



HAL
open science

**Identification des systèmes dynamiques stochastiques.
Application à l'évaluation dynamique des ponts sous
solllicitations ambiantes**

Ignace Davy Mendoume Minko

► **To cite this version:**

Ignace Davy Mendoume Minko. Identification des systèmes dynamiques stochastiques. Application à l'évaluation dynamique des ponts sous solllicitations ambiantes. Mécanique [physics.med-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2005. Français. NNT : 2005CLF21590 . tel-00676619

HAL Id: tel-00676619

<https://theses.hal.science/tel-00676619>

Submitted on 5 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 1590
EDSPIC : 327

UNIVERSITE BLAISE PASCAL - CLERMONT II
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

Ignace Davy MENDOUME MINKO

DEA de Mathématiques Appliquées

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPÉCIALITÉ : Mécanique Aléatoire

Identification des Systèmes Dynamiques Stochastiques.

Application à l'Evaluation Dynamique des Ponts

Sous Sollicitations Ambiantes

Soutenue publiquement le 07 octobre 2005 devant le jury :

M. René-Jean GIBERT	Président et examinateur
M. Christian CREMONA	Rapporteur
M. Camille GONTIER	Rapporteur
M. Pierre BERNARD	Examineur et co-directeur de thèse
M. Daniel ROUX	Examineur
M. Michel FOGLI	Directeur de thèse
M. David CLAIR	Invité
M. Gérard FLEURY	Invité

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries de Clermont-Ferrand

A

MBIMBA qui m'a été brutalement arrachée

Bertille, pour la joie qu'elle m'a donnée d'être papa

mes parents, MINKO Emmanuel, BENGONE Jean Marie, AKEWA Jacqueline, ...

Remerciements

Je vais tenter d'utiliser à bon escient cet espace pour exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à l'élaboration de ce document. Elles sont nombreuses. Je sais que j'oublierai certainement des gens. Qu'ils m'en excusent par avance.

En premier lieu je souhaite adresser mes remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Michel FOGLI, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, pour m'avoir fait confiance et donné goût à la mécanique aléatoire. Son savoir, sa rigueur, sa disponibilité sont autant de qualités que j'ai pu apprécier. Elles ont contribué à rendre ce travail parfois exigeant mais toujours passionnant. Qu'il veuille trouver ici ma profonde gratitude.

Je remercie également Monsieur Pierre BERNARD, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, qui m'a fait confiance bien avant le début de cette thèse. Il a non seulement co-encadré cette thèse mais m'a aussi donné goût pour la Recherche ... Je le remercie pour ses qualités d'enseignant, ses conseils, ses qualités humaines et surtout pour l'apport de ses connaissances dans le domaine des méthodes stochastiques pour des problèmes de l'ingénierie. Je lui dois beaucoup pour toutes ces années de thèse.

Que Monsieur David CLAIR, Maître de Conférences à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, trouve ici mes profonds remerciements pour ses encouragements, son aide précieuse en mécanique. J'ai pu apprécier au cours de ces années sa gentillesse et sa grande disponibilité.

Je remercie Christian CREMONA, Chargé de recherche 1^{ière} classe au LCPC et Professeur chargé de cours à l'ENPC-Paris, qui a accepté de rapporter ce travail et de participer au jury. Les discussions que nous avons eues ont permis d'améliorer certains aspects techniques.

Je remercie Monsieur René-Jean GIBERT, Professeur chargé de cours au CEMIF-Paris, pour avoir accepté d'être président du jury ainsi que Monsieur Camille GONTIER, Professeur à l'Ecole d'Ingénieurs du Val de Loire, Blois pour s'être acquitté de la tâche de rapporteur. Leurs remarques ont permis d'améliorer la qualité de ce travail.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur Daniel ROUX, Maître de Conférences à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, pour sa disponibilité, pour toutes les discussions constructives que nous avons pu avoir et pour avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie Gérard FLEURY, Maître de Conférences à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, qui m'a fait l'honneur de participer à cette soutenance de thèse.

Cette thèse n'aurait pas pu être un plaisir sans les personnes que j'ai pu côtoyer aussi bien au CUST qu'au LaMI. Je les remercie pour leur aide et leur sympathie. Toute ma reconnaissance en particulier à Julien BAROTH et Claudine CHANUDET pour leur humanisme et leur soutien

à des moments difficiles.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Bertille, ma compagne, pour la compréhension dont elle a fait preuve à mon égard.

Qu'il me soit enfin permis de remercier mes parents, sans lesquels je n'aurais jamais pu concrétiser toutes ces années d'études.

Résumé

L'évaluation dynamique des ouvrages sous sollicitations ambiantes est un champ applicatif important de la mécanique des structures et de la théorie des systèmes dynamiques, qui fait l'objet de nombreuses recherches depuis une quinzaine d'années.

Inscrit dans le cadre du projet national *Evaluation Dynamique des Ponts* piloté par le LCPC, le travail présenté dans cette thèse est une contribution à ces recherches. Il concerne l'étude de deux outils réputés pour leur pertinence dans le domaine de l'identification modale des structures sous excitations dynamiques ambiantes aléatoires : les *méthodes de sous-espaces* et la *méthode du décrétement aléatoire*.

Une large place est consacrée aux méthodes de sous-espaces qui font l'objet d'une analyse théorique et algorithmique détaillée destinée à bien cerner leurs possibilités et à lever certaines ambiguïtés.

L'étude de la méthode du décrétement aléatoire constitue le coeur du travail. Nous en donnons d'abord une présentation originale adaptée au cadre discret. Puis, nous basant sur des résultats mathématiques récents, nous justifions rigoureusement des résultats asymptotiques d'intérêt pratique, notamment statistique. Nous montrons ensuite pourquoi cette méthode, dont la justification théorique habituelle repose sur une hypothèse de stationnarité de l'excitation, fonctionne encore lorsque cette dernière est une impulsion ou un train d'impulsions.

L'intérêt pratique de ces méthodes dans le domaine de l'identification modale est jugé à travers deux applications : l'une sur une poutre grandeur réelle testée en laboratoire, l'autre sur un pont-rail SNCF expérimenté *in situ*.

Mots-Clés :

Evaluation dynamique, identification modale, excitation ambiante, méthodes de sous-espaces, méthode du décrétement aléatoire, poutre, pont.

Abstract

Dynamic assessment of structures under ambient loads is an important applied field of the structural mechanics and dynamic system theory, which is the subject of many researchs for about fifteen years.

Registered within the framework of the French national project *Evaluation Dynamique des Ponts* controlled by the Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), the work presented in this thesis is a contribution to these rechearchs. It concerns the study of two tools for their relevance in the field of modal identification of structures under random dynamic excitations : subspace methods and random decrement method.

A broad place is devoted to the subspace methods which are the subject of a detailed theoretical and algorithmic analysis intended for deterimining their possibilities and to clarify some ambiguities.

The main contribution of this work concerns the random decrement method. We give first an original presentation adapted to the discret time context. Then, using recent results, we justify rigorously asymptotic results of practical and especially statistical interest. Then, we show the reason why this method, whose usual theoretical justification rests on an assumption of stationary of the excitation, still works when this excitation is an impulse or a batch of impulses.

The practical interest of these methods in the field of modal identification is tested through two applications : the first one concerns a beam tested in laboratory, the second one is a railway bridge tested *in situ*.

Keywords :

Dynamic assessment, modal identification, ambient excitation, subspace methods, random decrement method, beam, bridge.

Table des matières

1	Position du problème	21
1.1	Introduction	22
1.2	Cadre de l'étude	22
1.2.1	Modèle d'état	23
1.2.2	Modèle ARMA vectoriel	27
1.3	Objectifs de l'étude	28
1.4	Sur les méthodes d'identification	29
1.4.1	Méthodes utilisant les covariances	30
1.4.2	Méthodes utilisant directement les données	32
1.5	Conclusion	34
2	Analyse modale	35
2.1	Introduction	36
2.2	Préliminaires :	36
2.3	Caractéristiques modales d'un système dynamique linéaire	36
2.3.1	Généralités	36
2.3.2	Analyse spectrale du système libre conservatif associé	39
2.3.3	Analyse spectrale du système libre dissipatif associé	40
2.4	Conclusion	42
3	Méthodes de sous-espaces	44
3.1	Introduction	45
3.2	Préliminaires	45
3.2.1	Méthode de réalisation déterministe	45
3.2.2	Identification et représentation markovienne	48
3.2.3	Méthode de réalisation stochastique	48
3.3	Vers les méthodes de sous-espaces	52
3.4	Principe des méthodes de sous-espaces	53
3.4.1	Mise en oeuvre des méthodes	59
3.4.2	Extraction modale	61
3.5	Conclusion	62
4	Méthode du décrétement aléatoire	64
4.1	Introduction	65
4.2	Quelques résultats préalables	65

4.2.1	Oscillateurs scalaires	66
4.2.2	Oscillateurs vectoriels	67
4.3	Principe de la méthode	68
4.4	Décrément déterministe	71
4.4.1	Oscillateurs linéaires sous mono-impulsion	72
4.4.2	Oscillateurs linéaires sous train d'impulsions	76
4.5	Analyse asymptotique dans le cas gaussien stationnaire	77
4.5.1	Franchissement d'un niveau $a \in \mathbb{R}^*$	78
4.5.2	Franchissement en croissant d'un niveau a	82
4.5.3	Point positif	84
4.5.4	Commentaires des résultats	87
4.5.5	Compléments algorithmiques	88
4.5.6	Illustrations numériques	89
4.6	Méthode d'Ibrahim	97
4.6.1	Rappels	97
4.6.2	Principe de la méthode	99
4.6.3	Utilisation pratique de la méthode d'Ibrahim, lien avec la fonction du décrément	100
4.7	Application de la fonction du décrément à la méthode de réalisation	103
4.8	Conclusion	104
5	Applications	106
5.1	Introduction	107
5.2	Étude d'une poutre métallique	109
5.2.1	Description de l'expérience	109
5.2.2	Étude préliminaire	114
5.2.3	Identification modale	116
5.2.4	Sensibilité des paramètres modaux à un endommagement localisé	123
5.3	Étude d'un pont-rail SNCF	126
5.3.1	Instrumentation	127
5.3.2	Traitement des données	129
5.3.3	Identification modale	131
5.3.4	Incidence du resserrage des bielles sur les caractéristiques modales	134
5.4	Conclusion	137
	Conclusion générale	138
	Bibliographie	140
A	Simulation numérique de la réponse stationnaire d'un oscillateur stochastique li- néaire vectoriel excité par un bruit blanc gaussien	146
A.1	Préliminaires	147
A.2	Première méthode	148
A.3	Deuxième méthode	150
A.3.1	Emploi d'un schéma de type Euler	150

A.3.2	Emploi d'un schéma de type différences centrées	152
B	Compléments sur la méthode des sous-espaces	156
B.1	Rappels des concepts géométriques	156
B.2	Filtre de Kalman en avant	159
B.3	Factorisation de la matrice de projection	160

Principales notations

m	nombre de degrés de libertés
$n = 2m$	ordre du modèle d'état
l	nombre de voies de mesure
N	nombre de points de déclenchement
Δt	pas d'échantillonnage
ω_i	$i^{\text{ème}}$ pulsation naturelle
ξ_i	$i^{\text{ème}}$ taux d'amortissement
$\omega_d^i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$	$i^{\text{ème}}$ pulsation propres du système amorti
β_i	$i^{\text{ème}}$ valeur propre du modèle d'état à temps continu
γ_i	$i^{\text{ème}}$ valeur propre du modèle d'état à temps discret
Ψ_i	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre associé à la valeur propre β_i
Φ_i	$i^{\text{ème}}$ déformée modale
Λ	matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les β_i
Γ	matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les γ_i
Ψ	matrice dont les colonnes sont les vecteurs Ψ_i
Φ	matrice dont les colonnes sont les vecteurs Φ_i
M, D, K	matrices de masse, d'amortissement et de rigidité ($\in \mathbb{R}^{m \times m}$)
P	excitation à valeurs dans \mathbb{R}^m
N	bruit blanc gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^p
W	processus de Wiener à valeurs dans \mathbb{R}^p
L	matrice d'intensité de l'excitation ($\in \mathbb{R}^{m \times p}$)
Z	processus de déplacement du modèle EF à valeurs dans \mathbb{R}^m
X	processus d'état à temps continu à valeurs dans \mathbb{R}^n
Y	processus d'observation à temps discret à valeurs dans \mathbb{R}^l
A_c, B_c, C_c, H_c	matrices du modèle d'état à temps continu ($\in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{l \times m}, \mathbb{R}^{m \times n}$)
Π_d, Π_v, Π_a	matrices de localisation des capteurs ($\in \mathbb{R}^{l \times m}$)
$(x_k)_k$	suite des états ($x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$)
$(y_k)_k$	suite des observations expérimentales ($y_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$)
X_k	processus d'état à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times 1}$
Y_k	processus d'observation à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}^{l \times 1}$
W_k	suite blanche gaussienne (bruit de modélisation) à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times 1}$
V_k	suite blanche gaussienne (bruit de mesure) à valeurs dans $\mathbb{R}^{l \times 1}$
A, B, C	matrices du modèle d'état à temps discret ($\in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{l \times m}$)
A_1, A_2, \dots, A_p	coefficients matriciels de la partie AR
B_1, B_2, \dots, B_q	coefficients matriciels de la partie MA

\hat{x}_k	estimées Kalman-optimales ($\in \mathbb{R}^{n \times 1}$)
K	gain de Kalman
h	fonction de réponse impulsionnelle à valeurs dans $\mathbb{R}^{l \times m}$
\dot{h}	dérivée de la fonction de réponse impulsionnelle à valeurs dans $\mathbb{R}^{l \times m}$
R_{XX}	fonction d'autocorrélation à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times n}$
R_{XY}	fonction d'intercorrélation à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times l}$
\dot{R}_{XY}	dérivée de la fonction de d'intercorrélation à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times l}$
S_{XX}	densité spectrale de puissance à valeurs dans $\mathbb{C}^{n \times n}$
S_{XY}	densité interspectrale de puissance à valeurs dans $\mathbb{C}^{n \times l}$
D_N	fonction du décrétement aléatoire (auto-décrétement)
$D_{N_j}^{ij}$	fonction croisée du décrétement aléatoire
$\mathbb{E}[\bullet]$	espérance mathématique de $[\bullet]$
$[\bullet]^T$	transposée d'une matrice ou d'un vecteur
$[\bullet]^*$	transposée conjuguée
$[\bullet]^{-1}$	inverse d'une matrice
$[\bullet]^\dagger$	pseudo-inverse de Moore-Penrose
DDL	Degré de Liberté
EF	Éléments Finis
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ARMA	Auto-Regressive Moving Average
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence
FRI	Fonction de Réponse en Impulsionnelle
TF	Transformée de Fourier
TFI	Transformée de Fourier Inverse
DSP	Densité Spectrale de Puissance
PTD	Polyreference Time Domain
ITD	Ibrahim Time Domain
LSCE	Least Squares Complex Exponential method
MPE	Méthode de Prediction de l'Erreur
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
MC	Moindres Carrés

Table des figures

1	<i>Organisation de la thèse.</i>	20
3.1	<i>Processus d'estimation des paramètres modaux à l'aide des méthodes de sous-espaces.</i>	63
4.1	<i>Illustration du processus d'estimation de la fonction du décrétement aléatoire dans le cas scalaire</i>	69
4.2	<i>Illustration du processus d'estimation de la fonction du décrétement aléatoire dans le cas vectoriel</i>	70
4.3	<i>Points de franchissement du niveau a pour une réponse impulsionnelle.</i>	73
4.4	Franchissement du niveau $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).	90
4.5	Franchissement du niveau $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).	90
4.6	Franchissement en croissant du niveau $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction du décrétement et la fonction du décrétement théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).	91
4.7	Franchissement en croissant du niveau $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction du décrétement et la fonction du décrétement théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).	92
4.8	Franchissement en croissant du niveau $a = 0$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).	92
4.9	Franchissement en croissant du niveau $a = 0$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).	93
4.10	Condition de point positif : $a_1 = 0, a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).	93
4.11	Condition de point positif : $a_1 = 0, a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).	94

4.12	<i>Condition de point positif : $a_1 = \sqrt{2}\sigma_Y$, $a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).</i>	95
4.13	<i>Condition de point positif : $a_1 = \sqrt{2}\sigma_Y$, $a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).</i>	96
4.14	<i>Détermination des caractéristiques modales par la méthode d'Ibrahim</i>	102
4.15	<i>Processus d'estimation des paramètres modaux par la méthode du décrétement ("d" pour déterministe, "a" pour aléatoire).</i>	105
5.1	<i>Photographie du banc d'essais</i>	110
5.2	<i>Densité spectrale de puissance de l'excitation aléatoire</i>	110
5.3	<i>Schéma de principe des essais</i>	111
5.4	<i>Schéma éléments finis de la poutre (15 éléments, 16 noeuds, 2 ddl par noeud)</i>	112
5.5	<i>Localisation des jauges de déformation</i>	113
5.6	<i>Section entaillée</i>	113
5.7	<i>Test de cohérence des mesures : excitation percussionnelle, appuis simples.</i>	114
5.8	<i>Test de cohérence des mesures : excitation percussionnelle, blocage bilatéral.</i>	115
5.9	<i>Test de cohérence des mesures : excitation aléatoire, blocage bilatéral.</i>	115
5.10	<i>Diagramme de stabilisation des fréquences. ● : modes instables ; + : modes stables en fréquence ; * : modes stables en fréquence et en amortissement ; ○ : modes stables en fréquence et en vecteurs propres ; ⊕ : modes stables en fréquence, en amortissement et en déformées modales.</i>	117
5.11	<i>Diagramme de stabilisation des fréquences. ● : modes instables ; + : modes stables en fréquence ; * : modes stables en fréquence et en amortissement ; ○ : modes stables en fréquence et en vecteurs propres ; ⊕ : modes stables en fréquence, en amortissement et en déformées modales.</i>	118
5.12	<i>Histogramme des fréquences</i>	119
5.13	<i>Comparaison des trois premières déformées modales. Excitation percussionnelle et appuis simples. — : MEF, * -- : MVD, ○ -- : MSE</i>	121
5.14	<i>Comparaison des trois premières déformées modales. Excitation percussionnelle et blocage bilatéral. — * -- : MVD, — ○ -- : MSE</i>	122
5.15	<i>Vue d'ensemble du pont-rail et indication des sens de circulation</i>	126
5.16	<i>Vue des tabliers et des bielles (ou béquilles) du pont-rail</i>	127
5.17	<i>Position des capteurs sous le tablier</i>	128
5.18	<i>Graphes correspondants, pour chaque fichier, à la somme des spectres des signaux enregistrés par tous les capteurs.</i>	130
5.19	<i>(a) signal temporel mesuré par le capteur a9 lors du passage de TGV 8A et (b) spectres de ses parties forcée (1) et libre (2).</i>	131
5.20	<i>Déformées modales identifiées.</i>	133
B.1	<i>Projections.</i>	157

Liste des tableaux

5.1	<i>Caractéristiques mécaniques de la poutre.</i>	109
5.2	<i>Structure des mesures d'accélération.</i>	111
5.3	<i>Paramètres d'échantillonnage.</i>	112
5.4	<i>Comparaison des trois premières fréquences modales et des amortissements correspondants (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type)</i>	120
5.5	<i>Coefficients MAC. MEF : méthode des éléments finis, MSE : méthode des sous-espaces, MVD : méthode vectorielle du décrément.</i>	123
5.6	<i>Variation des fréquences pour deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm. (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type).</i>	124
5.7	<i>Variation des amortissements pour deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm. (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type).</i>	125
5.8	<i>Coefficients MAC relatifs aux deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm.</i>	125
5.9	<i>Structure des fichiers d'enregistrement</i>	130
5.10	<i>Fréquences propres identifiées (\bar{f} = moyenne ; σ_f = écart-type).</i>	132
5.11	<i>Taux d'amortissement identifiés ($\bar{\xi}$ = moyenne ; σ_ξ = écart-type).</i>	132
5.12	<i>Incidence du serrage des bielles sur les fréquences modales estimées (\bar{f} = moyenne ; σ_f = écart-type).</i>	135
5.13	<i>Incidence du serrage des bielles sur les amortissements modaux ($\bar{\xi}$ = moyenne ; σ_ξ = écart-type).</i>	136
5.14	<i>Incidence du serrage des bielles sur les coefficients MAC entre l'état de référence et les divers états de serrage.</i>	136

Introduction générale

L'évaluation du comportement dynamique des ouvrages par essais vibratoires est une pratique relativement ancienne. C'est la construction aéronautique qui a été un élément moteur du développement de ces essais afin de caractériser ou d'appréhender des phénomènes particuliers conduisant à certaines défaillances sous sollicitations répétées et rapides (le flottement des ailes d'avion notamment). L'augmentation des capacités de stockage des systèmes d'acquisition et la puissance de calcul des ordinateurs ont également largement contribué à ce développement.

Les essais vibratoires sur ouvrages ont des buts très variés. On peut y avoir recours par exemple, pour enrichir la connaissance des comportements dynamiques de structures de même type, valider des choix de modélisation, évaluer l'intégrité d'un ouvrage ou encore suivre l'évolution de l'état d'une structure dans le temps.

Parmi ces objectifs, le suivi d'un ouvrage en continu dans le temps à des fins de contrôle de son intégrité mécanique est un challenge très important, notamment pour des ouvrages comme les ponts (routiers, autoroutiers, ferroviaires) dont le nombre en France est très important (plus de 200.000 unités). Les techniques classiques de détection des dommages (acoustiques, radiographiques, magnétiques, électriques, thermiques, ...) sont pour la plupart locales. Toutes ces techniques exigent l'immobilisation de l'ouvrage (fermeture à la circulation pour un pont) et nécessitent que les parties à inspecter soient accessibles. De plus, elles sont délicates à mettre en œuvre et très onéreuses, donc inadaptées à la surveillance en continu. D'autres approches plus pertinentes doivent alors être considérées afin de constituer une base fiable et efficace pour le suivi d'un ouvrage. C'est pourquoi ces dernières années, des recherches ont été menées dans ce domaine, qui ont conduit à l'élaboration des stratégies d'évaluation dynamique pour la surveillance continue des ouvrages en service.

Dans ces stratégies, le choix du type d'excitation n'est, bien entendu, pas neutre et peut ne pas être adapté à l'ouvrage étudié. En général, les sources d'excitation peuvent être classées en deux catégories : les excitations dites de chocs ou d'impacts (excitations impulsionnelles ou transitoires) et les excitations dites vibratoires (excitation périodique, à large bande, ambiante). Les premières sont caractérisées par des événements transitoires d'amplitude très élevée se produisant sur une courte durée, qui, si elles se produisaient en plus grand nombre, conduiraient certainement à la ruine de l'ouvrage. Les deuxièmes quant à elles, impliquent l'application répétitive d'efforts de faible amplitude sur un nombre assez important de périodes propres de la structure. Chacune de ces excitations présente des avantages et des inconvénients [30].

L'utilisation d'excitations transitoires ou impulsionnelles (balourds, excitateurs électro-mécaniques, hydrauliques, ...) même si elle permet de mieux contrôler la source d'excitation et la

reproductibilité des essais ou encore de reconstituer la fonction de transfert, peut conduire à la longue à la ruine de l'ouvrage. Elle oblige la plupart du temps à fermer l'ouvrage à la circulation, ce qui est contraignant et très coûteux.

Le recours à des essais sous excitation ambiante (vent, houle, trafic routier, trafic ferroviaire, ...) permet de se passer d'excitateurs et de bénéficier d'une énergie plus importante. De plus, certaines parties peu accessibles de la structure sont naturellement mises en vibration par ce type d'excitation, ce qui n'est pas toujours possible avec une technique à excitation contrôlée. Cependant, réaliser des essais sous excitation ambiante implique des effets de couplage, donc la difficulté de distinguer les modes de la structure de ceux de l'excitation. Aujourd'hui, le recours à des excitations ambiantes est une solution de plus en plus utilisée, car très proche des préoccupations des ingénieurs soucieux d'appréhender le comportement des ouvrages en situation réelle (i.e. dans leur environnement naturel). Elles offrent, en outre, l'avantage de ne pas perturber le fonctionnement en service de l'ouvrage.

Les stratégies d'évaluation dynamique pour la surveillance continue des ouvrages en service sont basées sur les hypothèses suivantes : (1) les changements d'état mécanique dus à l'endommagement progressif de la structure ne peuvent se produire qu'en un nombre fini d'instant ; (2) entre deux instants consécutifs de changement d'état, la dynamique de la structure peut être approchée par celle d'un oscillateur linéaire de dimension finie à excitation blanche gaussienne, autrement dit peut être décrite par une équation différentielle aléatoire linéaire du second ordre, de dimension finie, à coefficients (matriciels) constants, pilotée par un bruit blanc gaussien ; (3) le nombre de capteurs, et le nombre de mesures par capteur sont suffisants pour permettre la détection de tous les modes pertinents de la structure et donc garantir une description correcte de sa dynamique ; (4) toute modification du comportement dynamique de la structure et donc de son état mécanique, est observable sur les coefficients de l'équation-modèle, autrement dit se traduit par une modification appréciable de ces derniers ; (5) enfin, à partir de ces coefficients, on est capable de définir un (ou plusieurs) indicateur(s) (paramètres modaux, quotient d'énergies, ...) susceptible(s) de détecter tout endommagement qui se produirait entre deux inspections. Notons à propos des hypothèses (3) et (5) que, ne disposant en pratique que d'un nombre limité de capteurs, on ne peut obtenir que des observations des modes de la structure, de sorte que si les capteurs sont mal placés ou en nombre insuffisant et si l'indicateur d'endommagement fait intervenir ces modes, on peut ne pas (ou mal) détecter certains désordre structuraux.

Par ailleurs, concernant l'hypothèse (2), il importe de noter qu'elle n'est pas toujours représentative de la réalité physique du phénomène étudié. Elle présente toutefois l'avantage de placer l'étude dans un cadre mathématique bien adapté à l'analyse probabiliste du problème : celui du calcul différentiel stochastique. De plus, dans de nombreuses situations, on peut s'y ramener par des techniques probabilistes ad hoc, dites de blanchiment ou de markovianisation [12, 48]. Il en est ainsi, par exemple, lorsque l'excitation ambiante est le vent ou la houle.

Moyennant ces hypothèses, ces stratégies s'appuient sur les étapes suivantes :

1. Choix d'une date d'inspection.
2. A la date choisie, activation du système de mesures (capteurs + système d'acquisition) et recueil d'une trajectoire expérimentale d'une observation vectorielle de la réponse sur un

intervalle de temps convenablement estimé.

3. Calcul des coefficients de l'équation-modèle à partir de cette trajectoire en utilisant une méthode d'identification appropriée.
4. Calcul, à partir de ces coefficients, d'indicateurs d'endommagement choisis.
5. Comparaison de la valeur de ces indicateurs à celle obtenue lors de l'inspection précédente.
6. Prise de décision : soit la modification de (des) l'indicateur(s) est significative et il est alors décidé une inspection approfondie de l'ouvrage par des experts, éventuellement suivie d'une réparation, soit la modification n'est pas jugée suffisamment importante et on programme une nouvelle inspection, autrement dit on itère la procédure avec un incrément de temps déterminé, décidé par l'expert. Et ainsi de suite . . .

Une autre approche a été développée à l'INRIA [11, 10, 25, 1, 58]. Elle consiste à identifier, à l'aide d'une méthode d'identification appropriée, un modèle initial représentant la structure saine ; ensuite, des tests statistiques sont construits afin de juger si les mesures obtenues lors d'une prochaine inspection peuvent être assimilées à la réponse du modèle initial. Le principal avantage de cette approche est qu'il n'est plus besoin d'identifier, à partir des nouvelles données, un autre modèle par des méthodes d'identifications qui sont parfois longues et lourdes.

Le calcul des coefficients de l'équation-modèle constitue, à l'évidence, l'étape fondamentale de ces stratégies. Ce calcul se fait à l'aide d'une procédure d'identification. Il en existe plusieurs dans la littérature, dont certaines sont bien adaptées à ce type de problème. Cette thèse est donc axée autour du troisième point.

Une telle démarche, dénommée *Évaluation Dynamique (ED)*, est basée sur une idée intuitive. En effet, les paramètres modaux (fréquences, taux d'amortissement et déformées propres) sont fonction des coefficients (matriciels) du modèle (masse, rigidité et amortissement). Par conséquent, toute modification de ces coefficients doit se traduire par une variation des paramètres modaux.

De nombreuses études ont été menées ces vingt dernières années afin de déterminer si les paramètres modaux sont suffisamment sensibles pour être considérés comme des indicateurs d'endommagement. C'est dans cette optique qu'a été mis en place le programme de recherche du Réseau Génie Civil et Urbain piloté par le LCPC et associant la SNCF, la société SITES, l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, les Laboratoires Régionaux de Lyon et de Bordeaux. Le travail revenant à l'équipe de l'Université Blaise Pascal dans ce programme, et qui est à l'origine de cette thèse, fut l'étude et la mise en oeuvre de méthodes d'identification des paramètres modaux. Pour cela, nous nous sommes placés sous l'hypothèse classique que la dynamique de la structure pouvait être assimilée à celle d'un oscillateur linéaire vectoriel de dimension finie excité par un bruit blanc gaussien. Nous avons pu alors, en passant dans l'espace des phases et en interprétant l'équation obtenue au sens du calcul différentiel stochastique de Itô, obtenir une équation différentielle stochastique (eds) de Itô qui, correctement discrétisée pour l'adapter à la situation expérimentale, nous a fourni le modèle d'état à temps discret cible à identifier.

Le choix du modèle dynamique arrêté, restait à opter pour une méthode d'identification ap-

propriété à l'estimation de ses paramètres modaux à partir d'observations expérimentales de sa réponse stationnaire. Ce que nous avons fait après une étude bibliographique qui nous a permis de constater que dans ce domaine beaucoup de travaux restent encore incomplets et que de nombreuses questions sont ouvertes.

Les méthodes d'identification présentées ici sont les méthodes de sous-espaces et la méthode du décrétement aléatoire associée soit à la méthode d'Ibrahim soit à la méthode de réalisation stochastique.

Les méthodes de sous-espaces sont dues à Van Overschee et De Moor [71]. Elles permettent d'identifier un modèle d'état à partir des données de sortie ou d'entrée/sortie en utilisant des techniques robustes d'algèbre linéaire telles que la factorisation QR, la décomposition en valeurs singulières (DVS) et les moindres carrés (MC). Nous en donnons ici une présentation assez complète du point de vue de leurs aspects théoriques et algorithmiques.

La méthode du décrétement a été introduite par un ingénieur de la NASA, H. A. Cole, à la fin des années 60 [17]. Les justifications mathématiques de cette méthode [72, 7] reposent sur un délicat calcul d'espérance conditionnelle, jusqu'ici non établi rigoureusement. Parmi les erreurs commises, il y a le fait que les instants auxquels la condition de déclenchement est satisfaite ne sont pas déterministes mais aléatoires (ce sont des temps d'arrêt). En outre, le conditionnement par un événement de probabilité nulle est un concept mal défini eu égard aux axiomes de Kolmogorov [46]. Le travail de justification dans le cas continu a été mené par P. Bernard [13, 14]. Il reste à prendre en compte le fait que l'on travaille sur une suite d'observations discrètes du processus considéré. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette thèse. Nous proposons également une approche particulière permettant de justifier la robustesse du décrétement vis-à-vis de la nature de l'excitation. En particulier, nous expliquerons pourquoi cette méthode, dont la justification théorique habituelle repose sur une hypothèse de stationnarité de l'excitation, fonctionne encore lorsque la situation est celle d'un bref passage d'un train TGV sur un pont, autrement dit lorsque l'hypothèse de stationnarité est violée.

Cette thèse se veut être une contribution à la compréhension des aspects théoriques et algorithmiques des deux méthodes. Elle a aussi pour objet de proposer une justification statistique originale de la méthode décrétement.

Le mémoire est organisé en cinq chapitres :

Le *premier* présente la classe des systèmes dynamiques stochastiques choisis pour décrire le comportement vibratoire des structures considérées, puis fixe les objectifs à atteindre. Y figurent aussi la procédure permettant de passer d'une représentation d'état à temps continu à sa version exacte à temps discret dans le cas où l'excitation est modélisée par un bruit blanc gaussien, ainsi qu'un bref tour d'horizon des principales méthodes utilisées pour l'identification modale des systèmes dynamiques stochastiques linéaires.

Le *deuxième chapitre* rappelle quelques résultats standards de l'analyse modale utiles pour la suite. Le cas des systèmes amortis, fréquemment invoqué dans ce travail, y est examiné dans le détail.

Le *troisième chapitre* donne une présentation détaillée de la méthode des sous-espaces. On y rappelle aussi le principe des méthodes de réalisation déterministe et stochastique. Enfin, on

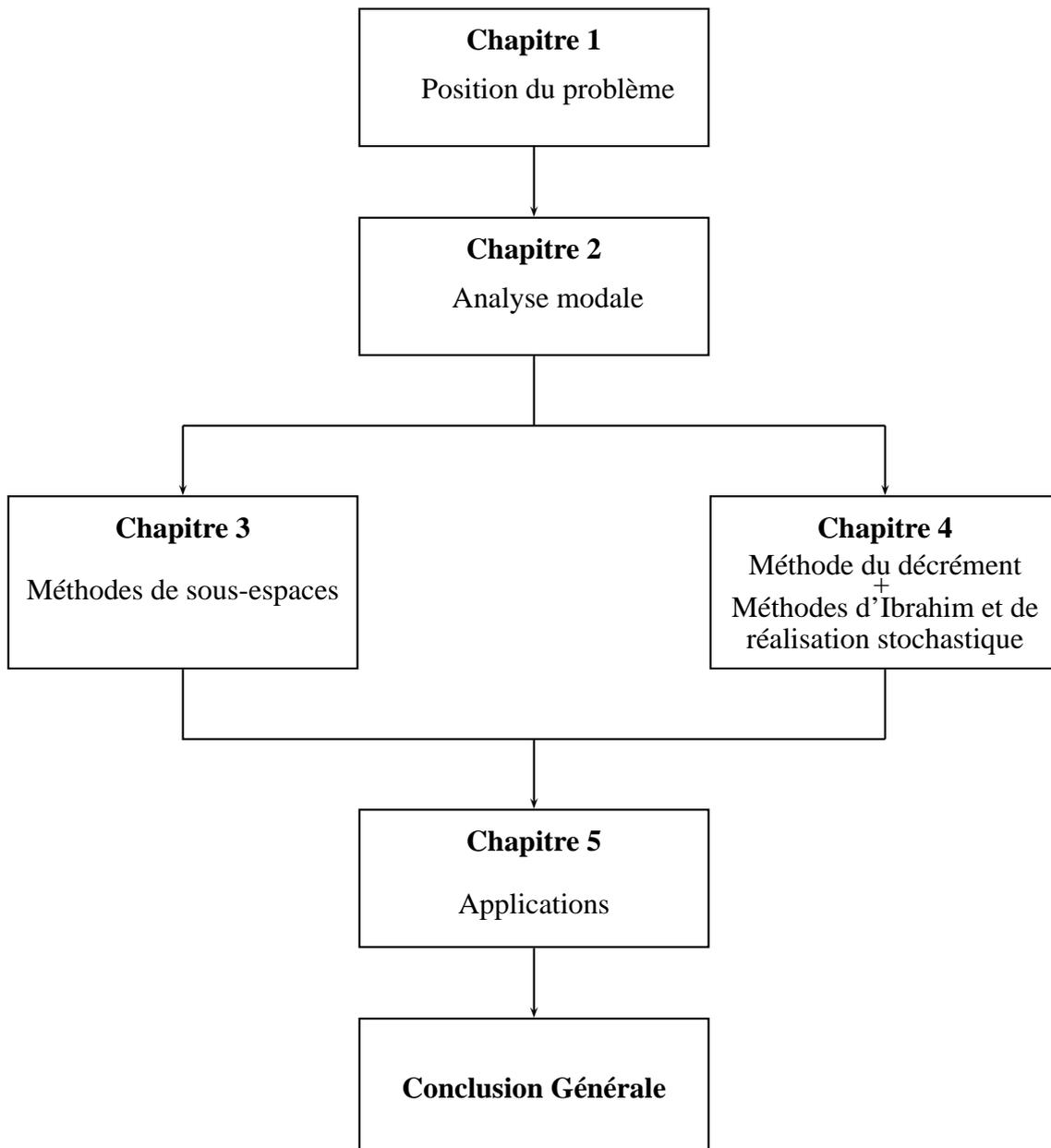
y montre comment les paramètres modaux peuvent être déduits des résultats de l'identification fournis par la méthode des sous-espaces.

Le *quatrième chapitre* présente la méthode du décrément. Après une description empirique de la méthode et l'éclaircissement de certains de ses points clés, une justification statistique rigoureuse en est donnée. Une attention toute particulière est portée à son utilisation dans le cas d'excitations de type impulsions ou train d'impulsions. Est également précisé dans ce chapitre le lien entre cette méthode et celles d'Ibrahim et de réalisation stochastique, dédiées à l'identification des paramètres modaux.

Le *cinquième chapitre* a pour objet l'analyse numérique des performances des méthodes décrites dans les deux précédents chapitres. Deux applications y sont traitées. La première, assez académique, concerne une poutre grandeur réelle testée sur la plate-forme d'essais des structures du LCPC. La seconde est une structure réelle -un pont ferroviaire SNCF- dont la source d'excitation est le passage d'un TGV.

Enfin, une conclusion générale, permet de dresser un bilan de ce travail et de tirer quelques perspectives de poursuites possibles.

La figure 1 ci-après résume l'organisation de la thèse.

FIG. 1 – *Organisation de la thèse.*

Chapitre 1

Position du problème

Sommaire

1.1	Introduction	22
1.2	Cadre de l'étude	22
1.2.1	Modèle d'état	23
1.2.2	Modèle ARMA vectoriel	27
1.3	Objectifs de l'étude	28
1.4	Sur les méthodes d'identification	29
1.4.1	Méthodes utilisant les covariances	30
1.4.2	Méthodes utilisant directement les données	32
1.5	Conclusion	34

1.1 Introduction

Nous présentons dans un premier temps la classe des systèmes dynamiques considérés dans ce travail, à savoir ceux dont la dynamique peut être décrite par celle d'un oscillateur vectoriel linéaire de dimension finie excité par un bruit blanc gaussien. Le lien est ensuite établi entre cette classe de modèles et deux classes de modèles à temps discret particulièrement bien adaptés aux problèmes d'identification sous excitations ambiantes : les modèles d'état et les modèles ARMA vectoriels. Les objectifs de la thèse sont ensuite rappelés. Puis, après un bref rappel des principales méthodes d'identification (temporelles et fréquentielles) susceptibles de convenir au problème posé, les deux méthodes retenues (la méthode des sous-espaces et la méthode du décrément aléatoire couplée à la méthode d'Ibrahim ou à la méthode de réalisation stochastique) sont précisées dans la conclusion.

1.2 Cadre de l'étude

Nous nous plaçons dans le cadre des systèmes mécaniques vibrants dont le comportement dynamique peut s'identifier à celui d'un oscillateur linéaire à m degrés de libertés (ddl) d'équation d'évolution :

$$M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = \mathcal{P}(t) \quad (1.1)$$

où $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, Z est le vecteur des déplacements nodaux, de dimension m , et \mathcal{P} celui des efforts nodaux, également m -dimensionnel et de la forme : $\mathcal{P} = L\mathcal{N}$, avec $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice de rang $p \leq m$ et $\mathcal{N} = (\mathcal{N}(t), t \in \mathbb{R})$ un bruit blanc gaussien normalisé de dimension m .

A cette équation, il conviendrait en toute rigueur d'adjoindre des conditions initiales portant sur Z et \dot{Z} . Toutefois, comme nous sommes uniquement intéressés ici par le régime stationnaire du système, c'est-à-dire par la solution stationnaire de (1.1), qui est indépendante des conditions initiales, il est inutile de faire figurer ces dernières dans la formulation.

Observons par ailleurs, que l'hypothèse d'excitation blanche n'est pas une perte de généralité pour peu que l'on accepte le caractère gaussien de cette excitation. En effet, si celle-ci est un bruit gaussien coloré (i.e. un processus gaussien d'énergie finie) physiquement réalisable, on peut toujours se ramener à la situation précédente par des méthodes, dites de blanchiment ou de markovianisation, consistant à exprimer l'excitation gaussienne colorée comme une observation linéaire du filtré linéaire d'un bruit blanc gaussien par un filtre causal [12, 48].

Notons que le modèle linéaire (1.1) n'est autre que la formulation éléments finis à m degrés de libertés d'un système mécanique. Sa linéarité signifie qu'il a été construit sur la base de l'hypothèse classique des petites transformations. Par conséquent, son emploi est limité à l'étude des petites oscillations du système. Dans tout ce travail, on suppose qu'il donne une description correcte de la dynamique de ce dernier.

1.2.1 Modèle d'état

Le cadre naturel d'étude pour les équations du type (1.1), compte tenu de la nature de l'excitation, étant celui des équations différentielles stochastiques (eds), il nous faut reformuler (1.1) dans ce cadre, ce que l'on fait classiquement en exprimant cette équation dans l'espace des phases et en interprétant l'équation obtenue au sens des eds de Itô. On obtient ainsi un système différentiel de Itô s'écrivant :

$$dX(t) = A_c X(t)dt + B_c dW(t) \quad (1.2)$$

où X (l'état du système) est un processus de dimension $n = 2m$ tel que : $X = (Z^T, \dot{Z}^T)^T$, $W = (W(t), t \in \mathbb{R})$ est un processus de Wiener normalisé étendu m -dimensionnel dont $\mathcal{N} = (\mathcal{N}(t), t \in \mathbb{R})$ est la dérivée au sens des distributions aléatoires et $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices s'écrivant :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & I_{m \times m} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} ; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $I_{\alpha \times \alpha}$ désigne l'élément unité de $\mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ et $0_{\alpha \times \alpha}$ l'élément nul de $\mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$.

Considérons le cas particulier où la réponse est le vecteur Z des déplacements nodaux scalaires du modèle éléments finis idéal (1.1) utilisé pour décrire la dynamique du système. Dans ce cas on a :

$$Z(t) = H_c X(t) \quad ; \quad H_c = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (1.4)$$

En combinant les équations (1.2) et (1.4) on obtient le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} dX(t) &= A_c X(t) + B_c dW(t) \\ Z(t) &= H_c X(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Nous nous intéressons ici au comportement dynamique de la réponse en régime permanent. Donc seule nous intéresse la solution stationnaire de (1.1) ou (1.5), encore notée Z et qui est un processus gaussien stationnaire centré. Les caractéristiques statistiques de cette solution seront déterminées plus loin. En fait, dans le contexte identification qui est le notre, ce processus ne présente pas un intérêt majeur car, tant pour des raisons économiques que techniques on ne peut l'échantillonner expérimentalement dans sa globalité. Par contre, on peut en échantillonner des observations linéaires de dimension beaucoup plus faible qui pourront être utilisées pour l'identification. Soit Y une telle observation. C'est un processus gaussien stationnaire centré de dimension $l \ll m$ tel que : $Y = \Pi_d Z$, avec $\Pi_d \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Il s'agit alors d'écrire le système satisfait par ce processus, ce qui est immédiat d'après (1.5) et l'égalité précédente. Posant $C_c = \Pi_d H_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$, on obtient :

$$\begin{cases} dX(t) &= A_c X(t)dt + B_c dW(t) \\ Y(t) &= C_c X(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Z étant par construction un déplacement, Y est aussi un déplacement : c'est le vecteur des déplacements scalaires mesurés par les capteurs. Sa dimension l correspond donc ici au nombre de capteurs.

Considérons maintenant le cas général où les capteurs mesurent à la fois des déplacements, des vitesses et des accélérations. Le processus d'observation Y s'écrit alors :

$$Y(t) = \Pi_a \ddot{Z}(t) + \Pi_v \dot{Z}(t) + \Pi_d Z(t) \quad (1.7)$$

où les matrices Π_a , Π_v et Π_d sont des matrices indiquant la position des capteurs ou les ddl mesurés si l'excitation est appliquée en tous les points du modèle discrétisé de la structure.

A partir de l'équation (1.1) on tire : $\ddot{Z}(t) = -M^{-1}KZ(t) - M^{-1}D\dot{Z}(t) + M^{-1}LN(t)$. En remplaçant $\ddot{Z}(t)$ par cette expression dans (1.7), il vient :

$$Y(t) = (\Pi_d - \Pi_a M^{-1}K)Z(t) + (\Pi_v - \Pi_a M^{-1}D)\dot{Z}(t) + \Pi_a M^{-1}LN(t) \quad (1.8)$$

soit encore :

$$Y(t) = C_c X(t) + D_c \mathcal{N}(t) \quad (1.9)$$

avec :

$$C_c = [\Pi_d - \Pi_a M^{-1}K | \Pi_v - \Pi_a M^{-1}D] \quad ; \quad D_c = [\Pi_a M^{-1}L] \quad (1.10)$$

- Si $\Pi_a = \Pi_v = 0$, c'est-à-dire si les capteurs ne mesurent que des déplacements, alors la réponse du système s'écrit :

$$Y(t) = C_c X(t) \quad ; \quad C_c = [\Pi_d | 0] \quad (1.11)$$

- Si $\Pi_a = \Pi_d = 0$, c'est-à-dire si les capteurs ne mesurent que des vitesses, on a :

$$Y(t) = C_c X(t) \quad ; \quad C_c = [0 | \Pi_v] \quad (1.12)$$

- Si $\Pi_v = \Pi_d = 0$, c'est-à-dire si les données mesurées sont des accélérations, alors :

$$Y(t) = C_c X(t) + D_c \mathcal{N}(t) \quad ; \quad C_c = \Pi_a [-M^{-1}K | -M^{-1}D] \quad (1.13)$$

On constate ainsi que lorsque les capteurs mesurent des accélérations l'équation d'observation contient un terme supplémentaire qui dépend de l'excitation.

Dans toute la suite, pour simplifier l'exposé, nous nous plaçons dans le cas où la réponse fournie par les capteurs contient exclusivement des déplacements. La dynamique du système est alors décrite par l'équation (1.6).

La solution de (1.2) s'écrit, pour $t \geq 0$:

$$X(t) = e^{A_c t} X_0 + \int_0^t e^{A_c(t-s)} B_c dW(s) \quad (1.14)$$

avec $X_0 = X(0)$ p.s.

De cette expression on tire, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$X(t+u) = e^{A_c t} X(u) + \int_u^{t+u} e^{A_c(t+u-s)} B_c dW(s) \quad (1.15)$$

Observons que les intégrales figurant dans (1.14) et (1.15) sont des intégrales de Wiener. Par ailleurs, n'étant intéressé que par la solution stationnaire de (1.2) il nous faut prendre pour X_0 un vecteur aléatoire dont la loi est la probabilité invariante de (1.2) et qui soit en outre indépendant de $\sigma(W(u), u \geq 0)$ (tribu engendrée par les variables aléatoires $\{W(u), u \geq 0\}$). X est alors un processus gaussien stationnaire centré à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Un tel processus est entièrement déterminé par sa fonction d'autocorrélation $t \mapsto \Sigma_X(t) = \mathbb{E}[X(t+u)X^T(u)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ qui se calcule aisément à partir de (1.15) en tenant compte de l'indépendance entre la famille $\{W(u), u \geq 0\}$ et X_0 . On obtient, $\forall t \geq 0$:

$$\Sigma_X(t) = e^{A_c t} \Sigma \quad (1.16)$$

où $\Sigma = \mathbb{E}[X_0 X_0^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la variance matricielle de X_0 , mais aussi de $X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, du fait de la stationnarité de X .

D'où, en posant $\sigma_c = B_c B_c^T$:

$$\Sigma = \mathbb{E}[X(t)X^T(t)] = e^{A_c t} \Sigma e^{A_c^T t} + \int_0^t e^{A_c(t-s)} \sigma_c e^{A_c^T(t-s)} ds \quad (1.17)$$

Comme X est solution stationnaire de (1.2), ceci ne dépend pas de t et est donc égal à sa limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Or, en supposant A_c asymptotiquement stable (i.e. toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative), hypothèse nécessaire pour garantir l'existence d'une solution stationnaire de (1.2), il vient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A_c t} = 0.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A_c(t-s)} \sigma_c e^{A_c^T(t-s)} ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{A_c u} \sigma_c e^{A_c^T u} du \end{aligned}$$

expression de laquelle on tire :

$$\begin{aligned} A_c \Sigma + \Sigma A_c^T &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{du} \left[e^{A_c u} \sigma_c e^{A_c^T u} \right] du \\ &= -\sigma_c \end{aligned}$$

Σ s'obtient donc comme solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -\sigma_c \quad ; \quad \sigma_c = B_c B_c^T \quad (1.18)$$

qui, du fait de la stabilité asymptotique de la matrice A_c , admet une unique solution (qui est positive).

Il convient maintenant de construire une version à temps discret de (1.6) afin de l'adapter à

la situation expérimentale future. Pour cela, on se donne un pas de temps $\Delta t > 0$ et on considère la famille dénombrable d'instants $\{t_k = k\Delta t, k \in \mathbb{Z}\}$. Comme la solution stationnaire $(X^T, Y^T)^T = ((X(t)^T, Y(t)^T)^T, t \in \mathbb{R})$ de (1.6) est connue, il suffit alors d'en prendre les valeurs exactes aux points t_k . Posant $(X_k^T, Y_k^T)^T = (X(t_k)^T, Y(t_k)^T)^T, \forall k \in \mathbb{Z}$, on obtient ainsi un processus $(n + l)$ -dimensionnel à temps discret $((X_k^T, Y_k^T)^T, k \in \mathbb{Z})$, qu'il convient ensuite de caractériser.

A cette fin, considérons l'expression (1.15) de la solution stationnaire de (1.2) et posons $t = \Delta t, u = t_k = k\Delta t, X(k\Delta t) = X_k$. Il vient, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$X_{k+1} = e^{A_c \Delta t} X_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} B_c dW(s) \quad (1.19)$$

soit encore, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$X_{k+1} = AX_k + \mathcal{W}_k \quad (1.20)$$

avec :

$$A = e^{A_c \Delta t} \quad (1.21)$$

$$\mathcal{W}_k = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} B_c dW(s) \quad (1.22)$$

La suite $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_k, k \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc gaussien discret n -dimensionnel dont la variance matricielle $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s'écrit :

$$Q = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k \mathcal{W}_k^T] = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} \sigma_c e^{A_c^T[(k+1)\Delta t - s]} ds \quad (1.23)$$

soit, après un chagement de variables :

$$Q = \int_0^{\Delta t} e^{A_c u} \sigma_c e^{A_c^T u} du \quad (1.24)$$

On montre aisément à partir de cette expression que Q est solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_c Q + Q A_c^T = e^{A_c \Delta t} \sigma_c e^{A_c^T \Delta t} - \sigma_c \quad (1.25)$$

qui admet une solution unique positive.

On peut également montrer que Q a pour expression :

$$Q = \Sigma - e^{A_c \Delta t} \Sigma e^{A_c^T \Delta t} \quad (1.26)$$

En effet :

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{E}[\mathcal{W}_k \mathcal{W}_k^T] = \mathbb{E}[(X_{k+1} - e^{A_c \Delta t} X_k)(X_{k+1} - e^{A_c \Delta t} X_k)^T] \\ &= \mathbb{E}[X_{k+1} X_{k+1}^T] - \mathbb{E}[X_{k+1} X_k^T] e^{A_c^T \Delta t} - e^{A_c \Delta t} \mathbb{E}[X_k X_{k+1}^T] + e^{A_c \Delta t} \mathbb{E}[X_k X_k^T] e^{A_c^T \Delta t} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{k+1}X_k^T] &= \mathbb{E}[(e^{A_c\Delta t}X_k + \mathcal{W}_k)X_k^T] = e^{A_c\Delta t}\mathbb{E}[X_kX_k^T] + \mathbb{E}[\mathcal{W}_kX_k^T] \\ \mathbb{E}[X_kX_{k+1}^T] &= \mathbb{E}[X_k(e^{A_c\Delta t}X_k + \mathcal{W}_k)^T] = \mathbb{E}[X_kX_k^T]e^{A_c^T\Delta t} + \mathbb{E}[X_k\mathcal{W}_k^T]\end{aligned}$$

D'où le résultat en tenant compte de ce que :

$$\mathbb{E}[X_{k+1}X_{k+1}^T] = \mathbb{E}[X_kX_k^T] = \Sigma$$

et que :

$$\mathbb{E}[\mathcal{W}_kX_k^T] = \mathbb{E}[X_k\mathcal{W}_k^T] = 0$$

Nous obtenons finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + \mathcal{W}_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \quad (1.27)$$

avec A donnée par (1.21), $C = C_c$ et $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_k, k \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc gaussien discret n -dimensionnel de variance matricielle $Q = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k\mathcal{W}_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donnée par (1.24) ou (1.26).

C'est la version discrète cherchée de (1.6). Toutefois, et toujours dans l'optique de son application pratique, on pourra aussi l'utiliser sous la forme modifiée suivante destinée à tenir compte de l'incertitude sur les mesures lors de échantillonnage expérimental :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + \mathcal{W}_k \\ Y_k &= CX_k + \mathcal{V}_k \end{cases} \quad (1.28)$$

où $((\mathcal{W}_k^T, \mathcal{V}_k^T)^T, k \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc gaussien discret $(n+l)$ -dimensionnel de variance matricielle :

$$\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{W}_k \\ \mathcal{V}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}_k^T & \mathcal{V}_k^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)} \quad (1.29)$$

avec $Q = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k\mathcal{W}_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = \mathbb{E}[\mathcal{V}_k\mathcal{V}_k^T] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $S = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k\mathcal{V}_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ les variances et la covariance matricielles respectives des bruits blancs gaussiens discrets $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_k, k \in \mathbb{Z})$ et $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_k, k \in \mathbb{Z})$, respectivement n et l -dimensionnels. Notons que, par construction, $\forall k \in \mathbb{Z}$, la v.a. X_k est indépendante de la famille $\{\mathcal{W}_j, j \geq k\}$.

Nous venons ainsi de déterminer un système discret approprié à l'estimation des caractéristiques modales de la structure à partir de mesures expérimentales de sa réponse stationnaire.

Observons que ce système constitue également un algorithme de simulation numérique de cette réponse (cf. annexe A).

1.2.2 Modèle ARMA vectoriel

Les méthodes classiques d'identification sont souvent basées sur l'identification de modèles ne contenant pas l'état. Ce dernier peut être éliminé à partir de l'équation du filtre de Kalman

en avant (cf. annexe B) pour donner un modèle ARMA vectoriel.

En effet, sous certaines conditions, supposées satisfaites ici [?, 50], tout modèle d'état de la forme (1.28) admet une représentation ARMA vectorielle de la forme :

$$\sum_{i=0}^p A_i Y_{k-i} = \sum_{i=0}^q B_i E_{k-i} \quad (1.30)$$

où p et q sont des entiers strictement positifs, $A_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ sont des coefficients matriciels tels que $A_0 = B_0 = I$ et $(E_k, k \in \mathbb{Z})$ est une suite blanche gaussienne l -dimensionnelle. Les membres de gauche et de droite de (1.30) sont respectivement les parties AR (*Auto Regressive*) et MA (*Moving Average*) du modèle ARMA ; (p, q) est l'ordre du modèle.

Les coefficients de ce modèle et ceux du modèle d'état (1.28) sont liés par les relations :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -A_p & -A_{p-1} & \dots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$C = [I \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (1.32)$$

Par suite, identifier la matrice A , qui caractérise la dynamique du système, revient à identifier les coefficients de la partie AR du modèle ARMA.

Remarquons que cette représentation peut aussi être vue comme un autre algorithme de simulation numérique de la réponse stationnaire de la structure.

1.3 Objectifs de l'étude

Dans le cadre ainsi défini, le problème à résoudre est le suivant. On considère une structure (par exemple un pont routier) soumise à des vibrations sous l'action d'une sollicitation dynamique ambiante (par exemple le vent et/ou le trafic). Cette structure est équipée de l capteurs qui enregistrent l'évolution temporelle en régime permanent d'un déplacement vectoriel l -dimensionnel supposé centré (on peut toujours se ramener à cette situation), sur un intervalle d'observation fixé $[0, T]$, $T > 0$. Pratiquement, les mesures sont effectuées aux N nœuds $t_k = k\Delta t$, $k \in I_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\Delta t = T/(N-1)$, d'une subdivision régulière $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = T$ de l'intervalle $[0, T]$. A la fin de l'expérience, on dispose ainsi, pour décrire l'évolution cherchée, d'une famille $\{y_k, k \in I_N\}$ d'éléments de \mathbb{R}^l représentant les valeurs mesurées du déplacement cible aux instants t_k . On considère cette famille comme une réalisation restreinte à I_N (i.e. $k \in I_N$) d'un processus stationnaire centré l -dimensionnel à temps discret $(Y_k, k \in \mathbb{Z})$ admettant une représentation d'état de la forme (1.6). Il s'agit alors, à partir de la seule réalisation expérimentale $\{y_k, k \in I_N\}$, de trouver les paramètres du modèle

éléments finis (1.1) ou de la représentation d'état (1.6) ou encore de (1.30). En fait, ce n'est pas tout à fait ce problème que nous cherchons à résoudre, mais un problème voisin plus proche des préoccupations du mécanicien, que l'on peut formuler ainsi : comment, à partir de la seule donnée $\{y_k, k \in I_N\}$, et sachant que cette donnée peut être assimilée à la réalisation restreinte à I_N d'un processus stationnaire centré à temps discret $(Y_k, k \in \mathbb{Z})$ défini par (1.6), obtenir des approximations satisfaisantes des paramètres modaux dominants de la structure ?

Plusieurs méthodes présentes dans la littérature sont applicables à ce type de problème ou à des problèmes connexes [38, 3, 72, 47, 13, 74, 71, 7, 41, 60, 50, 28, 23]. Parmi ces méthodes, celles des sous-espaces et du décrétement aléatoire sont les plus utilisées. D'où notre intérêt pour ces dernières et la large place que nous leur consacrons dans cette thèse. Les chapitres 3 et 4 leur sont entièrement consacrés. Dans le chapitre 3 nous donnons une description détaillée et rigoureuse des méthodes de sous-espaces en insistant sur leurs aspects algorithmiques et leurs spécificités. Sont également examinées dans le détail les méthodes de réalisation déterministe et stochastique, qui ont beaucoup de points communs avec les méthodes de sous-espaces. Le chapitre 4 est consacré à la méthode du décrétement aléatoire et à son couplage avec la méthode d'identification modale d'Ibrahim, qui est détaillée à cette occasion. L'analyse de la méthode du décrétement constitue le cœur de la thèse. Nous en donnons une présentation empirique et une justification statistique rigoureuse. Nous justifions notamment pourquoi cette méthode fonctionne encore lorsque l'excitation est une impulsion ou un train d'impulsions, donc ne satisfait pas l'hypothèse de stationnarité sur laquelle se basent toutes les justifications connues de la méthode.

Mais avant d'aborder ces divers points, nous allons rapidement passer en revue, dans le paragraphe suivant, les principales méthodes d'identification structurales adaptées à l'estimation des paramètres modaux, en donnant un bref aperçu de leur principe.

1.4 Sur les méthodes d'identification

Il ne s'agit pas dans cette section de faire un état de l'art exhaustif des méthodes d'identification structurale. Le lecteur intéressé qui souhaite approfondir le sujet, pourra se reporter aux références [50, 28, 62, 23].

Notre objectif ici est simplement de donner quelques éléments d'information sur l'évolution du problème et de présenter les principales méthodes d'identification utilisées ces dernières années pour l'estimation des paramètres modaux de structures sous excitations dynamiques ambiantes.

Les techniques classiques d'identification cherchent d'abord à déterminer la fonction de réponse en fréquence (FRF) du système, ce qui oblige à travailler dans le domaine fréquentiel, connaissant l'excitation et la réponse. Cependant, l'approche fréquentielle présente plusieurs inconvénients. Le premier est qu'il faut disposer d'un grand nombre de données, ce qui n'est pas toujours évident pour des excitations de type impacts. La seconde est que l'utilisation de la transformation de Fourier (TF) ou de son inverse (TFI) engendre un phénomène appelé "leakage" qui est lié au problème de non-périodicité du signal. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème. La principale méthode consiste à introduire une fenêtre

pour rendre le signal périodique [28] ; mais l'utilisation d'un tel filtrage a un effet néfaste sur l'estimation des paramètres modaux, en particulier sur les amortissements. Le troisième problème concerne le phénomène "*d'aliasing*" ou repliement du spectre [48, 28].

Pour ces différentes raisons, le recours à des techniques d'identification dans le domaine temporel a été recherché. Les techniques classiques d'identification dans le domaine temporel utilisent souvent la fonction de réponse impulsionnelle (FRI) obtenue par déconvolution à travers la création d'une matrice de convolution, évitant ainsi les problèmes de leakage et aliasing. Malheureusement, dépendant du type d'excitation, cette matrice de convolution peut être mal conditionnée entraînant ainsi une explosion de la réponse impulsionnelle [64]. D'autres méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème, certaines basées sur des techniques de moindres carrés [68], d'autres, plus récentes, sur l'emploi de transformées en ondelettes [65].

Plusieurs méthodes permettent, à partir de la FRF ou encore de la FRI, d'estimer les caractéristiques d'une structure. Les premières approches sont basées sur le diagramme de Nyquist [28]. D'autres approches, plus rigoureuses, ont ensuite été développées, d'abord la méthode dite Exponentielle Complexe pour des systèmes SISO, puis des méthodes plus générales telles que la méthode d'Ibrahim (ITD) [42] ou la méthode polyréférence [75] pour les systèmes MIMO.

Pour certaines structures et notamment les ponts, l'excitation n'est pas connue, car non mesurable ou non mesurée. Il est donc nécessaire de disposer de techniques se limitant à la seule connaissance de la réponse. Il existe des méthodes bien adaptées à ce type de situation. On peut citer la méthode de réalisation stochastique [3] basée sur les travaux de Ho et Kalman [38], la méthode de prédiction de l'erreur [47, 50], les méthodes de sous-espaces [74, 71, 61], la méthode du décrétement aléatoire couplée à une méthode d'identification modale standard [72, 13, 7, 41]. Ce sont des méthodes qui s'appuient sur des stratégies d'identification en domaine temporel n'exigeant pas la connaissance de mesures de l'excitation. Elles nécessitent toutefois de remplacer ces données manquantes par des hypothèses statistiques sur l'excitation. Nous rappelons le principe de ces méthodes ci-après. Les méthodes de sous-espaces et la méthode du décrétement font l'objet d'une analyse détaillée dans les chapitres 3 et 4.

1.4.1 Méthodes utilisant les covariances

Comme nous le verrons plus loin, les expressions de la fonction de réponse impulsionnelle matricielle et de la fonction de covariance matricielle de la réponse d'un système linéaire excité par un bruit blanc sont de la même forme. Cette spécificité est utilisée avantageusement dans certaines méthodes classiques d'identification modale [38, 3]. Nous en rappelons quelques unes ci-dessous.

La méthode des variables instrumentales. Cette appellation recouvre en fait une classe de méthodes basées sur le principe suivant [62]. Nous avons vu au paragraphe 1.2.2 que le comportement dynamique d'une structure soumise à une excitation blanche gaussienne pouvait être modélisé par un modèle ARMA vectoriel. Il suffit pour cela de supposer que la structure à un comportement linéaire, homogène et que l'excitation est modélisable par un bruit blanc gaussien. Ce modèle ARMA est défini par la relation (1.30).

Posant :

$$R_i = \mathbf{E}[Y_k Y_{k-i}^T] \quad (1.33)$$

et tenant compte des relations d'indépendance structurelles entre le bruit et l'entrée, il vient, en multipliant à droite les deux membres de (1.30) par Y_{k-p-i}^T et en prenant l'espérance mathématique :

$$R_{p+i} + A_1 R_{p+i-1} + \dots + A_p R_i = 0 \quad (1.34)$$

C'est la relation de base de la méthode des variables instrumentales.

Comme en pratique on ne dispose que de mesures de la réponse il faut alors estimer les covariances R_i et remplacer dans (1.34) leurs valeurs théoriques par les estimées obtenues.

Les paramètres A_1, \dots, A_p sont ensuite calculés en résolvant le système (1.34) au sens des moindres carrés. Finalement, les paramètres modaux sont déduits de l'analyse spectrale de la matrice compagnon associée aux coefficients de la partie AR du modèle ARMA, ce qui conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres matriciel relatif à cette matrice compagnon.

L'avantage de cette méthode est que le problème auquel elle conduit est linéaire et porte uniquement sur les coefficients pertinents du modèle (les coefficients AR), contrairement aux méthodes de prédiction de l'erreur qui identifient tous les paramètres du modèle (AR et MA) et sont non linéaires.

En remplaçant la fonction de covariance par la fonction de réponse impulsionnelle, on obtient la méthode Polyreference Time Domain (PTD). La méthode Exponentielle Complexe des Moindres Carrés (en anglais Least Squares Complex Exponential method (LSCE)) et la méthode d'Ibrahim (ITD) sont des cas particuliers de cette dernière. Les relations entre ces méthodes peuvent être trouvées dans [4, 50, 28].

La méthode de réalisation stochastique. Cette méthode permet l'identification d'un modèle d'état connaissant la fonction de corrélation de la réponse [3, 1]. Comme nous le verrons plus loin, elle fonctionne aussi avec la fonction du décrément. Elle est basée sur le fait que pour les systèmes considérés la fonction de corrélation (ou du décrément) a la même forme que la fonction de réponse impulsionnelle. Il est alors possible d'estimer les coefficients du modèle stochastique en utilisant les algorithmes classiques de la théorie du contrôle [38]. Les caractéristiques modales de la structure sont ensuite extraites en résolvant un problème aux valeurs propres standard. Cette méthode est détaillée dans le chapitre 3.

Notons qu'en pratique, ne disposant que de réalisations discrétisées de la réponse stationnaire Y , la fonction de corrélation doit être estimée statistiquement. Il importe donc de disposer d'un estimateur efficace de cette fonction. La procédure d'estimation se fait essentiellement en utilisant des méthodes non paramétriques dont les plus connues sont :

- la méthode directe ou classique, basée sur l'emploi de l'estimateur empirique usuel de la fonction de corrélation ;
- la méthode indirecte, basée sur l'estimation préalable de la densité spectrale de puissance de la réponse, puis l'emploi de la transformée de Fourier pour revenir à la fonction de corrélation ;

- la méthode du décrément.

Plusieurs comparaisons ont été effectuées entre ces différentes méthodes [15]. Il s'est avéré que la méthode du décrément est plus précise dans de nombreux cas et surtout beaucoup plus rapide. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de lui accorder une large place dans cette thèse.

Notons donc déjà ici que la méthode du décrément est un outil de prétraitement des données. Elle devra être couplée à d'autres méthodes afin d'identifier les paramètres modaux d'une structure. Nous en rappelons brièvement le principe ci-dessous. Nous y reviendrons plus longuement au chapitre 4 qui lui est consacré.

La méthode du décrément aléatoire. Cette méthode a été introduite par H.A. Cole à la fin des années 60 [17]. C'est un outil simple d'utilisation, facile à implémenter et peu dispendieux en temps de calcul. Son principe consiste, une trajectoire de la réponse stationnaire étant donnée, à déterminer plusieurs *sections finissantes* de cette dernière selon une stratégie à préciser, puis à moyenniser ces sections. On obtient ainsi une fonction, dite du décrément, qui a la particularité d'être de la même forme que la réponse à un lâcher avec des conditions initiales spécifiées ou que la fonction de réponse impulsionnelle du système et qui, en outre, définit un estimateur fonctionnel de la fonction de corrélation de la réponse stationnaire de ce dernier. Les caractéristiques modales du système peuvent alors être identifiées en couplant cette procédure à une méthode d'identification classique telle que la méthode d'Ibrahim ou la méthode de réalisation stochastique.

1.4.2 Méthodes utilisant directement les données

L'avantage des algorithmes d'identification utilisant directement les données est qu'ils permettent de s'affranchir de traitements statistiques préalables des données tels que l'estimation des densités spectrales de puissance ou des fonctions de corrélation, qui sont parfois des opérations délicates. Les méthodes présentées dans cette section permettent donc, à partir d'observations expérimentales de la réponse dynamique d'une structure sous excitations ambiantes, et sans traitement préalable, d'estimer les paramètres modaux.

La méthode d'Ibrahim (Ibrahim Time Domain). Cette méthode est une technique temporelle d'identification modale basée sur la réponse à un lâcher [40]. Elle utilise deux matrices déduites de la réponse libre du système, la seconde n'étant qu'une version décalée par rapport au temps de la première et s'exprimant comme une fonction linéaire de cette dernière. Par une méthode des moindres carrés on obtient la matrice représentative de cette relation. Les paramètres modaux sont alors obtenus en résolvant le problème spectral relatif à cette matrice. Un avantage de cette méthode est qu'elle peut être utilisée à partir d'observations de la réponse forcée d'une structure, après un prétraitement de ces observations, par exemple par la méthode du décrément. Un développement détaillé en est donné au chapitre 4.

La méthode de Prédiction de l'erreur. C'est une méthode bien appropriée aux représentations ARMA des systèmes dynamiques. Elle permet d'estimer les coefficients du modèle ARMA vectoriel connaissant une trajectoire expérimentale de la réponse stationnaire de la structure [50].

Rappelons qu'un modèle ARMA vectoriel est défini par une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^p A_i Y_{k-i} = \sum_{i=0}^q B_i E_{k-i}$$

où A_i et B_i sont des coefficients matriciels et p, q des entiers strictement positifs.

Il s'agit ensuite de déterminer un modèle qui "décrit au mieux" le contenu statistique des données mesurées (modèle choisi selon un critère optimal de sélection). La méthode d'optimisation s'exprime en général en terme d'erreur, i.e. elle est basée sur la prédiction des données futures sachant les observations passées. Ainsi si la suite $\{Y_k, k \in I_N\}$, $I_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, représente les données observées et $\{\hat{Y}_k(\theta), k \in I_N\}$ les données prédites à partir du modèle ARMA vectoriel (elles dépendent donc des paramètres du modèle regroupés dans le vecteur θ), une façon naturelle d'estimer le paramètre θ consiste à minimiser l'erreur de prédiction définie par : $\epsilon_k(\theta) = Y_k - \hat{Y}_k(\theta)$. Plusieurs méthodes d'optimisation peuvent être utilisées pour résoudre ce problème, par exemple la méthode des moindres carrés. Soit $\hat{\theta}_N$ l'estimateur de θ , tel que [50] :

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \det \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon_k(\theta) \epsilon_k^T(\theta) \right]$$

Compte tenu du fait que l'erreur de prédiction dépend des paramètres, le problème de minimisation est alors non linéaire, nécessitant ainsi l'emploi de méthodes de résolution itératives (telles que le gradient conjugué, par exemple) qui s'accompagnent des problèmes classiques de convergence, de minimas locaux et de sensibilité par rapport aux valeurs initiales. Un modèle ARMA vectoriel pouvant toujours se ramener à un modèle d'état, cette transformation est ensuite opérée, puis les paramètres modaux sont déterminés de la même manière que dans les deux méthodes précédentes.

Les méthodes de sous-espaces. Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées à l'estimation des paramètres matriciels d'un modèle d'état dont le comportement dynamique n'est connu qu'à travers une trajectoire expérimentale de sa réponse stationnaire [71]. Elles n'utilisent que des outils très classiques et robustes d'algèbre linéaire (décomposition en valeurs singulières, factorisation QR, méthode des moindres carrés) ainsi que des opérations de géométries simples (projections orthogonales ou obliques). Les méthodes de sous-espaces consistent d'abord à estimer la matrice d'observabilité et/ou la suite des états directement à partir de la réponse stationnaire. L'estimation des matrices du système se fait grâce à la connaissance de la matrice d'observabilité et/ou la suite des états. Les paramètres modaux sont ensuite déterminés en résolvant un problème aux valeurs propres standard.

Contrairement à la méthode de prédiction de l'erreur, les algorithmes des méthodes de sous-espaces sont linéaires et ne sont pas itératifs (il n'y a donc pas de problèmes de convergence). Ces méthodes sont de ce fait plus rapides que la méthode de prédiction de l'erreur.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la classe des systèmes mécaniques concernés par le problème d'identification considéré dans ce travail : ce sont tous les systèmes dont la dynamique est modélisable par celle d'un oscillateur stochastique vectoriel excité par un bruit blanc gaussien et pour lesquels la seule donnée dont on dispose est une trajectoire expérimentale de la réponse stationnaire. Nous avons établi la représentation d'état à temps continu de l'oscillateur modèle, en avons tiré une version à temps discret adaptée au problème posé, puis montré comment passer de cette représentation d'état discrète à une représentation ARMA vectorielle. Une fois achevée cette phase de modélisation, nous avons alors défini clairement les objectifs de l'étude, à savoir procéder à une analyse détaillée des méthodes de sous-espaces et du décrément aléatoire, dans leurs aspects théoriques, statistiques et algorithmiques. Enfin, nous avons brièvement rappelé le principe des méthodes d'identification modale les plus couramment utilisées à l'heure actuelle.

Avant de présenter de façon détaillée les deux méthodes retenues, il est important de bien définir les caractéristiques modales à identifier, c'est-à-dire les fréquences propres, les taux d'amortissement critique et les déformées modales. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Analyse modale

Sommaire

2.1	Introduction	36
2.2	Préliminaires :	36
2.3	Caractéristiques modales d'un système dynamique linéaire	36
2.3.1	Généralités	36
2.3.2	Analyse spectrale du système libre conservatif associé	39
2.3.3	Analyse spectrale du système libre dissipatif associé	40
2.4	Conclusion	42

2.1 Introduction

Pour prévoir et comprendre le comportement dynamique d'une structure, la connaissance de ses caractéristiques modales est essentielle. Le but de ce chapitre est double : rappeler quelques définitions de base concernant ces caractéristiques (qui sont les paramètres à identifier dans la présente étude) et préciser certaines notations utilisées dans ce mémoire. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux références [32, 4, 28] pour plus de détails.

2.2 Préliminaires :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie m et $EndE$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E (i.e. des applications linéaires de E dans lui-même). On munit E du produit scalaire euclidien canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note E^m l'espace vectoriel euclidien m -dimensionnel obtenu : $E^m = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tout x et tout y dans E^m , de composantes respectives (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_m) relativement à une base orthonormée de E^m , on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (2.1)$$

Dans toute la suite on confondra tout élément de $EndE^m$ (i.e. tout endomorphisme de E^m) et la matrice qui le représente dans une base. Par conséquent on pourra obtenir l'écriture matricielle des relations "opérateurs" en remplaçant chaque opérateur linéaire figurant dans ces relations par sa matrice et tout vecteur par la matrice colonne de ses composantes relativement à la base considérée.

Soit $A \in EndE^m$ symétrique et défini positif. Alors, l'application $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur E .

On note $E_A^m = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ le nouvel espace vectoriel euclidien obtenu en munissant E de ce produit scalaire. On a alors le résultat suivant :

Résultat1 : Soient A et B deux endomorphismes symétriques dans $EndE^m$. On a :

- Le produit AB n'est pas symétrique dans $EndE^m$.
- Si A est défini positif dans $EndE^m$, le produit AB , non symétrique dans $EndE^m$, est symétrique dans $EndE_{A^{-1}}^m$ (où $E_{A^{-1}}^m = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_{A^{-1}})$).

2.3 Caractéristiques modales d'un système dynamique linéaire

2.3.1 Généralités

On considère un oscillateur linéaire à m ddl dont la dynamique est décrite par l'équation différentielle du second ordre :

$$M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = \mathcal{P}(t) \quad (2.2)$$

avec :

H1) M symétrique et défini positif dans $EndE^m$,

H2) K symétrique dans $EndE^m$.

D'après le résultat 1, $M^{-1}K$ n'est pas symétrique dans $EndE^m$. Par contre, il est symétrique dans $EndE_M^m$. On a alors le résultat suivant :

Résultat 2 : Sous les hypothèses H1 et H2, il existe un endomorphisme orthogonal Φ dans $EndE_M^m$, qui diagonalise simultanément M et K .

Preuve :

- 1- L'opérateur linéaire $M^{-1}K$ étant symétrique dans $EndE_M^m$, il existe une base ortho-normée, au moins, de $EndE_M^m$ qui le diagonalise. Soit (Φ_1, \dots, Φ_m) une telle base.
- 2- Soit Λ la représentation matricielle diagonale de $M^{-1}K$ relativement à la base propre (Φ_1, \dots, Φ_m) . Cette matrice est de la forme :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_i & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $M^{-1}K$ et les Φ_i les vecteurs propres associés. Les Φ_i sont obtenus en résolvant les problèmes : $M^{-1}KV_i = \lambda_i V_i$, $i = 1, \dots, m$, puis en normant les solutions V_i obtenues : $\Phi_i = \frac{V_i}{\|V_i\|_{E_M^m}}$, où $\|\cdot\|_{E_M^m}$ désigne la norme euclidienne de E_M^m . Les vecteurs V_i étant deux à deux orthogonaux dans E_M^m , il en est de même des Φ_i . D'où :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle_M = \delta_{ij} \quad (2.4)$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.5)$$

avec Φ la matrice dont les colonnes sont les Φ_i , c'est-à-dire $\Phi = [\Phi_1 | \dots | \Phi_m]$.

On vient ainsi de montrer que Φ diagonalise M .

- 3- Par ailleurs, les Φ_i vérifient : $\forall i \in \{1, \dots, m\}, M^{-1}K\Phi_i = \lambda_i \Phi_i$. D'où, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, \langle M^{-1}K\Phi_i, \Phi_j \rangle_M = \lambda_i \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle_M = \lambda_i \delta_{ij} = \langle K\Phi_i, \Phi_j \rangle$ et ceci s'écrit matriciellement :

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (2.6)$$

Donc Φ diagonalise aussi K .

En résumé, nous venons de montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal dans $EndE_M^m$ qui diagonalise simultanément M et K .

A partir de (2.5) et (2.6) il est facile de voir que :

$$\Lambda = \Phi^{-1} M^{-1} K \Phi \quad (2.7)$$

Supposons, en outre, que D vérifie la relation de Caughey :

$$D = M \sum_{i=0}^p \alpha_i (M^{-1} K)^i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \quad p \in \mathbb{N}^* \quad (2.8)$$

Il est alors facile de montrer que Φ diagonalise aussi D . En effet, considérons la relation tirée de (2.7) :

$$M^{-1} K = \Phi \Lambda \Phi^{-1} \quad (2.9)$$

et observons que, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$(M^{-1} K)^i = \Phi \Lambda^i \Phi^{-1} \quad (2.10)$$

Considérons, en outre, la relation tirée de (2.5) :

$$M = \Phi^{-T} \Phi^{-1} \quad (2.11)$$

Portant ces deux dernières relations dans (2.8), il vient :

$$D = \Phi^{-T} \left(\sum_{i=0}^p \alpha_i \Lambda^i \right) \Phi^{-1} \quad (2.12)$$

c'est-à-dire :

$$\Phi^T D \Phi = \sum_{i=0}^p \alpha_i \Lambda^i \quad (2.13)$$

relation qui montre que $\Phi^T D \Phi$ est une matrice diagonale. Notons \underline{D} cette matrice et d_i son terme diagonal générique :

$$\Phi^T D \Phi = \underline{D} = \text{diag}(d_i) \quad (2.14)$$

Avec l'hypothèse que D vérifie la relation (2.8), l'équation (2.2) peut être découplée, à l'aide d'un changement de variable approprié, en m équations scalaires. En effet, opérons dans (2.2) le changement de variable :

$$Z(t) = \Phi \zeta(t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i \zeta_i(t) \quad (2.15)$$

où :

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

est le vecteur des coordonnées modales.

Après multiplication à gauche par Φ^T , il vient :

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\zeta}(t) + \Phi^T D \Phi \dot{\zeta}(t) + \Phi^T K \Phi \zeta(t) = \Phi^T \mathcal{P}(t) \quad (2.17)$$

soit, d'après (2.5), (2.6) et (2.14) :

$$\ddot{\zeta}(t) + \underline{D}\dot{\zeta}(t) + \Lambda\zeta(t) = \Phi^T \mathcal{P}(t) \quad (2.18)$$

On obtient ainsi un système de m équations scalaires découplées :

$$\ddot{\zeta}_i(t) + d_i \dot{\zeta}_i(t) + \lambda_i \zeta_i(t) = [\Phi^T \mathcal{P}(t)]_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

Pour tout i fixé, (2.19) définit l'équation d'un oscillateur scalaire de masse $m_i = 1$, d'amortissement d_i et de rigidité λ_i . La pulsation propre w_i du système et le taux d'amortissement critique ξ_i de cet oscillateur sont tels que :

$$\begin{cases} w_i^2 = \lambda_i \\ d_i = 2w_i \xi_i \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.2 Analyse spectrale du système libre conservatif associé

L'équation d'évolution de ce système se déduit de (2.2) en annulant dans cette équation l'amortissement D et l'excitation \mathcal{P} . Elle s'écrit donc :

$$M\ddot{Z}(t) + KZ(t) = 0 \quad (2.21)$$

Ses solutions sont de la forme :

$$Z_i(t) = \Phi_i e^{j\gamma_i t} \quad (2.22)$$

avec $j^2 = -1$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ et Φ_i le i -ème vecteur modal du système, normé relativement à la norme de E_M^m , i.e. $\|\Phi_i\|_{E_M^m} = 1$ (cf. §2.3.1 précédent).

Introduisant (2.22) dans (2.21) il vient, après simplification :

$$-\gamma_i^2 M \Phi_i + K \Phi_i = 0 \quad (2.23)$$

Prémultipliant par Φ_j^T les deux membres de cette équation et tenant compte des relations de M et K -orthogonalité (2.5)-(2.6), on obtient :

$$-\gamma_i^2 + \lambda_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.24)$$

équations qui admettent les solutions :

$$\gamma_i = \pm \sqrt{\lambda_i} = \pm \omega_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.25)$$

A toute solution $Z_i(t) = \Phi_i e^{j\omega_i t}$ est donc associée la solution $\bar{Z}_i(t) = \Phi_i e^{-j\omega_i t}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Ceci n'est pas étonnant car l'ensemble des solutions de (2.21) constitue un espace vectoriel de dimension $2m$.

2.3.3 Analyse spectrale du système libre dissipatif associé

L'équation d'évolution de ce système se déduit de (2.2) en annulant dans cette équation le terme d'excitation \mathcal{P} . D'où :

$$M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = 0 \quad (2.26)$$

Pour mener l'analyse spectrale de ce système, nous distinguons deux cas : celui où D satisfait la relation de Caughey (2.8) et celui où il ne la satisfait pas.

a) Cas où l'amortissement satisfait la relation de Caughey

Dans ce cas les solutions de (2.26) sont de la forme :

$$Z_i(t) = \Phi_i e^{\beta_i t} \quad (2.27)$$

avec $\beta_i \in \mathbb{C}$ et Φ_i le i -ème vecteur modal du système, tel que $\|\Phi_i\|_{E_M^m} = 1$.

Portant (2.27) dans (2.26) il vient, après simplification :

$$\beta_i^2 M \Phi_i + \beta_i D \Phi_i + K \Phi_i = 0 \quad (2.28)$$

Prémultipliant cette équation par Φ_j^T et tenant compte des relations de M et K -orthogonalité (2.5)-(2.6), on obtient :

$$\beta_i^2 + d_i \beta_i + \lambda_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.29)$$

En supposant le système sous-amorti, c'est-à-dire

$$d_i^2 < 4\lambda_i \Leftrightarrow \xi_i < 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.30)$$

les solutions de (2.29) s'écrivent :

$$\beta_i = -\alpha_i \pm j w_i^d \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.31)$$

avec :

$$\alpha_i = \frac{d_i}{2} = w_i \xi_i \quad ; \quad w_i^d = \sqrt{\lambda_i - \left(\frac{d_i}{2}\right)^2} = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.32)$$

A toute solution $Z_i(t) = \Phi_i e^{-\alpha_i t} e^{j w_i^d t}$ est donc associée la solution $\bar{Z}_i(t) = \Phi_i e^{-\alpha_i t} e^{-j w_i^d t}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. On retrouve ainsi le fait que l'ensemble des solutions de (2.26) constitue un espace vectoriel de dimension $2m$.

Il importe ici de remarquer que les vecteurs modaux du système libre amorti sont réels et identiques à ceux du système libre non amorti (i.e. conservatif). Par contre, il n'y a pas coïncidence des pulsations propres des deux systèmes : $\omega_i^d \neq \omega_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

b) Cas où l'amortissement ne satisfait pas la relation de Caughey

Dans ce cas, on cherche encore la solution de (2.26) sous la forme :

$$Z_i(t) = \Phi_i e^{\beta_i t} \quad (2.33)$$

mais où cette fois les Φ_i ne sont plus les vecteurs modaux du système libre non amorti.

En portant (2.33) dans (2.26), on obtient :

$$(\beta_i^2 M + \beta_i D + K)\Phi_i = 0 \quad (2.34)$$

qui est un problème aux valeurs propres généralisé difficile à résoudre du fait que D ne se diagonalise plus ici dans la même base que M et K . Une façon astucieuse de contourner la difficulté est de passer dans l'espace des phases. En effet, posant :

$$X(t) = \begin{bmatrix} Z(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad U = \begin{bmatrix} D & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad V = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.35)$$

avec $n = 2m$, l'équation (2.26) prend la forme équivalente :

$$U\dot{X}(t) + VX(t) = 0 \quad (2.36)$$

Par suite, portant (2.33) dans (2.36) et posant :

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \beta_i \Phi_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

on obtient :

$$(V + U\beta_i)\Psi_i = 0 \quad (2.38)$$

qui est un problème aux valeurs propres standard aisément soluble dont les solutions $(\beta_i, \Psi_i)_{i=1, \dots, n}$ sont complexes et deux à deux conjuguées.

Introduisons les matrices :

$$\Lambda = \text{diag}(\beta_1, \bar{\beta}_1, \dots, \beta_m, \bar{\beta}_m) \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= [\Psi_1 | \bar{\Psi}_1 | \dots | \Psi_m | \bar{\Psi}_m] \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \bar{\Phi}_1 & \dots & \Phi_m & \bar{\Phi}_m \\ \beta_1 \Phi_1 & \bar{\beta}_1 \bar{\Phi}_1 & \dots & \beta_m \Phi_m & \bar{\beta}_m \bar{\Phi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

où :

$$\Phi = [\Phi_1 | \bar{\Phi}_1 | \dots | \Phi_m | \bar{\Phi}_m] \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (2.41)$$

Il est alors facile de montrer les relations d'orthogonalité :

$$\Psi^T U \Psi = I_n \quad (2.42)$$

$$\Psi^T V \Psi = -\Lambda \quad (2.43)$$

où I_n désigne l'élément unité de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Par ailleurs, M étant inversible (car définie positive par hypothèse), on a :

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1} D M^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

et par suite l'équation homogène (2.36) peut s'écrire :

$$\dot{X}(t) = A_c X(t) \quad (2.45)$$

avec :

$$A_c = -U^{-1}V = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.46)$$

matrice que l'on peut encore écrire, compte tenu de (2.42) et (2.43) :

$$A_c = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (2.47)$$

soit encore :

$$A_c \Psi = \Psi \Lambda \quad (2.48)$$

On voit ainsi que Λ et Ψ sont les éléments propres de la matrice A_c . Par conséquent, les caractéristiques modales du système considéré peuvent être déterminées dès que A_c (ou $A = e^{A_c \Delta t}$) est connue.

Notons que les éléments de la matrice Λ donnée par (2.39) s'écrivent, en supposant le système sous-amorti :

$$\begin{cases} \beta_i = -\alpha_i + j\omega_i^d \\ \bar{\beta}_i = -\alpha_i - j\omega_i^d \end{cases} ; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.49)$$

avec, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\alpha_i = \frac{\delta_i}{2m_i} ; \quad \omega_i^d = \sqrt{\frac{\kappa_i}{m_i} - \left(\frac{\delta_i}{2m_i}\right)^2} \quad (2.50)$$

où :

$$m_i = \bar{\Phi}_i^T M \Phi_i ; \quad \delta_i = \bar{\Phi}_i^T D \Phi_i ; \quad \kappa_i = \bar{\Phi}_i^T K \Phi_i \quad (2.51)$$

ces grandeurs étant supposées vérifier (condition de sous-amortissement) :

$$\delta_i < 2\sqrt{m_i \kappa_i} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.52)$$

2.4 Conclusion

Les analyses effectuées dans ce chapitre montrent qu'il y a deux types de paramètres modaux d'intérêt en dynamique des structures linéaires : les modes normaux et les modes amortis. Les modes normaux, ou non amortis, sont les caractéristiques du système conservatif. Les systèmes réels sont en général amortis mais la modélisation de leur amortissement n'est pas maîtrisée à l'heure actuelle. On essaie malgré tout d'en tenir compte dans les analyses dynamiques par le biais de représentations simplifiées. Les modes normaux présentent donc un intérêt car ils ne

dépendent pas de l'amortissement. Les modes amortis, quant à eux, sont les caractéristiques du système amorti. Ils sont complexes, au sens algébrique du terme.

Un mode complexe est un mode pour lequel chaque partie de la structure a sa propre amplitude de vibration mais également sa propre phase. Contrairement aux modes normaux pour lesquels chaque élément de la structure atteint son maximum d'amplitude de vibration au même instant dans le cycle vibratoire, pour les modes complexes, ces maxima sont atteints à des instants différents. Ainsi, un mode normal est un mode pour lequel la phase prend pour valeur 0 ou π alors que la phase d'un mode complexe appartient à l'intervalle $[0, \pi[$.

Les méthodes d'extraction modale estiment en fait des modes propres complexes et non des modes normaux. Dans le cas d'un amortissement proportionnel les modes normaux et complexes sont liés. Donc dans ce cas particulier, les modes normaux peuvent se déduire des modes complexes.

En général, l'amortissement n'est pas proportionnel et la base modale qui diagonalise simultanément les matrices de masse et de rigidité ne diagonalise pas la matrice d'amortissement. Le lien entre modes normaux et modes complexes est alors brisé. Il est dans ce cas nécessaire de disposer de procédures permettant de représenter les modes complexes. On trouve dans la littérature des méthodes permettant d'en obtenir des représentation graphiques [28]. La plus simple est basée sur la règle suivante : si la mesure principale de l'argument du mode propre complexe appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors on attribut au mode l'argument 0 ; si cette mesure principale appartient à l'intervalle $]-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ou à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors on attribut au mode l'argument π .

Chapitre 3

Méthodes de sous-espaces

Sommaire

3.1	Introduction	45
3.2	Préliminaires	45
3.2.1	Méthode de réalisation déterministe	45
3.2.2	Identification et représentation markovienne	48
3.2.3	Méthode de réalisation stochastique	48
3.3	Vers les méthodes de sous-espaces	52
3.4	Principe des méthodes de sous-espaces	53
3.4.1	Mise en oeuvre des méthodes	59
3.4.2	Extraction modale	61
3.5	Conclusion	62

3.1 Introduction

La finalité de ce chapitre est de présenter une démarche permettant l'identification des caractéristiques modales d'une structure sous sollicitation ambiante dont le comportement dynamique est décrit par l'équation (1.1), au moyen d'une méthode de sous-espaces.

La classe des méthodes présentée ici est celle décrite par Van Overschee et De Moor [71]. Les algorithmes des méthodes de sous-espaces identifient un modèle d'état connaissant la réponse en utilisant des outils très robustes d'algèbre linéaire tels que la DVS, la factorisation QR et les moindres carrés, ainsi que des opérations géométriques simples telles que les projections orthogonales. Il existe des situations de mesures où certains capteurs sont mobiles et d'autres fixes. Afin de tenir compte de ces situations, une variante des méthodes de sous-espaces a été développée par Bart Peeters et De Roeck [60, 61]. Cette dernière permet de réduire notablement les calculs.

Notons qu'il existe d'autres algorithmes des sous-espaces qui utilisent les données d'entrées (i.e. l'excitation déterministe est connue) [70, 71]. Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cas où l'excitation est inconnue.

3.2 Préliminaires

Avant d'exposer cette méthode, et afin de mieux en comprendre les aspects algorithmiques, nous commençons par rappeler brièvement le principe des méthodes de *réalisation déterministe* et de *réalisation stochastique*.

3.2.1 Méthode de réalisation déterministe

Nous considérons ici le cas où la suite expérimentale $(y_k, k \in I_N)$ peut être assimilée à la réponse permanente restreinte à I_N d'un système dynamique déterministe discret.

Commençons par rappeler le résultat classique suivant. Soient $(u_k, k \in \mathbb{Z})$ et $(y_k, k \in \mathbb{Z})$ deux suites, respectivement q -dimensionnelle et l -dimensionnelle (i.e. $u_k \in \mathbb{R}^q$ et $y_k \in \mathbb{R}^l$, $\forall k \in \mathbb{Z}$), causalement liées par la relation d'état :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (3.1)$$

où $(x_k, k \in \mathbb{Z})$ est la suite n -dimensionnelle (i.e. $x_k \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{Z}$) des états et A, B, C, D sont des matrices telles que : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times q}$. Alors, ces deux suites vérifient aussi (relation entrée-sortie), $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$y_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i u_{k-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_{k-i} u_i \quad (3.2)$$

où $h = (h_i, i \in \mathbb{Z})$ est la fonction de réponse impulsionnelle du filtre linéaire causal défini par

(3.1), telle que $\forall i \in \mathbb{Z}$:

$$h_i = \left\{ \begin{array}{ll} CA^{i-1}B & \text{si } i > 0 \\ D & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{l \times q}. \quad (3.3)$$

Revenons maintenant à notre propos initial et supposons connue une suite finie $(h_i, i \in I_N)$, $I_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, de valeurs de h pour le système considéré. Notons qu'en pratique une telle suite s'obtient en mesurant simultanément l'entrée et la sortie du système en régime établi de manière à obtenir une suite de données d'entrée $(u_k, k \in I_N)$ et la suite correspondante des données de sortie $(y_k, k \in I_N)$, puis en appliquant une méthode inverse (opérant généralement sur (3.2)) à l'ensemble de ces données [68, 65].

La méthode de réalisation déterministe a alors pour objet la détermination d'un modèle d'état minimal de type (3.1) connaissant la suite $(h_i, i \in I_N)$. Rappelons qu'un modèle d'état est minimal s'il n'en existe pas un autre de dimension plus petite, où la dimension, encore appelée ordre du système, est celle de l'état, c'est-à-dire n ici. Il s'agit donc, à partir de la suite $(h_i, i \in I_N)$, de déterminer :

1. l'ordre n du système inconnu,
2. les matrices (A, B, C, D) de ce système.

A cette fin, pour i fixé, introduisons la matrice de Hankel des valeurs de h : $\mathcal{H}_{1|i}$, telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1|i} &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_i \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_i & h_{i+1} & \dots & h_{2i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times qi} \\ &= \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{i-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^iB \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{i-1}B & CA^iB & \dots & CA^{2i-2}B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

et observons que cette matrice se factorise sous la forme :

$$\mathcal{H}_{1|i} = \mathcal{O}_i \mathcal{C}_i \quad (3.5)$$

où :

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n} \quad ; \quad \mathcal{C}_i = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{i-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times qi} \quad (3.6)$$

avec \mathcal{O}_i et \mathcal{C}_i respectivement les matrices d'observabilité étendue et de contrôlabilité étendue d'ordre i , supposées de rang plein n dès que $i \geq n$. Dans (3.4), la notation $\mathcal{H}_{1|i}$ signifie que le

premier et le dernier élément de la première colonne de la matrice $\mathcal{H}_{l|l'}$ sont respectivement h_l et $h_{l'}$.

Observons ensuite, la factorisation (3.5) étant réalisée, que :

(a) A vérifie :

$$\underline{\mathcal{O}}_i A = \overline{\mathcal{O}}_i \quad (3.7)$$

où $\overline{\mathcal{O}}_i$ et $\underline{\mathcal{O}}_i$ sont les matrices obtenues en supprimant respectivement les l premières lignes et les l dernières lignes de \mathcal{O}_i ;

(b) B est la matrice des q premières colonnes de \mathcal{C}_i ;

(c) C est la matrice des l premières lignes de \mathcal{O}_i ;

(d) $D = h_0$.

Pour qu'une telle démarche soit utilisable, il faut disposer d'une façon simple de factoriser la matrice de Hankel $\mathcal{H}_{1|i}$. Une telle méthode est décrite ci-dessous :

1. On construit, pour i fixé, la matrice de Hankel des réponses impulsionnelles $\mathcal{H}_{1|i}$.
2. On cherche une factorisation de la matrice de Hankel $\mathcal{H}_{1|i}$ sous la forme (3.5). Une façon simple d'en obtenir une, et qui fournit en même temps l'ordre du système, est de procéder à une décomposition en valeurs singulières de $\mathcal{H}_{1|i}$:

$$\mathcal{H}_{1|i} = USV^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (3.8)$$

avec $U \in \mathbb{R}^{li \times li}$ et $V \in \mathbb{R}^{qi \times qi}$ des matrices orthonormales (i.e. $U^T U = I_{li}$ et $V^T V = I_{qi}$) et $S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, où les σ_i sont les valeurs singulières non nulles de $\mathcal{H}_{1|i}$, telles que : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Le nombre r de ces valeurs singulières, qui n'est autre que le rang de $\mathcal{H}_{1|i}$, correspond à l'ordre du système : $n = r$.

D'après (3.8), une factorisation possible de $\mathcal{H}_{1|i}$ sous la forme (3.5) est alors obtenue en prenant :

$$\mathcal{O}_i = U_1 S_1^{1/2} \quad ; \quad \mathcal{C}_i = S_1^{1/2} V_1^T \quad (3.9)$$

Cette solution n'est pas unique (voir annexe B).

3. La matrice \mathcal{O}_i étant déterminée, on peut calculer $\underline{\mathcal{O}}_i$ et $\overline{\mathcal{O}}_i$ et par suite en déduire A en résolvant (3.7) au sens des moindres carrés. Notant \dagger le symbole de pseudo-inverse de Moore-Penrose [33], on obtient :

$$A = \underline{\mathcal{O}}_i^\dagger \overline{\mathcal{O}}_i \quad (3.10)$$

où $\underline{\mathcal{O}}_i^\dagger$ peut se calculer explicitement. En effet, considérons la décomposition en valeurs singulières de $\underline{\mathcal{O}}_i$:

$$\underline{\mathcal{O}}_i = U \Sigma V = U \begin{bmatrix} \Sigma_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V \quad (3.11)$$

avec \mathcal{U} et \mathcal{V} des matrices orthonormales et Σ_p la matrice diagonale des valeurs singulières non nulles de $\underline{\mathcal{Q}}_i$, ordonnées par ordre décroissant. Alors :

$$\underline{\mathcal{Q}}_i^\dagger = \mathcal{V}\Sigma^\dagger\mathcal{U}^T \quad ; \quad \Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

4. \mathcal{O}_i et \mathcal{C}_i étant connues, les matrices B et C se déduisent directement des points (b) et (c) précédents. Quant à la matrice D , d'après le point (d), elle est connue dès le départ par la donnée de h_0 .

Notons pour terminer que la solution de ce problème est très dépendante du choix du paramètre i et que l'on ne dispose malheureusement pas pour ce paramètre d'un critère de choix objectif. De plus, la connaissance de h limitée à la donnée d'un nombre fini de ses valeurs h_i ne permet pas d'obtenir un modèle d'état minimal.

3.2.2 Identification et représentation markovienne

Le point de départ est la suite des observations $\{y_k; k \in I_N\}$, supposées générées par un modèle du type (1.28)-(1.29), inconnu. Le problème d'identification est celui de déterminer les matrices (A, C, G, R_0) d'un modèle d'état minimal ayant généré ces données. C'est celui qui nous intéresse ici.

Le problème de représentation markovienne consiste, l'identification étant effectuée, à déterminer l'ensemble des matrices $(\Sigma > 0, Q, R, S)$ des modèles d'état minimaux aptes à générer ces données. Notons que ce problème n'est pas crucial ici. Toutefois, on ne peut l'ignorer complètement. En effet, les algorithmes d'identification proposés dans les sections suivantes procèdent tous, soit explicitement, soit implicitement dans la méthode de sous-espaces, à l'estimation des suites des corrélations des observations. Ces suites doivent être des suites positives réelles (lemme positif réel de Faurre [31]), ce qui n'est souvent pas vérifié en pratique. Un travail complémentaire est alors nécessaire. On peut à ce sujet consulter par exemple la référence [71].

3.2.3 Méthode de réalisation stochastique

Nous considérons maintenant le cas où la suite expérimentale $\{y_k, k \in I_N\}$ est assimilée à une trajectoire (i.e. une réalisation) restreinte à I_N d'un processus stationnaire l -dimensionnel à temps discret $(Y_k, k \in \mathbb{Z})$ admettant une représentation d'état de la forme (1.28)-(1.29). On cherche alors classiquement à déterminer les paramètres (A, C, Q, R, S) de cette représentation. Notons tout de suite que la donnée d'une suite finie de mesures de la réponse ne permet pas d'identifier de façon unique le modèle (1.28)-(1.29) et *a fortiori* de trouver la solution d'ordre minimal.

Dans tout ce qui suit, outre sa propriété de stationnarité, le processus Y sera supposé ergodique. Posons :

$$G = \mathbb{E}[X_{k+1}Y_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times l} \quad ; \quad \Sigma = \mathbb{E}[X_k X_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad R_i = \mathbb{E}[Y_{k+i} Y_k^T] \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

Un simple calcul à partir de (1.28)-(1.29) montre que :

$$G = A\Sigma C^T + S \quad ; \quad \Sigma = A\Sigma A^T + Q \quad ; \quad R_0 = C\Sigma C^T + R \quad (3.13)$$

avec, $\forall i \in \mathbb{Z}$:

$$R_i = \begin{cases} CA^{i-1}G & si \quad i > 0 \\ R_0 & si \quad i = 0 \\ G^T(A^{-i-1})^T C^T & si \quad i < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Il est facile de voir que l'on aura unicité de (A, C, G, R_0) , et donc de (A, C, G, R_i) , à une similitude près (i.e. à un changement de base de l'espace d'état près), mais que l'on n'aura pas unicité de Σ ni des caractéristiques (Q, R, S) des bruits. Toutefois, compte tenu de l'objectif visé (identification modale) cela n'a pas d'importance. La méthode de réalisation stochastique consiste alors, à partir de la suite finie $(y_k, k \in I_N)$, à déterminer :

1. l'ordre n du système,
2. les paramètres (A, C, G, R_0) du système inconnu.

Cette méthode est basée sur l'idée suivante. Comparons les expressions (3.3) et (3.14). Nous voyons que pour $i \geq 0$ ces deux expressions coïncident si $q = l$, $B = G$, $D = R_0$. Autrement dit, sur \mathbb{N} (i.e. $\forall i \in \mathbb{N}$), la fonction de covariance $R_{YY} = (R_i, i \in \mathbb{Z})$ de la réponse stationnaire $Y = (Y_k, k \in \mathbb{Z})$ de (1.28) peut être assimilée à la fonction de réponse impulsionnelle d'un modèle d'état déterministe de la forme (3.1) dont l'entrée est l -dimensionnelle ($q = l$) et dont les coefficients sont $(A, C, B = G, D = R_0)$. Par conséquent, la méthode de réalisation déterministe classique de Ho et Kalman [38] présentée dans la section précédente peut s'appliquer pour calculer les paramètres inconnus (A, C, G, R_0) . C'est cette extension au cas stochastique de la méthode de Ho et Kalman qui a donné naissance à la méthode de réalisation stochastique [3], où les suites de valeurs de fonctions de réponse impulsionnelle sont remplacées par des suites de valeurs de fonctions de covariance.

Le point de départ de cette méthode est donc, pour $i > 0$ fixé, la construction de la matrice de Hankel des covariances : $\mathcal{R}_{1|i}$, telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1|i} &= \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_i \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_i & R_{i+1} & \dots & R_{2i-1} \end{bmatrix} \in R^{li \times li} \\ &= \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{i-1}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^iG \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{i-1}G & CA^iG & \dots & CA^{2i-2}G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où la notation $\mathcal{R}_{l|l'}$ signifie que le premier et le dernier élément de la première colonne de la matrice $\mathcal{R}_{l|l'}$ sont respectivement R_l et $R_{l'}$.

Il est alors aisé de voir que $\mathcal{R}_{1|i}$ admet la factorisation :

$$\mathcal{R}_{1|i} = \mathcal{O}_i \mathcal{C}_i \quad (3.16)$$

où les matrices \mathcal{O}_i et \mathcal{C}_i sont données par les expressions (3.6), avec $B = G$ et $q = l$.

Les matrices (A, C, G, R_0) sont alors déterminées de la même manière que les matrices (A, B, C, D) dans le cas déterministe.

En pratique, il faudra estimer les covariances R_i à partir de la suite expérimentale $(y_k, k \in I_N)$. Pour cela, on peut utiliser l'estimateur empirique classique de la covariance, qui opère directement sur la suite expérimentale, ou l'estimateur basé sur la méthode du périodogramme, qui consiste à estimer d'abord la densité spectrale de puissance de la réponse à partir de la suite $(y_k, k \in I_N)$ puis à en déduire la fonction de covariance par transformée de Fourier inverse [66], ou enfin la méthode du décrément aléatoire que nous présenterons plus loin. Plusieurs comparaisons ont été menées entre ces différentes approches [15] qui montrent que la méthode du décrément aléatoire est la plus performante, surtout en temps de calcul.

Notons que dans la littérature [1, 37], les auteurs préconisent d'appliquer la décomposition en valeurs singulières non pas à $\mathcal{R}_{1|i}$ mais à $W_1 \mathcal{R}_{1|i} W_2$, où $W_1 \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ sont des matrices de pondération inversibles.

Différents choix de ces matrices (que l'on ne maîtrise pas toujours) donnent lieu à différents algorithmes d'identification. Deux choix particuliers des ces matrices permettent d'obtenir la méthode BR (Balanced Realisation) et la méthode CVA (Canonical Variate Analysis) :

Balanced realisation (BR) : Cette méthode correspond au choix $W_1 = I_{l_i}$ et $W_2 = I_{l_i}$.

Canonical variate analysis (CVA) : Définissons les matrices de Toeplitz suivantes :

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} R_0 & R_1^T & \dots & R_{i-1}^T \\ R_1 & R_0 & \dots & R_{i-2}^T \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{i-1} & R_{i-2} & \dots & R_0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}^- = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{i-1} \\ R_1^T & R_0 & \dots & R_{i-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{i-1}^T & R_{i-2}^T & \dots & R_0 \end{bmatrix}$$

Soient \mathcal{L}^+ et \mathcal{L}^- telles que \mathcal{R}^+ et \mathcal{R}^- puissent se factoriser comme suit :

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{L}^+ (\mathcal{L}^+)^T \quad ; \quad \mathcal{R}^- = \mathcal{L}^- (\mathcal{L}^-)^T$$

(Factorisation de Cholesky).

La méthode CVA correspond ainsi au choix suivant :

$$W_1 = (\mathcal{L}^+)^{-1} \quad \text{et} \quad W_2 = (\mathcal{L}^-)^{-1}$$

Avec ces notations, les valeurs singulières correspondent aux angles principaux. Dans cette méthode, les modes qui sont moins bien excités dans les conditions opérationnelles peuvent être les mieux identifiés.

Il convient, pour être complet sur cette méthode, de préciser ce que l'on entend par *réalisation équilibrée* (Balanced realisation). Pour cela, nous devons introduire les notions de *filtre de*

Kalman en avant et de filtre de Kalman en arrière.

La théorie du filtre de Kalman suppose connues les caractéristiques du modèle (1.28) ainsi qu'une réalisation de la réponse et permet, à partir de ces données, d'estimer de façon optimale et récursive la suite des états. Aux données (A, C, G, R_0) et $(y_k, k \in I_N)$, on peut en fait associer deux filtres de Kalman :

(a) Le filtre de Kalman en avant [45] défini par le système :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + K^f f_k \\ y_k &= C\hat{x}_k + f_k \end{cases} \quad (3.17)$$

où $(f_k, k \in I_N)$, la suite des innovations, est une réalisation restreinte à I_N d'un bruit blanc gaussien discret $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $\mathbb{E}[\mathcal{F}_k \mathcal{F}_k^T] = R_0 - CPC^T$, K^f est le gain de Kalman et $(\hat{x}_k, k \in I_N)$ est la suite correspondante des estimées de Kalman. C'est une réalisation restreinte à I_N d'un processus gaussien stationnaire centré discret $(\hat{X}_k, k \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $P = \mathbb{E}[\hat{X}_k \hat{X}_k^T]$ solution de l'équation de Ricatti en avant :

$$P = APA^T + (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1}(G - APC^T)^T \quad (3.18)$$

La solution de l'équation de Ricatti (3.18) peut être obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres général :

$$\begin{bmatrix} A^T - C^T R_0^{-1} G^T & 0 \\ -G R_0^{-1} G^T & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -C^T R_0^{-1} C \\ 0 & A - G R_0^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \cdot \Lambda$$

et en posant $P = W_2 W_1^{-1}$, Λ contient les n valeurs propres stables du problème aux valeurs propres généralisées.

(b) Le filtre de Kalman en arrière [43] défini par le système :

$$\begin{cases} \hat{z}_{k-1} &= A^T \hat{z}_k + K^b b_k \\ y_k &= G^T \hat{z}_k + b_k \end{cases} \quad (3.19)$$

où $(b_k, k \in I_N)$ est une réalisation restreinte à I_N d'un bruit blanc gaussien discret $(\mathcal{B}_k, k \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $\mathbb{E}[\mathcal{B}_k \mathcal{B}_k^T] = R_0 - G^T N G$, K^b est le gain de Kalman, et $(\hat{z}_k, k \in I_N)$, suite correspondante des estimées de Kalman, est une réalisation restreinte à I_N d'un processus gaussien stationnaire centré discret $(\hat{Z}_k, k \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $N = \mathbb{E}[\hat{Z}_k \hat{Z}_k^T]$ solution de l'équation de Ricatti en arrière :

$$N = A^T N A + (C^T - A^T N G)(R_0 - G^T N G)^{-1}(C^T - A^T N G)^T \quad (3.20)$$

Cette équation peut être résolu de la même manière que l'équation de Ricatti en avant.

Observons que tous ces calculs dépendent du choix d'une base de l'espace d'état. Si l'on trouve une base pour laquelle P et N sont diagonales et $P = N$, alors on dit que la réalisation (A, C, G, R_0) est équilibrée (balanced).

Remarque 1 Notons ici que les expressions (3.18) et (3.20) et donc aussi des gains de Kalman ne sont pas celles que l'on rencontre le plus couramment dans la littérature. Ces expressions sont obtenues en opérant la transformation suivante : $\tilde{P} = \Sigma - P$, où $\tilde{P} = \mathbb{E}[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T]$. Pour plus de détails, cf. annexe B

3.3 Vers les méthodes de sous-espaces

L'idée au coeur des méthodes de sous-espaces est la suivante. Soit $(y_k, k \in \mathbb{Z})$ une trajectoire de la réponse stationnaire $(Y_k, k \in \mathbb{Z})$ de (1.28). Par ergodicité supposée de ce processus, $\forall i \in \mathbb{Z}$:

$$R_i = \mathbb{E}[Y_{k+i}Y_k^T] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i}y_k^T \quad (3.21)$$

la convergence ayant lieu en plusieurs sens, en particulier presque-sûrement.

Pour N assez grand, on peut donc considérer que :

$$R_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i}y_k^T \quad (3.22)$$

Ceci traduit le fait que pour un grand nombre de données, la moyenne d'ensemble (ou moyenne probabiliste) peut être remplacée par la moyenne trajectorielle (ou moyenne sur les réalisations).

En d'autres termes, la géométrie euclidienne de l'espace des suites finies de longueur N d'un échantillon des observations est très proche de la géométrie des covariances de la suite des observations théoriques issues du modèle (le facteur $\frac{1}{N}$ ne change pas la géométrie mais simplement renormalise les distances).

Les relations particulières des statistiques du second ordre (meilleure estimation du futur par le passé, qui se ramène à une régression linéaire puisque nous sommes en contexte gaussien) qui découlent du fait que les observations sont issues du modèle d'état (1.28) vont donc se refléter dans la structure géométrique euclidienne des espaces engendrés par les suites de données, et en particulier dans les directions et angles principaux entre des blocs de données "passées" et "futurs". Cette observation est à la base des méthodes de sous-espaces et peut être exploitée de plusieurs façons. Les calculs se faisant dans une base de l'espace d'état, les divers choix possibles de cette base (qui ne sont pas toujours maîtrisés) conduisent à des algorithmes différents.

Ces remarques amènent en outre à utiliser des algorithmes standards de géométrie qui bénéficient d'implémentations optimisées dans les grands codes de calcul : algorithmes de projection, recherche d'angles et directions principales via les décompositions en valeurs singulières et les factorisations QR.

Une caractéristique des suites issues de modèles d'état tels que (1.28) est que le futur ne dépend que d'un nombre fini de données passées (caractère markovien de l'état). Les relations géométriques entre sous-espaces de données futures et passées vont alors être recherchées en fixant un entier i , paramètre à la fois crucial et de choix délicat en pratique, qui sera la durée de mémoire au sein des données. Ce paramètre doit impérativement être supérieur à la dimension n de l'état (théoriquement, il devrait valoir n , mais en pratique c'est un peu différent). Il ne doit pas être choisi trop grand non plus et doit rester petit vis-à-vis du nombre N d'observations.

3.4 Principe des méthodes de sous-espaces

Comme nous venons de le voir, l'idée à la base des méthodes de sous-espaces est la prédiction de données futures à partir de données passées. Précisons ce problème. Connaissant des observations passées de Y , regroupées dans un vecteur Y_p , on veut obtenir une prédiction optimale d'observations futures de ce même processus, regroupées dans un vecteur Y_f . Or, nous sommes ici dans un contexte gaussien car Y est gaussien, stationnaire, centré et par conséquent ses observations vectorielles Y_p et Y_f sont des v.a. gaussiennes centrées. Dans ces conditions, on sait que la solution du problème est donnée par $\hat{Y}_f = \mathbb{E}[Y_f|Y_p] = L_p Y_p$, où $\mathbb{E}[Y_f|Y_p]$ est l'espérance conditionnelle de Y_f sachant Y_p et L_p est un opérateur linéaire choisi de telle sorte que $Y_f - \hat{Y}_f$ soit minimal en moyenne quadratique relativement à loi de Y . On est ainsi ramené à un problème de régression linéaire. Par ailleurs, utilisant l'interprétation géométrique de l'espérance conditionnelle, \hat{Y}_f peut aussi être définie comme la projection orthogonale de Y_f sur le sous-espace fermé \mathcal{H}^{Y_p} engendré par Y_p , ce que l'on note :

$$\hat{Y}_f = \Pi_{\mathcal{H}^{Y_p}}(Y_f) \quad (3.23)$$

C'est sur cette formule que s'appuie les méthodes de sous-espaces. Notons qu'en vertu de l'observation faite dans le paragraphe précédent, les projections dans les espaces L^2 relatifs à la loi du processus Y seront remplacées par les projections dans l'espace euclidien des suites d'observations de longueur finie, la norme étant pondérée par l'inverse de cette longueur. En fait, dans les méthodes de sous-espaces, les données passées et futures sont connues et on cherche à identifier le modèle à partir de (3.23), moyennant une restructuration judicieuse de la formulation et l'emploi d'algorithmes puissants d'algèbre linéaire, tels les algorithmes de factorisation QR et de décomposition en valeurs singulières des matrices.

Comme nous avons pu le constater, les algorithmes d'identification des méthodes de sous-espaces sont aussi basées sur des concepts géométriques : projections orthogonales et obliques, directions et angles principaux. Ces concepts sont présentés dans l'annexe B.

Revenons maintenant aux différentes étapes des méthodes de sous-espaces. La première étape consiste à choisir parmi les données connues, à savoir la famille $(y_k, k \in I_N)$, celles qui joueront le rôle de données passées et celles qui seront considérées comme les données futures. Pour cela, on se donne un entier i compris entre n et $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, puis, posant $p^j = (y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+i-1})$ et $f^j = (y_{j+i}, y_{j+i+1}, \dots, y_{j+2i-1})$, $\forall j \in J_{N-2i+1} = \{0, 1, \dots, N-2i\}$, on extrait de la famille $(y_k, k \in I_N)$ les $N-2i+1$ couples $((p^j, f^j), j \in J_{N-2i+1})$. Dans chacun de ces couples, le premier élément p^j est alors considéré comme une famille d'observées passées et le second élément f^j comme une famille d'observées futures. Mis à part y_0 et y_1 qui seront toujours des données passées et y_{N-2}, y_{N-1} qui seront toujours des données futures (car $i \geq n > 1$), chaque y_k joue ainsi tour à tour (et plusieurs fois suivant la valeur de i) le rôle de donnée passée et de donnée future. Cette discrimination passé/futur dans les données est ensuite organisée dans une matrice de Hankel $Y_{0|2i-1} \in \mathbb{R}^{2li \times (N-2i+1)}$, appelée *matrice de Hankel des observations*, construite comme suit :

$$Y_{0|2i-1} = \vartheta_i \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{N-2i} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-2i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{N-i-1} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{N-i} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{N-i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\mathcal{Y}_p \\ {}^i\mathcal{Y}_f \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

avec $\vartheta_i = 1/\sqrt{N-2i+1}$ et où la notation $Y_{ll'}$ signifie que le premier et le dernier élément de la première colonne de la matrice $Y_{ll'}$ sont y_l et $y_{l'}$ respectivement, les indices p et f désignant quant eux les abréviations de "passé" et "futur". On peut reconnaître dans la j -ème colonne de $Y_{0|2i-1}$, au coefficient ϑ_i près, les éléments empilés du couple (p^j, f^j) . Le paramètre de durée de mémoire i , tel que $1 < n \leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, doit être pris très petit devant N [71]. Son choix est délicat et reste très expérimental ; c'est un "bouton de réglage" de la méthode.

Compte tenu de cette structuration des données et de (3.23), on montre alors que la solution du problème d'identification est donnée par la projection orthogonale de l'espace vectoriel engendré par les lignes de ${}^i\mathcal{Y}_f$ sur l'espace vectoriel engendré par les lignes de ${}^i\mathcal{Y}_p$ [71]. Cette projection s'écrit :

$$\mathcal{P}_i = {}^i\mathcal{Y}_f {}^i\mathcal{Y}_p^T ({}^i\mathcal{Y}_p {}^i\mathcal{Y}_p^T)^\dagger {}^i\mathcal{Y}_p \in \mathbb{R}^{li \times (N-2i+1)} \quad (3.25)$$

On montre également, toujours dans [71], que \mathcal{P}_i admet la factorisation :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{O}_i \hat{\mathcal{X}}_i \quad (3.26)$$

avec $\mathcal{O}_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$ la matrice d'observabilité étendue et $\hat{\mathcal{X}}_i \in \mathbb{R}^{n \times (N-2i+1)}$ la matrice ayant pour colonnes les $(N-2i+1)$ estimées Kalman-optimales $\{\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{N-i}\}$ associées aux $(N-2i+1)$ données expérimentales $\{y_i, y_{i+1}, \dots, y_{N-i}\}$ à travers les équations du filtre de Kalman en avant (3.17) :

$$\hat{\mathcal{X}}_i = [\hat{x}_i | \hat{x}_{i+1} | \dots | \hat{x}_{N-i}] \quad (3.27)$$

Ces matrices sont calculées comme suit. La matrice \mathcal{P}_i ayant été calculée par (3.25), on effectue sa décomposition en valeurs singulières :

$$\mathcal{P}_i = USV^T = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (3.28)$$

avec $U \in \mathbb{R}^{li \times li}$ et $V \in \mathbb{R}^{(N-2i+1) \times (N-2i+1)}$ des matrices orthonormales et $S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, où les σ_j sont les valeurs singulières non nulles de \mathcal{P}_i , telles que : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Un choix possible du couple $(\mathcal{O}_i, \hat{\mathcal{X}}_i)$ est alors :

$$\mathcal{O}_i = U_1 S_1^{1/2} \quad ; \quad \hat{\mathcal{X}}_i = S_1^{1/2} V_1^T \quad (3.29)$$

Notons que d'autres choix peuvent être effectués (voir annexe B).

A ce stade, on dispose, du moins en théorie, de l'ordre n du modèle. En effet, n n'est autre que le nombre de valeurs singulières non nulles de S (donc le rang de \mathcal{P}_i), c'est-à-dire $r : n = r$. On dispose également de la matrice d'observabilité étendue et de la suite des états $\hat{\mathcal{X}}_i$. Le problème d'identification étant celui de la détermination des matrices (A, C, G, R_0) , un premier algorithme consiste à utiliser la matrice d'observabilité. Les matrices A et C sont déterminées de la même manière que dans la méthode de réalisation stochastique. Compte tenu de la propriété d'ergodicité (3.21), on observe que :

$$R_i = Y_{i|i} Y_{0|0}^T \quad (3.30)$$

en particulier, on a : $R_0 = Y_{0|0} Y_{0|0}^T$.

avec $Y_{i|i} = [y_i | y_{i+1} | \dots | y_{N-i}] \in \mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}$ et $Y_{0|0} = [y_0 | y_1 | \dots | y_{N-2i}] \in \mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}$.

De cette observation, on montre facilement que :

$$\mathcal{R}_{1|i} = {}^i \mathcal{Y}_f {}^i \mathcal{Y}_p^T \quad (3.31)$$

et, utilisant (3.16), la matrice de contrôlabilité étendue s'écrit :

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{O}_i^\dagger \mathcal{R}_{1|i} \quad (3.32)$$

Dans ce cas G est la matrice des l premières colonnes de \mathcal{C}_i .

Le deuxième algorithme qui permet de déterminer les matrices (A, C, G, R_0) utilise la suite des états du filtre de Kalman. Cet algorithme est intéressant car il permet de résoudre le problème de markovianisation qui consiste, l'identification étant effectuée, à déterminer les matrices $(\Sigma > 0, Q, R, S)$. Les étapes de cet algorithme sont présentées ci-dessous.

De (3.26) on tire :

$$\hat{\mathcal{X}}_i = \mathcal{O}_i^\dagger \mathcal{P}_i \quad (3.33)$$

Posant :

$$\hat{\mathcal{X}}_{i+1} = [\hat{x}_{i+1} | \hat{x}_{i+2} | \dots | \hat{x}_{N-i+1}] \in \mathbb{R}^{n \times (N-2i+1)} \quad (3.34)$$

et, de la même manière que précédemment, on montre (cf. [71]) que cette matrice s'obtient par :

$$\hat{\mathcal{X}}_{i+1} = \mathcal{O}_{i-1}^\dagger \mathcal{P}_{i-1} \quad (3.35)$$

avec $\mathcal{P}_{i-1} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times (N-2i+1)}$ et $\mathcal{O}_{i-1} = \underline{\mathcal{O}}_i \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$, où $\underline{\mathcal{O}}_i$ est la matrice obtenue en supprimant les l dernières lignes \mathcal{O}_i .

Notons que, par construction, les estimées de Kalman obtenues par la procédure ci-dessus vérifient, $\forall j \in K_{N-2i+1} = \{i, i+1, \dots, N-i\}$, et à une similitude près, les équations du filtre de Kalman en avant :

$$\begin{cases} \hat{x}_{j+1} &= A \hat{x}_j + K^f f_j \\ y_j &= C \hat{x}_j + f_j \end{cases} \quad (3.36)$$

où $(f_j, j \in K_{N-2i+1})$ est une réalisation restreinte à K_{N-2i+1} d'un bruit blanc gaussien discret $(\mathcal{F}_j, j \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $\mathbb{E}[\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_j^T] = R_0 - CPC^T$, K^f est le gain de Kalman donné par :

$$K^f = (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1} \quad (3.37)$$

et $(\hat{x}_j, j \in K_{N-2i+1})$, suite des estimées de Kalman, est une réalisation restreinte à K_{N-2i+1} d'un processus gaussien stationnaire centré discret $(\hat{X}_j, j \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $P = \mathbb{E}[\hat{X}_j \hat{X}_j^T]$ solution de l'équation de Ricatti :

$$P = APA^T + (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1}(G - APC^T)^T \quad (3.38)$$

avec R_0 et G donnés par (3.13).

Dans la théorie classique du filtre de Kalman, on suppose connues les caractéristiques du modèle (1.28) ainsi qu'une réalisation de la réponse et on cherche à estimer de façon recursive et optimale la suite des états.

On voit donc apparaître ici une particularité des méthodes de sous-espaces : on obtient des estimées de Kalman de l'état avant de connaître les paramètres du modèle, lesquels vont précisément être déduits de ces estimées. En effet, à partir de (3.36), et après quelques manipulations détaillées dans [71], on obtient :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_i + \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

avec $Y_{i|i} = [y_i | y_{i+1} | \dots | y_{N-i}]$, $\hat{\mathcal{X}}_i$ et $\hat{\mathcal{X}}_{i+1}$ donnés par (3.27)-(3.29)-(3.33) et (3.34)-(3.35), et u_i, v_i des résidus matriciels, éléments de $\mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}$ et $\mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}$ respectivement. Tenant compte de ce que $\hat{\mathcal{X}}_i, \hat{\mathcal{X}}_{i+1}$ et $Y_{i|i}$ sont connus et que $\hat{\mathcal{X}}_i$ et $[u_i^T v_i^T]^T$ sont des réalisations de v.a. matricielles gaussiennes centrées indépendantes, la résolution de (3.39) au sens des moindres carrés permet alors d'obtenir les matrices inconnues A et C :

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_i^\dagger \quad (3.40)$$

Les résidus matriciels sont ensuite calculés en revenant à l'équation (3.39), dans laquelle les matrices A et C sont maintenant connues, et en résolvant cette équation en u_i, v_i .

Connaissant ces résidus, on peut alors montrer [71] que, pour i suffisamment grand, la variance matricielle (1.29) du modèle (1.28) peut être approchée par :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \approx \frac{1}{N-2i+1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^T & v_i^T \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Enfin, la connaissance de (A, C, Q, R, S) permet de déterminer (G, Σ, R_0) par (3.13) et, éventuellement, les caractéristiques K^f et P du modèle de Kalman (3.36), par (3.37) et (3.38).

Notons que certains auteurs [69, 71] préconisent d'appliquer la décomposition en valeurs singulières non pas à \mathcal{P}_i , comme en (3.28), mais à $W_1 \mathcal{P}_i W_2$, où $W_1 \in \mathbb{R}^{li \times li}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{(N-2i+1) \times (N-2i+1)}$ sont des matrices de pondération choisies par l'utilisateur et vérifiant : W_1 de rang plein,

$\text{rang}({}^i\mathcal{Y}_p W_2) = \text{rang}({}^i\mathcal{Y}_p)$. On obtient alors pour $W_1 \mathcal{P}_i W_2$ une factorisation du même type que (3.28) :

$$W_1 \mathcal{P}_i W_2 = U S V^T = U_1 S_1 V_1^T \quad (3.42)$$

qui permet d'obtenir \mathcal{O}_i et $\hat{\mathcal{X}}_i$ sous la forme :

$$\mathcal{O}_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} \quad ; \quad \hat{\mathcal{X}}_i W_2 = S_1^{1/2} V_1^T \quad (3.43)$$

Cependant, l'introduction de ces matrices de pondération pose le problème de leur choix, qui n'est pas évident. C'est pourquoi, très souvent, elles sont prises égales à l'unité, choix correspondant à la version dite UPC (Unweighted Principal Component) de les méthodes de sous-espaces.

Finalement, nous obtenons l'algorithme suivant :

1. Calcul des projections :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= {}^i\mathcal{Y}_f / {}^i\mathcal{Y}_p \\ \mathcal{P}_{i-1} &= {}^i\mathcal{Y}_f^- / {}^i\mathcal{Y}_p^+ \end{aligned}$$

2. Décomposition en valeurs singulières :

$$W_1 \mathcal{P}_i W_2 = U S V^T$$

3. Détermination de l'ordre du système en inspectant les valeurs singulières dans S ; ensuite partition de la décomposition en valeurs singulières dans le but d'obtenir U_1 et S_1 .

4. Détermination de \mathcal{O}_i et \mathcal{O}_{i-1} par :

$$\begin{aligned} - \mathcal{O}_i &= W_1^{-1} U_1 S_1^{\frac{1}{2}} \\ - \mathcal{O}_{i-1} &= \underline{\mathcal{O}}_i \end{aligned}$$

5. Détermination de $\hat{\mathcal{X}}_i$ et $\hat{\mathcal{X}}_{i+1}$ par :

$$\begin{aligned} - \hat{\mathcal{X}}_i &= \mathcal{O}_i^\dagger \mathcal{P}_i \\ - \hat{\mathcal{X}}_{i+1} &= \mathcal{O}_{i-1}^\dagger \mathcal{P}_{i-1} \end{aligned}$$

6. Détermination des matrices A et C en résolvant :

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} \hat{\mathcal{X}}_i^\dagger$$

7. Détermination des matrices Q , R et S de :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \approx \frac{1}{N - 2i + 1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^T & v_i^T \end{bmatrix}$$

8. Détermination de Σ , G et R_0 par :

$$\begin{aligned} \Sigma &= A\Sigma A^T + Q \\ G &= A\Sigma C^T + S \\ R_0 &= C\Sigma C^T + R \end{aligned}$$

9. Détermination des matrices P et K en résolvant l'équation de Riccati :

$$\begin{aligned} P &= APA^T + (G - APC^T)(\Lambda_0 - CPC^T)^{-1}(G - APC^T)^T \\ K^f &= (G - APC^T)(\Lambda_0 - CPC^T)^{-1} \end{aligned}$$

L'identification des paramètres du modèle étant faite, la dernière étape consiste à estimer la qualité du modèle identifié connaissant les données. Plusieurs points de vue peuvent être considérés pour la mise en place de cette procédure de validation. En général, elle consiste à vérifier que l'erreur de prédiction résiduelle est effectivement un bruit blanc (ce sera notre cas).

Pour illustrer cette étape, nous considérons les équations du filtre de Kalman en avant définies par :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K^f f_k \\ y_k = C\hat{x}_k + f_k \end{cases} \quad (3.44)$$

où les matrices du modèle sont connues. A partir de la deuxième équation de (3.44) on tire :

$$f_k = y_k - C\hat{x}_k = y_k - \hat{y}_k \quad (3.45)$$

où $\hat{y}_k = C\hat{x}_k$ est la prédiction à un pas (ou prédiction d'horizon un). L'équation (3.45) définit l'erreur résiduelle de prédiction.

En combinant les équations (3.44) et (3.45) on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = (A - K^f C)\hat{x}_k + K^f y_k \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \end{cases} \quad (3.46)$$

La simulation du modèle (3.46), connaissant les matrices du système et la suite d'observation $\{y_k, \in I_N\}$, permet non seulement d'obtenir une prédiction de l'état mais aussi une prédiction des sorties \hat{y}_k . Dans ce cas on peut évaluer l'erreur de prédiction définie par (3.45). On définit alors l'erreur de prédiction totale par :

$$\epsilon = \frac{1}{l} \sum_{q=1}^l \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [y_{k,q} - \hat{y}_{k,q}]^2}{\sum_{k=1}^N [y_{k,q}]^2}} \quad (3.47)$$

avec $y_{k,q}$ la $q^{\text{ième}}$ sortie à l'instant k . Ce critère a été introduit par Peter Van O. et Bart De Moor [71].

Si l'ordre du système a été choisi correctement et si le bruit était un bruit blanc, alors les paramètres ont été estimés correctement et l'erreur de prédiction résiduelle sera un bruit blanc.

Par contre, si l'erreur de prédiction résiduelle n'est pas un bruit blanc, on peut conclure que l'estimation paramétrique obtenue n'est pas correcte soit parce que l'ordre choisi n'est pas le bon, soit parce que l'hypothèse faite sur le bruit n'est pas la bonne.

La validation du modèle peut se faire aussi par une analyse du spectre. En effet, à partir du modèle identifié, il est possible de déterminer le spectre à partir de l'une ou l'autre des expressions analytiques suivantes :

$$S_{yy}(w) = [C(zI_n - A)^{-1}G + R_0 + G^T(z^{-1}I_n - A^T)^{-1}C^T]_{z=e^{jw\Delta t}} \quad (3.48)$$

$$S_{yy}(w) = [C(zI_n - A)^{-1}K^f + I_l] \times R \times [I_l + (K^f)^T(z^{-1}I_n - A^T)^{-1}C^T]_{z=e^{jw\Delta t}} \quad (3.49)$$

où $S_{yy}(w) \in \mathbf{C}^{l \times l}$ est la matrice spectrale des données de sortie ; w (dans $z = e^{jw\Delta t}$) sont les fréquences en [rd/s] à partir desquelles on évalue les fonctions matricielles (3.48) et (3.49). Les éléments diagonaux de $S_{yy}(w)$, qui sont réels, sont les densités spectrales de puissance, tandis que les éléments extra-diagonaux (qui eux sont complexes) sont les inter-spectres. On peut alors comparer le spectre estimé à partir des mesures et celui estimé à partir de l'une des expressions ci-dessus.

Il convient également de noter la difficulté de déterminer numériquement l'ordre n du modèle. En effet, nous avons vu que n correspondait au nombre de valeurs singulières non nulles de \mathcal{P}_i (ou de $W_1\mathcal{P}_iW_2$ si les pondérations sont utilisées, ce nombre étant indépendant du choix des poids). Or, en pratique, pour des raisons d'arrondis numériques et d'imprécision sur les mesures, il est très difficile de détecter numériquement les valeurs singulières nulles et donc l'ordre n . Il faut alors recourir à des procédés de substitution, dont le plus courant consiste à choisir pour n l'indice correspondant au plus grand saut entre deux valeurs singulières consécutives. Ce procédé doit toutefois être appliqué avec prudence et n'est pas toujours probant. Pour les problèmes d'identification modale qui nous concernent ici, où le nombre de modes significatifs est plus important que l'ordre du modèle, il est préférable d'utiliser la méthode du diagramme de stabilisation [37, 60] qui est un procédé sûr ayant largement fait ses preuves [23, ?]. Il est à noter que cette remarque vaut également pour la détermination de l'ordre dans la méthode de réalisation stochastique.

Notons pour terminer que les performances numériques de la méthode sont grandement améliorées par l'emploi d'une décomposition QR de la matrice de Hankel des sorties $Y_{0|2i-1}$. Le paragraphe suivant donne une formulation algorithmique standard de la méthode incluant cette décomposition.

3.4.1 Mise en oeuvre des méthodes

On trouve dans la littérature plusieurs versions des méthodes de sous-espaces, qui se distinguent par le choix des pondérations W_1 et W_2 et des algorithmes utilisés dans la mise en

oeuvre pratique de la méthode [71, 1, 37]. Cependant, toutes ces versions ont en commun d'utiliser une décomposition QR de la matrice de Hankel $Y_{0|2i-1}$.

Procédons à une telle décomposition. Nous obtenons :

$$Y_{0|2i-1} = \mathcal{R}Q^T \quad (3.50)$$

où $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{2li \times 2li}$ est une matrice triangulaire inférieure et $Q^T \in \mathbb{R}^{2li \times (N-2i+1)}$ une matrice orthonormale. Cette relation peut encore s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

où :

$$\begin{aligned} Y_{0|i-1} &\in \mathbb{R}^{li \times (N-2i+1)}; & Y_{i|i} &\in \mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}; & Y_{i+1|2i-1} &\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times (N-2i+1)} \\ R_{11} &\in \mathbb{R}^{li \times li}; & R_{21} &\in \mathbb{R}^{l \times li}; & R_{31} &\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times li} \\ R_{22} &\in \mathbb{R}^{l \times l}; & R_{32} &\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l}; & R_{33} &\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l(i-1)} \\ Q_1^T &\in \mathbb{R}^{li \times (N-2i+1)}; & Q_2^T &\in \mathbb{R}^{l \times (N-2i+1)}; & Q_3^T &\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times (N-2i+1)} \end{aligned}$$

Suite à l'orthonormalité de la matrice Q , nous verrons que l'estimation des matrices du système peut se faire en utilisant que la matrice \mathcal{R} . D'où une réduction de la complexité des calculs.

En adoptant les notations suivantes :

- (a) $R_{[i:j][k:l]}$ = sous-matrice de R constituée des blocs ($R_{pq}; i \leq p \leq j, k \leq q \leq l$)
- (b) $Q_{[i:j]}^T$ = sous-matrice de Q^T constituée des blocs ($Q_p^T; i \leq p \leq j$)

nous pouvons alors écrire :

$$\mathcal{P}_i = R_{[2:3][1:1]}Q_{[1:1]}^T; \mathcal{P}_{i-1} = R_{[3:3][1:2]}Q_{[1:2]}^T; Y_{i|i} = R_{[2:2][1:2]}Q_{[1:2]}^T \quad (3.52)$$

Par ailleurs, posant :

$$\mathcal{T}_g = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{i-1}^\dagger R_{[3:3][1:2]} \\ R_{[2:2][1:2]} \end{bmatrix} \in R^{(n+l) \times l(i+1)} \quad (3.53)$$

$$\mathcal{T}_d = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^\dagger R_{[2:3][1:1]} | 0_{(n \times l)} \end{bmatrix} \in R^{n \times l(i+1)} \quad (3.54)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{T}_g \mathcal{T}_d^\dagger \in R^{(n+l) \times n} \quad (3.55)$$

la relation (3.40) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \mathcal{D} \quad (3.56)$$

et la relation (3.41) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \approx (\mathcal{T}_g - \mathcal{D}\mathcal{T}_d)(\mathcal{T}_g - \mathcal{D}\mathcal{T}_d)^T \quad (3.57)$$

D'où l'algorithme :

- 1- Choix de i et construction de la matrice de Hankel $Y_{0|2i-1}$.
- 2- Décomposition QR de $Y_{0|2i-1} : Y_{0|2i-1} = \mathcal{R}\mathcal{Q}^T$.
- 3- Extraction des matrices $R_{[2:3][1:1]}$, $R_{[3:3][1:2]}$ et $R_{[2:2][1:2]}$ de \mathcal{R} .
- 4- Calcul de \mathcal{T}_g , \mathcal{T}_d et \mathcal{D} par (3.53), (3.54) et (3.55).
- 5- Calcul de A et C par (3.56).
- 6- Calcul de Q , R et S par (3.57).
- 7- Calcul de G , Σ et R_0 par (3.13).
- 8- Eventuellement, calcul de K et P par (3.37) et (3.38).

3.4.2 Extraction modale

Une fois les matrices A et C du système estimées, il est possible d'en extraire les caractéristiques modales de la structure, c'est-à-dire les fréquences propres f_k , les taux d'amortissement modaux ξ_k et les observées des vecteurs modaux Φ_k (notées $\tilde{\Phi}_k$). Ces grandeurs sont obtenues en résolvant le problème spectral (i.e. aux valeurs propres) relatif à A_c . Pour cela, on commence par résoudre celui relatif à la matrice A connue, supposée de dimension paire $n = 2m$. On suppose en outre que la structure est faiblement amortie. Dans ces conditions, les valeurs propres de A sont complexes et deux à deux conjuguées. On note $(\alpha_k, k \in K_n)$, $K_n = \{1, \dots, n\}$, ces valeurs propres et $(\Psi_k, k \in K_n)$ les vecteurs propres associés, tels que : $\forall k \in K_n, A\Psi_k = \alpha_k\Psi_k$. De la relation $A_c = e^{A_c\Delta t}$ et de la définition de l'exponentielle d'une matrice, on en déduit que A_c a les mêmes directions propres que A et que ses valeurs propres $(\beta_k, k \in K_n)$ sont liées à celles de A par la relation : $\forall k \in K_n, \alpha_k = e^{\beta_k\Delta t}$. De cette relation on tire, $\forall k \in K_n$: $\beta_k = \frac{\ln \alpha_k}{\Delta t} = \sigma_k + j\nu_k$, avec :

$$\sigma_k = \frac{\ln(\sqrt{a_k^2 + b_k^2})}{\Delta t}, \quad \nu_k = \frac{\tan^{-1}(\frac{b_k}{a_k})}{\Delta t} \quad (3.58)$$

où $a_k = \Re(\alpha_k)$ et $b_k = \Im(\alpha_k)$. Les fréquences propres f_k et taux d'amortissement modaux ξ_k s'en déduisent :

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 + \nu_k^2}, \quad \xi_k = -\frac{\sigma_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + \nu_k^2}} \quad (3.59)$$

Enfin, les vecteurs modaux sont donnés par :

$$\Phi_k = H_c\Psi_k \quad (3.60)$$

D'où :

$$\tilde{\Phi}_k = \Pi\Phi_k = C_c\Psi_k \quad (3.61)$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une description détaillée et rigoureuse des méthodes de sous-espaces en mettant l'accent sur leurs aspects algorithmiques et sur leurs spécificités. Puis nous avons montré comment les caractéristiques modales d'un système dynamique sous excitation blanche gaussienne peuvent être extraites à l'aide d'une méthode de sous-espaces. L'étude de ces méthodes a montré qu'elles requièrent le choix par l'utilisateur de deux paramètres : le paramètre de durée de mémoire i et l'ordre du système n . Nous avons vu, compte tenu de l'objectif fixé, que le second paramètre n'avait pas trop d'impact. Par contre le choix du premier est très important car un mauvais choix de ce paramètre peut altérer les résultats d'identification. Cependant nous ne disposons pas de critère de choix objectif pour ce dernier. Il faut alors procéder par balayage, ce qui constitue le point faible de l'identification par sous-espaces. Le schéma ci-dessous résume les différentes étapes du processus d'identification par une méthode de sous-espaces.

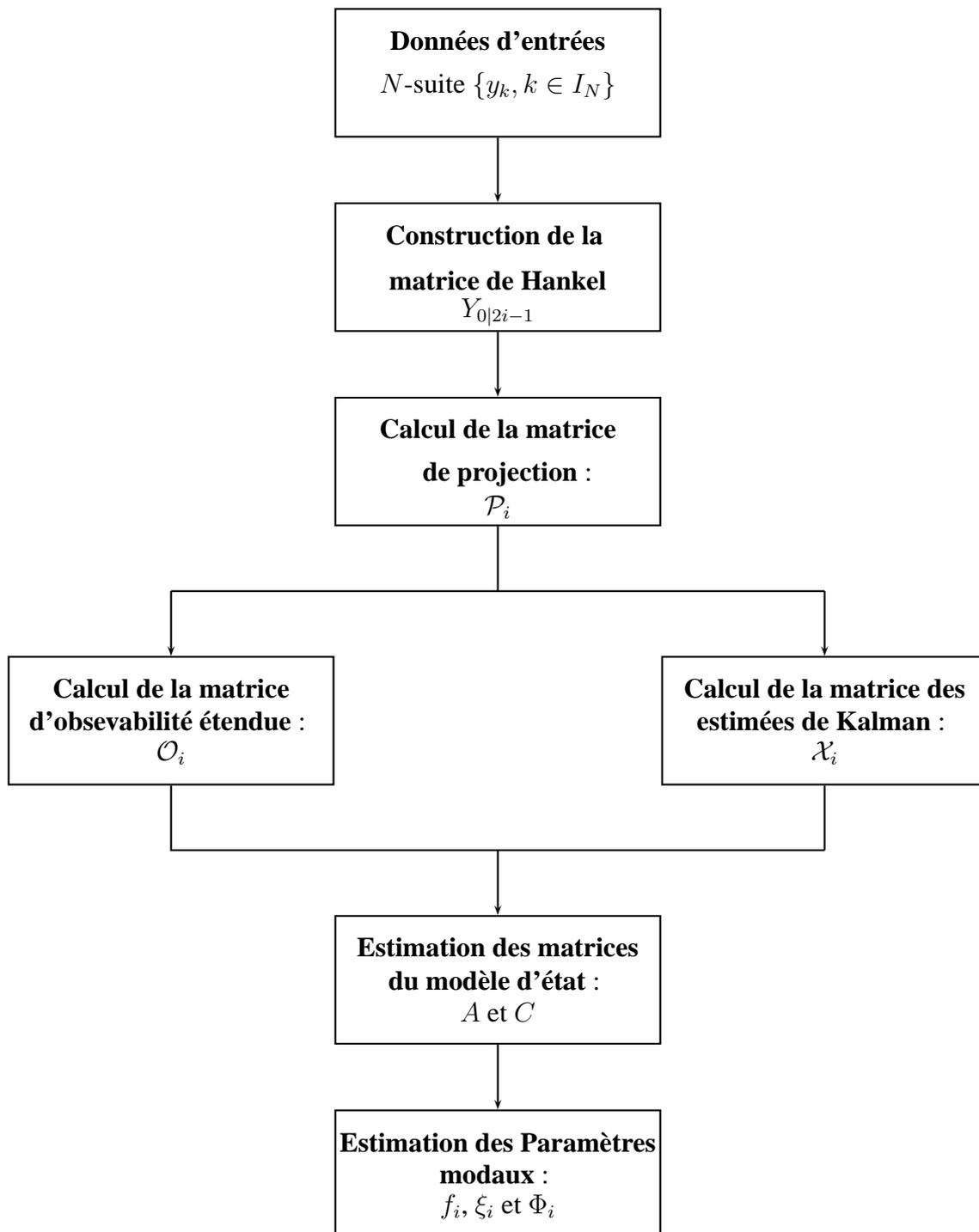


FIG. 3.1 – Processus d'estimation des paramètres modaux à l'aide des méthodes de sous-espaces.

Chapitre 4

Méthode du décrétement aléatoire

Sommaire

4.1	Introduction	65
4.2	Quelques résultats préalables	65
4.2.1	Oscillateurs scalaires	66
4.2.2	Oscillateurs vectoriels	67
4.3	Principe de la méthode	68
4.4	Décrétement déterministe	71
4.4.1	Oscillateurs linéaires sous mono-impulsion	72
4.4.2	Oscillateurs linéaires sous train d'impulsions	76
4.5	Analyse asymptotique dans le cas gaussien stationnaire	77
4.5.1	Franchissement d'un niveau $a \in \mathbb{R}^*$	78
4.5.2	Franchissement en croissant d'un niveau a	82
4.5.3	Point positif	84
4.5.4	Commentaires des résultats	87
4.5.5	Compléments algorithmiques	88
4.5.6	Illustrations numériques	89
4.6	Méthode d'Ibrahim	97
4.6.1	Rappels	97
4.6.2	Principe de la méthode	99
4.6.3	Utilisation pratique de la méthode d'Ibrahim, lien avec la fonction du décrétement	100
4.7	Application de la fonction du décrétement à la méthode de réalisation	103
4.8	Conclusion	104

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode originale pour l'identification des caractéristiques modales d'une structure à comportement linéaire sous chargement ambiant basée sur la technique dite du décrétement aléatoire.

La méthode du décrétement aléatoire a été développée de manière empirique à la NASA, à la fin des années 60 et au début des années 70 par Henry Cole [17], un ingénieur de la NASA, juste après le développement des algorithmes de transformation de Fourier rapide (TFR). Cole travaillait alors sur l'analyse de la réponse dynamique des structures spatiales soumises à des charges ambiantes. Le succès de cette méthode tient à sa simplicité d'utilisation, à des performances élevées et à sa robustesse observée par rapport à la nature des chargements. C'est un outil facile d'implémentation et peu dispendieux en temps calcul.

L'analyse "intuitive" effectuée par Caughey [16] en 1961 sur la méthode du décrétement aléatoire repose sur l'argument suivant. La réponse stationnaire d'une structure à comportement linéaire excitée par une force aléatoire (souvent modélisée par un bruit blanc gaussien) est la somme de deux termes (principe de décomposition-superposition) : un terme déterministe qui dépend des conditions initiales et un terme aléatoire (supposé avoir une moyenne nulle) qui est la convolution du processus excitation par la fonction de réponse impulsionnelle de la structure. En effectuant une moyenne statistique de tronçons de trajectoires débutant par les mêmes conditions initiales, la partie aléatoire devrait disparaître. Il ne reste plus que la partie déterministe (car il y a addition constructive puisqu'on part toujours des mêmes conditions initiales), qui n'est autre qu'une réponse libre du système avec certaines conditions initiales particulières. On peut donc utiliser pour l'identification des caractéristiques modales à partir du décrétement des techniques classiques développées pour identifier une structure à partir de sa réponse libre à un lâcher ou à une impulsion (comme par exemple la méthode d'Ibrahim).

L'idée était excellente, mais comme nous le verrons dans la suite, le résultat n'est pas en général celui annoncé par le raisonnement précédent ; son analyse mathématique est plus difficile et a donné lieu à de nombreuses erreurs. Il n'en demeure pas moins que cette méthode est très performante, à condition de savoir évaluer ce qu'elle fournit.

Un fait majeur sous-tend ces méthodes. Le bruit blanc, ainsi que nous l'avons vu, est une distribution aléatoire dont la corrélation est une distribution de Dirac à l'instant 0. Une impulsion est une distribution de Dirac au temps 0. Il y a donc une grande ressemblance entre ces deux objets, pourtant apparemment très différents, de sorte que la réponse d'une structure à une sollicitation aléatoire stationnaire large bande et la réponse d'une structure à une impulsion (réponse impulsionnelle) vont avoir beaucoup de points communs. Et cela va bien apparaître dans les méthodes et outils introduits dans ce chapitre.

4.2 Quelques résultats préalables

Nous rappelons brièvement dans cette section quelques résultats utiles pour la suite concernant la dynamique aléatoire et déterministe d'oscillateurs linéaires scalaires et vectoriels.

4.2.1 Oscillateurs scalaires

La dynamique de tels oscillateurs est gouvernée par une équation différentielle linéaire du second ordre sur \mathbb{R} de la forme :

$$\ddot{Y}(t) + 2w_0\xi_0\dot{Y}(t) + w_0^2Y(t) = f(t) \quad (4.1)$$

avec w_0 la pulsation, ξ_0 le taux d'amortissement critique, supposé $\ll 1$, et f l'excitation.

(a) On suppose $f(t)$ de la forme : $f(t) = L\mathcal{N}(t)$, avec L un réel non nul et $\mathcal{N} = (\mathcal{N}(t), t \in \mathbb{R})$ un bruit blanc gaussien normalisé scalaire. On s'intéresse à la réponse stationnaire $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ de (4.1) (c'est pourquoi nous n'avons pas adjoint à (4.1) de conditions initiales). On sait que cette réponse est un processus gaussien stationnaire centré et qu'elle est, de ce fait, entièrement caractérisée par la donnée de sa fonction d'autocorrélation $t \rightarrow R_{YY}(t) = \mathbb{E}[Y(t+u)Y(u)]$, définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , et qui s'écrit, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$R_{YY}(t) = \sigma_Y^2 \left(\frac{w_0\xi_0}{w_d} \sin w_d|t| + \cos w_d t \right) e^{-w_0\xi_0|t|} \quad (4.2)$$

avec :

$$\sigma_Y^2 = \frac{L^2}{4w_0^3\xi_0} \quad ; \quad w_d = w_0\sqrt{1 - \xi_0^2} \quad (4.3)$$

où $\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2(t)] = R_{YY}(0)$ est la variance de la réponse stationnaire Y .

(b) Soit $y = (y(t), t \in \mathbb{R}_+)$ la réponse de l'oscillateur (4.1) à une impulsion à l'instant $t = 0$, modélisée par la distribution $f(t) = \rho\delta_0(t)$, où ρ est une constante réelle donnée et δ_0 est la distribution de Dirac à l'instant $t = 0$. Cette réponse est solution de l'équation homogène :

$$\begin{cases} \ddot{Y}(t) + 2w_0\xi_0\dot{Y}(t) + w_0^2Y(t) = 0, & t > 0 \\ Y(0) = y_0, \dot{Y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

avec $(y_0, \dot{y}_0) = (0, \rho)$, et s'écrit, $\forall t \geq 0$:

$$y(t) = \rho \frac{e^{-w_0\xi_0 t}}{w_d} \sin w_d t = \rho h_y(t) \quad (4.5)$$

où h_y est la fonction de réponse impulsionnelle du filtre linéaire causal défini par (4.1), telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$h_y(t) = \frac{e^{-w_0\xi_0 t}}{w_d} \sin w_d t \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \quad (4.6)$$

(c) On a alors les résultats suivants :

R1) la solution (4.5) vérifie, $\forall \tau_k \geq 0, \forall t \geq 0$:

$$y(t + \tau_k) = \left[\left(\frac{w_0\xi_0}{w_d} \sin w_d t + \cos w_d t \right) y(\tau_k) + \frac{\sin w_d t}{w_d} \dot{y}(\tau_k) \right] e^{-w_0\xi_0 t} \quad (4.7)$$

R2) Sur \mathbb{R}_+ , la fonction de corrélation R_{YY} est solution de (4.4) avec $(y_0, \dot{y}_0) = (\sigma_Y^2, 0)$ et vérifie (4.7).

R3) Sur \mathbb{R}_+ , la fonction de réponse impulsionnelle h_y est solution de (4.4) avec $(y_0, \dot{y}_0) = (0, 1)$ et vérifie (4.7).

4.2.2 Oscillateurs vectoriels

La dynamique de tels oscillateurs est gouvernée par une équation différentielle linéaire du second ordre sur \mathbb{R}^m de la forme :

$$M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = f(t) \quad (4.8)$$

et de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= A_c X(t) + b_c f(t) \\ Z(t) &= H_c X(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la masse, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ l'amortissement, $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la rigidité, f l'excitation à valeurs dans $\mathbb{R}^{m \times 1}$, $X = (Z^T \dot{Z}^T)^T$ l'état à valeurs dans $\mathbb{R}^{2m \times 1}$, $A_c \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ et $H_c \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$ donnés par (1.3), (1.4) et $b_c = [0_{(m \times m)} | M^{-T}]^T \in \mathbb{R}^{2m \times m}$.

(a) On suppose A_c asymptotiquement stable et $f(t)$ de la forme : $f(t) = L\mathcal{N}(t)$, avec $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ un coefficient matriciel donné et $\mathcal{N} = (\mathcal{N}(t), t \in \mathbb{R})$ un bruit blanc gaussien normalisé m -dimensionnel. Alors (4.8) admet une solution stationnaire $Z = (Z(t), t \in \mathbb{R})$ qui est un processus gaussien stationnaire centré dont la fonction de corrélation $t \rightarrow R_{ZZ}(t) = \mathbb{E}[Z(t+u)Z^T(u)]$, définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{R}^{m \times m}$, s'écrit, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$R_{ZZ}(t) = H_c R_{XX}(t) H_c^T \quad (4.10)$$

avec :

$$R_{XX}(t) = \begin{cases} e^{A_c t} \Sigma & \text{si } t \geq 0 \\ \Sigma e^{-A_c^T t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\Sigma = \mathbb{E}[X(t)X^T(t)] \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2m, 2m)$ est solution de l'équation de Lyapunov $A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -B_c B_c^T$, avec $B_c = b_c L$.

(b) Soit $z = (z(t), t \in \mathbb{R}_+)$ la réponse de l'oscillateur (4.8) à une impulsion à l'instant $t = 0$, modélisée par la distribution $f(t) = \rho \delta_0(t)$, où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ est une constante matricielle donnée et δ_0 est la distribution de Dirac à l'origine. Cette réponse est solution de l'équation homogène :

$$\begin{cases} M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = 0, & t > 0 \\ Z(0) = z_0, \dot{Z}(0) = \dot{z}_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

avec $(z_0^T, \dot{z}_0^T)^T = b_c \rho$, soit : $z_0 = 0_{(m \times 1)}$, $\dot{z}_0 = M^{-1} \rho$.

Elle s'écrit, $\forall t \geq 0$:

$$z(t) = H_c e^{A_c t} b_c \rho = h_z(t) \rho \quad (4.13)$$

où h_z est la fonction de réponse impulsionnelle du filtre linéaire causal défini par (4.8), telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$h_z(t) = H_c e^{A_c t} b_c \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.14)$$

(c) On a alors les résultats suivants :

R4) La solution (4.13) vérifie, $\forall \tau_k \geq 0, \forall t \geq 0$:

$$z(t + \tau_k) = H_c e^{A_c t} \begin{bmatrix} z(\tau_k) \\ \dot{z}(\tau_k) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

R5) Sur \mathbb{R}_+ , la i -ème colonne $R_{ZZ,i}$ de la fonction de corrélation matricielle R_{ZZ} est solution de (4.12) avec $(z_0^T, \dot{z}_0^T)^T = \Sigma H_{c,i}^T$ et vérifie (4.15), où $H_{c,i}^T$ est la i -ème colonne de H_c^T .

R6) Sur \mathbb{R}_+ , la i -ème colonne $h_{z,i}$ de la fonction de réponse impulsionnelle h_z est solution de (4.12) avec $(z_0^T, \dot{z}_0^T)^T = b_{c,i}$ et vérifie (4.15), où $b_{c,i}$ est la i -ème colonne de b_c .

Nous allons maintenant donner un cadre mathématique pour la méthode du décrétement en mettant en évidence les différents problèmes qui se posent pour son analyse.

4.3 Principe de la méthode

Le point de départ est une trajectoire observée de la réponse d'une structure à des sollicitations. Les analyses sont généralement menées en supposant qu'il s'agit d'un processus stationnaire ergodique. Mais la méthode est employée avec succès lorsque la sollicitation est par exemple l'action d'un TGV sur un pont ferroviaire ou d'excitateurs sur un pont routier ou autoroutier. Or, dans ces cas, la réponse est loin d'être stationnaire. C'est pourquoi nous allons présenter le décrétement sous un angle qui permettra de comprendre les raisons pour lesquelles ceci reste encore valable dans ces cas.

Considérons d'abord le cas où nous disposons d'une observation scalaire, que nous noterons Y , de la réponse dynamique d'une structure en régime vibratoire libre ou entretenu. Cette observation modélisera, par exemple, un déplacement scalaire de la structure, connu par un enregistrement expérimental fourni par une voie de mesure. C'est une fonction qui sera aléatoire (ce sera donc un processus) si la sollicitation ou les conditions initiales le sont. Fixons un niveau a et considérons le processus ponctuel des instants τ_k auxquels Y franchit ce niveau, i.e.

$$\tau_0 = 0, \tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k, Y(t) = a\} \quad (4.16)$$

Les points τ_k sont appelés *instants de déclenchement*. Ils peuvent être définis à partir d'autres conditions que le simple franchissement d'un niveau. Dans le cas aléatoire, les τ_k sont aussi aléatoires. Si Y est une composante d'un processus de Markov, ce sont des temps d'arrêt. Pour chaque τ_k , nous considérons le reste de la trajectoire après τ_k , appelé *section finissante de la trajectoire après τ_k* , ramené à l'origine. Effectuons ensuite la moyenne de ces sections.

La fonction (ou le processus) ainsi obtenue est la fonction du décrétement (aléatoire si Y est un processus aléatoire) associée au franchissement du niveau a . En pratique, naturellement, seulement un nombre fini de sections peut être utilisé. Pour N sections considérées, on définit la fonction du décrétement d'ordre N comme suit :

$$D_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(t + \tau_k) \quad (4.17)$$

Lorsque Y est un processus stationnaire, on étudie le comportement asymptotique de $D_N(t)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Le nombre de termes de la suite τ_k dépend bien évidemment du nombre de données, mais aussi de la longueur de la dernière section finissante qui définit la longueur disponible pour le décrétement. Comme nous ne disposons que d'un nombre fini d'observations dans le temps, nous devons choisir le nombre de termes τ_k afin d'obtenir une longueur suffisante pour le calcul du décrétement. Le processus d'estimation de la fonction du décrétement dans le cas scalaire (une seule voie de mesure disponible) est illustré dans la figure 4.1.

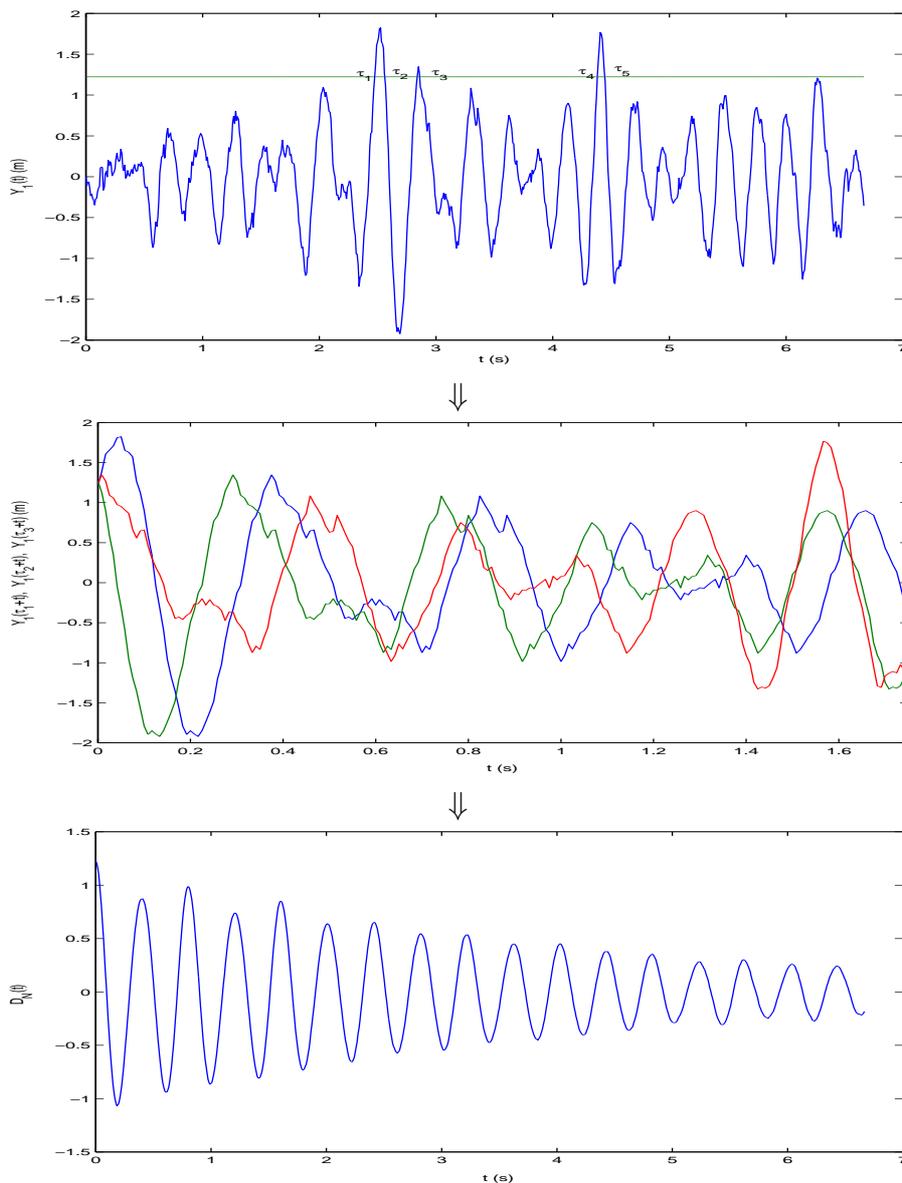


FIG. 4.1 – Illustration du processus d'estimation de la fonction du décrétement aléatoire dans le cas scalaire

De la même manière, on peut définir la fonction du décrétement dans le cas vectoriel (plusieurs déplacements scalaires, et donc voies de mesure, considérés). Soit $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$, où $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_l(t))$, le processus l -dimensionnel stationnaire centré représentant une observation vectorielle de la réponse stationnaire de la structure et intéressons-nous aux couples de coordonnées $(Y_i, Y_j) = ((Y_i(t), Y_j(t)), t \in \mathbb{R})$, $(i, j) \in \{1, \dots, l\}^2$, de cette réponse. Pour (i, j) fixé, considérons le couple (Y_i, Y_j) , fixons un niveau $a_j \in \mathbb{R}$ et relevons la suite des instants $(\tau_k^j, k = 1, \dots, N_j)$ où Y_j satisfait une condition de déclenchement liée à a_j (par exemple, $Y_j(\tau_k^j) = a_j, k = 1, \dots, N_j$). Soit alors, pour chaque τ_k^j , la section finissante de la trajectoire considérée de Y_i après τ_k^j , ramenée à l'origine. Pour N_j points de déclenchement considérés, la fonction du décrétement relative à Y_i (i.e. à la voie de mesure i) est alors définie par :

$$D_{N_j}^{ij}(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} Y_i(t + \tau_k^j), \quad i, j = 1, 2, \dots, l \quad (4.18)$$

Le premier indice de la fonction du décrétement fait référence aux voies de mesure pour lesquelles les sections finissantes sont sélectionnées et moyennées, tandis que le second indice fait référence aux voies de mesure pour lesquelles les points de déclenchement sont détectés.

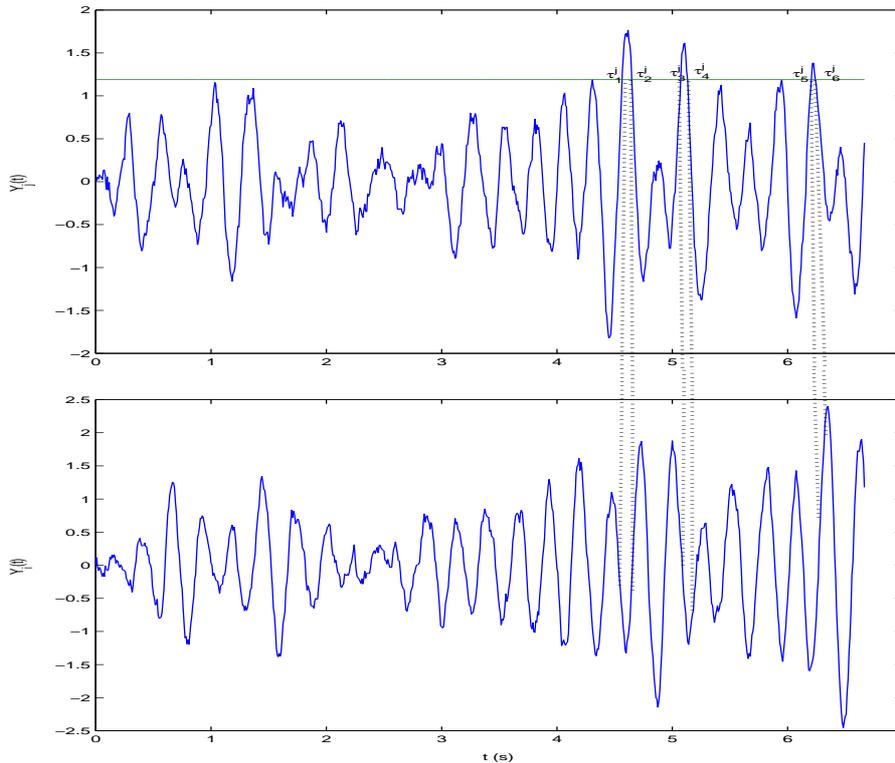


FIG. 4.2 – Illustration du processus d'estimation de la fonction du décrétement aléatoire dans le cas vectoriel

Bien entendu, le temps d'estimation de la fonction matricielle du décrement $t \rightarrow [D_{N_j}^{ij}(t)]$ croît très rapidement avec la taille l de l'observation, c'est-à-dire avec le nombre de voies de mesure. Afin d'accélérer la convergence de ces calculs, un algorithme spécifique de décrement vectoriel a été introduit par Ibrahim et ses co-auteurs [41]. Ce nouveau concept est aussi motivé par le fait que pour l'estimation des caractéristiques modales nous n'avons besoin que de certaines colonnes de la matrice de corrélation ou du décrement.

Un aspect important de l'étude des fonctions (4.17) et (4.18) est l'analyse de leur comportement asymptotique lorsque le nombre de points de déclenchement devient grand.

Le décrement ainsi défini apparaissant comme une moyenne empirique de sections de trajectoires commençant toutes par la même condition initiale $Y(\tau_k) = a$, de nombreux auteurs en ont conclu que cette quantité était un estimateur de l'espérance conditionnelle de $Y(t + \bullet)$ par l'événement $(Y(t) = a)$ (ou $(Y(t) = a, \dot{Y}(t) \geq 0)$ pour le franchissement en croissant), i.e. $\mathbb{E}[Y(t+u)|Y(t) = a]$ (ou encore $\mathbb{E}[Y(t+u)|Y(t) = a, \dot{Y}(t) \geq 0]$) [72].

Or il y a ici une erreur fondamentale, qui est la confusion entre la condition $(Y(t) = a)$ pour un t fixé et le fait de définir un instant aléatoire τ comme l'instant où $Y(\tau) = a$, et plus précisément la suite croissante d'instant τ_k par la relation : $\tau_0 = 0, \tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k, Y(t) = a\}$.

Il s'en suit que la définition formelle du décrement par une espérance conditionnelle sachant $(Y(t) = a)$ avec un t fixé est incorrecte. Et il y a à cela une première bonne raison : l'événement $(Y(t) = a)$ est de probabilité nulle, et on ne peut conditionner par un événement de probabilité nulle d'après les axiomes de N. Kolmogorov [46]. Une analyse de ce point, faisant appel aux concepts de *conditionnement horizontal* et *conditionnement vertical*, pourra être trouvée dans [13, 14].

Les bases mathématiques de la méthode du décrement ont toujours été effectuées en temps continu [72] et [13]. Il reste alors à prendre en compte le fait que l'on travaille sur une suite de mesures discrétisées du processus considéré. Ce qui constituera un aspect de notre contribution à la méthode du décrement aléatoire.

Un autre aspect important de l'étude est l'analyse de la robustesse de l'algorithme du décrement vis-à-vis de la nature de l'excitation. Nous allons montrer ici dans un premier temps que cet algorithme fonctionne encore pour des excitations déterministes de type impulsions ou trains d'impulsions (ce qui peut modéliser le passage d'un TGV sur un pont par exemple).

4.4 Décrement déterministe

Nous considérons ici des oscillateurs linéaires déterministes en nous limitant à deux types très fréquents d'excitation : l'impulsion et le train d'impulsions. Pour les oscillateurs sous mono-impulsions, nous traitons le cas scalaire (oscillateurs à un ddl) et le cas vectoriel (oscillateurs à plusieurs ddl). Pour les oscillateurs sous trains d'impulsions, seul le cas scalaire est considéré.

4.4.1 Oscillateurs linéaires sous mono-impulsion

a) Cas scalaire

Nous considérons un oscillateur scalaire dont la dynamique est décrite par une équation de la forme (4.1) dans laquelle l'excitation $f(t)$ est une impulsion à l'instant 0 modélisée par la distribution $\rho\delta_0(t)$, où ρ est une constante réelle non nulle donnée. Dans ce cas, et d'après le point (b) du paragraphe 4.2.1, nous savons que la réponse $y = (y(t), t \in \mathbb{R}_+)$ de l'oscillateur est solution de l'équation différentielle (4.4) avec $(y_0, \dot{y}_0) = (0, \rho)$, que cette réponse est donnée par (4.5) et qu'elle vérifie (4.7). Soit $(\tau_k, k \in K_N)$, $K_N = \{1, \dots, N\}$, une N -suite croissante d'instants associée à une condition de déclenchement sur y et soit $D_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(t + \tau_k)$ le décrétement scalaire correspondant. On a, d'après (4.7), et pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{w_0 \xi_0}{w_d} \sin w_d t + \cos w_d t \right) y(\tau_k) + \frac{\sin w_d t}{w_d} \dot{y}(\tau_k) \right] e^{-w_0 \xi_0 t} \\ &= \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(\tau_k) + \frac{\sin w_d t}{w_d} e^{-w_0 \xi_0 t} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k) \end{aligned} \quad (4.19)$$

soit, d'après (4.2), et en remarquant que $\forall t \geq 0, \dot{R}_{YY}(t) = -\sigma_Y^2 \frac{\sin w_d t}{w_d} e^{-w_0 \xi_0 t}$:

$$D_N(t) = \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(\tau_k) - \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k) \quad (4.20)$$

où σ_Y^2 , donnée par (4.3), est la variance de la réponse stationnaire Y de l'oscillateur sous excitation bruit blanc gaussien $L\mathcal{N}$ (cf. point (a) du paragraphe 4.2.1) et $\sigma_{\dot{Y}}^2 = w_0^2 \sigma_Y^2$ est la variance de la dérivée \dot{Y} de Y .

Examinons alors ce que devient l'expression générale (4.20) pour deux cas particuliers très importants de condition de déclenchement.

(i) Franchissement d'un niveau a non nul

On se donne un niveau $a \in \mathbb{R}^*$ et on définit la condition de déclenchement par le franchissement de ce niveau par la réponse y . La suite $(\tau_k, k \in K_N)$ est donc constituée des instants τ_k où y vérifie : $y(\tau_k) = a$. Par conséquent (4.20) s'écrit :

$$D_N^a(t) = \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} a - \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \lambda_N^1 \quad (4.21)$$

où :

$$\lambda_N^1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k) \quad (4.22)$$

Le graphe 4.3 de la fonction y (dont on remarquera, vu son expression (4.5), qu'elle ne diffère de h_y sur \mathbb{R}_+ qu'à une constante multiplicative près) montre que le nombre N de points

de déclenchement est fini dès que $a \neq 0$. Ce nombre dépend bien évidemment du niveau a , tout comme d'ailleurs les instants de franchissement τ_k , la constante λ_N^1 et le décrement $D_N(t)$. De plus, la suite (finie) des $\dot{y}(\tau_k)$ possède trois particularités : (1) elle comprend, sauf pour des choix très particuliers (et que l'on peut toujours éviter) de valeurs de a et de longueurs de trajectoires d'étude, un nombre pair de termes, (2) elle est alternée et (3) ses termes consécutifs (donc de signes opposés) sont proches en valeur absolue (car on suppose $\xi_0 \ll 1$). Par conséquent la constante λ_N^1 est proche de zéro et on peut écrire :

$$D_N^a(t) \approx \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} a \quad (4.23)$$

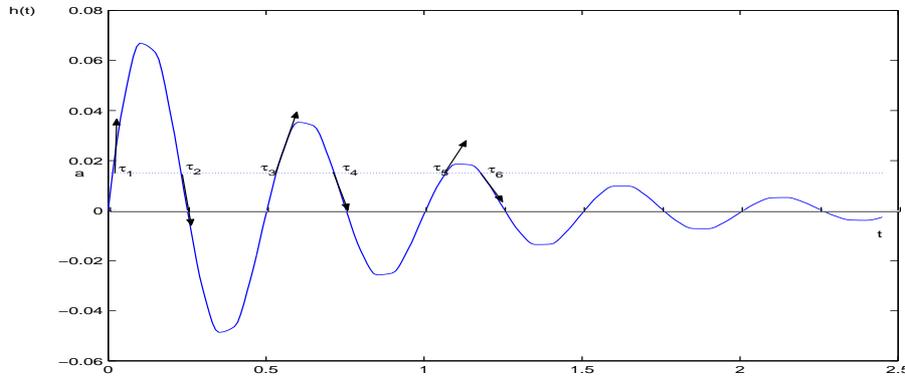


FIG. 4.3 – Points de franchissement du niveau a pour une réponse impulsionnelle.

(ii) *Franchissement en croissant du niveau zéro*

La suite $(\tau_k, k \in K_N)$ correspondant à cette condition de déclenchement est ici constituée des instants τ_k où la réponse y vérifie : $y(\tau_k) = 0, \dot{y}(\tau_k) \geq 0$. Or, d'après (4.5), cette contrainte sera satisfaite à tous les instants $\tau_k, k \in \mathbf{N}^*$, tels que : $\tau_k = \frac{2(k-1)\pi}{w_d}$. Portant ce résultat dans (4.20), il vient alors, compte tenu de (4.5) :

$$D_N^0(t) = -\rho \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \times \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[e^{-2\pi \frac{w_0 \xi_0}{w_d}} \right]^{k-1} \quad (4.24)$$

soit, en reconnaissant dans cette expression la somme des N premiers termes d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-2\pi \frac{w_0 \xi_0}{w_d}}$:

$$D_N^0(t) = -\frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \lambda_N^2 \quad (4.25)$$

avec :

$$\lambda_N^2 = \frac{\rho}{N} \frac{1 - e^{-2\pi N \frac{w_0 \xi_0}{w_d}}}{1 - e^{-2\pi \frac{w_0 \xi_0}{w_d}}} \quad (4.26)$$

La force des résultats (4.23) et (4.25) est qu'ils permettent d'obtenir la fonction de corrélation et la dérivée de la fonction de corrélation de la réponse stationnaire d'un oscillateur à une excitation blanche gaussienne en utilisant uniquement la réponse de l'oscillateur à une impulsion à l'origine et un nombre fini N de points de déclenchement, autrement dit en ayant recours à un mode d'excitation qui n'a rien d'aléatoire. **Nous disposons ainsi d'un estimateur fonctionnel efficace de la fonction de corrélation R_{YY} et de sa dérivée \dot{R}_{YY} .**

b) Cas vectoriel

Nous considérons maintenant un oscillateur vectoriel m -dimensionnel (i.e. à m ddl) d'équation d'évolution (4.8) et de représentation d'état (4.9), avec $f(t)$ une impulsion à l'origine modélisée par la distribution $\rho\delta_0(t)$, où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ est une constante matricielle donnée. Dans ces conditions, et d'après le point (b) du paragraphe 4.2.2, nous savons que la réponse $z = (z(t), t \in \mathbb{R}_+)$ de cet oscillateur est solution de (4.12) avec $(z_0^T, \dot{z}_0^T)^T = b_c \rho$, qu'elle est donnée par (4.13) et qu'elle vérifie (4.15).

Soit $(\tau_k, k \in K_N)$, $K_N = \{1, \dots, N\}$, une N -suite croissante d'instantanés associée à une condition de déclenchement sur z et soit $D_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z(t + \tau_k)$ le décrement vectoriel correspondant. On a, d'après (4.15), et pour tout $t \geq 0$:

$$D_N(t) = H_c e^{A_c t} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} z(\tau_k) \\ \dot{z}(\tau_k) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Or, désignant par R_{ZX} la fonction d'intercorrélation des processus Z et $X = (Z^T, \dot{Z}^T)^T$, où (X, Z) est la solution stationnaire de (4.9) lorsque $f = L\mathcal{N}$, avec $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et \mathcal{N} un bruit blanc gaussien normalisé m -dimensionnel, et par $\Sigma \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ la variance matricielle de X , définie au point (a) du paragraphe 4.2.2, on a, $\forall t \geq 0$: $R_{ZX}(t) = H_c e^{A_c t} \Sigma$. D'où, $\forall t \geq 0$:

$$H_c e^{A_c t} = R_{ZX}(t) \Sigma^{-1} \quad (4.28)$$

où Σ^{-1} et $R_{ZX}(t) = \mathbb{E}[Z(t+u)X^T(u)]$ sont de la forme :

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} ; \quad R_{ZX}(t) = \begin{bmatrix} R_{ZZ}(t) & | & R_{Z\dot{Z}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

avec :

$$F_{11} = R_{\dot{Z}\dot{Z}}^{-1} + R_{\dot{Z}\dot{Z}}^{-1} R_{\dot{Z}Z} (R_{\dot{Z}\dot{Z}} - R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} R_{Z\dot{Z}})^{-1} R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} \quad (4.30)$$

$$F_{12} = -R_{\dot{Z}\dot{Z}}^{-1} R_{\dot{Z}Z} (R_{\dot{Z}\dot{Z}} - R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} R_{Z\dot{Z}})^{-1} \quad (4.31)$$

$$F_{21} = -(R_{\dot{Z}\dot{Z}} - R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} R_{Z\dot{Z}})^{-1} R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} \quad (4.32)$$

$$F_{22} = (R_{\dot{Z}\dot{Z}} - R_{\dot{Z}Z} R_{ZZ}^{-1} R_{Z\dot{Z}})^{-1} \quad (4.33)$$

où $R_{\bullet\bullet} = R_{\bullet\bullet}(0)$ est la variance matricielle de \bullet , F_{11} et F_{22} sont des matrices réelles $(m \times m)$ symétriques et définies positives et F_{12} , F_{21} des matrices réelles $(m \times m)$ telles que $F_{21} = F_{12}^T$.

Dans ces conditions, l'expression (4.28), s'écrit encore :

$$\begin{aligned} H_c e^{At} &= \begin{bmatrix} R_{ZZ}(t) & | & R_{Z\dot{Z}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{ZZ}(t)F_{11} + R_{Z\dot{Z}}(t)F_{21} & | & R_{ZZ}(t)F_{12} + R_{Z\dot{Z}}(t)F_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Observant que $R_{Z\dot{Z}}(t) = -\dot{R}_{ZZ}(t)$ et posant :

$$a_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z(\tau_k) \quad ; \quad b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}(\tau_k) \quad (4.35)$$

il vient alors, en portant (4.34) dans (4.27) et en tenant compte de (4.35) :

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \begin{bmatrix} R_{ZZ}(t)F_{11} + R_{Z\dot{Z}}(t)F_{21} & | & R_{ZZ}(t)F_{12} + R_{Z\dot{Z}}(t)F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_N \\ \tilde{b}_N \end{bmatrix} \\ &= R_{ZZ}(t) \begin{bmatrix} F_{11} & | & F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_N \\ \tilde{b}_N \end{bmatrix} - \dot{R}_{ZZ}(t) \begin{bmatrix} F_{21} & | & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_N \\ \tilde{b}_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Posons maintenant :

$$q_N^1 = \begin{bmatrix} F_{11} & | & F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} \quad ; \quad q_N^2 = \begin{bmatrix} F_{21} & | & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

alors l'expression (4.36) s'écrit :

$$D_N(t) = R_{ZZ}(t)q_N^1 - \dot{R}_{ZZ}(t)q_N^2 \quad (4.38)$$

On observe que la fonction du décrétement est une combinaison des colonnes de la fonction de corrélation et de sa dérivée. On obtient ainsi une fonction du décrétement vectorielle.

La généralisation au cas scalaire consiste, pour le choix des instants de déclenchement, à prendre le critère de déclenchement sur une seule composante du vecteur aléatoire $Y(t)$. Asmussen [7] propose de prendre une condition de déclenchement vectorielle en utilisant des instants de décalage.

Remarquons que si $Z = Y$ est un processus à valeur dans \mathbb{R} et $\rho = \rho_1$ alors, compte tenu des expressions (4.30)-(4.33), on a :

$$\begin{aligned} F_{11} &= R_{YY}^{-1}(0) = 1/\sigma_Y^2 \quad ; \quad F_{12} = 0 \\ F_{21} &= 0 \quad ; \quad F_{22} = R_{\dot{Y}\dot{Y}}^{-1}(0) = 1/\sigma_{\dot{Y}}^2 \end{aligned}$$

car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R_{Y\dot{Y}}(t) = R_{\dot{Y}Y}(t) = 0$ (Y étant stationnaire).

Dans ce cas, on a : $q_N^1 = \frac{a_N}{\sigma_Y^2}$, $q_N^2 = \frac{b_N}{\sigma_{\dot{Y}}^2}$ et l'expression (4.38) s'écrit :

$$D_N(t) = \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(\tau_k) - \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_{\dot{Y}}^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k)$$

On retrouve bien l'expression générale du décrétement dans le cas scalaire.

Observons pour terminer, qu'en tenant compte de (4.10), la relation (4.38) peut se réécrire, $\forall t \geq 0$:

$$D_N(t) = H_c e^{A_c t} r_N \quad (4.39)$$

avec :

$$r_N = \Sigma H_c^T q_N^1 - A_c \Sigma H_c^T q_N^2 \in \mathbb{R}^{2m \times 1} \quad (4.40)$$

En comparant (4.39) à (4.10) et (4.14), on voit alors que le décrétement $D_N(t)$ est de la même forme que les colonnes $R_{ZZ,i}(t) = H_c e^{A_c t} (\Sigma H_c^T)_i$ de la fonction de corrélation $R_{ZZ}(t)$ et que celles $h_{z,i}(t) = H_c e^{A_c t} b_{c,i}$ de la réponse impulsionnelle $h_z(t)$ pour $t \geq 0$. Cette particularité très intéressante peut être exploitée avantageusement, pour l'estimation des caractéristiques modales, en utilisant le décrétement dans des méthodes standards telles que dans les méthodes polyreference et d'Ibrahim.

4.4.2 Oscillateurs linéaires sous train d'impulsions

Dans cette section nous nous limitons au cas scalaire. Les résultats s'étendent sans difficulté aux oscillateurs linéaires vectoriels sous trains d'impulsions.

Considérons un oscillateur scalaire dont la dynamique est décrite par une équation de la forme (4.1) dans laquelle l'excitation $f(t)$ est de la forme :

$$f(t) = \sum_{p=0}^M P_p \delta_0(t - pT) = \sum_{p=0}^M P_p \delta_{pT}(t) \quad (4.41)$$

avec $M \in \mathbb{N}^*$ un entier donné, $T \in \mathbb{R}_+$ la période de l'excitation impulsionnelle et $P_p \in \mathbb{R}$ l'intensité de l'impulsion à l'instant pT (l'excitation est donc considérée ici périodique de période T).

La réponse de l'oscillateur s'écrit dans ce cas, $\forall t \geq 0$:

$$y(t) = \sum_{p=0}^M P_p \frac{e^{-\omega_0 \xi_0 (t-pT)}}{\omega_d} \sin \omega_d (t-pT) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t-pT) \quad (4.42)$$

Pour tout $t \geq pT$, l'expression (4.42) peut encore s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \left[\left(\frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) y_0 + \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \dot{y}_0 \right] e^{-\omega_0 \xi_0 t} \quad (4.43)$$

avec :

$$y_0 = - \sum_{p=0}^M P_p \frac{\sin(\omega_d pT)}{\omega_d} e^{\omega_0 \xi_0 pT} \quad (4.44)$$

$$\dot{y}_0 = \sum_{p=0}^M P_p \left(\cos(\omega_d pT) + \frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d} \sin(\omega_d pT) \right) e^{\omega_0 \xi_0 pT} \quad (4.45)$$

L'expression (4.43) montre que y est solution de l'équation homogène associée à (4.1) avec les conditions initiales y_0 et \dot{y}_0 données ci-dessus.

Soit $(\tau_k, k \in K_N)$, $K_N = \{1, \dots, N\}$ une suite d'instants associés à une condition de déclenchement sur y . Compte tenu de l'observation faite ci-dessus, la solution (4.42) vérifie, $\forall \tau_k \geq 0, \forall t \geq 0$:

$$y(t + \tau_k) = \left[\left(\frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) y(\tau_k) + \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \dot{y}(\tau_k) \right] e^{-\omega_0 \xi_0 t} \quad (4.46)$$

Le décrétement scalaire correspondant étant défini par : $D_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(t + \tau_k)$, on a alors, en utilisant l'expression (4.46), $\forall t \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \left[\left(\frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(\tau_k) + \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k) \right] e^{-\omega_0 \xi_0 t} \\ D_N(t) &= \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(\tau_k) - \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{y}(\tau_k) \end{aligned} \quad (4.47)$$

En examinant l'expression générale (4.47) pour les deux conditions de déclenchement définies précédemment, on voit que le décrétement relatif au franchissement d'un niveau $a \in \mathbb{R}^*$ par la réponse (4.42) est donné par (4.21) et que celui associé au franchissement en croissant du niveau zéro est donné par (4.25), avec :

$$\lambda_N^2 = \frac{\sum_{p=0}^M P_p}{N} \frac{1 - e^{-2\pi N \frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d}}}{1 - e^{-2\pi \frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d}}} \quad (4.48)$$

Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\lambda_N^2 \rightarrow 0$. Cependant, dans la pratique, le nombre de points de déclenchement est fini donc λ_N^2 est une constante (qui dépend de N).

Les résultats obtenus ci-dessus montrent que :

- dans le cas scalaire, suivant la condition de déclenchement utilisée, la fonction du décrétement est proportionnelle, soit à la fonction de corrélation, soit à sa dérivée et elle peut aussi être une combinaison des deux.
- dans le cas vectoriel, la fonction du décrétement est vectorielle et elle est une combinaison des colonnes de la fonction de corrélation et de celles de sa dérivée.

Il en résulte que dans le cas d'excitations de type impulsions ou trains d'impulsions (qui n'ont donc rien de stationnaires), la méthode du décrétement pourra encore être utilisée car, compte tenu de l'identité de formes entre fonctions de corrélation et réponses à des lâchers, on pourra encore l'accoupler à des méthodes d'identification basées sur l'emploi de ces dernières, comme, par exemple, la méthode polyreference ou la méthode d'Ibrahim.

4.5 Analyse asymptotique dans le cas gaussien stationnaire

La sollicitation est maintenant du type bruit blanc, de sorte que la réponse est gaussienne stationnaire ergodique centrée. Nous allons rester aussi proche que possible de l'algorithme

implanté. En pratique, on ne dispose que de versions échantillonnées du processus réponse, avec un pas de temps Δt . Dès lors le résultat va dépendre de l'algorithme utilisé pour tester la condition de déclenchement.

La formulation pratique du test de franchissement en croissant du niveau a est :

$$\tau_k = \inf\{j\Delta t > \tau_{k-1} : Y_{j-1} \leq a \text{ et } Y_j > a\}$$

Ceci est à rapprocher du conditionnement horizontal introduit dans [13] en temps continu.

Revenons au problème qui nous intéresse ici, c'est-à-dire à l'analyse du comportement asymptotique de $D_N(t)$ défini par l'expression (4.17) lorsque $N \rightarrow \infty$. Pour ce faire nous nous appuyerons sur le théorème important suivant établi récemment par P. Bernard et L. Lei :

Théorème 1 (Loi des grands nombres) : *Supposons le processus Y gaussien stationnaire centré ergodique. Alors :*

$$D_N(j\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(\tau_k + j\Delta t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[Y(j\Delta t)|\mathcal{C}_0] \quad (4.49)$$

où \mathcal{C}_0 est la condition de déclenchement choisie, considérée à l'instant 0.

Notons que ce résultat est important à plusieurs titres :

- il tient compte de la formulation pratique du test de déclenchement ;
- il permet de s'extraire de la difficulté liée au fait que les instants de déclenchement sont aléatoires ;
- enfin, il utilise un conditionnement par un événement de probabilité non nulle.

Il suffit alors de calculer l'expression $\mathbb{E}[Y(j\Delta t)|\mathcal{C}_0]$ de (4.49) pour la condition de déclenchement choisie. Les conditions de déclenchement les plus utilisées sont la condition de franchissement d'un niveau, la condition de franchissement en croissant d'un niveau et la condition du point positif.

Nous allons établir les résultats relatifs à ces trois types de conditions.

4.5.1 Franchissement d'un niveau $a \in \mathbb{R}^*$

Cette condition de déclenchement est fréquemment utilisée dans la technique du décrétement aléatoire. La formulation pratique du test est la suivante :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{j\Delta t \geq 0 : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a \text{ ou } Y_{j-1} > a, Y_j \leq a\} \\ \tau_2 &= \inf\{j\Delta t > \tau_1 : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a \text{ ou } Y_{j-1} > a, Y_j \leq a\} \\ &\vdots \\ \tau_k &= \inf\{j\Delta t > \tau_{k-1} : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a \text{ ou } Y_{j-1} > a, Y_j \leq a\} \end{aligned}$$

où, $\forall p \in \mathbb{Z}, Y_p = Y(p\Delta t)$.

Dans ce cas, la condition de déclenchement \mathcal{C}_0 , que nous noterons ici \mathcal{C}_0^a , s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0^a &= (Y_0 \leq a, Y_1 > a) \cup (Y_0 > a, Y_1 \leq a) \\ &= \mathcal{C}_0^{a\uparrow} \cup \mathcal{C}_0^{a\downarrow}\end{aligned}\quad (4.50)$$

Les symboles \uparrow et \downarrow signifient que l'on franchit respectivement en croissant, en décroissant le niveau a .

Pour cette condition de déclenchement explicitons maintenant le membre de droite de la relation (4.49). Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_j | \mathcal{C}_0^a] &= \frac{\mathbb{E}[Y_j \mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_j \mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a} | (Y_0, Y_1)]]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a} \mathbb{E}[Y_j | (Y_0, Y_1)]]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]}\end{aligned}\quad (4.51)$$

Puisque Y est un processus gaussien stationnaire centré, on a :

$$\mathbb{E}[Y_j | (Y_0, Y_1)] = R_{Y_j W} R_{WW}^{-1} \cdot W \quad ; \quad W = (Y_0, Y_1)^T \quad (4.52)$$

avec :

$$R_{Y_j W} = [R_{YY}(j) \mid R_{YY}(j-1)] \quad (4.53)$$

$$R_{WW}^{-1} = \frac{1}{R_{YY}(0)(1-\rho_1^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

et où, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\rho_p = \rho(p\Delta t) = \frac{R_{YY}(p)}{R_{YY}(0)} = \frac{R_{YY}(p\Delta t)}{R_{YY}(0)} \quad (4.55)$$

On en déduit :

$$R_{Y_j W} R_{WW}^{-1} \cdot W = \alpha_0 Y_0 + \alpha_1 Y_1 \quad (4.56)$$

avec :

$$\alpha_0 = \frac{\rho_j - \rho_1 \rho_{j-1}}{1 - \rho_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{\rho_{j-1} - \rho_1 \rho_j}{1 - \rho_1^2} \quad (4.57)$$

L'expression (4.51) s'écrit encore :

$$\mathbb{E}[Y_j | \mathcal{C}_0^a] = \frac{\alpha_0 \mathbb{E}[Y_0 \mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}] + \alpha_1 \mathbb{E}[Y_1 \mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_0^a}]} \quad (4.58)$$

où les constantes α_0 et α_1 sont définies ci-dessus.

Calculons maintenant les espérances mathématiques du membre de droite de l'équation (4.58). Pour cela rappelons quelques résultats classiques.

Le couple (Y_0, Y_1) étant gaussien, sa loi admet pour densité :

$$f_{(Y_0, Y_1)}(y, z) = \frac{1}{2\pi R_{YY}(0)\sqrt{1-\rho_1^2}} \exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)(1-\rho_1^2)}(y^2 - 2\rho_1 yz + z^2)\right] \quad (4.59)$$

Par ailleurs, Y_0 est une v.a. gaussienne, de densité :

$$f_{Y_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_{YY}(0)}} \exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)}y^2\right] \quad (4.60)$$

Une version régulière de la loi conditionnelle de Y_1 sachant $Y_0 = y$ est alors donnée par le noyau markovien de densité :

$$f_{Y_1}(z|Y_0 = y) = \frac{f_{(Y_0, Y_1)}(y, z)}{f_{Y_0}(y)}$$

soit :

$$f_{Y_1}(z|Y_0 = y) = \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2}(z - \rho_1 y)^2\right] \quad (4.61)$$

où $\sigma_a^2 = R_{YY}(0)(1 - \rho_1^2)$.

Dans ce cadre, on a alors :

$$\mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{C_0^a}] = \mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{C_0^{a\uparrow}}] + \mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{C_0^{a\downarrow}}] \quad (4.62)$$

Explicitons maintenant chacun des termes de droite de l'expression (4.62) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{C_0^{a\uparrow}}] &= \int_{-\infty}^a y \left(\int_a^{+\infty} f_{Y_1}(z|y) \right) f_{Y_0}(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_a\sqrt{R_{YY}(0)}} \int_{-\infty}^a y \left(\int_a^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2}(z - \rho_1 y)^2\right] dz \right) \exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)}y^2\right] dy \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable :

$$\frac{z - \rho_1 y}{\sigma_a} = u \Leftrightarrow z = \sigma_a u + \rho_1 y$$

Il vient :

$$\mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{C_0^{a\uparrow}}] = -\sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \int_{-\infty}^a \Phi\left(\frac{\rho_1 y - a}{\sigma_a}\right) d\left(\exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)}y^2\right]\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale réduite.

Cette dernière intégrale peut être calculée d'abord par une intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u(y) &= \Phi\left(\frac{\rho_1 y - a}{\sigma_a}\right) \\ v'(y) &= d\left(\exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)}y^2\right]\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(y) &= \frac{\rho_1}{\sigma_a} \Phi'(x)|_{x=\frac{\rho_1 y - a}{\sigma_a}} \\ v(y) &= \exp\left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)}y^2\right] \end{cases}$$

puis en effectuant le changement de variable :

$$\frac{y - a\rho_1}{\sigma_a} = u \Leftrightarrow y = \sigma_a u + a\rho_1$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E} \left[Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}} \right] = -\sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[1 - (1 + \rho_1) \Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.63)$$

De la même manière, on montre que :

$$\mathbb{E} \left[Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\downarrow}} \right] = -\sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[\rho_1 - (1 + \rho_1) \Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.64)$$

Portant les expressions (4.63) et (4.64) dans (4.62), on obtient :

$$\mathbb{E} \left[Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^a} \right] = -\sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} (1 + \rho_1) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right) e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.65)$$

Par un calcul analogue, on montre que :

$$\mathbb{E} \left[Y_1 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^a} \right] = \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} (1 + \rho_1) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(\rho_1 - 1)}{\sigma_a} \right) \right) e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.66)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^a} \right] &= \int \int_{\mathcal{D}_0^a} f_{Y_0, Y_1}(y, z) dy dz \\ &= 2\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_0 \leq a\}} \right] = 2\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_1 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_1 \leq a\}} \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

où $\mathcal{D}_0^a = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (y \leq a, z > a) \cup (y > a, z \leq a)\}$

Portant les expressions (4.57), (4.65), (4.66) et (4.67) dans (4.58) on obtient finalement :

$$\mathbb{E} \left[Y_j | \mathcal{C}_0^a \right] = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \frac{(\rho_j + \rho_{j-1}) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right)}{\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_0 \leq a\}} \right]} e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.68)$$

On en déduit, pour la condition de franchissement du niveau a :

$$D_N(j\Delta t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \frac{(\rho_j + \rho_{j-1}) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right)}{\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_0 \leq a\}} \right]} e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.69)$$

4.5.2 Franchissement en croissant d'un niveau a

Pour cette condition de déclenchement, la formulation pratique du test s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \inf\{j\Delta t \geq 0 : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a\} \\ \tau_2 &= \inf\{j\Delta t > \tau_1 : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a\} \\ &\vdots \\ \tau_k &= \inf\{j\Delta t > \tau_{k-1} : Y_{j-1} \leq a, Y_j > a\}\end{aligned}$$

et on a :

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^{a\uparrow} = (Y_0 \leq a, Y_1 > a) \quad (4.70)$$

Examinons les cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

a) Cas $a \neq 0$

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E} [Y_j | \mathcal{C}_0^{a\uparrow}] = \frac{\alpha_0 \mathbb{E} [Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}}] + \alpha_1 \mathbb{E} [Y_1 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}}]}{\mathbb{E} [\mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}}]} \quad (4.71)$$

avec $\mathcal{C}_0^{a\uparrow}$, α_0 et α_1 définis respectivement par (4.70) et (4.57).

D'après l'expression (4.63) :

$$\mathbb{E} [Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}}] = -\sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[1 - (1 + \rho_1) \Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.72)$$

De même :

$$\mathbb{E} [Y_1 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{a\uparrow}}] = \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[1 - (1 + \rho_1) \Phi \left(\frac{a(\rho_1 - 1)}{\sigma_a} \right) \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.73)$$

En portant les expressions (4.72) et (4.73) dans (4.71) on obtient, après simplification :

$$\mathbb{E} [Y_j | \mathcal{C}_0^{a\uparrow}] = \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[\frac{-\rho_j + (\rho_j + \rho_{j-1}) \Phi \left(\frac{a(1-\rho_1)}{\sigma_a} \right)}{\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_0 \leq a\}} \right]} \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.74)$$

On en déduit :

$$D_N(j\Delta t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \left[\frac{-\rho_j + (\rho_j + \rho_{j-1}) \Phi \left(\frac{a(1-\rho_1)}{\sigma_a} \right)}{\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{I}_{\{Y_0 \leq a\}} \right]} \right] e^{-\frac{a^2}{2R_{YY}(0)}} \quad (4.75)$$

b) Cas $a = 0$

En posant $a = 0$ dans l'expression (4.71), il vient :

$$\mathbf{E} \left[Y_j | C_0^{0\uparrow} \right] = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{YY}(0)}{2\pi}} \times \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right]} \quad (4.76)$$

où :

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right] = \int \int_{\{y \leq 0, z > 0\}} f_{(Y_0, Y_1)}(y, z) dy dz$$

avec :

$$f_{(Y_0, Y_1)}(y, z) = \frac{1}{2\pi R_{YY}(0) \sqrt{1 - \rho_1^2}} \exp \left[-\frac{1}{2R_{YY}(0)(1 - \rho_1^2)} (y^2 - 2\rho_1 yz + z^2) \right]$$

En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

dans l'intégrale ci-dessus, on obtient, tous calculs faits

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right] = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{2\pi (1 - \rho_1 \sin 2\theta)} d\theta \quad (4.77)$$

Procédant ensuite au changement de variable $t = \tan \theta$ dans cette intégrale, il vient :

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right] = \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2 - 2\rho_1 t + 1} = \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(1 - \rho_1^2) \left[1 + \left(\frac{t - \rho_1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \right)^2 \right]}$$

Cette intégrale peut alors être calculée en effectuant le changement de variable $\frac{t - \rho_1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} = v$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\frac{-\rho_1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}} \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan v \right]_{-\infty}^{\frac{-\rho_1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\arctan \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire, après quelques manipulations :

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{0\uparrow}} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin(\rho_1) \quad (4.78)$$

Par suite, l'expression (4.76) prend la forme :

$$\mathbb{E}[Y_j | \mathcal{C}_0^{0\uparrow}] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R_{YY}(0)} \times \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\rho_1)\right]} \quad (4.79)$$

soit encore :

$$\mathbb{E}[Y_j | \mathcal{C}_0^{0\uparrow}] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R_{YY}(0)} \times \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\arccos(\rho_1)} \quad (4.80)$$

On en déduit, pour la condition de franchissement en croissant du niveau zéro :

$$D_N(j\Delta t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R_{YY}(0)} \times \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\arccos(\rho_1)} \quad (4.81)$$

4.5.3 Point positif

Cette condition est la plus simple et la plus "souple" des conditions de déclenchement. La formulation pratique du test s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{j\Delta t \geq 0 : a_1 < Y_j \leq a_2\} \\ \tau_2 &= \inf\{j\Delta t > \tau_1 : a_1 < Y_j \leq a_2\} \\ &\vdots \\ \tau_k &= \inf\{j\Delta t > \tau_{k-1} : a_1 < Y_j \leq a_2\} \end{aligned}$$

où a_1 et a_2 sont des réels.

On a dans ce cas :

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]} = (a_1 < Y_0 \leq a_2) \quad (4.82)$$

et il vient alors :

$$\mathbb{E}[Y_j | \mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]}] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]}} \mathbb{E}[Y_j | Y_0]]}{\mathbb{E}[\mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]}}]} = \frac{R_{YY}(j\Delta t)}{R_{YY}(0)} \tilde{a} \quad (4.83)$$

avec :

$$\tilde{a} = \frac{\mathbb{E}[Y_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]}}]}{\mathbb{E}[\mathbf{I}_{\mathcal{C}_0^{[a_1, a_2]}}]} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} y f_{Y_0}(y) dy}{\int_{a_1}^{a_2} f_{Y_0}(y) dy}$$

où :

$$f_{Y_0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_{YY}(0)}} e^{-\frac{1}{2R_{YY}(0)} y^2}$$

On en déduit :

$$D_N(j\Delta t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{R_{YY}(j\Delta t)}{R_{YY}(0)} \tilde{a} \quad (4.84)$$

avec \tilde{a} défini ci-dessus.

Dans le cas particulier : $a_1 = 0$, $a_2 = +\infty$, on obtient :

$$\tilde{a} = \frac{\mathbb{E} \left[Y_0 \mathbf{1}_{C_0^{[0, +\infty]}} \right]}{\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{C_0^{[0, +\infty]}} \right]} = \frac{\int_0^{+\infty} y f_{Y_0}(y) dy}{\int_0^{+\infty} f_{Y_0}(y) dy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_Y$$

D'où le résultat asymptotique dans ce cas :

$$D_N(j\Delta t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{R_{YY}(j\Delta t)}{\sigma_Y^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_Y \quad (4.85)$$

Examinons maintenant ce que deviennent les expressions (4.69), (4.75), (4.81), (4.84) et (4.85) lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $j \rightarrow +\infty$, de telle manière que $j\Delta t = t$. Les calculs ne sont détaillés que dans le cas du franchissement d'un niveau a . Pour les autres conditions de déclenchement, la technique étant la même, nous nous contenterons de donner les résultats.

(i) *Franchissement d'un niveau a*

Posons :

$$\mathbb{E} [Y_j | C_0^a] = \frac{f(\Delta t)}{g(\Delta t)} \quad (4.86)$$

avec :

$$f(\Delta t) = -\sqrt{\frac{R_Y(0)}{2\pi}} (\rho_j + \rho_{j-1}) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right) e^{-\frac{a^2}{2R_Y(0)}} \quad (4.87)$$

$$g(\Delta t) = 2\mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{\rho_1 Y_0 - a}{\sigma_a} \right) \mathbf{1}_{Y_0 \leq a} \right] \quad (4.88)$$

Puisque $f(0) = g(0) = 0$, on peut appliquer la règle de l'Hopital et il vient :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{g(\Delta t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta t) - f(0)}{g'(\Delta t) - g(0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta t)}{g'(\Delta t)}$$

Le calcul des dérivées des fonctions donne :

$$f'(\Delta t) = -\sqrt{\frac{R_Y(0)}{2\pi}} \left[\left(j\Delta t \rho'_j + (j-1)\Delta t \rho'_{j-1} \right) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1 - \rho_1)}{\sigma_a} \right) \right) \right] e^{-\frac{a^2}{2R_Y(0)}} \\ - \sqrt{\frac{R_Y(0)}{2\pi}} \left[2(\rho_j + \rho_{j-1}) \frac{a \rho'_1}{(1 + \rho_1) \sigma_a \sqrt{2\pi}} \right] e^{-\frac{a^2}{2R_Y(0)}} e^{-\frac{a^2(1-\rho_1)^2}{2\sigma_a^2}} \quad (4.89)$$

$$g'(\Delta t) = -\frac{\rho'_1}{\pi \sqrt{1 - \rho_1^2}} e^{-\frac{a^2}{2R_Y(0)}} e^{-\frac{a^2(1-\rho_1)^2}{2\sigma_a^2}} \quad (4.90)$$

Par suite :

$$\frac{f'(\Delta t)}{g'(\Delta t)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_a}{\rho_1'} \left[\left(j\Delta t \rho_j' + (j-1)\Delta t \rho_{j-1}' \right) \left(1 - 2\Phi \left(\frac{a(1-\rho_1)}{\sigma_a} \right) \right) \right] e^{\frac{a^2(1-\rho_1)^2}{2\sigma_a^2}} + \frac{a}{1+\rho_1} (\rho_j + \rho_{j-1}) \quad (4.91)$$

Or, puisque $t = j\Delta t$ pour $j \rightarrow +\infty$ et $\Delta t \rightarrow 0$, il est facile de voir que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{g(\Delta t)} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta t)}{g'(\Delta t)} = \rho(t)a = \frac{R_{YY}(t)}{R_{YY}(0)}a \quad (4.92)$$

Nous venons donc de montrer que, pour N grand :

$$D_N(t) \approx \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} a \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4.93)$$

(ii) *Franchissement en croissant d'un niveau a*

Par une démonstration analogue à la précédente, on obtient l'approximation suivante :

$$D_N(t) \approx \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} a - \frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_Y \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4.94)$$

Pour $a = 0$ (franchissement en croissant du niveau zéro), il vient :

$$D_N(t) \approx -\frac{\dot{R}_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_Y \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4.95)$$

(iii) *Point Positif*

Dans ce cas on obtient l'approximation asymptotique suivante :

$$D_N(t) \approx \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \tilde{a} \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4.96)$$

avec :

$$\tilde{a} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} y f_{Y_0}(y) dy}{\int_{a_1}^{a_2} f_{Y_0}(y) dy}$$

Dans le cas particulier $a_1 = 0$, $a_2 = +\infty$, il vient :

$$D_N(t) \approx \frac{R_{YY}(t)}{\sigma_Y^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_Y \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4.97)$$

Compte tenu du fait que la fonction de corrélation de la solution stationnaire Y et la dérivée de cette fonction s'écrivent : $R_{YY}(t) = C_c e^{A_c t} \Sigma C_c^T$ et $\dot{R}_{YY}(t) = C_c e^{A_c t} A_c \Sigma C_c^T$, les expressions

(4.93), (4.94), (4.95) et (4.97) peuvent encore s'écrire :

$$D_N(t) \approx C_c e^{A_c t} \mathcal{C}^1 \quad \text{avec } \mathcal{C}^1 = \frac{a}{\sigma_Y^2} \Sigma C_c^T \quad (4.98)$$

$$D_N(t) \approx C_c e^{A_c t} \mathcal{C}^2 \quad \text{avec } \mathcal{C}^2 = \frac{a}{\sigma_Y^2} \Sigma C_c^T - \frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_c \Sigma C_c^T \quad (4.99)$$

$$D_N(t) \approx C_c e^{A_c t} \mathcal{C}^3 \quad \text{avec } \mathcal{C}^3 = -\frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_c \Sigma C_c^T \quad (4.100)$$

$$D_N(t) \approx C_c e^{A_c t} \mathcal{C}^4 \quad \text{avec } \mathcal{C}^4 = \frac{1}{\sigma_Y} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Sigma C_c^T \quad (4.101)$$

Les expressions ci-dessus montrent, d'une part que le décrétement aléatoire peut être utilisé pour l'estimation de la fonction de corrélation et d'autre part que la fonction du décrétement est de la même forme que la réponse libre ou à une impulsion du système. Par conséquent les méthodes classiques d'estimation des paramètres modaux, telles que la méthode polyreference (PTD), la méthode de réalisation stochastique et la méthode d'Ibrahim peuvent être utilisées pour extraire les paramètres modaux à partir de la fonction du décrétement.

4.5.4 Commentaires des résultats

À la lueur des résultats obtenus dans les paragraphes précédents, trois remarques s'imposent :

- 1- Nous avons retrouvé les résultats proposés dans la littérature pour les conditions de franchissement d'un niveau et du point positif. Par contre, pour le franchissement en croissant d'un niveau, notre résultat diffère (par une constante multiplicative) de celui trouvé par Asmussen [7]. Et notre résultat est le bon, car confirmé numériquement, comme nous le verrons plus loin. On met ainsi en évidence de façon flagrante l'erreur de vouloir interpréter le décrétement comme une espérance conditionnelle.
- 2- Nous avons montré (cf. (4.93), (4.95), (4.96), (4.97)) que le décrétement est un estimateur de la fonction de corrélation de la réponse stationnaire et de sa dérivée.
- 3- Une question reste ouverte : laquelle des conditions de déclenchement vaut-il mieux choisir ?

On peut noter, concernant ce dernier point, que la réponse n'est pas facile à donner. Mais quelle qu'elle soit, elle devra intégrer dans sa logique deux éléments importants : le nombre de points de déclenchement (il en faut un nombre minimum) et la variance de l'estimateur, c'est-à-dire de la fonction du décrétement (il faut pouvoir l'évaluer). Or, pour ce qui est de la variance, son calcul est très difficile du fait de la définition adoptée pour le décrétement. Nous pouvons tout de même avancer l'argumentation suivante. On pourrait penser que la condition du point positif, qui fournit plus de points de déclenchement que les deux autres conditions, est la plus pertinente des trois. Cependant, les nombreuses sections finissantes utiles au fonctionnement de l'algorithme qui utilise cette condition sont très peu différentes les unes des autres car très peu décalées. Dès lors, la variance d'estimation contient des termes d'intercorrélation qui ne s'annulent pas et par suite cette variance sera importante.

Reste alors les deux autres conditions. Toutefois, celle de franchissement en croissant du niveau zéro semble mieux convenir, car elle permet d'obtenir plus de points de déclenchement que la condition de franchissement (en croissant ou décroissant) d'un niveau.

4.5.5 Compléments algorithmiques

Il s'agit ici :

- 1- de fournir des informations permettant de choisir avec pertinence la longueur d'estimation de la fonction du décrement ;
- 2- d'évaluer la qualité de l'estimée obtenue de cette fonction.

A cette fin, un test intéressant est celui de symétrie, qui consiste à vérifier les propriétés de symétrie de la fonction de corrélation du processus réponse. Les éléments R_{ij} de cette fonction matricielle doivent en effet vérifier, $\forall \tau \in \mathbb{R}$:

$$R_{ij}(\tau) = R_{ji}(-\tau) \quad (4.102)$$

A la fonction de corrélation estimée à partir du décrement, on associe la fonction d'erreur suivante :

$$\epsilon_{ij}^R(\tau) = \frac{\hat{R}_{ij}(\tau) - \hat{R}_{ji}(-\tau)}{2} \quad (4.103)$$

où \hat{R}_{ij} est l'estimée brute de la fonction de corrélation.

Une estimée corrigée de la fonction de corrélation peut alors être obtenue par :

$$\hat{R}_{ij}^{corr}(\tau) = \frac{\hat{R}_{ij}(\tau) + \hat{R}_{ji}(-\tau)}{2} \quad (4.104)$$

Une manière de prédire la longueur d'estimation de la fonction du décrement consiste à représenter sur le même graphe la fonction d'erreur définie par l'expression (4.103) et la fonction de corrélation définie par (4.104). A partir de ce graphe il est alors facile de détecter lorsque la fonction de corrélation se dégrade ce qui se traduit par une augmentation de l'erreur [7].

Pour des exemples simples où la matrice de corrélation peut être calculée analytiquement, l'évaluation des fonctions de corrélation peut être effectuée (après normalisation) en calculant l'erreur d'estimation définie par :

$$\epsilon_{ij}^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[R_{ij}(k\Delta t) - \hat{R}_{ij}(k\Delta t) \right]^2 \quad (4.105)$$

avec M la taille de l'échantillon du décrement, $R_{ij}(k\Delta t)$ la fonction de corrélation théorique et $\hat{R}_{ij}(k\Delta t)$ son estimée par le décrement.

4.5.6 Illustrations numériques

Afin d'illustrer les résultats donnés par les différentes conditions de déclenchement, nous considérons deux exemples de systèmes dynamiques linéaires du second ordre : l'un de dimension un, l'autre de dimension deux.

(a) Oscillateur à un ddl

On considère l'oscillateur linéaire scalaire d'équation d'évolution :

$$\ddot{Y}(t) + 2\omega_0\xi_0\dot{Y}(t) + \omega_0^2Y(t) = L\mathcal{N}(t) \quad (4.106)$$

où \mathcal{N} est un bruit blanc gaussien normalisé scalaire, $\omega_0 = 4\pi rad.s^{-1}$, $\xi_0 = 0.01$ et $L = 1.6\pi^{3/2}$.

Pour cet exemple simple la fonction de corrélation de la réponse stationnaire de (4.106) est donnée explicitement par (4.2). On peut alors comparer la fonction corrélation estimée à partir du décrétement à la fonction de corrélation théorique connue. Le calcul du décrétement est effectué à partir d'une trajectoire échantillonnée de la réponse stationnaire, obtenue en utilisant l'algorithme de simulation présenté dans l'annexe A (première méthode). La fréquence d'échantillonnage est de $20Hz$ ce qui correspond à un pas temporel d'échantillonnage $\Delta t = 0.05s$. La taille de l'échantillon simulé est $N = 4000$.

(i) Cas du franchissement d'un niveau a

La condition de déclenchement utilisée est le franchissement du niveau $a = \sqrt{2}\sigma_Y$. La longueur de la fonction du décrétement a été fixée à $M = 50$ ce qui nous a permis de disposer de 274 points de déclenchement pour les instants positifs et de 281 points pour les instants négatifs. Les fonctions de corrélation estimée et théorique, cette dernière donnée par l'expression (4.2), sont représentées sur la figure 4.4. La figure 4.5, sur laquelle nous avons également représenté la fonction d'erreur, présente le même type de comparaison mais où l'estimée a été corrigée par la formule (4.104).

Les figures 4.4 et 4.5 montrent que les estimations sont bonnes. On peut constater sur le graphe de la figure 4.5 que l'erreur est très petite par rapport à la fonction de corrélation et qu'elle croît avec le temps. Ce graphe nous a permis de choisir une longueur d'estimation M satisfaisante pour le décrétement, égale à 50.

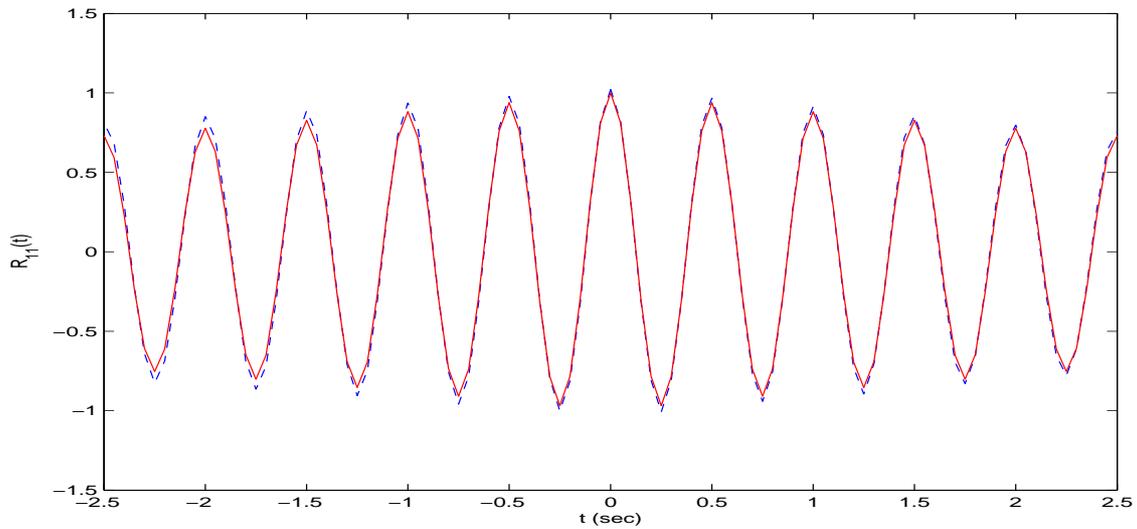


FIG. 4.4 – **Franchissement du niveau** $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).

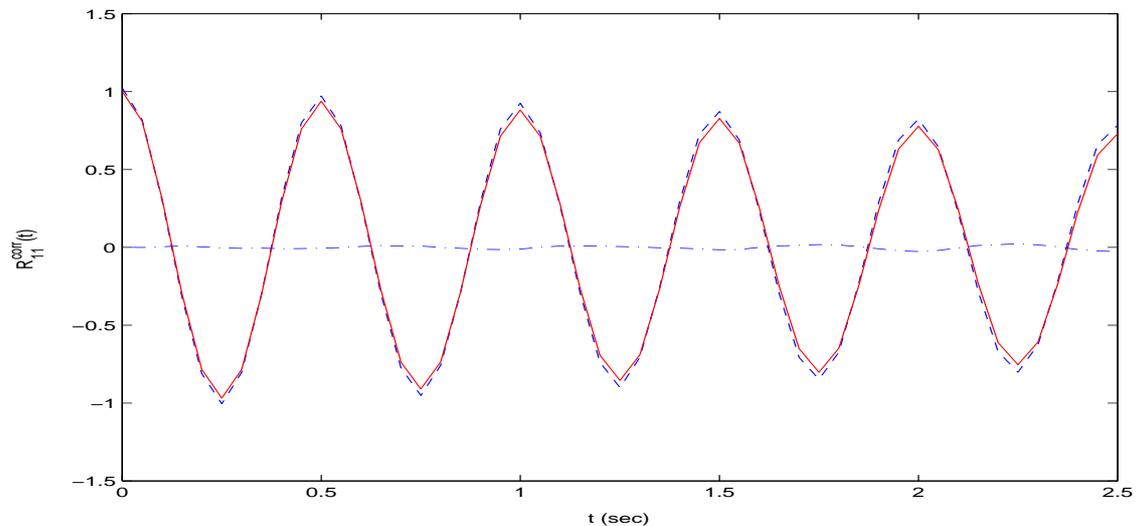


FIG. 4.5 – **Franchissement du niveau** $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).

(ii) Cas du franchissement en croissant d'un niveau a

On considère ici le même type de comparaison que dans le cas précédent, mais en utilisant la condition de franchissement en croissant du niveau a , avec $a = \sqrt{2}\sigma_Y$, et en prenant pour variable de comparaison non pas la fonction de corrélation mais la fonction du décrement

(comparaison de la fonction du décrement estimée à la fonction du décrement théorique (4.94)). Les résultats sont représentés graphiquement sur les figures 4.6 et 4.7. La figure 4.6 compare l'estimée brute de la fonction du décrement à la fonction du décrement théorique. La figure 4.7 présente le même type de comparaison mais avec cette fois l'estimée corrigée de la fonction du décrement à la place de l'estimée brute. Cette estimée corrigée est donnée par :

$$\hat{D}_{11}^{corr}(\tau) = \frac{\hat{D}_{11}(\tau) + \hat{D}_{11}(-\tau)}{2} \quad (4.107)$$

où $\hat{D}_{11}(\tau)$ est l'estimée brute.

De même que pour la fonction de corrélation on peut définir une fonction d'erreur pour l'estimée du décrement :

$$\epsilon_{11}^D(\tau) = \frac{\hat{D}_{11}(\tau) - \hat{D}_{11}(-\tau)}{2} \quad (4.108)$$

Cette fonction est représentée graphiquement sur la figure 4.7.

La condition de déclenchement fournit 137 points de déclenchement pour les instants positifs et 141 points de déclenchement pour les instants négatifs. Là encore, les estimées sont correctes.

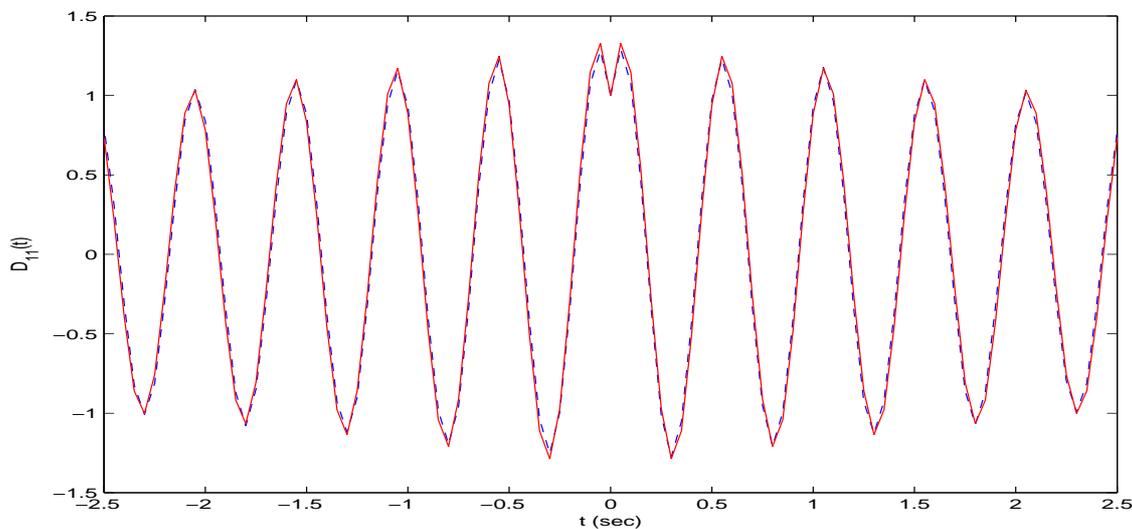


FIG. 4.6 – **Franchissement en croissant du niveau** $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction du décrement et la fonction du décrement théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).

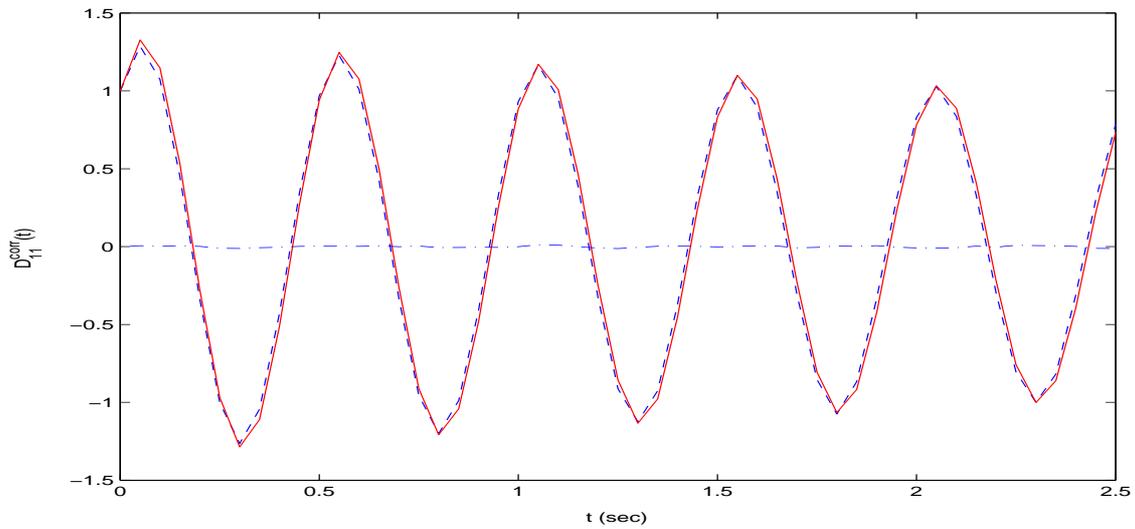


FIG. 4.7 – **Franchissement en croissant du niveau** $a = \sqrt{2}\sigma_Y$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction du décrétement et la fonction du décrétement théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).

Examinons maintenant le cas où $a = 0$. Autrement dit, nous considérons la condition de franchissement en croissant du niveau zéro. Les figures 4.8 et 4.9 comparent les estimées brute et corrigée de la fonction de corrélation à la fonction de corrélation théorique. Comme précédemment on peut observer que ces estimées sont de qualité très satisfaisante.

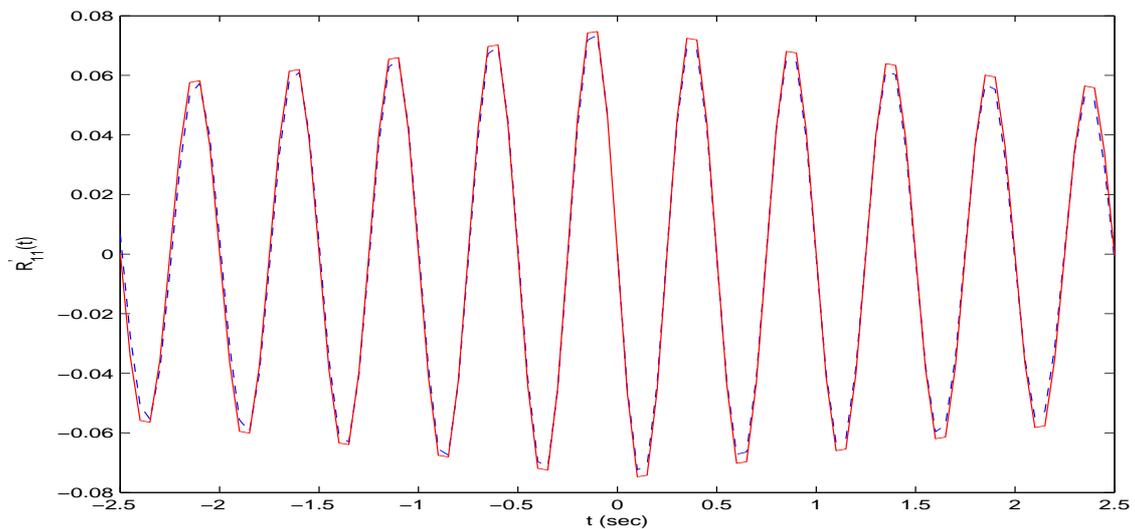


FIG. 4.8 – **Franchissement en croissant du niveau** $a = 0$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).

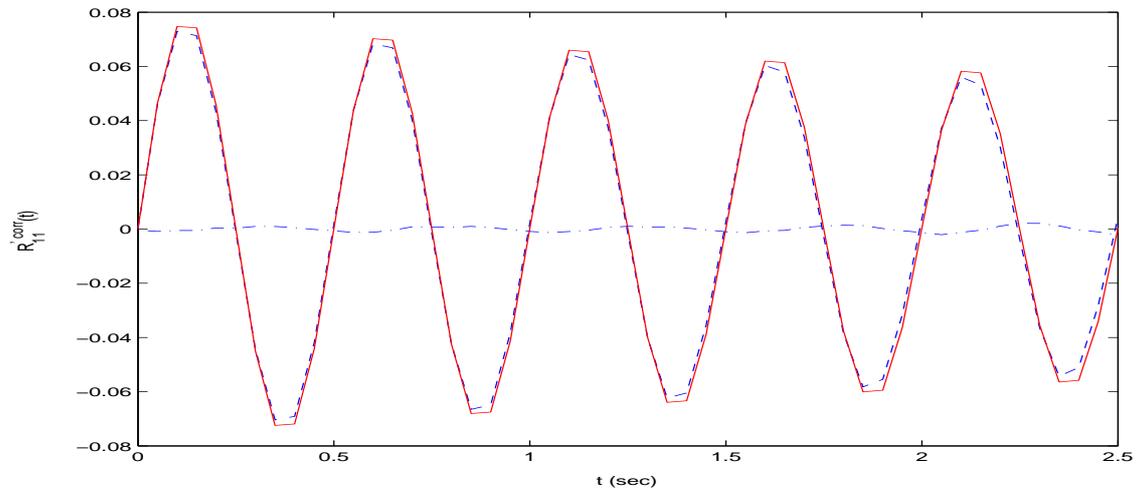


FIG. 4.9 – **Franchissement en croissant du niveau $a = 0$** - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).

(iii) Cas du point positif

La condition de déclenchement est celle du point positif avec $a_1 = 0$ et $a_2 = +\infty$. Ce choix fournit 1969 points de déclenchement pour les instants positifs et 1971 pour les instants négatifs. Les figures 4.10 et 4.11 présentent le même type de comparaison que dans les cas précédents. On constate une fois encore une bonne adéquation entre estimées et cible.

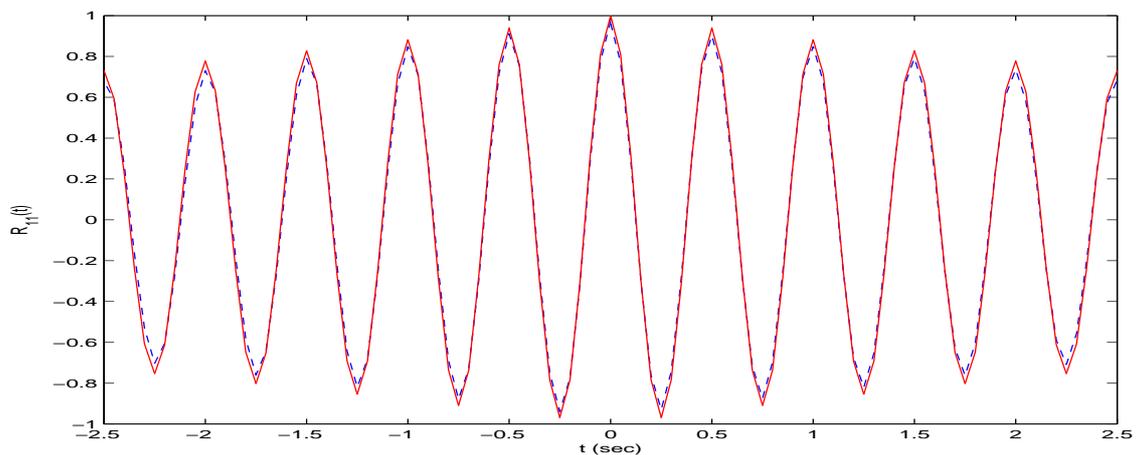


FIG. 4.10 – **Condition de point positif : $a_1 = 0$, $a_2 = +\infty$** - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).

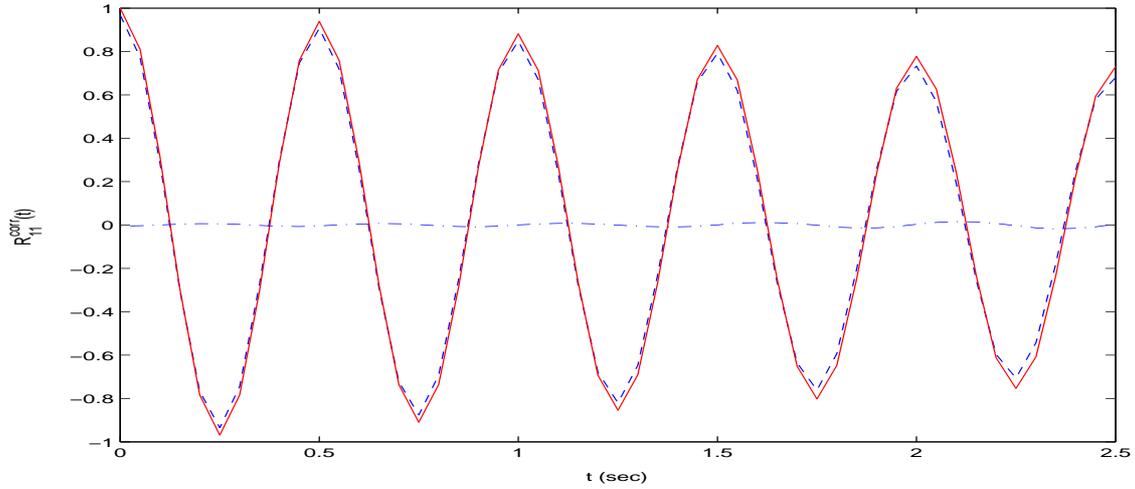


FIG. 4.11 – **Condition de point positif** : $a_1 = 0$, $a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).

(b) Oscillateur à deux ddl

Cet exemple concerne un oscillateur de dimension deux dont le comportement dynamique est décrit par l'équation du second ordre :

$$M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = LN(t) \quad (4.109)$$

où $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)^T$ est un bruit blanc gaussien normalisé bidimensionnel et :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1.35 & -1.50 \\ -1.50 & 2.70 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 700 & -200 \\ -200 & 500 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La fonction de corrélation de la réponse stationnaire $Z = (Z_1, Z_2)^T$ de (4.109) s'écrit, pour $t \geq 0$:

$$R_{ZZ}(t) = \begin{bmatrix} R_{Z_1 Z_1}(t) & R_{Z_1 Z_2}(t) \\ R_{Z_2 Z_1}(t) & R_{Z_2 Z_2}(t) \end{bmatrix} = H_c e^{A_c t} \Sigma H_c^T \quad (4.110)$$

où $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est solution de l'équation de Lyapunov $A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -B_c B_c^T$, avec :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{(2 \times 2)} & I_{(2 \times 2)} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} 0_{(2 \times 2)} \\ M^{-1}L \end{bmatrix}; H_c = [I_{(2 \times 2)} \quad 0_{(2 \times 2)}] \quad (4.111)$$

Nous ne présentons ici les résultats que dans le cas du point positif.

Les figures (4.12) et (4.13) relatives à cet exemple présentent le même type de comparaison que dans les exemples à une dimension, la cible étant ici donnée par (4.110). La comparaison concerne les termes $R_{ij} = R_{Z_i Z_j}$ de cette cible et leurs estimées par le décrétement. On constate à nouveau la très bonne qualité des résultats obtenus, justifiant ainsi la pertinence de l'emploi de la méthode du décrétement pour l'estimation des fonctions de corrélation.

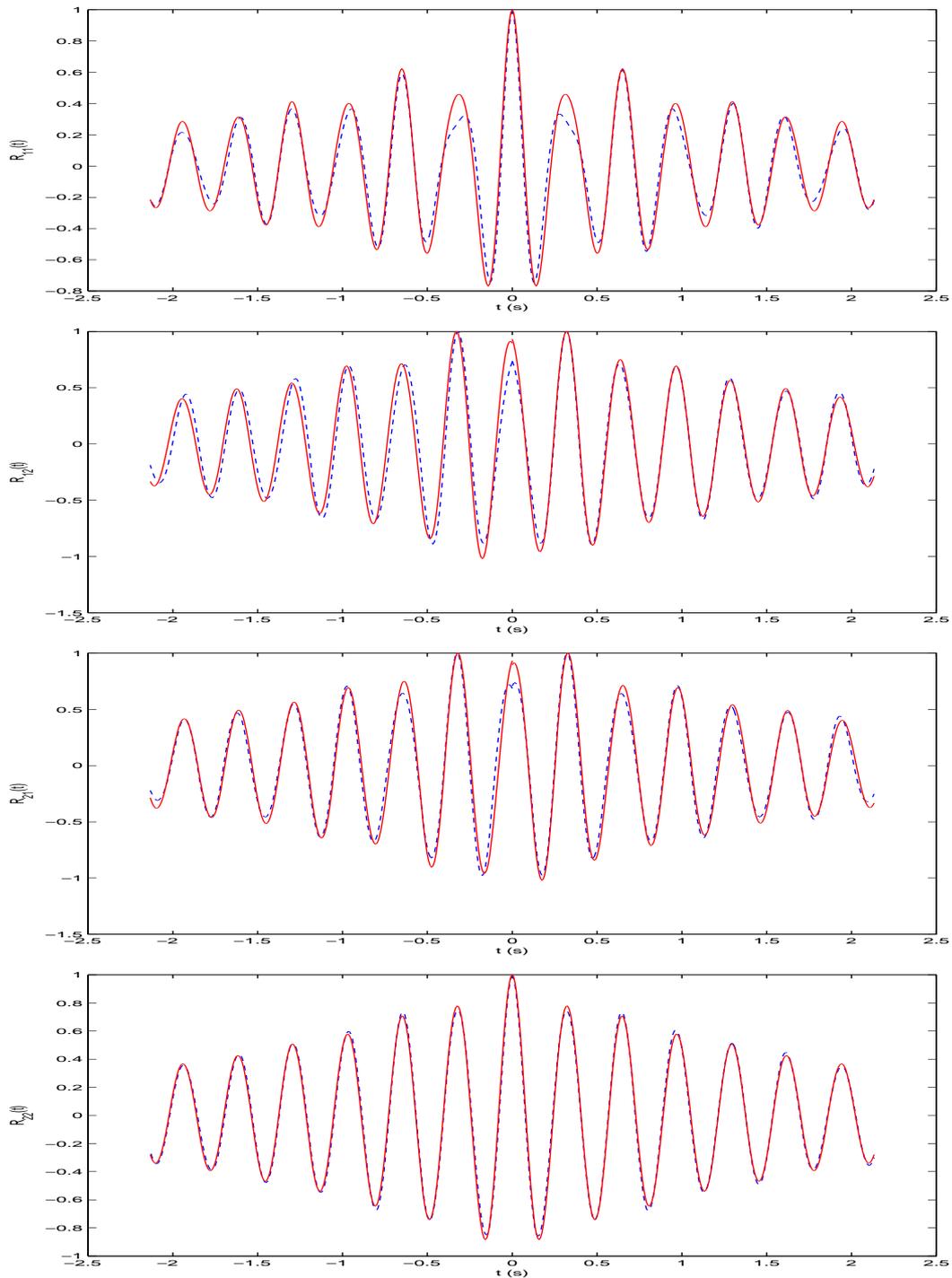


FIG. 4.12 – Condition de point positif : $a_1 = \sqrt{2}\sigma_Y$, $a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée brute de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; -- : estimée brute).

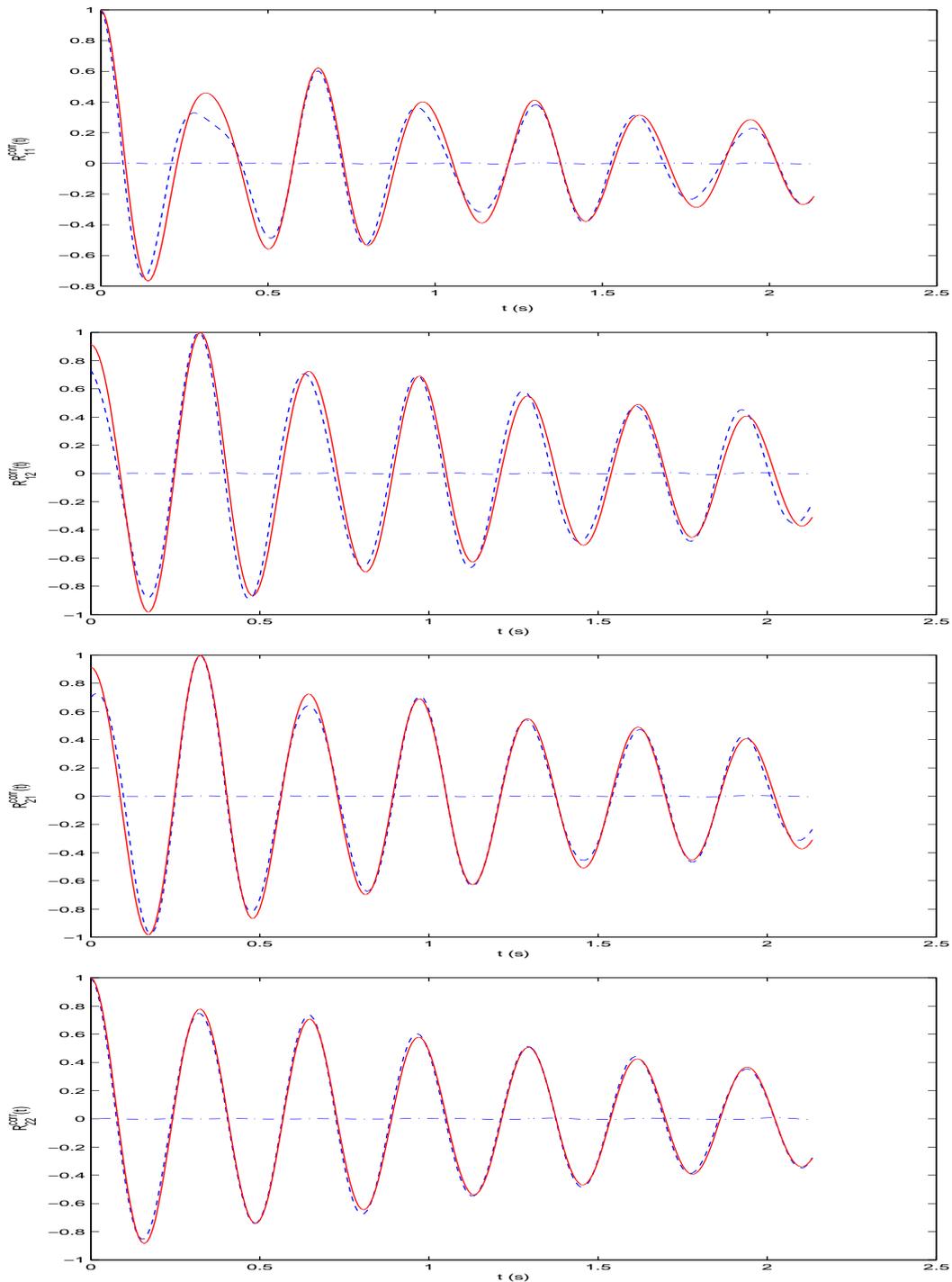


FIG. 4.13 – Condition de point positif : $a_1 = \sqrt{2}\sigma_Y$, $a_2 = +\infty$ - Comparaison entre l'estimée corrigée de la fonction de corrélation et la fonction de corrélation théorique (— : théorique ; — : estimée corrigée ; -.- : fonction d'erreur).

4.6 Méthode d'Ibrahim

4.6.1 Rappels

(a) Soient $((\beta_k, \Phi_k), k \in K_n)$, $K_n = \{1, \dots, n\}$, les solutions du problème spectral : $(\beta_k^2 M + \beta_k D + K)\Phi_k = 0$. D'après les résultats du chapitre 2, ces éléments sont aussi solution du problème aux valeurs propres $A_c \Psi_k = \beta_k \Psi_k$ (i.e. β_k et Ψ_k sont les éléments propres relatifs à la matrice A_c) et où $\Psi_k = [\Phi_k^T, \beta_k \Phi_k^T]^T$. On a alors classiquement :

$$\Lambda = \Psi^{-1} A_c \Psi \Leftrightarrow A_c = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (4.112)$$

avec $\Lambda = \text{diag}(\beta_1, \bar{\beta}_1, \dots, \beta_m, \bar{\beta}_m) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ et $\Psi = [\Psi_1 | \bar{\Psi}_1 | \dots | \Psi_m | \bar{\Psi}_m] \in \mathbf{C}^{n \times n}$. De plus Ψ est de la forme :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Lambda \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n \times n} \quad (4.113)$$

avec $\Phi = [\Phi_1 | \bar{\Phi}_1 | \dots | \Phi_m | \bar{\Phi}_m] \in \mathbf{C}^{m \times n}$.

(b) Soit $y = (y(t), t \in \mathbf{R}_+)$ la solution sur \mathbf{R}_+ de l'équation homogène associée à (1.6), issue de la condition initiale $X(0) = x_0 = (z_0^T, \dot{z}_0^T)^T$, c'est-à-dire la solution de :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_c X(t), & t > 0 \\ X(0) = x_0 = (z_0^T, \dot{z}_0^T)^T \\ Y(t) = C_c X(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.114)$$

et donc aussi de l'équation :

$$\begin{cases} M \ddot{Z}(t) + D \dot{Z}(t) + K Z(t) = 0, & t > 0 \\ Z(0) = z_0 \quad ; \quad \dot{Z}(0) = \dot{z}_0 \\ Y(t) = \Pi_d Z(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.115)$$

avec $\Pi_d \in \mathbf{R}^{l \times m}$ le projecteur de $\mathbf{R}^{m \times 1}$ dans $\mathbf{R}^{l \times 1}$ associant aux ddl du modèle, regroupés dans $Z(t) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, les ddl mesurés, regroupés dans $Y(t) \in \mathbf{R}^{l \times 1}$, $C_c = \Pi_d H_c \in \mathbf{R}^{l \times n}$ et A_c, H_c les éléments de $\mathbf{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{R}^{m \times n}$, respectivement, donnés par (1.3) et (1.4), avec $n = 2m$ et $l \ll m$.

On a, $\forall t \geq 0$:

$$y(t) = C_c e^{A_c t} x_0 \quad (4.116)$$

Tenant compte de (4.112), de ce que $e^{\Psi \Lambda \Psi^{-1}} = \Psi e^{\Lambda} \Psi^{-1}$ et posant :

$$q_0 = \Psi^{-1} x_0 = \Psi^{-1} (z_0^T, \dot{z}_0^T)^T \in \mathbf{C}^{n \times 1} \quad (4.117)$$

$$\tilde{\Phi} = C_c \Psi = \Pi_d H_c \Psi = \Pi_d \Phi \in \mathbf{C}^{l \times n} \quad (4.118)$$

L'expression (4.116) prend alors la forme, $\forall t \geq 0$:

$$y(t) = \tilde{\Phi} e^{\Lambda t} q_0 \quad (4.119)$$

(c) $\mathcal{N} = (\mathcal{N}(t), t \in \mathbb{R})$ désignant un bruit blanc gaussien normalisé m -dimensionnel et L un élément de $\mathbb{R}^{m \times m}$ de rang $p \leq m$, soit $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$ le processus gaussien centré solution stationnaire de (1.5), donc aussi de :

$$\begin{cases} M\ddot{Z}(t) + D\dot{Z}(t) + KZ(t) = L\mathcal{N}(t) \\ Y(t) = \Pi_d Z(t) \end{cases} \quad (4.120)$$

et soit $R_{YY} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l \times l} : t \rightarrow R_{YY}(t) = \mathbb{E}[Y(t+u)Y^T(u)]$ sa fonction de corrélation. On a, $\forall t \geq 0$:

$$R_{YY}(t) = C_c e^{A_c t} \Sigma C_c^T \quad (4.121)$$

avec Σ solution de l'équation de Lyapunov $A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -B_c B_c^T$, $C_c = \Pi_d H_c$ et A_c, B_c, H_c donnés par (1.3) et (1.4).

Compte tenu de (4.112) et (4.118), et posant :

$$C_0 = \Psi^{-1} \Sigma C_c^T = \Psi^{-1} \Sigma H_c^T \Pi_d^T \in \mathbb{C}^{n \times l} \quad (4.122)$$

cette fonction de corrélation, telle que $R_{YY}(-t) = R_{YY}^T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, peut alors se réécrire, $\forall t \geq 0$:

$$R_{YY}(t) = \tilde{\Phi} e^{A t} C_0 \quad (4.123)$$

(d) Soit h la fonction de réponse impulsionnelle du filtre linéaire causal défini par (1.6). Elle s'écrit, $\forall t \geq 0$:

$$h_y(t) = C_c e^{A_c t} B_c \quad (4.124)$$

soit, d'après (4.112) et (4.118) :

$$h_y(t) = \tilde{\Phi} e^{A t} \tilde{B}_c \quad (4.125)$$

avec :

$$\tilde{B}_c = \Psi^{-1} B_c \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad (4.126)$$

(e) Soient $R_{YY,i}(t)$ et $h_{y,i}(t)$ les i -èmes colonnes des matrices $R_{YY}(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $h_y(t) \in \mathbb{C}^{l \times m}$ respectivement. D'après (4.123) et (4.125), elles s'écrivent :

$$R_{YY,i}(t) = \tilde{\Phi} e^{A t} C_{0,i} \quad ; \quad h_{y,i}(t) = \tilde{\Phi} e^{A t} \tilde{B}_{c,i} \quad (4.127)$$

où $C_{0,i} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ et $\tilde{B}_{c,i} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ sont les i -èmes colonnes de C_0 et \tilde{B}_c respectivement.

(f) Soit D_N^y la fonction vectorielle du décrétement associée à une condition de déclenchement sur y mettant en jeu N instants de déclenchement. Tenant compte du fait que $Y = \Pi_d Z$ et des relations (4.39), (4.112) et (4.118), cette fonction s'écrit, $\forall t \geq 0$:

$$D_N^y(t) = \tilde{\Phi} e^{A t} c_N \quad (4.128)$$

avec $c_N = \Psi^{-1} r_N \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ et r_N donné par (4.40).

Comparant les expressions (4.127) et (4.128) à (4.119), on voit alors que la fonction du décrétement $D_N^y(t)$ et les colonnes de $R_{YY}(t)$ et $h_y(t)$ ne diffèrent de la réponse libre $y(t)$ qu'à une constante matricielle multiplicative près. Ce résultat, très important en pratique, est à la base de plusieurs méthodes d'extraction modale, dont la méthode PTD (Polyreference Time Domain) [7, 28] et la méthode d'Ibrahim présentée ici.

4.6.2 Principe de la méthode

La méthode d'Ibrahim [42, 28] est une méthode d'identification modale, donc basée sur la résolution d'un problème spectral (i.e. aux valeurs propres). Formulons ce problème.

Rappelons d'abord que la donnée de base est une famille $\{y_k, k \in I_N\}$, $I_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, d'éléments $y_k \in \mathbb{R}^l$ représentant les valeurs mesurées aux instants ($t_k = k\Delta t$, $k \in I_N$) de l ddl de la structure, valeurs enregistrées à cadence régulière de pas constant Δt par un système de mesure " l -voies" approprié. Assimilons alors les y_k à des observations aux instants t_k de la réponse $y = (y(t), t \in \mathbb{R}_+)$ d'un système dynamique homogène de la forme (4.115). D'où, d'après (4.119) :

$$y_k = y(t_k) = y(k\Delta t) = \tilde{\Phi} e^{\Lambda k \Delta t} q_0, \quad k \in I_N \quad (4.129)$$

Nous obtenons ainsi N relations dans lesquelles les inconnues sont les matrices $\tilde{\Phi} \in \mathbb{C}^{l \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $q_0 \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, avec $n = 2m$. Or, $e^{\Lambda t}$ et q_0 étant de la forme :

$$e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\beta_1 t}, e^{\bar{\beta}_1 t}, \dots, e^{\beta_m t}, e^{\bar{\beta}_m t}) \quad ; \quad q_0 = (q_{0,1}, \bar{q}_{0,1}, \dots, q_{0,m}, \bar{q}_{0,m})^T \quad (4.130)$$

Posons :

$$\Gamma = e^{\Lambda \Delta t} = \text{diag}(e^{\beta_1 \Delta t}, e^{\bar{\beta}_1 \Delta t}, \dots, e^{\beta_m \Delta t}, e^{\bar{\beta}_m \Delta t}) \quad ; \quad Q_0 = \text{diag}(q_{0,1}, \bar{q}_{0,1}, \dots, q_{0,m}, \bar{q}_{0,m}) \quad (4.131)$$

et, $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\gamma^{(j)} = (e^{\beta_1 j \Delta t}, e^{\bar{\beta}_1 j \Delta t}, \dots, e^{\beta_m j \Delta t}, e^{\bar{\beta}_m j \Delta t})^T \quad (4.132)$$

Il est alors facile de vérifier que, $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\gamma^{(j+1)} = \Gamma \gamma^{(j)} \quad ; \quad \Gamma^j q_0 = Q_0 \gamma^{(j)} \quad (4.133)$$

Par suite, (4.129) se réécrit, $\forall k \in I_N$:

$$y_k = \tilde{\Phi} \Gamma^k q_0 = \tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(k)} \quad (4.134)$$

Considérons la N -suite des mesures expérimentales $\{y_k, k \in I_N\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-2}, y_{N-1}\}$ et extrayons de cette dernière les deux sous-suites de longueur $N-1$ suivantes : $\{y_0, y_1, \dots, y_{N-2}\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$, la seconde se déduisant de la première par un *décalage avant* de pas Δt . Associons ensuite à ces deux sous-suites les matrices :

$$\mathcal{Y}_p = [y_0 | y_1 | \dots | y_{N-2}] \in \mathbb{R}^{l \times (N-1)} \quad (4.135)$$

$$\mathcal{Y}_f = [y_1 | y_2 | \dots | y_{N-1}] \in \mathbb{R}^{l \times (N-1)} \quad (4.136)$$

qui peuvent aussi s'écrire, d'après (4.134) :

$$\mathcal{Y}_p = \left[\tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(0)} \mid \tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(1)} \mid \dots \mid \tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(N-2)} \right]$$

$$\mathcal{Y}_f = \left[\tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(1)} \mid \tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(2)} \mid \dots \mid \tilde{\Phi} Q_0 \gamma^{(N-1)} \right]$$

soit encore, pour la seconde, d'après (4.133) :

$$\mathcal{Y}_f = \left[\tilde{\Phi} Q_0 \Gamma \gamma^{(0)} | \tilde{\Phi} Q_0 \Gamma \gamma^{(1)} | \dots | \tilde{\Phi} Q_0 \Gamma \gamma^{(N-2)} \right]$$

On peut alors voir que \mathcal{Y}_f et \mathcal{Y}_p sont liées par la relation :

$$\mathcal{Y}_f = \mathcal{A} \mathcal{Y}_p \quad (4.137)$$

avec $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ une matrice de décalage vérifiant :

$$\mathcal{A} \tilde{\Phi} Q_0 = \tilde{\Phi} Q_0 \Gamma \quad (4.138)$$

Or, chaque membre de l'égalité ci-dessus est une matrice complexe ($l \times n$) : $\mathcal{A} \tilde{\Phi} Q_0 \in \mathbb{C}^{l \times n}$, $\tilde{\Phi} Q_0 \Gamma \in \mathbb{C}^{l \times n}$. Donc (4.138) équivaut aux $n = 2m$ égalités de colonnes : $(\mathcal{A} \tilde{\Phi} Q_0)_k = (\tilde{\Phi} Q_0 \Gamma)_k$, $k \in K_n = \{1, \dots, n\}$, soit encore : $\mathcal{A} \tilde{\Phi}_{k, q_{0,k}} = \tilde{\Phi}_{k, q_{0,k}} \gamma_k$, $k \in K_n$, où $\tilde{\Phi}_k \in \mathbb{C}^{l \times 1}$ est la k -ème colonne de la matrice $\tilde{\Phi} \in \mathbb{C}^{l \times n}$ et où nous avons posé : $\gamma_k = e^{\beta_k \Delta t}$. Par suite, la matrice \mathcal{A} vérifie, $\forall k \in K_n$:

$$\mathcal{A} \tilde{\Phi}_k = \gamma_k \tilde{\Phi}_k \quad (4.139)$$

La méthode d'Ibrahim est basée sur les relations (4.137) et (4.139). En effet, les matrices \mathcal{Y}_p et \mathcal{Y}_f étant connues par (4.135) et (4.136), l'équation (4.137) peut être résolue en \mathcal{A} au sens des moindres carrés. On obtient :

$$\mathcal{A} = \mathcal{Y}_f \mathcal{Y}_p^\dagger = \mathcal{Y}_f \mathcal{Y}_p^T (\mathcal{Y}_p \mathcal{Y}_p^T)^{-1} \quad (4.140)$$

Connaissant \mathcal{A} , on résout ensuite le problème aux valeurs propres (4.139). On obtient ainsi l couples solutions $(\gamma_k, \tilde{\Phi}_k)$. Or, $\forall k \in K_l = \{1, \dots, l\}$, $\gamma_k = e^{\beta_k \Delta t}$. On en déduit, $\forall k \in K_l$, $\beta_k = \frac{\ln \gamma_k}{\Delta t} = \sigma_k + j \nu_k$, avec :

$$\sigma_k = \frac{\ln \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{\Delta t} \quad ; \quad \nu_k = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right)}{\Delta t} \quad (4.141)$$

où $a_k = \Re e(\gamma_k)$ et $b_k = \Im m(\gamma_k)$. Les fréquences modales f_k et les taux d'amortissement modaux ξ_k s'en déduisent :

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 + \nu_k^2} \quad ; \quad \xi_k = -\frac{\sigma_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + \nu_k^2}} \quad (4.142)$$

Les déformées propres $\tilde{\Phi}_k$ sont solutions de (4.139).

4.6.3 Utilisation pratique de la méthode d'Ibrahim, lien avec la fonction du décrement

Observons que la méthode d'Ibrahim, dans la version que nous venons d'en donner, présente l'inconvénient de ne fournir du contenu spectral qu'une description limitée aux l ddl mesurés alors que le modèle éléments finis sous-jacent, garant d'une description fine de ce contenu, en

compte $m \gg l$. Il en manque donc l' voies pour que $l + l' = m$. On constate donc que le nombre de modes est dépendant du nombre de points (ou voies) de mesure. Ceci constitue un des points faible de la méthode. Pour pallier cet inconvénient, Ibrahim a proposé une version améliorée de la méthode, basée sur la notion de *pseudo-mesures*. L'idée est de créer artificiellement un nombre supplémentaire de voies de mesure en construisant, à partir de la suite mère des données, des sous-suites décalées dans le temps. Par cet artifice, on peut alors augmenter la valeur de l et de ce fait enrichir la description de la signature spectrale. Cette technique est présentée ci-dessous.

On sait que la réponse d'un système dynamique homogène de la forme (4.115) s'écrit aux points $t_k = k\Delta t$:

$$y(k\Delta t) = \tilde{\Phi}\Gamma^k q_0, \quad k \in I_N \quad (4.143)$$

On construit un second vecteur, appelé pseudo-mesure, défini par :

$$y_1((k+p)\Delta t) = \tilde{\Phi}_1\Gamma^k\Gamma^p q_0 \quad (4.144)$$

y_1 n'est qu'une version retardée de l' voies de mesures de y . En assemblant les deux mesures on obtient :

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y(k\Delta t) \\ y_1((k+p)\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Phi}_1\Gamma^p \end{bmatrix} \Gamma^k q_0 = \underline{\Phi}\Gamma^k q_0 \quad (4.145)$$

avec :

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Phi}_1\Gamma^p \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

On peut alors appliquer ce résultat à ce qui a été fait précédemment.

Le lien entre la méthode d'Ibrahim et la fonction du décrétement est direct. En effet, écrivant (4.128) aux instants $t_k = k\Delta t$, nous obtenons :

$$d_k^y = D_N^y(t_k) = D_N^y(k\Delta t) = \tilde{\Phi}e^{\Lambda k\Delta t} c_N, \quad k \in I_N \quad (4.147)$$

Comparant (4.147) à (4.129) nous remarquons alors que d_k^y ne diffère de y_k que par sa constante de queue c_N qui, comme nous l'avons vu, n'intervient pas dans la méthode d'Ibrahim. Nous pouvons donc appliquer cette dernière à la suite $\{d_k^y, k \in I_N\}$ pour estimer les paramètres modaux du modèle. Le lien est ainsi établi.

Considérons maintenant la réponse stationnaire Y du système dynamique stochastique (4.120) associé à (4.115) et écrivons la i -ème colonne de sa fonction de corrélation R_{YY} aux points $t_k = k\Delta t$. D'après (4.127) :

$$R_{k,i} = R_{YY,i}(t_k) = R_{YY,i}(k\Delta t) = \tilde{\Phi}e^{\Lambda k\Delta t} C_{0,i}, \quad k \in I_N \quad (4.148)$$

où $C_{0,i}$ est la i -ème colonne de $C_0 \in \mathbb{C}^{n \times l}$ donnée par (4.122). Comparant (4.148) à (4.129), nous constatons là aussi que $R_{k,i}$ ne diffère de y_k que par sa constante de queue $C_{0,i}$. Par conséquent, la méthode d'Ibrahim peut aussi s'appliquer à la suite $\{R_{k,i}, k \in I_N\}$. Or, nous avons vu que la méthode du décrétement était une procédure efficace pour l'estimation des fonctions de corrélation. D'où un autre lien, mais moins direct que le précédent, entre décrétement aléatoire et méthode d'Ibrahim.

La figure (4.14) ci-après synthétise les principales étapes de la méthode d'Ibrahim.

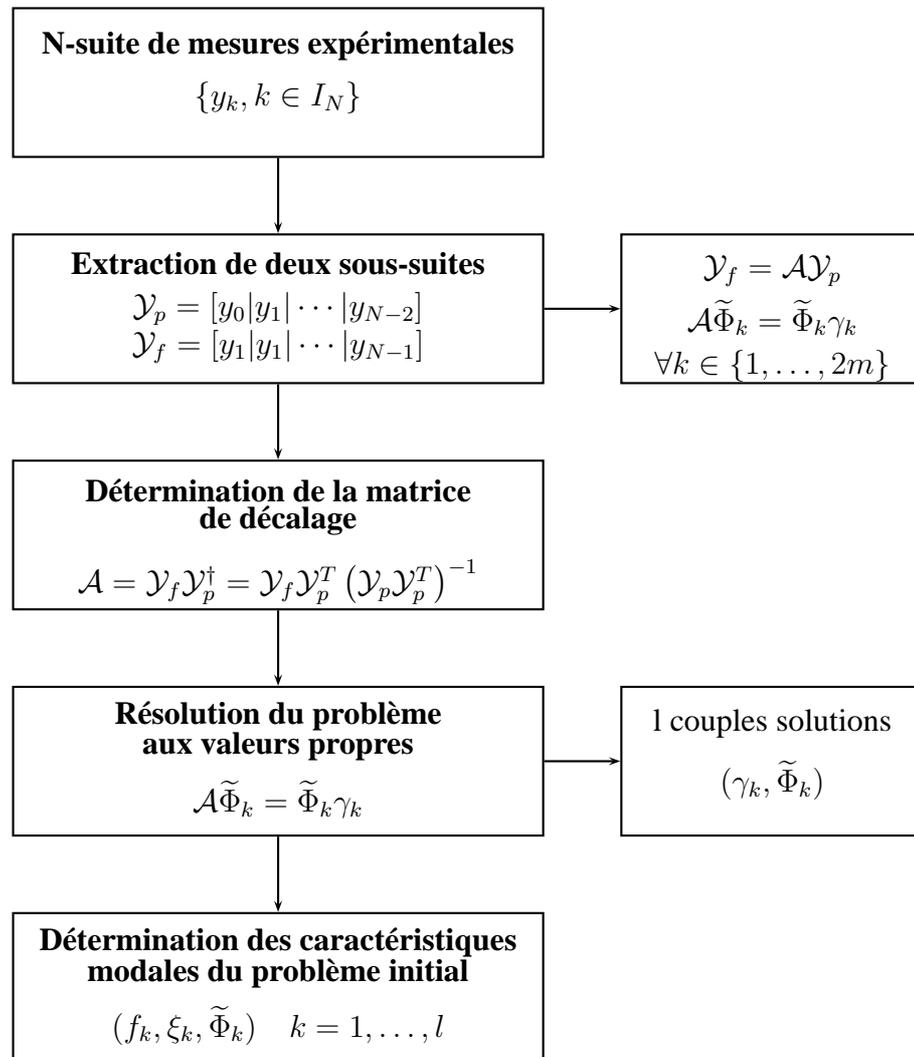


FIG. 4.14 – Détermination des caractéristiques modales par la méthode d'Ibrahim

Notons que l'on peut aussi établir un lien fructueux entre le décrement aléatoire et la méthode de réalisation stochastique. Cet aspect est présenté ci-dessous.

4.7 Application de la fonction du décrement à la méthode de réalisation

Le lien entre la méthode de réalisation et la fonction du décrement s'obtient à partir de l'expression (4.98) ou (4.100). En effet, en écrivant, par exemple, la relation (4.98) aux points $t_k = k\Delta t$, la fonction du décrement prend la forme :

$$D_N^y = C_c e^{A_c k \Delta t} \tilde{Q} \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (4.149)$$

avec : $\tilde{Q} = \frac{a}{\sigma_Y^2} \Sigma C_c^T \in \mathbb{R}^{n \times l}$.

L'expression (4.149) montre que les termes de la fonction du décrement sont analogues à ceux de la fonction de réponse impulsionnelle d'un modèle d'état éterministe dont les coefficients sont $(A_c, C_c, \tilde{Q}, D_N^y(0))$, avec $q = l$. Par conséquent, les algorithmes de la théorie classique de réalisation présentés dans le chapitre 3 peuvent s'appliquer à la fonction du décrement pour l'identification des paramètres modaux.

Le point de départ de cette méthode est donc, pour i fixé, la construction de la matrice des fonctions du décrement : $(\mathcal{D}_N^y)_{1|i}$, telle que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_N^y)_{1|i} &= \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_i \\ D_2 & D_3 & \dots & D_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_i & D_{i+1} & \dots & D_{2i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times li} \\ &= \begin{bmatrix} C_c \tilde{Q} & C_c A_c \tilde{Q} & \dots & C_c A_c^{i-1} \tilde{Q} \\ C_c A_c \tilde{Q} & C_c A_c^2 \tilde{Q} & \dots & C_c A_c^i \tilde{Q} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_c A_c^{i-1} \tilde{Q} & C_c A_c^i \tilde{Q} & \dots & C_c A_c^{2i-2} \tilde{Q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.150)$$

On observe que :

$$(\mathcal{D}_N^y)_{1|i} = \mathcal{O}_i \mathcal{C}_i \quad (4.151)$$

où les matrices \mathcal{O}_i et \mathcal{C}_i sont définies par les expressions (3.6), avec $A = A_c$, $B = \tilde{Q}$, $C = C_c$, $D = D_N^y(0)$ et $q = l$.

Les matrices $(A_c, C_c, \tilde{Q}, D_N^y(0))$ sont alors déterminées de la même manière que les matrices (A, B, C, D) dans le cas déterministe.

4.8 Conclusion

L'analyse du décrétement aléatoire effectuée dans ce chapitre nous a permis de préciser la bonne façon d'appréhender cet objet et de mettre l'accent sur certaines erreurs à éviter à son sujet, notamment en ce qui concerne l'interprétation de sa définition.

Nous avons justifié rigoureusement, à l'aide d'un raisonnement statistique adapté à sa définition, que le décrétement est un estimateur fonctionnel de la fonction de corrélation de la réponse stationnaire et de sa dérivée.

Nous avons également montré, toujours sur la base d'un raisonnement statistique rigoureux, pourquoi la méthode du décrétement aléatoire fonctionne encore lorsque l'excitation est une impulsion ou un train d'impulsions, donc ne satisfait pas l'hypothèse de stationnarité sur lesquelles se basent les justifications connues de cette méthode, prouvant ainsi sa robustesse observée par rapport à la nature des chargements.

Nous avons ensuite présenté quelques applications numériques qui nous ont permis de vérifier la qualité attendue de l'algorithme du décrétement, dans son rôle d'estimateur statistique fonctionnel.

Enfin, nous avons explicité le lien entre le décrétement aléatoire et les méthodes d'Ibrahim et de réalisation stochastique, avec en perspective l'identification modale des structures. La figure 4.15 résume les principales étapes de la procédure d'identification issue de ces couplages.

Cette procédure et celle de la méthode de sous-espaces vont maintenant être testés sur deux exemples réels : une poutre et un pont ferroviaire.

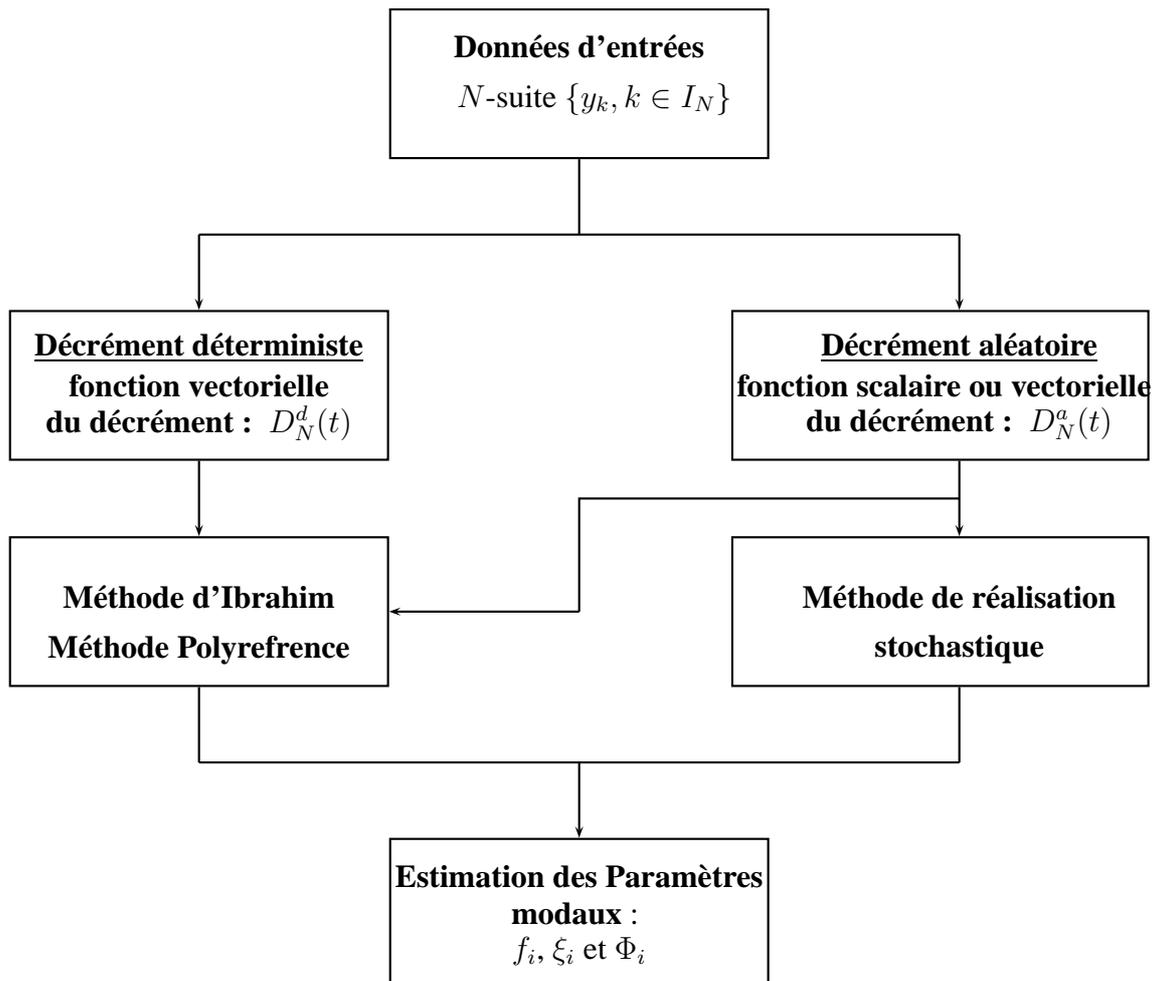


FIG. 4.15 – Processus d'estimation des paramètres modaux par la méthode du décrement ("d" pour déterministe, "a" pour aléatoire).

Chapitre 5

Applications

Sommaire

5.1	Introduction	107
5.2	Étude d'une poutre métallique	109
5.2.1	Description de l'expérience	109
5.2.2	Étude préliminaire	114
5.2.3	Identification modale	116
5.2.4	Sensibilité des paramètres modaux à un endommagement localisé	123
5.3	Étude d'un pont-rail SNCF	126
5.3.1	Instrumentation	127
5.3.2	Traitement des données	129
5.3.3	Identification modale	131
5.3.4	Incidence du resserrage des bielles sur les caractéristiques modales	134
5.4	Conclusion	137

5.1 Introduction

Ce chapitre présente quelques applications pratiques de la méthode du décrément aléatoire associée à la méthode d'Ibrahim et de la méthode des sous-espaces utilisant l'algorithme CVA (cf. chapitre 3).

Les applications traitées concernent deux exemples étudiés dans le cadre du projet national EDP :

- une poutre métallique grandeur réelle expérimentée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Paris et testée sous deux types de chargement dynamique : une percussion et une excitation aléatoire ponctuelle engendrée par un exciteur électrodynamique.
- un pont ferroviaire, le pont-rail PK 075+317 de la ligne à grande vitesse Paris Sud-Est, instrumenté par la société SITES et testé en situation réelle, sous l'action de passages de TGV.

Dans toute stratégie d'analyse modale expérimentale, une étape importante de la démarche réside dans le prétraitement des données. Ce prétraitement est nécessaire, entre autres, lorsque l'on veut disposer d'informations sur le contenu fréquentiel du signal expérimental. On est alors conduit à effectuer une transformation de Fourier dans ce dernier.

Par ailleurs, la procédure d'identification fournit généralement pour chaque paramètre, non pas une, mais tout un échantillon d'estimées pour lequel il convient ensuite de faire un traitement statistique du second ordre afin de traduire l'estimation en termes de moyennes et écart-types.

Ainsi, pour la méthode des sous-espaces, l'échantillon provient de la construction du diagramme de stabilisation. Celui-ci s'obtient, en effet, en faisant croître la taille n du modèle d'état et en associant à chaque valeur de n les estimées obtenues pour les valeurs du paramètre modal, et ce jusqu'à ce qu'un certain critère de stabilisation soit satisfait. Pour les applications présentées ici, nous avons utilisé les critères suivants pour les fréquences f_i , les taux d'amortissement ξ_i et les vecteurs modaux Φ_i :

$$\frac{|f_i^{(n)} - f_i^{(n+1)}|}{f_i^{(n)}} < 10^{-2} \quad ; \quad \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n+1)}|}{\xi_i^{(n)}} < 5.10^{-2} \quad (5.1)$$

$$MAC_{ij}(n, n+1) = \frac{|\Phi_i^{(n)*} \Phi_j^{(n+1)}|^2}{(\Phi_i^{(n)*} \Phi_i^{(n)}) (\Phi_j^{(n+1)*} \Phi_j^{(n+1)})} > 0.95 \quad (5.2)$$

où $f_i^{(n)}$, $\xi_i^{(n)}$ et $\Phi_i^{(n)}$ sont les i -èmes fréquence, taux d'amortissement et mode propre estimés à partir du modèle d'état d'ordre n , $(\bullet)^*$ désignant la transposée conjuguée.

Le $MAC_{ij}(n, n+1)$ (Modal Assurance Criterion) spécifie le degré de corrélation entre la i -ème déformée modale du modèle d'état d'ordre n et la j -ème déformée modale du modèle d'état d'ordre $n+1$. On aura donc une corrélation d'autant meilleure que cette caractéristique sera proche de 1. Notons qu'elle peut aussi être utilisée pour comparer les modes propres estimés à

partir de deux méthodes d'estimation différentes. Employée avec deux échantillons différentes de données expérimentales, elle peut également servir à détecter les endommagements via les déformées modales.

Une fois le diagramme de stabilisation établi pour chaque paramètre modal, les moyennes et écart-types des valeurs propres s'en déduisent par un traitement statistique élémentaire.

Dans le cas de la méthode du décrétement couplée à la méthode d'Ibrahim, l'échantillon provient également de la construction du diagramme de stabilisation. Mais la procédure de construction est différente. Elle repose sur le fait que la méthode d'Ibrahim est appliquée à chaque colonne de la fonction matricielle du décrétement, permettant ainsi d'associer à chacune d'elles, une estimée de la famille des valeurs propres du paramètre modal. D'où un échantillon pour chacune de ces valeurs et par suite la possibilité de construire un diagramme de stabilisation pour le paramètre, moyennant le choix d'un critère de stabilisation. Notons qu'un tel échantillon peut aussi être construit en utilisant la technique des pseudo-mesures ([7, 5]). Pour les applications, nous avons retenu les mêmes critères de stabilisation que ceux utilisés avec la méthode des sous-espaces, c'est-à-dire les critères (5.1)-(5.2), mais dans lesquels n représente cette fois l'indice de la colonne de la fonction matricielle du décrétement.

5.2 Étude d'une poutre métallique

5.2.1 Description de l'expérience

L'étude concerne une poutre métallique en acier de longueur 6 mètres et de section constante en I, testée sur la plate-forme d'essais des structures du LCPC (figure 5.1). La section a pour largeur et épaisseur de semelle 100mm et 8.5mm, respectivement, et pour hauteur et épaisseur d'âme 200mm et 5.6mm respectivement. Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont résumées dans le tableau 5.1 ci-dessous.

Section	Moment d'inertie	Masse volumique	Module d'élasticité
$S = 28.48cm^2$	$I = 1943cm^4$	$\rho = 7800Kg.m^{-1}$	$E = 2.10^5MPa$

TAB. 5.1 – *Caractéristiques mécaniques de la poutre.*

Deux types d'excitation sont considérés :

- une excitation de type percussion réalisée à l'aide du marteau BK8202 muni d'une masse additionnelle et d'une tête d'impact en caoutchouc,
- une excitation aléatoire ponctuelle générée par l'excitateur électrodynamique LDS, modèle V650.

Dans les deux cas le point d'excitation est situé à 2.40m de l'extrémité droite de la poutre (figure 5.3).

Pour les essais sous excitation percussionnelle deux types de conditions aux limites sont considérés : appuis simples et blocage bilatéral. Les essais sous excitation aléatoire sont réalisés quant à eux avec la condition de blocage bilatéral uniquement pour éviter tout décollement de la poutre pendant les essais.

Les caractéristiques du matériel utilisé pour cette expérience sont données dans le rapport de synthèse de l'opération de recherche : "Evaluation Dynamique des Ponts" [20].

Pour réaliser l'excitation aléatoire ponctuelle un accéléromètre piezoélectrique BK modèle 4507B est utilisé dans la boucle de pilotage. La densité spectrale de l'excitation aléatoire (de type accélération) est représentée graphiquement sur la figure 5.2. La consigne de pilotage correspond à une valeur efficace d'accélération constante entre 12 et 100Hz et égale à 2.57m/s². Les pentes des coupures basse et haute correspondent à 10dB par octave. On observe sur la figure 5.2 que la consigne est respectée pour les basses fréquences mais pas pour les hautes.



FIG. 5.1 – Photographie du banc d'essais

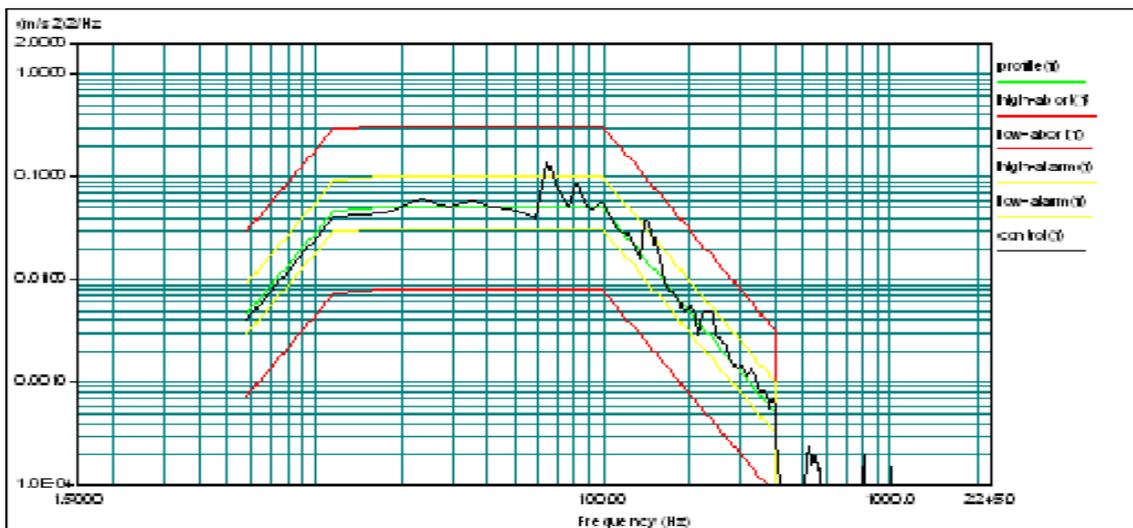


FIG. 5.2 – Densité spectrale de puissance de l'excitation aléatoire

Les mesures d'accélération ont été réalisées à l'aide de deux familles (ou setups) d'accéléromètres, celle de gauche, notée G et comprenant les accéléromètres $A16$ à $A23$, et celle de droite, notée D , constituée des accéléromètres $A9$ à $A16$, soit au total 15 accéléromètres :

$$G = \{A16, \dots, A23\} \quad ; \quad D = \{A9, \dots, A16\}$$

Les accéléromètres $A16$ et $A22$ sont commun aux deux familles : $A16$ parce qu'il est situé au point de mesure 8 qui est le point de référence, $A22$ parce qu'il est utilisé alternativement aux points 2 et 14. En effet, ce capteur, initialement situé au point 2, sert aussi à mesurer le

signal de sortie au point 14, le capteur A10 affecté à ce point s'étant révélé défaillant après quelques essais. Il est donc alternativement déplacé au point 2 et au point 14 au cours de l'expérience. La figure 5.3 montre le schéma d'essais. Les capteurs, disposés tous les 41.5mm, sont des accéléromètres HBM/B12-500 conditionnés par le système Spyder. Le tableau 5.2 donne le schéma d'enregistrement des fichiers de mesures (voies de mesures, points de mesures et capteurs associés). Les paramètres d'échantillonnage sont précisés dans le tableau 5.3.

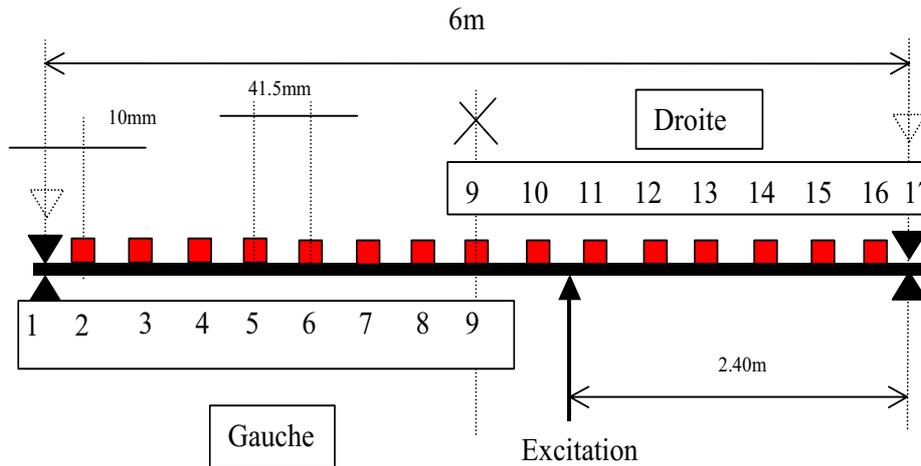


FIG. 5.3 – Schéma de principe des essais

Voies de mesures	Série gauche		Série droite	
	Points	Capteurs	Points	Capteurs
1	8	A16	15	A9
2	7	A17	14	A22
3	6	A18	13	A11
4	5	A19	12	A12
5	4	A20	11	A13
6	3	A21	10	A14
7	2	A22	9	A15
8	1	A23	8	A16

TAB. 5.2 – Structure des mesures d'accélération.

Excitation	Fréquence d'échantillonnage (Hz)	Filtre anti-repliement (Hz)	Taille de l'échantillon par enregistrement	Nombre d'enregistrements
Percussion	2400	300	20000	30
Aléatoire	2400	300	8000	80

TAB. 5.3 – Paramètres d'échantillonnage.

Pour la poutre sur appuis simples, la solution exacte en termes de fréquences et déformées modales est connue analytiquement. Par exemple, les fréquences modales sont données par :

$$f_k = k^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho a^4}}$$

où a est la longueur entre appuis.

Une approximation numérique de cette solution a été calculée à l'aide d'un modèle éléments finis standard comprenant 15 éléments de poutre, avec amortissement proportionnel de Caughey (figure 5.4). Comparée à la solution exacte, cette approximation s'est révélée d'excellente qualité. Le tableau 5.4 illustre cette comparaison.

Pour la poutre avec blocage bilatéral, il n'a pas été possible de calculer la solution exacte, ni même la solution numérique par éléments finis, car l'on ne disposait pas de suffisamment d'information concernant les conditions d'appuis. C'est pourquoi le tableau 5.4 ne contient pas ces résultats.

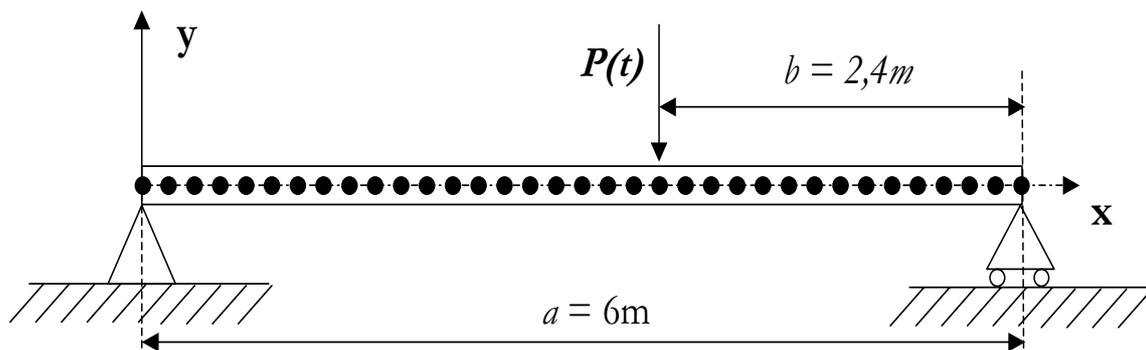


FIG. 5.4 – Schéma éléments finis de la poutre (15 éléments, 16 noeuds, 2 ddl par noeud)

Afin d'évaluer l'incidence d'un endommagement structural sur les paramètres modaux du comportement dynamique de la poutre, des jauges de déformation ont été collées sur cette dernière. Leur localisation est précisée sur la figure 5.5. Les mesures de déformation ont été réalisées avec les mêmes conditions d'échantillonnage que pour les mesures d'accélération.

L'endommagement considéré correspond à deux entailles symétriques situées de part et d'autre de la semelle inférieure de la poutre et réalisées à l'aide d'une scie (cf. figure 5.6). Ce défaut simulé est situé à 2m de l'appui de droite et deux profondeurs d'entaille sont considérées : 5mm et 15mm.

Les résultats de cette expérience sont donnés et analysés dans le paragraphe 5.2.4.

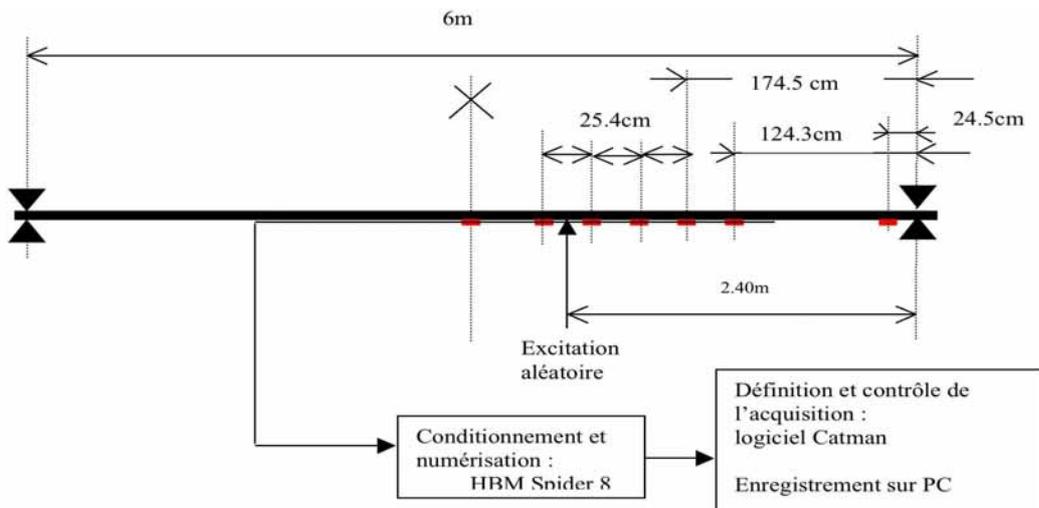


FIG. 5.5 – Localisation des jauges de déformation

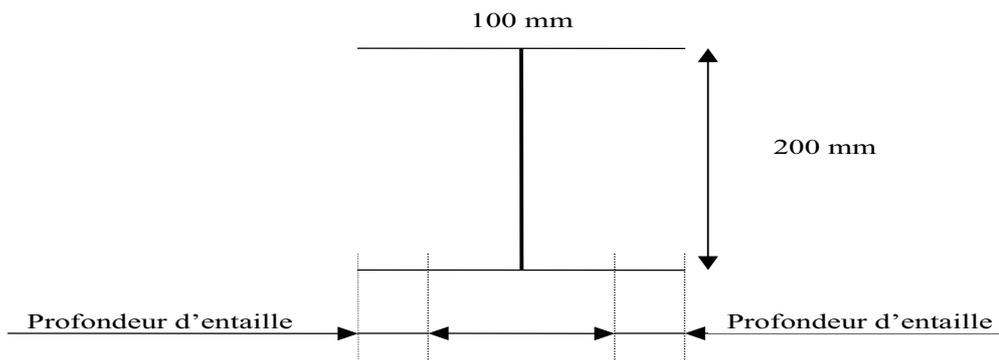


FIG. 5.6 – Section entaillée

5.2.2 Étude préliminaire

Pour une même configuration expérimentale (type d'excitation, type de condition d'appui) plusieurs séries d'enregistrement sont effectués afin de vérifier la cohérence des mesures successives. On dispose en tout de six fichiers de mesures : trois pour le setup de gauche G, trois pour celui de droite D. Une façon simple de tester la cohérence des mesures, et que nous avons utilisée pour cette application, est la suivante : pour chaque fichier de mesures, on somme les spectres des signaux fournis par les capteurs ; on obtient ainsi six spectres-somme que l'on représente sur un même graphe. Si les mesures sont cohérentes, ces spectres-somme doivent être très proches les uns des autres et donner une image très nette de la signature spectrale de la réponse. Dans le cas contraire, on peut émettre des doutes quant à la représentativité et la cohérence globale des mesures.

Précisons ce que l'on entend par spectre ici. Pour le signal résultant de l'excitation percussionnelle, il s'agit tout simplement du module de la transformée de Fourier de ce dernier. Pour le signal issu de l'excitation aléatoire, il s'agit de la densité spectrale de puissance (DSP) estimée à partir de ce signal en utilisant un estimateur standard de la DSP. Nous avons utilisé, pour notre part, l'estimateur de Welch avec fenêtre filtrante de Hamming [66]. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 5.7, 5.8 et 5.9. Ils correspondent à trois configurations expérimentales : excitation percussionnelle et appuis simples ; excitation percussionnelle et blocage bilatéral ; excitation aléatoire et blocage bilatéral.

On peut observer que les tests sont satisfaisants pour les deux premières configurations. Par contre, il ne le sont pas pour la troisième. C'est pourquoi, dans la suite de ce travail, nous ne considérerons plus cette configuration expérimentale, trop sujette à caution quant à la qualité des mesures qui la concernent.

Notons que ces tests permettent d'estimer grossièrement les fréquences dominantes du comportement vibratoire de la poutre, ce qui est d'un intérêt pratique évident.

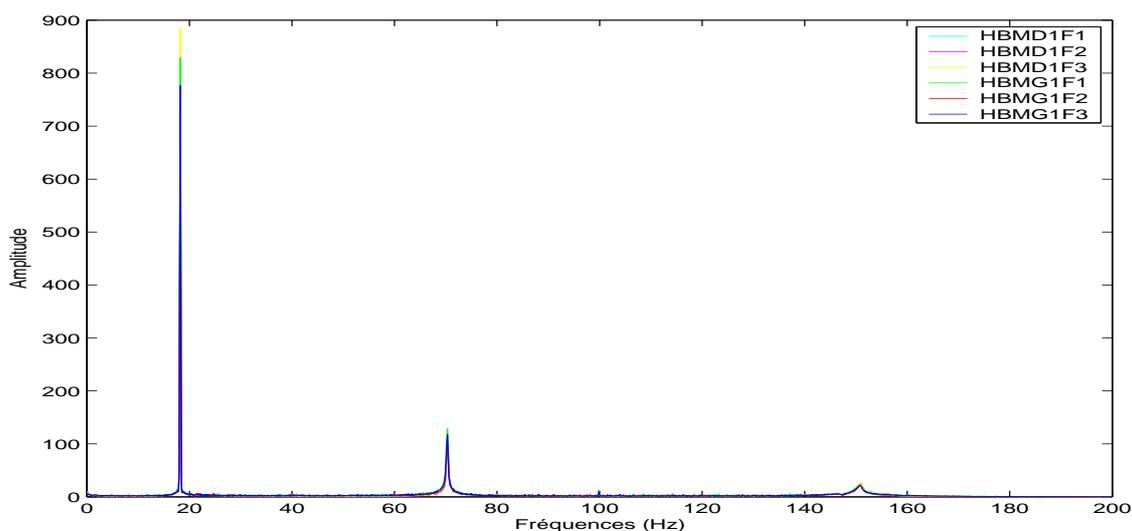


FIG. 5.7 – Test de cohérence des mesures : excitation percussionnelle, appuis simples.

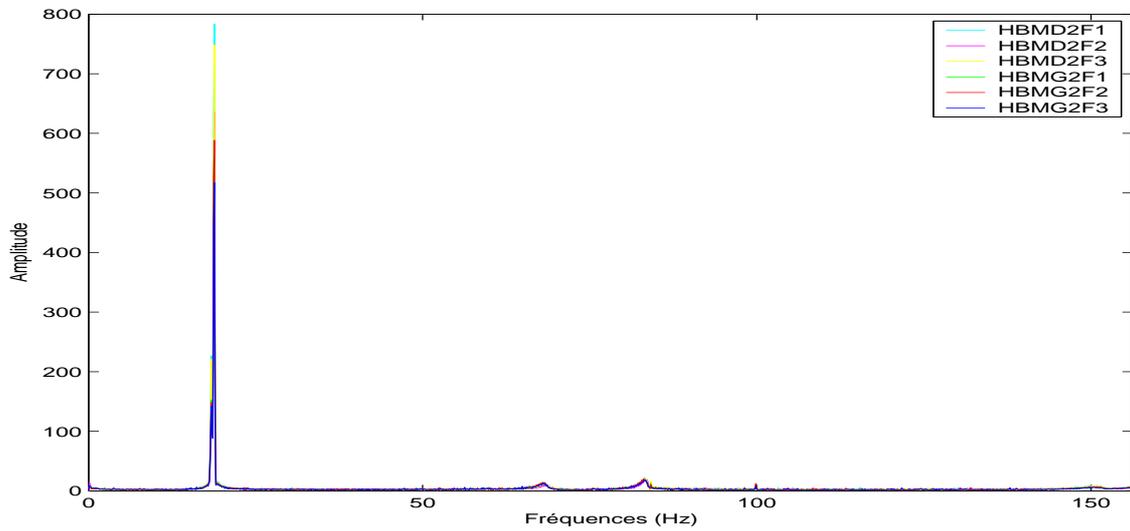


FIG. 5.8 – Test de cohérence des mesures : excitation percussive, blocage bilatéral.

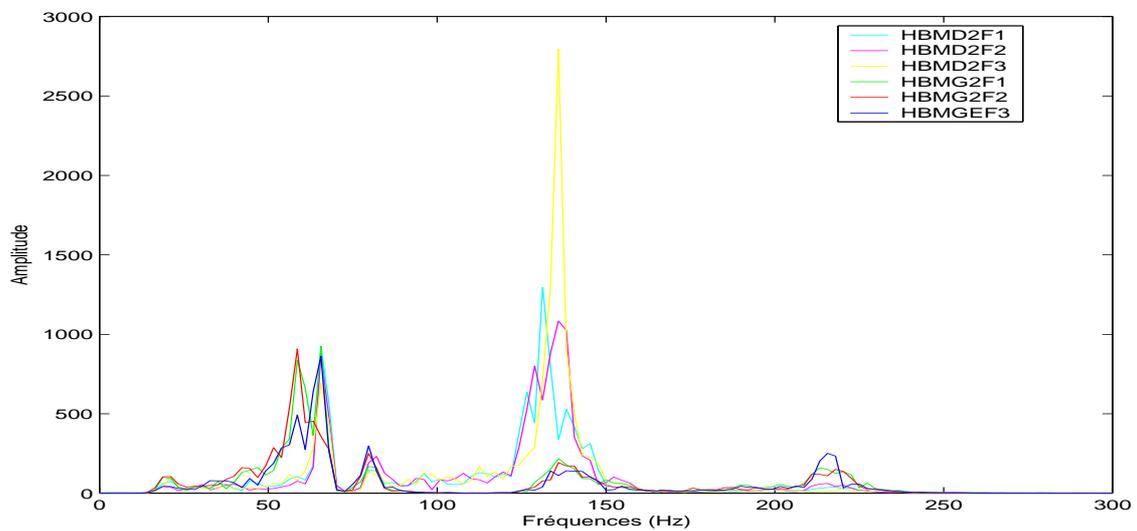


FIG. 5.9 – Test de cohérence des mesures : excitation aléatoire, blocage bilatéral.

5.2.3 Identification modale

L'identification des caractéristiques modales du comportement dynamique de la poutre est réalisée par la méthode des sous-espaces basée sur l'algorithme CVA (cf. chapitre 3) et par la méthode du décrément couplée à la méthode d'Ibrahim (cf. chapitre 4). Les résultats des études de répétabilité montrent qu'il n'est pas nécessaire de procéder à l'identification avec plusieurs fichiers de mesures. Un seul fichier suffit, que nous choisissons au hasard dans l'ensemble des fichiers disponibles.

La poutre considérée ici est celle sur appuis simples soumise à l'excitation percussionnelle et pour cette poutre, nous nous intéressons aux trois premiers modes propres.

L'identification par la méthode des sous-espaces est réalisée avec les paramètres suivants :

- taille de l'échantillon de mesures fourni par chaque capteur : $N = 4000$;
- pas de temps : $\Delta t = (2400)^{-1} s$;
- nombre de capteurs : $l = 8$;
- valeur du paramètre i de durée de mémoire : $i = 40$.

Les paramètres modaux sont déterminés à l'aide de la technique du diagramme de stabilisation. A titre d'illustration, le diagramme de stabilisation obtenu pour les fréquences modales et son histogramme des fréquences associé sont représentés sur les figures 5.10 et 5.12(a).

Pour l'identification par la méthode du décrément couplée à la méthode d'Ibrahim, nous utilisons toutes les données disponibles et optons pour la version de cette procédure utilisant la méthode vectorielle du décrément avec pour condition de déclenchement celle du point positif, avec $a_1^i = 0.5\sigma_{Y_i}$ et $a_2^i = +\infty$. L'identification est menée avec les paramètres suivants :

- taille d'échantillon du décrément : $M = 300$;
- pas de temps : $\Delta t = (2400)^{-1} s$;
- nombre de réalisations utilisées pour la construction du diagramme de stabilisation : 40 (réalisations obtenues par la technique des pseudo-mesures).

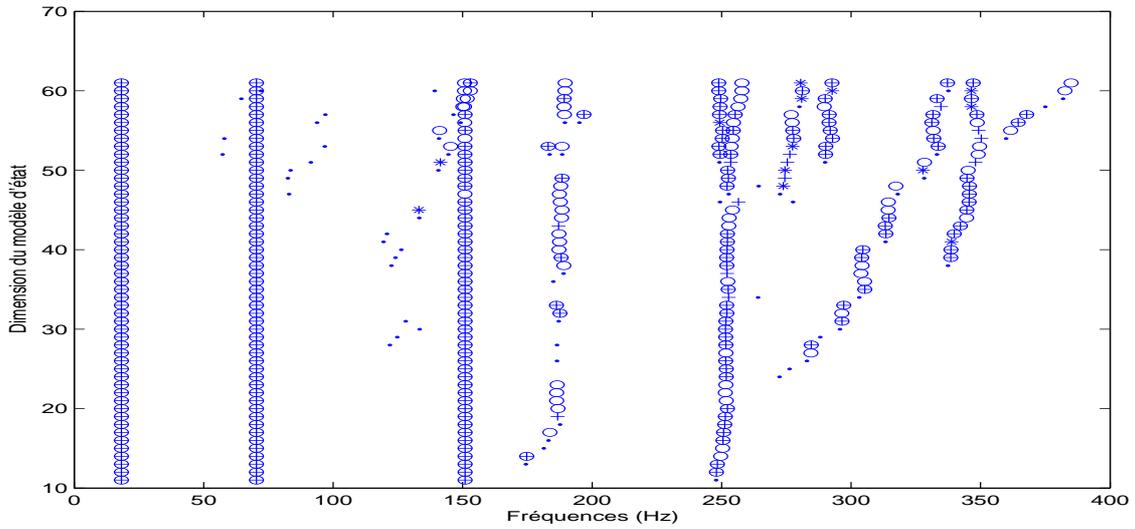
Les critères de stabilisation sont identiques à ceux utilisés dans la méthode des sous-espaces.

Le diagramme de stabilisation des fréquences modales obtenu à partir de cette méthode et son histogramme des fréquences associé sont représentés sur les figures 5.11 et 5.12(b).

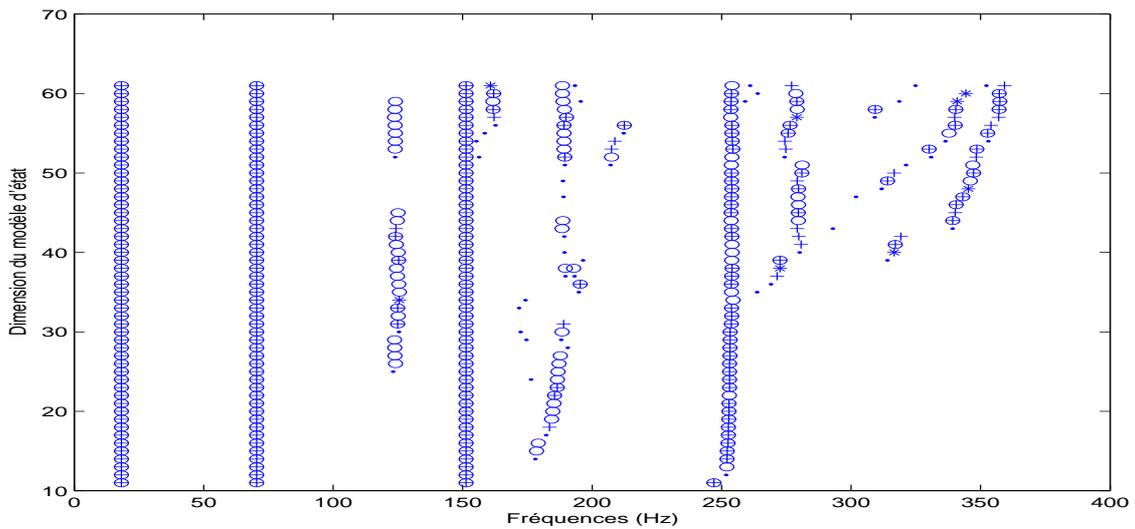
Les trois premières fréquences modales identifiées par les deux méthodes et leurs amortissements associés sont repertoriés dans le tableau 5.4.

Le tableau 5.5 donne quant à lui les coefficients MAC relatifs aux modes de même ordre identifiés par les deux méthodes.

Enfin, les figures 5.13 et 5.14 comparent, pour les deux situations expérimentales considérées (appuis simples / excitation percussionnelle et blocage bilatéral / excitation percussionnelle), les déformées modales identifiées par les deux méthodes. Dans le cas de la condition d'appuis simples (figure 5.13) ces déformées sont également comparées à la solution éléments finis.



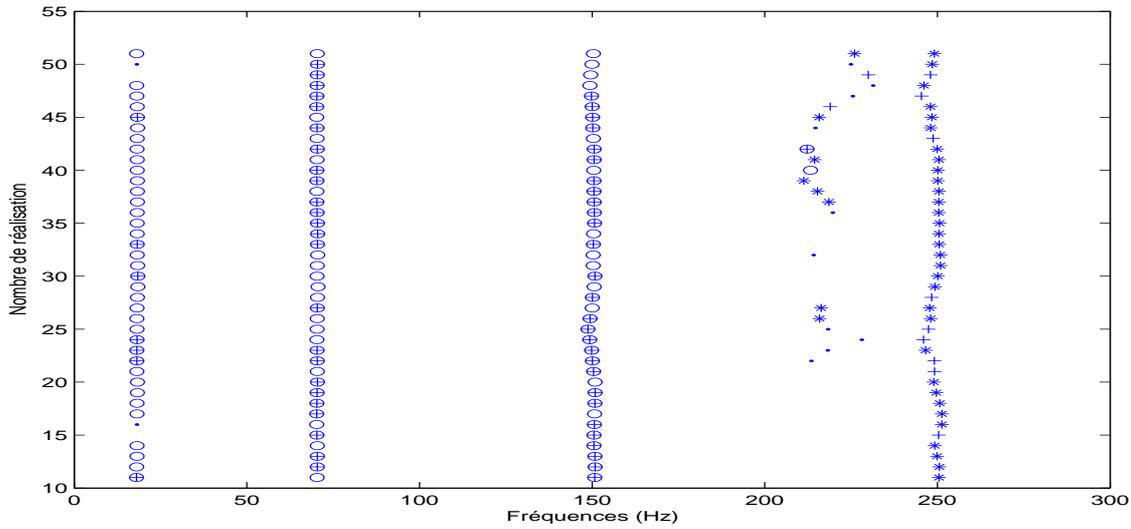
(a) diagramme de stabilisation – partie gauche



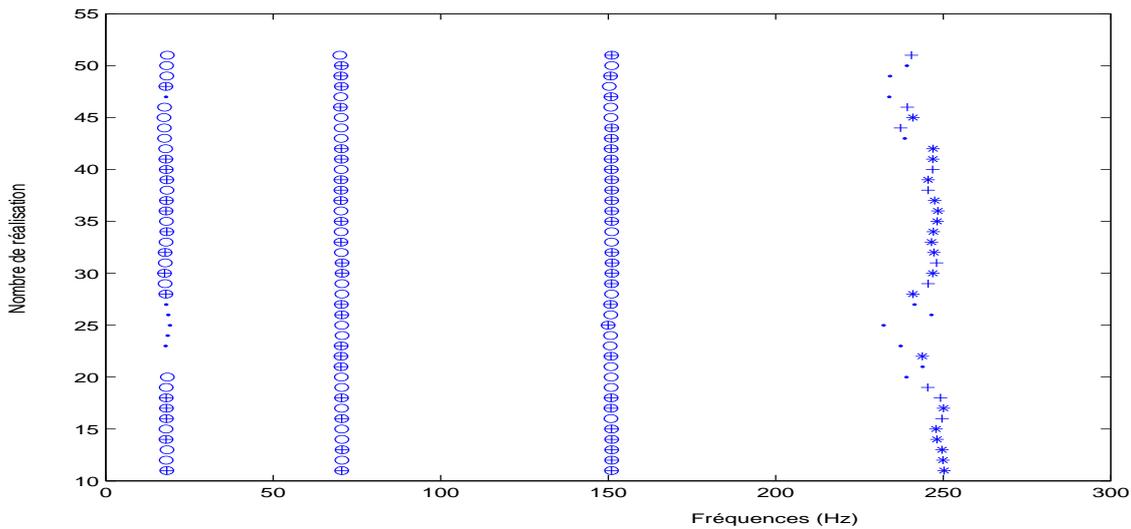
(b) diagramme de stabilisation – partie droite

**Méthode des sous-espaces
(excitation percussionnelle, appuis simples)**

FIG. 5.10 – *Diagramme de stabilisation des fréquences.* ● : modes instables ; + : modes stables en fréquence ; * : modes stables en fréquence et en amortissement ; ○ : modes stables en fréquence et en vecteurs propres ; ⊕ : modes stables en fréquence, en amortissement et en déformées modales.



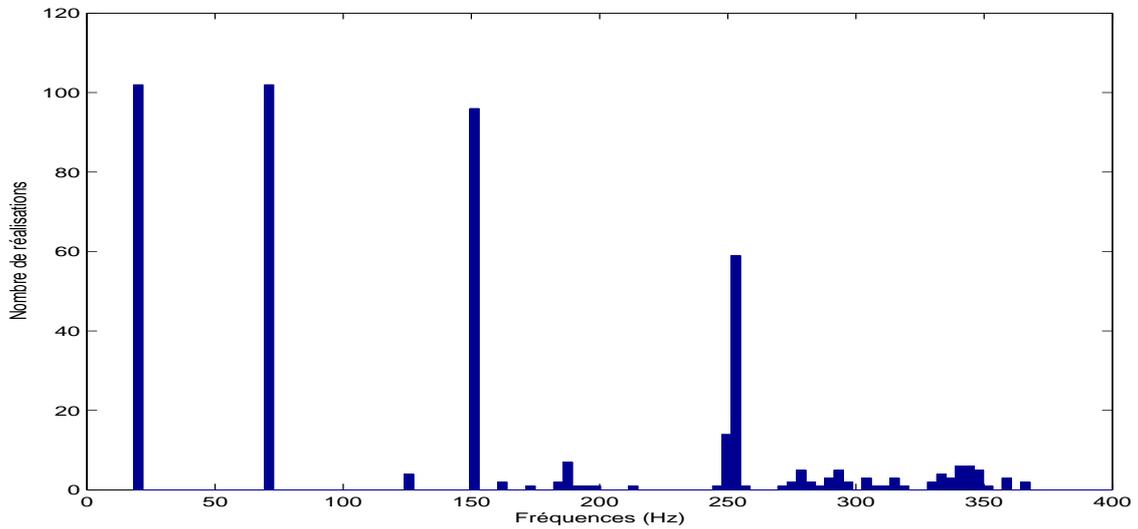
(a) diagramme de stabilisation – partie gauche



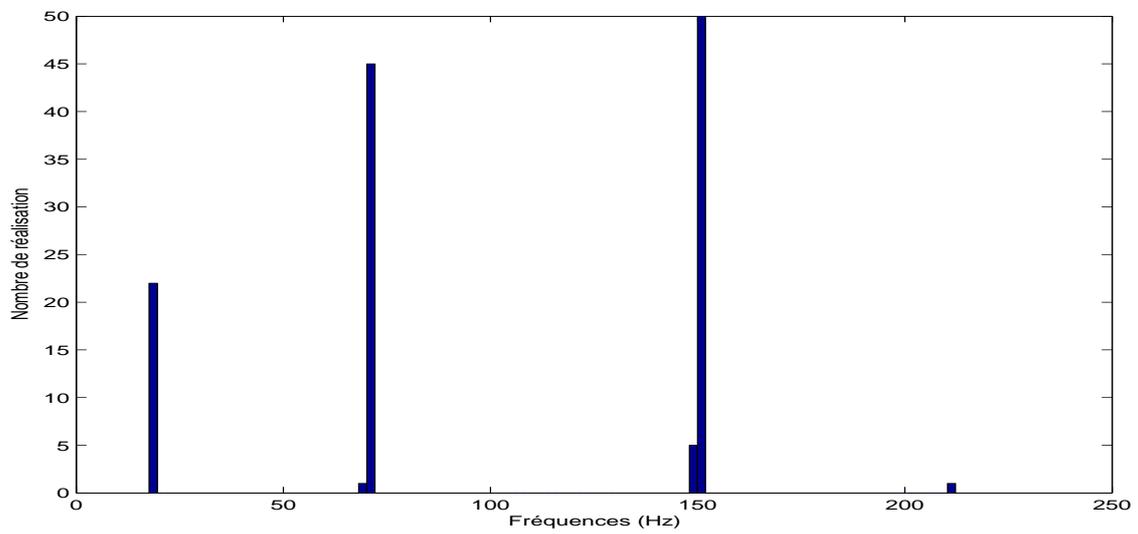
(b) diagramme de stabilisation – partie droite

**Méthode vectorielle du décrétement + Méthode d’Ibrahim
(excitation percussionnelle, appuis simples)**

FIG. 5.11 – Diagramme de stabilisation des fréquences. ● : modes instables ; + : modes stables en fréquence ; * : modes stables en fréquence et en amortissement ; ○ : modes stables en fréquence et en vecteurs propres ; ⊕ : modes stables en fréquence, en amortissement et en déformées modales.



**(a) Méthode des sous-espaces
(excitation percussive, appuis simples)**



**(b) Méthode vectorielle du décrétement + Méthode d'Ibrahim
(excitation percussive, appuis simples)**

FIG. 5.12 – Histogramme des fréquences

Excitation percussive, appuis simples						
	Fréquences (Hz)					
	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	\bar{f}	σ_f	\bar{f}	σ_f	\bar{f}	σ_f
Solution exacte	18.17	-	72.68	-	163.53	-
Éléments Finis	18.17	-	72.68	-	163.53	-
Sous-espaces	18.21	$< 10^{-2}$	70.30	0.01	150.98	0.08
Décrément aléatoire + Ibrahim	18.21	0.05	70.38	0.05	150.89	0.31
	Amortissements(%)					
	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	$\bar{\xi}$	σ_ξ	$\bar{\xi}$	σ_ξ	$\bar{\xi}$	σ_ξ
Sous-espaces	0.31	$< 10^{-2}$	0.40	$< 10^{-2}$	0.38	$< 10^{-2}$
Décrément aléatoire + Ibrahim	0.55	0.20	0.53	0.08	0.71	0.16
Excitation percussive, blocage bilatéral						
	Fréquences (Hz)					
	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	\bar{f}	σ_f	\bar{f}	σ_f	\bar{f}	σ_f
Sous-espaces	18.76	$< 10^{-2}$	68.79	0.17	157.42	0.06
Décrément aléatoire + Ibrahim	18.64	0.08	67.90	1.00	156.85	0.77
	Amortissements(%)					
	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	$\bar{\xi}$	σ_ξ	$\bar{\xi}$	σ_ξ	$\bar{\xi}$	σ_ξ
Sous-espaces	0.66	0.06	1.40	0.64	0.70	0.11
Décrément aléatoire + Ibrahim	1.43	0.36	1.43	0.63	1.56	0.45

TAB. 5.4 – Comparaison des trois premières fréquences modales et des amortissements correspondants (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type)

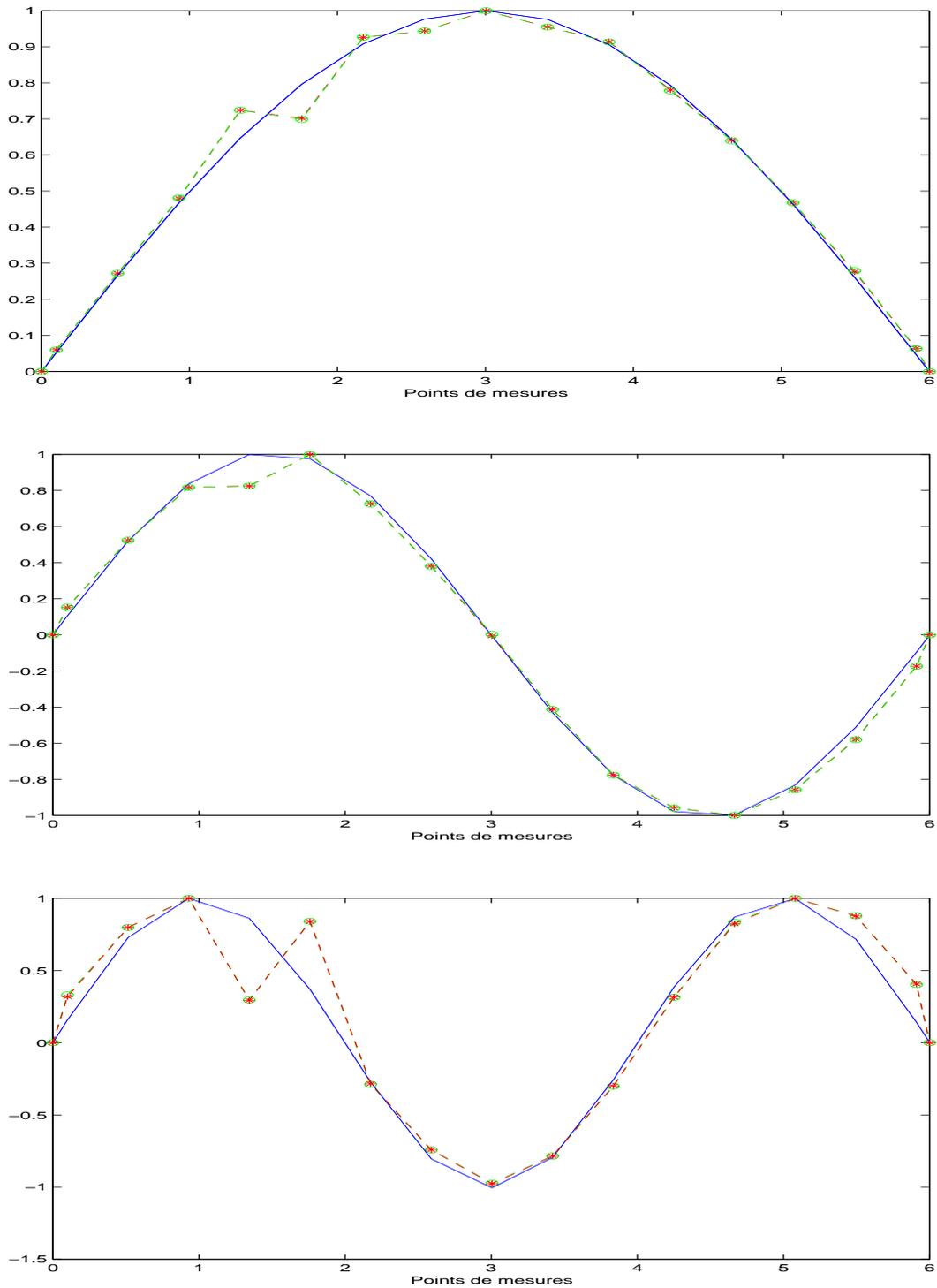


FIG. 5.13 – Comparaison des trois premières déformées modales. Excitation percussive et appuis simples. — : MEF, * - - : MVD, o - - : MSE

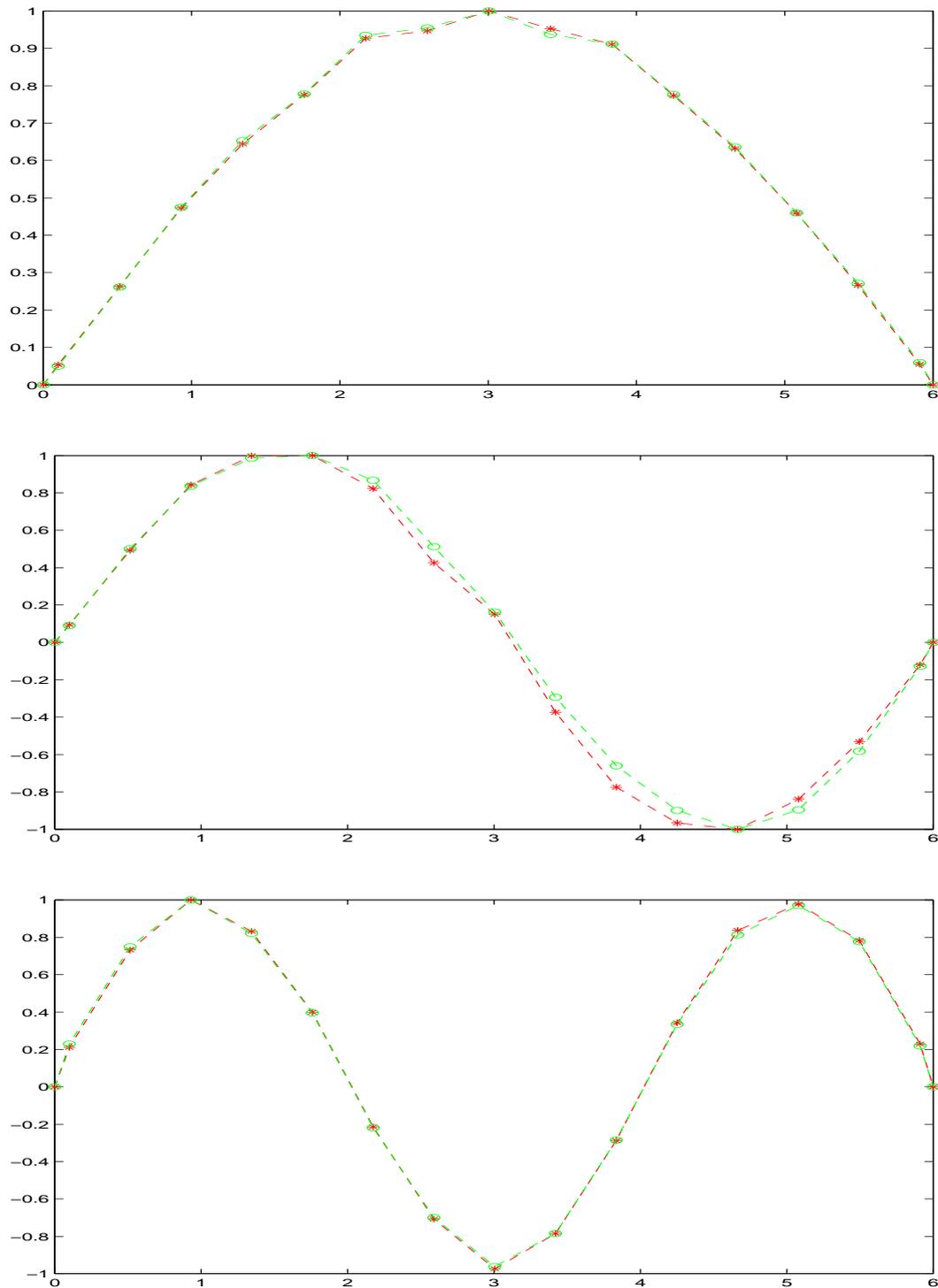


FIG. 5.14 – Comparaison des trois premières déformées modales. Excitation percussive et blocage bilatéral. – * – : MVD, – o – : MSE

	Excitation percussive, appuis simples		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3
MSE-MEF	0.998	0.994	0.910
MVD-MEF	0.998	0.994	0.910
MVD-MSE	1.000	1.000	1.000
	Excitation percussive, blocage bilatéral		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3
MVD-MSE	1.000	0.995	0.999

TAB. 5.5 – Coefficients MAC. MEF : méthode des éléments finis, MSE : méthode des sous-espaces, MVD : méthode vectorielle du décrément.

Les résultats obtenus appellent les remarques suivantes :

- Les diagrammes de stabilisation et les histogrammes des fréquences relatifs à la méthode des sous-espaces et à la méthode vectorielle du décrément associée à la méthode d'Ibrahim montrent une identification stable et une nette discrimination entre les fréquences (cf. figures 5.10, 5.11, 5.12). Les trois premières fréquences propres peuvent ainsi être clairement identifiées.
- Les résultats du tableau 5.4 montrent que les deux méthodes ont des performances comparables vis-à-vis de l'estimation des fréquences modales. Ceci est moins vrai pour les amortissements modaux pour lesquels on observe des différences significatives. On retrouve là la difficulté bien connue liée à l'estimation de ce type de paramètre et qui peut s'expliquer par une modélisation incorrecte de l'amortissement. On peut sans doute aussi attribuer à un défaut de modélisation mécanique et/ou à une réalisation imparfaite des conditions d'appuis l'écart observé entre les fréquences estimées par les deux méthodes et celles issues du calcul éléments finis.
- Les figures 5.13 et 5.14 montrent un accord très satisfaisant entre les déformées modales fournis par les deux méthodes d'estimation et la méthode des éléments finis. Cet accord est confirmé par les coefficients MAC du tableau 5.5 quasiment tous supérieur à 95%. On notera que le défaut localisé d'identification observé sur les trois modes de la figure 5.13 résulte d'une défaillance de deux capteurs.

5.2.4 Sensibilité des paramètres modaux à un endommagement localisé

L'objectif est de tester la sensibilité des fréquences, amortissements et déformées propres à la variation d'une caractéristique mécanique : la rigidité, induite par un endommagement localisé provoqué : la réduction de l'aire d'une section par sciage de la semelle au droit de cette section. Bien entendu, il ne s'agit pas ici de contester les indicateurs usuels [5]. Nous cherchons simplement à quantifier l'effet d'une telle modification sur les paramètres modaux afin de vérifier l'affirmation courante selon laquelle ces paramètres sont peu sensibles aux modifications des caractéristiques mécaniques.

La poutre considérée est celle avec blocage bilatéral et excitation percussive. La section

endommagée est située à $2m$ de l'appui droite. Les paramètres modaux sont identifiés en utilisant la méthode des sous-espaces. Les tableaux 5.6 et 5.7 résument les résultats obtenus pour les fréquences et amortissements. Ces résultats sont constitués, pour chacun des endommagements considérés (i.e. des profondeurs d'entaille), des valeurs estimées de ces paramètres modaux ainsi que de leur variation par rapport à leurs valeurs identifiées en situation intègre (i.e. poutre non entaillée). Les variations sur les déformées modales sont mesurées à l'aide du coefficient MAC. Les valeurs obtenues pour ce dernier sont résumées dans le tableau 5.8.

Ces divers résultats appellent quelques remarques :

- 1- On observe que l'incidence des deux endommagements sur les fréquences est très faible (variation inférieure à 4%).
- 2- Ce fait est confirmé par les valeurs du coefficient MAC, très proches de 1 dans tous les cas.
- 3- Seuls les amortissements présentent des variations significatives, et ce pour les deux endommagements. Toutefois, compte tenu d'une modélisation probablement trop simplifiée des amortissements, ce résultat, doit être considéré avec prudence.

En définitive, on retiendra que, pour cet exemple, les fréquences et déformées modales ne sont pas des indicateurs d'endommagement pertinents, confirmant ainsi une conclusion unanimement admise au sein de la communauté des spécialistes de l'identification structurale.

		Fréquences (Hz)		
		Mode 1	Mode 2	Mode 3
Ipe0	\bar{f}	18.76	68.55	157.47
	σ_f	0.01	0.30	0.04
Ipe2	\bar{f}	18.46	66.85	157.72
	σ_f	0.08	0.13	0.80
	Ecart(%)	1.60	2.48	0.16
Ipe4	\bar{f}	18.63	66.32	156.82
	σ_f	0.01	0.02	0.02
	Ecart(%)	0.69	3.25	0.41

TAB. 5.6 – Variation des fréquences pour deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm. (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type).

		Amortissement (%)		
		Mode 1	Mode 2	Mode 3
Ipe0	$\bar{\xi}$	0.64	2.61	0.62
	σ_{ξ}	0.04	1.84	0.03
Ipe2	$\bar{\xi}$	2.06	0.67	1.13
	σ_{ξ}	0.51	0.11	0.52
	Ecart (%)	221	74	82
Ipe4	$\bar{\xi}$	0.81	0.42	0.58
	σ_{ξ}	0.02	0.02	0.05
	Ecart (%)	26	83	6.45

TAB. 5.7 – Variation des amortissements pour deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm. (\bar{f} : moyenne ; σ_f : écart-type).

	Excitation percussive, blocage bilatéral		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Ipe0-Ipe2	0.999	0.986	0.997
Ipe0-Ipe4	0.999	0.980	0.996
Ipe2-Ipe4	1.000	0.999	0.999

TAB. 5.8 – Coefficients MAC relatifs aux deux profondeurs d'entaille. Ipe0 : poutre intègre, Ipe2 : entaille de 5 mm, Ipe4 : entaille de 15 mm.

5.3 Étude d'un pont-rail SNCF

Il s'agit du pont-rail PK 075+317 franchissant la route départementale 939 entre les communes de Sens et de Soucy, dans l'Yonne (figure 5.15). Ce pont fait partie des structures étudiées dans le cadre du projet national Evaluation Dynamique des Ponts dans lequel est impliquée le LaMI et qui est à l'origine de ce travail de thèse. Pour bien situer les choses, rappelons que ce pont-rail avait été choisi avec un double objectif : d'une part, évaluer l'incidence de variations des conditions environnementales sur les caractéristiques modales à partir de mesures ponctuelles à différentes périodes de l'année, d'autre part caractériser et quantifier *in situ* les améliorations apportées par le resserrage des bielles sur le comportement dynamique de l'ouvrage. Concernant ce dernier point, il faut savoir que le pont considéré est un ouvrage à poutrelles enrobées de la ligne grande vitesse Paris Sud-Est, que cet ouvrage a été renforcé par un système de bielles pour satisfaire aux exigences de la SNCF et qu'il devait faire l'objet, au cours du projet, d'une procédure de "rigidification" par resserrage des bielles. La signature spectrale du système formé par le pont et l'excitation engendrée par le passage d'un TGV montre, en effet, que la fréquence d'excitation est proche de la première fréquence propre du pont. Il en résulte des risques de résonance importants et d'autant plus accrus que le rechargement en ballast apporte toujours des masses additionnelles qui tendent à faire diminuer les fréquences du pont et par suite à rapprocher encore sa première fréquence propre de la fréquence d'excitation. La SNCF a donc mis en place un système de bielles (encore appelées béquilles) aux extrémités de l'ouvrage (figure 5.16) qui sont resserrées par clé dynamométrique. Ce resserrage apporte une rigidification à l'ouvrage, donc augmente ses fréquences propres, permettant ainsi d'éviter la résonance.

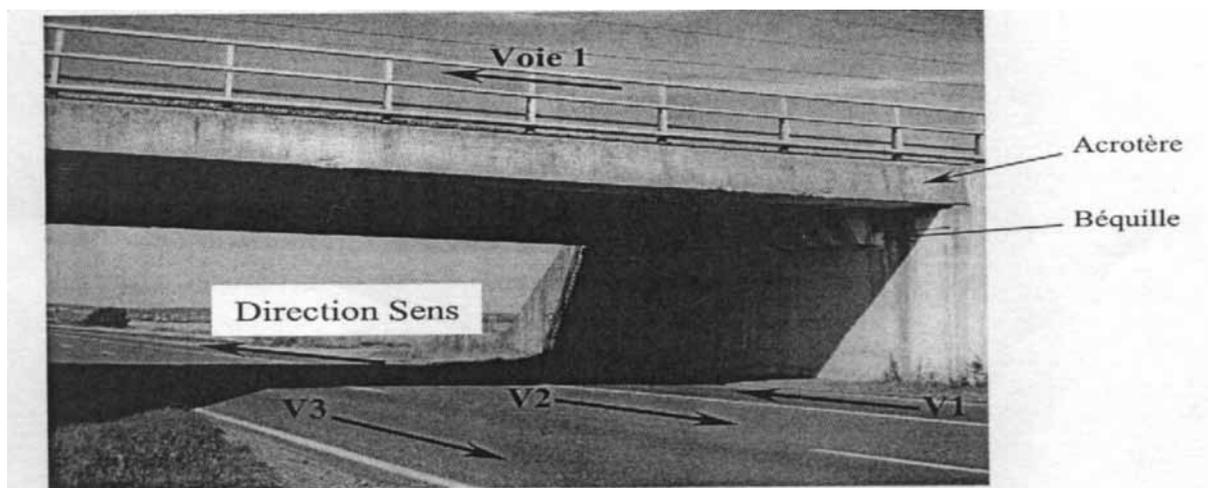


FIG. 5.15 – Vue d'ensemble du pont-rail et indication des sens de circulation

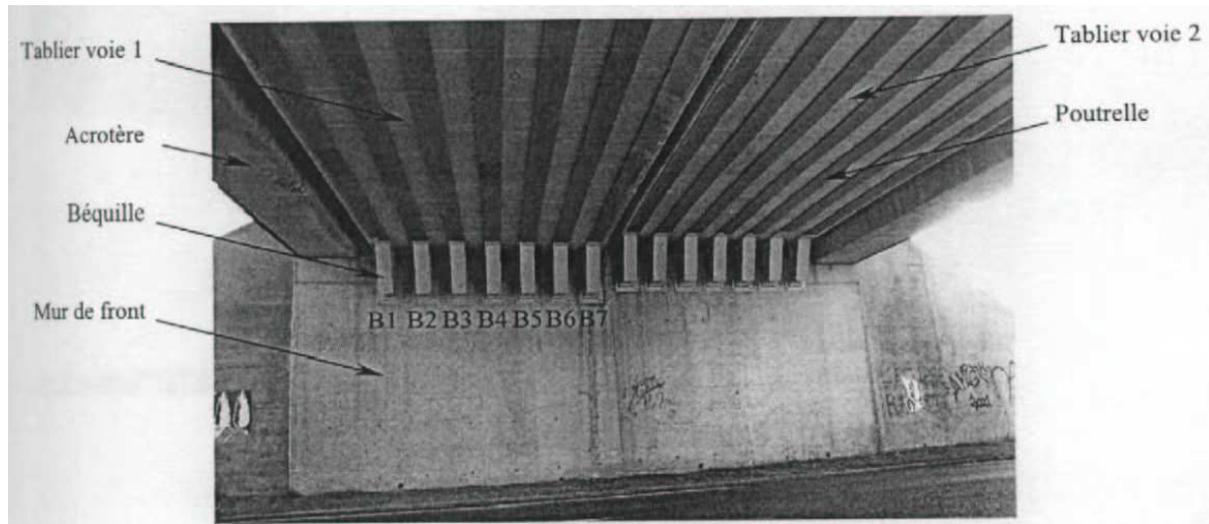


FIG. 5.16 – Vue des tabliers et des bielles (ou béquilles) du pont-rail

Les résultats présentés ici concernent deux applications des méthodes précédentes (sous-espaces, décrétement + méthode d'Ibrahim) à cet ouvrage :

- 1- l'identification de ses caractéristiques modales à une période spécifiée de l'année (l'analyse de l'impact de variations de conditions environnementales sur ces caractéristiques n'est pas considérée ici) ;
- 2- l'évaluation de l'incidence du resserrage des bielles de rigidification sur ces caractéristiques.

5.3.1 Instrumentation

L'instrumentation a été réalisée sur la voie 1 de l'ouvrage uniquement, qui est la voie où circulent les trains venant de Paris, car, contrairement à la voie 2, elle n'est pas équipée d'un tapis antivibratile. Les détails de cette instrumentation et les conditions d'intervention par la société SITES et la SNCF sont consignés dans les références [26, 27]. Nous nous contentons ici de rappeler quelques éléments de cette instrumentation, utiles à la compréhension de l'expérience.

Elle comporte en tout dix-sept capteurs positionnés sur la voie 1 et répartis comme suit (figure 5.17) :

- 8 accéléromètres verticaux (i.e. selon Z) : a2, a3, a4, a5, a6, a8, a9, a11, sous le tablier ;
- 2 accéléromètres horizontaux : a1 (selon Y), a7 (selon X), sous le tablier ;
- 3 capteurs de déplacement vertical : d1, d2, d3, entre l'acrotère et le tablier ;
- 2 capteurs de température : t1, t2, respectivement au-dessous et au-dessus de l'acrotère ;
- 2 ponts Q : Q1, Q2, sur le tablier, destinés à mesurer les charges sur essieux à l'entrée (Q1) et à la sortie (Q2) de l'ouvrage.

Le support de chaque capteur est à la fois collé et maintenu mécaniquement à l'aide d'un

montage permettant le réglage de l'orientation du capteur. Les supports, les câbles et le boîtier de raccordement restent en poste fixe sur l'ouvrage tandis que les capteurs, à l'exception des ponts Q et de la chaîne d'acquisition, sont installés puis démontés lors de chaque campagne de mesures.

Pour les capteurs de déplacement, le support est fixé à l'acrotère et le capteur mesure le déplacement relatif entre ce dernier, supposé fixe, et le tablier.

Pour les accéléromètres, le support est fixé sous le tablier au niveau des poutrelles.

Les capteurs de déplacement et les accéléromètres sont reliés (par l'intermédiaire de câbles cheminant sous le tablier) à un boîtier de raccordement fixé à environ 3m du sol sur un mur de front, depuis lequel est installée la chaîne d'acquisition. Les câbles des ponts Q, préalablement installés par la SNCF, arrivent à proximité du boîtier de raccordement mais ne sont pas reliés à ce dernier. L'acquisition de la température est réalisée indépendamment des autres mesures.

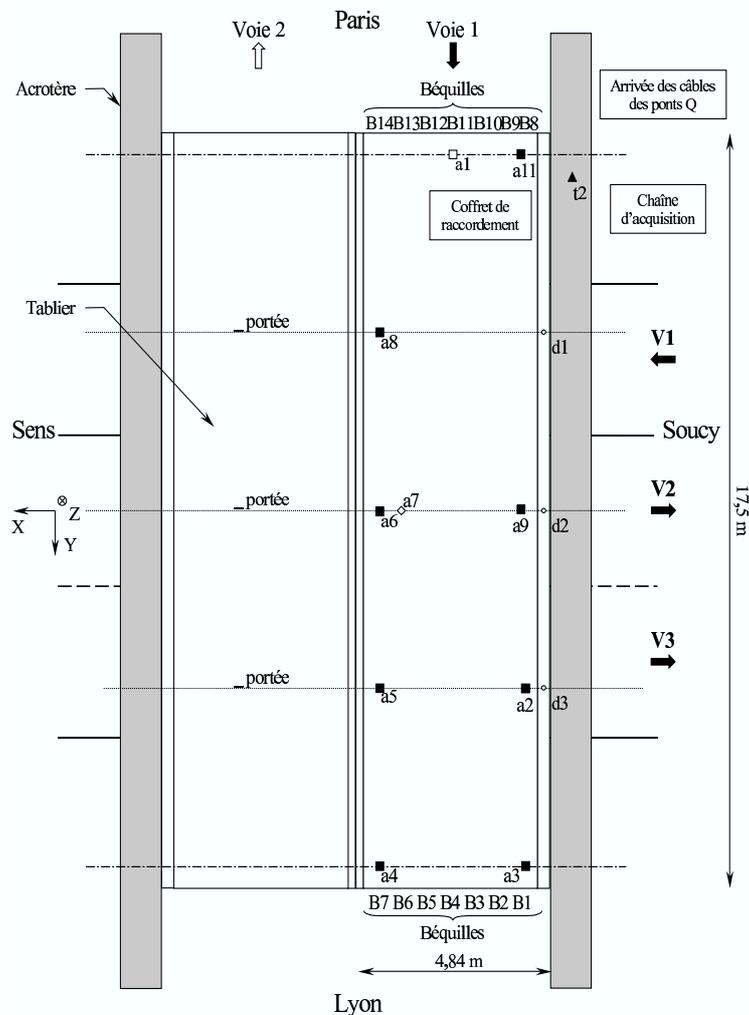


FIG. 5.17 – Position des capteurs sous le tablier

5.3.2 Traitement des données

La source d'excitation du tablier de la voie 1 est le passage des TGV commerciaux. A titre d'exemple, le nombre de passages enregistrés sur cette voie le 24 juin 2003, entre 10h57 et 14h57, est de 15 et il est de 14 le 25 juin 2003, entre 10h47 et 17h54. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au rapport d'étude R 03 PS 16355 établi dans le cadre du projet EDP.

Chaque fichier d'enregistrement contient 16 colonnes de données au format ASCII séparées par une tabulation. La structure de ces fichiers est synthétisée dans le tableau 5.9. Le pas d'échantillonnage est de 0.244 ms ($\approx 1/4096$). Ce sont essentiellement les capteurs accélérométriques qui ont été utilisés dans l'analyse qui suit. Les ponts Q ont cependant permis de discriminer la fréquence d'excitation liée au passage du TGV. En effet, le décalage de temps entre les premiers pics de la réponse des ponts Q1 et Q2 permet d'obtenir la vitesse du TGV, qui reste approximativement constante (ce qui justifie la répétabilité des essais). Par exemple, les premiers pics sont décalés en moyenne de 0.223s, ce qui donne une vitesse de passage de $17.50/0.223 = 78.47\text{ms}^{-1}$ environ, où 17.50m est la distance entre les points Q1 et Q2. Connaissant la distance entre bogies (18.70m), on en déduit une estimation de la fréquence fondamentale d'excitation du TGV : $78.47/18.70 \simeq 4.20\text{Hz}$. Cette fréquence correspond approximativement aux pics observés sur l'ensemble des spectres des signaux (la fréquence d'excitation observée sur ces spectres est en fait de l'ordre de 4.40Hz).

Disposant dse nombreux enregistrements sur une courte période de temps (quelques jours), chacun associé à un passage de TGV, nous avons testé la cohérence de ces données par une étude de répétabilité. A titre d'illustration, la figure 5.18 représente les résultats obtenus pour six fichiers de données. A chacun d'eux est associée la somme des spectres des signaux fournis par l'ensemble des capteurs et les graphes obtenus sont comparés. De cette comparaison, on peut conclure à une bonne répétabilité (chaque fichier détectant approximativement les mêmes pics de fréquence). D'autres fichiers ayant été testés avec le même succès, nous nous sommes limité à l'emploi d'un seul d'entre eux (pris au hasard parmi les autres) pour effectuer l'identification modale.

Notons que cette étude nous a permis d'obtenir une estimation grossière des fréquences modales. Nous intéressant aux quatre premières d'entre elles, nous avons ainsi pu limiter leur recherche aux quatre bandes suivantes : $[5, 6]\text{Hz}$, $[8, 10]\text{Hz}$, $[12, 14]\text{Hz}$, $[16, 18]\text{Hz}$.

Observons par ailleurs que dans l'ensemble des pics de fréquence observés sur le spectre d'un signal de sortie se trouve nécessairement celui (ou ceux) de l'excitation. Il convient alors de le(s) détecter. Nous avons vu plus haut une façon simple d'estimer la fréquence fondamentale d'excitation en utilisant les informations fournies par les ponts Q1 et Q2. On peut également y parvenir en isolant dans le signal temporel la partie due à l'excitation seule. A titre d'exemple, considérons le signal fourni par le capteur a_9 et résultant du passage du TGV 8A. Ce signal est représenté sur la figure 5.19 (a) et on y décèle deux parties distinctes : la partie 1 due au passage du TGV et la partie 2 relative à la réponse libre du pont après passage du TGV. La figure 5.19 (b) représente les spectres de ces deux parties. L'examen de celui de la partie 1 fait clairement apparaître une première fréquence propre aux alentours de 4.40Hz. C'est la fréquence cherchée et on peut constater qu'elle est assez proche de la première fréquence propre du pont ($\approx 5.65\text{Hz}$), justifiant ainsi l'opération de resserrage des bielles de rigidification.

N° colonne	capteur	Type	Unité
1	-	temps au format HP	s
2	a1	accélération	g
3	a2	accélération	g
4	a3	accélération	g
5	a4	accélération	g
6	a5	accélération	g
7	a6	accélération	g
8	a7	accélération	g
9	a8	accélération	g
10	a9	accélération	g
11	d1	déplacement	mm
12	d2	déplacement	mm
13	d3	déplacement	mm
14	a11	accélération	g
15	Q1	charge de roue	T
16	Q2	charge de roue	T

TAB. 5.9 – Structure des fichiers d'enregistrement

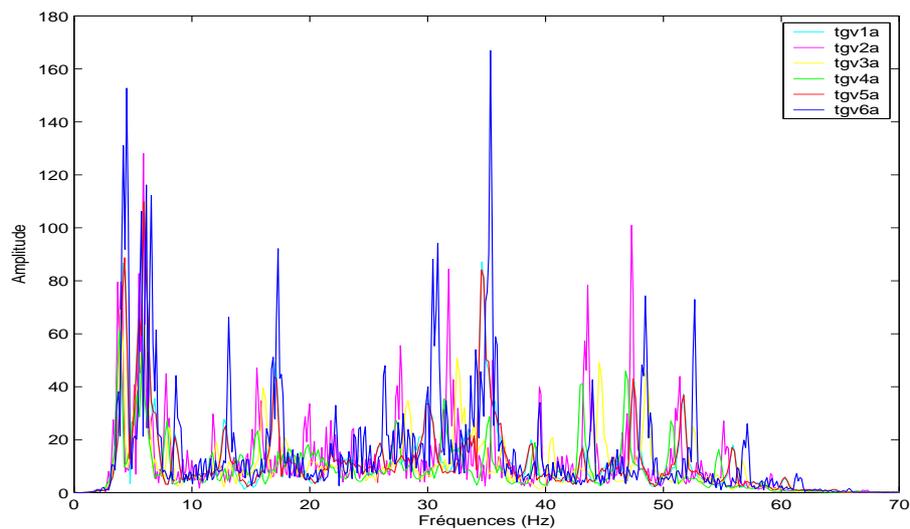


FIG. 5.18 – Graphes correspondants, pour chaque fichier, à la somme des spectres des signaux enregistrés par tous les capteurs.

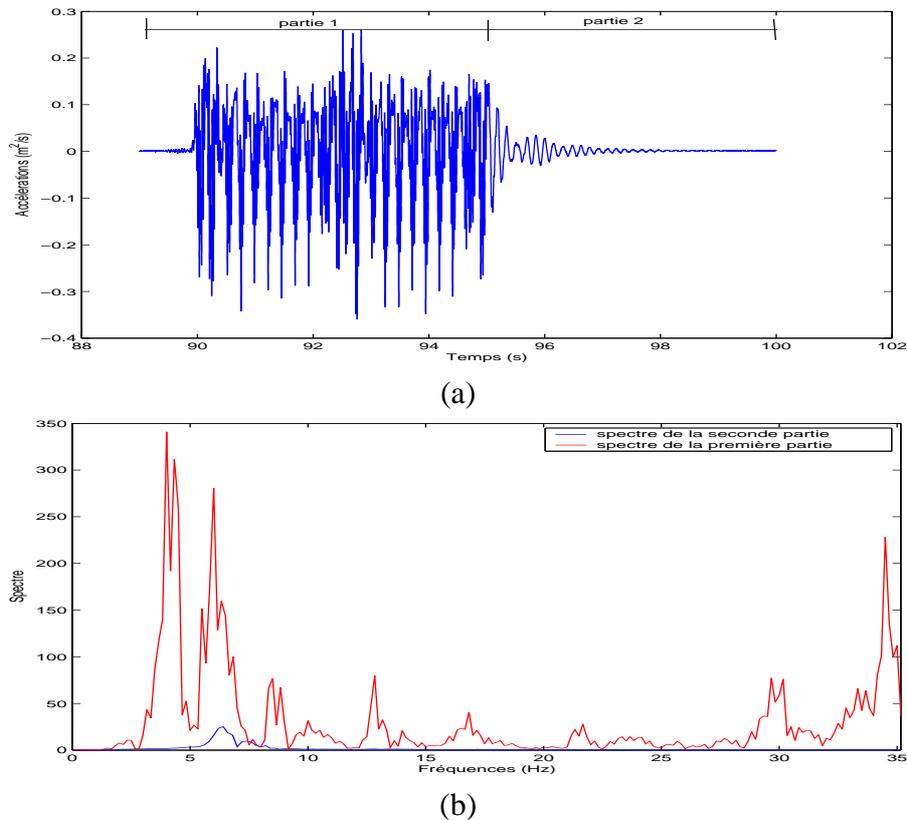


FIG. 5.19 – (a) signal temporel mesuré par le capteur a9 lors du passage de TGV 8A et (b) spectres de ses parties forcée (1) et libre (2).

5.3.3 Identification modale

Pour effectuer cette étude, seules les mesures fournies par les accéléromètres verticaux ont été utilisées. Ces signaux ont été préalablement filtrés à l'aide d'un filtre passe-bande de Butterworth. L'identification a été effectuée au moyen de la méthode des sous-espaces et de la méthode vectorielle du décrément couplée à la méthode d'Ibrahim.

Pour les paramètres de la méthode des sous-espaces, nous avons retenu les valeurs suivantes :

- taille de l'échantillon trajectorien : $N = 4000$;
- nombre de capteurs : $l = 8$;
- paramètre de durée de mémoire : $i = 40$.

Pour la construction du diagramme de stabilisation en fréquence, nous avons fait varier l'ordre n du système de 10 à 60 par pas de 2.

Les valeurs moyennes et écarts-types obtenus pour les fréquences et taux d'amortissement sont résumés dans les tableaux 5.10 et 5.11. Les déformées propres correspondantes sont représentées sur la figure 5.20 (a).

Pour la méthode vectorielle du décrément, les paramètres ont été fixés aux valeurs suivantes :

- taille de l'échantillon du décrétement : $M = 4000$;
- condition de déclenchement : celle du point positif avec $a_1 = 0.5\sigma_Y$ et $a_2 = +\infty$;
- décalage pour les pseudo-mesures de $k = 2$ à $k = 20$.

Les diagrammes de stabilisation des fréquences et amortissements ont été établis en suivant la procédure classique relative au décrétement vectoriel.

Les valeurs moyennes et écarts-types obtenus pour les fréquences et taux d'amortissement sont répertoriés dans les tableaux 5.10 et 5.11 et comparés à leurs homologues issus de la méthode des sous-espaces. Les déformées propres correspondantes sont représentées sur la figure 5.20 (b).

L'examen de ces divers résultats montre que les deux méthodes fournissent des estimées comparables pour les fréquences et les déformées modales, mais que ces estimées sont moins proches pour les amortissements, notamment celles relatives aux modes 1 et 4. On retrouve là l'éternel problème de l'identification des amortissements et on peut avancer les mêmes arguments que dans le cas de la poutre pour le justifier.

On peut aussi observer que la méthode des sous-espaces surestime les amortissements. On se gardera toutefois d'ériger ce résultat en règle générale car d'une part il concerne un seul exemple et d'autre part il est trop sujet à caution du fait de l'incertitude qui plane sur la modélisation de l'amortissement.

	Fréquences				
	Sous-espaces		Décrétement + Ibrahim		Ecart
	\bar{f} (Hz)	σ_f (Hz)	\bar{f} (Hz)	σ_f (Hz)	$\Delta\bar{f}$ (%)
Mode 1	5.5	0.1	5.8	$< 10^{-2}$	5.5
Mode 2	8.8	0.4	8.7	0.3	1.1
Mode 3	12.8	0.2	13.1	$< 10^{-2}$	2.3
Mode 4	17.1	0.2	17.0	$< 10^{-2}$	0.6

TAB. 5.10 – Fréquences propres identifiées (\bar{f} = moyenne ; σ_f = écart-type).

	Taux d'amortissement				
	Sous-espaces		Décrétement + Ibrahim		Ecart
	$\bar{\xi}$ (%)	σ_ξ (%)	$\bar{\xi}$ (%)	σ_ξ (%)	$\Delta\bar{\xi}$ (%)
Mode 1	5.6	1.4	2.9	0.1	48.2
Mode 2	7.5	1.8	6.3	1.2	16.0
Mode 3	4.8	1.4	4.8	0.2	0.0
Mode 4	2.5	1.1	0.4	0.02	84.0

TAB. 5.11 – Taux d'amortissement identifiés ($\bar{\xi}$ = moyenne ; σ_ξ = écart-type).

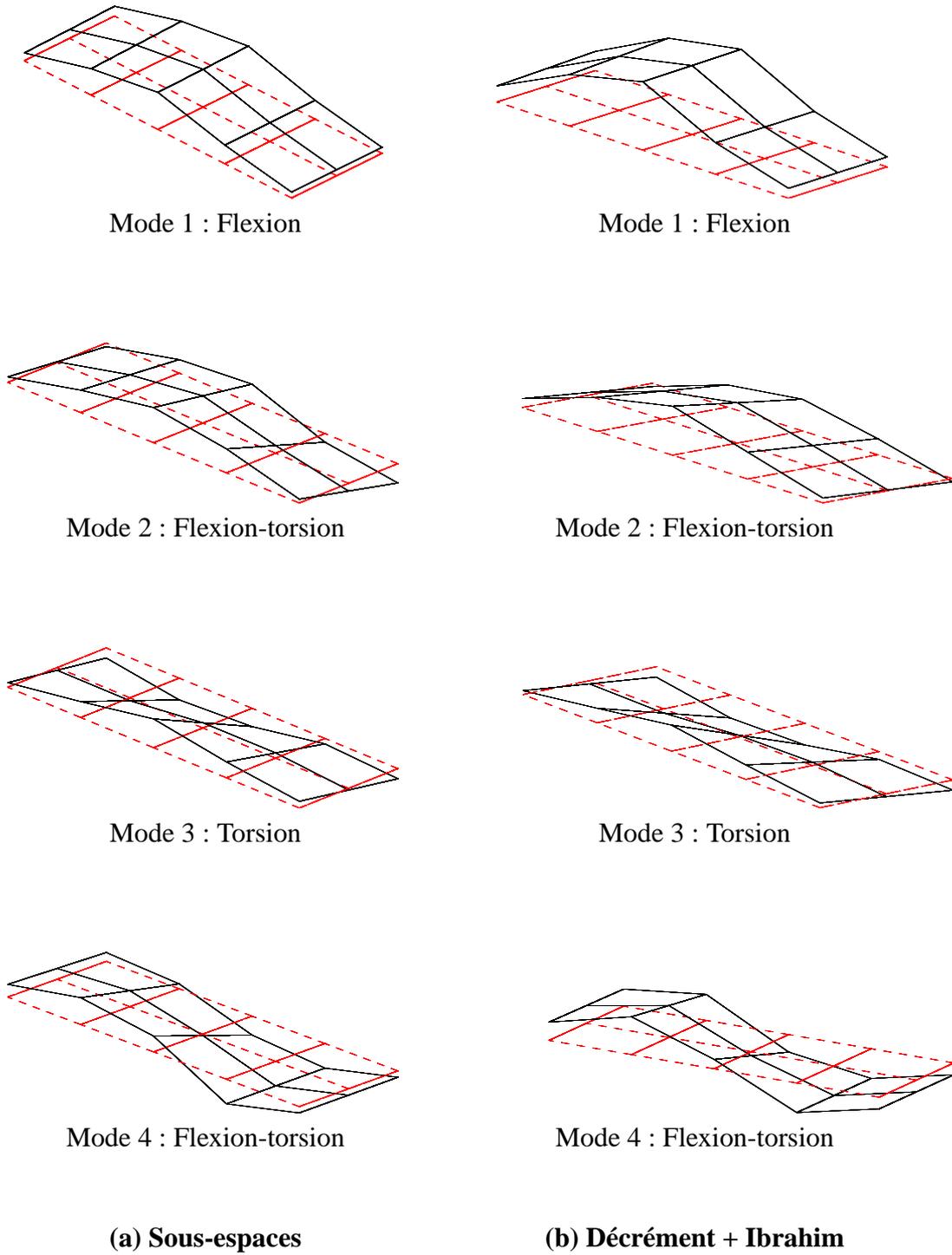


FIG. 5.20 – Déformées modales identifiées.

5.3.4 Incidence du resserrage des bielles sur les caractéristiques modales

L'opération de resserrage des bielles s'est déroulée le 25 juin 2003 et a été effectuée en quatre étapes successives (cf. figures 5.16 et 5.17 pour la numérotation des bielles) :

- étape 1 : resserrage des bielles B_1, B_2, B_3, B_4 ;
- étape 2 : resserrage des bielles B_5, B_6, B_7 ;
- étape 3 : resserrage des bielles B_8, B_9, B_{10}, B_{11} ;
- étape 4 : resserrage des bielles B_{12}, B_{13}, B_{14} .

A la fin de chaque étape un nouvel état de rigidification est ainsi atteint. Nous noterons état i ($i = 1, 2, 3, 4$), l'état atteint à la fin de l'étape i et état 0, l'état de référence, avant resserrage des bielles.

L'étude de l'incidence de ces changements successifs d'état sur les caractéristiques modales a été menée à l'aide de la méthode du décrément couplée à la méthode d'Ibrahim.

Les tableaux 5.12 et 5.13 résument les résultats obtenus pour les fréquences et amortissements modaux. Les modifications des déformées modales sont jugées à travers les coefficients MAC calculés, pour chaque mode, entre l'état 0 de référence et les états 1, 2, 3 et 4 successivement. De même, les variations des fréquences et des amortissements indiquées dans les tableaux 5.12 et 5.13 représentent les écarts relatifs absolus entre les valeurs identifiées de ces paramètres dans l'état 0 et leurs valeurs correspondantes dans les états 1, 2, 3 et 4.

Ces divers résultats appellent quelques remarques :

Tout d'abord, on constate que la fréquence fondamentale (celle du mode 1) croît significativement avec le resserrage et s'éloigne donc de la fréquence d'excitation qui vaut $4.41 Hz$. La solution du resserrage des bielles est donc pertinente vis-à-vis du problème de résonance.

D'une manière générale, on observe une augmentation des fréquences entre les états 1 et 4 pour les modes 1, 3 et 4 avec cependant une légère diminution lors du serrage amenant à l'état 1 pour le mode 3 et aux états 2 et 3 pour le mode 4. Quant au mode 2, hormis une augmentation de sa fréquence dans le passage de l'état 0 à l'état 1, il voit cette dernière stagner (état 2) ou diminuer (état 3 et 4) selon une règle difficile à expliquer. Ce constat corrobore celui fait dans la référence [6]. Enfin, pour ce qui est de l'amortissement, il varie avec le resserrage selon une règle assez anarchique qu'il serait hasardeux de vouloir expliquer mais qui résulte probablement, ici aussi, du caractère très incertain de la modélisation mécanique adoptée pour cette caractéristique.

		Fréquences (Hz)			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Etat 0	\bar{f}	5.8	8.7	13.1	17.00
	σ_f	$< 10^{-2}$	0.3	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$
Etat 1	\bar{f}	6.2	8.9	12.9	17.5
	σ_f	$< 10^{-2}$	0.02	0.1	0.03
	Ecart(%)	6.9	2.3	1.5	2.9
Etat 2	\bar{f}	6.6	8.7	13.6	16.3
	σ_f	$< 10^{-2}$	0.02	0.04	0.02
	Ecart(%)	13.8	0.0	3.8	4.1
Etat 3	\bar{f}	6.4	8.1	14.0	16.8
	σ_f	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	0.03	$< 10^{-2}$
	Ecart(%)	10.3	6.9	6.9	1.2
Etat 4	\bar{f}	6.7	8.4	13.5	17.5
	σ_f	$< 10^{-2}$	$< 10^{-2}$	0.01	$< 10^{-2}$
	Ecart(%)	15.5	3.4	3.1	2.9

TAB. 5.12 – Incidence du serrage des bielles sur les fréquences modales estimées (\bar{f} = moyenne ; σ_f = écart-type).

		Taux d'amortissement(%)			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Etat 0	$\bar{\xi}$	2.9	6.3	4.8	0.4
	σ_{ξ}	0.1	1.2	0.2	0.02
Etat 1	$\bar{\xi}$	5.0	8.1	3.2	2.3
	σ_{ξ}	0.1	0.3	0.3	0.1
	Ecart(%)	72.4	28.6	33.3	475.0
Etat 2	$\bar{\xi}$	5.8	1.3	1.6	1.7
	σ_{ξ}	0.3	0.1	0.02	0.1
	Ecart(%)	100.0	79.4	66.7	325.0
Etat 3	$\bar{\xi}$	3.2	1.2	0.4	1.1
	σ_{ξ}	0.03	0.2	0.1	0.03
	Ecart(%)	10.3	81.0	91.7	175.0
Etat 4	$\bar{\xi}$	4.2	0.7	0.2	1.2
	σ_{ξ}	0.03	0.1	0.1	$< 10^{-2}$
	Ecart(%)	44.8	88.9	95.8	200.0

TAB. 5.13 – Incidence du serrage des bielles sur les amortissements modaux ($\bar{\xi}$ = moyenne ; σ_{ξ} = écart-type).

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Etat 0 – Etat 1	99.1	48.5	93.5	90.8
Etat 0 – Etat 2	98.8	68.5	94.6	97.5
Etat 0 – Etat 3	98.3	21.4	99.3	99.1
Etat 0 – Etat 4	98.3	17.9	99.1	94.9

TAB. 5.14 – Incidence du serrage des bielles sur les coefficients MAC entre l'état de référence et les divers états de serrage.

5.4 Conclusion

Nous venons d'appliquer les deux méthodes étudiées dans ce travail, à savoir la méthode des sous-espaces basée sur l'algorithme CVA et la méthode du décrément aléatoire couplée à la méthode d'Ibrahim, à deux exemples réels : une poutre testée en laboratoire et un pont-rail expérimenté *in situ*.

Ces applications nous ont conduit à identifier les paramètres modaux de ces structures, ce qui était l'objectif premier de l'expérimentation numérique, mais également à mener quelques analyses plus spécifiques, comme l'étude de l'impact sur les caractéristiques modales d'une réduction de section localisée (poutre) ou du resserrage de bielles de rigidification (pont-rail).

Au delà des résultats de ces analyses, qui n'étaient finalement qu'un prétexte à l'expérimentation des méthodes en dehors du contexte académique, on retiendra l'aptitude de ces dernières à satisfaire à l'objectif visé (l'identification modale) en situation réelle, ainsi que l'équivalence de leurs performances vis-à-vis de cet objectif.

Ces applications ont clairement mis en évidence la difficulté d'identifier l'amortissement, probablement en raison d'une modélisation inadéquate de ce paramètre. Mais la recherche d'une modélisation réaliste des effets dissipatifs est un problème en soi, qui sort largement du cadre de ce travail.

Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un axe de recherche commun de deux laboratoires de l'Université Blaise Pascal (le LaMI-Laboratoire de Mécanique et Ingénieries et le LM-Laboratoire de Mathématiques), né de l'implication en 2001 de ces deux laboratoires dans le projet national EDP-Evaluation Dynamique des Ponts, piloté par le LCPC.

Cet axe de recherche concerne l'analyse théorique et la mise en oeuvre numérique d'outils algorithmiques destinés à l'identification des paramètres modaux de structures sous sollicitations dynamiques ambiantes aléatoires, et le projet de thèse a été bâti autour de deux outils réputés pour leur pertinence dans ce domaine : les méthodes de sous-espaces et la méthode du décrétement aléatoire.

Rappelons que le problème sous-jacent est l'estimation des paramètres modaux d'une structure dont la dynamique est supposée modélisable par celle d'un oscillateur linéaire vectoriel stochastique, avec pour seule donnée une trajectoire expérimentale de la réponse stationnaire.

Après avoir formulé le problème, effectué une étude bibliographique ciblée sur les outils adaptés à sa résolution et expliqué les raisons de notre choix par les deux outils retenus, nous avons entrepris le travail d'analyse de ces derniers, conformément à l'objectif visé.

L'apport de notre contribution est double.

D'une part, considérant les méthodes de sous-espaces, qui sont actuellement très utilisées, nous en avons fait une présentation détaillée afin de bien cerner leurs limites et de lever quelques ambiguïtés sur certains aspects.

D'autre part, et c'est le coeur du travail, nous avons fourni une analyse complète de l'approche par l'algorithme du décrétement aléatoire. En adaptant au problème posé des résultats récents (P. Bernard et L. Lei), nous avons calculé la limite asymptotique du décrétement, tel qu'il est implémenté en temps discret, lorsque la longueur de l'observation tend vers l'infini. Puis, nous avons calculé la limite lorsque le pas tend vers zéro, ce qui conduit à des résultats plus simples et utilisables en pratique. Cette étude permet de trancher une question restée obscure dans la littérature consacrée au décrétement : le résultat du décrétement ne coïncide pas toujours avec l'espérance conditionnelle sachant un franchissement de niveau à un instant déterministe donné. En fait, nous avons montré qu'il y avait bien, pour un processus gaussien stationnaire ergodique centré, coïncidence dans le cas du franchissement simple d'un niveau ainsi que dans celui de la condition du point positif, mais qu'il en était autrement dans le cas du franchissement en croissant. Les raisons de cette différence, qui conduit à un biais de l'estimateur par espérance conditionnelle tel qu'il a été proposé par Vandiver et ses co-auteurs ou par Asmussen, ont été analysées avec précision et les résultats testés numériquement, ce qui ne laisse aucun doute sur

leur validité. Par ailleurs, nous avons montré pourquoi l'algorithme du décrétement aléatoire, bien justifié dans ce travail pour une excitation gaussienne stationnaire ergodique, fonctionnait encore lorsque cette dernière est une impulsion ou un train d'impulsions, comme c'est le cas par exemple lorsque la sollicitation résulte du passage d'un train sur un pont.

Enfin, des applications numériques sur deux exemples réels : une poutre grandeur réelle testée au laboratoire d'essais des structures du LCPC et un pont-rail de TGV expérimenté *in situ* par la société SITES et la SNCF, ont permis de montrer les possibilités et les limites de ces approches, dans leur état actuel d'élaboration, pour détecter des modifications des caractéristiques modales d'une structure.

Bien entendu, tous les problèmes n'ont pas été résolus. Ainsi, il conviendrait que chaque méthode se voit renforcée d'un test statistique qui lui permettrait d'accompagner chaque résultat d'une marge d'erreur rationnellement évaluée. De même, dans les méthodes de sous-espaces, l'étape de factorisation de la matrice de Hankel des observations mériterait une analyse approfondie afin de préciser la classe des factorisations possibles. De plus, une formulation de ces méthodes en termes d'opérateurs, donc sous forme intrinsèque reste à écrire, car c'est à l'évidence le bon cadre, les résultats étant toujours obtenus à une similitude près dans l'espace des états. Espérons que ces perspectives de recherche inciteront d'autres chercheurs à prendre le relais.

Bibliographie

- [1] M. Abdelghani and M. Basseville and A. Benveniste, Subspace-based fault detection and isolation methods - Application to vibrating monitoring, publication interne IRISA, n°1143, 29p., Novembre 1997.
- [2] P. Andersen, R. Brinker, B. Peeters, G. DE Roeck, L. Hermans, C. Krämer, Comparison of System identification methods using ambiente bridge test data, In Processing of IMAC 17, the International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Fl, USA, 1035-1041, 1999.
- [3] H. Akaike, Stochastic Theory of minimal realization, IEEE Transactions on Automatica Control, 19, 667-674, 1974.
- [4] R. J. Allemang, Vibrations : experimental modal analysis, course notes, Seventh edition, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, 1999.
- [5] A. Alvandi, Contribution à l'utilisation pratique de l'évaluation dynamique pour la détection d'endommagements dans les ponts, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées", 10 octobre 2003.
- [6] A. Alvandi, C. Crémona, P. Habib-Hallak, M.H. Inchuaspé, D. Ducret and L. Dieleman, Suivi dynamique du pont-rail, Numéro spécial de la Revue Européenne de Génie Civil, vol. 9, n° 1-2, 87-108, 2005.
- [7] J. C. Asmussen, Modal analysis based on the random decrement technique. Application to civil engineering structures, PhD thesis, University of Aalborg, Denmark, 997.
- [8] J. C. Asmussen, R. Brincker, S. R. Ibrahim, Statistical theory of the vector random decrement technique, Journal of Sound and Vibration, 226, 2, 329-344, 1999.
- [9] A. V. Balakrishnan, Kalman filtering theory, ISBN, 1984.
- [10] M. Basseville, A. Benveniste, G. Moustakides, A. Rougée, Detection and diagnosis of changes in eigenstructure of non-stationary multi-variable systems, Automatica, 23, 3, 479-489, 1987.
- [11] A. Benveniste, M. Basseville, G. Moustakides, The asymptotic local approach to change detection and model validation, IEEE Trans. Automatic Control, AC-32, 7, 583-592, 1987.

- [12] P. Bernard, M. Fogli, P. Bressolette and M. Lemaire", Un algorithme de simulation stochastique par markovianisation approchée. application à la mécanique aléatoire, *J. Méc. Théor. et Appl.*, 3, 6, 905-950, 1984.
- [13] P. Bernard, Identification de grandes structures : une remarque sur la méthode du décrément aléatoire, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7, 3, 269-280, 1988.
- [14] P. Bernard, Slepian model : a new approach, *Structural Safety*, 8, 301-310, 1990.
- [15] R. Brincker, S. Krenk, P. H. Kirkegaard and A. Rytter, Identification of dynamical properties from correlation function estimates, *Bygningstatistiske Meddelelser*, 63, 1, 1-38, 1992.
- [16] T.K. Caughey and H.J. Stumpf, Transient response of dynamic system under random excitation, *Journal of Applied Mechanics*, 4, 563-566, 1961.
- [17] H.A. Cole, On-The-Line Analysis of Random Vibration, *AIAA Paper*, No 68-288, 1968.
- [18] H. Cramer and M. R. Leadbetter, Stationary and related stochastic processes, sample function properties and their applications, *John Wiley & Sons*, 1967".
- [19] C. Crémona, L. Dieleman, M. Fogli, and M.H. Inchauspé, Evaluation dynamique expérimentale des ouvrages, Numéro spécial de la *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 9, n° 1-2, 2005.
- [20] C. Crémona , Rapport de synthèse de l'opération de recherche (2000-2003) "Evaluation Dynamique des Ponts", Éditions du LCPC, Paris, octobre 2004.
- [21] C. Crémona, Recursive time domain modal identification techniques, PhD thesis, University of Wales College of Cardiff, United Kingdom, 1990.
- [22] C. Crémona and J. A. Brandon, A modal identification algorithm with unmeasured input, *ASCE Journal of Aerospace Engineering*, 5, 4, 442-449, 1992.
- [23] C. Crémona and F. Barbosa, Identification modale sous excitation ambiante : application aux ponts, *Colloque Méthodes Modales Expérimentales*, EIVL Blois (Loir et Cher), CDROM (20p.), 29-30 novembre 2001.
- [24] D. Daucher, I. D. Mendoume-Minko and M. Fogli, Une approche par identification stochastique pour la construction de modèles dynamiques aléatoirement perturbés, 6^{ème} Colloque en Calcul des Structures GIENS 2003, Giens (Var), tome 1, 121-128, 20-23 mai 2003.
- [25] B. Devauchelle-Gach, Diagnostic mécanique des fatigues sur les structures soumises à des vibrations en ambiance de Travail, Thesis, Paris IX University (in french), 1991.
- [26] D. Ducret, H. Caron and N. Boufridi, Programme de Recherche Evaluation Dynamique des Ponts-Instrumentation et Mesures Dynamiques sur le Pont-Rail SNCF du PK 075 + 317 de la ligne à Grande Vitesse Paris Sud-Est-Campagne de Mesures 1, Rapport SITES R 03 PS 15400, 2003.

- [27] D. Ducret and H. Caron, Programme de Recherche Evaluation Dynamique des Ponts-Instrumentation et Mesures Dynamiques sur le Pont-Rail SNCF du PK 075 + 317 de la ligne à Grande Vitesse Paris Sud-Est-Campagne de Mesures 2, Rapport SITES R 03 PS 16355, 2003.
- [28] D. J. Ewins, Modal testing : theory, practice and application, 2nd edition, Research Studies Press, 2000.
- [29] C. R. Farrar and G. H. James, System Identification from ambient vibration measurements on a bridge, *Journal of Sound and Vibration*, 205, 1, 1-18, 1997.
- [30] C. R. Farrar, T. A. Duffey, P. J. Cornwell and S. W. Doebling, Excitation methods for bridge structures, 17th International Modal Analysis Conference Kissimmee, 1999.
- [31] P. Faure, Stochastic realization algorithms system identification : advanced and case studies, Eds. Mehra R. and Lainiotis D., Academic Press, 1976.
- [32] T. Gmur, Dynamique des structures, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1997.
- [33] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix computations, The Johns Hopkins University press, Baltimore, Maryland, 1983.
- [34] C. Gontier, Energetic classifying of vibration modes in subspace stochastic modal analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19, 1-19, 2004.
- [35] C. Gontier and M. Raffy, Analyse modale direct de type sous-espace à partir de donnée d'accélération, *Mechanique et Industries*, 4, 595-603, 2003.
- [36] M. R. Hatch, Vibration simulation using matlab and ansys, Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [37] L. Hermans and H. Van Der Auweraer, Modal testing and analysis of structures under operational conditions : industrial applications, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13, 2, 193-216, 1999.
- [38] B. L. Ho and R. E. Kalman, Effective construction of linear state variable models from input/output data, *Regelungstechnik*, 14, 545-548, 1966.
- [39] S. R. Ibrahim, Random decrement technique for modal identification of structures, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14, 11, 696-700, 1977.
- [40] S. R. Ibrahim, An upper Hessenberg sparse Matrix algorithm for modal identification on minicomputer, *Journal of Sound and Vibration*, 113, 1, 47-57, 1987.
- [41] S. R. Ibrahim and J. C. Asmussen and R. Brincker, Theory of vector triggering random technique, 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, USA, 1, 502-510, 1997.
- [42] S. R. Ibrahim and E.C. Mikulcik, The experimental determination of vibration parameters from time responses, *The Shock and Vibration Bulletin*, 46, 5, 187-196, 1976.
- [43] L. Ljung and T. Kailath, Backward Markovian models for second-order stochastic processes, *IEEE Transactions on Information Theory*, 22, 483-491, 1976.

- [44] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1980.
- [45] R. E. Kalman, A new approach of linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Engineering*, 82, 34-45, 1960.
- [46] N. Kolmogorov, *Foundations of probability*, Chelsea Pub. Company, 1950,
- [47] F. Kozin and H. G. Natke, System identification techniques, *Structural Safety*, 3, 269-316, 1986.
- [48] P. Kree and C. Soize, *Mécanique aléatoire*, Dunod, 1983.
- [49] P. de Larminat, *Analyse des systèmes linéaires*, Lavoisier, 2002
- [50] L. Ljung, *System identification. Theory for the user*, Seconde edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [51] I. D. Mendoume-Minko and D. Daucher and M. Fogli, Identification stochastique et modélisation de comportements structuraux complexes, 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nice (Alpes Maritimes), CD Rom (8p.), 1-5 septembre 2003.
- [52] I. D. Mendoume-Minko and M. Fogli and P. Bernard, Identification modale d'une structure sous excitation dynamique ambiante par une technique de sous-espaces, 2^{ème} Colloque d'analyse vibratoire expérimentale, EIVL Blois (Loir et Cher), 13-14 novembre 2003.
- [53] I. D. Mendoume-Minko, Méthodes d'identification sous sollicitation ambiante - Rapport de synthèse de l'opération de recherche (2000-2003) "Evaluation Dynamique des ponts" - sous la direction de Christian Crémona. Editions du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), 2004.
- [54] I. D. Mendoume-Minko and P. Bernard and M. Fogli, Identification de paramètres modaux de structures sous excitations dynamiques ambiantes, Numéro spécial de la Revue Européenne de Génie Civil "Evaluation dynamique expérimentale des ouvrages", *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 9, n° 1-2, 43-85, 2005.
- [55] I. D. Mendoume-Minko and P. Bernard and M. Fogli, Décrément aléatoire et identification des systèmes mécaniques sous sollicitations dynamiques ambiantes, 17^{ème} Congrès Français de Mécanique, Troyes (Aube), 29 août-2 septembre 2005.
- [56] I. D. Mendoume-Minko and M. Fogli and P. Bernard, Structural identification and random decrement method, International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVACES'05, Bordeaux, France, october 26-28, 2005.
- [57] I. D. Mendoume-Minko and M. Fogli and P. Bernard, Asymptotic analysis of the random decrement technique, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005 (en préparation).
- [58] L. Mevel and L. Hermans and H. Van Der Auweraer, Application of a subspace-based fault detection method to industrial structures, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999.

- [59] J. Neveu, *Processus Ponctuels*, Ecole d'été de Probabilité de Saint-Flour (1976), *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, 598, 1977.
- [60] B. Peeters and G. De Roeck, Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13, 6, 855-878, 1999.
- [61] B. Peeters and G. De Roeck, Reference based stochastic subspace identification in civil engineering, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13, 6, 855-878, 1999.
- [62] B. Peeters and G. De Roeck, Stochastic system identification for operational modal analysis : a review, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123, 659-667, 2001.
- [63] B. Peeters and J. Maeck and G. De Roeck, Vibration-besed damage detection in civil engineering : excitation sources and temperature effects, *Smart Materials and Structures*, 10, 518-527, 2001.
- [64] B. Piombo, E. Giorcelli, L. Garibaldi and A. Fasana, The deconvolution technique applied to mdofs systems, In : *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*, 1993.
- [65] A. Robertson, K.C. Park and K.F. Alvin", Extraction of impulse response data via wavelet transforms for structural system identification, *Journal Vibration Acoustic*, 120, 1, 252-260, 1998.
- [66] C. Soize, *Méthodes mathématiques en analyse du signal*, Masson, 1993.
- [67] C. Soize, *Dynamique des structures. éléments de base et concepts fondamentaux*, Ellipses, 2001.
- [68] L. Tenorio, Statistical regularisation of inverse problems, *SIAM Review*, 43, 2, 2001, 347-366.
- [69] P. Van Overschee and B. DE Moor, A subspace approach to stochastic realization and positive real sequences, *ESAT-SISTA Report*, 1991-2002, 1996.
- [70] P. Van Overschee and B. DE Moor, N4SID : subspace algorithms for the identification of combined deterministic stochastic systems, *Automatica*, 30, 1, 75-93, 1994.
- [71] P. Van Overschee and B. DE Moor, *Subspace identification for linear system*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [72] J. K. Vandiver, A. B. Dunwood, R. B. Campbell and M. F. Cook, A Mathematical basis for the random decrement vibration signature analysis technique, *J. mechanical Design*, 104, 307-313, 1982.
- [73] M. Verhaegen, Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data, *Automatica*, 30, 1, 61-74, 1994.
- [74] M. Viberg, Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems, *Automatica*, 31, 12, 1835-1851, 1995.

-
- [75] H. Vold and J. Kundrat and T. Rocklin and R. Russell, A multiple-input modal estimation algorithm for mini-computers, SAE Transaction, 91, 1, 815-821, 1982.

Annexe A

Simulation numérique de la réponse stationnaire d'un oscillateur stochastique linéaire vectoriel excité par un bruit blanc gaussien

Nous proposons dans cette annexe deux méthodes de simulation numérique de la réponse stationnaire d'un oscillateur stochastique linéaire vectoriel excité par un bruit blanc gaussien.

Ces deux méthodes opèrent sur l'équation différentielle stochastique (EDS) vectorielle de Itô associée à la représentation d'état de l'oscillateur.

La première consiste à échantillonner la solution stationnaire exacte (connue) de cette EDS aux noeuds du maillage de l'intervalle d'étude choisi pour effectuer la simulation. On obtient ainsi une chaîne de Markov dont le schéma récurrent présente la particularité d'être explicite et inconditionnellement stable, mais nécessite le calcul de l'exponentielle d'une matrice, ce qui peut être un inconvénient en grande dimension.

La seconde méthode est quant à elle basée sur une discrétisation de l'EDS de Itô aux noeuds du maillage. Comme toujours en pareils cas se pose alors le problème du choix du schéma de discrétisation. Nous en proposons deux : un schéma de type Euler et un schéma de type différences centrées. Tous deux conduisent à une chaîne de Markov explicite. Mais dans le premier cas son schéma récurrent n'est pas inconditionnellement stable alors qu'il l'est dans le second. Aucun des deux par contre ne nécessite le calcul d'une exponentielle de matrice.

Dans tout ce qui suit, (Ω, \mathcal{F}, P) désigne l'espace de probabilité de base sur lequel sont supposées définies toutes les grandeurs aléatoires (variables, processus) considérées.

A.1 Préliminaires

On s'intéresse ici à la classe des systèmes dynamiques stochastiques linéaires vectoriels d'équation d'évolution (1.1). Cette dernière est ramenée à sa forme de Itô (1.2) pour laquelle on suppose satisfaites toutes les hypothèses garantissant l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$. En particulier, on suppose que la matrice A_c est asymptotiquement stable. Dans ce cas, on sait que X est l'unique solution de l'EDS de Itô linéaire homogène avec condition initiale :

$$\begin{cases} dX(t) = A_c X(t) dt + B_c dW(t) \\ X(0) = X_0 \quad p.s. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où X_0 est une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n indépendante de W et ayant pour loi la probabilité invariante de (A.1) qui est une probabilité gaussienne centrée de variance matricielle Σ solution de l'équation de Lyapunov (1.18).

On sait en outre que X est un processus gaussien stationnaire centré de fonction de corrélation $t \mapsto \Sigma_X(t) = \mathbb{E}[X(t+u)X^T(u)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\Sigma_X(t) = \begin{cases} e^{A_c t} \Sigma & \text{si } t \geq 0 \\ \Sigma e^{-A_c^T t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

avec $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donnée par (1.18).

Par ailleurs, cette solution s'écrit, pour $t \geq 0$:

$$X(t) = e^{A_c t} X_0 + \int_0^t e^{A_c(t-s)} B_c dW(s) \quad (\text{A.3})$$

et est telle que, pour $t, u > 0$:

$$X(t+u) = e^{A_c t} X(u) + \int_u^{t+u} e^{A_c(t+u-s)} B_c dW(s) \quad (\text{A.4})$$

relation qui nous sera utile plus loin.

Observons en outre que pour tout u et tout t fixés dans \mathbb{R}_+ , la v.a. $X(u)$ est indépendante de la v.a. $\int_u^{t+u} e^{A_c(t+u-s)} B_c dW(s)$, car le processus X est non anticipant par rapport à W (i.e. la v.a. $X(t)$ est $\sigma(W(s); 0 \leq s \leq t)$ -mesurable, $\forall t \geq 0$).

L'objectif est de simuler cette solution, c'est-à-dire de construire numériquement des trajectoires $t \rightarrow X(t, w_j) = x^j(t)$, $w_j \in \Omega$, $j \in J$, où J est un ensemble fini d'indices. Pour cela on procède en trois étapes :

- 1- On se donne un intervalle $T = [0, s_1]$ de \mathbb{R}_+ , appelé intervalle d'échantillonnage ou de simulation, et on considère une partition finie d'ordre N et de pas constant Δt de cet intervalle, i.e. un découpage : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = s_1$ de T en $N - 1$ intervalles disjoints de longueur $\Delta t : \forall k \in I_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}, t_{k+1} - t_k = \Delta t$. Notons que le choix d'une partition à pas constant n'est pas une nécessité, mais dans notre cas il permettra de simplifier notablement les calculs.
- 2- On échantillonne la solution aux noeuds t_k de la partition et dans le cas linéaire on a deux possibilités :
 - soit on échantillonne la solution exacte (connue ici) ce qui revient à considérer la famille de v.a. $(X(t_k); k \in I_N)$, qui est une chaîne de Markov stationnaire parfaitement déterminée ;
 - soit on échantillonne un processus approximant \tilde{X} , obtenu comme solution stationnaire d'une version discrète de l'EDS de départ construite en utilisant un schéma numérique approprié bâti sur la partition de T considérée. Dans ce cas, on obtient une famille de v.a. $(\tilde{X}(t_k); k \in I_N)$ qu'il faut caractériser et qui est généralement aussi une chaîne de Markov. Bien entendu, seule cette approche est utilisable pour les EDS non linéaires.
- 3- on élabore une procédure numérique permettant d'obtenir des réalisations de l'échantillon construit à l'étape 2.

Examinons maintenant ces deux cas en considérant pour le second deux schémas : un de type Euler et un de type différences centrées.

A.2 Première méthode

Considérons la solution de (A.1) sous sa forme (A.4) et écrivons-la aux noeuds du maillage en posant :

$$u = t_k = k\Delta t \quad ; \quad u + t = t_{k+1} = (k + 1)\Delta t$$

D'après (A.4), nous obtenons, $\forall k \in I_N$:

$$X_{k+1} = e^{A_c \Delta t} X_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} B_c dW(s) \quad (\text{A.5})$$

Posons :

$$\mathcal{W}_k = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} B_c dW(s) \quad (\text{A.6})$$

D'après les propriétés de l'intégrale de Wiener, $\forall k \in I_N$, \mathcal{W}_k est une v.a. gaussienne centrée à valeurs dans \mathbb{R}^n dont la variance matricielle $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s'écrit :

$$Q_k = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k \mathcal{W}_k^T] = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c[(k+1)\Delta t - s]} B_c B_c^T e^{A_c^T[(k+1)\Delta t - s]} ds \quad (\text{A.7})$$

soit, après le changement de variable $u = (k + 1)\Delta t - s$:

$$Q_k = \int_0^{\Delta t} e^{A_c u} B_c B_c^T e^{A_c^T u} du \quad (\text{A.8})$$

Cette variance ne dépend pas de k et nous la noterons Q dorénavant. De plus, il est facile de montrer à partir de (A.8) que Q est solution de l'équation de Lyapunov :

$$A_c Q + Q A_c^T = e^{A_c \Delta t} B_c B_c^T e^{A_c^T \Delta t} - B_c B_c^T \quad (\text{A.9})$$

dont la solution s'écrit :

$$Q = \Sigma - e^{A_c \Delta t} \Sigma e^{A_c^T \Delta t} \quad (\text{A.10})$$

où $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la variance matricielle de la probabilité invariante de (A.1), donc de la v.a. $X_k, \forall k \in I_N$. Rappelons que cette variance est solution de l'équation de Lyapunov (1.18), c'est-à-dire :

$$A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -\sigma_c \quad ; \quad \sigma_c = B_c B_c^T \quad (\text{A.11})$$

Observons que les v.a. X_0 et $\{\mathcal{W}_k; k \in I_N\}$ sont gaussiennes, centrées et indépendantes dans leur ensemble.

Notons, par ailleurs, que du fait de la définie-positivité des matrices Q et Σ , celles-ci admettent une factorisation de Cholesky de la forme :

$$Q = S S^T \quad ; \quad \Sigma = S_0 S_0^T \quad (\text{A.12})$$

où S et S_0 sont des matrices triangulaires inférieures de rang plein.

Par suite, on peut écrire :

$$X_0 = S_0 G_{00} \quad ; \quad \mathcal{W}_k = S G_k \quad , \quad \forall k \in I_N \quad (\text{A.13})$$

où G_{00} et les $G_k, k \in I_N$, sont des copies indépendantes d'une v.a. G gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n (i.e. gaussienne, n -dimensionnelle, centrée, de variance matricielle I_n).

Notons enfin que comme, par construction, le processus solution X n'est pas anticipant par rapport au brownien W , pour tout $k \in I_N$, la v.a. X_k est indépendante de la famille $\{\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k+1}, \dots, \mathcal{W}_{N-1}\}$, donc aussi de la famille $\{G_k, G_{k+1}, \dots, G_{N-1}\}$.

Finalement, on obtient une chaîne de Markov $(X_k; k \in I_N)$ qui, par construction, est gaussienne, stationnaire, centrée et définie par le schéma récurrent :

$$\begin{cases} X_0 = S_0 G_{00} \\ X_{k+1} = e^{A_c \Delta t} X_k + S G_k \quad ; \quad k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

avec :

S_0 telle que $S_0 S_0^T = \Sigma$
 Σ solution de $A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -\sigma_c$; $\sigma_c = B_c B_c^T$
 S telle que $S S^T = Q$
 Q donnée par : $Q = \Sigma - e^{A_c \Delta t} \Sigma e^{A_c^T \Delta t}$
 G_{00} et G_k , $k \in I_N$, des copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n

Par suite, une réalisation de cette chaîne (i.e. une trajectoire sur T de la solution stationnaire X) est obtenue par :

$$\begin{cases} x_0 = S_0 g_{00} \\ x_{k+1} = e^{A_c \Delta t} x_k + S g_k \quad ; \quad k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

où g_{00} et g_k , $k \in I_N$, sont des réalisations indépendantes d'une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n .

A.3 Deuxième méthode

Il s'agit ici de discrétiser l'EDS aux noeuds de la partition. Plusieurs schémas de discrétisation peuvent être utilisés. Nous en présentons deux : l'un de type *Euler*, l'autre de type *différences centrées*.

A.3.1 Emploi d'un schéma de type Euler

Repartons de l'EDS (A.1) et récrivons-la sous sa forme intégrale équivalente :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t A_c X(s) ds + \int_0^t B_c dW(s) \quad (\text{A.16})$$

qui s'écrit encore, entre les instants u et $\tau + u$, $u \geq 0$, $\tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} X(\tau + u) &= X(u) + \int_u^{\tau+u} A_c X(s) ds + \int_u^{\tau+u} B_c dW(s) \\ &= X(u) + \int_u^{\tau+u} A_c X(s) ds + B_c [W(\tau + u) - W(u)] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Ecrivons alors (A.17) aux noeuds de la partition en posant $u = k\Delta t$, $\tau = \Delta t$ et en notant, comme précédemment, $X_k = X(k\Delta t)$. Nous obtenons :

$$X_{k+1} = X_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} A_c X(s) ds + B_c [W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t)] \quad (\text{A.18})$$

Dans cette dernière équation, approximations l'intégrale par $\Delta t A_c X(k\Delta t) = \Delta t A_c X_k$ et notons $(\tilde{X}_k; k \in I_N)$ le processus à temps discret n -dimensionnel défini par l'équation discrétisée ainsi obtenue, complétée par la condition initiale $\tilde{X}_0 = Y_0$ p.s., où Y_0 est une v.a. gaussienne centrée à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de W . Un tel processus est donc gouverné par l'équation :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = (I_n + \Delta t A_c) \tilde{X}_k + B_c D_k W & ; k \in I_N \\ \tilde{X}_0 = Y_0 \text{ p.s.} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

où $D_k W = W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t)$.

Or, d'après les propriétés de W , l'accroissement $D_k W$ est, pour tout k fixé, une v.a. gaussienne, centrée, à valeurs dans \mathbb{R}^m , de variance $\Delta t I_m$. De plus, la famille $\{D_k W; k \in I_N\}$ est une famille indépendante. On peut donc poser : $D_k W = \sqrt{\Delta t} G_k$, où $\{G_k; k \in I_N\}$ est une famille de copies indépendantes d'une v.a. G gaussienne, standard, à valeurs dans \mathbb{R}^m . Par suite, (A.19) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = (I_n + \Delta t A_c) \tilde{X}_k + \sqrt{\Delta t} B_c G_k & ; k \in I_N \\ \tilde{X}_0 = Y_0 \text{ p.s.} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Nous obtenons ainsi une chaîne de Markov $(\tilde{X}_k, k \in I_N)$ gaussienne, centrée, de schéma récurrent générique (A.20), qui est de type Euler.

On s'intéresse à la solution stationnaire de (A.20), encore notée $(\tilde{X}_k, k \in I_N)$ et supposée exister et être unique. Pour caractériser cette solution, commençons par calculer sa variance $\tilde{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \mathbb{E}[\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T] = \mathbb{E}[\tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T] \\ &= \mathbb{E}[(I_n + \Delta t A_c) \tilde{X}_k + \sqrt{\Delta t} B_c G_k] (\tilde{X}_k^T (I_n + \Delta t A_c^T) + \sqrt{\Delta t} G_k^T B_c^T) \\ &= (I_n + \Delta t A_c) \tilde{\Sigma} (I_n + \Delta t A_c^T) + \sqrt{\Delta t} B_c \mathbb{E}[G_k \tilde{X}_k^T] (I_n + \Delta t A_c^T) \\ &\quad + \sqrt{\Delta t} (I_n + \Delta t A_c) \mathbb{E}[\tilde{X}_k G_k^T] B_c^T + \Delta t B_c \mathbb{E}[G_k G_k^T] B_c^T \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_k G_k^T] &= I_m \\ \mathbb{E}[G_k \tilde{X}_k^T] &= \mathbb{E}[\tilde{X}_k G_k^T] = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{\Sigma} = (I_n + \Delta t A_c) \tilde{\Sigma} (I_n + \Delta t A_c^T) + \sigma_c \Delta t$$

ce que l'on peut encore écrire, après réarrangement :

$$A_c \tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma} A_c^T = -\sigma_c - \Delta t A_c \tilde{\Sigma} A_c^T \quad (\text{A.21})$$

Pour la condition initiale Y_0 , il faudra donc prendre une v.a. gaussienne centrée à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de la famille $\{G_k; k \in I_N\}$ et de variance $\tilde{\Sigma}$ solution de (A.21).

Notons que cette v.a. peut se construire comme suit : $Y_0 = \tilde{S}_0 G_{00}$, avec \tilde{S}_0 une matrice triangulaire inférieure telle que $\tilde{\Sigma} = \tilde{S}_0 \tilde{S}_0^T$ (factorisation de Cholesky de $\tilde{\Sigma}$) et G_{00} une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de la famille $\{G_k; k \in I_N\}$.

Observons par ailleurs que $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (cf. (A.11) et (A.21)). Donc, la loi invariante de (A.20) converge vers la loi invariante exacte (i.e. celle de (A.1) lorsque $\Delta t \rightarrow 0$).

Finalement, la chaîne de Markov $(\tilde{X}_k; k \in I_N)$ est définie par le schéma récurrent suivant :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0^{\Delta t} = \tilde{S}_0 G_{00} \\ \tilde{X}_{k+1} = (I_n + \Delta t A_c) \tilde{X}_k + \sqrt{\Delta t} B_c G_k \quad ; k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

avec :

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_0 \text{ telle que } \tilde{S}_0 \tilde{S}_0^T = \tilde{\Sigma} \\ &\tilde{\Sigma} \text{ solution de } A_c \tilde{\Sigma} + \tilde{\Sigma} A_c^T = -\sigma_c - \Delta t A_c \tilde{\Sigma} A_c^T \\ &G_{00} \text{ une v.a. gaussienne standard à valeurs dans } \mathbb{R}^n \\ &\{G_k, k \in I_N\} \text{ une famille de copies indépendantes d'une v.a. } G \text{ gaussienne stan-} \\ &\text{dard, à valeurs dans } \mathbb{R}^m, \text{ indépendante de } G_{00} \end{aligned}$$

Par suite, une réalisation de $(\tilde{X}_k; k \in I_N)$ est obtenue par :

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = \tilde{S}_0 g_{00} \\ \tilde{x}_{k+1} = (I_n + \Delta t A_c) \tilde{x}_k + \sqrt{\Delta t} B_c g_k \quad ; k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

où $\{g_k; k \in I_N\}$ est une famille de réalisations indépendantes d'une v.a. G gaussienne, standard, à valeurs dans \mathbb{R}^m et g_{00} est une réalisation d'une v.a. G_{00} gaussienne, standard, à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de G .

A.3.2 Emploi d'un schéma de type différences centrées

Considérons à nouveau la forme intégrale de l'EDS (A.1) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t A_c X(s) ds + \int_0^t B_c dW(s) \quad (\text{A.24})$$

qui s'écrit, entre les instants u et $\tau + u$, $u \geq 0, \tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} X(\tau + u) &= X(u) + \int_u^{\tau+u} A_c X(s) ds + \int_u^{\tau+u} \sigma dW(s) \\ &= X(u) + \int_u^{\tau+u} A_c X(s) ds + B_c [W(\tau + u) - W(u)] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ecrivons (A.25) aux noeuds de la partition en posant, comme précédemment : $u = k\Delta t$, $\tau = \Delta t$ et $X_k = X(k\Delta t)$. Nous obtenons :

$$X_{k+1} = X_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} A_c X(s) ds + B_c [W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t)] \quad (\text{A.26})$$

Considérons cette fois l'approximation suivante de l'intégrale figurant dans (A.26) :

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} A_c X(s) ds \simeq \Delta t A_c \frac{X((k+1)\Delta t) + X(k\Delta t)}{2} = \Delta t A_c \frac{X_{k+1} + X_k}{2}$$

et soit $(\bar{X}_k; k \in I_N)$ le processus à temps discret n -dimensionnel défini par l'équation (A.26) dans laquelle cette approximation est utilisée, complétée par la condition initiale $\bar{X}_0 = U_0$ p.s., où U_0 est une v.a. gaussienne centrée à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de W . Un tel processus est donc gouverné par l'équation :

$$\begin{cases} \bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k + \frac{1}{2} \Delta t A_c (\bar{X}_{k+1} + \bar{X}_k) + B_c D_k W & , k \in I_N \\ \bar{X}_k^{\Delta t} = U_0 \text{ p.s.} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

qui se réarrange comme suit :

$$\begin{cases} (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_{k+1} = (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_k + B_c D_k W & , k \in I_N \\ \bar{X}_0 = U_0 \text{ p.s.} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

où $D_k W = W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t)$.

Or, d'après les propriétés de W , pour tout k fixé, l'accroissement $D_k W$ est une v.a. gaussienne, centrée, à valeurs dans \mathbb{R}^m , de variance $\Delta t I_m$. De plus, la famille $\{D_k W; k \in I_N\}$ est une famille indépendante. On peut donc poser : $D_k W = \sqrt{\Delta t} G_k$, où $\{G_k; k \in I_N\}$ est une famille indépendante de v.a. gaussiennes standards à valeurs dans \mathbb{R}^m . Par suite, (A.28) peut se réécrire :

$$\begin{cases} (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_{k+1} = (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_k + \sqrt{\Delta t} B_c G_k & , k \in I_N \\ \bar{X}_0^{\Delta t} = U_0 \text{ p.s.} \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

On obtient ainsi une chaîne de Markov $(\bar{X}_k; k \in I_N)$ gaussienne, centrée, de schéma récurrent générique (A.29), qui est de type différences centrées.

Supposons que $\text{rang}(I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c) = n$ et intéressons-nous à la solution stationnaire de (A.29), supposée exister et être unique. Pour caractériser cette solution, commençons par calculer sa variance $\bar{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma} &= \mathbf{E}[\bar{X}_k \bar{X}_k^T] = E[\bar{X}_{k+1} \bar{X}_{k+1}^T] \\ &= (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c)^{-1} \left[(I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) \mathbf{E}[\bar{X}_k \bar{X}_k^T] (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c)^T + \sqrt{\Delta t} B_c \mathbf{E}[G_k \bar{X}_k^T] (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c)^T + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\Delta t} (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) E[\bar{X}_k G_k^T] B_c^T + \Delta t B_c \mathbf{E}[G_k G_k^T] B_c^T \right] (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c)^{-T}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\bar{X}_k \bar{X}_k^T] &= \bar{\Sigma} \\ \mathbf{E}[G_k G_k^T] &= I_m \\ \mathbf{E}[G_k \bar{X}_k^T] &= E[\bar{X}_k G_k^T] = 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{\Sigma} = (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c)^{-1} \left[(I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{\Sigma} (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c)^T + \Delta t \sigma_c \right] (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c)^{-T}$$

soit, après simplification :

$$A_c \bar{\Sigma} + \bar{\Sigma} A_c^T = -\sigma_c \quad ; \quad \sigma_c = B_c B_c^T \quad (\text{A.30})$$

Rapprochant (A.30) de (A.11), on peut alors remarquer que $\bar{\Sigma}$ coïncide avec Σ , variance de la solution stationnaire exacte. Il en résulte que la loi invariante de (A.29) coïncide avec la loi invariante exacte (i.e. celle de (A.1)) qui est gaussienne, centrée et de variance Σ .

Pour la condition initiale U_0 , il faudra donc prendre une v.a. gaussienne centrée à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de la famille $\{G_k; k \in I_N\}$ et de variance Σ solution de (A.11). Cette variable peut se construire comme suit : $U_0 = S_0 G_{00}$, où S_0 est une matrice triangulaire inférieure telle que $\Sigma = S_0 S_0^T$ (factorisation de Cholesky de Σ) et G_{00} est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de la famille $\{G_k; k \in I_N\}$.

Finalement, la chaîne de Markov $(\bar{X}_k; k \in I_N)$ est définie par le schéma récurrent suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = S_0 G_{00} \\ (I_n - \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_{k+1} = (I_n + \frac{1}{2} \Delta t A_c) \bar{X}_k + \sqrt{\Delta t} B_c G_k \quad , \quad k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

avec :

$$S_0 \text{ telle que } S_0 S_0^T = \Sigma$$

$$\Sigma \text{ solution de } A_c \Sigma + \Sigma A_c^T = -\sigma_c$$

G_{00} une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n

$\{G_k, k \in I_N\}$ une famille de copies indépendantes d'une v.a. G gaussienne standard, à valeurs dans \mathbb{R}^m , indépendante de G_{00}

Par suite, une réalisation de $(\bar{X}_k; k \in I_N)$ est obtenue par :

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = S_0 g_{00} \\ (I_n - \frac{1}{2}\Delta t A_c)\bar{x}_{k+1} = (I_n + \frac{1}{2}\Delta t A_c)\bar{x}_k + \sqrt{\Delta t} B_c g_k \quad , k \in I_N \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

où $\{g_k; k \in I_N\}$ est une famille de réalisations indépendantes d'une v.a. G gaussienne, standard, à valeurs dans R^m et g_{00} est une réalisation d'une v.a. G_{00} gaussienne, standard, à valeurs dans \mathbb{R}^n , indépendante de G .

Annexe B

Compléments sur la méthode des sous-espaces

B.1 Rappels des concepts géométriques

Soient p, q, j des entiers strictement positifs et $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ deux matrices données, avec A de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pk} & \dots & a_{pj} \end{bmatrix}$$

On note L_i , $i = 1, \dots, p$, les lignes de A , telles que :

$$L_1 = (a_{11}, \dots, a_{1j}), \quad L_2 = (a_{21}, \dots, a_{2j}), \quad \dots, \quad L_p = (a_{p1}, \dots, a_{pj})$$

Ces lignes peuvent être considérées comme des vecteurs de \mathbb{R}^j qui engendrent un sous-espace vectoriel appelé espace des lignes de A .

Soit E_p ce sous-espace, défini par :

$$E_p = \text{vect}(L_1, \dots, L_p)$$

De la même manière on définit l'espace des lignes de B par :

$$F_q = \text{vect}(L_1^*, \dots, L_q^*)$$

où L_k^* , $k = 1, \dots, q$, sont les lignes de B .

Une projection P sur \mathbb{R}^j est une application linéaire de \mathbb{R}^j dans lui-même qui est idempotente i.e. telle que $P = P^2$. Si, de plus, $P = P^T$ alors la projection est orthogonale ; sinon elle est oblique.

Soit P_{pq} la projection oblique sur E_p parallèlement à l'orthogonal F_q^\perp de F_q , i.e. la projection sur E_p orthogonalement à F_q . On rappelle que $E_p = \text{Im}(P_{pq}) = \text{Ker}(I - P_{pq})$ et que $F_q^\perp = \text{Ker}(P_{pq})$. $I - P_{pq}$ est également une projection : c'est la projection sur F_q^\perp parallèlement à E_p . P_{pq}^T est la projection sur F_q parallèlement à E_p^\perp et $I - P_{pq}^T$ est la projection sur E_p^\perp parallèlement à F_q . Ceci est illustré sur la figure B.1 :

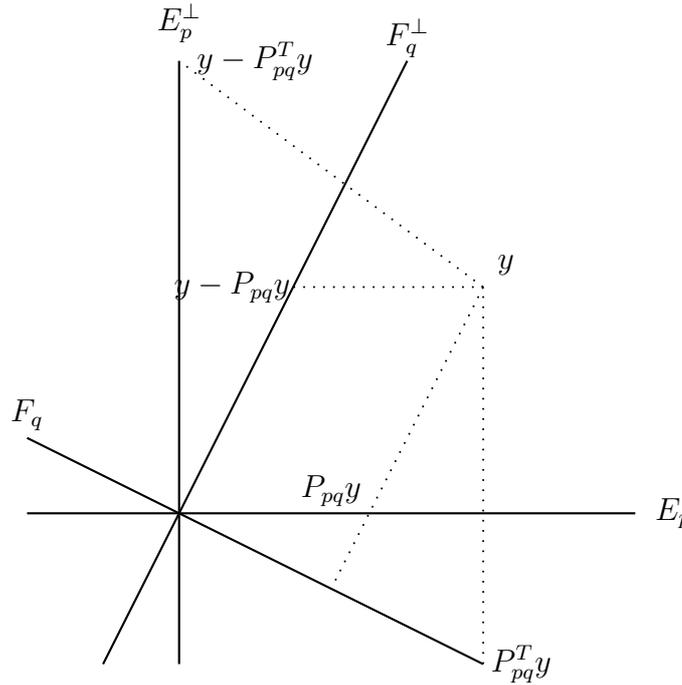


FIG. B.1 – Projections.

Nous avons les résultats suivants :

Théorème 2 : $P_{pq}y = 0$ si et seulement si $y \in F_q^\perp$

Définition 1 : Soit $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $b \in \mathbb{R}^p$ et soit $x \in \mathbb{R}^j$ la solution au sens des moindres carrés du système linéaire $Ax = b$, i.e. :

$$x = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^j} \|Ay - b\|_2$$

Alors $x = A^\dagger b$, où \dagger désigne le symbole de pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Théorème 3 : P_{pq} est une projection orthogonale si et seulement si $P_{pq} = P_{pq}^T$ (i.e. si et seulement si $L_i = L_i^*$, pour $i = 1, \dots, p$) ou, de façon équivalente, si $E_p = F_p$. Dans ce cas, la matrice représentant l'opérateur P_{pq} , notée P_p , s'écrit :

$$P_p = B^T (BB^T)^\dagger B$$

On désigne par A/B la projection orthogonale de l'espace des lignes de la matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ sur l'espace des lignes de la matrice $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$. Elle est définie par :

$$A/B = AB^T.(BB^T)^\dagger.B$$

$A/B^\perp = A - A/B$, désigne la projection orthogonale de l'espace des lignes de la matrice A sur l'orthogonal de l'espace des lignes de B .

Nous allons maintenant définir les notions d'angles principaux et de directions principales entre deux sous-espaces. Ces notions sont une généralisation de celle d'angle entre deux vecteurs.

Définition 2 Soit E_p et F_q respectivement l'espace des lignes de la matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ et l'espace des lignes de $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$, avec $p \leq q$. Alors les p angles principaux entre E_p et F_q , notés $\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, \pi/2]$, et les directions principales correspondantes $a_i \in E_p$, $b_i \in F_q$ sont définis récursivement par :

$$\cos \theta_k = \max_{a \in E_p} \max_{b \in F_q} |a^T b| = a_k^T b_k \quad ; \quad k = 1, \dots, p$$

avec $\|a\| = \|b\| = 1$ et, $\forall k > 1 : a^T a_i = 0, b^T b_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Nous donnons ci-dessous d'autres définitions pour les angles principaux et directions principales. Ces définitions fournissent des méthodes, basées des décompositions en valeurs singulières, pour calculer de manière stable les angles et les directions.

Définition 3 Les matrices $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ et $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ étant données, considérons la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$A^T(AA^T)^\dagger AB^T(BB^T)^\dagger B = USV^T$$

alors les directions principales entre E_p et F_q sont égales à l'espace des lignes de U^T et V^T . Les cosinus des angles principaux entre E_p et F_q sont les valeurs singulières de S .

Définition 4 Les angles principaux et directions principales entre les espaces des lignes des matrices $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ et $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ peuvent être obtenus à partir de la décomposition en valeur singulières suivante :

$$(AA^T)^{-1/2}(AB^T)(BB^T)^{-1/2} = USV^T$$

Les directions principales entre les espaces des lignes de A et B sont données par $U^T(AA^T)^{-1/2}A$ et $V^T(BB^T)^{-1/2}B$ et le cosinus des angles principaux par S .

Le cas particulier $p = q = 1$ est plus parlant. En effet, dans ce cas A et B sont des vecteurs et l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\frac{AB^T}{\sqrt{AA^T}\sqrt{BB^T}} = S$$

qui est la définition classique du cosinus entre deux vecteurs.

B.2 Filtre de Kalman en avant

Dans ce paragraphe, nous donnons deux écritures différentes du filtre de Kalman en avant. La première est la forme classique telle qu'elle est présentée dans la littérature. La seconde est une variante de la première et c'est celle utilisée dans cette thèse (cf. (3.36), (3.37) et (3.38)).

Considérons le modèle d'état (1.28)- (1.29), dans lequel les matrices (A, C, Q, R, S) sont connues. Notons que les $(N - 2i + 1)$ estimées Kalman-optimales $\{\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{N-i}\}$ associées aux $(N - 2i + 1)$ données expérimentales $\{y_i, y_{i+1}, \dots, y_{N-i}\}$ vérifient les équations de Kalman en avant :

$$\begin{cases} \hat{x}_{j+1} &= A\hat{x}_j + K_j^f f_j \\ y_j &= C\hat{x}_j + f_j \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $(f_j, j \in K_{N-2i+1})$, $K_{N-2i+1} = \{i, i + 1, \dots, N - i\}$, est une réalisation restreinte à K_{N-2i+1} d'un bruit blanc gaussien discret $(\mathcal{F}_j, j \in \mathbb{Z})$ l -dimensionnel de variance matricielle $\mathbb{E}[\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_j^T] = R + C\tilde{P}_j C^T$, $(\hat{x}_j, j \in K_{N-2i+1})$, suite des estimées de Kalman, est une réalisation restreinte à K_{N-2i+1} d'un processus gaussien centré discret $(\hat{X}_j, j \in \mathbb{Z})$ de variance matricielle $P_j = \mathbb{E}[\hat{X}_j \hat{X}_j^T]$, K_j^f est le gain de Kalman donné par :

$$K_j^f = (S + A\tilde{P}_j C^T)(R + C\tilde{P}_j C^T)^{-1} \quad (\text{B.2})$$

et $\tilde{P}_j = \mathbb{E}[(X_j - \hat{X}_j)(X_j - \hat{X}_j)^T]$, variance matricielle de l'erreur, est solution de l'équation de Ricatti :

$$\tilde{P}_{j+1} = A\tilde{P}_{j+1}A^T + Q - (S + A\tilde{P}_{j+1}C^T)(R + C\tilde{P}_{j+1}C^T)^{-1}(S + A\tilde{P}_{j+1}C^T)^T \quad (\text{B.3})$$

On a :

$$\tilde{P}_j = \Sigma_j - P_j \quad (\text{B.4})$$

où $\Sigma_j = \mathbb{E}[X_j X_j^T]$.

Supposons les processus à temps discret $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ et $(Y_j, j \in \mathbb{Z})$ stationnaires. Dans ce cas les matrices K_j^f , P_j et Σ_j sont indépendantes de j . On a alors :

$$K^f = (S + A\tilde{P}C^T)(R + C\tilde{P}C^T)^{-1} \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{P} = A\tilde{P}A^T + Q - (S + A\tilde{P}C^T)(R + C\tilde{P}C^T)^{-1}(S + A\tilde{P}C^T)^T \quad (\text{B.6})$$

et la relation (B.4) se réécrit :

$$\tilde{P} = \Sigma - P \quad (\text{B.7})$$

Les expressions (B.1), (B.5) et (B.6) définissent la forme classique du filtre de Kalman en avant. Dans cette thèse, nous utilisons une autre forme obtenue en portant (B.7) dans (B.5) et (B.6). Il vient alors :

$$\begin{aligned}
K^f &= \underbrace{((S + A\Sigma C^T) - APC^T)}_G \underbrace{((R + C\Sigma C^T) - CPC^T)^{-1}}_{R_0} \\
&= (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

et l'équation de Ricatti prend la forme :

$$\Sigma - P = A\Sigma A^T - APA^T + (\Sigma - A\Sigma A^T) - \underbrace{((S + A\Sigma C^T) - APC^T)}_G \tag{B.9}$$

$$\underbrace{((R + C\Sigma C^T) - CPC^T)^{-1}}_{R_0} \underbrace{((S + A\Sigma C^T) - APC^T)^T}_G \tag{B.10}$$

soit :

$$P = APA^T + (G - APC^T)(R_0 - CPC^T)^{-1}(G - APC^T)^T \tag{B.11}$$

Ce résultat signifie que le filtre de Kalman en avant défini par (B.1), (B.8) et (B.11) donne les mêmes estimées ($\hat{x}_j, j \in K_{N-2i+1}$) que celui défini par les expressions (B.1), (B.5) et (B.6).

B.3 Factorisation de la matrice de projection

Il s'agit ici d'apporter quelques précisions sur l'étape de factorisation de la matrice de projection (resp. de la matrice de Hankel des covariances) dans les algorithmes des sous-espaces (resp. de réalisation stochastique). Cette étape concerne la détermination de la matrice d'observabilité étendue et de la suite des estimées Kalman-optimales (resp. et de la matrice de contrôlabilité étendue) à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de projection (resp. de la matrice de Hankel des covariances).

Considérons le modèle d'état défini par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + \mathcal{W}_k \\ Y_k = CX_k + \mathcal{V}_k \end{cases} \tag{B.12}$$

avec ($X_k, k \in \mathbb{Z}$) et ($Y_k, k \in \mathbb{Z}$) des processus stationnaires centrés, respectivement n et l -dimensionnels, ($\mathcal{W}_k, k \in \mathbb{Z}$) et ($\mathcal{V}_k, k \in \mathbb{Z}$) des bruits blancs gaussiens discrets n et l -dimensionnels de variance-covariance : $Q = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k \mathcal{W}_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = \mathbb{E}[\mathcal{V}_k \mathcal{V}_k^T] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $S = \mathbb{E}[\mathcal{W}_k \mathcal{V}_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times l}$.

Effectuons dans (B.12) le changement de variables $X_k = TZ_k$, avec $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice régulière. Il vient :

$$\begin{cases} Z_{k+1} = T^{-1}ATZ_k + T^{-1}\mathcal{W}_k \\ Y_k = CTZ_k + \mathcal{V}_k \end{cases} \tag{B.13}$$

On dit alors que les systèmes (B.12) et (B.13) sont équivalents au sens où les relations entrée-sortie ne sont pas modifiées.

Soit :

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n} \quad (\text{B.14})$$

la matrice d'observabilité étendue d'ordre i associée au modèle (B.12) et :

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{i-1}T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n} \quad (\text{B.15})$$

celle associée au modèle (B.13).

Il est facile de voir que :

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \mathcal{O}_i T \quad (\text{B.16})$$

De plus nous savons (cf. Chapitre 3) que les matrices A et C peuvent être estimées à partir de la matrice d'observabilité étendue de la manière suivante :

1- A est obtenue en résolvant le système :

$$\underline{\mathcal{O}}_i A = \overline{\mathcal{O}}_i \quad (\text{B.17})$$

où $\overline{\mathcal{O}}_i$ et $\underline{\mathcal{O}}_i$ sont les matrices obtenues en supprimant respectivement les l premières lignes et les l dernières lignes de \mathcal{O}_i ;

2- C est la matrice des l premières lignes de \mathcal{O}_i .

En appliquant le même procédé à la matrice $\tilde{\mathcal{O}}_i$ on obtient donc les matrices A et C à un changement de base près. Par conséquent, en prémultipliant la matrice \mathcal{O}_i par une matrice inversible avant d'appliquer le procédé ci-dessus, on ne change pas les matrices du système mais seulement la base de représentation du système.

Cette remarque est valable pour les algorithmes qui utilisent la suite des états du filtre de Kalman en avant [71].

D'après le théorème principal des sous-espaces [71], on a le résultat suivant :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{O}_i \hat{\mathcal{X}}_i \quad (\text{B.18})$$

où $\mathcal{P}_i \in \mathbb{R}^{li \times (N-2i+1)}$ est la matrice de projection orthogonale de l'espace vectoriel engendré par les données futures sur l'espace vectoriel engendré par les données passées, $\mathcal{O}_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$ est la matrice d'observabilité étendue et $\hat{\mathcal{X}}_i \in \mathbb{R}^{n \times (N-2i+1)}$ est la matrice ayant pour colonnes les $(N - 2i + 1)$ estimées Kalman-optimales $\{\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{N-i}\}$ associées aux $(N - 2i + 1)$ données expérimentales $\{y_i, y_{i+1}, \dots, y_{N-i}\}$ à travers les équations du filtre de Kalman en avant (B.1).

Effectuons ensuite la décomposition en valeurs singulières de \mathcal{P}_i , on obtient :

$$\mathcal{P}_i = USV^T = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (\text{B.19})$$

avec $U \in \mathbb{R}^{li \times li}$ et $V \in \mathbb{R}^{(N-2i+1) \times (N-2i+1)}$ des matrices orthonormales et $S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, où les σ_j sont les valeurs singulières non nulles de \mathcal{P}_i , telles que : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$. Compte tenu de l'expression (B.18), on a : $\mathcal{O}_i \hat{\mathcal{X}}_i = U_1 S_1 V_1^T$ et en multipliant à droite cette expression par V_1 , on obtient :

$$\mathcal{O}_i \hat{\mathcal{X}}_i V_1 = \mathcal{O}_i T = U_1 S_1 \quad (\text{B.20})$$

où $T = \hat{\mathcal{X}}_i V_1$ est une matrice inversible. Nous sommes alors dans la situation (B.16), avec $\tilde{\mathcal{O}}_i = U_1 S_1$, c'est-à-dire que la matrice d'observabilité est connue à une base près. Compte tenu des observations faites précédemment les matrices peuvent être déterminées à partir de $\tilde{\mathcal{O}}_i$. Il est possible d'utiliser d'autres décompositions. En effet, en multipliant à droite (B.20) par $S^{-1/2}$, on obtient :

$$\mathcal{O}_i \hat{\mathcal{X}}_i V_1 S^{-1/2} = \mathcal{O}_i \tilde{T} = U_1 S^{1/2} \quad (\text{B.21})$$

avec $\tilde{T} = \hat{\mathcal{X}}_i V_1 S^{-1/2}$. Dans ce cas les matrices sont extraites à partir de la matrice d'observabilité étendue $\tilde{\mathcal{O}}_i = U_1 S^{1/2}$. C'est cette décomposition que nous utilisons dans le Chapitre 3. En général, ce procédé est valable pour toute famille de matrice $\tilde{\mathcal{O}}_i$ s'écrivant sous la forme :

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = U_1 T \quad (\text{B.22})$$

avec $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible.