



**HAL**  
open science

# Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches.

Daniel Priour

► **To cite this version:**

Daniel Priour. Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches.. Sciences de la Terre. Université Rennes 1, 1984. Français. NNT: . tel-00675141

**HAL Id: tel-00675141**

**<https://theses.hal.science/tel-00675141>**

Submitted on 29 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**D. PRIOUR**

ISSN 0755-978X

ISBN 2-905532-03-3

GENESE DES ZONES  
DE CISAILLEMENT

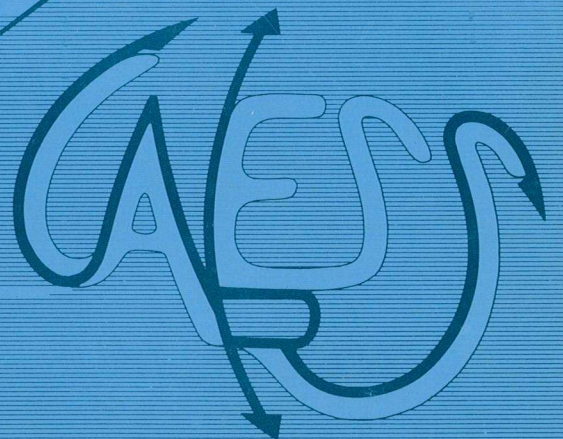
**Application de la méthode des éléments finis  
à la simulation numérique  
de la déformation des roches**

MEMOIRES ET DOCUMENTS

*du Centre Armoricaïn  
d'Etude Structurale  
des Socles*

n°4

Rennes 1985



MEMOIRES ET DOCUMENTS

DU

CENTRE ARMORICAIN D'ETUDE STRUCTURALE DES SOCLES

N° 4

D. PRIOUR

Genèse des zones de cisaillement :  
Application de la méthode des éléments finis à la  
simulation numérique de la déformation des roches.

Centre Armoricaïn d'Etude Structurale des Socles  
Université de Rennes I  
Campus de Beaulieu  
35042 - RENNES Cédex  
(FRANCE)

1985



ISSN : 0755-978 X

ISBN : 2-905532-03-3

Centre Armoricaïn d'Etude Structurale des Socles  
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu  
35042 - RENNES Cédex (France)

D. PRIOUR (1984)

Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des  
éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches.  
Mém. Doc. Centre Arm. Et. Struct. Socles, Rennes, 4 : 157 p.



Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui,  
par leur amitié et leur compétence, m'ont aidé  
dans l'élaboration de ce travail.

RESUME :

Cette thèse est une étude de la naissance des zones de cisaillement. La modélisation théorique de leur amplification permet de définir les trois paramètres influençant leur développement : la déformation globale du matériau, l'hétérogénéité initiant la zone de cisaillement, et l'instabilité rhéologique du matériau. Les simulations numériques fondées sur la méthode des éléments finis quantifient ces trois paramètres. Différents cas d'instabilité ont été traités : amollissement avec la déformation, anisotropie et échauffement lié à la déformation. Enfin, l'étude de la propagation d'une zone de cisaillement permet de préciser une relation entre sa largeur, sa vitesse de propagation et la rhéologie de la roche.

Mots-clés :

- Déformation des roches - Zone de cisaillement - Modèle mathématique - Instabilité  
- Eléments finis - Anisotropie - Température - Vitesse de propagation.



# PLAN DU MEMOIRE

INTRODUCTION GENERALE	5
1. DEFINITION DES ZONES DE CISAILLEMENT	7
1.1. INTRODUCTION	9
1.2. QUANTIFICATION GEOMETRIQUE DES ZONES DE CISAILLEMENT	10
1.2.1. THEORIE	10
1.2.1.1. <i>Déformation hétérogène</i>	10
1.2.1.2. <i>Zone de cisaillement</i>	11
1.2.2. APPLICATION	13
1.3. DEFINITIONS DE MODELE DE CROISSANCE DES ZONES DE CISAILLEMENT	15
1.3.1. RHEOLOGIE CONTINUE	15
1.3.1.1. <i>Modèle de Bowden</i>	15
1.3.1.2. <i>Implications du modèle de Bowden</i>	19
1.3.2. RHEOLOGIE DISCONTINUE	23
1.4. RHEOLOGIES REELLES	24
1.4.1. CLASSIFICATION DE POIRIER	24
1.4.2. AMOLLISSEMENT GEOMETRIQUE	26
1.4.3. AMOLLISSEMENT STRUCTURAL	28
1.4.3.1. <i>Recristallisation dynamique</i>	28
1.4.3.2. <i>Redistribution de deux phases</i>	30
1.4.3.3. <i>La transformation de structures finies en structures globulaires</i>	30
1.4.4. AMOLLISSEMENT LIE EXCLUSIVEMENT A LA DEFORMATION	32
1.4.5. AMOLLISSEMENT AVEC LA VITESSE DE DEFORMATION	34
1.4.6. AMOLLISSEMENT THERMIQUE	36
2. METHODE DES ELEMENTS FINIS	39
2.1. INTRODUCTION	41
2.2. TRAVAUX ANTERIEURS	41
2.3. THEORIE	46
2.3.1. INTRODUCTION	46
2.3.2. MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT	46
2.3.3. MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE	49
2.3.4. LES CONDITIONS AUX LIMITES	49
2.3.5. METHODE D'INTEGRATION	50

2.4.	PROBLEMES INFORMATIQUES LIES A LA METHODE	52
2.4.1.	STOCKAGE DE LA MATRICE RIGIDITE	52
2.4.2.	METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS LINEAIRES	52
2.4.2.1.	<i>Méthode de Gauss-Siedel</i>	52
2.4.2.2.	<i>Méthode d'élimination directe</i>	52
2.5.	SYMETRIE PLANE ET PONCTUELLE	54
2.5.1.	INTRODUCTION	54
2.5.2.	SYMETRIE PONCTUELLE OU ANTISYMETRIE	54
2.5.3.	SYMETRIE PLANE	55
2.6.	DEFINITION DES MODELES	57
2.7.	TEST DU PROGRAMME	59
3.	RESULTATS	63
3.1.	INTRODUCTION	65
3.2.	AMOLLISSEMENT AVEC LA DEFORMATION	68
3.2.1.	INTRODUCTION	68
3.2.2.	RESULTATS NUMERIQUES	70
3.2.3.	APPLICATION	74
3.3.	AMOLLISSEMENT AVEC LA VITESSE DE DEFORMATION	75
3.3.1.	PREMIERE SOLUTION	77
3.3.2.	DEUXIEME SOLUTION	78
3.3.3.	TROISIEME SOLUTION	80
3.4.	ANISOTROPIE	82
3.4.1.	INTRODUCTION	82
3.4.2.	RESULTATS NUMERIQUES	86
3.5.	AMOLLISSEMENT THERMIQUE	94
3.5.1.	INTRODUCTION	94
3.5.2.	RESULTATS NUMERIQUES	99
3.6.	DURCISSEMENT ET AMOLLISSEMENT AVEC LA DEFORMATION	104
3.6.1.	INTRODUCTION	104
3.6.2.	RESULTATS NUMERIQUES	105
4.	ANALYSE D'UNE TERMINAISON DE ZONE DE CISAILLEMENT	109
4.1.	INTRODUCTION	111
4.2.	ZONE DE CISAILLEMENT INFINIMENT LONGUE	113
4.3.	ANALYSE D'UNE TERMINAISON DANS UN MILIEU VISQUEUX	116
4.4.	DESCRIPTION EMPIRIQUE D'UNE TERMINAISON DE ZONE DE CISAILLEMENT	121
4.4.1.	DETERMINATION DE LA RELATION ENTRE LA LARGEUR ET LE DEPLACEMENT	122
4.4.2.	DETERMINATION DE LA VITESSE DE PROPAGATION	123
4.5.	APPLICATION A UNE TERMINAISON REELLE	126
4.5.1.	DETERMINATION DE LA RELATION ENTRE LA LARGEUR ET LE DEPLACEMENT	128
4.5.2.	DETERMINATION DE LA VITESSE DE PROPAGATION	129

CONCLUSION GENERALE	133
ANNEXE	137
1. CONSTRUCTION DU MODELE NUMERIQUE	137
1.1. STRUCTURE DU PROGRAMME INFORMATIQUE	137
1.2. NOMENCLATURE	138
1.3. PROGRAMME INFORMATIQUE	139
2. SIMULATION NUMERIQUE DE LA DEFORMATION	140
2.1. STRUCTURE DU PROGRAMME INFORMATIQUE	140
2.2. NOMENCLATURE	141
2.3. SOUS-PROGRAMME	143
2.4. PROGRAMME INFORMATIQUE	145
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	155



## INTRODUCTION GENERALE

Lors des processus orogéniques, les roches montrent fréquemment des variations de déformation. Des états de grande intensité de cisaillement sont souvent localisés à l'intérieur de zones quasiment planaires, appelées zones de cisaillement.

Le but de ce travail est de définir et de quantifier les différents facteurs contrôlant le développement des zones de cisaillement. Plusieurs moyens peuvent être utilisés :

- L'observation sur le terrain permet d'analyser directement l'objet de cette étude, mais sans avoir connaissance de tous les paramètres cinématiques et rhéologiques.
- La modélisation analogique, bien que permettant de créer des zones de cisaillement, n'apporte pas toutes les informations voulues sur les paramètres rhéologiques.
- L'analyse mathématique exacte impose des hypothèses trop simplistes pour englober l'ensemble du problème.
- Par contre la modélisation numérique fondée sur la méthode des éléments finis a été choisie, car elle permet de simuler la déformation des roches, tout en contrôlant les paramètres rhéologiques, cinématiques et géométriques.

Ce mémoire se divise en quatre parties :

- La première partie concerne la définition des zones de cisaillement, l'analyse de leur croissance et les rhéologies réelles susceptibles de rendre la roche instable.
- La seconde partie énonce la méthode des éléments finis et le modèle numérique utilisé.
- La troisième partie, la plus importante, présente les résultats des simulations numériques pour différentes rhéologies.
- Et enfin la quatrième partie porte sur l'analyse de la géométrie d'une terminaison de zone de cisaillement en fonction de la rhéologie.



## Première partie.

### Définition des zones de cisaillement





## 1.1. INTRODUCTION

Dans une zone de cisaillement, la roche se caractérise par une intensité de déformation supérieure à la roche avoisinante. Cette zone étroite et quasiment planaire sépare deux blocs qui subissent un déplacement relatif ; ce dernier définit la direction de cisaillement (Fig. 1.1). L'étude de ces zones dans un seul plan est habituellement suffisante car la déformation est pratiquement plane.

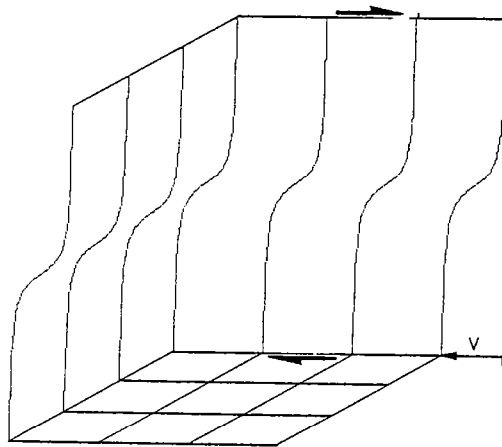


Fig. 1.1 - Schéma montrant une zone de cisaillement. La direction de cisaillement est indiquée par les flèches ( $\rightleftharpoons$ ) et le déplacement par  $V$ .

La première approche géologique des zones de cisaillement est descriptive ; elle s'attache à quantifier la déformation et le déplacement à travers la roche (Ramsay et Graham, 1970 ; Coward, 1976 ; Ramsay et Allison, 1979 ; Ramsay, 1980 ; Simpson, 1983). Ramsay et Graham (1970) ont défini les techniques de mesure en ce domaine. Leur travail est résumé dans le chapitre suivant.

Une seconde approche consiste à définir les causes et les mécanismes de la création des zones de cisaillement. Deux démarches sont possibles :

- Etudier l'amplification de la différence de déformation entre l'intérieur et l'extérieur de la zone. Dans ce cas, la zone de cisaillement est considérée comme très longue

(Bowden, 1970 ; Yuen et al., 1978 ; Poirier et al., 1979 ; Casey, 1980 ; Fleitout et Froidevaux, 1980).

- Etudier la propagation spatiale dans la direction de cisaillement et l'amplification. Dans ce cas, la zone de cisaillement est initialement petite (Cobbold, 1977 ; Rice et Simons, 1976).

Cependant, quelque soit la démarche choisie, une des conditions nécessaires à la création des zones de cisaillement est la présence d'une hétérogénéité dans la roche, sinon le matériau se déforme homogènement. Cette hétérogénéité peut se présenter sous deux formes : soit être initialement dans la roche sous forme d'objet (galet, trou), soit être induite par une perturbation extérieure comme, par exemple, une déformation hétérogène (Cobbold, 1977).

Une autre condition nécessaire à la création est l'existence d'un amollissement au cours de la déformation, car les particules de matières les plus déformées sont alors les moins résistantes et se déforment donc plus (Bowden, 1970 ; Cobbold, 1977 ; Fleitout et Froidevaux, 1980 ; Brun et Cobbold, 1980). Des modèles de croissance de zones de cisaillement reliant ces différentes conditions nécessaires sont développés dans le chapitre 1.3, et plus particulièrement celui de Bowden (1970).

Cette dernière condition, à savoir l'amollissement pendant la déformation, est effectivement observée lors d'expérience de création de zones de cisaillement (Bowden et Raha, 1970 ; Peltzer, 1982). La classification des mécanismes naturels d'amollissement proposée par Poirier (1980) est développée dans le chapitre 1.4.

## 1.2. QUANTIFICATION GEOMETRIQUE DES ZONES DE CISAILLEMENT

Ramsay et Graham (1970) ont défini les techniques de mesure de la déformation et du déplacement à travers une zone de cisaillement. Leur étude porte sur des roches sans objets (galets, fossiles, etc...), sinon la connaissance de leur déformation est suffisante pour définir les déplacements à l'intérieur de la zone de cisaillement. D'abord, ces auteurs développent les relations générales entre déplacement et déformation dans le cas d'une déformation hétérogène et, en particulier, d'une zone de cisaillement. Puis, ils appliquent ces résultats à des zones de cisaillement réelles en observant la schistosité et le déplacement de marqueurs.

### 1.2.1. THEORIE

#### 1.2.1.1. Déformation hétérogène

Dans le cas d'une déformation hétérogène, les relations entre déformation et déplacement sont basées sur le concept de la continuité de la déformation, c'est-à-dire que la roche reste continue : il n'y a pas de fracture. La relation entre coordonnées d'un point avant déformation ( $X$ ) et après ( $X'$ ) est :

$$X = X' + u'$$

L'objectif est de retrouver les anciennes coordonnées ( $X$ ) à partir des nouvelles ( $X'$ ), observables sur le terrain :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad 1.2$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad 1.3$$

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} \quad 1.4$$

$u'$  est le vecteur opposé au déplacement lors de la déformation. Il est fonction des coordonnées du point. La relation 1.1 peut s'écrire, dans le cas d'une déformation homogène :

$$X' = M^{-1} X + T \quad 1.5$$

$M^{-1}$  est la matrice inverse des gradients des déplacements ; elle ne rend compte que de la déformation et de la rotation. Elle s'écrit en fonction du déplacement  $u'$  :

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} \\ \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} & 1 + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_3} \\ \frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_2} & 1 + \frac{\partial u'_3}{\partial x'_3} \end{vmatrix} \quad 1.6$$

$T$  représente la translation du milieu, et est donc constant pour tous les points de la roche.

$M$  est constant à travers le domaine si la déformation est homogène. Dans le cas d'une zone de cisaillement (déformation hétérogène), les coefficients de  $M$  sont fonction des coordonnées du point considéré.

#### 1.2.1.2. Zone de cisaillement idéale

Dans une zone de cisaillement idéale, il existe des plans parallèles à la zone où la géométrie est semblable quelque soit le point considéré. L'axe  $x'_1$  est pris perpendiculaire à

ces plans. Il est observé aussi un plan, contenant  $x'_2$ , par rapport auquel la zone de cisaillement est symétrique. L'axe  $x'_1$  est parallèle à ce plan (Fig. 1.2).

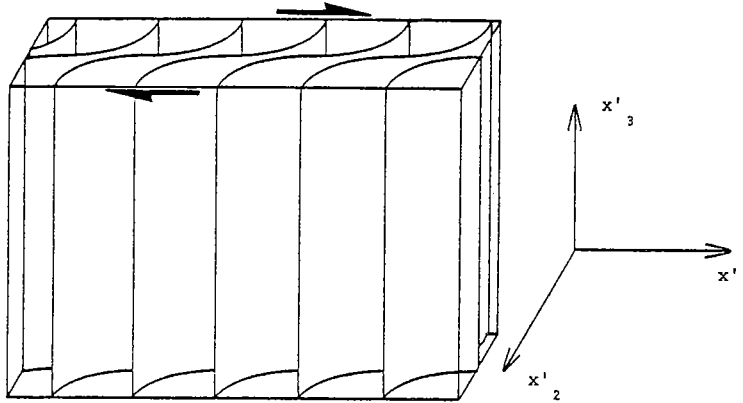


Fig. 1.2 - Choix d'axes cartésiens pour une zone de cisaillement.

Si, il n'y a ni changement de volume, ni changement de longueur sur les axes  $x'_1$  et  $x'_3$ , la matrice  $\mathbf{M}^{-1}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & f(x'_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.7$$

$f(x'_2)$  est le taux de cisaillement simple mesuré en  $X'$  sur l'axe  $x'_1$ . Dans ces conditions, le taux de cisaillement peut être calculé dans les plans  $x'_1, x'_2$  :

- Soit par la mesure de l'angle ( $\theta'$ ) entre l'orientation du grand axe de déformation et la direction de cisaillement (Fig. 1.3) ; la relation avec le taux de cisaillement local  $\gamma$  s'écrit :

$$\text{tg } 2\theta' = 2/\gamma \quad 1.8$$

- Soit par la mesure de l'angle  $\alpha'$  entre la ligne, orientée initialement à  $\alpha$ , (Fig. 1.3) et la direction de cisaillement, par la relation :

$$\text{cotg } \alpha' = \text{cotg } \alpha - \gamma \quad 1.9$$

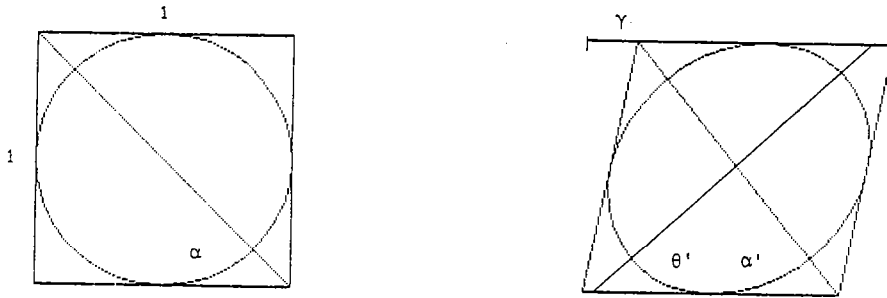


Fig. 1.3 - Schéma montrant un cercle initial transformé en une ellipse lors du cisaillement simple.  $\gamma$  est le taux de cisaillement.  $\theta'$  est l'orientation du grand axe.  $\alpha'$  est l'orientation d'une ligne initialement orientée à l'angle  $\alpha$ .

Le déplacement total ( $S$ ) à travers la zone de cisaillement se calcule en intégrant le taux de cisaillement de la façon suivante :

$$S = \int_0^{x'} \gamma(x) dx \quad 1.10$$

#### 1.2.2. APPLICATION

Pour illustrer les résultats précédents, les auteurs ont choisi trois exemples de zones de cisaillement ayant la particularité d'être bordées par des murs non déformés.

Le premier exemple décrit des fentes en échelons dans un calcaire à Nummulites d'âge Eocène de la nappe de Griesstock dans les Alpes Helvétiques de Suisse (Fig. 1.4).

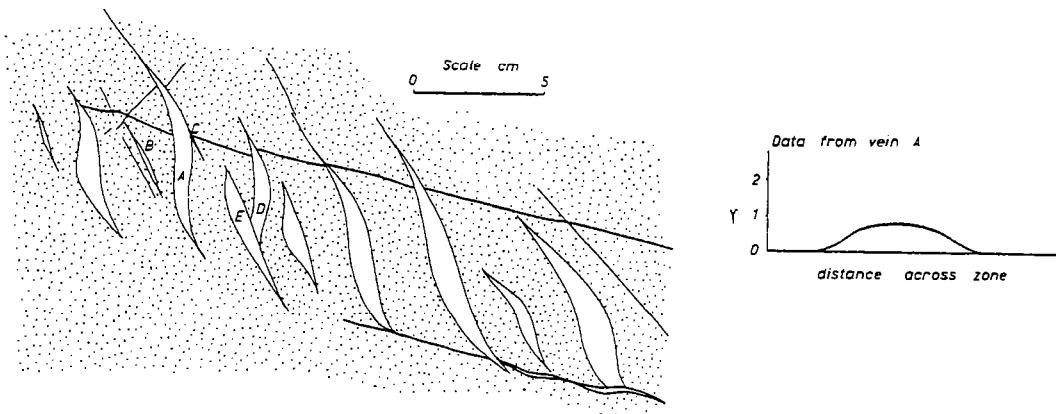


Fig. 1.4 - Zone de cisaillement présentant des fentes en échelons, et variation du taux de cisaillement à travers la zone (d'après Ramsay et Graham, 1970).

Les fentes en échelons s'initient perpendiculairement au grand axe de la déformation incrémentale, c'est-à-dire à  $135^\circ$  de la direction de cisaillement. La ligne passant par le centre de la fente est donc considérée comme ayant eu une direction initiale  $\alpha$  de  $45^\circ$  (définie sur la fig. 1.3). La relation permet de calculer le taux de cisaillement pour tout point au centre de la veine, le résultat est représenté sur la fig. 1.4.

Le deuxième exemple concerne un ensemble méta-gabbroïque déformé situé dans le complexe métamorphique lewisien des Hébrides externes d'Écosse. Dans cette zone de cisaillement (Fig. 1.5 a), le passage est progressif depuis le méta-gabbro amphibolitisé non déformé jusqu'aux schistes à hornblende fortement foliés.

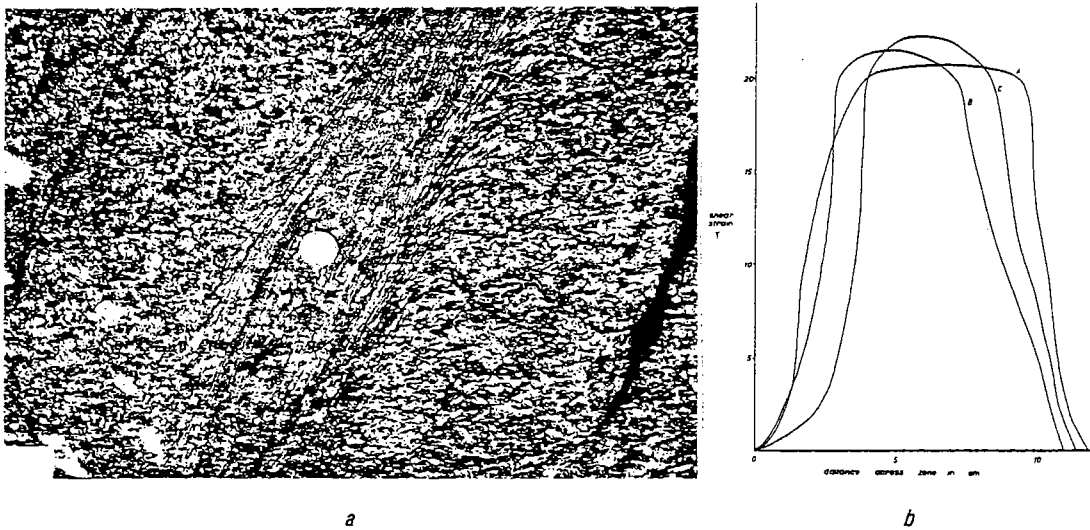


Fig. 1.5 - Zones de cisaillement (a) et variations de  $\gamma$  selon trois sections (b) (d'après Ramsay et Graham, 1970).

La mesure de l'orientation  $\theta'$  de la schistosité avec la direction de cisaillement permet de calculer le taux de cisaillement à partir de la relation 1.8.

Le troisième exemple de zone de cisaillement est un granite avec des xénolithes, situé dans les Nappes Pennines de Suisse (Fig. 1.6). Il montre clairement la corré-

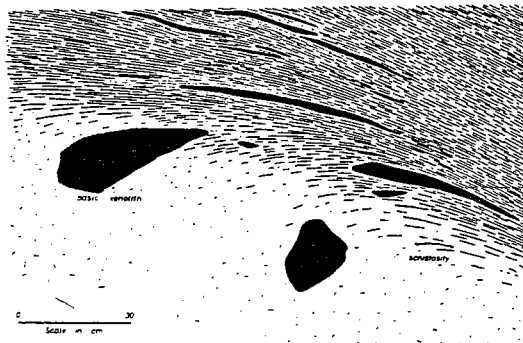


Fig. 1.6 - Schistosité et xénolithes déformés sur le bord d'une zone de cisaillement (d'après Ramsay et Graham, 1970).

lation entre direction et intensité de la schistosité avec la déformation. Les valeurs de déformation déduites de l'angle entre schistosité et les murs de la zone de cisaillement et celles déduites de la forme des enclaves sont voisines.

Cette étude de Ramsay et Graham est intéressante car elle propose des méthodes de quantification du taux de cisaillement et du déplacement dans une zone de cisaillement. Cependant, des conditions doivent être vérifiées au préalable :

- La roche ne doit pas subir de changement de volume.
- Localement, la déformation est du cisaillement simple.

### 1.3. DEFINITIONS DE MODELE DE CROISSANCE DES ZONES DE CISAILLEMENT

Ce chapitre propose des modèles de croissance associés à deux rhéologies, continue et discontinue, qui rendent dans certaines mesures le matériau instable, c'est-à-dire que, lors de sa déformation, des zones de cisaillement peuvent s'y développer.

#### 1.3.1. RHEOLOGIE CONTINUE

##### 1.3.1.1. Modèle de Bowden

C'est le modèle le mieux approprié à décrire la croissance des zones de cisaillement géologiques car il s'appuie sur une rhéologie de roche couramment observée : celle-ci s'amollit avec la déformation et durcit avec la vitesse de déformation (Fig. 1.7).

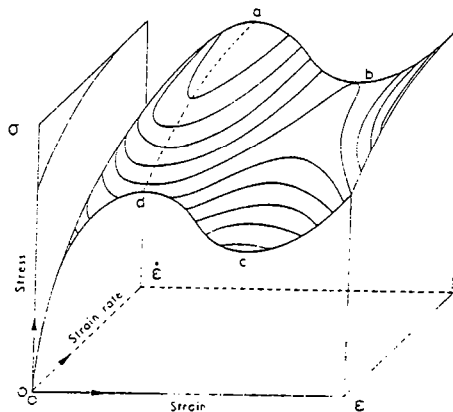


Fig. 1.7 - Evolution de la contrainte ( $\sigma$ ) en fonction de la déformation ( $\epsilon$ ) et de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ). Entre a, b, c et d, la roche s'amollit avec la déformation et durcit avec la vitesse de déformation.

- Des postulats doivent être vérifiés pour expliquer le principe du modèle de Bowden :
- La contrainte, à un temps donné, est identique en tous points du matériau.
  - Il existe une bande très longue où la déformation est légèrement supérieure à celle de la matrice (Figs. 1.8 et 1.9).
  - La vitesse de déformation globale est constante.

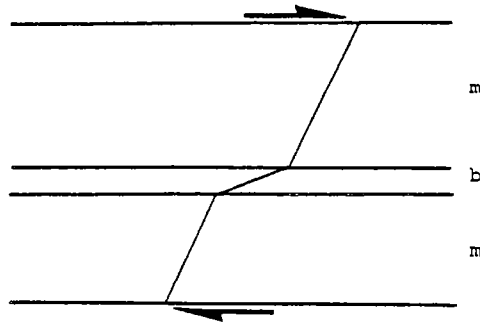


Fig. 1.8 - Schéma montrant la différence de déformation entre la bande (b) et la matrice (m).

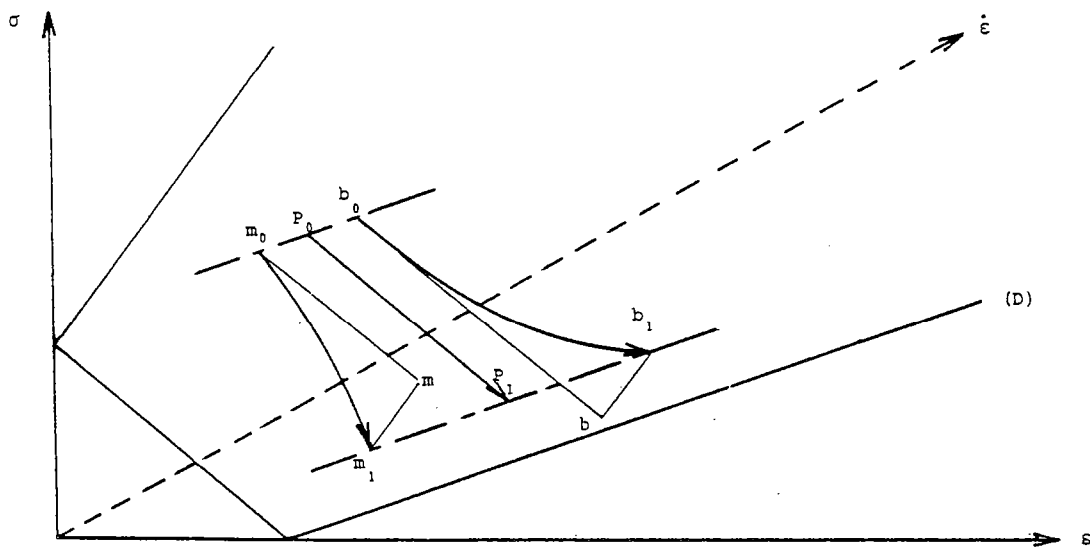


Fig. 1.9 - Diagramme schématique montrant une diminution de la contrainte ( $\sigma$ ) avec la déformation ( $\epsilon$ ) et une augmentation de la contrainte avec la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ). m représente la matrice, p l'ensemble du matériau et b la bande. L'indice  $0$  correspond au temps  $t_0$  et l'indice  $1$  à  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ).



Puisque la contrainte est constante, les points  $m_0$ ,  $P_0$  et  $b_0$  au temps  $t_0$  se situent sur la même droite parallèle à D (Fig. 1.9). Si la vitesse de déformation de l'ensemble du matériau est constante ( $\dot{\epsilon}_0$ ), sa déformation, sa vitesse de déformation et donc sa contrainte peuvent être représentées, au temps  $t_1$ , par la lettre  $P_1$ . La vitesse de déformation de la bande (b) étant supérieure à  $\dot{\epsilon}_0$ , son augmentation de déformation ( $b_1$ ) est supérieure à celle de l'ensemble du matériau ( $P_1$ ). De même, la vitesse de déformation de la matrice (m) étant inférieure à  $\dot{\epsilon}_0$ , son augmentation de déformation ( $m_1$ ) est inférieure à celle de l'ensemble du matériau ( $P_1$ ). Et puisque le matériau est en équilibre, la bande (b), la matrice (m) et l'ensemble du matériau (P) ont la même contrainte. Le point  $b_1$  représentatif de la bande au temps  $t_1$  doit avoir la même contrainte que  $P_1$  et la même déformation que b. De la même façon, le point  $m_1$  est défini comme ayant la même contrainte que  $P_1$  et la même déformation que m.

Les points  $m_1$  et  $b_1$  s'éloignant l'un de l'autre, il y a une amplification de l'hétérogénéité de déformation du matériau.

Les paramètres importants pour l'amplification d'une zone de cisaillement sont :

- La rhéologie instable, représentée par l'équation  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ ,
- L'hétérogénéité initiale de déformation, mesurée entre  $b_0$  et  $m_0$ ,
- La déformation mesurée entre  $P_0$  et  $P_1$ .

Une étude analytique permet de quantifier ces paramètres : la rhéologie, c'est-à-dire l'amollissement avec la déformation et le durcissement avec la vitesse de déformation, peut s'écrire ainsi :

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right)_{\dot{\epsilon}} = -A < 0 \quad 1.11$$

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon} = B > 0 \quad 1.12$$

$$\text{donc } \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \sigma} \right)_{\sigma} = \frac{A}{B} > 0 \quad 1.13$$

Cette rhéologie est identique à celle représentée figure 1.9. Les hypothèses de départ sont :

- Identité de la contrainte, à un temps donné, en tous points du matériau.
- Existence d'une bande où la déformation ( $d\epsilon$ ) est légèrement plus importante que dans l'ensemble du matériau.
- Constance de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}_0$ ).

Dans les équations suivantes, la lettre b représente la bande et la lettre p l'ensemble du matériau. Puisque les équations 1.11 à 1.13 doivent être vérifiées entre les points P et b, les contraintes  $\sigma$ , les déformations  $\epsilon$  et les vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$  peuvent être précisées aux temps 0, dt et n dt.

à  $t = 0$  :

$$\sigma(P, 0) = \sigma_0$$

$$\epsilon(P, 0) = 0$$

$$\dot{\epsilon}(P, 0) = \dot{\epsilon}_0$$

1.14

$$\begin{aligned}
 \sigma (b, 0) &= \sigma_0 \\
 \varepsilon (b, 0) &= d\varepsilon \\
 \dot{\varepsilon} (b, 0) &= \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

à  $t = dt$ ,  $dt$  étant petit.

$$\begin{aligned}
 \sigma (P, dt) &= \sigma_0 - A \dot{\varepsilon}_0 dt \\
 \varepsilon (P, dt) &= \dot{\varepsilon}_0 dt \\
 \dot{\varepsilon} (P, dt) &= \dot{\varepsilon}_0
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma (b, dt) &= \sigma_0 - A \dot{\varepsilon}_0 dt \\
 \varepsilon (b, dt) &= \dot{\varepsilon}_0 dt + d\varepsilon \left(1 + \frac{A}{B} dt\right) \\
 \dot{\varepsilon} (b, dt) &= \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon \left(1 + \frac{A}{B} dt\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

à  $t = ndt$

$$\begin{aligned}
 \sigma (P, ndt) &= \sigma_0 - A \dot{\varepsilon}_0 ndt \\
 \varepsilon (P, ndt) &= \dot{\varepsilon}_0 ndt \\
 \dot{\varepsilon} (P, ndt) &= \dot{\varepsilon}_0
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma (b, ndt) &= \sigma_0 - A \dot{\varepsilon}_0 ndt \\
 \varepsilon (b, ndt) &= \dot{\varepsilon}_0 ndt + d\varepsilon \left(1 + \frac{A}{B} dt\right)^n \\
 \dot{\varepsilon} (b, ndt) &= \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon \left(1 + \frac{A}{B} dt\right)^n
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

La vitesse de déformation de la bande (b) à  $t = n \cdot dt$  s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon} (b, ndt)
 \tag{1.20}$$

or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon \right) \left(1 + \frac{A}{B} dt\right)^n = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon \exp \left( \frac{A}{B} t \right)
 \tag{1.21}$$

Si la déformation de l'ensemble, au temps  $t$ , s'écrit  $\varepsilon_p$ , alors,

$$\varepsilon_p = \dot{\varepsilon}_0 t
 \tag{1.22}$$

En rendant compte des deux dernières équations dans l'équation 1.20, la vitesse en b s'écrit, en fonction de la déformation  $\varepsilon_p$  :

$$\dot{\varepsilon}_b = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{A}{B} d\varepsilon \exp \left( \frac{A}{B} \frac{\varepsilon_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)
 \tag{1.23}$$

De la même façon, la déformation en b s'écrit :

$$\varepsilon_b = \varepsilon_p + d\varepsilon \exp \left( \frac{A}{B} \frac{\varepsilon_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)
 \tag{1.24}$$

Si la zone de cisaillement se caractérise par une vitesse de déformation double à celle imposée à l'ensemble :  $\dot{\epsilon}_b = 2 \dot{\epsilon}_0$ . 1.25

Soit encore

$$\dot{\epsilon}_0 + \frac{A}{B} d\epsilon \exp\left(\frac{A}{B} \frac{\epsilon_p}{\dot{\epsilon}_0}\right) = 2 \dot{\epsilon}_0 \quad 1.26$$

La déformation globale  $\epsilon_p$ , nécessaire à une telle vitesse dans la zone, s'écrit :

$$\epsilon_p = -\epsilon^{**} \ln\left(\frac{-\epsilon^{**}}{d\epsilon}\right) \quad 1.27$$

Dans ce cas, la déformation caractéristique  $\epsilon^{**}$  s'écrit :

$$\epsilon^{**} = -\frac{B}{A} \dot{\epsilon}_0 \quad 1.28$$

c'est-à-dire

$$\epsilon^{**} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma}\right) \dot{\epsilon} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}}\right) \epsilon \dot{\epsilon}_0 \quad 1.29$$

ou encore

$$\epsilon^{**} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma}\right) \dot{\epsilon} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}}\right) \epsilon \quad 1.30$$

Il est à remarquer que, dans l'équation 1.24, l'augmentation de déformation dans la bande évolue proportionnellement avec l'hétérogénéité de déformation initiale ( $d\epsilon$ ), exponentiellement avec la déformation globale ( $\epsilon_p$ ) et exponentiellement avec l'inverse de la déformation caractéristique ( $-1/\epsilon^{**}$ ).

En conclusion, pour créer une zone de cisaillement, il faut que le matériau soit instable, c'est-à-dire que  $\epsilon^{**}$  soit proche de zéro par valeur négative, qu'il possède la plus grande hétérogénéité ( $d\epsilon$ ) possible, et qu'il soit suffisamment déformé.

### 1.3.1.2. Implications du modèle de Bowden

Ce modèle de Bowden repose sur des hypothèses très précises, en particulier le matériau doit s'amollir avec la déformation et se durcir avec la vitesse de déformation. En modifiant ces hypothèses, le modèle permet de mieux définir les instabilités, et notamment lorsqu'il y a amollissement avec la vitesse de déformation et durcissement avec la déformation (Fig. 1.10). Comme pour le cas précédent, si une bande ( $b_0$ ) de cisaillement possède une déformation légèrement supérieure à celle du matériau encaissant ( $m_0$ ), sa vitesse de déformation est, aussi, supérieure à celle de la matrice. La différence de déformation entre la bande et la matrice est alors amplifiée : le matériau est instable. Ceci est illustré sur la figure 1.10 où on constate que la différence de déformation entre la matrice ( $m$ ) et la bande ( $b$ ) augmente avec le temps.

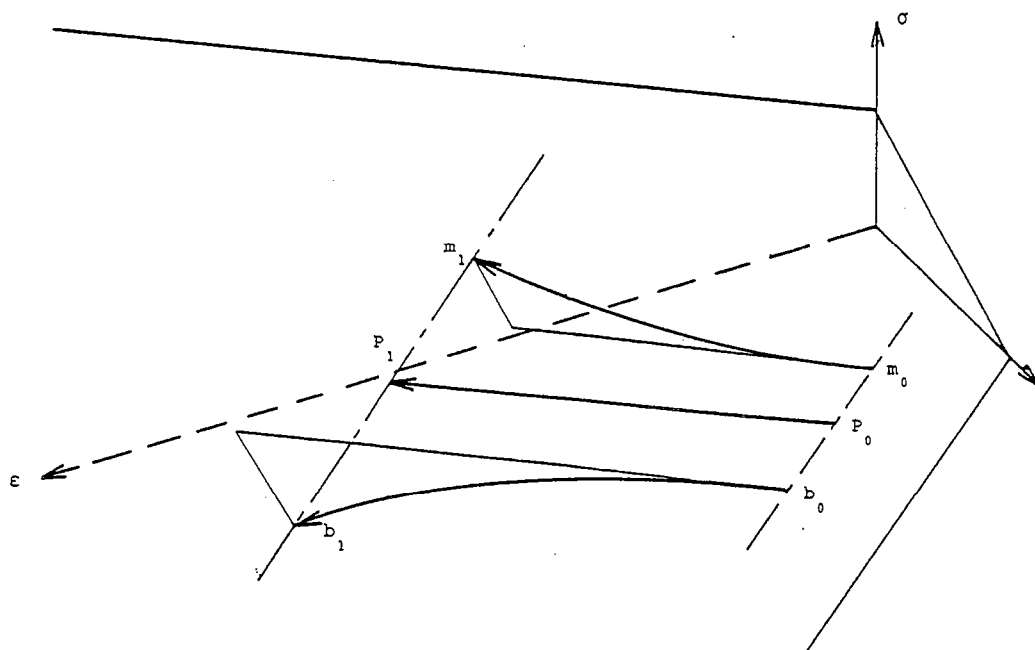


Fig. 1.10 - Evolution de la contrainte ( $\sigma$ ) en fonction de la déformation ( $\epsilon$ ) et de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ).  $\sigma$  décroît avec  $\dot{\epsilon}$  et croît avec  $\epsilon$ .  $m$  représente la matrice,  $p$  l'ensemble du matériau et  $b$  la bande. L'indice  $_0$  correspond au temps  $t_0$  et l'indice  $_1$  à  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ).

Par contre, le matériau est stable lorsqu'il y a durcissement avec la déformation et avec la vitesse de déformation (Fig. 1.11 A), ou lorsqu'il présente un amollissement avec la déformation et avec la vitesse de déformation (Fig. 1.11 B). Car, dans ces deux cas, la bande,  $b_0$ , bien qu'ayant une déformation supérieure à la matrice,  $m_0$ , a une vitesse inférieure. Son augmentation de déformation est alors plus faible que celle de l'ensemble du matériau : l'hétérogénéité de déformation diminue.

Le modèle permet en outre de juger de l'évolution de l'instabilité en fonction de l'influence de la déformation  $\epsilon$  et de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  sur la contrainte  $\sigma$  : le matériau est d'autant plus instable que la contrainte varie faiblement avec la vitesse  $\dot{\epsilon}$  et fortement avec la déformation  $\epsilon$ . Ceci est illustré sur les figures 1.12.

Sur les figures 1.12 A, B et C, l'augmentation de déformation entre  $P_0$  et  $P_1$  et l'hétérogénéité initiale entre  $P_0$  et  $b_0$  mesurée en vitesse de déformation sont prises identiques. L'augmentation de déformation entre  $b_0$  et  $b_1$  est donc la même sur A, B et C. Entre A et B,

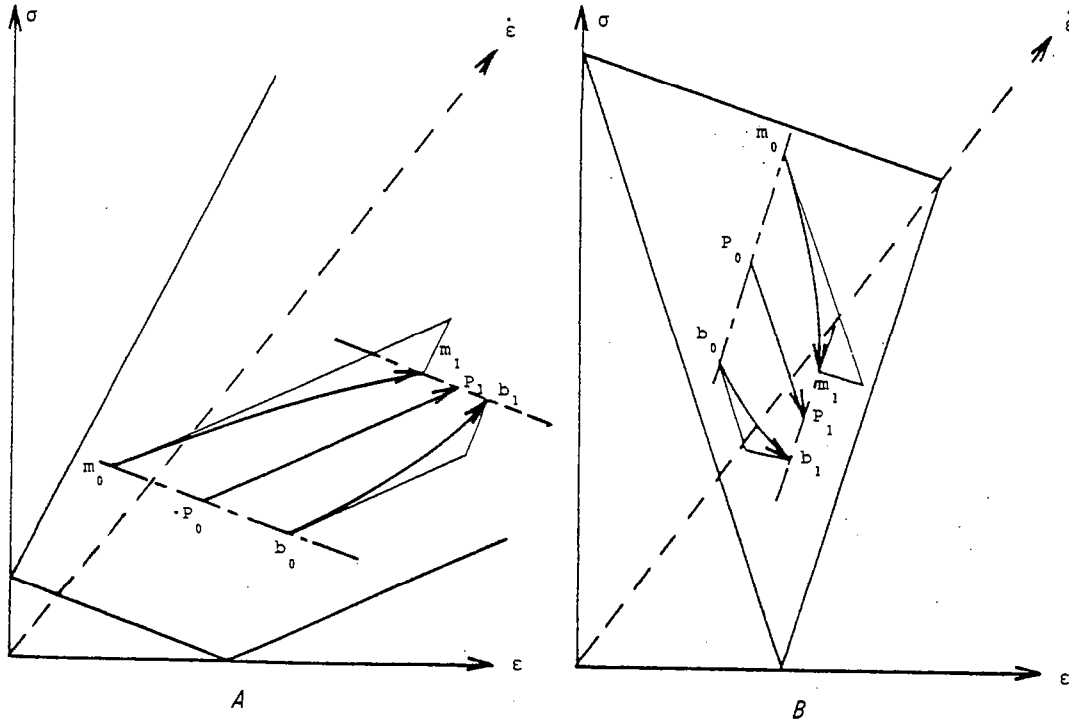


Fig. 1.11 - Evolution de la contrainte ( $\sigma$ ) avec la déformation ( $\epsilon$ ) et la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ).  $m$  représente la matrice,  $p$  l'ensemble du matériau et  $b$  la bande. L'indice  $_0$  correspond au temps  $t_0$  et l'indice  $_1$  au temps  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ).

A : Le matériau durcit avec  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$ .  
 B : Le matériau s'amollit avec  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$ .

seule l'influence de  $\epsilon$  sur  $\sigma$  ( $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$ ) varie : elle est plus importante en B qu'en A. Or, la plus grande distance entre  $p_1$  et  $b_1$  observée sur la figure B montre que l'instabilité est supérieure en A. La comparaison entre les figures B et C, où seule l'influence de  $\dot{\epsilon}$  sur  $\sigma$  ( $\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}}$ ) varie : elle est plus faible en B qu'en C, met en évidence la plus grande instabilité en B.

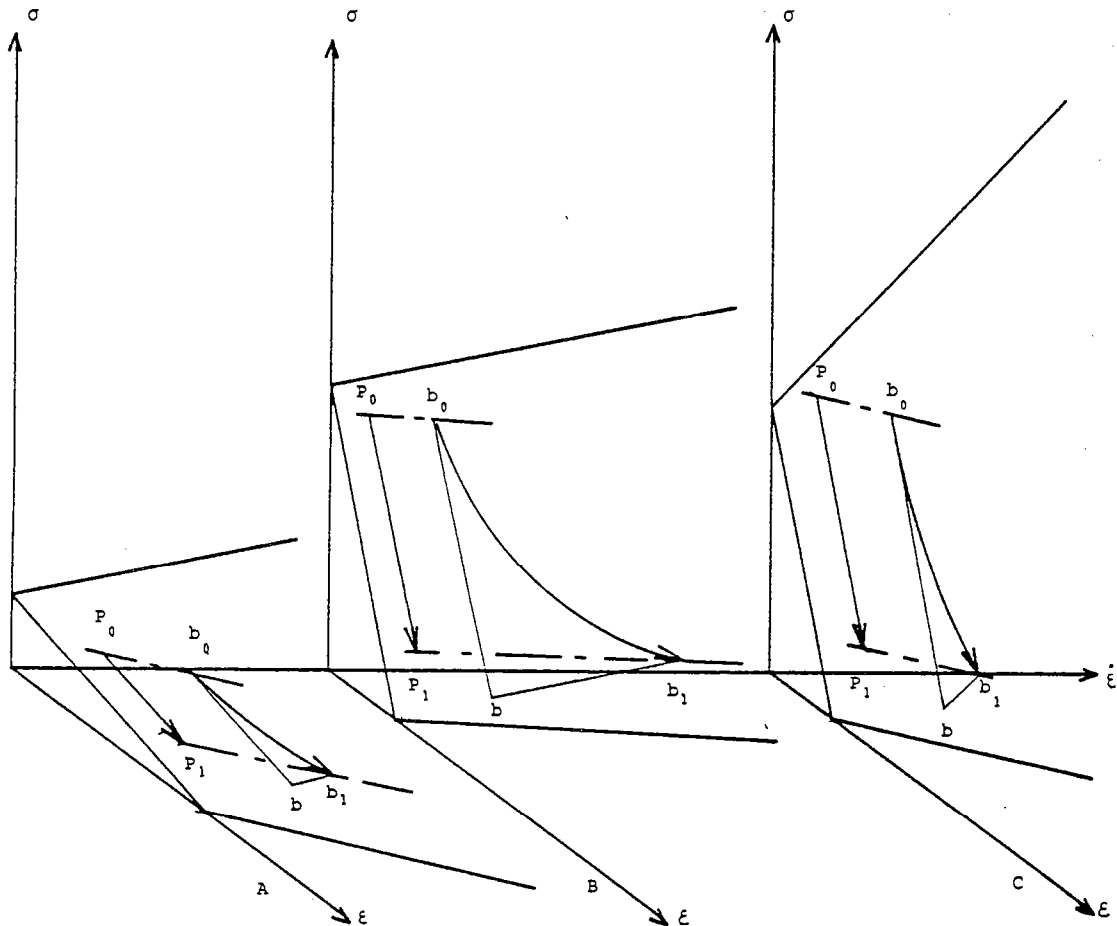


Fig. 1.12 - Evolution de l'instabilité en fonction de l'influence de  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$  sur  $\sigma$ . Cas d'un amollissement avec la déformation  $\epsilon$  et d'un durcissement avec la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ .  $b$  représente une bande et  $P$  l'ensemble du matériau.

Toutes ces remarques sont très bien résumées par la déformation caractéristique  $\epsilon^*$  définie par Bowden (équation 1.29) :

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \quad 1.31$$

Pour que le matériau soit fortement instable, il faut que  $\epsilon^*$  soit négatif et proche de zéro. Or si le matériau s'amollit, soit uniquement avec la déformation, soit uniquement avec la vitesse de déformation,  $\epsilon^*$  est négatif. De plus, si l'influence de la déformation sur la contrainte est forte  $\left( \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} \text{ petit} \right)$  et si l'influence de la vitesse de déformation sur la contrainte est faible  $\left( \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \text{ petit} \right)$ ,  $\epsilon^*$  est proche de zéro.

Bien sûr, dans l'étude de l'instabilité, la bande de cisaillement existe initialement, et seule l'amplification de l'hétérogénéité est démontrée, et non pas sa propagation. Par contre, si le point  $b_0$  (figures 1.12, 1.9 et 1.8) représente une hétérogénéité de dimension finie au temps  $t_0$ , bien qu'au temps  $t_1$  l'hétérogénéité tende à avoir la même déformation que celle représentée par le point  $b_1$ , elle sera freinée par la partie de la matrice qui lui est voisine, car le matériau doit satisfaire les équations de compatibilité. Autrement dit, sans se déformer autant que le point  $b_1$ , l'hétérogénéité augmentera en quantité de matière en entraînant dans sa déformation une partie de la matrice voisine : il y a propagation de l'hétérogénéité, c'est-à-dire création de la zone de cisaillement.

Malgré cette restriction, l'influence de la déformation caractéristique,  $\epsilon^c$ , sur la naissance d'instabilités est étudiée, lors des simulations numériques des chapitres 32, 33, 34 et 35.

### 1.3.2. RHEOLOGIE DISCONTINUE

Le modèle de Bowden, qui s'applique aux rhéologies continues, nécessite la connaissance de la contrainte en fonction de la déformation et de la vitesse de déformation  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ . Dans le cas de rhéologies discontinues, seule la contrainte en fonction de la déformation doit être connue, l'influence de la vitesse de déformation sur le résultat ne modifiant pas le principe de ce modèle. Cette rhéologie,  $\sigma = f(\epsilon)$ , doit présenter la particularité suivante : à une déformation donnée, une petite augmentation de celle-ci doit provoquer une chute importante de la contrainte.

La courbe  $\sigma = f(\epsilon)$  est de la forme suivante (Fig. 1.13).

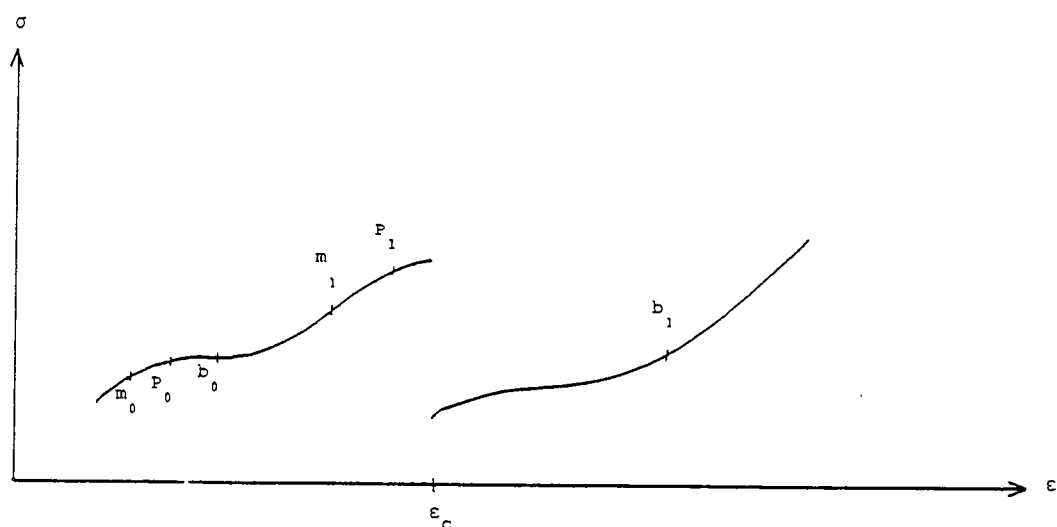


Fig. 1.13 - Schéma décrivant une rhéologie discontinue. P représente l'ensemble du matériau, m la matrice et b la bande. L'indice  $_0$  représente le temps  $t_0$  et  $_1$  le temps  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ).

Pour comprendre ce modèle, observons la déformation cisailante d'un matériau comportant une hétérogénéité de déformation ; la vitesse de déformation est considérée constante. L'ensemble du matériau (P) se déplace à vitesse de déformation constante, l'hétérogénéité (b) franchit en premier la déformation critique  $\epsilon_c$ , puis se déforme plus vite que le reste du matériau (m) car sa résistance est plus faible. Autrement dit, si au temps  $t_0$ , les déformations de  $b_0$  et  $m_0$  sont inférieures à  $\epsilon_c$  et si, au temps  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ), la déformation de  $b_1$  est supérieure à  $\epsilon_c$  et celle de  $m_1$  reste inférieure à  $\epsilon_c$ , la différence de déformation entre  $b_1$  et  $m_1$  est plus grande qu'entre  $m_0$  et  $b_0$  : il y a amplification de l'hétérogénéité de déformation.

Si la déformation se poursuit, il est probable que la déformation de la matrice dépasse la déformation critique  $\epsilon_c$ , dans quel cas le matériau ne présentant plus d'instabilité, la zone de cisaillement s'atténue.

Il est à remarquer, comme dans le modèle de Bowden, qu'une zone de cisaillement dépend de l'instabilité du matériau, de l'hétérogénéité initiale de déformation et de la déformation globale nécessaire.

L'étude numérique de ce comportement est entreprise au chapitre 36.

## 1.4. RHEOLOGIES REELLES

L'instabilité de la roche est l'une des conditions nécessaires dans les modèles de croissance des zones de cisaillement. Poirier (1980) classe les phénomènes rhéologiques instables qui peuvent se présenter en géologie. Son travail, comme ces phénomènes, sont décrits dans ce chapitre.

### 1.4.1. CLASSIFICATION DE POIRIER

Cet auteur classe les propriétés rhéologiques du matériau responsables du développement des zones de cisaillement. Dans ce but, il définit un critère d'instabilité.

Il considère un échantillon du matériau pendant un test en tension, avec une section minimum A.  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont les déformation et contrainte axiales. L'effort appliqué est  $F = \sigma.A$ . Le critère d'instabilité choisi est la condition que F décroît avec une augmentation de  $\epsilon$ , c'est-à-dire :

$$\frac{d \ln F}{d \epsilon} < 0 \quad 1.32$$

Le matériau se déforme par cisaillement pour un plan de glissement dans un monocristal, suivant la loi :

$$\tau = \tau_0 (\gamma_i)^n (\dot{\gamma}_i)^m \exp (mQ/RT) \quad 1.33$$

- $\tau$  est la contrainte de cisaillement.
- $\tau_0$  est une caractéristique du matériau.



- $\dot{\gamma}_i$  et  $\dot{\gamma}_i$  sont respectivement la déformation et la vitesse de déformation mesurées dans la direction de glissement.
- $Q$  est l'énergie d'activation.

Dans le cas d'un polycristal, le facteur  $M$  de Taylor est introduit. Il dépend de l'orientation des plans de glissement par rapport à l'axe de tension. Si tous les plans du système sont équivalents et actifs sous la même contrainte de cisaillement  $\tau$ , nous pouvons écrire :

$$\sigma = M\tau \quad 1.34$$

et

$$\sum_i \dot{\gamma}_i = M\dot{\epsilon} \quad 1.35$$

Pour le polycristal, l'équation 1.33 devient :

$$\sigma = \tau_0 M^{1+n+m} \dot{\epsilon} \dot{\epsilon}^m \exp(mQ/RT) \quad 1.36$$

Puisque l'effort appliqué est  $F = \sigma A$ , le critère d'instabilité (équ. 1.32) devient :

$$\frac{d \ln F}{d \epsilon} = \frac{d \ln \sigma}{d \epsilon} + \frac{d \ln A}{d \epsilon} < 0 \quad 1.37$$

soit

$$\frac{d \ln \sigma}{d \epsilon} < - \frac{d \ln A}{d \epsilon} \quad 1.38$$

C'est-à-dire :

$$(1 + n + m) \frac{d \ln M}{d \epsilon} + \frac{d \ln \tau_0}{d \epsilon} + \frac{n}{\epsilon} + m \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} - \frac{mQ}{RT^2} \cdot \frac{dT}{d \epsilon} < - \frac{d \ln A}{d \epsilon} \quad 1.39$$

Dans le cas d'un cisaillement simple, la section  $A$  reste constante et  $d \ln A / d \epsilon = 0$ . Les cinq facteurs d'instabilité proposés par Poirier sont alors :

- L'amollissement géométrique :

$$\frac{d \ln M}{d \epsilon} < 0 \quad 1.40$$

qui a lieu lorsque les plans de glissement s'orientent dans une position préférentielle.

- L'amollissement structural :

$$\frac{d \ln \tau_0}{d \epsilon} < 0 \quad 1.41$$

qui opère lorsque la structure change vers un état de déformation plus aisée.

- L'amollissement dû exclusivement à la déformation :

$$\frac{n}{\epsilon} < 0 \quad 1.42$$

qui se produit lorsque la courbe contrainte / déformation présente une pente négative, c'est-à-dire lorsque la contrainte décroît exclusivement avec la déformation.

- L'amollissement avec la vitesse de déformation :

$$m \frac{d \ln \dot{\epsilon}}{d \epsilon} < 0 \quad 1.43$$

Ce cas ne s'observe que pour des matériaux présentant une diminution de la contrainte avec une augmentation de la vitesse.

- L'amollissement thermique :

$$- \frac{mQ}{RT^2} \frac{dT}{d\epsilon} < 0 \quad 1.44$$

Ce cas est habituellement satisfait, mais disparaît si le milieu est isotherme.

Ces cinq facteurs d'instabilité sont maintenant repris en détail.

#### 1.4.2. AMOLLISSEMENT GEOMETRIQUE

Cette instabilité résulte de la variation de la rhéologie en fonction de l'orientation des axes principaux de déformation avec la structure de la roche. Deux cas sont envisagés, celui des monocristaux et des polycristaux.

- Un cristal peut présenter des chutes de contraintes très significatives si les plans de glissement tournent dans une direction favorable. Jonas et Luton (1978) montrent qu'un cristal de cadmium présente une chute de 60 % de la contrainte lorsque le plan basal est initialement à 79° par rapport à l'axe d'extension (Fig. 1.14).

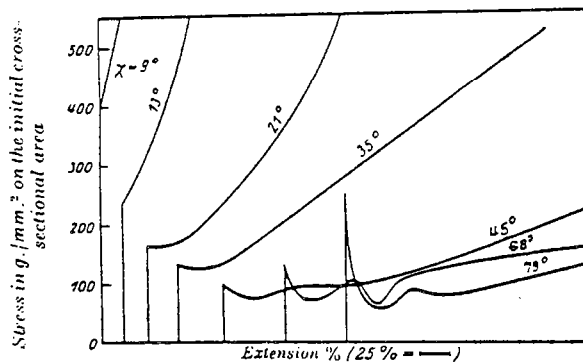


Fig. 1.14 - Courbes expérimentales contraintes en fonction de la déformation pour des monocristaux de cadmium, illustrant l'effet de l'orientation initiale des plans basaux.  $x$  : angle entre l'axe de tension et le plan de glissement (d'après Jonas et Luton, 1978).

- Dans les roches, qui sont des polycristaux, un phénomène identique ne peut être observé que difficilement car les orientations des plans de glissement des cristaux sont très étendues. Par contre, l'anisotropie, surtout observée dans les roches fortement foliées, ou présentant un litage très marqué, peut engendrer un amollissement avec la déformation.

Le modèle mathématique de Cobbold (1976) montre qu'un milieu visqueux anisotrope, pour une vitesse d'extension donnée, présente des variations de contrainte, avec l'orientation de l'anisotropie (Fig. 1.15), c'est-à-dire avec la déformation puisqu'elle influence l'orientation. Si  $N_1$  est le maximum de viscosité et  $Q_1$  le minimum, le degré d'anisotropie est le rapport  $N_1/Q_1$ .

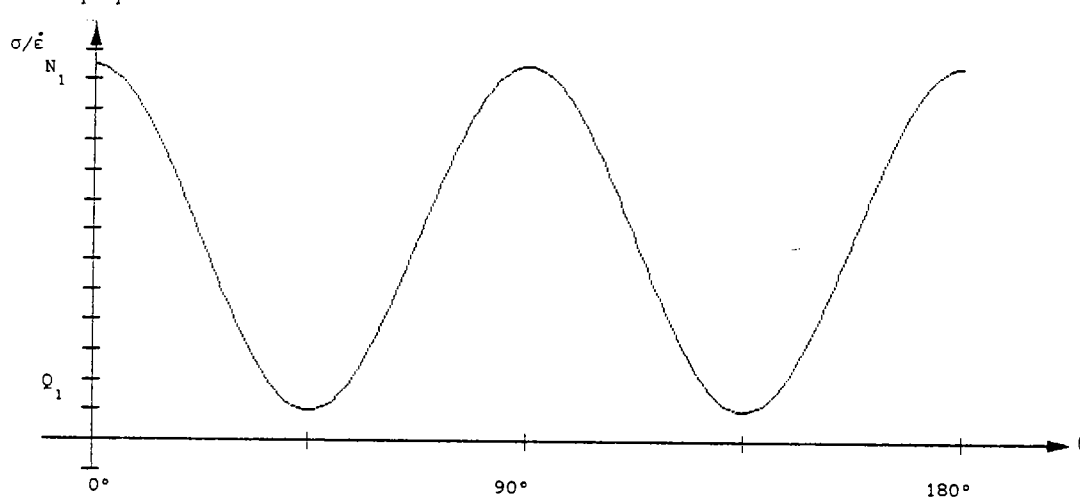


Fig. 1.15 - Courbe du rapport  $(\sigma/\dot{\epsilon})$  de la contrainte d'extension ( $\sigma$ ) sur la vitesse d'extension ( $\dot{\epsilon}$ ) en fonction de l'orientation ( $\theta$ ) de l'anisotropie par rapport à la direction d'extension, et pour un degré d'anisotropie de  $N_1/Q_1 = 12,5$ .

Pour compléter ce modèle, des valeurs de degré d'anisotropie ( $N_1/Q_1$ ) doivent être précisées. Bayly (1969) estime, à partir de mesures faites sur des plis en chevron, que ce rapport, dans un phyllosilicate contenant du mica, est supérieur à 12,5.

Les "kinks" peuvent être considérés comme des instabilités. Ces plis apparaissent dans les roches fortement anisotropes ; leurs formations doivent être associées à un amollissement géométrique. L'étude expérimentale de Donath (1968) sur le développement des "kinks" dans de l'ardoise de Martinsburg montre effectivement une instabilité (Fig. 1.16 a) associée à une pente négative sur la courbe contrainte / déformation (Fig. 1.16 b).

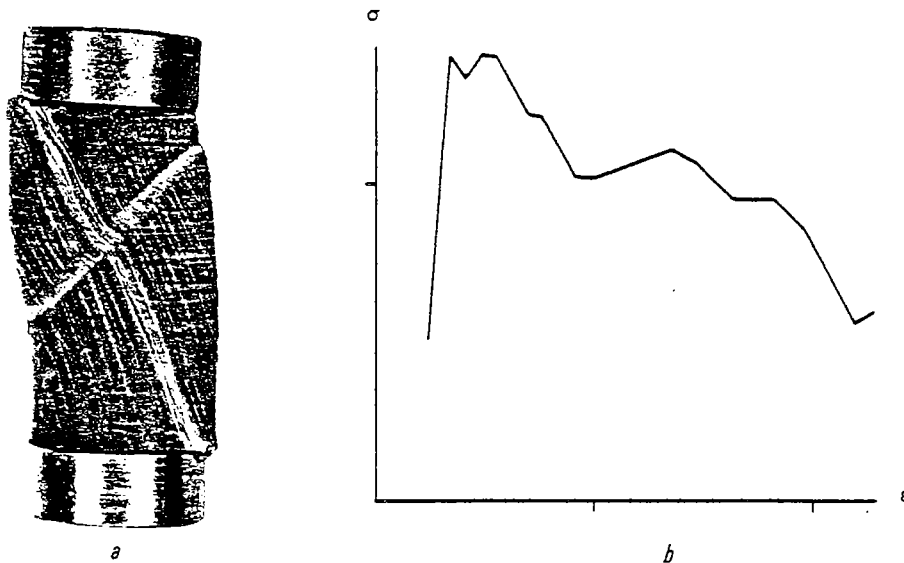


Fig. 1.16 - (a) kink obtenu expérimentalement par Donath (1968) et (b) la courbe  $\sigma/\epsilon$  associé à l'expérience (d'après Donath, 1968).

La courbe représentée ci-dessus n'est pas exactement celle qui est associée à la rhéologie de la roche car une telle courbe doit être tracée pour une roche se déformant homogènement, contrairement à cette expérience ; toutefois, celle-ci montre bien l'amollissement escompté.

Le modèle mathématique du comportement d'une roche (polycristal) anisotrope de Cobbold (1976) est utilisé lors des simulations numériques (chapitre 34). Le modèle de croissance des zones de cisaillement approprié est celui de Bowden.

#### 1.4.3. AMOLLISSEMENT STRUCTURAL

Ce phénomène résulte du changement de structure au cours de la déformation, qui induit une diminution de la résistance. Trois points sont discutés ici : la recristallisation dynamique, la redistribution de deux phases et la transformation de structures fines en structures globulaires.

##### 1.4.3.1. Recristallisation dynamique

C'est l'amollissement structural le plus répandu dans les roches ; il correspond à la formation de nouveaux grains au cours de la déformation. Rossard et Blain (1958) montrent sur des essais de déformation d'aciers en torsion que la chute du couple de torsion avec le nombre de tours est liée à la recristallisation (Fig. 1.17).

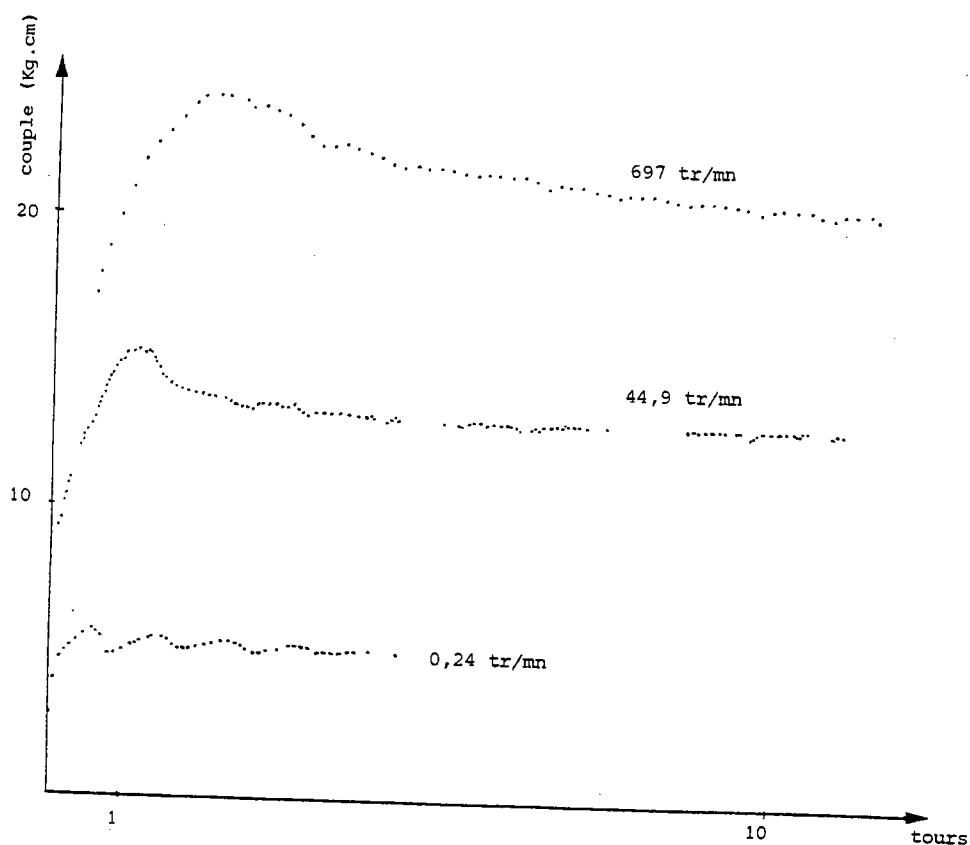


Fig. 1.17 - Variation du couple de torsion en fonction du nombre de tours pour un acier à 0,25 % de carbone et pour différentes vitesses (d'après Rossard et Blain, 1958).

Guillopé et Poirier (1979) en décrivant la recristallisation dynamique sur de l'halite mettent en évidence l'existence de deux modes de recristallisation :

- La recristallisation par rotation des grains qui a lieu à basse température et à de faible contrainte.
- La recristallisation par migration des bordures de grains qui a lieu à haute température et à des contraintes élevées.

Deux domaines sont donc définis (Fig. 1.18) dans le plan contrainte ( $\sigma$ ) et température ( $T$ ), délimités par la courbe limite. Dans chaque régime de recristallisation, la grosseur ( $d$ ) du grain recristallisé est uniquement reliée à la contrainte.

La recristallisation par migration n'a lieu que si les conditions de température et de contrainte sont suffisantes, c'est-à-dire placées au-dessus de la courbe limite et aussi si la déformation est supérieure à 60 %. Lorsque des impuretés sont introduites dans l'halite, la courbe limite dans le plan température / contrainte se déplace vers des températures plus élevées. Il est donc plus difficile de se trouver dans le domaine de la recristallisation par migration ; or c'est dans ce domaine que l'amollissement est important.

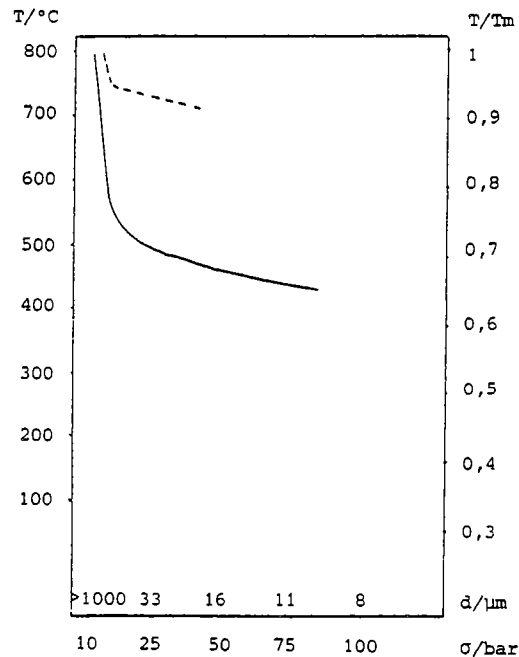


Fig. 1.18 - Courbe limite dans le plan  $\sigma$ ,  $T$  entre les domaines de recristallisation par rotation (en dessous) et de recristallisation par migration (en dessus). La ligne en pointillé correspond à de l'halite contenant des impuretés.  $d$  : grosseur du grain (d'après Guillopé et Poirier, 1979).

Bien que la relation entre la grandeur du grain ( $d$ ) et la contrainte ( $\sigma$ ) soit donnée par Nicolas et Poirier (1976, p. 169)

$$\sigma = K d^{-0,75}$$

1.45

il n'y a pas de relation simple entre la déformation et la contrainte.

#### 1.4.3.2. Redistribution de deux phases

Une roche possédant deux phases peut voir, au cours de la déformation, sous l'influence de la diffusion, la densité de l'une des phases augmenter en un point donné. Cette augmentation peut résulter du changement de l'une des phases au bénéfice de l'autre. Dans le cas où c'est la densité de la phase la plus facile à déformer qui augmente, la roche présente un amollissement avec la déformation (Jonas et Luton, 1978) (Fig. 1.19).

#### 1.4.3.3. La transformation de structures fines en structures globulaires

Elle est associée à une diminution de l'énergie de surface et peut amener à des amollissements considérables de 70 à 80 %. Jonas et Luton (1978) donnent un exemple (Fig. 1.20) sur un alliage Fe-C étudié en torsion.

Lors des amollissements structuraux, et en particulier pour ceux expliqués précédemment, il n'y a pas de relation clairement définie entre la contrainte et la déformation. C'est pourquoi, lors de la simulation numérique, des relations simples sont utilisées, premièrement dans le cas d'une rhéologie continue (chapitres 13 et 32) où la contrainte décroît continuel-

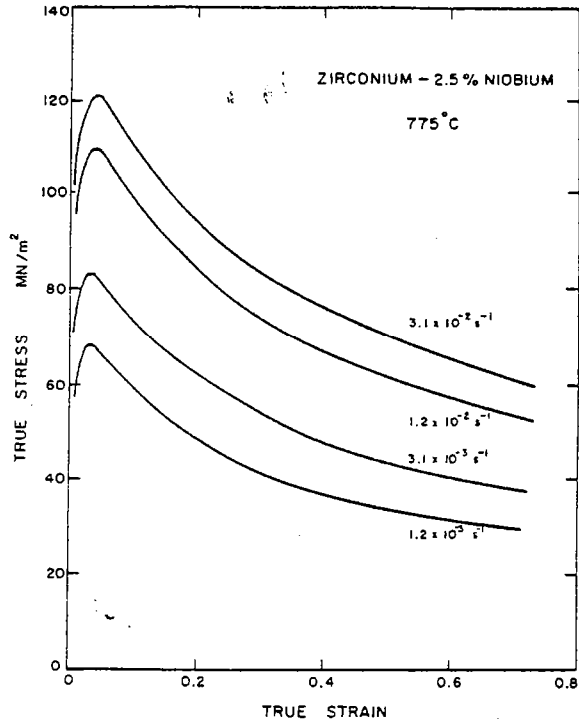


Fig. 1.19 - Courbe contrainte / déformation déterminée en compression sur un alliage de Zr et Nb possédant deux phases. L'amollissement est associé à la redistribution des phases (d'après Jonas et Luton, 1978).

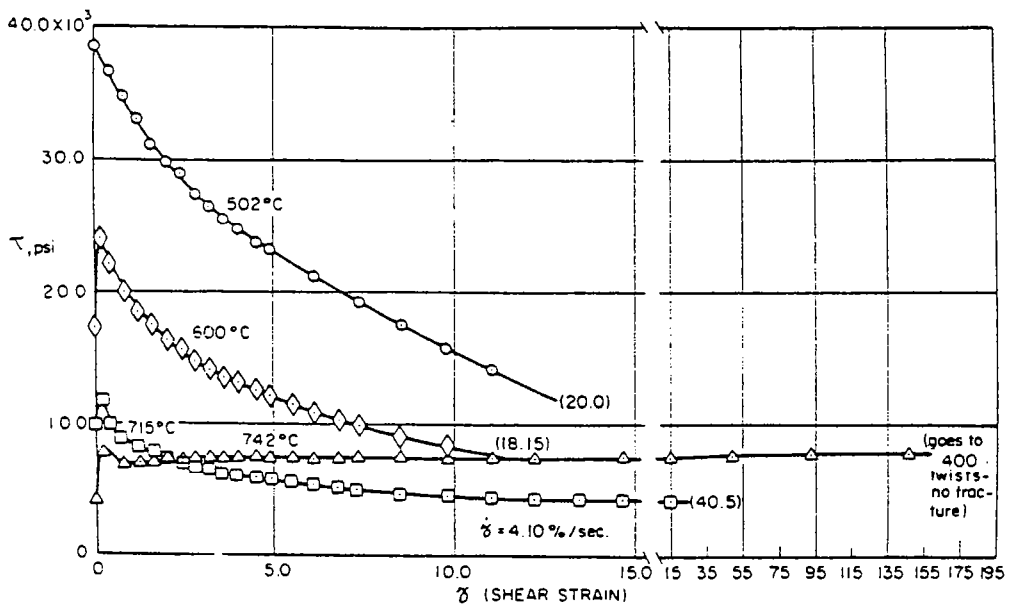


Fig. 1.20 - Courbe contrainte de cisaillement  $\tau$ , taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour un alliage Fer, Carbone (0,8 % C) testé en torsion. L'amollissement est lié à la "sphéroïdisation" des structures (d'après Jonas et Luton, 1978).

lement avec la déformation et deuxièmement dans le cas d'une rhéologie discontinue (chapitres 13 et 36) où la contrainte décroît brutalement avec la déformation.

#### 1.4.4. AMOLLISSEMENT LIÉ EXCLUSIVEMENT A LA DEFORMATION

Les points vus précédemment ne sont pas liés directement à la déformation ; l'amollissement géométrique se produit par l'intermédiaire de la rotation des plans de glissement et l'amollissement structural par l'intermédiaire d'un changement de structure.

Ici l'amollissement peut être lié à l'annihilation des dislocations. Nicolas et Poirier (1976, p. 134) proposent une relation entre cette densité de dislocation  $\rho$  et la contrainte interne  $\sigma$  :

$$\sigma = K n b \sqrt{\rho} \quad 1.46$$

$n$  = module de cisaillement

$b$  : vecteur de Burger

$K$  : constante.

Une autre cause à cet amollissement, relatée par Poirier (1980), est attribuée aux dislocations qui, bloquées par une impureté ou la force de Peierls, se libèrent avec la déformation.

Dans ce cas, n'ayant pas de relation entre la contrainte et la déformation, les simulations se font avec des relations simples (chapitres 32 et 36).

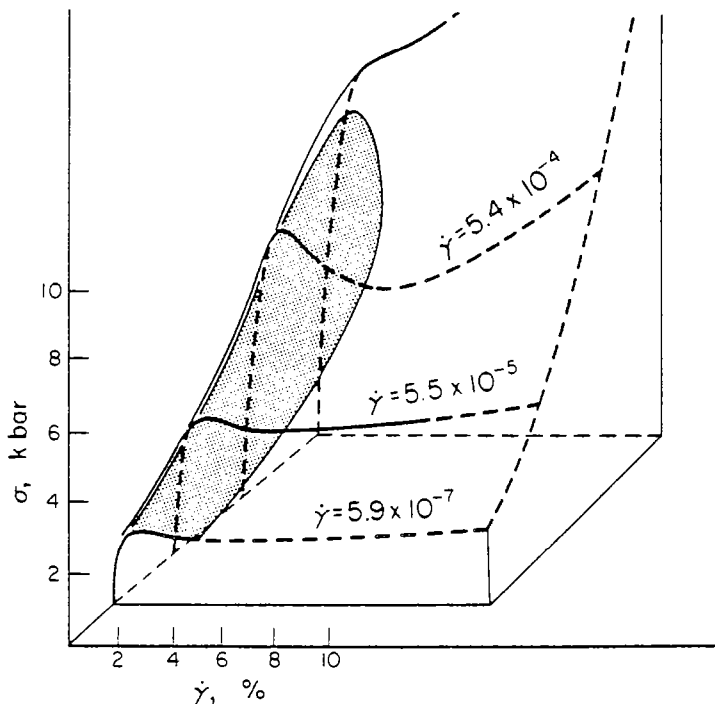


Fig. 1.21 - Surface  $\sigma = f(\gamma, \dot{\gamma})$  pour des monocristaux de quartz ; la température est de 500 ° C. En grisé, la zone où le matériau est instable (d'après Poirier, 1980).



Lorsque la surface contrainte ( $\sigma$ ) en fonction de la déformation ( $\epsilon$ ) et de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) est décrite expérimentalement et présente un amollissement avec  $\epsilon$ , il est possible d'y appliquer le modèle de croissance des zones de cisaillement de Bowden. C'est ce que fait Poirier (1980) sur l'étude du comportement des monocristaux de quartz de Balderman (1974) (Fig. 1.21).

La caractéristique de l'instabilité définie par Bowden est, dans le cas du cisaillement (équ. 1.29) :

$$\dot{\gamma}'' = \left( \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \sigma} \right) \dot{\gamma} \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\dot{\gamma}} \cdot \dot{\gamma}_0 \quad 1.47$$

Connaissant la dépendance de la contrainte avec la déformation lors des expériences (Fig. 1.22), elle peut être extrapolée pour des vitesses de déformation applicables en géologie ( $\dot{\gamma} = 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ ) ; nous obtenons alors :

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\gamma}} \right)_{\dot{\gamma}} = -10^6 \text{ Pa} \quad 1.48$$

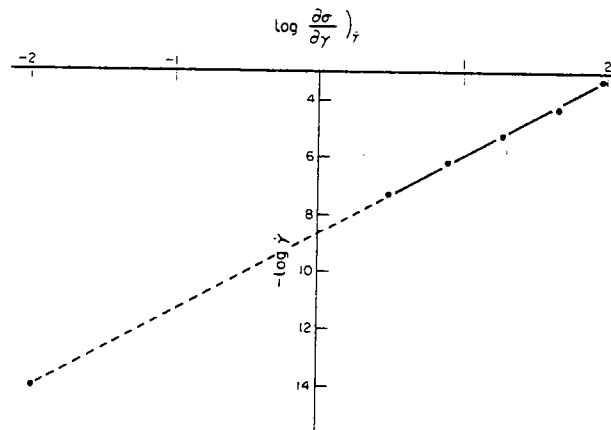


Fig. 1.22 -  $\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\gamma}}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  pour des monocristaux de quartz (Balderman, 1974). La droite est extrapolée jusqu'à  $\dot{\gamma} = 10^{-14} \text{ s}^{-1}$  (d'après Poirier, 1980).

Puisque la relation  $\sigma$ , en fonction de  $\dot{\gamma}$ , est de la forme :

$$\dot{\gamma} = 4,4 \cdot 10^{-36} \sigma^{3,64}, \quad \sigma \text{ en Pa} \quad 1.49$$

alors

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\gamma}} = 2,02 \cdot 10^{19} \text{ Pas} \quad 1.50$$

Pour une vitesse égale à  $10^{-14} \text{ s}^{-1}$ , la valeur de la déformation caractéristique est :

$$\gamma^* = -0,2 \quad 1.51$$

Dans son modèle, Bowden donne la formule de la déformation nécessaire pour que la vitesse dans une bande, initialement déformée de  $\Delta\gamma$ , soit doublée (voir l'équation 1.27) :

$$\gamma = -\gamma^* \ln \left( -\frac{\gamma^*}{\Delta\gamma} \right) \quad 1.52$$

S'il y a une hétérogénéité de déformation  $\Delta\gamma = 0,01$  dans une petite bande, la vitesse de déformation dans cette bande doublera pour une déformation globale de  $\gamma = 0,6$ . Nous constatons dans la figure 1.21 que cette déformation est trop grande pour rester dans la partie instable. Il n'y a donc pas doublement de la vitesse de déformation dans la bande. Par contre, pour  $\Delta\gamma$  égal à 0,17,  $\gamma$  est alors égal à 0,04 ; dans ce cas une zone de cisaillement peut s'amplifier.

Pour faire ce genre de prévision à partir des surfaces  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ , celles-ci doivent être obtenues au cours de déformation homogène, afin d'avoir la rhéologie exacte du matériau et elles doivent être extrapolables jusqu'aux vitesses désirées. En effet, ces courbes sont tracées généralement à partir d'expériences dans lesquelles les vitesses de déformation sont très supérieures à celles rencontrées en géologie.

#### 1.4.5. AMOLLISSEMENT AVEC LA VITESSE DE DEFORMATION

Pour la plupart des roches, la relation entre vitesse de déformation et contrainte s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = A \exp \left( -\frac{Q}{RT} \right) \sigma^n \quad 1.53$$

c'est-à-dire

$$\sigma = K \dot{\epsilon}^{1/n} \quad 1.54$$

Pour qu'il y ait amollissement,  $1/n$  doit être inférieur à 0, mais ce n'est généralement pas le cas : dans les milieux visqueux  $1/n$  égale 1, et les valeurs obtenues par Heard (1976) pour un marbre et une dolomite sont respectivement 0,12 ( $n = 8,3$ ) et 0,1 ( $n = 9,1$ ). Bien que ces deux exemples soient moins stables, puisque  $1/n$  est proche de zéro, il y a encore durcissement avec la vitesse de déformation.

Cependant, Chung et al. (1977) donne l'exemple d'un matériau présentant un amollissement avec la vitesse de déformation et un durcissement avec la déformation (fig. 1.23). Ce matériau, un alliage d'aluminium, développe des zones de cisaillement lors de sa déformation.

Puisque cet alliage présente les conditions d'instabilité décrites par l'équation 1.31, la déformation caractéristique ( $\epsilon^*$ ) est calculée pour quantifier l'instabilité :

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \quad 1.55$$

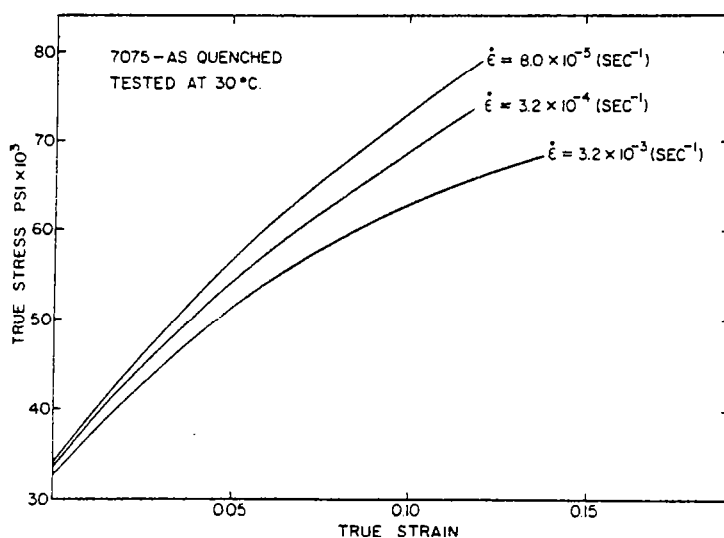


Fig. 1.23 - Courbes contrainte ( $\sigma$ ) en fonction de la déformation ( $\epsilon$ ), pour différentes vitesses de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) (d'après Chung et al., 1977).

Ce calcul est fait dans l'hypothèse où les courbes ci-dessus ont été tracées lors de déformations homogènes. La variation de contrainte à vitesse de déformation constante,  $\Delta\sigma_1$ , est mesurée pour une variation de déformation  $\Delta\epsilon_1$  de 0,05 et sur la courbe correspondante à un  $\dot{\epsilon}$  de  $8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

$$\Delta\sigma_1 = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad 1.56$$

La variation de contrainte  $\Delta\sigma_2$  à déformation constante se mesure entre les vitesses ( $\dot{\epsilon}$ )  $8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et  $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  pour la déformation  $\epsilon$  de 0,05

$$\Delta\sigma_2 = - 3,9 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad 1.57$$

ce qui correspond à  $\Delta \ln \dot{\epsilon}_2 = 3,7$ .

Une approximation de la déformation caractéristique se calcule de la façon suivante :

$$\epsilon^* = \frac{\Delta\epsilon_1}{\Delta\sigma_1} \cdot \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta \ln \dot{\epsilon}_2} \quad 1.58$$

Soit

$$\epsilon^* = - 0,0033 \quad 1.59$$

Ceci pour une déformation de 0,05 et une vitesse de déformation de  $8 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Cette déformation caractéristique très proche de zéro par valeur négative est représentative d'un matériau fortement instable. Il est donc normal que cet alliage d'aluminium développe des zones de cisaillement.

#### 1.4.6. AMOLLISSEMENT THERMIQUE

Lors de la déformation des roches, l'énergie dégagée peut échauffer le matériau, si elle est emmagasinée sur place. Et si ces roches s'amollissent lorsque leur température augmente, il y a amollissement thermique.

Cependant, pour que la zone de cisaillement se développe, un contraste de température entre cette zone et la matrice doit exister. Cette condition ne se rencontre que lorsque la vitesse de déformation est grande, ou lorsque le milieu considéré est assez vaste pour que la diffusion de chaleur reste faible pendant la déformation.

L'analyse mathématique et numérique de ce phénomène est faite au chapitre 3.5.

Kubin et Jouffrey (1971) montrent, sur un essai en tension de cristaux de Niobium, que les zones de cisaillement (Fig. 1.24) ont lieu à des températures voisines de celle de l'hélium liquide ( $\approx - 270^\circ \text{C}$ ) et sont associées à un amollissement thermique.

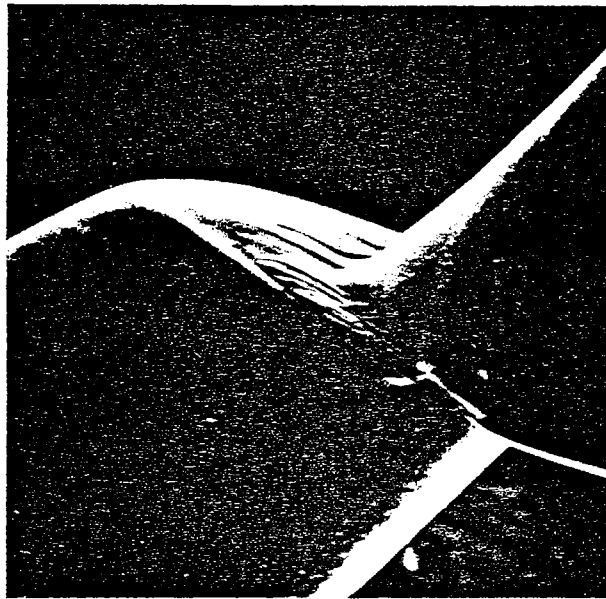


Fig. 1.24 - Zone de cisaillement due à l'amollissement thermique dans un cristal de Niobium, durant un test en tension à 4,2 K. Le diamètre de l'échantillon est de 2 mm (d'après Kubin et Jouffrey, 1971).

Les phénomènes d'amollissement thermique en géologie sont souvent liés aux grandes structures car, à petite échelle, la diffusion de chaleur efface tout contraste thermique. Nicolas et al. (1977) décrivent trois zones de cisaillement continentales : Lanvaux, Angers et la Montagne Noire en France, et Maydan en Afghanistan, en insistant sur leurs analogies :

- Les linéations d'allongement, les axes de plis et les isogrades métamorphiques sont subhorizontaux et parallèles à la zone de cisaillement.
- Les plans de foliation contenant la linéation sont habituellement verticaux et par-

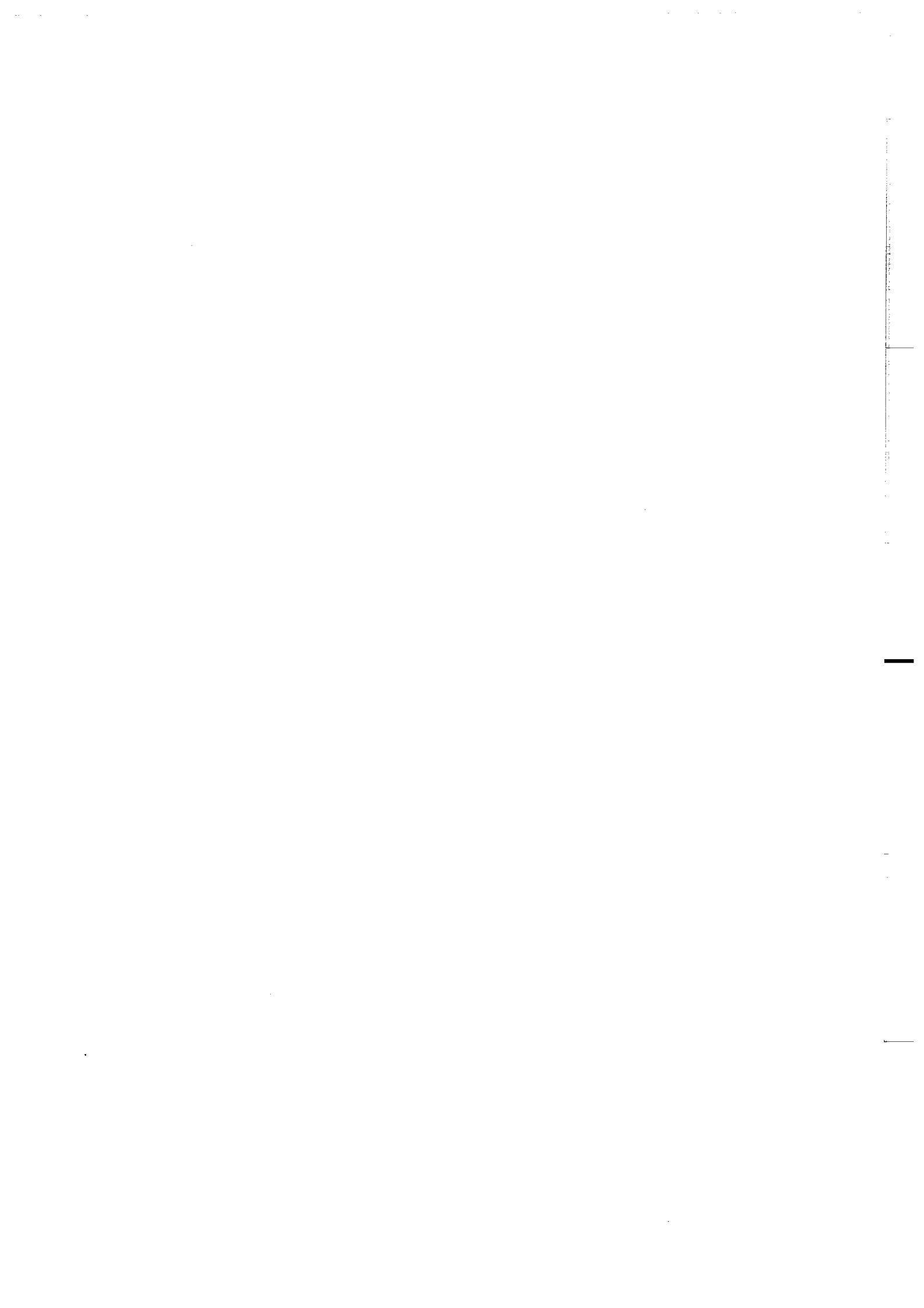
fois deviennent progressivement horizontaux vers le centre de la zone.

Ces auteurs proposent un modèle général pour l'origine de telles zones de cisaillement : l'échauffement visqueux dû à la déformation tend à concentrer l'écoulement plastique le long de l'axe. Il serait aussi responsable du développement du métamorphisme et de l'anastexie en profondeur. La montée des roches fondues induit une compression, c'est-à-dire des nappes gravitaires et des plis, dont les axes sont parallèles à la zone de cisaillement.

L'échauffement, parallèle aussi à l'axe, est enregistré par le métamorphisme.

Fleitout et Froidevaux (1980), considérant l'échauffement dans une zone de cisaillement, montrent qu'effectivement la déformation se concentre et que la température augmente rapidement au centre de la zone de cisaillement pendant sa phase d'initiation. Mais pour des vitesses de déformation imposées compatibles avec le déplacement de plaques, l'échauffement du cisaillement ne produit pas de fusion partielle, sauf pour des cas particuliers comme des structures stratifiées où le cisaillement de la strate visqueuse peut s'échauffer à tel point qu'elle fonde la roche voisine moins visqueuse.

Cependant, même si la propre déformation d'une roche ne peut pas provoquer sa fusion, l'échauffement résultant peut l'amollir considérablement.



## Seconde partie

Méthode des  
éléments finis





## 2.1. INTRODUCTION

L'étude du champ de déformation hétérogène d'un domaine, par une méthode analytique, exige, par la rigueur mathématique, de grandes simplifications, ce qui limite l'intérêt du résultat pour le géologue. Par exemple, Bowden (1970) étudie la déformation d'un milieu comportant une bande légèrement plus déformée (chapitre 1.3), mais la bande est considérée comme, déjà, très longue. Sanford (1959) décrit le champ de déformation d'un domaine, dû au déplacement appliqué le long d'une bordure (chapitre 4.3), mais uniquement dans le cas où le domaine obéit aux lois de l'élasticité classique.

Par contre, la méthode des éléments finis, en rendant compte d'un certain nombre de paramètres, paraît tout à fait convenable pour aborder un problème complexe, comme celui de la naissance des zones de cisaillement.

Il est donné ici un aperçu sur quelques travaux antérieurs utilisant cette méthode et s'appliquant à la géologie. Une vue schématique des principes de la méthode est décrite pour définir les hypothèses et les paramètres fournis, et les résultats obtenus.

## 2.2. TRAVAUX ANTERIEURS

La méthode des éléments finis a été maintes fois utilisée pour simuler le développement de structures géologiques.

- Dieterich et Onat (1969) proposent une méthode et l'appliquent à la déformation d'un milieu visqueux comportant initialement un trou circulaire (Fig. 2.1). Ils utilisent un modèle à 96 noeuds et un équivalent visqueux du coefficient de Poisson de 0,4 ; ces paramètres sont définis ultérieurement.

- Dieterich et Carter (1969) utilisent la méthode des éléments finis pour décrire le plissement d'un marqueur visqueux dans une matrice moins visqueuse (Fig. 2.2). Le modèle possède 109 noeuds et un équivalent visqueux du coefficient de Poisson de 0,4.

Ce modèle fut réutilisé par Parrish (1973).

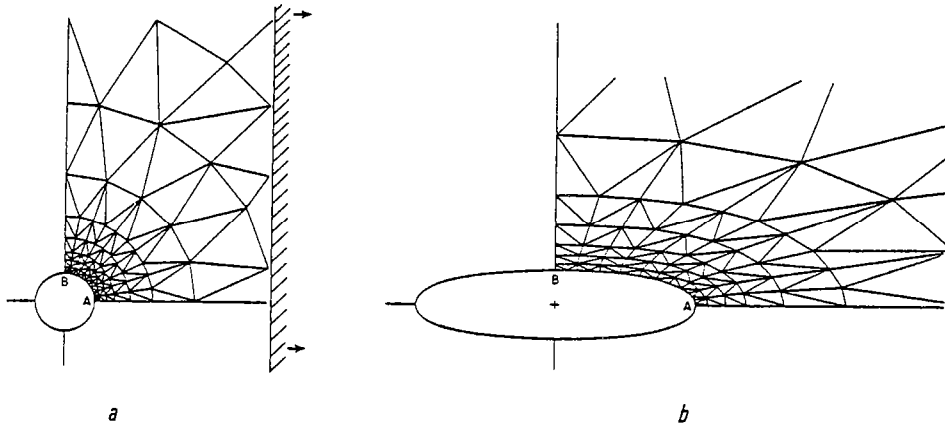


Fig. 2.1 - a : modèle non déformé. b : modèle déformé.

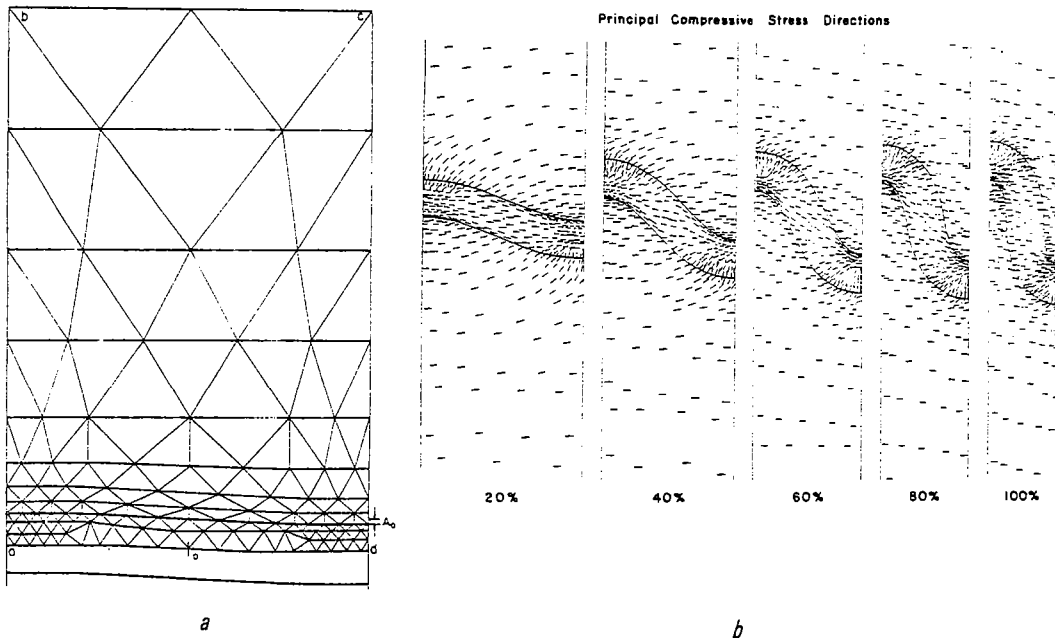


Fig. 2.2 - a : modèle non déformé. b : configuration du marqueur après déformation.

- Cobbold (1973) utilise cette méthode pour étudier le développement et la propagation de plis (Fig. 2.3). Le modèle possède 785 noeuds.

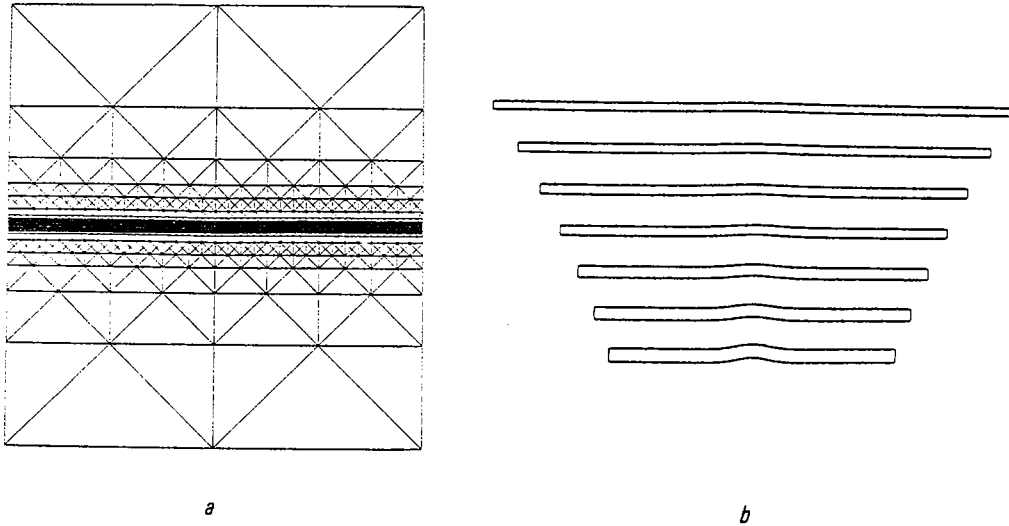


Fig. 2.3 - a : avant déformation. b : après déformation.

- Berner et al. (1972) étudient le développement des diapirs avec un modèle à 273 noeuds (Fig. 2.4).

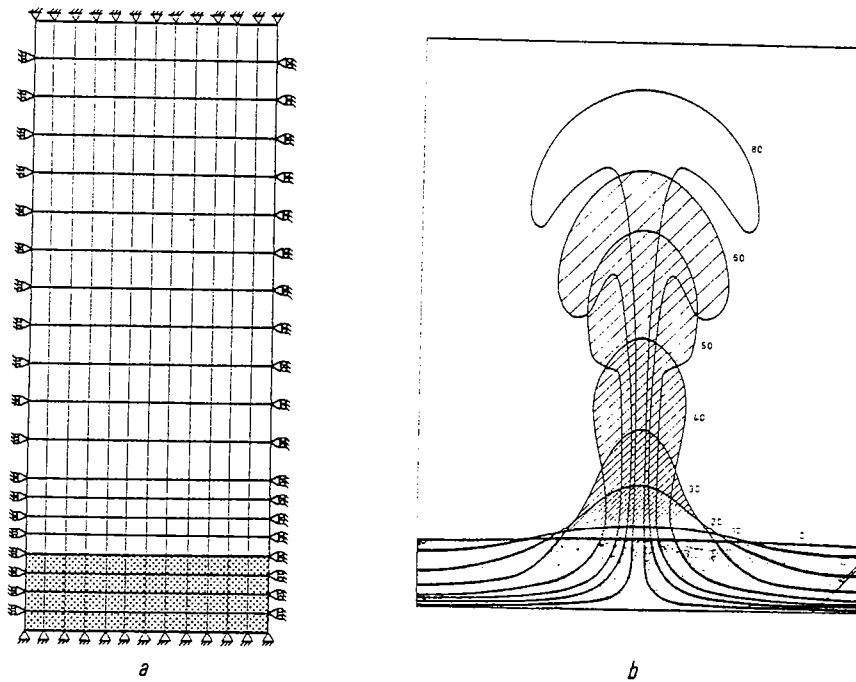


Fig. 2.4 - a : avant la déformation. b : pendant la déformation.

- Williams et al. (1978) étudient le rôle de la perturbation initiale dans le plissement d'un marqueur visqueux. L'équivalent visqueux du coefficient de Poisson est de 0,49995 (Fig. 2.5).

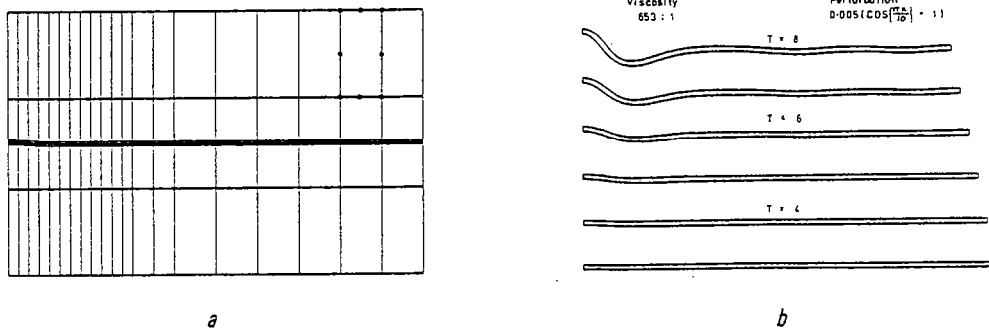


Fig. 2.5 - a : modèle avant déformation. b : configurations après déformations.

- Voight et Samuelson (1968) étudient les champs de contraintes et de déformations d'un milieu élastique, pour les comparer avec ceux obtenus analytiquement par Sanford (1959) (Fig. 2.6). Le modèle comporte 84 noeuds et le coefficient de Poisson est égal à 0,25.

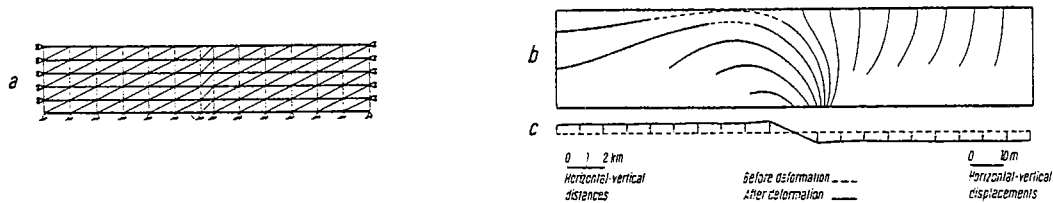


Fig. 2.6 - a : configuration du réseau. b : champ de contrainte résultant du déplacement (c) imposé à la bordure inférieure.

- Boudon (1976) applique la méthode des éléments finis à l'étude du poinçonnement (Fig. 2.7). Le modèle peut comporter jusqu'à 500 noeuds.

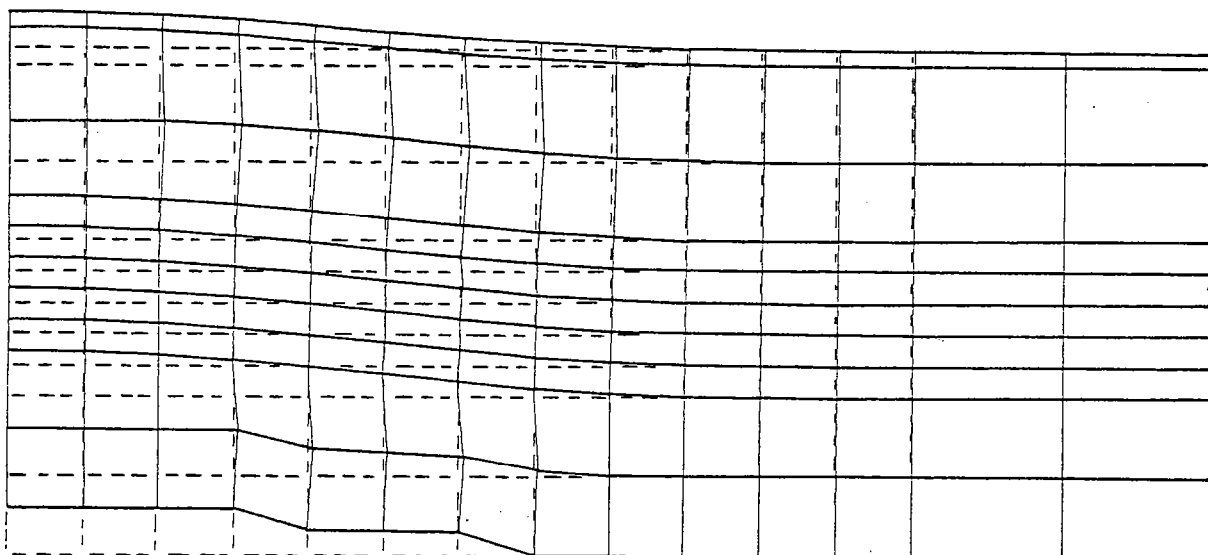
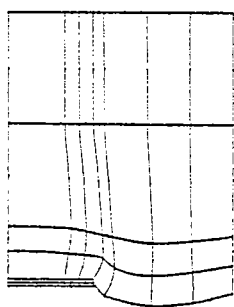
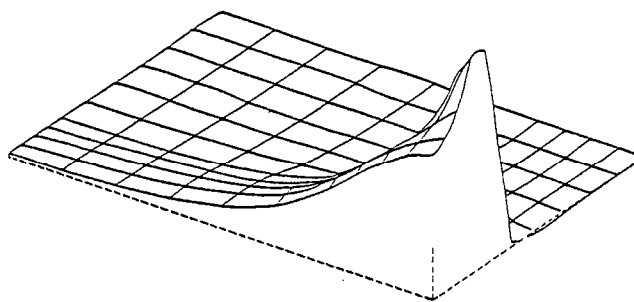


Fig. 2.7 - Superposition des maillages déformés et non déformés.

- Vilotte et Daignières (1982) étudient une collision continentale (Fig. 2.8). Le milieu est incompressible et viscoélastique.



*a*



*b*

Fig. 2.8 - a : grille déformée dans les conditions d'une déformation plane. b : champ de vitesse de déformation verticale dans les conditions de contrainte plane.

## 2.3. THEORIE

### 2.3.1. INTRODUCTION

Un milieu continu est constitué d'une infinité de points. La méthode des éléments finis permet de remplacer cette infinité de points par un nombre fini de points caractéristiques du domaine. Le milieu continu devient un milieu discret. Il est décomposé sous forme de réseau, en petits éléments volumétriques simples dont les côtés sont définis par les points caractéristiques. Pour traiter mathématiquement la déformation de cet ensemble, il est nécessaire d'appliquer une loi de comportement pour chaque élément : le déplacement d'un point à l'intérieur de l'élément est fonction du déplacement des points caractéristiques de cet élément et de la loi de comportement. La déformation du milieu continu est d'autant mieux approchée par la méthode des éléments finis, que le nombre de points caractéristiques est grand et que la loi de comportement est proche de la réalité.

Cette étude concerne la déformation plane, donc l'ensemble des points se situe sur un plan. La décomposition de cette surface se fait en triangles. Les points caractéristiques, au nombre de  $N$ , sont les sommets des triangles. Pour les éléments triangulaires, c'est la loi de comportement visqueux qui est appliquée, car c'est elle qui modélise le mieux la déformation des roches à petite vitesse.

### 2.3.2. MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT

En déformation plane, il est possible d'écrire pour un milieu visqueux linéaire et isotrope (Zienkiewicz, 1971 ; Casey, 1976) :

$$\sigma = T \dot{\epsilon} \quad 2.1$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $T$  le tenseur de passage et  $\dot{\epsilon}$  le tenseur des vitesses de déformation.

$$\text{avec } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad 2.2$$

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} \quad 2.3$$

$$\text{et } T = \frac{\eta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad 2.4$$

où  $\eta$  est le module de viscosité,  $\nu$  l'équivalent visqueux du coefficient de Poisson.

Donc la distribution des vitesses à l'intérieur d'un élément est :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad 2.5$$

$u$  et  $v$  sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse du point de coordonnées  $x$  et  $y$ . Les coefficients  $a$  à  $f$  sont fonction de la géométrie de l'élément et de la vitesse des coordonnées des sommets de l'élément. Cette équation 2.5 peut s'écrire :

$$v = M a \quad 2.6$$

La relation vitesse de déformation, vitesse de déplacement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \end{pmatrix} \quad 2.7$$

C'est-à-dire avec l'équation 2.5

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad 2.8$$

Soit

$$\dot{\epsilon} = B a \quad 2.9$$

- Pour un élément, la vitesse de dissipation du travail interne correspondant à une vitesse virtuelle de déplacement des noeuds  $\delta V$  est :

$$\delta d W_i = \delta \dot{\epsilon} \sigma dv \quad 2.10$$

Les équations 2.6 et 2.9 peuvent s'écrire :

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \quad 2.11$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \quad 2.12$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1T} \mathbf{B}^T \quad 2.13$$

En utilisant l'équation 2.1

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \quad 2.14$$

La vitesse de dissipation du travail interne s'écrit donc :

$$\delta \dot{W}_i = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \, d\mathbf{v} \quad 2.15$$

Sur tout l'élément triangulaire, de volume  $v$  :

$$\delta W_i = \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1T} \left( \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} \, dv \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \quad 2.16$$

- Pour un élément, la vitesse de dissipation du travail des forces externes, correspondantes à une vitesse virtuelle de déplacement  $\delta \mathbf{v}$  est :

$$\delta W_e = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{f} \quad 2.17$$

$\mathbf{f}$  étant le tenseur des forces extérieures s'appliquant aux noeuds.

Du théorème des travaux virtuels, nous pouvons écrire :

$$\delta W_e = \delta W_i \quad 2.18$$

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{f} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{M}^{-1T} \left( \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} \, dv \right) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v} \quad 2.19$$

Ceci est valable quelque soit la vitesse virtuelle de déplacement. Nous écrivons donc :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{v} \quad 2.20$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}^{-1T} \left( \iiint_v \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} \, dv \right) \mathbf{M}^{-1} \quad 2.21$$

$\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité d'un élément triangulaire. Dans notre cas,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{T}$  sont constants sur l'élément.



$$K = s M^{-1T} B^T T B M^{-1} \quad 2.22$$

$s$  : aire de l'élément.

Sur cette équation, nous pouvons remarquer que la matrice de rigidité  $K$  est symétrique puisque  $T$  est aussi symétrique.

### 2.3.3. MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE

Pour constituer cette matrice, il faut faire la somme en chaque noeud de toutes les forces provenant des éléments adjacents. Il faut donc calculer la matrice élémentaire de rigidité pour chaque élément du modèle. La somme en chaque noeud des forces des éléments adjacents, c'est-à-dire la somme de plusieurs équations linéaires, aboutit donc également à des équations linéaires liant entre elles les vitesses de déplacement des noeuds des éléments. Etant donné le nombre de points, ces sommations se font numériquement. L'ensemble de ces relations linéaires peut se mettre, comme tout système linéaire, sous la forme matricielle :

$$f = K v \quad 2.23$$

où  $f$  est la matrice des forces extérieures. C'est une matrice colonne à  $2.N$  composantes s'il y a  $N$  noeuds dans le modèle. Elle comprend les composantes horizontale et verticale de chaque force qui s'exerce aux  $N$  noeuds.  $v$  est la matrice des vitesses de déplacement. C'est une matrice de  $2 N$  composantes. Elle comprend les composantes horizontale et verticale de vitesse de chaque noeud.  $K$  est la matrice de rigidité globale, de dimensions  $2 N \times 2 N$ . Les matrices élémentaires étant symétriques, la matrice globale de rigidité est symétrique. Compte tenu des conditions aux limites,  $f$  peut être défini. Connaissant la géométrie des éléments triangulaires et la loi de comportement, c'est-à-dire la rhéologie,  $K$  peut être défini. Il suffit d'inverser la relation 2.23 pour connaître la vitesse de déplacement de chaque noeud ( $v$ ).

Connaissant le nombre de noeuds à traiter, il est difficile de donner une formule littérale pour l'inversion de la relation 2.23. Cela sera traité de façon numérique sur un ordinateur.

### 2.3.4. LES CONDITIONS AUX LIMITES

Ici, elles se caractérisent par des vitesses imposées à certaines coordonnées et non pas par des forces, ce qui modifie légèrement l'équation 2.23. Cette équation peut être mise sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{2 N} K_{ij} v_i = f_j, \quad j = 1 \text{ à } 2 N \quad 2.24$$

$K_{ij}$ ,  $v_i$ ,  $f_j$  sont les composantes respectives des matrices  $K$ ,  $v$  et  $f$ .

Puisque dans l'étude du cisaillement, les efforts dus à la pesanteur sont sans effet, toutes les composantes  $f_j$  sont nulles, sauf celles appliquées à des coordonnées auxquelles une vitesse est imposée.

Si à la coordonnée  $\ell$ , la vitesse  $p$  est imposée, elle s'écrit :

$$v_{\ell} = p \quad 2.25$$

substituons aux 2 N équations de la relation 2.24, les 2 N équations suivantes :

$$v_l = p$$

$$- K_{lj} v_l + \sum_{i=1}^{2N} K_{ij} v_i = f_j - K_{lj} \cdot p, \quad j = 1 \text{ à } 2N \text{ et } j \neq l$$
2.26

Il est possible de procéder de la même manière pour toutes les vitesses imposées. Dans ce cas, les conditions aux limites se caractérisent par des vitesses imposées et non plus par des forces.

### 2.3.5. METHODE D'INTEGRATION

Puisque la matrice de rigidité  $K$  se modifie avec la géométrie des éléments et la rhéologie, cette matrice, une fois calculée, ne peut être représentative du modèle que pour une petite déformation. Il faut réactualiser la matrice  $K$  lorsque la déformation du modèle a dépassé une certaine valeur. La déformation dans ce cas se fait par pas successifs de 5 %.

A chaque pas, en inversant la relation 2.23, le champ de vitesse  $V$  est calculé. Pour obtenir le champ de déplacement  $U$ , un incrément de temps,  $\Delta t$  est choisi. Le déplacement  $U_i$  suivant la coordonnée  $i$  se calcule de la façon suivante :

$$U_i = V_i \cdot \Delta t$$
2.27

Cette méthode d'intégration est due à Euler. Elle a été utilisée par Dieterich et Onat (1969). Elle a l'avantage d'être facilement programmable, mais elle est insuffisamment précise dans le cas où la solution exacte croît exponentiellement avec le temps. Ralston (1967) donne l'erreur de l'équation 2.27. Si  $\epsilon$  est la déformation, l'erreur est égale à :

$$(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \epsilon^2}$$
2.28

Prenons le cas de l'amplitude d'un pli, constitué d'un marqueur visqueux dans une matrice moins visqueuse. A partir du travail de Biot (1961), Casey (1976) donne une équation fonction de l'amplitude sinusoidale du pli,  $A$ , d'une constante  $P_m$  et du temps  $t$  :

$$A = A_0 \exp (P_m \cdot t)$$
2.29

Si  $\eta$  est la viscosité du marqueur,  $\eta_1$  celle de la matrice et  $\dot{\epsilon}_x$  la vitesse de déformation parallèle au pli :

$$P_m = - \frac{2\eta}{3\eta_1} \sqrt[3]{\frac{6\eta_1}{\eta}} \dot{\epsilon}_x$$
2.30

Dans le cas d'une déformation plane, où  $\epsilon$  est la déformation:

$$A = A_0 \exp \left[ 2 \left( \frac{\eta}{6 \eta_1} \right)^{2/3} \cdot \epsilon \right] \quad 2.31$$

Si la coordonnée  $i$  mesure l'amplitude de ce pli.

$$U_i = U_{0i} \exp \left[ 2 \left( \frac{\eta}{6 \eta_1} \right)^{2/3} \epsilon \right] \quad 2.32$$

Avec  $\eta = 18 \eta_1$  cela devient :

$$U_i = U_{0i} \exp (4,16 \epsilon) \quad 2.33$$

En dérivant cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\partial U_i}{\partial \epsilon} = U_{0i} 4,16 \exp (4,16 \epsilon) \quad 2.34$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \epsilon^2} = U_{0i} (4,16)^2 \exp (4,16 \epsilon) \quad 2.35$$

De l'équation 2.27, en prenant comme variable d'intégration la déformation :

$$\Delta \epsilon \frac{\partial U_i}{\partial \epsilon} = \Delta \epsilon U_{0i} 4,16 \exp (4,16 \epsilon) \quad 2.36$$

L'erreur  $E$  est donnée par :

$$E = \Delta \epsilon^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \epsilon^2} = (\Delta \epsilon)^2 U_{0i} (4,16)^2 \exp (4,16 \epsilon) \quad 2.37$$

L'erreur relative est de  $4,16 \Delta \epsilon$ . Si entre deux pas successifs la déformation est de 5 %, l'erreur est de l'ordre de 20 %. Après quelques pas, l'ordre de grandeur de l'erreur est proche de la solution. Ceci bien entendu n'est pas recevable.

Grâce aux méthodes d'Hamming et de Runge-Kutta, ce genre de cas peut être corrigé. Ces méthodes sont décrites par Zienkiewicz (1971), Casey (1976).

Dans cette étude nous verrons (chapitres 1.3 et 4.2) que, lorsque la zone de cisaillement est infiniment longue, la déformation au centre de la zone évolue de façon exponentielle, avec la déformation de la matrice. Seule la naissance des zones de cisaillement est étudiée avec la méthode des éléments finis car, pour des déformations plus importantes, la méthode d'Euler devient trop imprécise.

## 2.4. PROBLEMES INFORMATIQUES LIES A LA METHODE

### 2.4.1. STOCKAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La matrice  $K$  définie par l'équation 2.23 est une matrice carrée de dimensions  $2N \times 2N$ , avec  $N$  le nombre de noeuds étudiés. Le nombre d'informations fournies par la matrice  $K$  est égale à  $4N^2$ , ce qui est généralement très grand. Pour limiter la place dans l'ordinateur, seules les informations nécessaires sont stockées.

La matrice  $K$  étant symétrique, seuls les termes de la matrice situés sur et au-dessus de la diagonale sont stockés.

La matrice  $K$  donne une information non nulle entre deux vitesses de coordonnées, seulement si ces deux coordonnées appartiennent au même élément. Beaucoup de paires de coordonnées ne sont pas du même triangle. C'est pourquoi cette matrice a une structure en bande, c'est-à-dire qu'elle comporte beaucoup de termes nuls. Dans ce cas, il est intéressant de décomposer la matrice  $K$  en deux matrices plus petites. Dans l'une sont stockés les termes non nuls et dans la seconde est indiquée la place de ces termes dans la matrice  $K$ .

### 2.4.2. METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS LINEAIRES

#### 2.4.2.1. Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode se dénomme également la méthode de solution itérative.

Premièrement, une solution au système d'équation 2.23 est estimée, c'est-à-dire un vecteur  $V$  est donné.

Deuxièmement, par pas successifs, cette solution est améliorée, en réécrivant les composantes de  $V$  en fonction des autres composantes :

$$V_j = f_j - \frac{1}{K_{jj}} \left( \sum_{i=1}^{j-1} K_{ji} V_i + \sum_{i=j+1}^{2N} K_{ji} V_i \right) \quad 2.38$$

Lorsque les variations entre les nouvelles estimations et les anciennes deviennent négligeables, le processus converge vers la solution du système.

#### 2.4.2.2. Méthode d'élimination directe

C'est une extension de la méthode usuelle de résolution d'équations linéaires.

Le système d'équation 2.23 peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K_{11} V_1 + K_{12} V_2 + K_{13} V_3 + \dots &= f_1 \\ K_{12} V_1 + K_{22} V_2 + K_{23} V_3 + \dots &= f_2 \\ K_{13} V_1 + K_{23} V_2 + K_{33} V_3 + \dots &= f_3 \\ \dots &\dots \\ K_{12N} V_1 + K_{22N} V_2 + K_{32N} V_3 + \dots &= f_{2N} \end{aligned} \quad 2.39$$

Dans un premier temps, nous utilisons la première équation pour éliminer  $V_1$  dans toutes les autres équations. Le système d'équation devient :

$$\begin{aligned}
 K_{11} V_1 + K_{12} V_2 + K_{13} V_3 + \dots &= f_1 \\
 0 + K_{22}^* V_2 + K_{23}^* V_3 + \dots &= f_2^* \\
 0 + K_{23}^* V_2 + K_{33}^* V_3 + \dots &= f_3^* \\
 0 + K_{22N}^* V_2 + K_{32N}^* V_3 + \dots &= f_{2N}^*
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

Dans un second temps, en utilisant ce nouveau système d'équation, nous prenons la seconde équation pour éliminer  $V_2$  dans toutes les équations suivantes. Ce processus est répété jusqu'à ce que tous les coefficients de la matrice sous la diagonale soient nuls. Le système d'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 K_{11} V_1 + K_{12} V_2 + K_{13} V_3 + \dots + K_{12} V_2 &= f_1 \\
 K_{22}^* V_2 + K_{23}^* V_3 + \dots + K_{22}^* V_2 &= f_2^* \\
 + K_{33}^* V_3 + \dots + K_{32}^* V_2 &= f_3^* \\
 K_{2N}^* V_{2N} &= f_{2N}^*
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Les astérisques indiquent que les coefficients ont été modifiés par les multiples substitutions.

L'inconnue  $V_{2N}$  peut facilement être calculée grâce à la dernière équation. En remplaçant  $V_{2N}$  dans l'avant-dernière équation, l'inconnue  $V_{2N-1}$  peut être calculée. Et ainsi de suite, nous calculons toutes les inconnues.

La limitation à l'exactitude de la solution par la méthode de résolution directe est due à l'accumulation des erreurs de calcul de l'ordinateur. Pour la plupart des solutions par éléments finis, il est probable que les quatre derniers chiffres significatifs de la solution finale soient inexacts (Casey, 1976).

L'ordinateur utilisé pour cette résolution travaille sur des nombres comprenant douze chiffres significatifs. Le résultat est exact pour huit chiffres significatifs.

## 2.5. SYMETRIE PLANE ET PONCTUELLE

### 2.5.1. INTRODUCTION

Il n'est pas rare qu'il y ait dans certains modèles une symétrie par rapport à un point, non seulement de configuration géométrique et rhéologique, mais aussi des conditions aux limites. Dans ce cas, deux noeuds symétriques ont exactement des déplacements opposés et des vitesses de déplacements opposées. Sachant que le temps de calcul de l'ordinateur pour résoudre le système d'équations linéaires 2.23 est très fortement dépendant du nombre de noeuds, il est intéressant de tenir compte de cette symétrie pour gagner du temps.

### 2.5.2. SYMETRIE PONCTUELLE OU ANTISYMETRIQUE

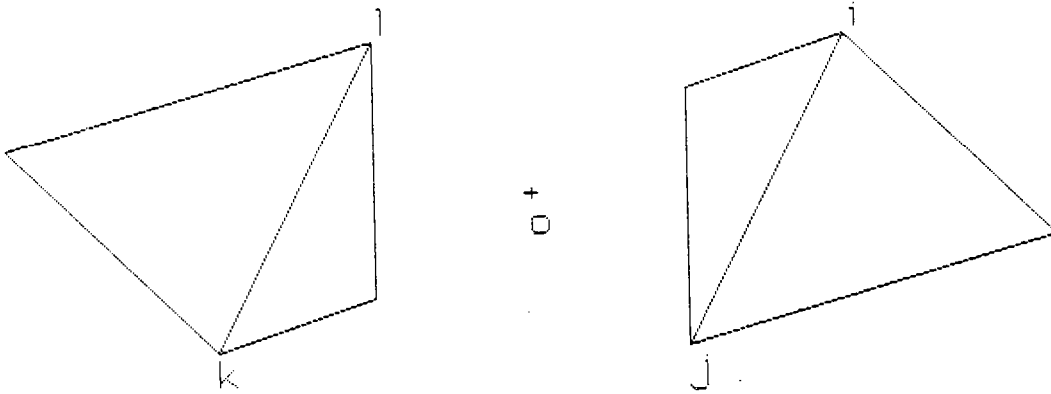


Fig. 2.9 - Schéma représentant 4 triangles symétriques deux à deux par rapport au point o.

Dans cette étude, seules les coordonnées  $i, j, k, l$  sont considérées (Fig. 2.9). Ce qui est vrai pour ces quatre coordonnées est vrai pour toutes les autres.

Le centre de symétrie est le point  $o$ .  $i$  est symétrique de  $k$  et  $j$  de  $l$ . Le système d'équation 2.23, limité à ces quatre coordonnées, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 K_{ii} V_i + K_{ij} V_j + o \quad + o &= f_i \\
 K_{ij} V_i + K_{jj} V_j + o \quad + o &= f_j \\
 o \quad + o \quad + K_{kk} V_k + K_{kl} V_l &= f_k \\
 o \quad + o \quad + K_{kl} V_k + K_{ll} V_l &= f_l
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Bien entendu, il y a beaucoup plus de composantes dans ces équations.

L'idée est de ne considérer que  $i$  et  $l$ , et de se libérer de  $k$  et  $j$ . Le système d'équation 2.42 s'écrit donc de la forme :

$$\begin{aligned}
 K_{ii} V_i + K_{il} V_l &= f_i \\
 K_{il} V_i + K_{ll} V_l &= f_l
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Il nous faut calculer les nouvelles valeurs de  $K_{ii}$ ,  $K_{il}$ ,  $K_{ll}$ ,  $f_i$  et  $f_l$ . En raison de la symétrie, nous pouvons écrire :

$$V_j = -V_l$$

$$V_k = -V_i$$

2.44

$$K_{ij} = K_{kl}$$

En reportant ces valeurs dans les deux premières équations du système 2.42, le système s'écrit :

$$K_{ii} V_i - K_{kl} V_l = f_i$$

2.45

$$-K_{kl} V_i + K_{ll} V_l = f_l$$

$$V_j = -V_l$$

$$V_k = -V_i$$

Le système d'équation 2.45 est équivalent au système 2.42. Il suffit donc, lorsque nous calculons  $-K_{kl}$  et  $-K_{ij}$ , de les dénommer  $K_{il}$ .

### 2.5.3. SYMETRIE PLANE

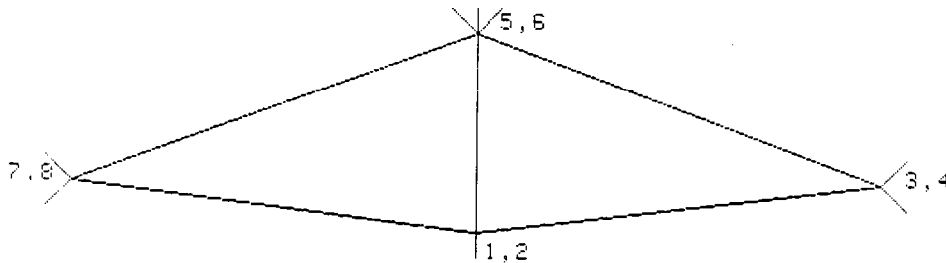


Fig. 2.10 - Schéma représentant un réseau symétrique par rapport à la droite passant par les points 1,2 et 5,6.

Les coordonnées (Fig. 2.10) horizontales sont dénommées par des chiffres impairs, les coordonnées verticales par des chiffres pairs. Le modèle est symétrique par rapport à la droite passant par les points 1,2 et 5,6. Cette étude se limite à ces huit coordonnées ; ce qui est vrai pour ces coordonnées l'est aussi pour les autres. La symétrie nous impose :

$$\begin{aligned} K_{13} &= K_{17} = c \\ K_{14} &= -K_{18} = d \\ K_{23} &= -K_{27} = h \\ K_{24} &= K_{28} = i \\ K_{34} &= -K_{38} = m \\ K_{35} &= K_{37} = n \\ K_{36} &= -K_{67} = p \end{aligned}$$

2.46

$$\begin{aligned}
 K_{45} &= -K_{58} = r \\
 K_{46} &= K_{68} = s \\
 K_{33} &= K_{77} = l \\
 K_{44} &= K_{88} = q \\
 V_3 &= -V_7 \\
 V_4 &= V_8 \\
 f_7 &= -f_3 \\
 f_8 &= f_4 \\
 V_1 &= V_5 = o \\
 f_1 &= f_5 = o
 \end{aligned}$$

Le système d'équations linéaires 2.33 limité à ces huit coordonnées devient :

$$\begin{array}{cccccccc|cccc}
 a & b & c & d & e & f & c & -d & V_1 & & f_1 \\
 b & g & h & i & j & k & -h & i & V_2 & & f_2 \\
 c & h & l & m & n & p & o & o & V_3 & & f_3 \\
 d & i & m & q & r & s & o & o & V_4 & = & f_4 \\
 e & j & n & r & t & u & u & -r & V_5 & & f_5 \\
 f & k & p & s & u & v & -p & s & V_6 & & f_6 \\
 c & -h & o & o & u & -p & l & -m & V_7 & & f_7 \\
 -d & i & o & o & -r & s & -m & q & V_8 & & f_8
 \end{array}
 \tag{2.47}$$

Le but de cette étude est de réduire ce système de huit équations à huit inconnues à un système de six équations à six inconnues.

Les inconnues  $V_7$  et  $V_8$  sont éliminées en soustrayant à la colonne trois la septième, et en additionnant à la quatrième la huitième. Le système devient :

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
 a & b & o & o & e & f & V_1 & & f_1 \\
 b & g & 2h & ri & j & k & V_2 & & f_2 \\
 c & h & l & m & u & p & V_3 & & f_3 \\
 d & i & m & q & r & s & V_4 & = & f_4 \\
 e & j & o & o & t & u & V_5 & & f_5 \\
 f & k & 2p & 2s & u & v & V_6 & & f_6 \\
 c & -h & -l & -m & u & -p & & & f_7 \\
 -d & i & m & q & -r & s & & & f_8
 \end{array}
 \tag{2.48}$$

$$V_7 = -V_3$$

$$V_8 = V_4$$



Puisque la symétrie nous impose  $f_7 = -f_3$ , alors  $c = n = 0$ , de la même façon  $d = r = 0$  car  $f_8 = f_4$ , et enfin  $b = f = j = n = 0$  puisque  $V_1 = V_5 = f_1 = f_5$ . Le système devient :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & g & 2h & 2i & 0 & k \\ 0 & 2h & l & m & 0 & p \\ 0 & 2i & m & q & 0 & s \\ e & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & k & 2p & 2s & 0 & v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{vmatrix} \quad 2.49$$

$$V_7 = -V_3$$

$$V_8 = V_4$$

Un autre problème apparaît : la matrice  $K$  n'est plus symétrique. Les équations deux et six sont divisées par deux. Le système final d'équations s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & g/2 & h & i & 0 & k/2 \\ 0 & h & l & m & 0 & p \\ 0 & i & m & q & 0 & s \\ e & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & h/2 & p & s & 0 & v/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2/2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6/2 \end{vmatrix} \quad 2.50$$

$$V_7 = -V_3$$

$$V_8 = V_4$$

Ce système d'équations 2.50 est identique au système 2.47.

## 2.6. DEFINITION DES MODELES

Pour initier une zone de cisaillement dans un milieu, il faut une hétérogénéité. Si cette hétérogénéité est un cylindre infiniment long et si les conditions aux limites sont comprises dans un plan perpendiculaire à l'hétérogénéité, la déformation dans ce même plan est plane, et le modèle est alors en deux dimensions. La zone de cisaillement se propage de l'hétérogénéité ; c'est pourquoi nous décomposons le réseau du modèle A (Fig. 2.11) de plus en plus finement à l'approche de l'hétérogénéité. La décomposition de ce réseau se fait en 310 triangles et 167 noeuds. Par contre, le réseau du modèle B (Fig. 2.12) se décompose en triangles de même surface. La décomposition se fait en 288 triangles et 169 noeuds.

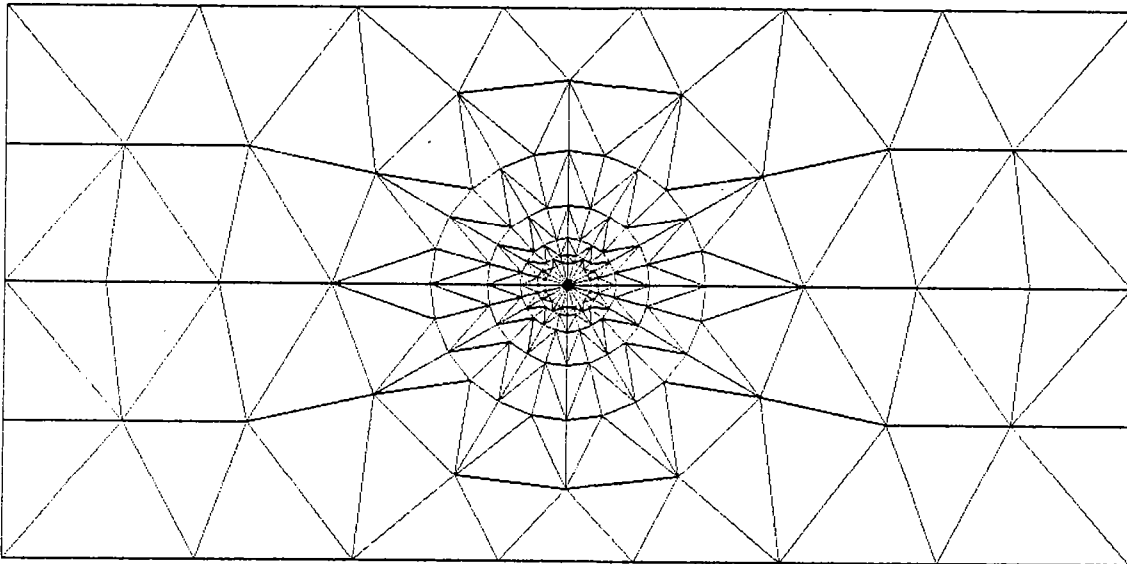


Fig. 2.11 - Réseau du modèle A.

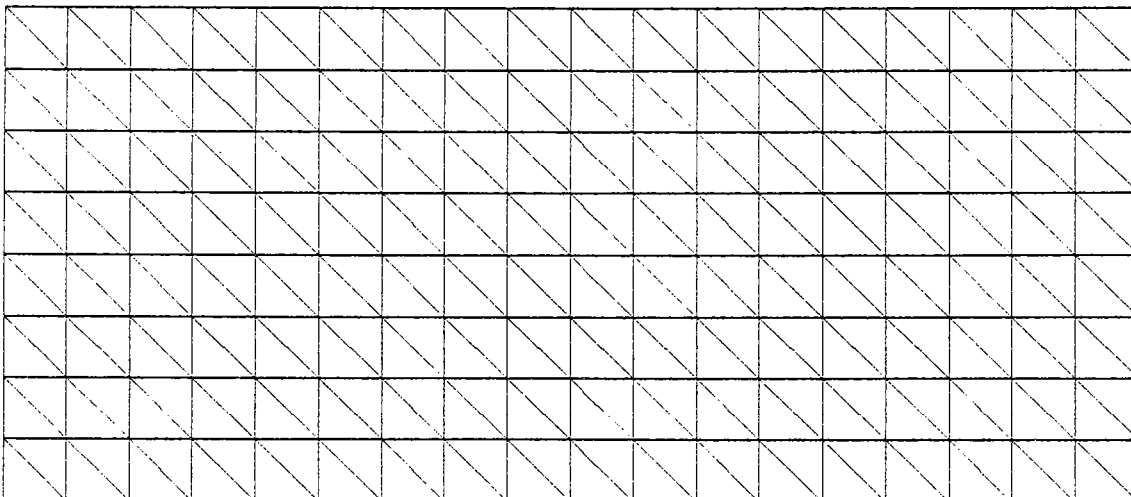


Fig. 2.12 - Réseau du modèle B.

Les conditions aux limites sont une vitesse de déplacement des bordures imposée. Les noeuds sur la bordure supérieure ont une vitesse horizontale  $v$  et une vitesse verticale nulle. Les noeuds sur la bordure inférieure ont une vitesse horizontale  $-v$  et une vitesse verticale nulle. Les noeuds sur les bordures latérales ont des vitesses verticales nulles. C'est à dire que les bordures supérieure et inférieure se déplacent l'une par rapport à l'autre comme si le modèle se déformait sous le régime d'un cisaillement simple dextre. Pour caractériser l'hétérogénéité, dans les 24 (ou 8) triangles centraux du modèle A (ou B) est introduite une rhéologie différente de celle des autres triangles.

Les modèles comportant une antisymétrie, il faut tenir compte de cette particularité pour diminuer le nombre de calculs.

La méthode utilisée pour résoudre les équations linéaires est la méthode d'élimination directe. Quelques simulations montrent qu'à précision égale cette méthode est plus rapide que la méthode de Gauss-Siedel. L'ordinateur utilisé est un HP 9845 B qui accepte des programmes en HPL. Le temps nécessaire pour une itération est de quarante minutes. Vingt itérations sont nécessaires pour obtenir la déformation finie, ce qui demande un temps de calcul de treize heures. Cette durée peut paraître très longue, mais en utilisant le micro-ordinateur aux heures creuses, en particulier la nuit, ce travail s'intègre très bien dans l'emploi du temps d'une telle machine.

## 2.7. TEST DU PROGRAMME INFORMATIQUE

Pour éprouver ce programme d'étude de la déformation par la méthode des éléments finis, la déformation d'un milieu visqueux comportant initialement un trou circulaire a été simulée. Ceci pour deux raisons : premièrement, le résultat analytique fût appréhendé par Bilby et al. (1975) dans le cas d'un milieu infiniment grand. Ils montrent que les vitesses de déformation principales du trou ( $\dot{\epsilon}_{11T}$  et  $\dot{\epsilon}_{22T}$ ) sont doubles de celles de la matrice ( $\dot{\epsilon}_{11M}$  et  $\dot{\epsilon}_{22M}$ ) ; dans le cas d'un milieu incompressible.

$$\dot{\epsilon}_{11T} = -\dot{\epsilon}_{22T} = 2 \dot{\epsilon}_{11M} = -2 \dot{\epsilon}_{22M} \quad 2.51$$

Et deuxièmement, ce cas fût traité par Dieterich et Cnat (1969) par la méthode des éléments finis (voir chapitre 22). Leur réseau (Fig. 2.13 et 2.1) est repris pour cette étude, avec 0,45 comme valeur de l'équivalent visqueux du coefficient de Poisson.

Les conditions aux limites se caractérisent par des vitesses de déplacement imposées aux bordures du réseau. Les noeuds sur la bordure supérieure ont une vitesse verticale  $-v$  dirigée vers le bas. Les noeuds sur la bordure inférieure ont une vitesse verticale de  $+v$ , dirigée vers le haut.

Dans un premier temps, le modèle est considéré symétrique par rapport au centre ; seule la moitié du modèle représenté sur la figure 2.14 est étudiée.

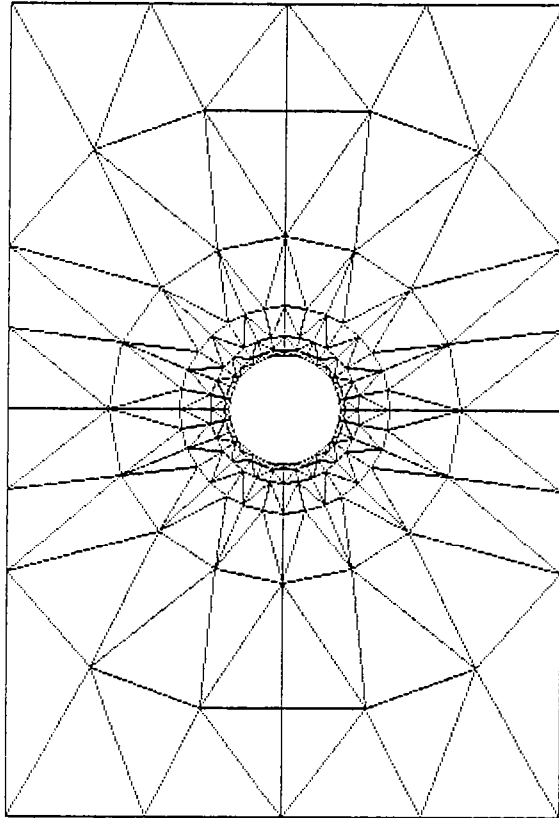


Fig. 2.13 - Réseau d'étude de la perturbation d'un milieu visqueux par un trou, lors d'une compression.

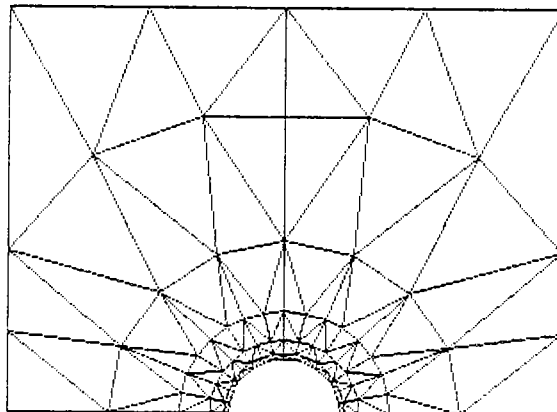


Fig. 2.14 - Partie du réseau traité lorsqu'il est considéré comme antisymétrique.

Dans un deuxième temps, le modèle est considéré comme ayant deux plans de symétrie ; seul le quart du modèle représenté sur la figure 2.15 est étudié.

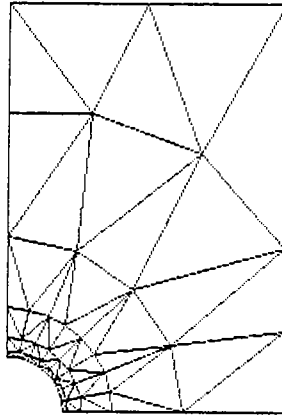


Fig. 2.15 - Partie du réseau traité lorsqu'il est considéré comme ayant deux symétries planes.

Les résultats obtenus (Fig. 2.16) par ces deux méthodes sont identiques.

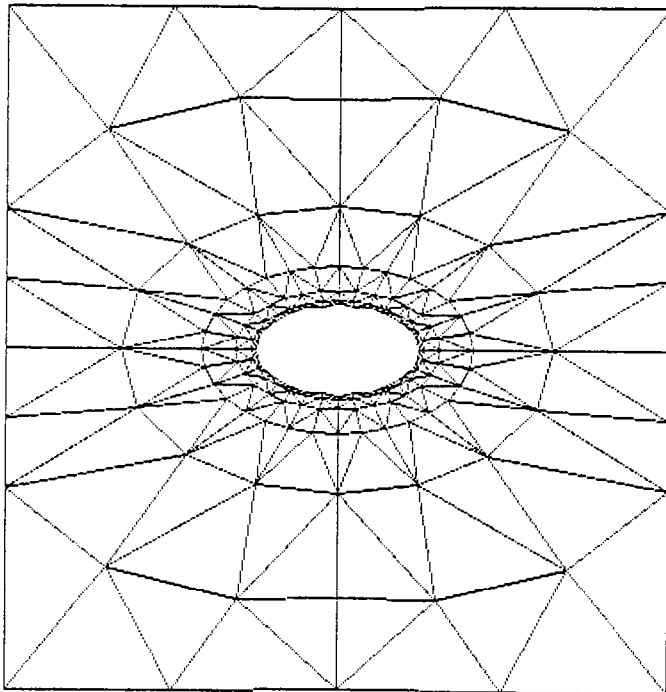


Fig. 2.16 - Réseau, comportant initialement un trou circulaire, déformé par compression.

Ce résultat (équation 2.52) est proche de ceux obtenus par Bilby et al. (1975) et par Dieterich et Onat (1969).

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{11} &= 0,465 \\
 \dot{\epsilon}_{22} &= -0,465 \\
 \dot{\epsilon}_{11} &= 0,195 \\
 \dot{\epsilon}_{22} &= -0,195
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

La différence peut s'expliquer par trois points :

- Premièrement, Bilby et al. (1975) considèrent un milieu infiniment grand. Le modèle de Dieterich et Onat (1969) et celui, traité ici, sont par contre de dimensions finies.
- Deuxièmement, Bilby et al. (1975) considèrent un matériau incompressible, c'est-à-dire avec un équivalent visqueux du coefficient de Poisson de 0,5 ; Dieterich et Onat (1969) prennent 0,4 et, dans le modèle considéré ici, 0,45.
- Troisièmement, la méthode des éléments finis introduit une erreur due à la discrétisation du milieu.

Malgré ces différences, les résultats obtenus avec ce programme sont satisfaisants.

## Troisième partie

## Résultats

Vertical line of text on the right edge of the page.



A small horizontal tick mark on the right edge of the page.





### 3.1. INTRODUCTION

Les résultats numériques de cette partie sont issus du programme informatique (méthode des éléments finis). Les simulations numériques permettent de définir les paramètres influençant l'amplification spatiale (propagation) et temporelle (croissance) des zones de cisaillement. C'est le cas de la déformation caractéristique définie dans le modèle de croissance de Bowden (chapitre 1.3).

Lorsque la rhéologie d'une roche possède un modèle mathématique bien défini, ce qui est le cas pour un phénomène anisotrope ou thermique, ce modèle est directement introduit dans le programme. Par contre, lorsque la rhéologie d'une roche n'est pas clairement connue, comme par exemple l'amollissement avec la déformation, dû à la recristallisation dynamique, ou la liaison entre la déformation et l'amollissement n'est pas quantifiable, le modèle mathématique est choisi simple. C'est le cas de l'amollissement avec la déformation (chapitre 3.2) ou avec la vitesse de déformation (chapitre 3.3) et le cas du durcissement et amollissement avec la déformation (chapitre 3.6).

Les résultats de cette partie, en particulier les figures, sont tous présentés sous la même forme. Un exemple simple est décrit dans ce chapitre d'introduction :

La loi de comportement de la roche sera toujours indiquée. Par exemple, une rhéologie visqueuse s'écrit :

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad 3.1$$

$$\eta = \text{constante dans le temps} \quad 3.2$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\eta$  la viscosité et  $\dot{\epsilon}$  la vitesse de déformation. Pour tenir compte de cette loi dans le modèle numérique, l'équation 3.2 est introduite dans la relation 2.4 du chapitre 2.3.

La forme sous laquelle apparaît l'hétérogénéité nécessaire à la naissance de la zone de cisaillement est précisée. Pour le modèle A (défini au chapitre 2.6), il peut être imposé aux vingt quatre triangles centraux (Fig. 3.1) une viscosité mille fois inférieure à celle de la matrice.

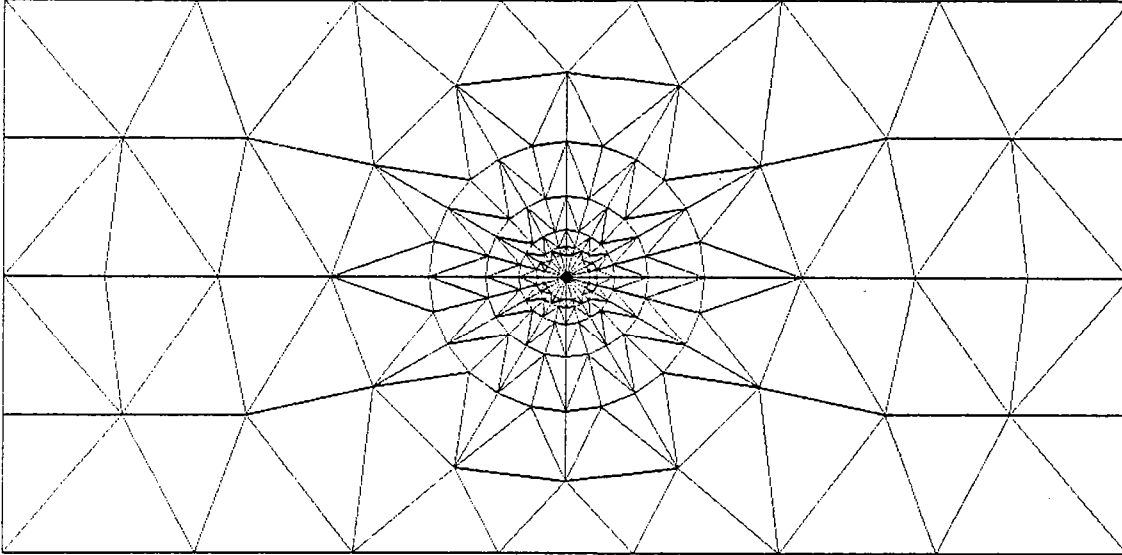


Fig. 3.1 - Réseau du modèle A. Le noyau du modèle est constitué des 24 triangles centraux et la matrice des 286 restants.

Lorsque la fonction reliant la contrainte ( $\sigma$ ), la déformation ( $\epsilon$ ) et la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) est connue, la déformation caractéristique  $\epsilon''$  est calculée, pour apprécier la similitude entre le modèle numérique et le modèle de Bowden (chapitre 1.3).

$$\epsilon'' = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} \quad \dot{\epsilon}_0 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \quad 3.3$$

Les figures représentant les résultats des simulations sont de divers ordres. La grille cartésienne déformée est représentée (Fig. 3.2 et 3.3).

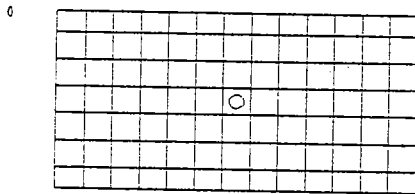


Fig. 3.2 - Grille cartésienne avant déformation.

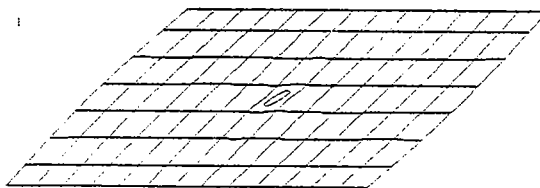


Fig. 3.3 - Grille cartésienne après déformation.

La roche, dans cette simulation (Fig. 3.3), est visqueuse et comporte une hétérogénéité mille fois moins visqueuse que la matrice, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions énoncées, sous forme d'exemple, au début de ce chapitre (équation 3.2).

Le chiffre à gauche sur les figures 3.2 et 3.3 représente le déplacement de la bordure supérieure par rapport à la bordure inférieure, relativement à leur distance, ou plus simplement le taux de cisaillement.

Les densités de déformation, indiquant l'hétérogénéité de la déformation de la roche, sont représentées de la façon suivante : Sur la figure 3.4, qui se rapporte à la même simulation représentée sur la figure 3.3, sont dessinées, en hachuré, les zones déformées à plus de 110 % de la déformation moyenne et, en pointillé, les zones déformées à moins de 90 % de la déformation moyenne.

Puisqu'ici la déformation est calculée par la relation (Truesdell et Toupin, 1960, p. 266) :

$$\epsilon = \left\{ \frac{1}{2} [ (\lambda_1 - 1/\lambda_1)^2 + (\lambda_2 - 1/\lambda_2)^2 ] \right\}^{1/2} \quad 3.4$$

Et que, lors d'un cisaillement simple, nous avons :

$$\lambda_1 = 1/\lambda_2 = [ 2 / ( 2 + \gamma^2 - \gamma \sqrt{4 + \gamma^2} ) ]^{1/2} \quad 3.5$$

La déformation ( $\epsilon$ ) égale alors le taux de cisaillement simple ( $\gamma$ ). Sur les figures 3.3 et 3.4, la déformation moyenne est donc de 1.



Fig. 3.4 - Densités de déformation dans le cas de la simulation correspondante à la figure 3.3. La zone hachurée est déformée à plus de 1,1 et la zone pointillée à moins de 0,9.

La zone de cisaillement est considérée exprimée lorsque la partie hachurée traverse le modèle de droite à gauche (Fig. 3.5). Ce choix bien qu'arbitraire est lié à la propagation de la zone de cisaillement.

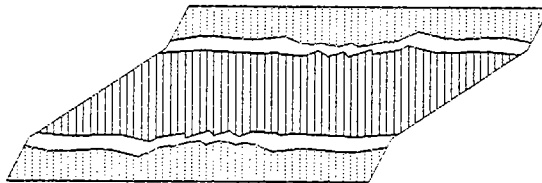


Fig. 3.5 - Densités de déformation dans le cas d'un modèle présentant une zone de cisaillement.

Parfois les directions principales d'élongation totales sont représentées, c'est-à-dire pour une roche, l'équivalent de la trace de la schistosité (Fig. 3.6).

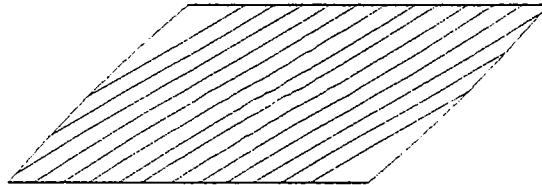


Fig. 3.6 - Directions principales d'élongation totale dans le cas de la simulation correspondante à la figure 3.3.

Lors des simulations thermiques (chapitre 3.5), certains isothermes sont visualisés ; leurs valeurs sont indiquées à droite de la figure (Fig. 3.7). La zone la plus chaude est hachurée et la plus froide pointillée.

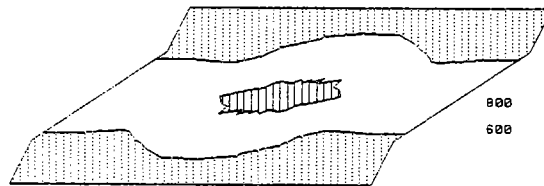


Fig. 3.7 - Isothermes 600 K et 800 K. La zone hachurée est à plus de 700 K et, en pointillé, à moins de 600 K.

## 3.2. AMOLLISSEMENT AVEC LA DEFORMATION

### 3.2.1. INTRODUCTION

Comme il a été vu précédemment, pour qu'une roche ait un comportement instable, il faut aussi un durcissement lié à la vitesse de déformation. La loi de comportement utilisée est la suivante (Fig. 3.8) :

$$\sigma = \eta_0 \dot{\epsilon} \exp(-a\epsilon) \quad 3.6$$

c'est-à-dire

$$\eta = \eta_0 \exp(-a\epsilon) \quad 3.7$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\eta$  la viscosité,  $\dot{\epsilon}$  la vitesse de déformation,  $\epsilon$  la déformation,  $\eta_0$  la viscosité initiale et  $a$  une constante positive.

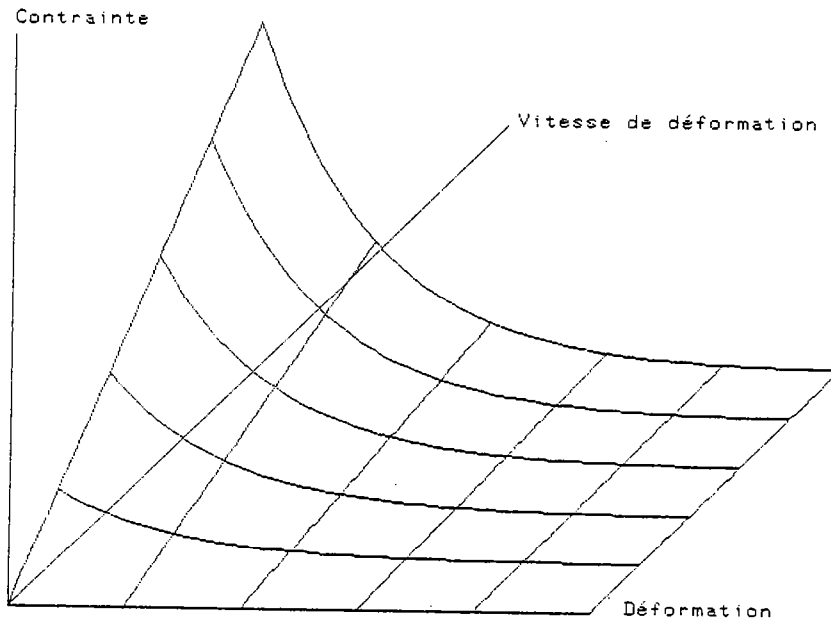


Fig. 3.8 - Surface  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$  correspondante à l'équation 3.4.

Cette loi a été choisie car elle a la particularité de donner à la roche une instabilité constante quelque soient la déformation et la vitesse de déformation. Pour s'en convaincre, la déformation caractéristique  $\epsilon^*$  définie au chapitre 1.3 est calculée.

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} \dot{\epsilon} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \quad 3.8$$

or

$$\left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} = \frac{1}{-a \eta_0 \dot{\epsilon} \exp(-a\epsilon)} \quad 3.9$$

et

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon = \eta_0 \exp(-\epsilon) \quad 3.10$$

c'est-à-dire

$$\epsilon^* = -\frac{1}{a} \quad 3.11$$

La déformation caractéristique est bien indépendante de la déformation et de la vitesse de déformation. Pour connaître son influence sur la création des zones de cisaillement lors des simulations, il suffit de faire varier le facteur  $a$ .

Dans le modèle numérique, l'hétérogénéité initiale du modèle A est constituée des 24 triangles centraux, et celle du modèle B des 8 triangles centraux. Ces éléments ont une viscosité mille fois inférieure à celle de la matrice.

## 3.2.2. RESULTATS NUMERIQUES

Les quatre simulations I (Fig. 3.9), II (Fig. 3.10), III (Fig. 3.11) et IV (Fig. 3.12) sont faites sur le modèle A. Les deux premières ont un taux de cisaillement fini ( $\epsilon_f$ ) égal à 1 ; les deux suivantes un taux égal à 0,25. Les lois de comportement changent à chaque simulation par l'intermédiaire du facteur  $a$  et donc par leur déformation caractéristique  $\epsilon^*$ . Toutes ces valeurs sont précisées dans le tableau 1.

Simulation	Figure	$\epsilon_f$	$a$	$\epsilon^*$
I	3.9	1	6	- 0,167
II	3.10	1	4	- 0,25
III	3.11	0,25	24	- 0,042
IV	3.12	0,25	16	- 0,062

Tableau 1 : Valeurs de la déformation finie  $\epsilon_f$ , du facteur  $a$  et de la déformation caractéristique  $\epsilon^*$  pour les simulations I, II, III et IV.

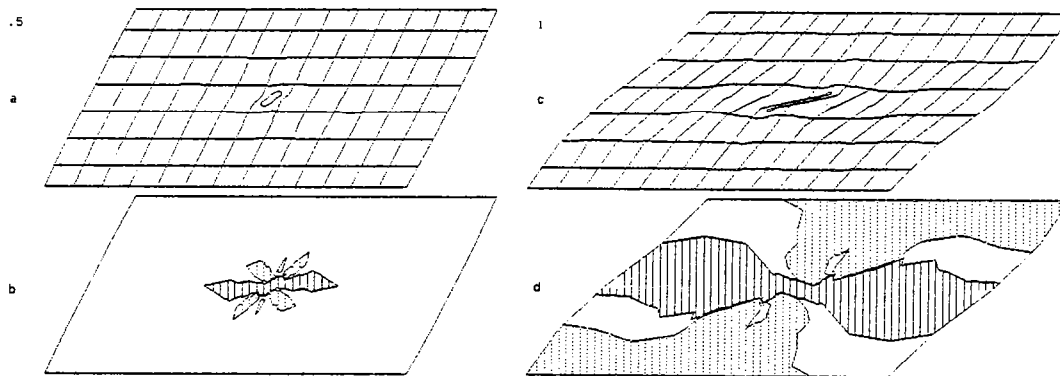


Fig. 3.9 - Simulation I,  $\epsilon^* = - 0,167$  ; les figures a et b représentent le modèle déformé au taux de cisaillement de 0,5 ; les figures c et d au taux de 1 ; les figures a et c représentent la grille cartésienne et les figures b et d les densités de déformation.

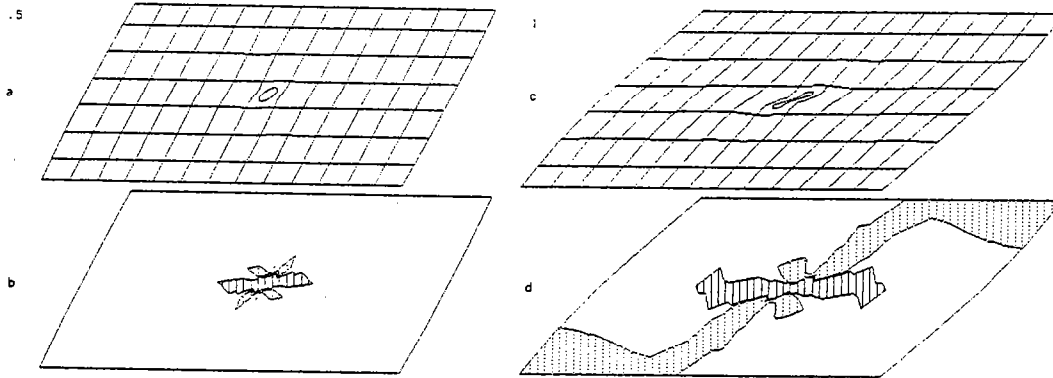


Fig. 3.10 - Simulation II,  $\epsilon^{\text{II}} = -0,25$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.9.

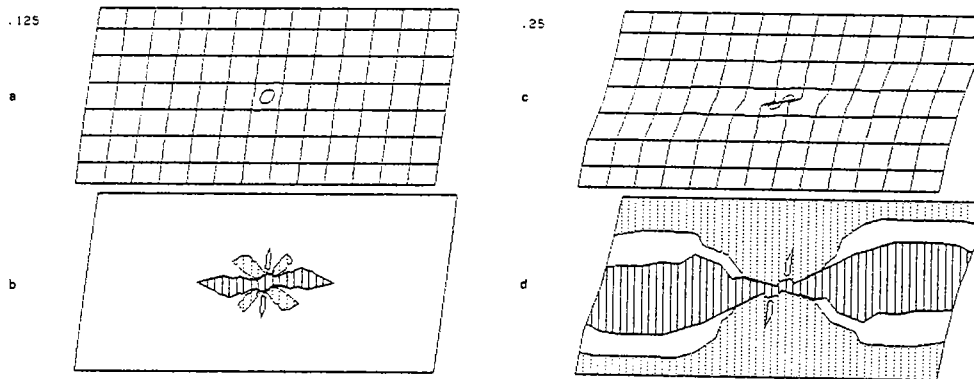


Fig. 3.11 - Simulation III,  $\epsilon^{\text{III}} = -0,042$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.9.

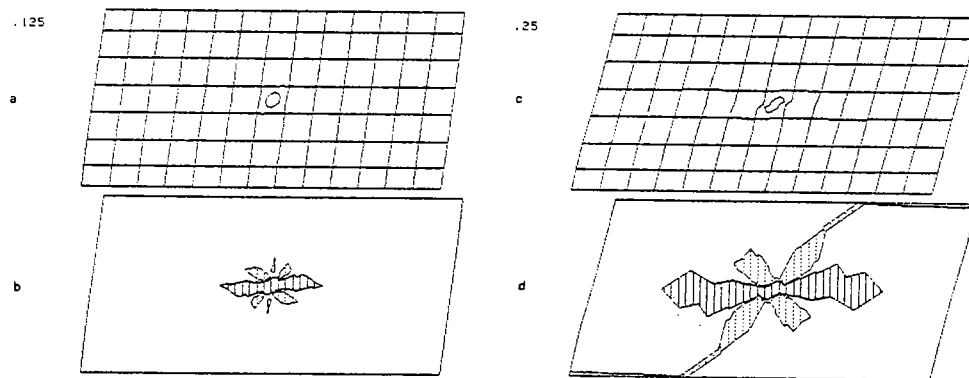


Fig. 3.12 - Simulation IV,  $\epsilon^{\text{IV}} = -0,062$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.9.

Au vu des densités de déformation des quatre simulations précédents, il n'est observé des zones de cisaillement que pour deux états de déformation, c'est-à-dire ceux représentés par les figures 3.9 c et d et 3.11 c et d.

A noter que la manifestation d'une zone de cisaillement dépend, d'une part, de la dé-

formation caractéristique  $\epsilon^*$  et, d'autre part, de la déformation finie  $\epsilon_f$ . Plus  $\epsilon^*$  est proche de zéro par valeur négative et  $\epsilon_f$  est grand, plus il y a de chance d'obtenir une zone de cisaillement. Pour s'en convaincre, le rapport  $\epsilon_f/\epsilon^*$  est calculé pour les quatre simulations aux déformations finies maximales, c'est-à-dire les états représentés par les figures c et d.

$$\epsilon_f/\epsilon^* = - 6 \text{ (simulation I)} \quad 3.12$$

$$\epsilon_f/\epsilon^* = - 4 \text{ (simulation II)} \quad 3.13$$

$$\epsilon_f/\epsilon^* = - 6 \text{ (simulation III)} \quad 3.14$$

$$\epsilon_f/\epsilon^* = - 4 \text{ (simulation IV)} \quad 3.15$$

Il y a naissance de la zone de cisaillement lorsque  $\epsilon_f/\epsilon^* = - 6$  ; par contre, il n'y en a pas si  $\epsilon_f/\epsilon^* = - 4$ . Ceci peut se résumer par une loi simple : Si une roche de déformation caractéristique  $\epsilon^*$  constante est déformée en cisaillement simple d'une quantité  $\epsilon_f$ , il y a une forte chance qu'une zone de cisaillement se développe si :

$$\epsilon_f/\epsilon^* < - 6 \quad 3.16$$

Dans le cas où la déformation caractéristique n'est pas constante avec la déformation, la loi, pour qu'il y ait une zone de cisaillement lors de la déformation d'une roche simulée sur le modèle A, devient :

$$\int_0^{\epsilon_f} \frac{d\epsilon}{\epsilon^*} < - 6 \quad 3.17$$

Et pour qu'il n'y ait pas de zone de cisaillement, la loi s'écrit :

$$\int_0^{\epsilon_f} \frac{d\epsilon}{\epsilon^*} > - 4 \quad 3.18$$

Ces lois ont été vérifiées en simulant la déformation d'une roche dont la déformation caractéristique  $\epsilon^*$  égale - 0,001. Il n'y a pas de zone de cisaillement si la déformation finie  $\epsilon_f$  n'excède pas 0,04 (ce qui vérifie l'équation 3.18) et il y en a une lorsque  $\epsilon_f$  égale 0,006 (ce qui vérifie l'équation 3.17).

Ayant défini les relations entre déformation caractéristique  $\epsilon^*$  et déformation finie  $\epsilon_f$ , il n'est plus utile d'étudier l'influence de ces deux paramètres. Lors des prochaines simulations sur le modèle A, seule la déformation caractéristique, lorsqu'elle est définissable, est étudiée ; la déformation finie est prise égale à 1.

Il est permis de penser que pour une roche, une hétérogénéité et une vitesse de déformation données, la vitesse de propagation de la zone de cisaillement dans la direction de cisaillement est constante. Autrement dit, une zone de cisaillement s'exprimera d'autant plus vite dans un modèle que la longueur de celui-ci est faible. Si  $h$  est le rapport de la longueur de l'hétérogénéité à celle du modèle, il doit exister une relation simple entre ce rapport et la déformation finie nécessaire au développement d'une zone de cisaillement.



Si  $v$  est la vitesse de propagation et  $L$  la longueur du modèle, le temps  $t$  nécessaire à la manifestation de la zone de cisaillement est tel que :

$$v \cdot t = L \quad 3.19$$

Dans le cas où  $\dot{\epsilon}_0$  est la vitesse de déformation, la déformation finie  $\epsilon_f$  correspondante est :

$$\epsilon_f = \dot{\epsilon}_0 \cdot t \quad 3.20$$

Et si  $H$  est la longueur de l'hétérogénéité,  $h$  égale  $H/L$ . La relation entre la déformation  $\epsilon_f$  et  $h$  est alors :

$$\epsilon_f \cdot h = \dot{\epsilon}_0 \cdot H/v \quad 3.21$$

Pour différents modèles, le produit  $\epsilon_f \cdot h$  est constant si la roche simulée et la vitesse de déformation sont identiques. Cette relation est vérifiée sur deux simulations :

La simulation V faite sur le modèle B (Fig. 3.13) concerne une roche ayant la même loi de comportement que lors de la simulation I, c'est-à-dire que la roche a la même déformation caractéristique ( $-0,167$ ).

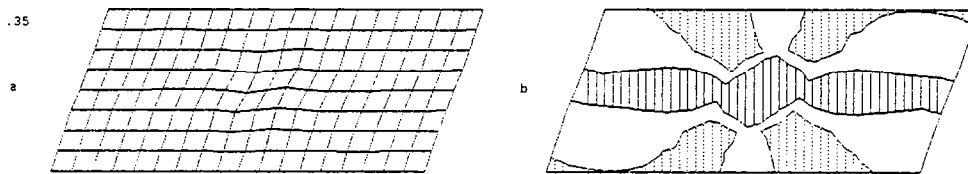


Fig. 3.13 - Simulation V, modèle B,  $\epsilon^* = -0,167$  ; même commentaire que sur la figure 3.9.

Les différences entre ces deux simulations (I et V) sont : les déformations finies ( $\epsilon_f$ ) nécessaires au développement des zones de cisaillement et les grandeurs des hétérogénéités.

Plus précisément, il peut être écrit pour la simulation I :

$$\epsilon_f = 1 \quad 3.22$$

$$h = 0,039 \quad 3.23$$

soit

$$\epsilon_f \cdot h = 0,039 \quad 3.24$$

et pour la simulation V :

$$\epsilon_f = 0,353 \quad 3.25$$

$$h = 0,111 \quad 3.26$$

soit

$$\epsilon_f \cdot h = 0,0392 \quad 3.27$$

Le produit  $\epsilon_f \cdot h$  est effectivement constant au moment du développement de la zone de cisaillement. La loi relatée pour les équations 3.17 et 3.18 peut être modifiée pour rendre compte de cette remarque :

$$h \int_0^{\epsilon_f} \frac{d\epsilon}{\epsilon^{\alpha}} < -0,45 \quad 3.28$$

Ceci est la relation nécessaire entre l'hétérogénéité,  $h$  ( $0 < h < 1$ ), la déformation,  $\epsilon_f$ , et l'instabilité de la roche,  $\epsilon^*$ , pour que naisse une zone de cisaillement.

Et pour qu'il n'y ait pas de zone de cisaillement, il faut que :

$$h \int_0^{\epsilon_f} \frac{d\epsilon}{\epsilon^{\alpha}} > -0,3 \quad 3.29$$

Ces relations sont à comparer avec l'équation 1.42 du chapitre 1.3 issue du modèle de Bowden :

$$\epsilon_p = -\epsilon^* \text{Log} \left( -\frac{\epsilon^*}{d\epsilon} \right) \quad 3.30$$

$\epsilon_p$  est la déformation globale nécessaire à la roche pour que la vitesse dans une bande soit double de celle de la matrice.

$\epsilon^*$  est la déformation caractéristique de la roche.

$d\epsilon$  est la déformation supplémentaire initiale de la bande par rapport à la matrice.

Bien que les conditions d'applications de ces deux relations soient différentes, les équations 3.28 et 3.29 s'appliquent dans le cas de la propagation à partir d'une hétérogénéité rhéologique de dimension finie, alors que pour l'équation 3.30, la bande est déjà formée initialement ; les paramètres caractérisent les mêmes phénomènes : d'une part, la déformation finie avec  $\epsilon_p$  et  $\epsilon_f$  et, d'autre part, l'hétérogénéité avec  $d\epsilon$  et  $h$ .

### 3.2.3. APPLICATION

Ces résultats (équations 3.28 et 3.29) peuvent être repris sur l'application du modèle de croissance de Bowden faite par Poirier sur les monocristaux de quartz étudiés par Balderman (chapitre 1.4). Ce dernier décrit expérimentalement la surface  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$  (Fig. 3.14).

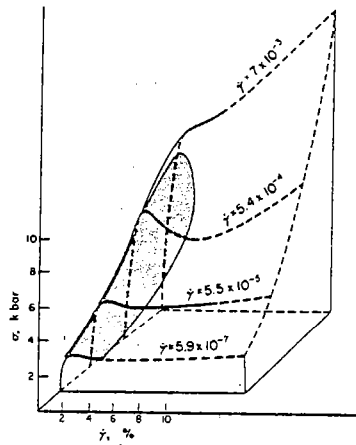


Fig. 3.14 - Surface  $\sigma = f(\gamma, \dot{\gamma})$  pour des monocristaux de quartz. La partie grisée correspond à la partie instable (d'après Poirier, 1980).

Poirier tire de ces expériences la déformation caractéristique,  $\varepsilon^c = -0,2$ , qui est considérée constante dans la partie instable, c'est-à-dire pour une déformation finie au plus de 5 % ( $\varepsilon_f = 0,05$ ) pendant l'instabilité. L'application de la formule 3.29 donne :

$$h \cdot \frac{0,05}{-0,2} > -0,3 \quad 3.31$$

soit

$$h < 1,2 \quad 3.32$$

Ce qui est toujours vrai car  $h$  est le rapport de la longueur de l'hétérogénéité à la longueur de l'échantillon, donc  $h$  est toujours inférieur à 1. Puisque la relation 3.29 est satisfaite, il ne peut y avoir de zones de cisaillement dans ces monocristaux de quartz. Ce résultat est différent de celui présenté par Poirier (chapitre 1.4). Cet auteur applique le modèle de croissance de Bowden à ce matériau. Il en déduit que des zones de cisaillement peuvent s'y développer si des bandes très longues et déformées existent initialement. La différence entre ces résultats vient de ce que cet auteur n'étudie que l'amplification des zones de cisaillement, alors qu'ici ce sont la propagation et l'amplification qui sont étudiées.

### 3.3. AMOLLISSEMENT AVEC LA VITESSE DE DEFORMATION

Il est nécessaire que cet amollissement s'accompagne d'un durcissement avec la déformation pour que la rhéologie soit instable (chapitre 1.3).

La simulation numérique d'une telle rhéologie n'est pas aisée. Le programme informatique, tel qu'il est écrit, donne le champ de vitesse de déformation ( $\dot{\varepsilon}$ ), si les champs de déformation ( $\varepsilon$ ) et de viscosité ( $\eta$ ) sont connus. Ce qui peut se symboliser par :

$$\dot{\varepsilon} = g(\varepsilon, \eta)$$

3.33

Or, pour rendre compte de l'amollissement avec la vitesse de déformation, la viscosité dépend de la déformation  $\epsilon$  et de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  (Fig. 3.15), c'est-à-dire :

$$\eta = f(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad 3.34$$

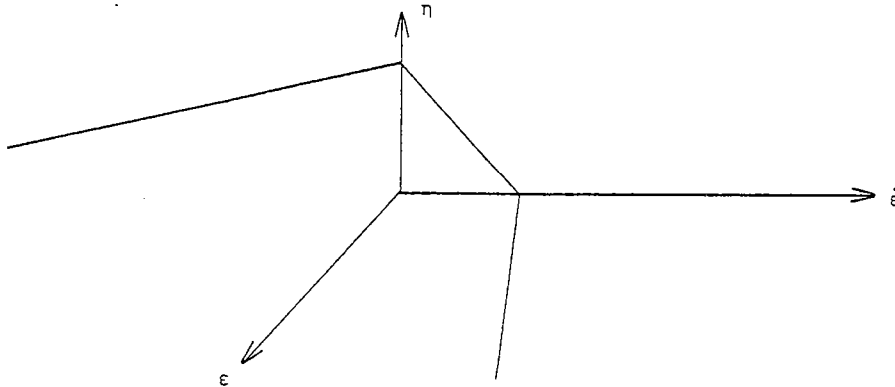


Fig. 3.15 - Evolution de la viscosité ( $\eta$ ) en fonction de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) et de la déformation ( $\epsilon$ ), dans le cas de l'amollissement avec la vitesse de déformation.

D'où l'ambiguïté car, pour définir le champ de vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ), il faut connaître le champ de viscosité ( $\eta$ ) et pour définir  $\eta$ , il faut connaître  $\dot{\epsilon}$  : il est difficile de résoudre les deux équations 3.33 et 3.34 simultanément.

Alors que dans le problème précédent (amollissement avec la déformation, chapitre 3.2), il n'y a pas d'ambiguïté car la viscosité ne dépend que de la déformation (Fig. 3.16) :

$$\eta = f(\epsilon) \quad 3.35$$

Grâce à cette relation, la viscosité peut être définie en connaissant la déformation. Et le champ de vitesse peut être calculé à partir de la relation 3.33.

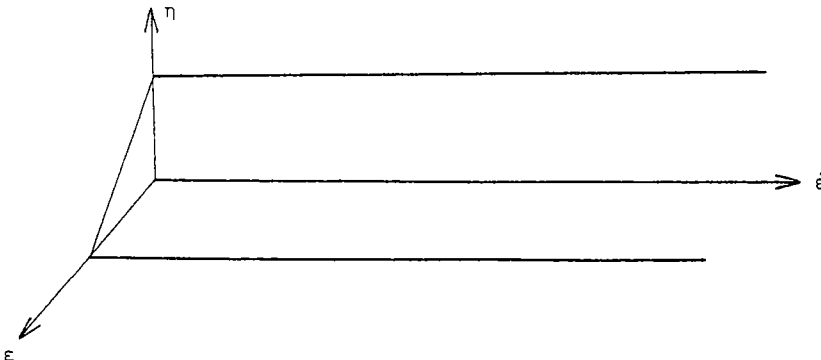


Fig. 3.16 - Evolution de la viscosité ( $\eta$ ) en fonction de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) et de la déformation ( $\epsilon$ ), dans le cas de l'amollissement avec la déformation.

Il y a pourtant plusieurs solutions pour résoudre ce problème d'amollissement avec la vitesse de déformation. Trois d'entre elles sont présentées ici.

## 3.3.1. PREMIERE SOLUTION

Le programme informatique est transformé pour rendre compte d'une loi de comportement élastique à vitesse constante et non plus visqueuse à déformation constante. C'est-à-dire que l'équation 3.36 (équ. 2.1 du chapitre 2.3) caractéristique d'un milieu visqueux est remplacée par l'équation 3.37 caractéristique d'un milieu élastique.

$$\sigma = \bar{T} \dot{\epsilon} \quad 3.36$$

$$\sigma = T \epsilon \quad 3.37$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\epsilon$  la déformation,  $\dot{\epsilon}$  la vitesse de déformation et  $\bar{T}$  le tenseur d'élasticité.

Une fois cette transformation faite, pour compléter la définition de la rhéologie, la viscosité, qui dorénavant doit être appelée élasticité, devient une fonction décroissante de la vitesse de déformation (Fig. 3.17) :

$$\eta = f(\dot{\epsilon}) \quad 3.38$$

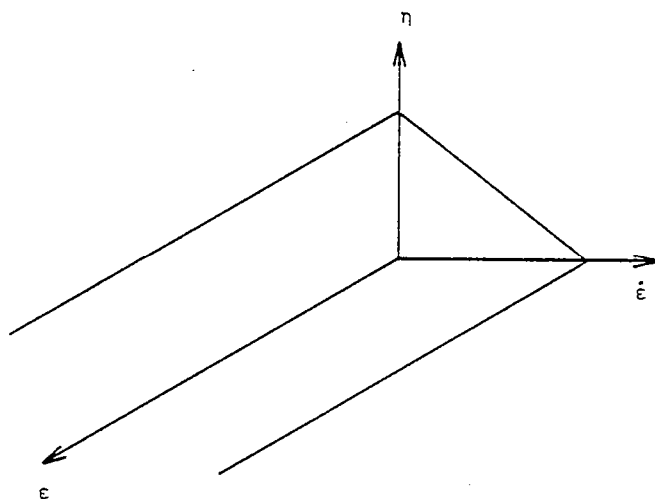


Fig. 3.17 - Evolution de l'élasticité ( $\eta$ ) en fonction de la vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) et de la déformation ( $\epsilon$ ), dans le cas de l'amollissement avec la vitesse de déformation.

Le champ de déformation  $\epsilon$ , grâce au nouveau programme informatique, est calculé connaissant l'élasticité  $\eta$  et la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$

$$\epsilon = g(\eta, \dot{\epsilon}) \quad 3.39$$

c'est-à-dire que, connaissant la vitesse  $\dot{\epsilon}$ , l'élasticité  $\eta$  peut être définie avec l'équation 3.38, et le champ de déformation avec la relation 3.39 : ainsi il n'y a plus d'ambiguïté. Cette solution n'a pas été utilisée ici car elle entraîne de grande modification dans la programmation.

## 3.3.2. DEUXIEME SOLUTION

La reprise de l'étude analytique du chapitre 1.3 montre que cette rhéologie (équations 3.40 à 3.41) peut être remplacée par une autre, (équations 3.43 et 3.44).

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}}\right)_{\dot{\epsilon}} = A > 0 \quad 3.40$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\right)_{\dot{\epsilon}} = -B < 0 \quad 3.41$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{\sigma} = \frac{A}{B} > 0 \quad 3.42$$

Ces trois équations (3.40 à 3.41) décrivent un amollissement avec la vitesse de déformation et un durcissement avec la déformation, c'est-à-dire la rhéologie à étudier.

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}}\right)_{\dot{\epsilon}} = A < 0 \quad 3.43$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\right)_{\dot{\epsilon}} = B > 0 \quad 3.44$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{\sigma} = \frac{A}{B} > 0 \quad 3.45$$

Ces trois équations (3.43 à 3.45) décrivent un durcissement avec la vitesse de déformation et un amollissement avec la déformation. Elles sont identiques aux équations 1.26 à 1.28 du chapitre 1.3. Elles décrivent la rhéologie de remplacement.

Si les mêmes termes, que dans le chapitre 1.3 (équ. 1.29 à 1.32), sont utilisées, à savoir la lettre p pour tout le matériau et la lettre b pour une bande initialement déformée de  $d\epsilon$ , les contraintes ( $\sigma$ ), déformations ( $\epsilon$ ) et vitesses de déformation ( $\dot{\epsilon}$ ) s'écrivent dans le cas d'un amollissement avec la vitesse de déformation :

$$\text{à } t = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma(p, 0) &= \sigma_0 \\ \epsilon(p, 0) &= 0 \\ \dot{\epsilon}(p, 0) &= \dot{\epsilon}_0 \end{aligned} \quad 3.46$$

$$\begin{aligned} \sigma(b, 0) &= \sigma_0 \\ \epsilon(b, 0) &= d\epsilon \\ \dot{\epsilon}(b, 0) &= \dot{\epsilon}_0 + \frac{A}{B} d\epsilon \end{aligned} \quad 3.47$$

à  $t = dt$ ,  $dt$  étant petit :

$$\begin{aligned}\sigma (P, dt) &= \sigma_0 + A\dot{\epsilon}_0 dt \\ \epsilon (P, dt) &= \dot{\epsilon}_0 dt \\ \dot{\epsilon} (P, dt) &= \dot{\epsilon}_0\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\sigma (b, dt) &= \sigma_0 + A\dot{\epsilon}_0 dt \\ \epsilon (b, dt) &= \dot{\epsilon}_0 dt + d\epsilon \left( 1 + \frac{A}{B} \right) \\ \dot{\epsilon} (b, dt) &= \dot{\epsilon}_0 + \frac{A}{B} d\epsilon \left( 1 + \frac{A}{B} \right)\end{aligned}\tag{3.49}$$

Dans le cas d'un amollissement avec la déformation, ces relations s'écrivent :

à  $t = 0$

$$\begin{aligned}\sigma (P, 0) &= \sigma_0 \\ \epsilon (P, 0) &= 0 \\ \dot{\epsilon} (P, 0) &= \dot{\epsilon}_0\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\sigma (b, 0) &= \sigma_0 \\ \epsilon (b, 0) &= d\epsilon \\ \dot{\epsilon} (b, 0) &= \dot{\epsilon}_0 + \frac{A}{B} d\epsilon\end{aligned}\tag{3.51}$$

à  $t = dt$  :

$$\begin{aligned}\sigma (P, dt) &= \sigma_0 - A\dot{\epsilon}_0 dt \\ \epsilon (P, dt) &= \dot{\epsilon}_0 dt \\ \dot{\epsilon} (P, dt) &= \dot{\epsilon}_0\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\sigma (b, dt) &= \sigma_0 - A\dot{\epsilon}_0 dt \\ \epsilon (b, dt) &= \dot{\epsilon}_0 dt + d\epsilon \left( 1 + \frac{A}{B} \right) \\ \dot{\epsilon} (b, dt) &= \dot{\epsilon}_0 + \frac{A}{B} d\epsilon \left( 1 + \frac{A}{B} \right)\end{aligned}\tag{3.53}$$

Les déformations et les vitesses de déformation sont, pour les deux rhéologies, exactement identiques, car elles ne dépendent que du rapport  $A/B$  et celui-ci est le même dans les deux cas. Pour simuler la déformation d'une roche présentant un amollissement avec la vitesse de déformation, cette roche est remplacée par une autre présentant un amollissement avec la déformation, dans la mesure où entre la rhéologie à étudier (indice I) et celle de remplacement (indice II), les équations suivantes sont respectées :

$$\dot{\epsilon}_{0II} = \dot{\epsilon}_{0I} \quad 3.54$$

$$d\epsilon_{II} = d\epsilon_I \quad 3.55$$

$$\text{et } \epsilon_{II}^* = \epsilon_I^* \quad 3.56$$

Puisque la déformation caractéristique s'écrit :

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \epsilon \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \dot{\epsilon} = - \frac{B \dot{\epsilon}_0}{A} \quad 3.57$$

Dans ces conditions, la simulation d'une rhéologie présentant un amollissement avec la vitesse de déformation est identique à celle d'une rhéologie présentant un amollissement avec la déformation.

### 3.3.3. TROISIEME SOLUTION

La déformation d'une roche ayant la rhéologie suivante est simulée avec le modèle A (défini au chapitre 2.6) :

$$\sigma = \eta_0 (\epsilon - A \text{ Log } (\dot{\epsilon})) \quad 3.58$$

soit

$$\eta = \frac{\eta_0}{\dot{\epsilon}} (\epsilon - A \text{ Log } (\dot{\epsilon})) \quad 3.59$$

Cette rhéologie a la particularité de présenter une déformation caractéristique constante quelque soit  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$  :

$$\epsilon^* = - A \quad 3.60$$

Et elle satisfait aux conditions initiales, c'est-à-dire un durcissement avec la déformation et un amollissement avec la vitesse de déformation, si  $\eta_0$  et A sont des constantes positives.

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \dot{\epsilon} = \eta_0 > 0 \quad 3.61$$

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \epsilon = - \eta_0 \frac{A}{\dot{\epsilon}} < 0 \quad 3.62$$

L'hétérogénéité au centre du modèle (24 triangles centraux) est caractérisée par une constante  $\eta_0$  mille fois inférieure à celle de la matrice.

La méthode des éléments finis permet de calculer le champ de vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  seulement si  $\eta$  et  $\epsilon$  sont connus ; ceci peut s'écrire :

$$\dot{\epsilon} = g(\epsilon, \eta) \quad 3.63$$



et la viscosité, équation 3.72, peut se mettre sous la forme simple :

$$\eta = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad 3.64$$

Les valeurs exactes de  $\dot{\varepsilon}$  et  $\eta$  satisfont ces deux relations simultanément. Elles vérifient donc :

$$\dot{\varepsilon}' = g(\varepsilon, f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})) \quad 3.65$$

et

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon} \quad 3.66$$

L'idée de cette solution est de calculer  $\dot{\varepsilon}'$  avec l'équation 3.65 et de reporter cette nouvelle valeur  $\dot{\varepsilon}$  dans cette même équation 3.65. Ceci est répété autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'équation 3.66 soit considérée satisfaite. Bien que ce système converge, cette opération n'a été reproduite que dix fois pour chaque calcul du nouveau champ de déformation lors de la simulation VI. Le résultat numérique est présenté figure 3.18 dans le cas où la rhéologie est de la forme :

$$\sigma = \varepsilon - 0,1 \text{ Log } \dot{\varepsilon} \quad 3.67$$

c'est-à-dire une déformation caractéristique :

$$\varepsilon'' = -0,1 \quad 3.68$$

Cette simulation VI montre que l'hétérogénéité de déformation se propage.

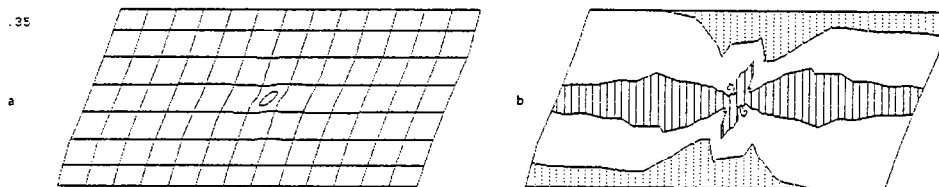


Fig. 3.18 - Simulation VI, modèle A,  $\varepsilon'' = -0,1$ , les figures a et b représentent le modèle déformé au taux de cisaillement de 0,35 ; la grille cartésienne est en a, et les densités de déformation en b. La vitesse de déformation est calculée par 10 itérations.

La simulation VII (Fig. 3.19) reprend la même roche que précédemment, mais dans ce cas la vitesse de déformation n'est calculée qu'une seule fois, au lieu de dix, pour chaque champ de déformation. L'hétérogénéité de déformation est peu développée.

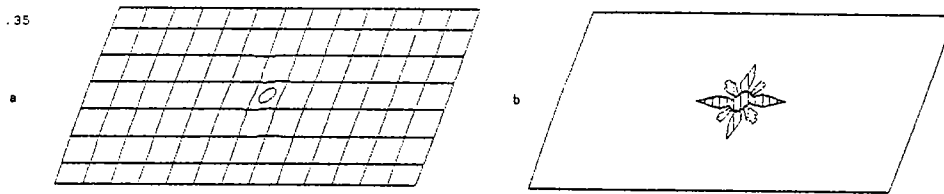


Fig. 3.19 - Simulation VII, modèle A,  $\varepsilon'' = -0,1$ , les figures a et b représentent le modèle déformé au taux de cisaillement de 0,35 ; la grille cartésienne est en a, et les densités de déformation en b.

De ces trois solutions, seule la seconde est retenue. Les résultats liant la déformation caractéristique  $\varepsilon''$ , l'hétérogénéité  $\eta$  et la déformation finie  $\varepsilon_f$  sont alors identiques à ceux du chapitre précédent (3.2)

### 3.4. ANISOTROPIE

#### 3.4.1. INTRODUCTION

Les roches considérées ici sont celles dont la loi de comportement varie avec l'orientation de la contrainte par rapport à la roche.

Dans le cas d'une déformation plane et d'un milieu visqueux linéaire et isotrope, la relation contrainte-vitesse de déformation s'écrit (équation 2.1, chapitre 2.3) :

$$\sigma = T \dot{\varepsilon} \quad 3.69$$

où la contrainte s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad 3.70$$

La vitesse de déformation s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} \quad 3.71$$

et la matrice de viscosité s'écrit :

$$T = \frac{\eta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad 3.72$$

avec  $\eta$  comme module de viscosité et  $\nu$  l'équivalent visqueux du coefficient de Poisson.

Si le milieu est anisotrope, la direction principale de l'anisotropie faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale, et le degré d'anisotropie  $\partial^2$  étant équivalent au rapport  $N_1/Q_1$  défini par Cobbold (1976), la relation contrainte-vitesse de déformation s'écrit :

$$\sigma = T \varepsilon \quad 3.73$$

ou

$$T = R T' R^T \quad 3.74$$

avec

$$T' = \frac{\eta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)\partial & \nu\partial & 0 \\ \nu\partial & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\partial} \end{pmatrix} \quad 3.75$$

et

$$R = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \frac{\sin 2\theta}{2} & \frac{-\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad 3.76$$

La matrice  $R$  est la matrice de changement d'axe (Zienkiewicz, 1971).

Pour rendre compte de l'anisotropie dans le modèle numérique, la matrice  $T$  définie par la relation 3.74 est introduite dans l'équation 2.1 du chapitre 2.3. Le degré d'anisotropie  $\partial^2$  est considéré constant pendant la simulation, et l'angle  $\theta$  de l'anisotropie avec l'horizontale est réactualisé après chaque itération.

Le modèle de croissance de Bowden (chapitre 1.3) peut être appliqué au cisaillement simple d'un matériau anisotrope et visqueux (Fig. 3.20).

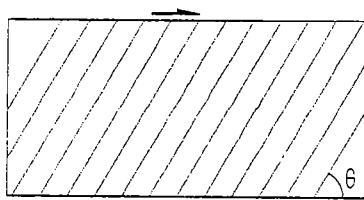


Fig. 3.20 - Cisaillement simple d'un milieu anisotrope. La direction d'anisotropie est portée par la ligne oblique. L'horizontale est confondue avec la direction de cisaillement.  $\theta$  est l'orientation de l'anisotropie.

Les équations 3.73 à 3.76 donnent la contrainte cisailante :

$$\sigma_{xy} = \frac{\eta \dot{\gamma}_{xy}}{2(1+\nu)} \left( \partial \sin^2 2\theta + \frac{\cos^2 2\theta}{\partial} \right) \quad 3.77$$

Si la déformation ( $\epsilon$ ) est définie par la relation (Truesdell et Toupin, 1960, p. 266)

$$\epsilon = \left\{ \frac{1}{2} [(\lambda_1 - 1/\lambda_1)^2 + (\lambda_2 - 1/\lambda_2)^2] \right\}^{1/2} \quad 3.78$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les axes principaux de l'ellipse de déformation.

Pour un cisaillement simple, cette déformation ( $\epsilon$ ) égale le taux de cisaillement ( $\gamma$ )

car :

$$\lambda_1 = 1/\lambda_2 = (2/(2 + \gamma^2 - \gamma \sqrt{4 + \gamma^2}))^{1/2} \quad 3.79$$

Ceci permet de réécrire l'équation 3.77 :

$$\sigma = (1 + \sin^2 2\theta (\partial^2 - 1)) \frac{\eta \dot{\epsilon}}{2(1 + \nu) \partial} \quad 3.80$$

La déformation caractéristique définie au chapitre 1.3 s'écrit :

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \epsilon \dot{\epsilon}_0 \quad 3.81$$

or

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon} = \frac{\eta \dot{\epsilon}}{2(1 + \nu) \partial} (\partial^2 - 1) \frac{\partial \sin^2 2\theta}{\partial \epsilon} \quad 3.82$$

et

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \epsilon = \frac{\eta}{2(1 + \nu) \partial} (1 + (\partial^2 - 1) \sin^2 2\theta) \quad 3.83$$

La relation entre l'orientation de l'anisotropie et la déformation, dans le cas d'un cisaillement simple, est :

$$\cotg \theta = \cotg \theta_0 + \epsilon \quad 3.84$$

$\theta_0$  est l'orientation de l'anisotropie à l'état initial. Si celle-ci est égale à  $\pi/2$ , la déformation caractéristique s'écrit en fonction de la déformation :

$$\epsilon^* = \frac{(1 + \epsilon^2) (1 + 4\epsilon^2 (\partial^2 - 1))}{(\partial^2 - 1) (1 - \epsilon^2) 8 \epsilon} \quad 3.85$$

En fonction de l'orientation de l'anisotropie, elle s'écrit :

$$\epsilon^* = \frac{1 + (\partial^2 - 1) \sin^2 2\theta}{2(\partial^2 - 1) \cos 2\theta \sin 2\theta (\cos 2\theta - 1)} \quad 3.86$$

Sur les figures 3.21 et 3.22 sont représentées les courbes  $\epsilon''$  en fonction de  $\epsilon$  et de  $\theta$  pour diverses valeurs de  $\theta$ .

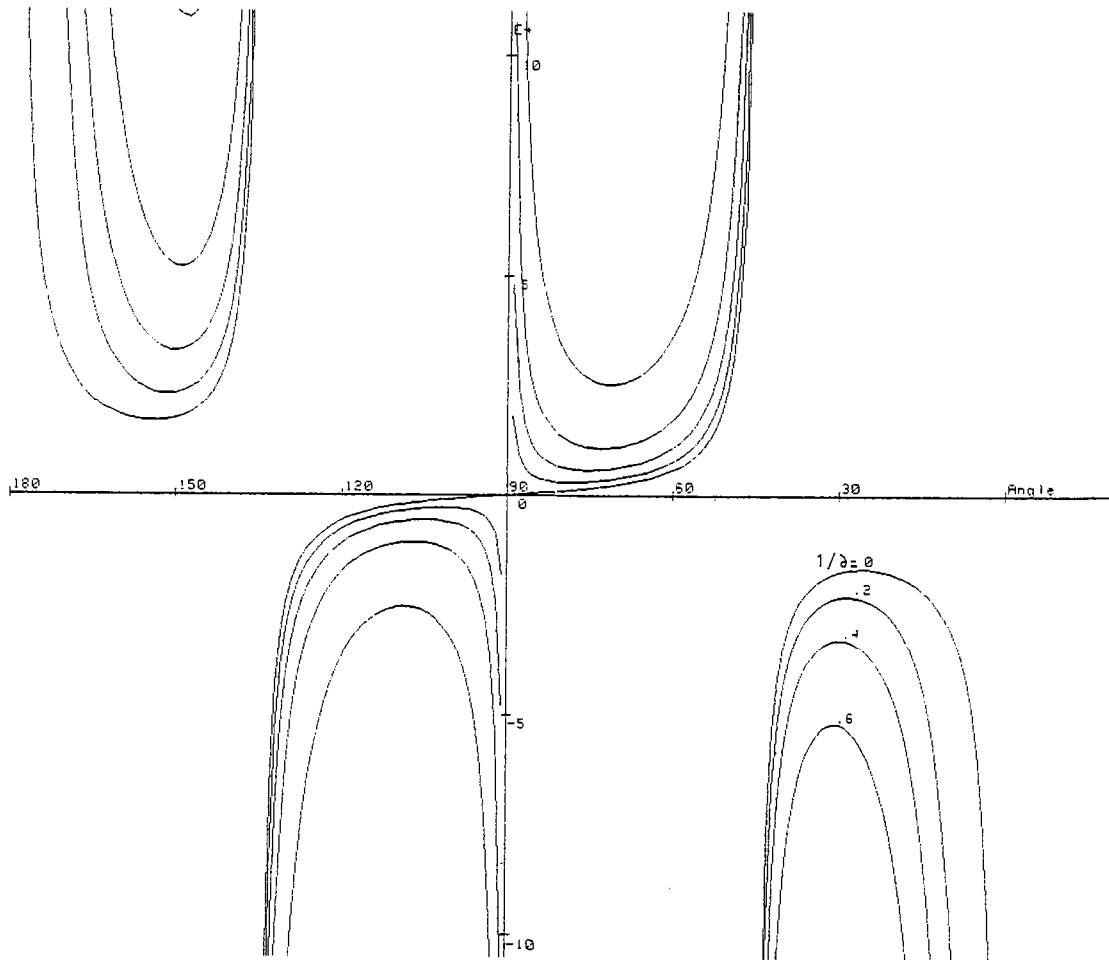


Fig. 3.21 - Courbes  $\epsilon''$  en fonction de l'orientation de l'anisotropie  $\theta$  pour diverses valeurs du degré de l'anisotropie  $\theta^2$ .

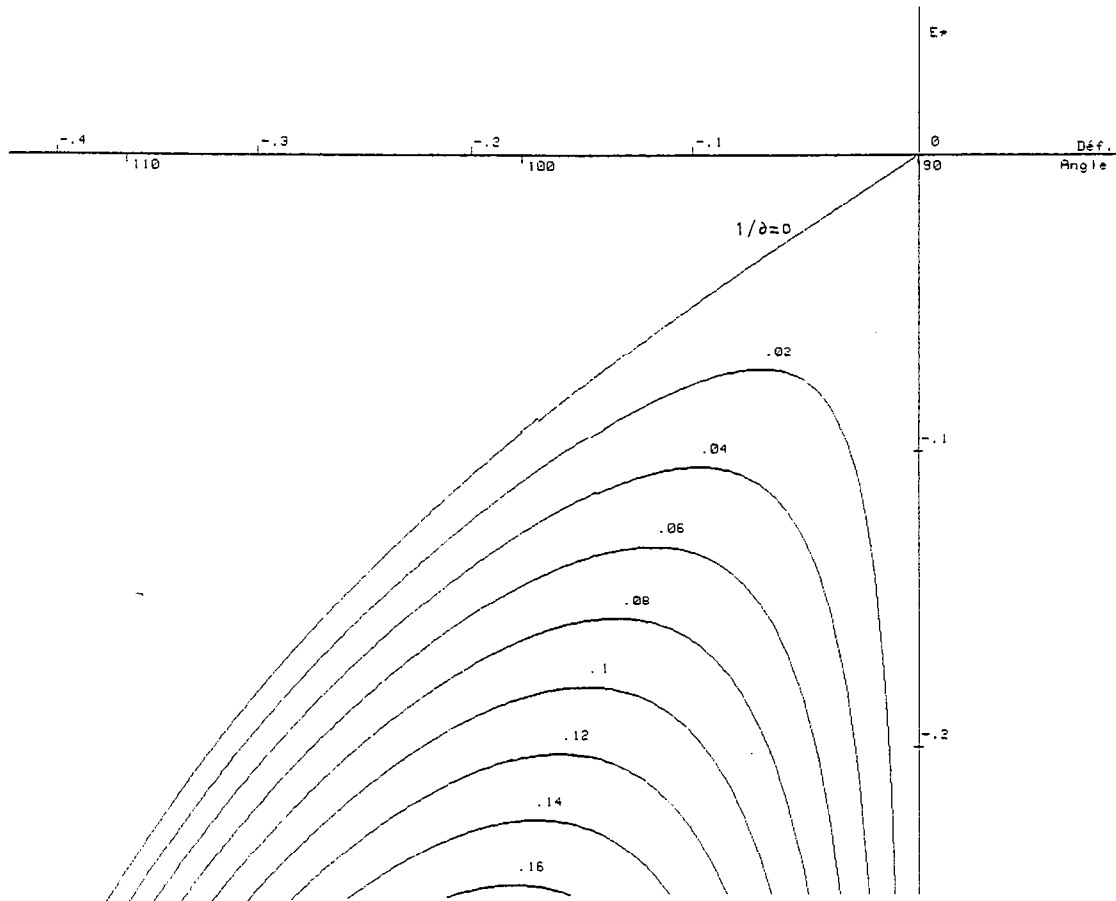


Fig. 3.22 - Détail de la figure 3.21.

Ces courbes montrent que le matériau est instable ( $-0,2 < \delta^2 < 0$ ) lorsque l'angle entre la direction de l'anisotropie et l'horizontale est voisin de  $100^\circ$  et que le degré d'anisotropie est supérieur à 25.

#### 3.4.2. RESULTATS NUMERIQUES

La loi de comportement imposée à la roche est décrite par les équations 3.73 à 3.76. L'orientation initiale  $\theta$  de l'anisotropie à l'intérieur de la matrice et le degré d'anisotropie  $\delta^2$  changent d'une simulation à l'autre. L'hétérogénéité est créée par une orientation initiale de l'anisotropie différente de celle de la matrice : pour les 24 triangles centraux du noyau du modèle A, cette orientation est nulle, et pour les 48 triangles périphériques du noyau, elle est égale à  $\theta/2$  (Fig. 3.23).

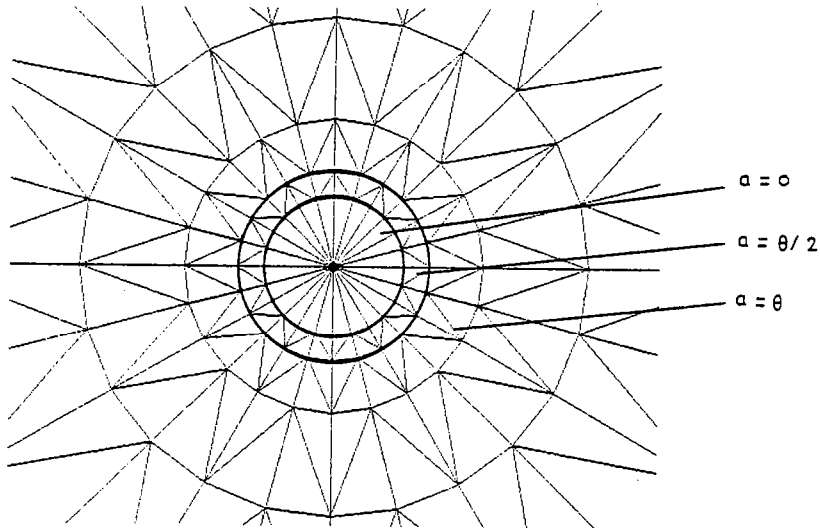


Fig. 3.23 - Centre du réseau du modèle A. Orientation initiale  $\alpha$  de l'anisotropie, en fonction de sa position dans le réseau.

Neuf simulations, présentées ci-dessous, ont été faites à différentes orientations ( $\theta$ ) et degré d'anisotropie ( $\vartheta^2$ ) ; leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 1.

SIMULATION	FIGURE	$\theta$	$\vartheta^2$
VIII	3.24	30	100
IX	3.25	45	100
X	3.26	60	100
XI	3.27	90	100
XII	3.28	120	100
XIII	3.29	120	10
XIV	3.30	135	100
XV	3.31	150	100
XVI	3.32	180	100

Tableau 1 - Caractéristiques des simulations.

$\theta$  : orientation initiale de l'anisotropie.  
 $\vartheta^2$  : degré d'anisotropie.

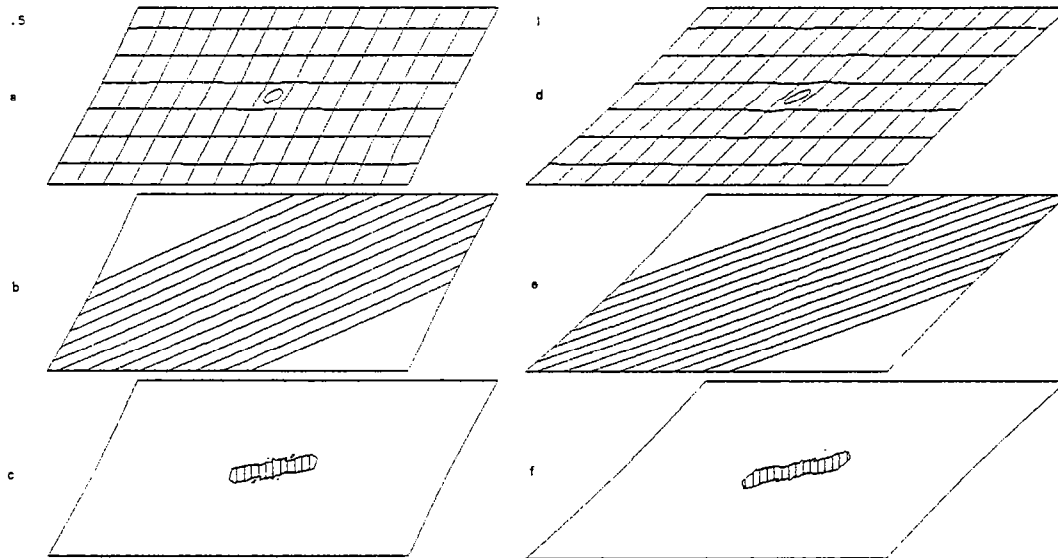


Fig. 3.24 - Simulation VIII,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\gamma^2 = 100$  ; les figures a, b et c représentent le modèle A déformé au taux de cisaillement de 0,5 et les figures d, e et f au taux de 1. Les figures a et d représentent la grille cartésienne déformée, les figures b et e l'orientation de l'anisotropie et les figures c et f les densités de déformation.

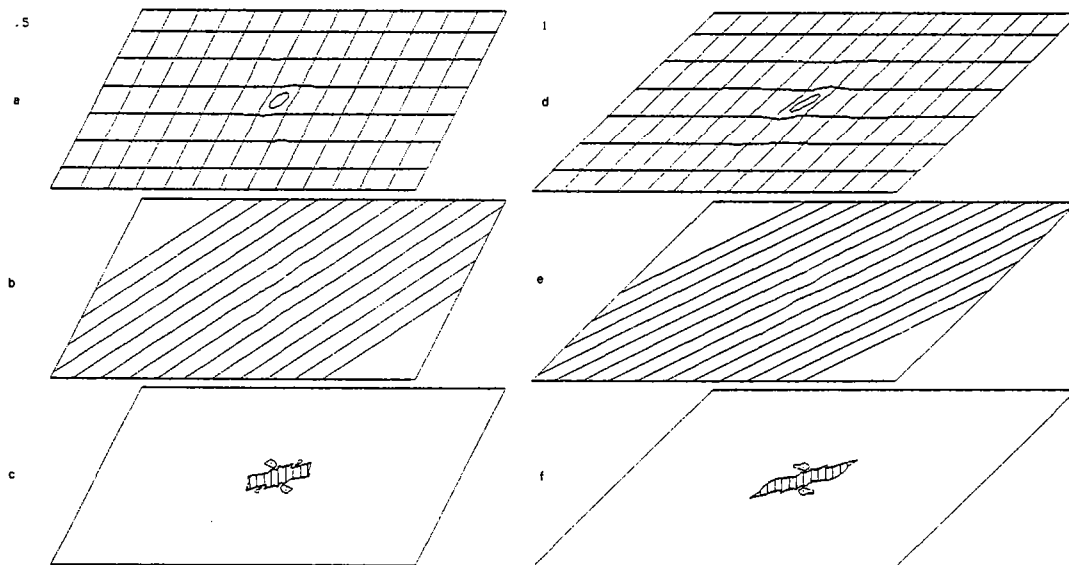


Fig. 3.25 - Simulation IX,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\gamma^2 = 100$ .



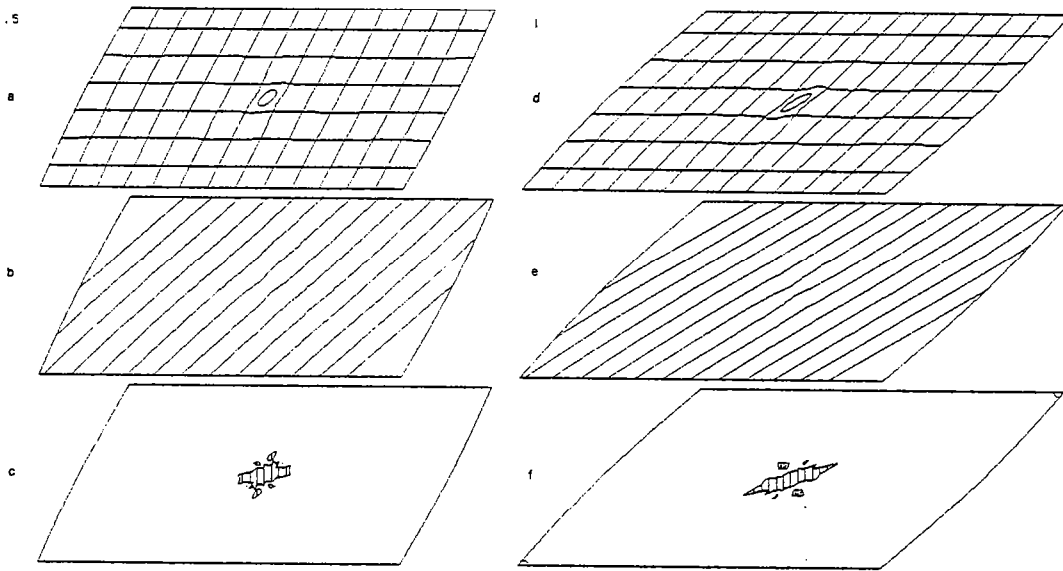


Fig. 3.26 - Simulation X,  $\theta = 60$ ,  $\sigma^2 = 100$ .

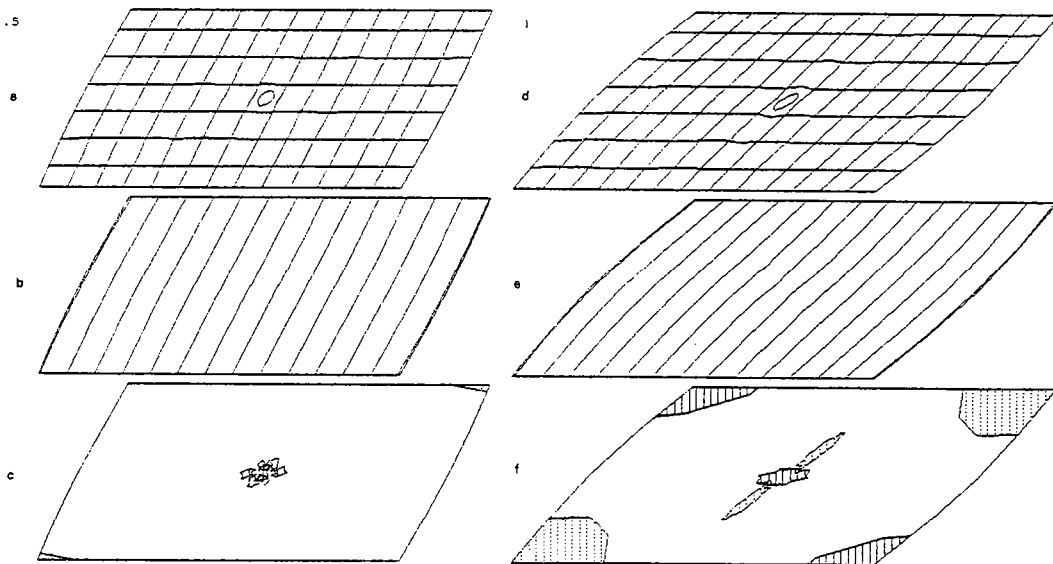


Fig. 3.27 - Simulation XI,  $\theta = 90$ ,  $\sigma^2 = 100$ .

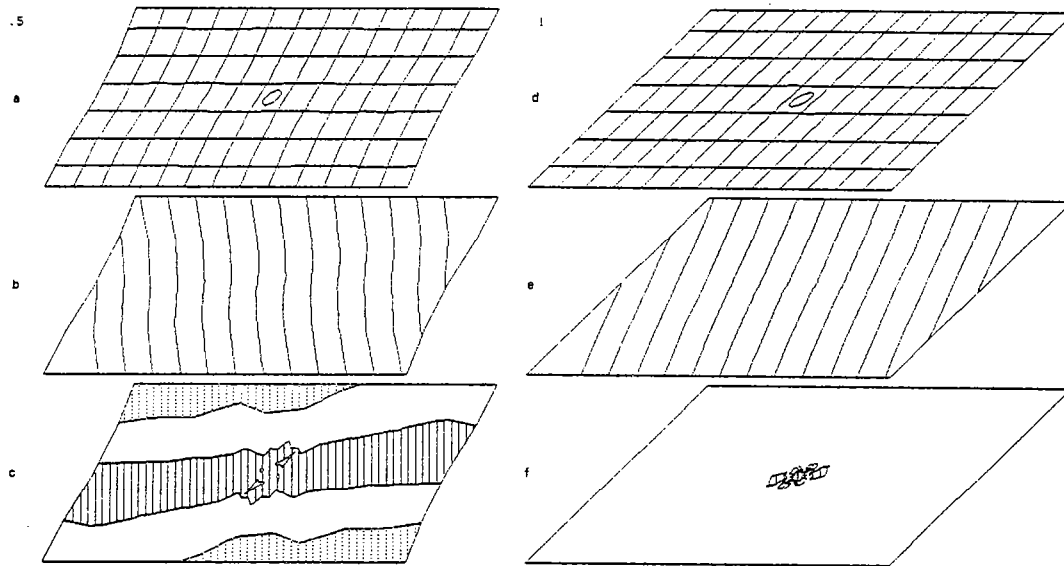


Fig. 3.28 - Simulation XII,  $\theta = 120$ ,  $\vartheta^2 = 100$ .

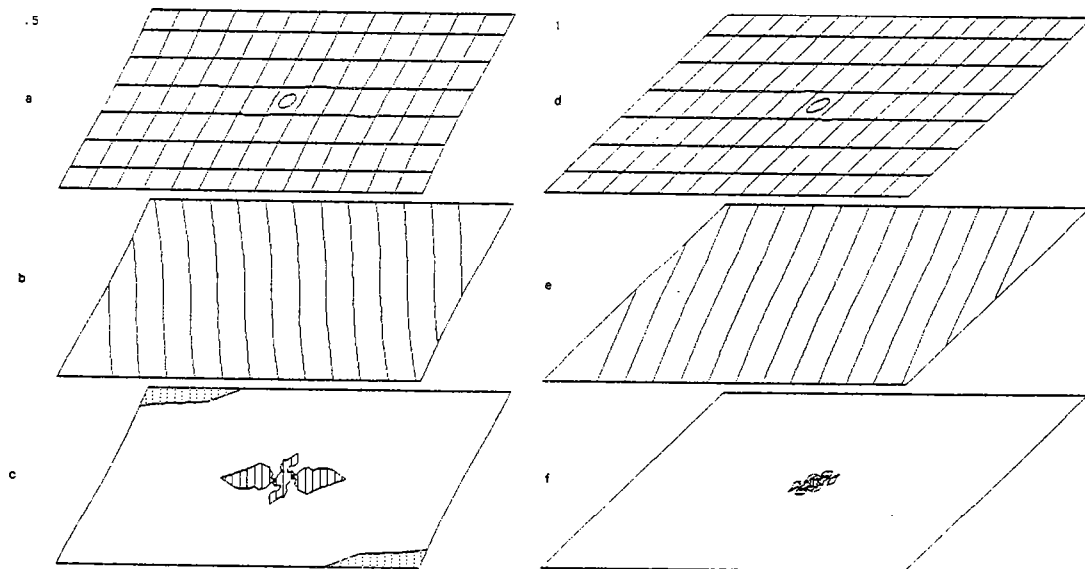


Fig. 3.29 - Simulation XIII,  $\theta = 120$ ,  $\vartheta^2 = 10$ .

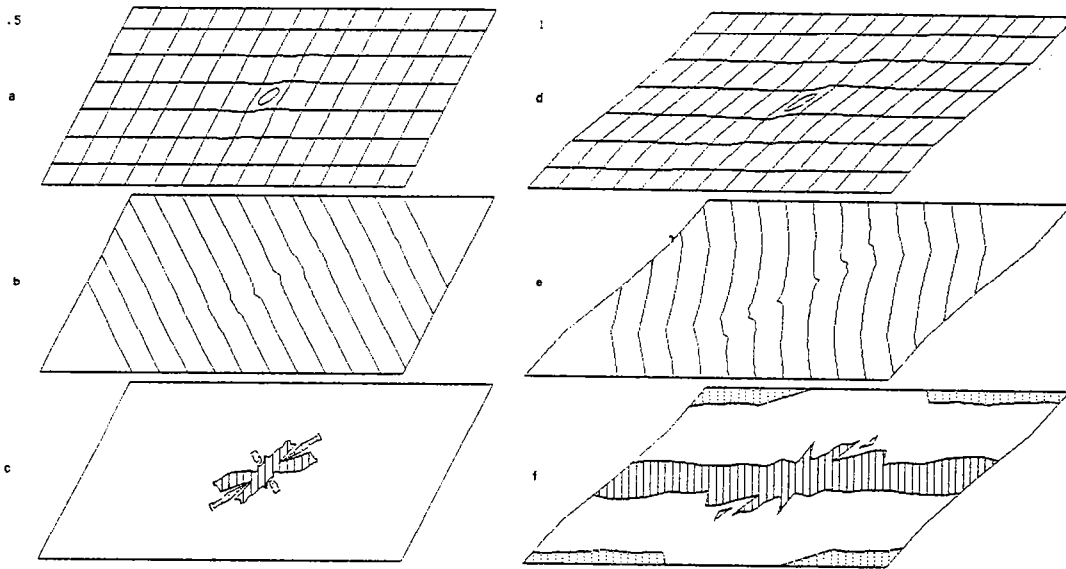


Fig. 3.30 - Simulation XIV,  $\theta = 135$ ,  $\delta^2 = 100$ .

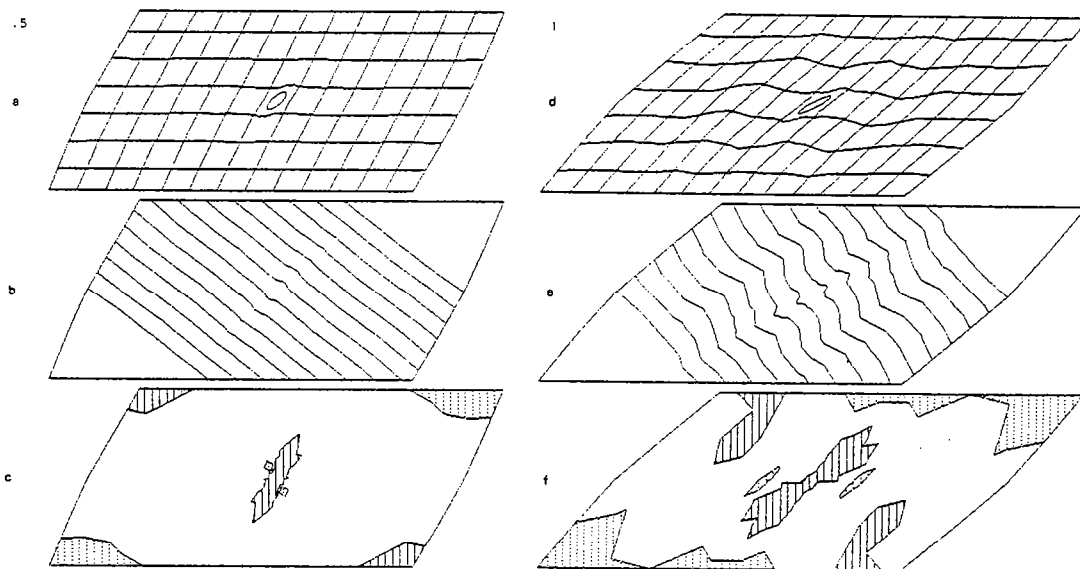


Fig. 3.31 - Simulation XV,  $\theta = 150$ ,  $\delta^2 = 100$ .

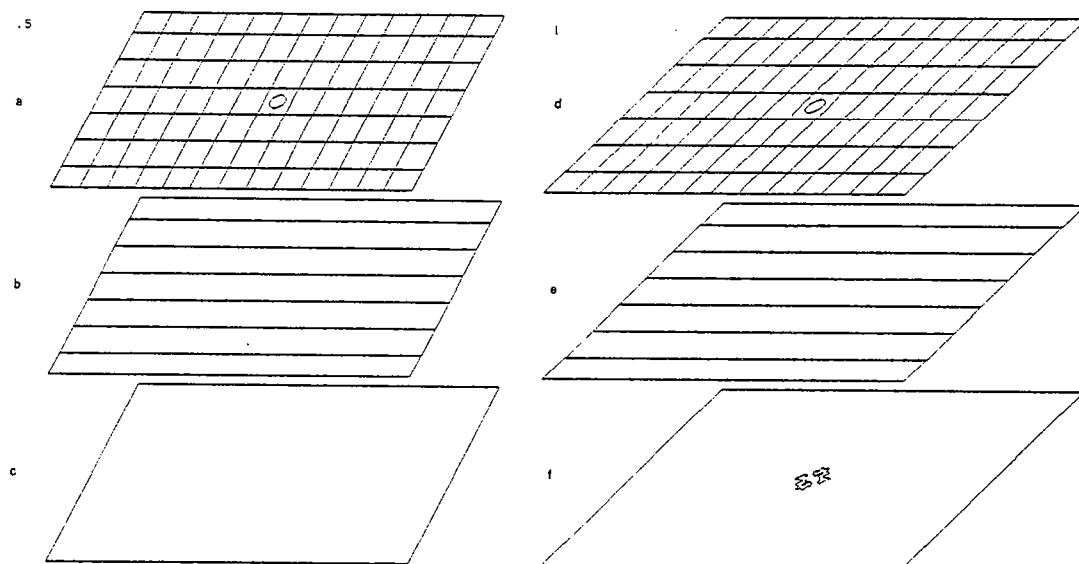


Fig. 3.32 - Simulation XVI,  $\theta = 180$ ,  $\delta^2 = 100$ .

Pour les simulations faites pour des orientations initiales de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $180^\circ$  et des degrés d'anisotropie de 100, les zones de cisaillement n'apparaissent pas (Fig. c et f).

Pour la simulation XII ( $\theta = 120^\circ$  et  $\delta^2 = 100$ ), une zone de cisaillement se développe au début de la déformation (Fig. c) alors que l'orientation de l'anisotropie est voisine de  $95^\circ$ . Pour une déformation plus importante (Fig. f), la zone de cisaillement disparaît alors que l'orientation de l'anisotropie est voisine de  $70^\circ$ .

La simulation XIII ( $\theta = 120^\circ$  et  $\delta^2 = 10$ ) reprend les mêmes caractéristiques que la précédente (XII), à ceci près que le degré d'anisotropie égale 10 au lieu de 100. Bien que les configurations soient similaires, la zone de cisaillement ne n'est pas exprimée (Fig. c).

Pour la simulation XIV ( $\theta = 135^\circ$  et  $\delta^2 = 100$ ), une zone de cisaillement apparaît pour le taux de cisaillement de 1 ; à ce stade, l'orientation de l'anisotropie est voisine de  $90^\circ$ .

Lors de la simulation XV ( $\theta = 150^\circ$  et  $\delta^2 = 100$ ), des plis se forment lorsque le taux de cisaillement égale 1 (Fig. 3.30 d, e et f), c'est-à-dire lorsque l'anisotropie est quasiment parallèle à la direction du maximum de compression lors d'un cisaillement simple ( $135^\circ$ ). Il peut paraître étonnant que, lors de la simulation XIV et au taux de cisaillement de 0,5 (Fig. 3.30 a, b et c), des plis n'apparaissent pas alors que, là aussi, l'anisotropie est quasiment parallèle à la direction du maximum de compression. Ceci vient tout simplement du fait que la déformation est trop faible.

Les hétérogénéités de déformation observées lors de la simulation XV au taux de cisaillement de 1 peuvent être interprétées comme des plis en chevron (kink band), c'est-à-dire des zones de cisaillement (Fig. 3.31 e). Dans ce cas, la direction de ces zones de cisaillement est encore quasiment perpendiculaire à la direction de l'anisotropie.

En conclusion, pour créer une zone de cisaillement dans un milieu anisotrope, il faut que le degré d'anisotropie soit élevé (de l'ordre de 100) et que l'orientation de l'anisotropie fasse avec la direction de cisaillement un angle entre  $90^\circ$  et  $100^\circ$ . Ce résultat du modèle numérique est comparable à celui du modèle de croissance des zones de cisaillement de Bowden (Fig. 3.22).

Toutes ces remarques ne semblent pas s'appliquer aux plis en chevron. Ils se présentent sous la forme de bandes où la déformation est nettement différente de celle de la matrice, et ils peuvent être considérés comme des zones de cisaillement. Très souvent, l'angle entre la direction de cisaillement et l'anisotropie ( $120^\circ$ , fig. 3.33) est très différent de ceux présentés dans le modèle de Bowden ( $90$  à  $110^\circ$ , fig. 3.22).

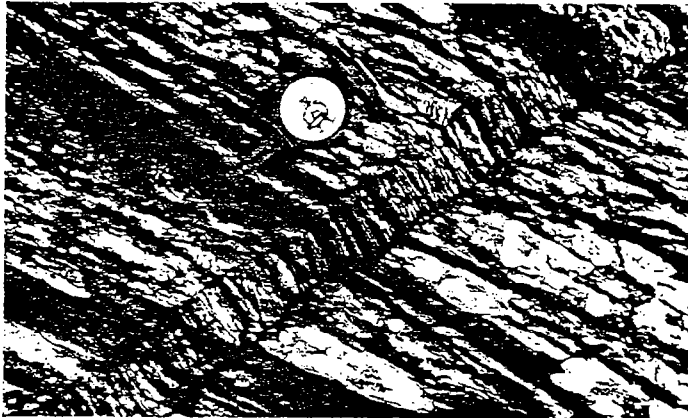


Fig. 3.33 - Pli en chevron dextre (Anderson, 1968). L'orientation entre les directions de cisaillement et d'anisotropie est voisine de  $120^\circ$ .

La différence entre ces angles est due au mode de formation de ces plis. Ceux-ci sont obtenus généralement par un raccourcissement quasiment parallèle à l'anisotropie. Il est bien évident qu'une direction de cisaillement faisant un angle supérieur à  $90^\circ$  par rapport à l'anisotropie crée un raccourcissement beaucoup plus important que lorsque l'angle égale  $90^\circ$  (Fig. 3.34).

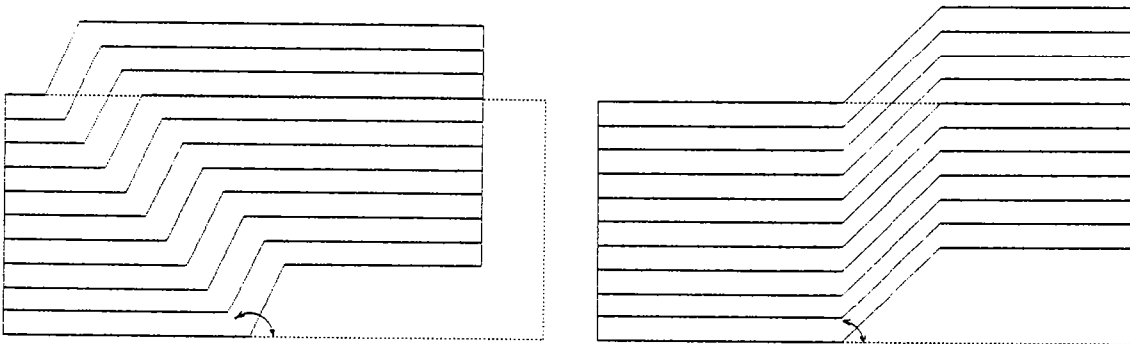


Fig. 3.34 - Plis en chevron montrant que le raccourcissement dépend de l'orientation des plis en chevron.

Néanmoins, ce que semble présenter le modèle de Bowden, c'est la forme des plis en chevron, c'est-à-dire la variation brutale de l'orientation de l'anisotropie entre l'intérieur

et l'extérieur de la bande. L'observation de la déformation caractéristique en fonction de la direction de l'anisotropie (Fig. 3.21 et 3.22) montre que seulement quelques orientations sont instables ( $-0,2 < \epsilon'' < 0$ ) : entre  $90^\circ$  et  $110^\circ$  environ. Toutes les zones ayant une orientation d'anisotropie comprise entre ces deux angles se déforment très facilement, jusqu'à ce qu'elles atteignent une orientation plus stable ( $< 90^\circ$ ). L'anisotropie passe alors brutalement de  $110^\circ$  à  $90^\circ$ .

### 3.5. AMOLLISSEMENT THERMIQUE

#### 3.5.1. INTRODUCTION

Lorsque les matériaux se déforment, de l'énergie se transforme. Celle-ci peut s'exprimer par une élévation de température, si elle est emmagasinée sur place, ce qui entraîne habituellement un amollissement. Si, dans le même temps, il y a un durcissement avec la vitesse de déformation, pour satisfaire aux conditions des relations 1.11 et 1.12 du chapitre 13, le matériau est instable. Or, ces conditions peuvent facilement être satisfaites pour la plupart des roches. A ceci près, pour que l'instabilité s'exprime, il faut qu'il y ait un contraste de déformation, et donc de température entre la zone de cisaillement et la matrice. C'est-à-dire que la diffusion de chaleur doit être la plus faible possible pour éviter toute uniformisation de la température à l'intérieur de la roche. La diffusion de la chaleur peut être négligée dans deux cas : soit en prenant une vitesse de déformation importante, pour que l'uniformisation de la température ne puisse se faire avant la création de la zone de cisaillement, soit en considérant le milieu d'étude très grand pour que la distance atténue l'effet de la diffusion de la chaleur. Il sera donné en temps voulu une relation entre ces paramètres pour que la diffusion de la chaleur soit négligée.

Les équations fondamentales pour cette étude sont : l'équation thermique (Verhoogen et al., 1970)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{W}{\rho C_p} \quad 3.87$$

l'équation énergétique (Jaeger et Cook, 1979)

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11} + \sigma_{22} \dot{\epsilon}_{22}) \quad 3.88$$

une équation rhéologique (Heard, 1976)

$$\dot{\epsilon} = A \exp(-Q/RT) \sigma^n \quad 3.89$$

- K est la conductivité thermique
- $\nabla^2 T$  le gradient thermique
- T la température
- $\rho$  la masse volumique

- Cp la capacité calorifique
- W la vitesse d'augmentation de la densité énergétique
- $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  les contraintes principales
- $\dot{\epsilon}_{11}$  et  $\dot{\epsilon}_{22}$  les vitesses de déformation principales
- Q l'énergie d'activation
- R, A et n des constantes.

Si la diffusion de la chaleur est négligée

$$\frac{K}{\rho C_p} \nabla^2 T \ll \frac{W}{\rho C_p} \quad 3.90$$

L'équation 3.99 s'écrit :

$$dT = \frac{(\sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11} + \sigma_{22} \dot{\epsilon}_{22}) dt}{2 \rho C_p} \quad 3.91$$

Le phénomène d'amollissement thermique étant continu, le modèle de croissance des zones de cisaillement de Bowden peut s'appliquer. Pour cela, l'équation 3.91 peut se réécrire pour plus de simplicité :

$$dt = \frac{\sigma \dot{\epsilon} dt}{\rho C_p} = \frac{\sigma d\epsilon}{\rho C_p} \quad 3.92$$

La déformation caractéristique  $\epsilon^*$ , définie au chapitre 13, est calculée grâce aux équations 3.89 et 3.92 en éliminant la température. Pour cela, la fonction  $\theta$  est définie de la façon suivante :

$$\theta = \sigma^n / \dot{\epsilon} = [\exp(Q/RT)]/A \quad 3.93$$

La température est tirée de cette équation

$$T = Q/R \text{ Log}(A \cdot \theta) \quad 3.94$$

en dérivant par rapport à  $\theta$  :

$$dT = - Q d\theta / [\theta R (\text{Log}(A\theta))^2] \quad 3.95$$

Or, de l'équation 3.92 :

$$dT = (\theta \dot{\epsilon})^{1/n} d\epsilon / \rho C_p \quad 3.96$$

La relation entre  $\theta$  et  $\varepsilon$  est définie par les deux dernières équations :

$$-\rho C_p \theta \frac{(-n-1)}{n} (\text{Log}(A\theta))^{-2} d\theta = R \dot{\varepsilon}^n d\varepsilon \quad 3.97$$

La résolution de cette équation différentielle est complexe, c'est pourquoi l'approximation suivante est faite :

$$[\text{Log}(A\theta)]^2 = [\text{Log}(A\theta_0)]^2 = Q^2/R^2 T_0^2 \quad 3.98$$

Soit

$$T = T_0 \quad 3.99$$

où  $T_0$  est la température initiale du matériau.

Cette approximation semble justifiée car, pour des valeurs habituelles de contraintes ( $10^6 \text{ Pa}$ ), de vitesses de déformation ( $10^{-14} \text{ s}^{-1}$ ), et du facteur de puissance ( $n = 1$ ),  $\theta$  égale  $10^{20}$ . Si  $\theta$  varie d'un rapport dix,  $\theta^{\frac{(n+1)}{n}}$  varie d'un rapport cent et  $[\text{Log}\theta]^2$  d'un rapport 0,1. Autrement dit, la variation de  $[\text{Log}(A\theta)]^2$  est très faible face à la variation de  $\theta^{\frac{(n+1)}{n}}$ . Dans ces conditions, la résolution de l'équation 3.97 donne :

$$n \left( \theta^{\frac{(1)}{n}} - \theta_0^{\frac{(1)}{n}} \right) = \dot{\varepsilon}^n Q \varepsilon / (\rho C_p R T_0^2) \quad 3.100$$

Soit

$$\theta^n = K \eta_0 / (\eta_0 Q \dot{\varepsilon}^n \varepsilon + K \dot{\varepsilon}_0^{\frac{(1-n)}{n}}) \quad 3.101$$

avec

$$K = n \rho C_p R T_0^2 \quad 3.102$$

et la viscosité :

$$\eta = \sigma / \dot{\varepsilon} \quad 3.103$$

La déformation caractéristique  $\varepsilon^*$  définie dans le modèle de Bowden (équation 1.29, chapitre 1.3) s'écrit :

$$\varepsilon^* = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\varepsilon} \quad \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.104$$

A partir des équations 3.93 et 3.101, et avec une vitesse de déformation constante ( $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}$ ), la contrainte s'écrit :



$$\sigma = \eta_0 K / (K \dot{\epsilon}^{-1} + Q \eta_0 \epsilon) \quad 3.105$$

soit

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon} = \frac{-\eta_0^2 K Q}{(K \dot{\epsilon}^{-1} + Q \eta_0 \epsilon)^2} \quad 3.106$$

et

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon = \frac{\eta_0 K^2 \dot{\epsilon}^{-2}}{(K \dot{\epsilon}^{-1} + Q \eta_0 \epsilon)^2} \quad 3.107$$

soit

$$\epsilon'' = -n \rho C_p R T_0^2 / Q \eta_0 \dot{\epsilon} \quad 3.108$$

où

$$\eta = A \frac{1}{\dot{\epsilon}^n} \frac{1-n}{\dot{\epsilon}^n} \exp(-Q/nRT) \quad 3.109$$

Donc, lorsque la rhéologie d'une roche est connue, le calcul de la déformation caractéristique permet de préciser les valeurs de la vitesse de déformation, de la température initiale et de la déformation finie pour lesquelles une zone de cisaillement se propage. Ceci lorsque la diffusion de la chaleur peut être négligée et lorsqu'une hétérogénéité existe pour initier cette zone de cisaillement. Par exemple, les matériaux présentés dans le tableau 2 (Heard, 1976) donnent des courbes vitesse de déformation  $V$ , température initiale  $T$  à déformation caractéristique constante (-0,1 et -0,25). Celles-ci délimitent deux parties dans le plan  $VT$ . Si l'observation se fait après un taux de cisaillement de 1, dans l'une des parties, il est probable qu'il y ait développement de zone de cisaillement, dans l'autre ce développement est improbable.

INDICE	MATERIAU	$\log A$ (MPa <sup>-n</sup> s <sup>-1</sup> )	$Q$ (Kcal mole <sup>-1</sup> )	$n$
1	- Halite polycristalline sèche	- 0,1	23,5	5,5
2	- Marbre sec	- 3,9	62	8,3
3	- Quartzite humide	- 1,4	55,1	2,6
4	- Dolomite sèche	- 12,9	83,2	9,1
5	- Dunite humide	2,2	93,1	3,2
6	- Dunite sèche	3,1	111	3,3

Tableau 2 - Coefficients de l'équation rhéologique (3.89) pour des roches monominéralogiques (d'après Heard, 1976).

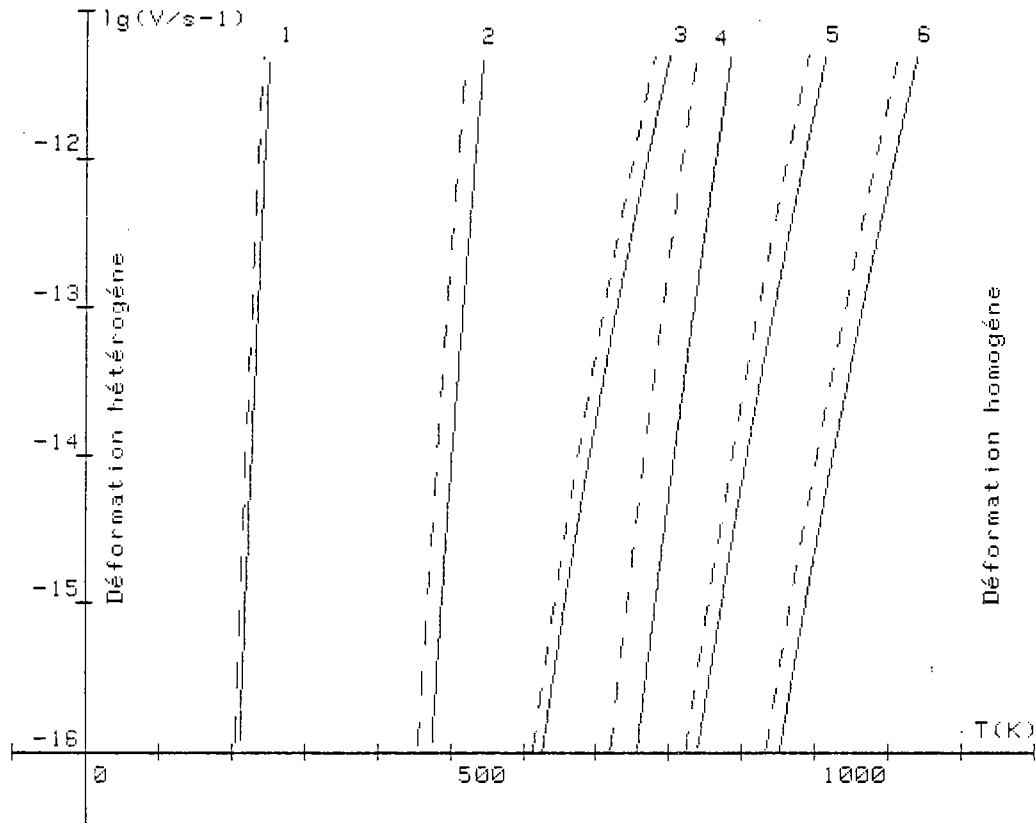


Fig. 3.35 - Courbes vitesse de déformation  $V$ , température initiale  $T$ . A gauche de la courbe tireté ( $\epsilon^* = -0,1$ ) correspond le domaine où les zones de cisaillement se propagent après un taux de cisaillement de 1. A droite de la courbe pleine ( $\epsilon^* = -0,25$ ), les zones de cisaillement ne se propagent pas.  $\rho = 3\ 000\ \text{kg m}^{-3}$ ,  $C_p = 1\ 120\ \text{J Kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . L'indice renvoie au tableau 2.

L'influence des paramètres rhéologiques est représentée sur la figure 3.36. Tous les points d'une même surface ont la même probabilité de création de zone de cisaillement. Plus  $\epsilon^*$  est proche de zéro par valeur négative, plus cette probabilité est grande.

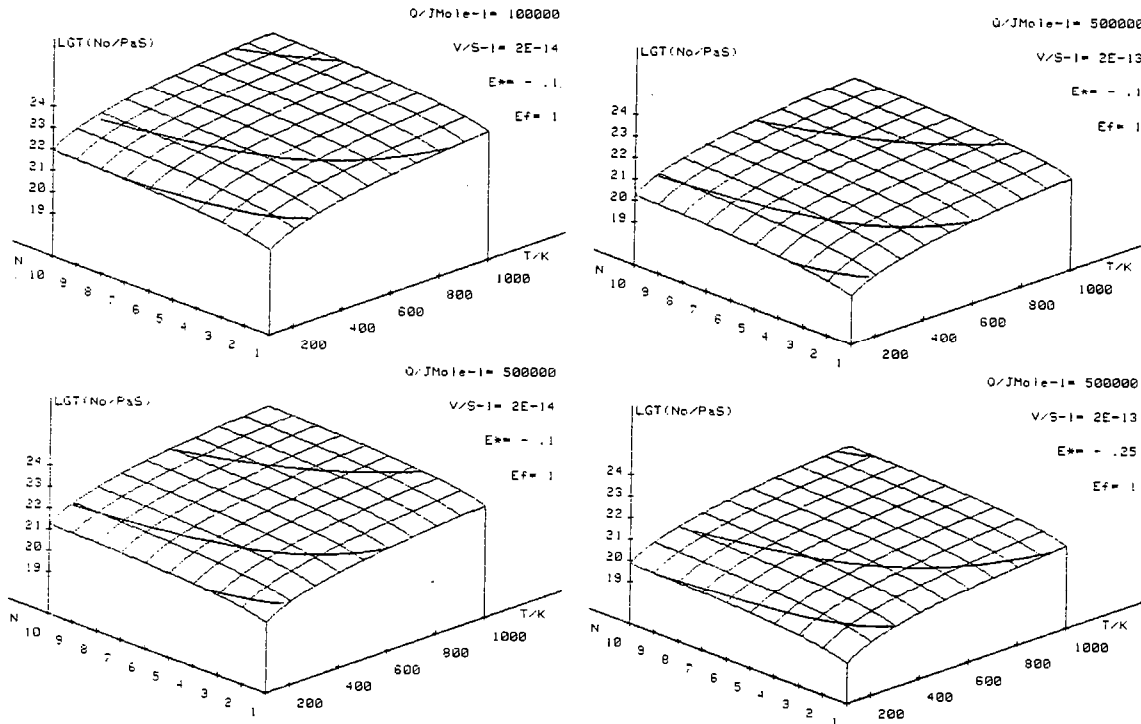


Fig. 3.36 - Surfaces en fonction de la température initiale (T), la viscosité initiale (No) et le facteur de puissance (N). Pour chaque surface, la déformation caractéristique  $E^*$ , l'énergie d'activation Q et la vitesse de déformation V sont constantes.  $\rho = 3\ 000\ \text{Kg m}^{-3}$ ,  $C_p = 1\ 120\ \text{J Kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}$ .

### 3.5.2. RESULTATS NUMERIQUES

Dans le modèle numérique, la roche est considérée comme visqueuse,  $n = 1$  :

$$\dot{\epsilon}/\sigma = \eta = A \exp(-Q/RT) \quad 3.110$$

Après chaque itération de déformation, définie au chapitre 2.3, la température T de chaque élément est augmentée de la quantité dT calculée par l'équation 3.91 et la viscosité  $\eta$  est réactualisée par l'intermédiaire de l'équation 3.110.

Pour que la diffusion de la chaleur soit négligée, il faut que la relation 3.90 soit respectée entre deux éléments du modèle numérique pendant une itération. Cette relation s'écrit :

$$\frac{K}{\rho C_p} \frac{\Delta T}{\Delta x^2} \ll \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad 3.111$$

- $\Delta T$  est l'augmentation de température,
- $\Delta T/\Delta x^2$  le gradient thermique entre deux éléments
- $\Delta x$  la distance entre ces deux éléments
- $\Delta t$  le temps entre deux itérations.

Cette relation s'écrit :

$$\Delta x^2 \gg K\Delta t/\rho C_p \quad 3.112$$

ce qui peut se simplifier par :

$$\Delta x^2 > 100 \cdot K\Delta t/\rho C_p \quad 3.113$$

Lors des simulations suivantes, la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  égale  $2 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1}$  et l'incrément de temps  $\Delta t$  égale  $2,5 \cdot 10^{11} \text{ s}$  (8 000 ans). Les autres paramètres sont définis dans le cas de roche crustale. La densité  $\rho$  est de  $3 \text{ 000 kg m}^{-3}$ , la conductivité thermique  $K$  égale  $2,5 \text{ Jm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et la capacité calorifique  $C_p$  est de  $1 \text{ 120 J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (Yuen et al., 1978). Ce qui donne, pour que la diffusion soit négligée, une distance minimum ( $\Delta x$ ) entre deux éléments de  $4 \text{ 300 m}$ . C'est-à-dire que le réseau du modèle A (Fig. 3.37) représente au moins une zone de  $1 \text{ 000 km} \times 500 \text{ km}$ .

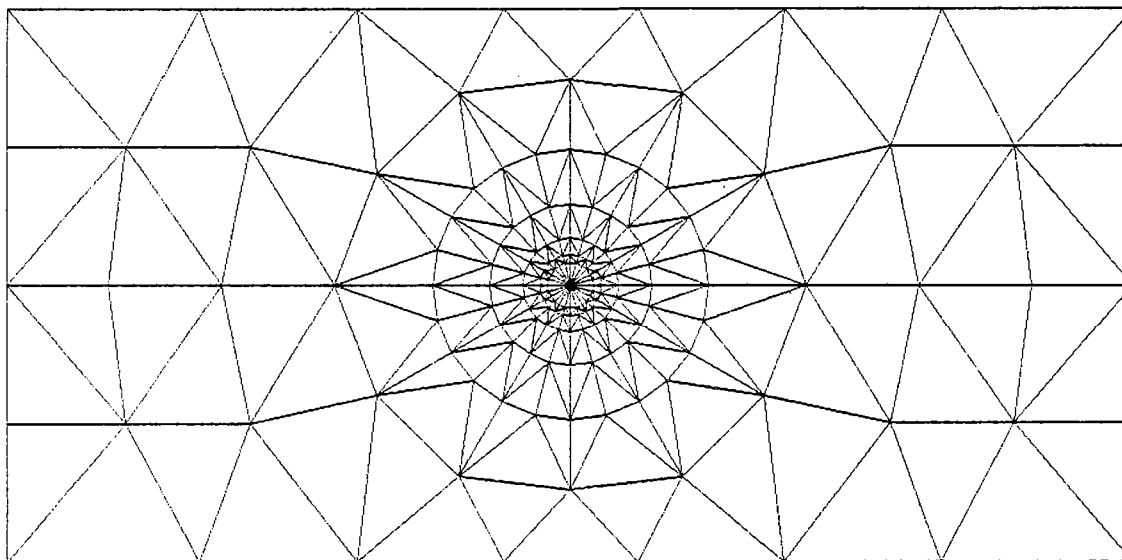


Fig. 3.37 - Réseau du modèle A utilisé pour les simulations numériques. Il représente une zone de  $1 \text{ 000 km} \times 500 \text{ km}$  de roche crustale déformée à une vitesse de déformation de  $2 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1}$ .

Les six simulations, présentées ci-dessous, XVII à XXII (Fig. 3.38 et 3.39) ont de commun leur taux de cisaillement fini ( $\epsilon_f = 1$ ) et l'hétérogénéité constituée des 24 triangles centraux du modèle A. Ce noyau a constamment une viscosité ( $\eta$ ) mille fois inférieure à celle de la matrice. Ces simulations sont à comparer deux à deux, ainsi leur énergie d'activation ( $Q$ ) et leur température initiale ( $T_0$ ) sont identiques. Seule la viscosité initiale ( $\eta_0$ ) change et donc leur déformation caractéristique ( $\epsilon''$ ). Les valeurs de ces paramètres sont définies dans le tableau 3.

SIMULATION	FIGURE	$Q$ (Jmole <sup>-1</sup> )	$T_0$ (K)	$\eta_0$ (Pas)	$\epsilon^*$
XVII	3.38	$5 \cdot 10^5$	600	$6,31 \cdot 10^{20}$	- 0,16
XVIII	3.39	$5 \cdot 10^5$	600	$3,24 \cdot 10^{20}$	- 0,31
IXX	3.40	$1 \cdot 10^5$	600	$3,47 \cdot 10^{21}$	- 0,15
XX	3.41	$1 \cdot 10^5$	600	$1,48 \cdot 10^{21}$	- 0,34
XXI	3.42	$1 \cdot 10^5$	400	$1,51 \cdot 10^{21}$	- 0,15
XXII	3.43	$1 \cdot 10^5$	400	$7,24 \cdot 10^{20}$	- 0,31

Tableau 3 - Caractéristiques des simulations.

$Q$  : énergie d'activation

$T_0$  : température initiale

$\eta_0$  : viscosité initiale

$\epsilon^*$  : déformation caractéristique.

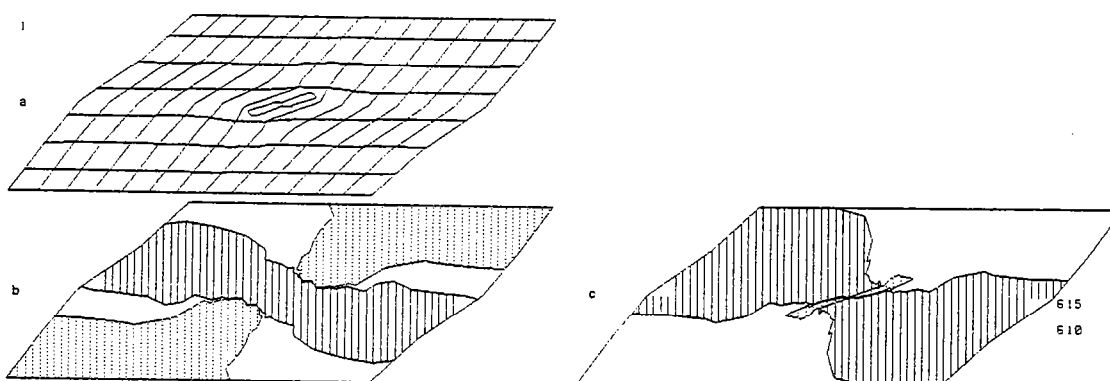


Fig. 3.38 - Simulation XVII,  $Q = 5 \cdot 10^5$  Jmole<sup>-1</sup>,  $T_0 = 600$  K et  $\log(\eta_0) = 20,8$  soit  $\epsilon^* = -0,16$ . Les figures a, b et c représentent le modèle A déformé au taux de cisaillement de 1. La figure a représente la grille cartésienne déformée, b les densités de déformation et c les isothermes 610 K et 615 K. La partie la plus chaude est hachurée et la plus froide est en pointillé (pour plus de précision, voir le chapitre 3.1).

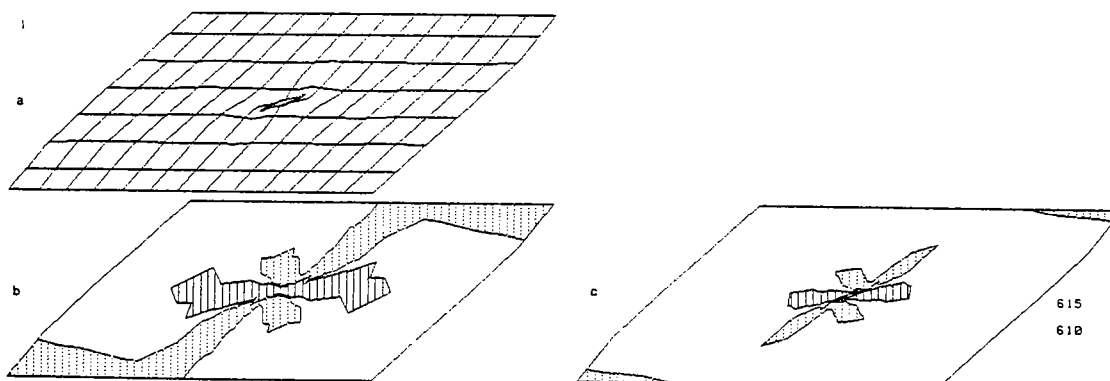


Fig. 3.39 - Simulation XVIII,  $Q = 5 \cdot 10^5$  Jmole<sup>-1</sup>,  $T_0 = 600$  K et  $\log(\eta_0) = 20,51$  soit  $\epsilon^* = -0,31$ ; mêmes commentaires que sur la figure 3.38.

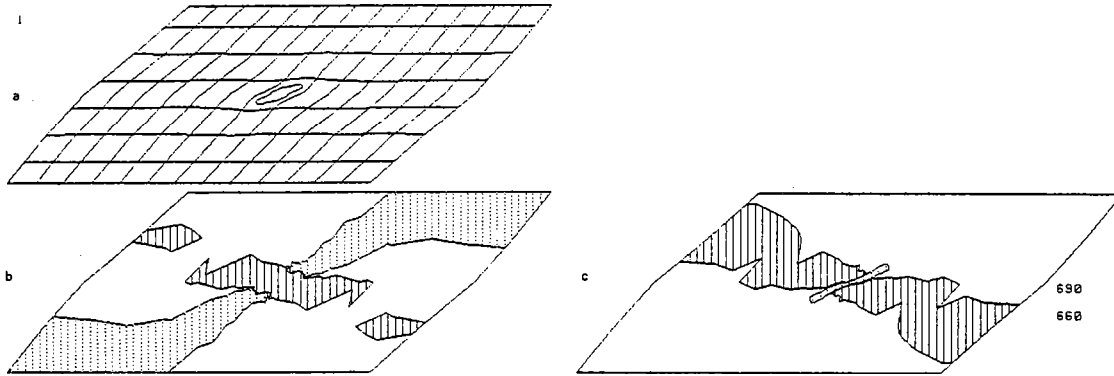


Fig. 3.40 - Simulation IXX,  $Q = 10^5 \text{ Jmole}^{-1}$ ,  $T_0 = 600 \text{ K}$  et  $\log(\eta_0) = 21,5$  soit  $\epsilon^* = -0,15$  ;  
mêmes commentaires que sur la figure 3.38.

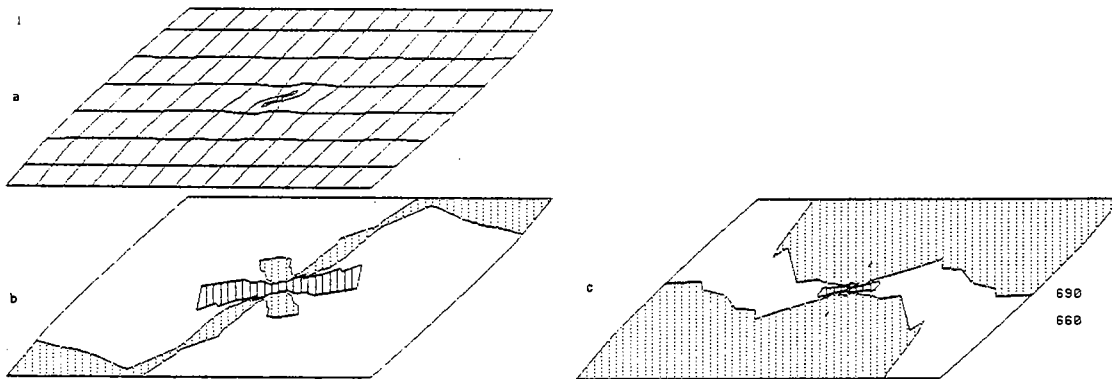


Fig. 3.41 - Simulation XX,  $Q = 10^5 \text{ Jmole}^{-1}$ ,  $T_0 = 600 \text{ K}$  et  $\log(\eta_0) = 21,2$  soit  $\epsilon^* = -0,34$  ;  
mêmes commentaires que sur la figure 3.38.

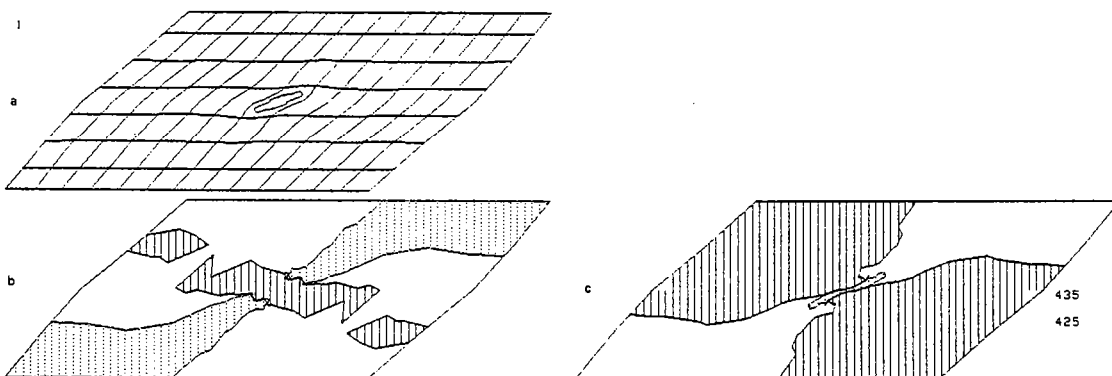


Fig. 3.42 - Simulation XXI,  $Q = 10^5 \text{ Jmole}^{-1}$ ,  $T_0 = 400 \text{ K}$  et  $\log(\eta_0) = 21,2$  soit  $\epsilon^* = -0,15$  ;  
mêmes commentaires que sur la figure 3.38.

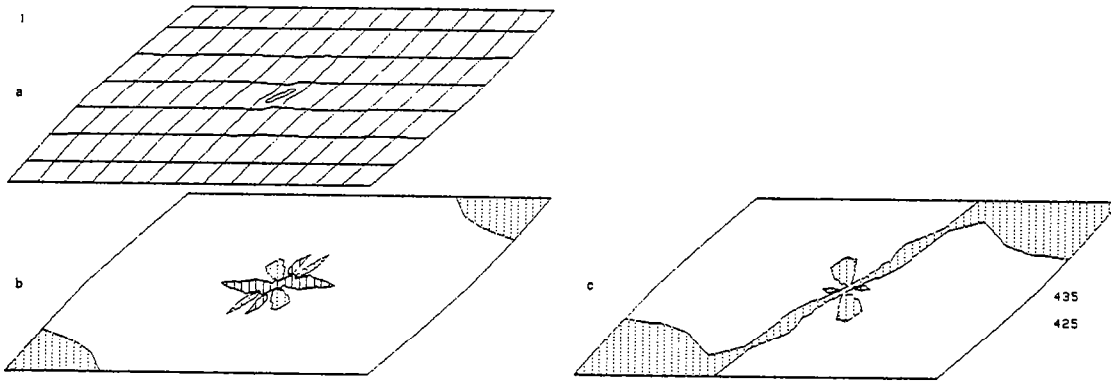


Fig. 3.43 - Simulation XXII,  $Q = 10^5 \text{ Jmole}^{-1}$ ,  $T_0 = 400 \text{ K}$  et  $\log(\eta_0) = 20,9$  soit  $\epsilon^* = -0,31$  ; commentaires que sur la figure 3.38.

Etant donné les densités de déformation de ces six simulations, il n'y a seulement que trois zones de cisaillement à se propager : pour les simulations XVII, IXX et XXI. Encore une fois la relation 3.23 est satisfaite, à savoir que la zone de cisaillement se crée lorsque la déformation caractéristique  $\epsilon^*$  est supérieure à  $-0,17$  et qu'il n'y a pas de propagation quand  $\epsilon^*$  est inférieure à  $-0,25$ .

Pourtant la zone de cisaillement de la simulation XVII semble mieux exprimée que celle des simulations IXX et XXI. Ceci vient probablement de l'erreur faite sur l'approximation  $T_0$  égale  $T$  (équation 3.98), ce qui modifie la valeur exacte de la déformation caractéristique. Cette erreur est d'autant plus importante que l'augmentation de température est grande lors de la déformation, ce qui est le cas des simulations IXX et XXI. Or la température est fortement fonction de l'énergie d'activation  $Q$  par l'intermédiaire de l'équation rhéologique (équation 3.89) :

$$\dot{\epsilon} = \sigma \cdot A \exp(-Q/RT)$$

3.114

Dans le cas de la simulation XVII, où l'énergie d'activation est importante, une petite augmentation de la température suffit à créer une grande variation de la vitesse de déformation. Pour les simulations IXX et XXI, au contraire, la température doit varier plus radicalement, comme le montrent les valeurs des isothermes des simulations. Une autre conséquence d'une grande énergie d'activation est la formation de zones de cisaillement moins larges car la diffusion de la chaleur est petite.

Finalement, une zone de cisaillement thermiquement activée est d'autant mieux exprimée et d'autant plus probable, d'une part, que la déformation caractéristique est proche de zéro par valeurs négatives et, d'autre part, que l'énergie d'activation est grande.

### 3.6. DURCISSEMENT ET AMOLLISSEMENT AVEC LA DEFORMATION

#### 3.6.1. INTRODUCTION

A petite échelle, une roche a parfois un comportement cassant, c'est-à-dire qu'à une déformation critique ( $\epsilon_c$ ), la résistance de la roche chute brutalement. Un exemple de ce comportement est la fracturation des grains ayant subi une certaine quantité de déformation. Ce phénomène est en partie traité dans le chapitre 1.3 dans la partie appelée rhéologie discontinue.

Puisqu'aucun modèle de croissance des zones de cisaillement n'a été clairement défini pour ce comportement, seule une rhéologie simple est simulée. Une relation mathématique entre les paramètres en découle. La loi de comportement choisie est de la forme suivante (Figure 3.44) :

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta \dot{\epsilon} \\ \eta &= \eta_0 (1 + (b - 1) \epsilon/\epsilon_c) \text{ si } \epsilon < \epsilon_c \\ \eta &= \eta_0 \text{ si } \epsilon > \epsilon_c \end{aligned} \quad 3.115$$

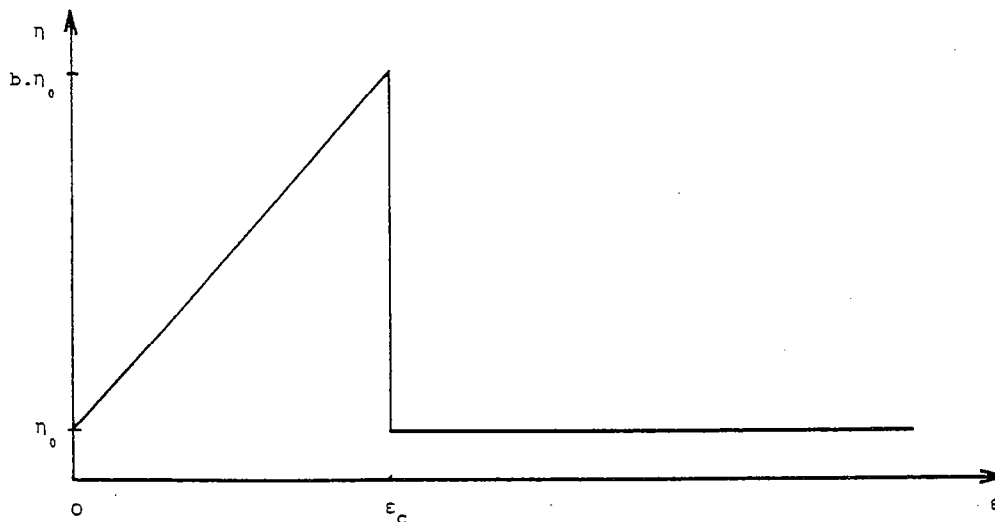


Fig. 3.44 - Variation de la viscosité  $\eta$  avec la déformation  $\epsilon$  dans le cas d'une rhéologie discontinue correspondante à l'équation 3.115.

Cette viscosité  $\eta$  est introduite dans le modèle numérique au niveau de l'équation 2.4 du chapitre 2.3. La déformation  $\epsilon$  est calculée de la façon suivante (Truesdell et Toupin, 1960) :

$$\epsilon = \left\{ \frac{1}{2} [ (\lambda_1 + 1/\lambda_1)^2 + (\lambda_2 + 1/\lambda_2)^2 ] \right\}^{1/2} \quad 3.116$$



$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les axes principaux de l'ellipse de déformation de l'élément considéré.

Comme il est précisé au chapitre 1.3, à petite déformation, inférieure à la déformation critique  $\epsilon_c$ , il est fort probable que la zone de cisaillement ne se propage pas. Et pour de grande déformation, très supérieure à la déformation critique, le contraste entre zone de cisaillement et matrice disparaît. C'est pourquoi le modèle numérique est observé toujours après qu'il ait subi une déformation de 125 % de la déformation critique  $\epsilon_c$ .

### 3.6.2. RESULTATS NUMERIQUES

Six simulations ont été faites sur le modèle A à différentes valeurs de déformations critiques  $\epsilon_c$  et de facteur de durcissement  $b$ . L'hétérogénéité est constituée par les 24 triangles centraux du réseau (Fig. 3.45), leur viscosité  $\eta_0$  est mille fois inférieure à celle de la matrice.

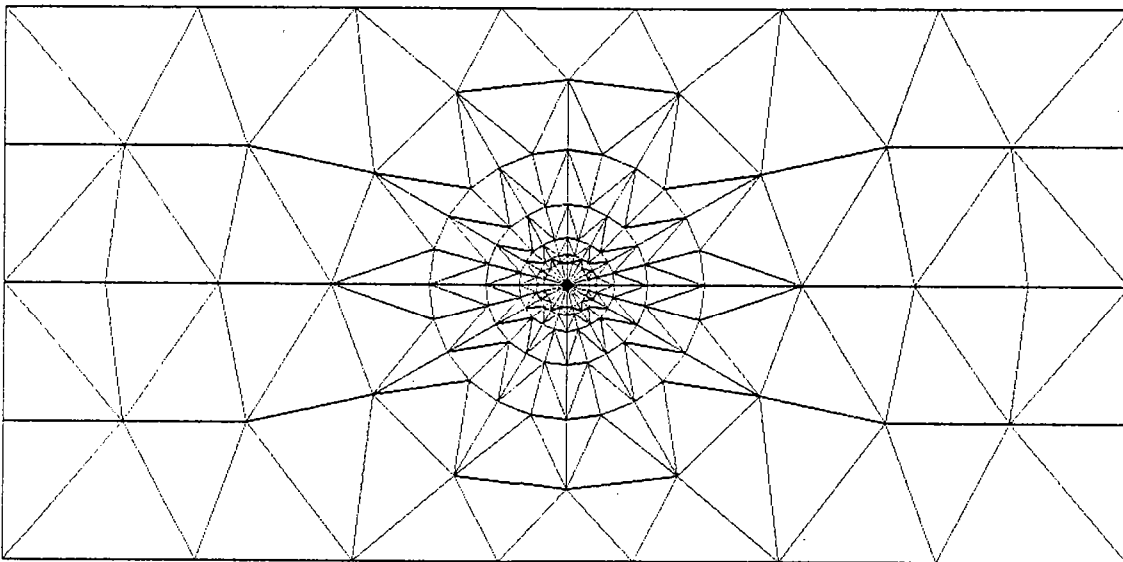


Fig. 3.45 - Modèle A utilisé dans les six simulations de ce chapitre.

Les paramètres des six simulations (XXIII à XXVIII) sont résumés dans le tableau 4.

SIMULATION	FIGURE	$\epsilon_c$	$\epsilon_f$	$b$
XXIII	3.46	0,8	1	30
XXIV	3.47	0,8	1	10
XXV	3.48	0,2	0,25	100
XXVI	3.49	0,2	0,25	55
XXVII	3.50	0,05	0,0625	170
XXVIII	3.51	0,05	0,0625	100

Tableau 4 - Caractéristiques des simulations XXIII à XXVIII.

$\epsilon_c$  : déformation critique  
 $\epsilon_f$  : déformation d'observation  
 $b$  : facteur de durcissement.

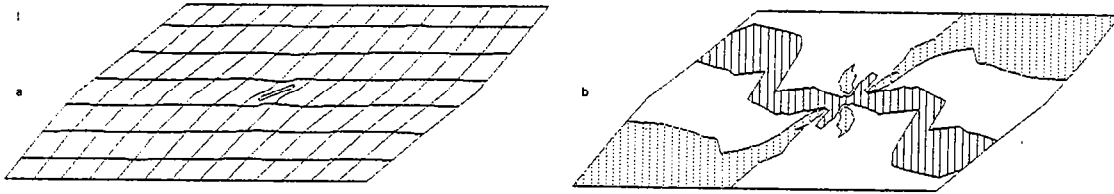


Fig. 3.46 - Simulation XXIII,  $\epsilon_c = 0,8$ ,  $b = 30$  et  $\epsilon_f = 1$ . Les figures a et b représentent le modèle A déformé au taux de cisaillement  $\epsilon_f$ . La figure a représente la grille cartésienne déformée, et b représente les densités de déformation (pour plus de précisions, voir le chapitre 3.1).

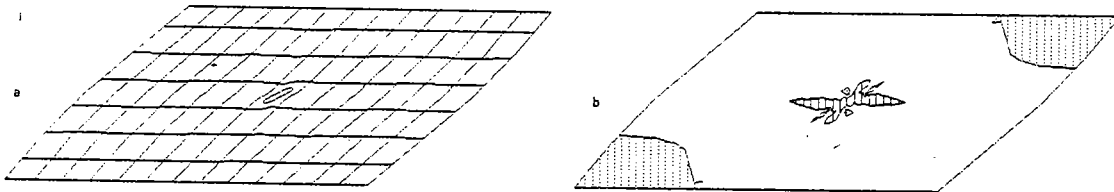


Fig. 3.47 - Simulation XXIV,  $\epsilon_c = 0,8$ ,  $b = 10$  et  $\epsilon_f = 1$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.46.

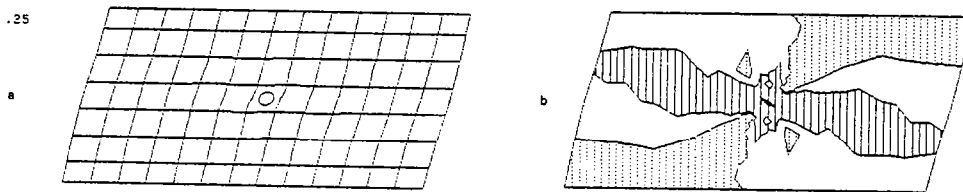


Fig. 3.48 - Simulation XXV,  $\epsilon_c = 0,2$ ,  $b = 100$  et  $\epsilon_f = 0,25$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.46.

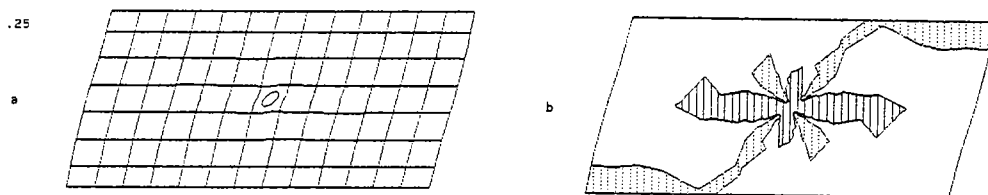


Fig. 3.49 - Simulation XXVI,  $\epsilon_c = 0,2$ ,  $b = 55$  et  $\epsilon_f = 0,25$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.46.

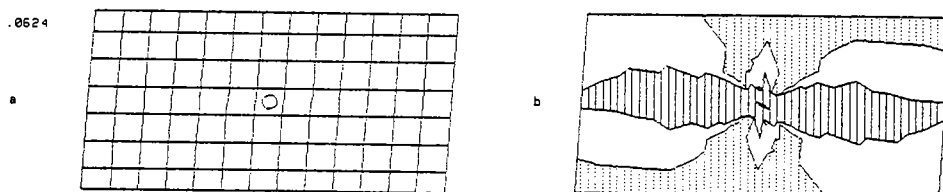


Fig. 3.50 - Simulation XXVII,  $\epsilon_c = 0,05$ ,  $b = 170$  et  $\epsilon_f = 0,0625$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.46.

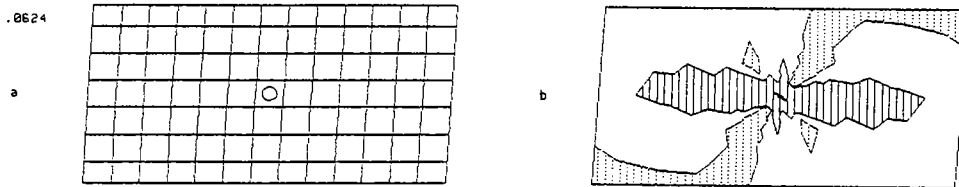


Fig. 3.51 - Simulation XXVIII,  $\epsilon_c = 0,05$ ,  $b = 100$  et  $\epsilon_f = 0,0625$  ; mêmes commentaires que sur la figure 3.46.

Sur ces six simulations, seulement trois zones de cisaillement se sont propagées (simulations XXIII, XXV et XXVII). Sur la figure 3.52 sont reportés les points représentatifs de ces six simulations en fonction du facteur de durcissement  $b$ , et de la déformation critique  $\epsilon_c$ .

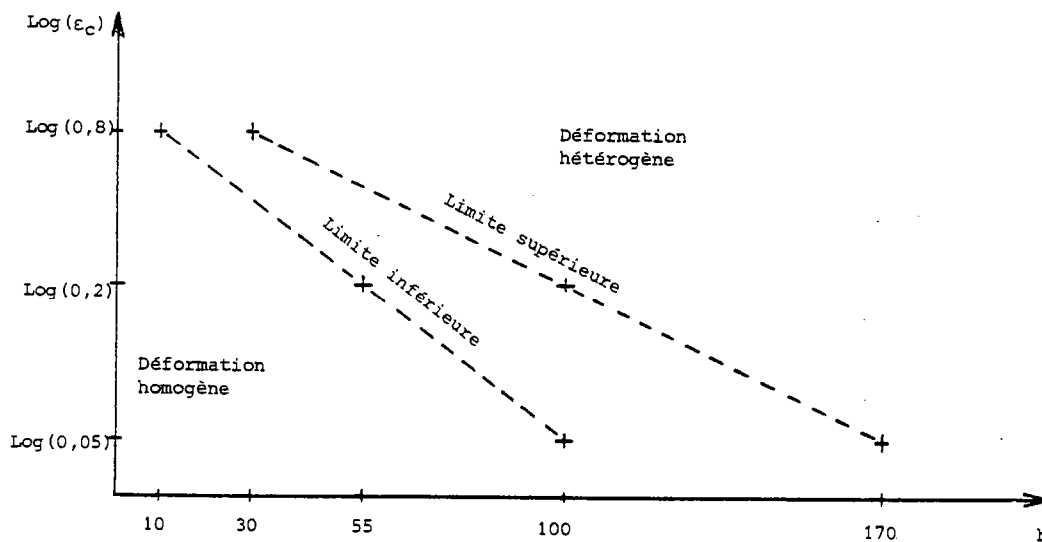


Fig. 3.52 - Limite entre la déformation hétérogène (avec création de zone de cisaillement) et la déformation homogène (sans création de zone de cisaillement). La partie entre la limite supérieure et inférieure est incertaine quant au développement de la zone de cisaillement.

L'alignement des points correspondants aux simulations développent des zones de cisaillement est remarquable, tout autant que celui des points correspondant aux simulations ne développant pas de zones de cisaillement. Ceci permet de préciser une loi sur les limites entre les zones à déformations hétérogènes, homogènes ou incertaines. La limite supérieure est représentée par  $\epsilon_s$  et l'inférieure par  $\epsilon_I$  :

$$\epsilon_s = 157 (b)^{-1,52} \quad 3.117$$

et

$$\epsilon_I = 13 (b)^{-1,2} \quad 3.118$$

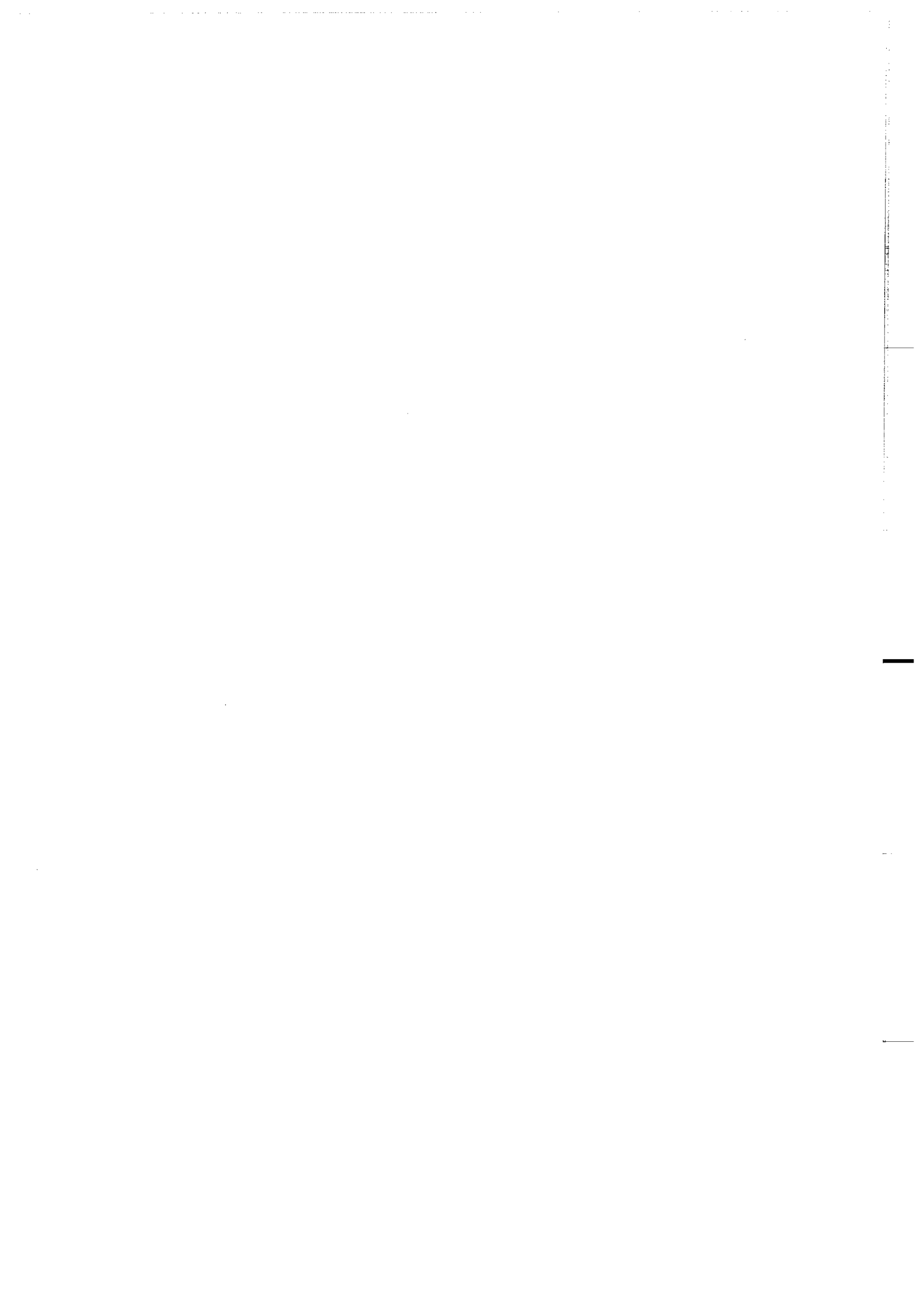
Si, pour un facteur de durcissement  $b$  donné, une déformation critique  $\epsilon_c$  supérieure à  $\epsilon_s$  et une déformation finie  $\epsilon_f$  égale à 125 % de  $\epsilon_c$ , il est probable qu'une zone de cisaillement soit observée. De même, si  $\epsilon_c$  est inférieur à  $\epsilon_I$ , il ne sera pas observé de zone de cisaillement.

Mais tous ces résultats sont sans doute liés au mode de durcissement, ici linéaire, et à la quantité de déformation à laquelle l'observation se fait. Il serait fastidieux de définir l'importance de tous ces paramètres. Par contre, une rhéologie discontinue n'est sans doute valable qu'à petite échelle. Il est peu probable que les effets brusques de la déformation sur la contrainte puissent affecter une grande quantité de roche. A grande échelle, la rhéologie doit être continue. L'angle que fait la zone de cisaillement avec la direction de cisaillement permet de distinguer ces différentes rhéologies. Pour les rhéologies discontinues, les zones de cisaillement se développent d'autant plus obliquement que la déformation critique  $\epsilon_c$  est grande (Fig. 3.46 b, 3.48 b et 3.50 b), alors que, pour les rhéologies continues, le développement se fait quasiment parallèle à la direction de cisaillement (chapitre 3.2, simulations I et III).

Finalement, les zones de cisaillement issues d'une rhéologie instable discontinue se créent à petite échelle et obliquement à la direction de cisaillement.

## Quatrième partie

Analyse d'une terminaison  
de zone de cisaillement



La terminaison d'une zone de cisaillement est son extrémité. C'est la transition entre la roche déformée homogènement et la roche comportant la zone de cisaillement. Le déplacement de la terminaison correspond à la propagation longitudinale de la zone.

#### 4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une méthode est élaborée qui relie la géométrie des zones de cisaillement, observable sur le terrain, avec les résultats précédents, en particulier la déformation caractéristique (chapitre 1.3) liée à la rhéologie de la roche. Certains modèles de terminaison et de propagation de zone de cisaillement ont déjà été définis.

Freund (1974), bien qu'étudiant les failles lors de déformation plane, donne des conclusions qui peuvent s'appliquer à certaines zones de cisaillement. Il décrit deux modèles de terminaisons :

Dans le premier modèle, la faille se répartit en un faisceau de failles (Fig. 4.1). Dans ce cas, le déplacement principal se divise sur les branches du faisceau. Le déplacement relatif des deux blocs bordant la faille reste strictement identique quelque soit la section où il est mesuré.

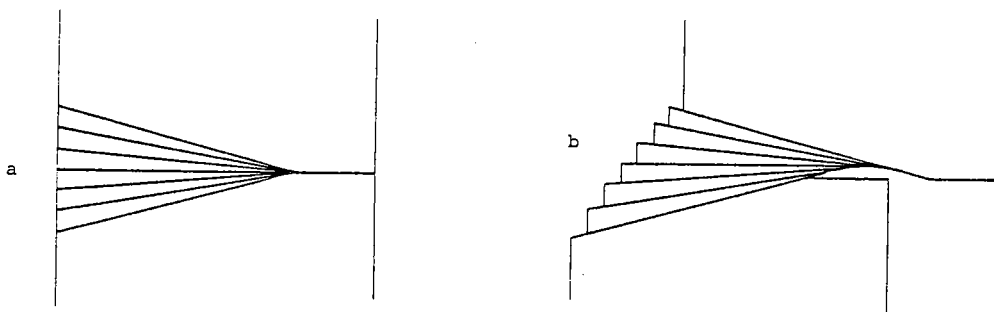


Fig. 4.1 - Terminaison d'une faille par un faisceau. a : avant déplacement, b : après déplacement (d'après Freund, 1974).

Dans le second modèle, la terminaison de la faille se courbe dans le sens d'une aiguille d'une montre si le mouvement est dextre (Fig. 4.2). Dans ce cas, le déplacement dans la partie centrale est beaucoup plus important que dans les extrémités.

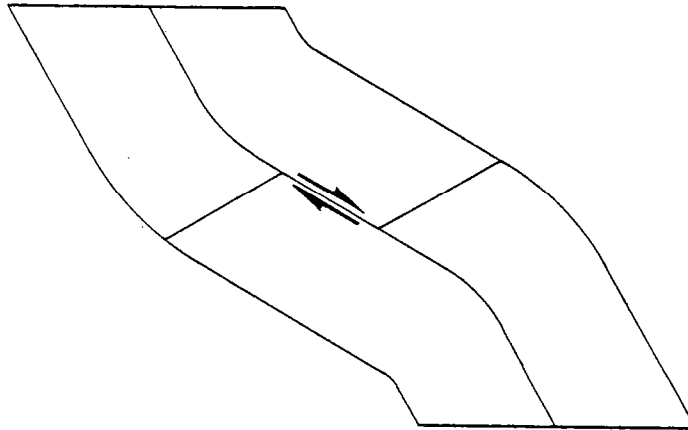


Fig. 4.2 - Terminaison d'une faille par courbure de ses extrémités (d'après Freund, 1974).

Ramsay et Allison (1979) et Ramsay (1980) proposent deux modèles de terminaison :

Premièrement, la déformation est plane. La déformation dans la terminaison s'atténue dans une zone de plus en plus large (Fig. 4.3). C'est dans ces conditions qu'il peut exister une courbure de la terminaison, dans le sens des aiguilles d'une montre si le cisaillement est dextre. Ceci est identique à la proposition de Freund.

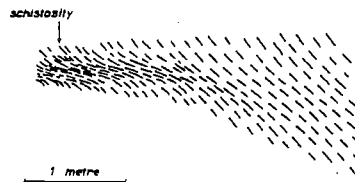


Fig. 4.3 - Variation de la schistosité dans une terminaison, montrant un élargissement de la zone lié à une diminution de l'intensité de déformation (d'après Ramsay et Allison, 1979).

Deuxièmement, la déformation n'est pas plane. Des déplacements de matière se font alors parallèlement au plan cisailant et perpendiculairement à la direction de cisaillement, et des déformations finies de type aplatissage et constriction sont observées (Fig. 4.4).



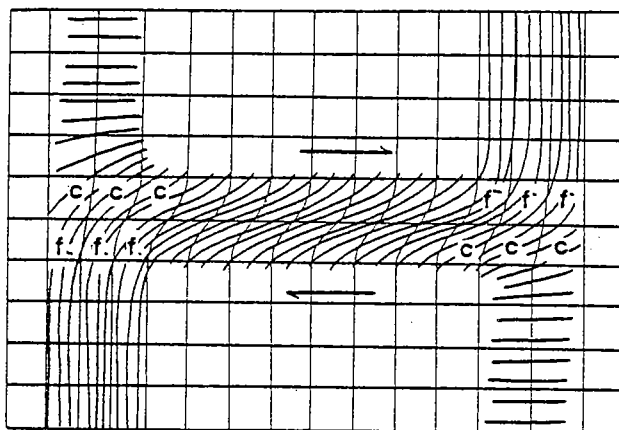


Fig. 4.4 - Champ de déformation dans une terminaison de zone de cisaillement, pour un modèle de déformation non plane. Des zones aplaties (F) et allongées (C) sont observées (d'après Ramsay et Allison, 1979).

Coward (1976) distingue deux possibilités de propagation des zones de cisaillement :

Premièrement, la vitesse de propagation de cette zone de cisaillement est faible, comparée à la vitesse de déformation globale. La zone de cisaillement prend alors une forme sigmoïdale, c'est-à-dire que s'il y en a plusieurs, elles peuvent délimiter des parties de roche non déformées, grossièrement de la forme d'un losange.

Deuxièmement, la vitesse de propagation est élevée relativement à la vitesse de déformation. Dans ces conditions, les zones de cisaillement sont à peu près linéaires.

L'étude suivante sur des terminaisons de zone de cisaillement est faite sous condition de certaines hypothèses :

- La déformation cisailante de la roche est plane.
- La rhéologie de la roche est considérée continue, et la déformation caractéristique résultante (équation 1.31, chapitre 1.3) est supposée constante quelque soient l'endroit et le moment considérés. Ceci est convenable s'il n'y a pas de changement brusque de la rhéologie avec la déformation et la vitesse de déformation, c'est-à-dire si la cause de l'amollissement reste constante dans le temps et l'espace.

L'étude porte tout d'abord sur l'analyse d'une zone de cisaillement infiniment longue où est précisée l'évolution de la déformation au centre de la zone. Ensuite, l'atténuation d'une zone de cisaillement dans un milieu visqueux linéaire est analysée. Et enfin les résultats géométriques des simulations numériques (chapitre 3.2) sont analysés, puis comparés à une terminaison réelle décrite par Simpson (1983).

## 4.2. ZONE DE CISAILLEMENT INFINIMENT LONGUE

L'étude porte sur l'évolution lors de la déformation, d'une ligne matérielle traversée par une zone de cisaillement. La ligne est noyée dans une matrice qui se déforme par cisaillement simple à l'infini à la vitesse  $\dot{\gamma}$ . Comme il a déjà été précisé, pour qu'une zone de cisaillement s'initie, il faut qu'il y ait une petite déformation supplémentaire en un endroit. Dans l'état initial, la ligne est alors considérée non exactement linéaire : elle possède une perturbation (Fig. 4.5).

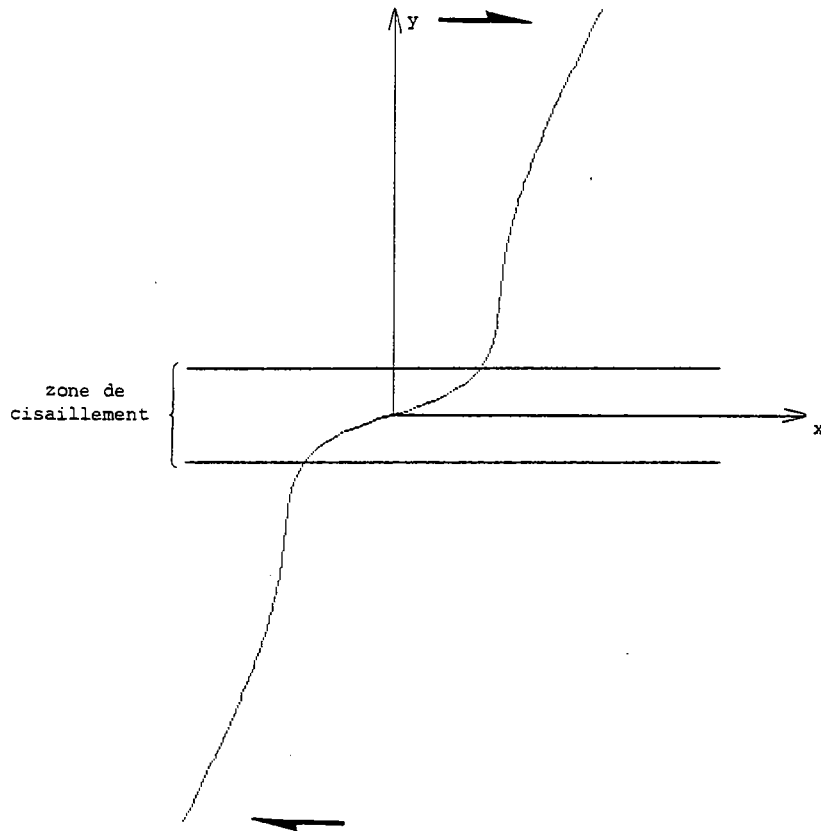


Fig. 4.5 - Allure d'une ligne traversée par une zone de cisaillement infiniment longue.

Une description analytique possible de cette ligne peut se traduire par l'équation :

$$x = y (c + a e^{-b|y|}) \quad 4.1$$

Une multitude d'équations aurait pu décrire la ligne suivant son allure. Celle-ci a été choisie car elle a le mérite d'être simple et de ne pas influencer le résultat. Puisque la ligne est globalement symétrique par rapport à son centre, seule la partie supérieure ( $y > 0$ ) est étudiée. L'équation 4.1 se simplifie :

$$x = y (c + a e^{-by}) \quad 4.2$$

Les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont maintenant précisées. Le taux de cisaillement simple est calculé en toute ordonnée  $y$  :

$$\gamma (y) = \frac{\partial x}{\partial y} = c - a e^{-by} (yb - 1) \quad 4.3$$

Dans le cas d'une rhéologie instable continue, où la déformation caractéristique est négative, la déformation et la vitesse de déformation de cette ligne peuvent être décrites en

accord avec le modèle de croissance de Bowden ; car cette zone de cisaillement infiniment longue peut être considérée comme une juxtaposition, parallèlement à la zone de cisaillement, de bandes très longues diversement déformées. Si la ligne est initialement perpendiculaire à la direction de cisaillement, la déformation et la vitesse de déformation peuvent être écrites au temps  $t$ , pour un point particulier à l'infini et un point d'ordonnée  $y$  (équations 1.14 à 1.19, chapitre 1.3) :

$$\dot{\gamma}(\infty) = \dot{\gamma} \quad 4.4$$

$$\gamma(\infty) = \dot{\gamma}t = c \quad 4.5$$

Des équations 4.3 et 4.5, nous pouvons écrire :

$$\gamma(y) = \dot{\gamma}t - a e^{-by} (y b - 1) \quad 4.6$$

Puisque ces équations s'écrivent dans les conditions du modèle de Bowden, à savoir qu'à un temps donné la contrainte est constante en tout point, nous pouvons écrire (équ. 1.13 et 1.28) :

$$\left( \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \right) \sigma = - \frac{\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} = \text{constante}$$

La vitesse de déformation en  $y$  s'écrit alors :

$$\dot{\gamma}(y) = \dot{\gamma} + \frac{a\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} e^{-by} (y b - 1) \quad 4.7$$

Au temps  $t + dt$ ,  $dt$  étant petit, la déformation en  $y$  devient :

$$\gamma(y) = \left[ \dot{\gamma}t - a e^{-by} (y b - 1) \right] + dt \left[ \dot{\gamma} + \frac{a\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} e^{-by} (y b - 1) \right]$$

Soit

$$\gamma(y) = \dot{\gamma}(t + dt) - a \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} dt \right) e^{-by} (y b - 1) \quad 4.8$$

Le facteur  $a$  peut être considéré comme une fonction du temps :

$$a(t + dt) = a(t) \cdot \left( 1 - \frac{\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} dt \right) \quad 4.9$$

Pour définir  $a(t)$ , étudions  $\frac{d a(t)}{dt}$  :

$$\frac{d a(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{a(t + dt) - a(t)}{dt} = - a(t) \cdot \frac{\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} \quad 4.10$$

Or, cette dernière équation est caractéristique d'une fonction exponentielle :

$$a(t) = a e^{-\frac{\dot{\gamma}}{e^{\frac{by}{b}}} t} \quad 4.11$$

Les équations 4.7 et 4.2 se réécrivent :

$$\gamma(y) = \dot{\gamma}t - a (yb - 1) e^{-\left(\frac{\dot{\gamma}t}{\epsilon^{\dot{\gamma}}} - by\right)} \quad 4.12$$

$$x = y \left( \dot{\gamma}t + a e^{-\left(\frac{\dot{\gamma}t}{\epsilon^{\dot{\gamma}}} - by\right)} \right) \quad 4.13$$

Ces deux équations décrivent l'évolution d'une zone de cisaillement infiniment longue. Il est remarquable que :

$$\gamma(1/b) = \dot{\gamma}t = \gamma(\infty) \quad 4.14$$

c'est-à-dire que le taux de cisaillement à l'ordonnée  $1/b$  est identique à celui à l'infini. La zone de cisaillement peut être définie comme étant la partie la plus déformée. Elle est donc bordée par des zones de même déformation qu'à l'infini, qui ont des ordonnées de  $1/b$  et  $-1/b$ . Sa largeur est donc constante et égale à  $2/b$ , quelque soit le temps. Une conséquence est que  $b$  dépend uniquement de l'hétérogénéité initiale. Une autre remarque importante est le taux de cisaillement au centre de la zone. C'est-à-dire pour une ordonnée nulle :

$$\gamma(0) = \dot{\gamma}t + a e^{-\frac{\dot{\gamma}t}{\epsilon^{\dot{\gamma}}}} \quad 4.15$$

Cette équation montre que la déformation au centre de la zone varie exponentiellement avec le temps. Pour les applications à des phénomènes réels, le terme  $\dot{\gamma}t$  est négligé, car il est souvent petit comparé à  $a e^{-\frac{\dot{\gamma}t}{\epsilon^{\dot{\gamma}}}}$  :

$$\gamma(0) \approx - a e^{-\frac{\dot{\gamma}t}{\epsilon^{\dot{\gamma}}}} \quad 4.16$$

En conclusion, pour une déformation caractéristique et une hétérogénéité initiale données, une zone de cisaillement infiniment longue se caractérise par une largeur constante, et la déformation au centre évoluant exponentiellement avec le temps.

### 4.3. ANALYSE D'UNE TERMINAISON DANS UN MILIEU VISQUEUX

Le but de cette étude est de comprendre comment une zone de cisaillement de longueur finie se propage dans la roche. Pour cette analyse mathématique, des hypothèses très restrictives sont nécessaires : La propagation est étudiée dans une roche à rhéologie simple, de type visqueux linéaire, alors que la rhéologie nécessaire à la naissance d'une zone de cisaillement doit être de type instable.

La roche peut être considérée en deux parties, une première (A) où la zone de cisaillement est exprimée et une seconde (B) où cette zone de cisaillement s'atténue (Fig. 4.6).

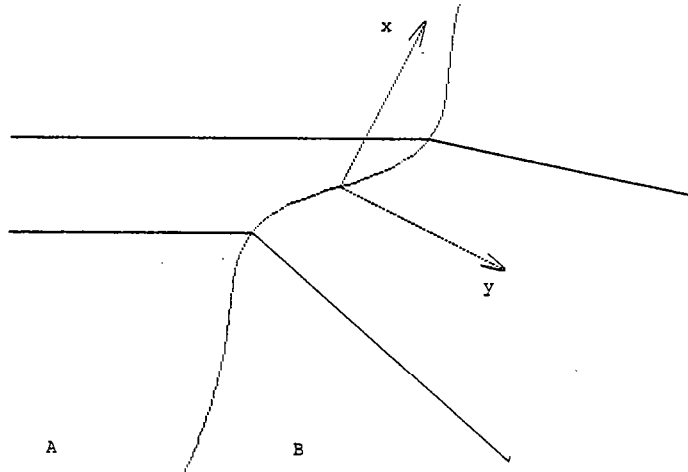


Fig. 4.6 - Zone de cisaillement dans la partie A et atténuation dans la partie B.

L'étude revient à calculer l'influence de la limite entre A et B. Une étude similaire a été faite par Sanford (1959) sur le comportement des plis. Les équations nécessaires sont les mêmes que celles prises par Sanford, soit :

- Les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad 4.17$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad 4.18$$

- Les équations de compatibilité :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad 4.19$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0 \quad 4.20$$

- Les équations de comportement dues à la viscosité linéaire :

$$\sigma_x = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad 4.21$$

$$\sigma_y = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad 4.22$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad 4.23$$

Où  $u$  et  $v$  sont les vitesses de déplacement au point  $x, y$ . En réalité, Sanford considère un milieu élastique ; il obtient alors les déplacements et non les vitesses comme ici. Ces six équations imposent :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad 4.24$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 4.25$$

Où  $\phi$  et  $\psi$  sont des potentiels. Dans ce cas :

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad 4.26$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0 \quad 4.27$$

De ces deux équations,  $\phi$  et  $\psi$  doivent satisfaire les équations différentielles biharmoniques, mais aussi les conditions aux limites. Or la limite entre les parties A et B (Fig. 4.6) est décrite pour une courbe sinusoïdale et son influence est nulle à l'infini :

$$\text{à } y = 0 \quad u = 0 \quad \text{et} \quad v = -P \cos \alpha x \quad 4.28$$

$$\text{à } y = \infty \quad u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad 4.29$$

L'axe x est pris globalement parallèle à la limite entre A et B.

Donc :

$$\phi = \cos \alpha x [A_1 e^{\alpha y} + A_2 y e^{\alpha y} + A_3 e^{-\alpha y} + A_4 y e^{-\alpha y}] \quad 4.30$$

$$\psi = \sin \alpha x [A_5 e^{\alpha y} + A_6 y e^{\alpha y} + A_7 e^{-\alpha y} + A_8 y e^{-\alpha y}] \quad 4.31$$

u et v sont définies en remplaçant  $\phi$  et  $\psi$  dans les équations 4.24 et 4.25.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  peuvent être alors définies grâce aux équations 4.21 à 4.23. Les équations 4.17 et 4.18 se réécrivent alors :

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + \mu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) = 0 \quad 4.32$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) = 0 \quad 4.33$$

Or, si

$$\kappa = (\lambda + 2\mu)/\mu \quad 4.34$$

$$\nu = \lambda / 2.(\lambda + \mu) \quad 4.35$$

Les équations 4.32 et 4.33 donnent :

$$\begin{aligned}
 A_6 &= K A_2 \\
 A_8 &= -K A_4 \\
 A_3 &= A_1 \\
 A_7 &= A_5
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

Soit

$$\phi = \cos \alpha x [A_1 (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + A_2 y e^{\alpha y} + A_4 y e^{-\alpha y}]
 \tag{4.37}$$

$$\psi = \sin \alpha x [A_5 (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + K A_2 y e^{\alpha y} - K A_4 y e^{-\alpha y}]
 \tag{4.38}$$

Avec les équations 4.24 et 4.25, les vitesses sont définies :

$$\begin{aligned}
 u &= \sin \alpha x e^{\alpha y} [\alpha A_1 + \alpha A_2 y + A_5 \alpha + K A_2 + K A_2 \alpha y] \\
 &\quad + \sin \alpha x e^{-\alpha y} [\alpha A_1 + \alpha A_4 y - A_5 \alpha - K A_4 + K A_4 \alpha y]
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 v &= \cos \alpha x e^{\alpha y} [\alpha A_1 + A_2 + A_2 \alpha y + \alpha A_5 + \alpha K A_2 y] \\
 &\quad + \cos \alpha x e^{-\alpha y} [-\alpha A_1 + A_4 - \alpha A_4 y + \alpha A_5 - \alpha K A_4 y]
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Ces deux équations doivent être compatibles avec les conditions aux limites (équ. 4.28 et 4.29), ce qui impose  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  et  $A_5$  donc :

$$u = \alpha y P \left( \frac{1+K}{K-1} \right) \sin \alpha x e^{-\alpha y}
 \tag{4.41}$$

$$v = \frac{P}{K-1} \cos \alpha x e^{-\alpha y} (1 - K - \alpha y (1 + K))
 \tag{4.42}$$

Pour obtenir une limite entre A et B ayant l'allure désirée (Fig. 4.6), huit courbes décrites par l'équation 4.39 sont superposées au moyen des séries de Fourier. Les coefficients  $P_n$  et  $a_n$  de ces huit équations sont tels que :

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1} P}{2n-1} \quad \text{et} \quad a_n = (2n-1) \frac{\pi}{L} \quad \text{pour } n = 1 \text{ à } 8
 \tag{4.43}$$

L : Longueur d'onde de la série.

P : Amplitude du cisaillement.

Les vitesses  $u$  et  $v$  au point  $(x,y)$  de la partie B s'écrivent alors :

$$u = \frac{Py\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp \frac{(1-2n)\pi y}{L} \quad 4.44$$

$$v = \frac{P}{K-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \left( 1-K-y(1+K) \frac{(2n-1)\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right) \exp \left( \frac{(1-2n)\pi y}{L} \right) \quad 4.45$$

La figure 4.7 représente l'atténuation des zones de cisaillement dans un milieu visqueux, décrite par les deux dernières équations, pour diverses valeurs de L, P et V.

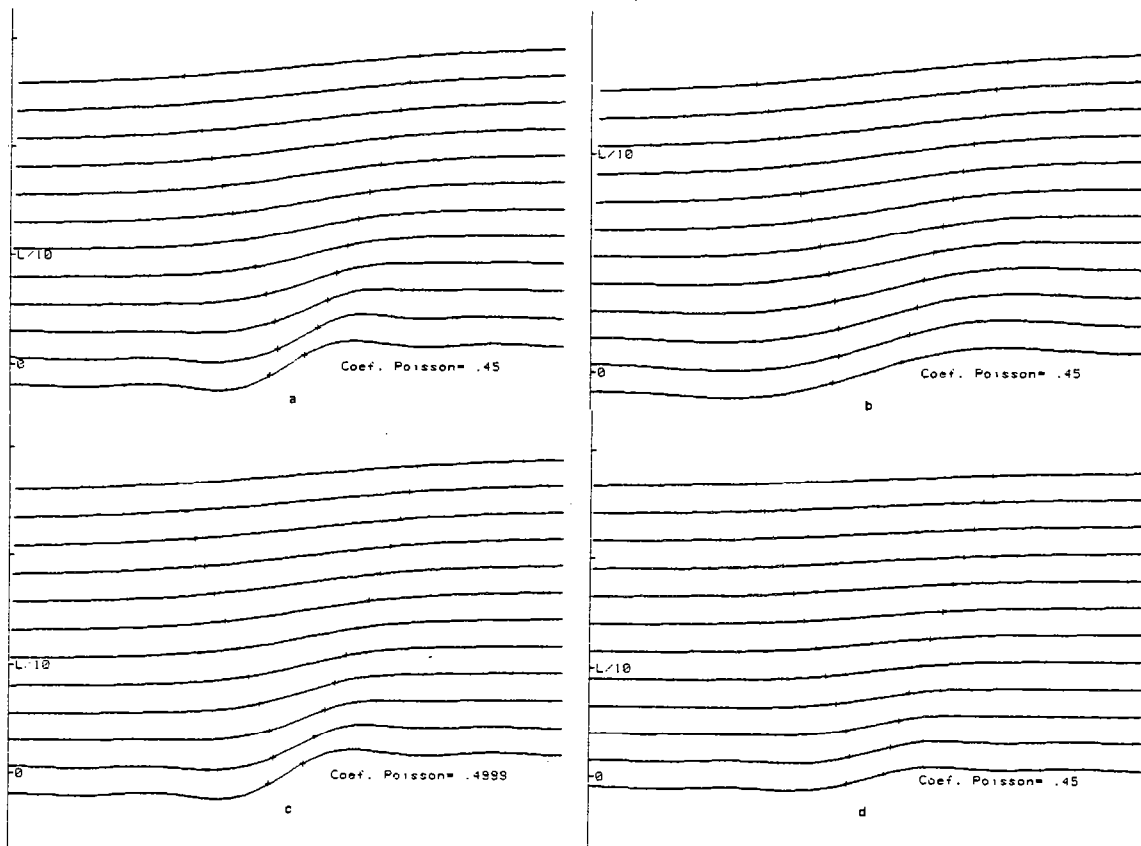


Fig. 4.7 - Champ de déformation déduit du champ de vitesses définies par les équations 4.44 et 4.45 après un temps d'une unité. En a :  $L = 40$ ,  $p = 1$  et  $V = 0,45$ . En b :  $L = 80$ ,  $P = 1$  et  $V = 0,45$ . En c :  $L = 40$ ,  $p = 1$  et  $V = 0,4999$ . Et en d :  $L = 40$ ,  $P = 0,5$  et  $V = 0,45$ . Le déplacement relatif entre les deux points d'une même courbe est de  $P/2$ .

Ce qui est remarquable sur la figure précédente, c'est que la largeur de la zone marquée par les points varie linéairement avec l'éloignement de la zone de cisaillement ; et aussi que l'angle formé par les deux côtés de la zone reste quasiment constant, quelque soit les valeurs des paramètres utilisés ( $L$ ,  $P$  et  $V$ ). Ceci permet de proposer, sur la figure 4.8.,



l'allure d'une terminaison de zone de cisaillement dans un milieu visqueux déformé en cisaillement simple à l'infini. La terminaison se développe perpendiculairement aux lignes initialement normales à la direction de cisaillement.

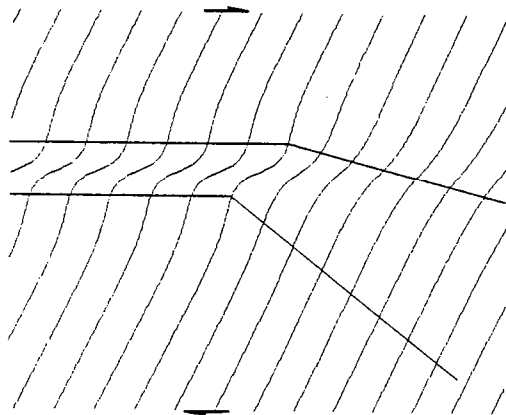


Fig. 4.8 - Terminaison de zone de cisaillement dans un milieu visqueux.

Bien que la rhéologie considérée soit très simple, les résultats sont en partie similaires à ceux proposés par Freund (1974), Ramsay et Allison (1979) et Ramsay (1980) décrits pour une déformation plane au chapitre 4.1 :

- La terminaison d'une zone de cisaillement dextre se courbe dans le sens d'une aiguille d'une montre, et la courbure est d'autant plus grande que le taux de cisaillement global est grand.

- Pour un temps donné, l'élargissement dans la terminaison est associé à une diminution de l'intensité de déformation.

#### 4.4. DESCRIPTION EMPIRIQUE D'UNE TERMINAISON DE ZONE DE CISAILLEMENT

L'objectif est de définir les relations entre les paramètres géométriques, rhéologiques et cinématiques. La géométrie se caractérise par le taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}$ ) au centre de la zone de cisaillement, le déplacement relatif ( $S$ ) des bordures de la zone, et sa largeur ( $l$ ) (Fig. 4.9). Le paramètre rhéologique considéré est la déformation caractéristique ( $\epsilon^*$ ) de la roche, définie au chapitre 1.3 par le modèle de Bowden. Elle est considérée constante, et calculée lorsque la rhéologie ( $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ ) est connue, grâce à l'équation :

$$\epsilon^* = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right) \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right) \epsilon \quad 4.46$$

Les paramètres cinématiques sont ( $\dot{\gamma}_0$ ) la vitesse de déformation globale de la roche et ( $v$ ) la vitesse de propagation de la zone de cisaillement.

Deux moyens sont utilisés pour cette description :

- Premièrement, l'observation des résultats numériques obtenus au chapitre 3.2 est utilisée. Dans ce cas, la déformation caractéristique ( $\epsilon^*$ ) est indépendante de l'intensité de déformation et de la vitesse de déformation ; elle est donc constante en tout point de la terminaison.

- Deuxièmement, les résultats de l'analyse d'une zone de cisaillement infiniment longue (chapitre 4.2) sont utilisés, en particulier la relation entre la déformation au centre de la zone de cisaillement et la déformation aux limites.

#### 4.4.1. DETERMINATION DE LA RELATION ENTRE LA LARGEUR ET LE DEPLACEMENT

Dans une terminaison (Fig. 4.9), les largeurs ( $l$ ) et les déplacements ( $S$ ) sont mesurés suivant les techniques présentées par Ramsay et Graham (1970, chapitre 1.2). Bien que ces techniques ne soient strictement valables que lorsque localement le cisaillement est simple, elles sont appliquées ici, car la déformation dans une terminaison est localement très voisine du cisaillement simple.

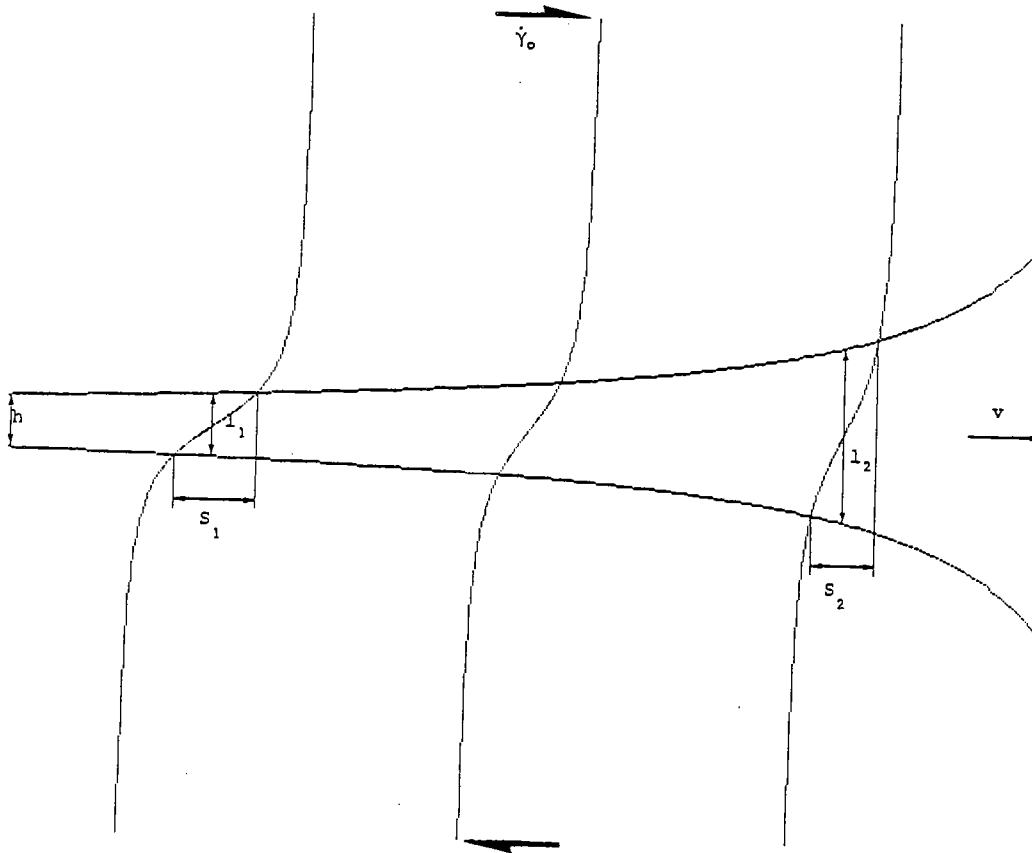


Fig. 4.9 - Terminaison de zone de cisaillement lors d'une déformation plane où le taux de cisaillement global est faible.  $l$  : largeur de la zone.  $S$  : déplacement.  $\dot{\gamma}_0$  : vitesse de cisaillement à l'infini.  $v$  : vitesse de propagation.  $h$  : largeur initiale de la zone de cisaillement.

Puisque généralement, pour un temps donné, le déplacement (S) diminue lorsque la largeur (l) augmente, nous pouvons écrire :

$$l = f' (1/S) \quad 4.47$$

où f' est une fonction croissante.

Il est évident que, pour les mêmes conditions rhéologiques et cinématiques, si l'hétérogénéité initiale caractérisée sur la figure 4.9 par h change de grandeur, tous les paramètres mesurés dans la même unité, comme le déplacement (S) et la largeur (l), changeront de grandeur proportionnellement à h. La relation 4.47 se transforme alors :

$$l/h = f'' (h/S) \quad 4.48$$

L'observation des courbes de densité de déformation des simulations I et III du chapitre 3.2 au moment où les zones de cisaillement se développent (Fig. 4.10) montre que, pour le même rapport  $\epsilon''/\epsilon f$  et pour des déformations finies ( $\epsilon f$ ) différentes, la largeur (l) est identique. Ceci peut s'écrire :

$$l = f'' (\epsilon''/\epsilon f) \quad 4.49$$

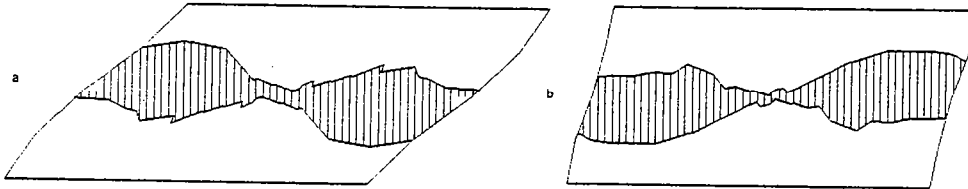


Fig. 4.10 - Densité de déformation, au moment du développement de la zone de cisaillement.  
a : simulation I,  $\epsilon f = 1$  et  $\epsilon'' = -0,167$   
b : simulation III,  $\epsilon f = 0,25$  et  $\epsilon'' = -0,042$ .

Or, il est convenable de penser que le déplacement (S) mesuré le long d'une largeur est proportionnel à la déformation finie  $\epsilon f$ . Pour tenir compte de ces deux dernières remarques, l'équation 4.48 s'écrit :

$$l = h f (h\epsilon''/S) \quad 4.50$$

Bien sûr, cette relation ne peut être utile pratiquement que lorsque cette fonction croissante f est définie, mais pour l'instant aucune information ne nous permet de mieux la préciser.

#### 4.4.2. DETERMINATION DE LA VITESSE DE PROPAGATION

En ce qui concerne la vitesse de propagation de la zone de cisaillement (v), il est à remarquer sur les simulations I et III (Fig. 4.10) que si, dans ces deux cas, la vitesse de déformation est identique, la vitesse de propagation lors de la simulation III est quatre

fois plus grande que lors de la simulation I, car il suffit d'une déformation quatre fois moins grande pour que la zone de cisaillement se développe. La vitesse de propagation est alors en partie définie par la rhéologie de la roche, par l'intermédiaire de la déformation caractéristique  $\epsilon^*$ , suivant l'équation :

$$v = K' / \epsilon^{**} \quad 4.51$$

où  $K'$  est une constante.

Il semble évident que la vitesse de propagation ( $v$ ) soit proportionnelle à la vitesse de déformation ( $\dot{\gamma}_0$ ), car les densités de déformation représentées sur la figure 4.10 sont indépendantes de la vitesse de déformation. Ceci s'écrit :

$$v = K'' \dot{\gamma}_0 / \epsilon^{**} \quad 4.52$$

Il est convenable de dire que la vitesse de propagation ( $v$ ) est proportionnelle à la taille de l'hétérogénéité initiale ( $h$ ) qui initie la zone de cisaillement. En effet, pour les mêmes conditions rhéologiques ( $\epsilon^{**}$ ) et cinématiques ( $\dot{\gamma}_0$ ) et pour des hétérogénéités initiales de grandeurs différentes, les perturbations engendrées seront, aussi, différentes et même proportionnelles à ces hétérogénéités (Fig. 4.11). Ceci s'écrit :

$$v = K \dot{\gamma}_0 h / \epsilon^{**} \quad 4.53$$

$v$  : vitesse de propagation de la zone de cisaillement en  $m s^{-1}$ .

$K$  : constante sans dimension.

$\dot{\gamma}_0$  : vitesse de cisaillement de la roche loin de la zone de cisaillement, mesurée en  $s^{-1}$ .

$h$  : hétérogénéité initiale, c'est-à-dire la largeur de la zone de cisaillement dans la partie où elle est constante (loin de la terminaison), en m.

$\epsilon^{**}$  : déformation caractéristique de la roche ; elle est sans dimension.

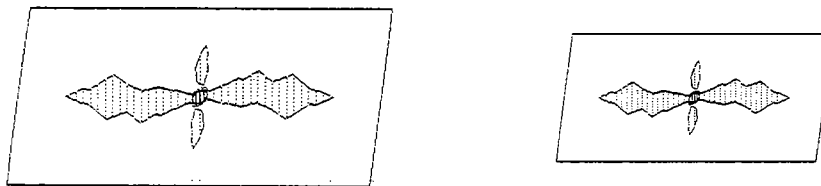


Fig. 4.11 - Perturbations créées par deux hétérogénéités lors de deux déformations identiques. Les perturbations sont proportionnelles aux hétérogénéités. Les hétérogénéités sont en hachuré et les perturbations en pointillé.

Cette vitesse de propagation peut être définie avec un autre raisonnement. Bien qu'il soit difficile de faire le lien entre cette vitesse et le modèle de Bowden, car ce dernier considère la zone de cisaillement infiniment longue, une fois celle-ci initiée, son amplification doit suivre les estimations du modèle de Bowden, en particulier les résultats du chapitre 4.2 (équ. 4.16) :

$$\gamma = -a \exp(-\dot{\gamma}_0 t/\varepsilon^{\alpha}) \quad 4.54$$

$\gamma$  : taux de cisaillement au centre de la zone.

$\dot{\gamma}_0$  : la vitesse de déformation loin de la zone.

$t$  : le temps écoulé depuis l'initiation.

$a$  : l'hétérogénéité initiale.

$\varepsilon^{\alpha}$  : la déformation caractéristique.

Considérons deux points situés dans l'axe de la zone de cisaillement à des coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  mesurées dans la direction de propagation (Fig. 4.12). La zone de cisaillement affecte d'abord la coordonnée  $X_1$ , depuis le temps  $t_1$ , puis  $X_2$ , depuis le temps  $t_2$ . Si la vitesse de propagation est  $v$ , la relation entre ces paramètres est :

$$(X_2 - X_1) = v (t_1 - t_2) \quad 4.55$$

Puisqu'à la coordonnée  $X_1$ , l'amplification se fait depuis  $t_1$ , le taux de cisaillement s'y écrit :

$$\gamma_1 = -a \exp(-\dot{\gamma}_0 t_1/\varepsilon^{\alpha}) \quad 4.56$$

Et à la coordonnée  $X_2$ , il s'écrit :

$$\gamma_2 = -a \exp(-\dot{\gamma}_0 t_2/\varepsilon^{\alpha}) \quad 4.57$$

Pour supprimer  $a$ , calculons  $\gamma_1/\gamma_2$  :

$$\gamma_1/\gamma_2 = \exp[-\dot{\gamma}_0 (t_1 - t_2)/\varepsilon^{\alpha}] \quad 4.58$$

or

$$t_1 - t_2 = (X_2 - X_1)/v \quad 4.59$$

donc

$$\text{Log} (\gamma_1/\gamma_2) = -\dot{\gamma}_0 (X_2 - X_1)/(\varepsilon^{\alpha}v) \quad 4.60$$

soit

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0 (X_1 - X_2)}{\varepsilon^{\alpha} \text{Log} (\gamma_1/\gamma_2)} \quad 4.61$$

Cette dernière équation est compatible avec l'équation 4.53. Dans les deux cas, la vitesse de propagation est proportionnelle à la vitesse de déformation et à l'inverse de la déformation caractéristique.

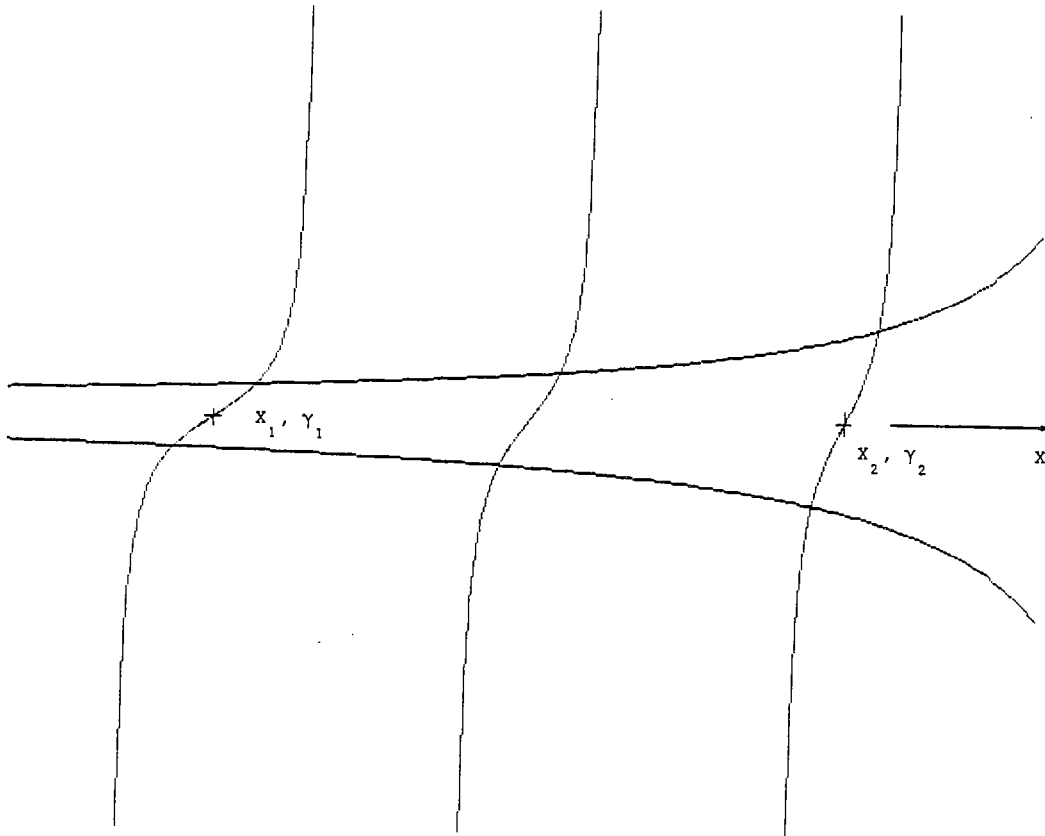


Fig. 4.12 - Terminaison de zone de cisaillement.  $\gamma_1$  ( $\gamma_2$ ) est le taux de cisaillement à la coordonnée  $X_1$  ( $X_2$ ).

En résumé, les équations permettant de mieux préciser la relation entre la géométrie, la rhéologie et la cinématique dans une terminaison de zone de cisaillement sont :

$$l = h f(h \epsilon^*/S) \quad 4.62$$

$$v = K \dot{\gamma}_0 h / \epsilon^* \quad 4.63$$

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0 (X_1 - X_2)}{\epsilon^* \text{Log} (\gamma_1 / \gamma_2)} \quad 4.64$$

#### 4.5. APPLICATION A UNE TERMINAISON REELLE

Les résultats obtenus lors du chapitre précédent sont appliqués à une terminaison de zone de cisaillement réelle. Les deux équations utilisées (4.62 et 4.64) concernent la largeur (1) et la vitesse de propagation (v) de la zone de cisaillement.

Les conditions d'application de ces résultats sont très restrictives : la déformation doit être plane et la déformation caractéristique constante. Les terminaisons de zone de cisaillement sont rarement décrites ; il est donc difficile de choisir un exemple où ces conditions sont respectées. La terminaison retenue ici a été décrite par Simpson (1983). Il s'agit d'une des zones de cisaillement typiques de la déformation hétérogène alpine affectant le matériel granitique de la nappe Maggia dans les Alpes du Lepontin (Fig. 4.13).

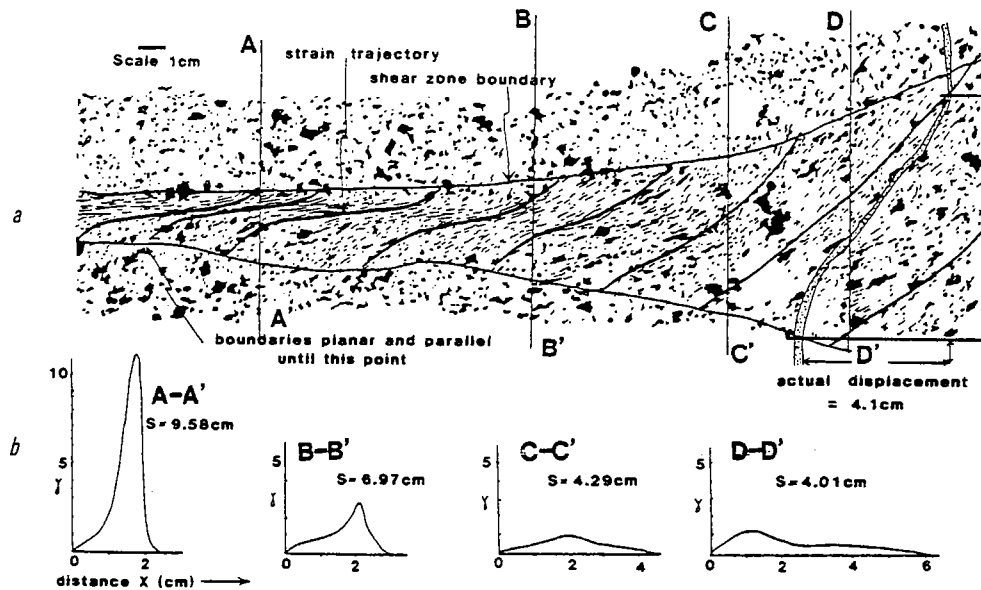


Fig. 4.13 - Terminaison décimétrique d'une petite zone de cisaillement dans un gneiss granitique du Maggia. (a) Dessin d'une section  $\lambda_1, \lambda_2$ , montrant le changement d'orientation de la trace de la schistosité (lignes épaisses) et de la largeur de la zone déformée par le cisaillement. La schistosité est définie par l'élongation des agrégats de biotite (noir) et par les agrégats de grains de quartz/feldspath (non représentés). Un filonet d'aplite déformé par la zone de cisaillement est marqué de pointillés sur la partie droite de la terminaison. (b) Profils des taux de cisaillement ( $\gamma$ ) et des déplacements (S) pour les sections AA', BB', CC' et DD' (d'après Simpson, 1983).

L'auteur précise que l'ellipse de déformation, déduite des grains de quartz, biotite et feldspath, change graduellement d'une ellipse équidimensionnelle, ou très peu elliptique, dans la roche non déformée, jusqu'à une ellipse fortement allongée au centre de la zone de cisaillement. Tous les minéraux sont déformés d'une manière ductile par un processus de recristallisation dynamique. Il n'y a pas d'évidence de changement de volume dans ces zones de cisaillement, et la déformation est essentiellement isochimique. La foliation en bordure est à  $43^\circ$  de la direction de cisaillement, et à quelques centimètres au delà de la terminaison. La fabrique, lorsqu'elle est encore détectable, est quasiment parallèle à la foliation des

Le taux de cisaillement ( $\gamma$ ) est calculé grâce à l'angle ( $\theta$ ) entre la foliation et la direction de cisaillement avec la relation (équ. 1.8, chapitre 1.2) :

$$\gamma = 2/\tan 2\theta$$

Le déplacement total est mesuré avec (équ. 1.10, chapitre 1.2) :

$$S = \int_0^x \gamma(x) dx \quad 4.66$$

Le déplacement mesuré sur le filonet d'aplite situé à la fin de la terminaison (4,1 cm) est très proche de celui mesuré avec l'équation 4.65 (4,01 cm).

Toutes ces remarques permettent de vérifier la validité des conditions nécessaires à l'application des résultats du chapitre précédent (déformation plane et déformation caractéristique constante). Bien qu'il soit difficile de le démontrer, rien ne semble incompatible avec une déformation globalement plane.

Sachant qu'il y a recristallisation dynamique lors de la déformation et que c'est un facteur d'amollissement de la roche (chapitre 1.4), la déformation caractéristique a un sens. Puisque c'est le seul mécanisme de déformation décrit par l'auteur, il est convenable de considérer cette déformation caractéristique constante pour tous les points de la terminaison.

#### 4.5.1. DETERMINATION DE LA RELATION ENTRE LA LARGEUR ET LE DEPLACEMENT

L'équation utilisée est :

$$l = h f(h \epsilon^*/S) \quad 4.67$$

$l$  : largeur de la zone de cisaillement dans la terminaison.

$S$  : déplacement mesuré le long de cette largeur.

$h$  : largeur de la zone de cisaillement dans la partie où elle est stable.

$\epsilon^*$  : déformation caractéristique.

Cette équation est appliquée aux quatre sections. Les valeurs de la largeur ( $l$ ) et du déplacement ( $S$ ) sont prises sur les profils des taux de cisaillement de la figure 4.13 et sont reportées dans le tableau 5.

SECTION	AA'	BB'	CC'	DD'
$l$ (cm)	2,5	3	4,5	5,8
$S$ (cm)	9,58	6,97	4,29	4,01

Tableau 5 - valeurs de la largeur ( $l$ ) et du déplacement ( $S$ ) correspondant, pour chaque section de la terminaison représentée figure 4.13.

Pour définir la fonction  $f$ , traçons la largeur ( $l$ ) en fonction de l'inverse du déplacement ( $1/S$ ) pour les quatre sections (Fig. 4.14).



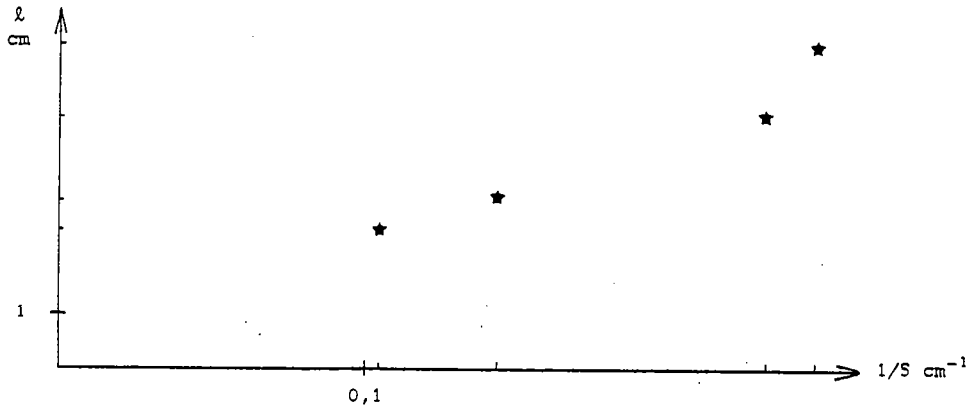


Fig. 4.14 - Evolution de la largeur  $l$  en fonction de l'inverse du déplacement  $1/S$  pour les quatre sections de la terminaison de la figure 4.13.

Ce graphe tend à montrer que l'évolution de la largeur ( $l$ ) est quasiment proportionnelle à l'inverse du déplacement ( $S$ ) dans cette terminaison :

$$l \approx 21,86/S$$

4.68

Mais le faible nombre de points ne permet pas de considérer que cette relation soit très fiable. Malheureusement, la qualité du dessin de la terminaison (Fig. 4.13) rend difficile le calcul de la largeur et du déplacement en d'autres sections.

#### 4.5.2. DETERMINATION DE LA VITESSE DE PROPAGATION

Cette vitesse s'écrit :

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0 (X_1 - X_2)}{\varepsilon^2 \text{Log} (\gamma_1/\gamma_1)}$$

4.69

$v$  : vitesse de propagation de la zone de cisaillement.

$\dot{\gamma}_0$  : vitesse de cisaillement de la roche loin de la zone de cisaillement.

$\gamma_1 (\gamma_2)$  : taux de cisaillement mesuré au centre de la zone à la coordonnée  $X_1 (X_2)$ .

Cette formule n'est valable que lorsque la déformation dans les murs est faible (chaptre 4.2), ce qui est vrai ici. Puisque la vitesse de cisaillement et la déformation caractéristique ne sont pas connues, seule l'expression  $v \varepsilon^2 / \dot{\gamma}_0$  est calculée en fonction des taux de cisaillement ( $\gamma$ ) au centre de la terminaison aux coordonnées  $X$ . Pour les quatre sections, les valeurs de  $\gamma$  et  $X$  sont reportées dans le tableau 6. Les valeurs des coordonnées  $X$  des sections sont facilement mesurables ; par contre, les taux de cisaillement peuvent être entachés d'erreur surtout lorsqu'ils sont trop grands, car la technique de mesure avec l'angle entre la schistosité et la direction de cisaillement n'est plus très bien adaptée.

SECTION	AA'	BB'	CC'	DD'
X (cm)	0	10,2	17,6	22
Y	11,2	3	1,1	0,7

Tableau 6 - Valeurs du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  au centre de la terminaison à la coordonnée X, pour chaque section.

L'expression  $v \varepsilon^{**}/\dot{\gamma}_0$  se calcule avec deux sections. Les valeurs de cette expression en fonction des couples de sections sont reportées dans le tableau 7.

COUPLE de SECTION	AA'/ BB'	AA'/ CC'	AA'/ DD'	BB'/ CC'	BB'/ DD'	CC'/ DD'
$v \varepsilon^{**}/\dot{\gamma}_0$ (cm)	- 7,74	- 7,58	- 7,93	- 7,38	- 8,11	- 9,73

Tableau 7 - Valeurs de l'expression  $v \varepsilon^{**}/\dot{\gamma}_0$  en cm, en fonction des couples de section.

La valeur de  $v \varepsilon^{**}/\dot{\gamma}_0$  ne présente pas de trop grande variation, ce qui tend à faire penser que la vitesse de propagation est constante, si la déformation caractéristique et la vitesse de cisaillement sont elles aussi constantes. Par exemple, si nous supposons que la déformation caractéristique égale - 0,01 et la vitesse de cisaillement globale égale  $10^{-13} \text{ s}^{-1}$ , la vitesse de propagation est d'environ  $0,03 \text{ mm a}^{-1}$ .

En résumé, dans cette terminaison, alors qu'il est encore difficile de connaître l'évolution de la largeur de la zone avec le déplacement correspondant, la vitesse de propagation semble mesurable si la déformation caractéristique et la vitesse de cisaillement loin de la zone de cisaillement sont connues.





## CONCLUSION GENERALE

L'étude entreprise dans ce mémoire montre que trois conditions sont nécessaires à la naissance des zones de cisaillement : la roche doit être suffisamment déformée, posséder une perturbation et être instable.

La simulation numérique de la déformation cisailante, fondée sur la méthode des éléments finis a été choisie pour quantifier ces paramètres car elle permet l'accès à toutes informations cinématiques, rhéologiques et géométriques.

C'est principalement l'instabilité qui est discutée dans ce mémoire. Une condition nécessaire à celle-ci est que la roche puisse s'amollir. Deux rhéologies peuvent alors être décrites : continue et discontinue.

- La rhéologie est discontinue si une particule s'amollit brutalement lorsque sa déformation dépasse un certain seuil. Les simulations numériques permettent de préciser les relations entre l'amollissement et le seuil de déformation pour que la roche développe une zone de cisaillement à partir d'une hétérogénéité donnée. Ces simulations montrent aussi que ces structures se développent obliquement à la direction de cisaillement.

- La rhéologie est continue, cas d'instabilité le plus probable géologiquement, lorsque l'amollissement se fait progressivement. Si celui-ci est lié à une augmentation de déformation, il doit être accompagné d'un durcissement avec la vitesse de déformation. L'étude théorique de la croissance des zones de cisaillement, infiniment longues, entreprise par Bowden (1970) montre que cette instabilité est quantifiable par un paramètre dépendant uniquement de la rhéologie : la déformation caractéristique ( $\epsilon''$ ). Les simulations numériques montrent effectivement que la valeur de ce paramètre influence directement la propagation des zones de cisaillement et elles précisent également la relation existante entre la déformation caractéristique, l'hétérogénéité initiale et le taux de cisaillement fini pour que la zone de cisaillement se développe.

Deux phénomènes géologiques bien connus peuvent très bien présenter cette rhéologie : amollissement avec la déformation et durcissement avec la vitesse de déformation.

Premièrement, cette instabilité rhéologique peut exister pour une roche visqueuse et anisotrope. En effet, pour certaines variations d'orientation d'anisotropie, la roche s'amollit. Or, cette orientation dépend en partie de la déformation. Il existe alors des plages d'orientation d'anisotropie où il y a amollissement avec la déformation et, puisque la roche est visqueuse, il y a durcissement avec la vitesse de déformation. Le calcul de la déformation caractéristique ( $\epsilon''$ ) est alors possible. Il montre que la roche est instable lorsque le degré

d'anisotropie est de l'ordre de 100 et lorsque l'orientation est positive et voisine de  $90^\circ$  à  $110^\circ$  par rapport à la direction de cisaillement, si celui-ci est dextre. Les simulations numériques montrent effectivement que des zones de cisaillement se développent uniquement dans ces conditions.

Deuxièmement, cette instabilité rhéologique existe aussi si, d'une part, la déformation de la roche crée un échauffement qui induit un amollissement et si, d'autre part, la roche durcit avec une augmentation de la vitesse de déformation. Pour se placer dans les conditions d'instabilité maximum, le milieu est considéré adiabatique. Ceci impose des conditions de vitesses de déformation et de dimension du modèle numérique. Il existe une corrélation entre le calcul de la déformation caractéristique et le résultat des simulations numériques. Il devient alors possible, connaissant quelques caractéristiques d'une roche, de savoir si elle satisfait au développement de zones de cisaillement.

Une autre possibilité de rhéologie continue instable, mais beaucoup moins probable géologiquement, est que cette fois l'amollissement se fasse avec la vitesse de déformation et le durcissement avec la déformation. L'étude théorique de zone de cisaillement infiniment longue montre que la déformation caractéristique ( $c''$ ) quantifie aussi cette instabilité rhéologique. Et les simulations numériques montrent qu'une telle rhéologie est une des conditions suffisantes au développement des zones de cisaillement.

Enfin, une analyse de terminaison de zone de cisaillement, basée sur l'étude théorique et les résultats des simulations numériques, permet de préciser des relations entre la géométrie de la zone de cisaillement et la rhéologie de la roche. Ces relations sont appliquées à une terminaison de zone de cisaillement réelle décimétrique. Une valeur approchée de la vitesse de propagation peut être alors calculée.





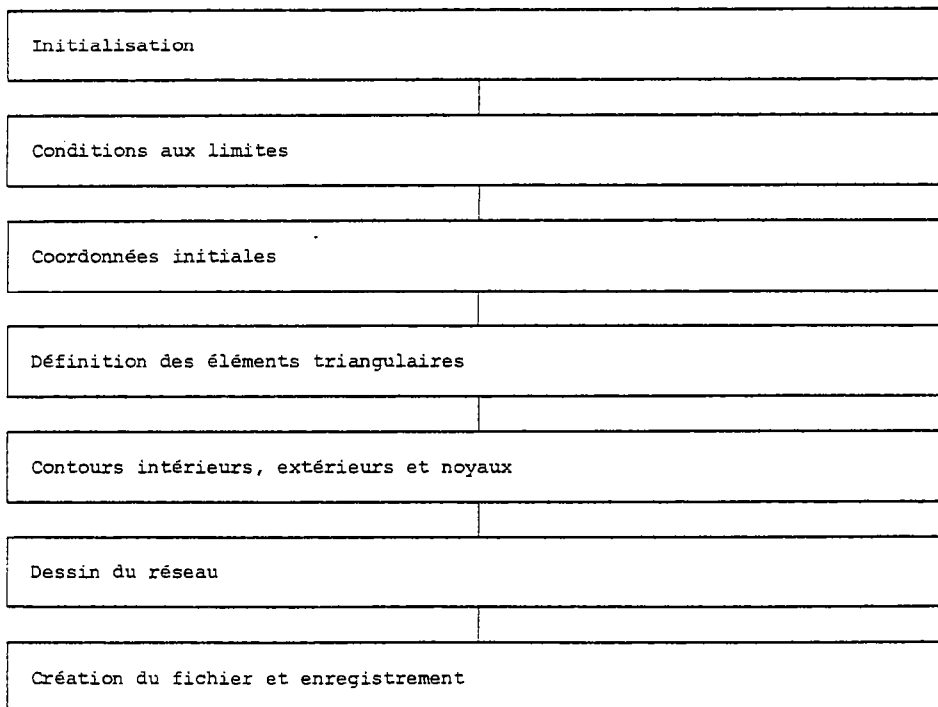


## ANNEXE

## 1. CONSTRUCTION DU MODELE NUMERIQUE

Ce programme informatique définit le réseau et les conditions aux limites du modèle utilisé lors des simulations numériques.

## 1.1. Structure du programme informatique



## 1.2. Nomenclature

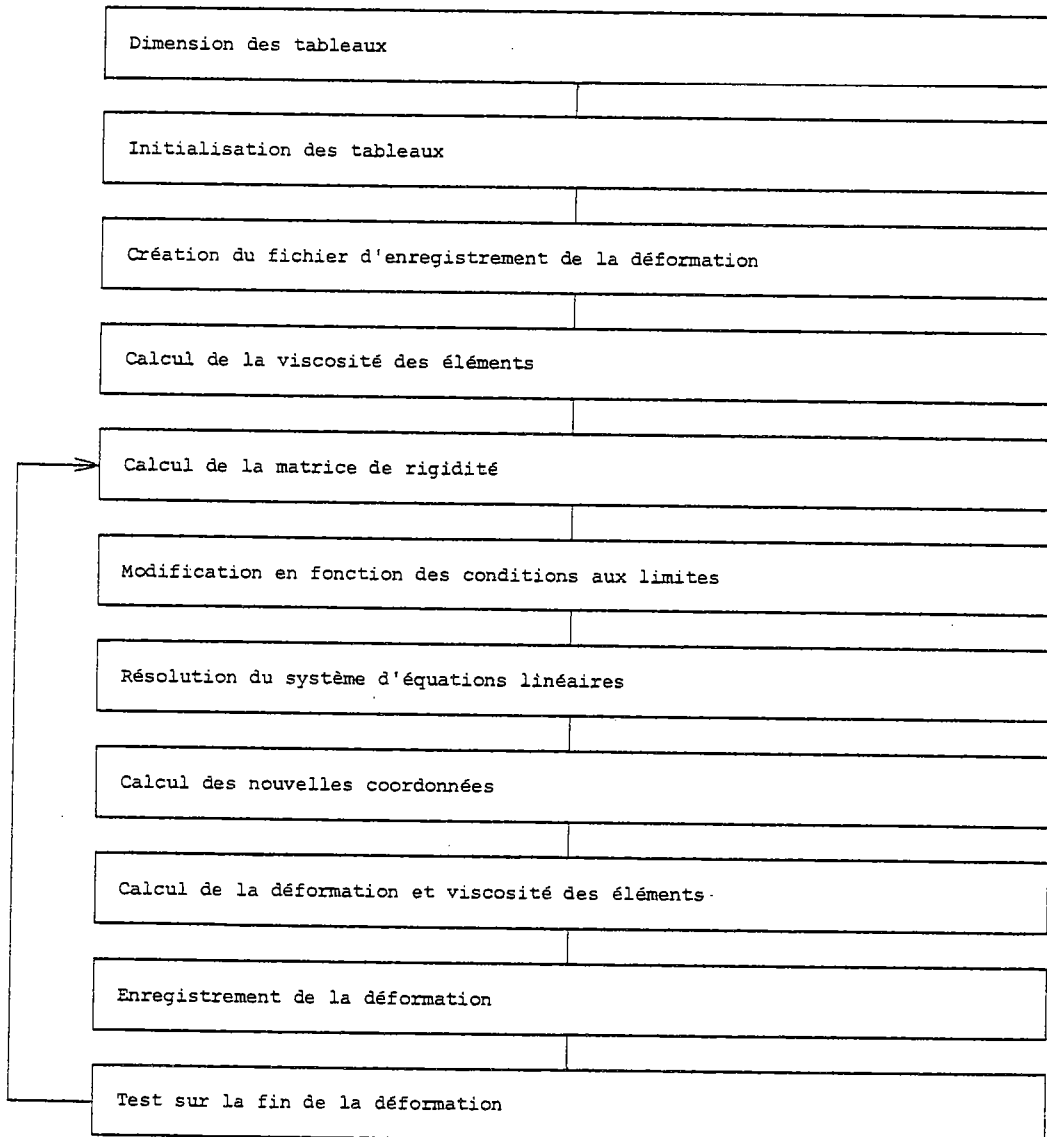
- Sym : Symétrie du modèle. Si Sym égale 0, il n'y a pas de symétrie. Si il égale 1, le modèle est antisymétrique et si il égale 2, le modèle possède une symétrie plane.
- Xb : Nombre de triangles du modèle.
- X : Nombre de triangles suffisant au dessin du modèle, en tenant compte des symétries.
- Yb : Nombre total de coordonnées.
- Y : Nombre suffisant de coordonnées en tenant compte des symétries.
- Ca : Dimension des tableaux K et Kc.
- Tss : Nombre de coordonnées ayant un symétrique.
- Cex : Nombre de noeuds du contour extérieur.
- Ciu : Nombre de noeuds du contour intérieur.
- Na : Nombre de triangles dans le noyau, utile à l'hétérogénéité.
- Nb : Nombre de triangles périphériques au noyau, utile à l'hétérogénéité.
- Bh : Coordonnée maximale horizontale du réseau, servant au cadrage des dessins.
- Bv : Même chose, mais verticalement.
- L : Conditions aux limites. Si L (I) égale a et a égale 99, la vitesse de la coordonnée I est inconnue. Si a est différent de 99, sa vitesse est égale à a.
- Ts : Tableau indiquant les coordonnées symétriques. Ts (R, 1) est le symétrique de Ts (R, 2).
- Ci : Valeur des coordonnées initiales.
- Tab : Tableau définissant les coordonnées d'un triangle.
- Cext : Coordonnées du contour extérieur, sauf Cext (1) qui égale Cex.
- Ciut : Même chose mais intérieure.
- Na : Triangles dans le noyau.
- Nb : Triangles périphériques au noyau.



## 2. SIMULATION NUMERIQUE DE LA DEFORMATION

Ce programme informatique calcule, par la méthode des éléments finis, les différents stades de déformation du modèle considéré.

### 2.1 Structure du programme informatique



## 2.2. Nomenclature

- Imp : Impression des dessins sur papier si Imp est différent de 0 (ligne 1830).
- Anis : L'anisotropie des éléments est nulle si Anis égale 0 ; sinon le degré d'anisotropie égale le rapport du grand axe sur le petit axe de déformation et son orientation égale l'orientation du grand axe (ligne 2520. Ce terme n'a pas été utilisé).
- Aniso : L'anisotropie initiale des éléments est nulle si Aniso est nulle ; sinon le degré d'anisotropie égale  $(Aniso)^2$  (ligne 540 et chapitre 3.4).
- Adhera : Influence de la déformation sur la viscosité. Si Adhera est nul, pas d'influence. S'il est positif, il égale  $\epsilon c$  (ligne 2760 et chapitre 3.6). S'il est négatif, l'influence est continue (ligne 2800 et chapitre 3.2).
- Adherb : Taux de chute de la viscosité (lignes 2760, 2800 ; chapitres 3.6 et 3.2).
- Adha et Adhb : Même rôle que Adhera et Adherb, mais en fonction de la vitesse de déformation et non plus de la déformation (ligne 2850 et chapitre 3.3).
- Poi : Equivalent visqueux du coefficient de Poisson.
- Tine : Temps entre deux itérations (ligne 1190).
- Nite : Nombre d'itérations (ligne 970).
- Ntemps : S'il est nul, le milieu reste isotherme (chapitres 3.2, 3.3, 3.4 et 3.6). S'il est négatif, le milieu est adiabatique (ligne 4960 et chapitre 3.5). S'il est positif, la diffusion de la chaleur entre les éléments intervient (ligne 4990).
- Tapo : Température initiale (ligne 550).
- Ajust : Si Ajust est nul, les vitesses imposées restent constantes lors de la déformation. Sinon, ces vitesses sont modifiées pour que le couple cisailant reste constant lors de la déformation (ligne 980 - non utilisé).
- Homogen : S'il est non nul, les caractéristiques de l'hétérogénéité redeviennent progressivement identiques à celles de la matrice (non utilisé).
- Sup : Ecart entre deux lissages lorsque la méthode de résolution des équations linéaires utilisée est celle de Gauss-Seidel (ligne 3890, chapitre 2.4).
- Ech : Echelle du dessin du grand axe (ligne 1970).

Pre : Variation de pression, due par exemple à la montée d'un dôme (ligne 3430).

Ef : Couple cisailant (lignes 1010 et 8600).

Efo : Couple cisailant lors de la première itération.

Zg : Numéro de l'itération (lignes 970 et 1490).

Zga : Numéro de l'itération avant l'arrêt du programme (lignes 740 et 970).

CUN 60 : Soixantième fichier où sont stockées les coordonnées pendant les itérations de la soixantième simulation.

Tac (R, 1) : Longueur du grand axe de déformation de l'élément R (ligne 2680).

Tac (R, 2) : Longueur du petit axe (ligne 2690).

Tac (R, 3) : Orientation du grand axe (ligne 2610).

Tac (R, 4) : Viscosité (ligne 2730).

Tac (R, 5) : Energie dissipée par la déformation entre les deux dernières itérations (ligne 2660).

Tac (R, 6) : Surface de l'élément (ligne 2670).

Tac (R, 7) : Déformation finie (ligne 2910).

Tac (R, 8) : Caractéristique du matériau (ligne 2730).

Tac (R, 9) : Energie d'activation (ligne 4960).

Tac (R, 10) : Masse volumique (ligne 4960).

Tac (R, 11) : Capacité calorifique (ligne 4960).

Tac (R, 12) : Coefficient de diffusion de chaleur (ligne 5170).

Tac (R, 13) : Orientation de l'anisotropie (ligne 2400).

Tac (R, 14) : Degré d'anisotropie (ligne 2400).

Tap (R) : Température de l'élément R (lignes 2730 et 4960).

Cf : Matrice des valeurs des coordonnées après déformation (ligne 1210).

W : Matrice des efforts extérieurs (lignes 5700 et 8840).

V : Matrice des vitesses de déplacement (ligne 6840).

K et Kc : Matrices de rigidité globales (ligne 5490 et chapitre 2.4).

U : Matrice des déplacements (ligne 1190).

L : Matrice des vitesses de déplacement imposées (ligne 390).

## 2.3. Sous-Programmes

Numérotation : Dessin des éléments et de leur numéro (ligne 1570, non utilisé).

Triangle : Dessin des éléments d'un réseau sans symétrie (ligne 6930, non utilisé).

Triangla : Dessin des éléments d'un réseau antisymétrique (ligne 1690).

Axe : Dessin du grand axe de déformation des éléments d'un réseau sans symétrie (ligne 7090, non utilisé).

Axa : Dessin du grand axe de déformation des éléments d'un réseau antisymétrique (ligne 1900, non utilisé).

Contour : Dessin des contours extérieur et intérieur d'un réseau sans symétrie (ligne 7200, non utilisé).

Contoua : Même chose, dans le cas d'un réseau antisymétrique (ligne 2040).

Anisotropie : Calcul du grand, du petit et de l'orientation de l'axe de déformation, de l'énergie et de la surface (ligne 2300).

Viscosité : Calcul de la viscosité et de la déformation d'un élément (ligne 2730).

Cistri : Calcul de la matrice de rigidité  $K_b$  d'un élément (ligne 2930).

Stockage : Stockage de la matrice de rigidité globale dans le cas d'un réseau sans symétrie (ligne 7380, non utilisé).

Stockaga : Même chose, mais dans le cas où le réseau est antisymétrique (ligne 5280).

Stockagb : Même chose, mais le réseau possède des symétries planes (ligne 7710).

Modification : Modification de la matrice rigidité globale en fonction des conditions aux limites (ligne 8650).

Rangement : Rangement par ordre croissant des termes des matrices  $K$  et  $K_c$  (ligne 6460).

Résolutio : Triangulation de la matrice de rigidité globale par la méthode de résolution des équations linéaires (ligne 6080).

Résolution : Même chose que Résolutio, mais avec une programmation différente (ligne 5740, non utilisé).

Lissage : Résolution des équations linéaires par la méthode de Gauss-Seidel (ligne 3890, non utilisé).

Remont : Calcul des solutions des équations linéaires (ligne 6770).

Remonte : Idem à Remont (ligne 6650, non utilisé).

Effortext : Stockage dans Efa et Efb d'une partie de la matrice de rigidité globale, dans le but de calculer le couple cisailant (ligne 8340, non utilisé).

Effortex : Calcul du couple cisailant (ligne 8560, non utilisé).

Température : Calcul de la température après échauffement (ligne 4940).

Voisin : Pour un élément, calcul de ses trois voisins (ligne 3480, non utilisé).

Voisina : Idem à Voisin, mais dans le cas d'un réseau antisymétrique (ligne 8870, non utilisé).

Diagonale : Modification de la matrice de rigidité globale dans le cas où un élément sur la diagonale est nul (ligne 4200, non utilisé).



2.4. Programme informatique

```

10 PRINT "PROGRAMME PRINCIPAL QM"
20 OPTION BASE 1
30 DIM A(3,3)
40 DIM B(3,3)
50 DIM C(3,3)
60 DIM D(3,3)
70 DIM E(3,3)
80 DIM F(3,3)
90 DIM G(3,3)
100 DIM H(3,3)
110 DIM I(3,3)
120 DIM J(3,3)
130 DIM K(3,3)
140 DIM L(3,3)
150 DIM M(3,3)
160 DIM N(3,3)
170 DIM O(3,3)
180 DIM P(3,3)
190 DIM Q(3,3)
200 DIM R(3,3)
210 DIM S(3,3)
220 DIM T(3,3)
230 DIM U(3,3)
240 DIM V(3,3)
250 DIM W(3,3)
260 DIM X(3,3)
270 DIM Y(3,3)
280 DIM Z(3,3)
290 DIM AA(3,3)
300 DIM AB(3,3)
310 DIM AC(3,3)
320 DIM AD(3,3)
330 DIM AE(3,3)
340 DIM AF(3,3)
350 DIM AG(3,3)
360 DIM AH(3,3)
370 DIM AI(3,3)
380 DIM AJ(3,3)
390 DIM AK(3,3)
400 DIM AL(3,3)
410 DIM AM(3,3)
420 DIM AN(3,3)
430 DIM AO(3,3)
440 DIM AP(3,3)
450 DIM AQ(3,3)
460 DIM AR(3,3)
470 DIM AS(3,3)
480 DIM AT(3,3)
490 DIM AU(3,3)
500 DIM AV(3,3)
510 DIM AW(3,3)
520 DIM AX(3,3)
530 DIM AY(3,3)
540 DIM AZ(3,3)
550 DIM BA(3,3)
560 DIM BB(3,3)
570 DIM BC(3,3)
580 DIM BD(3,3)
590 DIM BE(3,3)
600 DIM BF(3,3)
610 DIM BG(3,3)
620 DIM BH(3,3)
630 DIM BI(3,3)
640 DIM BJ(3,3)
650 DIM BK(3,3)
660 DIM BL(3,3)

FOR R=1 TO 3
  FOR C=1 TO 3
    A(R,C)=R*C
    B(R,C)=R+C
    C(R,C)=R-C
    D(R,C)=R/C
    E(R,C)=R^C
    F(R,C)=C^R
    G(R,C)=R*C^2
    H(R,C)=C^R^2
    I(R,C)=R*C^3
    J(R,C)=C^R^3
    K(R,C)=R*C^4
    L(R,C)=C^R^4
    M(R,C)=R*C^5
    N(R,C)=C^R^5
    O(R,C)=R*C^6
    P(R,C)=C^R^6
    Q(R,C)=R*C^7
    R(R,C)=C^R^7
    S(R,C)=R*C^8
    T(R,C)=C^R^8
    U(R,C)=R*C^9
    V(R,C)=C^R^9
    W(R,C)=R*C^10
    X(R,C)=C^R^10
    Y(R,C)=R*C^11
    Z(R,C)=C^R^11
    AA(R,C)=R*C^12
    AB(R,C)=C^R^12
    AC(R,C)=R*C^13
    AD(R,C)=C^R^13
    AE(R,C)=R*C^14
    AF(R,C)=C^R^14
    AG(R,C)=R*C^15
    AH(R,C)=C^R^15
    AI(R,C)=R*C^16
    AJ(R,C)=C^R^16
    AK(R,C)=R*C^17
    AL(R,C)=C^R^17
    AM(R,C)=R*C^18
    AN(R,C)=C^R^18
    AO(R,C)=R*C^19
    AP(R,C)=C^R^19
    AQ(R,C)=R*C^20
    AR(R,C)=C^R^20
    AS(R,C)=R*C^21
    AT(R,C)=C^R^21
    AU(R,C)=R*C^22
    AV(R,C)=C^R^22
    AW(R,C)=R*C^23
    AX(R,C)=C^R^23
    AY(R,C)=R*C^24
    AZ(R,C)=C^R^24
    BA(R,C)=R*C^25
    BB(R,C)=C^R^25
    BC(R,C)=R*C^26
    BD(R,C)=C^R^26
    BE(R,C)=R*C^27
    BF(R,C)=C^R^27
    BG(R,C)=R*C^28
    BH(R,C)=C^R^28
    BI(R,C)=R*C^29
    BJ(R,C)=C^R^29
    BK(R,C)=R*C^30
    BL(R,C)=C^R^30
  
```

```

1336 NEXT J
1340 IF Itemp=0 THEN 1360
1350 GOSUB Temperature
1360 FOR I=1 TO X0
1370 GOSUB Viscosity
1380
1390 NEXT I
1400 IF Sym<>1 THEN 1430
1410 I GOSUB TrIangle
1420 GOTO 1450
1430 GOSUB TrIangle
1440 GOSUB Axe
1450 PRINT #1,21,129
1460 IF Itemp=0 THEN 1490
1470 PRINT #1,29+1129,Cf(1),Tinc
1480 COTO 1500
1490 PRINT #1,29+1129,Cf(1),Tinc
1500 NEXT 29
1510 I SIZE 8
1520 I ORG 5
1530 MOVE 0,100
1540 LABEL USING "K" I,"S V P"
1550 LABEL USING "K" I,"Bretter la machine"
1560 STOP
1570 Humeration PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
1580 GRAPHICS
1590 SHOW -Bh,-Bv,Bv
1600 I SIZE 2,5
1610 I ORG 5
1620 FOR I=1 TO X0
1630 MOVE Cf(Tab(1,1)),Cf(Tab(1,3))+Cf(Tab(1,5)))/3,(Cf(Tab(1,2))+Cf(Tab(1,4))+Cf(Tab(1,6)))/3
1640 LABEL I
1650 NEXT I
1660 IHT Cg=Cf
1670 GOSUB Contour
1680 RETURN
1690 TrianglaEXIT GRAPHICS
1700 PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
1710 GRAPHICS
1720 SHOW -Bh,-Bv,Bv
1730 FOR I=1 TO X
1740 MOVE Cf(Tab(1,5)),Cf(Tab(1,6))
1750 FOR J=1 TO S STEP 2
1760 DRAM Cf(Tab(1,J)),Cf(Tab(1,J+1))
1770 NEXT J
1780 MOVE -Cf(Tab(1,5))-Cf(Tab(1,6))
1790 FOR J=1 TO S STEP 2
1800 DRAM -Cf(Tab(1,J)),-Cf(Tab(1,J+1))
1810 NEXT J
1820 IF Iimp=0 THEN 1830
1830 DUMP GRAPHICS -(Bv+S),Bv
1840 PRINTER IS 0
1850 I PRINT PRG
1860 PRINTER IS 16
1870 I EXIT GRAPHICS
1880 RETURN
1890 Aka: PLOTTER IS 13,"GRAPHICS"
1900 GRAPHICS
1910 SHOW -Bh,-Bv,Bv
1920 I LINE TYPE 1
1930 FOR I=1 TO X
1940 X=Cf(Tab(1,1))+Cf(Tab(1,3))+Cf(Tab(1,5)))/3
1950 Y=Cf(Tab(1,2))+Cf(Tab(1,4))+Cf(Tab(1,6)))/3
1960 MOVE X+Tacc(1,1)+COSTacc(1,3))/Ech,Y+Tacc(1,1)+SINH(Tacc(1,3))/Ech
1970

```

```

1980 DRAM X-Tacc(1,1)+COSTacc(1,3))/Ech,Y-Tacc(1,1)+SINH(Tacc(1,3))/Ech
1990 MOVE -X+Tacc(1,1)+COSTacc(1,3))/Ech,-Y+Tacc(1,1)+SINH(Tacc(1,3))/Ech
2000 DRAM -X+Tacc(1,1)+COSTacc(1,3))/Ech,-Y+Tacc(1,1)+SINH(Tacc(1,3))/Ech
2010 NEXT I
2020 GOSUB Contour
2030 RETURN
2040 Contour LINE TYPE 1
2050 SHOW -Bh,-Bv,Bv
2060 IF Cex=0 THEN 2150
2070 MOVE Cf(Cex(2)),Cf(Cex(2)+1)
2080 FOR I=3 TO Cx(1)
2090 DRAM Cf(Cex(1)),Cf(Cex(1)+1)
2100 NEXT I
2110 MOVE -Cf(Cex(2))-Cf(Cex(2)+1)
2120 FOR I=3 TO Cx(1)
2130 DRAM -Cf(Cex(1))-Cf(Cex(1)+1)
2140 NEXT I
2150 IF Cio=0 THEN 2240
2160 MOVE Cf(Cin(2)),Cf(Cin(2)+1)
2170 FOR I=3 TO Cin(1)
2180 DRAM Cf(Cin(1)),Cf(Cin(1)+1)
2190 NEXT I
2200 MOVE -Cf(Cin(2))-Cf(Cin(2)+1)
2210 FOR I=3 TO Cin(1)
2220 DRAM -Cf(Cin(1))-Cf(Cin(1)+1)
2230 NEXT I
2240 IF Iimp=0 THEN 2230
2250 DUMP GRAPHICS -(Bv+S),Bv
2260 PRINTER IS 0
2270 I PRINT PRG
2280 PRINTER IS 16
2290 RETURN
2300 AisortPlotter Det=(C(3)-C(1))*(C(6)-C(2))+C(5)-C(1))*(2)-C(4))
2310 Pa=C(6)-C(2)
2320 Pb=C(2)-C(4)
2330 Pc=C(1)-C(5)
2340 Pd=C(3)-C(1)
2350 E=(Pa*(C(3)-C(1))+Pb*(C(5)-C(1)))/Det
2360 F=(Pc*(C(3)-C(1))+Pd*(C(5)-C(1)))/Det
2370 G=(Pa*(C(4)-C(2))+Pb*(C(6)-C(2)))/Det
2380 H=(Pc*(C(4)-C(2))+Pd*(C(6)-C(2)))/Det
2390 IF (Pnt=0) OR (Pnt=90) THEN 2480
2400 E=E*COS(Tacc(1,13))-2*E*Tacc(1,14)+SINH(Tacc(1,13))-2+
2410 F=F*(1-Tacc(1,14))
2420 G=G*SINH(Tacc(1,13))+COSTacc(1,13)*(1-Tacc(1,14))+F*SINH(Tacc(1,13))-2+
2430 H=H*COSTacc(1,13)+2*G/Tacc(1,14)+SINH(Tacc(1,13))-2+H*SINH(Tacc(1,13))+COSTacc(1,13))*1-Tacc(1,14))
2440 H/Tacc(1,14)+COSTacc(1,13))/2
2450 E=E
2460 F=F
2470 G=G
2480 H=H
2490 H=E*2+2*G*2+H*2
2500 H=H*G*F*H
2510 H=H*2+H*2-E*2-F*2
2520 IF (Pnt<>90) OR (Pnt=90) THEN 2550
2530 Tacc(1,3)=RTH(COSH(Tacc(1,13)))/E+F*TRUNC(Tacc(1,13))
2540 GOTO 2580
2550 IF H<>0 THEN 2610
2560 IF H=0 THEN 2590
2570 Tacc(1,3)=3*F/4
2580 GOTO 2680
2590 Tacc(1,3)=F/4

```

```

2600 COTO 2630
2610 Tac(1,3)=RHH(2*Hd/RBS(Hd))^2
2620 IF Htemp=0 THEN 2680
2630 Tac(1,5)=SQRT2*Hc/(Hb-SQR(HBS(Hb-2-4*Hc)))^-Tac(1,1)
2640 Tac(1,6)=SQR(2*Hc/(Hb+SQR(HBS(Hb-2-4*Hc))))^-Tac(1,2)
2650 Tac(1,5)=1-Pol)*Tac(1,5)^2+2*Pol*HBS(Tac(1,5))*Tac(1,6)^2
2660 Tac(1,5)=Tac(1,5)*Tac(1,4)/(2*Hinc*2*(1+Pol))*1-2*Pol)
2670 Tac(1,6)=HBS(C/Tac(1,1))*C/(Tac(1,1,4))-C/(Tac(1,6,6))*C/(Tac(1,3))
2680 Tac(1,1)=C/(Tac(1,2))+C/(Tac(1,5))*C/(Tac(1,2,2))-C/(Tac(1,4,4))^2
2690 Tac(1,2)=SQR(2*Hc/(Hb-SQR(HBS(Hb-2-4*Hc))))
2700 IF Hinc<0 THEN 2720
2710 Tac(1,4)=Tac(1,1)/Tac(1,2)
2720 RETURN
2730 Viscolite(Tac(1,4)=EXP(Tac(1,9)/C*(0.317*Hap(1)))/(2*(1+Pol))*Tac(1,8))
2740 Tc=C*(Tac(1,1)-1)/Tac(1,1)^2+Tac(1,2)-1/Tac(1,2))^2
2750 IF (Rdhera=0) OR (Rdhera=0) OR (T/Rdhera) OR (Zg=0) THEN 2770
2760 Tac(1,4)=Tac(1,4)*Rdhera/RT/Rdhera
2770 IF (Rdha<0) OR (Rdha=0) OR (RBS(Tc-Tac(1,7)))>Rdha) OR (Zg=0) THEN 2800
2780 Tac(1,4)=Tac(1,4)*Rdha/RBS(Tc-Tac(1,7))/Rdha
2790 IF (Rdhera>0) OR (Rdhera=0) OR (Zg=0) THEN 2850
2810 IF Tc<0 THEN 2840
2820 Tac(1,4)=1ac(1,4)/EXP(10*Rdherb)
2830 GOTO 2850
2840 Tac(1,4)=Tac(1,4)/EXP(Tc/Rdherb)
2850 IF (Rdha>0) OR (Rdha=0) OR (Zg=0) THEN 2910
2860 Tac(1,4)=Tac(1,4)*T
2870 IF Rdbb*RBS(Tc-Tac(1,7))>40 THEN 2900
2880 Tac(1,4)=Tac(1,4)*EXP(-Rdbb*RBS(Tc-Tac(1,7)))
2890 GOTO 2910
2900 Tac(1,4)=Tac(1,4)*EXP(-40)
2910 Tac(1,7)=T
2920 RETURN
2930 CISTR=1 IF (Hnl=0) AND (Hnl=0) THEN 3190
2940 HNT D=ZER
2950 Da(1,1)=COS(Tac(1,3))^2
2960 Da(2,2)=Da(1,1)
2970 Da(1,2)=SIN(Tac(1,3))^2
2980 Da(2,1)=Da(1,2)
2990 Da(1,3)=-SIN(2*Tac(1,3))
3000 Da(2,3)=-Da(1,3)
3010 Da(3,1)=-Da(1,3)/2
3020 Da(3,2)=Da(1,3)/2
3030 Da(3,3)=COS(2*Tac(1,3))
3040 HNT D=ZER
3050 IF Hnl<0 THEN 3100
3060 D(1,1)=D(2,2)=(1-Pol)*Tac(1,14)
3070 D(1,2)=D(2,1)=Pol*Tac(1,14)
3080 D(3,3)=(1-2*Pol)/(2*Tac(1,14))
3090 GOTO 3170
3100 IF Hnl<Tac(1,1)/Tac(1,2)>220 THEN 3130
3110 Hnl=EXP(220)
3120 GOTO 3140
3130 Hnl=EXP(Hnl*Tac(1,1)/Tac(1,2))
3140 D(1,1)=D(2,2)=1-Pol
3150 D(1,2)=D(2,1)=Pol
3160 D(3,3)=(1-2*Pol)/(2*Tac(1,14))
3170 HNT D=ZER
3180 GOTO 3250
3190 HNT D=IDH
3200 HNT D=ZER
3210 D(1,1)=D(2,2)=1-Pol
3220 D(1,2)=D(2,1)=Pol
3230 D(3,3)=(1-2*Pol)/2
3240 HNT D=D*(Tac(1,4)/(1+Pol))*1-2*Pol)
3250 HNT D=TRH(Da)
3260 HNT D=D*Dj
3270 HNT D=D*Dj
3280 H(1,2)=R(C,5)=Cj(1)
3290 H(1,3)=R(C,6)=Cj(2)
3300 H(3,2)=R(C,4,5)=Cj(3)
3310 H(3,3)=R(C,4,6)=Cj(4)
3320 H(5,2)=R(C,5)=Cj(5)
3330 H(5,3)=R(C,6)=Cj(6)
3340 HNT MacD*B
3350 HNT B=TRH(B)
3360 HNT B=BRH(B)
3370 S=RBS(Cj(1))*Cj(4)-Cj(6)*Cj(3)+Cj(6)-Cj(2)+Cj(4))^2
3380 HNT Hc=Hb*(S)
3390 HNT At=INH(A)
3400 HNT K=Hc*At
3410 HNT At=TRH(A)
3420 HNT Kb=At*At
3430 IF P=0 THEN 3470
3440 HNT P=ZER
3450 P=C(2)=P(C,6)=-2*P*P
3460 HNT P=Hc*P
3470 RETURN
3480 Vol=1:FOR R=1 TO X
3490 Ze=0
3500 FOR Zb=1 TO X
3510 Ze=0
3520 IF Zb=R THEN 3660
3530 IF Tar(R,3)>0 THEN 3860
3540 FOR J=1 TO S STEP 2
3550 IF (Tab(Zb,1)-Tab(R,J))*Tab(Zb,3)-Tab(R,J))*Tab(Zb,5
3560 )>Tab(R,J))=0 THEN 3590
3570 Zd=J
3580 GOTO 3600
3590 Ze=Zc+1
3600 NEXT J
3610 NEXT J
3620 IF Zc<2 THEN 3660
3630 Ze=Ze+1
3640 Tar(R,Ze)=Zb
3650 Tar(R,Ze+6)=Tab(R,Zd)
3660 Ze=Zf+Zd
3670 NEXT Zb
3680 IF Tar(R,2)>0 THEN 3780
3690 Tar(R,2)=-1
3700 IF Zf<>1 THEN 3720
3710 Tar(R,8)=Tab(R,3)
3720 Tar(R,9)=Tab(R,5)
3730 IF Zf<>3 THEN 3750
3740 Tar(R,8)=Tab(R,1)
3750 Tar(R,9)=Tab(R,5)
3760 IF Zf<>5 THEN 3780
3770 Tar(R,8)=Tab(R,1)
3780 Tar(R,9)=Tab(R,3)
3790 IF Tar(R,3)>0 THEN 3860
3800 Tar(R,3)=-1
3810 IF Zf<>4 THEN 3820
3820 Tar(R,9)=Tab(R,5)
3830 IF Zf<>6 THEN 3840
3840 Tar(R,9)=Tab(R,3)
3850 IF Zf<>8 THEN 3860
3860 Tar(R,9)=Tab(R,1)
3870 RETURN
3880 END

```

```

3930 Lisage:IF Sym<>0 THEN 3920
3960 Gosub Stockage
3910 Goto 3960
3920 IF Sym<>1 THEN 3950
3930 Gosub Stockage
3940 Goto 3960
3950 Gosub Stockage
3960 Sva=0
3970 Sva=Sua+1
3980 Sua=Sua+1
3990 For P=1 To Y
4000 Saa=0
4010 For Zb=1 To P
4020 For Zh=2 To 14
4030 IF K<Zb,Zh>>P THEN 4060
4040 Saa=Saa+K<Zb,Zh>*V<Zb>
4050 Goto 4070
4060 NEXT Zh
4070 NEXT Zb
4080 For Zh=1 To 14
4090 IF K<P,Zh>=0 THEN 4110
4100 Saa=Saa+K<P,Zh>*V<K<P,Zh>>
4110 NEXT Zh
4120 Saa=(Saa-H<P>)/K<P,1>
4130 V<P>=V<P>-Saa
4140 Su=HRX<Su,RRS<Saa>>
4150 NEXT P
4160 IF Saa>1000 THEN 4190
4170 Goto 3970
4180 RETURN
4190 I IF Su>=Sup THEN 5020
4200 Diagonale:FOR Ze=Zb+1 To Ya
4210 IF K<Ze,1>=0 THEN 4920
4220 FOR Zh=1 To Zb-1
4230 FOR Zk=1 To Ca-1
4240 IF (K<Zb,Zk>-Zb)*(K<Zh,Zk>-Ze)<>0 THEN 4290
4250 IF K<Zh,Zk><>Zb THEN 4280
4260 K<Zb,Zk>=Ze
4270 Goto 4290
4280 NEXT Zk
4290 K<Zb,Zk>=Zb
4300 NEXT Zh
4310 FOR Zb=Zb To Y
4320 FOR Zk=1 To Ca-1
4330 IF K<Zb,Zk>=0 THEN 4370
4340 K<K<Zb,Zk>,Ca>=K<Zb,Zk>
4350 K<Zb,Zk>=0
4360 K<Zb,Zk>=0
4370 NEXT Zk
4380 NEXT Zb
4390 K<Zb,1>=K<Ze,1>
4400 K<Zb,1>=Zb
4410 FOR Zh=Zb To Ze-1
4420 FOR Zk=1 To Ca-1
4430 IF K<Zb,Zk><>Ze THEN 4520
4440 FOR Zl=2 To Ca-1
4450 IF K<Zb,Zl><>Ze THEN 4510
4460 K<Zb,Zl>=K<Zh,Zk>
4470 K<Zb,Zl>=Ze+Zb-Zh
4480 K<Zh,Zk>=0
4490 K<Zb,Zk>=0
4500 Goto 4520
4510 NEXT Zl
4520 NEXT Zk
4530 NEXT Zh
4540 FOR Zh=Zb+1 To Ze

```

```

4550 IF K<Zh,Ca>=0 THEN 4630
4560 FOR Zk=2 To Ca-1
4570 IF K<Ze+Zb-Zh,Zk><>0 THEN 4620
4580 K<Ze+Zb-Zh,Zk>=K<Zh,Ca>
4590 K<Ze+Zb-Zh,Zk>=Ze
4600 K<Zh,Ca>=0
4610 Goto 4630
4620 NEXT Zk
4630 NEXT Zh
4640 FOR Zh=Zb+1 To Ya
4650 FOR Zk=1 To Ca-1
4660 IF K<Ze,Zk><>Zh THEN 4750
4670 FOR Zl=1 To Ca-1
4680 IF K<Zb,Zl><>0 THEN 4740
4690 K<Zb,Zl>=K<Ze,Zk>
4700 K<Zb,Zl>=Zh
4710 K<Ze,Zk>=0
4720 K<Ze,Zk>=0
4730 Goto 4750
4740 NEXT Zl
4750 NEXT Zh
4760 FOR Zh=Zb+1 To Y
4770 IF K<Zh,Ca>=0 THEN 4860
4780 FOR Zk=1 To Ca-1
4790 IF K<Ze,Zk><>0 THEN 4850
4800 K<Ze,Zk>=K<Zh,Ca>
4810 K<Ze,Zk>=Zh
4820 K<Zh,Ca>=0
4830 Goto 4860
4840 NEXT Zk
4850 NEXT Zh
4860 K<Ze,1>=0
4870 M1=H<Ze>
4880 H<Ze>=H<Zb>
4890 H<Zb>=H1
4900 Goto 4930
4910 NEXT Ze
4920 RETURN
4930 Temperature:IF Htemp>0 THEN 4990
4940 FOR R=1 To X
4950 FOR Tap<R>=Tap<R>+Tap<R,5>*Inc<Tap<R,10>*Tap<R,11>>
4960 NEXT R
4970 Goto 5240
4980 FOR R=1 To X
4990 FOR I=1 To 3
5000 Zm=Cf<Tap<R,3+1>>-Cf<Tap<R,1>>+Cf<Tap<R,3>>+Cf<Tap<R,5>>/3)*2
5010 Zn=Cf<Tap<R,3+1>>+1)-Cf<Tap<R,2>>+Cf<Tap<R,4>>+Cf<Tap<R,6>>/3)*2
5020 IF Tap<R,1><>-1 THEN 5060
5030 Tap<R,1>=2+SQR(Zm+Zn)
5040 Goto 5090
5050 Zo=Cf<Tap<R,3+1>>-Cf<Tap<R,1>>+Cf<Tap<R,3>>+Cf<Tap<R,5>>/3)*2
5060 (Tap<R,1>,5)))/3)*2
5070 Zp=Cf<Tap<R,3+1>>+1)-Cf<Tap<R,1>,2>>+Cf<Tap<R,4>>+Cf<Tap<R,6>>/3)*2
5080 Ab<Tap<R,1>,6>)/3)*2
5090 Tap<R,1>=SQR(Zm+Zp)+SQR(Zo+Zp)
5100 NEXT I
5110 NEXT R
5110 FOR Zb=1 To Htemp
5120 FOR R=1 To X
5130 Tap<R,1>=0
5140 FOR I=1 To 3
5150 IF Tap<R,1>=-1 THEN 5190
5160 Zc=2+Tap<R,1>,6>)*Tap<R>-Tap<R,1>>/Tap<R,6>+Tap<R,1>,6>
5170 Tap<R,1>,6>

```

```

5180      NEXT I
5190      NEXT R
5200      FOR R=1 TO X
5210        Tap(R)=Tap(R)+I*acc(R,4)+I*acc(R,5)*Tinc/(Oh*emp*I*acc(R,10)*I*acc(R,11))
5220      NEXT R
5230      NEXT Zb
5240      FOR R=1 TO Xb-X
5250        Tap((R,2))=Tap((R,1))
5260      NEXT R
5270      RETURN
5280      Stock=99: REDIM K(Y,Ca),K(CY,Ca),M(CY)
5290      MHT K=ZER
5300      MHT Kc=ZER
5310      MHT M=ZER
5320      FOR I=1 TO Xb
5330        FOR Zb=1 TO 6
5340          Cj(Zb)=Cj((Tab(I,Zb)))
5350          CK(Zb)=Cj((Tab(I,Zb)))
5360      NEXT Zb
5370      GOSUB Clast1
5380      FOR Jb=1 TO 6
5390        IStockage dans Kd et dans Kc
5400        FOR Jb=Ja TO 6
5410          IF Kb(Ja,Jb)=0 THEN 5680
5420          IF Tab(I,Ja)<Tab(I,Jb) THEN 5450
5430          Lf=Tab(I,Jb)
5440          Co=Tab(I,Ja)
5450          GOTO 5470
5460          Lf=Tab(I,Ja)
5470          Co=Tab(I,Jb)
5480          IF LI<>0 THEN 5680
5490          K(LI,1)=K(LI,1)+Kb(Ja,Jb)
5500          K(CLI,1)=Co
5510          GOTO 5680
5520          IF Co>Y THEN 5590
5530          Jc=Jc+1
5540          IF K(CLI,Jc)*K(CLI,Jc)-Co<>0 THEN 5540
5550          K(LI,Jc)=K(LI,Jc)+Kb(Ja,Jb)
5560          K(CLI,Jc)=Co
5570          GOTO 5680
5580          FOR R=1 TO Ias
5590            IF T*(R,1)=Co THEN 5520
5600            NEXT R
5610            IF T*(R,2)<LI THEN 5680
5620            Jc=I
5630            Jc=Jc+1
5640            IF K(CLI,Jc)*K(CLI,Jc)-T*(R,2)<>0 THEN 5640
5650            K(LI,Jc)=K(LI,Jc)-Kb(Ja,Jb)
5660            K(CLI,Jc)=T*(R,2)
5670            NEXT Jc
5680          IF (Tab(I,Ja)>Y) OR (Pre=0) THEN 5710
5690          M(Tab(I,Ja))=M(Tab(I,Ja))+Pr(CJa)
5700      NEXT Ja
5710      NEXT I
5720      RETURN
5730      Resolution: FOR Zb=1 TO Y-1
5740      PRINT Zb
5750      IF K(Zb,1)<>0 THEN 5790
5760      GOSUB Diagonale
5770      PRINT "P"
5780      FOR Zn=2 TO Ca-1
5790        IF Kc(Zb,Zn)=0 THEN 6860
5800        FOR Z1=1 TO Ca-1
5810          IF Kc(Kc(Zb,Zn),Z1)=0 THEN 5890
5820          FOR Zm=2 TO Ca-1
5830            IF Kc(Kc(Zb,Zn),Z1)=0 THEN 5890
5840            IF Kc(Zb,Zm)<>Kc(Kc(Zb,Zn),Z1)) AND Kc(Zb,Zm)<>0
5850            ) THEN 5870
5860            K(Kc(Zb,Zn),Z1)=K(Kc(Zb,Zn),Z1)-K(Zb,Zm)*K(Zb,
5870            )/K(Zb,1)
5880          NEXT Zm
5890          FOR Zm=2 TO Ca-1
5900            IF Kc(Zb,Zm)<>Kc(Zb,Zn) THEN 6030
5910            FOR Z1=2 TO Ca-1
5920              IF Kc(Zb,Zm)=Kc(Kc(Zb,Zn),Z1) THEN 6030
5930              IF Kc(Kc(Zb,Zn),Z1)<>0 THEN 6020
5940              K(Kc(Zb,Zn),Z1)=K(Zb,Zm)*K(Zb,Zn)/K(Zb,1)
5950              Kc(Kc(Zb,Zn),Z1)=Kc(Zb,Zm)
5960              IF Z1<Ca-1 THEN 6010
5970              PRINT "Déplacement de capacité de K,Kc
5980              1Ca+Ca+5"
5990              Ca=Ca+5
6000              GOTO 330
6010              STOP
6020            NEXT Z1
6030          NEXT Z1
6040          NEXT Zm
6050          K(Kc(Zb,Zn))=K(Kc(Zb,Zn))-M(Zb)*K(Zb,Zn)/K(Zb,1)
6060          NEXT Zn
6070      Resolution: FOR Zb=1 TO Y-1
6080      PRINT Zb
6090      FOR Zc=2 TO Ca-1
6100        IF Kc(Zb,Zc)=0 THEN 6440
6110        M(Kc(Zb,Zc))=K(Kc(Zb,Zc))-M(Zb)*K(Zb,Zc)/K(Zb,1)
6120        K(Kc(Zb,Zc))=K(Kc(Zb,Zc))
6130        Zm=0
6140        Z1=1
6150        IF Kc(Zb,Zc+Zm)=0 AND Kc(Kc(Zb,Zc),Z1)=0 THEN 6430
6160        IF Kc(Zb,Zc+Zm)<>Kc(Kc(Zb,Zc),Z1) THEN 6210
6170        K(Kc(Zb,Zc),Z1)=K(Kc(Zb,Zc),Z1)-K(Zb,Zc)*K(Zb,Zm)/K
6180        (Zb,1)
6190        Zm=Zm+1
6200        Z1=Z1+1
6210        IF Kc(Kc(Zb,Zc+Zm))<>Kc(Kc(Zb,Zc),Z1)) AND Kc(Zb,Zc+Zm)<>0
6220        ) THEN 6150
6230        GOTO 6150
6240        Z1=Z1+1
6250        IF Kc(Kc(Zb,Zc),Z1)=0 THEN 6380
6260        M(Kc(Zb,Zc),Z1)=Zm+1
6270        M(Kc(Kc(Zb,Zc),Z1))
6280        FOR Zn=Z1+1 TO Ca-1
6290          IF Kc(Kc(Zb,Zc),Zn)=0 THEN 6360
6300          M(Kc(Kc(Zb,Zc),Zn))
6310          M(Kc(Kc(Zb,Zc),Zn))
6320          M(Kc(Kc(Zb,Zc),Zn))
6330          K(Kc(Zb,Zc),Zn)=Ma
6340          Kc(Kc(Zb,Zc),Zn)=Ma
6350          NEXT Zn
6360          Kc(Kc(Zb,Zc),Zn)=Ma
6370          K(Kc(Zb,Zc),Zn)=Ma
6380          K(Kc(Zb,Zc),Z1)=Kc(Zb,Zc)*K(Zb,Zc+Zm)/K(Zb,1)
6390          Kc(Kc(Zb,Zc),Z1)=Kc(Zb,Zc+Zm)
6400          Zm=Zm+1
6410          Z1=Z1+1
6420          GOTO 6150
6430      NEXT Zc
6440      NEXT Zb

```

```

6450 RETURN
6460 RANGEMENT:FOR ZB=1 TO Y
6470   FOR R=1 TO Ca-1
6480     IF K(ZB,R)=0 THEN 6630
6490     MIN=I+1
6500     MIN=0
6510     FOR I=R TO Ca-1
6520       IF K(ZB,I)=0 THEN 6590
6530       IF K(ZB,I)>=MIN THEN 6570
6540       MIN=K(ZB,I)
6550       MIN=K(ZB,I)
6560       MI=I
6570     NEXT I
6580     K(ZB,MI)=K(ZB,R)
6590     K(ZB,R)=MIN
6600     K(ZB,R)=MIN
6610
6620   NEXT R
6630
6640 NEXT ZB
6650 RANGEMENT:FOR ZE=Y TO 1 STEP -1
6660   V(ZE)=M(ZE)/K(ZE,1)
6670   IF ZE=1 THEN 6760
6680   FOR ZF=ZE-1 TO 1 STEP -1
6690     FOR ZR=1 TO Ca-1
6700       IF K(ZF,ZR)=ZE THEN 6730
6710       IF K(ZF,ZR)=0 THEN 6740
6720     NEXT ZR
6730     M(ZF)=M(ZF)-K(ZF,ZR)*V(ZE)
6740     NEXT ZF
6750
6760 NEXT ZE
6770 RETURN
6780 RANGEMENT:FOR ZE=1 TO Y
6790   FOR ZF=1 TO Ca-1
6800     IF K(ZE,ZF)=0 THEN 6810
6810     NEXT ZF
6820     K(ZE,Ca)=ZF-1
6830     NEXT ZE
6840     FOR ZE=Y TO 1 STEP -1
6850       V(ZE)=M(ZE)/K(ZE,1)
6860       IF ZE=1 THEN 6920
6870       FOR ZF=ZE-1 TO 1 STEP -1
6880         IF K(ZF,K(ZF,Ca))<ZE THEN 6900
6890         M(ZF)=M(ZF)-K(ZF,K(ZF,Ca))*V(ZE)
6900         K(ZF,Ca)=K(ZF,Ca)-1
6910       NEXT ZF
6920     NEXT ZE
6930 RETURN
6940 TRIANGLE:EXIT GRAPHICS
6950 PLOTTER IS 13, "GRAPHICS"
6960 GRAPHICS
6970 SHOW -200,200,-100,100
6980 FOR I=1 TO X
6990   MOVE C(TAB(I,5)),C(TAB(I,6))
7000   FOR J=1 TO S STEP 2
7010     DRN C(TAB(I,J)),C(TAB(I,J+1))
7020   NEXT J
7030 NEXT I
7040 IF Imp=0 THEN 7030
7050 DUMP GRAPHICS -105,100
7060 PRINTER IS 0
7070 I PRINT PAGE
7080 PRINTER IS 16
7090 RETURN
7100 PLOTTER IS 13, "GRAPHICS"
7110 GRAPHICS

```

Non antisymétrique

```

7110 SHOW -200,200,-150,100
7120 FOR I=17 TO X
7130   X=C(TAB(I,1))+C(TAB(I,3))+C(TAB(I,5)))/3
7140   Y=C(TAB(I,2))+C(TAB(I,4))+C(TAB(I,6)))/3
7150   MOVE X+TAC(I,1)+COS(TAC(I,3))/Ech, Y+TAC(I,1)+SIN(TAC(I,3))/Ech
7160   DRN X+TAC(I,1)+COS(TAC(I,3))/Ech, Y+TAC(I,1)+SIN(TAC(I,3))/Ech
7170 NEXT I
7180 I COSB Contour
7190 RETURN
7200 Contour: LINE TYPE 1
7210 IF Cex=0 THEN 7260
7220 MOVE C(Cex(2)),C(Cex(2)+1)
7230 FOR I=3 TO Cex(1)
7240   DRN C(Cex(I)),C(Cex(I)+1)
7250 NEXT I
7260 IF Cln=0 THEN 7310
7270 MOVE C(Cln(2)),C(Cln(2)+1)
7280 FOR I=3 TO Cln(1)
7290   DRN C(Cln(I)),C(Cln(I)+1)
7300 NEXT I
7310 IF Imp=0 THEN 7360
7320 DUMP GRAPHICS -105,100
7330 PRINTER IS 0
7340 I PRINT PAGE
7350 PRINTER IS 15
7360 RETURN
7370 END
7380 Stockage: REDIM K(Y,Ca),K(Y,Ca),M(Y)
7390 N0 K=ZER
7400 N0 K=ZER
7410 N0 K=ZER
7420 FOR I=1 TO Xb
7430   FOR Zb=1 TO 6
7440     K(Zb)=C(TAB(I,Zb))
7450     C(K(Zb))=C(TAB(I,Zb))
7460   NEXT Zb
7470   COSUB Clistr1
7480   FOR J=1 TO 6
7490     IF K(Ja,Jb)=0 THEN 7660
7500     IF K(Ja,Jb)=0 THEN 7530
7510     L1=Tab(I,Ja)
7520     L2=Tab(I,Jb)
7530     Co=Tab(I,Ja)
7540     Co=Tab(I,Jb)
7550     IF L1<>Co THEN 7610
7560     K(L1,1)=K(L1,1)+Kb(Ja,Jb)
7570     K(L1,1)=Co
7580     GOT0 7660
7590   NEXT J
7600   NEXT I
7610   Jc=I+1
7620   IF K(L1,Jc)*K(L1,Jc)-Co<>0 THEN 7620
7630   K(L1,Jc)=K(L1,Jc)+Rb(Ja,Jb)
7640   K(L1,Jc)=Co
7650 NEXT I
7660 NEXT J
7670 NEXT JB
7680 NEXT JA
7690 RETURN
7700 END
7710 Stockage: REDIM K(Y,Ca),K(Y,Ca),M(Y)
7720 N0 K=ZER
7730 N0 K=ZER
7740 N0 K=ZER
7750 FOR I=1 TO Xb
7760   FOR Zb=1 TO 6

```

Non antisymétrique

symétrique plan

```

7770 Cj(Zb)=Cf(Tab(I,Zb))
7780 Ck(Zb)=Ck(Tab(I,Zb))
7790 NEXT Zb
7800 GOSUB Cls(r)
7810 FOR Ja=1 TO 6
7820   FOR Jb=Ja TO 6
7830     IF Kb(Ja,Jb)=0 THEN 8080
7840     IF Tab(I,Ja)<Tab(I,Jb) THEN 7880
7850     L1=Tab(I,Jb)
7860     Co=Tab(I,Ja)
7870     GOTO 7900
7880     L1=Tab(I,Ja)
7890     Co=Tab(I,Jb)
7900     IF Co>Y THEN 8000
7910     K(L1,J)=K(L1,I)+Kb(Ja,Jb)
7920     K(Co,I)=Co
7930     GOTO 8000
7940   Jc=1
7950   Jc=Jc+1
7960   IF Kc(L1,Jc)=K(Co,I)+Co THEN 7960
7970   K(L1,Jc)=K(L1,Jc)+Kb(Ja,Jb)
7980   K(Co,I)=Co
7990   NEXT Jb
8000 NEXT Ja
8010
8020 FOR R=1 TO 155
8030   FOR I=1 TO Ts(R,1)
8040     FOR Zb=1 TO 155
8050       IF I=Ts(Zb,1) THEN 8140
8060       NEXT Zb
8070       FOR Zb=2 TO Ca-1
8080         IF Kc(I,Zb)=0 THEN 8140
8090         IF Kc(I,Zb)<>Ts(R,1) THEN 8130
8100         K(I,Zb)=0
8110         GOTO 8140
8120       NEXT Zb
8130     NEXT I
8140     FOR I=2 TO Ca-1
8150       IF Kc(Ts(R,I),I)=0 THEN 8220
8160       FOR Zb=1 TO 155
8170         IF Kc(Ts(R,I),I)=Ts(Zb,1) THEN 8210
8180         NEXT Zb
8190       NEXT I
8200     K(Ts(R,1),I)=0
8210   NEXT I
8220   FOR R=1 TO 155
8230     FOR I=1 TO Ca-1
8240       IF Kc(Ts(R,2),I)=0 THEN 8320
8250       FOR Zb=1 TO 155
8260         IF Kc(Ts(R,2),I)<>Ts(Zb,2) THEN 8300
8270         K(Ts(R,2),I)=K(Ts(R,2),I)/2
8280       FOR Zc=1 TO 155
8290         IF Tab(R,I)<>Ts(Zb,Zc) THEN 8350
8300         Ra((I+1)/2)=Ts(Zb,3-Zc)
8310       NEXT Zc
8320     NEXT R
8330   RETURN
8340   EForText:HAT Efa=ZER
8350   HAT Efb=ZER
8360   FOR I=2 TO Cex(I)
8370     IF Cex(I)>> THEN 8540
8380     Zb=1
8390     FOR R=1 TO Cex(I)
8400       FOR ZI=1 TO Ca-1
8410         IF Kc(R,ZI)=0 THEN 8470
8420         IF Kc(R,ZI)<>Cex(I) THEN 8460
8430
8440   Efa(I-1,Zb)=Kc(R,ZI)
8450   Efb(I-1,Zb)=R
8460   Zb=Zb+1
8470   NEXT ZI
8480   FOR R=2 TO Ca-1
8490     IF Kc(Cex(I),R)=0 THEN 8540
8500     Efa(I-1,Zb)=Kc(Cex(I),R)
8510     Efb(I-1,Zb)=Kc(Cex(I),R)
8520     Zb=Zb+1
8530   NEXT R
8540   NEXT I
8550   RETURN
8560   EForText:EF=0
8570   FOR I=1 TO Cex(I)-1
8580     FOR ZI=1 TO Ca-1
8590       IF Efb(I,ZI)=0 THEN 8620
8600       EF=Efa(I,ZI)+VETb(I,ZI)+Cf(Cex(I+1)+1)
8610     NEXT ZI
8620   NEXT I
8630   RETURN
8640   END
8650   Modification:FOR R=1 TO Y
8660   IF L(R)=99 THEN 8850
8670   FOR J=1 TO R
8680     FOR Ja=2 TO Ca-1
8690       IF Kc(J,Ja)=0 THEN 8750
8700       IF Kc(J,Ja)<R THEN 8740
8710       M(J)=R(J)-Kc(J,Ja)*L(R)
8720       K(J,Ja)=0
8730       GOTO 8750
8740     NEXT Ja
8750   NEXT J
8760   FOR J=1 TO Ca-1
8770     IF Kc(R,J)=0 THEN 8810
8780     M(Kc(R,J))=M(Kc(R,J))-K(R,J)*L(R)
8790     K(R,J)=0
8800     Kc(R,J)=0
8810   NEXT J
8820   K(R,I)=I
8830   Kc(R,I)=R
8840   M(R)=L(R)
8850   NEXT R
8860   RETURN
8870   VoisinatZe=0
8880   FOR R=X+1 TO Xb
8890     HAT Aa=C(I)
8900     FOR I=1 TO 5 STEP 2
8910       FOR Zb=1 TO 155
8920         FOR Zc=1 TO 2
8930           IF Tab(R,I)<>Ts(Zb,Zc) THEN 8950
8940           Ra((I+1)/2)=Ts(Zb,3-Zc)
8950         NEXT Zc
8960       NEXT Zb
8970     NEXT I
8980     FOR I=1 TO X
8990       FOR Zb=1 TO 5 STEP 2
9000         IF (Tab(I,Zb)<>Ra(I)) AND (Tab(I,Zb)<>Ra(2)) AND (Tab(I,Zb)<>R
9010         THEN 9060
9020         HEXI Zb
9030         Zc=Zc+1
9040         T((Zc,1))=1
9050         T((Zc,2))=R
9060         GOTO 9070
9070   NEXT I
9080   NEXT R

```

```

9080 FOR R=1 TO X-1
9090 FOR Zb=R+1 TO Xb
9100 IF Taf(R,3)<>0 THEN 9310
9110 FOR J=1 TO 3 STEP 2
9120 IF (Tab(R,1)<<Tab(Zb,J)) AND (Tab(R,3)<<Tab(Zb,J)) AND (Tab(R,5)<<Tab(Zb,J)) THEN 9290
9130 Zd=1
9140 FOR Zb=Zd+2 TO 5 STEP 2
9150 IF (Tab(R,1)<<Tab(Zb,Zb)) AND (Tab(R,3)<<Tab(Zb,Zb)) AND (Tab(R,5)<<Tab(Zb,Zb)) THEN 9270
9160 FOR Zj=1 TO 3
9170 IF Taf(R,Zj)<>0 THEN 9200
9180 Taf(R,Zj)=Zb
9190 GOTO 9210
9200 NEXT Zj
9210 IF Zb>X THEN 9300
9220 FOR Zj=1 TO 3
9230 IF Taf(Zb,Zj)<>0 THEN 9260
9240 Taf(Zb,Zj)=R
9250 GOTO 9300
9260 NEXT Zj
9270 NEXT Zb
9280 GOTO 9300
9290 NEXT J
9300 NEXT Zb
9310 FOR R=1 TO X
9320 FOR I=2 TO 3
9330 IF Taf(R,I)<>0 THEN 9360
9340 Taf(R,I)=-1
9350 NEXT I
9360 NEXT R
9370 FOR R=1 TO X
9380 Zd=0
9390 FOR Zb=1 TO 3
9400 IF Taf(R,Zb)<>-1 THEN 9440
9410 Taf(R,Zb+3)=Tab(R,9-Zb)
9420 GOTO 9510
9430 FOR Zc=1 TO 5 STEP 2
9440 IF (Tab(R,Zc)=Tab(Taf(R,Zb,1))) OR (Tab(R,Zc)=Tab(Taf(R,Zb),3)) OR (Tab(R,Zc)=Tab(Taf(R,Zb),5)) THEN 9490
9450 Taf(R,Zc+3)=Tab(R,Zc)
9460 Zd=Zd+Zc
9470 NEXT Zc
9480 GOTO 9500
9490 NEXT Zb
9500 NEXT R
9510 FOR R=1 TO X
9520 FOR J=3 TO 1 STEP -1
9530 IF Taf(R,J)<X THEN 9650
9540 FOR Zb=1 TO 20
9550 IF (Zb,2)<>Tab(R,J) THEN 9630
9560 Taf(R,J)=T(Zb,1)
9570 FOR Zc=1 TO 3
9580 IF Taf(T(Zb,1),Zc)<>-1 THEN 9620
9590 Taf(T(Zb,1),Zc)=F
9600 GOTO 9640
9610 NEXT Zc
9620 NEXT J
9630 NEXT Zb
9640 NEXT R
9650 RETURN
9660 END

```







## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ANDERSON, T.B. 1968. - The geometry of a natural orthorhombic system of kinks bands. *Geol. Surv. Can.*, Pap. 68-52 : 200-225.
- BALDERMAN, M.A. 1974. - The effect of strain rate and temperature on the yield point of hydrolytically weakened synthetic quartz. *Jour. Geol. Res.*, 79 : 1647-1652.
- BAYLY, N.B. 1970. - Viscosity and anisotropy estimates from measurements on chevron folds. *Tectonophysics*, 9 : 459-474.
- BERNER, H. RAMBERG, H. STEPHANSSON, O. 1972. - Diapirism in theory and experiment. *Tectonophysics*, 15 : 197-218.
- BILBY, B.A. ESHELBY, J.D. KUDU, A.K. 1975. - The change of shape of a viscous ellipsoidal region embedded in a slowly deforming matrix showing a different viscosity. *Tectonophysics*, 28 : 265-274.
- BIOT, M.A. 1961. - Theory of folding of stratified visco-elastic media and its implications in tectonics and orogenesis. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 72 : 1595-1620.
- BOUDON, J. 1976. - Le poinçonnement. Thèse Doct. Ing., Grenoble, 85 p.
- BOWDEN, P.B. 1970. - A criterion for inhomogeneous plastic deformation. *Phil. Mag.*, 22 : 455-462.
- BOWDEN, P.B. RAHA, S. 1970. - The formation of micro shear bands in polystyrene and polymethylmethacrylate. *Phil. Mag.*, 22 : 463-482.
- BRUN, J.P. COBBOLD, P.R. 1980. - Strain heating and thermal softening in continental shear zones : a review. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (1-2) : 149-158.
- CASEY, M. 1976. - Application of finite element analysis to some problems in structural geology. Ph. D., Londres, 303 p.
- CASEY, M. 1980. - Mechanics of shear zones in isotropic dilatant materials. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (1-2) : 143-147.
- CHUNG, N. EMBURY, J.D. EVENSEN, J.D. HOAGLAND, R.G. SARGENT, C.M. 1977. - Unstable shear failure in a 7075 aluminium alloy. *Acta Metall.*, 25 : 377-381.
- COBBOLD, P.R. 1973. - Initiation and development of folds in rocks. Ph. D., Londres, 194 p.
- COBBOLD, P.R. 1976. - Mechanical effects of anisotropy during large finite deformations. *Bull. Soc. Géol.*, 7, t. XVIII (6) : 1497-1510.
- COBBOLD, P.R. 1977. - Description and origin of banded deformation structures. II. Rheology and the growth of banded perturbations. *Can. Jour. Earth Sci.*, 14 : 2510-2523.

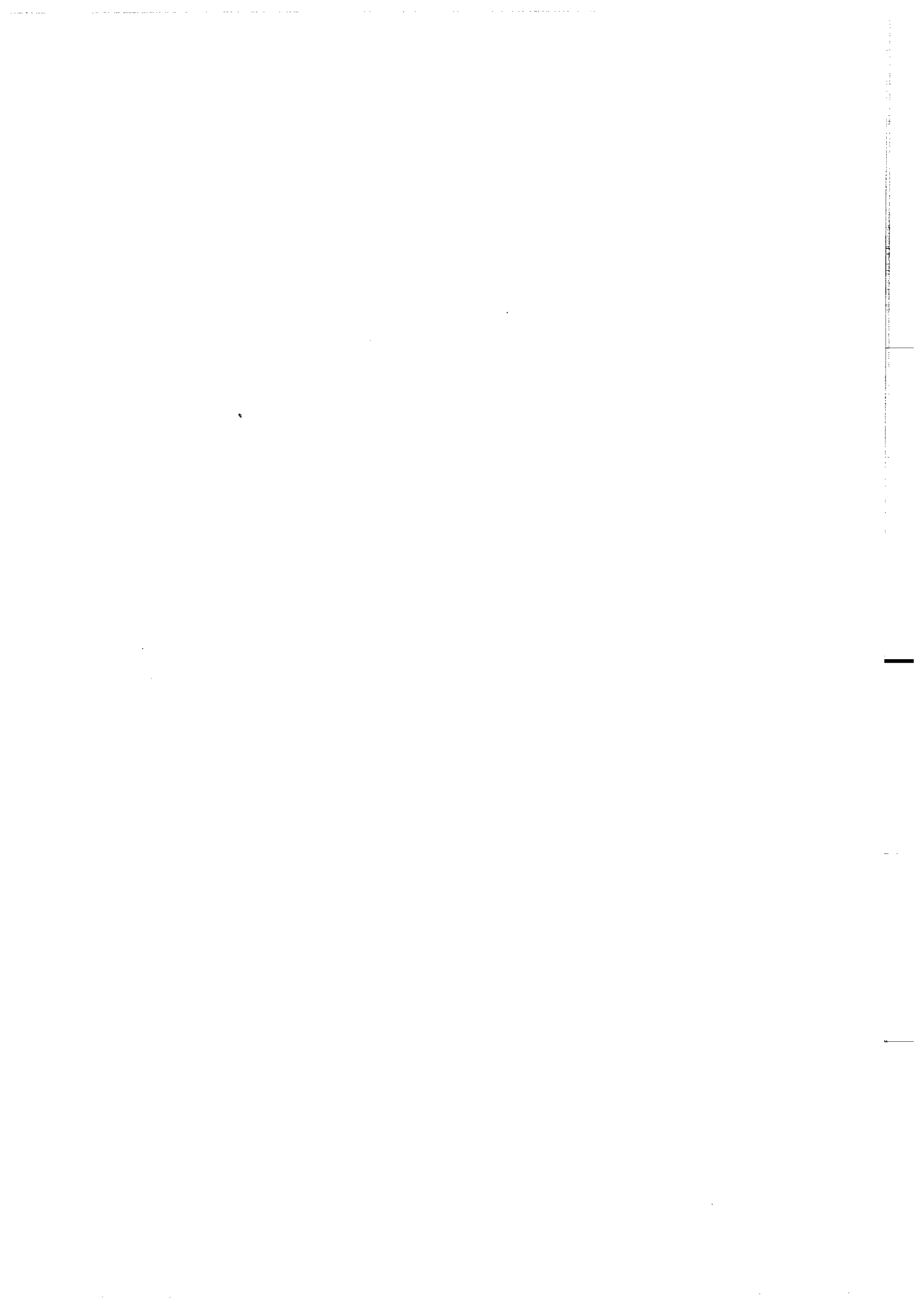
- COWARD, M.P. 1976. - Strain within ductile shear zone. *Tectonophysics*, 34 : 181-197.
- DIETERICH, J.H. CARTER, N.L. 1969. - Stress history of folding. *Am. Jour. Sci.*, 267 : 129-154.
- DIETERICH, J.H. ONAT E.T. 1969. - Slow finite deformations of viscous solids. *Jour. Geoph. Res.*, 74 : 2081-1088.
- DONATH, F.A. 1968. - Experimental study of kink band development in Martinsburg slate. *Geol. Surv. Can.*, Pap. 68-52 : 255-287.
- FLEITOUT, L. FROIDEVAUX, C. 1980. - Thermal and mechanical evolutions of shear zones. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (1-2) : 159-164.
- FREUND, R. 1974. - Kinematics of transform and transcurrent faults. *Tectonophysics*, 21 : 93-134.
- GUILLOPE, M. POIRIER, J.P. 1979. - Dynamic recrystallization during creep of single-crystalline halite ; an experimental study. *Jour. Geol. Res.*, 84 : 5557-5567.
- HEARD, H.C. 1976. - Comparison of the flow properties of rocks at crustals conditions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A, 283 : 176-186.
- JAEGER, J.C. COOK, N.G.W. 1969. - Fundamentals of rock mechanics. Mettuen, Londres, 513 p.
- JONAS, J.J. LUTON, M.J. 1978. - Flow softening at elevated temperatures. *Advances in deformation processing* (edited by Burke, J.J. & Weiss, V.). Plenum, New-York : 215-243.
- KUBIN, L.P. JOUFFREY, B. 1971. - On low temperature plastic instability in pure niobium single crystals. *Phil. Mag.*, 24 : 437-449.
- NICOLAS, A. POIRIER, J.P. 1976. - Crystalline plasticity and solid state flow in metamorphic rocks. Willey Interscience, Londres, 444 p.
- NICOLAS, A. BOUCHEZ, J.L. BLAISE, J. POIRIER, J.P. 1977. - Geological aspects of deformation in continental shear zones. *Tectonophysics*, 42 : 55-73.
- PARRISH, D.K. 1973. - A non-linear finite element fold model. *Am. Jour. Sci.*, 273 : 318-334.
- PELTZER, G. 1982. - Naissance et évolution des décrochements lors d'une collision continentale. Thèse 3e Cycle, Paris, 157 p.
- POIRIER, J.P. 1980. - Shear localization and shear instability in materials in the ductile field. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (1-2) : 135-142.
- POIRIER, J.P. BOUCHEZ, J.L. JONAS, J.J. 1979. - A dynamic model for aseismic ductile shear zones. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 43 : 441-453.
- RALSTON, A. WILF, H.S. 1965. - Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques. Dunod, Paris, 293 p.
- RAMSAY, J.G. GRAHAM, R.H. 1970. - Strain variation in shear belts. *Can. Jour. Earth Sci.*, 7 : 786-813.
- RAMSAY, J.G. ALLISON, I. 1979. - Structural analysis of shear zones in an alpinised hercynian granite. *Schweiz. Mineral. Petrogr. Mitt.*, 59 : 251-279.
- RAMSAY, J.G. 1980. - Shear zone geometry : a review. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (1-2) : 83-99.
- RICE, J.R. SIMONS, D.A. 1976. - The stabilization of spreading shear faults by coupled deformation diffusion effects in fluid infiltrated porous materials. *Jour. Geol. Res.*, 81 : 5322-5334.
- ROSSARD, C. BLAIN, P. 1958. - Premiers résultats de recherches sur la déformation des aciers à chaud. *Rev. Metall.*, Paris, 55 : 573-581.
- SANFORD, A.R. 1959. - Analytical and experimental study of simple geologic structures. *Bull. Geol. Soc. Am.*, 70 : 19-52.
- SIMPSON, C. 1983. - Displacement and strain patterns from naturally occurring shear zone terminations. *Jour. Struct. Geol.*, 5 (5) : 497-506.

- TRUESDELL, C. TOUPIN, R. 1960. - The classical field theories. Flugge, Berlin : 226-793.
- VERHOOGEN, J. TURNER, F.J. WEISS, L.E. WAHRHAFTIG, C. FYFE, W.S. 1970. - The earth. Halt, Rinehart & Winston, Inc.
- VILLOTTE, J.P. DAIGNIERES, M. 1982. - Numerical modeling in intraplate deformation : simple mechanical models of continental collision. *Jour. Geoph. Res.*, 87 : 10709-10728.
- VOIGHT, B. SAMUELSON, A.G. 1969. - On the application of finite element techniques to problems concerning potential distribution and stress analysis in the earth sciences. *Pure and Appl. Geoph.*, 76 : 40-55.
- WILLIAMS, J.R. LEWIS, R.W. ZIENKIEWICZ, O.C. 1978. - A finite element analysis of the role of initial perturbations in the folding of a single viscous layers. *Tectonophysics*, 45 : 187-200.
- YUEN, D.A. FLEITOUT, L. SCHUBERT, G. 1978. - Shear deformation zones along major transform faults and subducting slabs. *Geoph. Jour. Res. Astr. Soc.*, 54 : 93-119.
- ZIENKIEWICS, O.C. 1971. - The finite element method in engineering science. Mc Graw Hill, New-York, 521 p.



Dans la même collection :

- N° 1 H. MARTIN - Nature, origine et évolution d'un segment de croûte continentale archéenne : contraintes chimiques et isotopiques. Exemple de la Finlande orientale. 392 p., 183 fig., 51 tabl., 4 pl. (1985). 140 F
- N° 2 G. QUERRE - Paléogénèse de la croûte continentale à l'Archéen : les granitoïdes tardifs (2,5 - 2,4 Ga) de Finlande orientale. Pétrologie et géochimie, 226 p., 74 fig., 41 tabl., 3 pl. (1985). 85 F.
- N° 3 J. DURAND - Le Grès Armoricaïn. Sédimentologie, Traces fossiles, Milieux de dépôt, 150 p., 76 fig., 9 tabl., 19 pl. (1985). 55 F.
- N° 4 D. PRIOUR - Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches. 157 p., 7 tabl., 106 fig. (1985). 55 F.





BON DE COMMANDE

A retourner à :

Centre Armoricaïn d'Etude Structurale des Socles  
 Mémoires et documents du CAESS  
 Université de Rennes I - Campus de Beaulieu  
 35042 - RENNES Cédex (France).

NOM .....  
 ORGANISME .....  
 ADRESSE .....

Veillez me faire parvenir les ouvrages suivants :

N°	Auteur	Nb Exemplaires	Prix Unitaire	TOTAL
Frais d'envoi :				
1 volume : 15,00 F.			Total	
par volume supplémentaire : 5,00 F.			Frais d'envoi	
Montant total				

Veillez établir votre chèque au nom de l'Agent Comtable de l'Université de Rennes I et le joindre au bon de commande.

**RESUME :**

Cette thèse est une étude de la naissance des zones de cisaillement. La modélisation théorique de leur amplification permet de définir les trois paramètres influençant leur développement : la déformation globale du matériau, l'hétérogénéité initiant la zone de cisaillement, et l'instabilité rhéologique du matériau. Les simulations numériques fondées sur la méthode des éléments finis quantifient ces trois paramètres. Différents cas d'instabilité ont été traités : amollissement avec la déformation, anisotropie et échauffement lié à la déformation. Enfin, l'étude de la propagation d'une zone de cisaillement permet de préciser une relation entre sa largeur, sa vitesse de propagation et la rhéologie de la roche.

**Mots-Clés :**

Déformation des roches - Zone de cisaillement -  
Modèle mathématique - Instabilité - Eléments finis -  
Anisotropie - Température - Vitesse de propagation.