



**HAL**  
open science

# Stratégie de modélisation et de simulation des assemblages de structures aéronautiques en contexte incertain

Florent Gant

► **To cite this version:**

Florent Gant. Stratégie de modélisation et de simulation des assemblages de structures aéronautiques en contexte incertain. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2011. Français. NNT : 2011DENS0070 . tel-00675741

**HAL Id: tel-00675741**

**<https://theses.hal.science/tel-00675741>**

Submitted on 1 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Florent Gant**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Stratégie de modélisation et de simulation des  
assemblages de structures aéronautiques en contexte  
incertain**

Soutenue à Cachan le 19 décembre 2011 devant le jury composé de :

Marc Bonnet	Directeur de Recherche CNRS, ENSTA ParisTech	Président du jury
Claude Blanzé	Professeur, CNAM Paris	Rapporteur
Alain Daidié	Professeur, INSA Toulouse	Rapporteur
Stéphane Guinard	Ingénieur de Recherche, EADS IW	Examineur
Laurent Champaney	Professeur, ENS Cachan	Directeur de thèse
Philippe Rouch	Professeur, Arts et Métiers ParisTech	Co-encadrant

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France







Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon jury de thèse : Marc Bonnet pour avoir présidé le jury, Claude Blanzé et Alain Daidié pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et Stéphane Guinard pour avoir participé à mon jury.

Bien évidemment, je souhaiterais remercier mon directeur de thèse, Laurent Champagny, pour m'avoir si bien guidé pendant ces trois années de thèse. Je remercie également mon encadrant, Philippe Rouch, pour sa bonne humeur et pour nos nombreuses discussions qui ont toujours été très fructueuses.

Je tiens maintenant à remercier François, qui m'a été d'une aide précieuse tout au long de cette thèse. Je remercie également Paul qui a su m'intéresser au domaine des méconnaissances.

J'aimerais remercier maintenant mon co-bureau Nicolas, l'ambiance dans le bureau a vraiment été très agréable pendant ces trois années. Merci également à Vincent avec qui nous avons passé de bons moments de rigolade.

Un merci tout particulier aux secrétaires du secteur, Françoise et Lydia.

Pour n'oublier personne, merci à l'ensemble du laboratoire pour l'ambiance de travail particulièrement agréable qui y règne, et pour les moments passés au bar devant un bon café.

Après ces sept années passées à l'ENS de Cachan, je tiens à remercier toutes les personnes du Département de Génie Mécanique, et plus particulièrement Danielle, dont les conseils ont été si précieux.

Je tiens maintenant à remercier ma famille et mes amis. Merci à mes parents, Fabien et Fanny pour leur soutien et leur confiance en moi qui ont été d'une très grande importance. Je remercie également mon épouse, Magali, pour son soutien au cours de ces trois années de thèse. Je voudrais pour finir remercier ses parents pour m'avoir si bien accueilli dans leur famille.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Élaboration d'une stratégie de dimensionnement</b>	<b>5</b>
1 Problématique industrielle . . . . .	7
2 Méthodes de dimensionnement . . . . .	9
2.1 Méthodes « ingénieur » et dérivées . . . . .	9
2.2 Les stratégies de calcul multiéchelles . . . . .	12
2.3 Les techniques de décomposition de domaine sans recouvrement . . . . .	16
2.4 Conclusions . . . . .	18
3 Modélisation des fixations . . . . .	18
3.1 Les approches empiriques . . . . .	19
3.2 Les approches analytiques . . . . .	22
3.3 Les approches à éléments finis . . . . .	24
3.4 Conclusions . . . . .	27
4 Recalage de modèle . . . . .	28
4.1 Les modèles considérés . . . . .	28
4.2 Maîtrise des écarts entre modèles . . . . .	32
5 Prise en compte de l'incertitude . . . . .	38
5.1 Méthodes stochastiques en calcul de structure . . . . .	38
5.2 Méthodes non stochastiques en calcul de structure . . . . .	48
6 Conclusions . . . . .	52
<b>2 Recalage de modèle déterministe</b>	<b>55</b>
1 Recalage de modèle . . . . .	57
1.1 Le problème de référence . . . . .	57
1.2 L'erreur en relation de comportement . . . . .	58
1.3 L'erreur en relation de comportement modifiée . . . . .	60
1.4 Minimisation de l'erreur . . . . .	61



1.5	L'algorithme de minimisation . . . . .	63
2	Efficacité du recalage . . . . .	64
2.1	Géométrie étudiée . . . . .	64
2.2	Le problème unidimensionnel . . . . .	64
2.3	Les données expérimentales . . . . .	65
2.4	Application du recalage . . . . .	66
2.5	Le modèle rigidifié proposé . . . . .	71
3	Application à une structure aéronautique . . . . .	79
3.1	Géométrie étudiée . . . . .	79
3.2	Les données expérimentales . . . . .	79
3.3	Application du recalage . . . . .	82
4	Conclusions . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Application de la théorie des méconnaissances</b>	<b>87</b>
1	Représentation de l'incertain dans une stratégie de dimensionnement . . . . .	89
2	Description de la réalité . . . . .	89
2.1	Famille de structures . . . . .	90
2.2	Données expérimentales . . . . .	90
3	La théorie des méconnaissances . . . . .	90
3.1	Le problème de validation . . . . .	91
3.2	Définition des méconnaissances de base . . . . .	92
3.3	Propagation des méconnaissances . . . . .	95
3.4	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	101
4	Application au cas industriel . . . . .	102
4.1	Implémentation numérique . . . . .	104
4.2	Définition et propagation des méconnaissances de base . . . . .	104
4.3	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	106
4.4	Conclusions . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Perspectives pour une utilisation à plus grande échelle</b>	<b>111</b>
1	Contexte industriel . . . . .	112
2	Exemple traité . . . . .	112
3	Approche proposée . . . . .	114
3.1	Construction des mesures de référence . . . . .	115
3.2	Construction du modèle simplifié . . . . .	116
3.3	Limitations rencontrées lors du recalage de modèle simplifié . . . . .	116
3.4	Conclusion . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Table des figures

1	Principe d'une analyse descendante . . . . .	2
1.1	Paramètres variables présents dans un assemblage boulonné . . . . .	7
1.2	Ré-analyse locale d'un panneau : modèles associés à chaque échelle d'étude [Cresta, 2008] . . . . .	11
1.3	La méthode du zoom structural : en fonction des besoins, il est possible de « zoomer » de façon récurrente sur plusieurs échelles d'analyse jusqu'à obtenir celle adéquate pour l'analyse des champs de contraintes cherchés. On fabrique ainsi une suite de modèles et de calculs gigognes (Doc. Dassault Aviation) d'après [Guidault, 2005]. . . . .	11
1.4	Modèle numérique FE <sup>2</sup> d'une structure en composite SiC/Ti [Feyel et Chaboche, 2000] . . . . .	14
1.5	Contraintes principales majeures et flexion d'une poutre cantilever (analyse bimodèle : poutre/2D) [Ben Dhia, 1998] . . . . .	15
1.6	Problème de propagation de fissure traité par XFEM [Moës <i>et al.</i> , 1999] .	16
1.7	Maillage micro conforme à la géométrie et maillage macro d'interface d'une poutre fissurée [Guidault, 2005] . . . . .	17
1.8	Maillage d'un panneau raidi utilisé par une approche FETI-DP [Farhat <i>et al.</i> , 2001] . . . . .	17
1.9	Chaîne de montage de l'Airbus A320 [Airbus] . . . . .	19
1.10	Schéma d'une jonction circonférentielle du fuselage [EADS] . . . . .	20
1.11	Configuration d'un assemblage en simple (gauche) et double (droite) recouvrement . . . . .	20
1.12	Schéma des déformations obtenues en simple et double cisaillement [Huth, 1986] . . . . .	21
1.13	Numérotation des pièces . . . . .	22
1.14	Réseau électrique équivalent à un assemblage de $n + 1$ fixations [Ross, 1947] . . . . .	23
1.15	Schéma du modèle non linéaire de Bortman [Bortman et Szabó, 1992] . .	24
1.16	Montage et modèle dynamiques réalisés dans [Ahmadian et Jalali, 2007b]	25
1.17	Schéma du modèle rhéologique d'Iwan parallèle-série (gauche) et série-parallèle (droite) [Segalman et Starr, 2008] . . . . .	25
1.18	Modèles éléments finis membrane/poutre (gauche) [Baumann, 1982] et 2D (droite) [Ingvar Eriksson, 1986] . . . . .	26

1.19	Modèle éléments finis employé pour l'étude de rigidité axiale dans [Alkattan <i>et al.</i> , 2007] . . . . .	26
1.20	Modèles éléments finis 3D non linéaires issus de [McCarthy <i>et al.</i> , 2005] (gauche) et [Champaney <i>et al.</i> , 2007] (droite) . . . . .	27
1.21	Quatre types de modélisation simplifiée employés dans [Kim <i>et al.</i> , 2007]	27
1.22	Dispositif expérimental d'étude d'une jonction boulonnée [Guinard, 2003]	29
1.23	Modèle continu de fixation aux dimensions nominales . . . . .	30
1.24	Maillage 3D d'une jonction boulonnée . . . . .	30
1.25	Problématique de maîtrise des modèles . . . . .	33
1.26	Tracés des densités de probabilité d'une loi normale (trait plein) et log-normale (trait pointillé) . . . . .	41
1.27	Principe des méthodes fiabilistes : exemple de l'approximation FORM, d'après [Puel, 2004] . . . . .	47
2.1	Milieu étudié . . . . .	58
2.2	Illustration du critère d'Armijo . . . . .	64
2.3	Géométrie étudiée . . . . .	65
2.4	Géométrie du modèle initial . . . . .	65
2.5	Évolutions de l'erreur relative au cours du recalage . . . . .	68
2.6	Évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage . . . . .	68
2.7	Évolutions du déplacement au cours du recalage . . . . .	69
2.8	Évolutions des charges de connecteur au cours du recalage . . . . .	69
2.9	Évolutions de l'erreur relative au cours du recalage . . . . .	70
2.10	Évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage . . . . .	70
2.11	Surface d'erreur en relation de comportement avec les trajets de convergence. Cette figure utilise la série 2 pour le modèle initial. . . . .	72
2.12	Configuration du modèle rigidifié . . . . .	73
2.13	Evolution de la position du minimum global de l'erreur en relation de comportement modifiée . . . . .	74
2.14	Recalage du modèle rigidifié : évolutions de l'erreur relative au cours du recalage . . . . .	75
2.15	Recalage du modèle rigidifié : évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage . . . . .	75
2.16	Recalage du modèle rigidifié : évolutions du déplacement au cours du recalage . . . . .	76
2.17	Recalage du modèle rigidifié : évolutions des charges de connecteur au cours du recalage . . . . .	76
2.18	Recalage du modèle rigidifié : évolutions de l'erreur relative au cours du recalage . . . . .	77
2.19	Recalage du modèle rigidifié : évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage . . . . .	77
2.20	Surface d'erreur en relation de comportement avec les trajets de convergence. Cette figure utilise la série 2 pour le modèle rigidifié. . . . .	78

2.21	Schéma d'implantation de l'assemblage étudié [Airbus] . . . . .	79
2.22	Structure réelle étudiée [EADS IW]. Essai de compression et de flambage.	80
2.23	Modèle CAO (à gauche) et modélisation plaque et connecteur (à droite) de la structure étudiée . . . . .	80
2.24	Géométrie du modèle non-linéaire de l'assemblage boulonné . . . . .	81
2.25	Chargements et conditions aux limites appliqués sur les modélisations . .	81
2.26	Représentation d'un connecteur . . . . .	81
2.27	Géométrie de la modélisation linéaire . . . . .	83
2.28	Convergence des quantités d'intérêt (erreur relative) . . . . .	84
2.29	Convergence de l'erreur relative en relation de comportement . . . . .	85
2.30	Cohérence entre le modèle de connecteur global et le modèle de fixation local . . . . .	86
3.1	Principe de la modification proposée . . . . .	89
3.2	Méconnaissances de base associées à une loi normale centrée . . . . .	94
3.3	Calcul des méconnaissances effectives sur la quantité d'intérêt $\Delta\alpha_{mod}$ . .	97
3.4	Principe de recalage des méconnaissances de base . . . . .	103
3.5	Schéma de l'implémentation numérique . . . . .	105
3.6	Rapports énergétiques des quantités d'intérêt . . . . .	106
3.7	Intervalles obtenus par simulation de Monte Carlo (modèle non-linéaire) et par la théorie des méconnaissances . . . . .	108
4.1	Stratégie de modélisation envisagée au <b>Chapitre 2</b> . . . . .	113
4.2	Stratégie de modélisation envisagée pour les structures de très grande taille	113
4.3	Vue schématique de l'assemblage étudié . . . . .	114
4.4	Modèle non linéaire construit pour les essais numériques . . . . .	115
4.5	Modèle numérique de la structure globale (structure rigide non représentée)	116
4.6	Schéma de la structure simplifiée . . . . .	117
4.7	Processus de maillage automatique des fixations . . . . .	121



# Liste des tableaux

1.1	Valeurs des coefficients $a$ et $b$ . . . . .	22
2.1	Les paramètres du problème . . . . .	65
2.2	Les données simulées employées pour le recalage . . . . .	66
2.3	Modèle initial : nombre d'itérations pour le recalage (Init. inf. (resp. sup.) signifie initialisation avec des valeurs inférieures (resp. supérieures) aux valeurs objectif) . . . . .	71
2.4	Modèle rigidifié : nombre d'itérations pour le recalage . . . . .	78
2.5	Les données simulées . . . . .	84
2.6	Résultats issus du recalage du modèle déterministe . . . . .	84
3.1	Résultats du recalage du modèle avec méconnaissances . . . . .	107
3.2	Évolution des méconnaissances de base . . . . .	108



# Introduction

Dans le domaine industriel, et plus particulièrement pour le transport aéronautique, le dimensionnement mécanique des structures est une phase cruciale du processus de conception d'un nouvel appareil en vue de sa mise sur le marché. Tous les critères importants de tenue de la structure doivent être abordés afin de garantir la durée de vie fixée par le cahier des charges. Le dimensionnement s'appuie sur l'analyse de plusieurs études qu'elles soient numériques ou expérimentales.

Ces dernières années, le coût très important des essais réels sur structure de grande échelle a poussé les industriels à diminuer leur utilisation au profit des essais numériques. Ces essais réels sont néanmoins courants à de plus petites échelles, pour pouvoir généralement identifier les propriétés de phénomènes locaux complexes.

En recherche, différentes méthodes basées sur la modélisation par éléments finis sont apparues afin de traiter des problèmes de plus en plus complexes grâce à l'augmentation continue des capacités de calcul des environnements informatiques. La complexité de ces problèmes peut se traduire soit par la complexité du phénomène physique étudié, soit par la taille de la structure étudiée, impliquant la résolution de problèmes de très grande dimension.

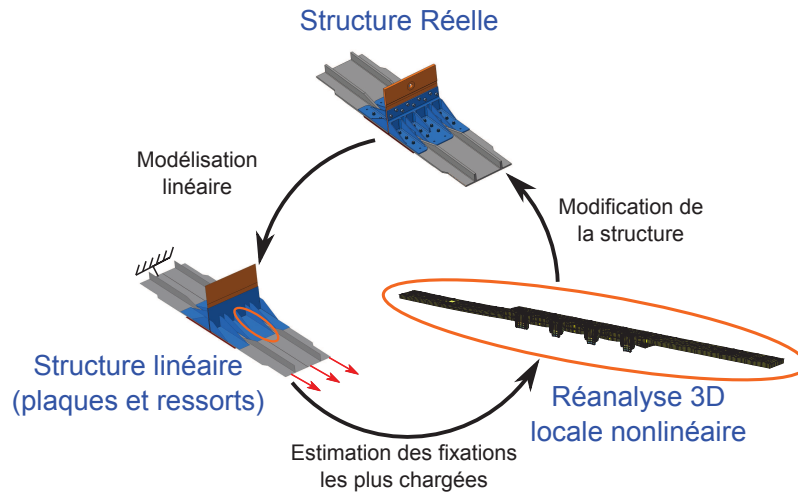
Le dimensionnement numérique des structures aéronautiques comporte plusieurs particularités. Par exemple, ces méthodes de dimensionnement doivent être adaptées à la modélisation de tronçons comportant plusieurs millions de fixations, à l'utilisation grandissante de matériaux composites, ou encore à la géométrie complexe de ces structures (panneaux, raidisseurs et éléments de fixation).

Pourtant les bureaux d'étude aéronautiques ne sont actuellement pas en mesure de pouvoir appliquer directement ces méthodes de résolution non-linéaire sur une structure complète de grande taille. La complexité des modèles associée au très grand nombre d'inconnues nécessaires implique des temps de calcul et des besoins informatiques trop coûteux à ce jour.

Afin d'y remédier, les méthodes numériques usuelles pour le dimensionnement associent plusieurs types de modèle à éléments finis afin de pouvoir adopter la complexité des représentations. Généralement, ces stratégies font interagir ou superposent un modèle global simple avec des modèles locaux complexes afin de limiter les coûts de calcul. Une des méthodes les plus utilisées dans le domaine industriel consiste à résoudre dans un premier temps le problème mécanique sur une structure complète avec un modèle simplifié géométriquement mais aussi du point de vue de son comportement. Dans un deuxième



temps, le champ de déplacements ou d'efforts internes obtenu permet le pilotage d'un modèle local non-linéaire défini sur une zone d'intérêt. Ceci suppose d'une part que cette zone d'intérêt soit connue *a priori*, et d'autre part que la présence des non-linéarités locales n'ait que peu d'influence sur le comportement global de la structure. Ce type de méthode de dimensionnement est appelée « analyse descendante » ou « submodeling » en anglais. La **Figure 1** illustre ce processus de dimensionnement.



**FIGURE 1:** Principe d'une analyse descendante

L'élément le plus utilisé pour assembler les différents tronçons d'un appareil est la fixation boulonnée ou rivetée. Le comportement de ces composants peut être dimensionnant lorsqu'il est présent dans une structure. En effet, il introduit des phénomènes fortement non-linéaires (contact, frottement, effet de la précharge et des jeux de fabrication) qui s'accompagnent généralement de concentrations de contraintes. Sachant qu'il peut y avoir plusieurs millions de fixations sur un appareil, vouloir prendre en compte tous ces phénomènes dans un modèle numérique de structure de grande échelle serait trop coûteux. L'utilisation d'une analyse descendante semble pour l'instant mieux appropriée.

Lors du dimensionnement, la prise en compte des incertitudes est un aspect important pour vérifier la tenue d'une structure. En effet, les caractéristiques géométriques ou physiques peuvent varier d'une structure à une autre. Généralement, les industriels pondèrent leurs résultats numériques avec des coefficients de sécurité afin de pouvoir prendre en compte toute variation de comportement ou de chargement de la structure. Malheureusement, l'application de ces coefficients mène souvent au surdimensionnement des parties étudiées.

Actuellement, la tendance est de vouloir réduire ces marges de manière à diminuer les coûts de fabrication et d'exploitation des appareils. Les industriels s'efforcent donc de modéliser de façon plus précise l'aléa que l'on peut retrouver dans une structure et son environnement. Plusieurs outils existent afin de représenter ces incertitudes :

- les méthodes paramétriques non probabilistes [Moens et Vandepitte, 2005] ;
- les méthodes paramétriques probabilistes [Schuëller, 2001] ;
- les méthodes non paramétriques [Soize, 2000].

Bien que certains travaux aient été développés pour les méthodes non paramétriques et paramétriques non probabilistes en calcul de structures, l'essentiel de la recherche se concentre sur les méthodes probabilistes. Ces dernières sont très intéressantes lorsque l'on souhaite modéliser les phénomènes de dispersion à des échelles locales (où le nombre de paramètres stochastiques reste limité). À des échelles globales de structures telles que celles du tronçon d'un avion, ces méthodes restent pour l'instant trop coûteuses [Schuëller, 2001].

C'est dans ce contexte qu'a été développée la théorie des méconnaissances [Ladevèze *et al.*, 2006b]. L'idée de cette théorie est de modéliser les incertitudes à l'échelle des sous-structures. Un avantage conséquent de cet outil, comparativement à certaines méthodes probabilistes, est de n'avoir besoin que d'un seul calcul déterministe sur une structure globale. Par post-traitement de ce calcul, on peut ainsi obtenir un intervalle de confiance sur une quantité d'intérêt pour toute structure de la même famille. D'une part, la théorie des méconnaissances se base sur un modèle éléments finis déterministe de la structure étudiée : il est donc important que ce modèle soit le plus fidèlement représentatif du comportement des structures réelles. D'autre part, les variables internes définies à l'échelle des sous-structures et influant sur les intervalles de confiance des quantités d'intérêt, ne sont que très rarement connues *a priori*. Le modèle avec méconnaissances doit donc passer par une phase de recalage afin d'être validé. Cette théorie a tout d'abord été appliquée au domaine de la dynamique des structures [Ladevèze *et al.*, 2006b, Ladevèze *et al.*, 2006a, Puel, 2004] pour des dispersions associées aux rigidités des structures. Elle a ensuite été étendue aux problèmes de statique [Enjalbert, 2009, Louf *et al.*, 2010] pour des incertitudes associées aux rigidités des structures mais aussi aux chargements extérieurs.

L'objectif de cette thèse est d'insérer la modélisation par la théorie des méconnaissances dans une procédure de dimensionnement de type analyse descendante. En se basant sur les techniques industrielles actuelles, il s'agit d'ajouter l'aspect aléatoire *via* la théorie des méconnaissances. L'intérêt est que cette théorie implique peu de coût de calcul supplémentaire. Les méconnaissances sont appliquées au modèle linéaire lors de la procédure de la méthode descendante. Ceci permet d'obtenir un intervalle de variation d'une quantité d'intérêt dont les bornes seront utilisées par la suite pour piloter un calcul complexe local non-linéaire. Comme précisé précédemment, le modèle de méconnaissances se base sur une représentation simplifiée, généralement linéaire, de la structure. La difficulté de cette stratégie sera de prouver son efficacité pour la modélisation de phénomènes aléatoires complexes.

L'étude menée ici propose donc de justifier de manière plus précise l'application de coefficients de sécurité. Les différentes étapes importantes de la stratégie seront étudiées et justifiées sur un exemple d'assemblage boulonné dont la géométrie est inspirée de structures aéronautiques. Ces étapes, situées dans la première partie de l'analyse descendante,

sont les suivantes :

- création d'un modèle déterministe simplifié et pertinent de l'assemblage boulonné ;
- recalage du modèle déterministe grâce à une série de données. La méthode choisie ici est le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement ;
- application de la théorie des méconnaissances sur le modèle déterministe afin d'obtenir un modèle avec méconnaissances ;
- recalage du modèle avec méconnaissances grâce à une série de données.

Les développements numériques sont effectués sous le logiciel Matlab. Tous les algorithmes créés se basent sur des modèles à éléments finis issus du logiciel Abaqus/Standard. Le dialogue entre les deux logiciels s'effectue principalement grâce à un environnement Python.

Afin de préciser les points précédemment abordés, ce document s'articule suivant quatre chapitres :

- Le **premier chapitre** exposera la stratégie adoptée pour insérer une méthode de modélisation de l'incertain dans un processus de dimensionnement d'assemblage de structures en aéronautique. Cette stratégie sera constituée de différents modèles et méthodes dont les choix seront justifiés et pour lesquels un bref état de l'art sera effectué.
- Parmi les méthodes utilisées, le recalage de modèle joue un rôle préliminaire crucial sur la qualité du modèle enveloppe objectif. Le modèle déterministe utilisé pour la théorie des méconnaissances doit être fiable et doit représenter le mieux possible la structure réelle. Dans un **second chapitre**, une stratégie de recalage de modèle déterministe de fixations sera étudiée et optimisée afin de pouvoir aborder l'aspect aléatoire dans les meilleures conditions. Plus particulièrement, nous nous concentrerons ici sur l'application d'une méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement appliquée à des modèles simples de fixations boulonnées.
- Le **troisième chapitre** présentera tout d'abord les bases de la modélisation des incertitudes par la théorie de méconnaissances. L'application de cette théorie sur un modèle déterministe correctement recalé constituera la dernière étape de la stratégie proposée. Cette stratégie sera ensuite illustrée sur un exemple typique de fixation aéronautique.
- Le **quatrième chapitre** aura pour objectif d'évaluer les possibilités d'utilisation du modèle de connecteur avec méconnaissances dans un environnement plus contraignant. Dans un contexte incertain, une analyse sera effectuée sur des connecteurs représentant chacun plusieurs fixations. La pertinence de cette extension d'échelle pour la modélisation des connecteurs sera évaluée et de possibles améliorations seront proposées.

# Chapitre 1

## Élaboration d'une stratégie de dimensionnement

*Dans ce premier chapitre, nous allons introduire la problématique industrielle sur laquelle nous allons travailler : le prédimensionnement d'assemblage de structures. Plusieurs discussions seront menées dans le but de construire point par point une stratégie pertinente en vue d'une proposition d'application dans le monde industriel. La première partie de ce chapitre présente les différentes méthodes permettant le dimensionnement des structures de grande échelle. Une étude bibliographique sur les modèles de fixation est ensuite effectuée. Enfin, la stratégie proposée est construite : elle utilise d'une part un recilage de modèle, et d'autre part elle met en place une prise en compte des phénomènes aléatoires. Ces deux derniers points feront également l'objet d'une discussion.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Problématique industrielle</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes de dimensionnement</b> . . . . .	<b>9</b>

2.1	Méthodes « ingénieur » et dérivées . . . . .	9
2.2	Les stratégies de calcul multiéchelles . . . . .	12
2.3	Les techniques de décomposition de domaine sans recouvrement . .	16
2.4	Conclusions . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modélisation des fixations . . . . .</b>	<b>18</b>
3.1	Les approches empiriques . . . . .	19
3.2	Les approches analytiques . . . . .	22
3.3	Les approches à éléments finis . . . . .	24
3.4	Conclusions . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Recalage de modèle . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1	Les modèles considérés . . . . .	28
4.2	Maîtrise des écarts entre modèles . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Prise en compte de l'incertitude . . . . .</b>	<b>38</b>
5.1	Méthodes stochastiques en calcul de structure . . . . .	38
5.2	Méthodes non stochastiques en calcul de structure . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>52</b>

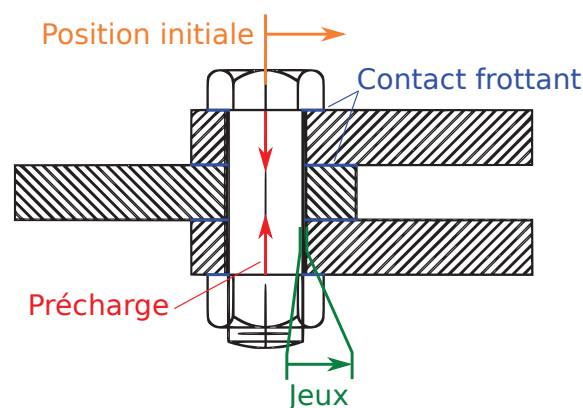
---

# 1 Problématique industrielle

Dans le secteur aéronautique, la certification des avions s'appuie généralement sur la réalisation de nombreux essais à différentes échelles. Ces essais peuvent être réalisés à l'échelle de la microstructure d'un matériau aussi bien qu'à l'échelle de l'avion lui-même. La tendance actuelle des industriels est de diminuer l'utilisation de ces essais, trop coûteux, au profit d'essais numériques. Grâce à l'évolution des capacités de calcul numérique, ces « essais virtuels » viennent peu à peu compléter voire remplacer certains types d'essais sur structure réelle.

Parmi les éléments faisant partie de cette problématique, les ensembles de fixations, boulonnées ou rivetées, sont des composants très importants lors du dimensionnement : l'irrégularité de la géométrie, les phénomènes de frottement, les précharges ou encore les jeux de fabrication présents dans ces zones augmentent les probabilités d'initiation de phénomènes d'endommagement.

La production en série mise en œuvre dans l'industrie aéronautique entraîne la fabrication de ces ensembles de fixations en très grand nombre. Lorsque l'on étudie une famille de structures semblables, plusieurs propriétés varient d'une structure à l'autre. En effet, le frottement entre les plaques est mal connu, les précharges appliquées lors de l'assemblage ne sont pas précisément contrôlées (environ  $\pm 20\%$  de dispersion [Guinard, 2003]), les jeux de fabrication sont réalisés avec des tolérances dimensionnelles et la position initiale de la fixation à l'intérieur de son logement n'est pas bien maîtrisée (configuration des rattrapages de jeux) [Guinard, 2003]. La **Figure 1.1** illustre ces paramètres mal connus.



**FIGURE 1.1:** Paramètres variables présents dans un assemblage boulonné

L'objectif de cette thèse est de proposer une stratégie de dimensionnement des assemblages boulonnés ou rivetés. De plus, on souhaite prendre en compte les effets des variabilités de comportement des fixations sur le dimensionnement. Ceci permettra de redéfinir la notion de « coefficient de sécurité » lors du dimensionnement.

Le but de cette stratégie est de réaliser des dimensionnements où l'échelle de la structure est équivalente à celle de plusieurs panneaux ou tronçons d'avion. Or, les calculateurs

actuels ne permettent pas encore de réaliser des essais numériques à ces échelles en prenant en compte les comportements complexes que l'on peut retrouver à des échelles beaucoup plus fines. Les modèles utilisés pour les simulations numériques sont donc ajustés en fonction de l'échelle de la structure observée. Toute la problématique de l'industriel réside dans la capacité de dialogue entre les différentes modélisations. Plusieurs techniques ont été développées pour résoudre ces problèmes, qualifiés de multiéchelles. La partie 2 de ce chapitre présente de manière non exhaustive les méthodes dites de « réanalyse locale » et « multiéchelles » pour le dimensionnement des structures de grande taille.

Le dimensionnement choisi se base sur l'étude d'une structure multiéchelle où deux types d'échelle sont étudiées : une structure globale (échelle des panneaux) utilisant des éléments simples et grossiers, et une structure locale (échelle de la fixation) comprenant des éléments représentant plus finement la géométrie réelle et dont le comportement est plus complexe. Dans notre cas, le choix des zones où appliquer la structure locale s'effectue à l'échelle globale. Elle est basée sur la recherche des transferts de charges dans les fixations, ainsi que de leurs variations, afin d'en déduire les éléments susceptibles d'être les plus chargés. Ces éléments de fixations sont ensuite isolés en vue d'une réanalyse locale, à l'aide d'une analyse descendante comme illustré sur la **Figure 1**. Le choix de cette méthode est justifié dans la partie 2.

Dans cette stratégie, les modèles de fixations employés à l'échelle globale et à l'échelle locale ne peuvent être les mêmes. Ces choix sont typiquement effectués en fonction de la complexité des modèles. La modélisation de ces types d'éléments nécessite donc une attention particulière car les performances de la stratégie en dépendent. Une étude des différents types de modélisation de ces fixations est présentée dans la partie 3. Le choix du type de modèle utilisé sera également justifié. Ces modèles sont nommés « modèles déterministes » des fixations dans la suite de l'étude.

Le modèle déterministe de fixation utilisé à l'échelle globale est ensuite associé à une théorie de prise en compte d'incertitude afin d'obtenir des estimations de variation des transferts de charge. Cette partie permet de prendre en compte des variations de comportements complexes des fixations souvent non contrôlés lors de la fabrication ou de l'assemblage. Un bref état de l'art de ces méthodes en mécanique est présenté dans la partie 5. La théorie des méconnaissances [Ladevèze *et al.*, 2004] sera employée pour effectuer ce point technique. En effet, cette théorie permet, à l'échelle globale, de réunir toutes les sources d'incertitude présentes dans une fixation. Le détails de son application est présentée au **Chapitre 3**.

Cependant, la théorie des méconnaissances ne peut combler les éventuelles erreurs de modélisation du modèle déterministe de fixation par rapport à la réalité. Le modèle déterministe joue un rôle primordial sur la qualité des résultats obtenus par la théorie. Il est donc important de correctement paramétrer le modèle déterministe pour qu'il représente au mieux la famille de structures étudiée quelque soit le type de modèle de fixation choisi. Pour cela nous utiliserons une méthode de recalage de modèle. Ceci permettra d'évaluer l'erreur produite entre le comportement du modèle de structure et celui issu des

mesures (sur structures réelles ou structures simulées) et ainsi de la diminuer en modifiant les propriétés de la modélisation. Un descriptif des méthodes de recalage de modèle est présenté dans la partie 4. Le recalage choisi est basé sur l'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Chouaki, 1999]. Le détail de l'application du recalage dans la stratégie est présentée au **Chapitre 2**.

En résumé, la stratégie proposée se décompose en plusieurs points important :

- application de la méthode de dimensionnement multiéchelle par analyse descendante ;
- construction du modèle déterministe de fixations ;
- recalage du modèle déterministe de fixations ;
- application de théorie des méconnaissances ;

Nous précisons ici que le travail qui suit s'intéresse uniquement à la partie « structure globale » de l'analyse descendante. La réanalyse locale ne sera donc pas étudiée.

Les travaux relatifs aux domaines abordés à chacun de ces points sont présentés successivement ci-dessous.

## 2 Méthodes de dimensionnement

La problématique est liée ici au dimensionnement de structures aéronautiques de grande taille présentant un grand nombre de fixations (plusieurs millions de fixations). Un modèle complet intégrant tous les détails structurels à l'échelle des fixations n'est pas envisageable pour le moment. En effet, le nombre de degrés de liberté engendré sur ce modèle entraînerait, pour un calcul direct, des temps de calcul et des besoins en terme de mémoire informatique incompatibles avec les contraintes des industriels. Plusieurs techniques se sont développées pour réduire ces besoins informatiques. On distingue ici deux grandes familles de stratégie. Les techniques appartenant à la première famille peuvent être qualifiées de « multiéchelles ». Plusieurs hypothèses sont utilisées pour finalement souligner le fait qu'il peut y avoir deux échelles de modélisation sur la structure étudiée : généralement une échelle grossière sur la structure complète et une échelle fine sur des zones très réduites de la structure. Ceci permet de rendre les calculs plus abordables en localisant les modèles les plus complexes. La deuxième catégorie de méthodes regroupe les techniques dites de « sous-structuration » et de « décomposition de domaines » ([Gosset et Rey, 2006]). Contrairement aux méthodes précédentes, on travaille généralement ici sur la structure complète avec une modélisation fine. Pour rendre le problème abordable, le domaine est découpé en plusieurs sous-domaines de taille inférieure. Les calculs des sous-domaines sont traités indépendamment et raccordés pour obtenir la solution exacte sur le domaine complet.

### 2.1 Méthodes « ingénieur » et dérivées

Ces approches représentent les techniques les plus employées dans l'industrie du fait de leur rapidité d'implémentation et d'utilisation.



### 2.1.1 Approches descendantes

Les approches descendantes sont les stratégies utilisées majoritairement dans les bureaux d'étude aéronautiques. Elles sont principalement employées pour obtenir des informations précises concernant des quantités d'intérêts dans une zone très localisée.

Elles consistent tout d'abord à trouver une solution globale sur la structure entière. Généralement, le modèle global est très grossier et ne met en œuvre quasiment pas de détails structuraux. Des exemples de problèmes traités sont illustrés **Figure 1.2** et **Figure 1.3**. Cependant, il peut contenir un très grand nombre de degré de liberté et nécessiter un temps de calcul conséquent étant donné la taille de la structure.

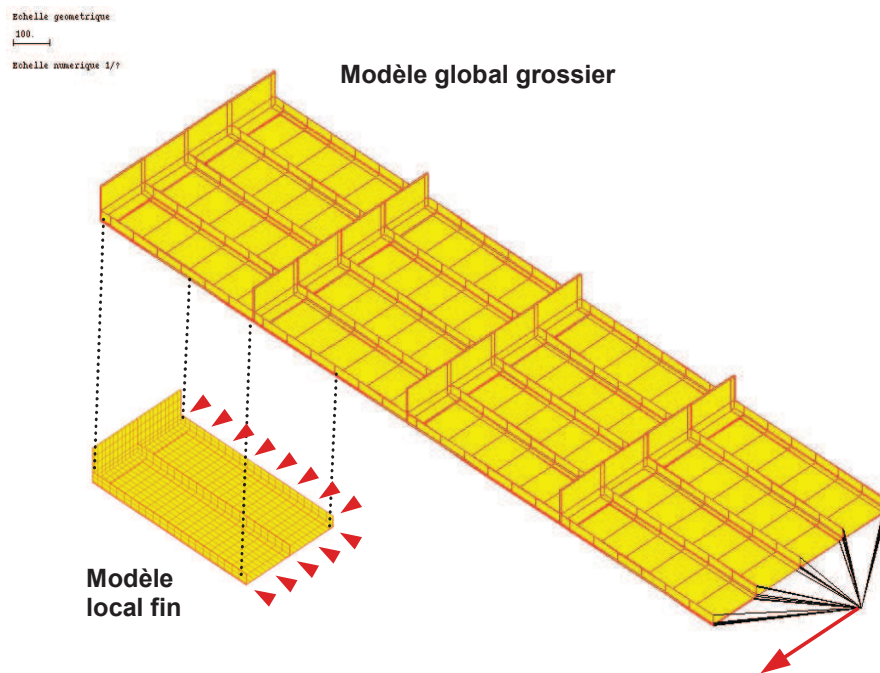
La seconde partie de la procédure consiste à localiser les zones de la structure globale pour lesquelles une analyse plus fine doit être réalisée. Cette étape peut être réalisée à l'aide d'estimateurs d'erreur, de critères *a posteriori*, ou de règles métier. Les zones ainsi identifiées peuvent être associées à un modèle local plus complexe : les non linéarités géométriques et matérielles [Ransom *et al.*, 1992] ou encore certains détails topologiques [Kapania *et al.*, 1997] ou d'hétérogénéité [Voleti *et al.*, 1996] peuvent être représentés.

Dans la troisième étape, les quantités de pilotage du modèle local doivent être définies. Les deux principales méthodes consistent à piloter les conditions aux limites du modèle local soit en déplacement [Kelley, 1982], soit en effort [Jara-Almonte et Knight, 1988] à partir des données issues du modèle global. Les premiers travaux ont été développés dans [Kelley, 1982, Whitcomb, 1991] sous le nom de SBD (*Specified Boundary Displacement*). On retrouve cette technique dans les logiciels à éléments finis sous le nom de « *submodeling* ».

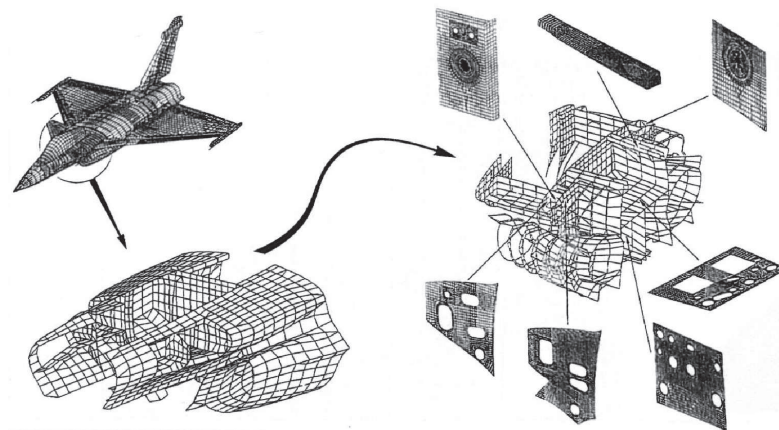
La dernière étape consiste à résoudre le problème local. Ce type de dimensionnement se présente donc comme une solution de choix pour les industriels car les deux modèles utilisés sont indépendants et leur calcul s'effectue successivement. Pourtant, les analyses descendantes présentent un inconvénient de taille du fait du peu de communication qui existe entre les deux modèles. En effet, le transfert d'information ne s'effectue que de façon unilatérale du modèle global vers le modèle local, lors de l'extraction des quantités globales servant à piloter les conditions aux limites du modèle local. Ce type de couplage ne permet donc pas au modèle local d'agir sur le modèle global. Cependant plusieurs travaux effectués au LMT Cachan ont montré les limites et les erreurs [Cresta, 2008, Gendre, 2010] pouvant être commises par cette technique. Les redistributions de contraintes induites par des comportements locaux adoucissant ne sont pas prises en compte au niveau global. Ce type d'approche est donc bien adapté lorsque le comportement à l'échelle locale n'a que très peu d'influence sur la réponse globale de la structure.

### 2.1.2 Approches exactes et itératives

Contrairement aux approches précédentes, les approches directes permettent de prendre en compte directement l'influence des détails locaux à l'échelle globale de manière exacte. Parmi elles, on peut noter les méthodes de réanalyse structurale [Barthelemy et Haftka, 1993]. Ces méthodes consistent à connaître la réponse du modèle global lors de modifications géométriques ou constitutives. Ceci permet ainsi de gagner du temps de calcul



**FIGURE 1.2:** Ré-analyse locale d'un panneau : modèles associés à chaque échelle d'étude [Cresta, 2008]



**FIGURE 1.3:** La méthode du zoom structural : en fonction des besoins, il est possible de « zoomer » de façon récurrente sur plusieurs échelles d'analyse jusqu'à obtenir celle adéquate pour l'analyse des champs de contraintes cherchés. On fabrique ainsi une suite de modèles et de calculs gigognes (Doc. Dassault Aviation) d'après [Guidault, 2005].

en ne recalculant pas la solution complète du problème mais en utilisant les calculs déjà effectués.

Le deuxième type d'approche exacte consiste à utiliser les techniques dites de condensation statique couramment utilisées dans l'industrie. Elles permettent de condenser la résolution du problème sur des variables d'interface. On peut donc créer des sous-structures condensées généralement nommées « super-éléments ». Ces éléments permettent de réduire de manière importante le nombre de degré de liberté en éliminant les inconnues internes aux zones condensées. Les problèmes initialement trop complexes à traiter du fait de leur taille peuvent être calculés avec un coût plus raisonnable grâce aux méthodes de condensation. De plus, ces techniques permettent la collaboration entre entreprises partenaires sur l'étude d'une structure, sans pour autant dévoiler les détails des sous-structures condensées. Notons tout de même que ces techniques ne sont pour l'instant pas applicables aux problèmes non linéaires.

Dans le cas où les approches exactes sont trop coûteuses pour prendre en compte un dialogue local  $\leftrightarrow$  global, les méthodes itératives peuvent se révéler être un bon compromis. Après avoir effectué une analyse locale en utilisant les conditions aux limites issues du problème global, une correction globale est effectuée à l'aide des chargements du modèle local représentant l'influence des détails locaux sur la structure. Parmi ces méthodes, on notera les approches RGL (*Refined Global/Local*) [Mao et Sun, 1991] et IGL (*Iterative Global/Local*) [Whitcomb, 1991].

## 2.2 Les stratégies de calcul multiéchelles

Nous présentons dans cette partie les méthodes de calcul de structures de grande taille nécessitant la prise en compte de détails structuraux précis. L'utilisation de ces méthodes est adaptée dans le cas où les détails locaux ont une dimension beaucoup plus petite que celle du problème global. Ceci interdit donc l'utilisation d'un modèle d'échelle locale sur le problème global, et entraîne donc l'étude de deux modèles d'échelles distinctes. Ici également, des méthodes ont été développées pour permettre le couplage de ces deux échelles. Parmi les grandes classes d'approches multiéchelles, nous distinguons ici (outre les approches descendantes traitées dans la partie 2.1.1) les techniques basées sur la théorie de l'homogénéisation, les méthodes d'enrichissement et de superposition.

### 2.2.1 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation

Ces méthodes ont pour but de construire un modèle « macro » à partir de connaissances particulières sur le modèle fin « micro ». Les premiers travaux ont permis de définir des comportements macroscopiques entre des quantités moyennes effectives [Eshelby, 1957, Hashin, 1960, Mori et Tanaka, 1973] à partir de modèles analytiques et semi-analytiques. D'autres avancées [Christman *et al.*, 1989, Tvergaard, 1990, van der Sluis *et al.*, 1999] ont permis d'identifier un modèle macroscopique à partir d'« essais numériques » mais également d'obtenir des informations locales de la solution.

Cependant, les premières méthodes véritablement multiéchelles sont principalement basées sur la théorie de l'homogénéisation périodique [Sanchez-Palencia, 1974]. Cette théorie est utilisable lorsque la structure microscopique est constituée d'un motif périodique appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER). Elle se base également sur un problème macro et un problème micro permettant de remonter aux propriétés locales [Sanchez-Palencia, 1974, Bensoussan *et al.*, 1978].

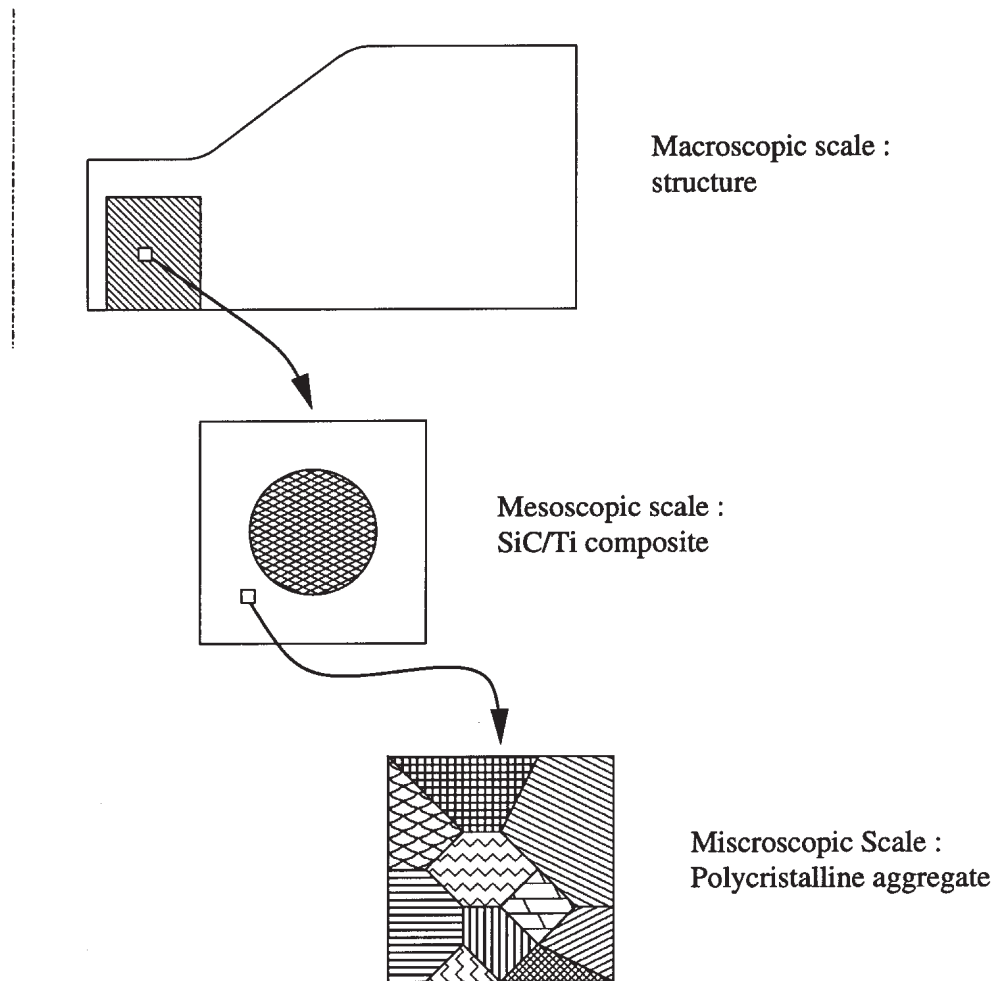
Des extensions ont également été proposées pour les cas non linéaires. Une présentation générale de ces techniques est proposée dans [Terada et Kikuchi, 2001]. Parmi ces techniques, on retrouve la méthode  $FE^2$  [Feyel et Chaboche, 2000] pour laquelle l'originalité consiste à associer, à chaque point d'intégration du maillage global, un modèle microscopique d'un VER. La **Figure 1.4** présente une application de la méthode au cas d'une structure composite. Le problème microscopique consiste à déterminer le champ de déformations et de contraintes sur le VER à partir des conditions de périodicité et de la relation de comportement non linéaire microscopique. Une fois la solution obtenue, une étape d'homogénéisation permet de remonter à la contrainte macroscopique en effectuant la moyenne du champ de contrainte sur le VER. Connaissant la contrainte macroscopique, celle-ci est introduite dans l'algorithme de résolution du problème macro.

Cependant, la méthode  $FE^2$  possède les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation dont elle est dérivée : elle ne reste pertinente que lorsque les échelles sont bien séparées. Dans [Ghosh *et al.*, 2001] est développée une méthode permettant de prendre en compte des zones où l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée.

### 2.2.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Les techniques précédentes se basent principalement sur l'évaluation de quantités « moyennes » à partir de l'échelle micro pour construire le comportement à l'échelle globale. Les approches étudiées dans cette partie adoptent un point de vue différent et cherchent plutôt à substituer ou superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt.

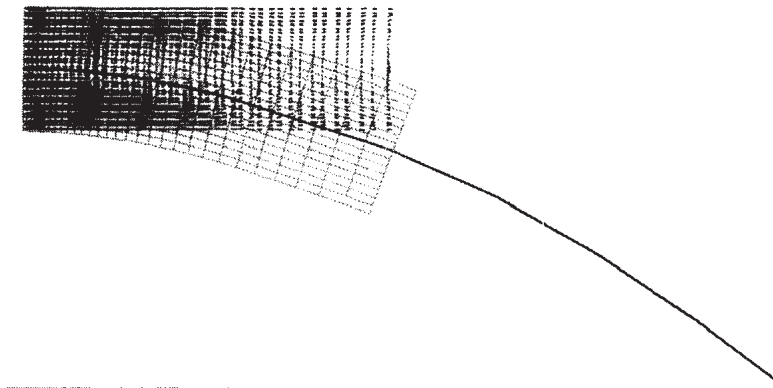
Parmi ces approches, la projection de Dirichlet homogénéisée (HPDM) [Oden et Zohdi, 1997, Oden *et al.*, 1999, Zohdi *et al.*, 1996] a été proposée pour résoudre des problèmes de structures fortement hétérogènes dans le cadre de l'élasticité linéaire. La technique se base sur un modèle global homogénéisé, relativement grossier à un niveau macroscopique, et des modèles microscopiques indépendants, incluant les détails de la microstructure. Les cellules dans lesquelles sont définis les modèles microscopiques, sont obtenues en partitionnant la structure suivant une grille régulière. Pour coupler les deux types de modèle, une estimation de l'erreur est effectuée *a posteriori* sur le modèle global. Une analyse au niveau microscopique est réalisée sur les cellules des zones les plus erronées. Une correction microscopique est ainsi obtenue à l'aide des conditions aux limites homogènes de Dirichlet du problème macroscopique. La solution corrigée est ensuite construite comme la solution macro à laquelle on ajoute les corrections issues des réanalyses sur chaque cellule. Cependant, étant donné que l'on utilise une homogénéisa-



**FIGURE 1.4:** Modèle numérique  $FE^2$  d'une structure en composite SiC/Ti [Feyel et Chaboche, 2000]

tion au niveau macroscopique, cette approche possède également les inconvénients cités précédemment.

On peut noter également la méthode Arlequin, introduite dans [Ben Dhia, 1998, Ben Dhia et Rateau, 2001], qui permet de superposer à un modèle global, un modèle plus fin dans des zones d'intérêt. Une illustration de la superposition d'un modèle poutre et d'un modèle 2D est présentée sur la **Figure 1.5**. Cette technique permet le couplage entre les deux types de modèle tant au niveau de la discrétisation que des équations qui les régissent. La particularité de cette technique se situe au niveau de la zone de dialogue entre les deux modèles. Contrairement aux méthodes précédentes où le dialogue s'effectue sur une interface, ici il se met en place de manière faible sur un volume de recouvrement. À l'intérieur de ces zones, le recouvrement des deux modèles est géré par l'application de fonctions de pondération, directement dans la formulation du principe des puissances virtuelles du problème global. C'est notamment le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange, appelé espace « médiateur », qui conditionne la qualité du raccord dans la zone de jonction.

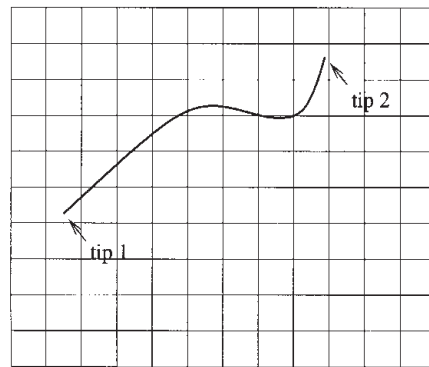


**FIGURE 1.5:** Contraintes principales majeures et flexion d'une poutre cantilever (analyse bimodèle : poutre/2D) [Ben Dhia, 1998]

L'intérêt de cette méthode est le couplage que l'on peut effectuer sur des types de modèle très différents. Cependant, le choix de la discrétisation de l'espace médiateur pose de grandes difficultés et fait l'objet de nombreux travaux [Guidault et Belytschko, 2007]. Également, l'assemblage des modèles fin et grossier ainsi que des multiplicateurs de Lagrange peut entraîner des problèmes de très grande taille et mal conditionnés. Pour s'affranchir de la reconstruction complète du problème, diverses études ont été menées [Elkhodja *et al.*, 2007]. D'autres études ont également portées sur l'extension des techniques de patches aux cas non linéaires [Rey *et al.*, 2007].

Enfin, on peut également citer quelques méthodes basées sur la partition de l'unité proposée dans [Melenk et Babuska, 1996]. On retrouve la méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis *et al.*, 2000] et la méthode des éléments finis étendus

XFEM [Moës *et al.*, 1999, Haboussa *et al.*, 2011, Pommier *et al.*, 2011]. Un problème de propagation de fissure est présenté sur la **Figure 1.6**. L'espace d'approximation EF est enrichi par des fonctions provenant d'une certaine connaissance que l'on a *a priori* du problème. Concernant la méthode des éléments finis étendus, elle utilise la partition de l'unité pour introduire diverses sortes de discontinuité sans toutefois modifier le maillage. Les principales fonctions employées sont les fonctions Heaviside pour les discontinuités et les solutions asymptotiques pour les champs en pointe de fissure. En ce qui concerne la méthode des éléments finis généralisés, elle propose d'introduire des fonctions permettant de prendre en compte le comportement local de certaines zones par l'intermédiaire de problèmes élémentaires, nommés « *handbooks* », résolus *a priori* à une échelle fine.



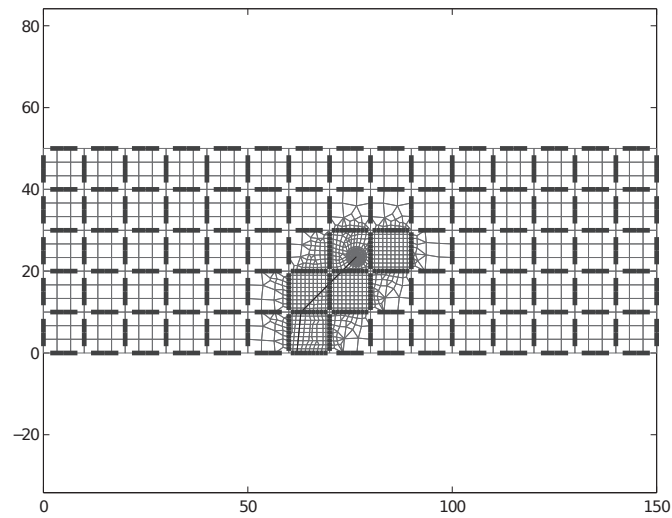
**FIGURE 1.6:** Problème de propagation de fissure traité par XFEM [Moës *et al.*, 1999]

### 2.3 Les techniques de décomposition de domaine sans recouvrement

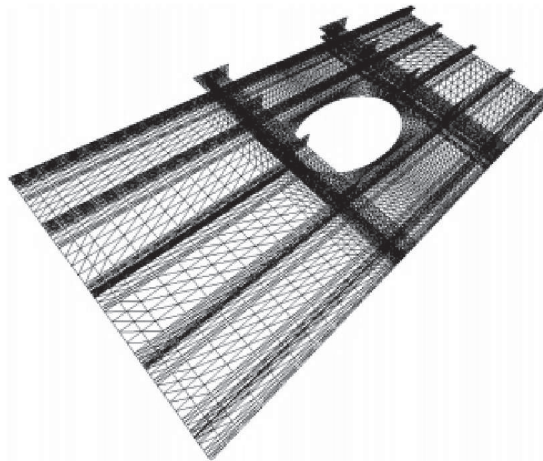
Le principe de ces méthodes est de traiter un problème de grande taille en partitionnant le domaine global en  $n$  sous-domaines que l'on traite séparément. Dans ce cas, la modélisation du problème permet de discrétiser la géométrie de façon plus ou moins fine en fonction du domaine étudié. Une illustration de cette approche par la méthode LaTIn est présentée sur la **Figure 1.7**.

Pour résoudre le problème global, les équations sont écrites à l'intérieur de chaque sous-domaine et les conditions de raccord sont écrites sur chaque interface. On distingue trois grandes familles. On se propose de les lister ci-dessous sans entrer dans les détails de chacune :

- les approches primales, *Balancing Domain Decomposition* (BDD) [Mandel, 1993] ;
- les approches duales, *Finite Element Tearing and Interconnecting* (FETI) [Farhat et Roux, 1991], FETI2 [Farhat *et al.*, 1996], FETI-DP (Dual-primal FETI method) [Farhat *et al.*, 2001]. Un exemple de maillage utilisé par la méthode FETI est présenté sur la **Figure 1.8** ;
- les approches mixtes, Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski, 1983, Glowinski et Le Tallec, 1990], LaTIn micro/macro [Ladevèze, 1999, Ladevèze *et al.*, 2001],



**FIGURE 1.7:** Maillage micro conforme à la géométrie et maillage macro d'interface d'une poutre fissurée [Guidault, 2005]



**FIGURE 1.8:** Maillage d'un panneau raidi utilisé par une approche FETI-DP [Farhat *et al.*, 2001]



FETI 2-champs [Series *et al.*, 2003].

Une présentation des principales méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement est proposée dans [Gosselet et Rey, 2006].

## 2.4 Conclusions

Dans cette partie, nous avons brièvement présenté les principales méthodes existantes pour le calcul de problèmes linéaires ou non linéaires de grande taille. Les problèmes traités sont principalement caractérisés par l'observation de phénomènes mécaniques présents à différentes échelles. Ils doivent donc être résolus en prenant en compte ces différentes échelles tout en surmontant les difficultés numériques qu'ils engendrent. Une première famille d'approches « globales-locales » permettent le traitement d'analyses fines locales pilotées par des conditions aux limites issues d'un modèle grossier global. Ces approches ne permettent pourtant pas, dans la plupart des cas, de prendre en compte les effets du modèle local sur le modèle global.

Une seconde famille de méthodes est basée sur les calculs multiéchelles. Ces méthodes sont utilisées lorsque qu'une distinction entre l'échelle « micro » et l'échelle « macro » peut être faite. Les problèmes sont traités soit indépendamment, soit en superposant ou en associant les deux modèles dans un même calcul.

Enfin, les techniques de décomposition de domaine permettent de traiter des problèmes condensés aux interfaces de façon itérative ou parallèle. Ces méthodes sont très efficaces lors de la résolution de problèmes de très grande taille.

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'une étude réalisée pour le dimensionnement d'un assemblage de structures en aéronautique. Les familles de résolution les plus utilisées à ce jour dans l'industrie sont les approches descendantes, avec pilotage des conditions aux limites en déplacement ou en effort. C'est dans ce cadre que nous allons proposer une stratégie de dimensionnement de structure boulonnée avec prise en compte des phénomènes aléatoires. En effet, les méthodes multiéchelles (excepté les analyses descendantes) et de décomposition de domaine sont trop coûteuses vis-à-vis des objectifs de la stratégie. De plus, les analyses descendantes étant fréquemment utilisées dans le domaine industriel, il sera d'autant plus simple d'intégrer la stratégie proposée dans un processus de dimensionnement. Le but de la stratégie est d'intégrer les phénomènes aléatoires lors de l'analyse globale pour avoir une connaissance des cas extrêmes de sollicitation de la structure. L'analyse locale, qui ne sera pas étudiée dans ce manuscrit, se basera ensuite sur les résultats issus de l'analyse globale en fonction des différents cas extrêmes calculés.

## 3 Modélisation des fixations

La méthode de résolution ayant été définie dans la partie précédente, nous allons maintenant nous intéresser au modèle global de l'analyse descendante, et plus particulièrement au modèle de fixation. En effet, sur les structures aéronautiques, les sous-ensembles sont principalement constitués de structures minces raidies et assemblées par des fixations,

rivetées ou boulonnées. La **Figure 1.9** présente une chaîne de montage de l'A320 d'Airbus sur laquelle on peut apercevoir les fuselages. La **Figure 1.10** présente plus en détail l'assemblage entre deux panneaux du fuselage.



**FIGURE 1.9:** Chaîne de montage de l'Airbus A320 [Airbus]

Un état de l'art non exhaustif concernant la modélisation des jonction boulonnées est effectuée dans cette partie. Nous distinguerons les approches suivantes :

- les approches empiriques ;
- les approches analytiques ;
- les approches numériques.

Plusieurs travaux ont été menés pour identifier et simuler les assemblages boulonnés ou rivetés. Nous nous limiterons dans notre cas à l'étude du comportement sans endommagement des fixations. En effet, le modèle de fixation choisi sera employé dans un modèle simple de structure, les phénomènes d'endommagement seront analysés ultérieurement à partir de l'analyse locale.

### 3.1 Les approches empiriques

Ces types d'approches consistent principalement à identifier le comportement d'une fixation boulonnée à partir d'une série d'essais. Les formules obtenues correspondent à la flexibilité des fixations en simple ou double cisaillement (*cf.* **Figure 1.11**). Parmi toutes les formules existantes, nous pourrions évoquer les suivantes :

- formule de Tate et Rosenfeld [Tate et Rosenfeld, 1946] ;
- formule de Boeing [Huth, 1986] ;
- formule de Swift [Swift, 1971] ;

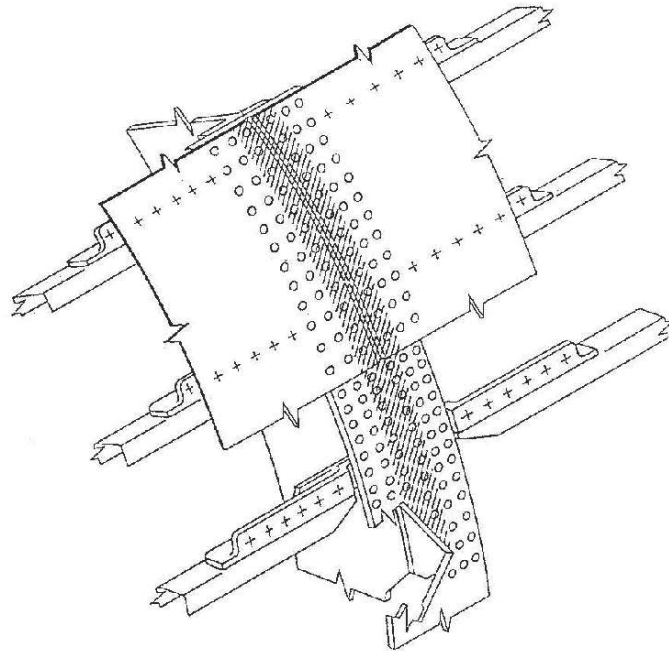


FIGURE 1.10: Schéma d'une jonction circonférentielle du fuselage [EADS]

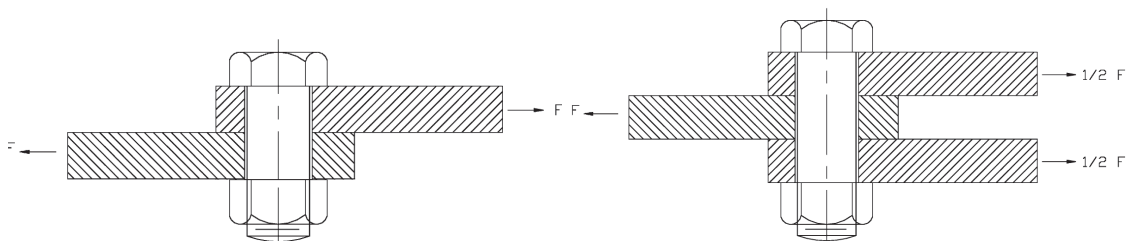
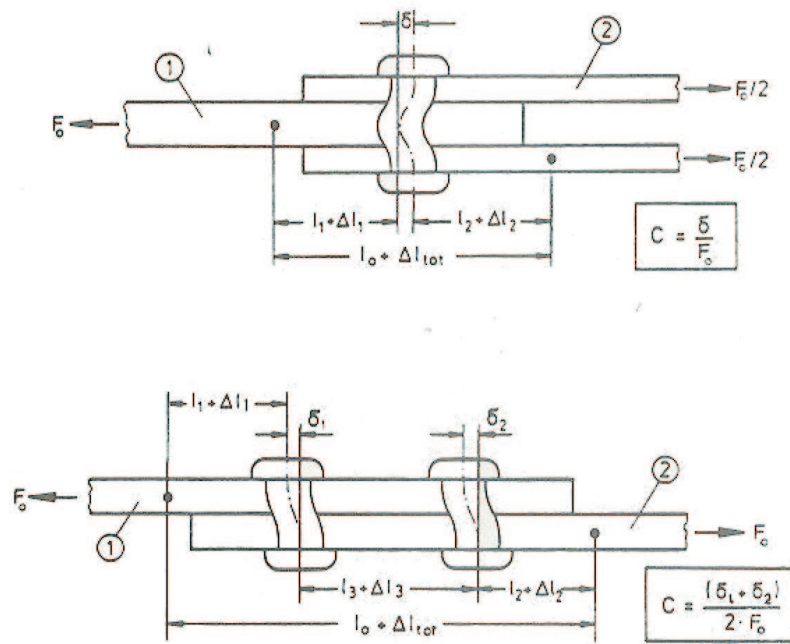


FIGURE 1.11: Configuration d'un assemblage en simple (gauche) et double (droite) recouvrement

- formule de Huth [Huth, 1986] ;
- formule de Niu [Niu, 1988] ;
- formule de Cope et Lacy [Cope et Lacy, 2000].

Nous allons détailler la formulation principalement utilisée chez EADS IW lors de la modélisation des fixations : la formulation de Huth. Puisque les formules semi-empiriques existantes ne sont applicables que sur un nombre restreint de géométries de fixations, H. Huth a permis l'étude sur une plus large gamme de configurations : les fixations boulonnées et rivetées, à simple et double recouvrement. La **Figure 1.12** présente les mesures effectuées lors de ses essais. L'objectif de l'étude est de pouvoir évaluer la tenue en fatigue



**FIGURE 1.12:** Schéma des déformations obtenues en simple et double cisaillement [Huth, 1986]

d'un assemblage boulonné. Pour cela, la connaissance de la répartition de charge entre les boulons est nécessaire. Enfin, une étude de la rigidité des fixations est effectuée pour en déduire la répartition des charges. Les paramètres géométriques et matériaux supposés influencer le comportement de la fixation sont :

- les matériaux des plaques ;
- la longueur de serrage des conditions aux limites ;
- le diamètre de la fixation ;
- le matériau de la fixation ;
- la configuration à simple ou double recouvrement.

Les essais ont été effectués dans les conditions suivantes :

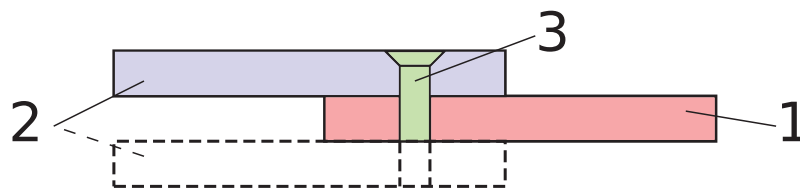
- assemblage métallique boulonné ;
- assemblage métallique riveté ;

– assemblage en composite carbone/epoxy boulonné.

Les boulons sont soit en acier, soit en titane. Les rivets sont quant à eux en aluminium. Les campagnes d'essais permettent d'établir la formule suivante :

$$C = \left( \frac{t_1 + t_2}{2d} \right)^a \frac{b}{n} \left( \frac{1}{t_1 E_1} + \frac{1}{nt_2 E_2} + \frac{1}{2t_1 E_3} + \frac{1}{2nt_2 E_3} \right) \quad (1.1)$$

$C$ ,  $t_i$ ,  $d$  et  $E_i$  étant respectivement la flexibilité de la fixation, les épaisseurs des deux plaques ( $i = \{1, 2\}$ ), le diamètre des fixations et les modules d'Young des matériaux des deux plaques ( $i = \{1, 2\}$ ) et de la fixation ( $i = 3$ ). La **Figure 1.13** précise la numérotation des différentes pièces.  $n$  vaut 1 (resp. 2) en simple (resp. double) cisaillement. La



**FIGURE 1.13:** Numérotation des pièces

**Table 1.1** présente les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$ .

Assemblage	$a$	$b$
métallique boulonné	2/3	3,0
métallique riveté	2/5	2,2
carbone/epoxy boulonné	2/3	4,2

**TABLE 1.1:** Valeurs des coefficients  $a$  et  $b$

Cette définition de la flexibilité de la fixation est principalement utilisée lors de calculs mettant en œuvre des modèles de structure de très grandes dimensions, dans lesquels les fixations ne peuvent être représentées en détails.

### 3.2 Les approches analytiques

Dans cette partie, nous présentons les travaux menés pour construire des modèles analytiques de fixations. Le plus souvent, les paramètres de ces modèles sont identifiés grâce à des essais. Les premiers types de travaux effectués concernent la modélisation des contraintes et des transferts de charge obtenus dans un assemblage boulonné chargé.

Nous allons tout d'abord présenter les différents modèles qui ont été développés pour la statique. Ces modèles de fixations ont été pour la plupart identifiés sur des essais réels. L'analogie entre la distribution de charges et un montage électrique de résistances est étudiée dans [Ross, 1947] (**Figure 1.14**). Une étude analytique prenant en compte les

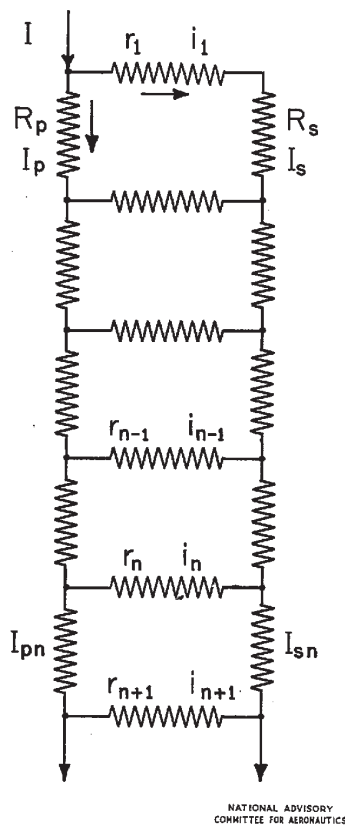
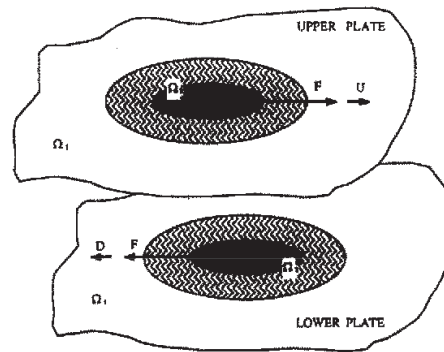


FIGURE 1.14: Réseau électrique équivalent à un assemblage de  $n + 1$  fixations [Ross, 1947]

effets thermiques est effectuée dans [Yen, 1978]. Dans [Yang et Ye, 1990], une étude analytique permet de retrouver également la direction des charges sur chaque fixation.

[Bortman et Szabó, 1992] présente un modèle analytique bidimensionnel (**Figure 1.15**) prenant en compte le frottement pour obtenir les contraintes au voisinage de la fixation. D'autres travaux ont également été menés sur le couple de serrage des fixations [Nassar



**FIGURE 1.15:** Schéma du modèle non linéaire de Bortman [Bortman et Szabó, 1992]

*et al.*, 2005], la perte de précharge [Yang et Chang, 2006, Jaglinski *et al.*, 2007] et leur influence sur la distribution des efforts sur les fixations.

La modélisation des phénomènes de fatigue [Barrois, 1978, Madenci *et al.*, 1998, De Matteis et Landolfo, 1999] et de rupture [Tong, 2000] sont également proposés comme cadres d'application.

Dans le domaine de la dynamique, l'objectif principal des modèles analytiques est de caractériser les effets dissipatifs tels que décrits dans [Esteban et Rogers, 2000]. Des modèles récents ont également été développés dans [Ahmadian et Jalali, 2007b, Jalali *et al.*, 2007]. Le modèle de fixation développé dans [Ahmadian et Jalali, 2007b] est construit à partir de plusieurs ressorts en translation et torsion, linéaires et non linéaires, associés à un amortisseur en torsion (*cf.* **Figure 1.16**).

De nombreuses représentations ont été développées sur la base du modèle rhéologique d'Iwan [Hartwigsen *et al.*, 2004, Song *et al.*, 2004, Shirayayev *et al.*, 2007, Segalman et Starr, 2008, Miller et Dane Quinn, 2009] (*cf.* **Figure 1.17**). On peut également noter d'autres modèles construits pour des applications au crash dans [Langrand et Combescure, 2004].

### 3.3 Les approches à éléments finis

Les modèles de fixation fondés sur l'approche à éléments finis sont les plus répandus actuellement. À l'image des représentations analytiques, les premiers modèles numériques ont généralement pour objectif de simuler la distribution des contraintes au voisinage de la fixation [Baumann, 1982] (éléments poutre), [Ingvar Eriksson, 1986] (modèle 2D) (*cf.* **Figure 1.18**). Également on retrouve des travaux effectués sur la rigidité et perte

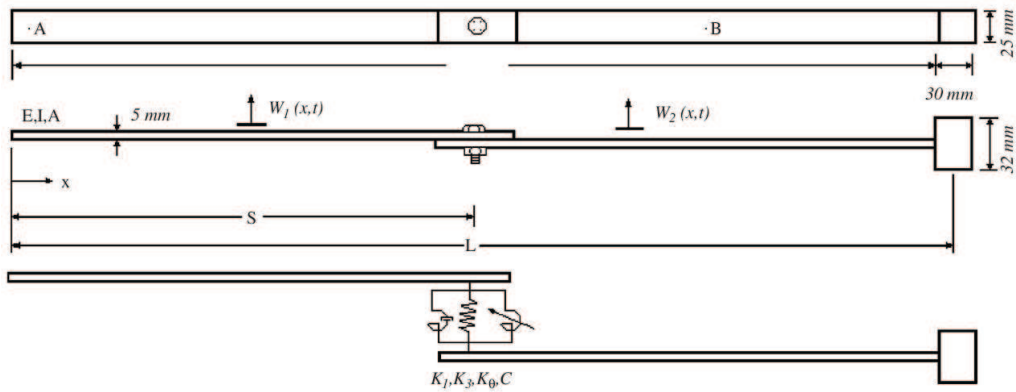


FIGURE 1.16: Montage et modèle dynamiques réalisés dans [Ahmadian et Jalali, 2007b]

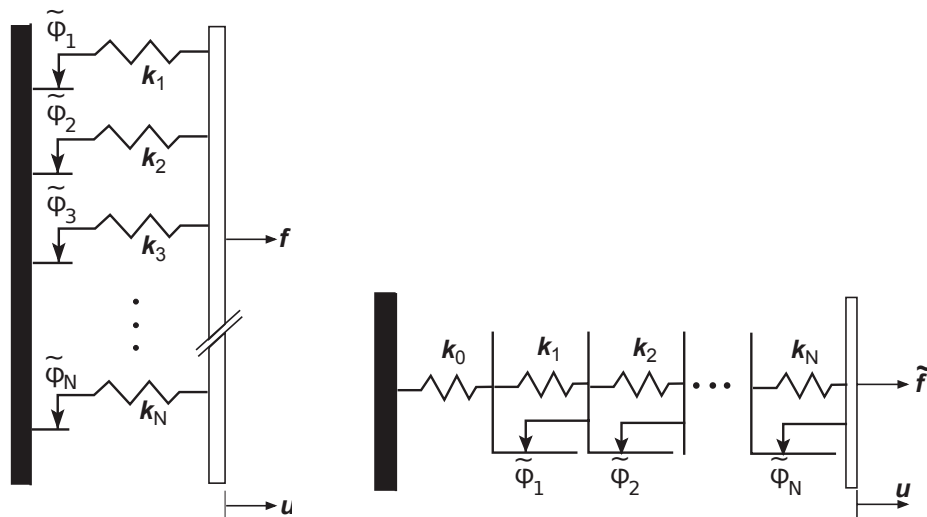


FIGURE 1.17: Schéma du modèle rhéologique d'Iwan parallèle-série (gauche) et série-parallèle (droite) [Segalman et Starr, 2008]



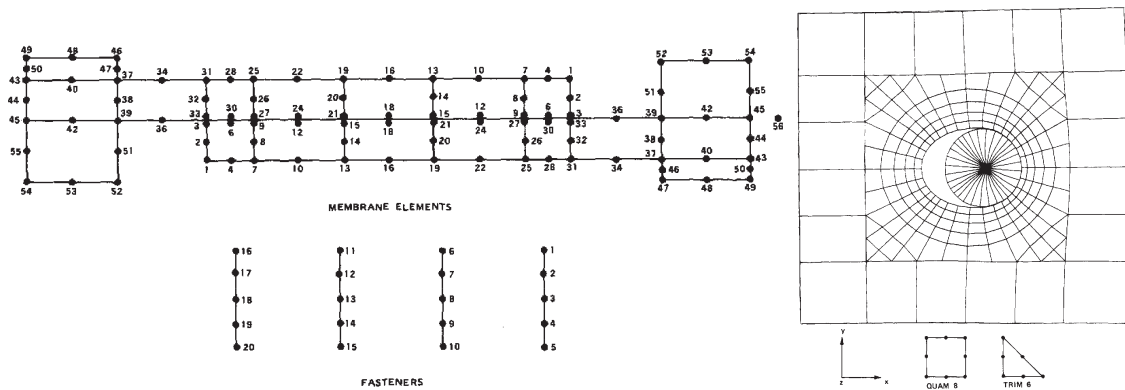


FIGURE 1.18: Modèles éléments finis membrane/poutre (gauche) [Baumann, 1982] et 2D (droite) [Ingvar Eriksson, 1986]

de la rigidité des fixations dans [Alkatan *et al.*, 2007, Lehnhoff et Bunyard, 2001] (rigidité axiale) (cf. Figure 1.19) et [Ding et Dhanasekar, 2007, Izumi *et al.*, 2005, Zhang *et al.*, 2007] (perte de précharge). Du fait des développements des modèles multidimensionnels,

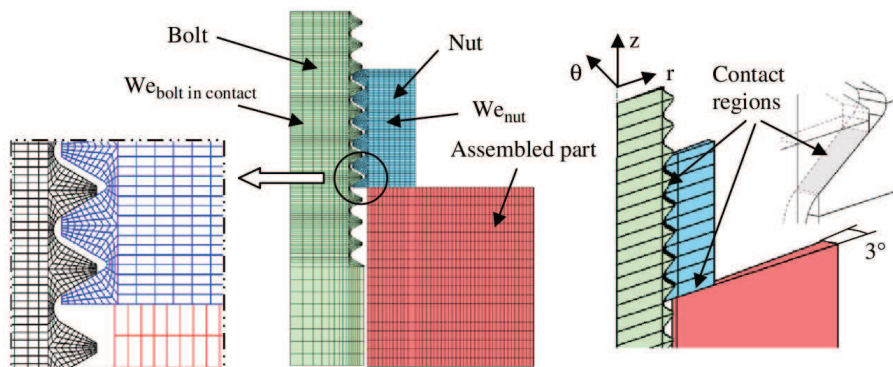
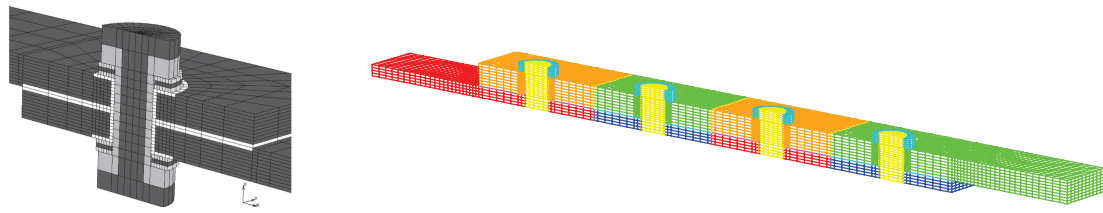


FIGURE 1.19: Modèle éléments finis employé pour l'étude de rigidité axiale dans [Alkatan *et al.*, 2007]

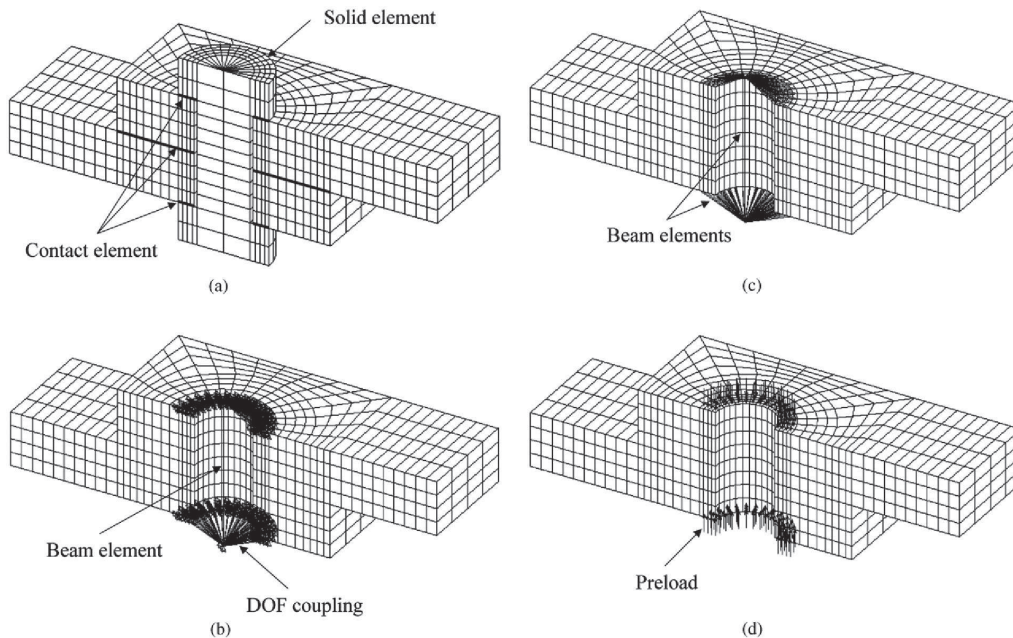
la représentation de la géométrie des fixations ainsi que ses comportements non linéaires ont pu être pris en compte de manière plus précise. De très nombreux travaux ont ainsi été menés suivant ce modèle : en 2D [Kim et Kim, 1995] mais surtout en 3D [Champaney *et al.*, 2007, Chen *et al.*, 1995, Ekh *et al.*, 2005, Kelly, 2005, Kelly et Hallström, 2004, McCarthy, 2005, McCarthy *et al.*, 2005, McCarthy et McCarthy, 2005, Soo Kim et Kuwamura, 2007] (cf. Figure 1.20), certains modèles y incluant de la dégradation du matériau [Riccio et Scaramuzzino, 2002, Tserpes *et al.*, 2002]. Les phénomènes de fatigue sont également traités dans [Kelly, 2006, Chakhari *et al.*, 2008, Leray *et al.*, 2008].

Pourtant, les modèles qui nous intéressent le plus ici sont ceux pouvant représenter une géométrie 3D tout en employant des éléments finis les plus simples possibles. Ces



**FIGURE 1.20:** Modèles éléments finis 3D non linéaires issus de [McCarthy *et al.*, 2005] (gauche) et [Champaney *et al.*, 2007] (droite)

modèles représentent un bon compromis pour le calcul de structures de grande taille. Certains de ces modèles ont été développés dans [Ekh et Schon, 2008, Gant *et al.*, 2011, Kim *et al.*, 2007] (*cf.* **Figure 1.21**).



**FIGURE 1.21:** Quatre types de modélisation simplifiée employés dans [Kim *et al.*, 2007]

Enfin, en dynamique des structures, des éléments simples avec amortissement ont été développés [Ahmadian et Jalali, 2007a, Mayer et Gaul, 2007], mais aussi des éléments spécifiques pour les chocs pyrotechniques [de Benedetti *et al.*, 2007] ou encore les crashes [Combesure *et al.*, 2003].

### 3.4 Conclusions

Dans cette partie, nous avons présenté les principaux travaux effectués dans la littérature concernant la modélisation des liaisons boulonnées et rivetées. En vue d'une utilis-

tion au niveau global d'une analyse descendante, les modèles de fixation doivent pouvoir être utilisés en nombre sur de grandes structures. Les modélisations non linéaires sont écartées de notre stratégie car cela entraînerait une utilisation de ressource numérique trop importante. Nous choisissons donc un modèle linéaire applicable au cas de la statique. De façon similaire aux méthodes de dimensionnement appliquées dans l'industrie, les modèles seront créés sous des logiciels à éléments finis. Dans nos exemples, ABAQUS/CAE sera utilisé. Nous avons donc la possibilité d'utiliser des éléments connecteur pour représenter les liaisons. Afin de représenter au mieux la géométrie des pièces, le comportement global de la structure et avoir un temps de calcul raisonnable, les éléments de structure sont modélisés par des éléments plaque linéaires et les fixations par des connecteurs (cf. [Ekh et Schon, 2008, Gant *et al.*, 2011, Kim *et al.*, 2007]). Les raideurs orthogonales des connecteurs à l'axe de la vis auront une valeur *a priori* définie par la formule de Huth (cf. équation (1.1)). La raideur équivalente du connecteur selon l'axe de la vis sera définie en fonction du matériau et de la géométrie de la vis.

## 4 Recalage de modèle

Le modèle de fixation a été choisi dans la partie précédente. Bien que les valeurs des raideurs soient tirées de la formule de Huth, le comportement correspondant ne coïncide pas avec le comportement réel dans la plupart des cas. Étant donné que le modèle d'incertitudes sera fondé sur ce modèle déterministe, une mauvaise représentation déterministe du réel entraînera une mauvaise représentation des variations de comportement de la structure.

L'objectif de cette partie est de pouvoir maîtriser le modèle de fixation pour se rapprocher au mieux du comportement « moyen » d'une famille de structures. Pour cela, nous allons introduire la notion de recalage de modèle. Tout d'abord, nous allons définir les différents niveaux de modélisation qui seront manipulés lors de la maîtrise de modèle. Ensuite, un bref état de l'art sera présenté concernant les méthodes de recalage de modèle. Étant donnée l'importance des applications au cas de la dynamique des structures, ces méthodes seront détaillées pour ce domaine d'application.

### 4.1 Les modèles considérés

Dans cette partie, nous allons comparer trois types de modélisation :

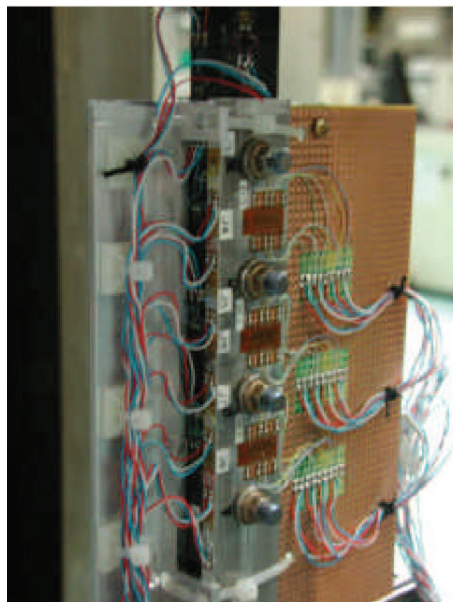
- le modèle expérimental ;
- le modèle continu ;
- le modèle numérique.

Lors des expérimentations sur une structure réelle, les données acquises représentent le modèle expérimental. Elles correspondent à la réponse qui traduit le comportement réel de la structure étudiée. Ce modèle présente certaines limitations :

- il est entaché d'erreurs dues au processus de mesure ;

- il est incomplet car les données ne sont obtenues qu'en un nombre fini de points, pour un certain nombre de sollicitations, ...

La **Figure 1.22** présente le dispositif expérimental mis en œuvre à EADS IW pour la jonction boulonnée que l'on étudiera au **Chapitre 2**.



**FIGURE 1.22:** Dispositif expérimental d'étude d'une jonction boulonnée [Guinard, 2003]

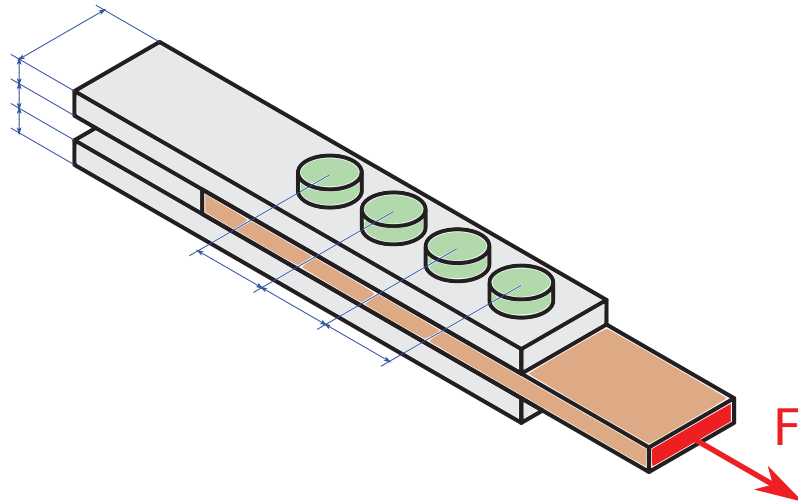
Du côté du modélisateur, la structure peut être représentée par un certain domaine théorique défini par des dimensions nominales issues de la conception de la structure. À partir de plusieurs hypothèses, la réponse de la structure peut théoriquement se calculer en définissant :

- les conditions initiales et conditions aux limites ;
- les équations d'équilibre ;
- les relations de comportement.

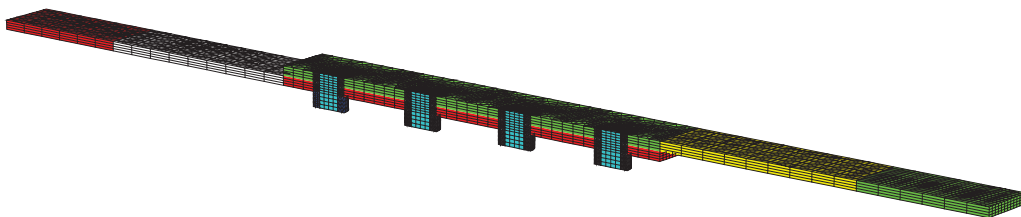
Généralement, les plus grandes incertitudes sont associées aux hypothèses effectuées sur les relations de comportement. Nous verrons par la suite que dans notre cas, c'est principalement ces hypothèses qui nous conduisent à procéder à un recalage de modèle.

Bien que le modèle continu (*cf.* **Figure 1.23**) soit défini facilement, il existe très peu de problèmes dont la solution analytique est connue. Dans la plupart des cas, nous avons recours à une solution approchée numériquement, le plus souvent avec la méthode des éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 1984]. La **Figure 1.24** présente un maillage éléments finis 3D d'une jonction boulonnée. Appliquée à la dynamique des structures, cette méthode permet d'écrire le problème à résoudre sous la forme suivante :

$$[K]\{u\} + [B]\{\dot{u}\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{f\} \quad (1.2)$$



**FIGURE 1.23:** Modèle continu de fixation aux dimensions nominales



**FIGURE 1.24:** Maillage 3D d'une jonction boulonnée

$[K]$ ,  $[M]$  et  $[B]$  sont respectivement les matrices de raideur, de masse et d'amortissement du modèle éléments finis,  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  et  $\{\ddot{u}\}$  les vecteurs nodaux de déplacement, vitesse et accélération du modèle, et  $\{f\}$  le vecteur force généralisé. On notera que le modèle mécanique utilisé ne présente pas de non-linéarités. En effet, pour le type d'assemblage étudié ici, les non-linéarités dues au contact seront englobées dans le concept des méconnaissances introduit dans le **Chapitre 3**.

La solution de cette équation permet de calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération en chaque point de la structure. En dynamique, et sans travailler dans le domaine fréquentiel, on peut supposer que le déplacement et la force imposée peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{u\} = \{U\} \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.3)$$

$$\{f\} = \{F\} \sin(\omega t - \psi) \quad (1.4)$$

$\{U\}$  et  $\{F\}$  étant respectivement les amplitudes de  $\{u\}$  et  $\{f\}$ , et  $\varphi$  et  $\psi$  leur phase. Les expressions (1.3) et (1.4) peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{U\}(\cos \varphi \sin \omega t - \sin \varphi \cos \omega t) \\ &= \{U\} \cos \varphi \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} - \{U\} \sin \varphi \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \{U\} \left( \frac{\cos \varphi}{2i} - \frac{\sin \varphi}{2} \right) e^{i\omega t} + \{U\} \left( \frac{\cos \varphi}{-2i} - \frac{\sin \varphi}{2} \right) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \{\tilde{U}\} e^{i\omega t} + \{\tilde{U}\}^* e^{-i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$\{\tilde{U}\}$  étant un vecteur complexe contenant les informations d'amplitude et de phase, et  $\{\tilde{U}\}^*$  son complexe conjugué. Nous utiliserons la notation suivante dans la suite de l'étude :

$$\{u\} = \frac{1}{2} \left[ \{U\} e^{i\omega t} + \{U\}^* e^{-i\omega t} \right] \quad (1.6)$$

$$\{\dot{u}\} = \frac{1}{2} \left[ \{i\omega U\} e^{i\omega t} + \{i\omega U\}^* e^{-i\omega t} \right] \quad (1.7)$$

$$\{\ddot{u}\} = \frac{1}{2} \left[ \{-\omega^2 U\} e^{i\omega t} + \{-\omega^2 U\}^* e^{-i\omega t} \right] \quad (1.8)$$

L'équation (1.2) peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$([K] - \omega^2[M] + i\omega[B])\{U\} = \{F\} \quad (1.9)$$

Rappelons que  $\{U\}$  et  $\{F\}$  sont des vecteurs complexes. Les couples  $(\omega_i, \{\Phi_i\})$  sont introduits pour résoudre le problème suivant :

$$([K] - \omega_i^2[M])\{\Phi_i\} = 0 \quad (1.10)$$

$\omega_i$  et  $\{\Phi_i\}$  sont nommés respectivement fréquences propres et modes réels du système non amorti. Lorsque le modèle possède  $N$  degrés de liberté, il existe  $N$  couples  $(\omega_i, \{\Phi_i\})$  solutions de l'équation (1.10). On peut détailler l'écriture de ce couple de la façon suivante :

$$[\Phi] = [ \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_N ] \quad (1.11)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_N \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Les modes propres sont ensuite normalisés par la masse. On a alors les relations suivantes :

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda] \quad (1.13)$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [\mathbb{I}] \quad (1.14)$$

$\mathbb{I}$  étant la matrice identité.

## 4.2 Maîtrise des écarts entre modèles

Cette partie est centrée autour des méthodes permettant de contrôler et de réduire les écarts entre les différents modèles définis précédemment. La **Figure 1.25** présente les différents domaines de calcul d'écart entre modèles.

### 4.2.1 Vérification de modèle

Le passage du modèle continu au modèle numérique approché entraîne forcément un écart de réponse entre eux deux. La problématique ici est de pouvoir quantifier cet écart. Les premiers travaux ont été effectués pour des problèmes élastiques linéaires. Pour cela, trois grandes familles de méthodes existent actuellement dans le domaine de « l'estimation d'erreur » :

- les techniques fondées sur les résidus d'équilibre [Babuska et Rheinboldt, 1979] ;
- les techniques fondées sur le concept d'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Leguillon, 1983] ;
- les techniques fondées sur le lissage des contraintes de la solution numérique [Zienkiewicz et Zhu, 1987].

Les développements ayant eu lieu au LMT Cachan ont principalement été effectués sur le concept d'erreur en relation de comportement. Plusieurs avancées ont été proposées pour les problèmes de non linéarité matériaux [Ladevèze, 2000], le contact [Coorevits *et al.*, 2000], les vibrations [Ladevèze et Pelle, 1989], la dynamique [Ladevèze et Waeytens, 2009] ou encore la dynamique rapide [Combe *et al.*, 1999].

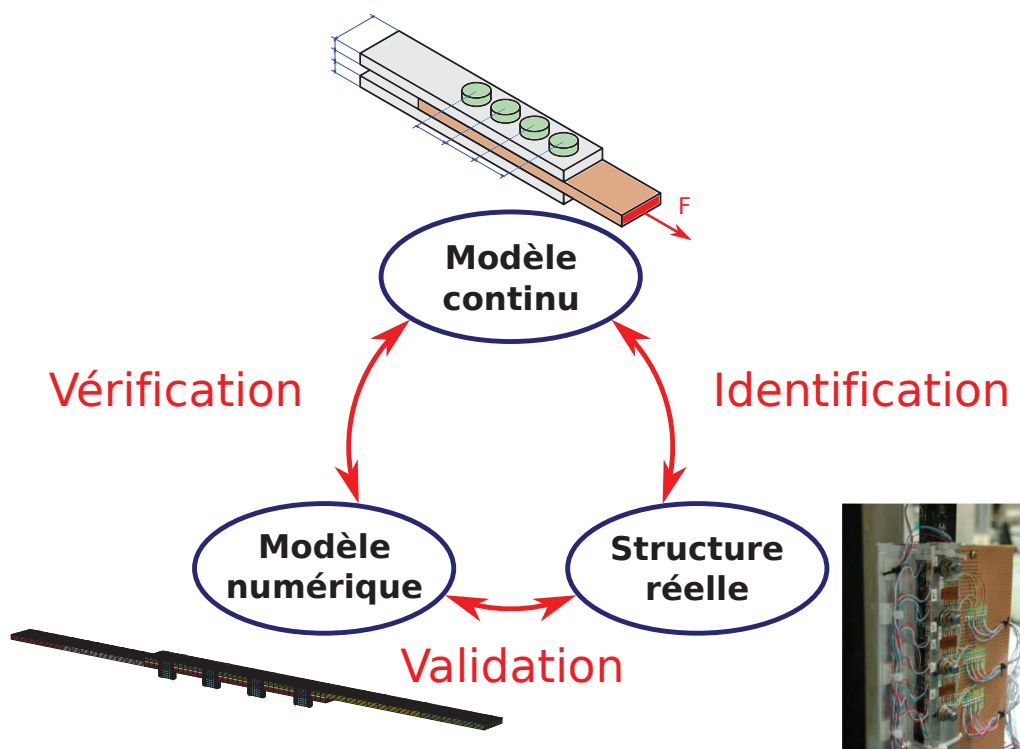


FIGURE 1.25: Problématique de maîtrise des modèles



### 4.2.2 Validation de modèle

Dans cette partie, nous présentons les différentes méthodes développées pour améliorer la qualité d'un modèle numérique par rapport au modèle expérimental associé. En effet, lorsque la qualité du modèle numérique par rapport aux mesures n'est pas suffisante, il doit généralement subir un recalage. On distingue deux grandes familles de méthodes de recalage :

- les méthodes directes : ces méthodes consistent à corriger directement les opérateurs définissant le problème sans retour d'informations sur la modification physique du modèle ;
- les méthodes indirectes ou paramétriques : ces méthodes ont pour objectif de minimiser une erreur entre le modèle numérique et les mesures en jouant sur des paramètres physiques du modèle, généralement en faisant intervenir un processus itératif.

Quelques méthodes vont être présentées succinctement. Pour plus de détails, on pourra consulter une revue des méthodes de recalage faite dans [Mottershead et Friswell, 1993]. Les méthodes de recalage sont présentées ci-dessous dans le cas général de la dynamique de structure. Le recalage effectué dans la stratégie de dimensionnement proposée sera appliquée en statique dans le **Chapitre 3**.

#### Les méthodes directes

**Méthodes de « Norme minimale ».** Le principe de ces méthodes consiste à trouver une correction des matrices  $[K]$  et  $[M]$  du modèle numérique. À partir de l'arrangement des modes expérimentaux  $\tilde{U}_i$  en colonne dans la matrice  $[\tilde{U}]$ , les corrections  $[\Delta K]$  et  $[\Delta M]$  symétriques sont définies telles que :

- $[\Delta M]$  minimise

$$\|[M]^{1/2}[\Delta M][M]^{1/2}\| \quad (1.15)$$

sous la contrainte d'orthogonalité qui s'écrit pour des modes normalisés en masse :

$$[\tilde{U}]^T [M + \Delta M] [\tilde{U}] = \mathbb{I} ; \quad (1.16)$$

- $[\Delta K]$  minimise

$$\|[M]^{1/2}[\Delta K][M]^{1/2}\| \quad (1.17)$$

sous la contrainte d'orthogonalité et d'équilibre modal :

$$[\tilde{U}]^T [K + \Delta K] [\tilde{U}] = [\Lambda] \quad (1.18)$$

$$[K + \Delta K] [\tilde{U}] - [\Lambda] [M + \Delta M] [\tilde{U}] = [0] \quad (1.19)$$

La norme matricielle  $\|[\cdot]\|$  employée est la norme de Frobenius définie par :

$$\| [A] \| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \quad (1.20)$$

$[A]$  étant une matrice carrée d'ordre  $n$ . Comme énoncé précédemment, le principal défaut de ces méthodes est que les corrections apportées n'ont pas de sens physique. En effet, il peut arriver que les corrections entraînent des structures de matrices non conformes à la construction des matrices à éléments finis. Plusieurs améliorations concernant ce sujet ont été proposées dans [Kabe, 1985] puis [Smith et Beattie, 1991].

Certains travaux récents sur les corrections de matrices de rang minimum permettent une modification plus locale des matrices. Ces travaux peuvent être consultés dans [Zimmerman et Kaouk, 1994, Zimmerman et Simmermacher, 1995, Zimmerman *et al.*, 1996] et [Doebbling, 1996].

**Méthodes « *Matrix mixing* ».** Ces méthodes proposent de construire directement les matrices  $[K]$  et  $[M]$  à partir des modes mesurés de la façon suivante :

$$[M]^{-1} = [\tilde{U}]^T [\tilde{U}] \quad (1.21)$$

$$[K]^{-1} = [\tilde{U}]^T [\Lambda]^{-1} [\tilde{U}] \quad (1.22)$$

Ces méthodes nécessitent que tous les modes du modèle numérique soient mesurés expérimentalement, ce qui rend leur utilisation très peu pratique. Leur premiers développements ont été proposés dans [Ross, 1971, Thoren, 1972]. Des améliorations ont également été effectuées dans le cas où certains modes ne sont pas connus (*cf.* [Link *et al.*, 1987]).

**Méthodes issues de la théorie du contrôle.** Elles sont également nommées « *Eigenstructure Assignment Method* ». Elles reposent sur le calcul d'un pseudo-contrôleur qui permet de vérifier l'équilibre modal. On considère le système suivant :

$$[K]\{x\} + [B]\{\dot{x}\} + [M]\{\ddot{x}\} = [B_0]\{u\} \quad (1.23)$$

$$\{y\} = [D_0]\{x\} + [D_1]\{\dot{x}\} \quad (1.24)$$

$\{u\}$  et  $\{y\}$  étant respectivement nommés entrées et sorties dans le vocabulaire du contrôle.  $\{y\}$  peut être une combinaison linéaire de  $\{x\}$  et  $\{\dot{x}\}$  en tout point du système.  $[B_0]$  distribue les entrées aux degrés de liberté appropriés de la structure. On recherche alors une loi de contrôle du type :

$$\{u\} = [G]\{y\} \quad (1.25)$$

$[G]$  étant nommée matrice de gain. On obtient donc l'équation suivante :

$$([K] - [B_0][G][D_0])\{x\} + ([B] - [B_0][G][D_1])\{\dot{x}\} + [M]\{\ddot{x}\} = 0 \quad (1.26)$$

Cette équation traduit l'équilibre modal. L'expression de  $[G]$  donne ainsi les corrections nécessaires pour assigner les modes propres et fréquences propres du système aux valeurs données par l'expérimentation. Les principales difficultés résident dans la construction de  $[G]$  qui, n'étant pas unique, peut conduire à des matrices non symétriques. Les travaux effectués dans [Zimmerman et Widengren, 1990] permettent de résoudre ce problème.

**Les méthodes paramétriques (ou indirectes)** Pour ce type de méthodes, on suppose que le modèle est paramétré de telle sorte que :

$$[\Delta K] = \sum_{i=1}^n [\Delta K](p_i) \quad [\Delta M] = \sum_{i=1}^n [\Delta M](p_i) \quad [\Delta B] = \sum_{i=1}^n [\Delta B](p_i) \quad (1.27)$$

L'objectif du recalage consiste à trouver un jeu de paramètres  $\{p\}$  de taille  $n$  minimisant une fonction objectif généralement nommée « fonction coût » et de la forme :

$$J(\{p\}) = \|\{R(\{p\})\}\|^2 + \lambda \|\{p\} - \{p_0\}\|^2 \quad (1.28)$$

$\{p_0\}$ ,  $\{R(\{p\})\}$  et  $\lambda$  étant respectivement le jeu de paramètres initial, le résidu qui exprime le niveau de corrélation entre le modèle défini avec le paramètre  $\{p\}$  et les mesures, et un terme pondérateur à ajuster. Une forme plus générale de fonction coût est donnée par l'estimateur Bayésien (cf. [Natke, 1988, Tarantola, 2004]) suivant :

$$J(\{p\}) = \underbrace{\{R(\{p\})\}^* [G]_{\{R\}} \{R(\{p\})\}}_1 + \underbrace{\lambda (\{p\} - \{p_0\})^T [G]_{\{p\}} (\{p\} - \{p_0\})}_2 \quad (1.29)$$

$$\text{avec } [G]_{\{R\}} = [\text{COV}(\{v(\{p\})\})]^{-1} \quad (1.30)$$

$$\text{et } [G]_{\{p\}} = [\text{COV}(\{p\})]^{-1} \quad (1.31)$$

COV représente la matrice de covariance qui définit le type de norme choisi. Les termes 1 et 2 sont nommés respectivement terme de pénalisation et terme de régularisation (au sens de Tychonoff). Le terme de régularisation permet de privilégier parmi les solutions possibles de  $\{p\}$ , celles étant les plus proches au sens de la norme  $|\cdot|^2$  de l'estimation initiale des paramètres  $\{p_0\}$ . Le choix des normes  $|\cdot|^2$  et  $\|\cdot\|^2$  dépend de données telles que la distribution probable des paramètres, des erreurs sur les mesures ou encore de savoir-faire ingénieur. Une discussion détaillée sur ce point est présentée dans [Mottershead *et al.*, 2000]. Plusieurs techniques sont abordées ci-dessous.

**Utilisation des données modales.** Dans ce cas, le résidu est généralement constitué de résidus construits sur les fréquences propres et les modes propres. L'utilisation du MAC (*Modal Assurance Criterion*) est donc ici approprié. Pour  $n$  couples de modes et valeurs propres mesurés  $(\tilde{\omega}_i, \{\tilde{\Phi}_i\})$  et  $n$  couples de modes et valeurs propres calculés pour

un jeu de paramètres  $\{p\}(\omega_i, \{\Phi_i\})$ , le résidu peut être défini par la formule suivante :

$$\|\{R(\{p\})\}\|^2 = \sum_{i=1}^n p_i \left(1 - \text{MAC}(\{\tilde{\Phi}_i\}, \{\Phi_i\})\right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n q_i \Delta f(\tilde{\omega}_i, \omega_i)^2 \quad (1.32)$$

les modes  $i$  expérimentaux correspondant aux modes  $i$  calculés numériquement.

**Utilisation des fonctions de réponse en fréquence.** Parmi les techniques utilisant ces informations, on distingue trois grandes classes suivant le type de résidu employé :

- les résidus en entrée ;
- les résidus en sortie ;
- les résidus sur les relations de comportement.

La construction du résidu en entrée s'effectue en supposant que l'on impose le déplacement  $\{\tilde{U}\}$  à la structure. On calcule le résidu suivant :

$$\{R(\{p\})\}_\omega = \{F\} - \{\tilde{F}\} \quad (1.33)$$

Le résidu est donc la différence entre l'effort calculé à partir du modèle (sur lequel on applique  $\{\tilde{U}\}$ ) et l'effort mesuré  $\{\tilde{F}\}$ . L'effort  $\{F\}$  s'exprime de la façon suivante :

$$\{F\} = ([K] - \omega^2[M] + i\omega[B])\{\tilde{U}\} \quad (1.34)$$

Cette technique est équivalente à une optimisation linéaire lorsque tous les degrés de liberté sont mesurés. Comme ce n'est que très peu souvent le cas, les données manquantes sont issues du modèle initial, ce qui conduit à un problème non linéaire,  $\{\tilde{U}\}$  étant dépendant de  $\{p\}$ . De plus, les travaux effectués dans [Fritzen, 1986, Cottin *et al.*, 1984] soulignent la forte sensibilité de ce type de résidu au bruit de mesure.

Contrairement aux techniques précédentes, les résidus en sortie sont construits en supposant que l'on applique à la structure un effort  $\{\tilde{F}\}$ . On calcule le résidu suivant :

$$\{R(\{p\})\}_\omega = \{U\} - \{\tilde{U}\} \quad (1.35)$$

Le résidu en sortie est calculé comme étant la différence entre les déplacements issus du modèle sur lequel on applique  $\{\tilde{F}\}$  et les déplacements mesurés  $\{\tilde{U}\}$ . Le déplacement  $\{U\}$  s'exprime de la façon suivante :

$$([K] - \omega^2[M] + i\omega[B])\{U\} = \{\tilde{F}\} \quad (1.36)$$

Ces résidus, contrairement aux résidus en entrée, se révèlent être moins sensibles aux perturbations dues aux bruits de mesure. Concernant ces deux types de résidus, plusieurs variantes existent selon le type de norme choisi ou encore le type de coefficient pondérateur  $\lambda$  (*cf.* [Balmès, 2000]).

Le troisième type de résidu se base sur les relations de comportement. Nous pouvons citer la méthode MECE (*Modeling Error in the Constitutive Equations*) [Pascual, 1998]. La méthode de recalage en erreur en relation de comportement développée au LMT Cachan [Ladevèze et Chouaki, 1999], fait partie de ce type de construction de résidu. Elle sera détaillée dans le **Chapitre 2**.

Après avoir choisi le type de résidu, la définition [Mottershead *et al.*, 1996] et le choix des paramètres à recaler est un point très important par rapport à l'efficacité du processus. Pour plus de détails concernant cette partie, on pourra se référer aux descriptions faites dans [Deraemaeker, 2001]. Étant donné le peu de paramètres à manipuler dans les applications qui suivent, les méthodes de choix de paramètres ne seront pas appliquées. Ces techniques s'avéreront nécessaires en vue d'une application de recalage pour des structures de très grande taille.

Dans la suite de cette étude, nous avons choisi d'appliquer au modèle d'assemblage déterministe un recalage de type paramétrique fondé sur l'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Chouaki, 1999]. En effet, cette méthode permet de raisonner d'une part sur des paramètres physiques, et d'autre part sur des sous-structures. Nous verrons que la manipulation de sous-structures sera adéquat vis-à-vis de la méthode de prise en compte des incertitudes choisie dans la partie suivante.

## 5 Prise en compte de l'incertitude

Dans le domaine des assemblages de fixations, les sources d'incertitudes sont principalement observés sur les phénomènes de frottement, les précharges des boulons et les jeux de fabrication. Tous ces phénomènes sont difficilement contrôlés lors de la fabrication ou du montage des éléments. Une méthode de prise en compte des incertitudes doit être choisie pour être appliquée à ces sources d'aléa.

Un modèle d'assemblage ainsi qu'une méthode de recalage ont été choisis dans les parties précédentes. L'objectif de cette partie est de faire un bilan des méthodes existantes en calcul de structures pour la prise en compte des variabilités. Le modèle déterministe recalé sera l'élément de base de la méthode de prise en compte des incertitudes. Un état de l'art non exhaustif de ces méthodes est présenté ici. Nous détaillerons tout d'abord les méthodes stochastiques, puis viendront les méthodes non stochastiques.

### 5.1 Méthodes stochastiques en calcul de structure

Les méthodes stochastiques sont naturellement employées lorsqu'il s'agit de représenter les effets du hasard. Elles sont fondées sur l'usage des probabilités. Elles consistent à modéliser les effets des variabilités des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie.

#### 5.1.1 Paramètres stochastiques

Il existe plusieurs types de paramètres aléatoires :

- les variables aléatoires : ces variables sont des fonctions dépendant uniquement de l'aléa  $\theta$ . Elles sont uniformes en temps et en espace ;
- les champs stochastiques : c'est-à-dire des fonctions dépendant à la fois de l'aléa et de l'espace. Elles sont uniformes en temps ;
- les processus stochastiques, fonctions dépendantes de l'aléa, de l'espace et du temps.

Avant de présenter les méthodes permettant de calculer la réponse aléatoire d'un système, nous allons faire quelques rappels de probabilités nécessaires pour la suite de l'étude. Une présentation globale de ses méthodes appliquées aux calculs de structures peut être consultée dans [Schuëller, 2001].

**Variabes aléatoires.** Une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}$  et dépendant de l'aléa  $\theta$  est entièrement définie si l'un de ces trois points est donné :

- sa fonction de répartition (notée CDF pour *Cumulative Distribution Function*). Cette fonction prend des valeurs entre 0 et 1.
- sa fonction densité de probabilité (notée PDF pour *Probability Density Function*), dont l'intégrale est la fonction de répartition.
- tous ses moments statistiques. Les plus utilisés sont les moments d'ordre 0 (moyenne ou espérance) et d'ordre 1 (variance).

**Décomposition de Karhunen-Loève.** Cet outil, développé dans [Loève, 1977], permet de décomposer un champ stochastique en effectuant une séparation de variable d'espace et variable stochastique. En effet, bien qu'un champs stochastique puisse mieux représenter la réalité des variations mécanique comparativement à une variable aléatoire uniforme en espace, il s'avère beaucoup plus compliqué à manipuler. Cette méthode décompose un champ stochastique  $E(\underline{x}, \theta)$  sur une base déterministe de l'espace de la manière suivante :

$$E(\underline{x}, \theta) = \bar{E}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\underline{x}) \quad (1.37)$$

$\lambda_i$  et  $\varphi_i(\underline{x})$  étant respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du noyau de l'opérateur de covariance défini par la formule suivante :

$$C_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \overline{(E(\underline{x}_1, \theta) - \bar{E}(\underline{x}_1))(E(\underline{x}_2, \theta) - \bar{E}(\underline{x}_2))} \quad (1.38)$$

$\bar{E}(\underline{x})$  étant l'espérance de  $E(\underline{x}, \theta)$ . Les  $\lambda_i$  et  $\varphi_i(\underline{x})$  sont en fait solutions de l'équation intégrale, souvent résolue numériquement :

$$\int_D C_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \varphi_i(\underline{x}_1) d\underline{x}_1 = \lambda_i \varphi_i(\underline{x}_2) \quad (1.39)$$

$D$  étant le domaine spatial sur lequel  $E(\underline{x}, \theta)$  est défini. Les variables aléatoires  $\xi_i(\theta)$  sont quant à elles non corrélées, d'espérance nulle et d'écart types unitaires se traduisant par :

$$\overline{\xi_i(\theta)} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\xi_i(\theta) \xi_j(\theta)} = \delta_{ij} \quad (1.40)$$

Ces variables aléatoires sont en fait les moyennes du champ  $E(\underline{x}, \theta)$  pondérées par les fonctions de l'espace  $\varphi_i(\underline{x})$  :

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D E(\underline{x}, \theta) \varphi_i(\underline{x}) d\underline{x} \quad (1.41)$$

L'analyse du champ stochastique se résume ainsi à l'étude, plus simple, d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes. On peut montrer que les valeurs propres  $\lambda_i$  sont des quantités décroissantes quand  $i$  augmente, et que, plus le champ à décomposer est proche du bruit blanc, plus on a besoin de termes dans la décomposition, ce qui explique qu'en pratique, comme les champs stochastiques sont assez « lisses », peu de termes sont gardés dans la décomposition de Karhunen-Loève.

**Loi normale.** Nous détaillons ici la loi normale (ou gaussienne) couramment utilisée en probabilité. Une variable aléatoire  $Y(\theta)$  suit une loi dite normale ou gaussienne lorsque sa densité de probabilité peut s'écrire sous la forme :

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.42)$$

$\mu$  et  $\sigma$  étant respectivement égaux à  $\overline{Y(\theta)}$ , l'espérance (ou moyenne), et  $\overline{(Y(\theta) - \overline{Y(\theta)})^2}$ , l'écart-type de la variable aléatoire  $Y(\theta)$ . L'importance de cette loi découle de l'énoncé du théorème limite central :

*Si l'on considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $Y_1(\theta), \dots, Y_n(\theta)$  d'espérances respectives  $\mu_k$  et d'écart-types respectifs  $\sigma_k$ , alors la loi de répartition de :*

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n Y_k(\theta) \quad (1.43)$$

*tend, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  données par :*

$$\mu = \sum_{k=1}^n \mu_k \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \quad (1.44)$$

Ce théorème explique pourquoi les paramètres structuraux sont généralement modélisés par des variables aléatoires suivant une loi normale. Plusieurs techniques sont utilisées afin d'éviter les réalisations négatives, n'ayant pas de sens physique pour les paramètres tels que la masse ou la raideur. En pratique deux techniques sont généralement employées :

- lorsque la probabilité d'occurrence d'une valeur négative est suffisamment faible (environ inférieure à 0,1%), on peut ne pas prendre en compte ces valeurs quitte à renormaliser la densité de probabilité par la suite ;

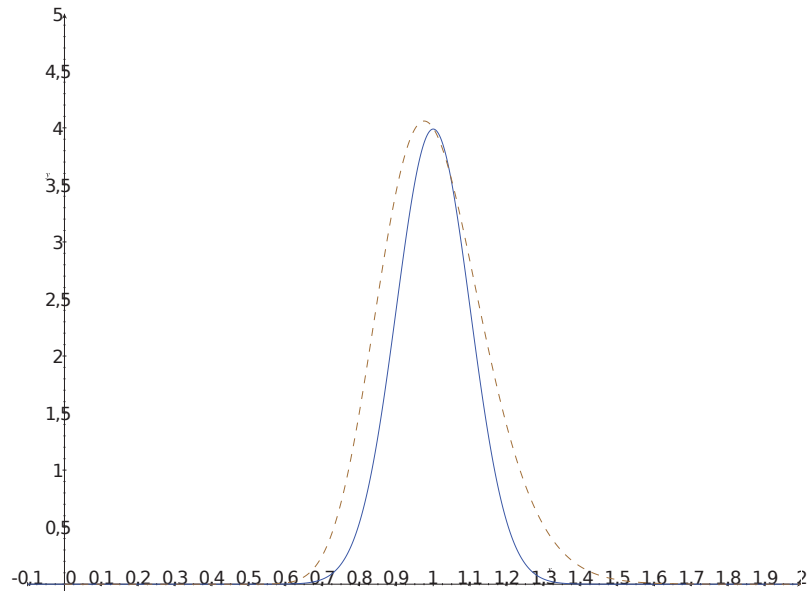
- dans le cas général, la technique consiste à choisir une loi de probabilité proche de la loi normale mais dont le domaine est  $\mathbb{R}_+^*$  : il s'agit de la loi log-normale. Cette dernière a une loi de probabilité définie par :

$$p(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(\ln y - b)^2}{4a^2}\right) \quad (1.45)$$

a et b étant des termes reliant l'espérance et l'écart-type de  $Y(\theta)$  de la façon suivante :

$$a = \sqrt{\ln\left(\frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu^2}\right)} \quad \text{et} \quad b = \ln\left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}\right) \quad (1.46)$$

La **Figure 1.26** présente les tracés des densités de probabilité d'une loi normale (trait plein) et log-normale (trait pointillé) avec  $\mu = 1$  et  $\sigma = 0,1$ .



**FIGURE 1.26:** Tracés des densités de probabilité d'une loi normale (trait plein) et log-normale (trait pointillé)

**Principe du maximum d'entropie.** Ce principe a pour but de déterminer la « meilleure » loi de probabilité parmi toutes celles qui vérifient un ensemble de contraintes (généralement traduites sur les  $n$  premiers moments statistiques). La notion d'entropie est définie dans [Shannon, 1948]. Cette méthode est intéressante lorsque la loi de probabilité d'une variable aléatoire n'est pas évidente à construire. La méthode du maximum d'entropie a quant à elle été introduite dans [Jaynes, 1957a, Jaynes, 1957b]. Des applications récentes sont présentées dans [Soize, 2001, Soize, 2006, Cottureau *et al.*, 2007].



Un exemple simple d'application consiste à déterminer une loi de probabilité sur l'intervalle  $[a; b]$ ,  $a \neq b$  avec la contrainte de normalisation suivante :

$$\int_a^b p(y)dy = 1 \quad (1.47)$$

La maximisation de l'entropie entraîne la définition de la densité de probabilité suivante :

$$p(y) = \frac{1}{b-a} \quad (1.48)$$

ce qui correspond à une loi uniforme. En effet, avec la condition (1.47), il n'y aucune raison qu'un point ait une probabilité plus élevée qu'un autre.

Nous allons maintenant aborder les techniques permettant de déterminer la réponse du modèle à partir d'une définition des variables aléatoires d'entrée.

### 5.1.2 Méthode de Monte Carlo

Une première méthode, très répandue car très simple d'application, consiste à reconstruire la réponse du système de manière statistique. De plus, ce type de méthode est très apprécié car il découple la résolution du problème géométrique du traitement des incertitudes. Ceci conduit donc à l'utilisation de méthodes non intrusives et permet ainsi l'emploi de codes éléments finis standard. L'évaluation des caractéristiques de la réponse est obtenue à partir d'un très grand nombre de calculs déterministes. En effet, on procède à plusieurs « tirages » pour lesquels un jeu de paramètres est fixé en tenant compte de la loi de probabilité et des fonctions de corrélation de chacun. Pour chaque tirage un calcul déterministe de la réponse est donc effectué. Une étude statistique permet ensuite de déterminer les premiers moments statistiques de la réponse de la structure.

Parmi les avantages de cette méthode, on peut mettre en avant le fait qu'un logiciel classique à éléments finis peut être utilisé pour réaliser le calcul des tirages. Par contre, l'inconvénient de cette technique vient généralement du fait qu'un très grand nombre de tirages est nécessaire avant d'avoir une bonne convergence des résultats de la réponse. On peut montrer que la méthode de Monte Carlo, pour un problème à une dimension, converge en  $1/\sqrt{n}$ ,  $n$  étant le nombre de tirages. Le nombre de tirages nécessaire avant convergence dépend également du nombre de variables aléatoires du problème.

Une première amélioration assez simple de cette technique consiste à paralléliser le calcul des tirages. Cette technique permet de réduire le temps de calcul jusqu'à convergence de la méthode de Monte Carlo. Des applications sont présentées dans [Johnson *et al.*, 1997, Papadrakakis et Kotsopoulos, 1999].

Les techniques de réduction de variance (Importance sampling) permettent quant à elles d'accélérer la convergence de la méthode de Monte Carlo en augmentant la densité

des réalisations dans les régions d'intérêt. Cependant, ces techniques deviennent pénalisantes comparativement à une méthode de Monte Carlo classique lorsque le nombre de variables aléatoires est trop élevé. Plus de détails sont présentés dans [Thompson, 2002].

La méthode de *Latin Hypercube Sampling* (LHS) permet de réduire le nombre de tirages requis pour la convergence. Cette technique se base sur un découpage du domaine de définition des variables en  $N$  intervalles d'égale probabilité. Un tirage est effectué dans chacun de ces intervalles, ce qui entraîne  $N$  valeurs tirées pour une variable. La même procédure est effectuée pour les  $p$  variables aléatoires du problème. Finalement, les tirages obtenus pour chaque variable sont appariés aléatoirement avec les tirages obtenus pour les autres variables. Ceci permet ainsi de former  $N$  tirages censés caractériser la réponse du système. Cette technique a été développée dans [McKay *et al.*, 1979]. Le nombre de tirages nécessaires est généralement plus faible que celui nécessaire dans la méthode de Monte Carlo classique pour un même niveau de convergence. Certaines améliorations de la méthode sont présentées dans [Helton et Davis, 2003].

La méthode de Monte Carlo peut être également améliorée en modifiant le modèle mécanique que l'on utilise. Les méthodes de surface de réponse (*Response Surface Method*, ou RSM), ou méta-modèle, s'attachent à améliorer la méthode de Monte Carlo en remplaçant le modèle mécanique par un modèle approché plus rapide à calculer. On retrouve les premiers travaux dans [Faravelli, 1989].

En pratique, le modèle mécanique initial est calculé pour différents jeux de paramètres. Avec suffisamment de points calculés, on peut construire une surface de réponse du système par interpolation. Certains exemples sont présentés dans [Schultze *et al.*, 2001, Hemez *et al.*, 2001, Boucard et Champaney, 2003].

### 5.1.3 Méthode des éléments finis stochastiques

Cette méthode a été développée pour mieux associer la méthode des éléments finis avec la théorie des probabilités. Les éléments finis stochastiques (*Stochastic Finite Element Method* ou SFEM) considèrent l'aléa comme une nouvelle dimension du problème mécanique. L'intérêt est que l'on peut traiter la discrétisation spatiale avec la méthode des éléments finis classique. Pour résoudre le problème sur la dimension de l'aléa, il existe deux grandes méthodes classiquement utilisées :

- une résolution du problème par perturbation ;
- une résolution du problème par décomposition sur le chaos polynomial.

Ces techniques sont cependant moins répandues car la résolution du problème doit être effectuée grâce à des codes dédiés complexes, ce qui rend ces méthodes intrusives, et l'utilisation des codes à éléments finis standard quasiment impossible.

**Méthode des éléments finis stochastiques par perturbation.** Cette méthode a été développée dans [Beacher et Ingra, 1981]. La première étape de la méthode consiste à discrétiser dans l'espace les champs stochastiques utilisés. Ensuite, on doit approcher les

fonctions des variables aléatoires avec un développement en séries de Taylor autour de leur valeur moyenne. On suppose ici que les variables varient peu autour de leur valeur moyenne. Si l'on souhaite résoudre un problème se traduisant par une équation de la forme  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\theta}) = F(\boldsymbol{\theta})$ , un développement à l'ordre 2 par rapport aux  $n$  variables aléatoires  $\varepsilon_k$  s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^I \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{II} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (1.49)$$

$$U = U^0 + \sum_{i=1}^n U_i^I \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}^{II} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (1.50)$$

$\mathbf{K}^0$ ,  $\mathbf{K}_i^I$  et  $\mathbf{K}_{ij}^{II}$  sont respectivement la moyenne, et les dérivées première et seconde de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  par rapport aux variables aléatoires.  $U^0$ ,  $U_i^I$  et  $U_{ij}^{II}$  sont les quantités analogues pour le champ de déplacement solution  $U$ .

La résolution est alors effectuée ordre par ordre. Pour un développement à l'ordre 2,  $\forall (i, j) \in [1, \dots, n]^2$ , on obtient les équations suivantes par identification terme à terme :

$$\mathbf{K}^0 U^0 = F \quad (1.51)$$

$$\mathbf{K}^0 U_i^I = -\mathbf{K}_i^I U^0 \quad (1.52)$$

$$\mathbf{K}^0 U_{ij}^{II} = -\mathbf{K}_i^I U_j^I - \mathbf{K}_j^I U_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} U^0 \quad (1.53)$$

Des applications ont été effectuées pour des modélisations linéaires et non linéaires. Pourtant, de par la méthode de calcul utilisant une linéarisation, les résultats ne sont pertinents que dans une petite plage de variations. Certains des travaux réalisés avec cette méthode sont présentés dans [Liu *et al.*, 1986a, Liu *et al.*, 1986b, Liu *et al.*, 1988] et plus récemment dans [Elishakoff *et al.*, 1995, Muscolino *et al.*, 2000].

**Méthode spectrale des éléments finis stochastiques.** Une autre méthode de résolution utilise la projection sur le « chaos polynomial » de la partie aléatoire de la réponse du système. Cette méthode est généralement nommée méthode spectrale des éléments finis stochastiques (ou *Spectral SFEM*). Elle se découpe en deux parties principales.

La première étape consiste à décomposer les champs stochastiques du problème par une décomposition de Karhunen-Loève (*cf.* équation (1.37)). Si l'on considère que le module d'Young est représenté par un champ  $E(\underline{x}, \boldsymbol{\theta})$ , alors il peut s'écrire de la forme suivante :

$$E(\underline{x}, \boldsymbol{\theta}) = \overline{E(\underline{x})} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\boldsymbol{\theta}) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\underline{x}) \quad (1.54)$$

$\xi_i(\boldsymbol{\theta})$  étant des variables aléatoires non corrélées d'espérances nulles et d'écart-types unitaires. On suppose dans la suite que le champ  $E(\underline{x}, \boldsymbol{\theta})$ , mais également les variables  $\xi_i(\boldsymbol{\theta})$  suivent une loi normale.

La seconde étape consiste à utiliser une base orthonormée de variables aléatoires  $\xi_i(\boldsymbol{\theta})$

pour décomposer  $\{U(\theta)\}$ , vecteur des déplacements nodaux issu de la discrétisation éléments finis. On peut montrer que le vecteur  $\{U(\theta)\}$  peut s'écrire sous la forme d'une somme de polynômes de variables  $\xi_i(\theta)$  de la manière suivante :

$$\{U(\theta)\} = a_0\Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}\Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}\Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (1.55)$$

$\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_p}(\theta))$  étant le chaos polynomial d'ordre  $p$  (cf. [Wiener, 1938]). La procédure d'obtention de ces polynômes est présentée dans [Ghanem et Spanos, 2002]. En pratique, on réordonne les termes sous la forme d'une somme que l'on tronque après le  $(P+1)^{i\grave{e}me}$  terme de la façon suivante :

$$\{U(\theta)\} = \sum_{j=0}^P U_j \Psi_j(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_N}(\theta)) = \sum_{j=0}^P U_j \psi_j(\theta) \quad (1.56)$$

en ne prenant en compte que les  $N$  premières variables aléatoires  $\xi_i(\theta)$ . La relation donnant le nombre de  $P+1$  termes, de la relation (1.56) en fonction de l'ordre  $p$  et de la dimension  $N$  du chaos est la suivante :

$$P+1 = 1 + \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (N+k) \quad (1.57)$$

Par exemple, pour  $P+1 = 10$  polynômes avec un ordre  $p = 2$  et une dimension  $N = 3$ , les polynômes s'expriment de la façon suivante :

$$\{\Psi_j\} = \{1, \xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \xi_3(\theta), \xi_1(\theta)\xi_2(\theta), \xi_1(\theta)\xi_3(\theta), \xi_2(\theta)\xi_3(\theta), \xi_1(\theta)^2 - 1, \xi_2(\theta)^2 - 1, \xi_3(\theta)^2 - 1\} \quad (1.58)$$

Ces polynômes vérifient les propriétés suivantes :

$$\overline{\psi_j(\theta)} = 0 \quad \forall j \geq 1 \quad \text{et} \quad \overline{\psi_j(\theta)\psi_k(\theta)} = \overline{\psi_j(\theta)^2} \delta_{jk} \quad (1.59)$$

La détermination de la solution  $\{U(\theta)\}$  revient donc à calculer les vecteurs  $U_j$  de la formule (1.56).

La discrétisation du problème mène à la construction d'une matrice de rigidité globale issue de l'assemblage de matrices élémentaires sous la forme suivante :

$$K_E(\theta) = \int_E B^T C(\underline{x}, \theta) B \, dE \quad (1.60)$$

$B$  étant la matrice reliant les déformations au vecteur des inconnues nodales, et  $C(\underline{x}, \theta)$  la matrice de relation de comportement faisant intervenir le champ  $E(\underline{x}, \theta)$ . La décomposi-

tion de Karhunen-Loève de ce champ entraîne la formulation suivante :

$$K_E(\theta) = \sum_{i=0}^N \xi_i(\theta) K_{Ei} \quad (1.61)$$

$K_{Ei}$   $i > 1$  étant l'intégration spatiale sur  $E$  de la quantité  $\sqrt{\lambda_i} \phi_i(x)$  issue de la décomposition, où l'on suppose que  $K_{E0} = \overline{K_E}$  et  $\xi_0(\theta) = 1$ .

Le problème éléments finis, qui revient à résoudre un système de la forme  $KU = F$ , nous conduit à résoudre l'équation suivante :

$$\sum_{j=0}^P \left( \sum_{i=0}^N \xi_i(\theta) K_i \right) \psi_j(\theta) U_j = F \quad (1.62)$$

En multipliant cette expression par  $\psi_k(\theta)$  et en calculant son espérance, on obtient la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^N \overline{\xi_i(\theta) \psi_j(\theta) \psi_k(\theta) K_i U_j} = \overline{F \psi_k(\theta)} \quad \text{avec } k = 0, \dots, P \quad (1.63)$$

Le système par blocs suivant doit finalement être résolu :

$$\begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & \cdots & K_{0P} \\ K_{10} & K_{11} & \cdots & K_{1P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{P0} & K_{P1} & \cdots & K_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

chaque bloc étant défini par la formule suivante :

$$K_{kj} = \sum_{i=0}^N \overline{\xi_i(\theta) \psi_j(\theta) \psi_k(\theta) K_i}, \quad \forall \{j, k\} \in \llbracket 0; P \rrbracket^2 \quad (1.65)$$

Plusieurs techniques d'assemblages de matrices et de résolutions sont proposées dans [Ghanem et Kruger, 1996, Ghanem, 1999].

#### 5.1.4 Autres méthodes stochastiques

**Les méthodes fiabilistes.** Ces méthodes consistent en une approximation du domaine de défaillance. Elles permettent une diminution des coûts de calcul, comparativement à une méthode de Monte Carlo, mais engendrent une perte de précision dans certains cas. Pour un problème donné avec  $n$  paramètres incertains, modélisés par  $n$  variables aléatoires  $X_i$  de densité de probabilité conjointe  $p(x_1, \dots, x_n)$  et par une fonction de performance

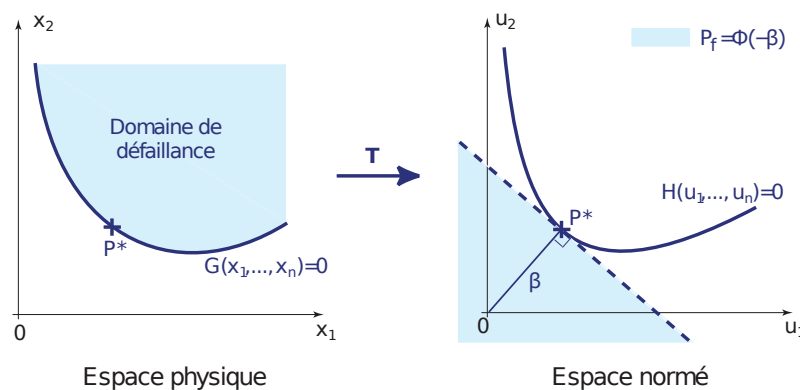
$G(x_1, \dots, x_n)$ , la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \int_{G(x_1, \dots, x_n) \leq 0} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.66)$$

L'évaluation directe de cette probabilité de défaillance par une méthode de Monte Carlo est quasi impossible. En effet, pour estimer correctement des probabilités  $P_f$  de l'ordre de  $10^{-m}$ , il faudrait effectuer de l'ordre de  $10^{m+2}$ , voire  $10^{m+3}$ , tirages. Or on s'intéresse ici à des événements de très faible occurrence, pour lesquels on a généralement  $m \geq 4$ . De plus, cette technique nécessite également la connaissance de la densité conjointe de probabilité  $p(x_1, \dots, x_n)$ , qui n'est pas toujours simple à établir.

L'état limite, correspondant à  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ , est défini classiquement à partir du calcul de l'indice de fiabilité. Les différentes étapes de calcul, présentées dans [Hasofer et Lind, 1974], sont les suivantes :

- transformer les variables initiales en variables aléatoires normales centrées par une transformation de Rosenblatt [Rosenblatt, 1952] ;
- chercher le point de défaillance le plus probable, solution de la minimisation de l'indice de fiabilité, correspondant à la distance à l'origine de la fonction d'état limite dans l'espace des variables normées ;
- calculer la probabilité de défaillance, par approximation autour du point de défaillance le plus probable. Détaillons ci-dessous les approximations les plus fréquentes :
  - l'approximation la plus simple est du premier ordre (*First Order Reliability Method* ou FORM) (cf. **Figure 1.27**) ;
  - une approximation plus précise consiste à approcher la géométrie de la fonction d'état-limite au voisinage du point de défaillance le plus probable par une courbe plus riche (*Second Order Reliability Method* ou SORM) ;
  - on peut également envisager d'utiliser une approximation à l'aide des surfaces de réponses, couplées avec un plan d'expérience [Lemaire, 1997].



**FIGURE 1.27:** Principe des méthodes fiabilistes : exemple de l'approximation FORM, d'après [Puel, 2004]

Une présentation générale des méthodes fiabilistes est proposée dans [Ditlevsen et Madsen, 1996].

**Les méthodes non paramétriques.** Les méthodes probabilistes présentées précédemment sont basées sur des approches paramétriques et permettent donc de représenter correctement les variations des paramètres de la modélisation. Cependant, pour des systèmes suffisamment complexes, cette hypothèse peut se révéler être excessive. En effet, dans des zones faisant par exemple intervenir des liaisons, certains phénomènes ne sont pas pris en compte du fait de l'approche simplifiée de la modélisation. Dans ce cas, le choix de paramètres se révèle être un peu artificiel. Il faut pouvoir prendre en compte les incertitudes de modélisation. Les travaux réalisés dans [Soize, 2000, Soize, 2001] permettent d'aborder ce thème de recherche.

Avec cette approche, les matrices généralisées sont remplacées par des matrices aléatoires construites à partir du principe du maximum d'entropie. Plusieurs applications de cette méthode sont présentées dans [Soize, 2006, Soize, 2005].

## 5.2 Méthodes non stochastiques en calcul de structure

Les méthodes présentées ci-dessus sont principalement basées sur la théorie des probabilités. Dans la partie suivante, nous nous intéressons aux méthodes n'utilisant pas le point de vue stochastique. Bien que moins répandues, ces méthodes ont pourtant quelques applications dans le domaine de la mécanique des structures [Moens et Vandepitte, 2005]. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes qualifiées de non probabilistes.

### 5.2.1 Théorie des intervalles

La théorie des intervalles permet de traiter et de propager des incertitudes sur des paramètres d'entrée. Cette méthode n'utilise pas de modélisation de l'aléa par des variables aléatoires contrairement aux méthodes détaillées précédemment. Elle fait donc partie des méthodes dites « non stochastiques ». Beaucoup moins complexe et moins lourde à utiliser, cette méthode possède néanmoins de gros inconvénients que l'on illustrera par la suite.

**L'arithmétique.** Elle est basée sur une arithmétique développé par [Moore, 1962] où une opération donnée  $*$   $\in \{+, -, \times, \div, \dots\}$  entre deux intervalles  $[I]$  et  $[J]$  peut être définie par les formules suivantes :

- $[I] + [J] = [I^-; I^+] + [J^-; J^+] = [I^- + J^-; I^+ + J^+]$
- $[I] - [J] = [I^-; I^+] - [J^-; J^+] = [I^- - J^+; I^+ - J^-]$
- $[I] \times [J] = [\min(I^- J^-, I^- J^+, I^+ J^-, I^+ J^+); \max(I^- J^-, I^- J^+, I^+ J^-, I^+ J^+)]$
- $1/[I] = [1/I^+, 1/I^-]$
- ...

On peut également appliquer des fonctions à ces intervalles. Une fonction  $f$  à plusieurs variables a alors pour image :

$$f([I_1], \dots, [I_n]) = \{f(x_1, \dots, x_n) | x_i \in [I_i], i = 1, \dots, n\} \quad (1.67)$$

Dans le cas général, cette image n'est pas un intervalle. On lui associe alors le plus petit intervalle contenant  $f([I_1], \dots, [I_n])$  noté  $\square f([I_1], \dots, [I_n])$ .

Le fait que les résultats de cette arithmétique encadrent toujours la solution réelle peut être démontré. En effet, les opérations de l'arithmétique sur les intervalles supposent toujours que les variables sont indépendantes lorsqu'elles varient sur leur intervalle. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée (*i.e.* il existe une relation mathématique entre les variables), il existera alors une ou plusieurs parties de l'intervalle résultat qui ne seront pas incluse(s) dans la solution exacte. Dans ce cas, le résultat de l'opération risque d'encadrer de façon trop large l'intervalle exact.

On peut prendre comme exemple l'évaluation de l'intervalle d'incertitude de l'expression  $x(10 - x)$  lorsque  $x \in [4; 6]$  :

$$10 - x \in [10; 10] - [4; 6] = [4; 6] \quad (1.68)$$

$$x(10 - x) \in [4; 6] \cdot [4; 6] = [16; 36] \quad (1.69)$$

Une étude simple montre que l'intervalle exact de variation de  $x(10 - x)$  est  $[24; 25]$ . La grande différence entre ces deux intervalles est due à la relation inverse entre les quantités  $x$  et  $(10 - x)$ , qui n'est pas prise en compte par la multiplication des intervalles.

**Résolution de systèmes linéaires d'équations d'intervalles.** Nous venons de définir les intervalles sur des scalaires. Nous pouvons à présent définir les vecteurs intervalles et les matrices intervalles. Les problèmes de mécanique modélisés par éléments finis et incluant des paramètres incertains physiques ou géométriques s'écrivent généralement sous la forme :

$$A\{x\} = \{b\} \quad (1.70)$$

$A \in [A]$  et  $\{b\} \in [b]$  étant respectivement une matrice intervalle et un vecteur intervalle. Les travaux de [Chen et Ward, 1997] définissent la solution exacte du problème par :

$$\Sigma_{\exists\exists}([A], [b]) = \{x \in \mathbb{R}^n | (\exists A \in [A]), (\exists \{b\} \in [b]) / A\{x\} = \{b\}\} \quad (1.71)$$

Comme dans le cas de fonctions d'intervalles, cette solution n'est généralement pas un vecteur intervalle. On recherche le plus souvent le plus petit vecteur intervalle contenant la solution  $\Sigma_{\exists\exists}([A], [b])$  ce qui revient à trouver l'ensemble des  $\{x\}$  tels que :

$$[A][x] = [b] \quad (1.72)$$

Plusieurs algorithmes résolvent ce type de problème. On pourra citer par exemple l'algorithme du pivot de Gauss qui peut être adapté dans le cas où les coefficients sont des



intervalles. La méthode qui nous intéresse est une méthode itérative basée sur le théorème du point fixe : la méthode d'inclusion de Rump [Rump, 1983]. L'idée de cette méthode se base sur le problème suivant :

Pour une matrice non singulière  $R$  arbitraire et un vecteur  $x_0$  arbitraire, le problème :

$$A\tilde{x} = b \quad (1.73)$$

est équivalent à

$$\tilde{x} - x_0 = \underbrace{(I_d - RA)}_G (\tilde{x} - x_0) + \underbrace{R(b - Ax_0)}_g \quad (1.74)$$

avec

$$\tilde{x} = x_0 + x^* \quad (1.75)$$

où  $x^*$  est solution de

$$x^* = Gx^* + g \quad (1.76)$$

En pratique, on prend  $R \approx A^{-1}$  et  $x_0 = Rb$  de sorte que  $G$  et  $g$  aient une norme très petite vis-à-vis de celles de  $A$  et  $x_0$ , mais également de sorte que  $x^*$  soit proche de 0. Tout l'algorithme de Rump est ensuite basé sur le traitement de l'équation (1.76).

L'inclusion de Rump suppose un vecteur intervalle  $X$  vérifiant :

$$\{G \cdot X + g\} \subset X^0 \quad (1.77)$$

avec  $\{G \cdot X + g\} = \{Gx + g/x \in X\}$  et  $X^0$  l'ouvert de  $X$ . En utilisant ensuite le théorème du point fixe, l'équation suivante :

$$x^* = Gx^* + g \quad (1.78)$$

admet une unique solution  $x^* \in \{G \cdot X + g\}$ . La méthode de vérification de l'inclusion (1.77) est décrite ci-dessous :

Si l'inclusion

$$\{G \odot X \oplus g\} \subset X^0 \quad (1.79)$$

est vérifiée (avec  $\odot$  et  $\oplus$  les opérations issues de l'arithmétique sur les intervalles) alors l'inclusion (1.77) est également vérifiée puisque

$$\{G \cdot X + g\} \subset \{G \odot X \oplus g\} \quad (1.80)$$

grâce aux définitions des opérations sur les intervalles.

Bien que cet algorithme se démarque des autres de par son efficacité et sa rapidité, il continue à surestimer de façon notable les bornes du vecteur intervalle résultat. Une amélioration a été apportée par [Dessombz *et al.*, 2001]. Elle consiste à garder en facteur

tous les intervalles d'incertitudes et à ne pas les propager à l'intérieur d'une matrice ou d'un vecteur. Cette amélioration décrit les vecteurs et matrices intervalles comme suit :

$$[A] = A_0 + \sum_{n=1}^N [\varepsilon_n] A_n \quad \text{et} \quad [b] = \{b_0\} + \sum_{p=1}^P [\beta_p] \{b_p\} \quad (1.81)$$

$[\varepsilon_n]$  et  $[\beta_p]$  étant les intervalles d'incertitudes,  $A_0$  et  $b_0$  la matrice et le vecteur centre et  $A_n$  et  $b_p$  les matrices et les vecteurs rayon.

### 5.2.2 Ensembles flous

La théorie des ensembles flous (*fuzzy sets theory*) est basée sur la logique floue (*fuzzy logic*) initiée dans [Zadeh, 1965]. Ce type de logique autorise la prise en compte de jugements humains, ou de concepts « linguistiques », qui doivent être intégrés dans des raisonnements mathématiques.

L'application de cette théorie aux calculs de structures a été développée dans plusieurs travaux tels que l'identification de modèle [Hanss *et al.*, 2002] ou encore la dynamique des structures [Lallemand *et al.*, 1999, Ohayon *et al.*, 2001, Massa *et al.*, 2004]. On peut noter également la création de la méthode des éléments finis flous (*Fuzzy Finite Element Method* ou FFEM) [Rao et Sawyer, 1995]. Pour cette méthode, la réponse de la structure est calculée avec l'arithmétique des intervalles. Pour lutter contre la tendance « pessimiste » de cette dernière, on peut citer des méthodes adaptées comme les dérivation de FRF (*Frequency Response Function*) « floues » à partir des paramètres incertains du modèle (*cf.* [Moens et Vandepitte, 2005]).

### 5.2.3 Autres méthodes

On retrouve également parmi cette famille de techniques, les modèles convexes d'incertitudes [Ben-Haim et Elishakoff, 1990, Ben-Haim, 2005, Ben-Haim, 2006]. Cette théorie a également été appliquée à la validation de modèles dans [Ben-Haim et Hemez, 2004]. Le cadre des modèles convexes d'incertitudes permet de préciser la capacité d'intégrer de l'information nouvelle dans le cas où elle n'est pas déterministe. D'une façon différente de ce que peuvent décrire les ensembles flous ou aléatoires, l'incertitude présente dans l'information est ici vue comme la lacune d'information entre ce qui est connu et ce qui devrait l'être pour rendre possible une prise de décision fiable. L'autre dénomination des modèles convexes d'incertitudes est ainsi les modèles de lacune d'information (*info-gap models*).

Nous pouvons également citer d'autres techniques moins utilisées en calcul de structure comme la théorie généralisée de l'information [Klir, 2004] et la théorie des ensembles aléatoires basée sur la théorie des preuves et définie dans [Dempster, 1968] et [Shafer, 1976].

Nous citerons également la théorie des méconnaissances (*Lack Of Knowledge (LOK) theory*) [Ladevèze *et al.*, 2006b] développée au LMT Cachan à laquelle le **Chapitre 3** sera dédié. Cette méthode, raisonnant sur une représentation des variations découlée par

sous-structures, permet de prendre en compte les résultats issus d'essais expérimentaux pour améliorer le modèle de méconnaissances.

#### 5.2.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons donc pu survoler un panel de méthodes permettant de prendre en compte différents types de variations, d'incertitudes en calcul de structure. L'objectif est de choisir une méthode convenable pour une application dans le dimensionnement de structure à une échelle globale. Nous avons pu remarquer que les méthodes actuelles les plus populaires sont principalement basées sur la théorie des probabilités. En effet, les méthodes issues par exemple des simulations de Monte Carlo sont très simples d'implémentation et d'utilisation. Pourtant, ces méthodes montrent rapidement leurs limites dès lors qu'un grand nombre de paramètres aléatoires est utilisé. De même, de nombreuses méthodes dites non stochastiques ont été développées dans le domaine de la mécanique des structures. Leurs utilisations restent toutefois limitées pour l'instant.

Dans ce contexte de prise en compte des variabilités d'un modèle de structure, nous avons choisi de mettre en œuvre la théorie des méconnaissances. En effet, elle permet de raisonner par sous-structures et ainsi de simplifier la propagation de ces variabilités. Nous verrons également que comparativement à une simulation de Monte Carlo par exemple, cette théorie ne nécessite que très peu de calculs pour obtenir une estimation de variation sur une quantité d'intérêt.

## 6 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de mettre en place les différents points nécessaires à l'élaboration d'une méthode de dimensionnement des assemblages de fixations avec prise en compte des incertitudes. Les principales étapes sont le choix de la méthode de dimensionnement, le choix du modèle mécanique et le choix de la méthode de prise en compte des incertitudes. Par ailleurs, les méthodes de prise en compte des incertitudes dépendent fortement du modèle déterministe choisi, ce qui nous a conduit à insérer un recalage de modèle déterministe dans la stratégie. Les méthodes associées à cette étape seront également étudiées.

Le premier point a consisté à choisir la méthode globale de dimensionnement. Les structures boulonnées ou rivetées étudiées sont des structures de grande échelle. Pourtant, elles présentent des phénomènes locaux très complexes du fait de la présence des fixations. Ce problème multiéchelle peut être résolu par différentes méthodes présentées précédemment. La méthode retenue, l'analyse descendante, permet de traiter le problème multiéchelle grâce à une résolution globale linéaire suivie d'un zoom réalisé sur une zone d'intérêt utilisant les données issues de l'analyse globale. Cette réanalyse locale est appliquée en utilisant des modèles complexes prenant en compte les phénomènes complexes locaux. L'objectif est d'obtenir une estimation des transferts de charges et la position des

fixations les plus chargées lors de l'analyse globale, avec prise en compte des phénomènes aléatoires. Nous ne traitons pas ici, la deuxième partie de l'analyse descendante qui consiste à effectuer une réanalyse locale avec un modèle plus complexe.

La deuxième étape a résidé dans le choix du modèle mécanique pour la représentation de l'assemblage de fixations. Les modèles existants sont des plus simples, comme les modèles semi-empiriques, aux plus compliqués, tels que les modèles 3D complexes intégrant de nombreux phénomènes non-linéaires. Étant donné la grande taille des structures étudiées, l'utilisation des modèles les plus complexes serait trop coûteuse dans l'objectif d'obtenir une estimation des transferts de charge et des positions des fixations les plus chargées. Pourtant, l'utilisation des modèles semi-empiriques ne laisserait aucune possibilité de recalage du modèle de fixation vis-à-vis d'essais expérimentaux. En effet, ces modèles dépendent uniquement de la géométrie, des matériaux et du type de fixation représentée. Notre choix s'est donc orienté vers une modélisation de type plaque et connecteur linéaire qui permettra d'une part une application en très grand nombre, et d'autre part un recalage pour représenter au mieux la réalité observée.

La troisième partie concerne le choix de la méthode de recalage du modèle mécanique déterministe vis-à-vis de données expérimentales. Parmi les deux grandes familles de type de recalage (directe ou indirecte), l'utilisation d'une méthode indirecte permet de contrôler les paramètres des modèles de fixation, contrairement aux méthodes directes qui agissent directement sur les opérateurs et sans considération physique. Le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement et développée au LMT Cachan a finalement été choisie. Il permet de raisonner naturellement par sous-structure, ce qui peut être utile lors de l'étude d'un grand nombre de fixations.

La dernière étape consiste à choisir la méthode de prise en compte des incertitudes. Sachant que l'objectif est d'obtenir une estimation des variations possibles sur des quantités issues de l'échelle globale, l'application d'une méthode à éléments finis stochastiques, souvent intrusive, ne sera pas choisie ici. En effet, l'utilisation de code de calcul standard est préférée pour une intégration plus aisée en bureau d'étude. Cependant, les méthodes non intrusives stochastiques basées sur des simulations de Monte Carlo montrent rapidement leur limite lorsque le nombre de paramètres stochastiques augmente. Notre choix s'est finalement porté sur la théorie des méconnaissances également développée au LMT Cachan. Cette méthode hybride permet de sous-structurer les sources d'incertitudes ce qui rend le traitement des ensembles de fixations plus simple. Elle permet également de prendre en compte les variations observées sur les familles de structures réelles pour améliorer la modélisation de l'incertain.

Les chapitres suivants ont pour tâche de présenter plus en détail les méthodes utilisées. Des applications seront menées dans chacun de ces chapitres.

Le **Chapitre 2** présente la méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement. Une étude comparative concernant l'influence du type de modèle déterministe utilisé sur le résultat du recalage sera également présentée. Ce chapitre proposera un modèle

déterministe recalé d'assemblage de fixations qui pourra être utilisé pour la représentation des variations.

Le **Chapitre 3** présente la méthode de prise en compte des incertitudes basée sur la théorie des méconnaissances. Cette théorie sera appliquée sur le modèle déterministe pour former un modèle avec méconnaissances. Ce modèle délivrant des informations sur les variations de comportement d'une famille d'assemblages de fixations sera recalé sur des données issues de mesures expérimentales. Une application est présentée sur un assemblage de fixations employé dans le domaine aéronautique.

Le **Chapitre 4** présente une application de la stratégie sur une structure souple, assemblée à une structure rigide en plusieurs points par des pattes de fixation boulonnées. Un modèle avec méconnaissances sera associé à chaque patte de fixation. L'objectif sera d'observer l'influence des défauts de positionnement des ensembles boulonnés sur les efforts résiduels dans les fixations. Le résultat obtenu sera analysé comparativement à une simulation de Monte Carlo.

# Chapitre 2

## Recalage de modèle déterministe

*La stratégie de représentation de famille de structure proposée ici se base sur un modèle déterministe. Dans ce second chapitre, le choix et également la validation de ce modèle vont être étudiés afin de proposer une stratégie efficace. La validation du modèle est effectuée ici par un recalage en erreur en relation de comportement [Ladevèze et Chouaki, 1999] et permet ainsi de mieux représenter les données issues d'un ensemble de structures. L'efficacité du recalage sera également étudiée par rapport au choix du modèle de fixation.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Recalage de modèle</b>	<b>57</b>
1.1	Le problème de référence	57
1.2	L'erreur en relation de comportement	58
1.3	L'erreur en relation de comportement modifiée	60
1.4	Minimisation de l'erreur	61
1.5	L'algorithme de minimisation	63
<b>2</b>	<b>Efficacité du recalage</b>	<b>64</b>

2.1	Géométrie étudiée . . . . .	64
2.2	Le problème unidimensionnel . . . . .	64
2.3	Les données expérimentales . . . . .	65
2.4	Application du recalage . . . . .	66
2.5	Le modèle rigidifié proposé . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Application à une structure aéronautique . . . . .</b>	<b>79</b>
3.1	Géométrie étudiée . . . . .	79
3.2	Les données expérimentales . . . . .	79
3.3	Application du recalage . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>85</b>

---

# 1 Recalage de modèle

Dans le chapitre précédent a été soulevé le problème de la qualité de représentation du modèle déterministe choisi par rapport à la famille de structure de fixations étudiée. En effet, le modèle déterministe choisi influe fortement sur la qualité des résultats estimés par le modèle avec méconnaissances. Le type de modèle utilisé pour la représentation des assemblages boulonnés ainsi que la méthode permettant de valider ce modèle ont été choisis au chapitre précédent. Ce second chapitre a pour premier objectif de détailler la méthode de recalage employée. Dans un second temps, une étude est faite concernant l'efficacité du processus de recalage. Une modification du modèle choisi pour les fixations est ensuite proposée afin d'améliorer cette efficacité. Enfin, une application est effectuée sur un assemblage boulonné dont la géométrie est issue de l'aéronautique.

Le modèle associé aux plaques constituant l'assemblage boulonné est considéré comme relativement bien connu. Le comportement des connecteurs représentant les fixations est supposé être le seul paramètre incertain nécessitant un recalage. En effet, les modèles semi-empiriques, grandement utilisés dans l'industrie, ne tiennent pas compte de l'influence du frottement, de la précharge de la fixation ou encore de la nature et de la direction du chargement. Il paraît donc nécessaire, lorsque cela est possible, de recalculer les paramètres du comportement du connecteur afin d'obtenir un modèle « moyen » représentant correctement l'ensemble des données expérimentales. Pour cela, nous avons donc choisi d'utiliser le recalage en erreur en relation de comportement. Le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement a tout d'abord été développé pour les problèmes de dynamique libre et forcée [Ladevèze et Chouaki, 1999]. La méthode a également été adaptée aux problèmes non-linéaires matériau et de contact par l'introduction d'une erreur en dissipation [Chouaki *et al.*, 2000]. Plus récemment, des travaux ont été effectués sur la localisation et le dimensionnement de fissures multiples [Faverjon et Sinou, 2008] ainsi que sur le recalage basé sur des mesures incertaines [Faverjon *et al.*, 2009].

Dans cette étude, le recalage est appliqué à une structure soumise à un chargement statique. Le recalage est effectué grâce à des données expérimentales (ou simulées), généralement des déplacements ou des chargements, correspondant à des capteurs placés en différents points de la structure.

## 1.1 Le problème de référence

Les problèmes éléments finis étudiés ici sont tous résolus par des méthodes standards. Le problème de référence (*cf.* **Figure 2.1**) considère une structure occupant le domaine  $\Omega$  pouvant être découpée en sous-structures  $E$ . La frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est soumise à des déplacements imposés  $\underline{U}_d$  sur une partie de la frontière, notée  $\partial_1\Omega$ , et à une densité surfacique d'effort  $\underline{F}_d$  sur la partie  $\partial_2\Omega$  complémentaire de  $\partial_1\Omega$ . Enfin, une densité volumique d'effort  $\underline{f}_d$  est appliquée sur le domaine  $\Omega$ . Les espaces dans lesquels seront recherchés le déplacement  $\underline{U}(\underline{M})$  et la contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{M})$  seront notés respectivement :  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{S}$ . Le problème de référence s'écrit :

Trouver  $\underline{U}(\underline{M})$  et  $\underline{\sigma}(\underline{M})$ ,  $\underline{M} \in \Omega$  vérifiant :



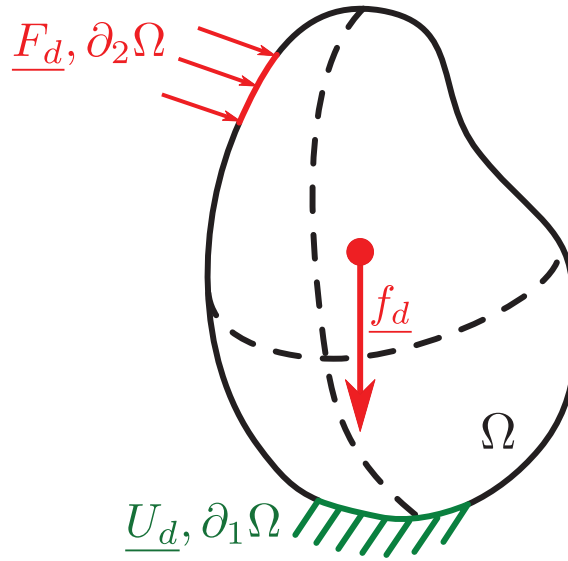


FIGURE 2.1: Milieu étudié

- les conditions aux limites,

$$\underline{U}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad (2.1)$$

$$\underline{U} \in \mathcal{U} \quad (2.2)$$

- les équations d'équilibre,

$$\begin{aligned} \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_0, \\ - \int_{\Omega} \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)) d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\underline{\sigma} \in \mathcal{S} \quad (2.4)$$

avec  $\underline{\varepsilon}(\underline{U}) = \frac{1}{2} [\text{grad}\underline{U} + (\text{grad}\underline{U})^T]$  et  $\mathcal{U}_0 = \{\underline{U} \text{ nul sur } \partial_1\Omega, \underline{U} \in \mathcal{U}\}$ .

- les relations de comportement,

$$\forall \underline{M} \in \Omega, \quad \underline{\sigma} = \mathbb{K}\underline{\varepsilon}(\underline{U}) \quad (2.5)$$

## 1.2 L'erreur en relation de comportement

À partir de la définition du problème de référence, on peut généralement remarquer que certaines équations sont plus fiables que d'autres. La construction de l'erreur en relation de comportement est basée sur l'idée d'une séparation des équations du problème en une partie fiable et une partie moins fiable. Pour le problème traité dans cette étude, la séparation suivante est faite :

- **les équations fiables**

- les conditions aux limites
- les relations d'équilibre
- **les équations moins fiables**
  - les relations de comportement. Ici, on distinguera le comportement de la structure (plaque) du comportement des connecteurs.

À partir de la séparation des équations précédentes, on définit :

- l'admissibilité : les inconnues du problème sont dites admissibles si elles vérifient les équations fiables du problème :

$$s = (\underline{U}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{S}_{ad} \quad (2.6)$$

- l'erreur en relation de comportement : cette erreur représente un résidu sur les équations moins fiables. Elle est nulle si ces équations sont vérifiées ou positive dans le cas contraire :

$$\xi^2(s) \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\xi^2(s) = 0 \iff \text{les relations de comportement sont vérifiées} \quad (2.8)$$

$\xi^2(s)$  étant l'erreur en relation de comportement. Avec les définitions précédentes, le problème de référence peut être réécrit sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } s = (\underline{U}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{S}_{ad} \\ \text{minimisant } \xi^2(s') \text{ avec } s' \in \mathcal{S}_{ad} \end{array} \right.$$

Dans le cadre du problème de référence, deux approches permettent de construire l'erreur en relation de comportement :

- l'erreur au sens de Drucker : la relation de comportement est écrite sous la forme de fonctionnelles. La positivité de l'erreur dépend de deux conditions appelées conditions de stabilité de Drucker. Ces conditions sont vérifiées pour une large classe de comportements de matériaux et l'erreur est construite sur l'ensemble des relations de comportement ;
- l'erreur en dissipation : la relation de comportement est écrite en introduisant des variables internes. La positivité de l'erreur se base sur le second principe de la thermodynamique. L'erreur est construite uniquement sur les lois d'évolution, alors que les lois d'état sont introduites dans l'admissibilité.

Dans la suite de l'étude, le détail et l'utilisation de l'erreur au sens de Drucker seront présentés. On considère également que les données du problème (conditions aux limites) imposées sont fiables. Un couple  $s = (\underline{U}, \underline{\sigma})$ , défini sur  $\Omega$ , est admissible s'il vérifie les équations fiables, *i.e.* les conditions aux limites et les équations d'équilibre. L'espace correspondant est désigné par  $\mathcal{S}_{ad}$ . Dans un tel couple, on distingue deux types de quantité :

- une quantité « statique »  $\underline{\sigma}$  noté  $\underline{\sigma}_s$  ;
- une quantité cinématique  $\underline{U}$  noté  $\underline{U}_c$ .

En utilisant les relations de comportement, ces quantités peuvent être complétées en introduisant  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_c$  telles que :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbb{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \mid \boldsymbol{\sigma}_c = \mathbb{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (2.9)$$

On définit finalement :

$$\xi^2(s) = \int_{\Omega} \text{tr}[(\boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_s)(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}_c) - \boldsymbol{\varepsilon}_s)] d\Omega \quad (2.10)$$

Dans le cas où les relations de comportement vérifient les relations de stabilité de Drucker, la quantité  $\xi^2(s)$  est qualifiée d'« erreur globale » en relation de comportement. Si la structure est décomposée en sous-structures  $E$ ,  $E \in \Omega$ , la contribution à l'erreur de la sous-structure  $E$  est :

$$\xi_E^2(s) = \int_E \text{tr}[(\boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_s)(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}_c) - \boldsymbol{\varepsilon}_s)] dE \quad (2.11)$$

avec :

$$\sum_{E \in \Omega} \xi_E^2 = \xi^2 \quad (2.12)$$

### 1.3 L'erreur en relation de comportement modifiée

L'objectif de cette partie est de pouvoir intégrer dans l'erreur en relation de comportement l'information apportée par des résultats d'essais, expérimentaux ou simulés. Avec l'introduction de ces valeurs expérimentales, l'erreur en relation de comportement est augmentée par l'erreur sur les mesures effectuées. Cette nouvelle erreur est appelée « erreur en relation de comportement modifiée ». Les données mesurées sont les déplacements et les chargements notés respectivement  $\underline{\tilde{U}}$  et  $\underline{\tilde{Q}}$ . L'erreur modifiée s'écrit finalement :

$$e^2 = \xi^2 + \frac{r_1}{1 - r_1} \|\Pi_u \underline{U} - \underline{\tilde{U}}\|^2 + \frac{r_2}{1 - r_2} \|\Pi_q \underline{Q} - \underline{\tilde{Q}}\|^2 \quad (2.13)$$

la norme  $\|\cdot\|$  étant une norme énergétique choisie de telle sorte qu'elle ait un poids équivalent à l'erreur en relation de comportement  $\xi^2$ . Les coefficients  $r_i$  sont des termes de poids censés donner plus ou moins de confiance aux mesures.

Finalement, la qualité d'un modèle par rapport à un ensemble de résultats d'essais est donnée par le résidu  $e^2$ . La construction de celui-ci demande de résoudre le problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } s = (\underline{U}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{S}_{ad} \\ \text{minimisant } e^2(s') \text{ avec } s' \in \mathcal{S}_{ad} \end{array} \right.$$

## 1.4 Minimisation de l'erreur

### 1.4.1 Problème discrétisé

Le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement est appliqué sur un modèle linéaire standard à éléments finis. Afin de détailler la méthode de minimisation de l'erreur, les notations qui suivent seront directement appliquées sur le modèle discrétisé. Les champs éléments finis sont notés  $\{*\}$  et les opérateurs  $[*]$ . On considère dans la suite la structure discrétisée  $\Omega_h$  soumise à un champ de force volumique  $\{f_d\}$ . Sur la frontière  $\partial\Omega_h$ , des déplacements  $\{U_d\}$  et des forces surfaciques  $\{F_d\}$  sont imposés respectivement sur les frontières  $\partial_1\Omega_h$  et  $\partial_2\Omega_h$ . Le problème défini précédemment devient donc :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } s = (\{U\}, [\sigma]) \in \mathcal{S}_{ad} \\ \text{minimisant } e^2(s') \text{ avec } s' \in \mathcal{S}_{ad} \end{array} \right.$$

avec :

$$e^2(s) = \xi^2(s) + \frac{r_1}{1-r_1} \|\Pi_u\{U\} - \{\tilde{U}\}\|^2 + \frac{r_2}{1-r_2} \|\Pi_q\{Q\} - \{\tilde{Q}\}\|^2 \quad (2.14)$$

L'erreur en relation de comportement  $\xi^2$  pour un modèle linéaire s'écrit ici :

$$\xi^2(\{U\}, \{V\}) = \frac{1}{2} \{U - V\}^T [K] \{U - V\} \quad (2.15)$$

avec  $[K]$  la matrice de rigidité du problème et  $\{V\}$  est défini par :

$$[\sigma_s] = \mathbb{K}(\varepsilon(\{V\})) \quad (2.16)$$

Minimiser  $\xi^2$  revient à trouver la solution la plus proche vérifiant les relations de comportement ainsi que les mesures. L'erreur en relation de comportement modifiée s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} e^2(\{U\}, \{V\}) = & \frac{1}{2} \{U - V\}^T [K] \{U - V\} \\ & + \frac{r_1}{1-r_1} \{\Pi_u U - \tilde{U}\}^T [G_u] \{\Pi_u U - \tilde{U}\} \\ & + \frac{r_2}{1-r_2} \{\Pi_q Q - \tilde{Q}\}^T [G_q] \{\Pi_q Q - \tilde{Q}\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les matrices  $[G_u]$  et  $[G_q]$  sont choisies de telle sorte qu'elles définissent des normes énergétiques sur les mesures. Le vecteur  $\{Q\}$  peut être exprimé en fonction du champ de déplacement :  $\{Q\} = [B]\{U\}$ ,  $[B]$  étant un opérateur d'extraction du chargement. Dans la suite,  $[G_u]$  est choisi tel que :

$$[G_u] = [K] \quad (2.18)$$

Le choix de  $[G_q]$  et des  $r_i$  est détaillé lors de l'application du recalage dans les sections suivantes.

La problématique abordée à présent est la minimisation de l'erreur modifiée. Cette minimisation peut être reformulée par la stationnarité du lagrangien  $L$  défini par :

$$L = e^2(\{U\}, \{V\}) + \underbrace{\{\lambda\}^T ([K]\{V\} - \{F\})}_C \quad (2.19)$$

où  $\{F\}$  et  $\{\lambda\}$  représentent respectivement le vecteur des efforts nodaux du champ de force imposé et le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. L'ajout du terme  $C$  permet de rendre  $\{V\}$  statiquement admissible. Cette reformulation est équivalente à résoudre un problème de minimisation. En exprimant la stationnarité du Lagrangien  $L$  par rapport à toutes les variables, le problème peut être résolu par le système d'équations suivant :

$$\left( [K] + \frac{r_1}{1-r_1}[G_u] + \frac{r_2}{1-r_2}[G_q] \right) \{U\} = \{F\} + \frac{r_1}{1-r_1}[G_u]\{\tilde{U}\} + \frac{r_2}{1-r_2}[G_q]\{\tilde{Q}\} \quad (2.20)$$

$$\{\lambda\} = \{U - V\} \quad (2.21)$$

$$[K]\{V\} = \{F\} \quad (2.22)$$

### 1.4.2 Calcul du gradient

Afin de résoudre le problème de minimisation, le calcul du gradient de l'erreur modifiée par rapport aux paramètres du modèle doit être calculé. On peut déjà remarquer que  $L(\{U\}, \{V\}) = e^2(\{U\}, \{V\})$  quand  $(\{U\}, \{V\})$  est solution du problème de minimisation. Donc quand  $(\{U\}, \{V\})$  est solution du problème, on a :

$$\frac{de^2}{dc_i} = \frac{dL}{dc_i} \quad (2.23)$$

$c_i$  étant les paramètres du modèle à recalculer. L'équation (2.23) peut être reformulée de la façon suivante :

$$\frac{de^2}{dc_i} = \frac{dL}{dc_i} = \frac{\partial L}{\partial \{U\}} \frac{\partial \{U\}}{\partial c_i} + \frac{\partial L}{\partial \{V\}} \frac{\partial \{V\}}{\partial c_i} + \frac{\partial L}{\partial \{\lambda\}} \frac{\partial \{\lambda\}}{\partial c_i} + \frac{\partial L}{\partial c_i} \quad (2.24)$$

Or  $(\{U\}, \{V\}, \{\lambda\})$  étant solution du problème de minimisation, on a donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \{U\}} = \frac{\partial L}{\partial \{V\}} = \frac{\partial L}{\partial \{\lambda\}} = 0 \quad (2.25)$$

Finalement, le gradient de l'erreur modifiée peut être directement calculé grâce à la dérivée partielle du Lagrangien  $L$  :

$$\frac{de^2}{dc_i} = \frac{\partial L}{\partial c_i} \quad (2.26)$$

En utilisant l'équation (2.21), l'expression (2.26) peut être reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{de^2}{dc_i}(\{U\}, \{V\}) = & \frac{1}{2} \{U - V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial c_i} \{U + V\} \\ & + \frac{r_1}{1 - r_1} \{\Pi_u U - \tilde{U}\}^T \frac{\partial [G_u]}{\partial c_i} \{\Pi_u U - \tilde{U}\} \\ & + \frac{r_2}{1 - r_2} \{\Pi_q [B]U - \tilde{Q}\}^T \frac{\partial [G_q]}{\partial c_i} \{\Pi_q [B]U - \tilde{Q}\} \\ & + \frac{2r_2}{1 - r_2} \left\{ \Pi_q \frac{\partial [B]}{\partial c_i} U \right\}^T [G_q] \{\Pi_q [B]U - \tilde{Q}\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 1.5 L'algorithme de minimisation

Maintenant que le gradient de l'erreur modifiée a été calculé, il s'agit ici de minimiser l'erreur modifiée. Pour cela, on choisit un algorithme de gradient optimisé par recherche linéaire basé sur le critère d'Armijo [Armijo, 1966]. À chaque pas  $k$  de l'algorithme de gradient, l'optimisation consiste à trouver  $\alpha^k$  tel que  $\{c^{k+1}\}$  minimise  $e^2(\{c^{k+1}\})$  avec :

$$\{c^{k+1}\} = \{c^k\} - \alpha^k \left\{ \nabla e^2(\{c^k\}) \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \nabla e^2(\{c^k\}) \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial e^2}{\partial c_1}(\{c^k\}) \\ \vdots \\ \frac{\partial e^2}{\partial c_n}(\{c^k\}) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

où  $\{c^k\}$  est la liste des paramètres  $c_i$  trouvés au pas  $k$ . En définissant au pas  $k$  :

$$f : x \mapsto e^2 \left( \{c^k\} - x \left\{ \nabla e^2(\{c^k\}) \right\} \right) \quad (2.29)$$

ainsi que les fonctions  $y_\varepsilon$  :

$$y_\varepsilon(x) = f(0) + \varepsilon x f'(0) \quad (2.30)$$

le  $\alpha^k$  optimal est choisi comme le premier  $x$  calculé vérifiant :

$$y_\varepsilon(x) > f(x) \quad (2.31)$$

La **Figure 2.2** illustre le critère d'Armijo au pas  $k$ . La valeur communément admise,  $\varepsilon = 0,5$  (ref), est utilisée pour les applications des sections suivantes. Le critère d'arrêt du recalage est habituellement basé sur une erreur relative dont l'expression choisie ici est :

$$e_r^2 = \frac{e^2}{\frac{1}{2} \{U_0 + V_0\}^T [K_0] \{U_0 + V_0\}} \quad (2.32)$$

$\{U_0\}$ ,  $\{V_0\}$  et  $[K_0]$  étant respectivement les vecteurs  $\{U\}$  et  $\{V\}$  et l'opérateur  $[K]$  calculés à la première itération de l'algorithme.

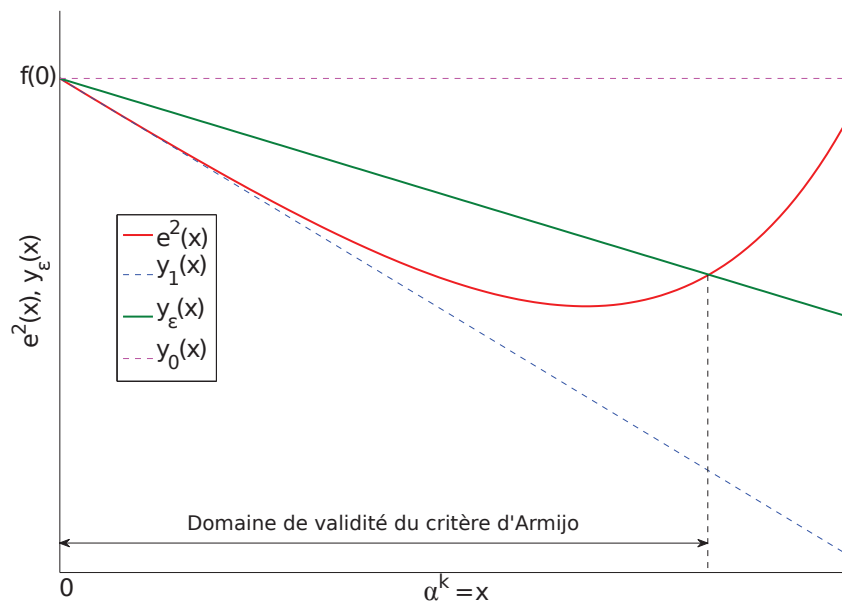


FIGURE 2.2: Illustration du critère d'Armijo

## 2 Efficacité du recalage

La méthode de recalage ayant été définie, nous développons ici un exemple de recalage sur une géométrie simple de fixation. L'objectif est d'étudier les performances du recalage proposé sur les modèles de fixations usuels afin d'optimiser le processus de recalage.

### 2.1 Géométrie étudiée

L'élément étudié est un assemblage boulonné constitué de 3 plaques d'aluminium fixées par 4 boulons en titane. Cette jonction boulonnée à double recouvrement est un élément typique des assemblages réalisés en aéronautique [Champaney *et al.*, 2007]. La **Figure 2.3** détaille la géométrie réelle de l'assemblage étudié. La **Table 2.1** détaille les caractéristiques de la géométrie étudiée.

### 2.2 Le problème unidimensionnel

Ce premier modèle se base sur les choix effectués au **Chapitre 1**. Chaque élément de la fixation est représenté par une structure unidimensionnelle. La structure complète est encadrée à une extrémité et chargée en traction à l'autre extrémité. En prenant en compte les propriétés de symétrie du problème, seule une moitié de la géométrie réelle est étudiée.

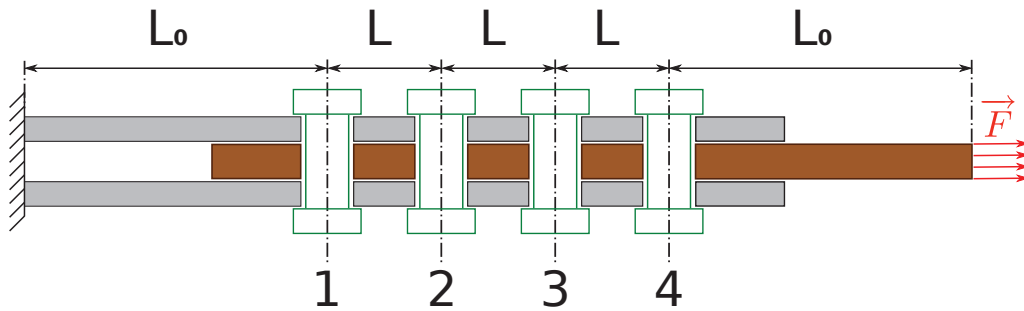


FIGURE 2.3: Géométrie étudiée

Paramètre	Valeur
Module d'Young	70 GPa (aluminium)
Section des plaques extérieures	$2,063 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
Section de la plaque intérieure	$3,968 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
Longueur $L_0$	176,2 mm
Longueur $L$	47,6 mm
Chargement $F$	5000 N

TABLE 2.1: Les paramètres du problème

Les éléments plaque sont modélisés par des poutres et les fixations par des ressorts. Le modèle possède 9 degrés de liberté (les déplacements  $u_i$ ). Il sera nommé « modèle initial » et est présenté à la Figure 2.4. Un modèle amélioré sera proposé par la suite.

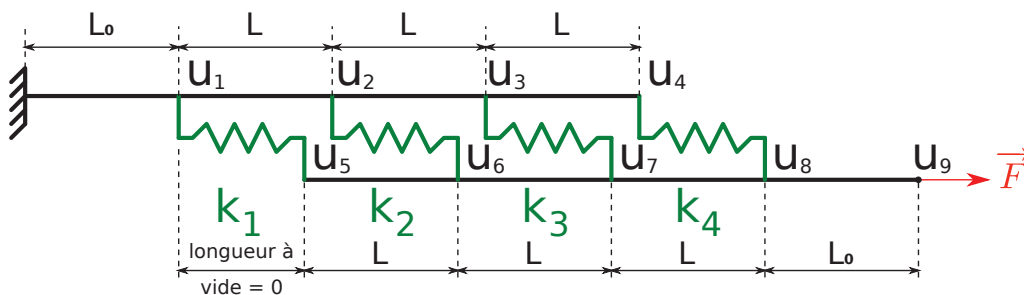


FIGURE 2.4: Géométrie du modèle initial

### 2.3 Les données expérimentales

Les données expérimentales pour la configuration étudiée n'étant pas à disposition, une série de données simulées doit être créée afin de pouvoir appliquer la méthode de recalage présentée précédemment. Les données simulées sont obtenues à partir du modèle



initial, pour des valeurs de raideur données concernant les connecteurs. Afin d'étudier la robustesse du recalage, les données sont simulées pour deux configurations (*i.e. deux valeurs de raideur*) différentes. La première série de données, « série 1 », est simulée pour des valeurs de raideur obtenues à partir de la formule de Huth [Huth, 1986]. Une deuxième série de données, « série 2 », est ensuite simulée pour des valeurs de raideur de connecteur 100 fois supérieures à la valeur donnée par la formule de Huth. Les données mesurées et stockées sont les chargements transférés (« charge  $i$  ») par chaque connecteur  $i$  ainsi que le déplacement en bout de structure  $u_9$ . Dans le premier cas, les raideurs des connecteurs sont du même ordre de grandeur que celles de la structure (poutres). Dans le deuxième cas, les raideurs sont 100 fois supérieures à celles de la structure. La raideur des barres en traction est d'environ  $1.10^8 \text{ N.m}^{-1}$ . La **Table 2.2** résume les paramètres choisis et les résultats obtenus. Les résultats montrent principalement qu'une grande différence entre

		Série 1	Série 2
<b>Valeurs choisies</b> ( $\text{N.m}^{-1}$ )	$k_i$	$1,932.10^8$	$1,932.10^{10}$
<b>Données obtenues</b> (N et m)	Charge 1	1533	2414
	Charge 2	937	36
	Charge 3	950	38
	Charge 4	1579	2510
	Déplacement $u_9$	$8,29.10^{-5}$	$7,49.10^{-5}$

**TABLE 2.2:** Les données simulées employées pour le recalage

les raideurs de la structure et les raideurs des fixations entraîne un grand écart entre les charges transmises par les fixations intérieures comparativement aux charges transmises par les fixations extérieures.

## 2.4 Application du recalage

Les données issues de la **Table 2.2** sont utilisées comme mesures dans cette partie. Pour chaque série, les données (mesures) sont considérées comme connues et les raideurs  $k_i$  des fixations sont les paramètres à recalcr. En plus d'étudier la robustesse du recalage vis-à-vis des mesures, l'influence de l'initialisation du recalage est également étudiée. Pour chaque série de mesures, les paramètres à recalcr sont initialisés avec des valeurs inférieures puis supérieures aux paramètres objectifs. Ceci entraîne donc 4 configurations pour le recalage à étudier. Dans l'équation (2.17),  $\{Q\}$  est exprimé de la façon suivante :

$$\{Q\} = \left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

$Q_i$  étant la charge transférée par le connecteur  $i$ . Afin d'obtenir une erreur de mesure sur les charges homogènes à une énergie, la matrice  $[G_q]$  dans l'équation (2.17) est choisie de la façon suivante :

$$[G_q] = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k_4 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Concernant la valeur des  $r_i$ , une série de recalages a été effectuée afin de trouver une valeur optimale entraînant un nombre d'itérations minimal jusqu'à convergence du recalage. Les propriétés de convergence ont été étudiées pour  $r_i = 1.10^k$  avec  $k = \{-12, -11, \dots, 2, 3\}$ . Grâce aux essais effectués sur ce paramètre, un compromis a pu être trouvé et les paramètres  $r_1 = r_2 = 1.10^{-8}$  seront utilisés dans toute la suite du recalage du modèle initial. Également, les résultats obtenus sur les connecteurs 1 et 4 sont similaires, de même que les résultats sur les connecteurs 2 et 3. Dans la suite de l'étude, seuls les résultats concernant les connecteurs 1 et 3 seront donc présentés.

#### 2.4.1 Recalage du modèle initial avec la série 1

Le recalage du modèle initial sur cette première série est effectué avec des valeurs de raideur initialisées à  $1,932.10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $1,932.10^9 \text{ N.m}^{-1}$ . Les **Figure 2.5, 2.6, 2.7, and 2.8** montrent respectivement les évolutions de l'erreur relative, des raideurs des connecteurs, du déplacement  $u_9$  et des charges des connecteurs au cours du recalage.

#### 2.4.2 Recalage du modèle initial avec la série 2

Le recalage du modèle initial sur cette seconde série est effectué avec des valeurs de raideur initialisées à  $1,932.10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $1,932.10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ . Les **Figure 2.9, et 2.10** montrent respectivement les évolutions de l'erreur relative et des raideurs des connecteurs au cours du recalage.

#### 2.4.3 Conclusions concernant le modèle initial

Ces 4 configurations du recalage sur le modèle initial nous montrent l'influence que peuvent avoir les mesures ainsi que l'initialisation sur l'efficacité et la qualité des résultats. Les résultats obtenus sur la série 1, que ce soit avec des valeurs d'initialisation supérieures ou inférieures aux valeurs objectif, convergent vers les valeurs objectif. Cependant, une grande différence peut être notée concernant le nombre d'itérations nécessaire jusqu'à convergence. En effet, une initialisation avec des valeurs inférieures des  $k_i$  par rapport aux raideurs objectif entraîne environ 3 fois moins d'itérations par comparaison avec une initialisation avec des valeurs supérieures.

Concernant les recalages effectués sur la série 2, les recalages n'atteignent pas les valeurs objectifs et ce quelque soit l'initialisation employée. De nouveau, on peut noter que le recalage utilisant des valeurs initiales supérieures aux valeurs objectifs converge bien

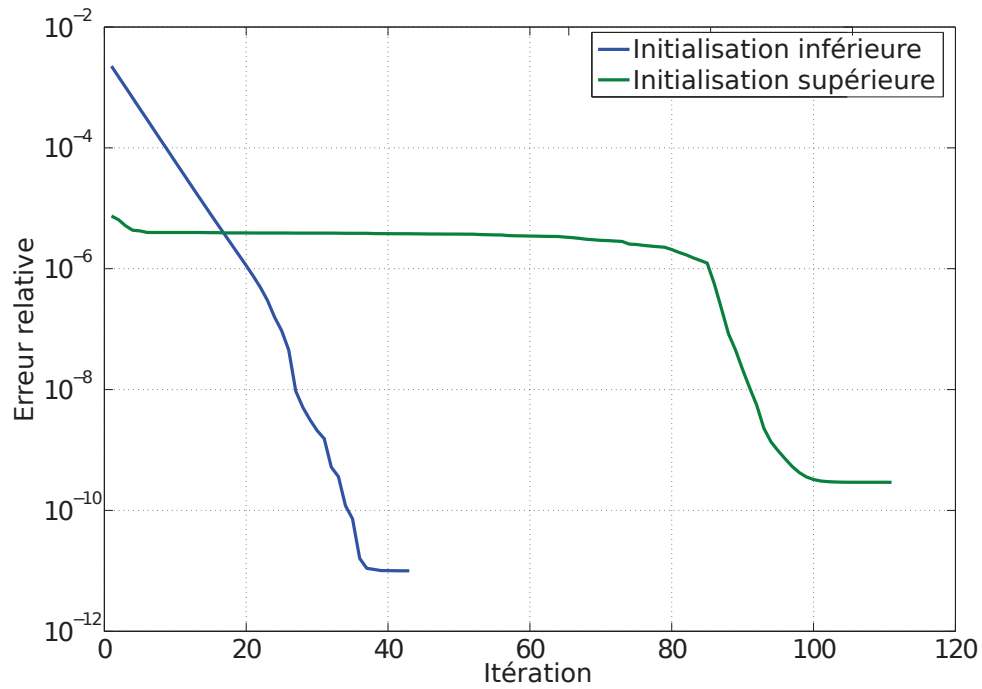


FIGURE 2.5: Évolutions de l'erreur relative au cours du recalage

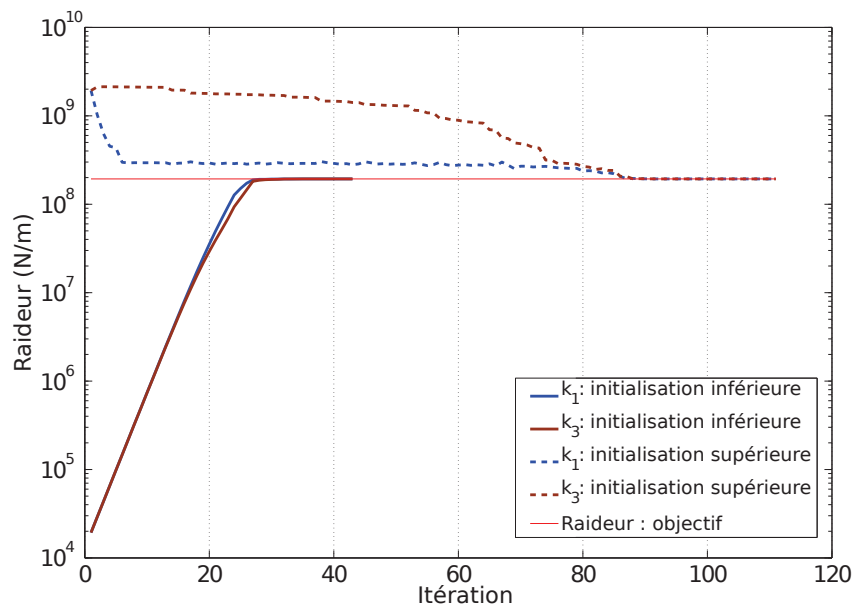


FIGURE 2.6: Évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage

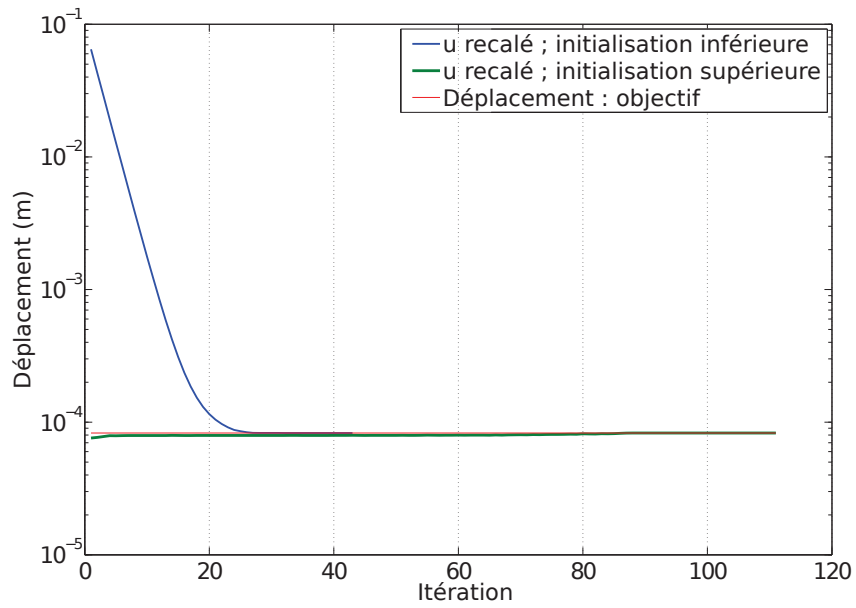


FIGURE 2.7: Évolutions du déplacement au cours du recalage

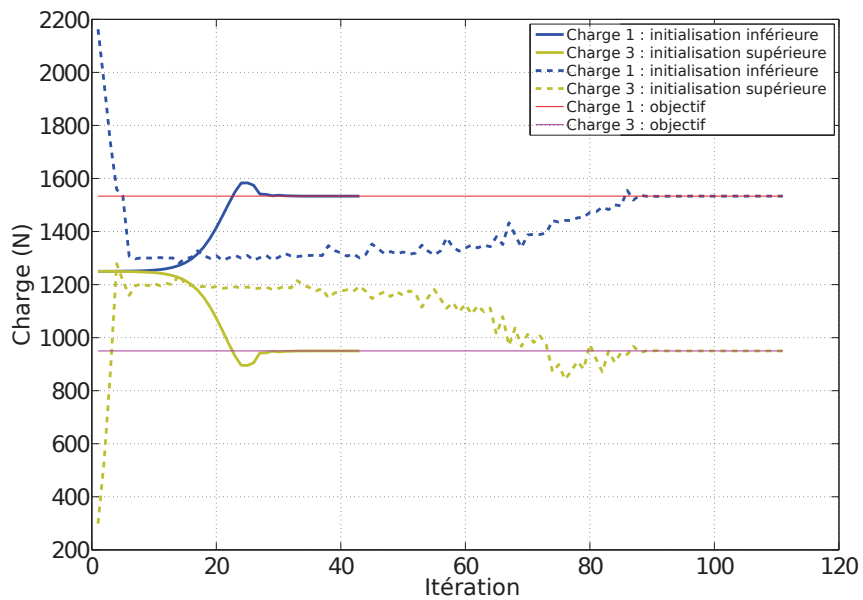


FIGURE 2.8: Évolutions des charges de connecteur au cours du recalage

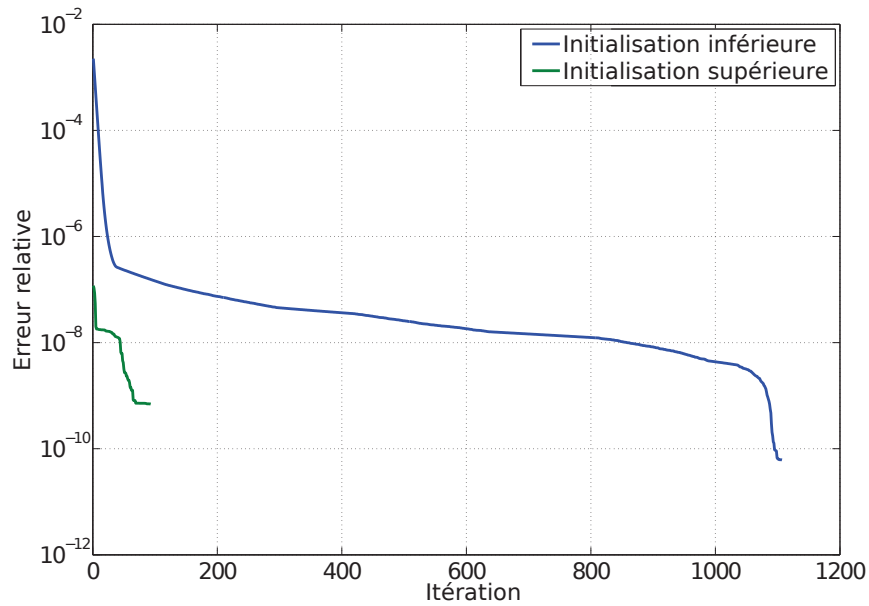


FIGURE 2.9: Évolutions de l'erreur relative au cours du recalage

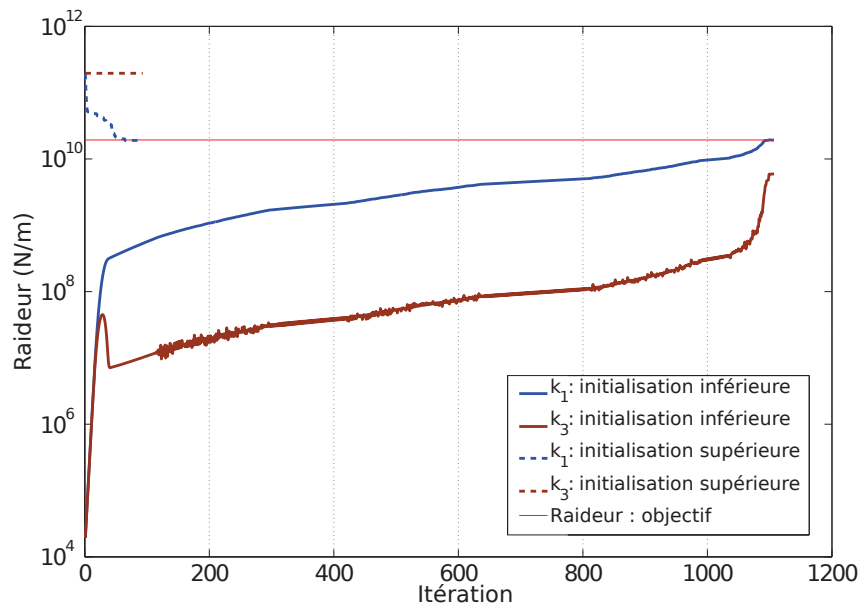


FIGURE 2.10: Évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage

plus difficilement que celui utilisant des valeurs initiales inférieures aux valeurs objectif. Pourtant, dans l'ensemble des cas, les résultats nous montrent des nombres d'itérations qui peuvent sembler trop important comparativement à la complexité du problème traité. La **Table 2.3** détaille le nombre d'itérations nécessaire pour chaque cas de recalage.

<b>Cas de recalage</b>	Série 1 Init. inf.	Série 1 Init. sup.	Série 2 Init. inf.	Série 2 Init. sup.
<b>Iterations</b>	43	111	1107	93

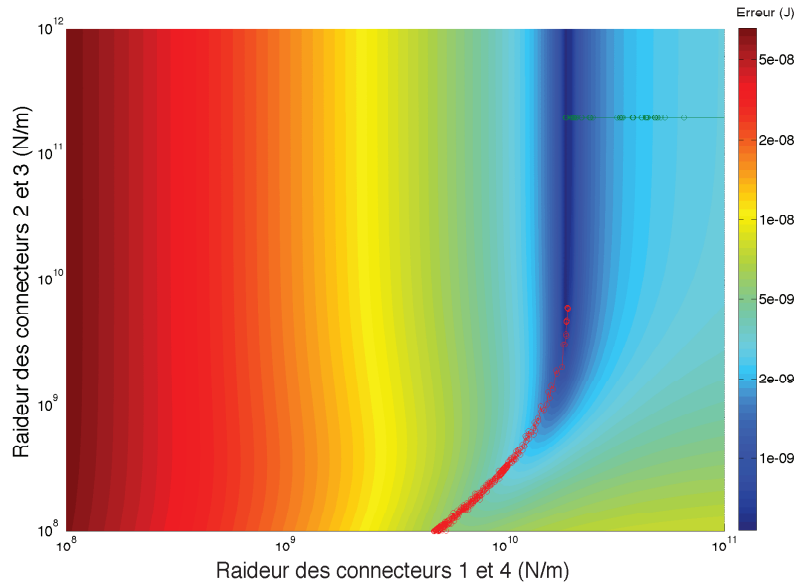
**TABLE 2.3:** Modèle initial : nombre d'itérations pour le recalage (Init. inf. (resp. sup.) signifie initialisation avec des valeurs inférieures (resp. supérieures) aux valeurs objectif)

Afin d'optimiser la qualité du recalage, nous supposons que les difficultés rencontrées proviennent de la très faible influence des paramètres de raideurs ( $k_i$ ) sur l'erreur modifiée dans certaines configurations. En effet, pour le cas de la série 2, les raideurs objectif ont une valeur très supérieure à la rigidité de la structure (barres) : une variation de raideur des connecteurs n'entraîne quasiment pas de variation de l'erreur modifiée. Dans la partie suivante, une étude paramétrique est effectuée pour illustrer la sensibilité des paramètres à recalculer vis-à-vis de l'erreur modifiée.

## 2.5 Le modèle rigidifié proposé

La partie précédente a soulevé un problème de qualité de convergence concernant le recalage basé sur la série 2. L'étude paramétrique qui suit a pour objectif de comprendre dans quelle mesure le choix du modèle peut intervenir sur la qualité du recalage. Afin d'analyser le comportement du recalage, les raideurs appartenant aux groupes de fixations  $\{1,4\}$  et  $\{2,3\}$  sont supposées évoluer de manière identique. Ce constat nous permet donc de tracer une carte d'erreur modifiée en fonction des deux paramètres restant (**Figure 2.11**). Les chemins de convergence sont également tracés sur cette même figure. Cette surface d'erreur permet d'avoir quelques explications sur les difficultés rencontrées par le recalage. En effet, on peut remarquer qu'il y a une ligne de minima ayant quasiment la même valeur. Lorsque l'algorithme atteint cette ligne, la convergence vers le minimum réel ne s'effectue pas, ou alors avec un très grand nombre d'itérations. L'efficacité du recalage est donc influencée par le type de surface d'erreur. Pour s'affranchir de cet écueil, nous avons choisi de modifier la modélisation de l'assemblage boulonné pour retrouver une surface d'erreur comportant un minimum distinct.

Du fait de la grande différence de raideur entre les connecteurs et la structure, la surface d'erreur présente une ligne de minima pour laquelle un des paramètres n'a quasiment aucune influence. Le modèle doit être modifié afin d'assouplir les connecteurs, ajuster le type de surface d'erreur, et ainsi améliorer l'efficacité du recalage. La suite de cette partie présente donc une modification du modèle de fixation tout en conservant la méthode de recalage.



**FIGURE 2.11:** Surface d'erreur en relation de comportement avec les trajets de convergence. Cette figure utilise la série 2 pour le modèle initial.

### 2.5.1 Le problème unidimensionnel

Lors de la modélisation des assemblages boulonnés ou rivetés, il est courant de considérer le comportement de la structure comme connu. Le principal problème réside dans la modélisation des fixations. Le modèle initial utilise une représentation très locale des fixations comparativement à l'agencement et les interactions réels qu'il y a entre le boulon (ou le rivet) et la structure. En effet, le connecteur n'est censé représenter que le boulon dans la modélisation initiale. En conséquence, la modélisation de la zone d'interaction entre la fixation et la structure peut être élargie afin de prendre en compte les effets de la géométrie et du comportement de la fixation (*i.e.* le perçage, le comportement de contact autour de la fixation, ...) dans le comportement du connecteur. Un choix a finalement été pris : le connecteur représente un boulon mais également une partie de la structure voisine. Ce type de modélisation nous permet de modifier la taille de la structure dont le comportement est pris en compte dans le connecteur. Ceci intervient directement sur la raideur équivalente du connecteur. De ce fait, on se propose d'étudier l'impact du rapport entre les raideurs de la structure (barres) et les raideurs des connecteurs sur la surface d'erreur, en supposant que l'efficacité du recalage en est dépendant.

La seconde représentation proposée est donc basée sur le modèle initial, avec des connecteurs représentant la fixation mais aussi une partie de la structure voisine. Le détail de la modélisation proposée est illustré sur la **Figure 2.12**. Sur cette figure, les zones hachurées représentent les parties de la structure ayant été rigidifiées. En ajoutant une partie de la représentation de la structure dans les connecteurs, la raideur équivalente de

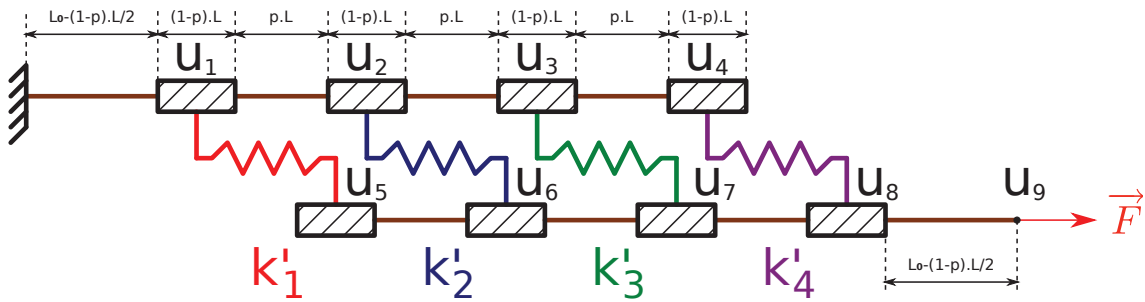


FIGURE 2.12: Configuration du modèle rigidifié

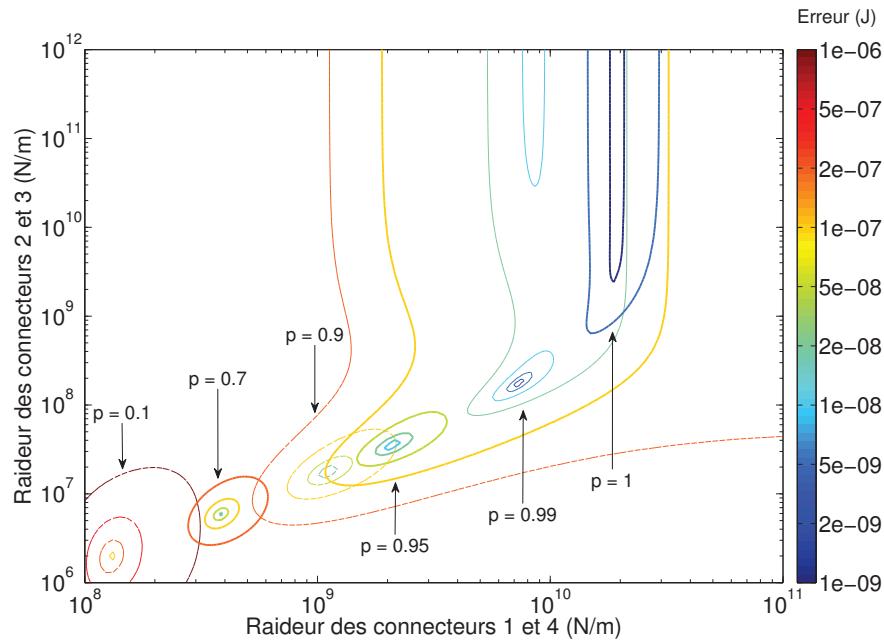
l'ensemble {fixation + partie de la structure} décroît. Cela permet de modifier la raideur des connecteurs en utilisant le paramètre  $p$  afin d'ajuster le rapport entre la raideur des connecteurs et la raideur de la structure. Le paramètre  $p$  correspond à la proportion de structure n'étant pas incluse dans la représentation de la fixation. Les nouveaux paramètres à recalcer sont donc les raideurs  $k'_i$ . De manière pratique, la modification revient seulement à changer la longueur des éléments barre. L'application de cette méthode sur une structure plus complexe reviendrait à rigidifier les éléments situés dans une zone directement en contact avec une extrémité du connecteur (zone hachurée sur la **Figure 2.12**).

Une analyse paramétrique de l'erreur modifiée est réalisée sur la série 2. La **Figure 2.13** montre l'évolution, par lignes de niveau, du minimum global de l'erreur modifiée en fonction du paramètre  $p$ . Lorsque  $p$  tend vers 1 (pas de structure rigidifiée), la position du minimum global devient moins précise. Pour  $p > 0,9$  et des valeurs élevées de  $k'_{2-3}$ , les lignes de niveau sont parallèles et verticales. Cela signifie que l'influence du paramètre  $k'_{2-3}$  est négligeable comparée à celle de  $k'_{1-4}$ . Dans la même situation, mais pour  $p = 1$ , on retrouve le cas de recalage de la partie précédente comportant des difficultés de convergence. Grâce à l'étude paramétrique, la valeur  $p = 0,2$  est choisie et utilisée pour toute la suite de l'étude. La **Table 2.1** détaille les paramètres employés pour cette seconde étude sur le modèle que l'on nommera « modèle rigidifié ». Rappelons que les paramètres à recalcer sont les raideurs  $k'_i$ .

### 2.5.2 Application du recalage

Les mesures utilisées pour le recalage sont les mêmes que celles des recalages précédents (*i.e.* séries 1 et 2). À présent, les valeurs objectif des raideurs à atteindre ne sont plus connues car le modèle rigidifié est différent de celui utilisé pour les simulations des séries 1 et 2. Néanmoins, les recalages seront également effectués à partir des séries 1 et 2 avec des initialisations à des valeurs élevées et faibles des paramètres. Rappelons que l'objectif de la modification du modèle initial était d'assouplir les connecteurs. On s'attend donc à obtenir des valeurs recalées de raideur de connecteurs inférieures à celles du modèle initial. Une étude sur les paramètres  $r_i$  permet de trouver un compromis avec  $r_1 = r_2 = 1.10^{-10}$ .





**FIGURE 2.13:** Evolution de la position du minimum global de l'erreur en relation de comportement modifiée

### 2.5.3 Recalage du modèle rigidifié avec la série 1

Le recalage du modèle rigidifié sur cette première série est effectué avec des valeurs de raideur initialisées à  $1,932 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $1,932 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}$ . Les **Figure 2.14**, **2.15**, **2.16**, and **2.17** montrent respectivement les évolutions de l'erreur relative, des raideurs des connecteurs, du déplacement  $u_9$  et des charges des connecteurs au cours du recalage.

### 2.5.4 Recalage du modèle rigidifié avec la série 2

Le recalage du modèle initial sur cette seconde série est effectué avec des valeurs de raideur initialisées à  $1,932 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $1,932 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-1}$ . Les **Figure 2.18**, et **2.19** montrent respectivement les évolutions de l'erreur relative et des raideurs des connecteurs au cours du recalage.

### 2.5.5 Conclusions concernant le modèle rigidifié

Comme prévu, les raideurs recalées (environ  $1 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-1}$ ) sont plus souples que celles obtenues avec le modèle initial ( $1 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^{-1}$ ). Ces résultats, détaillés dans la **Table 2.4**, montrent donc que le recalage sur un modèle rigidifié peut améliorer sensiblement l'efficacité de convergence de l'algorithme ainsi que la qualité des résultats. En effet, le tracé de la carte d'erreur modifiée (**Figure 2.20**) pour le modèle rigidifié montre

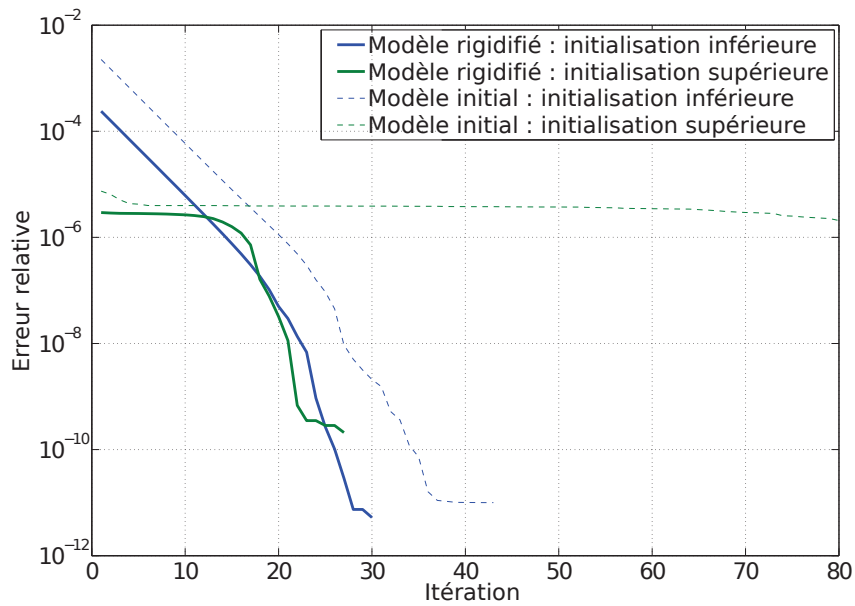


FIGURE 2.14: Recalage du modèle rigidifié : évolutions de l'erreur relative au cours du recalage

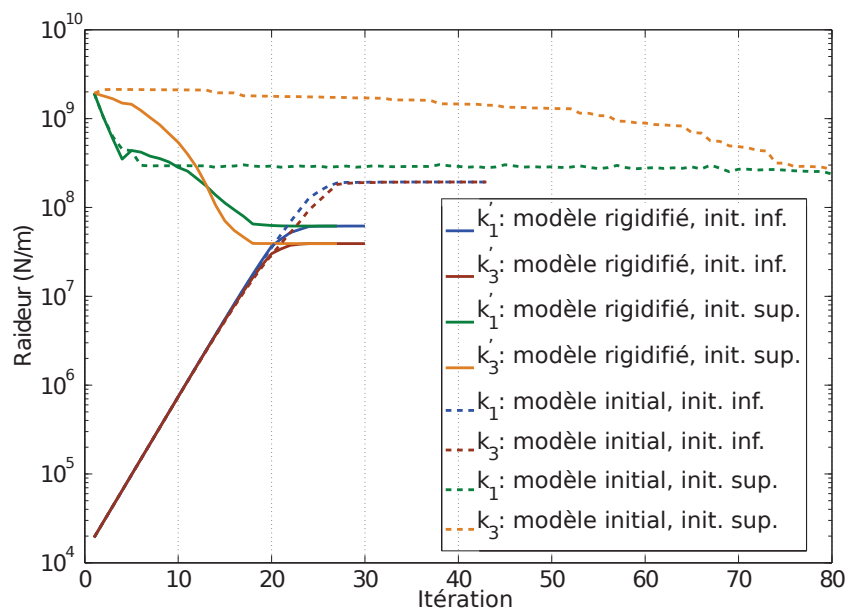


FIGURE 2.15: Recalage du modèle rigidifié : évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage

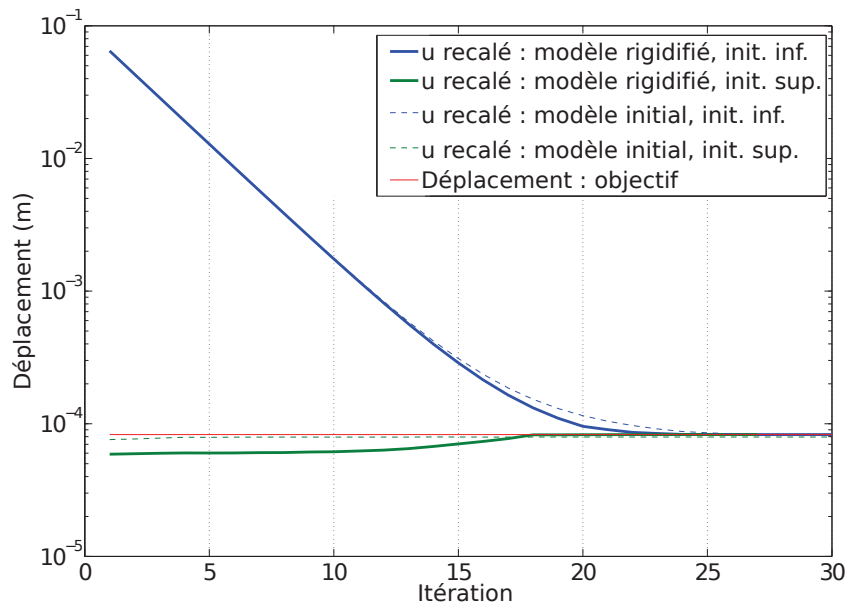


FIGURE 2.16: Recalage du modèle rigidifié : évolutions du déplacement au cours du recalage

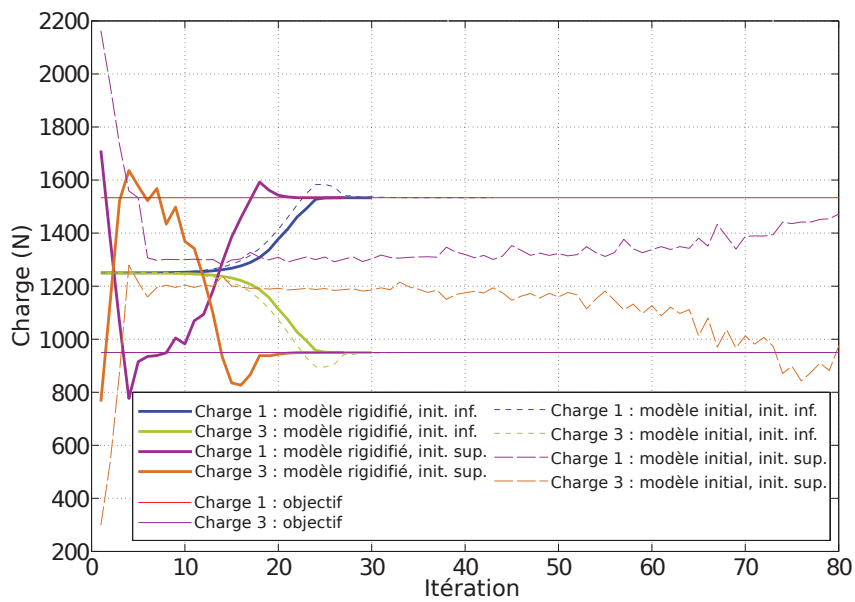


FIGURE 2.17: Recalage du modèle rigidifié : évolutions des charges de connecteur au cours du recalage

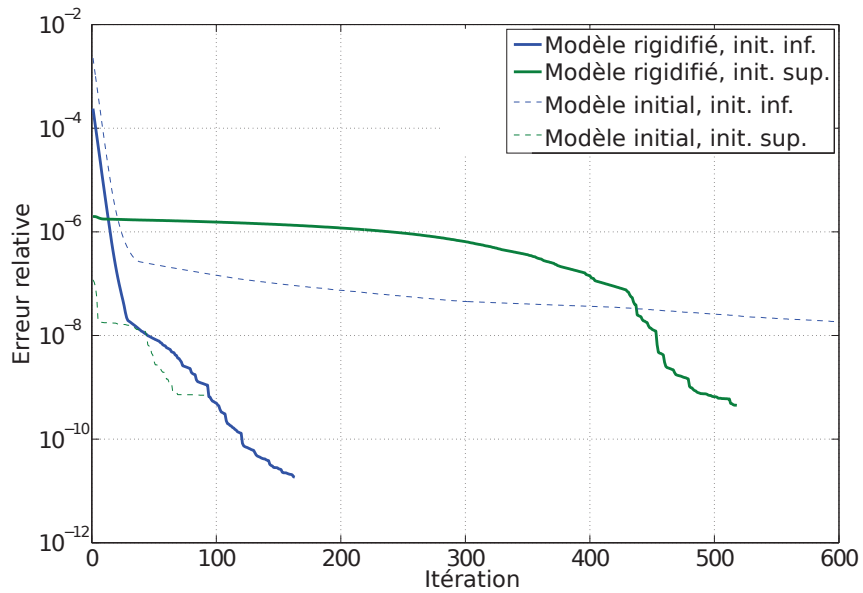


FIGURE 2.18: Recalage du modèle rigidifié : évolutions de l'erreur relative au cours du recalage

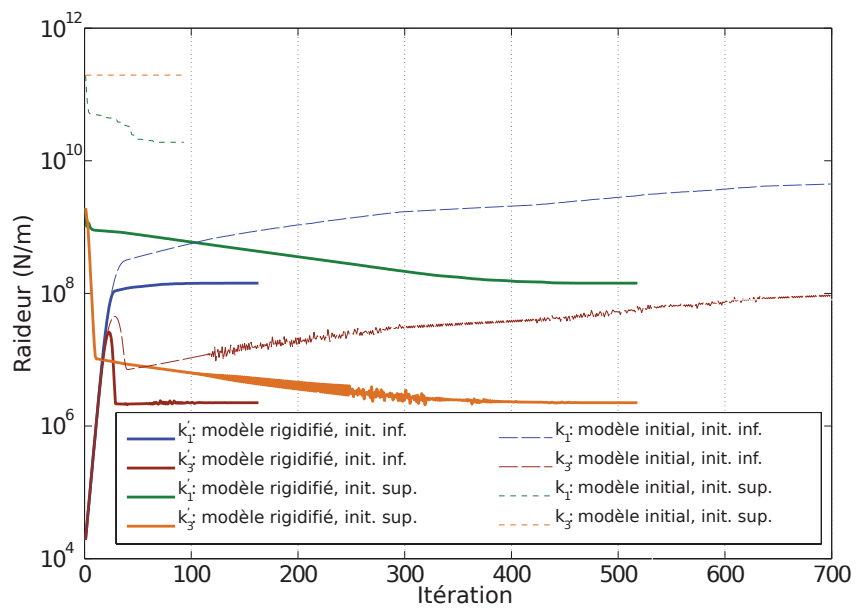


FIGURE 2.19: Recalage du modèle rigidifié : évolutions de la raideur des connecteurs 1 et 3 au cours du recalage

Cas de recalage	Série 1 Init. inf.	Série 1 Init. sup.	Série 2 Init. inf.	Série 2 Init. sup.
Iterations	30	27	163	518

TABLE 2.4: Modèle rigidifié : nombre d'itérations pour le recalage

que le minimum global est nettement mieux défini et accessible. De plus, la plupart des

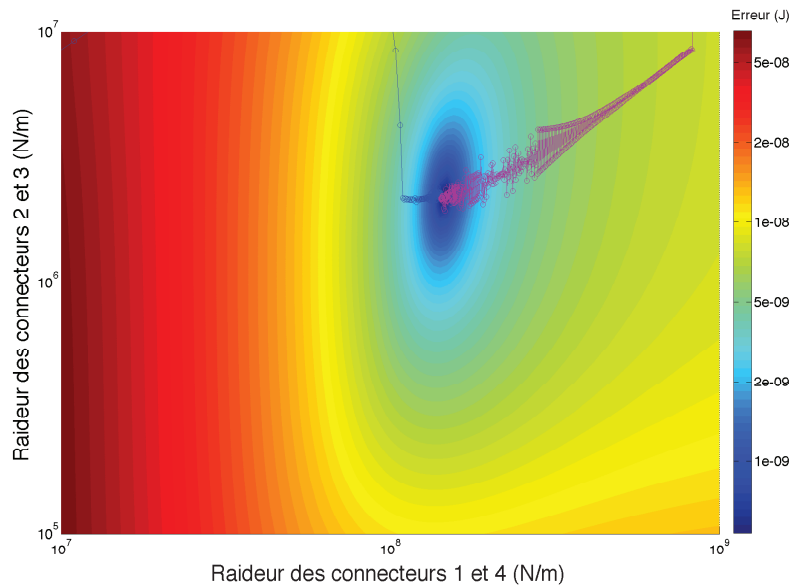


FIGURE 2.20: Surface d'erreur en relation de comportement avec les trajets de convergence. Cette figure utilise la série 2 pour le modèle rigidifié.

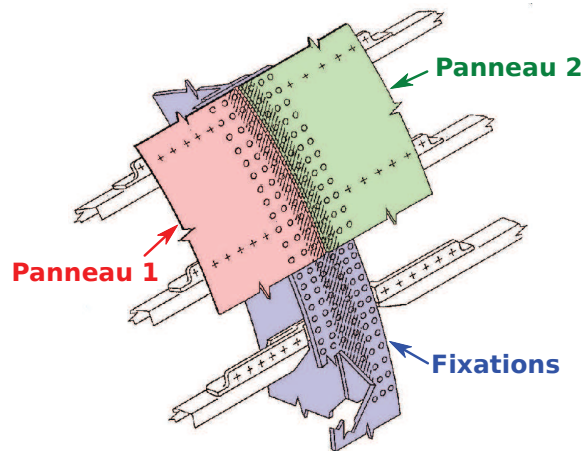
structures complexes employées dans l'aéronautique se composent de répétitions géométriques d'assemblages simples de fixations, à l'image de l'exemple traité dans ce chapitre. Lors de l'étude de ces structures complexes, on peut supposer que l'étude paramétrique de  $p$  peut être réalisée une fois sur la structure simple, et réutilisée ensuite sur la structure entière. Enfin, la **Figure 2.13** montre clairement l'importance de rigidifier la structure afin d'obtenir un meilleur recalage tout en gardant une représentation de la structure conve-

nable. Cette technique de recalage peut être appliquée à des structures 3D : la structure de l'assemblage est représentée par des éléments plaques et les fixations par des éléments connecteurs. D'ailleurs, lors de modélisations 3D d'assemblages boulonnés dans l'industrie, les problèmes de compatibilité de maillage sont généralement résolus par une technique similaire où l'on rigidifie la structure voisine des nœuds du connecteur. Cette méthode apparaît donc être tout à fait compatible avec les techniques habituellement employées dans le domaine industriel.

### 3 Application à une structure aéronautique

#### 3.1 Géométrie étudiée

Afin de mettre en œuvre cette technique sur une géométrie de plus grande échelle, nous analysons ici un assemblage boulonné largement étudié expérimentalement. La structure étudiée est un assemblage boulonné permettant de fixer deux panneaux (parties du fuselage d'un avion) entre eux suivant leurs extrémités communes. La **Figure 2.21** schématise la fixation étudiée. La **Figure 2.22** montre l'assemblage en question sous sollici-



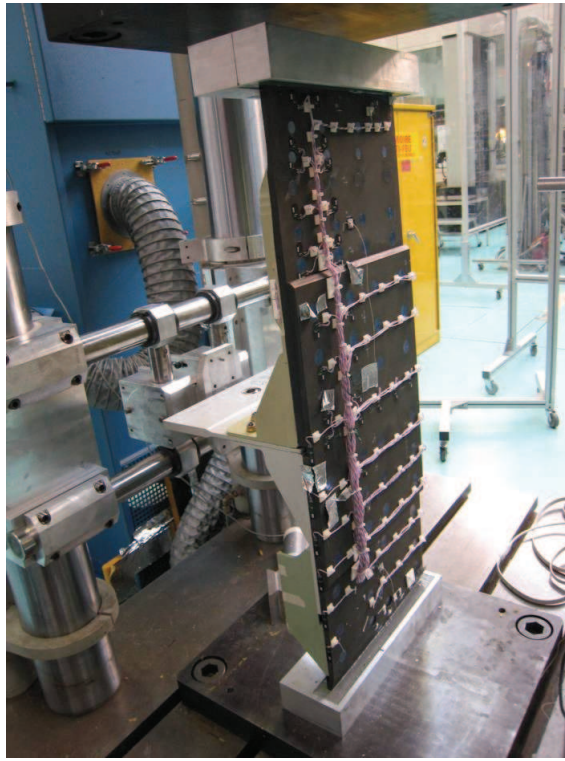
**FIGURE 2.21:** Schéma d'implantation de l'assemblage étudié [Airbus]

tation lors d'essais effectués à EADS IW. La **Figure 2.23** illustre quant à elle la première étape de modélisation 3D, effectuée dans l'industrie, avec des éléments plaque et connecteur.

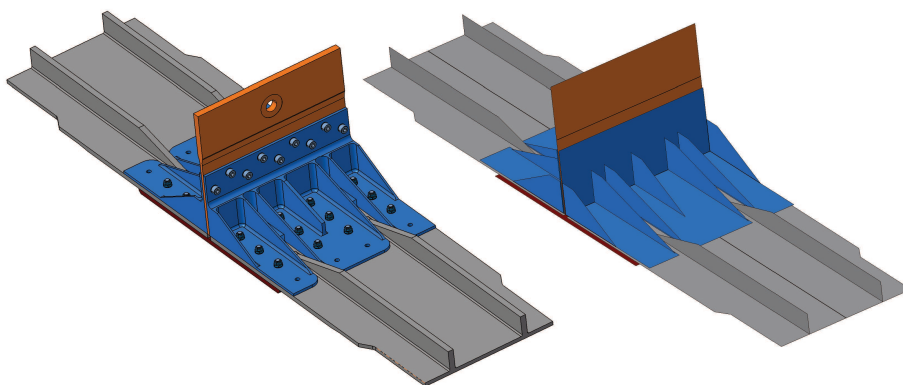
#### 3.2 Les données expérimentales

L'objectif de cette partie est de simuler le comportement d'une famille de structures afin d'obtenir une série de données que l'on assimilera aux mesures expérimentales. La simulation est une simulation de Monte Carlo associée à un modèle déterministe de base comportant des variables aléatoires. Le modèle adopté pour représenter l'assemblage se compose d'éléments plaque (éléments de structure) et d'éléments connecteur (éléments de fixation). Seule une ligne de fixations est étudiée ici. La **Figure 2.24** illustre la géométrie de l'assemblage. Chaque couleur représente une plaque et l'assemblage est chargé en traction. Les conditions au limites sont détaillées sur la **Figure 2.25**. De plus, des conditions de symétrie sont introduites afin de prendre en compte le comportement des autres lignes de fixations.

Chaque fixation est représentée par un connecteur dont chaque extrémité est liée à un nœud appartenant à la structure. Chaque connecteur est défini par deux raideurs indépen-



**FIGURE 2.22:** Structure réelle étudiée [EADS IW]. Essai de compression et de flambage.



**FIGURE 2.23:** Modèle CAO (à gauche) et modélisation plaque et connecteur (à droite) de la structure étudiée

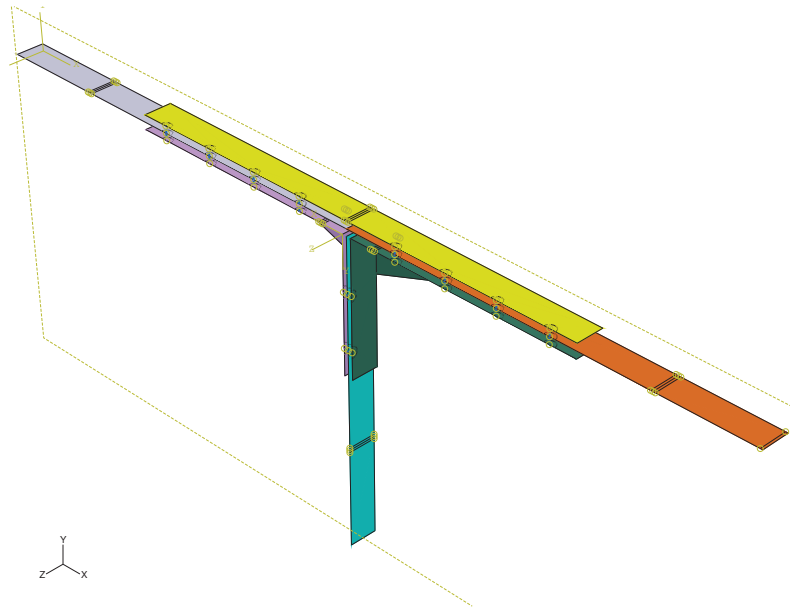


FIGURE 2.24: Géométrie du modèle non-linéaire de l'assemblage boulonné

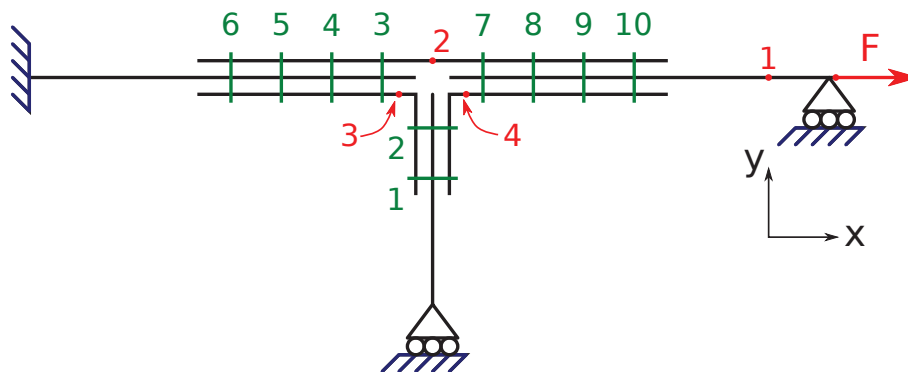


FIGURE 2.25: Chargements et conditions aux limites appliqués sur les modélisations

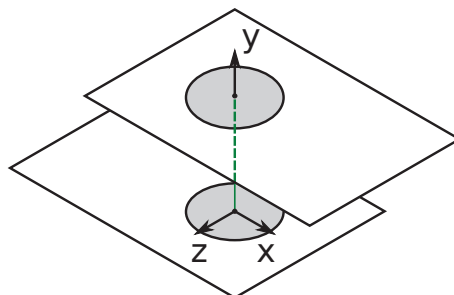


FIGURE 2.26: Représentation d'un connecteur



dantes et linéaires :

- un coefficient de raideur représentant le comportement du connecteur dans le plan  $(\underline{x}, \underline{z})$  ;
- un coefficient de raideur représentant le comportement du connecteur suivant la normale  $\underline{y}$  au plan  $(\underline{x}, \underline{z})$ .

La raideur suivant la normale est calculée grâce à la raideur équivalente du boulon en titane associé. La raideur dans le plan est quant à elle calculée avec la valeur issue de la formule de Huth [Huth, 1986]. On introduit du contact avec frottement entre les plaques. Chaque connecteur est également préchargé pour simuler l'assemblage du boulon. Afin de simuler le comportement d'une famille de structures, chaque précharge ainsi que chaque raideur dans le plan  $(\underline{x}, \underline{z})$  est paramétrée par une variable aléatoire. Une simulation de Monte Carlo est ensuite effectuée pour obtenir les déplacements et charges transférées sur les positions en rouge de la **Figure 2.25**. Les précharges des boulons sont définies à 20 000 N  $\pm 20\%$  [Airbus]. Les raideurs plan sont calculées grâce à la formule de Huth  $\pm 50\%$ . On associe à ces deux types de paramètres aléatoires des lois uniformes continues.

La suite de l'étude va consister à développer et à utiliser un modèle enveloppe simple pour représenter les données variables obtenues par simulation de Monte Carlo, ou plus généralement par expérience sur structure réelle. L'ensemble des données simulées sera utilisé dans la partie 3 pour recalibrer le modèle enveloppe. Dans cette partie, pour chaque quantité d'intérêt, seules les moyennes de données simulées sont utilisées pour recalibrer le modèle d'assemblage déterministe.

### 3.3 Application du recalage

Le modèle déterministe linéaire choisi est un modèle à éléments finis généralement utilisé dans l'aéronautique, composé de plaques représentant la structure et de connecteurs représentant les fixations (*cf.* **Figure 2.23**). Ici également, une seule ligne de fixations est étudiée. Comparativement à la stratégie adoptée dans la partie 2.5.1, les connecteurs utilisés sont rigidifiés afin d'équilibrer les raideurs des connecteurs par rapport aux raideurs des plaques. Les fixations sont donc modélisées par des connecteurs généralisés dont les nœuds sont liés à la structure par l'intermédiaire de barres quasi-rigides. Comme précédemment, les propriétés mécaniques de la structure plaque est considérée comme connue et seules les raideurs des connecteurs sont recalées. La **Figure 2.27** présente la géométrie du modèle linéaire avec les connecteurs rigidifiés. Les conditions aux limites sont également présentées sur la **Figure 2.25**. Des conditions de symétrie sont ajoutées afin de prendre en compte le comportement des autres lignes de fixations. Chaque connecteur est défini par deux raideurs indépendantes et linéaires :

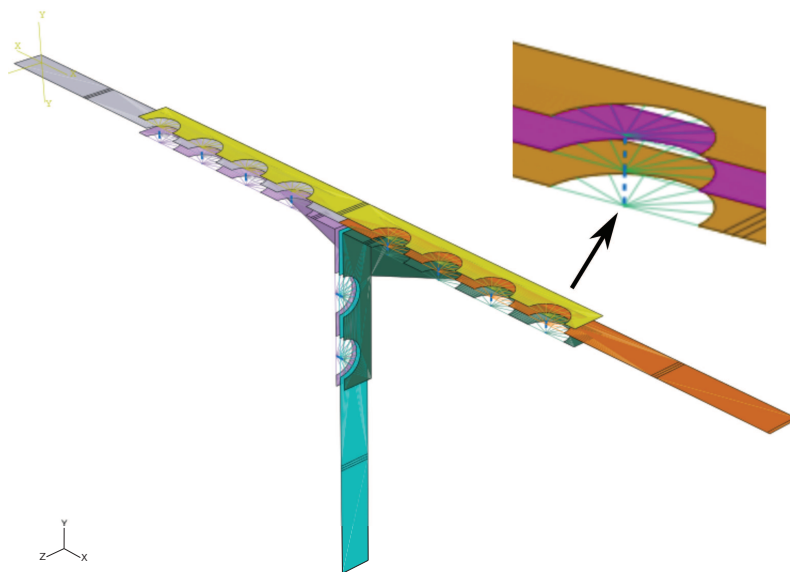
- un coefficient de raideur représentant le comportement du connecteur dans le plan  $(\underline{x}, \underline{z})$  ;
- un coefficient de raideur représentant le comportement du connecteur suivant la normale  $\underline{y}$  au plan  $(\underline{x}, \underline{z})$ .

La raideur suivant la normale est calculée grâce à la raideur équivalente du boulon en titane associé. La raideur dans le plan est quant à elle initialisée avec la valeur issue de la formule de Huth [Huth, 1986]. Les degrés de liberté en rotation des connecteurs sont bloqués afin d'obtenir une meilleure représentation du contact : le contact est principalement présent au voisinage des fixations sur la structure réelle. Le modèle possède finalement 2 paramètres par connecteurs, ce qui entraîne 20 paramètres à recalculer pour 10 connecteurs.

Afin de réduire le nombre de paramètres à recalculer, les connecteurs sont séparés en 3 groupes dans lesquels les connecteurs sont supposés avoir le même comportement. Les groupes créés sont les suivants :

- groupe 1 : connecteurs 1 et 2 ;
- groupe 2 : connecteurs 3, 4, 5 et 6 ;
- groupe 3 : connecteurs 7, 8, 9 et 10.

Les 6 paramètres obtenus sont utilisés lors du recalage basé sur l'erreur en relation de comportement. Le recalage se base sur les moyennes des données simulées à la partie 3.2. Le **Table 2.5** présente les moyennes issues de la simulation de Monte Carlo. Le **Table 2.6**



**FIGURE 2.27:** Géométrie de la modélisation linéaire

présente quant à lui les résultats issus du recalage en erreur en relation de comportement sur le modèle déterministe. Les **Figure 2.28** et **2.29** présentent respectivement la convergence des quantités d'intérêt (erreur relative par rapport à la moyenne des données simulées) et la convergence de l'erreur modifiée relative.  $U_i$  et  $Q_i$  sont respectivement le déplacement et la charge transférée selon l'axe  $x$  à la position  $i$ .

Position	1	2	3	4
Déplacement (mm)	$6.39 \cdot 10^{-1}$	$3.48 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$	$5.39 \cdot 10^{-1}$
Charge transférée (N)	18100			

TABLE 2.5: Les données simulées

Position	1	2	3	4
Déplacement (mm)	$6.39 \cdot 10^{-1}$	$3.47 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$5.63 \cdot 10^{-1}$
Charge transférée (N)	18000			

TABLE 2.6: Résultats issus du recalage du modèle déterministe

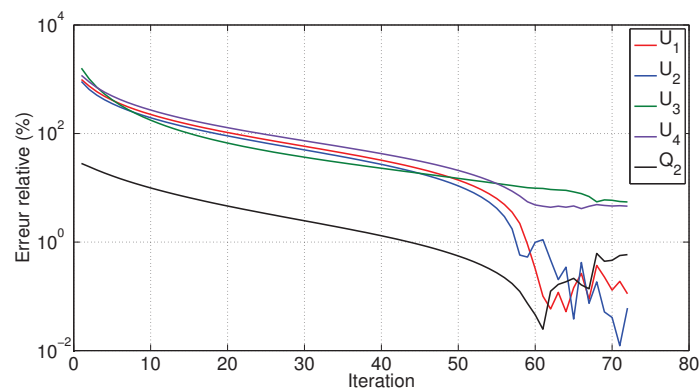


FIGURE 2.28: Convergence des quantités d'intérêt (erreur relative)

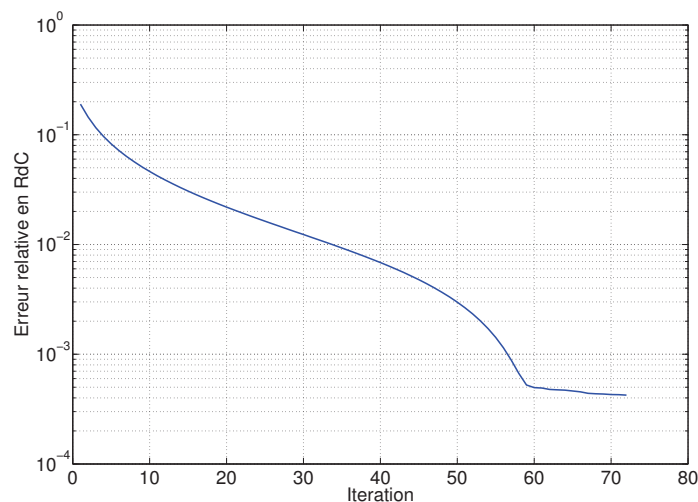


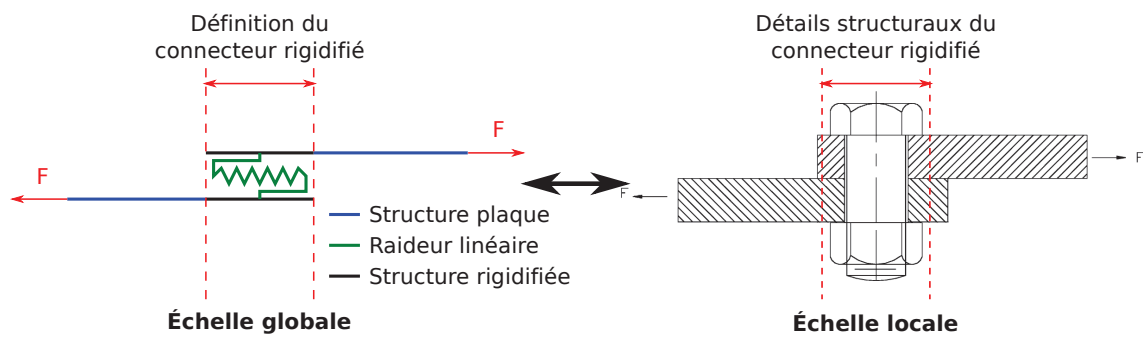
FIGURE 2.29: Convergence de l'erreur relative en relation de comportement

## 4 Conclusions

L'objectif de cette partie était de construire un modèle déterministe simple sur lequel se baser pour introduire une notion d'incertitude. Ce modèle déterministe est un des éléments les plus importants de la stratégie de dimensionnement que l'on propose dans ce manuscrit. Afin de s'introduire facilement dans une approche par analyse descendante, le premier choix a été de se baser sur les modèles couramment employés dans l'industrie. Pourtant, les modèles de fixations utilisés ne représentent pas correctement dans la plupart des cas le comportement réel des fixations. En effet, les modèles semi-empiriques utilisés se basent seulement sur les caractéristiques matériaux et géométriques des fixations réelles. Or les paramètres tels que le frottement, la précharge ou encore le type de sollicitation peut grandement influencer sur la raideur équivalente du connecteur.

Un recalage basé sur l'erreur en relation de comportement a été mis en place pour optimiser les paramètres du modèle. Le recalage permettant de travailler par sous-structure est choisi afin de rester compatible avec la méthode de représentation de l'incertain (*cf.* chapitre 3). Pour finir, le modèle déterministe recalé, permet d'obtenir une bonne représentation du comportement moyen de la famille de structures simulée. En effet les erreurs relatives sur les quantités d'intérêt étudiées ne dépassent pas 10%, ce qui nous permet d'entamer la modélisation de l'incertain sur de bonnes bases.

Enfin, on peut remarquer que l'utilisation du connecteur rigidifié permet de garder une certaine cohérence vis-à-vis de la méthode dimensionnement multiéchelle employée. En effet, lors du passage de l'échelle globale à l'échelle fine de la fixation, les liens entre ces deux échelles peuvent être facilement transposés comme présentés sur la **Figure 2.30**.



**FIGURE 2.30:** Cohérence entre le modèle de connecteur global et le modèle de fixation local

# Chapitre 3

## Application de la théorie des méconnaissances

*Ce troisième chapitre s'intéresse à l'aspect incertain de certains phénomènes que l'on retrouve dans les éléments de fixations. Afin de modéliser la variabilité issue de ces phénomènes, la théorie des méconnaissances développée au LMT-Cachan [Ladevèze et al., 2006b, Ladevèze et al., 2006a] est choisie. Dans une première partie, un état de l'art de la théorie sera effectué. La méthode sera ensuite appliquée à la fixation aéronautique puis recalée sur les données simulées. Enfin, ce comparatif des résultats pourra nous permettre de conclure quant à la qualité de la stratégie proposée.*

### Sommaire

---

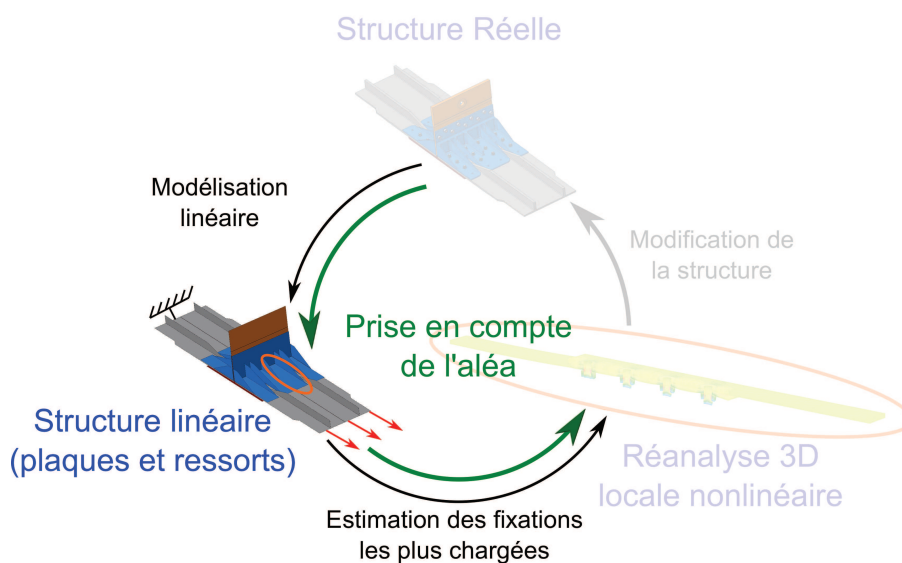
<b>1</b>	<b>Représentation de l'incertain dans une stratégie de dimensionnement</b>	<b>89</b>
<b>2</b>	<b>Description de la réalité</b>	<b>89</b>
2.1	Famille de structures	90
2.2	Données expérimentales	90
<b>3</b>	<b>La théorie des méconnaissances</b>	<b>90</b>

3.1	Le problème de validation . . . . .	91
3.2	Définition des méconnaissances de base . . . . .	92
3.3	Propagation des méconnaissances . . . . .	95
3.4	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Application au cas industriel . . . . .</b>	<b>102</b>
4.1	Implémentation numérique . . . . .	104
4.2	Définition et propagation des méconnaissances de base . . . . .	104
4.3	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	106
4.4	Conclusions . . . . .	109

---

# 1 Représentation de l'incertain dans une stratégie de dimensionnement

En industrie, au cours du dimensionnement des structures aéronautiques, les phénomènes aléatoires sont le plus souvent pris en compte en introduisant des coefficients de sécurité. Afin d'avoir un minimum de recul sur ces coefficients de sécurité, nous proposons une stratégie de modélisation de l'incertain au niveau du prédimensionnement (partie de simplification de la géométrie et du comportement lors d'analyses descendantes). Le principe de la modification de l'analyse est illustrée à la **Figure 3.1**.



**FIGURE 3.1:** Principe de la modification proposée

La stratégie consiste à se baser sur des résultats expérimentaux pour pouvoir valider le modèle de dispersion proposé. Ce modèle simplifié avec représentation des dispersions peut être ensuite utilisé afin de prévoir les cas les plus critiques auxquels peut être soumise la structure. La méthode de prise en compte des incertitudes doit également rester peu coûteuse en terme de ressources numériques afin de s'insérer naturellement dans une démarche de simplification lors d'une analyse descendante.

## 2 Description de la réalité

Dans ce paragraphe, les hypothèses concernant les propriétés de ce que l'on considère comme structure réelle sont précisées. Également, la méthode d'obtention des « données expérimentales » est détaillée.



## 2.1 Famille de structures

Nous nous intéressons ici à l'étude du comportement d'une famille de structures semblables. Nous considérons qu'il existe des dispersions dans leurs comportements, assez notables pour que l'on doive les prendre en compte lors du dimensionnement. Le comportement de la structure (plaques) est considéré comme peu variable, et l'origine de ces dispersions est donc supposée provenir uniquement des éléments de fixation. Comme précisé dans le **Chapitre 1**, les précharges, les jeux ou encore le contact avec frottement entre les plaques et la fixation, sont les phénomènes complexes principalement à l'origine d'aléas sur le comportement des fixations. Le modèle déterministe sur lequel appliquer la modélisation de la dispersion est un modèle linéaire (*cf.* **Chapitre 2**). La difficulté est de réussir à représenter le plus fidèlement possible une dispersion obtenue par des phénomènes *a priori* non linéaires, avec un modèle de dispersion basé sur une modélisation purement linéaire de la structure.

Afin de pouvoir confronter le modèle proposé avec les structures réelles, des études comparatives sont menées sur des quantités de déplacement local mais également sur des efforts globaux. Dans la suite, la quantité étudiée sera notée  $\alpha$ .

## 2.2 Données expérimentales

Les mesures, ne pouvant s'obtenir expérimentalement ici, sont obtenues par une simulation de Monte Carlo considérée comme la référence. Les données utilisées sont identiques à celles construites à la Partie 2.3. Dans ce chapitre, ce sont les intervalles de variations qui sont utilisés et non plus les moyennes de ces intervalles, comme cela était le cas dans le précédent chapitre.

## 3 La théorie des méconnaissances

La méthode retenue pour modéliser les dispersions est la théorie des méconnaissances. Cette théorie a été développée au LMT-Cachan et est présentée dans [Ladevèze *et al.*, 2006b]. L'idée fondamentale de cette théorie est de globaliser, sur une sous-structure, un ensemble de sources d'incertitudes plutôt que de paramétrer chaque source d'incertitude grâce à une variable aléatoire par exemple. Cet aspect présente plusieurs avantages concernant notre cas d'application que sont les fixations.

Tout d'abord, le modèle de fixations global sur lequel est appliqué la théorie des méconnaissances est constitué d'éléments finis linéaires très simples. Le fait de pouvoir englober les différentes sources d'incertitude par un terme générique se basant sur le comportement, ici linéaire, d'une fixation constitue une première utilité de la théorie. En effet, ces sources d'incertitudes sont souvent non linéaires et donc non descriptibles par les modèles simples employés.

Ensuite, du point de vue numérique, l'application de cette théorie permet d'obtenir des temps de calcul plus courts comparativement à une simulation de Monte Carlo par

exemple. Dès lors que les quantités d'intérêt à étudier sont connues, le nombre de résolutions du problème déterministe sur la structure globale est de l'ordre de  $N + 1$  avec  $N$  le nombre de quantités d'intérêt.

Concernant la mise en œuvre de la théorie des méconnaissances, elle se décompose généralement de la façon suivante :

- définition des méconnaissances de base : cette partie introduit les variables d'entrée  $m_E^\pm$  (méconnaissances de base) censées représenter un ensemble de sources d'incertitude sur une sous-structure  $E$ . Il s'agit dans notre cas de définir, pour une ensemble  $E$  d'une ou plusieurs fixations, les variables  $m_E^\pm$  représentant les variations obtenues par la mauvaise maîtrise des précharges, des frottements, des jeux, ... ;
- propagation des méconnaissances de base : cette partie concerne la recherche des intervalles de variations des quantités de sortie, déplacements et transferts de charge dans notre cas. Les bornes de ces intervalles (données de sortie), nommées méconnaissances effectives, sont calculées par l'intermédiaire des méconnaissances de base (données d'entrée) et des équations du problème ;
- recalage du modèle de méconnaissances : les méconnaissances introduites doivent être définies *a priori* lorsque l'on connaît sa valeur, ou doivent être recalées lorsque ce n'est pas le cas. Dans le cas du recalage de méconnaissance, on se base généralement sur des intervalles de dispersion issus d'essais expérimentaux. La technique consiste à modifier la définition des méconnaissances de base afin de représenter au mieux les intervalles expérimentaux avec les méconnaissances effectives.

Ces trois points sont détaillés dans les parties 3.2, 3.3 et 3.4. La section suivante redéfinit le problème de départ.

### 3.1 Le problème de validation

L'objectif de cette théorie est de pouvoir prendre en compte plusieurs types d'incertitudes, de façon globale. Lors de l'étude d'une quantité  $\alpha$  (déplacement nodal ou transfert de charge), un modèle avec méconnaissances a pour but de qualifier et quantifier l'écart :

$$\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha} \quad (3.1)$$

entre  $\bar{\alpha}$ , la quantité obtenue par le modèle déterministe utilisé et  $\alpha$ , la quantité que l'on peut attendre d'une structure réelle. La théorie des méconnaissances quantifie les incertitudes à l'échelle des sous-structures : c'est à cette échelle que sont globalisées toutes les sources de variations (précharges, frottements, jeux, ...). On évite ainsi la représentation paramétrique de ces phénomènes lors de la prise en compte des dispersions.

Le modèle utilisé lors de l'analyse descendante est linéaire. Nous supposons donc que les variations des phénomènes complexes cités précédemment peuvent être représentées par une variation du comportement linéaire de l'ensemble  $E$  du ou des connecteurs. Ceci se traduit donc par un intervalle de variation de l'énergie de déformation de la sous-structure  $E$ .

### 3.2 Définition des méconnaissances de base

La théorie des méconnaissances se base sur un modèle déterministe sur lequel on applique le concept de méconnaissances. Les variations associées à chaque sous-structure  $E$  appartenant à la structure  $\Omega$  peuvent être globalisées par une quantité  $m$  dont la valeur varie à l'intérieur de l'intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$ . Les bornes de cet intervalle sont définies grâce à l'énergie de déformation de sorte que :

$$(1 - m_E^-(\theta))\bar{e}_E(\underline{U}) \leq e_E(\underline{U}, \theta) \leq (1 + m_E^+(\theta))\bar{e}_E(\underline{U}) \quad (3.2)$$

$\bar{e}_E(\underline{U})$  étant l'énergie de déformation associée au champs de déplacement  $\underline{U}$  de la sous-structure  $E$  appartenant au modèle EF déterministe, et  $e_E(\underline{U}, \theta)$ , l'énergie de déformation associée au champs de déplacement  $\underline{U}$  de la sous-structure  $E$  appartenant à une structure réelle de la famille étudiée. On peut exprimer ces énergies en fonction des matrices de rigidité sous la forme :

$$\bar{e}_E(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U} \bar{\mathbb{K}}_E \underline{U} \quad (3.3)$$

$$e_E(\underline{U}, \theta) = \frac{1}{2} \underline{U} \mathbb{K}_E(\theta) \underline{U} \quad (3.4)$$

$\bar{\mathbb{K}}_E$  et  $\mathbb{K}_E(\theta)$  étant les matrices éléments finis (EF) associées respectivement au modèle EF déterministe et à une structure de la famille étudiée. La définition des méconnaissances de base revient donc à écrire la relation suivante :

$$(1 - m_E^-(\theta))\bar{\mathbb{K}}_E \leq \mathbb{K}_E(\theta) \leq (1 + m_E^+(\theta))\bar{\mathbb{K}}_E \quad (3.5)$$

Cette relation est plus généralement utilisée lors de la mise en œuvre de la théorie des méconnaissances. La variation d'énergie de déformation de l'ensemble de connecteurs  $E$  censée englober les sources d'incertitude est équivalente à une variation de la raideur de l'ensemble  $E$ .

Ces bornes  $(m_E^-; m_E^+)$  sont introduites en tant que variables internes du modèle et sont nommées *méconnaissances de base* associées à la sous-structure  $E$ . Par définition ces variables sont positives. Les méconnaissances de base peuvent avoir une valeur fixe, mais le plus souvent, on leur associe une loi de probabilité. En effet, définir des méconnaissances de base de manière déterministe reviendrait à modéliser l'aléa par une représentation par intervalle [Moore, 1962]. Or le plus souvent cette description entraîne une surestimation des incertitudes lors de sa propagation. Nous utiliserons donc une définition des méconnaissances de base reposant sur des variables aléatoires auxquelles on associe des lois de probabilités.

Cette loi de probabilité est choisie *a priori*. Généralement, les méconnaissances de base sur les rigidités sont représentées par une loi normale. On associe à la méconnaissances

sance  $m(\theta) = [-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)]$  la loi définie par la densité de probabilité suivante :

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(m-\bar{M})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.6)$$

telle que son écart-type  $\sigma$  soit paramétrée par les valeurs  $\bar{m}_E^-$  et  $\bar{m}_E^+$  avec :

$$\int_{-\bar{m}_E^-}^{\bar{m}_E^+} p(m) dm = 0,99 \quad (3.7)$$

et telle que sa moyenne  $\bar{M}$  soit centrée entre les bornes  $-\bar{m}_E^-$  et  $\bar{m}_E^+$  :

$$\bar{M} = \langle m(\theta) \rangle = \frac{\bar{m}_E^+ - \bar{m}_E^-}{2} \quad (3.8)$$

De plus, la densité de probabilité est tronquée en dehors de l'intervalle  $[-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)]$ . Ceci revient à ne pas considérer les 1% de cas les plus extrêmes qui sont normalement détectés lors de contrôles de fabrication. La **Figure 3.2** illustre les propriétés d'une loi de probabilité normale centrée ayant pour moyenne  $\bar{M} = 0$  et pour écart-type  $\sigma = 3$ . Lorsque l'origine des dispersions est davantage méconnue, les méconnaissances de base peuvent être définies par une loi de probabilité de type uniforme. De même, si l'origine des incertitudes est extrêmement mal représentée dans le modèle, on peut faire le choix de définir l'intervalle  $[-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)]$  par des valeurs déterministes. Ceci revient à utiliser une représentation par intervalle [Moore, 1962].

On peut donc maintenant préciser la probabilité d'observer  $m_E$  dans un intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  donné :

$$P(-m_E^- \leq m \leq m_E^+) = \int_{-m_E^-}^{m_E^+} p(m) dm \quad (3.9)$$

Les méconnaissances de base sont définies dans l'équation (3.2) de part et d'autre du modèle déterministe. Deux événements indépendants peuvent donc être décrits :

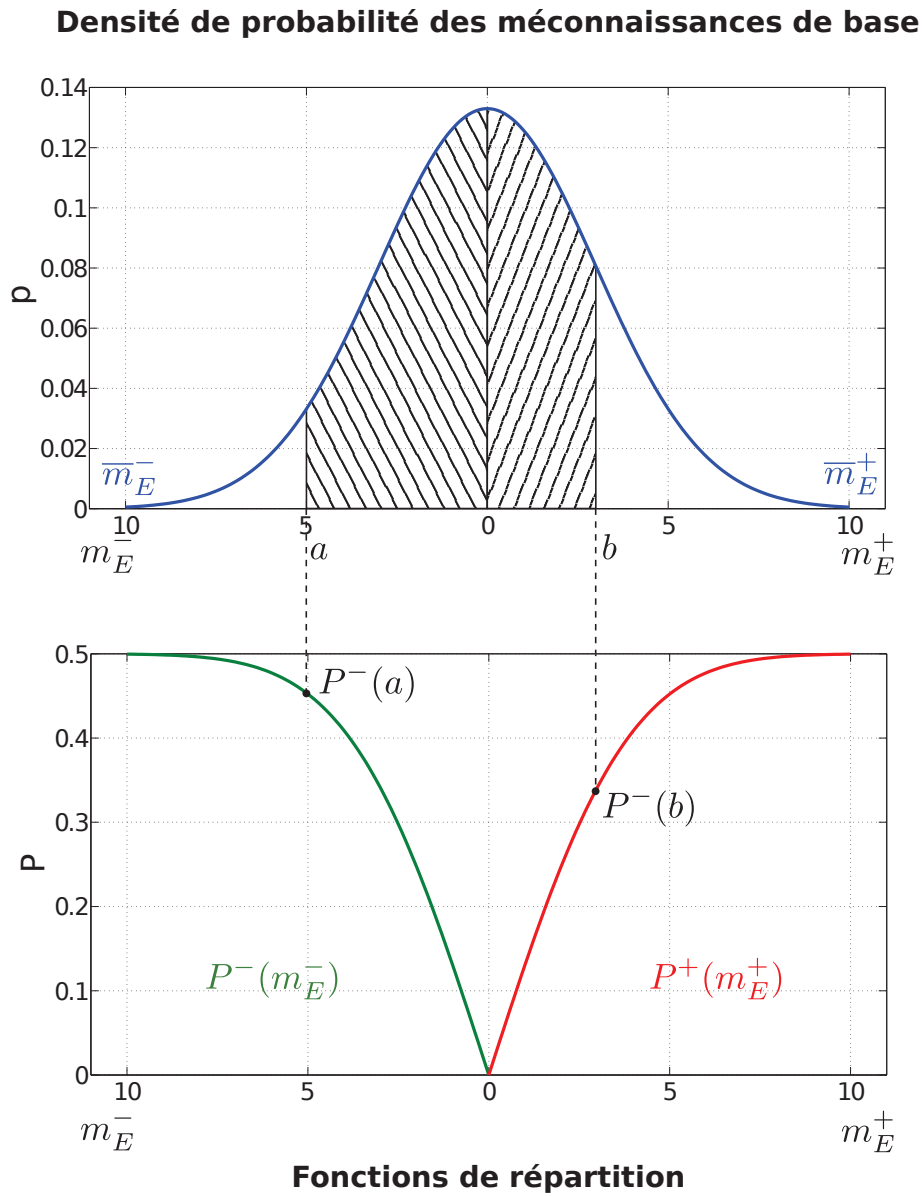
- soit par  $m \in [0; m_E^+]$ , ce qui signifie que l'on observe l'évènement ( $m_E^- = 0, m_E^+ \geq 0$ ) avec une probabilité  $P^+(m_E^+)$  telle que :

$$P^+(m_E^+) = \int_0^{m_E^+} p(m) dm \quad (3.10)$$

- soit par  $m \in [-m_E^-; 0]$ , ce qui signifie que l'on observe l'évènement ( $m_E^- \geq 0, m_E^+ = 0$ ) avec une probabilité  $P^-(m_E^-)$  telle que :

$$P^-(m_E^-) = \int_{-m_E^-}^0 p(m) dm \quad (3.11)$$

En résumé, pour pouvoir définir des méconnaissances de base sur une sous-structure  $E$ , il est nécessaire de connaître le type de loi de probabilité ainsi que les bornes  $\bar{m}_E^-$  et  $\bar{m}_E^+$



**FIGURE 3.2:** Méconnaissances de base associées à une loi normale centrée

associées respectivement aux méconnaissances  $m_E^-(\theta)$  et  $m_E^+(\theta)$ . Plus de détails concernant les outils nécessaires à l'élaboration du concept de méconnaissances sont exposés dans [Puel, 2004].

On vient donc d'associer un modèle de méconnaissances à un modèle déterministe via les méconnaissances de base appliquées au niveau des sous-structures de fixations. Il est maintenant nécessaire de propager ces méconnaissances de base à travers le modèle déterministe afin d'obtenir une estimation de dispersion d'une quantité d'intérêt  $\alpha$ .

### 3.3 Propagation des méconnaissances

#### 3.3.1 Principe de la propagation

Le but de cette partie est d'obtenir, grâce à l'expression des méconnaissances de base (cf. partie précédente), un intervalle de confiance dans lequel la quantité de sortie étudiée est susceptible de varier. Les premiers travaux effectués au LMT-Cachan ont tout d'abord été développés en dynamique [Ladevèze *et al.*, 2004, Puel, 2004] pour lesquels les quantités d'intérêt étudiées sont typiquement les fréquences propres et les modes propres de la structure. Dans le cas général, pour une quantité d'intérêt  $\alpha$ , le but est donc d'évaluer l'écart  $\Delta\alpha$  tel que :

$$\Delta\alpha(\theta) = \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \quad (3.12)$$

$\alpha$  étant la quantité d'intérêt que l'on peut attendre d'une structure réelle et  $\bar{\alpha}$ , la quantité d'intérêt issue du modèle déterministe. Pour notre application, les quantités étudiées sont typiquement des déplacements nodaux ainsi que des transferts de charge. L'étape de propagation des méconnaissances de base revient donc à trouver les bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  telles que :

$$-\Delta\alpha_{mod}^-(\theta) \leq \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \leq \Delta\alpha_{mod}^+(\theta) \quad (3.13)$$

C'est à partir de la définition des méconnaissances de base (équations (3.2) ou (3.5)) que la propagation s'effectue. Cette procédure peut être réalisée généralement de deux manières différentes :

- analytiquement : les fonctions caractéristiques des bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  sont calculées directement grâce à l'expression de la loi de probabilité des méconnaissances de base. Cette méthode devient toutefois rapidement laborieuse lorsque la structure est complexe (plusieurs sous-structures qui impliquent un grand nombre de méconnaissances de base). Dans les cas des assemblages boulonnés ou rivetés, les sous-ensembles de fixations peuvent être très nombreux. Cette méthode de calcul ne sera donc pas retenue pour la suite des travaux exposés ;
- numériquement : les densités de probabilité des bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  sont reconstruites grâce à une technique de simulation de Monte Carlo.

Bien que les propagations soient effectuées numériquement, plusieurs exemples analytiques peuvent être consultés dans [Puel, 2004, Enjalbert, 2009].

Maintenant que les fonctions caractéristiques de  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  sont calculées (ou reconstruites), il nous faut en déduire un intervalle de confiance pour la quantité d'intérêt étudiée. C'est dans cet optique qu'ont été développés les concepts de probabilité d'intervalles et d'intervalles standards. Le détail de ces outils est exposé dans [Puel, 2004]. Pour obtenir un intervalle de confiance à une probabilité  $P$  donnée, l'idée est de trouver l'intervalle standard correspondant. L'intervalle standard  $[\Delta\alpha_{mod}^-(P); \Delta\alpha_{mod}^+(P)]$ , correspondant à une probabilité  $P$  donnée, est le plus petit intervalle tel que :

$$\int_0^{\Delta\alpha_{mod}^+(P)} p^+(\theta) d\theta + \int_{-\Delta\alpha_{mod}^-(P)}^0 p^-(\theta) d\theta = P \quad (3.14)$$

où  $p^+$  et  $p^-$  sont respectivement, la fonction densité de probabilité de la borne supérieure  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  et la fonction densité de probabilité de la borne inférieure  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$ . Les bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(P)$  de l'intervalle standard sont appelées méconnaissances effectives. Les méconnaissances effectives traduisent le résultat du modèle enveloppe défini par le modèle déterministe auquel sont ajoutées les méconnaissances de base sur les sous-structures. Les phénomènes incertains (contacts, frottement, précharges, jeux) globalisés par les méconnaissances de base  $m_E^\pm$  sur chaque sous-structure  $E$  entraînent donc des intervalles de variation des quantités d'intérêts (déplacements et transferts de charge). La **Figure 3.3** illustre le processus de propagation des méconnaissances de base.

### 3.3.2 Propagation en dynamique

Les premiers travaux sur la propagation des méconnaissances de base ont été développés en dynamique des structures, et plus particulièrement en vibrations libres [Ladevèze *et al.*, 2004, Puel, 2004]. L'étude du calcul théorique des méconnaissances effectives dans ce cas de sollicitation est détaillée dans cette partie.

Pour ce type de problème, les quantités étudiées sont les pulsations propres  $\omega_i$  et les modes propres de vibration  $\underline{\phi}_i$  associés au problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M}) \underline{\phi}_i = \underline{0} \quad (3.15)$$

où  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  sont respectivement, la matrice de rigidité éléments finis et la matrice de masse éléments finis de la structure étudiée. Le but ici est donc de retrouver les valeurs des méconnaissances effectives  $\Delta\alpha_{mod}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(P)$  à partir de la définition des méconnaissances de base (*cf.* équation (3.2)).

**Méconnaissances effectives sur la pulsation propre** La quantité étudiée est donc  $\omega_i$ . Après propagation des méconnaissances de base on peut obtenir les bornes  $\Delta\omega_{i mod}^{2+}(\theta)$  et

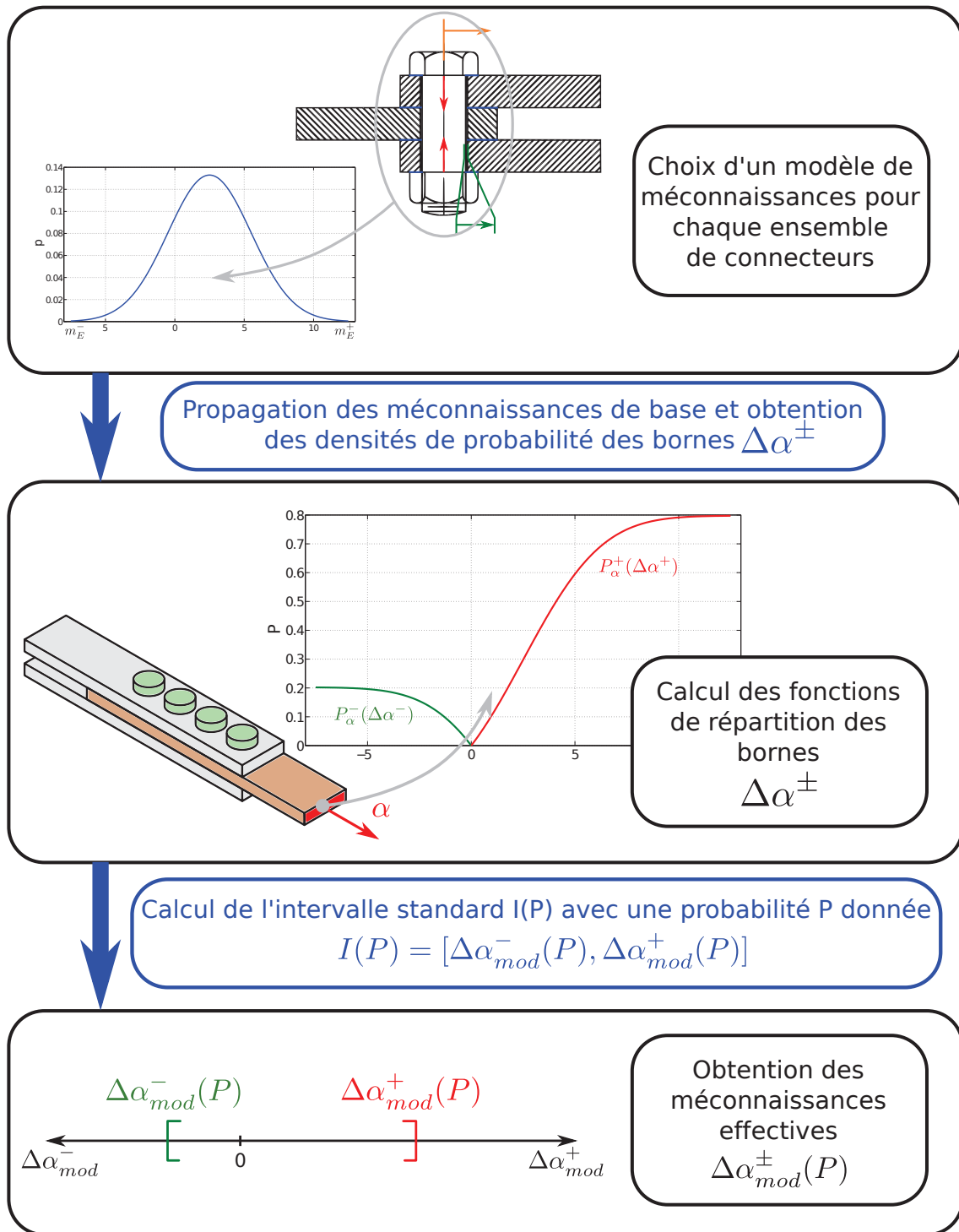


FIGURE 3.3: Calcul des méconnaissances effectives sur la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha_{mod}$



$\Delta\omega_{i\ mod}^{2-}(\theta)$  suivantes :

$$\Delta\omega_{i\ mod}^{2-}(\theta) = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (3.16)$$

$$\Delta\omega_{i\ mod}^{2+}(\theta) = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (3.17)$$

L'expression des bornes  $\Delta\omega_{i\ mod}^{2+}(\theta)$  et  $\Delta\omega_{i\ mod}^{2-}(\theta)$  est ensuite utilisée pour trouver un intervalle standard de probabilité  $P$ . Les bornes de l'intervalle standard  $\Delta\omega_{i\ mod}^{2+}(P)$  et  $\Delta\omega_{i\ mod}^{2-}(P)$  (les méconnaissances effectives) sont ensuite calculées et sont utilisées pour définir l'intervalle de confiance.

**Méconnaissances effectives sur les modes propres** La quantité étudiée est ici  $\phi_i$ . Les méconnaissances de base étant des quantités scalaires, seules des quantités scalaires peuvent être calculées en tant que méconnaissances effectives. En pratique, l'intervalle de confiance sera recherché en un degré de liberté donné d'un mode propre ou sur la projection, selon une direction donnée, d'un mode propre. Les détails du calcul théorique des méconnaissances effectives de ces quantités peuvent être consultés dans [Ladevèze *et al.*, 2004, Puel, 2004]. Nous ne donnerons ici que l'expression des bornes après propagation des méconnaissances de base suivantes :

$$\Delta\phi_{ki\ mod}^-(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \left( m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} + \bar{\phi}_i) + m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} - \bar{\phi}_i) \right) \quad (3.18)$$

$$\Delta\phi_{ki\ mod}^+(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \left( m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} + \bar{\phi}_i) + m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} - \bar{\phi}_i) \right) \quad (3.19)$$

Le vecteur  $\underline{U}$  est fonction des modes propres  $\phi_i$  et de la matrice de masse. Grâce à ces expressions, on peut déterminer les valeurs des bornes  $\Delta\phi_{ki\ mod}^+(P)$  et  $\Delta\phi_{ki\ mod}^-(P)$  associées à l'intervalle standard de probabilité  $P$ , qui sont au final, les méconnaissances effectives sur la valeur du degré de liberté  $k$  du mode propre  $\phi_i$ . Nous rappelons que les détails de ces propagations en dynamique sont présentés dans [Ladevèze *et al.*, 2004, Puel, 2004].

### 3.3.3 Propagation en quasi-statique

Cette partie concerne l'application de la théorie des méconnaissances à des problèmes de statique [Enjalbert, 2009, Louf *et al.*, 2010] pour des modèles linéaires. L'objectif est de modéliser les incertitudes concernant des quantités telles que la contrainte mécanique ou les déplacements en certains points de la structure. Tout comme les types de propagations précédentes, cette représentation des incertitudes s'effectue en supposant que les origines des dispersions peuvent être traduites par des variations d'énergie de déformation des connecteurs. Afin d'effectuer la propagation des méconnaissances de base dans le

cadre de sollicitations statiques, on définit  $\underline{x}$  la solution de l'équation d'équilibre statique :

$$\mathbb{K}\underline{x} = \underline{F} \quad (3.20)$$

où  $\underline{K}$  est la matrice de rigidité éléments finis de la structure étudiée et  $\underline{F}$  le vecteur des efforts généralisés. Dans ce cas également, le processus de propagation revient à déterminer, pour une quantité d'intérêt  $\alpha$ , l'écart entre la valeur qu'on peut attendre d'une structure réelle  $\alpha(\theta)$  et la valeur issue du modèle déterministe  $\bar{\alpha}$ . Cela revient donc à trouver les bornes  $\Delta\alpha^+(\theta)$  et  $\Delta\alpha^-(\theta)$  telles que :

$$-\Delta\alpha^-(\theta) \leq \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \leq \Delta\alpha^+(\theta) \quad (3.21)$$

La propagation des méconnaissances dans le cas de problèmes de statique est utilisée dans la suite de l'étude pour l'application aux assemblages de fixations. On peut exprimer la quantité  $\alpha$  en fonction de la solution éléments finis  $\underline{x}$  telle que :

$$\alpha = \underline{b}^T \underline{x} = (\mathbb{K}^{-1} \underline{b})^T \underline{F} \quad (3.22)$$

où  $\underline{b}$  est l'opérateur d'extraction associé à la quantité  $\alpha$ . Si les méconnaissances de base sont assez faibles, ce qui implique que  $\Delta\mathbb{K}$  le soit aussi, une linéarisation peut être effectuée :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\underline{F}^T \bar{\mathbb{K}}^{-1} (\Delta\mathbb{K}) \bar{\mathbb{K}}^{-1} \underline{b} \\ &= -\bar{\underline{x}}^T (\Delta\mathbb{K}) \underline{x}_b \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec  $\underline{x}_b = \bar{\mathbb{K}}^{-1} \underline{b}$ . Cette équation peut être interprétée comme une différence de deux produits scalaires :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \langle \langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle \rangle - \langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle \\ &= \sum_{E \in \Omega} \langle \langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle \rangle_E - \langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle_E \end{aligned} \quad (3.24)$$

les produits scalaires étant définis de la façon suivante :

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \mathbb{K} \underline{y} \quad \text{et} \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_E = \underline{x}^T \mathbb{K}_E \underline{y} \quad (3.25)$$

$$\langle \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \rangle = \underline{x}^T \bar{\mathbb{K}} \underline{y} \quad \text{et} \quad \langle \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \rangle_E = \underline{x}^T \bar{\mathbb{K}}_E \underline{y} \quad (3.26)$$

Afin de pouvoir exprimer  $\Delta\alpha$  en fonction de la relation (3.2), le produit scalaire  $\langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle_E$  peut être reformulé de la façon suivante :

$$\langle \bar{\underline{x}}, \underline{x}_b \rangle_E = \frac{1}{4} (\langle \bar{\underline{x}} + \underline{x}_b, \bar{\underline{x}} + \underline{x}_b \rangle_E - \langle \bar{\underline{x}} - \underline{x}_b, \bar{\underline{x}} - \underline{x}_b \rangle_E) \quad (3.27)$$

Pour trouver le meilleur encadrement possible de  $\langle \bar{x}, x_b \rangle_E$ , on introduit un scalaire  $\ell_E$  pour chaque sous-structure tel que :

$$\langle \bar{x}, x_b \rangle_E = \frac{1}{4\ell_E} (\langle \bar{x} + \ell_E x_b, \bar{x} + \ell_E x_b \rangle_E - \langle \bar{x} - \ell_E x_b, \bar{x} - \ell_E x_b \rangle_E) \quad (3.28)$$

En utilisant la relation (3.2), les bornes des produits scalaires précédents peuvent être calculées :

$$\langle \bar{x}, x_b \rangle_E \leq \frac{1}{4\ell_E} [(1 + m_E^+(\theta)) \langle \bar{x} + \ell_E x_b, \bar{x} + \ell_E x_b \rangle_E - (1 - m_E^-(\theta)) \langle \bar{x} - \ell_E x_b, \bar{x} - \ell_E x_b \rangle_E] \quad (3.29)$$

$$\langle \bar{x}, x_b \rangle_E \geq \frac{1}{4\ell_E} [(1 - m_E^+(\theta)) \langle \bar{x} + \ell_E x_b, \bar{x} + \ell_E x_b \rangle_E - (1 + m_E^-(\theta)) \langle \bar{x} - \ell_E x_b, \bar{x} - \ell_E x_b \rangle_E] \quad (3.30)$$

Les bornes de la relation (3.21) peuvent être réécrites de la forme suivante :

$$\Delta\alpha^+(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}} \left[ (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) \frac{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_E + \ell_E^2 \langle x_b, x_b \rangle_E}{4\ell_E} - \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle \bar{x}, x_b \rangle_E \right] \quad (3.31)$$

$$\Delta\alpha^-(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}} \left[ (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) \frac{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_E + \ell_E^2 \langle x_b, x_b \rangle_E}{4\ell_E} + \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle \bar{x}, x_b \rangle_E \right] \quad (3.32)$$

Afin de minimiser l'écart  $(\Delta\alpha^+ + \Delta\alpha^-)$  par rapport à  $\ell_E$ , les relations suivantes sont supposées vérifiées pour chaque sous-structure  $E$  :

$$\frac{\partial(\Delta\alpha^+ + \Delta\alpha^-)}{\partial\ell_E} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta\alpha^+ + \Delta\alpha^-)}{\partial^2\ell_E} \geq 0 \quad (3.34)$$

Pour chaque sous-structure, les variables scalaires  $\ell_E$  vérifiant l'équation (3.33) peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\ell_E = \varepsilon_E \sqrt{\frac{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_E}{\langle x_b, x_b \rangle_E}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_E = \pm 1 \quad (3.35)$$

De plus, la vérification de l'équation (3.34) entraîne :

$$l_E = \sqrt{\frac{\langle\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\rangle_E}{\langle\langle x_b, x_b \rangle\rangle_E}} \quad (3.36)$$

Cette expression de  $l_E$  permet également de vérifier que l'écart  $(\Delta\alpha^+ + \Delta\alpha^-)$  reste positif. Finalement les bornes optimales sont calculées :

$$\Delta\alpha^+(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}} \left[ \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle\langle x_b, x_b \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle\langle \bar{x}, x_b \rangle\rangle_E \right] \quad (3.37)$$

$$\Delta\alpha^-(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}} \left[ \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle\langle x_b, x_b \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle\langle \bar{x}, x_b \rangle\rangle_E \right] \quad (3.38)$$

De façon similaire aux deux précédents types de propagation des méconnaissances de base, on peut déduire, grâce à l'expression des bornes de  $\Delta\alpha$ , un intervalle standard de probabilité  $P$ ,  $[-\Delta\alpha^-(P), \Delta\alpha^+(P)]$  dont les bornes sont les méconnaissances effectives.

### 3.4 Recalage des méconnaissances de base

Quelque soit le type de problème mécanique abordé, nous venons de voir que le recours à la théorie des méconnaissances peut être une stratégie efficace pour la prise en compte des incertitudes sur des structures de grande échelle. Ce processus s'effectue par l'intermédiaire d'une globalisation de ces incertitudes à l'échelle des sous-structures. Le rôle que jouent les données issues de mesures expérimentales est primordial en vue de valider le modèle avec méconnaissances. En effet, lors de la définition des méconnaissances de base, les lois de probabilité sont habituellement choisies *a priori* avec de grands niveaux de dispersion. Vient ensuite une étape de recalage de ces lois de probabilité par rapport aux données. Cette étape peut être vue comme la définition d'un problème inverse [Bonnet et Constantinescu, 2005] dans lequel on cherche à retrouver un jeu de paramètres d'entrée (méconnaissances de base), compatibles avec des données de sorties, expérimentales ou numériques, que l'on considère comme données de référence. Nous utiliserons comme données de référence, dans cette partie de recalage, les données issues de la simulation de Monte Carlo obtenues dans la partie 2.3.

À ces données simulées seront associées deux valeurs  $[-\Delta\alpha_{exp}^-(P), \Delta\alpha_{exp}^+(P)]$  qui, pour une valeur  $P$  donnée, encadrent une proportion  $P$  des valeurs simulées de la quantité  $\Delta\alpha_{exp} = \alpha_{exp} - \bar{\alpha}$ . La méthode consiste à définir des méconnaissances de base majorantes par rapport aux données simulées pour pouvoir les « réduire » lors du recalage. Ce recalage consiste ensuite à utiliser l'apport d'information fournie par les données simulées

et à les comparer aux méconnaissances effectives  $[-\Delta\alpha^-(P), \Delta\alpha^+(P)]$ . En pratique, on minimise une fonction coût qui traduit l'écart entre l'intervalle  $[-\Delta\alpha_{exp}^-(P), \Delta\alpha_{exp}^+(P)]$  et l'intervalle  $[-\Delta\alpha^-(P), \Delta\alpha^+(P)]$ . Dans la suite de l'étude, Les données simulées seront supposées représenter parfaitement le comportement de la structure réelle. La **Figure 3.4** illustre le principe général du recalage des méconnaissances de base. Étant en présence de plusieurs méconnaissances de base, le recalage se décompose en plusieurs étapes. Tout d'abord, une paire {méconnaissances de base  $m_i^\pm$ ; quantité d'intérêt  $\alpha_i$ } est choisie au pas  $i$ . Quand les méconnaissances de base  $m_i^\pm$  sont recalées sur la quantité  $\alpha_i$ , un autre pas  $j$  est effectué afin de recaler d'autres méconnaissances de base  $m_j^\pm$  sur la quantité d'intérêt  $\alpha_j$ . Généralement, on s'arrange pour choisir les méconnaissances de base et les quantités d'intérêt telles que  $m_i \neq m_j$  et  $\alpha_i \neq \alpha_j$ . Toute la difficulté de cette partie réside dans le choix de la paire {méconnaissances de base  $m_i^\pm$ ; quantité d'intérêt  $\alpha_i$ } à chaque pas du recalage. Pour cela, une étude de sensibilité basée sur les énergies de déformation par sous-structure est proposée pour sélectionner les paires ainsi que l'ordre de recalage. Le principe de cette étude de sensibilité a été détaillé dans [Puel, 2004] et [Ladevèze *et al.*, 2006c]. La méthode se base sur l'étude des termes constituant l'expression des méconnaissances effectives (*cf.* équations (3.37) et (3.38)) :

1. sur chaque sous-structure, les termes  $(\langle\langle\bar{x}, \bar{x}\rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}}$ ,  $(\langle\langle\bar{x}_b, \bar{x}_b\rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}}$  et  $\langle\langle\bar{x}, \bar{x}_b\rangle\rangle_E$  sont comparés pour chaque  $\alpha$  disponible ;
2. la sous-structure ( $E$ ) ayant la plus grande influence sur une quantité  $\alpha$  est choisie pour le recalage au pas  $i$ . De ce fait,  $m_i = m_E$  et  $\alpha_i = \alpha$  ;
3. en modifiant les méconnaissances de base  $m_i^\pm$  (modification de leur loi de probabilité), les méconnaissances effectives du modèle  $[\bar{\alpha}_i - \Delta\alpha_i^-; \bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_i^+]$  sont ajustées autour de l'intervalle des valeurs simulées  $[\bar{\alpha}_i - \Delta\alpha_{i\ exp}^-; \bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_{i\ exp}^+]$ .

Le processus est ensuite répété pour un pas  $j$  en ignorant généralement les méconnaissances  $m_i^\pm$  et la quantité  $\alpha_i$  si le recalage au pas  $i$  a atteint un critère de précision convenable. Le critère choisi dans cette application est un critère de moindre-carré par rapport aux bornes de l'intervalle simulé. Ce critère est donc appliqué à chaque étape n°3 du recalage et pour chaque pas. Le problème consiste à minimiser  $e^2$  tel que :

$$e^2 = (\alpha_i^+ - \alpha_{i\ exp}^+)^2 + (\alpha_i^- - \alpha_{i\ exp}^-)^2 \quad (3.39)$$

avec les conditions supplémentaires :  $\alpha_i^- \leq \alpha_{i\ exp}^-$  et  $\alpha_{i\ exp}^+ \leq \alpha_i^+$ . Cette minimisation est mise en application grâce à une méthode de gradient numérique.

## 4 Application au cas industriel

Les principes de la construction du modèle avec méconnaissances ayant été établis, cette partie illustre son application sur la fixation boulonnée employée à la partie 3. L'objectif principal de cette partie est de réussir à englober les comportements issus de la famille de structures simulées avec un modèle avec méconnaissances se basant sur un

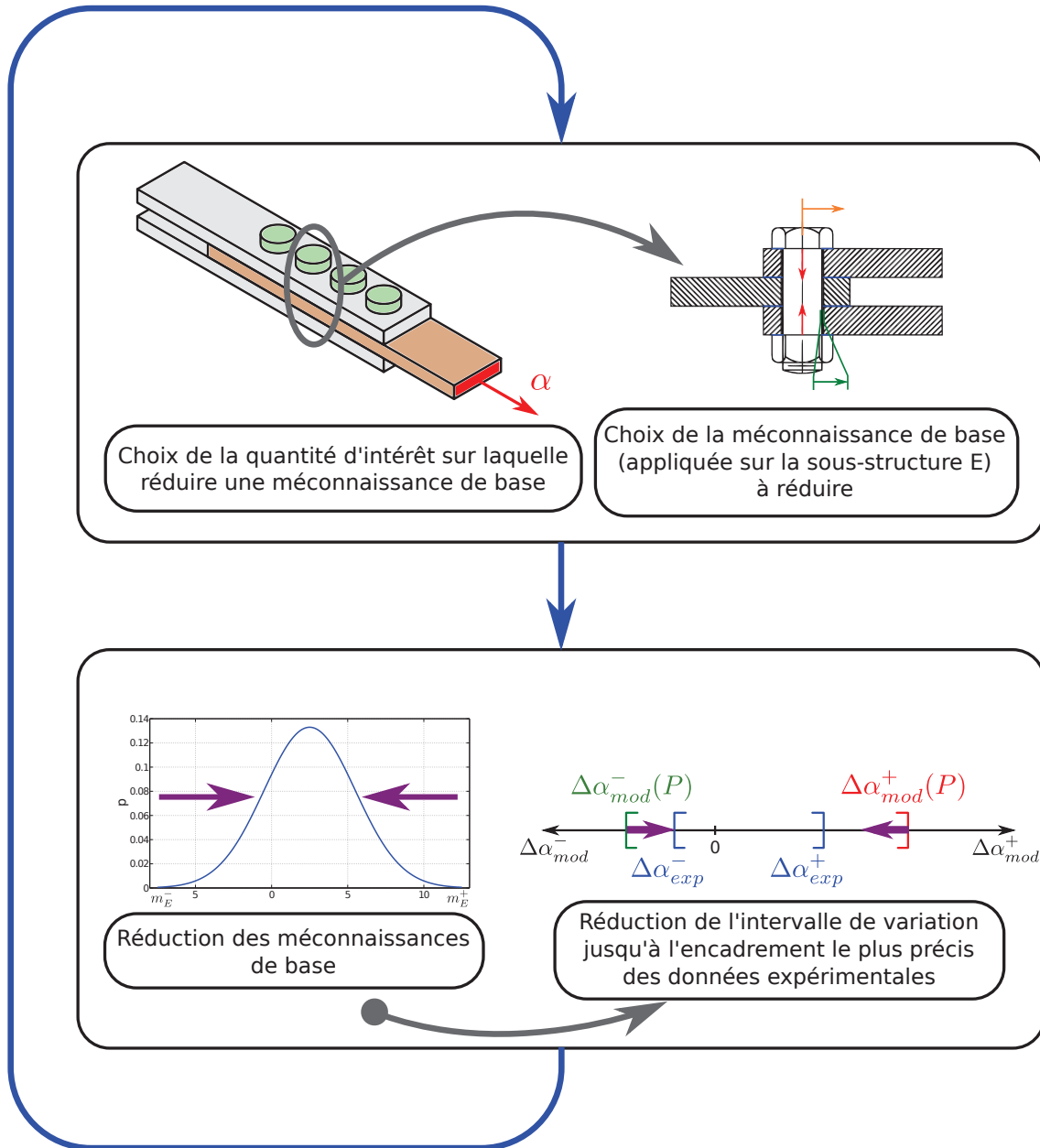


FIGURE 3.4: Principe de recalage des méconnaissances de base

modèle déterministe linéaire. Les résultats recueillis sont issus du schéma proposé : définition, propagation et recalage des méconnaissances de base. Avant d'analyser les différents résultats, un paragraphe est dédié à l'explication des méthodes numériques utilisées permettant mettre en pratique la stratégie proposée.

#### 4.1 Implémentation numérique

Cette partie implique l'utilisation de deux types de modèle numérique. Le premier type de modèle est non linéaire et utilisé pour des essais numériques afin d'obtenir un volume de données nécessaire au recalage du modèle avec méconnaissances. Le deuxième type de modèle est linéaire et est considéré comme le modèle déterministe sur lequel se base le modèle avec méconnaissances. Ces deux types de modèle sont implémentés avec le logiciel ABAQUS. Les géométries, les conditions aux limites, les comportements ainsi que les maillages sont réalisés sous ABAQUS/CAE. Les calculs sont quant à eux effectués sous ABAQUS/Standard, soit pour réaliser les simulations de Monte Carlo concernant les essais numériques, soit pour exporter les matrices de rigidité dans le cas du modèle linéaire déterministe. Ces matrices sont ensuite importées dans le logiciel MATLAB afin de procéder au recalage du modèle déterministe, à l'application des méconnaissances et au recalage des méconnaissances de base. La **Figure 3.5** illustre les différentes étapes numériques de la stratégie. On peut remarquer que l'application de la théorie des méconnaissances ne modifie en rien la résolution du problème mécanique, qui s'effectue ici sous des codes à éléments finis standard. Ceci montre bien le caractère non intrusif de la stratégie.

#### 4.2 Définition et propagation des méconnaissances de base

Pour commencer, la structure boulonnée est modélisée par un ensemble de sous-structures  $E$  ( $E \in \mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}$  étant la structure complète). Comparativement à la sous-structuration choisie dans le **Chapitre 2**, chaque plaque constitue une sous-structure. Également, les groupes de connecteurs suivants sont considérés comme sous-structures :

- sous-structure 1 : connecteurs 1 et 2 ;
- sous-structure 2 : connecteurs 3, 4, 5 et 6 ;
- sous-structure 3 : connecteurs 7, 8, 9 et 10.

Les sous-structures  $E = \{4, \dots, 10\}$  représentent les plaques. Concernant la définition des méconnaissances de base, on choisit d'affecter ces variables seulement sur les sous-structures de connecteurs. Les incertitudes portant sur le comportement des plaques est supposé négligeable comparativement à celui des fixations. Pour chaque sous-structure de connecteurs, un couple de méconnaissance de base est affecté aux raideurs hors-plan (plan des plaques) des connecteurs ( $m_{Eout}^{\pm}$ ), et un autre aux raideurs dans le plan ( $m_{Ein}^{\pm}$ ). Finalement, cela revient à considérer 6 paires de méconnaissances de base :  $m_{1in}^{\pm}$ ,  $m_{1out}^{\pm}$ ,  $m_{2in}^{\pm}$ ,  $m_{2out}^{\pm}$ ,  $m_{3in}^{\pm}$ ,  $m_{3out}^{\pm}$ . La propagation s'effectue ensuite à partir de chaque méconnaissance de base en appliquant les formules des équations (3.37) et (3.38). Les méconnaissances effectives sont calculées pour les quantités locales suivantes :

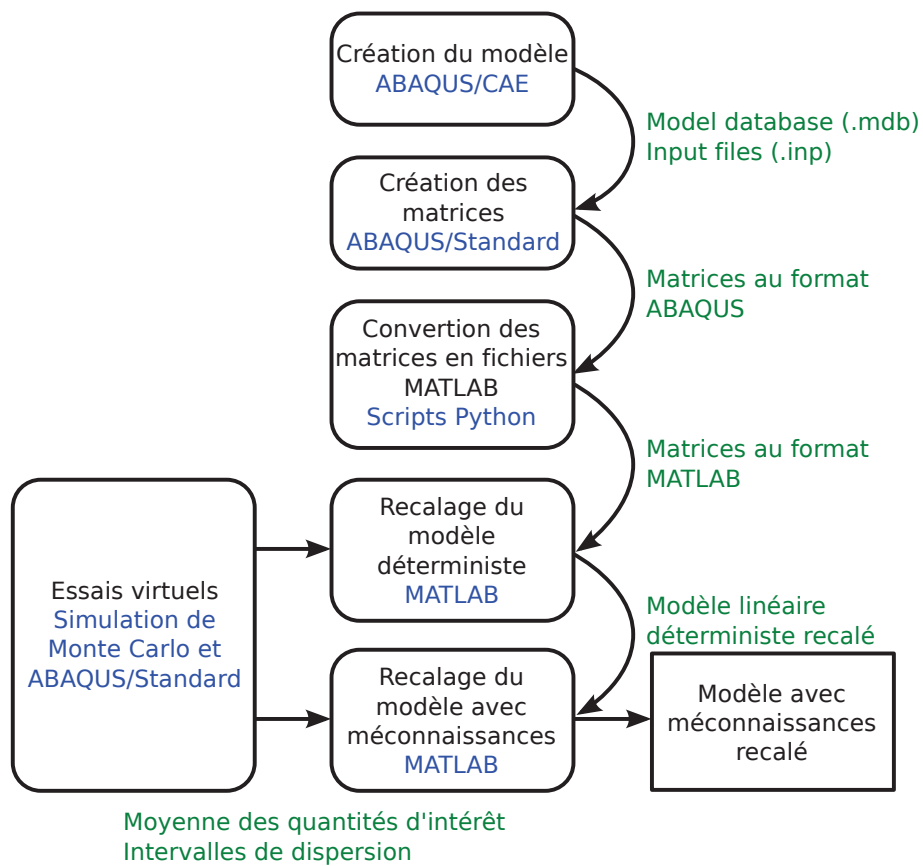


FIGURE 3.5: Schéma de l'implémentation numérique

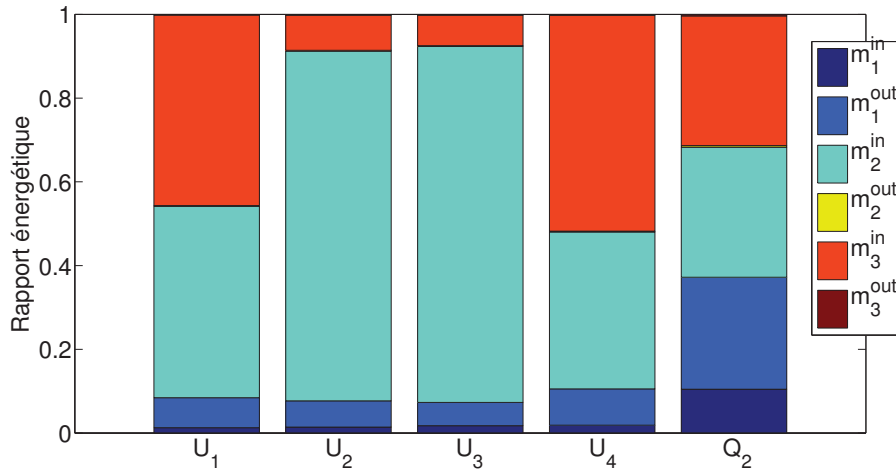


- le déplacement selon l'axe  $x$  aux points 1, 2, 3 et 4 de la **Figure 2.25** ;
- l'effort transmis selon l'axe  $x$  au point 2 de la même figure.

Les valeurs des méconnaissances de base sont définies *a priori*. Afin de commencer le processus de recalage avec des bornes surdimensionnantes, on choisit pour loi de probabilité associée à chaque méconnaissance de base  $m_E^+$  et  $m_E^-$ , une loi normale centrée tronquée avec  $[\bar{m}_E^+; \bar{m}_E^-] = [-0, 7; 0, 7]$ .

### 4.3 Recalage des méconnaissances de base

Le recalage des méconnaissances de base s'effectue conformément aux principes énoncés dans la Partie 3.4. Les données simulées sont utilisées afin de valider le modèle avec méconnaissances. L'application des méconnaissances sur chaque sous-structure implique le recalage de 6 paires de méconnaissances de base. La **Figure 3.6** illustre le comparatif des énergies associées à chaque quantité d'intérêt étudiée introduit dans la Partie 3.4.



**FIGURE 3.6:** Rapports énergétiques des quantités d'intérêt

$$\Delta\alpha^\pm = \sum_{E \in \mathbb{E}} \left[ \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) \underbrace{\langle \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \rangle_E^{\frac{1}{2}} \langle \langle \bar{x}_b, \bar{x}_b \rangle \rangle_E^{\frac{1}{2}}}_{C_1^E} \mp \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \underbrace{\langle \langle \bar{x}, \bar{x}_b \rangle \rangle_E}_{C_2^E} \right] \quad (3.40)$$

Chaque barre représente la somme :

$$S_\alpha = \sum_{E \in \mathbb{E}} (C_1^E + C_2^E) \quad (3.41)$$

pour une quantité d'intérêt  $\alpha$  (cf. equation (3.40)). Chaque partie colorée représente le terme  $(C_1^E + C_2^E)$  associé à la sous-structure  $E$ . La comparaison de ces termes énergétiques revient à faire à une analyse de sensibilité sur les méconnaissances de base. Premièrement, cette étude souligne le fait que les méconnaissances de base  $m_{2out}^\pm$  et  $m_{3out}^\pm$  n'ont que très peu d'influence sur les quantités d'intérêt étudiées. Pour ce cas de chargement, cela signifie que les variations de comportement concernant les raideurs hors plan des sous-structures 2 et 3 n'ont quasiment pas d'influence sur les variations obtenues sur les quantités étudiées. Deuxièmement, la figure montre que les méconnaissances de base  $m_{2in}^\pm$  ont une influence majeure sur les quantités  $U_2$  et  $U_3$  (environ 90% du rapport énergétique). Sachant que l'énergie de déformation est plus importante pour  $U_2$  que pour  $U_3$ , la stratégie de recalage proposée est la suivante :

- recalage de  $U_2$  avec  $m_{2in}^\pm$  ;
- recalage de  $U_1$  avec  $m_{3in}^\pm$  ;
- recalage de  $Q_2$  avec  $m_{1out}^\pm$ .

La **Table 3.1** compare les intervalles de variation simulés avec les méconnaissances effectives. Elle donne les valeurs des bornes (simulées et méconnaissances effectives) ainsi que leur valeur relative par rapport à la moyenne des valeurs simulées. La **Table 3.2** montre l'évolution avant et après le recalage des valeurs de  $[\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$  des méconnaissances.

$\alpha$	Intervalle simulé	Méconnaissances effectives
$U_1$ (mm)	$[5.77 \cdot 10^{-1}, 7.00 \cdot 10^{-1}]$ [-9.6%, +9,6%]	$[5.63 \cdot 10^{-1}, 7.15 \cdot 10^{-1}]$ [-11.8%, +11.9%]
$U_2$ (mm)	$[3.17 \cdot 10^{-1}, 3.78 \cdot 10^{-1}]$ [-8.8%, +8.8%]	$[3.11 \cdot 10^{-1}, 3.82 \cdot 10^{-1}]$ [-10.4%, +9.8%]
$U_3$ (mm)	$[1.11 \cdot 10^{-1}, 1.20 \cdot 10^{-1}]$ [-3.7%, +3.7%]	$[1.00 \cdot 10^{-1}, 1.43 \cdot 10^{-1}]$ [-13.1%, +23.5%]
$U_4$ (mm)	$[5.20 \cdot 10^{-1}, 6.34 \cdot 10^{-1}]$ [-9.9%, +9.9%]	$[4.90 \cdot 10^{-1}, 6.54 \cdot 10^{-1}]$ [-15.1%, +13.4%]
$Q_2$ (N)	[18049, 18159] [-0.3%, +0.3%]	[17714, 18267] [-2.1%, +0.9%]

**TABLE 3.1:** Résultats du recalage du modèle avec méconnaissances

La **Figure 3.7** représente les intervalles simulés ainsi que les méconnaissances effectives avant (vert clair) et après (vert foncé) le recalage des méconnaissances de base. Toutes les bornes sont tracées en valeur relative par rapport à la valeur moyenne des données simulées. Pour rappel, les données simulées que l'on cherche à encadrer sont obtenues par le modèle géométrique illustré à la **Figure 2.24**. Les fixations sont modélisées

	$m_{2in}$	$m_{3in}$	$m_{1out}$
Méconnaissances $[\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$ de base initiales	$[-0.7, 0.7]$	$[-0.7, 0.7]$	$[-0.7, 0.7]$
Méconnaissances $[\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$ de base recalées	$[-0.31, 0.31]$	$[-0.65, 0.65]$	$[-0.7, 0.7]$

TABLE 3.2: Évolution des méconnaissances de base

par des connecteurs linéaires. Les plaques de la structure sont en contact avec frottement. Enfin, les connecteurs sont préchargés pour simuler l'opération de serrage des boulons. Les variations de comportement sont obtenues par une simulation de Monte Carlo, les précharges et les rigidités des connecteurs étant modélisées par des variables aléatoires.

Les résultats du recalage montrent le bon comportement de la réduction des méconnaissances de base. En effet, l'algorithme n'a besoin que de très peu d'itérations (5 environ) avant convergence. On remarque également que la qualité des résultats obtenus pour les points 1 et 2 sont nettement meilleurs que ceux des points 3 et 4. Pour ces deux derniers points, on peut supposer que le fait d'être dans des zones où le contact joue fortement dans le modèle non linéaire, alors qu'il n'est pas représenté dans le modèle linéaire, influe sur la qualité des résultats. Nous pourrions remarquer que les résultats restent conservatifs.

On pourra finalement rappeler l'importance de la phase de recalage du modèle déterministe par rapport à la qualité de ces résultats. En effet, un mauvais recalage déterministe aurait entraîné des intervalles calculés décentrés par rapport au intervalles simulés de référence. La phase de recalage des méconnaissances de base n'aurait eu que très peu d'effets sur les résultats.

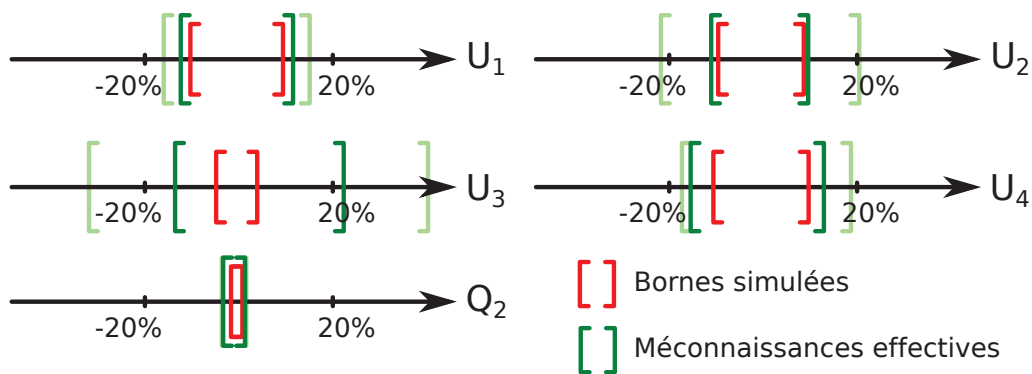


FIGURE 3.7: Intervalles obtenus par simulation de Monte Carlo (modèle non-linéaire) et par la théorie des méconnaissances

## 4.4 Conclusions

Dans cette partie, l'objectif a été d'utiliser le modèle déterministe recalé obtenu au **Chapitre 2** afin d'y ajouter une représentation des variabilités, toujours dans un contexte d'analyse descendante. Le modèle avec méconnaissances obtenu a permis de générer des données sur le comportement de la structure avec une estimation des incertitudes qui lui sont associées. Les résultats de ce modèle permettront ensuite de localiser les zones les plus chargées afin de procéder à une réanalyse locale plus complexe. Le modèle avec méconnaissances est constitué d'un modèle déterministe (ici recalé) associé à la théorie des méconnaissances. Dans un premier temps, nous avons pu recalé le modèle déterministe en utilisant les données simulées afin qu'il représente au mieux l'ensemble des structures simulées. Ensuite, la théorie des méconnaissances a pu être appliquée sur les différentes sous-structures du modèle de fixations boulonnées. Et enfin, ce modèle avec méconnaissances a également été recalé avec les données simulées afin d'obtenir la représentation la plus fidèle possible de la réalité (simulée dans notre cas). Les résultats obtenus confirment finalement l'efficacité de la stratégie proposée. Cependant plusieurs développements restent à effectuer :

- l'élaboration d'une technique d'identification de la sous-structuration à construire afin d'optimiser au mieux l'application de la théorie des méconnaissances ;
- l'implémentation globale du code de calcul dans l'environnement ABAQUS afin d'être en mesure d'appliquer plus naturellement la stratégie proposée sur des cas industriels.



## Chapitre 4

# Perspectives pour une utilisation à plus grande échelle

*Dans ce dernier chapitre, nous introduisons l'application de cette stratégie sur des cas plus sévères de modélisation de fixations. Le système étudié, la stratégie de dimensionnement, mais aussi les limitations de la méthode sont présentés dans ce chapitre. Un des points importants de cette partie sera d'observer l'extensibilité de la modélisation des fixations à des structures de plus grande échelle.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Contexte industriel</b> . . . . .	<b>112</b>
<b>2</b>	<b>Exemple traité</b> . . . . .	<b>112</b>
<b>3</b>	<b>Approche proposée</b> . . . . .	<b>114</b>
3.1	Construction des mesures de référence . . . . .	115
3.2	Construction du modèle simplifié . . . . .	116
3.3	Limitations rencontrées lors du recalage de modèle simplifié . . . . .	116
3.4	Conclusion . . . . .	117

---

## 1 Contexte industriel

Un des objectifs de ce chapitre est de généraliser la méthode de dimensionnement proposée pour des éléments de fixation de plus grande taille. En effet, jusqu'à présent, les éléments dimensionnés lors de l'application de la stratégie ont été les ensembles de boulons ou de rivets. Dans certains cas pourtant, représenter des sous-ensembles de fixations par des connecteurs (dans le modèle linéaire simplifié) peut se révéler être intéressant lorsque les fixations sont utilisées de façon répétitive sur une structure globale. Plusieurs questions peuvent être soulevées dans ce cas là. Tout d'abord, il est important de savoir si le fait de représenter une sous-structure, contenant cette fois-ci plus de non-linéarités, par un connecteur linéaire reste acceptable. Le deuxième point est de vérifier si la globalisation de toutes les incertitudes de la sous-structure par une méconnaissance reste convenable. Le problème qu'il se pose est de savoir si l'ensemble des paramètres incertains présents dans la sous-structure peut être globalisé par une méconnaissance lorsque celle-ci est constituée de plusieurs fixations boulonnées ou rivetées.

Cette partie aura donc pour but d'étudier le comportement de la stratégie lorsqu'un connecteur est utilisé pour représenter plusieurs fixations. Dans ce cas, on ajoute au modèle de connecteur une échelle de modélisation plus grande. La **Figure 4.1** illustre la stratégie telle que présentée dans les chapitres précédents. La **Figure 4.2** présente quant à elle la stratégie telle que nous la proposons dans ce chapitre pour des structures de plus grande échelle. Une modélisation des fixations semblable à celle des chapitres précédents n'aurait pas été justifiée à cette échelle d'étude. En effet, à cette échelle, les interactions entre les fixations sont très fortes et les distinguer avec différents modèles avec méconnaissances ne semble pas nécessaire et pertinent. De plus, le travail de recalage doit être réalisé à une échelle pour laquelle les données de référence sont disponibles. Dans de très nombreux cas pour les structures de grande taille, les modèles avec méconnaissances seront construits à partir du comportement de famille de structures à de plus petites échelles. Enfin, à ces échelles, il peut y avoir beaucoup trop de liaisons pour qu'un travail de recalage puisse être effectué.

En définitive, ce chapitre permet de vérifier l'extensibilité de la stratégie dans des conditions plus sévères de modélisation.

## 2 Exemple traité

Le support sur lequel la stratégie est appliquée est une structure simple composée de 4 pièces : une sous-structure élancée, fixée par l'intermédiaire de 3 sous-structures de fixations à une structure rigide. Une vue schématique de l'assemblage est présentée sur la **Figure 4.3**. Ce type de structures est étudié car il est assez fréquent dans l'industrie aéronautique. Les sous-structures sont constituées de 8 fixations boulonnées, 4 fixations sont reliées à la structure élancée et les 4 autres à la structure rigide. Dans cet exemple, le matériau des plaques de la structure souple des structures de fixation est en aluminium.

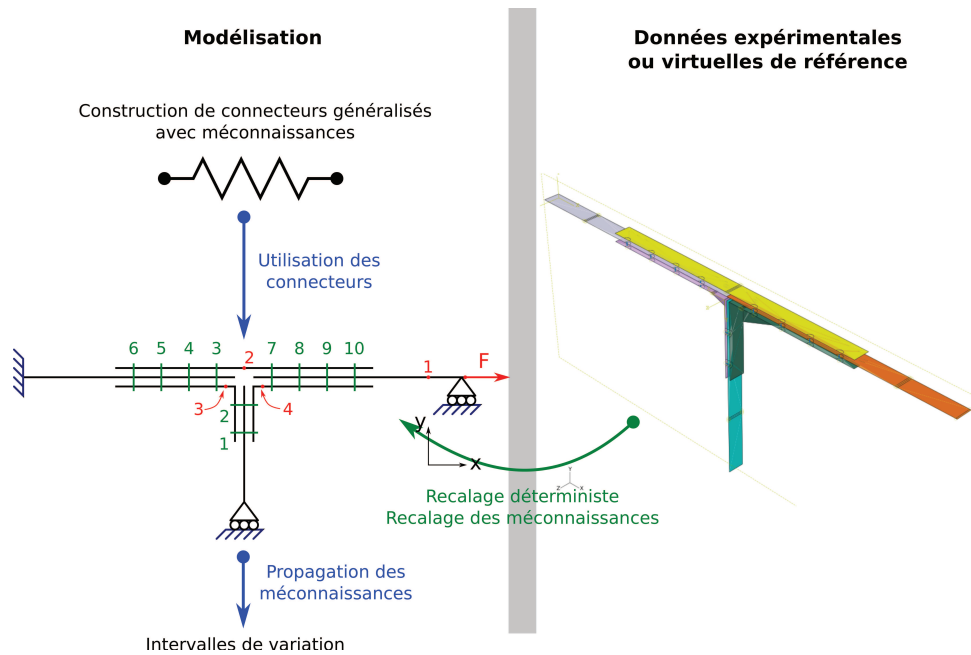


FIGURE 4.1: Stratégie de modélisation envisagée au Chapitre 2

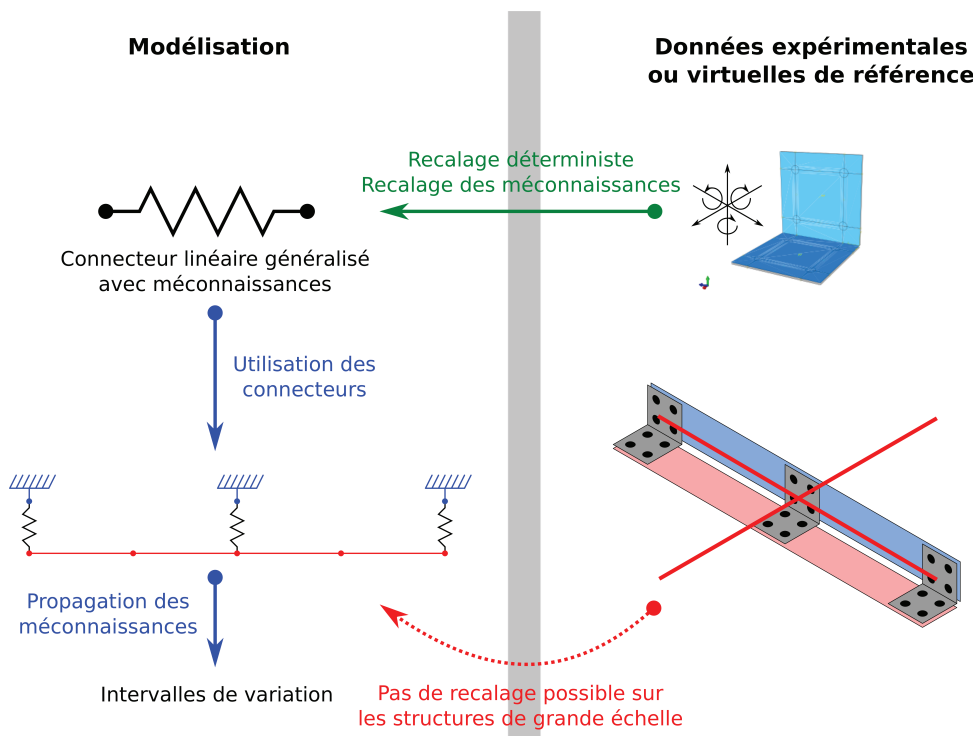


FIGURE 4.2: Stratégie de modélisation envisagée pour les structures de très grande taille



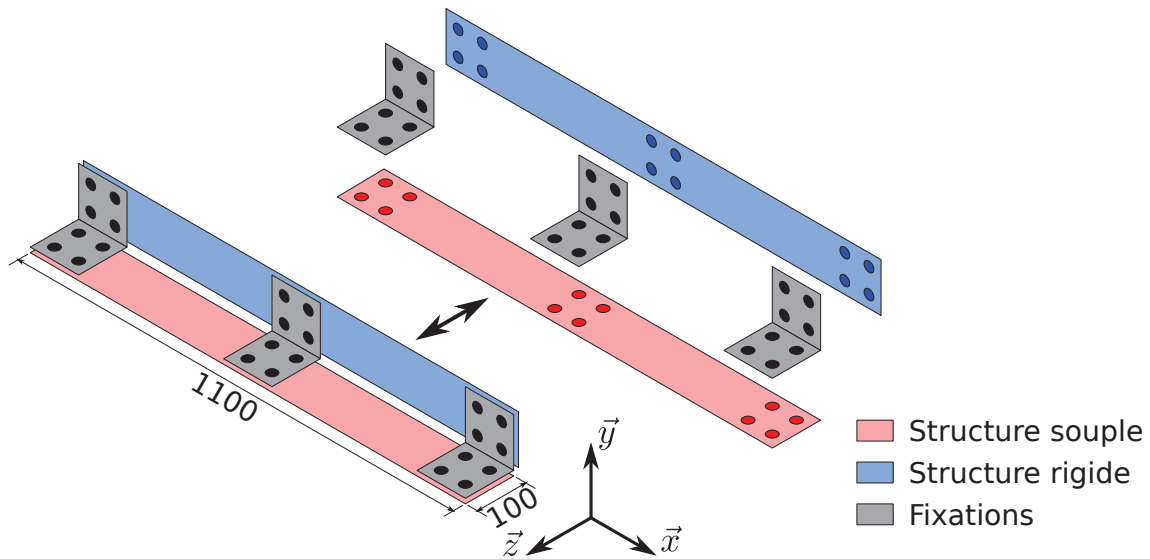


FIGURE 4.3: Vue schématique de l'assemblage étudié

Tout comme les ensembles traités dans les chapitres précédents, l'assemblage fait intervenir du contact avec frottement entre les plaques, des précharges des boulons et des jeux de fabrication. Tous ces paramètres sont également considérés comme incertains et doivent faire l'objet d'une modélisation de leurs variations.

### 3 Approche proposée

La technique retenue pour le dimensionnement de cet assemblage est la même que celle construite dans les chapitres précédents. Elle consiste à réaliser les points suivants :

- construction du modèle simplifié linéaire de la structure complète ;
- recalage du modèle linéaire de fixation par rapport aux mesures de référence ;
- application de la théorie des méconnaissances aux sous-ensembles de fixations.

Ces trois points sont détaillés dans les sections suivantes. Dans un souci de simplicité, le modèle simplifié représentera la structure seulement sur son comportement 2D dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ . Les résultats obtenus permettront d'isoler les structures les plus chargées pour qu'elles soient soumises à une réanalyse locale mettant en œuvre une modélisation plus complexe.

La différence avec les chapitres précédents se place au niveau du recalage du modèle avec méconnaissances. En effet, les recalages (déterministe et des méconnaissances) ne seront pas effectués sur des mesures issues du comportement de la structure complète mais seulement sur des mesures issues du comportement de la structure de fixation. Nous nous plaçons donc dans un contexte où la structure globale réelle ne peut être testée expérimentalement ou numériquement avec une modélisation complexe. Seuls des essais (expérimentaux ou numériques complexes) peuvent être réalisés sur la structure de fixa-

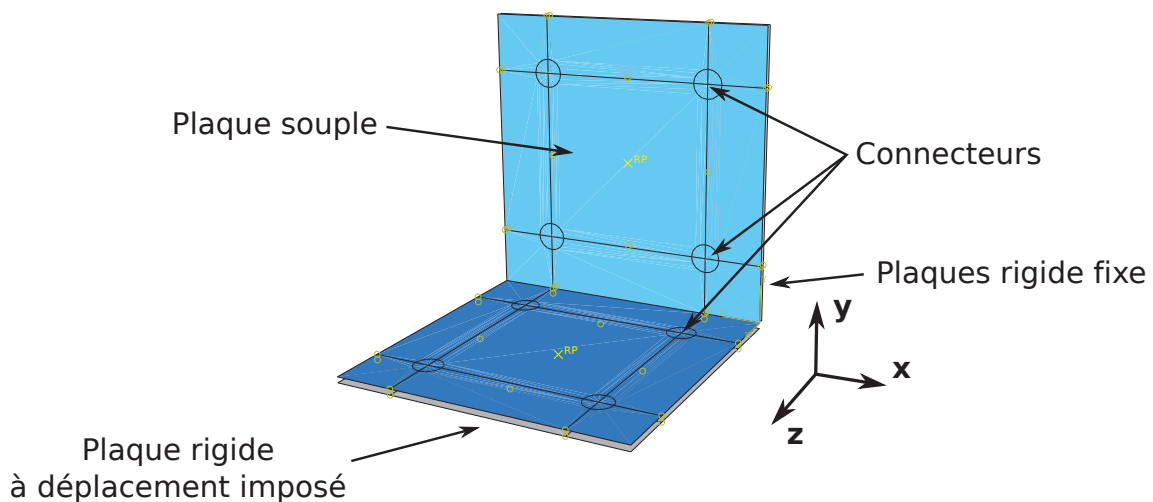
tions.

L'objectif est donc de construire un modèle de connecteur avec méconnaissances représentant le comportement avec incertitude d'une structure de fixations représentée sur la **Figure 4.3**. L'utilité du recalage à cette échelle est de construire un modèle linéaire de fixations avec méconnaissances prêt à être utilisé en très grand nombre dans une modélisation de structure à grande échelle. Pour notre exemple, ce modèle recalé est ensuite appliqué sur la structure globale aux trois points de fixations. Les résultats du comportement du modèle simplifié avec méconnaissances pourra être comparé avec celui de la structure réelle.

Avant de détailler les différents points de l'application de la stratégie, nous présentons le mode d'obtention des données de référence qui seront ici simulées.

### 3.1 Construction des mesures de référence

Pour cet exemple, deux séries de simulations sont effectuées. La première consiste à représenter la structure de fixations seule avec une modélisation plaque pour la structure. Les boulons sont modélisés par des éléments connecteurs avec précharge. Les connecteurs sont reliés à des éléments rigides plaque en contact frottant avec la structure de fixations utilisée pour appliquer le chargement. Le modèle numérique est présenté sur la **Figure 4.4**. Comme l'application réalisée aux chapitres précédents, une simulation de

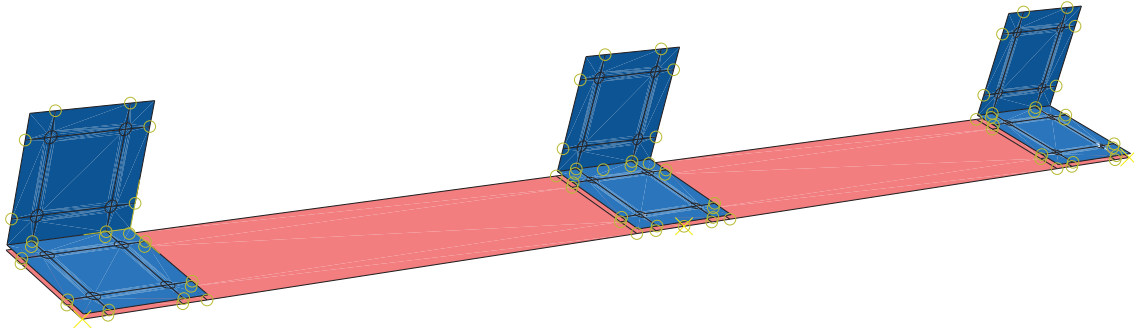


**FIGURE 4.4:** Modèle non linéaire construit pour les essais numériques

Monte Carlo est effectuée pour simuler les mesures de référence. Les raideurs des connecteurs (selon  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ) ainsi que leurs précharges sont modélisées par des variables aléatoires. Six cas de chargement sont étudiés : 3 déplacements selon  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  de 0,01 mm, et

3 rotations selon  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  de 0,001 rad. Ces simulations permettent donc d'obtenir 6 séries de données simulant le comportement d'une famille de structures.

La deuxième série de simulations consiste à réaliser une simulation de Monte Carlo sur une modélisation de la structure globale (cf. **Figure 4.3**). Le détail du modèle numérique est présenté sur la **Figure 4.5**. Les structures de fixations sont identiques à celles



**FIGURE 4.5:** Modèle numérique de la structure globale (structure rigide non représentée)

utilisées avec la première série de simulation. La plaque souple est liée aux ensembles de fixations par des connecteurs préchargés. Le contact entre les plaques s'effectue également avec du frottement. Les variables aléatoires sont identiques à celles de la première série de simulations. Le chargement est obtenu en simulant un cas de défaut de positionnement des structures de fixations sur la structure rigide. Les résultats collectés sont principalement les efforts résiduels sur les structures de fixations.

### 3.2 Construction du modèle simplifié

Le modèle linéaire est basé sur une modélisation poutre de la structure souple et une modélisation par connecteurs des structures de fixations. La structure rigide est quant à elle modélisée par des nœuds rigides en liaison avec les connecteurs. L'étude de cette modélisation se fera en 2D. Le schéma de la structure linéaire est présenté sur la **Figure 4.6**. Les connecteurs sont composés de deux raideurs en déplacement selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et une raideur en rotation selon  $\vec{z}$ . Ces trois paramètres seront les paramètres à recalibrer dans la partie suivante.

### 3.3 Limitations rencontrées lors du recalage de modèle simplifié

Le recalage du modèle déterministe s'effectue ici au niveau du connecteur seul. L'objectif est d'approcher la structure de fixations à comportement non linéaire par un connecteur linéaire. Le recalage s'effectue avec plusieurs cas de chargement. Il faut donc modifier l'équation (2.14) afin de prendre en compte le comportement de ces trois chargements.

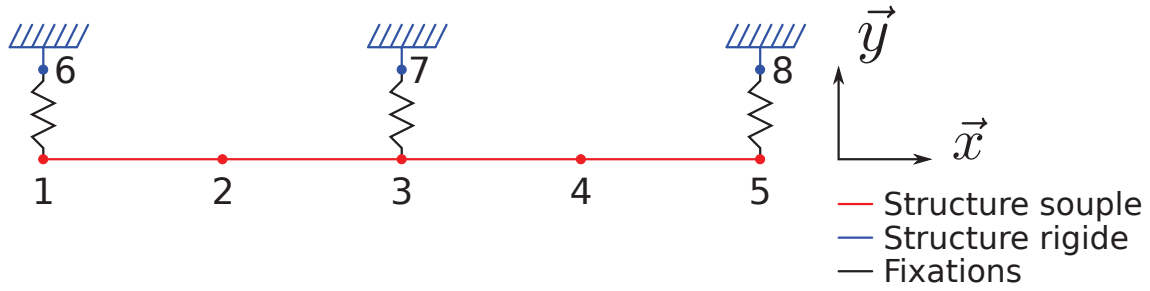


FIGURE 4.6: Schéma de la structure simplifiée

Le problème se réécrit de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } s = (\{U\}, [\sigma]) \in \mathcal{S}_{ad} \\ \text{minimisant } e^2(s') \text{ avec } s' \in \mathcal{S}_{ad} \end{array} \right.$$

avec :

$$e^2(s) = \xi^2(s) + \frac{r}{1-r} \sum_i \left( \alpha_i \|\Pi_u^i \{U_i\} - \{\tilde{U}_i\}\|^2 \right) \quad (4.1)$$

$i$  et  $\alpha_i$  étant respectivement le numéro du cas de chargement et le coefficient pondérateur du chargement  $i$  de tel sorte que :

$$\alpha_i \|\Pi_u^i \{U_i\} - \{\tilde{U}_i\}\|^2 = \alpha_j \|\Pi_u^i \{U_j\} - \{\tilde{U}_j\}\|^2 \quad \text{avec } i \neq j \quad (4.2)$$

à l'initialisation du processus de recalage. Les cas de chargement sont les six sollicitations simples (3 translations, 3 rotations) de l'ensemble de fixations (cf. **Figure 4.2**).

Lors des essais de recalage, le processus n'est pas parvenu à obtenir un modèle suffisamment correct vis-à-vis des mesures. Ceci montre surement la limite d'une telle approche de simplification. Les non linéarités à approcher avec un connecteur linéaire pourrait être trop nombreuses. Le modèle déterministe simple résultant de ce type d'approche n'est pas applicable à la théorie des méconnaissances sans une amélioration du processus de recalage ou du modèle simplifié. Une application du modèle tel quel à la théorie des méconnaissances entraînerait des résultats de très mauvaise qualité, voire inutiles.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'extensibilité de la stratégie vers des structures plus grandes et complexes a été testé. Pour cela, une structure élancée comportant des pattes de fixation, elles-mêmes composées de plusieurs fixations boulonnées, a été étudiée. Plusieurs changements sont à noter sur la stratégie à employer :

- les fixations boulonnées étant très localisées par rapport à la taille de la structure, nous avons choisi de modéliser une patte de fixation entière par un connecteur ;

- le recalage des modèles de connecteur avec méconnaissances a été effectué à l'échelle de la patte de fixation. Nous sommes partis ici du principe que l'obtention de données expérimentales ou simulées sur la structure globale n'est pas possible.

La principale difficulté s'est présentée lors du recalage du modèle déterministe du connecteur. En effet, le modèle de connecteur est recalé sur six chargements d'une structure fortement non-linéaire. Un effort de modélisation ou de recalage doit être effectué sur ce point là.

Employée sur ce type de structure, cette stratégie devient intéressante pour le domaine du tolérancement de pièces flexibles. En effet, dans ce domaine, on cherche à intégrer différents aléas (géométrie, comportement, . . .) à une échelle grossière (poutre + connecteurs) afin d'être capable de prévoir les conditions d'assemblage de ces structures. Cette perspective sera développée dans la conclusion générale.

# Conclusion

Le travail de cette thèse a consisté à construire une méthode de dimensionnement principalement dédié aux assemblages boulonnés ou rivetés. Ces éléments sont en effet très importants car souvent dimensionnants pour les assemblages de structures. L'objectif de cette méthode est de réaliser un dimensionnement sur des structures de très grande taille (de l'échelle de l'assemblage de panneaux voire du tronçon). Elle doit pouvoir être intégrée naturellement dans les processus actuels de dimensionnement en bureau d'étude. Cependant, du fait des limitations informatiques actuelles, elle doit être mise en place dans un contexte où la modélisation des structures à dimensionner ne peut se faire entièrement avec un modèle numérique complexe. De plus, cette stratégie doit être capable de prendre en compte les effets des variations de comportement des fixations (frottement, précharge et jeux de fabrication) sur le dimensionnement. Ce dernier point a permis d'avoir plus de recul sur la notion de coefficient de sécurité.

La stratégie proposée a été construite sur l'utilisation de deux échelles d'observation dans le cadre d'une analyse descendante. Cette technique a été choisie pour sa simplicité d'utilisation ainsi que de sa popularité auprès des industriels.

Sur le plan technique, elle impose l'utilisation de deux échelles de modélisation des fixations. De plus, une modification doit y être apportée pour prendre en compte les effets des incertitudes sur les résultats. Ces deux points (création du modèle déterministe de fixation et application de la prise en compte des incertitudes) sont les principaux travaux abordés dans cette thèse. L'objectif de cette stratégie est de pouvoir calculer une estimation des transferts de charge et ainsi obtenir les fixations susceptibles d'être les plus chargées. Ensuite, ces zones de fixations où la probabilité d'initiation de phénomènes d'endommagement est la plus élevée sont isolées et une réanalyse locale y est appliquée avec l'utilisation de modèles plus complexes comparativement à l'étape globale. L'étape de réanalyse locale n'a pas été traitée dans cette thèse.

Le choix du modèle de fixation a été le premier problème rencontré. La construction d'un modèle de connecteur linéaire a été basé sur les modèles semi-empiriques utilisés dans l'industrie. Cependant, dans certains cas de chargement, ces modèles peuvent ne pas représenter convenablement le comportement réel des fixations. Ces connecteurs ont donc fait l'objet d'un recalage de modèle déterministe basé sur l'erreur en relation de comportement.

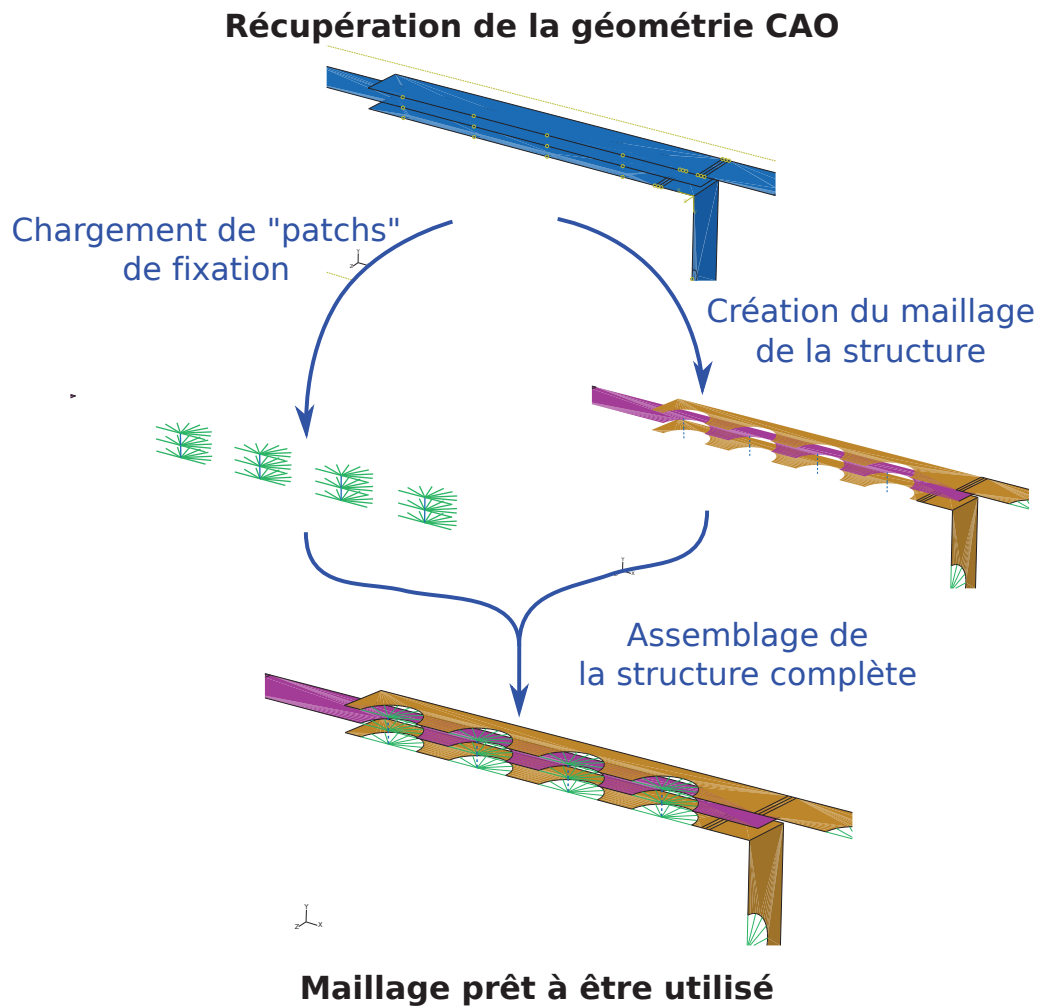
Les processus de recalage se sont effectués en se basant sur des mesures simulées

sur des modèles non linéaires représentant la structure étudiée. Les premiers résultats ont montré quelques faiblesses du point de vue de sa robustesse vis-à-vis de l'initialisation du recalage. Un modèle modifié (« connecteur rigidifié ») a été créé afin d'améliorer la modélisation initiale du connecteur. L'idée de cette construction se base tout d'abord sur le fait que l'utilisation de modélisations simplifiées avec connecteurs empiriques mène souvent à de gros déséquilibres de rigidité entre la structure et le connecteur. Le comportement du connecteur sur le comportement global de la structure s'apparente le plus souvent à une liaison complète. Également, il a été noté qu'avec une modélisation avec plaques et connecteurs, la géométrie de la fixation boulonnée n'est pas prise en compte. Une amélioration a donc été proposée sur la modélisation des connecteurs. Cette étude a fait l'objet d'une publication dans [Gant *et al.*, 2011]. On pourra noter que ce travail pourra aisément s'intégrer dans les processus industriels automatiques de modélisation des jonctions boulonnées. Lors de ces processus, les données d'entrée sont la géométrie de la structure et la position des fixations. Un maillage est ensuite construit grâce à la géométrie de la structure et à une insertion automatique de « patches » de fixation. La **Figure 4.7** illustre ce processus.

L'étape suivante a consisté à modéliser les sources d'incertitudes présentes dans les fixations. L'application de la théorie des méconnaissances a été choisie pour l'aspect globalisation des incertitudes qu'elle met en œuvre. Cette globalisation des sources de variations présentes dans une fixation permet d'obtenir une approche très simple comparative-ment aux méthodes stochastiques, et reste cohérente vis-à-vis du modèle de connecteur global utilisé. Le modèle avec méconnaissances obtenu a pu montrer ces performances concernant la qualité des résultats prédis. De plus l'utilisation d'un modèle avec méconnaissances convenablement recalé a permis de réduire considérablement le temps de calcul nécessaire comparativement à une simulation de Monte Carlo. Ces travaux ont donné lieu à un article [Gant *et al.*, 2012] actuellement en révision.

Le choix de ces techniques nous a permis d'effectuer une implémentation numérique en couplant un code de recherche avec le code EF standard ABAQUS. L'intérêt d'une telle implémentation pour l'industrie est qu'elle reste non intrusive. Le code de recherche a été réalisé sous le logiciel Matlab. Pour une meilleure implémentation de ce code avec l'environnement d'ABAQUS, une adaptation pourrait être effectuée en langage Python.

La stratégie a ensuite été appliquée sur des structures assemblées de plus grande taille. L'objectif a été de tester sa robustesse vis-à-vis de la modélisation par connecteurs. En effet dans ce cas là, les fixations sont regroupées très localement sur la structure, ce qui entraîne un fort couplage de leur comportement. De plus, une modélisation de chaque fixation par un connecteur serait trop lourde et non pertinente à cette échelle et avec ce type de modélisation. Le choix a donc été d'utiliser un seul connecteur pour la modélisation d'un ensemble de fixations. Cette partie a révélé des difficultés de convergence lors de l'application du recalage déterministe. Tout d'abord, nous pouvons remettre en cause la modélisation linéaire censée représenter un comportement non-linéaire de la structure.



**FIGURE 4.7:** Processus de maillage automatique des fixations



Une solution alternative aurait pu être de modifier et de complexifier le modèle de connecteur. Mais cela aurait dégradé considérablement l'intérêt de l'utilisation d'un tel modèle. Une meilleure solution serait plutôt de modifier le modèle de méconnaissances pour qu'il intègre directement une représentation de ce comportement non-linéaire. Enfin, pour ce type de structure, une évolution des méthodes d'acquisition et de traitement des données expérimentales pourrait également se révéler très utile afin d'obtenir davantage de résultats expérimentaux permettant un meilleur recalage de modèle [Avril *et al.*, 2008, de Crevoisier *et al.*, 2011].

D'autres perspectives peuvent être également proposées concernant cette étude. Tout d'abord, la stratégie telle qu'elle est employée au **Chapitre 2** pourrait faire l'objet d'une étude de robustesse lorsque le nombre de fixations augmente. Ceci permettrait de simuler un ensemble de lignes de fixations, ensemble répétitif que l'on retrouve sur les assemblages de type aéronautique. Le **Chapitre 4** a permis de mettre en avant le tolérancement de pièces flexibles comme domaine d'utilisation de la stratégie. En effet, ce type de structure est fortement soumis aux effets des défauts géométriques incertains. Leur prise en compte fait l'objet de travaux dans lesquels ces défauts sont simulés par des chargements sur la structure nominale [Stricher *et al.*, 2010]. Les études effectuées ici permettraient de prendre en compte les variations dues au comportement ou encore aux effets non-linéaires. L'association de ces deux types de représentation entraînerait l'obtention d'intervalles de tolérance « probabilisés » (méconnaissances effectives) pouvant nettement améliorer les conditions d'assemblage lors de l'analyse de tolérance. Par ailleurs, nous pouvons également imaginer interagir avec le domaine de la synthèse de tolérance. Effectivement, grâce à l'utilisation des méconnaissances effectives pour l'obtention des intervalles de tolérance, on peut supposer que l'on peut rapidement effectuer plusieurs études d'influence (*cf.* **Figure 3.6**) pour localiser les sous-structures ayant le plus d'impact sur les intervalles. Ces techniques pourraient être utilisées cette fois-ci, non pas pour diminuer les coefficients de sécurité, mais plutôt pour assouplir les conditions de tolérance, dans l'optique d'une réduction des coûts de fabrication et de montage des pièces assemblées.

# Bibliographie

- [Ahmadian et Jalali, 2007a] AHMADIAN, H. et JALALI, H. (2007a). Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5):2318–2334.
- [Ahmadian et Jalali, 2007b] AHMADIAN, H. et JALALI, H. (2007b). Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):1041–1050.
- [Alkatan *et al.*, 2007] ALKATAN, F., STEPHAN, P., DAIDIE, A. et GUILLOT, J. (2007). Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(8):589–598.
- [Armijo, 1966] ARMIJO, L. (1966). Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific journal of mathematics*, 16(1):1–4.
- [Avril *et al.*, 2008] AVRIL, S., BONNET, M., BRETTELLE, A.-S., GRÉDIAC, M., HILD, F., IENNY, P., LATOURTE, F., LEMOSSE, D., PAGANO, S., PAGNACCO, E. et PIERRON, F. (2008). Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381–402.
- [Babuska et Rheinboldt, 1979] BABUSKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. (1979). Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18(Part 3):519–540.
- [Balmès, 2000] BALMÈS, E. (2000). Review and evaluation of shape expansion methods. *In International Modal Analysis Conference*, pages 555–561.
- [Barrois, 1978] BARROIS, W. (1978). Stresses and displacements due to load transfer by fasteners in structural assemblies. *Engineering Fracture Mechanics*, 10(1):115–176.
- [Barthelemy et Haftka, 1993] BARTHELEMY, J. F. M. et HAFTKA, R. T. (1993). Approximation concepts for optimum structural design - a review. *Structural and Multi-disciplinary Optimization*, 5(3):129–144.
- [Baumann, 1982] BAUMANN, E. (1982). Finite element analysis of advanced composite structures containing mechanically fastened joints. *Nuclear Engineering and Design*, 70(1):67–83.
- [Beacher et Ingra, 1981] BEACHER, G. B. et INGRA, T. S. (1981). Stochastic FEM in settlement predictions. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107(4):449–463.

- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 326:899–904.
- [Ben Dhia et Rateau, 2001] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series I Mathematics*, 332:649–654.
- [Ben-Haim, 2005] BEN-HAIM, Y. (2005). Info-gap Decision Theory For Engineering Design. Or : Why "Good" is Preferable to "Best". *Engineering Design Reliability Handbook*, CRC Press, Boca Raton.
- [Ben-Haim, 2006] BEN-HAIM, Y. (2006). *Info-gap Decision Theory : Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, London.
- [Ben-Haim et Elishakoff, 1990] BEN-HAIM, Y. et ELISHAKOFF, I. (1990). *Convex models of uncertainty in applied mechanics*. Elsevier Science Ltd, 1st édition.
- [Ben-Haim et Hemez, 2004] BEN-HAIM, Y. et HEMEZ, F. M. (2004). Robustness-to-uncertainty, fidelity-to-data, prediction-looseness of models. Rapport technique, Los Alamos National Laboratory, Dearborn, Michigan.
- [Bensoussan *et al.*, 1978] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L. et PAPANICOLAOU, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5. North Holland.
- [Bonnet et Constantinescu, 2005] BONNET, M. et CONSTANTINESCU, A. (2005). Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2):R1–R50.
- [Bortman et Szabó, 1992] BORTMAN, J. et SZABÓ, B. (1992). Nonlinear models for fastened structural connections. *Computers & Structures*, 43(5):909–923.
- [Boucard et Champaney, 2003] BOUCARD, P. A. et CHAMPANEY, L. (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281.
- [Chakhari *et al.*, 2008] CHAKHARI, J., DAIDIE, A., CHAIB, C. et GUILLOT, J. (2008). Numerical model for two-bolted joints subjected to compressive loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(4):162–173.
- [Champaney *et al.*, 2007] CHAMPANEY, L., BOUCARD, P. A. et GUINARD, S. (2007). Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42(2):305–315.
- [Chen et Ward, 1997] CHEN, R. et WARD, A. C. (1997). Generalizing Interval Matrix Operations for Design. *Journal of Mechanical Design*, 119(1):65–72.
- [Chen *et al.*, 1995] CHEN, W.-H., LEE, S.-S. et YEH, J.-T. (1995). Three-dimensional contact stress analysis of a composite laminate with bolted joint. *Composite Structures*, 30(3):287–297.
- [Chouaki *et al.*, 2000] CHOUAKI, A., DERAEMAËKER, A., LADEVÈZE, P. et LE LOCH, S. (2000). Model updating using the error in the constitutive relation : Real case study. *In SPIE proceedings series*, pages 140–146. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers.

- [Christman *et al.*, 1989] CHRISTMAN, T., NEEDLEMAN, A. et SURESH, S. (1989). An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 37(11):3029–3050.
- [Combe *et al.*, 1999] COMBE, J., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (1999). Constitutive relation error estimator for transient finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):165–185.
- [Combescure *et al.*, 2003] COMBESCURE, A., DELCROIX, F., CAPLAIN, L., ESPANOL, S. et ELIOT, P. (2003). A finite element to simulate the failure of weld points on impact. *International Journal of Impact Engineering*, 28(7):783–802.
- [Coorevits *et al.*, 2000] COOREVITS, P., HILD, P. et PELLE, J.-P. (2000). A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(1):65–83.
- [Cope et Lacy, 2000] COPE, D. A. et LACY, T. E. (2000). Stress intensity determination in lap joints with mechanical fasteners. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 41 st, Atlanta, GA*.
- [Cottreau *et al.*, 2007] COTTEREAU, R., CLOUTEAU, D. et SOIZE, C. (2007). Construction of a probabilistic model for impedance matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(17-20):2252–2268.
- [Cottin *et al.*, 1984] COTTIN, N., FELGENHAUER, H. P. et NATKE, H. G. (1984). On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Archive of Applied Mechanics*, 54(5):378–387.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [de Benedetti *et al.*, 2007] de BENEDETTI, M., GAROFALO, G., ZUMPARO, M. et BARBONI, R. (2007). On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyro-shock. *Acta Astronautica*, 60(12):947–956.
- [de Crevoisier *et al.*, 2011] de CREVOISIER, J., SWIERGIEL, N., CHAMPANEY, L. et HILD, F. (2011). Identification of In Situ Frictional Properties of Bolted Assemblies with Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, pages 1–12.
- [De Matteis et Landolfo, 1999] DE MATTEIS, G. et LANDOLFO, R. (1999). Mechanical fasteners for cladding sandwich panels : Interpretative models for shear behaviour. *Thin-Walled Structures*, 35(1):61–79.
- [Dempster, 1968] DEMPSTER, A. P. (1968). Upper and Lower Probabilities Generated by a Random Closed Interval. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3):957–966.
- [Deraemaeker, 2001] DERAEMAERKER, A. (2001). *Sur la maîtrise des modèles en dynamique des structures à partir de résultats d'essais*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [Dessombz *et al.*, 2001] DESSOMBZ, O., THOUVEREZ, F., LAÏNÉ, J. P. et JÉZÉQUEL, L. (2001). Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949–968.

- [Ding et Dhanasekar, 2007] DING, K. et DHANASEKAR, M. (2007). Flexural behaviour of bonded-bolted butt joints due to bolt looseness. *Advances in Engineering Software*, 38(8-9):598–606.
- [Ditlevsen et Madsen, 1996] DITLEVSEN, O. et MADSEN, H. O. (1996). *Structural reliability methods*, volume 178. Citeseer.
- [Doebbling, 1996] DOEBLING, S. W. (1996). Minimum-rank optimal update of elemental stiffness parameters for structural damage identification. *AIAA journal*, 34(12):2615–2621.
- [Ekh et Schon, 2008] EKH, J. et SCHON, J. (2008). Finite element modeling and optimization of load transfer in multi-fastener joints using structural elements. *Composite Structures*, 82(2):245–256.
- [Ekh et al., 2005] EKH, J., SCHON, J. et MELIN, L. (2005). Secondary bending in multi fastener, composite-to-aluminium single shear lap joints. *Composites Part B : Engineering*, 36(3):195–208.
- [Elishakoff et al., 1995] ELISHAKOFF, I., REN, Y. et SHINOZUKA, M. (1995). Improved finite element method for stochastic problems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(5):833–846.
- [Elkhodja et al., 2007] ELKHODJA, N., DHIA, H. B. et ROUX, F. X. (2007). Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines. In *Actes du huitieme colloque national en calcul des structures, Giens, France*, volume 1, pages 467–472.
- [Enjalbert, 2009] ENJALBERT, P. (2009). *Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [Eshelby, 1957] ESHELBY, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376.
- [Esteban et Rogers, 2000] ESTEBAN, J. et ROGERS, C. A. (2000). Energy dissipation through joints : theory and experiments. *Computers & Structures*, 75(4):347–359.
- [Faravelli, 1989] FARAVELLI, L. (1989). Response-Surface Approach for Reliability Analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:2763.
- [Farhat et al., 2001] FARHAT, C., LESOINNE, M., LETALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : a dual-primal unified FETI method - part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1523–1544.
- [Farhat et al., 1996] FARHAT, C., PIERSON, K. et LESOINNE, M. (1996). A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with Lagrange multipliers : applications to the design of new FETI coarse problems. Rapport technique, Center for Aerospace Structure, University of Colorado, Boulder.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.

- [Faverjon *et al.*, 2009] FAVERJON, B., LADEVÈZE, P. et LOUF, F. (2009). Validation of stochastic linear structural dynamics models. *Computers & Structures*, 87(13-14):829–837.
- [Faverjon et Sinou, 2008] FAVERJON, B. et SINOUE, J. J. (2008). Robust damage assessment of multiple cracks based on the frequency response function and the Constitutive Relation Error updating method. *Journal of Sound and Vibration*, 312(4-5):821–837.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309–330.
- [Fortin et Glowinski, 1983] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1983). Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary value problems. *In Studies in Mathematics and Its Applications*, chapitre 15, pages 1–340. Elsevier B.V.
- [Fritzen, 1986] FRITZEN, C. P. (1986). Identification of mass, damping, and stiffness matrices of mechanical systems. *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 108:9–16.
- [Gant *et al.*, 2012] GANT, F., ROUCH, P. et CHAMPANEY, L. (2012). Updating of uncertain joint models using the Lack-Of-Knowledge theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Submitted.
- [Gant *et al.*, 2011] GANT, F., ROUCH, P., LOUF, F. et CHAMPANEY, L. (2011). Definition and updating of simplified models of joint stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 48(5):775–784.
- [Gendre, 2010] GENDRE, L. (2010). *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [Ghanem, 1999] GHANEM, R. (1999). Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168(1-4):19–34.
- [Ghanem et Kruger, 1996] GHANEM, R. G. et KRUGER, R. M. (1996). Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(3):289–303.
- [Ghanem et Spanos, 2002] GHANEM, R. G. et SPANOS, P. D. (2002). *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Dover Publication, Inc., Mineola, New York.
- [Ghosh *et al.*, 2001] GHOSH, S., LEE, K. et RAGHAVAN, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(14):2335–2385.
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method. *In Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 224–231.

- [Gosselet et Rey, 2006] GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(4):515–572.
- [Guidault, 2005] GUIDAULT, P.-A. (2005). *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [Guidault et Belytschko, 2007] GUIDAULT, P.-A. et BELYTSCHKO, T. (2007). On the L2 and the H1 couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(3):322–350.
- [Guinard, 2003] GUINARD, S. (2003). Etude de la tenue mécanique d'assemblages mixtes composite / métallique. Rapport technique, EADS CCR Suresnes.
- [Haboussa *et al.*, 2011] HABOUSSA, D., GRÉGOIRE, D., ELGUEDJ, T., MAIGRE, H. et COMBESURE, A. (2011). X-FEM analysis of the effects of holes or other cracks on dynamic crack propagations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(4-5):618–636.
- [Hanss *et al.*, 2002] HANSS, M., OEXL, S. et GAUL, L. (2002). Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface. *Mechanics Research Communications*, 29(2-3):177–187.
- [Hartwigsen *et al.*, 2004] HARTWIGSEN, C., SONG, Y., MCFARLAND, D., BERGMAN, L. et VAKAKIS, A. (2004). Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2):327–351.
- [Hashin, 1960] HASHIN, Z. (1960). The elastic moduli of heterogeneous materials.
- [Hasofer et Lind, 1974] HASOFER, A. M. et LIND, N. C. (1974). Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(1): 111–121.
- [Helton et Davis, 2003] HELTON, J. C. et DAVIS, F. J. (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 81(1):23–69.
- [Hemez *et al.*, 2001] HEMEZ, F. M., WILSON, A. C. et DOEBLING, S. W. (2001). Design of computer experiments for improving an impact test simulation. *In 19th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Kissimmee, Florida. Citeseer.
- [Huth, 1986] HUTH, H. (1986). Influence of fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple row joints. *Fatigue in mechanically fastened composite and metallic joints : a symposium*, page 221.
- [Ingvar Eriksson, 1986] INGVAR ERIKSSON, L. (1986). Contact stresses in bolted joints of composite laminates. *Composite Structures*, 6(1-3):57–75.
- [Izumi *et al.*, 2005] IZUMI, S., YOKOYAMA, T., IWASAKI, A. et SAKAI, S. (2005). Three-dimensional finite element analysis of tightening and loosening mechanism of threaded fastener. *Engineering Failure Analysis*, 12(4):604–615.

- [Jaglinski *et al.*, 2007] JAGLINSKI, T., NIMITYONGSKUL, A., SCHMITZ, R. et LAKES, R. S. (2007). Study of Bolt Load Loss in Bolted Aluminum Joints. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 129(1):48–54.
- [Jalali *et al.*, 2007] JALALI, H., AHMADIAN, H. et MOTTERSHEAD, J. (2007). Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26):8087–8105.
- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness/force SBSF method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7):1567–1578.
- [Jaynes, 1957a] JAYNES, E. T. (1957a). Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, 106(4):620 LP – 630.
- [Jaynes, 1957b] JAYNES, E. T. (1957b). Information Theory and Statistical Mechanics. II. *Physical Review*, 108(2):171 LP – 190.
- [Johnson *et al.*, 1997] JOHNSON, E. A., BERGMAN, L. A. et SPENCER, B. F. (1997). Parallel implementation of Monte Carlo Simulation - comparative studies from stochastic structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4):208–212.
- [Kabe, 1985] KABE, A. M. (1985). Stiffness matrix adjustment using mode data. *AIAA journal*, 23(9):1431–1436.
- [Kapania *et al.*, 1997] KAPANIA, R. K., HARYADI, S. G. et HAFTKA, R. T. (1997). Global/local analysis of composite plates with cutouts. *Computational Mechanics*, 19(5):386–396.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. S. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. *In Second International Computers in Engineering Conference*. ASME.
- [Kelly, 2005] KELLY, G. (2005). Load transfer in hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints. *Composite Structures*, 69(1):35–43.
- [Kelly, 2006] KELLY, G. (2006). Quasi-static strength and fatigue life of hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints. *Composite Structures*, 72(1):119–129.
- [Kelly et Hallström, 2004] KELLY, G. et HALLSTRÖM, S. (2004). Bearing strength of carbon fibre/epoxy laminates : effects of bolt-hole clearance. *Composites Part B : Engineering*, 35(4):331–343.
- [Kim *et al.*, 2007] KIM, J., YOON, J. et KANG, B. (2007). Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints. *Applied Mathematical Modelling*, 31(5):895–911.
- [Kim et Kim, 1995] KIM, S. J. et KIM, J. H. (1995). Finite element analysis of laminated composite plates with multi-pin joints considering friction. *Computers & Structures*, 55(3):507–514.
- [Klir, 2004] KLIR, G. J. (2004). Generalized information theory : aims, results, and open problems. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1-3):21–38.



- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer, 1st édition.
- [Ladevèze, 2000] LADEVÈZE, P. (2000). Constitutive relation error estimators for time-dependent non-linear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):775–788.
- [Ladevèze et Chouaki, 1999] LADEVÈZE, P. et CHOUAKI, A. (1999). Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15(1):49–58.
- [Ladevèze et Leguillon, 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. (1983). Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509.
- [Ladevèze et al., 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):121–138.
- [Ladevèze et Pelle, 1989] LADEVÈZE, P. et PELLE, J. P. (1989). Accuracy in finite element computation for eigenfrequencies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(8):1929–1949.
- [Ladevèze et al., 2004] LADEVÈZE, P., PUEL, G., DERAEMAERKER, A. et ROMEUF, T. (2004). Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. *Revue européenne des éléments finis*, 13(5-6-7):571–582.
- [Ladevèze et al., 2006a] LADEVÈZE, P., PUEL, G., DERAEMAERKER, A. et ROMEUF, T. (2006a). Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6):373–393.
- [Ladevèze et al., 2006b] LADEVÈZE, P., PUEL, G. et ROMEUF, T. (2006b). Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):4697–4710.
- [Ladevèze et al., 2006c] LADEVÈZE, P., PUEL, G. et ROMEUF, T. (2006c). On a strategy for the reduction of the lack of knowledge (LOK) in model validation. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(10-11):1452–1460.
- [Ladevèze et Waeytens, 2009] LADEVÈZE, P. et WAEYTENS, J. (2009). Model verification in dynamics through strict upper error bounds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26):1775–1784.
- [Lallemant et al., 1999] LALLEMAND, B., CHERKI, A., TISON, T. et LEVEL, P. (1999). Fuzzy modal finite element analysis of structures with imprecise material properties. *Journal of Sound and Vibration*, 220(2):353–365.
- [Langrand et Combescure, 2004] LANGRAND, B. et COMBESCURE, A. (2004). Non-linear and failure behaviour of spotwelds : a "global" finite element and experiments in pure and mixed modes I/II. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24-25):6631–6646.

- [Lehnhoff et Bunyard, 2001] LEHNHOFF, T. F. et BUNYARD, B. A. (2001). Effects of Bolt Threads on the Stiffness of Bolted Joints. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 123(2):161.
- [Lemaire, 1997] LEMAIRE, M. (1997). Reliability and mechanical design. *Reliability Engineering & System Safety*, 55(2):163–170.
- [Leray et al., 2008] LERAY, D., VADEAN, A. et DAIDIE, A. (2008). Fast computation of preloaded bolted circular joint aiming at fatigue bolt sizing : Hypotheses and modeling. *Engineering Computations*, 25(1):42–54.
- [Link et al., 1987] LINK, M., WEILAND, M. et BARRAGAN, J. M. (1987). Direct physical matrix identification as compared to phase resonance testing- An assessment based on practical application. *In International Modal Analysis Conference, 5 th, London, England, Proceedings.*, volume 1, pages 804–811.
- [Liu et al., 1986a] LIU, W. K., BELYTSCHKO, T. et MANI, A. (1986a). Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 56(1):61–81.
- [Liu et al., 1986b] LIU, W. K., BELYTSCHKO, T. et MANI, A. (1986b). Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(10):1831–1845.
- [Liu et al., 1988] LIU, W. K., BESTERFIELD, G. et BELYTSCHKO, T. (1988). Transient probabilistic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1):27–54.
- [Loève, 1977] LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory*. Springer Verlag, 4th édition.
- [Louf et al., 2010] LOUF, F., ENJALBERT, P., LADEVÈZE, P. et ROMEUF, T. (2010). On lack-of-knowledge theory in structural mechanics. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(7-8):424–433.
- [Madenci et al., 1998] MADENCI, E., SHKARAYEV, S., SERGEEV, B., OPLINGER, D. et SHYPRYKEVICH, P. (1998). Analysis of composites laminates with multiple fasteners. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15):1793–1811.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3):233–241.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):29–43.
- [Massa et al., 2004] MASSA, F., LALLEMAND, B., TISON, T. et LEVEL, P. (2004). Fuzzy eigensolutions of mechanical structures. *Engineering Computations*, 21(1):66–77.
- [Mayer et Gaul, 2007] MAYER, M. H. et GAUL, L. (2007). Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):724–734.
- [McCarthy, 2005] MCCARTHY, C. T. (2005). Experiences with Modeling Friction in Composite Bolted Joints. *Journal of Composite Materials*, 39(21):1881–1908.

- [McCarthy et McCarthy, 2005] MCCARTHY, C. T. et MCCARTHY, M. A. (2005). Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints : Part II - effects of bolt-hole clearance. *Composite Structures*, 71(2):159–175.
- [McCarthy *et al.*, 2005] MCCARTHY, M. A., MCCARTHY, C. T., LAWLOR, V. P. et STANLEY, W. F. (2005). Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints : part I-model development and validation. *Composite Structures*, 71(2):140–158.
- [McKay *et al.*, 1979] MCKAY, M. D., BECKMAN, R. J. et CONOVER, W. J. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245.
- [Melenk et Babuska, 1996] MELENK, J. M. et BABUSKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314.
- [Miller et Dane Quinn, 2009] MILLER, J. D. et DANE QUINN, D. (2009). A two-sided interface model for dissipation in structural systems with frictional joints. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1-2):201–219.
- [Moens et Vandepitte, 2005] MOENS, D. et VANDEPITTE, D. (2005). A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1527–1555.
- [Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150.
- [Moore, 1962] MOORE, R. E. (1962). Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing. Rapport technique 25, Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Stanford University, California.
- [Mori et Tanaka, 1973] MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574.
- [Mottershead et Friswell, 1993] MOTTERSHEAD, J. E. et FRISWELL, M. I. (1993). Model Updating In Structural Dynamics : A Survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375.
- [Mottershead *et al.*, 1996] MOTTERSHEAD, J. E., FRISWELL, M. I., NG, G. H. T. et BRANDON, J. A. (1996). Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(2):171–182.
- [Mottershead *et al.*, 2000] MOTTERSHEAD, J. E., MARES, C., FRISWELL, M. I. et JAMES, S. (2000). Selection and updating of parameters for an aluminium space-frame model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(6):923–944.
- [Muscolino *et al.*, 2000] MUSCOLINO, G., RICCIARDI, G. et IMPOLLONIA, N. (2000). Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(2):199–212.

- [Nassar *et al.*, 2005] NASSAR, S., BARBER, G. C. et ZUO, D. (2005). Bearing Friction Torque in Bolted Joints. *Tribology Transactions*, 48(1):69–75.
- [Natke, 1988] NATKE, H. G. (1988). Updating computational models in the frequency domain based on measured data : a survey. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(1):28–35.
- [Niu, 1988] NIU, M. C.-Y. (1988). *Aircraft structural design*. Adaso Adastra Engineering Center, 2nd édition.
- [Oden *et al.*, 1999] ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOES, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4):3–25.
- [Oden et Zohdi, 1997] ODEN, J. T. et ZOHDI, T. I. (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4):367–391.
- [Ohayon *et al.*, 2001] OHAYON, R., SOIZE, C. et GROSH, K. (2001). Structural Acoustics and Vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109:2545.
- [Papadrakakis et Kotsopoulos, 1999] PAPADRAKAKIS, M. et KOTSOPULOS, A. (1999). Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168(1-4):305–320.
- [Pascual, 1998] PASCUAL, R. (1998). On the Reliability of Error Localization Indicators. *In International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 23*, Leuven, Belgium.
- [Pommier *et al.*, 2011] POMMIER, S., GRAVOUIL, A., MOES, N. et COMBESURE, A. (2011). *Extended Finite Element Method for Crack Propagation*. ISTE WILEY.
- [Puel, 2004] PUEL, G. (2004). *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, LMT ENS Cachan.
- [Ransom *et al.*, 1992] RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et KNIGHT JR, N. F. (1992). Computational methods for global/local analysis. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 92:33104.
- [Rao et Sawyer, 1995] RAO, S. S. et SAWYER, J. P. (1995). Fuzzy finite element approach for the analysis of imprecisely defined systems. *AIAA journal*, 33(12):2364–2370.
- [Rey *et al.*, 2007] REY, C., GOSSELET, P. et PEBREL, J. (2007). Computational strategy on nonlinear patches with mixed transfer conditions. *In USNCCM 9 - 9th US National Congress on Computational Mechanics*.
- [Riccio et Scaramuzzino, 2002] RICCIO, A. et SCARAMUZZINO, F. (2002). Influence of damage onset and propagation on the tensile structural behavior of protruding composite joints. *In 4th GRACM Congress on Computation Mechanics GRACM*, pages 27–29.

- [Rosenblatt, 1952] ROSENBLATT, M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(3):470–472.
- [Ross, 1947] ROSS, R. D. (1947). An Electrical Computer for the Solution of Shear-Lag and Bolted-Joint Problems. Rapport technique 1281, NACA, Langley Memorial Aeronautical Laboratory, Langley Field, Va.
- [Ross, 1971] ROSS, R. G. (1971). Synthesis of stiffness and mass matrices from experimental vibration modes. *SAE paper*, 710787.
- [Rump, 1983] RUMP, S. M. (1983). Solving algebraic problems with high accuracy. *In Proc. of the symposium on A new approach to scientific computation*, pages 51–120, San Diego, CA, USA. Academic Press Professional, Inc.
- [Sanchez-Palencia, 1974] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4):331–351.
- [Schuëller, 2001] SCHUËLLER, G. I. (2001). Computational stochastic mechanics - recent advances. *Computers & Structures*, 79(22-25):2225–2234.
- [Schultze *et al.*, 2001] SCHULTZE, J. F., HEMEZ, F. M., DOEBLING, S. W. et SOHN, H. (2001). Statistical based non-linear model updating using feature extraction. *In IMAC-XIX : A Conference on Structural Dynamics, Kissimmee, FL*, pages 18–26.
- [Segalman et Starr, 2008] SEGALMAN, D. J. et STARR, M. J. (2008). Inversion of Masing models via continuous Iwan systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(1):74–80.
- [Series *et al.*, 2003] SERIES, L., FEYEL, F. et ROUX, F. X. (2003). Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange. *In Actes du 16eme congres français de mécanique*.
- [Shafer, 1976] SHAFER, G. (1976). *A mathematical theory of evidence*, volume 1. Princeton university press Princeton, NJ.
- [Shannon, 1948] SHANNON, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, page 535.
- [Shiryayev *et al.*, 2007] SHIRYAYEV, O., PAGE, S., PETTIT, C. et SLATER, J. (2007). Parameter estimation and investigation of a bolted joint model. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5):680–697.
- [Smith et Beattie, 1991] SMITH, S. W. et BEATTIE, C. A. (1991). Secant-method adjustment for structural models. *AIAA Journal*, 29:119–126.
- [Soize, 2000] SOIZE, C. (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294.
- [Soize, 2001] SOIZE, C. (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics.

- [Soize, 2005] SOIZE, C. (2005). Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1333–1366.
- [Soize, 2006] SOIZE, C. (2006). Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1-3):26–64.
- [Song *et al.*, 2004] SONG, Y., HARTWIGSEN, C. J., MCFARLAND, D. M., VAKAKIS, A. F. et BERGMAN, L. A. (2004). Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2):249–276.
- [Soo Kim et Kuwamura, 2007] SOO KIM, T. et KUWAMURA, H. (2007). Finite element modeling of bolted connections in thin-walled stainless steel plates under static shear. *Thin-Walled Structures*, 45(4):407–421.
- [Stricher *et al.*, 2010] STRICHER, A., CHAMPANEY, L., THIEBAULT, F., FRICERO, B. et CHEVASSUS, N. (2010). Flexible tolerancing, a first step towards the use of nonlinear simulation of assembly. *In International Conference on Computational and Experimental Sciences*.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69.
- [Swift, 1971] SWIFT, T. (1971). Development of the Fail-safe Design Features of the DC-10. *In Damage tolerance in aircraft structures : a symposium presented at the seventy-third annual meeting American Society for Testing and Materials, Toronto, Ontario, Canada, 21-26 June 1970*, page 164. ASTM International.
- [Tarantola, 2004] TARANTOLA, A. (2004). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Tate et Rosenfeld, 1946] TATE, M. B. et ROSENFELD, S. J. (1946). Preliminary Investigation of the Loads carried by Individual Bolts in Bolted Joints. Rapport technique 1051, NACA, Langley Memorial Aeronautical Laboratory, Langley Field, Va.
- [Terada et Kikuchi, 2001] TERADA, K. et KIKUCHI, N. (2001). A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(40-41):5427–5464.
- [Thompson, 2002] THOMPSON, S. K. (2002). *Sampling*. John Wiley & Sons, 2nd édition.
- [Thoren, 1972] THOREN, A. R. (1972). Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data. *AIAA Conference Paper*, pages 72–346.
- [Tong, 2000] TONG, L. (2000). Bearing failure of composite bolted joints with non-uniform bolt-to-washer clearance. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(6):609–615.

- [Tserpes *et al.*, 2002] TSERPES, K. I., LABEAS, G., PAPANIKOS, P. et KERMANIDIS, T. (2002). Strength prediction of bolted joints in graphite/epoxy composite laminates. *Composites Part B : Engineering*, 33(7):521–529.
- [Tvergaard, 1990] TVERGAARD, V. (1990). Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica et Materialia*, 38(2):185–194.
- [van der Sluis *et al.*, 1999] van der SLUIS, O., VOSBEEK, P. H. J., SCHREURS, P. J. G. et JER, H. E. H. M. (1999). Homogenization of heterogeneous polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 36(21):3193–3214.
- [Voleti *et al.*, 1996] VOLETI, S. R., CHANDRA, N. et MILLER, J. R. (1996). Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods. *Computers & Structures*, 58(3):453–464.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures*, 40(4):1027–1031.
- [Wiener, 1938] WIENER, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936.
- [Yang et Chang, 2006] YANG, J. et CHANG, F.-K. (2006). Detection of bolt loosening in C-C composite thermal protection panels : I. Diagnostic principle. *Smart Materials and Structures*, 15(2):581–590.
- [Yang et Ye, 1990] YANG, L. et YE, L. (1990). Study of the behavior of a composite multi-bolt joint. *Computers & Structures*, 34(3):493–497.
- [Yen, 1978] YEN, S.-W. (1978). Multirow joint fastener load investigation. *Computers & Structures*, 9(5):483–488.
- [Zadeh, 1965] ZADEH, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353.
- [Zhang *et al.*, 2007] ZHANG, M., JIANG, Y. et LEE, C.-H. (2007). Finite Element Modeling of Self-Loosening of Bolted Joints. *Journal of Mechanical Design*, 129(2):218.
- [Zienkiewicz et Taylor, 1984] ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L. (1984). *Finite Element Method (5th Edition)*. Butterworth-Heinemann.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357.
- [Zimmerman et Kaouk, 1994] ZIMMERMAN, D. C. et KAOUK, M. (1994). Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Update Theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(2):222–231.
- [Zimmerman et Simmermacher, 1995] ZIMMERMAN, D. C. et SIMMERMACHER, T. (1995). Model correlation using multiple static load and vibration tests. *AIAA journal*, 33(11):2182–2188.
- [Zimmerman *et al.*, 1996] ZIMMERMAN, D. C., SMITH, S. W., KIM, H. M. et BARTKOWICZ, T. J. (1996). An Experimental Study of Structural Health Monitoring Using Incomplete Measurements. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118(4):543–550.

- [Zimmerman et Widengren, 1990] ZIMMERMAN, D. C. et WIDENGREN, M. (1990). Correcting finite element models using a symmetric eigenstructure assignment technique. *AIAA journal*, 28(9):1670–1676.
- [Zohdi *et al.*, 1996] ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4):273–298.