\frac{d\epsilon}{d\omega} = 0$) et neutres magnétiquement ($\mu = 1$), on a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ et l'on peut écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t \left[\frac{\epsilon_0}{2} \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right] = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{G.6})$$

Cette équation permet de définir une densité d'énergie électromagnétique

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \epsilon'(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2. \quad (\text{G.7})$$

En présence de milieux dispersifs, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ne peut s'exprimer simplement en fonction de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ comme ci-dessus, et l'on ne peut pas faire apparaître directement la dérivée temporelle d'une densité d'énergie dans le terme $\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}$ de l'équation (G.5). Afin de déterminer l'énergie électromagnétique en présence de milieux dispersifs dans les cas qui nous intéressent, nous allons nous restreindre au cas où le champ électromagnétique considéré est celui d'un mode permanent, ou celui d'une superposition de tels modes. L'existence

17 Annexe G. Énergie et quantification de modes électromagnétiques en présence de milieux dispersifs

de tels modes suppose que le système considéré est non dissipatif. On suppose ainsi que les constantes diélectriques des matériaux présents ont une partie imaginaire nulle. Pour effectuer ce calcul dans la section suivante, nous allons préalablement effectuer un bilan d'énergie macroscopique à partir de l'équation (G.5). Nous considérons pour cela que le champ de ces modes est contenu dans une région de l'espace finie V délimitée par une surface Σ , et que le flux net du vecteur de Poynting à travers Σ est nul :

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{S} = \int_{\Sigma} d^2\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (\text{G.8})$$

Définissons la puissance P_{ext} fournie par un opérateur externe au champ électromagnétique, via les sources de courant \mathbf{j} :

$$P_{ext} = - \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{G.9})$$

En intégrant l'équation (G.5) sur le volume V et en tenant compte des équations (G.8) et (G.9), on obtient :

$$P_{ext} = \int_V d^3\mathbf{r} [\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}] \quad (\text{G.10})$$

En intégrant cette équation entre les instants $t = 0$ et $t = T$, on obtient une expression du travail fourni par l'opérateur externe entre ces deux instants :

$$W = \int_0^T dt \int_V d^3\mathbf{r} [\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}] \quad (\text{G.11})$$

G.2 Énergie d'un mode unique en présence de milieux dispersifs

On considère un mode unique du champ électromagnétique, dérivant du potentiel-vecteur d'expression

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A\mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{G.12})$$

prenant place dans un système de constante diélectrique $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$, *supposée réelle*, et magnétiquement neutre ($\mu = 1$).

On suppose que ce mode est normalisable, au sens où l'intégrale sur tout le système de $|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2$ est finie :

$$\int d^3\mathbf{r} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 \text{ finie.} \quad (\text{G.13})$$

Il peut s'agir par exemple d'un mode de plasmon localisé sur une nanosphère, ou d'un plasmon de surface d'une interface métal/diélectrique¹.

Afin de déterminer l'énergie de ce mode, nous allons « l'allumer adiabatiquement » entre les instants $t = 0$

1. Dans ce dernier cas, le mode est a priori d'extension infinie dans les directions parallèles à l'interface, et n'est donc pas normalisable. Pour le rendre normalisable, on peut utiliser les conditions aux limites de Born-von Karman dans ces directions, c'est-à-dire considérer un système périodique dans ces directions. Le vecteur d'onde du plasmon ne peut alors prendre que des valeurs discrètes compatibles avec la périodicité.

et $t = T$. Nous pourrions alors utiliser le bilan d'énergie (G.11) effectué dans la partie précédente. Pour cela, nous choisissons une amplitude A dépendante du temps :

$$A = A_0 f(t) \quad (\text{G.14})$$

avec $f(0) = 0$ et $f(T) = 1$, et T suffisamment grand pour que l'allumage puisse être considéré comme adiabatique. Afin de simplifier les calculs, nous allons considérer que la fonction $f(t)$ est de période $2T$ et peut ainsi être développée en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_n f_n e^{i2\pi n t / (2T)}. \quad (\text{G.15})$$

Nous séparons le bilan d'énergie (G.11) en deux termes, associés au déplacement et champ électrique, et à l'induction et champ magnétique,

$$W_E = \int_0^T dt \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}, \quad (\text{G.16a})$$

$$W_B = \int_0^T dt \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}. \quad (\text{G.16b})$$

Nous allons tout d'abord déterminer W_B . Le terme en $\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}$ du bilan (G.11) s'intègre sans difficultés par rapport au temps,

$$\int_0^T dt \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, T), \quad (\text{G.17})$$

où l'on a utilisé la propriété $f(0) = 0$ qui implique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{0}$. Le membre de droite de (G.17) peut se calculer à l'aide de la relation $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et en utilisant les équations (G.12) et (G.14), ainsi que la propriété $f(T) = 1$,

$$\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, T) = A_0^2 [\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})]^2 e^{-2i\omega T} + |A_0|^2 |\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 + c.c. \quad (\text{G.18})$$

Afin de simplifier les calculs, on ne garde pas les termes oscillant rapidement et de moyenne nulle de $\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, T)$ (dont la contribution à l'énergie sera elle-même oscillante et de moyenne nulle). On obtient

$$\langle \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, T) \rangle = 2|A_0|^2 |\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{G.19})$$

On en déduit

$$\langle W_B \rangle = \frac{1}{\mu_0} |A_0|^2 \int_V d^3\mathbf{r} |\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 = \epsilon_0 |\omega A_0|^2 \int_V d^3\mathbf{r} \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right|^2. \quad (\text{G.20})$$

17 Annexe G. Énergie et quantification de modes électromagnétiques en présence de milieux dispersifs

Afin de déterminer W_E , on écrit tout d'abord $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 \left[i\omega f(t) - \frac{df}{dt} \right] \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{G.21})$$

On calcule ensuite $\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ en ré-écrivant au préalable $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sous forme de somme d'exponentielles temporelles puis en utilisant la relation $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega') = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega') \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega')$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A_0 \sum_n f_n i \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right) e^{-i(\omega - \frac{\pi n}{T})t} \mathbf{u}(\mathbf{r}) + c.c., \quad (\text{G.22a})$$

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 A_0 \sum_n f_n \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right)^2 \epsilon \left(\mathbf{r}, \omega - \frac{\pi n}{T} \right) e^{-i(\omega - \frac{\pi n}{T})t} \mathbf{u}(\mathbf{r}) + c.c. \quad (\text{G.22b})$$

Afin de simplifier cette expression, on effectue un développement limité du terme $(\omega - \frac{\pi n}{T})^2 \epsilon \left(\mathbf{r}, \omega - \frac{\pi n}{T} \right)$ avec $\frac{\pi n}{T} \ll \omega$,

$$\left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right)^2 \epsilon \left(\mathbf{r}, \omega - \frac{\pi n}{T} \right) \simeq \omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\pi n}{T} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega)]. \quad (\text{G.23})$$

En ré-insérant ce terme dans (G.22b), on peut finalement écrire

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 A_0 f(t) \omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + i\epsilon_0 A_0 \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{G.24})$$

Comme pour $\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, T)$, on ne garde que les termes à variations lentes de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ (les termes à variations rapides sont de moyenne nulle et leur contribution à W_E également). On obtient

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \rangle = \epsilon_0 |A_0|^2 \frac{df^2}{dt} \underbrace{\left\{ \omega \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] - \omega^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \right\}}_{=\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega)]} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{G.25})$$

(des termes imaginaires purs obtenus lors de ce calcul ont été simplifiés avec leur complexe conjugué). On en déduit

$$\langle W_E \rangle = \epsilon_0 |\omega A_0|^2 \int_V d^3 \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{G.26})$$

La somme de (G.20) et (G.26) donne

$$\langle W \rangle = \epsilon_0 |\omega A_0|^2 \int_V d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 + \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right|^2 \right\}. \quad (\text{G.27})$$

G.3 Quantification d'un mode unique en présence de milieux dispersifs

On considère de nouveau le mode unique dont l'énergie a été calculée dans la section G.2. Son énergie étant connue, la quantification de ce mode ne pose pas de difficultés.

Son énergie et son champ électrique sont donnés par les expressions

$$U = \epsilon_0 |\omega A|^2 \int_V d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 + \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right|^2 \right\}, \quad (\text{G.28a})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega A \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{G.28b})$$

Afin de simplifier l'expression (G.28a), nous allons supposer que le champ $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ est normalisé par la condition

$$\frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 + \left| \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right|^2 \right\} = 1. \quad (\text{G.29})$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r})$ a alors pour dimension l'inverse de la racine d'un volume, et on a

$$U = 2\epsilon_0 |\omega A|^2 = \epsilon_0 \omega^2 (AA^* + A^*A). \quad (\text{G.30})$$

On peut alors quantifier ce mode canoniquement, de manière analogue à l'oscillateur harmonique usuel. On associe aux amplitudes A et A^* des opérateurs,

$$A \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega}} \hat{a}, \quad (\text{G.31a})$$

$$A^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega}} \hat{a}^+. \quad (\text{G.31b})$$

Le mode considéré se présente ainsi sous forme de bosons, auxquels sont associés des opérateurs création (\hat{a}) et destruction (\hat{a}^+). Les opérateurs associés à l'énergie et au champ électrique sont alors

$$\hat{H} = \hbar \omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{G.32a})$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0}} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \hat{a} e^{-i\omega t} + h.c. \quad (\text{G.32b})$$

Annexes du chapitre « Interaction électrons – SPhP dans les puits quantiques »

Sommaire

G.1 Bilan d'énergie avec milieux dispersifs	173
G.2 Énergie d'un mode unique en présence de milieux dispersifs	174
G.3 Quantification d'un mode unique en présence de milieux dispersifs	176

H.1 Relation de dispersion et taux d'interaction de la structure *Lapsus* simplifiée

On étudie dans cette annexe la relation de dispersion des SPhP de la structure *Lapsus* simplifiée, ainsi que leurs taux d'interaction avec les électrons du puits quantique, afin de s'assurer de leur similarité avec ceux discutés dans le chapitre 5 à propos d'un puits quantique simple.

Pour étudier les modes de la structure complète du projet *Lapsus*, comprenant en plus des barrières et du puits un espaceur séparant le substrat des barrières et un réseau d'or (voir figure 5.2), nous avons remplacé le réseau d'or par un film continu (figure H.1). Ceci présente l'avantage de rendre la structure invariante par translation dans les directions parallèles x et y et donc de pouvoir étudier ses ondes de surface avec des outils type matrice de transfert connus et peu coûteux en calculs. Le couplage de ces ondes de surface au rayonnement via le réseau n'est pas pris en compte ici, et est abordé dans la section 5.3. La figure H.2 montre la nouvelle relation de dispersion des SPhP en présence de cette couche métallique. On y retrouve des branches proches de celles du puits simple (figure 5.8), ainsi que des branches correspondant aux interfaces barrière inférieure/espaceur (courbes vertes) et espaceur/substrat (courbes magenta) – ces branches supplémentaires correspondent à des modes éloignés du puits interagissant peu avec les électrons.

On a représenté sur les figures H.3 les taux d'émission et d'absorption de SPhP par un électron dans le puits quantique de la structure *Lapsus* simplifiée. Là encore, on obtient des taux d'interaction très proches de ceux d'un puits simple (figure 5.17). On remarque toutefois qu'une branche propre à la structure *Lapsus* a un taux d'interaction important (courbe magenta sur la figure H.3(a)). Cette branche correspond à la branche représentée également en magenta et de pulsation comprise approximativement entre 36 et 43 meV sur la figure H.2. Les modes de cette branche qui interagissent le plus avec les électrons sont ceux de faible vecteur

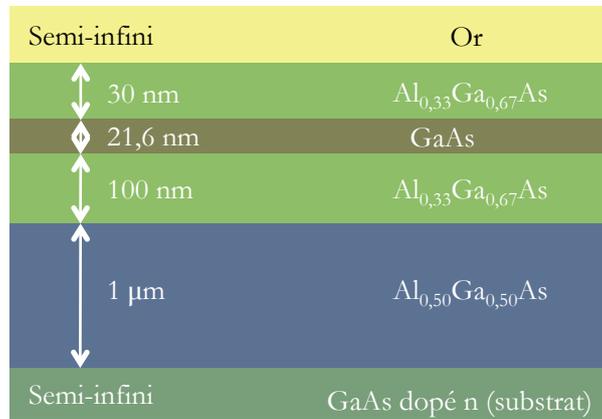


FIGURE H.1 – Structure simplifiée du projet *Lapsus*. Par rapport à la structure de la figure 5.2, un film d'or remplace le réseau en or, rendant la structure invariante par translation dans les directions parallèles aux couches.

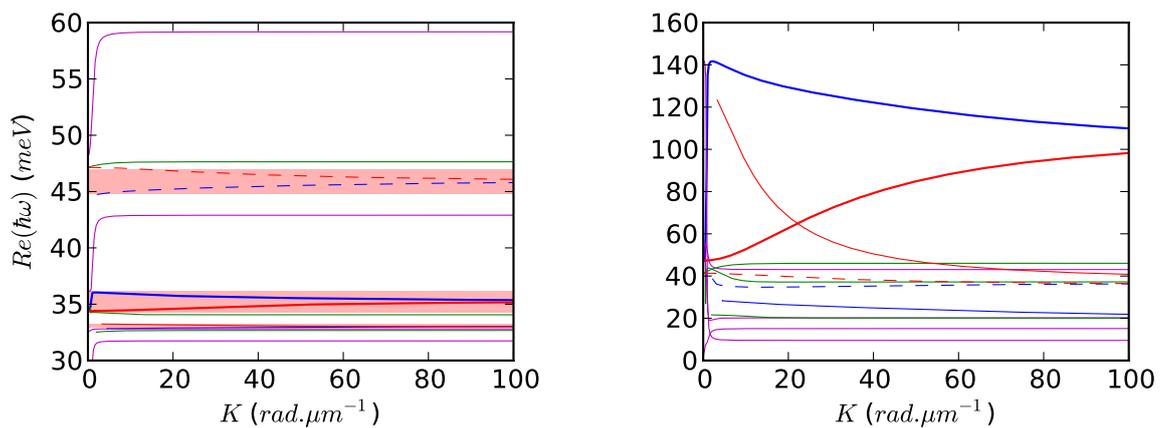


FIGURE H.2 – Relation de dispersion (gauche) et facteurs de qualité (droite) des SPhP de la structure simplifiée du projet *Lapsus* (figure H.1). Comme sur la figure 5.8, on a reproduit sur la figure de gauche les intervalles de fréquence de la figure 5.7.

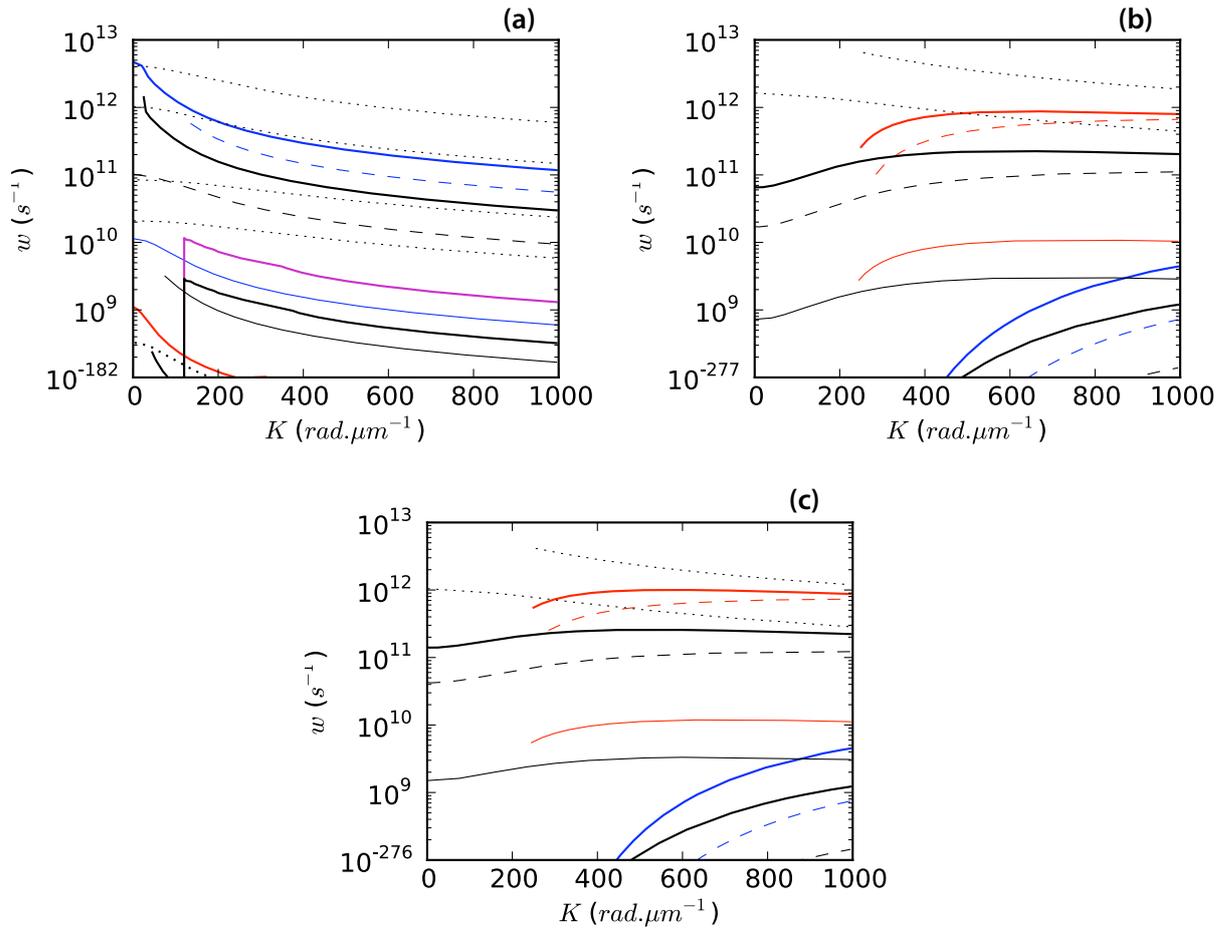


FIGURE H.3 – Taux d'émission et d'absorption de chaque branche de SPhP d'un électron dans la structure Lapsus simplifiée (figure H.1). Transitions (a) : $2 \leftrightarrow 1$, (b) : $1 \leftrightarrow 1$, (c) : $2 \leftrightarrow 2$. Les remarques de la figure 5.17 s'appliquent, les couleurs et traits correspondant maintenant à la figure H.2, et les symétries du champ des modes ne sont qu'approximatives ici.

d'onde, de pulsation proche de 36 meV, comme les taux d'interaction des modes individuels (figure H.4 ci-dessous)

Les taux d'interaction (équation 5.25) de chaque mode de SPhP de la structure *Lapsus* simplifiée sont représentés sur la figure H.4. Là encore, on obtient des résultats proches de ceux d'un puits simple (figure 5.18).

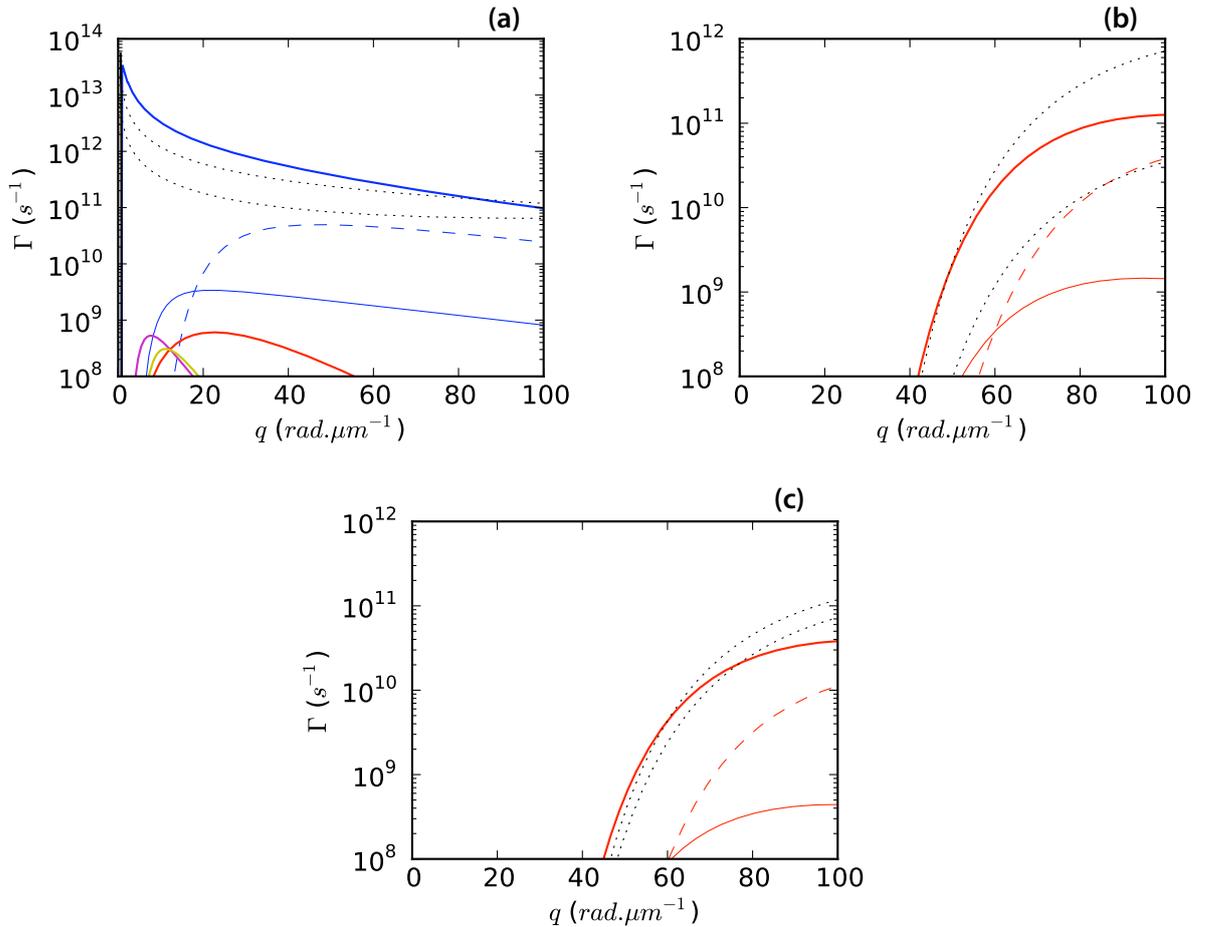


FIGURE H.4 – Taux d'interaction de chaque mode de SPhP avec une population d'électron, dans la structure *Lapsus* simplifiée. Transitions (a) : $2 \leftrightarrow 1$, (b) : $1 \leftrightarrow 1$, (c) : $2 \leftrightarrow 2$. Les couleurs et traits correspondent à la figure H.2. Les remarques de la figure 5.17 s'appliquent, les couleurs et traits correspondant maintenant à la figure H.2, et les symétries du champ des modes ne sont qu'approximatives ici.

H.2 Éléments de matrice

On calcule dans cette annexe les éléments de matrice associés aux processus d'émission et d'absorption de SPhP et de phonons confinés, par transition intersousbande. On note les états « fondamentaux » et « excités »

de l'électron sous la forme

$$|g_{e-}\rangle = |m, \mathbf{K}\rangle, |e_{e-}\rangle = |m', \mathbf{K}'\rangle. \quad (\text{H.1a})$$

L'absorption correspond au passage de l'état $|g_{e-}\rangle$ vers l'état $|e_{e-}\rangle$, et l'émission correspond au processus inverse. L'état $|g_{e-}\rangle = |m, \mathbf{K}\rangle$ ($|e_{e-}\rangle = |m', \mathbf{K}'\rangle$) correspond à un électron dans la sousbande m (m') et de vecteur d'onde dans le plan parallèle au puits \mathbf{K} (\mathbf{K}'). On considère que le système étudié a une période L dans les directions parallèles au puits x et y , et on note $S = L \times L$. Ainsi, les vecteurs d'onde des phonons \mathbf{q} et des électrons \mathbf{K} sont quantifiés, et sont de la forme $n_x \frac{2\pi}{L} \hat{x} + n_y \frac{2\pi}{L} \hat{y}$ (n_x et n_y entiers relatifs). Les fonctions d'onde des électrons peuvent s'exprimer sous la forme

$$\langle \mathbf{r} | m, \mathbf{K} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{S}} \zeta_m(z), \quad (\text{H.2})$$

où les fonctions enveloppes $\zeta_m(z)$ sont normalisées à l'aide de la condition $\int dz' \zeta_{m'}^*(z') \zeta_m(z') = \delta_{m,m'}$. Les états « fondamentaux » et « excités » du système {électrons + SPhP} sont de la forme

$$|g\rangle = |n_{\mathbf{q}} + 1, m, \mathbf{K}\rangle, |e\rangle = |n_{\mathbf{q}}, m', \mathbf{K}'\rangle, \quad (\text{H.3a})$$

correspondant à $n_{\mathbf{q}} + 1$ ($n_{\mathbf{q}}$) phonons dans le mode de vecteur d'onde \mathbf{q} dans les états excités (fondamentaux). Au cours de ces calculs, on ne considère qu'une seule branche de la relation de dispersion des SPhP. Les résultats obtenus peuvent s'appliquer à chacune d'elles.

La perturbation du hamiltonien de ce système (en représentation d'interaction, i.e. représentation de Schrödinger pour les électrons, représentation de Hamilton pour les SPhP) est donnée par

$$W_p = \frac{e}{m^*} \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (\text{H.4})$$

où m^* désigne la masse *effective* de l'électron dans le puits et l'opérateur potentiel-vecteur $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ vaut

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(\hat{z}) e^{-i\omega t} \hat{a}_{\mathbf{q}} + h.c. \quad (\text{H.5})$$

h.c. désigne le conjugué hermitique, ω la pulsation des SPhP considérés au vecteur d'onde de module q , $\mathbf{e}_{\mathbf{q}}(z)$ est le champ normalisé des SPhP (voir annexe B.4), de dimension l'inverse de la racine d'une longueur.

Pour l'absorption, on ne conserve que le terme devant $e^{-i\omega t}$ du mode de vecteur d'onde \mathbf{q} de W_p (ce qui revient à ne conserver que celui en $\hat{a}_{\mathbf{q}}$),

$$W_a = \frac{e}{m^*} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(\hat{z}) \hat{a}_{\mathbf{q}} \cdot (-i)\hbar\nabla. \quad (\text{H.6})$$

Pour l'émission, on ne conserve que celui devant $e^{i\omega t}$, son conjugué hermitique,

$$W_e = (W_a)^+ = \frac{e}{m^*} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}^*(\hat{z}) \hat{a}_{\mathbf{q}}^+ \cdot (-i)\hbar\nabla. \quad (\text{H.7})$$

L'élément de matrice correspondant à l'absorption est alors

$$\langle e|W_a|g\rangle = \frac{e}{m^*} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} \langle m', \mathbf{K}' | e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(\hat{z}) \cdot (-i)\hbar\nabla | m, \mathbf{K} \rangle \sqrt{n_{\mathbf{q}} + 1} \quad (\text{H.8a})$$

$$= (-i)\hbar \frac{e}{m^*} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\mathbf{K}'} \left(i\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{q}} I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right) \sqrt{n_{\mathbf{q}} + 1}, \quad (\text{H.8b})$$

où les *intégrales de recouvrement* $I_{m,m',q}^{(//)}$ et $I_{m,m',q}^{(z)}$ sont données par

$$I_{m,m',q}^{(//)} = \int dz' \zeta_{m'}^*(z') \zeta_m(z') e_{q,//}(z'), \quad (\text{H.9a})$$

$$I_{m,m',q}^{(z)} = \int dz' \zeta_{m'}^*(z') \frac{d\zeta_m}{dz'} e_{q,z}(z'). \quad (\text{H.9b})$$

$e_{q,//}(z') = \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(z') \cdot \hat{\mathbf{q}}$ et $e_{q,z}(z') = \mathbf{e}_{\mathbf{q}}(z') \cdot \hat{\mathbf{z}}$ (ces deux grandeurs ne dépendent plus que du module de \mathbf{q}).

Pour l'émission, on obtient

$$\langle g|W_e|e\rangle = (\langle e|W_a|g\rangle)^+ \quad (\text{H.10a})$$

$$= (-i)\hbar \frac{e}{m^*} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S}} \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\mathbf{K}'} \left(i\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{q}} I_{m,m',q}^{(//),*} - I_{m,m',q}^{(z),*} \right) \sqrt{n_{\mathbf{q}} + 1}. \quad (\text{H.10b})$$

On détermine le carré du module de ces éléments de matrice,

$$|\langle g|W_e|e\rangle|^2 = |\langle e|W_a|g\rangle|^2 \quad (\text{H.11a})$$

$$= \hbar^2 \frac{e^2}{m^{*2}} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S} \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\mathbf{K}'} \left| i\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{q}} I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right|^2 (n_{\mathbf{q}} + 1). \quad (\text{H.11b})$$

On trouve ainsi l'expression 5.12b. On peut remarquer que le terme faisant intervenir les intégrales de recouvrement vérifie

$$\left| i\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{q}} I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right|^2 = \left| i\mathbf{K}'\cdot\hat{\mathbf{q}} I_{m,m',q}^{(//)} + I_{m,m',q}^{(z)} \right|^2, \quad (\text{H.12})$$

en posant

$$I_{m,m',q}^{(//)} = \int dz' \zeta_m^*(z') \zeta_{m'}(z') e_{q,//}^*(z'), \quad (\text{H.13a})$$

$$I_{m,m',q}^{(z)} = \int dz' \zeta_m^*(z') \frac{d\zeta_{m'}}{dz'} e_{q,z}^*(z'), \quad (\text{H.13b})$$

(on retrouve ce résultat par intégrations par parties et en utilisant l'égalité $iqe_{q,//}(z) + \frac{\partial e_{q,z}(z)}{\partial z} = 0$ qui

découle de $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Le membre de droite de (H.12) est plus simple à calculer si l'on connaît \mathbf{K}' plutôt que \mathbf{K} .

Le nombre de SPhP dans le mode considéré, $n_{\mathbf{q}} \geq 0$, figure également dans l'élément de matrice. Dans le cas de l'émission, le nombre initial de SPhP est $n_{\mathbf{q}}$. Ainsi, si on développe le terme $n_{\mathbf{q}} + 1$, l'élément de matrice se sépare en un terme proportionnel au nombre initial de SPhP, $n_{\mathbf{q}}$, et un terme indépendant de $n_{\mathbf{q}}$, non nul même en l'absence de SPhP initialement. Le premier terme correspond à l'émission stimulée, le second à l'émission spontanée. Pour l'absorption, le nombre initial de SPhP est $n_{\mathbf{q}} + 1$, et développer ce terme n'a ici pas de sens (les $n_{\mathbf{q}}$ SPhP comme le $+1$ sont présents initialement et ne jouent pas de rôles différents). On peut avantageusement substituer $n_{\mathbf{q}}$ à $n_{\mathbf{q}} + 1$ et $n_{\mathbf{q}} - 1$ à $n_{\mathbf{q}}$ dans le cas de l'absorption, avec la condition $n_{\mathbf{q}} \geq 1$ initialement (il faut au moins un SPhP initialement pour qu'il puisse y avoir absorption d'un SPhP).

H.3 Taux d'interaction électroniques

On veut déterminer le taux d'émission (absorption) de SPhP par un électron dans un état initial donné $|e e^- \rangle = |m', \mathbf{K}' \rangle$ ($|g e^- \rangle = |m, \mathbf{K} \rangle$), par transition intersousbande vers une sousbande m (m').

On utilise la règle d'or de Fermi pour écrire les taux d'émission et d'absorption. On peut écrire une expression générale de ce taux, valable à la fois pour l'émission et l'absorption,

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{K} \text{ ou } \mathbf{K}'} |\langle g | W_e | e \rangle|^2 \delta(E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m', \mathbf{K}'}). \quad (\text{H.14})$$

où la somme $\sum_{\mathbf{K} \text{ ou } \mathbf{K}'}$ porte sur le vecteur d'onde des états d'arrivée, \mathbf{K} pour l'émission, \mathbf{K}' pour l'absorption. L'élément de matrice $|\langle g | W_e | e \rangle|^2$ écrit ici pour l'émission, est le même pour l'absorption d'après l'équation (H.12).

En utilisant (5.12b) et en simplifiant la somme sur \mathbf{K} à l'aide du symbole de Kroenecker qui apparait, on peut écrire

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} \hbar^2 \frac{e^2}{m^{*2}} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S} \left| i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{q} I'_{m, m', q}(\parallel) + I'_{m, m', q}(\perp) \right|^2 (n_{\mathbf{q}} + 1) \delta(E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m', \mathbf{K}'}). \quad (\text{H.15})$$

Le vecteur d'onde initial, \mathbf{K}' pour l'émission, \mathbf{K} pour l'absorption, est fixé, une somme parcourt l'ensemble des valeurs de \mathbf{q} , et l'équation $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \mathbf{q}$ permet d'obtenir le vecteur manquant.

On s'intéresse maintenant uniquement à l'émission, et on ré-écrit la somme $\sum_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{q} q \int_0^{2\pi} d\theta' \rho(\mathbf{q})$ où la densité surfacique d'états $\rho(\mathbf{q})$ vaut $\frac{S}{(2\pi)^2}$,

$$w_e = \hbar^2 \frac{e^2}{m^{*2}} \frac{1}{2\pi 2\epsilon_0} \int d\mathbf{q} q (n_{\mathbf{q}} + 1) \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta' \left| iK' \cos \theta' I'_{m, m', q}(\parallel) + I'_{m, m', q}(\perp) \right|^2 \delta(E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m', \mathbf{K}'}), \quad (\text{H.16})$$

où θ' désigne l'angle entre \mathbf{K}' et \mathbf{q} . On réécrit alors le terme figurant dans la distribution de Dirac sous la

forme

$$f_e(q, \theta') = E_{m, \mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m', \mathbf{K}'} \quad (\text{H.17a})$$

$$= \epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}(K'^2 - K^2) \quad (\text{H.17b})$$

$$= \epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{m^*} K' q \cos \theta'. \quad (\text{H.17c})$$

Si $f_e(q, \theta') = 0$, on a $\cos \theta' = \frac{m^*}{\hbar^2 K' q} (-\epsilon_m + \epsilon_{m'} - \hbar\omega) + \frac{q}{2K'}$. Ainsi, pour q fixé, $f_e(q, \theta')$ n'a de racines que si le membre de droite de l'équation précédente est compris entre -1 et 1 . Dans ce cas, on peut effectuer l'intégrale par rapport à θ' dans (H.16)¹, que l'on rappelle,

$$w_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*} \frac{1}{K'} 2 \int_{|\cos \theta'| < 1} dq (n_q + 1) \frac{1}{\omega} \frac{1}{|\sin \theta'|} \left| iK' q \cos \theta' I_{m, m', q}^{(//)} + I_{m, m', q}^{(z)} \right|^2, \quad (\text{H.18})$$

avec maintenant

$$\cos \theta' = \frac{q}{2K'} \left[1 - \frac{2m}{\hbar^2 q^2} (\epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega) \right], \quad (\text{H.19})$$

et $|\sin \theta'| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta'}$.

On procède de manière analogue pour l'absorption. Le vecteur initial connu est maintenant \mathbf{K} , et \mathbf{K}' est donné par l'équation $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \mathbf{q}$, et on utilise le membre de gauche de (H.12). On obtient

$$w_a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*} \frac{1}{K} 2 \int_{|\cos \theta| < 1} dq (n_q + 1) \frac{1}{\omega} \frac{1}{|\sin \theta|} \left| iK q \cos \theta I_{m, m', q}^{(//)} + I_{m, m', q}^{(z)} \right|^2, \quad (\text{H.20})$$

où θ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{K} et \mathbf{q} et est donné par

$$\cos \theta = \frac{q}{2K} \left[-1 - \frac{2m}{\hbar^2 q^2} (\epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega) \right], \quad (\text{H.21})$$

et $|\sin \theta'| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta'}$.

H.4 Taux d'interaction d'un mode de SPhP donné

On souhaite obtenir dans cette annexe les taux d'émission et d'absorption d'un mode de SPhP donné par une population d'électrons décrite par une fonction de distribution $f(m, \mathbf{K})$. Nous allons déterminer ce taux à l'aide de la règle d'or de Fermi. En utilisant les mêmes notations que dans la partie H.2, les éléments de matrice de cette partie (équation 5.12b) peuvent être réutilisés ici tels quels

Le taux d'émission (par transition inter- ou intrasousbande de la sousbande m' à la sousbande m) de

1. En utilisant la formule $\int dx f(x) \delta[g(x)] = \sum_{x_0} \frac{f(x_0)}{|\frac{dg}{dx}(x_0)|}$ où la somme sur x_0 parcourt l'ensemble des racines x_0 de g

SPhP de la branche p de vecteur d'onde \mathbf{q} s'écrit

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K},\mathbf{K}'} |\langle g|W_e|e \rangle|^2 \delta(E_{m,\mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m',\mathbf{K}'}) f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})], \quad (\text{H.22})$$

où l'on a tenu compte du remplissage des niveaux électroniques de départ et d'arrivée via le terme $f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})]$. En utilisant l'expression (5.12b), on peut effectuer l'une des sommes sur \mathbf{K} ou \mathbf{K}' à l'aide du symbole de Kronecker figurant dans (5.12b). On obtient

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K}'} \hbar^2 \frac{e^2}{m^{*2}} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\omega^2 S} \left| i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 (n_{\mathbf{q}}^{(p)} + 1) \delta(E_{m,\mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m',\mathbf{K}'}) f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})], \quad (\text{H.23})$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{K}' - \mathbf{q}$. La distribution de Dirac figurant dans cette expression va permettre de simplifier la somme sur \mathbf{K}' , que l'on écrit sous forme d'intégrale au préalable ($\sum_{\mathbf{K}'} \rightarrow \int d\mathbf{K}' \frac{S}{(2\pi)^2}$). Avant cela, on peut choisir l'axe x parallèle et de même sens que le vecteur d'onde \mathbf{q} (on a alors $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{x}}$). La fonction en argument de la distribution de Dirac s'écrit alors

$$E_{m,\mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m',\mathbf{K}'} = \epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{K}^2 - \mathbf{K}'^2) \quad (\text{H.24a})$$

$$= \epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{m^*} q K'_x. \quad (\text{H.24b})$$

Cette fonction ne dépend que de la composante K'_x de \mathbf{K}' . On la note $f(K'_x)$ et on a $\frac{df}{dK'_x} = -\frac{\hbar^2}{m^*} q$, et on peut effectuer l'intégration sur K'_x à l'aide de la formule utilisée pour le calcul de (H.18),

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| iK'_x I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 (n_{\mathbf{q}}^{(p)} + 1) \int dK'_y f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})], \quad (\text{H.25})$$

avec $\mathbf{K}' = K'_x \hat{\mathbf{x}} + K'_y \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}' - \mathbf{q}$ et $K'_x = \frac{q}{2} + \frac{m^*}{\hbar^2 q} (\epsilon_m - \epsilon_{m'} + \hbar\omega)$.

Le taux d'absorption (par transition inter- ou intrasousbande de la sousbande m à la sousbande $m' -$ processus inverse de l'émission ci-dessus) s'écrit

$$w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{K},\mathbf{K}'} |\langle e|W_a|g \rangle|^2 \delta(E_{m,\mathbf{K}} + \hbar\omega - E_{m',\mathbf{K}'}) f(m, \mathbf{K}) [1 - f(m', \mathbf{K}')]. \quad (\text{H.26})$$

Cette expression est quasi-identique à H.22, aux arguments des fonctions de distribution près, inversés. On a ainsi finalement

$$w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 n_{\mathbf{q}}^{(p)} \int dK_y f(m, \mathbf{K}) [1 - f(m', \mathbf{K}')], \quad (\text{H.27})$$

où, par rapport à H.22, on a également substitué $n_{\mathbf{q}}^{(p)}$ à $n_{\mathbf{q}}^{(p)} + 1$, afin que le nombre initial de quanta soit $n_{\mathbf{q}}^{(p)}$, comme dans le cas de l'émission.

La différence entre $w_{e,\mathbf{q}}^{(p)}$ et $w_{a,\mathbf{q}}^{(p)}$ permet d'écrire un taux d'émission « net » de SPhP,

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} - w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 n_{\mathbf{q}}^{(p)} \int dK_y [f(m', \mathbf{K}') - f(m, \mathbf{K})] \\ + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 \int dK_y f(m', \mathbf{K}') [1 - f(m, \mathbf{K})], \quad (\text{H.28})$$

où le terme en $n_{\mathbf{q}}^{(p)}$ correspond aux processus d'émission stimulée et d'absorption, et le terme restant à l'émission spontanée. À l'équilibre thermique, (H.28) est nul (les deux populations, électrons et SPhP sont à l'équilibre), et on peut écrire

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T) \int dK_y [f_T(m', \mathbf{K}') - f_T(m, \mathbf{K})] \\ + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 \int dK_y f_T(m', \mathbf{K}') [1 - f_T(m, \mathbf{K})] = 0, \quad (\text{H.29})$$

où $n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T)$ et $f_T(m, \mathbf{K})$ sont donnés par les distributions de Bose-Einstein et Fermi-Dirac respectivement. On vérifie que (H.29) est correcte grâce à l'identité $n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T)[f_T(m, \mathbf{K}) - f_T(m', \mathbf{K}')] = f_T(m', \mathbf{K}')[1 - f_T(m, \mathbf{K})]$ vérifiée par les statistiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac. Ainsi, si une population d'électrons à l'équilibre thermique (à une température T_e) interagit avec une population de SPhP donnée (pas nécessairement à l'équilibre thermique), on peut soustraire (H.29) (égalité toujours vraie, et on choisit $T = T_e$) à (H.28) (dans lequel la fonction de distribution des électrons suit la statistique de Fermi-Dirac), et on obtient

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} - w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 [n_{\mathbf{q}}^{(p)} - n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T_e)] \int dK_y [f_{T_e}(m', \mathbf{K}') - f_{T_e}(m, \mathbf{K})] \quad (\text{H.30})$$

On note ainsi

$$\Gamma_{e^-, \mathbf{q}}^{(p)}(T_e) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^*\omega q} \left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2 \int dK_y [f_{T_e}(m', \mathbf{K}') - f_{T_e}(m, \mathbf{K})], \quad (\text{H.31})$$

et on a

$$w_{e,\mathbf{q}}^{(p)} - w_{a,\mathbf{q}}^{(p)} = \Gamma_{e^-, \mathbf{q}}^{(p)}(T_e)[n_{\mathbf{q}}^{(p)} - n_{\mathbf{q}}^{(p)}(T_e)], \quad (\text{H.32})$$

où l'on voit clairement que l'interaction du mode de SPhP considéré avec les électrons thermalisés tend à amener ce mode à la même température que les électrons. Le « taux d'interaction » associé, $\Gamma_{e^-, \mathbf{q}}^{(p)}(T_e)$, dépend notamment des populations électroniques (terme $[f_{T_e}(m', \mathbf{K}') - f_{T_e}(m, \mathbf{K})]$) dans H.31) ainsi que des intégrales de recouvrement entre les fonctions enveloppes des électrons et le champ du mode de SPhP (terme en $\left| i\mathbf{q}\cdot\mathbf{K}' I'_{m,m',q}(\parallel) + I'_{m,m',q}(z) \right|^2$).

Bibliographie

- ABAJO, F. J. Garcia de et M. KOCIAK (2008). « Probing the Photonic Local Density of States with Electron Energy Loss Spectroscopy », *Phys. Rev. Lett.* **100** (10), p. 106804. DOI : 10.1103/PhysRevLett.100.106804. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.106804> (Cité p. 15).
- AKIMOV, A., A. MUKHERJEE, C. YU, D. CHANG, A. ZIBROV, P. HEMMER, H. PARK et M. LUKIN (2007). « Generation of single optical plasmons in metallic nanowires coupled to quantum dots », *Nature* **450**(7168), p. 402–406 (Cité p. iv, 76).
- ALEXANDER, R. W., G. S. KOVENER et R. J. BELL (1974). « Dispersion Curves for Surface Electromagnetic Waves with Damping », *Phys. Rev. Lett.* **32** (4), p. 154–157. DOI : 10.1103/PhysRevLett.32.154. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.32.154> (Cité p. 6, 7).
- ALTEWISCHER, E., M. VAN EXTER et J. WOERDMAN (2002). « Plasmon-assisted transmission of entangled photons », *Nature* **418**(6895), p. 304–306 (Cité p. 77).
- AMBATI, M., D. GENOV, R. OULTON et X. ZHANG (2008a). « Active plasmonics : surface plasmon interaction with optical emitters », *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* **14**(6), p. 1395–1403 (Cité p. 76, 79, 157).
- AMBATI, M., S. H. NAM, E. ULIN-AVILA, D. A. GENOV, G. BARTAL et X. ZHANG (2008b). « Observation of Stimulated Emission of Surface Plasmon Polaritons », *Nano Letters* **8**(11). PMID : 18837543, p. 3998–4001. DOI : 10.1021/nl802603r. eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl802603r>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl802603r> (Cité p. 76).
- ANANTHA RAMAKRISHNA, S. et J. B. PENDRY (2003). « Removal of absorption and increase in resolution in a near-field lens via optical gain », *Phys. Rev. B* **67** (20), p. 201101. DOI : 10.1103/PhysRevB.67.201101 (Cité p. 53).
- ANDREW, P. et W. L. BARNES (2001). « Molecular fluorescence above metallic gratings », *Phys. Rev. B* **64** (12), p. 125405. DOI : 10.1103/PhysRevB.64.125405. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.125405> (Cité p. 7).
- ANGER, P., P. BHARADWAJ et L. NOVOTNY (2006). « Enhancement and Quenching of Single-Molecule Fluorescence », *Phys. Rev. Lett.* **96** (11), p. 113002. DOI : 10.1103/PhysRevLett.96.113002. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.113002> (Cité p. 7).
- ANKER, J., W. HALL, O. LYANDRES, N. SHAH, J. ZHAO et R. VAN DUYN (2008). « Biosensing with plasmonic nanosensors », *Nature materials* **7**(6), p. 442–453 (Cité p. iv).
- ARAKAWA, E. T., M. W. WILLIAMS, R. N. HAMM et R. H. RITCHIE (1973). « Effect of Damping on Surface Plasmon Dispersion », *Phys. Rev. Lett.* **31** (18), p. 1127–1129. DOI : 10.1103/PhysRevLett.31.1127. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.1127> (Cité p. 7).
- ARCHAMBAULT, A., T. V. TEPERIK, F. MARQUIER et J. J. GREFFET (2009). « Surface plasmon Fourier optics », *Phys. Rev. B* **79** (19), p. 195414. DOI : 10.1103/PhysRevB.79.195414. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.79.195414> (Cité p. 6, 18, 78, 79, 83, 164).

- ARCHAMBAULT, A., F. MARQUIER, J.-J. GREFFET et C. ARNOLD (2010). « Quantum theory of spontaneous and stimulated emission of surface plasmons », *Phys. Rev. B* **82** (3), p. 035411. DOI : 10.1103/PhysRevB.82.035411. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.035411> (Cité p. 75, 94).
- BABIKER, M., N. C. CONSTANTINOPOULOS et B. K. RIDLEY (1993). « Ap versus phi for coupling electrons to interface optical phonons in quantum wells », *Phys. Rev. B* **48** (4), p. 2236–2243. DOI : 10.1103/PhysRevB.48.2236. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.48.2236> (Cité p. 77).
- BAÑOS, A. (1966). *Dipole radiation in the presence of a conducting halfspace*. T. 9. Pergamon (Cité p. 10).
- BARNES, W., G. BJÖRK, J. GÉRARD, P. JONSSON, J. WASEY, P. WORTHING et V. ZWILLER (2002). « Solid-state single photon sources : light collection strategies », *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* **18** (2). 10.1140/epjd/e20020024, p. 197–210. ISSN : 1434-6060. URL : <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e20020024> (Cité p. 76).
- BARNES, W., A. DEREUX et T. EBBESEN (2003). « Surface plasmon subwavelength optics », *Nature* **424**.(6950), p. 824–830 (Cité p. iv, 6).
- BASTARD, G. (1988). *Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures*. Les Éditions de Physique, Paris (Cité p. 106).
- BERGMAN, D. J. et M. I. STOCKMAN (2003). « Surface Plasmon Amplification by Stimulated Emission of Radiation : Quantum Generation of Coherent Surface Plasmons in Nanosystems », *Phys. Rev. Lett.* **90** (2), p. 027402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.90.027402. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.027402> (Cité p. 76).
- BERGMAN, D. et M. STOCKMAN (2004). « Can we make a nanoscopic laser », *Laser Phys* **14**, p. 409–411 (Cité p. 76).
- BERINI, P. (2000). « Plasmon-polariton waves guided by thin lossy metal films of finite width : Bound modes of symmetric structures », *Phys. Rev. B* **61** (15), p. 10484–10503. DOI : 10.1103/PhysRevB.61.10484. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.10484> (Cité p. 94).
- BORN, M. et E. WOLF (1999). *Principles of Optics*. Seventh (expanded). Cambridge University Press (Cité p. 18, 28, 46).
- BOZHEVOLNYI, S., V. VOLKOV, E. DEVAUX, J. LALUET et T. EBBESEN (2006). « Channel plasmon subwavelength waveguide components including interferometers and ring resonators », *Nature* **440**.(7083), p. 508–511 (Cité p. iv, 6).
- BRILLOUIN, L. (1960). *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press, New York (Cité p. 80).
- CAI, W. et M. BRONGERSMA (2010). « Nanoscale optics : Plasmonics gets transformed. » *Nature nanotechnology* **5**.(7), p. 485 (Cité p. 148).
- CAO, L. et M. BRONGERSMA (2009). « Active Plasmonics : Ultrafast developments », *Nature Photonics* **3**.(1), p. 12–13 (Cité p. 76).
- CARMINATI, R., R. PIERRAT, J. de ROSNY et M. FINK (2007). « Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields », *Opt. Lett.* **32**.(21), p. 3107–3109. DOI : 10.1364/OL.32.003107. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-21-3107> (Cité p. 18).

- CATCHPOLE, K. R. et A. POLMAN (2008). « Plasmonic solar cells », *Opt. Express* **16**(26), p. 21793–21800. DOI : 10.1364/OE.16.021793. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-26-21793> (Cité p. iv).
- CHANCE, R. R., A. PROCK et R. SILBEY (2007). « Molecular Fluorescence and Energy Transfer Near Interfaces ». *Advances in Chemical Physics*. John Wiley & Sons, Inc., p. 1–65. ISBN : 9780470142561. DOI : 10.1002/9780470142561.ch1. URL : <http://dx.doi.org/10.1002/9780470142561.ch1> (Cité p. 15).
- CHANG, D. E., A. S. SØRENSEN, P. R. HEMMER et M. D. LUKIN (2006). « Quantum Optics with Surface Plasmons », *Phys. Rev. Lett.* **97** (5), p. 053002. DOI : 10.1103/PhysRevLett.97.053002. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.053002> (Cité p. 77).
- CHANG, S.-H., S. GRAY et G. SCHATZ (2005). « Surface plasmon generation and light transmission by isolated nanoholes and arrays of nanoholes in thin metal films », *Opt. Express* **13**(8), p. 3150–3165. DOI : 10.1364/OPEX.13.003150. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-8-3150> (Cité p. 18).
- CHICANNE, C., T. DAVID, R. QUIDANT, J. C. WEEBER, Y. LACROUTE, E. BOURILLOT, A. DEREUX, G. Colas des FRANCS et C. GIRARD (2002). « Imaging the Local Density of States of Optical Corrals », *Phys. Rev. Lett.* **88** (9), p. 097402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.88.097402. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.097402> (Cité p. 15).
- COLLIN, R. (2004). « Hertzian dipole radiating over a lossy earth or sea : Some early and late 20th-century controversies », *Antennas and Propagation Magazine, IEEE* **46**(2), p. 64–79 (Cité p. iii).
- COMAS, F., C. TRALLERO-GINER et M. CARDONA (1997). « Continuum treatment of phonon polaritons in semiconductor heterogeneous structures », *Phys. Rev. B* **56** (7), p. 4115–4127. DOI : 10.1103/PhysRevB.56.4115. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.4115> (Cité p. 93).
- DAWSON, P., F. de FERNEL et J.-P. GOUDONNET (1994). « Imaging of surface plasmon propagation and edge interaction using a photon scanning tunneling microscope », *Phys. Rev. Lett.* **72** (18), p. 2927–2930. DOI : 10.1103/PhysRevLett.72.2927. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.2927> (Cité p. iv).
- DE LEON, I. et P. BERINI (2010). « Amplification of long-range surface plasmons by a dipolar gain medium », *Nat. Photonics* **4**(6), p. 382–387 (Cité p. 94).
- DE LEON, I. et P. BERINI (2008). « Theory of surface plasmon-polariton amplification in planar structures incorporating dipolar gain media », *Phys. Rev. B* **78** (16), p. 161401. DOI : 10.1103/PhysRevB.78.161401. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.161401> (Cité p. 76).
- DE WILDE, Y., F. FORMANEK, R. CARMINATI, B. GRALAK, P. LEMOINE, K. JOULAIN, J. MULET, Y. CHEN et J. GREFFET (2006). « Thermal radiation scanning tunnelling microscopy », *Nature* **444**(7120), p. 740–743 (Cité p. iv).
- DEREUX, A., J.-P. VIGNERON, P. LAMBIN et A. A. LUCAS (1988). « Polaritons in semiconductor multilayered materials », *Phys. Rev. B* **38**(8), p. 5438–5452. DOI : 10.1103/PhysRevB.38.5438 (Cité p. 92).

- DREZET, A., A. HOHENAU et J. R. KRENN (2007). « Comment on “Far-Field Optical Microscopy with a Nanometer-Scale Resolution Based on the In-Plane Image Magnification by Surface Plasmon Polaritons” », *Phys. Rev. Lett.* **98** (20), p. 209703. DOI : 10.1103/PhysRevLett.98.209703. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.209703> (Cité p. 14).
- EBBESEN, T. W., C. GENET et S. I. BOZHEVOLNYI (2008). « Surface-plasmon circuitry », *Physics Today* **61**(5), p. 44–50. ISSN : 00319228. DOI : DOI:10.1063/1.2930735. URL : <http://dx.doi.org/10.1063/1.2930735> (Cité p. iv).
- EBBESEN, T., H. LEZEC, H. GHAEMI, T. THIO et P. WOLFF (1998). « Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays », *Nature* **391**(6668), p. 667–669 (Cité p. iv, 6).
- EDWARDS, B., A. ALÙ, M. E. YOUNG, M. SILVEIRINHA et N. ENGHETA (2008). « Experimental Verification of Epsilon-Near-Zero Metamaterial Coupling and Energy Squeezing Using a Microwave Waveguide », *Phys. Rev. Lett.* **100** (3), p. 033903. DOI : 10.1103/PhysRevLett.100.033903. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.033903> (Cité p. 117).
- ELSON, J. M. et R. H. RITCHIE (1971). « Photon Interactions at a Rough Metal Surface », *Phys. Rev. B* **4** (12), p. 4129–4138. DOI : 10.1103/PhysRevB.4.4129. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.4129> (Cité p. 77).
- EVLYUKHIN, A., S. BOZHEVOLNYI, A. STEPANOV, R. KIYAN, C. REINHARDT, S. PASSINGER et B. CHICHKOV (2007). « Focusing and directing of surface plasmon polaritons by curved chains of nanoparticles », *Opt. Express* **15**(25), p. 16667–16680 (Cité p. 18).
- FAIST, J., F. CAPASSO, D. L. SIVCO, C. SIRTORI, A. L. HUTCHINSON et A. Y. CHO (1994). « Quantum Cascade Laser », *Science* **264**(5158), p. 553–556. DOI : 10.1126/science.264.5158.553. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/264/5158/553.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/264/5158/553.abstract> (Cité p. 92).
- FANG, N., H. LEE, C. SUN et X. ZHANG (2005). « Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens », *Science* **308**(5721), p. 534–537. DOI : 10.1126/science.1108759. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/308/5721/534.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/308/5721/534.abstract> (Cité p. 7, 53).
- FASEL, S., F. ROBIN, E. MORENO, D. ERNI, N. GISIN et H. ZBINDEN (2005). « Energy-Time Entanglement Preservation in Plasmon-Assisted Light Transmission », *Phys. Rev. Lett.* **94** (11), p. 110501. DOI : 10.1103/PhysRevLett.94.110501. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.110501> (Cité p. 77).
- FASEL, S., M. HALDER, N. GISIN et H. ZBINDEN (2006). « Quantum superposition and entanglement of mesoscopic plasmons », *New Journal of Physics* **8**(1), p. 13. URL : <http://stacks.iop.org/1367-2630/8/i=1/a=013> (Cité p. 77).
- FELSEN, L. et N. MARCUVITZ (1994). *Radiation and scattering of waves*. T. 31. Wiley-IEEE Press (Cité p. 10).
- FENG, L., K. A. TETZ, B. SLUTSKY, V. LOMAKIN et Y. FAINMAN (2007). « Fourier plasmonics : Diffractive focusing of in-plane surface plasmon polariton waves », *Appl. Phys. Lett.* **91**(8), p. 081101. ISSN : 00036951.

- DOI : DOI : 10 . 1063 / 1 . 2772756 . URL : <http://dx.doi.org/10.1063/1.2772756> (Cité p. 5, 7, 12, 18).
- FESHBACH, H. et P. MORSE (1953). *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Interamericana (Cité p. 143).
- FORD, G. et W. WEBER (1984). « Electromagnetic interactions of molecules with metal surfaces », *Physics Reports* **113**.(4), p. 195 –287. ISSN : 0370-1573. DOI : 10 . 1016 / 0370 - 1573 (84) 90098 - X . URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015738490098X> (Cité p. 82, 84).
- GÓMEZ-SANTOS, G. (2003). « Universal Features of the Time Evolution of Evanescent Modes in a Left-Handed Perfect Lens », *Phys. Rev. Lett.* **90** (7), p. 077401. DOI : 10 . 1103 / PhysRevLett . 90 . 077401 . URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.077401> (Cité p. 59).
- GONG, Y. et J. VUCKOVIC (2007). « Design of plasmon cavities for solid-state cavity quantum electrodynamics applications », *Appl. Phys. Lett.* **90**.(3), p. 033113. ISSN : 00036951. DOI : DOI : 10 . 1063 / 1 . 2431450 . URL : <http://dx.doi.org/doi/10.1063/1.2431450> (Cité p. 77).
- GOODMAN, J. (2005). *Introduction to Fourier optics*. Roberts & Company Publishers (Cité p. 30).
- GREFFET, J., R. CARMINATI, K. JOULAIN, J. MULET, S. MAINGUY et Y. CHEN (2002). « Coherent emission of light by thermal sources », *Nature* **416**.(6876), p. 61–64 (Cité p. iv, 7, 89).
- GRUNER, T. et D.-G. WELSCH (1996). « Green-function approach to the radiation-field quantization for homogeneous and inhomogeneous Kramers-Kronig dielectrics », *Phys. Rev. A* **53** (3), p. 1818–1829. DOI : 10 . 1103 / PhysRevA . 53 . 1818 . URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.1818> (Cité p. 77).
- HALDANE, F. (2002). « Electromagnetic Surface Modes at Interfaces with Negative Refractive Index make a Not-Quite-Perfect lens », *Arxiv preprint cond-mat/0206420* (Cité p. 53).
- HENKEL, C. et K. JOULAIN (2006). « Electromagnetic field correlations near a surface with a nonlocal optical response », *Applied Physics B : Lasers and Optics* **84** (1). 10.1007/s00340-006-2219-9, p. 61–68. ISSN : 0946-2171. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-006-2219-9> (Cité p. 15).
- HOHENAU, A., J. KRENN, A. STEPANOV, A. DREZET, H. DITLBACHER, B. STEINBERGER, A. LEITNER et F. AUSSENEGG (2005). « Dielectric optical elements for surface plasmons », *Optics letters* **30**.(8), p. 893–895 (Cité p. 18, 46).
- HUBER, A., B. DEUTSCH, L. NOVOTNY et R. HILLENBRAND (2008). « Focusing of surface phonon polaritons », *Applied Physics Letters* **92**, p. 203104 (Cité p. 18, 40, 41, 44, 45).
- HUIDOBRO, P. A., M. L. NESTEROV, L. MARTÍN-MORENO et F. J. GARCÍA-VIDAL (2010). « Transformation Optics for Plasmonics », *Nano Letters* **10**.(6). PMID : 20465271, p. 1985–1990. DOI : 10 . 1021 / nl100800c . eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl100800c> . URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl100800c> (Cité p. 148).
- HUTLEY, M. et D. MAYSTRE (1976). « The total absorption of light by a diffraction grating », *Optics Communications* **19** (3), p. 431 –436. ISSN : 0030-4018. DOI : 10 . 1016 / 0030 - 4018 (76) 90116 - 4 . URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401876901164> (Cité p. iii, 94).

- JACKSON, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York (Cité p. 80).
- JOULAIN, K., R. CARMINATI, J.-P. MULET et J.-J. GREFFET (2003). « Definition and measurement of the local density of electromagnetic states close to an interface », *Phys. Rev. B* **68** (24), p. 245405. DOI : 10.1103/PhysRevB.68.245405. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.68.245405> (Cité p. 15).
- JOULAIN, K., J.-P. MULET, F. MARQUIER, R. CARMINATI et J.-J. GREFFET (2005). « Surface electromagnetic waves thermally excited : Radiative heat transfer, coherence properties and Casimir forces revisited in the near field », *Surface Science Reports* **57**.(3-4), p. 59 –112. ISSN : 0167-5729. DOI : 10.1016/j.surfrep.2004.12.002. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167572905000105> (Cité p. 15, 153).
- KADIC, M., S. GUENNEAU et S. ENOCH (2010). « Transformational plasmonics : cloak, concentrator and rotator for SPPs », *Opt. Express* **18**.(11), p. 12027–12032. DOI : 10.1364/OE.18.012027. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-11-12027> (Cité p. 48).
- KAWATA, S., Y. INOUE et P. VERMA (2009). « Plasmonics for near-field nano-imaging and superlensing », *Nature Photonics* **3** (7), p. 388–394 (Cité p. 53).
- KELLY, K. L., E. CORONADO, L. L. ZHAO et G. C. SCHATZ (2003). « The Optical Properties of Metal Nanoparticles – The Influence of Size, Shape, and Dielectric Environment », *The Journal of Physical Chemistry B* **107**.(3), p. 668–677. DOI : 10.1021/jp026731y. eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/jp026731y>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/jp026731y> (Cité p. 7).
- KHURGIN, J. B., G. SUN et R. A. SOREF (2008). « Electroluminescence efficiency enhancement using metal nanoparticles », *Appl. Phys. Lett.* **93**.(2), p. 021120. ISSN : 00036951. DOI : DOI:10.1063/1.2957989. URL : <http://dx.doi.org/10.1063/1.2957989> (Cité p. 7).
- KIK, P. G., S. A. MAIER et H. A. ATWATER (2004). « Image resolution of surface-plasmon-mediated near-field focusing with planar metal films in three dimensions using finite-linewidth dipole sources », *Phys. Rev. B* **69** (4), p. 045418. DOI : 10.1103/PhysRevB.69.045418 (Cité p. 53).
- KIM, H., J. HAHN et B. LEE (2008). « Focusing properties of surface plasmon polariton floating dielectric lenses », *Opt. Express* **16**.(5), p. 3049–3057. DOI : 10.1364/OE.16.003049. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-5-3049> (Cité p. 18).
- KIM, O. K. et W. G. SPITZER (1979). « Infrared reflectivity spectra and Raman spectra of Ga(1 - x)Al(x)As mixed crystals », *Journal of Applied Physics* **50** (6), p. 4362–4370. DOI : 10.1063/1.326422. URL : <http://link.aip.org/link/?JAP/50/4362/1> (Cité p. 94, 152).
- KNEIPP, K., Y. WANG, H. KNEIPP, L. T. PERELMAN, I. ITZKAN, R. R. DASARI et M. S. FELD (1997). « Single Molecule Detection Using Surface-Enhanced Raman Scattering (SERS) », *Phys. Rev. Lett.* **78** (9), p. 1667–1670. DOI : 10.1103/PhysRevLett.78.1667. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.1667> (Cité p. iv).
- KOLESOV, R., B. GROTZ, G. BALASUBRAMANIAN, R. ST
 ”OHR, A. NICOLET, P. HEMMER, F. JELEZKO et J. WRACHTRUP (2009). « Wave–particle duality of single surface plasmon polaritons », *Nature Physics* **5**.(7), p. 470–474 (Cité p. iv, 76).

- KÜHN, S., U. HÅKANSON, L. ROGOBETE et V. SANDOGHDAR (2006). « Enhancement of Single-Molecule Fluorescence Using a Gold Nanoparticle as an Optical Nanoantenna », *Phys. Rev. Lett.* **97** (1), p. 017402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.97.017402. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.017402> (Cité p. 7).
- LALANNE, P. et J. HUGONIN (2006). « Interaction between optical nano-objects at metallo-dielectric interfaces », *Nature Physics* **2**(8), p. 551–556 (Cité p. 10, 13).
- LALUET, J.-Y., E. DEVAUX, C. GENET, T. W. EBBESEN, J.-C. WEEBER et A. DEREUX (2007). « Optimization of surface plasmons launching from subwavelength hole arrays : modelling and experiments », *Opt. Express* **15**(6), p. 3488–3495. DOI : 10.1364/OE.15.003488. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-15-6-3488> (Cité p. 18).
- LANDAU, L. et E. LIFSHITS (1984). *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon, Oxford (Cité p. 77, 80).
- LARKIN, I. A. et M. I. STOCKMAN (2005). « Imperfect Perfect Lens », *Nano Letters* **5** (2), p. 339–343. DOI : 10.1021/nl047957a. eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl047957a>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl047957a> (Cité p. 50, 53).
- LAROCHE, M., C. ARNOLD, F. MARQUIER, R. CARMINATI, J.-J. GREFFET, S. COLLIN, N. BARDOU et J.-L. PELOUARD (2005). « Highly directional radiation generated by a tungsten thermal source », *Opt. Lett.* **30**(19), p. 2623–2625. DOI : 10.1364/OL.30.002623. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-30-19-2623> (Cité p. 7).
- LAVERNE, A. (1994). « Rayonnement quantique ». URL : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092934/en/> (Cité p. 107).
- LEROSEY, G., J. de ROSNY, A. TOURIN et M. FINK (2007). « Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal », *Science* **315**(5815), p. 1120–1122. DOI : 10.1126/science.1134824. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/315/5815/1120.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/315/5815/1120.abstract> (Cité p. 18).
- LI, K., X. LI, M. I. STOCKMAN et D. J. BERGMAN (2005). « Surface plasmon amplification by stimulated emission in nanolenses », *Phys. Rev. B* **71** (11), p. 115409. DOI : 10.1103/PhysRevB.71.115409. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.71.115409> (Cité p. 76).
- LIU, H. et P. LALANNE (2008). « Microscopic theory of the extraordinary optical transmission », *Nature* **452**(7188), p. 728–731 (Cité p. iv, 6, 10).
- LIU, H. et F. CAPASSO (2000). *Intersubband transitions in quantum wells : Physics and device applications I*. T. 1. Academic Pr (Cité p. 92).
- LIU, Y., T. ZENTGRAF, G. BARTAL et X. ZHANG (2010). « Transformational Plasmon Optics », *Nano Letters* **10**(6). PMID : 20465268, p. 1991–1997. DOI : 10.1021/nl1008019. eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl1008019>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl1008019> (Cité p. 148).
- LIU, Z., N. FANG, T.-J. YEN et X. ZHANG (2003). « Rapid growth of evanescent wave by a silver superlens », *Applied Physics Letters* **83** (25), p. 5184–5186. DOI : 10.1063/1.1636250. URL : <http://link.aip.org/link/?APL/83/5184/1> (Cité p. 53).

- LIU, Z., J. M. STEELE, W. SRITURAVANICH, Y. PIKUS, C. SUN et X. ZHANG (2005). « Focusing Surface Plasmons with a Plasmonic Lens », *Nano Letters* **5**(9), p. 1726–1729. DOI : [10.1021/nl051013j](https://doi.org/10.1021/nl051013j). eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl051013j>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl051013j> (Cité p. 7).
- LOUDON, R. (2000). *The quantum theory of light*. Oxford University Press, USA (Cité p. 75, 76, 81, 82, 84, 106).
- MACDONALD, K., Z. SÁMSON, M. STOCKMAN et N. ZHELUDEV (2008). « Ultrafast active plasmonics », *Nature Photonics* **3**(1), p. 55–58 (Cité p. 76).
- MAIER, S., P. KIK, H. ATWATER, S. MELTZER, E. HAREL, B. KOEL et A. REQUICHA (2003). « Local detection of electromagnetic energy transport below the diffraction limit in metal nanoparticle plasmon waveguides », *Nature materials* **2**(4), p. 229–232 (Cité p. 7).
- MARQUIER, F. (2004). « Interaction des ondes de surface avec des microstructures périodiques. Émission thermique cohérente et transmission résonante ». Thèse de doct. École Centrale Paris. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010113/> (Cité p. 55).
- MARQUIER, F., K. JOULAIN, J.-P. MULET, R. CARMINATI, J.-J. GREFFET et Y. CHEN (2004). « Coherent spontaneous emission of light by thermal sources », *Phys. Rev. B* **69** (15), p. 155412. DOI : [10.1103/PhysRevB.69.155412](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.155412). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.155412> (Cité p. 7, 89).
- MAYSTRE, D. et S. ENOCH (2004). « Perfect lenses made with left-handed materials : Alice's mirror ? », *J. Opt. Soc. Am. A* **21**(1), p. 122–131. DOI : [10.1364/JOSAA.21.000122](https://doi.org/10.1364/JOSAA.21.000122). URL : <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-21-1-122> (Cité p. 53).
- MAZZAMUTO, F, J SAINT-MARTIN, A BOURNEL, P DOLLFUS, A ARCHAMBAULT, F MARQUIER et J.-J. GREFFET (2009). « Electrical excitation of surface phonon-polaritons in III-V heterostructures : A Monte Carlo study », *Journal of Physics : Conference Series* **193**(1), p. 012015. URL : <http://stacks.iop.org/1742-6596/193/i=1/a=012015> (Cité p. 114, 116).
- MELVILLE, D. O. S., R. J. BLAIKIE et C. R. WOLF (2004). « Submicron imaging with a planar silver lens », *Applied Physics Letters* **84** (22), p. 4403–4405. DOI : [10.1063/1.1757644](https://doi.org/10.1063/1.1757644). URL : <http://link.aip.org/link/?APL/84/4403/1> (Cité p. 53).
- MELVILLE, D. et R. BLAIKIE (2005). « Super-resolution imaging through a planar silver layer », *Opt. Express* **13** (6), p. 2127–2134. DOI : [10.1364/OPEX.13.002127](https://doi.org/10.1364/OPEX.13.002127). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-6-2127> (Cité p. 53).
- MORENO, E., F. J. GARCIA-VIDAL, D. ERNI, J. I. CIRAC et L. MARTIN-MORENO (2004). « Theory of Plasmon-Assisted Transmission of Entangled Photons », *Phys. Rev. Lett.* **92** (23), p. 236801. DOI : [10.1103/PhysRevLett.92.236801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.236801). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.236801> (Cité p. 77).
- MORI, N. et T. ANDO (1989). « Electron-phonon interaction in single and double heterostructures », *Phys. Rev. B* **40** (9), p. 6175–6188. DOI : [10.1103/PhysRevB.40.6175](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.6175). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.40.6175> (Cité p. 92).

- MULET, J. (2003). « Modélisation du rayonnement thermique par une approche électromagnétique. Rôle des ondes de surface dans le transfert d'énergie aux courtes échelles et dans les forces de Casimir ». Thèse de doct. École Centrale Paris. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008907/fr/> (Cit  p. 153, 154).
- NASH, K. J. (1992). « Electron-phonon interactions and lattice dynamics of optic phonons in semiconductor heterostructures », *Phys. Rev. B* **46** (12), p. 7723–7744. DOI : 10.1103/PhysRevB.46.7723. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.46.7723> (Cit  p. 100).
- NELAYAH, J., M. KOCIAK, O. ST PHAN, F. Garcia de ABAJO, M. TENC , L. HENRARD, D. TAVERNA, I. PASTORIZA-SANTOS, L. LIZ-MARZ N et C. COLLIEX (2007). « Mapping surface plasmons on a single metallic nanoparticle », *Nature Physics* **3**(5), p. 348–353 (Cit  p. 15).
- NIE, S. et S. R. EMORY (1997). « Probing Single Molecules and Single Nanoparticles by Surface-Enhanced Raman Scattering », *Science* **275**(5303), p. 1102–1106. DOI : 10.1126/science.275.5303.1102. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/275/5303/1102.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/275/5303/1102.abstract> (Cit  p. iv).
- NIETO-VEPERINAS, M. (2006). *Scattering and diffraction in physical optics*. World Scientific (Cit  p. 40, 43).
- NOGINOV, M. A., G. ZHU, M. MAYY, B. A. RITZO, N. NOGINOVA et V. A. PODOLSKIY (2008). « Stimulated Emission of Surface Plasmon Polaritons », *Phys. Rev. Lett.* **101** (22), p. 226806. DOI : 10.1103/PhysRevLett.101.226806. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.226806> (Cit  p. 76).
- NOGINOV, M., G. ZHU, M. BAHOURA, J. ADEGOKE, C. SMALL, B. RITZO, V. DRACHEV et V. SHALAEV (2007). « The effect of gain and absorption on surface plasmons in metal nanoparticles », *Applied Physics B : Lasers and Optics* **86** (3). 10.1007/s00340-006-2401-0, p. 455–460. ISSN : 0946-2171. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-006-2401-0> (Cit  p. 76).
- NOGINOV, M., G. ZHU, A. BELGRAVE, R. BAKKER, V. SHALAEV, E. NARIMANOV, S. STOUT, E. HERZ, T. SUTTEEWONG et U. WIESNER (2009). « Demonstration of a spaser-based nanolaser », *Nature* **460**(7259), p. 1110–1112 (Cit  p. 76).
- NOVOTNY, L. et B. HECHT (2006). *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, New York (Cit  p. 165).
- OULTON, R., V. SORGER, T. ZENTGRAF, R. MA, C. GLADDEN, L. DAI, G. BARTAL et X. ZHANG (2009). « Plasmon lasers at deep subwavelength scale », *Nature* **461**(7264), p. 629–632 (Cit  p. 76).
- OZBAY, E. (2006). « Plasmonics : Merging Photonics and Electronics at Nanoscale Dimensions », *Science* **311**(5758), p. 189–193. DOI : 10.1126/science.1114849. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/311/5758/189.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/311/5758/189.abstract> (Cit  p. iv).
- PALIK, E. et G. GHOSH (1998). *Handbook of optical constants of solids*. Academic press (Cit  p. 6, 55, 79, 157).
- PENDRY, J. B. (2000). « Negative Refraction Makes a Perfect Lens », *Phys. Rev. Lett.* **85** (18), p. 3966–3969. DOI : 10.1103/PhysRevLett.85.3966 (Cit  p. v, 50).

- PENDRY, J. et S. RAMAKRISHNA (2003). « Refining the perfect lens », *Physica B : Condensed Matter* **338** (1-4), p. 329–332 (Cité p. v, 50, 53).
- PEREZ-ALVAREZ, R, F GARCIA-MOLINER, V. R. VELASCO et C TRALLERO-GINER (1993). « Long-wavelength polar optical modes in GaAs semiconductor layered structures », *Journal of Physics : Condensed Matter* **5**(31), p. 5389. URL : <http://stacks.iop.org/0953-8984/5/i=31/a=004> (Cité p. 93).
- PETIT, R., L. BOTTEN et al. (1980). *Electromagnetic theory of gratings*. T. 62. Springer-Verlag Berlin (Cité p. iii).
- PINCEMIN, F., A. SENTENAC et J.-J. GREFFET (1994). « Near field scattered by a dielectric rod below a metallic surface », *J. Opt. Soc. Am. A* **11**(3), p. 1117–1127. DOI : 10.1364/JOSAA.11.001117. URL : <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-11-3-1117> (Cité p. 13).
- PORTO, J. A., R. CARMINATI et J.-J. GREFFET (2000). « Theory of electromagnetic field imaging and spectroscopy in scanning near-field optical microscopy », *Journal of Applied Physics* **88**(8), p. 4845–4850. DOI : 10.1063/1.1311811. URL : <http://link.aip.org/link/?JAP/88/4845/1> (Cité p. 18).
- POWELL, C. J. et J. B. SWAN (1959). « Origin of the Characteristic Electron Energy Losses in Aluminum », *Phys. Rev.* **115** (4), p. 869–875. DOI : 10.1103/PhysRev.115.869. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.869> (Cité p. iii, 76).
- PRODAN, E., C. RADLOFF, N. J. HALAS et P. NORDLANDER (2003). « A Hybridization Model for the Plasmon Response of Complex Nanostructures », *Science* **302**(5644), p. 419–422. DOI : 10.1126/science.1089171. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/302/5644/419.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/302/5644/419.abstract> (Cité p. 7).
- PROTSENKO, I. E., A. V. USKOV, O. A. ZAIMIDOROGA, V. N. SAMOILOV et E. P. O'REILLY (2005). « Dipole nanolaser », *Phys. Rev. A* **71** (6), p. 063812. DOI : 10.1103/PhysRevA.71.063812. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.063812> (Cité p. 76).
- PURCELL, E. M., H. C. TORREY et R. V. POUND (1946). « Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid », *Phys. Rev.* **69** (1-2), p. 37–38. DOI : 10.1103/PhysRev.69.37. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.69.37> (Cité p. 83).
- QUINTEN, M., A. LEITNER, J. R. KRENN et F. R. AUSSENEGG (1998). « Electromagnetic energy transport via linear chains of silver nanoparticles », *Opt. Lett.* **23**(17), p. 1331–1333. DOI : 10.1364/OL.23.001331. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-23-17-1331> (Cité p. 7).
- RAETHER, H. (1988). *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer (Cité p. iii, 76).
- RIDLEY, B. K. (1993). « Electron-hybridon interaction in a quantum well », *Phys. Rev. B* **47** (8), p. 4592–4602. DOI : 10.1103/PhysRevB.47.4592. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.47.4592> (Cité p. 92).
- RIDLEY, B. K. et M. BABIKER (1991). « Continuum theories of optical phonons and polaritons in superlattices : A brief critique », *Phys. Rev. B* **43** (11), p. 9096–9101. DOI : 10.1103/PhysRevB.43.9096. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.43.9096> (Cité p. 92).
- RIDLEY, B. K., O. AL-DOSSARY, N. C. CONSTANTINOU et M. BABIKER (1994). « Continuum model of the optical modes of vibration of an ionic crystal slab », *Phys. Rev. B* **50** (16), p. 11701–11709. DOI : 10.

- 1103/PhysRevB.50.11701. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.50.11701> (Cit  p. 92).
- RIDLEY, B. (1997). *Electrons and phonons in semiconductor multilayers*. T. 5. Cambridge Univ Pr (Cit  p. 92).
- RIGNEAULT, H., J. LORTIOZ, C. DELALANDE et A. LEVENSON (2005a). *La nanophotonique*. Collection technique et scientifique des t l communications (Cit  p. 17).
- RIGNEAULT, H., J. CAPOULADE, J. DINTINGER, J. WENGER, N. BONOD, E. POPOV, T. W. EBBESEN et P-F. LENNE (2005b). « Enhancement of Single-Molecule Fluorescence Detection in Subwavelength Apertures », *Phys. Rev. Lett.* **95** (11), p. 117401. DOI : [10.1103/PhysRevLett.95.117401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.117401). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.117401> (Cit  p. 7).
- RITCHIE, R. H. (1957). « Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films », *Phys. Rev.* **106** (5), p. 874–881. DOI : [10.1103/PhysRev.106.874](https://doi.org/10.1103/PhysRev.106.874). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.874> (Cit  p. iii, 6).
- ROSENCHER, E. et B. VINTER (2002). *Opto lectronique*. Dunod, Paris (Cit  p. 92, 106, 114).
- SAINT-MARTIN, J, A BOURNEL, F MONSEF, C CHASSAT et P DOLLFUS (2006). « Multi sub-band Monte Carlo simulation of an ultra-thin double gate MOSFET with 2D electron gas », *Semiconductor Science and Technology* **21**(4), p. L29. URL : <http://stacks.iop.org/0268-1242/21/i=4/a=L01> (Cit  p. 114).
- SARID, D. (1981). « Long-Range Surface-Plasma Waves on Very Thin Metal Films », *Phys. Rev. Lett.* **47** (26), p. 1927–1930. DOI : [10.1103/PhysRevLett.47.1927](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.1927). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.1927> (Cit  p. 94).
- SCHULLER, J., E. BARNARD, W. CAI, Y. JUN, J. WHITE et M. BRONGERSMA (2010). « Plasmonics for extreme light concentration and manipulation », *Nature Materials* **9**(3), p. 193–204 (Cit  p. 18).
- SEIDEL, J., S. GRAFSTR M et L. ENG (2005). « Stimulated Emission of Surface Plasmons at the Interface between a Silver Film and an Optically Pumped Dye Solution », *Phys. Rev. Lett.* **94** (17), p. 177401. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.177401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.177401). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.177401> (Cit  p. 76).
- SHALAEV, V. (2007). « Optical negative-index metamaterials », *Nature photonics* **1** (1), p. 41–48 (Cit  p. 50, 53).
- SHCHEGROV, A. V., K. JOULAIN, R. CARMINATI et J.-J. GREFFET (2000). « Near-Field Spectral Effects due to Electromagnetic Surface Excitations », *Phys. Rev. Lett.* **85** (7), p. 1548–1551. DOI : [10.1103/PhysRevLett.85.1548](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.1548). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.1548> (Cit  p. 15).
- SILVEIRINHA, M. et N. ENGHETA (2006). « Tunneling of Electromagnetic Energy through Subwavelength Channels and Bends using epsilon-Near-Zero Materials », *Phys. Rev. Lett.* **97** (15), p. 157403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.97.157403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.157403). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.157403> (Cit  p. 117).
- SPE, J. E. (1987). « New Green-function formalism for surface optics », *J. Opt. Soc. Am. B* **4**(4), p. 481–489. DOI : [10.1364/JOSAB.4.000481](https://doi.org/10.1364/JOSAB.4.000481). URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-4-4-481> (Cit  p. 6, 123, 135, 153).

- SMOLYANINOV, I. I., C. C. DAVIS, J. ELLIOTT et A. V. ZAYATS (2007). « Smolyaninov *et al.* Reply : » *Phys. Rev. Lett.* **98** (20), p. 209704. DOI : [10.1103/PhysRevLett.98.209704](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.209704). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.209704> (Cité p. 14).
- SMOLYANINOV, I. I., J. ELLIOTT, A. V. ZAYATS et C. C. DAVIS (2005). « Far-Field Optical Microscopy with a Nanometer-Scale Resolution Based on the In-Plane Image Magnification by Surface Plasmon Polaritons », *Phys. Rev. Lett.* **94** (5), p. 057401. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.057401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.057401). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.057401> (Cité p. 7, 14, 46).
- SMUK, A. et N. LAWANDY (2006). « Spheroidal particle plasmons in amplifying media », *Applied Physics B : Lasers and Optics* **84** (1). [10.1007/s00340-006-2329-4](https://doi.org/10.1007/s00340-006-2329-4), p. 125–129. ISSN : 0946-2171. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-006-2329-4> (Cité p. 76).
- SOMMERFELD, A. (1909). « Propagation of waves in wireless telegraphy », *Ann. Phys. (Leipzig)* **28**(3), p. 665–736 (Cité p. iii).
- SPITZER, W. G., D. KLEINMAN et D. WALSH (1959). « Infrared Properties of Hexagonal Silicon Carbide », *Phys. Rev.* **113** (1), p. 127–132. DOI : [10.1103/PhysRev.113.127](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.127) (Cité p. 55).
- STALLINGA, S. (2006). « Energy and momentum of light in dielectric media », *Phys. Rev. E* **73** (2), p. 026606. DOI : [10.1103/PhysRevE.73.026606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.026606). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.026606> (Cité p. 77, 80).
- TALLEY, C. E., J. B. JACKSON, C. OUBRE, N. K. GRADY, C. W. HOLLARS, S. M. LANE, T. R. HUSER, P. NORDLANDER et N. J. HALAS (2005). « Surface-Enhanced Raman Scattering from Individual Au Nanoparticles and Nanoparticle Dimer Substrates », *Nano Letters* **5**(8), p. 1569–1574. DOI : [10.1021/nl050928v](https://doi.org/10.1021/nl050928v). eprint : <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl050928v>. URL : <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nl050928v> (Cité p. 7).
- TAME, M. S., C. LEE, J. LEE, D. BALLESTER, M. PATERNOSTRO, A. V. ZAYATS et M. S. KIM (2008). « Single-Photon Excitation of Surface Plasmon Polaritons », *Phys. Rev. Lett.* **101** (19), p. 190504. DOI : [10.1103/PhysRevLett.101.190504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.190504). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.190504> (Cité p. 77).
- TAUBNER, T., D. KOROBKIN, Y. URZHUMOV, G. SHVETS et R. HILLENBRAND (2006a). « Near-field microscopy through a SiC superlens », *Science* **313**(5793), p. 1595 (Cité p. iv).
- TAUBNER, T., D. KOROBKIN, Y. URZHUMOV, G. SHVETS et R. HILLENBRAND (2006b). « Near-Field Microscopy Through a SiC Superlens », *Science* **313**(5793), p. 1595. DOI : [10.1126/science.1131025](https://doi.org/10.1126/science.1131025). eprint : <http://www.sciencemag.org/content/313/5793/1595.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/313/5793/1595.abstract> (Cité p. 7, 53, 55).
- TEPERIK, T. V., A. ARCHAMBAULT, F. MARQUIER et J. J. GREFFET (2009). « Huygens-Fresnel principle for surface plasmons », *Opt. Express* **17**(20), p. 17483–17490. DOI : [10.1364/OE.17.017483](https://doi.org/10.1364/OE.17.017483). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-20-17483> (Cité p. 18).
- TEPERIK, T., F. GARCÍA DE ABAJO, A. BORISOV, M. ABDELSALAM, P. BARTLETT, Y. SUGAWARA et J. BAUMBERG (2008). « Omnidirectional absorption in nanostructured metal surfaces », *Nature Photonics* **2**(5), p. 299–301 (Cité p. 7).

- VAN LABEKE, D. et D. BARCHIESI (1993). « Probes for scanning tunneling optical microscopy : a theoretical comparison », *J. Opt. Soc. Am. A* **10**(10), p. 2193–2201. DOI : 10.1364/JOSAA.10.002193. URL : <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-10-10-2193> (Cité p. 18).
- VASSANT, S. (2011). « Contrôle optique et électrique de réflectivité THz assistée par phonon-polaritons de surface ». Thèse de doct. École Centrale Paris. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00601767/fr/> (Cité p. 90, 93, 114, 118, 119).
- VASSANT, S., F. MARQUIER, J. J. GREFFET, F. PARDO et J. L. PELOUARD (2010). « Tailoring GaAs terahertz radiative properties with surface phonons polaritons », **97**(16), p. 161101. ISSN : 00036951. DOI : DOI : 10.1063/1.3497645. URL : <http://dx.doi.org/doi/10.1063/1.3497645> (Cité p. 94).
- VASSANT, S., A. ARCHAMBAULT, F. MARQUIER, F. PARDO, U. GENNSER, A. CAVANNA, J. L. PELOUARD et J. J. GREFFET (2011). « Surface phonon polaritons for active THz devices », *soumis à Nature Photonics* (Cité p. 91).
- VESELAGO, V. (1968). « The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu », *Soviet Physics Uspekhi* **10**, p. 509 (Cité p. 49).
- VIAL, A., A.-S. GRIMAUULT, D. MACÍAS, D. BARCHIESI et M. L. de la CHAPELLE (2005). « Improved analytical fit of gold dispersion : Application to the modeling of extinction spectra with a finite-difference time-domain method », *Phys. Rev. B* **71** (8), p. 085416. DOI : 10.1103/PhysRevB.71.085416 (Cité p. 152).
- WATANABE, J.-i., K. UCHINOKURA et T. SEKINE (1989). « Surface-phonon polariton on gratings of GaP thin slabs : Far-infrared reflection », *Phys. Rev. B* **40** (8), p. 5677–5682. DOI : 10.1103/PhysRevB.40.5677. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.40.5677> (Cité p. 94).
- WEE, W. H. et J. B. PENDRY (2011). « Universal Evolution of Perfect Lenses », *Phys. Rev. Lett.* **106** (16), p. 165503. DOI : 10.1103/PhysRevLett.106.165503. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.165503> (Cité p. 59).
- WEBER, J.-C., J. R. KRENN, A. DEREUX, B. LAMPRECHT, Y. LACROUTE et J. P. GOUDONNET (2001). « Near-field observation of surface plasmon polariton propagation on thin metal stripes », *Phys. Rev. B* **64** (4), p. 045411. DOI : 10.1103/PhysRevB.64.045411. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.045411> (Cité p. 5–7, 12).
- WEISBUCH, C. et B. VINTER (1991). *Quantum semiconductor structures : Fundamentals and applications*. Academic Press (Cité p. 90, 114).
- WOOD, R. (1904). « On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum », *Philos. Mag.* **4**, p. 396–402 (Cité p. 94).
- YIN, L., V. VLASKO-VLASOV, J. PEARSON, J. HILLER, J. HUA, U. WELP, D. BROWN et C. KIMBALL (2005). « Subwavelength focusing and guiding of surface plasmons », *Nano letters* **5**(7), p. 1399–1402 (Cité p. 18).
- ZAYATS, A. V., I. I. SMOLYANINOV et A. A. MARADUDIN (2005). « Nano-optics of surface plasmon polaritons », *Physics Reports* **408**(3-4), p. 131–314. ISSN : 0370-1573. DOI : DOI:10.1016/j.physrep.2004.11.001. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157304004600> (Cité p. iv, 18).

- ZENNECK, J. (1907). « Propagation of plane EM waves along a plane conducting surface », *Ann. Phys. (Leipzig)* **23**, p. 846–866 (Cité p. iii).
- ZENTGRAF, T., Y. LIU, M. MIKKELSEN, J. VALENTINE et X. ZHANG (2011). « Plasmonic Luneburg and Eaton lenses », *Nature Nanotechnology* **6**, p. 151–155 (Cité p. 18, 46, 48).
- ZHELUEV, N., S. PROSVIRNIN, N. PAPASIMAKIS et V. FEDOTOV (2008). « Lasing spaser », *Nature Photonics* **2**(6), p. 351–354 (Cité p. 76).
- ZIA, R. et M. BRONGERSMA (2007). « Surface plasmon polariton analogue to Young’s double-slit experiment », *Nature Nanotechnology* **2**(7), p. 426–429 (Cité p. 5, 7, 12, 18, 35, 36, 38, 39).
- ZIA, R., J. A. SCHULLER et M. L. BRONGERSMA (2006). « Near-field characterization of guided polariton propagation and cutoff in surface plasmon waveguides », *Phys. Rev. B* **74** (16), p. 165415. DOI : 10.1103/PhysRevB.74.165415. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.74.165415> (Cité p. 38).

Résumé

Il existe au niveau d'interfaces séparant des milieux de constantes diélectriques de signes opposés des ondes électromagnétiques confinées à proximité de ces interfaces. On parle d'ondes de surface. C'est notamment le cas des métaux et des cristaux polaires : on parle alors de plasmons-polaritons de surface et de phonons-polaritons de surface respectivement. L'objectif de cette thèse est de revisiter certains aspects théoriques associés à ces ondes de surface. Dans un premier temps, en nous basant sur le formalisme de Green, nous donnons un moyen d'obtenir une expression du champ des ondes de surface sous forme de somme de modes. En présence de pertes, ces ondes ont nécessairement un vecteur d'onde ou une pulsation complexe. Nous donnons ainsi deux expressions de leur champ, correspondant à chacun de ces deux cas, et discutons de l'opportunité d'utiliser l'une ou l'autre de ces expressions. Nous posons par la suite les bases d'une optique de Fourier et d'une optique géométrique des ondes de surface. Nous montrons comment obtenir une équation de Helmholtz à deux dimensions pour les ondes de surface, un principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, ainsi qu'une équation eikonale pour les ondes de surface, qui s'applique sous certaines hypothèses. Nous nous intéressons également à la superlentille proposée par Pendry, qui s'appuie sur les ondes de surface. Nous étudions notamment le fonctionnement de cette superlentille en régime impulsionnel, et montrons qu'en présence de pertes, il est possible d'obtenir une meilleure résolution avec certaines formes d'impulsion par rapport au régime harmonique, au prix d'une importante baisse de signal toutefois. Nous développons ensuite un traitement quantique des ondes de surface. Nous calculons au préalable une expression de leur énergie, et nous donnons une expression de leur hamiltonien et de leurs opérateurs champ. Sans pertes, nous montrons que le facteur de Purcell prédit par notre théorie quantique est rigoureusement égal au facteur de Purcell calculé avec des outils classiques. Nous comparons ensuite ce facteur de Purcell à celui calculé classiquement avec pertes, et montrons sur un exemple que les pertes peuvent être négligées dans de nombreux cas. Nous donnons enfin une expression des coefficients d'Einstein associés aux ondes de surface permettant d'étudier la dynamique de l'inversion de population d'un milieu fournissant un gain aux ondes de surface. Nous appliquons par la suite ce formalisme quantique à l'interaction électrons-phonons-polaritons de surface dans les puits quantiques, notamment leur interaction avec un mode de phonon du puits particulièrement confiné grâce à un effet de constante diélectrique proche de zéro (epsilon near zero, ENZ).

Mots-clés

Plasmons-polaritons de surface ; Optique de Fourier ; Électrodynamique quantique ; Phonons-polaritons de surface ; Téraherz ; Nanophotonique ; Superlentille ; Super-résolution ; Optique géométrique ; Ondes électromagnétiques de surface ; Puits quantiques ; Transitions intersousbandes dans les puits quantiques.

Abstract

Interfaces between materials having opposite dielectric constants support electromagnetic waves confined close to these interfaces called surface waves. For metals and polar crystals, they are respectively called surface plasmon-polaritons and surface phonon-polaritons. The goal of this thesis is to revisit some theoretical aspects associated to these surface waves. Using the Green formalism, we derive an expression of the surface wave field as a sum of modes. With losses, these waves must have a complex wave vector or frequency. Thus we give two expressions of their field, for each of these cases, and discuss when each of these expressions should be used. We then give the basis of a surface wave Fourier optics and geometrical optics. We derive a 2D Helmholtz equation for surface waves, a Huygens-Fresnel principle for surface waves, and an eikonal equation for surface waves. We then take a look at Pendry's superlens, in which surface waves play a major role. We study the behavior of the superlens in pulsed mode taking losses into account, and show that its resolution can be increased for some pulse shapes compared to the steady state, at the expense of a signal decay. We then develop a quantum treatment of surface waves. We first calculate their energy, and then give an expression of their hamiltonian and field operators. Without losses, we show that the Purcell factor given by our quantum theory is perfectly equal to the Purcell factor given by the classical theory. We then compare this Purcell factor to the lossy case on an example, and show that losses can often be neglected. We then derive the Einstein coefficients associated to surface wave emission and absorption, which allow studying the population inversion dynamics of a gain medium. We then use this quantum formalism to study the interaction between electrons and surface phonon-polaritons in quantum wells, particularly their interaction with a phonon mode which features high confinement thanks to an epsilon near zero (ENZ) effect.

Keywords

Surface plasmon-polaritons ; Fourier optics ; Quantum electrodynamics ; Surface phonon-polaritons ; Terahertz ; Nanophotonics ; Superlens ; Super-resolution ; Geometrical optics ; Surface electromagnetic waves ; Quantum wells ; Intersubband transitions in quantum wells.