



HAL
open science

Différents problèmes liés à l'estimation de l'entropie de Shannon d'une loi, d'un processus de Markov

Philippe Regnault

► **To cite this version:**

Philippe Regnault. Différents problèmes liés à l'estimation de l'entropie de Shannon d'une loi, d'un processus de Markov. Statistiques [math.ST]. Université de Caen, 2011. Français. NNT: . tel-00673694

HAL Id: tel-00673694

<https://theses.hal.science/tel-00673694>

Submitted on 24 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE CAEN BASSE-NORMANDIE

U.F.R de Sciences

ÉCOLE DOCTORALE SIMEM

THÈSE

présentée par

Philippe REGNAULT

et soutenue

le 10 novembre 2011

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

Arrêté du 07 août 2006

TITRE :

**Différents problèmes liés à l'estimation de l'entropie
de Shannon d'une loi, d'un processus de Markov**

MEMBRES du JURY :

Jean-François Bercher, professeur ESIEE, Université Paris Est – Marne-la-Vallée (*rapporteur*)

Patrice Bertail, professeur, Université Paris Ouest – Nanterre la Défense (*rapporteur*)

Valérie Girardin, MCF HDR, Université de Caen (*directrice de thèse*)

Raimondo Manca, professeur, Università degli Studi di Roma

Pascal Massart, professeur, Université Paris Sud – Orsay (*président*)

Mei-Ling Ting Lee, professeur, University of Maryland

Brigitte Vallée, directrice de recherche CNRS, Université de Caen

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à adresser toute ma gratitude à ma directrice de thèse, Valérie Girardin. Ses conseils éclairés m'ont fait avancer dans la bonne direction depuis mon année de préparation à l'agrégation. Sa connaissance du monde universitaire, ses connaissances mathématiques et la perspicacité avec laquelle elle les a distillées ont été des atouts indispensables tout au long de ces trois années de thèse, tant pour la recherche, que pour l'enseignement et les nombreuses démarches administratives, parfois complexes, qui jalonnent la formation doctorale. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir offert l'opportunité d'effectuer cette thèse sous sa tutelle et d'avoir été si disponible et impliquée.

Je souhaite remercier Patrice Bertail et Jean-François Bercher, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs commentaires m'ont permis d'améliorer certains points de mon travail.

Je remercie également Raimondo Manca, Pascal Massart, Meil-Ling Ting Lee et Brigitte Vallée pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je garde un excellent souvenir des cours de Pascal Massart lors de l'année que j'ai passé à Orsay; je suis particulièrement honoré qu'il ait accepté de présider ce jury.

Je remercie les membres du groupe de travail "Entropie, mots, stat" avec qui les échanges ont été très enrichissants. Je pense notamment à Loïck Lhote, Julien Clément et Brigitte Vallée.

Merci également à mon collègue rouennais Vlad Barbu pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour m'avoir offert l'opportunité d'en parler au groupe de travail de statistique qu'il organise au LMRS. Je suis flatté qu'il ait accepté de venir assister à ma soutenance.

J'adresse mes remerciements aux membres du LMNO. Ils ont dans un premier temps été des enseignants remarquables quand j'étais étudiant. Je pense particulièrement à Pierre Ageron, Jean-Paul Bézivin et Ivan Ramadanoff qui ont su, respectivement, susciter en moi un énorme intérêt pour les mathématiques, se rendre disponible pour répondre à mes nombreuses questions, notamment lors de mon mémoire de maîtrise, et insuffler une profonde humanité à une discipline parfois si froide et absconse, à travers des cours où la bonne humeur se conjuguaient à une réelle implication auprès des étudiants. Les membres du LMNO sont ensuite devenus des collègues estimés. J'ai particulièrement apprécié d'enseigner avec Jean-Marc Guerrier, François Couchot, Guy Laville et Dimitri Latsis. Je remercie Denis Simon pour m'avoir offert l'opportunité d'enseigner au sein de la préparation du CAPES de mathématiques. Merci à Jan Bulla, qui m'a bien aiguillé pour les TPs de R.

Je tiens à remercier les secrétaires du laboratoire, Sonia, Isabelle, Nadège, Marie-Dominique et Yoann, qui font tourner la machinerie administrative fort efficacement et se sont toujours montrés aimables et serviables les nombreuses fois où je les ai sollicités.

Merci également à l'école doctorale SIMEM sans qui cette entreprise de trois ans n'aurait jamais commencé ni abouti.

Mille remerciements également à mes collègues et amis doctorants du laboratoire. D'abord à mes co-bureaux, anciens et actuels, Gabriele, Hugues et Mohamed; leur thématique commune (la théorie des nombres) a beau être *a priori* bien éloignée de la mienne, notre cohabitation a été l'occasion de nombreux échanges enrichissants, mathématiquement et humainement. Mention spéciale pour Benjamin et Pierre, non seulement pour les discussions mathématiques et informatiques, mais surtout pour leur amitié, dont la portée dépasse largement les murs du

laboratoire. Il y a aussi David et Willy, en qui j'ai trouvé des partenaires de course à pied très motivants ; enfin, s'ils pouvaient me laisser finir devant de temps en temps, je les trouverais encore plus motivants ! Et puis, il y a les "anciens", l'infatigable tandem formé par Marc et Camille, dont l'humour incisif, la perspicacité et la soif de savoir ont été les moteurs d'une extraordinaire émulation intellectuelle, s'exerçant en toute occasion, à toute heure du jour et de la nuit. Je veux mentionner ici mon ami Torzé, qui n'est pas doctorant, mais ô combien intégré à ce groupe des "anciens". Je n'oublie pas les autres doctorants et anciens doctorants, Corentin, Mathieu, Louis, Kisoon, Julien, Nicolas, Jeremy, Pierre, Fabien, Abdoulaye, Justine. Et bien sûr, Sophie (patience, je garde la meilleure pour la fin !). Il y a une formidable ambiance entre doctorants ; j'espère qu'elle perdurera.

Je remercie mes amis Saint-Lois pour leur amitié indéfectible depuis de nombreuses années. Je les ai senti inquiets pour ma santé mentale quand ils m'entendaient m'enthousiasmer pour des "boules carrées" au début de mes études, ils ont ri à l'idée qu'on puisse vouloir "rester à l'école si longtemps" ; malgré tout, ils répondent toujours présents lorsque je les sollicite. Je tire une très grande fierté de cette amitié qui a su éviter toutes les avaries pendant si longtemps. Pourvu que ça dure !

Bien sûr, je remercie de tout coeur ma famille. Mes parents d'abord, qui ont consenti à tant d'efforts pour me voir décrocher l'agrégation, puis aujourd'hui le doctorat. Lorsque mon instituteur de CP m'a demandé ce que je voulais faire plus tard, j'ai répondu "Motard de Police ou prof de maths". Merci à eux donc, de ne pas m'avoir trop encouragé dans la première direction, et de m'avoir aidé à devenir prof de maths. Leurs encouragements ont été indispensables. Je leur dois cette réussite et plus encore. Merci aussi à mon frère Mathieu, qui m'implique régulièrement dans ses activités "paintballistiques", pour mon plus grand plaisir. Merci à ma soeur Mathilde, d'une part pour les nombreuses fois où elle a répondu positivement à mes demandes d'hébergement "parce que j'ai une conf demain à Paris", d'autre part pour la fierté que je devine chez elle à l'idée de voir son petit frère soutenir sa thèse.

Enfin, merci infiniment à Sophie, ma collègue doctorante, mais surtout ma compagne depuis plus de deux ans. Notre relation constitue pour moi une source de grande satisfaction et de sérénité au quotidien. Ces derniers mois, où j'ai été particulièrement absorbé par la rédaction de ma thèse, j'ai pu m'appuyer sur son soutien, matériel et affectif, à chaque fois que j'en ai eu besoin. Elle a en outre eu le courage de lire entièrement la présente thèse et a ainsi contribué à corriger un certain nombre de fautes de frappe qui ponctuaient les premières versions. Je remercie également sa famille, qui m'a accepté immédiatement et qui se montre très attentionnée à mon égard.

Table des matières

Remerciements	3
Index des notations	6
Introduction	9
1 L'essentiel sur les processus de Markov et l'entropie	21
1.1 Ce qu'il faut savoir sur les processus de Markov	21
1.1.1 Fonction de transition et générateur d'un processus de Markov	21
1.1.2 Chaîne immergée et classification des états	24
1.1.3 Ergodicité et comportement asymptotique	26
1.1.4 Troncature et discrétisation d'un processus de Markov	27
1.2 Entropie d'une probabilité, taux d'entropie d'un processus	27
1.2.1 Entropie de Shannon d'une probabilité	28
1.2.2 Géométrie liée à la divergence de Kullback-Leibler et lois escortes	29
1.2.3 Entropie asymptotique et taux d'entropie d'un processus de Markov	33
1.3 Boîte à outils probabiliste	34
1.3.1 Quelques résultats de convergence	34
1.3.2 Le principe de grandes déviations de Sanov	36
2 PGD pour l'estimateur de l'entropie d'une loi	39
2.1 Propriétés des lois escortes en lien avec la \mathbb{K} -géométrie	40
2.1.1 \mathbb{K} -projection d'une probabilité sur une \mathbb{K} -sphère	40
2.1.2 Propriétés des lois escortes	42
2.1.3 Approximation numérique de la \mathbb{K} -projection	46
2.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur de l'entropie	49
2.3 Principe de grandes déviations pour l'estimateur de l'entropie	50
2.4 Applications du principe de grandes déviations	51
2.4.1 Bornes exponentielles pour la probabilité des événements rares	51
2.4.2 Test du niveau d'entropie d'une variable aléatoire	52
Annexe : La transformation escorte	56
3 Estimation de l'entropie d'un processus de Markov	65
3.1 Estimation du générateur et de la loi stationnaire	66
3.1.1 Estimation à partir d'une longue trajectoire	66
3.1.2 Estimation à partir de plusieurs trajectoires indépendantes	71
3.1.3 Estimation à partir d'observations discrètes	72
3.2 Estimation de l'entropie de la loi stationnaire	75
3.3 Estimation du taux d'entropie du processus	78
3.4 Simulations	81
3.4.1 Estimation des variances asymptotiques des estimateurs	81
3.4.2 Une longue trajectoire	82

TABLE DES MATIÈRES

3.4.3	Plusieurs trajectoires indépendantes	84
3.4.4	Observations discrètes	85
4	Application aux files d'attente markoviennes	89
4.1	Modélisation d'une file d'attente	89
4.1.1	Files d'attente de capacité d'accueil infinie	91
4.1.2	Files d'attente de capacité d'accueil finie	95
4.2	Entropie et taux d'entropie d'une file d'attente	97
4.2.1	Entropie de la loi du nombre de clients dans la file	98
4.2.2	Taux d'entropie d'une file d'attente de capacité finie	99
4.3	Estimation de l'entropie et du taux d'entropie d'une file	99
4.3.1	Estimation des intensités d'arrivée et de départ, capacité d'accueil finie	100
4.3.2	Estimation de la loi du nombre de clients d'une file de capacité finie et de son entropie	104
4.3.3	Estimation du taux d'entropie d'une file d'attente de capacité finie	107
4.3.4	Estimation des intensités d'arrivée et de départ, capacité d'accueil infinie	108
	Bibliographie	112

Index des notations

- E : Ensemble fini ou dénombrable ($E = \{0, \dots, s\}$ ou $E = \mathbb{N}$ selon le cas).
 $|E|$: Cardinal de l'ensemble E , si E est fini.
 \mathcal{P} : Probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$, où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E .
 U : Loi uniforme sur E .
 $\mathcal{M}_1(E)$: Ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$.
 $\mathcal{M}_1^*(E)$: Ensemble des probabilités de support E , soit
 $\mathcal{M}_1^*(E) = \{P \in \mathcal{M}_1(E) : P(i) > 0, i \in E\}$.
 $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$: Ensemble des probabilités de support E possédant un unique mode.
 $\mathbb{S}(P)$: Entropie de Shannon de P , soit $\mathbb{S}(P) = -\sum_{i \in E} P(i) \log P(i)$.
 $\mathbb{K}(Q|P)$: Divergence de Kullback-Leibler de Q par rapport à P , soit
 $\mathbb{K}(Q|P) = \sum_{i \in E} Q(i) \log \frac{Q(i)}{P(i)}$.
 E_P^k : Loi escorte de paramètre k associée à P , soit $E_P^k(i) = P(i)^k / \sum_{j \in E} P(j)^k$, pour tout $i \in E$.
 $S_{\mathbb{K}}(P, \rho)$: Sphère relative à la divergence de Kullback-Leibler centrée en P , de rayon ρ , soit
 $S_{\mathbb{K}}(P, \rho) = \{Q \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{K}(Q|P) = \rho\}$.
 $I_{\mathbb{S}}(P, s)$: Projection au sens de Kullback-Leibler de la probabilité P sur la \mathbb{K} -sphère
 $S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s)$, soit $I_{\mathbb{S}}(P, s) = \inf_{Q \in S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s)} \mathbb{K}(Q|P)$.
 $I_M(P, \cdot)$: Approximation numérique de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$; voir page 46.
 $\mathbb{I}(s_0, s_1)$: Distance au sens de Kullback-Leibler de la \mathbb{K} -sphère $S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s_0)$ à la \mathbb{K} -sphère
 $S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s_1)$, soit $\mathbb{I}(s_0, s_1) = \inf_{Q \in S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s_1)} \inf_{P \in S_{\mathbb{K}}(U, \log |E| - s_0)} \mathbb{K}(Q|P)$.
 \hat{P}_n : Loi empirique sur E associée à un n -uplet de variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes de loi P , soit $\hat{P}_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{k \in E} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}$, pour tout $i \in E$.
 \hat{S}_n : Estimateur par plug-in de $\mathbb{S}(P)$ construit à partir de n variables aléatoires indépendantes de loi P , soit $\hat{S}_n = \mathbb{S}(\hat{P}_n)$.
 $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$: Processus markovien de sauts (PM) homogène et régulier d'espace d'état E .
 $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Suite des états visités par le processus \mathbf{X} .
 $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Suite des temps de séjour du processus \mathbf{X} en les Y_n .
 \mathbf{A} : Générateur infinitésimal du processus \mathbf{X} .
 \mathcal{G} : Ensemble des générateurs ergodiques sur E .
 Π : Fonction qui à un processus de générateur $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ associe sa loi stationnaire $P = \Pi(\mathbf{A})$,
soit $\Pi_i(\mathbf{A}) = \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})}$, où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ est le (i, i) -ème cofacteur de \mathbf{A} .
 $\mathbf{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Suite des états de \mathbf{X} aux instants $n\eta$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$.
 \mathbf{P}_{dis} : Matrice de transition de la chaîne \mathbf{Z} , soit $\mathbf{P}_{dis} = \exp(\eta \mathbf{A})$.
 $\mathbb{H}(X)$: Taux d'entropie d'un PM ergodique à espace d'état fini; voir page 33.
 $\hat{A}_T, \hat{A}_k^c, \hat{A}_n^d$: Estimateurs du générateur \mathbf{A} d'un PM ergodique construits à partir de l'observation, respectivement d'une trajectoire du processus, de k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation indépendants de même loi, ou à partir d'observations discrètes équiréparties.
 $\hat{P}_T, \hat{P}_k^c, \hat{P}_n^d$: Estimateurs par plug-in de la loi stationnaire d'un PM, soit $\hat{P}_T = \Pi(\hat{A}_T)$,
 $\hat{P}_k^c = \Pi(\hat{A}_k^c)$ et $\hat{P}_n^d = \Pi(\hat{A}_n^d)$.

INDEX DES NOTATIONS

- $\widehat{P}_{T,emp}$: Estimateur empirique de la loi stationnaire d'un PM ergodique.
 $\widehat{H}_T, \widehat{H}_k^c, \widehat{H}_n^d$: Estimateurs par plug-in du taux d'entropie d'un PM ergodique d'espace d'état fini.
 λ, μ : Intensités moyennes d'arrivée et de départ dans une file d'attente.

Introduction

On étudie l'estimation de l'entropie d'une probabilité à partir d'observations indépendantes ou markoviennes, et du taux d'entropie d'un processus markovien de sauts, à partir d'observations continues ou discrètes. Plusieurs problèmes connexes sont traités, certains en amont de l'estimation, comme l'étude de la géométrie de la divergence de Kullback-Leibler en lien avec la transformation escorte. D'autres, apparaissent comme des applications des résultats d'estimation obtenus. On construit ainsi des tests sur le niveau d'entropie d'une probabilité, à partir d'un principe de grandes déviations pour la suite des estimateurs empiriques de l'entropie d'une suite de variables indépendantes. On étudie également quelques propriétés en lien avec l'estimation de l'entropie et du taux d'entropie des files d'attente modélisées par des processus de naissance et de mort.

L'entropie d'une loi de probabilité

Shannon [57] adapte le concept d'entropie, introduit par Boltzmann et Gibbs en thermodynamique, aux probabilités, et introduit l'entropie d'une probabilité afin de mesurer la quantité d'information – ou l'incertitude – d'une source d'information : si E est un ensemble fini, et P une probabilité sur E , l'entropie de P , dite entropie de Shannon, est donnée par

$$\mathbb{S}(P) = - \sum_{i \in E} P(i) \log P(i),$$

avec la convention $0 \log 0 = 0$. Shannon établit, entre autres, que l'entropie d'une probabilité P représente le taux de compression optimal d'une source sans mémoire de loi P , ou encore la capacité de transmission d'une source d'information émettant des lettres indépendantes selon une loi P à travers un canal. La définition d'entropie est étendue par Shannon [57] et Kolmogorov [44] aux probabilités à support dénombrable ou continu.

Kullback et Leibler [45] introduisent la divergence d'une probabilité Q par rapport à une autre probabilité P , toutes deux définies sur un même ensemble fini E , en posant

$$\mathbb{K}(Q|P) = \sum_{i \in E} Q(i) \log \frac{Q(i)}{P(i)},$$

avec les conventions $0 \log(0/x) = 0$, $0 \log(0/0) = 0$ et $x \log(x/0) = +\infty$, pour tout $x \in]0, 1]$. La divergence de Kullback-Leibler, ou information de Kullback-Leibler entre Q et P , mesure l'incertitude introduite lorsque la loi P régissant un phénomène aléatoire est remplacée par la loi Q .

Notons que

$$\mathbb{S}(P) = \log |E| - \mathbb{K}(P|U) = \mathbb{S}(U) - \mathbb{K}(P|U),$$

où U désigne la loi uniforme sur E et $|E|$ désigne le nombre d'éléments de E . Ainsi, en modélisation statistique, lorsqu'aucune information n'est connue a priori sur la loi du phénomène observé, choisir la probabilité qui maximise l'entropie permet de privilégier la loi qui coïncide le mieux avec les observations en utilisant toute l'information qu'elles fournissent. Cette méthode

d'estimation, appelée méthode du maximum d'entropie, introduite par Jaynes [40], recouvre la méthode du maximum de vraisemblance dans le cas paramétrique; voir Dacunha-Castelle et Duflo [20], chapitre 7.3.

Géométrie liée à l'information de Kullback-Leibler

La divergence de Kullback-Leibler n'est pas mathématiquement une distance : elle n'est pas symétrique et ne satisfait pas l'inégalité triangulaire. Elle induit cependant une géométrie sur l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des probabilités sur un ensemble fini E . Csiszár [18] est le premier à étudier cette géométrie. Il montre que la divergence induit une notion d'orthogonalité et calcule la projection, relativement à la divergence, d'une probabilité sur certains hyperplans.

Plus tard, Sgarro [56] formalise l'aspect géométrique de la divergence de Kullback-Leibler en munissant l'ensemble $\mathcal{M}_1^*(E)$ des probabilités de E chargeant tous les éléments, d'une structure d'espace vectoriel pour laquelle la divergence de Kullback-Leibler possède des propriétés similaires au carré d'une norme.

Pour une probabilité $P \in \mathcal{M}_1^*(E) \setminus \{U\}$, la droite relative à cette structure d'espace vectoriel passant par U et P est l'ensemble $\{E_P^k, k \in \mathbb{R}\}$, où la probabilité E_P^k est définie par

$$E_P^k(i) = \frac{P(i)^k}{\sum_{j \in E} P(j)^k}, \quad i \in E.$$

Introduites par Beck et Schlögl [8] sous le nom de lois escortes dans le cadre de la théorie du chaos, les probabilités E_P^k , $k \in \mathbb{R}$, associées à P , apparaissent également dans la théorie de l'information en lien avec l'entropie de Rényi (voir Bercher [9]). Des détails importants du phénomène étudié apparaissent souvent plus clairement en considérant l'une des lois escortes plutôt que la loi elle-même (voir Tsallis [60]).

L'aspect privilégié ici est l'aspect géométrique. Les lois escortes sont les projections de P relativement à la divergence de Kullback-Leibler, sur les sphères relatives à la divergence, centrées en la loi uniforme. Précisément, le résultat suivant est établi dans la partie 2.1.1 du chapitre 2.

Théorème (Théorème 2.1, chapitre 2, page 40). *Soit P une probabilité de support fini E . Soient $p^* = \max_{i \in E} P(i)$ et $m = |\{i \in E : P(i) = p^*\}|$ le nombre de modes de P . Soient $\mathbb{S}(P)$ l'entropie de P et $s \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\inf_{Q \in \mathbb{S}^{-1}(s)} \mathbb{K}(Q|P) = \begin{cases} \mathbb{K}(E_P^k|P) & \text{si } s \in]\log m, \log |E|], \quad \text{avec } k > 0 \text{ tel que } \mathbb{S}(E_P^k) = s, \\ -\log p^* - s & \text{si } s \in [0, \log m], \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

On note $I_{\mathbb{S}}(P, s) = \inf_{Q \in \mathbb{S}^{-1}(s)} \mathbb{K}(Q|P)$ la divergence entre P et la sphère relative à la divergence de Kullback-Leibler, centrée en la probabilité uniforme et de rayon $\log |E| - s$.

Expliciter $I_{\mathbb{S}}(P, s)$ pour $s \in]\log m, \log |E|]$ nécessite de résoudre en $k > 0$, l'équation $\mathbb{S}(E_P^k) = s$, ce qui ne semble pas possible analytiquement. On établit plusieurs propriétés des lois escortes en lien avec l'entropie dans le chapitre 2, prouvant ainsi que la fonction $k \mapsto \mathbb{S}(E_P^k)$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur $] \log m, \log |E| [$, plusieurs fois continûment dérivable. On peut alors facilement résoudre numériquement l'équation $\mathbb{S}(E_P^k) = s$, puis construire une approximation $I_M(P, \cdot)$ de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$, en interpolant linéairement les solutions approchées des M équations

$$\mathbb{S}(E_P^k) = s_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

où les points s_k , $k = 1, \dots, M$, sont équidistribués le long de l'intervalle $] \log m, \log |E| [$, soit $s_k = (\log |E| - \log m)k / (M + 1)$. L'approximation obtenue est suffisamment précise pour pouvoir remplacer $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ par $I_M(P, \cdot)$ dans la plupart des applications, sans perte de précision significative.

Par ailleurs, la divergence de Kullback-Leibler entre deux niveaux d'entropie $\mathbb{S}^{-1}(s_0)$ et $\mathbb{S}^{-1}(s_1)$ est également déterminée. Précisément, il est établi numériquement que, pour tous niveaux d'entropie $s_0, s_1 \in [0, \log |E|]$, la distance au sens de la divergence de Kullback-Leibler, entre les sphères $\mathbb{S}^{-1}(s_0) = \{P \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{S}(P) = s_0\}$ et $\mathbb{S}^{-1}(s_1) = \{Q \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{S}(Q) = s_1\}$, définie par

$$\mathbb{I}(s_0, s_1) = \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} \inf_{Q \in \mathbb{S}^{-1}(s_1)} \mathbb{K}(Q|P), \quad (3)$$

est atteinte pour l'une des $|E|$ probabilités P possédant un unique mode de poids p et les autres valeurs de même poids $(1-p)/(|E|-1)$, où p est l'unique solution de l'équation

$$-p \log p - (1-p) \log \frac{1-p}{|E|-1} = s_0.$$

De plus, $\mathbb{I}(s_0, s_1) = \mathbb{K}(E_P^k|P)$, où k est tel que $\mathbb{S}(E_P^k) = s_1$.

Estimation de l'entropie d'une probabilité à partir d'observations indépendantes

L'estimation de l'entropie d'une probabilité P à partir d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de loi commune P a été étudiée dès les années 1950. Basharin [7] déduit de la loi des grands nombres que l'estimateur par plug-in de $\mathbb{S}(P)$, égal à l'entropie $\mathbb{S}(\hat{P}_n)$ de la probabilité empirique associée aux observations, c'est-à-dire, $\hat{P}_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}$, converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque n tend vers l'infini. Zubkov [67] et Harris [39] établissent respectivement que l'erreur d'estimation $\mathbb{S}(P) - \mathbb{S}(\hat{P}_n)$ converge en loi à vitesse \sqrt{n} vers une loi normale si P n'est pas uniforme, et à vitesse $2n$ vers une somme de variables de loi $\chi^2(1)$ lorsque P est uniforme. Leur démonstration est basée sur le fait que l'estimation de l'entropie à partir d'observations indépendantes est un cas particulier d'un schéma d'observation plus complexe. Toutefois, la référence à ce « schéma d'observation plus complexe » donnée par les auteurs reste inaccessible aux non-russophones... Par souci d'exhaustivité, les bonnes propriétés asymptotiques de $\mathbb{S}(\hat{P}_n)$ énoncées dans le théorème suivant, sont (re)démonstrées dans la partie 2.2 du chapitre 2.

Théorème (Théorème 2.2, chapitre 2, page 49). *Soit P une probabilité sur l'ensemble fini E .*

L'estimateur par plug-in $\hat{S}_n = \mathbb{S}(\hat{P}_n)$ défini à partir d'un n -échantillon de P converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque le nombre d'observations n tend vers l'infini. De plus,

- *si P n'est pas uniforme, alors $\sqrt{n}(\hat{S}_n - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance*

$$\Sigma_{\mathbb{S}}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\log \frac{P(i)}{1 - \sum_{j=1}^N P(j)} \right]^2 P(i)[1 - P(i)];$$

- *si P est uniforme, disons $P = U$, alors $2n[\hat{S}_n - \mathbb{S}(U)]$ converge vers $\sum_{i \in E} \beta_i Y_i$, où $\beta_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in E$ et les variables Y_i sont indépendantes, de loi $\chi^2(1)$.*

Principe de grandes déviations

Il est bien connu, voir Sanov [55], que la suite des lois empiriques $(\hat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ associée à une suite de variables aléatoires indépendantes de loi commune P , satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathcal{M}_1(E)$ de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux $\mathbb{K}(\cdot|P)$. Précisément, pour toute partie A de $\mathcal{M}_1(E)$, mesurable et d'intérieur non vide, on a

$$\mathbb{P}(\hat{P}_n \in A) \leq (n+1)^{|E|+1} \exp\left(-n \inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P)\right),$$

où \bar{A} désigne l'adhérence de A ; de plus, la décroissance exponentielle donnée à droite est optimale dans le sens où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\hat{P}_n \in A) = - \inf_{Q \in \bar{A}} \mathbb{K}(Q|P).$$

Ainsi, la probabilité pour que la loi empirique s'écarte de son comportement moyen décroît exponentiellement vite avec le défaut d'information.

Dans la partie 2.1 du chapitre 2, le principe de grandes déviations suivant est établi pour la suite des estimateurs empiriques $\mathbb{S}(\hat{P}_n)$ de l'entropie de P , en appliquant le théorème de Sanov à la famille d'événements $A = \mathbb{S}^{-1}(] - \infty, s])$, $s \in \mathbb{R}$.

Théorème (Théorème 2.3, chapitre 2, page 50). *La suite des estimateurs $\{\hat{S}_n : n \geq 1\}$ de l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P construits à partir d'observations indépendantes de loi commune P , satisfait le principe de grandes déviations sur \mathbb{R} , de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ donnée par (1). Précisément, pour tout borélien A de \mathbb{R} d'intérieur non vide,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\hat{S}_n \in A) = - \inf_{s \in \bar{A}} I_{\mathbb{S}}(s),$$

où \bar{A} désigne l'adhérence de A .

Ainsi, la bonne fonction de taux gouvernant le principe de grandes déviations de la suite des estimateurs empiriques de l'entropie de P est la projection de P sur les sphères relativement à la divergence de Kullback-Leibler, centrées en la loi uniforme. Le théorème précédent met en lien le comportement asymptotique de l'estimateur \hat{S}_n de $\mathbb{S}(P)$ avec la géométrie de Kullback-Leibler et les lois escortes associées à P .

Ce principe de grandes déviations est appliqué au calcul des bornes explicites pour la probabilité des événements $(\mathbb{S}(\hat{P}_n) > \mathbb{S}(P) + \epsilon)$ et $(\mathbb{S}(\hat{P}_n) < \mathbb{S}(P) - \epsilon)$, pour $\epsilon > 0$. Ces bornes sont obtenues en remplaçant $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ par son approximation $I_M(P, \cdot)$. On montre dans le théorème 2.4 de la partie 2.4.1 du chapitre 2, que la perte de précision consécutive à cette substitution est négligeable pourvu que la résolution numérique des équations (2) soit suffisamment fine.

Test du niveau d'entropie d'une probabilité

En compression de données, l'entropie d'une probabilité P sur l'alphabet du message à encoder est la borne inférieure du nombre de bits moyen par symbole nécessaire pour encoder une suite de lettres indépendantes de l'alphabet (voir Cover et Thomas [16], chapitres 5 et 12). Plusieurs algorithmes, tels que le codage de Huffman, atteignent asymptotiquement cette borne, pourvu que P soit connue. Si P est inconnue, des codes de compression universels, tels que l'algorithme de Lempel-Ziv, permettent de compresser de manière à ce que, asymptotiquement, le nombre moyen de bits par lettre n'excède pas s bits, pourvu que l'entropie de P soit plus petite que s . Il est alors nécessaire de décider, en fonction de la suite des lettres indépendantes observées, si $\mathbb{S}(P) < s$ ou non. On peut prendre une telle décision en testant le niveau d'entropie de P .

Dans la partie 2.4.2 du chapitre 2, on construit des tests du niveau d'entropie d'une loi P , dont les régions de rejet sont obtenues en supposant que l'approximation $I_M(P, \cdot)$ de la fonction de taux est supérieure à un seuil explicite, dépendant du nombre d'observations. Une majoration des erreurs de première et seconde espèces est établie dans le théorème suivant.

Théorème (Théorème 2.5, chapitre 2, page 54). *Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi P de support fini E , telle qu'il existe $\delta > 0$ pour lequel $P(i) > \delta$ et $|P(i) - P(j)| > \delta$, pour tous $i, j \in E$. Soient $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ la bonne fonction de taux gouvernant le principe de grandes déviations de $\hat{S}_n = \mathbb{S}(\hat{P}_n)$ donnée par (1) et $I_M(P, \cdot)$ son approximation construite à partir de M points équirépartis sur l'intervalle $]0, \log |E|$, selon la méthode décrite par la proposition 2.1.*

1. Soit \tilde{T}_1 le test de $H_0 : \mathbb{S}(P) = s_0$ contre $H_1 : \mathbb{S}(P) = s_1$, dont la région de rejet est $\tilde{C}_1 = \{\underline{x}_n : I_M(P_n, \hat{S}_n) \geq \delta_n + \frac{3}{M}\}$, où P_n est la probabilité P telle que $\mathbb{I}(s_0, \hat{S}_n) = \mathbb{K}(E_{P_n}^k | P_n)$ et $\delta_n = (|E| + 1)\log(n + 1)/n$.

L'erreur de première espèce de \tilde{T}_1 vérifie $\tilde{\alpha}_n^1 \leq 1/(n + 1)$. Son erreur de seconde espèce $\tilde{\beta}_n^1$ vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\beta}_n^1 \leq -\mathbb{I}(s_0, s_1),$$

où $\mathbb{I}(s_0, s_1)$ est donnée par (3).

2. Soit \tilde{T}_2 le test de $H_0 : \mathbb{S}(P) < s_0$ contre $H_1 : \mathbb{S}(P) \geq s_0$, dont la région de rejet est $\tilde{C}_2 = \{\underline{x}_n : I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) \geq \delta_n + \frac{3}{M}\}$ si $\hat{S}_n > s_0$, et l'ensemble vide si $\hat{S}_n \leq s_0$. Son erreur de première espèce vérifie $\tilde{\alpha}_n^2 \leq 1/(n + 1)$.

Entropie et taux d'entropie d'un processus de Markov, discret ou continu

La notion d'entropie en tant que mesure de l'information peut être étendue aux suites de variables aléatoires et aux processus stochastiques. Pour simplifier, on désigne ici par processus toute famille $\mathbf{X} = (X_t)_t$ de variables aléatoires, indexée par \mathbb{N} ou \mathbb{R}_+ . Une première approche consiste à étudier l'entropie $\mathbb{S}(X_t)$ de chaque coordonnée X_t de \mathbf{X} . Si le processus est stationnaire, ses lois marginales sont égales à une loi commune P dite loi stationnaire, et leurs entropies sont alors égales à $\mathbb{S}(P)$, qui mesure la quantité d'information du processus à chaque instant. Lorsque le processus n'est pas stationnaire, les entropies marginales peuvent être distinctes et l'étude de la quantité d'information du processus à chaque instant devient beaucoup plus compliquée.

Pour des processus ergodiques, on peut considérer la loi asymptotique, qui décrit le comportement asymptotique du processus. L'entropie de cette loi mesure la quantité d'information du processus à l'équilibre, c'est-à-dire, lorsque celui-ci se stabilise à son comportement asymptotique. Elle ne tient cependant pas compte de l'incertitude avant l'équilibre, contrairement au taux d'entropie du processus, qui est une mesure de l'incertitude moyenne du processus par unité de temps, et prend en compte l'ensemble du comportement du processus.

Précisément, le taux d'entropie d'une suite $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E fini, est la limite, si elle existe,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{S}(X_1, \dots, X_n)}{n}.$$

Par additivité de l'entropie de Shannon, le taux d'entropie d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi commune P est égal à l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P . Lorsque $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ergodique et apériodique, le taux d'entropie existe et s'exprime explicitement en fonction de la matrice de transition $\mathbf{P} = (\mathbf{P}(i, j))_{(i, j) \in E^2}$ de la chaîne et de sa loi asymptotique P . Précisément,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = - \sum_{i \in E} P(i) \sum_{j \in E} \mathbf{P}(i, j) \log \mathbf{P}(i, j). \quad (4)$$

Notons que si la loi asymptotique P est la loi initiale de la chaîne, alors toutes les coordonnées X_n sont de loi P , de sorte que les entropies marginales et l'entropie asymptotique sont égales.

De même, pour un processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à temps continu, l'entropie partielle $S_T(\mathbf{X})$ du processus $X_{(T)} = (X_t)_{t \in [0, T]}$ tronqué à l'instant $T > 0$, est définie par

$$S_T(\mathbf{X}) = - \int f_{X_{(T)}} \log f_{X_{(T)}} d\mu_T,$$

où $f_{X_{(T)}}$ est la densité de la loi $P_{X_{(T)}}$ de $X_{(T)}$ par rapport à la restriction μ_T à $E^{[0, T]}$ d'une mesure de référence μ définie sur $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{P}(E)^{\mathbb{R}_+})$; le taux d'entropie $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ du processus est la

limite, si elle existe,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} S_T(\mathbf{X}).$$

Plusieurs auteurs ont étudié le taux d'entropie de processus à temps continu, et ont montré son existence pour des processus ergodiques, sous des conditions d'intégrabilité additionnelles sur le processus et la mesure de référence (voir Girardin [32] pour une synthèse historique des différents résultats existants).

Parmi les processus ergodiques admettant un taux d'entropie, les processus markoviens de sauts sont des exemples particulièrement intéressants. Ces processus satisfont la propriété de Markov, selon laquelle l'état futur du processus conditionnellement à tout le passé, ne dépend que du présent. Précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, tout $h > 0$ et pour toutes familles $0 \leq t_1 < \dots < t_r = t$ et $i_1, \dots, i_r \in E$, $j \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i_r, X_{t_{r-1}} = i_{r-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i_r).$$

Un tel processus s'identifie à son historique, c'est-à-dire à la suite $((Y_n, \Delta_n))_{n \in \mathbb{N}}$, où $(Y_n)_n$ désigne la suite des états visités par le processus et $(\Delta_n)_n$ la suite des temps de séjour successifs en chacun des états. Le comportement d'un processus markovien de sauts est caractérisé par son générateur infinitésimal $\mathbf{A} = (\mathbf{A}(i, j))_{(i, j) \in E^2}$, dont les coefficients sont les vitesses moyennes de passage d'un état à un autre. Lorsqu'il existe une succession de vitesses $\mathbf{A}(i_r, i_{r+1})$, $r \in \mathbb{N}$, non nulles permettant de relier tout état i à tout autre état j , le processus est ergodique et possède une loi asymptotique P qui est un vecteur propre de \mathbf{A} associé à la valeur propre 0. Précisément,

$$P(i) = \Pi_i(\mathbf{A}) = \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})}, \quad i \in E, \quad (5)$$

où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ est le (i, i) ^{ème} cofacteur de \mathbf{A} (voir Albert [1]). L'entropie asymptotique du processus est alors également une fonction explicite de \mathbf{A} ; précisément

$$\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A}) = - \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \log \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})}. \quad (6)$$

Albert [1] construit une mesure μ dominant toute restriction $X_{(T)} = (X_t)_{t \in [0, T]}$ d'un processus markovien de sauts $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à un intervalle de temps fini $[0, T]$ par l'intermédiaire de l'identification de \mathbf{X} à son historique. Il calcule explicitement la densité $f_{X_{(T)}}$ correspondante. Bad Dumitrescu [6] prouve que le taux d'entropie d'un processus markovien de sauts ergodique à espace d'état fini existe pour cette mesure de référence μ et en donne une expression explicite, en fonction du générateur et de la loi asymptotique. Précisément,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = - \sum_{i \in E} P(i) \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j) \log \mathbf{A}(i, j) + \sum_{i \in E} P(i) \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j).$$

Grâce à (6), cette expression fournit une expression explicite de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ en fonction du générateur :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = H(\mathbf{A}) = - \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j) \log \mathbf{A}(i, j) + \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j). \quad (7)$$

Estimation de l'entropie d'une loi à partir d'observations markoviennes

Très peu de résultats existent sur l'estimation de l'entropie d'une loi à partir de données dépendantes. Gao *et al.* [30] calculent plusieurs estimateurs de l'entropie de la loi stationnaire de suites stationnaires, en utilisant l'algorithme de compression universel de Ziv-Lempel [66] et la méthode des arbres de contextes pondérés. La convergence presque sûre des estimateurs

est établie. Les hypothèses très faibles sur les suites considérées ne permettent pas aux auteurs d'établir les lois asymptotiques des estimateurs.

Ciuperca et Girardin [15] prouvent que l'entropie $\mathbb{S}(\widehat{P}_n)$ de la loi empirique \widehat{P}_n associée à l'observation des n premiers termes d'une chaîne de Markov ergodique et apériodique, de loi asymptotique P , converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$. De plus, la loi asymptotique de $\mathbb{S}(\widehat{P}_n)$ est calculée explicitement grâce à la méthode delta.

À notre connaissance, aucun résultat sur l'estimation de l'entropie d'une loi à partir d'observations continues ou discrètes d'un processus à temps continu n'existe dans la littérature. Dans le chapitre 3, on construit plusieurs estimateurs de l'entropie d'une loi P à partir de l'observation d'un processus markovien de sauts $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ergodique d'espace d'état fini et de loi asymptotique P . Trois schémas d'observation sont discutés selon que le processus est observé continûment au cours d'une longue trajectoire, au cours de plusieurs trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation indépendants, ou qu'il est observé en des temps discrets équidistants. Dans les trois cas, l'entropie de la loi asymptotique P est estimée par l'image par la fonction S donnée par (6), d'estimateurs de P ; on parle d'estimation par plug-in (il n'y pas d'équivalent en français pour cette expression). Les estimateurs de P sont eux-mêmes obtenus par plug-in en injectant des estimateurs du générateur \mathbf{A} du processus dans la fonction Π donnée par (5), ou empiriquement, en calculant la proportion du temps passé en chaque état.

Albert [1] calcule l'estimateur du maximum de vraisemblance \widehat{A}_T de \mathbf{A} à partir de l'observation d'une trajectoire jusqu'à un instant $T > 0$ et établit les bonnes propriétés asymptotiques de \widehat{A}_T lorsque T tend vers l'infini. La fonction Π étant régulière, l'estimateur $\Pi(\widehat{A}_T)$ de P , obtenu par plug-in, en injectant l'estimateur \widehat{A}_T dans la fonction Π , hérite des propriétés asymptotiques de \widehat{A}_T . La proposition suivante, démontrée dans la partie 3.1.1 du chapitre 3, établit la forte consistance de $\Pi(\widehat{A}_T)$ et sa normalité asymptotique.

Proposition (Proposition 3.1, chapitre 3, page 67). *L'estimateur par plug-in $\widehat{P}_T = \Pi(\widehat{A}_T)$ de P , obtenu à partir d'une trajectoire observée jusqu'à l'instant $T > 0$, converge presque sûrement vers P lorsque T tend vers l'infini et $\sqrt{T}(\widehat{P}_T - P)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{P,c,1}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2 \cdot D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$, où $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$ est diagonale, de coefficients diagonaux $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2((i,j),(i,j)) = \mathbf{A}(i,j)/P(i)$.*

De plus, la différentielle $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ est non nulle, de sorte que la loi asymptotique de $\sqrt{T}(\widehat{P}_T - P)$ n'est pas dégénérée et la vitesse de convergence est optimale.

Le comportement asymptotique et le temps de calcul de l'estimateur par plug-in $\Pi(\widehat{A}_T)$ sont comparés à ceux de l'estimateur empirique $\widehat{P}_{T,emp} = (\int_0^T \mathbf{1}_{\{X_t=i\}})_{i \in E}$. La forte consistance de $\widehat{P}_{T,emp}$ est une conséquence immédiate de l'ergodicité du processus. Taga [59] établit la normalité asymptotique de chaque coordonnée. Toutefois, la loi asymptotique du vecteur $\sqrt{T}(\widehat{P}_{T,emp} - P)$ reste indéterminée, ce qui constitue un obstacle pour son utilisation pour une estimation par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire. Par ailleurs, le calcul de l'estimateur pas plug-in \widehat{P}_T nécessite le calcul de cofacteurs; la complexité en temps de calcul de l'estimateur par plug-in, quoique polynomiale en fonction du nombre d'états et du temps d'observation, est moins bonne que celle de l'estimateur empirique, dont le temps de calcul dépend linéairement du nombre d'états et du temps d'observation.

Chiquet et Limnios [14] établissent les bonnes propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance \widehat{A}_k^c de \mathbf{A} obtenu à partir de l'observation de k trajectoires indépendantes, censurées par des temps d'observation T_1, \dots, T_k indépendants entre eux et indépendants des trajectoires.

Proposition (Proposition 3.2, chapitre 3, page 72). *L'estimateur par plug-in $\widehat{P}_k^c = \Pi(\widehat{A}_k^c)$ de P construit à partir de k trajectoires indépendantes censurées par une suite $(T_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi ν , converge presque sûrement vers P lorsque k tend vers l'infini et $\sqrt{k}(\widehat{P}_k^c - P)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{P,c,m}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2 \cdot D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$, où $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2$ est diagonale de coefficients diagonaux $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2((i,j),(i,j)) =$*

$$\mathbf{A}(i, j) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^t P(X_u = i) du dv(t) \right).$$

De plus, la différentielle $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ est non nulle, de sorte que la loi asymptotique de $\sqrt{k}(\widehat{P}_k^c - P)$ n'est pas dégénérée et que la vitesse de convergence est optimale.

Lorsque le processus est observé en des temps discrets, la suite des observations forme une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $\mathbf{P} = \exp(\eta\mathbf{A})$, où η est la période constante entre deux observations. Lorsque la matrice \mathbf{P} induit un unique générateur \mathbf{A} tel que $\mathbf{P} = \exp(\eta\mathbf{A})$, c'est-à-dire lorsque \mathbf{P} admet un unique logarithme, Baldt et Sørensen [11] établissent les bonnes propriétés asymptotiques de l'estimateur $\widehat{A}_n^d = \exp^{-1}(\widehat{\mathbf{P}}_n)/\eta$, où $\widehat{\mathbf{P}}_n$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de \mathbf{P} . L'estimateur $\widehat{P}_n^d = \Pi(\widehat{A}_n^d)$ de la loi asymptotique P du processus est alors fortement consistant et asymptotiquement normal, comme énoncé ci-dessous.

Proposition (Proposition 3.4, chapitre 3, page 74). *L'estimateur par plug-in $\widehat{P}_n^d = \Pi(\widehat{A}_n^d)$ de P , construit à partir de n observations équiréparties $X_0, \dots, X_{\eta(n-1)}$, vérifie les propriétés suivantes.*

1. *La probabilité que \widehat{P}_n^d soit bien défini tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\exp(\eta\mathbf{A})$ admette un unique logarithme.*
2. *Lorsque \widehat{P}_n^d est bien défini, c'est un estimateur fortement consistant de P et $\sqrt{n}(\widehat{P}_n^d - P)$ est asymptotiquement normal de variance asymptotique $\Sigma_{P,d}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},d}^2 \cdot D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$, où $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ est une fonction explicite de l'information de Fisher de \mathbf{P} .*

De plus, la différentielle $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ est non nulle, de sorte que la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\widehat{P}_n^d - P)$ n'est pas dégénérée et que la vitesse de convergence est optimale.

Les estimateurs par plug-in $\widehat{S}_{T,emp} = \mathbb{S}(\widehat{P}_{T,emp})$, $\widehat{S}_T = \mathbb{S}(\widehat{P}_T)$, $\widehat{S}_k^c = \mathbb{S}(\widehat{P}_k^c)$ et $\widehat{S}_n^d = \mathbb{S}(\widehat{P}_n^d)$ de l'entropie de P sont fortement consistants. La nature de leur loi asymptotique, obtenue grâce à la méthode delta généralisée présentée dans la partie 1.3.1 du chapitre 1, dépend de l'annulation ou non de la dérivée de S .

Théorème (Théorème 3.1, chapitre 3, page 75).

1. *L'estimateur \widehat{S}_n^d est bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\exp(\eta\mathbf{A})$ admette un unique logarithme.*
2. *Les estimateurs \widehat{S}_T , $\widehat{S}_{T,emp}$, \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d sont fortement consistants.*
3. *Si la différentielle $D_S(\mathbf{A})$ n'est pas nulle, alors $\sqrt{T}(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P))$, $\sqrt{k}(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))$ et $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P))$ convergent en loi vers des lois normales centrées, de variances explicites, dépendant de la différentielle $D_S(\mathbf{A})$ et des variances des estimateurs de \mathbf{A} .*
4. *Si $D_S(\mathbf{A})$ est nulle, alors $2T(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_T)$, $2k(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c)$ et $2n(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)$ convergent en loi vers $\sum_{i \in E} \sum_{j \neq i} \alpha_{i,j} Y_{i,j}$ lorsque T tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$ suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}$ dépendent des variances asymptotiques des estimateurs du générateur et de la matrice hessienne D_S^2 .*

On établit dans la partie 3.2 du chapitre 3, une condition explicite sur \mathbf{A} pour l'annulation de $D_S(\mathbf{A})$ pour les processus à 2 ou 3 états. Précisément, $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si la loi asymptotique P est uniforme. L'ensemble des générateurs dont la loi asymptotique est uniforme est explicite.

De manière générale, l'entropie étant maximale pour la loi uniforme, si le processus est asymptotiquement uniforme, alors la dérivée $D_S(\mathbf{A})$ est nulle. Établir la réciproque est difficile, les nombreuses variables impliquées rendant les calculs inextricables.

Estimation du taux d'entropie d'un processus markovien de sauts

Ciuperca et Girardin [15] étudient plusieurs estimateurs par plug-in du taux d'entropie d'une chaîne de Markov $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergodique et apériodique, obtenus en injectant des estimateurs

de la matrice de transition \mathbf{P} et de la loi asymptotique P de la chaîne dans (4). Les bonnes propriétés asymptotiques de ces estimateurs sont établies. Girardin et Sesboué [37] mènent une étude comparative de ces estimateurs pour des chaînes à deux états.

À notre connaissance, aucun résultat n'existe sur l'estimation du taux d'entropie d'un processus markovien de sauts ergodique. Dans la partie 3.3 du chapitre 3, on construit plusieurs estimateurs par plug-in du taux d'entropie d'un tel processus \mathbf{X} , en injectant dans (7), les estimateurs \widehat{A}_T , \widehat{A}_k^c et \widehat{A}_n^d de son générateur \mathbf{A} , précédemment introduits. Le théorème ci-dessous établit les bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus.

Théorème (Théorème 3.2, chapitre 3, page 79).

1. L'estimateur $\widehat{H}_n^d = H(\widehat{A}_n^d)$ est bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\exp(\eta\mathbf{A})$ admette un unique logarithme.
2. Les estimateurs $\widehat{H}_T = H(\widehat{A}_T)$, $\widehat{H}_k^c = H(\widehat{A}_k^c)$ et $\widehat{H}_n^d = H(\widehat{A}_n^d)$ sont fortement consistants.
3. Si la différentielle $D_H(\mathbf{A})$ n'est pas nulle, alors $\sqrt{T}(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$, $\sqrt{k}(\widehat{H}_k^c - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ et $\sqrt{n}(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ convergent en loi vers des lois normales centrées, de variances explicites, dépendant de la différentielle $D_H(\mathbf{A})$ et des variances asymptotiques des estimateurs de \mathbf{A} .
4. Si $D_H(\mathbf{A})$ est nulle, alors $2T(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T)$, $2k[\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_k^c]$ et $2n(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_n^d)$ convergent en loi vers $\sum_{i \in E} \sum_{j \neq i} \alpha_{i,j} Y_{i,j}$ lorsque T tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$ suivent une loi χ^2 à un degré de liberté et les coefficients $\alpha_{i,j}$ dépendent des variances asymptotiques des estimateurs du générateur et de la matrice hessienne D_H^2 .

Une condition explicite sur \mathbf{A} pour l'annulation de $D_H(\mathbf{A})$ est établie pour les processus à 2 états. Précisément, $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si les coefficients non-diagonaux du générateur $\mathbf{A}(1, 2)$ et $\mathbf{A}(2, 1)$ sont égaux à 1.

Pour des processus markoviens d'espace d'état plus grand, le taux d'entropie est maximal pour le générateur dont les coefficients non-diagonaux $\mathbf{A}(i, j)$, $j \neq i$, sont égaux à 1; voir Girardin [31]. La dérivée $D_H(\mathbf{A})$ est donc nulle pour ces générateurs. Établir la réciproque est difficile, les nombreuses variables impliquées rendant encore les calculs inextricables.

Application aux files d'attente markoviennes

Tout système prestataire de service nécessite la mise en attente organisée des clients. La gestion probabiliste de ces files d'attente a pour but de fournir au prestataire et aux clients des indicateurs numériques sur l'état de la file, tels que la loi du nombre de clients dans la file à chaque instant ou le temps moyen d'attente d'un client. Lorsque les temps d'arrivée et de service des clients suivent des lois exponentielles, la file d'attente peut être modélisée par un processus de Markov à espace d'état fini ou dénombrable (appelés processus de naissance et de mort) possédant un générateur \mathbf{A} de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_2 & \lambda_2 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où les coefficients λ_i et μ_{i+1} , $i \in E$, sont les intensités d'arrivée et de départ des clients, en fonction du nombre de clients dans la file. Les processus de naissance et de mort sont ergodiques dès que la capacité de service est supérieure à l'intensité d'arrivée des clients, soit dès que $\lambda_i < \mu_{i+1}$, pour tout $i \in E$. La loi asymptotique du processus est la loi du nombre de clients lorsque le système a atteint son équilibre.

Dès lors que la file d'attente est observée, il est nécessaire d'estimer l'entropie de sa loi asymptotique et son taux d'entropie. Les résultats obtenus dans le chapitre 3 s'appliquent aux

processus de naissance et de mort modélisant les files d'attente lorsque la capacité d'accueil de celles-ci est finie. Les différents schémas d'observation présentés dans le chapitre 3 permettent une estimation adaptée à un large éventail de situations impliquant la mise en attente de clients. De plus, la relative simplicité des générateurs des processus modélisant les files d'attente, permet de clarifier le comportement asymptotique des estimateurs de l'entropie de la loi du nombre de clients dans la file à l'équilibre et du taux d'entropie. Lorsque les intensités d'arrivée et de départ des clients sont indépendantes du nombre de clients dans la file, c'est-à-dire $\lambda_i = \lambda > 0$ et $\mu_{i+1} = \mu > 0$, pour tout $i \in E$, on montre dans la partie 4.3.1 du chapitre 4 que pour tout $\eta > 0$, la matrice $\exp(\eta \mathbf{A})$, où \mathbf{A} est le générateur du processus de naissance et de mort associé à la file, admet un unique logarithme. L'estimateur du générateur construit à partir d'observations discrètes du processus est donc bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. Le théorème ci-dessous, démontré dans la partie 4.3.2 du chapitre 4, établit le comportement asymptotique explicite des estimateurs par plug-in de l'entropie de la loi asymptotique et du taux d'entropie d'une file d'attente d'intensités d'arrivée et de départ λ et μ . Des résultats similaires, présentés dans la partie 4.3.2 du chapitre 4, sont obtenus pour les files d'attente pour lesquelles les intensités d'arrivée et de départ dépendent du nombre de clients dans la file. Toutefois, la complexité des calculs ne permet pas toujours d'explicitement une condition nécessaire à l'annulation des dérivées des fonctions S et H donnant l'entropie stationnaire et le taux d'entropie du processus en fonction du générateur.

Théorème (Corollaires 4.1 et 4.2, chapitre 3, pages 105 et 107).

1. Les estimateurs par plug-in $\hat{\pi}_n^d$, \hat{S}_n^d et \hat{H}_n^d de la loi asymptotique P d'une file d'attente $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'intensités d'arrivée λ et de départ μ constantes avec $\lambda < \mu$, de son entropie $\mathbb{S}(P)$ et de son taux d'entropie $\mathbb{H}(\mathbf{X})$, construits à partir d'observations discrètes équidistribuées, sont bien définis avec probabilité convergeant vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
2. Les estimateurs $\hat{\pi}_T$, $\hat{\pi}_k^c$, $\hat{\pi}_n^d$, \hat{S}_T , \hat{S}_k^c et \hat{S}_n^d , et \hat{H}_T , \hat{H}_k^c et \hat{H}_n^d sont fortement consistants.
3. Les estimateurs $\hat{\pi}_T$, $\hat{\pi}_k^c$ et $\hat{\pi}_n^d$ sont asymptotiquement normaux.
4. Si $\lambda \neq \mu$, \hat{S}_T , \hat{S}_k^c et \hat{S}_n^d sont asymptotiquement normaux.
5. Si $\lambda \neq 1$ ou $\mu \neq 1$, les estimateurs \hat{H}_T , \hat{H}_k^c et \hat{H}_n^d sont asymptotiquement normaux, d'espérance nulle et de variances explicites, fonctions de λ et μ et de la variance asymptotique des estimateurs de λ et μ .
6. Si $\lambda = \mu$, les estimateurs \hat{S}_T , \hat{S}_k^c et \hat{S}_n^d convergent en loi à vitesses respectives $2T$, $2k$ et $2n$ vers une combinaison linéaire de variables de loi $\chi^2(1)$.
7. Si $\lambda = \mu = 1$, les estimateurs \hat{H}_T , \hat{H}_k^c et \hat{H}_n^d convergent en loi à vitesses respectives $2T$, $2k$ et $2n$ vers une combinaison linéaire de variables de loi $\chi^2(1)$.

Lorsque la capacité d'accueil est infinie, soit $E = \mathbb{N}$, le générateur des files d'attente usuelles dépend de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. L'estimation par plug-in de l'entropie de la loi asymptotique et du taux d'entropie de la file, via l'estimation du générateur, est donc un problème d'estimation paramétrique. Un certain nombre de références existe concernant l'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres λ et μ relatifs à certaines files d'attente (voir par exemple, Keiding [41]). Toutefois, un traitement plus systématique consiste à appliquer les résultats d'estimation paramétrique du générateur d'un processus de Markov, obtenus par Billingsley [10] dans le cas de l'observation continue d'une trajectoire, puis par Dehay et Yao [21] dans le cas d'observations discrètes du processus. Les auteurs établissent dans les deux cas la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance du paramètre, sous des conditions de régularité sur l'expression du générateur en fonction du paramètre. Ces conditions sont satisfaites dans le cas des processus de naissance et de mort modélisant les files d'attente étudiées. Les estimateurs par plug-in de la loi du nombre de clients et de son entropie possèdent alors des propriétés asymptotiques similaires, établies dans la partie 4.3.4 du chapitre 4.

Publications

Les résultats présentés dans les chapitres 2 à 4 ont fait l'objet de plusieurs publications dans des actes de congrès et des revues internationales.

Publications dans des revues internationales

P. Regnault. Estimation using plug-in of the stationary distribution and Shannon entropy of continuous time Markov processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(issue 8) :2711-2725, 2011.

Publications dans des actes de congrès avec comité de lecture

P. Regnault. Plug-in estimator of the entropy rate of a pure-jump two-state Markov process. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, AIP Conference Proceedings, 1193 :153-160, 2009.

P. Regnault. Entropy estimation for $M/M/1$ queueing systems. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, AIP Conference Proceedings, 1305, 2010.

V. Girardin, P. Regnault. On the estimation of entropy for Markov chains. 58th World Congress of Statistics, International Statistical Institute, Dublin, 2011.

Autres publications

P. Regnault. Estimation par plug-in du taux d'entropie d'un processus markovien de sauts à espace d'état fini. *Disponible sur le serveur d'archives d'Hal Inria*. 41^{èmes} journées de Statistiques, Bordeaux, 2009.

V. Girardin and P. Regnault. Large deviation principle for the entropy of a finite distribution, with applications. *Rapport de recherche*, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, 2011.

Posters

P. Regnault. Estimation du taux d'entropie d'un processus de Markov. Journées de Statistiques à Rennes, 2008.

P. Regnault. Entropy estimation for $M/M/1$ queueing systems. MaxEnt Conference, Chamonix, 2010.

INTRODUCTION

Chapitre 1

L'essentiel sur les processus de Markov et l'entropie de Shannon

Dans ce chapitre, sont présentés les résultats indispensables au développement et à la bonne compréhension des chapitres suivants. Cette présentation aborde les différents thèmes mis en relation et développés dans les chapitres suivants, en privilégiant leur approche historique et une présentation intuitive dynamique. Les résultats ne sont pas redémontrés en général mais sont accompagnés de références précises.

1.1 Ce qu'il faut savoir sur les processus de Markov

Les processus markoviens de sauts sont des processus stochastiques constants par morceaux dont le comportement futur conditionnellement au passé ne dépend que du présent. Ces processus vérifient une propriété d'ergodicité sous certaines contraintes sur les vitesses de passage entre les différents états. En particulier, les processus markoviens de sauts possèdent une loi asymptotique déterminée par un système d'équations linéaires en les vitesses de passage d'un état à un autre.

1.1.1 Fonction de transition et générateur d'un processus de Markov

Un processus stochastique est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des fonctions réelles. Les processus markoviens de sauts sont des processus stochastiques constants par morceaux, dont le comportement en loi est caractérisé par les vitesses de passage d'un état à un autre. L'ensemble de ces vitesses est appelé générateur infinitésimal du processus.

Processus de Markov et fonction de transition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Dans la suite, E désigne un ensemble fini ou dénombrable ; pour simplifier on suppose que $E = \{0, \dots, s\}$ ou $E = \mathbb{N}$, selon que E est fini ou non. Un processus stochastique $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une variable aléatoire de (Ω, \mathcal{A}) dans l'ensemble $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{C})$ des fonctions de \mathbb{R}_+ dans E muni de la tribu cylindrique engendrée par toutes les familles finies de coordonnées X_{t_1}, \dots, X_{t_r} .

Un processus de Markov est un processus stochastique $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dont la valeur dans l'avenir conditionnellement au passé ne dépend que du présent, vérifiant la propriété de Markov

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | \mathcal{A}_t) = \mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t), \quad j \in E, t, h \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

où \mathcal{A}_t désigne la tribu engendrée par les X_u pour $u \leq t$.

Comme $E^{\mathbb{R}_+}$ est muni de la tribu cylindrique et que E est au plus dénombrable, la propriété de Markov (1.1) est équivalente à

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_r} = i_r) = \mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i_r),$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_r \in E$, $j \in E$, $t, h \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < \dots < t_r = t \in \mathbb{R}_+$.

Le processus est dit homogène lorsque l'état du processus dans le futur conditionnellement au présent ne dépend pas de l'instant t , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i),$$

pour tous $i, j \in E$ et tous $t, h \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $h \mapsto (P_{i,j}(h))_{(i,j) \in E^2}$, où $P_{i,j}(h) = \mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i)$, où $h \in \mathbb{R}_+$, et $i, j \in E$, est appelée fonction de transition du processus. Pour tout $h \in \mathbb{R}_+$ et tout $i \in E$, $P_{i,\cdot}(h)$ est une probabilité sur E ; en particulier, on a $0 \leq P_{i,j}(h) \leq 1$, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$ et tout $(i, j) \in E^2$, et $\sum_{j \in E} P_{i,j}(h) = 1$. On a évidemment $P_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in E^2$, où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, la formule des probabilités totales donne

$$P_{i,j}(h + h') = \sum_{k \in E} P_{i,k}(h) P_{k,j}(h'), \quad (1.2)$$

pour tous $h, h' \in \mathbb{R}_+$ et tous $i, j \in E$. Cette identité fonctionnelle est connue sous le nom d'identité de Chapman-Kolmogorov.

La fonction de transition d'un processus de Markov détermine, avec la loi initiale α , la loi du processus. Précisément, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, toutes familles $t_1 < \dots < t_r \in \mathbb{R}_+$ et $i_1, \dots, i_r \in E$ et tout état initial $i_0 \in E$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_r} = i_r) = \alpha(i_0) P_{i_0, i_1}(t_1) \dots P_{i_{r-1}, i_r}(t_r - t_{r-1}).$$

Un processus de Markov est constant entre deux changements d'états. Ses propriétés sont donc étroitement liées à la suite des temps de séjour, définie par récurrence de la manière suivante.

- On appelle temps du premier saut de X , la variable aléatoire

$$T_1 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | X_t \neq X_0\}.$$

- On définit ensuite les temps de sauts successifs du processus par

$$T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n | X_t \neq X_{T_n}\}, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Les temps de séjour successifs du processus sont

$$\Delta_0 = T_1 \quad \text{et} \quad \Delta_n = T_{n+1} - T_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La loi de chaque temps de séjour dépend de l'état dans lequel le processus séjourne; voir la Proposition 1.1.

Définition 1.1. *Un processus markovien de sauts est un processus de Markov tel que les temps de séjour sont presque sûrement strictement positifs, soit $\Delta_n > 0$ \mathbb{P} -p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans la suite, on étudie uniquement des processus markoviens de sauts homogènes, un processus de Markov, noté PM en abrégé, désignant dorénavant un processus markovien de sauts homogène.

Il est souvent pratique d'identifier un PM $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à son historique, c'est-à-dire la suite $((Y_n, \Delta_n))_{n \in \mathbb{N}}$, où $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des états successivement visités par \mathbf{X} et $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des temps de séjour. La Figure 1.1 représente la trajectoire (la réalisation pour un aléa $\omega \in \Omega$) d'un processus markovien de sauts, tronquée à un instant $T > 0$ et l'historique correspondant.

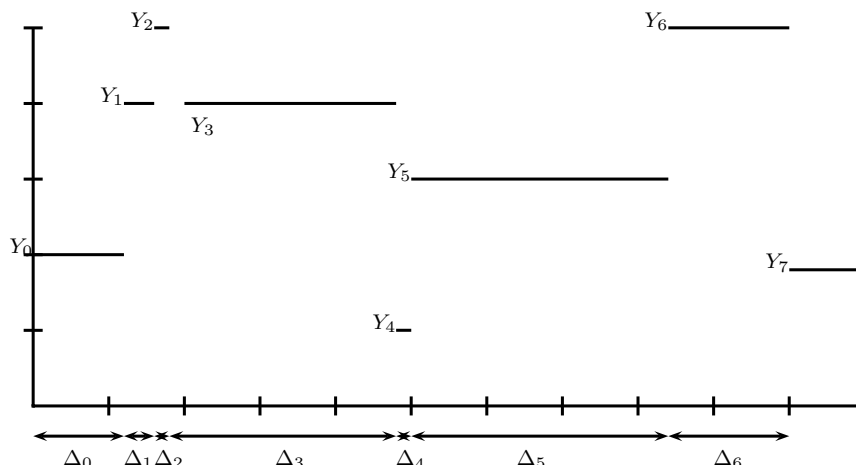


FIG. 1.1 – Trajectoire tronquée d'un processus markovien de sauts.

Exemple 1.1. Dans les chapitres 3 et 4, on considérera des processus de Markov à espace d'état fini ainsi que des processus de naissance et de mort (notés PNM en abrégé). Ces derniers sont des processus de Markov d'espace d'état fini ou dénombrable, dont la fonction de transition vérifie

$$\mathbb{P}(X_h = j | X_0 = i) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & \text{si } j = i + 1, \\ 1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h) & \text{si } j = i, \\ \mu_i h + o(h) & \text{si } j = i - 1, \\ o(h) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un PNM ne peut faire des sauts que d'une unité. Ces processus ont été introduits par Feller [29]. Ils sont particulièrement utilisés en biologie pour l'étude de l'évolution de populations, en finance, ainsi qu'en théorie des files d'attente. Voir Allen [2] et Rolski et al. [54] pour un survol des applications possibles en biologie et en finance, puis le chapitre 4 et les références qui y sont citées, concernant les files d'attente. Leur étude profite de la simplicité relative de leur fonction de transition, permettant des calculs explicites, là où les mêmes calculs sont inextricables pour les processus de Markov à espace d'état fini généraux.

Générateur d'un processus markovien de sauts

La fonction de transition $h \mapsto (P_{i,j}(h))_{(i,j) \in E^2}$ d'un processus de Markov $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dérivable en 0 (voir Pardoux [47], Théorème 7.3). On appelle générateur infinitésimal, et on note $\mathbf{A} = (\mathbf{A}(i,j))_{(i,j) \in E^2}$, sa dérivée. Précisément,

$$\mathbf{A}(i,j) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(h)}{h} & \text{si } j \neq i, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i}(h) - 1}{h} & \text{si } j = i, \end{cases}$$

Les coefficients du générateur caractérisent la loi des temps de séjour dans les différents états et des temps de passage d'un état i à un état j (voir la proposition 1.1). En outre, pour tout $(i,j) \in E^2$, avec $j \neq i$, $\mathbf{A}(i,j)$ est la vitesse moyenne de passage de l'état i à l'état j . Les coefficients diagonaux $\mathbf{A}(i,i)$, pour $i \in E$, sont les vitesses moyennes de sortie de l'état $i \in E$.

Exemple 1.2. Le générateur d'un PNM est de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_2 & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Les coefficients λ_i , pour $i \in E$, appelés intensités de naissance, sont les vitesses auxquelles apparaissent de nouveaux individus de la population. De manière similaire, les coefficients μ_i , pour $i \in E \setminus \{0\}$ sont appelés intensités de mort.

Quelques propriétés du générateur d'un processus de Markov découlent immédiatement des propriétés de la fonction de transition. En particulier,

- $\mathbf{A}(i, j) \geq 0$, pour tout $(i, j) \in E$, avec $j \neq i$,
- $\mathbf{A}(i, i) = -\sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j)$, pour tout $i \in E$,
- $\mathbf{A}(i, i) \leq 0$, pour tout $i \in E$.

Le générateur d'un PM détermine de manière unique sa fonction de transition et donc sa loi (pourvu que l'on connaisse la loi initiale). En effet, dérivant l'identité de Chapman-Kolmogorov (1.2) par rapport à h' puis en faisant tendre h' vers 0, on obtient les équations de Kolmogorov

$$\frac{d}{dh}P(h) = AP(h), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dh}P(h) = P(h)A, \quad h \in \mathbb{R}_+,$$

équations différentielles linéaires en P dont la solution commune est

$$P(h) = \exp(hA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!}, \quad h \in \mathbb{R}_+. \quad (1.3)$$

1.1.2 Chaîne immergée et classification des états

Expliciter le comportement asymptotique d'un processus de Markov nécessite d'expliquer la loi des temps de sauts du processus et de classer les états selon la facilité avec laquelle le processus peut les atteindre.

Temps de sauts et chaîne immergée

Les processus markoviens de sauts vérifient une version forte de la propriété de Markov : pour tout temps d'arrêt T mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus, tout PM $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfait

$$\mathbb{P}(X_{T+h} = j, T < \infty | \mathcal{A}_T) = \mathbb{P}(X_h = j, T < \infty | X_T), \quad j \in E,$$

où \mathcal{A}_T est la tribu engendrée par la restriction $(X_t)_{t \in [0, T]}$ de \mathbf{X} à l'intervalle $[0, T]$ (voir Girardin et Limnios [33], Théorème 8.55). En particulier, on en déduit que la chaîne immergée associée au processus $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $Y_n = X_{T_n}$, est une chaîne de Markov homogène ; précisément, elle vérifie la propriété de Markov homogène

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i_n, \dots, Y_0 = i_0) = \mathbb{P}(Y_1 = j | Y_0 = i_n),$$

pour toute suite $i_0, \dots, i_n \in E$ et tout $j \in E$. Les probabilités de transition $\mathbf{P}_{\text{im}}(i, j) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$, $(i, j) \in E^2$ s'expriment explicitement en fonction du générateur :

$$\mathbf{P}_{\text{im}}(i, j) = \begin{cases} \frac{\mathbf{A}(i, j)}{-\mathbf{A}(i, i)} & \text{si } j \neq i \text{ et } \mathbf{A}(i, i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'indice im fait référence à la chaîne immergée du processus, par opposition à la chaîne des états du processus discrétisé, présentée dans la partie 1.1.4 du présent chapitre.

Par ailleurs, on déduit de l'équation de Chapman-Kolmogorov (1.2) que les temps de séjour suivent des lois exponentielles, dont les paramètres dépendent du générateur ; voir Ethier et Kurtz [28] ou Anderson [4].

Proposition 1.1. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov d'espace d'état E fini ou dénombrable, de générateur $\mathbf{A} = (\mathbf{A}(i, j))_{(i, j) \in E}$ tel que $\mathbf{A}(i, i) \neq 0$ pour tout $i \in E$.*

1. la loi du temps de séjour en i est une loi exponentielle de paramètre $-\mathbf{A}(i, i)$,
2. la loi du temps d'attente pour passer directement de i vers j , pour $(i, j) \in E^2$, $j \neq i$, sachant que le processus est en i , est une loi exponentielle de paramètre $\mathbf{A}(i, j)$, pourvu que $\mathbf{A}(i, j) \neq 0$.

Ces résultats permettent entre autres de simuler la réalisation d'une trajectoire du processus en simulant la chaîne immergée puis les temps de séjour correspondants.

Classification des états

Comme pour les chaînes de Markov, expliciter le comportement asymptotique des processus de Markov nécessite une classification des états.

Si le temps de retour en $i \in E$ est presque sûrement fini, soit

$$\mathbb{P}(\inf\{t \geq 0 : X_t = i\} = +\infty | X_0 = i) = 0,$$

alors i est dit récurrent. Sinon, i est dit transient. De plus, si le temps moyen de retour en i , $m_i = \mathbb{E}(\inf\{t \geq 0 : X_t = i\} | X_0 = i)$ est fini, alors i est dit récurrent positif. Sinon, i est dit récurrent nul. Un processus \mathbf{X} dont tous les états sont récurrents (respectivement récurrents positifs) est dit récurrent (respectivement récurrent positif).

Le processus \mathbf{X} est dit irréductible si pour tout $(i, j) \in E^2$, avec $j \neq i$, il existe une suite $i_1 = i, \dots, i_r = j$, avec $r \geq 2$, telle que $\prod_{l=1}^{r-1} \mathbf{A}(i_l, i_{l+1}) > 0$, c'est-à-dire si le temps de passage de tout état à tout autre est fini presque sûrement.

Exemples 1.1.

1. Un processus récurrent et irréductible d'espace d'état fini est nécessairement récurrent positif.
2. Les PNM sont irréductibles dès que $\lambda_i > 0$ et $\mu_{i+1} > 0$, pour tout $i \in E$. De plus, un PNM est récurrent positif si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^i \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \prod_{k=0}^i \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}} = \infty.$$

En outre, un PNM est irréductible et récurrent positif si $\lambda_i < \mu_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; voir Asmussen [5], Proposition 2.1.

Critères de régularité d'un processus de Markov

La proposition 1.1 établit que le temps moyen passé par un PM dans un état i est $-1/\mathbf{A}(i, i)$. Si la suite $(-1/\mathbf{A}(Y_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ des temps moyens de séjour en les états visités par le processus tend (trop rapidement) vers 0, le processus saute de plus en plus vite, de sorte que son comportement devient ératique et indescriptible. La définition suivante exclut ce type de processus.

Définition 1.2. Un processus markovien de sauts $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ d'espace d'état E est dit régulier si le nombre de sauts dans tout intervalle de temps fini est fini presque sûrement, soit

$$\mathbb{P}(|\{n \in \mathbb{N}^* : T_n \in [s, t]\}| < +\infty | X_0 = i) = 1,$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, avec $s < t$. Un processus non régulier est également dit explosif.

Un PM est régulier si et seulement si la somme des temps moyen de séjour en chacun des états visités tend vers l'infini, soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} -1/\mathbf{A}(Y_n, Y_n) = +\infty$; voir Girardin et Linnios [33], Théorème 8.79.

En particulier, on vérifie immédiatement que cette condition est vérifiée pour les processus de Markov irréductibles et récurrents positifs à espace d'état fini et pour une large famille de processus de naissance et de mort récurrents positifs et irréductibles.

Exemples 1.2.

1. Un processus récurrent d'espace d'état fini est régulier. En effet, il existe alors une sous-suite $\mathbf{A}(Y_{\phi(n)}, Y_{\phi(n)})$ de $\mathbf{A}(Y_n, Y_n)$, qui est constante (on repasse nécessairement une infinité de fois par chaque état), de sorte que

$$\sum_n \frac{-1}{\mathbf{A}(Y_n, Y_n)} \geq \sum_n \frac{-1}{\mathbf{A}(Y_{\phi(n)}, Y_{\phi(n)})} = +\infty.$$

2. Les PNM pour lesquels les intensités λ_i et μ_{i+1} , $i \in E$, sont des fonctions affines de i , sont également réguliers. En effet, $\sum_n -1/\mathbf{A}(Y_n, Y_n)$ est alors minorée par la somme harmonique, qui diverge (voir Asmussen [5], Proposition 2.2).

1.1.3 Ergodicité et comportement asymptotique

Les PM récurrents positifs et irréductibles possèdent des propriétés asymptotiques remarquables. En effet, ces processus sont ergodiques : la moyenne en temps de toute fonction mesurable des coordonnées du processus, converge presque sûrement vers une constante. De plus, leur comportement asymptotique est décrit par une probabilité, unique solution d'un système linéaire. Précisément, pour un processus de Markov $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ récurrent positif et irréductible, de générateur \mathbf{A} , il existe une unique probabilité P sur E vérifiant $P\mathbf{A} = 0$, appelée loi stationnaire du processus.

De plus, quelque soit la loi initiale du processus, X_t converge en loi vers la loi stationnaire P lorsque t tend vers l'infini. Un processus de Markov récurrent positif et irréductible tend donc à se stabiliser asymptotiquement à un comportement typique décrit par sa loi stationnaire. Cette propriété est une conséquence du théorème ergodique.

Théorème 1.1 (ergodique). *Soit \mathbf{X} un processus de Markov régulier, récurrent positif et irréductible d'espace d'état E fini ou dénombrable et de loi stationnaire P .*

Pour tout état $i \in E$, et toute fonction mesurable de E dans \mathbb{R}

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_u) du \longrightarrow \mathbb{E}_P(f), \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

lorsque t tend vers l'infini.

Notons en outre que si la loi stationnaire P d'un PM ergodique est aussi sa loi initiale, alors toutes les coordonnées X_t du processus ont même loi P , alors dite stationnaire ou asymptotique.

Un processus de Markov récurrent positif et irréductible est également dit ergodique. Dans les chapitres suivants, on ne considérera plus que des processus de Markov réguliers et ergodiques. On ne fera plus mention de la propriété de régularité dans la suite, sauf nécessité.

Le générateur d'un processus ergodique est dit ergodique également.

Pour la fin de ce paragraphe, nous supposons que l'espace d'état E est fini. L'ensemble \mathcal{G} des générateurs ergodiques est un ouvert de $\mathbb{R}^{|\mathbf{A}|(|E|-1)}$. En effet, par définition,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left\{ \mathbf{A} = (\mathbf{A}(i, j))_{j \neq i} : \forall (i, j) \in E^2, \exists r, 2 \leq r \leq |E|, \exists i_1 = i, \dots, i_r = j \mid \prod_{l=1}^{r-1} \mathbf{A}(i_l, i_{l+1}) > 0 \right\} \\ &= \bigcap_{(i, j) \in E^2} \bigcup_{r=2}^{|E|} \bigcup_{i_1=i, \dots, i_r=j} \left\{ \mathbf{A} = (\mathbf{A}(i, j))_{j \neq i} : \prod_{l=1}^{r-1} \mathbf{A}(i_l, i_{l+1}) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{G} est une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^{|\mathbf{A}|(|E|-1)}$, donc un ouvert.

Albert [1] déduit de la relation $P\mathbf{A} = 0$, une expression explicite de la loi stationnaire P d'un PM ergodique, en fonction de \mathbf{A} . Précisément,

$$P(i) = \Pi_i(\mathbf{A}) = \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{i,i}(\mathbf{A})}, \quad i \in E, \tag{1.4}$$

où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ est le (i, i) ^{ème} cofacteur de \mathbf{A} , c'est-à-dire le déterminant de la matrice $\mathbf{A}^{(i,i)}$ obtenue à partir de \mathbf{A} en lui otant la i ^{ème} ligne et la i ^{ème} colonne. Notons que la fonction Π est définie sur l'ensemble des générateurs ergodiques \mathcal{G} .

Les processus de Markov ergodiques dont la loi stationnaire est uniforme jouent un rôle particulier dans le chapitre 3. Les générateurs de tels processus sont dits uniformes.

1.1.4 Troncature et discrétisation d'un processus de Markov

Les problèmes d'estimation concernant les processus de Markov sont liés au nombre de sauts et aux temps de séjour du processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ tronqué à l'instant $T > 0$, ainsi qu'aux propriétés du processus discrétisé $(X_{\eta n})_{n \in \mathbb{N}}$. Dans cette partie sont établis quelques résultats sur les processus tronqués et discrétisés, indispensables au développement du chapitre 3.

Processus tronqué à l'instant T

Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique, d'espace d'état E fini ou dénombrable. Soient $T > 0$ et $X_{(T)} = (X_t)_{t \in [0, T]}$ le processus tronqué à l'instant T . On note N_T le nombre de sauts effectué par le processus tronqué. L'historique du processus tronqué est le vecteur aléatoire $((Y_0, \Delta_0), \dots, (Y_{N_T-1}, \Delta_{N_T-1}), Y_{N_T})$.

Le processus \mathbf{X} étant régulier, le nombre de sauts N_T est presque sûrement fini. L'historique du processus est donc un vecteur aléatoire de taille variable, à valeurs dans l'ensemble $V = \bigcup_{n \geq 0} V_n$, où $V_0 = E$ et $V_n = (E \times \mathbb{R}_+)^n \times E$, $n \geq 1$. Le comportement du processus tronqué est caractérisé par le nombre de sauts $n_T(i, j) = \sum_{m=0}^{N_T-1} \mathbb{1}_{\{Y_m=i, Y_{m+1}=j\}}$ d'un état i vers un état j et les temps de séjour $r_T(i) = \sum_{m=0}^{N_T-1} \Delta_m \mathbb{1}_{\{Y_m=i\}}$ en chacun des états i visités (voir la partie 1.2.3 pour plus de détails sur cette caractérisation). Albert [1] prouve que les variables $n_T(i, j)$, et $r_T(i)$, pour $i, j \in E$, $j \neq i$, sont de carré intégrable et calcule leur espérance et leur variance. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(n_T(i, j)) &= \mathbf{A}(i, j) \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt, \\ \mathbb{E}(r_T(i)) &= \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Bad Dumitrescu [6] en déduit le nombre moyen de sauts par unité de temps. Précisément,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_T)}{T} = \sum_{i \in E} \pi(i) \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j). \quad (1.6)$$

Discrétisation d'un processus de Markov

Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un PM ergodique, d'espace d'état E fini ou dénombrable. Soit $\eta > 0$. La suite $\mathbf{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $Z_n = X_{\eta n}$, obtenue en discrétisant X toutes les η unités de temps, est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}_{\text{dis}} = \exp(\eta \mathbf{A})$. En effet, par homogénéité de \mathbf{X} , on a pour tous $i, j \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n\eta+\eta} = j | X_{n\eta} = i) = \mathbb{P}(X_\eta = j | X_0 = i),$$

puis d'après (1.3), $(\mathbb{P}(X_\eta = j | X_0 = i))_{(i,j) \in E^2} = \exp(\eta \mathbf{A})$.

1.2 Entropie de Shannon d'une probabilité, taux d'entropie d'un processus de Markov.

Introduite par Shannon en 1948, l'utilisation de l'entropie d'une loi de probabilité s'est rapidement répandue à toutes les disciplines impliquant des variables aléatoires. Une extension

remarquable de l'entropie, en tant que mesure de l'information d'une loi, est la divergence de Kullback-Leibler, dont l'utilisation en statistique mathématique est incontournable. En outre, cette divergence induit une géométrie sur l'ensemble des probabilités d'un ensemble fini, dont certaines propriétés sont liées aux lois escortes, probabilités obtenues à partir d'une probabilité de référence P dont on fait ressortir ou, au contraire, on atténue, les tendances extrêmes.

L'entropie en tant que mesure de l'information peut être étendue à un processus stochastique ergodique en étudiant l'entropie de sa loi asymptotique, mesurant l'incertitude du processus à l'équilibre, ou en étudiant son taux d'entropie, mesurant l'incertitude moyenne du processus par unité de temps. En particulier, l'entropie de la loi stationnaire et le taux d'entropie d'un processus de Markov ergodique sont des fonctions explicites du générateur du processus.

1.2.1 Entropie de Shannon d'une probabilité

Comme expliqué dans l'introduction, l'entropie d'une probabilité est introduite par Shannon afin de mesurer la quantité d'information d'une source d'information.

Définition 1.3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E fini ou dénombrable, de loi P . L'entropie $\mathbb{S}(X)$ de X est l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de sa loi, définie par

$$\mathbb{S}(P) = - \sum_{i \in E} P(i) \log P(i), \quad (1.7)$$

avec la convention $0 \log 0 = 0$.

Notons que Shannon utilise le logarithme en base 2. Les propriétés restent inchangées avec le logarithme népérien dans la mesure où ces deux définitions diffèrent seulement d'un facteur constant n'ayant pas d'incidence sur le comportement variationnel de l'entropie en tant que fonction de P .

Shannon montre en outre que l'entropie d'une loi P est la capacité d'émission maximale d'une source d'information émettant des lettres d'un alphabet E , indépendamment les unes des autres, selon une probabilité P . Ce résultat, connu sous le nom de théorème de codage de Shannon, pose la base de la théorie de l'information.

L'utilisation de l'entropie, en tant que mesure de l'information, intervient en statistique mathématique. La méthode d'estimation du maximum d'entropie introduite par Jaynes [40], permet de privilégier la loi qui coïncide le mieux avec les observations en utilisant toute l'information qu'elles fournissent, sans en ajouter. L'argument central de cette méthode est que l'entropie $\mathbb{S}(P)$ est maximale lorsque l'incertitude est maximale, c'est-à-dire lorsque P est uniforme.

Proposition 1.2. L'entropie $\mathbb{S}(P)$ d'une probabilité P sur un ensemble fini E est

- maximale, et vaut $\log |E|$, lorsque P est la probabilité uniforme sur E ,
- minimale, et vaut 0, lorsque P est une mesure de Dirac.

L'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P est une fonction infiniment dérivable de $P^* = (P(1), \dots, P(N))$; précisément,

$$\mathbb{S}(P) = S(P^*) = - \sum_{i=1}^N P(i) \log P(i) - \left(1 - \sum_{i=1}^N P(i)\right) \log \left(1 - \sum_{i=1}^N P(i)\right).$$

Afin de simplifier les notations, on désignera également cette fonction par $\mathbb{S}(P)$. Ainsi, dériver \mathbb{S} par rapport à P signifie dériver S par rapport à P^* .

Dans le chapitre 2, on établit une borne inférieure pour $\mathbb{S}(P)$, en fonction du nombre de modes de P . Pour cela, la propriété suivante, conséquence de la convexité de la fonction $x \mapsto x \log x$, sera indispensable. Voir Girardin et Linnios [33], propriété 5, page 29.

Propriété 1.1. Soit P une probabilité sur un ensemble fini $E = \{i_1, \dots, i_N\}$. Soit $1 \leq n \leq N$. Soient Q la probabilité sur $E \setminus \{i_{n+1}, \dots, i_N\}$ définie par

$$Q(i_1) = P(i_1), \dots, Q(i_{n-1}) = P(i_{n-1}), Q(i_n) = \sum_{k=n}^N P(i_k),$$

puis R la probabilité sur $\{i_{n+1}, \dots, i_N\}$ définie par

$$R(i_n) = \frac{P(i_n)}{Q(i_n)}, \dots, R(i_N) = \frac{P(i_N)}{Q(i_n)}.$$

On a

$$\mathbb{S}(P) = \mathbb{S}(Q) + Q(i_n)\mathbb{S}(R).$$

1.2.2 Géométrie liée à la divergence de Kullback-Leibler et lois escortes

Les paragraphes suivants proposent un éclairage nouveau sur certaines propriétés de la géométrie induite par la divergence de Kullback-Leibler sur l'ensemble des probabilités de support fini E , en lien avec la transformation escorte. En particulier, on met en évidence que les propriétés géométriques de l'information portée par une loi sont liées à la structure d'espace vectoriel dont est muni l'ensemble $\mathcal{M}_1^*(E) = \{P \in \mathcal{M}_1(E) : P(i) > 0, i \in E\}$ des probabilités de support E . Les droites de cet espace vectoriel sont les ensembles de lois liées par la transformation escorte. Les lois escortes associées à une loi P sont alors les homothétiques de P .

Divergence de Kullback-Leibler

La divergence de Kullback-Leibler, initialement appelée information de Kullback-Leibler, mesure le défaut d'information résultant du remplacement de la loi P d'un phénomène aléatoire, par une autre loi Q .

Définition 1.4. Soient P et Q deux probabilités sur un ensemble E fini ou dénombrable.

La divergence de Kullback-Leibler de Q par rapport à P est

$$\mathbb{K}(Q|P) = \sum_{i \in E} Q(i) \log \frac{Q(i)}{P(i)}, \quad (1.8)$$

avec les conventions $0 \log(0/x) = 0$, $0 \log(0/0) = 0$ et $x \log(x/0) = +\infty$, pour tout $x \in]0, 1]$.

La divergence de Kullback-Leibler est également appelée entropie relative ou distance de Kullback-Leibler. Cette dernière appellation est motivée par le fait que la divergence de Kullback-Leibler possède certaines propriétés d'une distance : c'est une fonctionnelle positive et convexe. Précisément,

$$\mathbb{K}(Q|P) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $P = Q$. De plus, si E est un ensemble fini, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2|P) &\leq \lambda \mathbb{K}(Q_1|P) + (1 - \lambda)\mathbb{K}(Q_2|P), \\ \mathbb{K}(Q|\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2) &\leq \lambda \mathbb{K}(Q|P_1) + (1 - \lambda)\mathbb{K}(Q|P_2), \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tous $P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_1(E)$. Voir Cover et Thomas [16], théorèmes 2.6.3 et 2.7.2.

Toutefois, la divergence de Kullback-Leibler n'est pas mathématiquement une distance puisqu'elle n'est pas symétrique et qu'elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire. Malgré cela, la divergence de Kullback-Leibler définit une géométrie sur l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des probabilités sur

un ensemble fini E , dite géométrie de l'information, que l'on désigne par \mathbb{K} -géométrie, conformément aux notations introduites par Csiszár [18] et reprises par Sgarro [56]. Bien que cette géométrie ne soit pas issue d'un produit scalaire, elle possède certaines propriétés proches de celles d'un espace euclidien. La projection, désignée par \mathbb{K} -projection, y est bien définie sous certaines conditions assez faibles. Précisément, Csiszár [18] prouve que la \mathbb{K} -projection d'une probabilité P sur un ensemble convexe \mathcal{C} existe et est unique, c'est-à-dire qu'il existe une unique probabilité $Q \in \mathcal{C}$ telle que $\mathbb{K}(Q|P) = \inf_{R \in \mathcal{C}} \mathbb{K}(R|P)$, pourvu que \mathcal{C} soit fermé et que $P(i) > 0$ pour tout $i \in E$. En particulier, si \mathcal{C} est délimité par des bords droits – typiquement, \mathcal{C} est une intersection de demi-espaces – alors le \mathbb{K} -projeté de P vérifie une égalité de Pythagore.

Une application immédiate du résultat de Csiszár, redémontrée par Sgarro [56], est l'existence et l'unicité de la \mathbb{K} -projection d'une probabilité $P \in \mathcal{M}_1^*(E)$, sur la boule $B_{\mathbb{K}}(Q, r) = \{R \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{K}(R|Q) \leq r\}$ relative à la \mathbb{K} -géométrie, dite \mathbb{K} -boule, centrée en Q de rayon $r \geq 0$, pourvu que $r < \mathbb{K}(Q|P)$, c'est-à-dire pourvu que P soit extérieure à la \mathbb{K} -boule. La convexité de ces boules est en effet une conséquence immédiate de la convexité de $\mathbb{K}(\cdot|P)$. Sgarro montre de plus que la \mathbb{K} -projection de P est alors atteinte sur le bord de la \mathbb{K} -boule, c'est-à-dire sur la \mathbb{K} -sphère $S_{\mathbb{K}}(Q, r) = \{R \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{K}(R|Q) = r\}$.

Notons que d'après la relation

$$\mathbb{K}(P|U) = \mathbb{S}(U) - \mathbb{S}(P) = \log |E| - \mathbb{S}(P), \quad (1.9)$$

où U désigne la probabilité uniforme sur E , les \mathbb{K} -sphères centrées en U sont les ensembles de niveau de l'entropie de Shannon \mathbb{S} . Ainsi, les \mathbb{K} -sphères sont les ensembles de probabilités possédant la même incertitude.

La \mathbb{K} -projection de P sur $S_{\mathbb{K}}(U, r)$ est liée à la structure d'espace vectoriel dont Sgarro munit l'ensemble $\mathcal{M}_1^*(E)$. On montre au chapitre 2 que la \mathbb{K} -projection de P sur une \mathbb{K} -sphère centrée en la loi uniforme est une loi escorte de P , c'est-à-dire l'image de P par une homothétie de cet espace vectoriel.

Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{M}_1^*(E)$

Bien que $\mathcal{M}_1^*(E)$ soit un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{|E|}$, il n'hérite pas de cette structure puisqu'il n'est pas stable par multiplication par un scalaire. Sgarro [56] définit *ex-nihilo* une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel sur $\mathcal{M}_1^*(E)$ en remarquant que $\mathcal{M}_1^*(E)$ est stable par combinaison convexe de probabilités. Précisément, il définit les opérations suivantes sur $\mathcal{M}_1^*(E)$.

Addition : Pour tous $P, Q \in \mathcal{M}_1^*(E)$, $P \oplus Q$ est la probabilité dont les coordonnées sont

$$P \oplus Q(i) = \frac{P(i)Q(i)}{\sum_{j \in E} P(j)Q(j)}, \quad i \in E.$$

Multiplication : Pour tout $P \in \mathcal{M}_1^*(E)$ et tout réel k , $k \odot P$ est la probabilité dont les coordonnées sont

$$k \odot P(i) = \frac{P(i)^k}{\sum_{j \in E} P(j)^k}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_1(E)^*$ muni des opérations \oplus et \odot est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $|E| - 1$ d'élément nul la probabilité uniforme sur E . Les droites de cet espace vectoriel sont donc les ensembles $\{k \odot P : k \in \mathbb{R}\}$, où P est une probabilité distincte de la probabilité uniforme.

La Figure 1.2 représente l'ensemble $\mathcal{M}_1^*(\{0, 1, 2\})$ identifié à la face transversale du simplexe de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire au triangle équilatéral défini comme l'intersection de l'hyperplan $\{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$ avec les demi-espaces $\{(x, y, z) : x > 0\}$, $\{(x, y, z) : y > 0\}$ et $\{(x, y, z) : z > 0\}$. La probabilité uniforme est identifiée au centre de gravité du triangle, les mesures de Dirac étant les sommets. Les lacets bleus sont les \mathbb{K} -sphères. Les courbes en pointillés longs et rouges sont les droites relatives à la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_1^*(E)$, ou en d'autres termes, les ensembles de lois liées par la transformation escorte : deux probabilités sont sur la même courbe rouge si l'une est une escorte de l'autre. Observons que $|E|$ droites de la géométrie de

Kullback-Leibler sont des segments dans la géométrie usuelle de \mathbb{R}^2 . Ces droites sont la réunion des ensembles des probabilités possédant un unique mode et attribuant un poids égal aux autres valeurs (ce sont les lignes pleines de la figure 1.3), et des probabilités possédant $|E| - 1$ modes (les lignes en pointillés longs de la figure 1.3). Ces droites jouent un rôle important dans la géométrie de Kullback-Leibler. D'une part, les probabilités possédant plusieurs modes possèdent des propriétés légèrement distinctes des autres probabilités, vis à vis de la \mathbb{K} -projection. D'autre part, les probabilités possédant un unique mode et attribuant un poids égal aux autres valeurs donnent la direction de la plus petite variation d'information entre deux niveaux d'entropie. Ces résultats seront établis et commentés dans le chapitre 2.

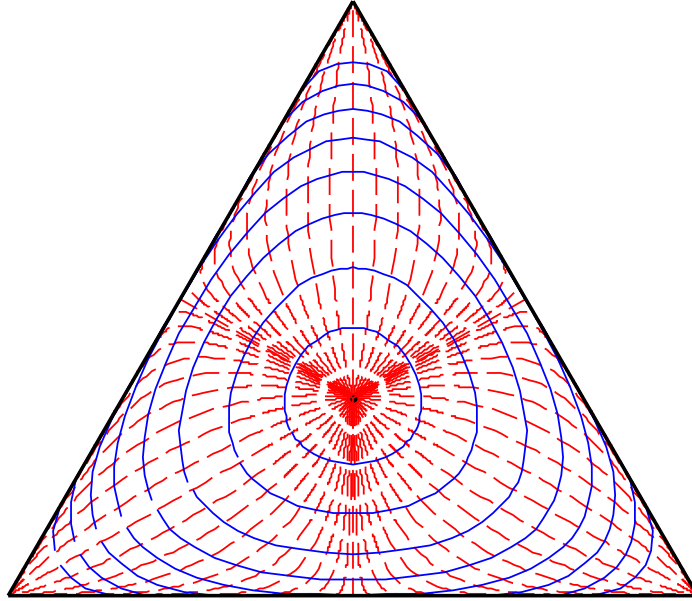


FIG. 1.2 – L'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ identifié au triangle équilatéral, dans lequel sont représentés les \mathbb{K} -sphères (les lacets bleus) et les droites pour la structure d'espace vectoriel dont est muni $\mathcal{M}_1^*(E)$ (les courbes en pointillés rouges).

La définition des opérations \oplus et \odot peut être étendue à $\mathcal{M}_1(E)$. Toutefois, $\mathcal{M}_1(E)$ muni de ces opérations n'est pas un espace vectoriel.

Quelques propriétés des loi escortes

On désigne par transformation escorte le produit \odot étendu à $\mathcal{M}_1(E)$. Précisément, la transformation escorte est l'application

$$\mathcal{E} : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_1(E) \rightarrow \mathcal{M}_1(E) \quad (1.10)$$

$$(k, P) \mapsto E_P^k = k \odot P. \quad (1.11)$$

Les applications $\mathcal{E}(\cdot, k)$, pour $k \in \mathbb{R}$, sont appelées k -transformations. Étant donnée une probabilité P , les k -transformations de P sont appelées lois escortes associées à P , la loi escorte de niveau k de P étant désignée par k -escorte de P . Beck et Schlögl [8] introduisent les lois escortes en théorie du chaos, afin d'étudier les propriétés thermodynamiques de systèmes microscopiques. De tels systèmes changent d'état aléatoirement, selon une loi P . Le paramètre $k > 0$

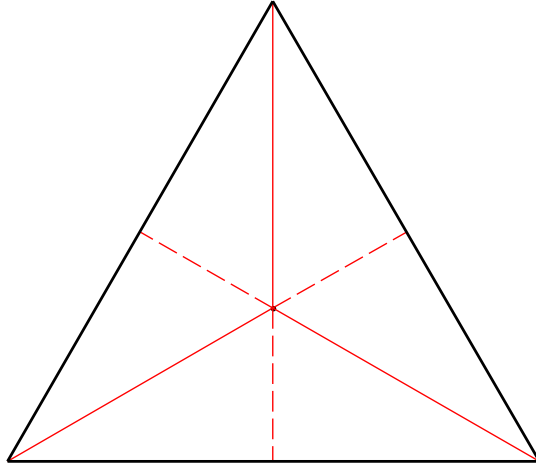


FIG. 1.3 – Les droites de $\mathcal{M}_1^*(\{0, 1, 2\})$ correspondant aux ensembles de probabilités possédant 2 modes (les segments en pointillés) et celles possédant un unique mode et attribuant un poids identique aux autres valeurs (les segments pleins).

de la transformation escortée s'interprète comme l'inverse de la température du système : plus k est petit, ou de manière équivalente, plus la température est grande, plus l'état du système est incertain, la température étant un catalyseur du changement d'état. Les lois escortées associées aux fréquences d'apparition des différents états permettent ainsi d'analyser la structure de P en privilégiant ou non les états les plus fréquents.

Les lois escortées apparaissent également en mécanique statistique non-extensive. Afin d'étendre le champ d'applications de la mécanique statistique de Boltzmann et Gibbs, Tsallis [60] introduit une nouvelle fonctionnelle d'entropie (l'entropie de Tsallis) et détermine le maximum de cette fonctionnelle sous plusieurs contraintes de moments pour les lois escortées associées à la loi initiale.

Tsallis [60] établit quelques propriétés de la transformation escortée, découlant de la relation de clôture

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}(P, k), k') = \mathcal{E}(P, kk'),$$

pour tous $P \in \mathcal{M}_1(E)$ et $k, k' \in \mathbb{R}$. Précisément, l'ensemble $G_{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E}(\cdot, k), k \in \mathbb{R}\}$ des k -transformations forme un groupe commutatif différentiel pour la composition des applications et la norme usuelle sur l'ensemble des applications, d'élément neutre la 1-transformation $\mathcal{E}(\cdot, 1)$; autrement dit, $G_{\mathcal{E}}$ vérifie les propriétés suivantes :

Élément neutre : $\mathcal{E}(P, 1) = P, \quad P \in \mathcal{M}_1(E)$.

Inverse : $\mathcal{E}(\mathcal{E}(P, k), \frac{1}{k}) = P, \quad P \in \mathcal{M}_1(E), \quad k \in \mathbb{R}^*$. En particulier, si $Q = E_P^k$ est une loi escortée de P , alors $P = E_Q^{1/k}$ est une loi escortée de Q .

Commutativité : $\mathcal{E}(\mathcal{E}(P, k), k') = \mathcal{E}(\mathcal{E}(P, k'), k), \quad P \in \mathcal{M}_1(E), \quad k, k' \in \mathbb{R}$.

Différentiabilité : La transformation escortée est continûment dérivable sur $\mathcal{M}_1^*(E) \times \mathbb{R}$.

Points fixes : Les seules probabilités inchangées par les k -transformations sont les mesures de Dirac $\delta_i, i \in E$ et la probabilité uniforme sur E .

Traditionnellement, une géométrie est définie algébriquement comme l'action d'un groupe de transformations sur un ensemble. Les propriétés géométriques de l'espace sont alors les invariants sous cette action. Lorsque l'ensemble étudié est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, le groupe d'intérêt est le groupe des isométries, qui sont les automorphismes préservant le produit scalaire. En particulier, les sphères relatives au produit scalaire sont stables sous l'action du groupe des isométries.

De manière similaire, le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}_1^*(E)$ préservant les \mathbb{K} -sphères définit une géométrie de l'information au sens où les propriétés géométriques sont la préservation de l'information et du défaut d'information. Toutefois, il est facile de montrer que ce groupe est réduit à l'identité. En effet, les \mathbb{K} -sphères ne sont pas symétriques : P et E_P^{-1} n'ont pas nécessairement la même entropie (par exemple la probabilité $P = (1/4, 1/4, 1/2)$ a pour entropie $3 \log(2)/2$ tandis que $E_P^{-1} = (2/5, 2/5, 1/5)$ a pour entropie $\log(5) - 4 \log(2)/5$ qui n'est pas égale à $3 \log(2)/2$). Il n'existe donc pas de géométrie de l'information, algébriquement parlant. Toutefois, le théorème 2.1 du chapitre 2 établit que les orbites du groupe G_ϵ des homothéties de $\mathcal{M}_1^*(E)$, donnent la direction de la \mathbb{K} -projection sur les \mathbb{K} -sphères, c'est-à-dire la direction de la plus grande variation d'information pour une probabilité.

1.2.3 Entropie asymptotique et taux d'entropie d'un processus de Markov

La notion d'entropie en tant que mesure de l'information peut être étendue aux processus de Markov ergodiques $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ en considérant l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de la loi stationnaire P de \mathbf{X} , qui mesure la quantité d'information du processus à chaque instant lorsqu'il a atteint l'équilibre, ou le taux d'entropie du processus, qui est une mesure de l'incertitude moyenne du processus par unité de temps, et prend en compte l'ensemble du comportement du processus.

Entropie asymptotique d'un processus de Markov

Un processus de Markov $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ergodique d'espace d'état fini E possède une loi asymptotique P , fonction du générateur infinitésimal du processus, donnée par la formule (1.4), page 26. L'entropie asymptotique $\mathbb{S}(P)$ de \mathbf{X} , sous réserve de finitude, est alors également une expression explicite de \mathbf{A} . Précisément,

$$\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A}) = - \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \log \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})}, \quad (1.12)$$

où S est définie sur \mathcal{G} .

Taux d'entropie d'un processus markovien de sauts

Perez [48] définit l'entropie partielle et le taux d'entropie d'un processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à temps continu, d'espace d'état fini E . Précisément, l'entropie partielle du processus tronqué $X_{(T)} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à l'instant $T > 0$ est

$$S_T(\mathbf{X}) = - \int f_{X_{(T)}} \log f_{X_{(T)}} d\mu_T,$$

où $f_{X_{(T)}}$ est la densité de la loi $P_{X_{(T)}}$ de $X_{(T)}$ par rapport à la restriction μ_T à $E^{[0,T]}$ d'une mesure de référence μ définie sur $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{P}(E)^{\mathbb{R}_+})$; le taux d'entropie $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ du processus est la limite, si elle existe,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} S_T(\mathbf{X}).$$

Bad Dumitrescu [6] établit l'existence du taux d'entropie d'un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . La mesure de référence μ choisie est initialement construite par Albert [1] grâce à l'identification du processus tronqué à son historique. Précisément, toute troncature du processus s'identifie à un vecteur aléatoire à valeurs dans l'ensemble $V = \bigcup_{n \geq 0} V_n$, où $V_0 = E$ et $V_n = (E \times \mathbb{R}_+)^n \times E$, $n \geq 1$ (voir la partie 1.1.4). L'ensemble V_n est muni de la tribu produit \mathcal{B}_n engendrée par les sous-ensembles de E et les boréliens de \mathbb{R}_+ et de la mesure μ_n produit de la mesure de comptage sur E et de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ ; l'ensemble V est muni de la tribu \mathcal{B} engendrée par la réunion des \mathcal{B}_n , $n \geq 0$ et de la mesure μ définie par $\mu(B) = \sum_{n \geq 0} \mu_n(B \cap V_n)$.

Albert [1] établit une expression explicite de la densité de la loi du processus tronqué par rapport à μ , en fonction des coefficients du générateur du processus, du nombre de sauts d'un état à un autre et du temps de séjour en chacun des états. Bad Dumitrescu en déduit grâce au théorème ergodique 1.1, l'expression du taux d'entropie du processus en fonction de son générateur \mathbf{A} et de sa loi stationnaire P . Explicitement,

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = - \sum_{i \in E} P(i) \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j) \log \mathbf{A}(i, j) + \sum_{i \in E} P(i) \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j). \quad (1.13)$$

Grâce à (1.4), cette expression fournit une expression explicite de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ en fonction du générateur :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = H(\mathbf{A}) = - \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j) \log \mathbf{A}(i, j) + \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \sum_{j \neq i} \mathbf{A}(i, j), \quad (1.14)$$

où H est définie sur l'ensemble des générateurs ergodiques \mathcal{G} .

Les expressions (1.12) et (1.14) de l'entropie asymptotique et du taux d'entropie d'un processus de Markov ergodique sont indéfiniment dérivables sur leur ensemble de définition \mathcal{G} . Cette régularité est la base des bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs de l'entropie asymptotique et du taux d'entropie obtenues dans le chapitre 3.

1.3 Boîte à outils probabiliste

Dans cette partie, on présente quelques propriétés asymptotiques d'intérêt ainsi qu'une boîte à outils probabiliste permettant l'étude des estimateurs par plug-in, c'est-à-dire les images par des applications régulières, d'autres estimateurs.

1.3.1 Quelques résultats de convergence

Une suite d'estimateurs est consistante si elle converge en probabilité vers la quantité à estimer. Si la convergence est presque sûre, la suite d'estimateur est dite fortement consistante (les estimateurs eux-mêmes sont dits consistants). Une conséquence du théorème de l'application continue est que l'image continue d'un estimateur consistant (respectivement fortement consistant) est lui-même consistant (respectivement fortement). Précisément, si $(X_t)_t$ est une famille d'estimateurs indexée par \mathbb{N} ou \mathbb{R}_+ , convergeant en probabilité (respectivement presque sûrement) vers la constante X , $f(X_t)$ converge en probabilité (respectivement presque sûrement) vers $f(X)$, pourvu que f soit continue.

La loi asymptotique d'une famille consistante d'estimateur $(X_t)_t$ est la limite de la loi de l'erreur d'estimation $v(t)(X_t - X)$, où $v(t)$ est la vitesse de convergence. Ainsi, on dit que X_t est asymptotiquement normal si $v(t)(X_t - X)$ converge à vitesse $v(t)$ vers une loi normale. Quoique la vitesse $v(t)$ soit a priori quelconque, la situation la plus fréquemment rencontrée est $v(t) = \sqrt{t}$: c'est typiquement la vitesse de convergence donnée par le théorème de la limite centrée. La méthode delta généralisée présentée ci-dessous permet d'établir la loi asymptotique et la vitesse de convergence de l'image par une fonction au moins deux fois continûment dérivable d'une suite d'estimateurs $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consistant et asymptotiquement normal, de vitesse de convergence \sqrt{n} . La démonstration donnée ici dans le cas d'une famille indexée par \mathbb{N} s'adapte immédiatement à une famille d'estimateurs indexée par \mathbb{R}_+ .

Proposition 1.3 (Méthode delta généralisée). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une constante $X \in \mathcal{O}$ telle que $\sqrt{n}(X_n - X)$ converge en loi vers une loi normale centrée, de matrice de variance Σ^2 . Soit f une fonction définie sur \mathcal{O} à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est deux fois continûment différentiable sur \mathcal{O} .*

1. Si la différentielle $D_f(X)$ de f en X est non nulle, alors $\sqrt{n}(f(X_n) - f(X))$ converge en loi vers une loi normale centrée de matrice de variance $D_f(X) \cdot \Sigma^2 \cdot D_f(X)^t$, où $D_f(X)^t$ désigne la transposée de $D_f(X)$.
2. Si de plus $d = 1$ et si $D_f(X)$ est nulle, alors il existe k variables aléatoires Y_i , $i = 1, \dots, k$, indépendantes et de loi $\chi^2(1)$ et k réels α_i , $i = 1, \dots, k$ tels que $2n(f(X_n) - f(X))$ converge en loi vers $\sum_{i=1}^k \alpha_i Y_i$.

Démonstration :

1. Un développement de Taylor-Young de f à l'ordre 1 au voisinage de X fournit l'égalité

$$f(X_n) = f(X) + D_f(X)(X_n - X) + o_{\mathbb{P}}(\|X_n - X\|),$$

de sorte que

$$\sqrt{n}(f(X_n) - f(X)) = D_f(X)(\sqrt{n}(X_n - X)) + o_{\mathbb{P}}(\|\sqrt{n}(X_n - X)\|).$$

Le vecteur $\sqrt{n}(X_n - X)$ étant asymptotiquement de loi normale centrée de variance Σ^2 , alors $D_f(X)(\sqrt{n}(X_n - X))$ est asymptotiquement de loi normale centrée, de variance $D_f(X) \cdot \Sigma^2 \cdot D_f(X)^t$. Finalement, d'après le théorème de Prokhorov, $\sqrt{n}(X_n - X)$ étant asymptotiquement gaussien d'espérance nulle, alors $o_{\mathbb{P}}(\|\sqrt{n}(X_n - X)\|) = o_{\mathbb{P}}(1)$. Le résultat découle alors du théorème de Slutsky.

2. Comme la différentielle $D_f(X)$ est nulle, un développement de Taylor-Young de f à l'ordre 2 au voisinage de X donne

$$f(X_n) = f(X) + \frac{1}{2} D_f^2(X)(X_n - X, X_n - X) + o_{\mathbb{P}}(\|X_n - X\|^2),$$

où $D_f^2(X)$ est la hessienne de f en X , de sorte que

$$2n(f(X_n) - f(X)) = D_f^2(X)(\sqrt{n}(X_n - X), \sqrt{n}(X_n - X)) + o_{\mathbb{P}}(\|\sqrt{n}(X_n - X)\|^2).$$

La matrice de variance asymptotique de $\sqrt{n}(X_n - X)$ induit un produit scalaire sur \mathbb{R}^k , tandis que la hessienne $D_f^2(X)$ induit une forme quadratique. Le théorème de diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques s'applique : il existe une base \mathbf{B} de \mathbb{R}^k , orthonormale pour la variance, qui est aussi orthogonale pour la forme quadratique hessienne. Soit $(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}$ la matrice de passage de la base canonique à \mathbf{B} et $(\beta_i)_{i=1, \dots, k}$ les coordonnées diagonales de $D_f^2(X)$ dans \mathbf{B} . On a

$$2n(f(X_n) - f(X)) = \sum_{i=1}^k \beta_i Y_i^2 + o_{\mathbb{P}}(\|\sqrt{n}(X_n - X)\|^2),$$

où $Y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} \sqrt{n}(X_n(j) - X(j))$ sont des variables aléatoires non corrélées telles que $\text{Var}(Y_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$ (les variables $X_n(j)$ et $X(j)$ désignant les composantes de X_n et X). Le vecteur $\sqrt{n}(X_n - X)$ étant asymptotiquement gaussien, $\sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} \sqrt{n}(X_n(j) - X(j))$ est asymptotiquement une variable gaussienne, et Y_i^2 est asymptotiquement de loi $\chi^2(1)$.

Finalement, d'après le théorème de Prokhorov, $o_{\mathbb{P}}(\|\sqrt{n}(X_n - X)\|^2) = o_{\mathbb{P}}(1)$. Le résultat découle alors du théorème de Slutsky. \square

Remarques 1.1.

1. Le point 1. de la proposition 1.3 reste vrai dans un cadre beaucoup plus général que celui mentionné : la vitesse peut être autre que \sqrt{n} et on peut étendre le résultat à d'autres lois asymptotiques que la loi gaussienne. Toutefois, cette version recouvre l'ensemble des utilisations ultérieures.

2. Le point 2. fournit une loi asymptotique non dégénérée pour $2n(f(X_n) - f(X))$ uniquement si la hessienne de f en X n'est pas nulle. Cependant, si tel est le cas, pourvu que la fonction soit suffisamment régulière, on peut pousser le développement de Taylor jusqu'à la première dérivée non nulle et ainsi déterminer une loi asymptotique non dégénérée pour $f(X_n) - f(X)$.

1.3.2 Le principe de grandes déviations de Sanov

Lorsqu'un risque peut être modélisé comme la déviance d'une variable aléatoire par rapport à un comportement typique, il est nécessaire de calculer la probabilité qu'une telle déviance puisse survenir. La loi des grands nombres donne le comportement typique de la moyenne empirique $(\sum_{k=1}^n X_k)/n$ de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes de même loi P : $(\sum_{k=1}^n X_k)/n$ converge presque sûrement vers l'espérance m de P . Le théorème de la limite centrée fournit la limite quand n tend vers l'infini de la probabilité que $(\sum_{k=1}^n X_k)/n$ s'écarte de son comportement typique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| > \epsilon \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \exp(-x^2/(2\sigma^2)) dx, \quad \epsilon > 0, \quad (1.15)$$

où σ^2 est la variance de la loi P , soit, de manière heuristique, de sorte que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| > \epsilon \right) \simeq 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\sqrt{n}\epsilon} \exp(-x^2/(2\sigma^2)) dx,$$

Notons que si X_1, \dots, X_n sont des variables gaussiennes, cette égalité est exacte, de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X_k - m \right| > \epsilon \right) = -\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}, \quad \epsilon > 0. \quad (1.16)$$

Lorsque X_1, \dots, X_n ne sont pas de loi gaussienne, une limite du type de (1.16) existe encore, le membre de droite dépendant de la loi des variables aléatoires. Cette limite fournit une décroissance exponentielle optimale pour la probabilité des événements rares; elle constitue un principe de grands déviations pour la suite des moyennes empiriques.

De manière générale, une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace topologique \mathcal{X} vérifie un principe de grandes déviations de vitesse $v(n)$ et gouverné par la fonction de taux I si pour tout borélien A d'intérieur non vide,

$$-\inf_{x \in \overset{\circ}{A}} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \log \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \log \mathbb{P}(X_n \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x), \quad (1.17)$$

où $\overset{\circ}{A}$ et \bar{A} désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de A . Le recours aux limites supérieures et inférieures est nécessaire, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \log \mathbb{P}(X_n \in A)$ n'existant pas nécessairement. La fonction de taux est dite bonne si les ensembles de niveaux $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \geq \eta\}$, $\eta > 0$, sont compacts.

Notons que si la fonction de taux I est continue sur \mathcal{X} , alors c'est une bonne fonction de taux, et pour tout borélien A , on a

$$\inf_{x \in \overset{\circ}{A}} I(x) = \inf_{x \in \bar{A}} I(x),$$

de sorte que (1.17) devient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(n)} \log \mathbb{P}(X_n \in A) = -\inf_{x \in \bar{A}} I(x).$$

Le théorème suivant, de Sanov [55], donne un principe de grandes déviations pour la suite des lois empiriques associée à une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi P de support fini. La démonstration proposée ici, nécessaire à la bonne compréhension de la partie 2.4.2 du chapitre 2, est donnée par Cover et Thomas [16], chapitre 12.

Théorème 1.2 (Sanov (1961)). *La suite $(\widehat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des probabilités empiriques associée à une suite de variables aléatoires indépendantes de loi P de support fini E , satisfait un principe de grandes déviations dans $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la convergence faible, de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux $\mathbb{K}(\cdot|P)$. Précisément, pour tout borélien A de $\mathcal{M}_1(E)$, on a*

$$\mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) \leq (n+1)^{|E|} \exp\left(-n \inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P)\right). \quad (1.18)$$

Si de plus, A est d'intérieur non vide, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) = - \inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P). \quad (1.19)$$

Démonstration : La loi empirique \widehat{P}_n obtenue à partir du n -échantillon \underline{x}_n appartient à l'ensemble

$$\mathcal{Q}_n = \left\{ Q \in \overline{\mathcal{M}_1(E)} : Q(i) = \frac{k_i}{n}, i \in E, k_i \in \mathbb{N}, \sum_{i \in E} k_i = n \right\}.$$

Le nombre d'éléments $|\mathcal{Q}_n|$ de \mathcal{Q}_n vérifie

$$|\mathcal{Q}_n| \leq (n+1)^{|E|}.$$

En effet, puisque chaque numérateur k_i des éléments de \mathcal{Q}_n est compris entre 0 et n , il y a au plus $(n+1)$ choix pour chacun, d'où l'inégalité. Cette inégalité n'est pas optimale – la relation $\sum_{i \in E} k_i = n$ implique que les choix pour les k_i ne sont pas indépendants – mais sera suffisante. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) &= \mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A \cap \mathcal{Q}_n) \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_n \cap A} \mathbb{P}(\widehat{P}_n = Q). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pour $Q \in \mathcal{Q}_n \cap A$, soit T_Q l'ensemble des échantillons dont la loi empirique associée est Q ; précisément,

$$T_Q = \left\{ \underline{x}_n : \sum_{i \in E} \delta_i \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=i\}} = Q \right\}.$$

Observons que $\mathbb{P}(\widehat{P}_n = Q) = P^n(T_Q)$, où P^n est la loi produit sur E^n issue de P .

Or pour tout $\underline{x}_n \in T_Q$, il y a exactement $nQ(i)$ observations x_k qui sont égales à i , $i \in E$. D'où

$$\frac{P^n(\underline{x}_n)}{Q^n(\underline{x}_n)} = \prod_{k=1}^n \frac{P(x_k)}{Q(x_k)} = \prod_{i \in E} \left(\frac{P(i)}{Q(i)} \right)^{nQ(i)} = \exp(-n\mathbb{K}(Q|P)), \quad \underline{x}_n \in T_Q,$$

de sorte que

$$P^n(\underline{x}_n) = Q^n(\underline{x}_n) \exp(-n\mathbb{K}(Q|P)).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} P^n(T_Q) &= \sum_{\underline{x}_n \in T_Q} P^n(\underline{x}_n) = \sum_{\underline{x}_n \in T_Q} Q^n(\underline{x}_n) \exp(-n\mathbb{K}(Q|P)) \\ &\leq Q(T_Q) \exp(-n \min_{Q \in \mathcal{Q}_n \cap A} \mathbb{K}(Q|P)) \leq \exp(-n \inf_{Q \in \mathcal{Q}_n \cap A} \mathbb{K}(Q|P)). \end{aligned}$$

Le dernier terme ne dépend plus de T_Q , donc l'inégalité (1.20) devient

$$\mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) \leq |\mathcal{Q}_n \cap A| \exp(-n \inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P)).$$

Finalement, l'inégalité (1.18) en découle puisque $|\mathcal{Q}_n \cap A| \leq |\mathcal{Q}_n| \leq (n+1)^{|E|}$.

Pour établir la borne inférieure, un ensemble A doit exister, tel que pour n suffisamment grand, on peut trouver une probabilité dans $A \cap \mathcal{Q}_n$ suffisamment proche de la probabilité réalisant la borne inférieure $\inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P)$. Si A est d'intérieur non vide, alors $\bigcup_n \mathcal{Q}_n$ est dense dans $\mathcal{M}_1(E)$, donc $A \cap \mathcal{Q}_n$ est non vide pour n assez grand. On construit alors une suite de probabilités Q_n telles que $Q_n \in \mathcal{Q}_n \cap A$ et $\mathbb{K}(Q_n|P)$ converge vers $\inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P)$. Ainsi, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) &= \sum_{Q \in A \cap \mathcal{Q}_n} P^n(T_Q) \\ &\geq P^n(T_{Q_n}) \geq \frac{1}{(n+1)^{|E|}} \exp(-n \mathbb{K}(Q_n|P)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\widehat{P}_n \in A) \geq \liminf \left(-\frac{|E| \log(n+1)}{n} - \mathbb{K}(Q_n|P) \right) = \inf_{Q \in A} \mathbb{K}(Q|P). \quad (1.21)$$

Finalement, réunissant les limites inférieure (1.21) et supérieure découlant de l'inégalité (1.18), on déduit la limite (1.19). \square

Remarque 1.1. *Cette démonstration combinatoire s'affranchie pratiquement de toute considération topologique, pourtant habituellement au coeur des techniques de grandes déviations. Le théorème de Sanov peut en effet s'énoncer dans un cadre plus général que celui présenté ici, où l'on s'est limité aux probabilités à support fini. Lorsque l'espace d'état de P est plus général, la fonction de taux n'est pas nécessairement continue pour la topologie de la convergence faible. Dans le cadre où nous nous plaçons, la fonction de taux, qui est la divergence de Kullback-Leibler par rapport à P , est continue sur $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la convergence faible, pourvu que E soit le support de P . En outre, la topologie faible sur $\mathcal{M}_1(E)$ coïncide alors avec la topologie réelle induite sur les n -uplets $(P(i))_{i \in E}$.*

Dans le chapitre 2, on établit un principe de grandes déviations pour la suite des estimateurs par plug-in de l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de la loi commune P d'observations indépendantes. On déduira ce principe de grandes déviations du théorème de Sanov et du principe de contraction suivant (voir par exemple Dembo et Zeitouni [22], Theorem 4.2.1).

Proposition 1.4 (Principe de contraction). *Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux espaces topologiques et f une fonction continue de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables satisfaisant un principe de grandes déviations sur \mathcal{X} de vitesse $v(n)$ et gouverné par la fonction de taux I .*

Alors la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un principe de grandes déviations sur \mathcal{Y} de vitesse $v(n)$ et gouverné par la fonction de taux J donnée par

$$J(y) = \inf\{I(x) : x \in f^{-1}(y)\},$$

avec la convention que la borne inférieure d'une partie vide est égale à $+\infty$.

De plus, si la fonction de taux I est continue, alors J est continue sur l'ensemble $\{y \in \mathcal{Y} : J(y) < +\infty\}$. En particulier, dans ce cas, les limites inférieures et supérieures du principe de grandes déviations sont égales.

Chapitre 2

Principe de grandes déviations pour l'estimateur par plug-in de l'entropie d'une probabilité. Applications.

Lorsque seules des observations d'une loi sont disponibles, il est nécessaire d'estimer l'entropie pour l'utiliser dans les applications. L'estimateur de l'entropie égal à l'entropie de la loi empirique de n observations indépendantes de même loi (n -échantillon) a été étudié dans les années 50. Zubkov [67] et Harris [39] établissent respectivement que l'erreur d'estimation $\mathbb{S}(P) - \mathbb{S}(\hat{P}_n)$ converge en loi à vitesse \sqrt{n} vers une loi normale si P n'est pas uniforme, et à vitesse $2n$ vers une somme de variables de loi du χ^2 à 1 degré de liberté, lorsque P est uniforme. Leur démonstration est basée sur le fait que l'estimation de l'entropie à partir d'observations indépendantes est un cas particulier d'un schéma d'observation plus complexe. Une démonstration plus accessible des bonnes propriétés asymptotiques de $\mathbb{S}(\hat{P}_n)$ est donnée dans la partie 2.2 du présent chapitre.

Le but de ce chapitre est d'établir et d'étudier un principe de grandes déviations (PGD) pour la suite des estimateurs par plug-in $\hat{S}_n = \mathbb{S}(\hat{P}_n)$ de l'entropie $\mathbb{S}(P)$, basée sur la suite des estimateurs empiriques \hat{P}_n de la loi P . Précisément, on montre dans la partie 2.3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\hat{S}_n \in A) = - \inf_{s \in \bar{A}} I_{\mathbb{S}}(P, s), \quad (2.1)$$

pour tout borélien $A \subseteq [0, \log |E|]$ d'intérieur non vide, où \bar{A} désigne l'adhérence de A et où la fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ est la divergence de Kullback-Leibler par rapport à P de la k -escorte E_P^k de P donnée par

$$E_P^k(i) = \frac{P(i)^k}{\sum_{j \in E} P(j)^k}, \quad i \in E, \quad (2.2)$$

avec $k > 0$ tel que $\mathbb{S}(E_P^k) = s$.

Dans la partie 2.1, en préliminaire à l'énoncé du PGD, quelques propriétés des lois escortes sont établies, en lien avec l'entropie et la géométrie induite par la divergence de Kullback-Leibler. On montre notamment que la projection relativement à la divergence de Kullback-Leibler d'une probabilité P de support fini E , sur une \mathbb{K} -sphère est atteinte pour une loi escorte de P . Intéressantes par elles-mêmes, ces propriétés sont aussi nécessaires pour la construction d'une approximation explicite de la fonction de taux dans la partie 2.1.3. En effet, établir une expression explicite pour le niveau k de l'escorte impliquée dans la définition de $I_{\mathbb{S}}$, en fonction du niveau d'entropie s semble être difficile, et ce, quelque soit le cardinal de E ; une approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, s)$ pour toute valeur de s est obtenue dans la partie 2.1.3.

La fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ peut être remplacée par son approximation dans toutes les applications des PGD, sans altérer significativement la précision des résultats. Précisément, dans la partie 2.4.1, des bornes exponentielles sont établies pour la probabilité des événements rares, tels que ($\widehat{S}_n > \mathbb{S}(P) + \varepsilon$), pour $\varepsilon > 0$, en utilisant l'approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$. Ces bornes sont asymptotiquement aussi précises que celles fournies par la fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$. Dans la partie 2.4.2, un test du niveau d'entropie d'une variable aléatoire est établi, par seuillage de l'approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ par des valeurs appropriées. D'autres applications apparaissent naturellement en théorie de la compression et du codage ; voir Dembo et Zeitouni [22], partie 3.5 et Cover et Thomas [16], chapitres 12 et 13.

2.1 Quelques propriétés des lois escortes en lien avec la géométrie de Kullback-Leibler

Des détails importants d'un phénomène apparaissent souvent plus clairement en étudiant les lois escortes, pour des valeurs de k adéquates, que la loi elle-même. Beck et Schlogl [8] et Tsallis [60] établissent quelques propriétés des lois escortes (voir la partie 1.2.2 du chapitre 1). Une étude de la transformation escorte de quelques lois usuelles à support fini, mais aussi à support dénombrable ou continu est proposée en annexe de ce chapitre. Bercher [9] présente le rôle des lois escortes en théorie du codage, en lien avec l'entropie de Rényi. Les lois escortes jouent également un rôle important dans la géométrie liée à la divergence de Kullback-Leibler (voir Sgarro [56], ainsi que la partie 1.2.2 du chapitre 1 pour plus de détails). On établit dans la partie 2.1.1 que la projection d'une probabilité P sur une sphère relative à la divergence de Kullback-Leibler, centrée en la probabilité uniforme, est une des lois escortes de P , pourvu que P ait un unique mode, prouvant ainsi que les droites de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_1^*(E)$ (muni des opérations \oplus et \odot introduites dans la partie 1.2.2 du chapitre 1) donnent la direction de la plus grande variation d'information. Par ailleurs, il est établi dans la partie 2.3 que cette projection, dite \mathbb{K} -projection et notée $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$, est la fonction de taux gouvernant le principe de grandes déviations de la suite des estimateurs par plug-in de l'entropie de P , ramenant ainsi l'étude asymptotique d'événements rares à l'étude de la géométrie de Kullback-Leibler.

Étant donnée une probabilité $P \in \mathcal{M}_1^*(E)$, où $E = \{0, \dots, N\}$, on définit la fonction ϕ_P sur \mathbb{R}_+^* par $\phi_P(k) = \mathbb{S}(E_P^k)$. Dans la partie 2.1.2, plusieurs propriétés de \mathcal{E} sont établies. En particulier, on montre que pour toute loi P possédant m modes, la fonction ϕ_P a pour image $]\log(m), \log(N + 1)[$ et y est inversible.

Établir une expression explicite de la \mathbb{K} -projection revient à établir une expression explicite du niveau k de la transformation escorte en fonction de son niveau d'entropie s (ou de manière équivalente du rayon de la \mathbb{K} -sphère sur laquelle on projette), c'est-à-dire à expliciter l'inverse de ϕ_P . Une alternative, présentée dans la partie 2.1.3, consiste à établir une approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, s)$ pour toute valeur explicite de s , avec un contrôle sur l'erreur d'approximation.

2.1.1 \mathbb{K} -projection d'une probabilité sur une \mathbb{K} -sphère

Le théorème 2.1 établit la projection relativement à la divergence de Kullback-Leibler d'une probabilité $P \in \mathcal{M}_1^*(E)$, sur l'ensemble de niveau $\mathbb{S}^{-1}(s)$, pour $s \in [0, \log(N + 1)]$. Précisément, la \mathbb{K} -projection de P sur la \mathbb{K} -sphère $S_{\mathbb{K}}(U, \log(N + 1) - s) = \mathbb{S}^{-1}(s)$ est définie par

$$I_{\mathbb{S}}(P, s) = \inf\{\mathbb{K}(Q|P) : Q \in \mathbb{S}^{-1}(s)\}.$$

Bien que la démonstration de ce théorème utilise les résultats de la partie 2.1.2, on le donne dès maintenant, car il s'agit du résultat central de ce chapitre.

Théorème 2.1. *Soit $P \in \mathcal{M}_1^*(E)$ une probabilité de support fini E . Soient $p^* = \max_{i \in E} P(i)$ et $m = |\{i \in E : P(i) = p^*\}|$ le nombre de modes de P . Soient $\mathbb{S}(P)$ l'entropie de P et $s \in \mathbb{R}$.*

Alors

$$I_{\mathbb{S}}(P, s) = \begin{cases} \mathbb{K}(E_P^k|P) & \text{si } s \in]\log m, \log |E|], \quad \text{pour } k \text{ tel que } \mathbb{S}(E_P^k) = s, \\ -\log p^* - s & \text{si } s \in [0, \log m], \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Démonstration : La quantité à minimiser est $\mathbb{K}(Q|P)$.

Les contraintes sont $\mathbb{S}(Q) = -\sum_{i \in E} Q(i) \log Q(i) = s$ et $\sum_{i \in E} Q(i) = 1$. On a $\mathbb{K}(Q|P) = s - \sum_i Q(i) \log P(i)$, où s est connue. On peut supposer sans perte de généralité que les m modes de P sont $0, \dots, m-1$, de poids p , de manière à ce que la quantité à minimiser soit

$$-\sum_{i \in E} Q(i) \log P(i) = -\log p \sum_{i=0}^{m-1} Q(i) - \sum_{i=m}^N Q(i) \log P(i).$$

Cette somme est la moyenne des quantités $-\log P(i)$ pondérées par la probabilité Q , de telle manière que la borne inférieure est atteinte pour la probabilité Q qui favorise la plus petite valeur, c'est-à-dire la valeur $-\log p$. Ainsi, n'importe quelle probabilité Q telle que $Q(m+1) = \dots = Q(N) = 0$ est solution, pourvu qu'elle satisfasse la contrainte $\mathbb{S}(Q) = s$. Si $s \leq \log m$, de telles probabilités existent et $\inf_Q \{-\sum_i Q(i) \log P(i)\} = -\log p$, de sorte que $I_{\mathbb{S}}(s) = -s - \log p$.

Notons que l'entropie de toute probabilité satisfaisant $Q(m+1) = \dots = Q(N) = 0$ est nécessairement inférieure à $\log m$ (voir le lemme 2.1), de sorte que si $s > \log m$, la borne inférieure n'est pas atteinte pour une telle probabilité. Dans ce cas, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le lagrangien est

$$-\sum_{i \in E} Q(i) \log P(i) - x \sum_{i \in E} Q(i) \log Q(i) - z \left[\sum_{i \in E} Q(i) - 1 \right].$$

En dérivant par rapport à $Q(i)$, pour $i \in E$, on obtient $-\log P(i) - x[\log Q(i) + 1] - z = 0$, pour tout $i \in E$, d'où

$$Q^{\min}(i) = CQ(i)^k, \quad i \in E, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Finalement, l'égalité $\sum_{i \in E} Q^{\min}(i) = 1$ implique $C = 1 / \sum_{j \in E} P(j)^k$, et alors $Q^{\min} = E_P^k$, pour $k \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathbb{S}(E_P^k) = s$. La propriété 2.3 et la proposition 2.1, établies dans la partie 2.1.2 prouvent qu'il existe deux valeurs possibles pour k , l'une positive, l'autre négative. La valeur négative induit une probabilité E_P^k possédant des propriétés très dissemblables à P (voir la proposition 2.1); en particulier, il est clair que la borne inférieure cherchée est atteinte pour E_P^k avec $k > 0$. □

Ce résultat a été initialement énoncé par Sgarro [56]. On le trouve énoncé également dans Cover et Thomas [16], page 309, dans le contexte du test d'hypothèses et dans Dembo et Zeitouni [22], Exercice 3.4.14, dans le contexte des grandes déviations. Cependant, la méthode des multiplicateurs de Lagrange utilisée par ces auteurs ne permet pas de déterminer la projection de probabilités possédant plusieurs modes. En effet, elle fournit des extrema locaux dans un ouvert, ici $\mathcal{M}_1^*(E) = \{Q \in \mathcal{M}_1(E) : Q(i) > 0, i \in E\}$ pour $s > \log m$, tandis que pour $m > 1$ et $s \leq \log m$, la borne inférieure est atteinte sur le bord de $\mathcal{M}_1(E)$. En guise d'illustration, la figure 2.1 représente $\mathcal{M}_1(E)$ identifié au triangle équilatéral (voir la partie 1.2.2 du chapitre 1 pour plus de détails sur cette identification). Les lacets bleus représentent les ensemble de niveau $\{Q : \mathbb{S}(Q) = s\}$ pour $s = s_0 < \log 2$ (à gauche) et $s = s_1 > \log 2$ (à droite). Les courbes en pointillés rouges sont les droites dans cette géométrie. Pour P_1 , la borne inférieure est atteinte dans l'intérieur de $\mathcal{M}_1(E)$, quelque soit le niveau d'entropie s . Pour P_2 , la borne inférieure est également atteinte dans l'intérieur lorsque $s > \log 2$ (à gauche), mais elle est atteinte sur le bord, en P_2^{\min} , lorsque $s \leq \log 2$ (à droite).

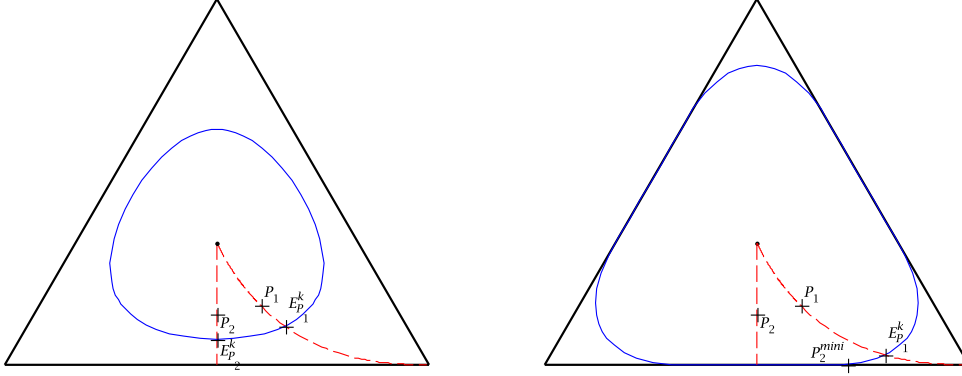


FIG. 2.1 – Projections des probabilités P_1 et P_2 , possédant respectivement un et deux modes, pour $s_0 > \log 2$ (à gauche) et $s_1 < \log 2$ (à droite).

Remarques 2.1.

1. Si $P = U$ est la loi uniforme sur E , alors $P(i) = 1/(N + 1)$ et P possède $N + 1$ modes et $I_{\mathbb{S}}(U, s) = \log(N + 1) - s$ pour tout $s \in [0, \log(N + 1)]$.
2. Le résultat précédent ne prend pas en compte les probabilités P sur le bord de $\mathcal{M}_1(E)$, c'est-à-dire les probabilités pour lesquelles il existe des états $i \in E$ de poids nul. Néanmoins, dans le cadre du principe de grandes déviations pour la suite des estimateurs par plug-in de l'entropie de P , cette restriction est naturelle puisqu'on ne peut observer que les états pour lesquels $P(i) > 0$.

2.1.2 Propriétés des lois escortes

Dans cette partie, quelques propriétés de la transformation escorte en lien avec l'entropie sont établies. Ces propriétés vont permettre de prouver que la fonction ϕ_P , qui à $k > 0$ associe l'entropie de la k -escorte de la probabilité P , est inversible.

Le lemme ci-dessous est nécessaire à la preuve des propriétés qui suivent.

Lemme 2.1. Soit $P \in \mathcal{M}_1(E)$ une probabilité sur un ensemble fini de cardinal $N + 1$ possédant m modes. L'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P vérifie

$$\log(m) \leq \mathbb{S}(P) \leq \log(N + 1). \quad (2.4)$$

Démonstration : On sait (proposition 1.2 du chapitre 1) que la valeur maximale de l'entropie $\mathbb{S}(P)$ est atteinte pour la probabilité uniforme, dont l'entropie est $\log(N + 1)$.

Supposons maintenant que P a m modes et montrons que $\mathbb{S}(P) \geq \log m$. D'après la propriété 1.1 du chapitre 1, si $p_m = \sum_{k=1}^n q_k = 1 - \sum_{i=0}^m p_i$, alors

$$\mathbb{S}(p_0, \dots, p_{m-1}, q_1, \dots, q_n) = \mathbb{S}(p_0, \dots, p_m) + p_m \mathbb{S}\left(\frac{q_1}{p_m}, \dots, \frac{q_n}{p_m}\right) \geq \mathbb{S}(p_0, \dots, p_m).$$

Posons $P(0) = \dots = P(m - 1) = q$ et $P(k) = q_k$ pour $k = 1, \dots, n$, avec $n = N + 1 - m$. La probabilité P possédant exactement m modes, $p_m = 1 - mq$, avec $1 - mq \geq 0$, c'est-à-dire que $q \leq 1/m$, et $q > q_k$ pour $k = 1, \dots, n$ et alors $q > 1/(m + n) = 1/(N + 1)$. D'où

$$\mathbb{S}(q, \dots, q, p_m) = mq \log(mq) + (1 - mq) \log(1 - mq) = s_m(q).$$

En calculant la dérivée de s_m par rapport à q , on obtient $s'_m(q) = m \log[(1 - mq)/q]$, ce qui montre que s_m est strictement croissante sur $]0, 1/(m + 1)[$ et strictement décroissante sur

$]1/(m+1), 1/m[$; la valeur minimale étant alors $s_m(1/m) = \log m$. \square

Le comportement de la transformation escorte diffère grandement selon que $k > 0$ ou $k < 0$. Dans la partie 2.1.1, ce sont les lois escortes pour $k > 0$ qui interviennent. Notre étude sera donc concentrée sur celles-ci, les propriétés des transformations escortes pour $k < 0$ étant simplement énoncées.

La dérivée partielle de \mathcal{E} par rapport à k , définie sur $\mathcal{M}_1^*(E) \times \mathbb{R}_+$, est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k}(P, k)(i) = \frac{P(i)^k \sum_{l \in E} P(l)^k \log [P(i)^k / P(l)^k]}{[\sum_{l \in E} P(l)^k]^2}. \quad (2.5)$$

Pour simplifier, on notera $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k}(P, k)(i) = \partial_k E_P^k(i)$.

Propriété 2.1. *La transformation escorte restreinte à \mathbb{R}_+^* tend à uniformiser P lorsque $k < 1$ tandis qu'elle tend à concentrer le poids sur les modes lorsque $k > 1$. Précisément :*

1. E_P^k converge vers la probabilité uniforme lorsque k tend vers 0 ;
2. E_P^k converge vers $\sum_{i=1}^m \delta_{\alpha_i} / m$ lorsque k tend vers l'infini, où $\mathcal{M} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ désigne l'ensemble des m modes de P et δ_i est la mesure de Dirac en i .

Démonstration :

1. Puisque $P(j) \in]0, 1[$ pour tout $j \in E$, on sait que $P(j)^k$ converge vers 1 lorsque k tend vers 0. La somme $\sum_{j \in E} P(j)^k$ converge alors vers $(N+1)$ et $E_P^k = P(i)^k / \sum_{j \in E} P(j)^k$ converge vers $1/(N+1)$.
2. Posons $p = P(\alpha_1) = \dots = P(\alpha_m)$. On a

$$E_P^k(i) = \frac{P(i)^k}{\sum_{j \in E} P(j)^k} = \frac{P(i)^k / p^k}{\sum_{j \in E} P(j) / p^k} = \frac{P(i)^k / p^k}{m + \sum_{j \notin \mathcal{M}} P(j)^k / p^k}.$$

Pour $i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, le rapport $P(i)^k / p^k$ converge vers 0, tandis que $P(\alpha_l) / p = 1$, pour $l = 1, \dots, m$, de sorte que $E_P^k(i)$ tend vers $1/m$ si $i = \alpha_l$ et vers 0 sinon. \square

Propriété 2.2. *La transformation escorte \mathcal{E} restreinte à \mathbb{R}_+^* et sa dérivée par rapport à k préservent l'ordre induit par les poids de la probabilité P . Précisément :*

1. si $P(i) = P(j)$ alors $E_P^k(i) = E_P^k(j)$;
2. si $P(i) > P(j)$, alors $E_P^k(i) > E_P^k(j)$ et $\partial_k E_P^k(i) > \partial_k E_P^k(j)$, $k > 0$;
3. si P n'est pas uniforme ni une mesure de Dirac, alors pour $P(i_*) = \min_{i \in E} P(i)$ et $P(i^*) = \max_{i \in E} P(i)$, $\partial_k E_P^k(i^*) > 0$ et $\partial_k E_P^k(i_*) < 0$, $k > 0$.

Démonstration :

1. L'égalité $P(i) = P(j)$ implique $P(i)^k = P(j)^k$ et donc $E_P^k(i) = E_P^k(j)$.
2. L'inégalité $P(i) > P(j)$ implique $P(i)^k > P(j)^k$, pour $k > 0$, ce qui prouve que $E_P^k(i) > E_P^k(j)$. Par ailleurs, on déduit de (2.5) que

$$\partial_k E_P^k(i) > \frac{P(j)^k \sum_{l \in E} \log \left[\frac{P(j)^k}{P(l)^k} \right] P(l)^k}{[\sum_{l \in E} P(l)^k]^2} = \partial_k E_P^k(j).$$

3. D'une part, si $\partial_k E_P^k(i^*)$ était négative ou nulle, alors d'après le point 1, $\partial_k E_P^k(i)$ serait négative ou nulle pour tout $i \in E$. D'autre part, puisque $\sum_{i \in E} E_P^k(i) = 1$, on a pour tout $k > 0$,

$$\sum_{i \in E} \partial_k E_P^k(i) = 0.$$

Par conséquent, $\partial_k E_P^k(i) = 0$ pour tout $i \in E$ et tout $k > 0$, et $E_P^k = P$ et alors P serait la loi uniforme ou bien une mesure de Dirac.

Le résultat se démontre de manière similaire pour le minimum. \square

Propriété 2.3. *Si $P \in \mathcal{M}_1^*(E) \setminus \{U\}$, où U est la loi uniforme, la fonction ϕ_P définie sur \mathbb{R}_+^* par $\phi_P(k) = \mathbb{S}(E_P^k)$, est deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée ϕ'_P est strictement négative sur \mathbb{R}_+^* .*

Démonstration : La fonction ϕ_P est deux fois (infiniment) continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que composée de fonctions deux fois (infiniment) continûment dérivables. Sa dérivée est donnée pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$ par la règle des chaînes, soit

$$\frac{d}{dk} \phi_P(k) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial i} \mathbb{S}(E_P^k) \partial_k E_P^k(i) = - \sum_{i=1}^N \left[\log \left(\frac{E_P^k(i)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \right] \partial_k E_P^k(i). \quad (2.6)$$

Ordonnons les éléments de E selon leur poids sous P , de manière que $P(0) \geq P(1) \geq \dots \geq P(N)$.

Selon la propriété 2.1, point 1, $E_P^k(0) \geq \dots \geq E_P^k(N)$ et $\partial_k E_P^k(0) \geq \dots \geq \partial_k E_P^k(N)$. D'après la propriété 2.2, $\partial_k E_P^k(0) > 0$ et $\partial_k E_P^k(N) < 0$. Donc, pour tout $k > 0$, il existe un $j \in E$ tel que $\partial_k E_P^k(j) \geq 0$ et $\partial_k E_P^k(j+1) < 0$, de sorte que (2.6) devient

$$\phi'_P(k) = \sum_{i=1}^j \left[-\log \left(\frac{E_P^k(i)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \right] \frac{d}{dk} E_P^k(i) + \sum_{i=j+1}^N \left[-\log \left(\frac{E_P^k(i)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \right] \partial_k E_P^k(i),$$

où $\sum_{i=1}^j$ est nulle si $j = 0$. La fonction $x \mapsto -\log x$ étant décroissante, on a

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{1, \dots, j\}} -\log \left(\frac{E_P^k(i)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) &= -\log \left(\frac{E_P^k(j)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right), \\ \min_{i \in \{j+1, \dots, N\}} -\log \left(\frac{E_P^k(i)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) &= -\log \left(\frac{E_P^k(j+1)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \phi_P(k) &\leq \left[-\log \left(\frac{E_P^k(j)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \right] \sum_{i=1}^j \partial_k E_P^k(i) \\ &\quad + \left[-\log \left(\frac{E_P^k(j+1)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \right] \sum_{i=j+1}^N \partial_k E_P^k(i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'égalité $\sum_{i \in E} E_P^k(i) = 1$ implique que $\sum_{i=j+1}^N \partial_k E_P^k(i) = -\sum_{i=1}^j \partial_k E_P^k(i) + \partial_k E_P^k(0)$, ce qui donne dans (2.7),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \phi_P(k) &\leq \log \left[\frac{E_P^k(j+1)}{E_P^k(j)} \right] \sum_{i=j+1}^N \partial_k E_P^k(i) - \log \left(\frac{E_P^k(j)}{1 - \sum_{l=1}^N E_P^k(l)} \right) \partial_k E_P^k(0) \\ &\leq \log \left[\frac{E_P^k(j+1)}{E_P^k(j)} \right] \sum_{i=j+1}^N \partial_k E_P^k(i). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de l'inégalité $E_P^k(j) \geq E_P^k(j+1)$.

Notons que l'inégalité est stricte dès qu'il existe au moins un $i \in E$ tel que $P(i) \neq P(i+1)$, ce qui est vrai dès que P n'est pas uniforme. \square

Propriété 2.4. *La borne inférieure $\inf_{k>0} \mathbb{S}(E_P^k)$ de l'entropie des escortes d'une probabilité possédant m modes est $\log m$. La borne supérieure $\sup_{k>0} \mathbb{S}(E_P^k)$ est $\log(N+1)$.*

Démonstration : Soit E_P^k la k -escorte d'une probabilité P possédant m modes.

D'après la propriété 2.2, E_P^k a également m modes, et donc, d'après le lemme 2.1, la valeur minimale de $\mathbb{S}(E_P^k)$ est $\log m$. \square

Notons $\lambda = \log m$ et $\Lambda = \log(N+1)$. D'après les propriétés 2.3 et 2.4, ϕ_P est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $] \lambda, \Lambda [$ avec une fonction inverse deux fois continûment dérivable ϕ_P^{-1} . De plus,

$$I_{\mathbb{S}}(P, s) = \mathbb{K}(\mathcal{E}(P, \phi_P^{-1}(s)) | P), \quad s \in] \lambda, \Lambda [,$$

de sorte que $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$, en tant que fonction de s est également deux fois dérivable sur $] \lambda, \Lambda [$.

Le lemme suivant établit la continuité de $I_{\mathbb{S}}(\cdot, s)$, en tant que fonction de P , pour $s \in]0, \log(N+1)[$ fixé, sur l'ensemble $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ des probabilités de support E possédant un unique mode.

Lemme 2.2. *Étant donné $s \in]0, \log(N+1)[$, l'application $I_{\mathbb{S}}(\cdot, s)$ est continue sur $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$.*

Démonstration : Soit $s \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathcal{M}_1^{(1)}(E)$, on a $I_{\mathbb{S}}(P, s) = \mathbb{K}(\mathcal{E}(P, \phi_P^{-1}(s)) | P)$. La transformation escorte et la divergence de Kullback-Leibler étant continues sur leur ensemble de définition, la fonction $I_{\mathbb{S}}(\cdot, s)$ restreinte à $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ est continue en tant que composée de fonctions continues, pourvu que la fonction $P \in \mathcal{M}_1^{(1)}(E) \mapsto \phi_P^{-1}(s)$ soit elle aussi continue.

La fonction Φ définie sur $\mathcal{M}_1^{(1)}(E) \times \mathbb{R}_+^*$ par $\Phi(P, k) = \mathbb{S}(E_P^k)$ est continûment différentiable. La propriété 2.3 établit que pour tout $(P, k) \in \mathcal{M}_1^{(1)}(E) \times \mathbb{R}_+^*$, la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial k} \Phi(P, k)$ est non nulle. Le théorème des fonctions implicites dit que pour toute probabilité $P \in \mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ et tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage \mathcal{V}_P de P , un voisinage \mathcal{V}_k de k et une fonction ρ définie et continûment différentiable sur \mathcal{V}_k tels que pour tout $(P', k') \in \mathcal{V}_P \times \mathcal{V}_k$, l'égalité $\Phi(P', k') = s$ est vérifiée si et seulement si $k' = \rho(P')$. En particulier, $\Phi(P, k) = s$ si et seulement si $k = \rho(P)$, c'est-à-dire si et seulement si $\phi_P^{-1}(s) = \rho(P)$. La fonction ρ étant continûment différentiable en P , elle est en particulier continue, donc l'application $P \mapsto \phi_P^{-1}(s)$, ce qui termine la démonstration. \square

La transformation escorte agit sur P de façon opposée pour $k < 0$: les valeurs les moins probables pour P deviennent les modes de l'escorte et réciproquement. Les propriétés des lois escortes pour $k < 0$ possèdent des propriétés qui sont les versions chirales (symétriques, vues dans un miroir) de celles précédemment établies pour $k > 0$. Elles sont résumées ci-dessous.

Propriétés 2.1.

1. *La transformation escorte restreinte à \mathbb{R}_-^* tend à uniformiser P lorsque $k > -1$ tandis qu'elle tend à concentrer le poids sur les valeurs les moins probables lorsque $k < -1$. Précisément,*

(a) E_P^k converge vers la probabilité uniforme lorsque k tend vers 0 ;

(b) E_P^k converge vers $\sum_{l=1}^{m'} \delta_{\alpha_l} / m'$ lorsque k tend vers l'infini, où $M' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}\}$ désigne le ou les élément(s) de E le(s) moins chargé(s) par P et δ_i est la mesure de Dirac en i .

2. *La transformation escorte \mathcal{E} restreinte à \mathbb{R}_-^* et sa dérivée par rapport à k renversent l'ordre induit par les poids de la probabilité P . Précisément,*

(a) si $P(i) = P(j)$ alors $E_P^k(i) = E_P^k(j)$;

(b) si $P(i) > P(j)$, alors

$$E_P^k(i) < E_P^k(j) \quad \text{et} \quad \partial_k E_P^k(i) < \partial_k E_P^k(j), \quad k < 0;$$

(c) si P n'est pas uniforme ni une mesure de Dirac, alors pour $P(i_*) = \min_{i \in E} P(i)$ et $P(i^*) = \max_{i \in E} P(i)$, on a

$$\partial_k E_P^k(i^*) > 0 \quad \text{et} \quad \partial_k E_P^k(i_*) < 0, \quad k < 0.$$

3. Si $P \in \mathcal{M}_1(E) \setminus \{U\}$, où U est la loi uniforme, la fonction $k \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \mathbb{S}(E_P^k)$ est deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R}_-^* et sa dérivée est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

2.1.3 Approximation numérique de la \mathbb{K} -projection

Donner une expression explicite de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ revient à obtenir une expression analytique de l'inverse de ϕ_P , ce qui ne nous semble pas être envisageable. Une alternative consiste à construire une approximation de cet inverse.

Puisque $\mathbb{S}(E_P^k)$ est une fonction strictement décroissante de k , l'équation $\mathbb{S}(E_P^k) = s$, avec $s \in]\lambda, \Lambda[$, admet une unique solution. En d'autres termes, la borne inférieure définissant $I_{\mathbb{S}}(s)$ est atteinte pour une unique k -escorte de P , pourvu que $s \in]\lambda, \Lambda[$.

Soit $\{s_1, \dots, s_{M-1}\}$ une famille de points équidistribués le long de $] \lambda, \Lambda[$, disons $s_l = \lambda + l(\Lambda - \lambda)/M$. Puisque ϕ_P est strictement monotone et régulière, de nombreuses méthodes numériques fournissent une solution approchée de chaque équation

$$\phi_P(k) = s_l, \quad l = 1, \dots, M-1.$$

Nous sommes intéressés ici par l'effet de cette approximation sur le PGD, pas par le choix de la meilleure méthode numérique ; le fait est que l'on peut effectivement obtenir des solutions approchées $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{M-1}$ aussi proches que nécessaire des vraies solutions k_1, \dots, k_{M-1} . Si $\rho > 0$ désigne la précision nécessaire, établie dans la preuve de la proposition 2.1 ci-dessous, on choisit \tilde{k}_l tel que $|\tilde{k}_l - k_l| < \rho$ pour tout $l \in \{1, \dots, M-1\}$. On définit alors une valeur approchée $I_M(P, s_l)$ de $I_{\mathbb{S}}(P, s_l)$ en posant

$$I_M(P, s_l) = \mathbb{K} \left(\mathcal{E}(P, \tilde{k}_l) | P \right), \quad l = 1, \dots, M-1.$$

Finalement, l'approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ est la fonction $I_M(P, \cdot)$ affine et continue par morceaux construite à partir de ces points. Précisément,

$$I_M(P, s) = \begin{cases} \alpha \widehat{I}_{\mathbb{S}}(s_1) + (1-\alpha)(-\log \max_{i \in E} \{P(i)\} - \lambda) & s = \alpha s_1 + (1-\alpha)\lambda, \quad \alpha \in [0, 1], \\ \alpha(-\Lambda - \frac{1}{N+1} \sum_{i \in E} \log P(i) \\ \quad + (1-\alpha)\widehat{I}_{\mathbb{S}}(s_{M-1})) & s = \alpha\Lambda + (1-\alpha)s_{M-1}, \quad \alpha \in [0, 1], \\ \alpha \widehat{I}_{\mathbb{S}}(s_l) + (1-\alpha)\widehat{I}_{\mathbb{S}}(s_{l-1}) & s = \alpha s_l + (1-\alpha)s_{l-1}, \quad \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.8)$$

Proposition 2.1. Soit $I_M(P, \cdot)$ la fonction définie sur $[0, \log(N+1)]$ par (2.8). Pour tout compact $K \subseteq]\lambda, \Lambda[$ et tout $s \in K$, on a

$$|I_M(s) - I_{\mathbb{S}}(s)| \leq \frac{2}{M},$$

dès que

$$M \geq (\Lambda - \lambda)^2 \max\{\sup_{s \in K} I_{\mathbb{S}}''(s)/8, 1\}. \quad (2.9)$$

Démonstration : Afin de ne pas alourdir les notations, on note $I_{\mathbb{S}}$ la fonction $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$. De même I_M désigne la fonction $I_M(P, \cdot)$.

L'ensemble K étant compact, il est borné. Ainsi, pour M assez grand, on a $K \subseteq [s_1, s_{M-1}]$, où les points $s_l, l \in \{1, \dots, M-1\}$, sont équidistribués le long de $] \lambda, \Lambda [$.

Afin de majorer $|I_M(s) - I_{\mathbb{S}}(s)|$ pour tout $s \in K$, on introduit l'interpolation linéaire $\tilde{I}_{\mathbb{S}}$ de $I_{\mathbb{S}}$ construite à partir des points $I_{\mathbb{S}}(s_l), l \in \{1, \dots, M-1\}$. On a $|I_M(s) - I_{\mathbb{S}}(s)| \leq |I_M(s) - \tilde{I}_{\mathbb{S}}(s)| + |\tilde{I}_{\mathbb{S}}(s) - I_{\mathbb{S}}(s)|$, de sorte que l'on doit majorer l'erreur $|I_M(s) - \tilde{I}_{\mathbb{S}}(s)|$ résultant de la résolution numérique de l'équation $\mathbb{S}(E_P^k) = s_l$, ainsi que l'erreur $|\tilde{I}_{\mathbb{S}}(s) - I_{\mathbb{S}}(s)|$ intrinsèque à la méthode d'interpolation linéaire.

La fonction $I_{\mathbb{S}}$ étant deux fois continûment dérivable, il est bien connu qu'une majoration de $|\tilde{I}_{\mathbb{S}}(s) - I_{\mathbb{S}}(s)|$ est

$$|\tilde{I}_{\mathbb{S}}(s) - I_{\mathbb{S}}(s)| \leq \frac{(\Lambda - \lambda)^2}{8M^2} C_K, \quad s \in K, \quad (2.10)$$

avec $C_K = \sup_{s \in K} |I_{\mathbb{S}}^{(2)}(s)|$, où $I_{\mathbb{S}}^{(2)}(s)$ désigne la dérivée seconde de $I_{\mathbb{S}}$.

Par ailleurs, $K \subseteq [s_1, s_{M-1}]$, donc $s = \alpha s_{l+1} + (1 - \alpha)s_l$, pour un indice $l \in \{1, \dots, M-2\}$. Alors,

$$\begin{aligned} |I_M(s) - \tilde{I}_{\mathbb{S}}(s)| &= |\alpha(I_M(s_{l+1}) - I_{\mathbb{S}}(s_l)) + (1 - \alpha)(I_M(s_l) - I_{\mathbb{S}}(s_l))| \\ &\leq \alpha |I_M(s_{l+1}) - I_{\mathbb{S}}(s_{l+1})| + (1 - \alpha) |I_M(s_l) - I_{\mathbb{S}}(s_l)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a $|I_M(s) - \tilde{I}_{\mathbb{S}}(s)| = |\mathbb{K}(\mathcal{E}(P, \tilde{k}_l)|P) - \mathbb{K}(\mathcal{E}(P, k)|P)|$ pour tout $l \in \{1, \dots, M-2\}$, avec k tel que $\mathbb{S}(E_P^k) = s$.

La fonction $\mathbb{K}(\mathcal{E}(P, \cdot)|P)$ étant deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* , c'est en particulier une fonction lipshitzienne et $D_K = \sup_{(k, k') \in \Phi_P^{-1}(K)^2} \{|\mathbb{K}(\mathcal{E}(P, k)|P) - \mathbb{K}(\mathcal{E}(P, k')|P)|/|k - k'|\}$ est fini, de sorte que

$$|\hat{I}_{\mathbb{S}}(s_l) - I_M(s_l)| \leq D_K \rho, \quad l \in \{1, \dots, M-1\},$$

ce qui donne dans (2.11),

$$|I_M(s) - \tilde{I}_{\mathbb{S}}(s)| \leq \alpha D_K \rho + (1 - \alpha) D_K \rho = D_K \rho. \quad (2.12)$$

Réunissant les majorations (2.10) et (2.12), on a

$$|I_M(s) - I_{\mathbb{S}}(s)| \leq \frac{(\Lambda - \lambda)^2}{8M^2} C_K + D_K \rho, \quad s \in K. \quad (2.13)$$

Pour $M \geq (\Lambda - \lambda)^2 D_K / 8$, le premier terme du membre de droite de (2.13) est majoré par $1/M$. Finalement, en choisissant $\rho \leq 1/(C_K M)$, on obtient

$$|I_M(s) - I_{\mathbb{S}}(s)| \leq \frac{2}{M}, \quad s \in K,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque 2.1. *Le fait d'établir la majoration de l'erreur sur les compacts plutôt que sur l'intervalle $] \lambda, \Lambda [$ est une précaution technique indispensable. En effet, l'argument central dans la majoration de l'erreur dans la démonstration précédente est le fait que la dérivée seconde $I_{\mathbb{S}}^{(2)}(P, \cdot)$ de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ soit bornée sur tout compact de $] \lambda, \Lambda [$. Malheureusement, on ne connaît a priori rien sur le comportement de la dérivée seconde de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ au bord de l'intervalle $] \lambda, \Lambda [$; notamment, on ne sait pas si la dérivée seconde $I_{\mathbb{S}}^{(2)}(P, \cdot)$ est bornée sur $] \lambda, \Lambda [$. Toutefois, cette restriction est peu préjudiciable dans les applications : la majoration étant valable pour les intervalles de la forme $[\lambda + \delta, \Lambda - \delta]$, pour $\delta > 0$, et pour M assez grand, la zone d'ombre se limite aux bords $[\lambda, \lambda + \delta]$ et $[\Lambda - \delta, \Lambda]$.*

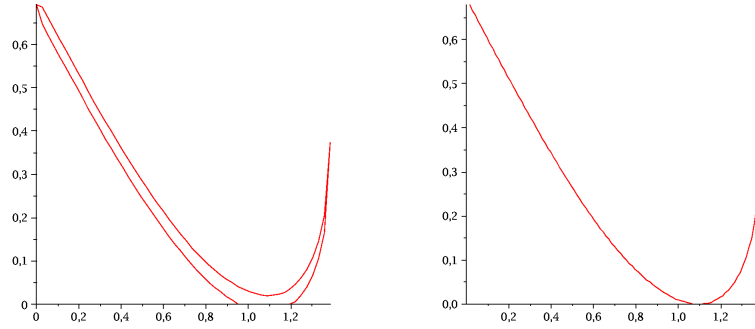


FIG. 2.2 – L'approximation I_M de la fonction $I_{\mathbb{S}}(P_1, \cdot)$ associée à $P_1 = (0.5, 0.1, 0.05, 0.35)$ pour $M = 50$ (à gauche) et $M = 500$ (à droite).

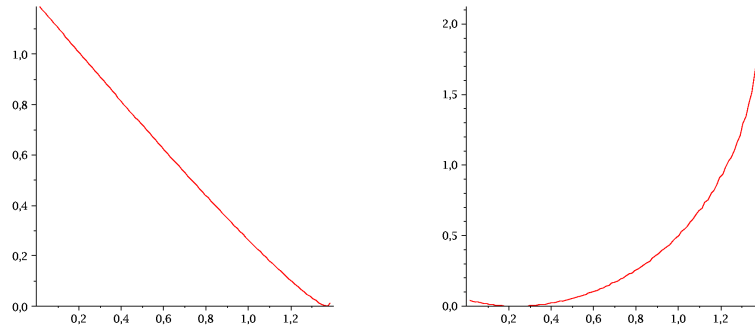


FIG. 2.3 – L'approximation I_M des fonctions $I_{\mathbb{S}}(P_2, \cdot)$ et $I_{\mathbb{S}}(P_3, \cdot)$ associées à $P_2 = (0.2, 0.3, 0.22, 0.28)$ (à gauche) et à $P_3 = (0.95, 0.04, 0.007, 0.003)$ (à droite) pour $M = 500$.

La dépendance de la borne inférieure du nombre de points M à choisir par rapport au compact K est un problème en théorie, puisqu'on ne peut pas la déterminer explicitement. Toutefois, en pratique, on obtient des approximations convaincantes pour un nombre restreint de points de référence. Quelques simulations permettent d'illustrer cette méthode d'approximation. Pour mettre en évidence la dépendance de I_M par rapport à la probabilité P , on a choisi cinq probabilités sur un ensemble à 4 éléments. Les trois premières ont un unique mode : $P_1 = (0.5, 0.1, 0.05, 0.35)$ est choisi au hasard, $P_2 = (0.2, 0.3, 0.22, 0.28)$ est proche de la loi uniforme et $P_3 = (0.95, 0.04, 0.007, 0.003)$ est proche d'une mesure de Dirac. La quatrième probabilité, $P_4 = (0.4, 0.4, 0.15, 0.05)$, possède deux modes et la dernière, $P_5 = (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$, possède trois modes. Les fonctions I_M correspondantes ont été obtenues en calculant les solutions approchées des équations $\Phi_P(k) = s_l$ par une dichotomie.

La figure 2.2 représente $I_M + 1/M$ et $I_M - 1/M$ pour la probabilité P_1 et $M = 50$ (à gauche) et $M = 500$ (à droite). La proposition 2.1 établit que la fonction $I_{\mathbb{S}}(P_1, \cdot)$ est coincée entre ces deux courbes, pourvu que la dérivée seconde de $I_{\mathbb{S}}$ n'explose pas aux bords de l'intervalle $]0, \log 3[$; l'approximation est suffisamment précise pour $M = 500$ pour qu'il soit impossible de différencier les deux courbes. La figure 2.3 représente la fonction I_M associée à P_2 (à gauche) puis à P_3 (à droite), pour $M = 500$. Conformément aux attentes, les formes des courbes obtenues diffèrent grandement puisque P_2 est proche de la loi uniforme tandis que P_3 est proche d'une mesure de Dirac. On observe en particulier pour P_3 que $I_{\mathbb{S}}$ croît très vite au voisinage de $\log(3)$, ce qui laisse penser que la dérivée seconde explose au voisinage de $\log 3$.

La figure 2.4 représente la fonction I_M associée à P_4 (à gauche), puis à P_5 (à droite).

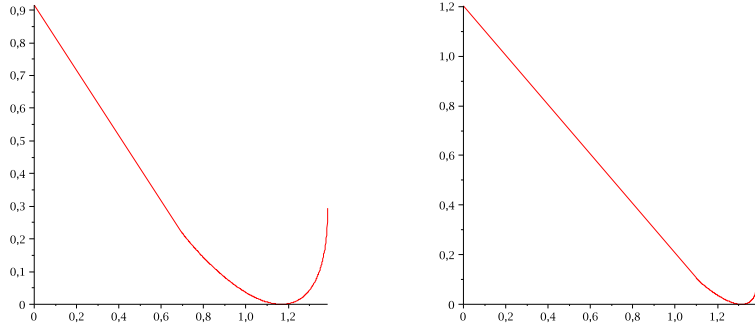


FIG. 2.4 – L'approximation I_M des fonctions $I_{\mathbb{S}}(P_4, \cdot)$ et $I_{\mathbb{S}}(P_5, \cdot)$ associées à $P_4 = (0.4, 0.4, 0.15, 0.05)$ (à gauche) et à $P_5 = (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$ (à droite) pour $M = 500$.

2.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur empirique de l'entropie d'une probabilité

Soit P une probabilité sur E . Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de P . L'estimateur empirique \hat{P}_n de P est donné par

$$\hat{P}_n(i) = \frac{N_n(i)}{n}, \quad i \in E,$$

où $N_n(i) = \sum_{m=1}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i\}}$. Puisque seuls les états de probabilité non nulle peuvent être observés, on suppose dans la suite que P a pour support E .

L'estimateur par plug-in $\hat{\mathbb{S}}_n$ de $\mathbb{S}(P)$ est donné par

$$\hat{\mathbb{S}}_n = \mathbb{S}(\hat{P}_n). \quad (2.14)$$

Théorème 2.2. *Soit P une probabilité de support $E = \{0, \dots, N\}$.*

L'estimateur par plug-in $\hat{\mathbb{S}}_n$ défini par (2.14) à partir d'un n -échantillon de P converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque le nombre d'observations n tend vers l'infini. De plus,

- *si P n'est pas uniforme, alors $\sqrt{n}(\hat{\mathbb{S}}_n - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance*

$$\Sigma_{\mathbb{S}}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\log \frac{P(i)}{1 - \sum_{j=1}^N P(j)} \right]^2 P(i)[1 - P(i)]; \quad (2.15)$$

- *si P est uniforme, disons $P = U$, alors $2n(\hat{\mathbb{S}}_n - \mathbb{S}(U))$ converge vers $\sum_{i \in E} \beta_i Y_i$, où $\beta_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in E$ et les variables Y_i sont indépendantes, de loi $\chi^2(1)$.*

Démonstration : La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrée impliquent que l'estimateur \hat{P}_n est fortement consistant et asymptotiquement normal. Précisément, lorsque n tend vers l'infini, le vecteur $(\sqrt{n}[\hat{P}_n(i) - P(i)])_{i \in E}$ converge en loi vers une loi normale $(N+1)$ -dimensionnelle $\mathcal{N}(0, \Sigma^2)$, de matrice de variance diagonale telle que $\Sigma_{i,i}^2 = P(i)[1 - P(i)]$.

La fonction \mathbb{S} étant clairement continue, la forte consistance de $\mathbb{S}(\hat{P}_n)$ est une conséquence du théorème de l'application continue.

Lorsque P n'est pas uniforme, la convergence en loi de $\sqrt{n}(\hat{\mathbb{S}}_n - \mathbb{S}(P))$ est une conséquence de la méthode delta appliquée à $(\sqrt{n}[\hat{P}_n(i) - P(i)])_{i \in E}$. La variance asymptotique est alors

$$\Sigma_{\mathbb{S}}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial i} \mathbb{S}(P) \right]^2 P(i)[1 - P(i)],$$

où $\frac{\partial}{\partial i} \mathbb{S}(P)$ désigne la dérivée partielle de $\mathbb{S}(P)$ par rapport à $P(i)$. L'expression (2.15) de la variance asymptotique s'en déduit immédiatement.

Lorsque $P = U$, la loi asymptotique de $2n[\widehat{S}_n - \mathbb{S}(U)]$ s'obtient grâce à un développement de Taylor de \mathbb{S} à l'ordre 2, en U , conformément à la méthode delta généralisée, voir la proposition 1.3. \square

2.3 Principe de grandes déviations pour l'estimateur de l'entropie

On établit dans cette partie, un principe de grandes déviations pour la suite des estimateurs par plug-in $(\widehat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de l'entropie d'une loi P de support fini E , gouverné par une bonne fonction de taux qui est égale, dans la plupart des cas, à $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ définie par (2.3), c'est-à-dire à la projection de P relativement à la divergence de Kullback-Leibler sur les ensembles de niveau de l'entropie. L'approximation de $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ obtenue dans la partie 2.1.3 peut alors être substituée à la fonction de taux dans la plupart des applications du PGD, comme explicité dans les parties 2.4.1 et 2.4.2.

Chazottes et Gabrielli [13], Proposition 3.3, obtiennent un PGD pour la suite des estimateurs par plug-in de l'entropie de g -mesures. On pourrait appliquer ce résultat au cas d'observations indépendantes et de même loi. Cependant, la fonction de taux n'est pas explicitée par les auteurs, ni son lien avec la géométrie de Kullback-Leibler et les lois escortes.

Théorème 2.3. *La suites des estimateurs $\{\widehat{S}_n : n \geq 1\}$ de l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P construits à partir d'observations indépendantes de loi commune P , satisfait le principe de grandes déviations sur \mathbb{R} muni de la topologie usuelle, de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux égale à $I_{\mathbb{S}}(P, s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Précisément, pour tout borélien A de \mathbb{R} ,*

$$\mathbb{P}\left(\widehat{S}_n \in A\right) \leq (n+1)^{|E|+1} \exp\left(-n \inf_{s \in A} I_{\mathbb{S}}(P, s)\right); \quad (2.16)$$

de plus, si A est d'intérieur non vide,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\widehat{S}_n \in A\right) = - \inf_{s \in A} I_{\mathbb{S}}(P, s). \quad (2.17)$$

Démonstration : Soit P^n la loi produit de P sur E^n . Soit $B = \mathbb{S}^{-1}(A)$. On a

$$\mathbb{P}(\widehat{S}_n \in A) = P^n(\{\underline{x}_n : \widehat{S}_n \in A\}) = P^n(\{\underline{x}_n : \widehat{P}_n \in B\}).$$

Le théorème de Sanov (théorème 1.2 du chapitre 1) établit que pour tout $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_1(E)$,

$$P^n\left(\underline{x}_n : \widehat{P}_n \in \mathcal{Q}\right) \leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{K}(Q|P)\right), \quad (2.18)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P^n\left(\{\underline{x}_n : \widehat{P}_n \in \mathcal{Q}\}\right) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{K}(Q|P). \quad (2.19)$$

Appliquant (2.18) à $\mathcal{Q} = B$, il vient

$$\begin{aligned} P^n\left(\{\underline{x}_n : \widehat{P}_n \in B\}\right) &\leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \inf\{\mathbb{K}(Q|P), Q \in \mathcal{M}_1(E) : \mathbb{S}(Q) \in A\}\right) \\ &\leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \inf_{s \in A} I_{\mathbb{S}}(P, s)\right), \end{aligned}$$

ce qui établit (2.16).

Le principe de contraction (proposition 1.4 du chapitre 1) fournit (2.17), la fonction \mathbb{S} étant continue. \square

2.4 Applications du principe de grandes déviations

La fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ gouvernant le PGD pour la suite des estimateurs par plug-in de l'entropie peut être remplacée par l'approximation $I_M(P, \cdot)$ obtenue dans la partie 2.1.3 dans les applications impliquant le PGD, sans perte significative de précision. Des inégalités de concentration sont obtenues dans la partie 2.4.1 en utilisant l'approximation $I_M(P, \cdot)$, asymptotiquement aussi précises que celles produites par la fonction de taux $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$. Dans la partie 2.4.2, des tests du niveau d'entropie d'une variable aléatoire sont obtenus par seuillage de $I_M(P, \cdot)$ par des valeurs appropriées. Des majorations explicites sont obtenues pour les erreurs de première et de seconde espèce.

2.4.1 Bornes exponentielles pour la probabilité des événements rares

L'application la plus usuelle d'un PGD est l'obtention de bornes exponentielles pour la probabilité des événements rares, c'est-à-dire des événements de la forme $(\widehat{S}_n > \mathbb{S}(P) + \varepsilon)$ ou $(\widehat{S}_n < \mathbb{S}(P) - \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$. De telles inégalités de concentration sont obtenues en utilisant l'approximation de la fonction de taux obtenue dans la partie 2.1.3, asymptotiquement aussi précises que celles dérivant de la fonction de taux.

Théorème 2.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoire indépendantes de loi commune P de support E . Soit m le nombre de modes de P . On pose $\lambda = \log(m)$ et $\Lambda = \log(N+1)$. Soit $I_M(P, \cdot)$ définie par (2.8). On suppose que les hypothèses de la proposition 2.1 sont satisfaites.*

La suite $(\widehat{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ des estimateurs par plug-in de l'entropie, définis par (2.14), vérifie*

$$\mathbb{P}\left(\widehat{S}_n \in K\right) \leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \left[\inf_{s \in A} I_M(s) - \frac{2}{M}\right]\right), \quad (2.20)$$

pour tout compact $K \subseteq]\lambda, \Lambda[$ et

$$-\inf_{s \in K} I_M(x) - \frac{2}{M} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathbb{P}(\widehat{S}_n \in K)\right) \leq -\inf_{s \in K} I_M(x) + \frac{2}{M}, \quad (2.21)$$

pour tout compact $K \subseteq]\lambda, \Lambda[$ d'intérieur non vide et pour M suffisamment grand.

De plus, $\inf_{s \in K} I_M(s) = \min_{s \in \mathcal{C}_K} I_M(s)$, où \mathcal{C}_K est l'ensemble fini

$$\mathcal{C}_K = \partial K \cup \left(\mathring{K} \cap \{s_l, l \in \{1, \dots, M-1\}\}\right),$$

où $\partial K = K \setminus \mathring{K}$ désigne la frontière de K .

Démonstration : Pour simplifier les notations, on désigne respectivement $I_{\mathbb{S}}(P, \cdot)$ et $I_M(P, \cdot)$ par $I_{\mathbb{S}}$ et I_M . D'après le théorème 2.3, pour tout ensemble borélien $K \subseteq]\lambda, \Lambda[$,

$$\mathbb{P}\left(\widehat{S}_n \in K\right) \leq (n+1)^{N+1} \exp\left[-n \inf_{s \in K} I_{\mathbb{S}}(s)\right].$$

La fonction I_M a été construite de telle sorte que $I_{\mathbb{S}}(s) \geq I_M(s) - 2/M$ pour tout $s \in K$ et pour M suffisamment grand, d'où (2.20). De manière similaire, d'après le théorème 2.3 et la proposition 2.1, pour tout compact $K \subseteq]\lambda, \Lambda[$ d'intérieur non vide,

$$-\inf_{s \in K} I_M(s) - \frac{2}{M} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\mathbb{P}(\widehat{S}_n \in K)) \leq -\inf_{s \in K} I_M(s) + \frac{2}{M},$$

Supposons maintenant que K est un intervalle, disons $K = [a, b]$. La fonction I_M étant affine par morceaux, la borne inférieure $\inf_{s \in K} I_M(s)$ est égale à $I_M(s_l)$ pour l'un des $s_l \in K$, avec $s_l = \lambda + l(\Lambda - \lambda)/M$, ou bien est égale à $I_M(a)$ ou $I_M(b)$. Un compact de \mathbb{R} pouvant s'écrire

comme une union finie d'intervalles fermés, la propriété s'étend à tout compact $K \subset [\lambda, \Lambda]$. \square

En guise d'exemple, on utilise le théorème 2.4 pour obtenir des bornes exponentielles pour la probabilité des événements $(\widehat{S}_n \geq \mathbb{S}(P) + \varepsilon) \cap K$ et $(\widehat{S}_n < \mathbb{S}(P) - \varepsilon) \cap K$, où $\varepsilon > 0$ et $K = [\lambda + \delta, \Lambda - \delta]$, avec $\delta > 0$ arbitrairement petit. On calcule facilement $\inf_{\{s > \mathbb{S}(P) + \varepsilon\} \cap K} \{I_M(s)\} = I_M(\mathbb{S}(P) + \varepsilon)$ et $\inf_{\{s < \mathbb{S}(P) - \varepsilon\} \cap K} \{I_M(s)\} = I_M(\mathbb{S}(P) - \varepsilon)$ pour δ suffisamment petit de sorte que

$$\mathbb{P}\left((\widehat{S}_n > \mathbb{S}(P) + \varepsilon) \cap K\right) \leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \left[I_M(\mathbb{S}(P) + \varepsilon) - \frac{2}{M}\right]\right), \quad (2.22)$$

$$\mathbb{P}\left((\widehat{S}_n < \mathbb{S}(P) - \varepsilon) \cap K\right) \leq (n+1)^{N+1} \exp\left(-n \left[I_M(\mathbb{S}(P) - \varepsilon) - \frac{2}{M}\right]\right). \quad (2.23)$$

Notons que (2.22) et (2.23) fournissent des inégalités non triviales si $I_M(\mathbb{S}(P) + \varepsilon) - 2/M$ et $I_M(\mathbb{S}(P) - \varepsilon) - 2/M$ sont positifs, ce qui impose que M soit très grand pour de petites valeurs de ε . En pratique, $M \geq \max(1/\varepsilon^3, M_0)$ convient, où M_0 la borne inférieure pour M donnée par 2.9.

2.4.2 Test du niveau d'entropie d'une variable aléatoire

En théorie de la compression de données, l'entropie de Shannon d'une probabilité P sur E est la borne inférieure du taux de compression d'un code irréductible (le code d'un élément de E n'est jamais le début du code d'un autre élément de E) pour une suite d'éléments de E émis selon la probabilité P , c'est-à-dire que le nombre moyen de bits nécessaire pour encoder chaque élément de la suite est minoré par $\mathbb{S}(P)$; voir Cover et Thomas [16], chapitres 5 et 12. Plusieurs algorithmes, tel que le codage de Huffman, atteignent asymptotiquement cette borne, pourvu que P soit connue. Si P est inconnue, des codes de compression universels, tels que l'algorithme de Lempel-Ziv, permettent de compresser de manière à ce que, asymptotiquement, le nombre moyen de bits par élément n'excède pas s bits, pourvu que l'entropie de P soit plus petite que s . Il est alors nécessaire de décider, en fonction de la suite des éléments indépendantes observées, si $\mathbb{S}(P) < s$ ou non. On peut prendre une telle décision en testant le niveau d'entropie de P . Deux tests sont présentés :

$$T_1 \quad H_0 : \mathbb{S}(P) = s_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{S}(P) = s_1,$$

et

$$T_2 \quad H_0 : \mathbb{S}(P) < s_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{S}(P) \geq s_0.$$

Les régions de rejet des tests, disons C_1 pour T_1 et C_2 pour T_2 , sont définies en supposant que la fonction de taux gouvernant le PGD obtenu dans le théorème 2.2 est supérieure à un seuil explicite, dépendant du nombre n d'observations. La proposition 2.2 établit que l'erreur de première espèce de T_1 , soit $\alpha_n^1 = \sup_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} P^n(C^1)$, décroît linéairement avec n . Son erreur de seconde espèce $\beta_n^1 = \sup_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_1)} P^n(E^n \setminus C^1)$ décroît de façon exponentielle avec la différence de niveau d'entropie entre H_0 et H_1 . De manière similaire, l'erreur de première espèce de T_2 , soit $\alpha_n^2 = \sup_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} P^n(C^1)$, décroît linéairement avec le nombre n d'observations. Le théorème 2.5 établit que l'on peut remplacer la fonction de taux par son approximation, afin d'obtenir des versions \widetilde{T}_1 et \widetilde{T}_2 légèrement modifiées des tests T_1 et T_2 , dont les régions de rejet sont explicites, sans perte sur les majorations des erreurs de première et de seconde espèce.

Proposition 2.2. Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X de loi P de support $E = \{0, \dots, N\}$.

1. Le test T_1 de région de rejet

$$C_1 = \{\underline{x}_n : \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} I_{\mathbb{S}}(P, \widehat{S}_n) \geq \delta_n\},$$

où $\delta_n = (N+2)\log(n+1)/n$, et $I_{\mathbb{S}}(P, s)$ est donné par (2.3), a une erreur de première espèce α_n^1 vérifiant $\alpha_n^1 \leq 1/(n+1)$. Son erreur de seconde espèce β_n^1 vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^1 \leq -\mathbb{I}(s_0, s_1),$$

où \mathbb{I} est donnée par

$$\mathbb{I}(s_0, s_1) = \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} \inf_{Q \in \mathbb{S}^{-1}(s_1)} \mathbb{K}(Q|P). \quad (2.24)$$

2. Le test T_2 de région de rejet

$$C_2 = \{\underline{x}_n : \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}([0, s_0])} I_{\mathbb{S}}(P, \widehat{S}_n) \geq \delta_n\},$$

a une erreur de première espèce α_n^2 satisfaisant $\alpha_n^2 \leq 1/(n+1)$.

Démonstration : On montre le résultat pour T_1 . Soit P telle que $\mathbb{S}(P) = s_0$. On a

$$\begin{aligned} P^n(C_1) &= P^n \left(\left\{ \underline{x}_n : \inf_{P' \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} I_{\mathbb{S}}(P', \widehat{S}_n) \geq \delta_n \right\} \right) \\ &\leq P^n \left(\left\{ \underline{x}_n : I_{\mathbb{S}}(P, \widehat{S}_n) \geq \delta_n \right\} \right) = \mathbb{P} \left(\widehat{S}_n \in A_n \right), \end{aligned}$$

où $A_n = \{s \in [0, \log(N+1)] : I_{\mathbb{S}}(P, s) \geq \delta_n\}$. En appliquant (2.16) à A_n , il vient

$$P^n(C_1) \leq (n+1)^{N+1} \exp \left[-n \inf_{s \in A_n} I_{\mathbb{S}}(P, s) \right].$$

Pour tout $s \in A_n$, on a $I_{\mathbb{S}}(P, s) \geq \delta_n$, donc

$$P^n(C_1) \leq (n+1)^{N+1} \exp(-n\delta_n),$$

c'est-à-dire $P^n(C_1) \leq 1/(n+1)$. Cette relation étant vérifiée pour toute probabilité P telle que $\mathbb{S}(P) = s_0$, on a $\alpha_n^1 \leq 1/(n+1)$.

La majoration de l'erreur de seconde espèce se déduit de la démonstration légèrement modifiée du théorème de Sanov. La loi empirique \widehat{P}_n obtenue à partir du n -échantillon \underline{x}_n appartient à l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{ Q \in \mathcal{M}_1(E) : Q(i) = \frac{k_i}{n}, i \in E, k_i \in \mathbb{N}, \sum_{i \in E} k_i = n \right\}.$$

L'estimateur par plug-in $\widehat{S}_n = \mathbb{S}(\widehat{P}_n)$ est donc égale à $\mathbb{S}(Q)$, avec $Q \in \mathcal{Q}$.

Soit $R \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_1\})$, avec $s_1 \neq s_0$. On a

$$\begin{aligned} R^n \left(\left\{ \underline{x}_n : \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} I_{\mathbb{S}}(P, \widehat{S}_n) < \delta_n \right\} \right) &= R^n \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}(\delta_n)} \{ \underline{x}_n : \widehat{P}_n = Q \} \right) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{Q}(\delta_n)} R^n(T_Q). \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $T_Q = \{ \underline{x}_n : \widehat{P}_n = Q \}$ et $\mathcal{Q}(\delta_n) = \{ Q \in \mathcal{Q} : \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} I_{\mathbb{S}}(P, \mathbb{S}(Q)) < \delta_n \}$.

Montrons que $R^n(T_Q) \leq \exp(-n\mathbb{K}(Q|R))$. D'une part, pour $\underline{x}_n \in T_Q$, le nombre de x_k tels que $x_k = i$ est égal à $k_i = nQ(i)$, donc

$$\frac{R^n(\underline{x}_n)}{Q_n(\underline{x}_n)} = \prod_{i \in E} \left(\frac{R(i)}{Q(i)} \right)^{nQ(i)} = \exp(-n\mathbb{K}(Q|R)).$$

D'autre part, posons $\eta_n = \inf_{Q \in \mathcal{Q}(\delta_n)} I_{\mathbb{S}}(R, \mathbb{S}(Q))$. On a $R^n(T_Q) \leq \exp(-n\eta_n)$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}(\delta_n)$, donc

$$\begin{aligned} R^n(\overline{C_1}) &\leq |\mathcal{Q}(\delta_n)| \exp(-n\eta_n) \\ &\leq (n+1)^{N+1} \exp(-n\eta_n). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour tout $Q \in \mathcal{Q}(\delta_n)$, l'entropie $\mathbb{S}(Q)$ converge vers s_0 quand n tend vers l'infini, donc η_n converge vers $\inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} \mathbb{K}(P|R)$, ce qui donne, avec (2.26),

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R^n(\overline{C}_1) &\leq - \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} \mathbb{K}(P|R) \\ &\leq - \inf_{R \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_1\})} \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} \mathbb{K}(P|R) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\leq -\mathbb{I}(s_0, s_1). \quad (2.28)$$

L'inégalité (2.27) étant vérifiée par toute probabilité $R \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_1\})$, le résultat est établi.

La majoration de l'erreur de première espèce de T_2 s'établit de manière similaire à celle de T_1 . \square

Afin d'avoir une expression explicite pour les régions de rejet et pour l'erreur de seconde espèce de T_1 , il est nécessaire de calculer l'infimum

$$\mathbb{I}(s_0, s_1) = \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} \inf_{Q \in \mathbb{S}^{-1}(s_1)} \mathbb{K}(Q|P) = \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} I_{\mathbb{S}}(P, s_1),$$

qui est la distance au sens de la divergence de Kullback-Leibler, entre les ensembles de niveau $\{P : \mathbb{S}(P) = s_0\}$ et $\{Q : \mathbb{S}(Q) = s_1\}$, c'est-à-dire que $\mathbb{I}(s_0, s_1)$ est le défaut d'information entre les niveaux d'entropie s_0 et s_1 . Bien qu'il ne nous semble pas envisageable de déterminer une expression analytique explicite de $\mathbb{I}(s_0, s_1)$, la recherche numérique de la borne inférieure montre l'égalité

$$\mathbb{I}(s_0, s_1) = \mathbb{K}(E_P^k|P), \quad (2.29)$$

où P est l'une des $|E|$ probabilités possédant un unique mode de poids p et les autres valeurs de même poids $(1 - p/N)$, où p est l'unique solution de l'équation

$$-p \log p - (1 - p) \log \frac{1 - p}{N} = s_0. \quad (2.30)$$

et k est tel que $\mathbb{S}(E_P^k) = s_1$. La divergence entre deux niveaux d'entropie est donc atteinte le long des droites de la \mathbb{K} -géométrie qui sont des segments pour la géométrie classique. La figure 2.5 représente les probabilités de support $\{0, 1, 2\}$ pour lesquelles la divergence $\mathbb{I}(s_0, s_1)$ entre les niveaux d'entropie s_0 et s_1 est atteinte.

Expliciter la borne inférieure (2.29) nécessite donc de résoudre (2.30). Il ne nous paraît pas envisageable de déterminer une expression analytique de p en fonction de s_0 . L'équation (2.30) se résout numériquement comme suit.

Précisément, soit P la probabilité satisfaisant l'égalité (2.29) avec $P(0) > P(1) = \dots = P(N)$. Soit \tilde{p} tel que $|\tilde{p} - P(0)| < \xi$, où ξ est la précision d'approximation requise, établie dans le théorème 2.5 ci-dessous. Soit \tilde{P} la probabilité définie par

$$\tilde{P}(0) = \tilde{p}, \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1) = \dots = \tilde{P}(N) = \frac{1 - \tilde{p}}{N}. \quad (2.31)$$

On vérifie alors facilement que $|\tilde{P}(i) - P(i)| < \xi/N$ pour tout $i \in E$.

On injecte alors \tilde{P} dans (2.3) pour obtenir des régions de rejet légèrement modifiées, entièrement explicites, sans perte de précision sur la majoration des erreurs de première et seconde espèce.

Théorème 2.5. *Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de la variable aléatoire X de loi P , de support E , possédant un unique mode. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ tel que $P \in K$.*

1. *Soit \tilde{T}_1 le test de $H_0 : \mathbb{S}(P) = s_0$ contre $H_1 : \mathbb{S}(P) = s_1$ dont la région de rejet est $\tilde{C}_1 = \{\underline{x}_n : \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(\{s_0\})} I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) \geq \delta_n + \frac{3}{M}\}$, où M vérifie (2.9).*

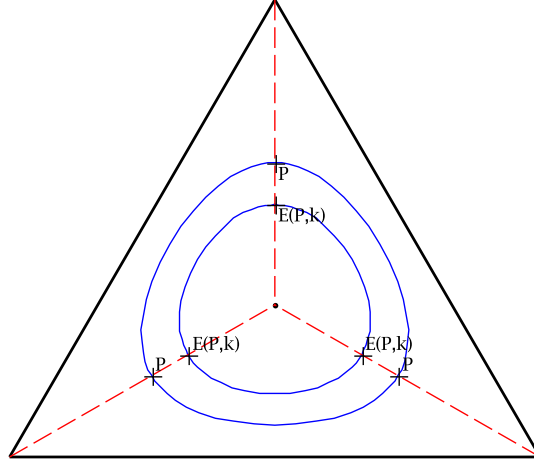


FIG. 2.5 – Les probabilités de $\mathcal{M}_1^*(\{0, 1, 2\})$ accompagnées de leur loi escorte réalisant la borne inférieure définissant $\mathbb{I}(s_0, s_1)$.

L'erreur de première espèce $\tilde{\alpha}_n^1$ de \tilde{T}_1 vérifie $\tilde{\alpha}_n^1 \leq 1/n + 1$. Son erreur de seconde espèce $\tilde{\beta}_n^1$ vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\beta}_n^1 \leq -\mathbb{I}(s_0, s_1).$$

2. Soit \tilde{T}_2 le test de $H_0 : \mathbb{S}(P) < s_0$ contre $H_1 : \mathbb{S}(P) \geq s_1$, dont la région de rejet est $\tilde{C}_2 = \{\underline{x}_n : I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) \geq \delta_n + \frac{3}{M}\}$ si $\hat{S}_n > s_0$, et l'ensemble vide si $\hat{S}_n \leq s_0$.
Son erreur de première espèce vérifie $\tilde{\alpha}_n^2 \leq 1/(n+1)$.

Démonstration : On établit le résultat pour \tilde{T}_1 . La majoration de l'erreur de première espèce de \tilde{T}_2 s'obtient de manière analogue.

Montrons que

$$\left| I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) - \inf_{P \in \mathbb{S}^{-1}(s_0)} I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n) \right| \leq \frac{3}{M},$$

dès que $\xi \leq 1/C_K N M$, où $C_k = \sup_{(P, P') \in K^2} \left\{ \left| I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n) - I_{\mathbb{S}}(P', \hat{S}_n) \right| / \|P - P'\| \right\}$ est le module de continuité de $I_{\mathbb{S}}(\cdot, \hat{S}_n)$ sur K . Notons que C_K est fini car $I_{\mathbb{S}}(\cdot, \hat{S}_n)$ est continue sur $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ d'après le lemme 2.2, donc uniformément continue sur K . Soit P la probabilité atteignant la borne inférieure, avec par convention $P(0) > P(1) = \dots = P(N)$. Par définition, \tilde{P} est telle que

$$|\tilde{P}(i) - P(i)| \leq \frac{1}{CM}, \quad i \in \{0, \dots, N\}.$$

Donc $|I_{\mathbb{S}}(\tilde{P}, \hat{S}_n) - I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n)| \leq C/CM = 1/M$, et

$$\begin{aligned} |I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) - I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n)| &\leq |I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) - I_{\mathbb{S}}(\tilde{P}, \hat{S}_n)| + |I_{\mathbb{S}}(\tilde{P}, \hat{S}_n) - I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n)| \\ &\leq \frac{2}{M} + \frac{1}{M}, \end{aligned}$$

pour M vérifiant la condition (2.9); d'où $I_{\mathbb{S}}(P, \hat{S}_n) \geq I_M(\tilde{P}, \hat{S}_n) - 3/M$. Le résultat en découle en appliquant (2.20) à

$$A_n = \{s : I_{\mathbb{S}}(\tilde{P}, s) < (N+2) \log(n+1)/n\}.$$

La majoration de l'erreur de seconde espèce s'obtient de manière similaire. \square

L'appartenance de P à un compact de $\mathcal{M}_1^{(1)}(E)$ permet d'assurer l'existence du module de continuité C_K introduit dans la démonstration. Typiquement, le compact à considérer est

$$K = \{P \in \mathcal{M}_1(E) : P(i) \geq \delta, \text{ et } |P(i) - P(j)| \geq \delta, i, j \in E\},$$

où $\delta > 0$. Il faut s'assurer que la loi P n'est pas trop proche du bord de $\mathcal{M}_1(E)$, ni de l'ensemble des probabilités possédant plusieurs modes, le comportement de $I_{\mathbb{S}}(\cdot, \hat{S}_n)$ n'y étant pas connu.

Annexe : La transformation escorte

Dans cette annexe, on définit et étudie la transformation escorte de probabilités à support fini, dénombrable ou continu. Quelques unes des propriétés démontrées dans la partie 2.1.2 dans le cadre des probabilités à support fini, sont étendues aux probabilités à support dénombrable ou continu. Lorsqu'elles sont définies, les lois escortes des lois usuelles sont explicitées.

Définition et propriétés de la transformation escorte

Dans cette annexe, E désigne l'un des ensembles $\{0, \dots, N\}$, \mathbb{N} , \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} . Selon le cas, E est muni de la tribu \mathcal{B} formée de l'ensemble de ses parties ou égale à la tribu borélienne. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des probabilités sur (E, \mathcal{B}) . On note $\mathcal{M}_1^d(E)$ l'ensemble des probabilités de $\mathcal{M}_1(E)$ dominées par la mesure de comptage ou la mesure de Lebesgue, selon que E est au plus dénombrable ou non. Notons que si E est dénombrable, alors $\mathcal{M}_1^d(E) = \mathcal{M}_1(E)$. On convient d'une notation commune μ pour désigner la mesure dominante dans les deux cas. Dans la suite, on identifie P et sa densité par rapport à μ de sorte que $P(x)$ désigne la densité de P évaluée en x .

Définition 2.1. *On appelle transformation escorte l'application \mathcal{E} de $\mathcal{M}_1^d(E) \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_1^d(E)$ qui au couple (P, k) associe la probabilité $\mathcal{E}(P, k)$ dont la densité est*

$$\mathcal{E}(P, k)(x) = \frac{P(x)^k}{\int_E P(y)^k d\mu(y)}, \quad x \in E,$$

si $y \mapsto P(y)^k$ est intégrable. Les applications $\mathcal{E}(\cdot, k)$ sont appelées k -transformations. Pour toute probabilité $P \in \mathcal{M}_1^d(E)$, l'image $\mathcal{E}(P, k)$ de P par la k -transformation est appelée la k -escorte de P .

Propriétés 2.2.

1. Si E est un ensemble fini, alors la transformation escorte est bien définie pour tout $k \in \mathbb{R}$.
2. Si $E = \mathbb{N}$, la transformation escorte est bien définie pour tout $k \geq 1$. Elle n'est pas définie pour $k \leq 0$. On ne peut rien dire a priori si $0 < k < 1$.
3. Si E est un sous-ensemble non dénombrable et non borné de \mathbb{R} , la transformation escorte n'est pas définie pour $k \leq 0$. On ne peut rien dire a priori pour $k > 0$.

Démonstration :

1. Si $E = \{0, \dots, N\}$ est un ensemble fini, alors la constante de normalisation $\int_E P(y)^k d\mu(y) = \sum_{y=1}^n P(y)^k$ est finie quelque soit $P \in \mathcal{M}_1(E)$ et $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit P une probabilité sur \mathbb{N} . Si $k \geq 1$, alors $P(y)^k \leq P(y)$. Donc $\int_E P(y)^k d\mu(y) = \sum_{y \in E} P(y)^k$ est finie.

Par ailleurs, pour $k \leq 0$, $P(y)^k \geq 1$, pour tout $y \in E$, de sorte que $\sum_{y \in \mathbb{N}^*} P(y)^k$ diverge, et la k -escorte de P n'est pas définie.

3. Notons $F = \{x \in E : P(x) \geq 1\}$. La mesure de Lebesgue $\mu(F)$ de F est finie, sinon $x \mapsto P(x)$ ne serait pas intégrable. Le complémentaire $E \setminus F$ de F est donc de mesure de Lebesgue infinie. Or, pour tout $k < 0$, on a

$$\int_E P(x)^k d\mu(x) \geq \int_{E \setminus F} P(x)^k d\mu(x) \geq \mu(E \setminus F),$$

de sorte que $\int_E P(x)^k d\mu(x) = +\infty$ et la k -escorte de P n'est pas définie. \square

Proposition 2.3. *La transformation escorte restreinte à \mathbb{R}_+^* , ainsi que sa dérivée par rapport à k préservent l'ordre sur E induit par les poids de la probabilité. Précisément,*

1. si P est uniforme (cas où $E = \{0, \dots, N\}$ uniquement) ou P est une mesure de Dirac, alors $\mathcal{E}(P, k) = P$ pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$;
2. si P n'est pas uniforme, ni une mesure de Dirac, alors $\mathcal{E}(P, k) \neq P$ pour tout $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;
3. si $x \mapsto |P(x)^k \log P(x)|$ est intégrable, pour $x, y \in E$ tels que $P(x) > P(y)$, on a

$$\mathcal{E}(P, k)(x) > \mathcal{E}(P, k)(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(x) > \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(y), \quad k \in \mathbb{R}_+^*;$$

4. si P n'est pas uniforme ni une mesure de Dirac, si la densité de P est bornée et si

$$\int_E |\log P(x) P(x)^k| d\mu(x) < +\infty, \quad k > 0, \quad (2.32)$$

alors $\frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(x^*) > 0$, où $P(x^*) = \max_{x \in E} P(x)$.

Démonstration :

1. Ce point est immédiat.
2. Supposons que $P(x)^k$ soit intégrable et que

$$P(x)^k \left(\int_E P(t)^k d\mu(t) \right)^{-1} = P(x), \quad \mu - \text{p.p.}$$

Si on suppose que E est le support de P , de sorte que $P(x) > 0$, μ -p.p., on a

$$\frac{P(x)^k}{\int P(t)^k d\mu(t)} \frac{1}{P(x)} = 1,$$

de sorte que $P(x) = \left[\int P(t)^k d\mu(t) \right]^{1/(k-1)}$ est μ -p.p. constante sur son support, ce qui est absurde, P n'étant pas uniforme.

3. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $P(x) > P(y)$. On a $P(x)^k > P(y)^k > 0$, ce qui prouve que $\mathcal{E}(P, k)(x) > \mathcal{E}(P, k)(y)$. Par ailleurs, $\frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(x)$ étant absolument intégrable, on peut dériver sous le signe somme, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(x) &= \frac{P(x)^k}{C(k)^2} [\log P(x) C(k) - D(k)] \\ &> \frac{P(y)^k}{C(k)^2} [\log P(y) C(k) - D(k)], \end{aligned}$$

où $C(k) = \int_E P(t)^k d\mu(t)$ et $D(k) = \int_E \log P(t) P(t)^k d\mu(t)$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(x) > \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{E}(P, k)(y).$$

4. D'une part, si $\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x^*) \leq 0$, alors d'après le point 3, $\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x) \leq 0$ pour μ -presque-tout $x \in E$. D'autre part, puisque $\int_E \mathcal{E}(P, k)(x)d\mu(x) = 1$, pour tout $k > 0$

$$\frac{\partial}{\partial k} \int_E \mathcal{E}(P, k)(x)d\mu(x) = 0.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x)$ étant absolument intégrable, il vient

$$\int_E \frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x)d\mu(x) = 0,$$

d'où $\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x) = 0$ pour μ -presque tout $x \in E$ et tout $k > 0$. Donc $\mathcal{E}(P, k) = P$ et P est uniforme ou une mesure de Dirac, ce qui est exclu. \square

Remarques 2.2.

1. Le point 3 établit que le poids attribuée au(x) mode(s) de la probabilité croît avec k . Ainsi, pour $k > 1$, le poids attribué par $\mathcal{E}(P, k)$ au(x) mode(s) de P augmente, tandis que pour $k < 1$, il diminue. Les hypothèses sur la densité de P ne sont pas restrictives. Elles sont vérifiées pour les lois usuelles à support infini (et évidemment à support fini). Voir la partie suivante.
2. Si E est un ensemble fini, alors $P(x_*) = \min P(x)$ existe et l'on peut montrer de manière analogue au point 4 que $\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{E}(P, k)(x_*) < 0$. Lorsque $E = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R} , le minimum $P(x_*)$ n'existe pas; il n'y a donc pas d'équivalent de cette propriété.

La proposition 2.1 établit que la transformation escorte de lois à support fini tend à uniformiser P lorsque $k < 1$ (point 1.) tandis qu'elle tend à concentrer le poids sur les modes pour $k > 1$ (point 2.) Même si la transformée escorte agit selon le même principe pour des lois à support dénombrable ou continu, aucun analogue au point 1 de la proposition 2.1 ne peut être établi, faute de loi uniforme sur les ensembles infinis. De fait, lorsque k tend vers 0, la constante de normalisation $\int_E P(x)^k d\mu(x)$ tend vers l'infini. On montre dans la partie suivante que le point 2 de la proposition 2.1 est également vérifié pour les lois usuelles sur \mathbb{N} ou \mathbb{R} (qui possèdent un unique mode).

Transformation de quelques lois usuelles

Dans cette partie, on calcule les k -escortes de lois usuelles discrètes à support fini ou dénombrable, ainsi que des lois à densité. Il s'avère que certaines familles de lois à support infini, dénombrable ou non, sont stables par l'action de la transformation escorte. La situation est plus complexe pour les lois à support fini.

Escortes des lois à support fini

Les familles usuelles de lois à support fini ne sont pas stables sous l'action de la transformée escorte. On montre en effet que les k -escortes d'une loi binomiale, pour $k \neq 1$, ne sont pas des lois binomiales. La situation est identique pour les lois hypergéométriques et multinomiales. Cependant, les lois de Bernoulli sont transformées en lois de Bernoulli.

Proposition 2.4. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. La k -escorte d'une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\left[1 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^k\right]^{-1}$.
2. Pour $n \geq 2$, la k -escorte d'une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$ n'est plus une loi binomiale, dès que $k \neq 1$.

Démonstration :

1. La 2-escorte d'une loi de Bernoulli de paramètre $1 > p > 1/2$ est une loi de Bernoulli de paramètre

$$p^2/(p^2 + (1-p)^2) = p + p(1-p)/(p^2 + (1-p)^2) > p.$$

2. Montrons ce point pour $n = 2$. La k -escorte d'une loi binomiale de paramètres $p \in]0, 1[$ et $n = 2$ est $\mathcal{E}(P, k)$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(P, k)(0) &= \frac{(1-p)^{2k}}{p^{2k} + 2^k p^k (1-p)^k + (1-p)^{2k}}, \\ \mathcal{E}(P, k)(1) &= \frac{2^k p^k (1-p)^k}{p^{2k} + 2^k p^k (1-p)^k + (1-p)^{2k}}, \\ \mathcal{E}(P, k)(2) &= \frac{p^{2k}}{p^{2k} + 2^k p^k (1-p)^k + (1-p)^{2k}}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $\mathcal{E}(P, k)$ est une loi binomiale, alors son paramètre de succès est nécessairement $\sqrt{\mathcal{E}(P, k)(2)} = p^k / \sqrt{p^{2k} + 2^k p^k (1-p)^k + (1-p)^{2k}}$. En outre, on doit avoir $\sqrt{\mathcal{E}(P, k)(0)} + \sqrt{\mathcal{E}(P, k)(2)} = 1$ (la somme de la probabilité de succès et de la probabilité d'échec vaut 1), donc

$$\left[\sqrt{\mathcal{E}(P, k)(0)} + \sqrt{\mathcal{E}(P, k)(2)} \right]^2 = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{\mathcal{E}(P, k)(0)} + \sqrt{\mathcal{E}(P, k)(2)} \right]^2 &= \frac{(p^k + (1-p)^k)^2}{p^{2k} + 2^k p^k (1-p)^k + (1-p)^{2k}} \\ &= \frac{(p^k + (1-p)^k)^2}{(p^k + (1-p)^k)^2 + (2^k - 2)p^k (1-p)^k}. \end{aligned}$$

Or $(2^k - 2)p^k(1-p)^k \neq 0$ pour tout $k \neq 1$ et $p \neq 0, 1$, de sorte que

$$\left[\sqrt{\mathcal{E}(P, k)(0)} + \sqrt{\mathcal{E}(P, k)(2)} \right]^2 \neq 1,$$

d'où la contradiction. □

Les figures 2.6 et 2.7 représentent respectivement les k -escortes des lois binomiales de paramètres $n = 15$ et $p = 0.5$, puis $n = 15$ et $p = 0.2$, pour 9 valeurs de k (de en haut à gauche, à en bas à droite $k = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$).

Une conséquence notable de la non-stabilité de la famille des lois binomiales par la transformation escorte est le fait que le produit de convolution de deux k -escortes n'est pas nécessairement la k -escorte du produit de convolution des lois. La k -escorte d'une loi Bernoulli de paramètre p est une loi de Bernoulli. Le produit de convolution de deux k -escortes de lois de Bernoulli de paramètre p est donc une loi binomiale. Par contre, le produit de convolution de $\mathcal{B}(1, p)$ par elle-même est une binomiale de paramètres $n = 2$ et p , dont la k -escorte n'est pas une loi binomiale.

Notons que les familles des lois hypergéométriques et multinomiales ne sont pas stables par la transformation escorte.

Escortes de lois usuelles à support dénombrable

Les k -escortes des lois géométriques et des lois de Poisson sont définies pour tout $k > 0$. De plus, la condition (2.32) de dérivation sous le signe somme est satisfaite.

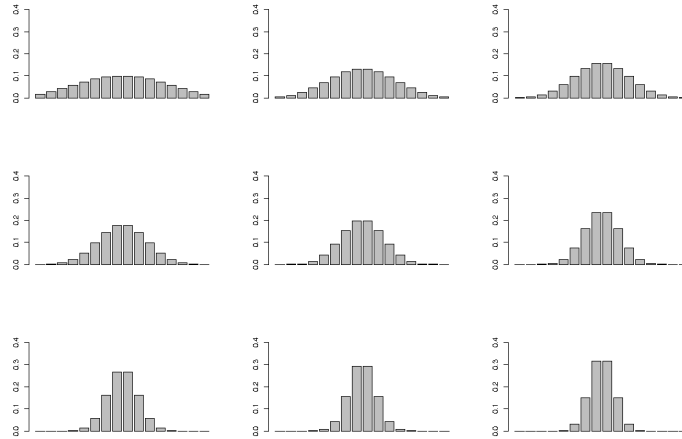


FIG. 2.6 – Les k -escortes de la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.5)$ pour $k = 0.2$ (en haut, à gauche), 0.4, 0.6, 0.8, 1 (milieu), 1.5, 2, 2.5, 3 (en bas à droite).

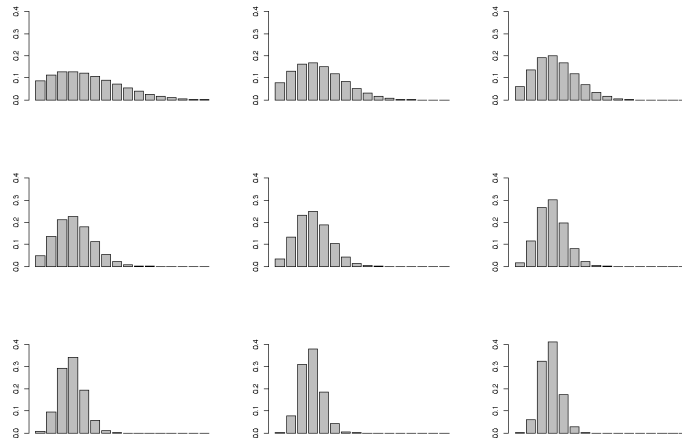


FIG. 2.7 – Les k -escortes de la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.2)$ pour $k = 0.2$ (en haut à gauche), 0.4, 0.6, 0.8, 1 (milieu), 1.5, 2, 2.5, 3 (en bas à droite).

Proposition 2.5.

1. Soit g la densité par rapport à la mesure de comptage de la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors g^k est intégrable pour tout $k > 0$ et

$$\sum_{x=1}^{+\infty} g(x)^k = \frac{p^k}{1 - (1-p)^k}, \quad k > 0. \tag{2.33}$$

En outre, la k -escorte de la loi géométrique de paramètre p est une loi géométrique de paramètre $(1 - (1-p)^k)$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

2. Soit d la densité par rapport à la mesure de comptage de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors d^k est intégrable pour tout $k > 0$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

Démonstration :

1. On sait que $g(x) = (1-p)^{x-1}p$ pour $x \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $g(x)^k = ((1-p)^k)^{x-1} p^k$. Ainsi, la série de terme général $g(x)^k$ est, au facteur p^k près, une série géométrique de raison $(1-p)^k$. La somme (2.33) s'en déduit immédiatement. La k -escorte de $\mathcal{G}(p)$ a donc pour densité

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{G}(p), k)(x) &= \frac{1 - (1-p)^k}{p^k} p^k ((1-p)^k)^{x-1} \\ &= ((1-p)^k)^{x-1} (1 - (1-p)^k), \end{aligned}$$

de sorte que $\mathcal{E}(\mathcal{G}(p), k)$ est la loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^k$.

Par ailleurs, $g(x)^k \log g(x) = [(x-1) \log(1-p) + \log p] [(1-p)^k]^{x-1} p^k$. La série de terme général $(x-1) \log(1-p) ((1-p)^k)^{x-1} p^k$ est, à un facteur près, la dérivée d'une série géométrique convergente, donc elle converge. De même, la série $\log p ((1-p)^k)^{x-1} p^k$ est une série géométrique convergente. Donc $\log g(x)g(x)^k$ converge et la condition de dérivation sous le signe somme est satisfaite.

2. Les k -escortes de toute loi à support dénombrable existent pour $k > 1$ d'après le point 2 des propriétés 2.2. Il suffit de montrer pour $k < 1$ que

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{kx}}{(x!)^k} < \infty. \tag{2.34}$$

Or

$$\frac{\lambda^{kx}}{(x!)^k} \simeq_{\infty} \exp(kx \log \lambda - kx \log(x/e) - k \log(2\pi x)) = o(e^{-kx \log x}).$$

La série de terme général $e^{-kx \log x}$ étant convergente, (2.34) suit immédiatement.

De même, on prouve que la série de terme général $\log d(x)d(x)^k$ est absolument convergente. □

La constante de normalisation (2.34) impliquée dans le calcul de la k -transformée de la loi de Poisson n'ayant pas été explicitement calculée, on ne dispose pas d'expression explicite de $\mathcal{E}(\mathcal{P}(\lambda), k)$.

Les figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement les k -escortes des lois géométrique de paramètre $p = 0.5$ et de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, pour 9 valeurs de k (de en haut à gauche, à en bas à droite, $k = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5$).

Escortes de lois usuelles à densité

On montre dans cette partie, que les familles des lois normales, exponentielles et Gamma, sont stables sous l'action de la transformation escorte.

Proposition 2.6. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1. La k -escorte de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'espérance m et de variance σ^2 est bien définie pour tout $k > 0$ et $\mathcal{E}(\mathcal{N}(m, \sigma^2)) = \mathcal{N}(m, \sigma^2/k)$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite par la densité de la loi normale, de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

2. La k -escorte de la loi exponentielle $E(\lambda)$ d'espérance $1/\lambda$ est bien définie pour tout $k > 0$ et $\mathcal{E}(E(\lambda)) = E(k\lambda)$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite par la densité de la loi exponentielle de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

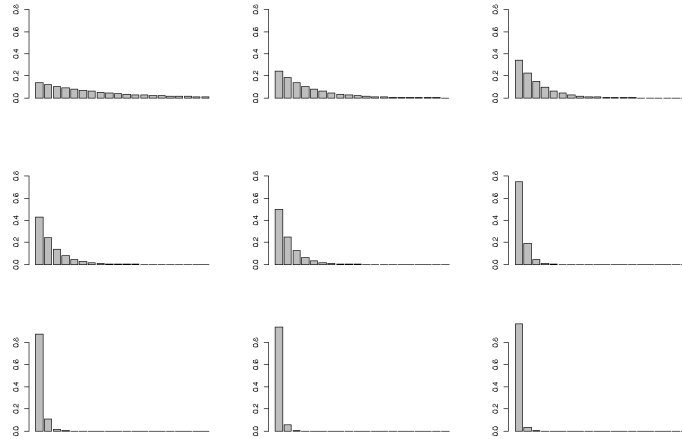


FIG. 2.8 – Les k -escortes de la loi géométrique $\mathcal{G}(0.5)$ pour $k = 0.2$ (en haut à gauche), $0.4, 0.6, 0.8, 1$ (milieu), $2, 3, 4$ et 5 (en bas à droite).

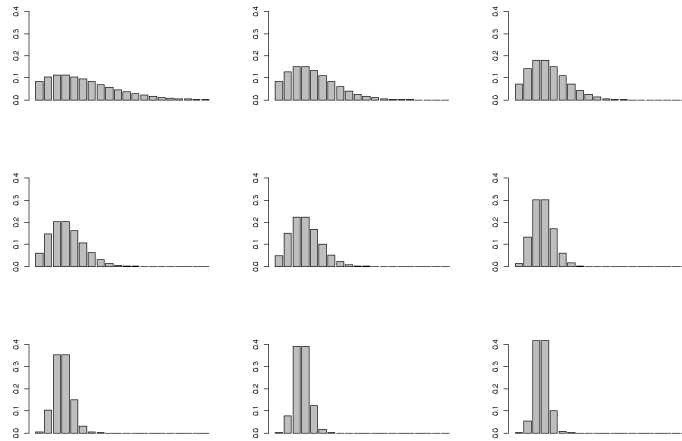


FIG. 2.9 – Les k -escortes de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ pour $k = 0.2$ (en haut, à gauche), $0.4, 0.6, 0.8, 1$ (milieu), $2, 3, 4$ et 5 (en bas à droite).

3. La k -escorte de la loi Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ d'espérance α/β et de variance α/β^2 est bien définie pour tout $k > 0$ et $\mathcal{E}(\mathcal{G}(\alpha, \beta)) = \mathcal{G}(k(\alpha - 1) + 1, k\beta)$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite par la densité de la loi Gamma de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

4. La k -escorte de la loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi Gamma $\mathcal{G}(k(\frac{n}{2} - 1) + 1, \frac{k}{2})$.

De plus, la condition (2.32) est satisfaite par la densité de la loi du $\chi^2(n)$, de sorte que les points 3 et 4 de la proposition 2.3 sont vérifiés.

Démonstration :

1. La densité d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ étant

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

pour $k > 0$, on a

$$P(x)^k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^k \exp\left(-k \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît en $P(x)^k$ la densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2/k)$, à un facteur indépendant de x près. En particulier, $P(x)^k$ est intégrable et

$$\frac{P(x)^k}{\int_E P(x)^k dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/k}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2/k}\right).$$

2. La densité d'une loi exponentielle $E(\lambda)$ étant

$$P(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

pour $k > 0$, on a

$$P(x)^k = \lambda^k \exp(-k\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît en $P(x)^k$ la densité de la loi exponentielle $E(k\lambda)$, à un facteur indépendant de x près. En particulier, $P(x)^k$ est intégrable et

$$\frac{P(x)^k}{\int_E P(x)^k dx} = k\lambda \exp(-k\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

3. La densité de la loi Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ étant

$$P(x) = \frac{x^{\alpha-1} \beta^\alpha \exp(-\beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler, pour $k > 0$, on a

$$P(x)^k = \frac{x^{k(\alpha-1)} \beta^{k\alpha} \exp(-\beta kx)}{\Gamma(\alpha)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît en $P(x)^k$ la densité de la loi Gamma $\mathcal{G}(k(\alpha-1) + 1, k\beta)$, à un facteur indépendant de x près. En particulier, $P(x)^k$ est intégrable et

$$\frac{P(x)^k}{\int_E P(x)^k dx} = \frac{x^{k(\alpha-1)} (k\beta)^{k(\alpha-1)+1} \exp(-k\beta x)}{\Gamma(k(\alpha-1) + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

4. Finalement, puisque la loi $\chi^2(n)$ est égale à la loi $\mathcal{G}(n/2, 1/2)$, le point 4 découle du point précédent. □

Les figures 2.10 à 2.12 représentent les densités des lois $\mathcal{N}(0, 1)$, $E(1)$ puis $\mathcal{G}(2, 1/2)$, accompagnées de la densité de leurs k -escortes pour $k = 0.25, 0.5, 0.75, 2, 3, 4$.

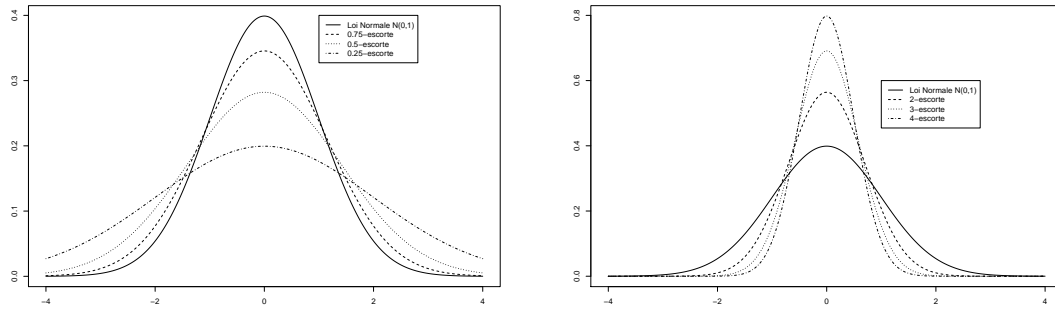


FIG. 2.10 – Les k -escortes de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ pour $k = 0.25, 0.5, 0.75$ (en haut) et $k = 2, 3, 4$ (en bas).

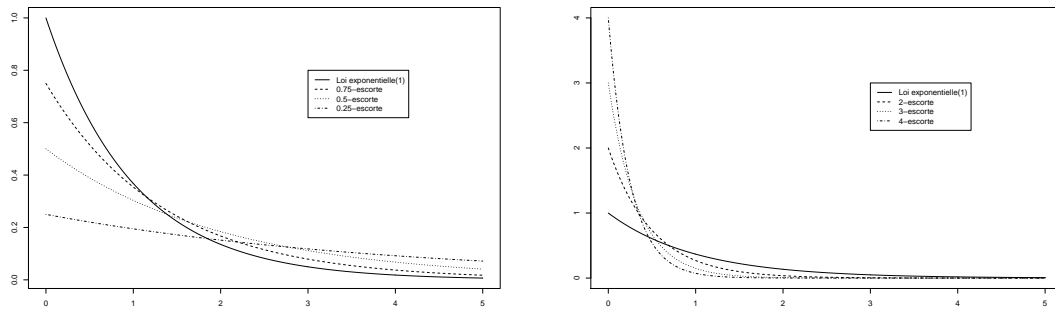


FIG. 2.11 – Les k -escortes de la loi exponentielle $E(1)$ pour $k = 0.25, 0.5, 0.75$ (en haut) et $k = 2, 3, 4$ (en bas).

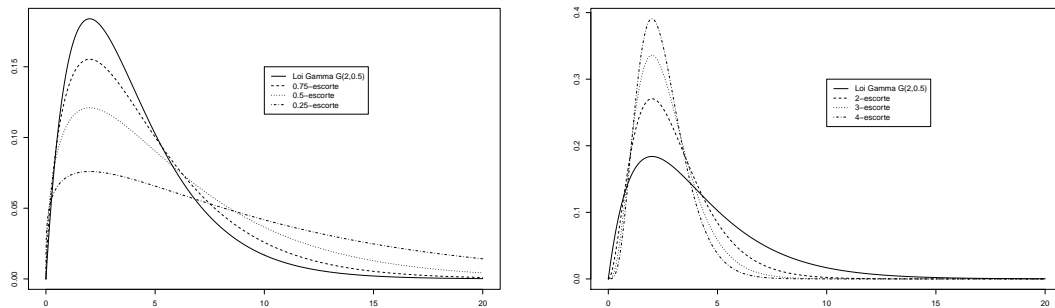


FIG. 2.12 – Les k -escortes de la loi Gamma $\mathcal{G}(2, 1/2)$ pour $k = 0.25, 0.5, 0.75$ (en haut) et $k = 2, 3, 4$ (en bas).

Chapitre 3

Estimation de l'entropie d'un processus de Markov à espace d'état fini

L'entropie de la loi stationnaire et le taux d'un processus de Markov ergodique à espace d'état fini constituent des mesures de l'incertitude du processus. L'entropie de la loi stationnaire, qui mesure l'incertitude du processus lorsque celui-ci a atteint son état d'équilibre, se concentre sur le comportement asymptotique du processus. Le taux d'entropie mesure l'incertitude moyenne du processus par unité de temps. Ces deux mesures de l'incertitude du processus permettent l'accès à l'ensemble des outils liés à l'entropie et sont particulièrement utiles dans les applications. En théorie des files d'attente le principe du maximum d'entropie est utilisé pour estimer les quantités d'intérêt du système à l'équilibre, lorsque le système est sujet à des contraintes spécifiques sur le rendement de service ou le nombre moyen de clients, etc (voir le chapitre 4).

Lorsque le processus est observé, il est nécessaire d'estimer l'entropie de sa loi stationnaire et son taux d'entropie pour les utiliser dans les applications.

Il n'existe aucun résultat dans la littérature sur l'estimation de l'entropie de la loi stationnaire et le taux d'entropie d'un processus de Markov. Ce chapitre a pour but de contribuer à combler cette lacune. Trois situations d'observations sont discutées, selon que l'on observe le processus au cours d'une longue trajectoire, ou plusieurs trajectoires indépendantes, ou encore que le processus est observé à des temps discrets. Pour une estimation basée sur l'observation d'une longue trajectoire, des problèmes apparaissent dès que certains états du processus ne sont pas observés, spécialement quand l'espace d'état est grand (voir Albert [1]). En pratique, il est de toute façon souvent plus simple d'observer plusieurs trajectoires courtes et indépendantes qu'une seule, longue, particulièrement en fiabilité, biostatistiques, ou pour l'étude de systèmes dynamiques stochastiques (voir Albert [1] et Chiquet et Limnios [14]). Une autre alternative, qui s'est particulièrement développée ces dernières années, consiste à observer le processus régulièrement en des temps discrets, plutôt que continûment. Ce schéma est propice lorsque les observations permettent d'identifier le générateur du processus sous-jacent.

Ciuperca et Girardin [15] établissent les bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire et du taux d'entropie d'une chaîne de Markov ergodique et apériodique à espace d'état fini. Pour une telle chaîne, la loi stationnaire s'exprime explicitement en fonction des probabilités de transition. Ainsi, les estimateurs sont obtenus en injectant l'EMV de la matrice de transition dans cette expression. Les propriétés asymptotiques des estimateurs sont déduites du théorème ergodique pour les chaînes de Markov et de la méthode delta. Voir également Girardin and Sesboüé [37] pour une étude détaillée de ces estimateurs pour des chaînes de Markov à deux états.

Les estimateurs de l'entropie de la loi stationnaire et du taux d'entropie d'un processus de

Markov ergodique sont obtenus, de manière analogue, en injectant des estimateurs du générateur dans les expressions (1.12) et (1.14), pages 33 et 34, donnant l'entropie de la loi stationnaire et le taux d'entropie en fonction du générateur. On montre que ces estimateurs sont fortement consistants et asymptotiquement normaux, puis on illustre numériquement ces résultats grâce à des simulations.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la partie 3.1, on rappelle et complète plusieurs méthodes d'estimation du générateur et de la loi stationnaire d'un processus de Markov ergodique à espace d'état fini. Dans les parties 3.2 et 3.3, on introduit les estimateurs par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire et du taux d'entropie du processus. On montre leurs bonnes propriétés asymptotiques. Finalement, dans la partie 3.4, on illustre le comportement asymptotique des estimateurs étudiés grâce à des simulations.

3.1 Estimation du générateur et de la loi stationnaire du processus

Avant d'établir les propriétés asymptotiques des estimateurs par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire et du taux d'entropie d'un processus de Markov dans la partie 3.2, quelques résultats préliminaires sur l'estimation du générateur et de la loi stationnaire sont nécessaires.

Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E ; on fixe $E = \{1, \dots, s\}$ pour simplifier. Soit $\mathbf{A} = (\mathbf{A}(i, j))_{(i, j) \in E^2}$ le générateur du processus et P sa loi stationnaire.

La loi stationnaire P s'exprime comme une fonction explicite Π du générateur \mathbf{A} (voir la partie 1.1.3 du chapitre 1). Précisément,

$$P = \Pi(\mathbf{A}) = \left(\frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A})} \right)_{i \in E}, \quad (3.1)$$

où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ désigne le $(i, i)^{\text{ème}}$ cofacteur du générateur. Notons que la relation (3.1) n'est valable que si \mathbf{A} est un générateur ergodique; l'ensemble de définition de Π est donc l'ensemble \mathcal{G} des générateurs ergodiques.

Ceci nous conduit à estimer P par l'image par Π d'estimateurs de \mathbf{A} . La fonction Π étant très régulière (infiniment dérivable sur \mathcal{G}), les estimateurs de P ainsi construits, hérite des propriétés asymptotiques de l'estimateur de \mathbf{A} .

Dans la suite, le processus \mathbf{X} sera identifié, quand cela sera nécessaire, à son historique, c'est-à-dire la suite des variables aléatoires $(Y_n, \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la chaîne immergée de \mathbf{X} et $(\Delta_n)_n$ est la suite des temps de séjour successifs.

3.1.1 Estimation à partir d'une longue trajectoire

Dans cette partie, on calcule deux estimateurs de la loi stationnaire, l'estimateur empirique et un estimateur par plug-in basé sur l'EMV du générateur, à partir de l'observation d'une trajectoire jusqu'à l'instant $T > 0$. On compare leur comportement asymptotique, lorsque T tend vers l'infini, ainsi que leur temps de calcul.

Albert [1] établit que l'EMV \widehat{A}_T de \mathbf{A} est égal à l'estimateur empirique, c'est-à-dire

$$\widehat{A}_T(i, j) = \begin{cases} \frac{n_T(i, j)}{r_T(i)} & \text{si } r_T(i) \neq 0, \quad j \neq i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\widehat{A}_T(i, i) = -\sum_{j \neq i} \widehat{A}_T(i, j)$, où $n_T(i, j) = \sum_{m=0}^{N_T-1} \mathbf{1}_{\{Y_m=i, Y_{m+1}=j\}}$ est le nombre de sauts de i vers j observés au cours de la trajectoire, pour $(i, j) \in E^{2*} = \{(i, j) \in E^2 : j \neq i\}$ et $r_T(i) = \sum_{m=0}^{N_T-1} \Delta_m \mathbf{1}_{\{Y_m=i\}}$ est le temps total passé par la trajectoire en i .

L'estimateur \widehat{A}_T est fortement consistant et $\sqrt{T}(\widehat{A}_T - \mathbf{A})$ est asymptotiquement normal, de variance asymptotique diagonale telle que

$$\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2((i,j),(i,j)) = \mathbf{A}(i,j)/P(i), \quad (i,j) \in E^{2*}. \quad (3.3)$$

En particulier, \widehat{A}_T est ergodique avec probabilité tendant vers 1 lorsque T tend vers l'infini.

On définit l'estimateur par plug-in de P , à partir de \widehat{A}_T par

$$\widehat{P}_T = \begin{cases} \Pi(\widehat{A}_T) & \text{si } \widehat{A}_T \in \mathcal{G}, \\ (\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.4)$$

où Π est défini par (3.1). Le choix de la probabilité uniforme lorsque \widehat{A}_T n'est pas ergodique est arbitraire, l'estimateur \widehat{A}_T étant asymptotiquement ergodique.

Alors, \widehat{P}_T hérite des propriétés asymptotiques de \widehat{A}_T .

Proposition 3.1. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire.*

L'estimateur par plug-in \widehat{P}_T de P , obtenu à partir d'une trajectoire observée jusqu'à l'instant $T > 0$, converge presque sûrement vers P lorsque T tend vers l'infini et $\sqrt{T}(\widehat{P}_T - P)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{P,c,1}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2 \cdot D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$.

De plus, la loi normale n'est jamais dégénérée de sorte que la vitesse de convergence est optimale.

Démonstration : Comme \widehat{A}_T converge presque sûrement vers \mathbf{A} lorsque T tend vers l'infini et que Π est une fonction continue (même infiniment dérivable), le théorème de la fonction continue fournit la forte consistance de \widehat{P}_T . De plus, $\sqrt{T}(\widehat{A}_T - \mathbf{A})$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$ donnée par (3.3). Pourvu que $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ soit non-nul, la méthode delta (théorème 1.3 du chapitre 1) s'applique et montre que $\sqrt{T}(\widehat{P}_T - P)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{P,c,1}^2$.

Le lemme 3.1 établit que $D_{\Pi}(\mathbf{A}) \neq 0$ pour tout \mathbf{A} , ce qui termine la démonstration. \square

Lemme 3.1. *Étant donné $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$, la dérivée $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ de Π en \mathbf{A} n'est pas nulle.*

Démonstration : On montre que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i,l)} \Pi_i$, $l \neq i$, sont non-nulles. Pour tout $i \in E$ et $(k,l) \in E^{2*}$, la dérivée partielle de $\Pi_i(\mathbf{A})$ par rapport à $\mathbf{A}(k,l)$ est

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(k,l)} \Pi_i(\mathbf{A}) = \left[\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A}) \right]^{-2} \left[\frac{\partial c_{i,i}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(k,l)} \sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A}) - c_{i,i}(\mathbf{A}) \sum_{j \in E} \frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(k,l)} \right].$$

Par définition, $c_{i,i}(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^{(i,i)}$, où $\mathbf{A}^{(i,i)}$ est la matrice carrée de taille $(s-1) \times (s-1)$ obtenue en enlevant à \mathbf{A} sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $i^{\text{ème}}$ colonne, de sorte que les coefficients $\mathbf{A}(i,l)$, $l \neq i$, n'apparaissent pas dans $c_{i,i}(\mathbf{A})$; les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i,l)} c_{i,i}(\mathbf{A})$ sont donc nulles. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i,l)} \Pi_i(\mathbf{A}) = - \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\left[\sum_{j \in E} c_{j,j}(\mathbf{A}) \right]^2} \left[\sum_{j \neq i} \frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)} \right].$$

Le processus \mathbf{X} étant récurrent positif, tous les états sont chargés par la loi stationnaire, donc $c_{i,i}(\mathbf{A}) \neq 0$ n'est pas nul. Il suffit de montrer que la somme $\sum_{j \neq i} \frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)}$ n'est pas nulle pour au moins un indice $l \neq i$. Le lemme 3.2 implique qu'aucune des dérivées partielles $\frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)}$, $l \neq i, j \neq i, l$, n'est nulle et aussi qu'elles ont toutes le même signe. Ce signe dépend uniquement du nombre s d'états du processus. Explicitement,

- d'une part, $\frac{\partial c_{l,l}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)} = \det(\mathbf{A}^{(l,l)(i,i)})$ où $\mathbf{A}^{(l,l)(i,i)}$ est la matrice carrée de taille $(s-2) \times (s-2)$ obtenue à partir de \mathbf{A} en lui enlevant d'abord sa $l^{\text{ème}}$ ligne et $l^{\text{ème}}$ colonne, puis les $i^{\text{èmes}}$ ligne et colonne. Notons $m_{u,v}$, $(u,v) \in \{1, \dots, s-2\}$, les coefficients de $\mathbf{A}^{(l,l)(i,i)}$. On a

$$\begin{cases} m_{u,v} \geq 0 & \text{pour tout } (u,v) \in \{1, \dots, s-2\}^2, v \neq u, \\ m_{u,u} = - \sum_{v \neq u} m_{u,v} - m'_{u,u} & \text{pour tout } u \in \{1, \dots, s-2\}, \end{cases}$$

avec $m'_{u,u} \geq 0$ pour tout $u \in \{1, \dots, s-2\}$.

De plus, l'ensemble $F_0 = \{u \in \{1, \dots, s-2\} : m'_{u,u} > 0\}$ n'est pas vide et pour tout $u \in F_0^c$, il existe $v \in F_0$ tel que $m_{u,v} \neq 0$. En effet, si l'ensemble F_0 était vide, alors cela signifierait que pour tout $j \in E \setminus \{l\}$, $\mathbf{A}(j,l) = 0$ et donc qu'aucun état ne mène à l , ce qui contredit l'irréductibilité de \mathbf{X} . De plus, $m_{u,u} = \mathbf{A}(j,j)$, pour un certain $j \in E$. Dans ce cas, $m_{u,v} = \mathbf{A}(j,k)$, pour tout $v \neq u$, avec $k \neq j, i, l$. Ainsi, $u \notin F_0$ signifie que tous les coefficients non nuls de la ligne j du générateur ont été conservés. Le générateur étant ergodique, il existe au moins un coefficient non nul, donc il existe $v \neq u$ tel que $m_{u,v} > 0$. Le lemme 3.2 prouve donc que la dérivée partielle $\frac{\partial c_{l,l}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)}$ n'est pas nulle et de même signe que $(-1)^{s-2}$.

- D'autre part, si $j \neq l$, alors $\frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)} = \det[\mathbf{A}^{(j,j)(i,l)}] + (-1)^{\delta(l)+i} \det[(\mathbf{A}^{(j,j)}(i,\delta(l)))]$, avec

$$\delta(l) = \begin{cases} l & \text{si } j > l, \\ l-1 & \text{si } j \leq l. \end{cases}$$

De manière similaire à ce qui est fait dans la démonstration du lemme 3.2 (en développant les deux déterminants en cofacteurs selon la première colonne), on montre que $\frac{\partial c_{j,j}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}(i,l)} \neq 0$ et que son signe est celui de $(-1)^{s-2}$.

En conclusion, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i,l)} \Pi_i(\mathbf{A})$, pour $l \in E \setminus \{i\}$ sont non-nulles. \square

Lemme 3.2. Soit $M = (m_{u,v})_{(u,v) \in \{1, \dots, p\}^2}$ une matrice carrée de taille $p \times p$ telle que

$$\begin{cases} m_{u,v} \geq 0 & \text{pour tout } (u,v) \in \{1, \dots, p\}^2, v \neq u, \\ m_{u,u} = - \sum_{v \neq u} m_{u,v} - m'_{u,u} & \text{pour tout } u \in \{1, \dots, p\}, \end{cases}$$

avec $m'_{u,u} \geq 0$ pour tout $u \in \{1, \dots, p\}$.

On suppose que l'ensemble $F_0 = \{u \in \{1, \dots, p\} : m'_{u,u} > 0\}$ n'est pas vide et que pour tout $u \in F_0^c$, il existe $v \in F_0$ tel que $m_{u,v} \neq 0$.

Le déterminant de M est non nul et est de même signe que $(-1)^p$.

Démonstration : On pose $m'_{u,v} = m_{u,v}$ pour tout $(u,v) \in \{1, \dots, p\}$, $v \neq u$ de sorte que

$$m_{u,u} = - \sum_{v=1}^p m'_{u,v}, \quad u \in \{1, \dots, p\}.$$

Par définition, $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \prod_{u=1}^p m_{u,\sigma(u)}$, où S_p est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ .

Pour tout $q \in \{0, \dots, p\}$, on note $S_p^{(q)}$ l'ensemble des permutations de S_p possédant exactement q points fixes. On a

$$\det(M) = \sum_{q=0}^p \alpha_q, \tag{3.5}$$

où

$$\alpha_q = \sum_{\sigma \in S_p^{(q)}} \epsilon(\sigma) \prod_{u=1}^p m_{u, \sigma(u)}.$$

On montre que, du fait de la forme des coefficients diagonaux de la matrice, plusieurs termes de (3.5) s'annulent.

Tout d'abord, $S_p^{(p)}$ est réduit à l'identité pour $q = p$ et

$$\alpha_p = \prod_{u=1}^p m_{u,u} = \prod_{u=1}^p \left(- \sum_{v=1}^p m'_{u,v} \right) = (-1)^p \sum_{\eta \in E_p^{E_p}} \prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)}, \quad (3.6)$$

où $E_p = \{1, \dots, p\}$ et $E_p^{E_p}$ est l'ensemble de toutes les applications de E_p dans E_p .

Notons que $S_p^{(q)} = \emptyset$ pour $q = p - 1$: une permutation différente de l'identité change au moins 2 éléments. Pour $q \neq p, p - 1$, on introduit pour $\sigma \in S_p^{(q)}$, l'ensemble $I_\sigma = \{u_1, \dots, u_q\}$ des points fixés par σ . Afin de séparer les coefficients diagonaux des autres, on écrit

$$\alpha_q = \sum_{\sigma \in S_p^{(q)}} \epsilon(\sigma) \prod_{u \in I_\sigma} m_{u,u} \prod_{u \notin I_\sigma} m_{u, \sigma(u)}. \quad (3.7)$$

Par ailleurs, on a

$$\prod_{u \in I_\sigma} m_{u,u} = (-1)^q \prod_{u \in I_\sigma} \left(\sum_{v=1}^p m'_{u,v} \right) = (-1)^q \sum_{v \in E_p^q} \prod_{r=1}^q m'_{u_r, v_r}.$$

En identifiant chaque q -uplet $((u_1, v_1), \dots, (u_q, v_q))$ avec l'application μ de I_σ dans E_p qui associe v_i à u_i , il vient

$$\prod_{u \in I_\sigma} m_{u,u} = \sum_{\mu \in E_p^{I_\sigma}} \prod_{u=1}^p m'_{u, \mu(u)},$$

d'où

$$\prod_{u \in I_\sigma} m_{u,u} \prod_{u \notin I_\sigma} m_{u, \sigma(u)} = \sum_{\mu \in M_{I_\sigma}^\sigma} \prod_{u=1}^p m'_{u, \mu(u)},$$

où $M_{I_\sigma}^\sigma$ est le sous-ensemble des applications de $E_p^{E_p}$ dont la restriction à I_σ^c est égale à $\sigma|_{I_\sigma^c}$. Ainsi, (3.7) devient

$$\alpha_q = (-1)^q \sum_{\sigma \in S_p^{(q)}} \epsilon(\sigma) \sum_{\mu \in M_{I_\sigma}^\sigma} \prod_{u=1}^p m'_{u, \mu(u)}.$$

Afin de permuter l'ordre de sommation, on introduit pour $F \subseteq E_p$ de cardinal q , le sous-ensemble $S_p^{(F)}$ de S_p des permutations dont l'ensemble des points fixés est F . On a

$$\alpha_q = (-1)^q \sum_{F \subseteq E_p, |F|=q} \sum_{\sigma \in S_p^{(F)}} \sum_{\mu \in M_F^\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{u=1}^p m'_{u, \mu(u)}.$$

On identifie $S_p^{(F)} \times M_F^\sigma$ à $M_F = \{\eta \in E_p^{E_p} : \eta|_{F^c} \in S_{F^c}^{(0)}\}$, où $S_{F^c}^{(0)}$ est l'ensemble des permutations de F^c sans point fixe, de sorte que

$$\alpha_q = (-1)^q \sum_{F \subseteq E_p, |F|=q} \sum_{\eta \in M_F} \epsilon(\eta|_{F^c}) \prod_{u \in E_p} m'_{u, \eta(u)}. \quad (3.8)$$

Les équations (3.6) et (3.8) donnent dans (3.5)

$$\det(M) = (-1)^p \sum_{\eta \in E_p^{E_p}} \prod_{u \in E_p} m'_{u, \eta(u)} + \sum_{q=0}^{p-2} (-1)^q \sum_{F \subseteq E_p, |F|=q} \sum_{\eta \in M_F} \epsilon(\eta|_{F^c}) \prod_{u \in E_p} m'_{u, \eta(u)},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^p \sum_{\eta \in E_p^{E_p}} \prod_{u \in E_p} m'_{u, \eta(u)} \\ &+ \sum_{q=0}^{p-2} (-1)^{q+1} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_{-1}^{(q)}} \prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)} + \sum_{q=0}^{p-2} (-1)^q \sum_{\eta \in \mathcal{A}_1^{(q)}} \prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)}, \end{aligned}$$

où on a posé, pour tout $F \subseteq E_p$, $\mathcal{A}_1^{(F)} = \{\eta \in M_F : \epsilon(\eta|_{F^c}) = 1\}$ et $\mathcal{A}_{-1}^{(F)} = \{\eta \in M_F : \epsilon(\eta|_{F^c}) = -1\}$, et aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{(q)} &= \bigcup_{F \in E_p, |F|=q} \mathcal{A}_1^{(F)} \\ &= \{\eta \in E_p^{E_p} : \exists F \subseteq E_p, |F|=q \text{ and } \eta \in M_F, \epsilon(\eta|_{F^c}) = 1\}, \\ \mathcal{A}_{-1}^{(q)} &= \bigcup_{F \in E_p, |F|=q} \mathcal{A}_{-1}^{(F)}. \end{aligned}$$

On a

$$\det(M) = (-1)^p \left[2 \sum_{\eta \in \mathcal{A}} \prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)} + \sum_{\eta \in E_p^{E_p} \setminus \mathcal{A}'} \prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)} \right], \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\bigcup_{q:2|(q+1-p)} \mathcal{A}_{-1}^{(q)} \right) \cup \left(\bigcup_{q:2|(q-p)} \mathcal{A}_1^{(q)} \right), \\ \mathcal{A}' &= \bigcup_{q=0}^{p-2} \left(\mathcal{A}_1^{(q)} \cup \mathcal{A}_{-1}^{(q)} \right) \\ &= \left\{ \eta \in E_p^{E_p} : \exists F \subseteq E_p, |F| \leq p-2, \eta|_{F^c} \in S_F^{(0)} \right\}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer qu'il existe une application $\eta \in E_p^{E_p} \setminus \mathcal{A}'$ telle que $\prod_{u=1}^p m'_{u, v} \neq 0$ de sorte que la dernière somme de (3.9) soit non nulle. Par hypothèse, il existe un ensemble non vide d'indices F_0 tel que $m'_{u, u} > 0$ pour tout $u \in F_0$ et il existe $v = v_u \in F_0$ tel que $m'_{u, v} > 0$, pour $u \in F_0^c$. Posons

$$\eta(u) = \begin{cases} u & \text{si } u \in F_0, \\ v_u & \text{si } u \in F_0^c. \end{cases} \quad (3.10)$$

On a

$$\prod_{u=1}^p m'_{u, \eta(u)} = \prod_{u \in F_0} m'_{u, u} \prod_{u \in F_0^c} m'_{u, v_u} > 0.$$

De plus, $\eta \in E_p^{E_p} \setminus \mathcal{A}'$. En effet, on montre que pour toute partie F de E_p , la restriction de η à F^c n'est pas une permutation sans point fixe.

- Si $F^c \cap F_0 \neq \emptyset$, alors pour tout $u \in F^c \cap F_0$, $\eta(u) = u$, c'est-à-dire que u est un point fixe de η .

- Si $F^c \cap F_0 = \emptyset$ alors pour tout $u \in F^c$, $\eta(u) = v_u \notin F^c$ de sorte que $\eta|_{F^c}$ ne stabilise pas F^c et n'est donc pas une permutation. \square

Le calcul de l'estimateur par plug-in \widehat{P}_T de la loi stationnaire nécessite le calcul de cofacteurs. La complexité en temps de ces calculs est en $O(T \cdot s^{\ln 7 / \ln 2})$, ce qui doit être comparé à la complexité en temps du calcul de l'estimateur empirique

$$\widehat{P}_{T,emp}(i) = \frac{r_T(i)}{T}. \quad (3.11)$$

Le temps de calcul de cet estimateur est une fonction linéaire du nombre d'états s du processus et du temps d'observation T (voir la figure 3.1 pour une comparaison des temps de calcul).

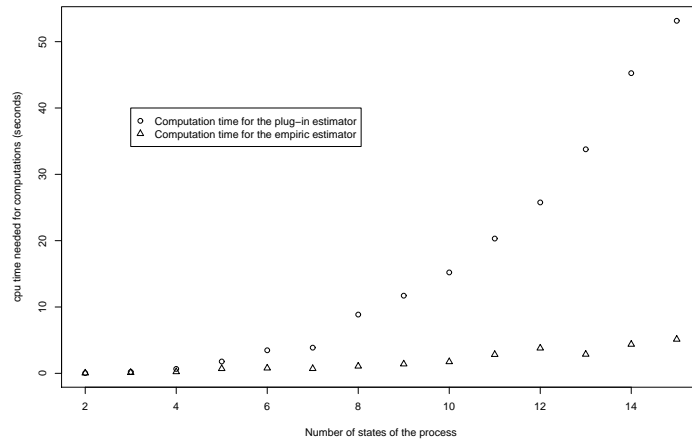


FIG. 3.1 – Comparaison du temps de calcul (en secondes) des estimateurs \widehat{P}_T (cercles) et $\widehat{P}_{T,emp}$ (triangles) selon le nombre s d'états.

La forte consistance de l'estimateur empirique découle de l'ergodicité du processus : $\widehat{P}_{T,emp}(i)$ converge presque sûrement vers $P(i)$, pour tout $i \in E$. Taga [59] établit que toutes les variables $r_T(i)/T, i \in E$ sont asymptotiquement normales, avec une variance asymptotique explicite. Toutefois, la loi asymptotique du vecteur $\sqrt{T}(\widehat{P}_{T,emp} - P)$ reste indéterminée. Son utilisation pour une estimation par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire n'est donc pas judicieuse, la méthode delta ne s'appliquant pas.

3.1.2 Estimation à partir de plusieurs trajectoires indépendantes

Dans cette partie, on suppose que k trajectoires indépendantes τ_1, \dots, τ_k du processus sont observés au cours des intervalles de temps $[0, T_l]$, où les temps de censure $T_l \in \mathbb{R}_+^*$, pour $l \in \{1, \dots, k\}$, sont supposés indépendants, de loi commune μ et indépendants des trajectoires.

Les estimateurs du générateur et de la loi stationnaire sont liés au nombre de sauts d'un état à un autre et aux temps de séjours dans les différents états. Ainsi, pour $(i, j) \in E^{2*}$ et $l \in \{1, \dots, k\}$, on note $n^{(l)}(i, j) = \sum_{m=0}^{N_{T_l}-1} \mathbf{1}_{\{Y_m^{(l)}=i, Y_{m+1}^{(l)}=j\}}$ le nombre de sauts de i vers j observés au cours de la trajectoire τ_l , où N_{T_l} est le nombre de sauts observés au cours de la trajectoire τ_l ; soit $r^{(l)}(i) = \sum_{m=0}^{N_{T_l}-1} \Delta_m^{(l)} \mathbf{1}_{\{Y_m^{(l)}=i\}}$ le temps passé en i par la trajectoire τ_l . Finalement, on note $N_k(i, j) = \sum_{l=1}^k n^{(l)}(i, j)$ le nombre total de sauts de i vers j observés au cours des k trajectoires, et $R_k(i) = \sum_{l=1}^k r^{(l)}(i)$ le temps total passé en i par les k trajectoires.

Chiquet et Limnios [14] ont montré que l'EMV \widehat{A}_k^c du générateur \mathbf{A} est égal à l'estimateur empirique, soit

$$\widehat{A}_k^c(i, j) = \begin{cases} \frac{N_k(i, j)}{R_k(i)} & \text{si } R_k(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad j \neq i, \quad (3.12)$$

puis $\widehat{A}_k^c(i, i) = -\sum_{j \neq i} \widehat{A}_k^c(i, j)$. L'indice c indique que les trajectoires ont été observées continûment, par opposition aux observations discrètes impliquées dans la partie 3.1.3.

Les mêmes auteurs ont également établi la forte consistence de \widehat{A}_k^c lorsque le nombre k de trajectoires tend vers l'infini. De plus, la suite de variables $\sqrt{k}(\widehat{A}_k^c - \mathbf{A})$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance diagonale $\Sigma_{\mathbf{A}, c, m}^2$ donnée par

$$\Sigma_{\mathbf{A}, c, m}^2((i, j), (i, j)) = a_{i, j} \left[\int_0^{+\infty} \int_0^s \mathbb{P}(X_t = i) dt d\mu(s) \right]^{-1}, \quad (i, j) \in E^{2*},$$

où l'indice m signifie que plusieurs trajectoires ont été observées, par opposition au cas de l'observation d'une unique trajectoire, discutée dans la partie 3.1.1. On remarquera que ces résultats découlent de Albert [1] qui a calculé l'EMV du générateur à partir de k trajectoires indépendantes censurées par un temps d'observation T constant, et établi son comportement asymptotique.

On peut maintenant définir l'estimateur par plug-in \widehat{P}_k^c de la loi stationnaire :

$$\widehat{P}_k^c = \begin{cases} \Pi(\widehat{A}_k^c) & \text{si } \widehat{A}_k^c \in \mathcal{G}, \\ (\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.13)$$

où Π est définie par (3.1).

L'estimateur \widehat{P}_k^c est fortement consistant et asymptotiquement normal.

Proposition 3.2. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire.*

L'estimateur par plug-in \widehat{P}_k^c de P construit à partir de k trajectoires indépendantes censurées par une suite $(T_l)_{l \in \mathbb{N}^}$ de variables indépendantes et de même loi, converge presque sûrement vers P lorsque k tend vers l'infini et $\sqrt{k}(\widehat{P}_k^c - P)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{\widehat{P}, c, m}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A}, c, m}^2 D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$.*

De plus, la différentielle $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ est non nulle, de sorte que la loi asymptotique de $\sqrt{k}(\widehat{P}_k^c - P)$ n'est pas dégénérée et la vitesse de convergence est optimale.

Démonstration : Ces résultats se déduisent de la méthode delta et des propriétés de \widehat{A}_k^c de manière similaire à ce qui a été fait dans la preuve de la proposition 3.1. \square

3.1.3 Estimation à partir d'observations discrètes

L'observation d'un processus de Markov à des instants discrets peut s'entendre de plusieurs manières. Une première stratégie consiste à relever l'état du processus après chaque saut jusqu'à un instant $T > 0$, c'est-à-dire à observer la chaîne immergée $(Y_n)_{n \leq N_T}$ du processus, où N_T est le nombre de sauts jusqu'à l'instant T . Cependant, cette approche ne fournit pas de résultat satisfaisant car la chaîne immergée ne contient pas assez d'information sur le processus. Pour un processus à deux états par exemple, la chaîne immergée est déterministe conditionnellement à l'état initial Y_0 . Dans ce cas, la seule information fournie par l'observation de Y est le nombre de sauts N_T observés avant l'instant T qui converge presque sûrement vers $\mathbf{A}(1, 2)P(1) + \mathbf{A}(2, 1)P(2)$ d'après le théorème ergodique 1.1 et l'expression (1.6) de l'espérance de N_T donnée page 27, ce qui ne permet pas l'estimation de $\mathbf{A}(1, 2)$ et $\mathbf{A}(2, 1)$.

Une approche plus productive consiste à observer le processus aux temps ηn , où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\eta > 0$ représente le temps (constant) séparant deux observations successives. Il a été établi dans

la partie 1.1.4 du chapitre 1 que la suite $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X_{\eta n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$.

Etant donnée une trajectoire de Z observée jusqu'à $n \in \mathbb{N}^*$, l'EMV \widehat{P}_n de \mathbf{P} , donné par

$$\widehat{P}_n(i, j) = \frac{N_n(i, j)}{\sum_{k \in E} N_n(i, k)}, \quad (i, j) \in E^{2*},$$

et $\widehat{P}_n(i, i) = 1 - \sum_{j \neq i} N_n(i, j)$, pour $i \in E$, où $N_n(i, j)$ est le nombre de sauts de i vers j avant $n + 1$, est fortement consistant et $\sqrt{n} \left(\widehat{P}_n - \mathbf{P} \right)$ est asymptotiquement gaussien (voir Anderson et Goodman [3]). On définit l'estimateur \widehat{A}_n^d de \mathbf{A} par

$$\widehat{A}_n^d = \exp^{-1}(\widehat{P}_n)/\eta, \quad (3.14)$$

pourvu que l'exponentielle de \widehat{P}_n soit uniquement inversible.

Soit l'application

$$\Phi_\eta : \mathbf{A} \mapsto \exp(\eta \mathbf{A}), \quad (3.15)$$

définie sur l'ensemble \mathcal{G} des générateurs ergodiques de taille $s \times s$. Soit $\mathcal{P}_0 = \{e^{\eta \mathbf{A}}, \mathbf{A} \in \mathcal{G}\}$ l'image de \mathcal{G} par Φ_η et soit $\mathcal{P}_{00} = \{P \in \mathcal{P}_0 : \exists! \mathbf{A} \in \mathcal{G}, P = e^{\eta \mathbf{A}}\}$.

Définition 3.1. Une matrice \mathbf{P} appartenant à l'intérieur de \mathcal{P}_{00} est dite log-unique.

Bladt et Sørensen [11] ont établi que si $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$ est log-unique, alors \widehat{P}_n est également log-unique avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas, l'estimateur \widehat{A}_n^d est bien défini avec probabilité tendant vers 1, est égal à l'EMV de \mathbf{A} , et lorsqu'il est bien défini, il est fortement consistant et $\sqrt{n} \left(\widehat{A}_n^d - \mathbf{A} \right)$ est asymptotiquement gaussien de variance asymptotique $\Sigma_{\mathbf{A}, d}^2 = D_{\Phi_\eta^{-1}}(P) \cdot I_{\mathbf{P}}^{-1} \cdot D_{\Phi_\eta^{-1}}^t$, où $I_{\mathbf{P}}$ est l'information de Fisher de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour $s = 2$, Kingman [43] a montré que

$$\mathcal{P}_{00} = \mathcal{P}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} : p, q \in [0, 1], q < 1-p \right\}.$$

Ainsi \widehat{A}_n^d se calcule explicitement.

Proposition 3.3. Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à deux états, de générateur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}(1, 2) & \mathbf{A}(1, 2) \\ \mathbf{A}(2, 1) & -\mathbf{A}(2, 1) \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{Z} = (X_{\eta n})_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\eta > 0$. L'estimateur \widehat{A}_n^d de \mathbf{A} construit à partir de l'observation d'une trajectoire de \mathbf{Z} tronquée en n , est bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Lorsqu'il existe, il est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{A}_n^{(d)}(1, 2) &= -\frac{1}{\Delta^2} \widehat{P}_n(1, 1) \log \left(\widehat{P}_n(1, 1) + \widehat{P}_n(2, 2) - 1 \right) \frac{1}{\widehat{P}_n(1, 2) + \widehat{P}_n(2, 1)}, \\ \widehat{A}_n^{(d)}(2, 1) &= -\frac{1}{\Delta^2} \log \left(\widehat{P}_n(1, 1) + \widehat{P}_n(2, 2) - 1 \right) \left[1 - \frac{1}{\Delta} \widehat{P}_n(1, 2) \frac{1}{\widehat{P}_n(1, 2) + \widehat{P}_n(2, 1)} \right], \end{aligned}$$

puis $\widehat{A}_n^d(1, 1) = -\widehat{A}_n^d(1, 2)$ et $\widehat{A}_n^d(2, 2) = -\widehat{A}_n^d(2, 1)$.

De plus, \widehat{A}_n^d converge presque sûrement vers \mathbf{A} lorsque n tend vers l'infini et $\sqrt{n} \left(\widehat{A}_n^d - \mathbf{A} \right)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{\mathbf{A}, d}^2$ donnée par

$$\frac{p+q}{\eta^2(1-p-q)^2} \begin{pmatrix} \frac{(1-q)^2}{q} pq(1-q) & -(1-p)(1-q)(p+q) \\ -(1-p)(1-q)(p+q) & pq(1-p) + q(1-q) \frac{(1-p)^2}{p} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

où p et q sont les coefficients non diagonaux de $\exp(\eta\mathbf{A})$; précisément

$$\begin{aligned} 1-p &= \frac{1}{\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)} \left(\mathbf{A}(1,2) - \mathbf{A}(1,2)e^{-\eta(\mathbf{A}(1,2)+\mathbf{A}(2,1))} \right), \\ p &= \frac{1}{\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)} \left(\mathbf{A}(2,1) + \mathbf{A}(1,2)e^{-\eta(\mathbf{A}(1,2)+\mathbf{A}(2,1))} \right), \\ q &= \frac{1}{\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)} \left(\mathbf{A}(2,1) - \mathbf{A}(2,1)e^{-\eta(\mathbf{A}(1,2)+\mathbf{A}(2,1))} \right), \\ 1-q &= \frac{1}{\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)} \left(\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)e^{-\eta(\mathbf{A}(1,2)+\mathbf{A}(2,1))} \right). \end{aligned}$$

Décrire explicitement l'ensemble des matrices log-unique \mathcal{P}_{00} lorsque s est plus grand que 2 n'est pas un problème facile; Culver [19] a montré qu'une matrice \mathbf{P} est log-unique si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives et aucun bloc de Jordan n'apparaît plus d'une fois. Dans le chapitre 4, on montre que les valeurs propres de certains générateurs tridiagonaux sont distinctes, de sorte que l'exponentielle de ces matrices soit log-unique. Étendre ce résultat à tout générateur ergodique \mathbf{A} n'est pas possible à l'heure actuelle; on connaît très peu de choses des valeurs propres de \mathbf{A} . On sait que 0 est valeur propre, que les autres valeurs propres sont non nulles et que leur produit vaut $\sum_{i \in E} c_{i,i}(\mathbf{A})$, où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ est le (i,i) ème cofacteur de \mathbf{A} ; cela ne permet pas de montrer que $\exp(\eta\mathbf{A})$ est log-unique.

Lorsque l'on suppose que $\exp(\eta\mathbf{A})$ est log-unique, on peut calculer des valeurs approchées de \hat{A}_n^d . La littérature sur le sujet est riche. Bladt et Sørensen [11] ont calculé des valeurs approchées de \hat{A}_n^d grâce à des algorithmes type MCMC et EM. Metzner *et al.* [46] ont également mis au point un algorithme EM calculant des valeurs approchées de l'EMV du générateur pour des observations discrètes non nécessairement équiréparties. Crommelin et Vanden-Eijnden [17] ont calculé l'estimateur du générateur qui coïncide le mieux avec l'estimateur empirique de la matrice de transition associé aux observation discrètes, selon un problème d'optimisation convexe.

À partir de la relation $P = \Pi(\mathbf{A})$, où Π est donnée par (3.1), on définit l'estimateur par plug-in \hat{P}_n^d de P par

$$\hat{P}_n^d = \begin{cases} \Pi(\hat{A}_n^d) & \text{si } \hat{A}_n^d \in \mathcal{G}, \\ (\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Proposition 3.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire. On suppose que \mathbf{A} est log-unique. L'estimateur par plug-in \hat{P}_n^d de P , construit à partir d'observations équiréparties du processus, satisfait les propriétés suivantes.*

1. *La probabilité que \hat{P}_n^d soit bien défini tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.*
2. *Lorsque \hat{P}_n^d est bien défini, c'est un estimateur fortement consistant de P et $\sqrt{n}(\hat{P}_n^d - P)$ est asymptotiquement normal de variance asymptotique $\Sigma_{\hat{P},d}^2 = D_{\Pi}(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},d}^2 \cdot D_{\Pi}(\mathbf{A})^t$.*

De plus, la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{P}_n^d - P)$ n'est pas dégénérée et la vitesse de convergence est optimale.

Démonstration : L'événement « \hat{A}_n^d est bien défini » implique l'événement « \hat{P}_n^d est bien défini », ce qui prouve le point 1. Une fois de plus, le point 2 découle de la méthode delta appliquée à la suite de variables $(\hat{A}_n^d)_{n \in \mathbb{N}}$.

De plus, d'après le lemme 3.1, la dérivée de $D_{\Pi}(\mathbf{A})$ ne s'annule jamais, de sorte que la variance asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{P}_n^d - P)$ n'est jamais nulle, donc sa loi asymptotique n'est pas dégénérée et la vitesse de convergence est optimale. \square

3.2 Estimation de l'entropie de la loi stationnaire du processus

Dans la partie 3.1, on a construit des estimateurs de la loi stationnaire P d'un processus de Markov ergodique à espace d'état fini, pour trois situations d'observations. On peut maintenant définir des estimateurs par plug-in de l'entropie $\mathbb{S}(P)$ de P . Précisément, si une trajectoire est observée jusqu'à l'instant T , on définit

$$\widehat{S}_T = \mathbb{S}(\widehat{P}_T), \quad (3.18)$$

et

$$\widehat{S}_{T,emp} = \mathbb{S}(\widehat{P}_{T,emp}), \quad (3.19)$$

où \widehat{P}_T est l'estimateur par plug-in défini par (3.4) et $\widehat{P}_{T,emp}$ est l'estimateur empirique défini par (3.11); si l'on a observé k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation indépendants et de même loi, on définit

$$\widehat{S}_k^c = \mathbb{S}(\widehat{P}_k^c) = - \sum_{i \in E} \widehat{P}_k^c(i) \log \widehat{P}_k^c(i), \quad (3.20)$$

où \widehat{P}_k^c est l'estimateur de P défini par (3.13). Finalement, si le processus a été observé en des temps discrets équirépartis, on définit

$$\widehat{S}_n^d = \mathbb{S}(\widehat{P}_n^d), \quad (3.21)$$

où \widehat{P}_n^d est défini par (3.17).

La loi stationnaire $P = \Pi(\mathbf{A})$ étant une fonction explicite du générateur, il en est de même de l'entropie; précisément $\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A})$ où

$$S(\mathbf{A}) = - \sum_{i \in E} \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_j c_{j,j}(\mathbf{A})} \log \frac{c_{i,i}(\mathbf{A})}{\sum_j c_{j,j}(\mathbf{A})}, \quad (3.22)$$

où $c_{i,i}(\mathbf{A})$ est le $(i, i)^{\text{ème}}$ cofacteur de \mathbf{A} . Cette fonction étant plusieurs fois dérivable sur \mathcal{G} , chaque estimateur par plug-in hérite du comportement asymptotique de l'estimateur de la loi stationnaire à partir duquel il a été construit. La nature des lois asymptotiques de ces estimateurs change selon que $D_S(\mathbf{A})$ est nulle ou non.

Théorème 3.1. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire. Soient \widehat{S}_T , $\widehat{S}_{T,emp}$, \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d les estimateurs de l'entropie de P définis par (3.18) à (3.21).*

1. *L'estimateur \widehat{S}_n^d est bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique.*
2. *Lorsqu'ils sont bien définis, les estimateurs \widehat{S}_T , $\widehat{S}_{T,emp}$, \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d sont fortement consistants. Explicitement,*
 - (a) *\widehat{S}_T et $\widehat{S}_{T,emp}$ convergent presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque le temps d'observation T tend vers l'infini;*
 - (b) *\widehat{S}_k^c converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque le nombre k de trajectoires indépendantes tend vers l'infini;*
 - (c) *\widehat{S}_n^d converge presque sûrement vers $\mathbb{S}(P)$ lorsque le nombre n d'observations discrètes tend vers l'infini.*
3. *Si la différentielle $D_S(\mathbf{A})$ n'est pas nulle, alors*

(a) $\sqrt{T}(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{S,c,1}^2 = D_S(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2 \cdot D_S(\mathbf{A})^t,$$

lorsque T tend vers l'infini ;

(b) $\sqrt{k}(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{S,c,m}^2 = D_S(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2 \cdot D_S(\mathbf{A})^t,$$

lorsque k tend vers l'infini ;

(c) $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{S,d}^2 = D_S(\mathbf{A}) \cdot \Sigma_{\mathbf{A},d}^2 \cdot D_S(\mathbf{A})^t,$$

lorsque n tend vers l'infini.

4. Si $D_S(\mathbf{A})$ est nulle, alors

(a) $2T(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_T)$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(c,1)} Y_{i,j}$ lorsque T tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i, j) \in E^{2*}$ suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(c,1)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$ et de la matrice hessienne D_S^2 ;

(b) $2k[\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c]$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(c,m)} Y_{i,j}$ lorsque k tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i, j) \in E^{2*}$ suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(c,m)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2$ et de la matrice hessienne D_S^2 ;

(c) $2n(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(d)} Y_{i,j}$ lorsque n tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i, j) \in E^{2*}$ suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(d)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ et de la matrice hessienne D_S^2 .

Démonstration : Clairement, l'estimateur \widehat{S}_n^d est bien défini si et seulement si \widehat{P}_n^d est bien défini. Le point 1 est alors une conséquence de la proposition 3.1.

Les points 2, 3 et 4 découlent à nouveau de la méthode delta généralisée. \square

L'ensemble des générateurs \mathbf{A} pour lesquels $D_S(\mathbf{A})$ est nulle est explicite pour les processus à deux ou trois états. Précisément, pour un processus à deux états, l'annulation des dérivées partielles conduit à un système d'équations dont les deux inconnues sont les coefficients non diagonaux du générateur. Les solutions de ce système sont calculées dans le lemme 3.3, qui établit que $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si P est uniforme, c'est-à-dire si et seulement si les deux coefficients non-diagonaux du générateur sont égaux.

Lemme 3.3. Soit \mathbf{X} un processus de Markov ergodique à deux états. Soient \mathbf{A} son générateur, P sa loi stationnaire et $\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A})$ son entropie. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La différentielle $D_S(\mathbf{A})$ de S en \mathbf{A} est nulle,
2. La loi stationnaire P est uniforme,
3. Les coefficients non diagonaux du générateurs sont égaux, c'est-à-dire $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1)$.

Démonstration : La loi stationnaire du processus est

$$P = \left(\frac{\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)}, \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \right).$$

Ainsi, d'une part, P est uniforme si et seulement si $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1)$, ce qui prouve l'équivalence entre les points 2 et 3. D'autre part, l'entropie de la loi stationnaire est

$$\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A}) = - \frac{\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \log \frac{\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} - \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \log \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)}.$$

Dérivant cette dernière expression par rapport à $\mathbf{A}(1, 2)$, puis $\mathbf{A}(2, 1)$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1, 2)} S(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}(2, 1)}{(\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1))^2} \left[\log \frac{\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} - \log \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \right] \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2, 1)} S(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{(\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1))^2} \left[\log \frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} - \log \frac{\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \right] \quad (3.24)$$

Ainsi, $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si $\log(\mathbf{A}(1, 2)) = \log(\mathbf{A}(2, 1))$, soit, si et seulement si $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1)$, ce qui montre l'équivalence entre les points 2 et 3. \square

Les variances asymptotiques des estimateurs du taux d'entropie d'un processus à deux états tel que $\mathbf{A}(1, 2) \neq 1$ ou $\mathbf{A}(2, 1) \neq 1$ sont explicites, si l'on dispose de l'observation d'une longue trajectoire, ou d'observations dicrètes. Par ailleurs, lorsque $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1) = 1$, alors les estimateurs convergent en loi vers une loi $\chi^2(1)$.

Corollaire 3.1. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à deux états. Soient $\mathbf{A}(1, 2)$ et $\mathbf{A}(2, 1)$ les coefficients non diagonaux du générateur.*

1. Si $\mathbf{A}(1, 2) \neq \mathbf{A}(2, 1)$, alors

(a) $\sqrt{T}(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{S,c,1}^2 = \frac{2\mathbf{A}(1, 2)\mathbf{A}(2, 1)}{\mathbf{A}(1, 2) + \mathbf{A}(2, 1)} \log \left(\frac{\mathbf{A}(1, 2)}{\mathbf{A}(2, 1)} \right).$$

(b) $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{S,d}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1, 2)} S, \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2, 1)} S \right) \Sigma_{\mathbf{A},d}^2 \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1, 2)} S}{\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2, 1)} S} \right),$$

lorsque n tend vers l'infini, avec $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ donnée par (3.16) et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1, 2)} S$ et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2, 1)} S$ données par (3.23) et (3.24).

2. Si $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1)$, alors

(a) $2T(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_T)$ converge en loi vers une loi $\chi^2(1)$ lorsque T tend vers l'infini,

(b) $2n(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)$ converge en loi vers une loi $\chi^2(1)$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour un processus à trois états, le lemme 3.4 établit que $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si la loi stationnaire du processus est uniforme ; l'ensemble des générateurs ergodiques de dimension 3 possédant une loi stationnaire uniforme est explicité dans le lemme 3.5 .

Lemme 3.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à trois états. Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire. Soit $\mathbb{S}(P) = S(\mathbf{A})$ son entropie.*

La différentielle de S en \mathbf{A} est nulle si et seulement si P est uniforme.

Démonstration : La différentielle $D_S(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i, j)} S(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 [\log \Pi_k(\mathbf{A})] \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i, j)} \Pi_k(\mathbf{A}) = 0, \quad (i, j) \in E^{2*}. \quad (3.25)$$

Supposons pour commencer que P soit uniforme, de sorte que $c_{1,1}(\mathbf{A}) = c_{2,2}(\mathbf{A}) = c_{3,3}(\mathbf{A})$. L'égalité $\sum_{k=1}^3 \Pi_k(\mathbf{A}) = 1$ implique

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i, j)} S(\mathbf{A}) = -\log 3 \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(i, j)} \Pi(k)(\mathbf{A}) \right] = 0, \quad (i, j) \in E^{2*}.$$

Réciproquement, supposons que la loi stationnaire ne soit pas uniforme. Au moins deux des cofacteurs sont distincts ; quitte à réordonner les éléments de E , on peut supposer que $c_{1,1}(\mathbf{A}) < c_{2,2}(\mathbf{A}) \leq c_{3,3}(\mathbf{A})$. Montrons qu'au moins une dérivée partielle dans (3.25) est non nulle. Les dérivées partielles de S sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} S(\mathbf{A}) &= \epsilon_1 [(\mathbf{A}(3,1) + \mathbf{A}(3,2))(c_{2,2}(\mathbf{A}) + c_{3,3}(\mathbf{A})) - c_{1,1}(\mathbf{A})\mathbf{A}(1,3)] \\ &\quad + \epsilon_3 [\mathbf{A}(1,3)(c_{1,1}(\mathbf{A}) + c_{2,2}(\mathbf{A})) - (\mathbf{A}(3,1) + \mathbf{A}(3,2))c_{3,3}(\mathbf{A})], \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,3)} S(\mathbf{A}) &= \epsilon_1 [\mathbf{A}(3,1)(c_{2,2}(\mathbf{A}) + c_{3,3}(\mathbf{A})) - c_{1,1}(\mathbf{A})(\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(1,3))] \\ &\quad + \epsilon_3 [(\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(1,3))(c_{1,1}(\mathbf{A}) + c_{2,2}(\mathbf{A})) - \mathbf{A}(3,1)c_{3,3}(\mathbf{A})], \end{aligned}$$

où $\epsilon_1 = \log[c_{1,1}(\mathbf{A})/c_{2,2}(\mathbf{A})] < 0$ et $\epsilon_3 = \log[c_{3,3}(\mathbf{A})/\log c_{2,2}(\mathbf{A})] \geq 0$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} S(\mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,3)} S(\mathbf{A}) &= \epsilon_1 [\mathbf{A}(3,2)(c_{2,2}(\mathbf{A}) + c_{3,3}(\mathbf{A})) + c_{1,1}(\mathbf{A})\mathbf{A}(1,2)] \\ &\quad + \epsilon_3 [-\mathbf{A}(1,2)(c_{1,1}(\mathbf{A}) + c_{2,2}(\mathbf{A})) - \mathbf{A}(3,2)c_{3,3}(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Notons que $\mathbf{A}(1,2) \neq 0$ ou $\mathbf{A}(3,2) \neq 0$, sinon les états 1 et 3 ne mènent pas à 2, ce qui contredit l'irréductibilité de \mathbf{X} . Donc $\mathbf{A}(3,2)(c_{2,2}(\mathbf{A}) + c_{3,3}(\mathbf{A})) + c_{1,1}(\mathbf{A})\mathbf{A}(1,2) > 0$ et

$$\epsilon_1 [\mathbf{A}(3,2)(c_{2,2}(\mathbf{A}) + c_{3,3}(\mathbf{A})) + c_{1,1}(\mathbf{A})\mathbf{A}(1,2)] < 0.$$

De même, $\epsilon_3 [-\mathbf{A}(1,2)(c_{1,1}(\mathbf{A}) + c_{2,2}(\mathbf{A})) - \mathbf{A}(3,2)c_{3,3}(\mathbf{A})] \leq 0$.

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} S(\mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,3)} S(\mathbf{A})$ est strictement négative et au moins l'une des dérivées de S est non nulle. \square

Lemme 3.5. *Les générateurs ergodiques de dimension 3 possédant une loi stationnaire uniforme sont ceux de la forme*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a-b & a & b \\ a+b-d & -a-b+d-c & c \\ d & b+c-d & -b-c \end{pmatrix},$$

avec $b, c > 0$ et $d \neq b+c$.

Démonstration : Ce résultat découle immédiatement de la relation $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cdot \mathbf{A} = 0$. \square

Pour des espaces d'état plus grands, il est difficile d'établir une condition d'annulation de la différentielle $D_S(\mathbf{A})$ aussi explicite, du fait du grand nombre d'équations et de variables impliquées dans les calculs. Si la loi stationnaire est uniforme, alors l'entropie est maximale et $D_S(\mathbf{A})$ est nulle ; la réciproque n'étant pas prouvée. L'ensemble des générateurs ergodiques de loi stationnaire uniforme est défini par la relation $(1, \dots, 1) \cdot \mathbf{A} = 0$.

3.3 Estimation du taux d'entropie du processus

On construit des estimateurs par plug-in du taux d'entropie d'un processus markovien ergodique, en injectant les estimateurs du générateur et de la loi stationnaire obtenus à la partie 3.1, dans la formule (1.13) page 34. Précisément, si une trajectoire est observée jusqu'à l'instant T , on définit

$$\hat{H}_T = - \sum_{i \in E} \hat{P}_T(i, j) \sum_{j \neq i} \hat{A}_T(i, j) \left(\log \hat{A}_T(i, j) - 1 \right), \quad (3.26)$$

et

$$\hat{H}_{T,emp} = - \sum_{i \in E} \hat{P}_{T,emp}(i, j) \sum_{j \neq i} \hat{A}_T(i, j) \left(\log \hat{A}_T(i, j) - 1 \right), \quad (3.27)$$

où \widehat{A}_T est l'estimateur par plug-in du générateur défini par (3.2), \widehat{P}_T est l'estimateur par plug-in de la loi stationnaire défini par (3.4) et $\widehat{P}_{T,emp}$ est l'estimateur empirique défini par (3.11); si l'on a observé k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation indépendants et de même loi, on définit

$$\widehat{S}_k^c = - \sum_{i \in E} \widehat{P}_k^c(i, j) \sum_{j \neq i} \widehat{A}_k^c(i, j) \left(\log \widehat{A}_k^c(i, j) - 1 \right), \quad (3.28)$$

où \widehat{A}_k^c est défini par (3.12) et \widehat{P}_k^c est défini par (3.13). Finalement, si le processus a été observé en des temps discrets équirépartis, on définit

$$\widehat{S}_n^d = - \sum_{i \in E} \widehat{P}_n^d(i, j) \sum_{j \neq i} \widehat{A}_n^d(i, j) \left(\log \widehat{A}_n^d(i, j) - 1 \right), \quad (3.29)$$

où \widehat{A}_n^d est défini par (3.14) et \widehat{P}_n^d est défini par (3.17).

L'équation (1.14), page 34, exprime $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ comme une fonction explicite $H(\mathbf{A})$ du générateur. Cette fonction étant plusieurs fois dérivable, chaque estimateur par plug-in hérite du comportement asymptotique des estimateurs du générateur et de la loi stationnaire à partir desquels il a été construit. La nature des lois asymptotiques de ces estimateurs change selon que $D_H(\mathbf{A})$ est nulle ou non.

Théorème 3.2. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur et P sa loi stationnaire. Soient \widehat{H}_T , $\widehat{H}_{T,emp}$, \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d les estimateurs du taux d'entropie de \mathbf{X} définis par (3.26) à (3.29).*

1. *L'estimateur \widehat{H}_n^d est bien défini avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique.*
2. *Lorsqu'ils sont bien définis, les estimateurs \widehat{H}_T , $\widehat{H}_{T,emp}$, \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d sont fortement consistants. Explicitement,*
 - (a) *\widehat{H}_T et $\widehat{H}_{T,emp}$ convergent presque sûrement vers $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ lorsque le temps d'observation T tend vers l'infini;*
 - (b) *\widehat{H}_k^c converge presque sûrement vers $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ lorsque le nombre k de trajectoires indépendantes tend vers l'infini;*
 - (c) *\widehat{H}_n^d converge presque sûrement vers $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ lorsque le nombre n d'observations discrètes tend vers l'infini.*
3. *Si la différentielle $D_H(\mathbf{A})$ n'est pas nulle, alors*
 - (a) *$\sqrt{T}(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{H,c,1}^2 = D_H(\mathbf{A}).\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2.D_H(\mathbf{A})^t$, lorsque T tend vers l'infini;*
 - (b) *$\sqrt{k}(\widehat{H}_k^c - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{H,c,m}^2 = D_H(\mathbf{A}).\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2.D_H(\mathbf{A})^t$ lorsque k tend vers l'infini;*
 - (c) *$\sqrt{n}(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{H,d}^2 = D_H(\mathbf{A}).\Sigma_{\mathbf{A},d}^2.D_H(\mathbf{A})^t$ lorsque n tend vers l'infini.*
4. *Si $D_H(\mathbf{A})$ est nulle, alors*
 - (a) *$2T(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T)$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(c,1)} Y_{i,j}$ lorsque T tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i, j) \in E^{2*}$, suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(c,1)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$ et de la matrice hessienne D_H^2 ;*
 - (b) *$2k[\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_k^c]$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(c,m)} Y_{i,j}$ lorsque k tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i, j) \in E^{2*}$, suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(c,m)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2$ et de la matrice hessienne D_H^2 ;*

(c) $2n(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_n^d)$ converge en loi vers $\sum_{(i,j) \in E^{2*}} \alpha_{i,j}^{(d)} Y_{i,j}$ lorsque n tend vers l'infini, où les variables $Y_{i,j}$, $(i,j) \in E^{2*}$, suivent une loi $\chi^2(1)$ et les coefficients $\alpha_{i,j}^{(d)}$ dépendent de $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ et de la matrice hessienne D_H^2 .

Démonstration : La preuve est similaire à celle du théorème 3.1 □

L'ensemble des générateurs \mathbf{A} pour lesquels $D_H(\mathbf{A})$ est nulle est explicite pour les processus de Markov ergodiques à deux états. En effet, pour de tels processus, le taux d'entropie est

$$H(\mathbf{A}(1,2), \mathbf{A}(2,1)) = \frac{\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)}{\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1)}(2 - \log(\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1))), \quad (3.30)$$

où $\mathbf{A}(1,2)$ et $\mathbf{A}(2,1)$ sont les deux coefficients non diagonaux du générateur. On peut alors donner une condition nécessaire et suffisante à l'annulation de H en résolvant directement le système d'équations formé par les dérivées partielles.

Lemme 3.6. *Soit \mathbf{X} un processus de Markov ergodique à deux états. Soient $\mathbf{A}(1,2)$ et $\mathbf{A}(2,1)$ les deux coefficients non diagonaux du générateur \mathbf{A} de \mathbf{X} . Soit $\mathbb{H}(\mathbf{X}) = H(\mathbf{A})$ le taux d'entropie de \mathbf{X} . La dérivée de H en \mathbf{A} est nulle si et seulement si $\mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}(2,1) = 1$.*

Démonstration : Dérivant (3.30) par rapport à $\mathbf{A}(1,2)$ et $\mathbf{A}(2,1)$, on a

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}(1,2)}(\mathbf{A}(1,2), \mathbf{A}(2,1)) = \frac{-\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) + \mathbf{A}(2,1)^2 - \mathbf{A}(2,1)^2 \log \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)}{(\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1))^2}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}(2,1)}(\mathbf{A}(1,2), \mathbf{A}(2,1)) = \frac{-\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) + \mathbf{A}(1,2)^2 - \mathbf{A}(1,2)^2 \log \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)}{(\mathbf{A}(1,2) + \mathbf{A}(2,1))^2}. \quad (3.32)$$

Ainsi, $D_H(\mathbf{A})$ est nulle si et seulement si \mathbf{A} satisfait le système d'équations

$$\begin{cases} -\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) + \mathbf{A}(2,1)^2 - \mathbf{A}(2,1)^2 \log \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) = 0, \\ -\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) + \mathbf{A}(1,2)^2 - \mathbf{A}(1,2)^2 \log \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) = 0. \end{cases}$$

Faisant la différence de ces deux équations, on trouve

$$\mathbf{A}(1,2)^2 - \mathbf{A}(2,1)^2 - (\mathbf{A}(1,2)^2 - \mathbf{A}(2,1)^2) \log \mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\mathbf{A}(1,2) - \mathbf{A}(2,1) = 0, \quad \text{ou bien} \quad 1 - \log(\mathbf{A}(1,2)\mathbf{A}(2,1)).$$

Supposons que $\mathbf{A}(1,2) \neq \mathbf{A}(2,1)$. Alors $y = e/x$. En substituant e/x à y dans la première équation, il vient $e = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}(2,1)$, ce qui, une fois réinjecté dans la première équation du système, fournit $\mathbf{A}(2,1)^2 \log \mathbf{A}(2,1) = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{A}(2,1) = 1$, ce qui prouve qu'une condition nécessaire à l'annulation de $D_H(\mathbf{A})$ est $\mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}(2,1) = 1$. On vérifie immédiatement qu'elle est suffisante. □

Les variances asymptotiques des estimateurs du taux d'entropie d'un processus à deux états tel que $\mathbf{A}(1,2) \neq 1$ ou $\mathbf{A}(2,1) \neq 1$ sont explicites, si l'on dispose de l'observation d'une longue trajectoire, ou d'observations dicrètes. Par ailleurs, lorsque $\mathbf{A}(1,2) = \mathbf{A}(2,1) = 1$, alors les estimateurs convergent en loi vers une loi $\chi^2(2)$.

Corollaire 3.2. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à deux états. Soient $\mathbf{A}(1,2)$ et $\mathbf{A}(2,1)$ les coefficients non diagonaux du générateur.*

1. Si $\mathbf{A}(1,2) \neq 1$ ou $\mathbf{A}(2,1) \neq 1$, alors

(a) $\sqrt{T}(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{H,c,1}^2 = \frac{ab}{(a+b)^3} \left((-a - b \log(ab) + b)^2 + (-b + a - a \log(ab))^2 \right),$$

où $a = \mathbf{A}(1, 2)$ et $b = \mathbf{A}(2, 1)$;

(b) $\sqrt{n}(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\Sigma_{H,d}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1,2)} H, \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} H \right) \Sigma_{\mathbf{A},d}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1,2)} H, \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} H \right),$$

lorsque n tend vers l'infini, avec $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ donnée par (3.16) et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(1,2)} H$ et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}(2,1)} H$ données par (3.31) et (3.32).

2. Si $\mathbf{A}(1, 2) = \mathbf{A}(2, 1) = 1$, alors

(a) $2T(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T)$ converge en loi vers une loi $\chi^2(2)$ lorsque T tend vers l'infini ;

(b) $2n(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_n^d)$ converge en loi vers une loi $\chi^2(2)$, lorsque n tend vers l'infini.

Lorsque le processus a plus de deux états, le nombre de variables et d'équations impliquées dans les calculs ne permettent pas d'explicitier l'ensemble des générateurs pour lesquels la dérivée de H est nulle. Lorsque le taux d'entropie est maximum, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{A}(i, j) = 1$ pour tout $(i, j) \in E^{2*}$, alors $D_H(\mathbf{A}) = 0$ (voir Girardin [31]), ce qui fournit une condition suffisante. Que la condition soit nécessaire reste à prouver.

3.4 Simulations

Dans cette partie, les propriétés asymptotiques des estimateurs établies dans la partie 3.2 sont illustrées grâce à des simulations. La valeur de chaque estimateur de l'entropie de la loi stationnaire et du taux est comparée avec la valeur réelle. La loi empirique de chaque estimateur est comparée à la loi asymptotique calculée dans la partie 3.2 ; des tests d'adéquation sont réalisés.

3.4.1 Estimation des variances asymptotiques des estimateurs

Afin de pouvoir comparer les lois empiriques de $\sqrt{T}(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P))$, $\sqrt{k}(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))$ et $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P))$ (respectivement $\sqrt{T}(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$, $\sqrt{k}(\widehat{H}_k^c - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$ et $\sqrt{n}(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}))$) avec les lois normales obtenues aux théorèmes 3.1 et 3.2, il est nécessaire d'estimer les variances asymptotiques $\Sigma_{S,c,1}^2$, $\Sigma_{S,c,m}^2$ et $\Sigma_{S,d}^2$ (respectivement $\Sigma_{H,c,1}^2$, $\Sigma_{H,c,m}^2$ et $\Sigma_{H,d}^2$).

Dans les théorèmes 3.1 et 3.2, il a été établi que $\Sigma_{S,c,1}^2$, $\Sigma_{H,c,1}^2$, $\Sigma_{S,c,m}^2$, $\Sigma_{H,c,m}^2$, $\Sigma_{S,d}^2$ et $\Sigma_{H,d}^2$ sont des fonctions de $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$, $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2$ et $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$. Dans les parties 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3, les variances asymptotiques $\Sigma_{\mathbf{A},c,1}^2$, $\Sigma_{\mathbf{A},c,m}^2$ et $\Sigma_{\mathbf{A},d}^2$ ont été exprimées en fonction du générateur. De ce fait, elles peuvent être estimées par plug-in à partir des estimateurs \widehat{A}_T , \widehat{A}_k^c et \widehat{A}_n^d du générateur donnés par (3.2), (3.12) et (3.14). Les estimateurs ainsi obtenus sont

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,1}^2 &= \left(\delta_{(i,j),(i',j')} \frac{\widehat{A}_T(i,j)}{\widehat{\pi}_T(i)} \right)_{((i,j),(i',j')) \in (E^{2*})^2}, \\ \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,m}^2 &= \left(\delta_{(i,j),(i',j')} \widehat{A}_k^c(i,j) \frac{k}{R_k(i)} \right)_{((i,j),(i',j')) \in (E^{2*})^2}, \\ \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},d}^2 &= D_{\Phi_{\Delta}^{-1}}(\widehat{P}_n) \cdot I_{\widehat{P}_n} \cdot D_{\Phi_{\Delta}^{-1}}(\widehat{P}_n)^t, \end{aligned}$$

où $I_{\widehat{P}_n}$ est l'information de Fisher de \widehat{P}_n .

Finalement, les estimateurs de $\Sigma_{S,c,1}^2$, $\Sigma_{S,c,m}^2$ et $\Sigma_{S,d}^2$ sont respectivement

$$\widehat{\Sigma}_{S,c,1}^2 = D_S(\widehat{A}_T) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,1}^2 \cdot D_S(\widehat{A}_T)^t, \quad (3.33)$$

$$\widehat{\Sigma}_{S,c,m}^2 = D_S(\widehat{A}_k^c) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,m}^2 \cdot D_S(\widehat{A}_k^c)^t, \quad (3.34)$$

$$\widehat{\Sigma}_{S,d}^2 = D_S(\widehat{A}_n^d) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},d}^2 \cdot D_S(\widehat{A}_n^d)^t. \quad (3.35)$$

De même les estimateurs de $\Sigma_{H,c,1}^2$, $\Sigma_{H,c,m}^2$ et $\Sigma_{H,d}^2$ sont respectivement

$$\widehat{\Sigma}_{H,c,1}^2 = D_H(\widehat{A}_T) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,1}^2 \cdot D_H(\widehat{A}_T)^t, \quad (3.36)$$

$$\widehat{\Sigma}_{H,c,m}^2 = D_H(\widehat{A}_k^c) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},c,m}^2 \cdot D_H(\widehat{A}_k^c)^t, \quad (3.37)$$

$$\widehat{\Sigma}_{H,d}^2 = D_H(\widehat{A}_n^d) \cdot \widehat{\Sigma}_{\mathbf{A},d}^2 \cdot D_H(\widehat{A}_n^d)^t. \quad (3.38)$$

Proposition 3.5. *Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Markov ergodique à espace d'état fini E . Soient \mathbf{A} son générateur, P sa loi stationnaire, $\mathbb{S}(P)$ son entropie et $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ le taux d'entropie du processus. Soient $\widehat{\Sigma}_{S,c,1}^2$, $\widehat{\Sigma}_{H,c,1}^2$, $\widehat{\Sigma}_{S,c,m}^2$, $\widehat{\Sigma}_{H,c,m}^2$, $\widehat{\Sigma}_{S,d}^2$ et $\widehat{\Sigma}_{H,d}^2$ les estimateurs des variances asymptotiques définis par (3.33) à (3.38).*

1. *La probabilité pour que (3.33) à (3.38) soient bien définis et non nuls tend vers 1 (en supposant que $\exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique pour (3.35) et (3.38)).*
2. *Lorsqu'ils sont bien définis, $\widehat{\Sigma}_{S,c,1}^2$, $\widehat{\Sigma}_{H,c,1}^2$, $\widehat{\Sigma}_{S,c,m}^2$, $\widehat{\Sigma}_{H,c,m}^2$, $\widehat{\Sigma}_{S,d}^2$ et $\widehat{\Sigma}_{H,d}^2$ sont des estimateurs fortement consistants de $\Sigma_{S,c,1}^2$, $\Sigma_{H,c,1}^2$, $\Sigma_{S,c,m}^2$, $\Sigma_{H,c,m}^2$, $\Sigma_{S,d}^2$ et $\Sigma_{H,d}^2$ respectivement.*
3. *Si $D_S(\mathbf{A})$ n'est pas nulle, alors*
 - (a) $\sqrt{T}(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P))/\widehat{\Sigma}_{S,c,1}$ et $\sqrt{T}(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))/\widehat{\Sigma}_{H,c,1}$ convergent en loi vers une loi normale centrée réduite lorsque le temps d'observation T tend vers l'infini ;
 - (b) $\sqrt{k}(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))/\widehat{\Sigma}_{S,c,m}$ et $\sqrt{k}(\widehat{H}_k^c - \mathbb{H}(\mathbf{X}))/\widehat{\Sigma}_{H,c,m}$ convergent en loi vers une loi normale centrée réduite lorsque le nombre k de trajectoires observées tend vers l'infini ;
 - (c) $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P))/\widehat{\Sigma}_{S,d}$ et $\sqrt{n}(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}))/\widehat{\Sigma}_{H,d}$ convergent en loi vers une loi normale centrée réduite lorsque le nombre n d'observations tend vers l'infini.

Démonstration : Les variances asymptotiques sont des fonctions continues sur l'ensemble des générateurs ergodiques. On a montré que les estimateurs du générateur sont bien définis et ergodiques avec probabilité tendant vers 1. Les estimateurs par plug-in des variances asymptotiques sont donc bien définis avec probabilité tendant vers 1. Le théorème de l'application continue s'applique et prouve, d'une part que pour T , k et n suffisamment grands, les estimateurs des variances sont non nuls et d'autre part qu'ils sont fortement consistants.

Le point 3 est une conséquence immédiate du théorème de Slutsky, du théorème 3.1 et du point 2. \square

3.4.2 Une longue trajectoire

Afin de simuler un processus de Markov ergodique à espace d'état fini, la chaîne immergée $(Y_n)_n$ et les temps de séjours correspondants $(\Delta_n)_n$ sont simulés jusqu'au temps T .

La figure 3.2 montre la convergence ponctuelle de l'estimateur par plug-in et de l'estimateur empirique de l'entropie de la loi stationnaire. Le temps d'observation est fixé à $T = 5000$. Les 100 points de la figure ont été obtenus en calculant \widehat{S}_T (cercles) et $\widehat{S}_{T,emp}$ (triangles) à partir d'une trajectoire d'un processus de Markov (à 2 deux états en haut de la figure, 10 en bas) de l'instant 50 à 5000 par pas de 50. Pour le côté gauche de la figure 3.2, le générateur n'est pas uniforme ; il est donné par

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

3.4. SIMULATIONS

tandis que pour le côté droit, le générateur est uniforme, donné par

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

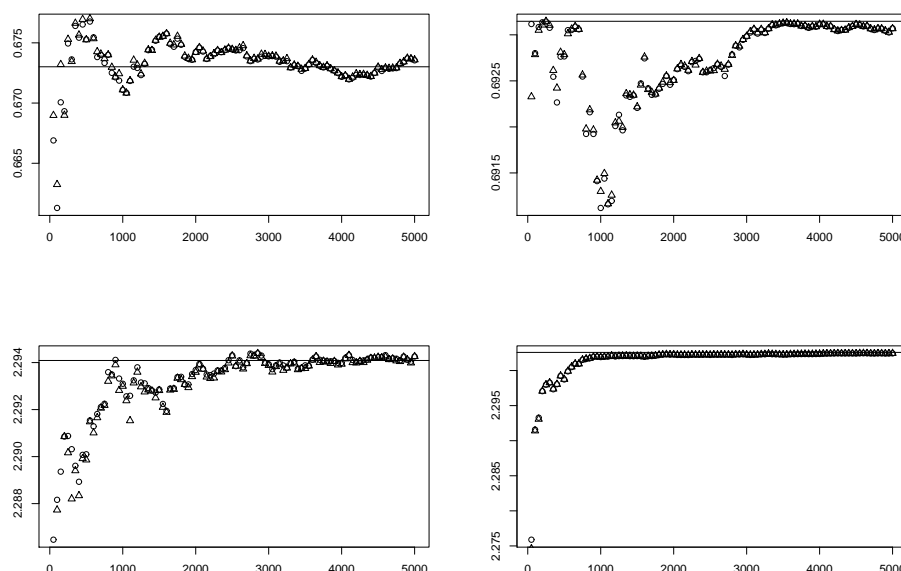


FIG. 3.2 – Convergence ponctuelle de l’estimateur par plug-in \hat{S}_T (cercles) et de l’estimateur empirique $\hat{S}_{T,emp}$ (triangles) pour des processus de Markov à deux états (en haut) et 10 états (en bas) de générateur non uniforme (à gauche) et uniforme (à droite).

La figure 3.3 (gauche) montre la fonction de répartition empirique de $\sqrt{T}(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)/\hat{\Sigma}_{S,c,1}$ comparée à la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour un processus de Markov à deux états de générateur non uniforme \mathbf{A}_0 . La figure 3.3 (droite) montre la fonction de répartition empirique de $2T(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)$ comparée à la fonction de répartition de la loi $\chi^2(1)$, pour un générateur uniforme. Dans les deux cas, la fonction de répartition empirique est construite à partir de 200 trajectoires indépendantes de longueur $T = 1000$ pour un processus à deux états.

L’adéquation de la loi empirique de $\sqrt{T}(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)/\hat{\Sigma}_{S,c,1}$ à la loi normale centrée réduite est testée grâce au test de normalité de Shapiro-Wilk. De même, l’adéquation de la loi empirique de $2T(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)$ avec la loi $\chi^2(1)$ est testée grâce au test de Kolmogorov-Smirnov. Les tableaux 3.4 montrent les valeurs des statistiques W de Shapiro-Wilk et D de Kolmogorov-Smirnov et les p -valeurs correspondantes. Les deux hypothèses sont acceptées avec un niveau de confiance de 99% puisque les p -valeurs sont plus grandes que 0.01.

De manière similaire, la figure 3.5 montre la convergence ponctuelle de l’estimateur \hat{H}_T vers $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ (en haut) pour un processus à deux états de générateur \mathbf{A}_0 (à gauche) puis \mathbf{A}_1 (à droite), ainsi que la fonction de répartition empirique de $\sqrt{T}(\hat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}))/\hat{\Sigma}_{H,c,1}$ comparée à la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite, pour un processus de générateur \mathbf{A}_0 (en bas, à gauche), puis la fonction de répartition empirique de $2T(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \hat{H}_T)$ comparée à la fonction de répartition de la loi $\chi^2(2)$ (en bas, à droite). Les estimateurs du taux d’entropie et leur fonction de répartition empirique ont été calculés selon la même démarche que les estimateurs de l’entropie de la loi stationnaire.

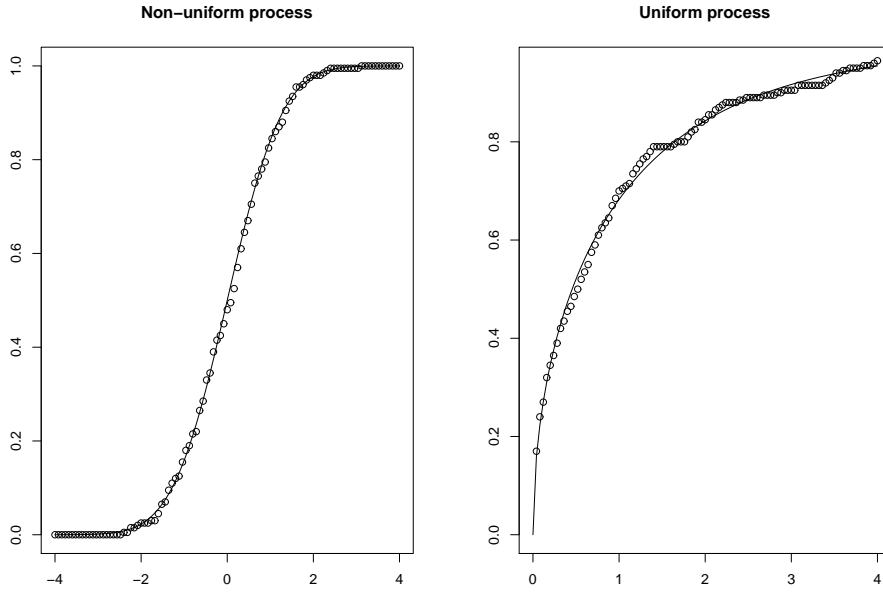


FIG. 3.3 – Fonctions de répartition empiriques de $\sqrt{T}(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)/\hat{\Sigma}_{S,c,1}$ versus $\mathcal{N}(0,1)$ (à gauche) et de $2T(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)$ versus $\chi^2(1)$ (à droite).

Shapiro-Wilk normality test		Kolmogorov-Smirnov test	
W-stat	0.992	D-stat	0.0406
<i>p</i> -value	0.3458	<i>p</i> -value	0.8966

FIG. 3.4 – Test de normalité de Shapiro-Wilk pour la loi empirique de $\sqrt{T}(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)/\hat{\Sigma}_{S,c,1}$ (à gauche) et test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov de la loi empirique de $2T(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)$ à la loi $\chi^2(1)$ (à droite), pour $T = 1000$.

3.4.3 Plusieurs trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation de loi exponentielle

Les temps de censure $T_l, l \in \{1, \dots, k\}$ sont de loi exponentielle. Pour montrer les bonnes propriétés de l'estimateur pour un grand nombre de trajectoires, un temps d'observation réduit a été choisi; précisément, $\mathbb{E}(T_l) = 100, l \in \{1, \dots, k\}$ et $k = 1000$. Afin de simuler k trajectoires indépendantes d'un processus de Markov, on a simulé la réalisation de k variables indépendantes $T_l, l \in \{1, \dots, 1000\}$, de loi exponentielle $E(1/100)$ puis pour chaque trajectoire, on a simulé la chaîne immergée et les temps de séjour correspondants jusqu'à l'instant T_l .

La figure 3.6 montre la convergence ponctuelle de l'estimateur par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire du processus. Les 100 points de la figure ont été obtenus en calculant \hat{S}_k^c à partir de $k = 1000$ trajectoires indépendantes d'un processus de Markov (à 2 états en haut de la figure, 3 en bas) par pas de 10 trajectoires. Pour le côté gauche de la figure 3.6, le générateur n'est pas uniforme et est donné par (3.39), tandis que pour le côté droit, le générateur est uniforme, donné par (3.40).

La figure 3.7 (gauche) montre la fonction de répartition empirique de $\sqrt{k}(\hat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))/\hat{\Sigma}_{S,c,m}$ comparée à la fonction de répartition de la loi normale. La figure 3.7 (droite) montre la fonction de répartition empirique de $2k(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_k^d)$ comparée à la fonction de répartition de la loi $\chi^2(1)$.

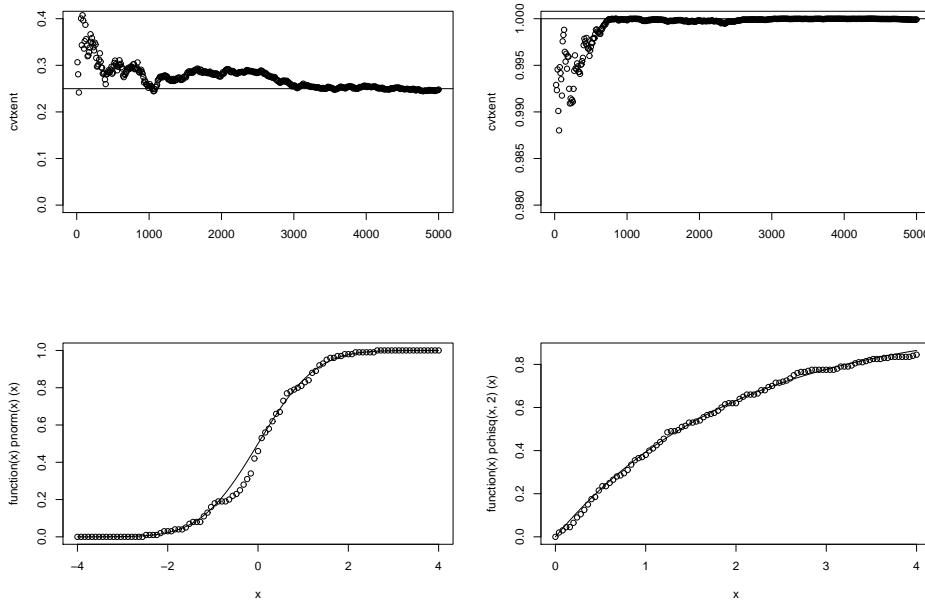


FIG. 3.5 – Convergence ponctuelle de l'estimateur par plug-in \widehat{H}_T pour des processus markoviens à deux états de générateur non uniforme (en haut, à gauche) et uniforme (en haut, à droite), et fonctions de répartition empiriques de $\sqrt{T}(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T) / \widehat{\Sigma}_{H,c,1}$ versus $\mathcal{N}(0, 1)$ (en bas, à gauche) et de $2T(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T)$ versus $\chi^2(2)$ (en bas, à droite).

Les fonctions de répartition empiriques sont obtenues à partir de 100 fois 100 trajectoires indépendantes censurées par des variables indépendantes $(T_i)_{i \in \{1, \dots, 100\}}$ de même loi exponentielle de paramètre $1/100$, de générateurs \mathbf{A}_0 et \mathbf{A}_1 .

L'adéquation de la loi empirique de $\sqrt{k}(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c) / \widehat{\Sigma}_{S,c,m}$ à la loi normale centrée réduite est testée grâce au test de normalité de Shapiro-Wilk. De même, l'adéquation de la loi empirique de $2k(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c)$ à la loi $\chi^2(1)$ est testée grâce au test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov. Les tableaux 3.8 montrent les valeurs des statistiques W de Shapiro-Wilk (à gauche) et D de Kolmogorov-Smirnov (à droite) et les p -valeurs correspondantes. Les deux hypothèses sont acceptées avec un niveau de confiance de 99% puisque les p -valeurs sont plus grandes que 0.01.

Des graphiques similaires peuvent être obtenus pour la convergence de l'estimateur du taux d'entropie.

3.4.4 Observations discrètes

Afin de simuler des observations discrètes (en ηn , $n \in \mathbb{N}^*$) d'un processus de Markov de générateur \mathbf{A}_0 donné par (3.39), la chaîne de Markov de matrice de transition $\exp(\eta \mathbf{A}_0)$ a été simulée. Selon Bladt et Sørensen [11], η doit être petit ; pour de grandes valeurs de η (plus grandes que $\max \mathbf{A}(i, j)$, pour $j \neq i$), la matrice $\mathbf{P}_0 = \exp(\eta \mathbf{A}_0)$ tend à être dégénérée et l'estimation de \mathbf{A}_0 devient impossible. On prend $\eta = 1/10$.

La figure 3.9 montre la convergence ponctuelle de l'estimateur par plug-in \widehat{S}_n^d de l'entropie de la loi stationnaire du processus. L'estimateur est calculé à partir des $n = 2000$ premières coordonnées de la chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}_0 = \exp(\eta \mathbf{A}_0)$ par pas de 20 coordonnées.

La figure 3.10 montre la fonction de répartition empirique de $\sqrt{n}(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P)) / \widehat{\Sigma}_{S,d}$ comparée à la loi normale centrée réduite. La fonction de répartition empirique est obtenue à partir

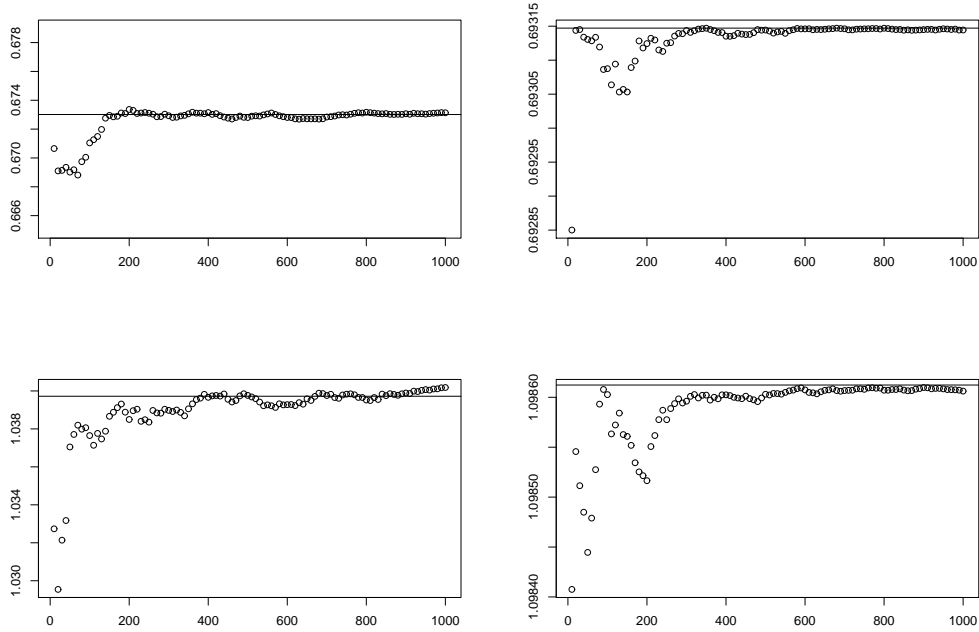


FIG. 3.6 – Convergence ponctuelle de l'estimateur par plug-in de \widehat{S}_k^c pour des processus à deux états (en haut) et 3 états (en bas) de générateur non uniforme (à gauche) et uniforme (à droite).

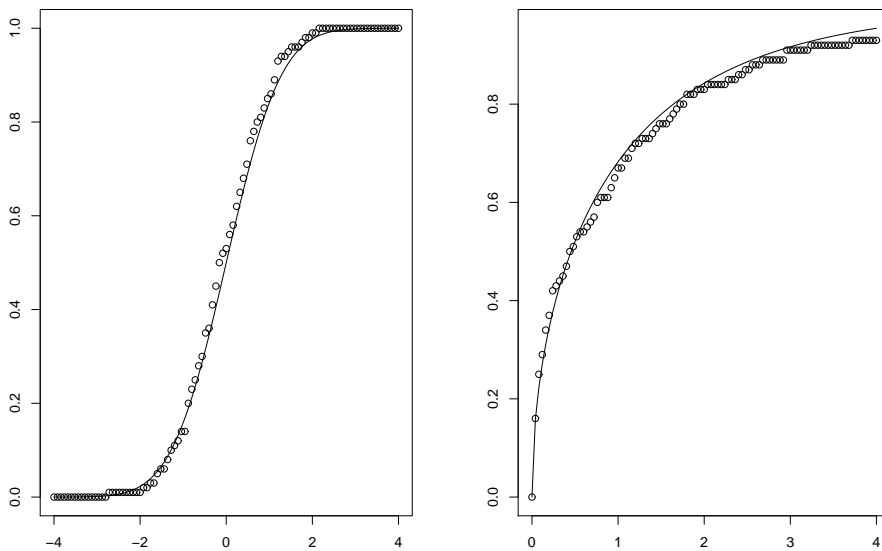


FIG. 3.7 – Fonctions de répartition empiriques de $\sqrt{k}(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P))/\widehat{\Sigma}_{S,c,m}$ versus $\mathcal{N}(0,1)$ (à gauche) et $2k(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c)$ versus $\chi^2(1)$ (à droite).

3.4. SIMULATIONS

Shapiro-Wilk normality test		Kolmogorov-Smirnov test	
W-stat	0.9924	D-stat	0.0657
p -value	0.8483	p -value	0.7818

FIG. 3.8 – Test de normalité de Shapiro-Wilk pour la loi empirique de $\sqrt{k}(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c)/\widehat{\Sigma}_{S,c,m}$ (à gauche) et test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov de la loi empirique de $2k(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c)$ à la loi $\chi^2(1)$ (à droite), pour $k = 100$.

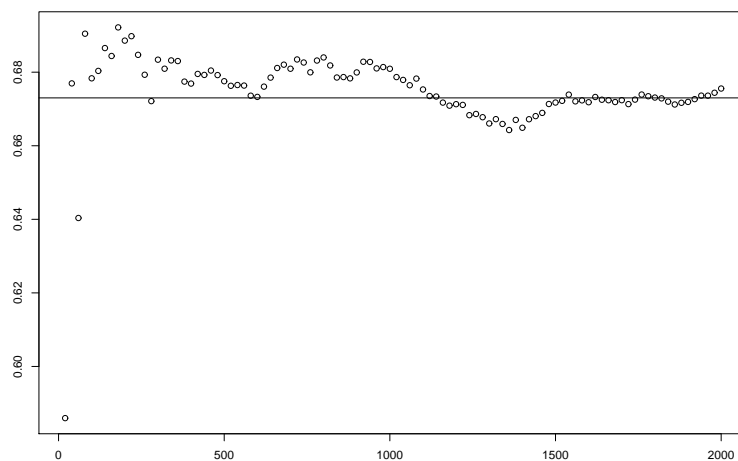


FIG. 3.9 – Convergence ponctuelle de \widehat{S}_n^d vers l'entropie de la loi stationnaire $\mathbb{S}(P)$ d'un processus de Markov à deux états.

de 200 trajectoires indépendantes de taille $n = 1000$ d'une chaîne de Markov de matrice de transition \mathbf{P}_0 .

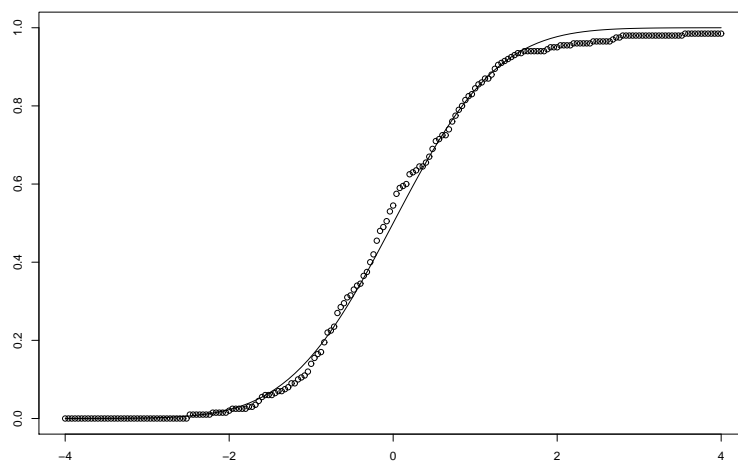


FIG. 3.10 – Fonction de répartition de $\sqrt{n}(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)/\widehat{\Sigma}_{S,d}$ versus $\mathcal{N}(0, 1)$.

L'adéquation de la loi empirique de $\sqrt{n}(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)/\widehat{\Sigma}_{S,d}$ à la loi normale centrée réduite est testée grâce au test de normalité de Shapiro-Wilk. Le tableau 3.11 montre la valeur de la statistique W de Shapiro-Wilk et la p -valeur correspondante. L'hypothèse de normalité est acceptée avec un niveau de confiance de 99% puisque la p -valeur est plus grande que 0.01.

Shapiro-Wilk normality test	
W-stat	0.9901
p -value	0.1836

FIG. 3.11 – Test de normalité de Shapiro-Wilk pour la loi empirique de $\sqrt{n}(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d)/\widehat{\Sigma}_{S,d}$, pour $n = 1000$.

Des graphiques similaires peuvent être obtenus pour la convergence de l'estimateur du taux d'entropie.

Chapitre 4

Application aux files d'attente markoviennes

Tout système prestataire de service nécessite la mise en attente organisée des clients. La gestion probabiliste de ces files d'attente est un enjeu capital pour le bon fonctionnement de ces systèmes. Lorsque les temps d'arrivée et de service des clients suivent des lois exponentielles, la file d'attente peut être modélisée par un processus de naissance et de mort. La loi stationnaire du processus est alors la loi du nombre de clients lorsque le système a atteint son équilibre. Étudier l'entropie de cette loi, ou le taux d'entropie du processus permet le recours aux méthodes associées, telles que la méthode du maximum d'entropie. Dès lors que la file d'attente est observée, il est nécessaire d'estimer son entropie. Dans ce chapitre, les résultats obtenus au chapitre 3 sont appliqués au cas particulier de l'estimation de l'entropie de la loi du nombre de clients et du taux d'entropie des files d'attente de capacité d'accueil finie, modélisées par des processus de naissance et de mort. Des résultats similaires sont établis pour des files d'attente de capacité d'accueil infinie. La relative simplicité des générateurs des processus de naissance et de mort permet de simplifier l'expression des estimateurs ainsi que leur loi asymptotique, et d'explicitier certains résultats du chapitre 3, notamment la condition d'annulation de la dérivée de la fonction S donnant l'entropie de la loi stationnaire en fonction du générateur \mathbf{A} , ainsi que l'unicité du logarithme de la matrice $\exp(\eta\mathbf{A})$. Toutefois, même pour ces générateurs, certains calculs restent inextricables ; c'est le cas de la recherche d'une condition à l'annulation de la dérivée de la fonction H exprimant le taux d'entropie du processus en fonction du générateur.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la partie 4.1, on présente plusieurs types de files d'attente classiques, modélisées par des processus de naissance et de mort. Leur loi stationnaire est calculée ainsi que, lorsque cela est possible, le temps d'attente moyen d'un client lorsque le système a atteint l'équilibre. Dans la partie 4.2, on montre que l'entropie de la loi stationnaire et le taux d'entropie sont des fonctions explicites des intensités de départ et d'arrivée des clients. Dans la partie 4.3, on applique les résultats obtenus au chapitre 3 pour estimer l'entropie de la loi du nombre de clients dans une file de capacité finie et le taux d'entropie de la file, selon les trois situations d'observation discutées au chapitre 3. On établit également les bonnes propriétés asymptotiques d'estimateurs paramétriques de l'entropie de la loi stationnaire de files d'attente de capacité d'accueil infinie, lorsque la file est observée continûment au cours d'un long intervalle de temps, ou en des temps discrets.

4.1 Modélisation d'une file d'attente par un processus de naissance et de mort

« Tous nos opérateurs sont momentanément occupés. Votre temps d'attente est estimé à ... ». Cette annonce coutumière des services d'assistance téléphonique fait probablement raisonner en

vous le souvenir aigre d'une attente interminable passée à pester contre l'incompétence du dit service. Le prestataire de service ayant tout intérêt à préserver votre bonne humeur, la gestion des clients en attente est cruciale. Elle a le double objectif contradictoire de contenter les clients, tout en minimisant les ressources mises à disposition. Pour ce faire, le prestataire a besoin d'indicateurs numériques tels que la proportion du temps pendant lequel le standard est saturé, ou au contraire inoccupé, mais aussi le temps moyen d'attente des clients, le nombre moyen de clients en attente, voire les lois de probabilité associées...

Ces indicateurs numériques ne peuvent être calculés qu'après sélection d'un modèle mathématique de la file d'attente. Le premier modèle probabiliste de file d'attente est dû à A.K. Erlang (voir Erlang [27]), ingénieur Danois qui avait pour tâche de gérer le réseau téléphonique de Copenhague durant les années 1920 en vue de l'adapter à un marché de masse. Il suppose que les clients arrivent indépendamment les uns des autres, le nombre de clients arrivant au cours d'une unité de temps suivant une loi de Poisson. Les clients sont pris en charge par m serveurs travaillant en parallèle. Le nombre moyen de clients traités par unité de temps est proportionnel au nombre de clients dans le système. Ce modèle est présenté dans la partie 4.1.2. Erlang [27] détermine, pour ce modèle, la proportion du temps pendant laquelle le réseau est saturé.

D'autres situations conduisent à l'apparition d'une file d'attente : service à un guichet ou à une caisse, mais aussi congestions du réseau automobile ou encore programmes informatiques en attente de leur traitement par un processeur... Un vocabulaire commun à toutes ces situations désigne par client, le demandeur de service et par serveur, le prestataire. La file d'attente désigne l'ensemble des clients en attente ou en cours de service.

La pluralité des situations rencontrées a donné lieu au développement de nombreux modèles. Une nomenclature, due à Kendall [42], associe un sextuplet (a, b, m, s, C, d) à chaque modèle, souvent noté $a/b/m/s/C/d$, dont la signification est la suivante.

- a désigne la nature des lois des instants d'arrivée des clients. Ainsi, M désigne des instants d'arrivée de loi exponentielle, tandis que D désigne la loi uniforme et G l'absence d'information sur la loi des instants d'arrivée.

- b désigne la nature de la loi des temps de service au(x) serveur(s). On utilise les mêmes notations que précédemment.

- m désigne le nombre de serveurs.

- s désigne la capacité d'accueil de la file (nombre de serveurs plus nombre de places en attente).

- C désigne l'effectif total des clients susceptibles de se présenter dans le système.

- d désigne la discipline de service ("PAPS" pour premier arrivé, premier servi, "DAPS" pour dernier arrivé, premier servi, ...).

La Figure 4.1 est une illustration schématique du fonctionnement d'une file d'attente.

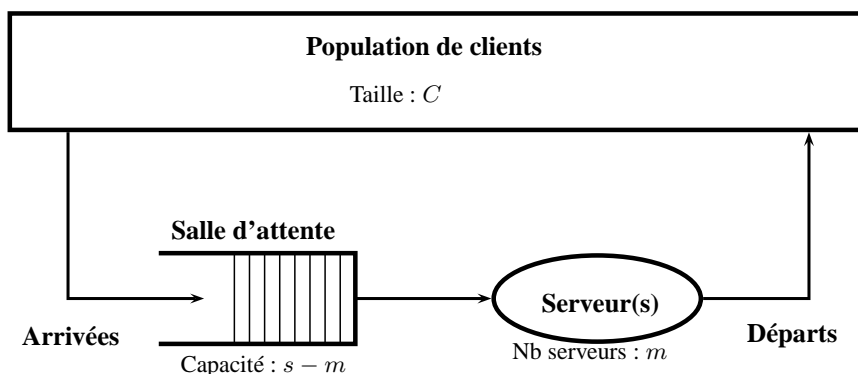


FIG. 4.1 – Représentation schématique du fonctionnement d'une file d'attente.

Les trois derniers symboles sont omis dans le cas où la capacité d'accueil et l'effectif total des clients sont infinis, et la discipline de service est sans incidence sur les indicateurs étudiés. Ainsi,

une file de type $M/M/1$ désigne une file d'attente à un unique serveur, dont les instants d'arrivée et les temps de service sont de loi exponentielle, tandis qu'une file de type $M/G/1/s$ désigne une file d'attente à un unique serveur, de capacité d'accueil s , et dont les instants d'arrivées sont de loi exponentielle, les temps de service, de loi quelconque.

Les files d'attente de type M/M ont une importance particulière. D'un point de vue historique, Erlang initie leur étude. D'un point de vue d'entropie, la loi exponentielle est la loi continue P qui maximise l'entropie $\mathbb{S}(P)$ sous la contrainte $\mathbb{E}(P) = 1/\lambda$; voir Guiasu [38].

Les parties 4.1.1 et 4.1.2 présentent plusieurs files d'attente dont les instants d'arrivée et les temps de service suivent tous des lois exponentielles. Par contre, elles diffèrent de par le nombre de serveurs, la capacité d'accueil ou la taille de la population. Les files de type $M/M/1$, $M/M/m$ et $M/M/\infty$, pour lesquelles la capacité d'accueil est illimitée, sont présentées dans la partie 4.1.1. Les files d'attente $M/M/1/s$, $M/M/1/s/C$, $M/M/m/s$ et $M/M/m/s/C$, de capacité d'accueil limitée sont présentées dans la partie 4.1.2. Pour toutes ces files, on établit la loi du nombre de clients dans le système, lorsque celui-ci a atteint l'équilibre, ainsi que le temps d'attente moyen d'un client entrant dans le système, grâce à une description adéquate des files d'attente en termes de processus de naissance et de mort.

4.1.1 Files d'attente de capacité d'accueil infinie

Les processus de naissance et de mort constituent un outil performant de modélisation et d'analyse des files d'attente dont les instants d'arrivée et les temps de service suivent des lois exponentielles.

Supposons que le nombre de clients dans le système au cours du temps soit un processus de naissance et de mort $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ homogène à valeurs dans \mathbb{N} . Précisément, on suppose que la loi du nombre de clients dans la file à un instant $t + h$, conditionnellement au passé jusqu'à l'instant t , ne dépend que du nombre de clients à l'instant t . De plus, les transitions du nombre i de clients à l'instant t au nombre j à l'instant $t + h$ vérifient

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & \text{si } j = i + 1, \\ \mu_i h + o(h) & \text{si } j = i - 1, \\ 1 - \lambda_i h - \mu_i h & \text{si } j = i, \\ o(h) & \text{sinon,} \end{cases} \quad t \geq 0, h > 0, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Les paramètres λ_i et μ_i sont respectivement appelés intensités d'arrivée et de départ conditionnellement au nombre i de clients dans la file. On conviendra que $\mu_0 = 0$ (on ne sert pas de client si la file d'attente est vide!). La proposition 1.1 du chapitre 1 établit que le temps de passage de l'état i à l'état $i + 1$ (respectivement $i - 1$) suit une loi exponentielle de paramètre λ_i (respectivement μ_i). Une file d'attente modélisée par un processus de naissance et de mort est donc une file de type M/M .

La Figure 4.2 représente sous la forme d'un graphe l'évolution du nombre de clients dans le système. Les arrêtes représentent l'intensité moyenne de passage d'un état à un autre.

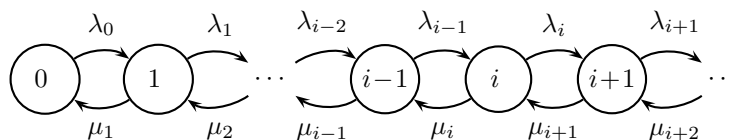


FIG. 4.2 – Graphe associé à une file d'attente de capacité infinie.

L'exemple 1.1 du chapitre 1 établit que si

$$\lambda_i < \mu_{i+1}, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

alors le processus est ergodique et admet une loi stationnaire unique, qui est la loi du nombre de clients dans la file à chaque instant, quand le système a atteint l'équilibre. On notera P la

loi stationnaire du processus \mathbf{X} ou de la file. Dans la suite, on supposera que la condition 4.2 est vérifiée. La loi stationnaire P s'exprime explicitement en tant que fonction Π des intensités d'arrivée et de départ :

$$P(i) = \Pi_i(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = P(0) \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, \quad i \in \mathbb{N}^*, \quad (4.3)$$

$$P(0) = \Pi_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right)^{-1}, \quad (4.4)$$

où $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ désigne la suite $((\lambda_i, \mu_i))_{i \in \mathbb{N}}$; voir Asmussen [5] ou Breuer et Baum [12].

Notons que les intensités d'arrivée et de départ des files présentées dans les paragraphes suivants sont de la forme

$$\lambda_i = \lambda l_i, \quad \text{et} \quad \mu_{i+1} = \mu m_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N},$$

où l_i, m_{i+1} dépendent explicitement du nombre de serveurs, et λ, μ , sont deux paramètres strictement positifs. Ainsi, pour ces files, la loi stationnaire s'exprime comme une fonction Π_{par} de deux paramètres. Son expression est explicitée dans les paragraphes suivants. Notons que la notation Π_{par} est adoptée pour différencier l'expression de la loi stationnaire en tant que fonction des paramètres λ et μ , de celle en fonction du générateur, donnée par Π .

Disposer d'une expression explicite de la loi du nombre de clients dans le système à l'équilibre permet de calculer le nombre moyen de clients $\mathbb{E}_P(X_t)$ dans le système à l'équilibre. Les modèles présentés dans les paragraphes suivants supposent que l'intensité d'arrivée des clients est indépendante du nombre de clients dans le système, soit $\lambda_i = \lambda$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Le temps d'attente moyen $\mathbb{E}_P(T_1)$ d'un client est alors donné par la formule de Little,

$$\mathbb{E}_P(T_1) = \frac{\mathbb{E}_P(X_T)}{\lambda}.$$

Quoique largement répandue dans la littérature, la démonstration de la formule de Little étant rarement rigoureusement menée, on en propose une démonstration complète.

Démonstration : Soit $T > 0$. D'après le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}_P \left(\int_0^T X_t dt \right) = \int_0^T \mathbb{E}(X_t) dt = T \mathbb{E}_P(X_t), \quad (4.5)$$

avec $\mathbb{E}_P(X_t)$ indépendant de t à l'équilibre. Par ailleurs, le temps total passé par les clients dans le système jusqu'à l'instant T est la somme sur tous les clients entrés dans le système (ceux présents à l'instant initial comptés), des temps que chacun d'eux y a passé, soit

$$\int_0^T X_t dt = \sum_{x=1}^{N_T} T_x,$$

où N_T est le nombre de clients étant entrés dans le système auquel on ajoute le nombre de clients présents à l'origine et T_x est le temps passé par le $x^{\text{ème}}$ client dans le système. On pourra se reporter à la figure 4.3 pour une justification graphique de cette égalité. Le système étant supposé à l'équilibre, les temps d'attente des clients sont équidistribués et indépendants du nombre de clients entrés dans le système.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left(\int_0^T X_t dt \right) &= \mathbb{E}_P \left(\mathbb{E} \left(\sum_{x=1}^{N_T} T_x \mid N_T \right) \right) \\ &= \mathbb{E}_P(N_T \mathbb{E}_P(T_1)) \\ &= \mathbb{E}_P(T_1) \mathbb{E}_P(N_T), \end{aligned} \quad (4.6)$$

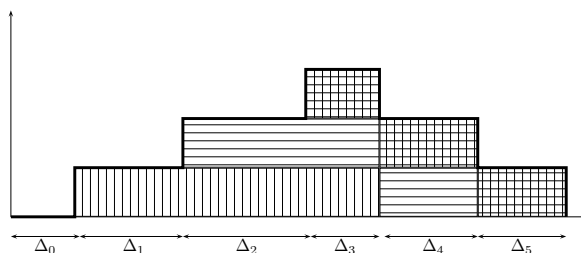


FIG. 4.3 – Justification graphique de l'égalité $\int_0^T X_t dt = \sum_{x=1}^{N_T} T_x$: l'aire sous la courbe (délimitée par le trait épais) est égale à la somme des aires hachurées (temps d'attente de chaque client).

où T_1 représente le temps d'attente d'un client entrant dans le système à l'équilibre. Les égalités (4.5) et (4.6) impliquent

$$\mathbb{E}_P(T_1) = \mathbb{E}_P(X_t) \frac{T}{\mathbb{E}_P(N_T)}, \quad T > 0. \quad (4.7)$$

Par ailleurs, le nombre N_T/T de clients arrivant par unité de temps converge presque sûrement et en espérance vers λ (voir la proposition 1.1 du chapitre 1, ainsi que la partie 1.1.4). Finalement, $\mathbb{E}_P(T_1) = \mathbb{E}_P(X_t)/\lambda$. \square

Remarques 4.1.

1. Par ergodicité du processus, le temps d'attente moyen d'un client entrant dans le système à l'état d'équilibre ne dépend pas de la discipline de service. On pourrait montrer également que la file ne doit pas nécessairement avoir atteint l'équilibre. Toutefois, si la loi initiale est la loi stationnaire et la discipline de service est PAPS, la démonstration de la formule de Little se trouve considérablement allégée (voir le paragraphe 4.1.1).
2. Les deux arguments centraux de la démonstration de la formule de Little sont l'égalité $T\mathbb{E}_P(X_t) = \mathbb{E}_P(T_1)\mathbb{E}_P(N_T)$, où N_T est le nombre de clients étant entrés dans le système avant l'instant T , et l'intensité constante des arrivées, qui assure, en vertu de l'ergodicité, qu'en moyenne N_T/T vaut approximativement λ . Lorsque la file est de capacité finie ou que la population de clients est finie, cette hypothèse n'est plus vérifiée et la formule de Little ne s'applique plus (voir la partie 4.1.2).

Files d'attente de type $M/M/1$

Par définition d'une file de type $M/M/1$, le système dispose d'un unique serveur d'intensité de départ $\mu > 0$ indépendante du nombre de clients dans la file. L'intensité d'arrivée est constante, c'est-à-dire que $\lambda_i = \lambda > 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Une file d'attente $M/M/1$ est ergodique et possède une loi stationnaire géométrique décalée P dès lors que $\mu > \lambda$. Précisément,

$$P(i) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i.$$

La probabilité pour un client de trouver le serveur inoccupé à son arrivée est $1 - \lambda/\mu$, le nombre moyen de clients dans le serveur est $\lambda/(\mu - \lambda)$ et le temps d'attente moyen d'un client lorsque le système est à l'équilibre est $1/(\mu - \lambda)$.

Remarque 4.1. Si la discipline de service est PAPS, le temps d'attente moyen d'un client rejoignant la file à l'état d'équilibre, sachant que le nombre de clients présents dans le système à son arrivée est $i \in \mathbb{N}$, est $(i+1)/\mu$. En effet, un client trouvant i clients dans la file à son arrivée

sera servi après qu'ils aient tous été servis, soit après un temps moyen i/μ . À cela s'ajoute le temps de service propre au client, qui est en moyenne $1/\mu$. Au final, $\mathbb{E}_P(T_1|X_0 = i) = (i+1)/\mu$. La formule de Little s'en déduit facilement. En effet,

$$\mathbb{E}_P(T_1) = \mathbb{E}_P(\mathbb{E}(T_1|X_0)) = \frac{\mathbb{E}_P(X_0) + 1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda} - 1 \right) = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Files d'attente multi-serveurs de type $M/M/m$

Une file d'attente de type $M/M/m$ dispose de m serveurs. Chaque serveur travaille avec la même intensité $\mu > 0$. Un client est servi par un unique serveur dès lors qu'il s'en trouve un de libre. L'intensité de départ du système augmente alors linéairement avec le nombre de clients dans le service, jusqu'à ce que les m serveurs soient occupés. Ainsi, $\mu_i = \min(i\mu, m\mu)$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. L'intensité d'arrivée est constante, soit $\lambda_i = \lambda > 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Une file d'attente $M/M/m$ est ergodique si et seulement si $m\mu > \lambda$. Sa loi stationnaire P est alors donnée par

$$P(i) = \begin{cases} \frac{\rho^i}{i!} P(0) & \text{si } i \leq m, \\ \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i P(0) & \text{si } i > m, \end{cases}$$

avec

$$P(0) = \left(\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i \right)^{-1},$$

et $\rho = \lambda/\mu$. On en déduit immédiatement que le nombre moyen de clients dans le serveur est

$$\mathbb{E}_P(X_t) = \rho + P(0) \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)},$$

et le temps d'attente moyen d'un client est

$$\mathbb{E}_P(X_t)/\lambda = \frac{1}{\mu} + P(0) \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(\lambda m - \lambda^2/\mu)}.$$

Files d'attente multi-serveurs de type $M/M/\infty$

Une file d'attente de type $M/M/\infty$ dispose d'une infinité de serveurs. Chaque serveur travaille avec la même intensité $\mu > 0$. Un client est servi par un unique serveur. L'intensité de départ du système augmente linéairement avec le nombre de clients dans le service. Ainsi, $\mu_i = i\mu$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. L'intensité d'arrivée est constante, soit $\lambda_i = \lambda > 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Une file d'attente $M/M/\infty$ est ergodique et possède une loi stationnaire P de Poisson de paramètre λ/μ ; précisément,

$$P(i) = \exp(-\rho) \frac{\rho^i}{i!}, i \in \mathbb{N},$$

avec $\rho = \lambda/\mu$. Le nombre moyen de clients dans le système à l'équilibre est alors

$$\mathbb{E}_P(X_t) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Le temps d'attente moyen d'un client est

$$\mathbb{E}_P(X_t)/\lambda = \frac{1}{\mu}.$$

4.1.2 Files d'attente de capacité d'accueil finie

De manière analogue à ce qui a été fait dans la partie 4.1.1, on peut modéliser le nombre de clients dans une file de capacité d'accueil finie, dont les lois des instants d'arrivée et de départ sont exponentielles, par un processus de naissance et de mort $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans l'ensemble fini $E = \{0, \dots, s\}$. Le générateur d'un tel processus est une matrice tridiagonale

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \mu_s & -\mu_s \end{pmatrix},$$

les coefficients λ_i et μ_{i+1} , pour $i \in \{0, \dots, s-1\}$ étant respectivement les intensités d'arrivée et de départ.

La figure 4.4 représente sous la forme d'un graphe l'évolution du nombre de clients dans le système. Les arrêtes représentent l'intensité moyenne de passage d'un état dans un autre.

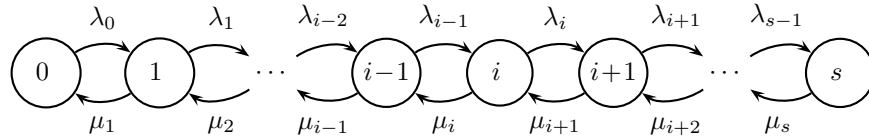


FIG. 4.4 – Graphe associé à une file d'attente de capacité finie.

Un tel processus est ergodique ; sa loi stationnaire est une fonction explicite des intensités d'arrivée et de départ (voir l'équation (1.4), page 26, ainsi que Girardin et Sesboüé [36]), soit

$$P(i) = \Pi_i(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = P(0) \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, \quad i \in \{1, \dots, s\}, \quad (4.8)$$

$$P(0) = \Pi_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \left(1 + \sum_{k=1}^s \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right)^{-1}, \quad (4.9)$$

où $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = ((\lambda_i, \mu_{i+1}))_{i \in \{0, \dots, s-1\}}$ désigne la suite des intensités d'arrivée et de départ. La probabilité pour un client de trouver le serveur libre à son arrivée, lorsque le système a atteint son état d'équilibre est $P(0)$. La probabilité pour le système d'être saturé, et par conséquent de refuser certains clients, est $P(s) = P(0) \prod_{k=0}^{s-1} \lambda_k / \mu_{k+1}$.

Les paragraphes suivants présentent différents exemples de file d'attente de type $M/M/./s$ pour lesquelles la loi du nombre de clients à l'équilibre est (plus) explicite. Comme pour les files de capacité d'accueil infinie présentées plus haut, les intensités d'arrivée et de service des files de capacité finie s'expriment en fonction de deux paramètres λ et μ . Précisément,

$$\lambda_i = \lambda l_i, \quad \text{et} \quad \mu_{i+1} = \mu m_{i+1}, \quad i \in \{0, \dots, s-1\},$$

où l_i, m_{i+1} dépendent explicitement du nombre de serveurs, de la capacité d'accueil et de la taille de la population, et λ, μ sont deux paramètres strictement positifs. La loi stationnaire de ces files est donc une fonction Π_{par} de ces deux paramètres.

Files d'attente de type $M/M/1/s$

Une file de type $M/M/1/s$ dispose d'un unique serveur. Les intensités d'arrivée et de départ sont indépendantes du nombre de clients dans la file, soit $\lambda_i = \lambda > 0$ et $\mu_{i+1} = \mu > 0$, pour tout $i \in \{0, \dots, s-1\}$.

Une file d'attente $M/M/1/s$ est ergodique et possède une loi stationnaire géométrique tronquée, P . Précisément,

$$P(i) = \begin{cases} P(0)\rho^i & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{s+1} & \text{si } \lambda = \mu, \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, s\}, \quad (4.10)$$

$$P(0) = \begin{cases} (1 + \sum_{k=1}^s \rho^k)^{-1} & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{s+1} & \text{si } \lambda = \mu, \end{cases}$$

avec $\rho = \lambda/\mu$. Le nombre moyen de clients dans le serveur est

$$\mathbb{E}_P(X_t) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\rho)(1-\rho^{s+1})} \rho(1 - \rho^s(s+1) + \rho^{s+1}s) & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \frac{s+1}{2} & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Files d'attente de type $M/M/1/s/C$

Une file d'attente de type $M/M/1/s/C$ dispose d'un unique serveur dont l'intensité de service est constante égale à $\mu > 0$. La population des clients est limitée à C individus avec $C \geq s$ (le nombre de clients X_t dans le système ne dépasse jamais le nombre d'individus de la population!). L'intensité d'arrivée décroît linéairement avec le nombre de clients dans la file, soit $\lambda_i = (C-i)\lambda$, avec $\lambda > 0$.

Une file d'attente de type $M/M/1/s/C$ est ergodique. La loi du nombre de clients dans le système à l'état d'équilibre est

$$P(i) = P(0) \frac{C!}{(C-i)!} \rho^i, \quad i \in \{1, \dots, s\}, \quad (4.11)$$

$$P(0) = \left(\sum_{k=0}^s \frac{C!}{(C-k)!} \rho^k \right)^{-1}, \quad (4.12)$$

avec $\rho = \lambda/\mu$. Le nombre moyen de clients dans le serveur est

$$\mathbb{E}_P(X_t) = P(0)C! \sum_{k=1}^s \frac{k}{(C-k)!} \rho^k.$$

Files d'attente multi-serveurs de type $M/M/m/s$

Une file d'attente de type $M/M/m/s$ dispose de m serveurs. Chaque serveur travaille avec la même intensité $\mu > 0$. Un client est servi par un unique serveur dès lors qu'il s'en trouve un de libre. L'intensité de départ du système augmente alors linéairement avec le nombre de clients dans le service, jusqu'à ce que les m serveurs soient occupés. Ainsi, $\mu_i = \min(i\mu, m\mu)$, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$. L'intensité d'arrivée est constante, soit $\lambda_i = \lambda > 0$, pour tout $i \in \{0, \dots, s-1\}$.

La loi du nombre de clients dans le système à l'état d'équilibre est

$$P(i) = \begin{cases} \frac{\rho^i}{i!} P(0) & \text{si } i \leq m, \\ \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i P(0) & \text{si } i > m, \end{cases}$$

avec

$$P(0) = \left(\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{i=m+1}^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^i \right)^{-1},$$

et $\rho = \lambda/\mu$.

Ces files d'attente interviennent notamment en fiabilité, sous le nom de système de réparation de Palm. Elles décrivent le temps d'entretien d'un parc de s machines qui tombent en panne indépendamment les unes des autres selon une loi exponentielle, et sont prises en charge par l'un des m techniciens. Voir Asmussen [5] et Baum et Breuer [12].

Erlang [27] initie l'étude probabiliste des files d'attente par les files de type $M/M/s/s$ (qui ne portaient pas ce nom à l'époque, cette dénomination faisant suite à la classification de Kendall [42]). La loi stationnaire de ces files est une loi de Poisson tronquée ; explicitement

$$P(i) = P(0) \frac{1}{i!} \rho^i, i \in \{1, \dots, s\},$$

avec

$$P(0) = \left(\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \rho^i \right)^{-1}.$$

Pour une telle file, le temps d'attente moyen d'un client peut se calculer directement en remarquant qu'un client qui n'est pas perdu, est directement pris en charge par le serveur. Son temps d'attente moyen est donc le temps moyen de service, soit $1/\mu$.

Files d'attente multi-serveurs de type $M/M/m/s/C$

Une file d'attente de type $M/M/m/s/C$ dispose de m serveurs. Chaque serveur travaille avec la même intensité $\mu > 0$. Un client est servi par un unique serveur dès lors qu'il s'en trouve un de libre. L'intensité de départ du système augmente alors linéairement avec le nombre de clients dans le service, jusqu'à ce que les m serveurs soient occupés. Ainsi, $\mu_i = \min(i\mu, m\mu)$, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$. La population des clients est limitée à C individus avec $C \geq s$. L'intensité d'arrivée décroît linéairement avec le nombre de clients dans la file, soit $\lambda_i = (C - i)\lambda$, avec $\lambda > 0$.

Ces files d'attentes ont été introduites par Engset [26] dans le cadre de l'étude de réseaux téléphoniques, le modèle initial de Erlang n'étant plus adéquat pour de petites populations d'utilisateurs.

Si $m < s$, alors la loi du nombre de clients dans le système à l'état d'équilibre est

$$P(i) = \begin{cases} \binom{C}{i} \rho^i P(0) & \text{si } i \leq m, \\ \frac{m^m}{m!} \left(\frac{C!}{(C-i)!} \frac{\rho}{s} \right)^i P(0) & \text{si } i > m, \end{cases}$$

avec

$$P(0) = \left(\sum_{i=0}^m \binom{C}{i} \rho^i + \frac{m^m}{m!} \sum_{i=m+1}^s \left(\frac{C!}{(C-i)!} \frac{\rho}{s} \right)^i \right)^{-1},$$

et $\rho = \lambda/\mu$. Si $s = m$ alors la loi du nombre de clients dans le système à l'état d'équilibre est

$$P(i) = P(0) \binom{C}{i} \rho^i,$$

avec

$$P(0) = \left(\sum_{i=0}^m \binom{C}{i} \rho^i \right)^{-1}.$$

En particulier, si $C = m$, alors P est une loi binomiale de paramètre de succès $\rho/(1 + \rho)$.

4.2 Entropie et taux d'entropie d'une file d'attente

Dans cette partie, on étudie l'entropie de la loi du nombre de clients dans une file d'attente à l'équilibre, ainsi que le taux d'entropie de la file. En particulier, on montre dans les parties 4.2.1 et 4.2.2 que l'entropie de la loi du nombre de clients et le taux d'entropie des files présentées dans la partie 4.1.1, s'expriment comme des fonctions des paramètres λ et μ caractérisant les intensités d'arrivées et de départ, dont les propriétés variationnelles sont plus explicites que celles des fonctions étudiées au chapitre 3.

4.2.1 Entropie de la loi du nombre de clients dans la file

Les méthodes probabilistes et statistiques liées à l'entropie s'appliquent à l'étude des files d'attente. Zamarlik [64] et [65] propose une étude des files discrètes en terme de puits et de source d'information. Les clients sont des mots formés de symboles d'un alphabet fini, arrivant dans le système à chaque unité de temps, indépendamment les uns des autres. À la fin de chaque unité de temps, si le nombre de clients en attente est supérieur à un seuil, tous les clients sont servis simultanément et instantanément. En considérant l'entropie de la loi des mots à l'entrée et l'entropie de la loi des mots en sortie, Zamarlik montre que le système transmet sans alteration l'information portée par chaque client, mais modifie son groupage. En outre, cela suggère une méthode pour rendre optimale (en terme de débit d'information) la gestion du service des clients en attente.

L'entropie en tant que transformée de Fenchel-Legendre de la log-Laplace d'une loi est également utilisée pour établir des principes de grandes déviations pour le temps d'attente des clients dans différents type de files, voir Turner [61], Duffy *et al.* [24], Peshersky *et al.* [49], Duffield *et al.* [23] et leurs références.

Lorsque les lois des temps d'arrivée et de service sont *a priori* inconnues, la méthode du maximum d'entropie permet de déterminer la loi du nombre de clients dans la file à l'équilibre, sous certaines contraintes, telles que l'espérance et la variance (du nombre de clients) fixées, puis dans certains cas, de déterminer les lois des temps d'arrivée et de service correspondants. El-Affendi et Kouvatso [25] établissent la loi du nombre de clients dans des files de type $M/G/1$ et $G/M/1$ en maximisant leur entropie sous deux contraintes : la probabilité que le serveur soit libre est donnée, ainsi que le nombre moyen de clients (exprimé en fonction de l'espérance et de la variance du temps de service). La loi du temps de service est ensuite déduite de la loi du nombre de clients. Guiasu [38] établit la loi du nombre de clients dans une file de type $G/G/1$ en maximisant son entropie, sous la contrainte que le nombre moyen de clients est fixé. Il montre en outre que si le nombre moyen de clients est $\lambda/(\mu - \lambda)$, où λ et μ sont respectivement les intensités d'arrivée et de départ moyennes, alors la loi du nombre de clients à l'équilibre est la loi géométrique décalée de paramètre λ/μ (précisément celle obtenue à la partie 4.1.1 pour une file de type $M/M/1$ modélisée par un processus de naissance et de mort). Plus récemment, Chuang *et al.* [62] établissent, par maximum d'entropie, la loi du nombre de clients ainsi que la loi du temps d'attente dans une file de type $M/G/1$, dont on ferme le serveur si le nombre de clients en attente est inférieur à un seuil prédéfini.

Notons que si la capacité d'accueil est finie, l'entropie est évidemment finie. Le lemme 4.1 établit que l'entropie des files de type M/M de capacité d'accueil infinie est finie également.

Lemme 4.1. *L'entropie de la loi stationnaire des files d'attente de type $M/M/1$, $M/M/m$ et $M/M/\infty$ est finie.*

Démonstration :

Cas $M/M/1$: La loi stationnaire P d'une file d'attente de type $M/M/1$ ergodique est une loi géométrique de paramètre λ/μ . Son entropie est finie, égale à

$$\mathbb{S}(P) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \log\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Cas $M/M/m$: Soient λ et μ tels que $m\mu > \lambda$. Soit $\rho = \lambda/\mu$. La série de terme général

$$\left(\frac{\rho}{m}\right)^i \log\left(\frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m}\right)^i\right) = \log\left(\frac{m^m}{m!}\right) \left(\frac{\rho}{m}\right)^i + i \left(\frac{\rho}{m}\right)^i \log\left(\frac{\rho}{m}\right), \quad i \in \mathbb{N}^*,$$

est convergente. En effet, les séries de terme général $\left(\frac{\rho}{m}\right)^i$ et $i \left(\frac{\rho}{m}\right)^i$ sont respectivement une série géométrique et sa série dérivée (au facteur ρ/m près), dont la raison ρ/m vérifie $0 < \rho/m < 1$, puisque $\rho = \lambda/\mu$ et $\mu > \lambda/m$. L'entropie de la loi stationnaire P d'une

file d'attente de type $M/M/m$, d'intensités d'arrivée λ et de départ $\mu_i = \min(i, m)\mu$, avec $m\mu > \lambda$, est donc finie, et

$$\mathbb{S}(P) = -\log P(0) - \sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} \log \frac{\rho^i}{i!} - \frac{m^m}{m!} \sum_{i+1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i \log \left(\frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i\right).$$

Cas $M/M/\infty$: La loi stationnaire d'une file d'attente de type $M/M/\infty$ est une loi de Poisson de paramètre λ/μ . Son entropie est donc finie et

$$\mathbb{S}(P) = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \log \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) + \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{\log k!}{k!}.$$

□

On peut donner une expression explicite de l'entropie de la loi stationnaire d'une file en fonction des intensités d'arrivée et de départ. En effet, la loi stationnaire d'une file est une fonction explicite Π_{par} des intensités de départ et d'arrivée (voir équations (4.3) et (4.4)). On en déduit une expression explicite S_{par} de son entropie en fonction des intensités λ et μ relatives à ces files d'attente. Précisément,

$$S_{\text{par}}(\lambda, \mu) = S((l_i \lambda, m_{i+1} \mu)_i) \quad (4.13)$$

$$= \log \left(\sum_{i=0}^s d_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right) \quad (4.14)$$

$$- \left[\sum_{i=0}^s d_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right]^{-1} \sum_{i=0}^s d_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \log \left(d_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right),$$

avec S donnée au chapitre 1 par (1.12), page 33 et où $d_i = l_0 \dots l_i / m_1 \dots m_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, s-1\}$, avec la convention $s = +\infty$ si la file est de capacité infinie.

4.2.2 Taux d'entropie d'une file d'attente de capacité finie

Pour les files d'attente de type M/M de capacité d'accueil finie, modélisées par un processus de naissance et de mort, le taux d'entropie existe et s'exprime explicitement en fonction des intensités d'arrivée et de départ.

La formule de Bad Dumitrescu (1.13), page 34 exprime le taux d'entropie de la file d'attente comme une fonction explicite des intensités d'arrivée et de départ. On en déduit l'expression du taux d'entropie en tant que fonction des deux paramètres λ et μ de la file. Précisément, le taux d'entropie d'une file d'attente de capacité finie est

$$\begin{aligned} H_{\text{par}}(\lambda, \mu) &= H((l_i \lambda, m_{i+1} \mu)_i) \\ &= \left[\sum_{i=0}^s l_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right]^{-1} \lambda \sum_{i=0}^{s-1} l_i d_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i [2 - \log(l_i m_{i+1} \lambda \mu)], \end{aligned} \quad (4.15)$$

où H est donnée par (1.13) et les coefficients $l_i = \lambda_i / \lambda$, $m_{i+1} = \mu_{i+1} / \mu$ et $d_i = l_0 \dots l_i / m_1 \dots m_{i+1}$ dépendent du type de la file étudiée.

4.3 Estimation de l'entropie de la loi du nombre de clients à l'équilibre et du taux d'entropie de la file

Dans cette partie, on suppose qu'on a observé une file d'attente selon l'un des trois schémas décrits au chapitre 3, soit :

- la file d'attente a été observée au cours d'un long intervalle de temps $[0, T]$; on dispose alors d'une trajectoire du processus de naissance et de mort associé jusqu'à l'instant T ,
- on a observé plusieurs réalisations indépendantes de la file sur de courtes périodes; on dispose alors de plusieurs trajectoires indépendantes du processus de naissance et de mort, censurées par des temps d'observation aléatoires indépendants et de même loi, et indépendants des trajectoires,
- ou bien on a relevé l'état de la file (le nombre de clients dans la file) à des instants discrets équirépartis; on dispose alors d'une trajectoire de la chaîne de Markov induite par le processus de naissance et de mort.

Ces trois schémas d'observations permettent de recouvrir un large éventail de situations faisant intervenir des files d'attente. Un serveur informatique auquel on soumet des tâches travaille sans interruption; on dispose alors d'une trajectoire du processus associé sur un long interval de temps. Au contraire, un service administratif ou une caisse de supermarché ferment chaque soir, avec pour conséquence la réinitialisation du processus. On dispose alors de trajectoires indépendantes. Lorsqu'il est matériellement coûteux de relever l'instant d'arrivée et de départ de chaque client dans une file d'attente, on peut relever uniquement le nombre de clients dans la file à heure fixe. En résultent des observations discrètes du processus.

Si la file observée est de capacité finie, le chapitre 3 fournit des estimateurs par plug-in de l'entropie de la loi stationnaire et du taux d'entropie de la file, obtenus à partir d'estimateurs du générateur. Les processus de naissance et de mort associés aux files étudiées possédant des générateurs particulièrement simples, dépendant de deux paramètres λ et μ , les estimateurs de l'entropie et du taux d'entropie de la file s'expriment en fonction d'estimateurs de λ et μ . Leurs propriétés asymptotiques s'en trouvent simplifiées.

Si la file observée est de capacité infinie, on estime l'entropie de la loi stationnaire par plug-in à partir d'estimateurs des deux paramètres λ et μ . Les propriétés asymptotiques des estimateurs ainsi obtenus sont établies.

4.3.1 Estimation des intensités d'arrivée et de départ d'une file d'attente de capacité d'accueil finie

Dans le chapitre 3, on a obtenu des estimateurs fortement consistants et asymptotiquement normaux du générateur d'un processus de Markov ergodique à espace d'état fini. Appliqués au cas d'un processus de naissance et de mort $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de générateur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \mu_s & -\mu_s \end{pmatrix},$$

ces résultats fournissent des estimateurs des intensités d'arrivée λ_i et de départ μ_{i+1} , pour $i \in \{0, \dots, s-1\}$ pour les trois schémas d'observation décrits précédemment. Explicitement, pour une trajectoire observée jusqu'à l'instant $T > 0$, les estimateurs du maximum de vraisemblance de λ_i et μ_{i+1} sont respectivement

$$\widehat{\lambda}_T(i) = \begin{cases} \frac{n_T(i, i+1)}{r_T(i)} & \text{si } r_T(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \widehat{\mu}_T(i+1) = \begin{cases} \frac{n_T(i+1, i)}{r_T(i+1)} & \text{si } r_T(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad i \in \{0, \dots, s-1\}, \quad (4.16)$$

où $n_T(i, i+1)$ (respectivement $n_T(i+1, i)$) est le nombre de sauts de i vers $i+1$ (respectivement de $i+1$ vers i) observés au cours de la trajectoire et $r_T(i)$ est le temps passé en i par la trajectoire. Pour k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation T_1, \dots, T_k indépendants et de même loi ν , les estimateurs du maximum de vraisemblance de λ_i et μ_{i+1}

sont respectivement

$$\widehat{\lambda}_k^c(i) = \begin{cases} \frac{N_k(i,i+1)}{R_k(i)} & \text{si } R_k(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \widehat{\mu}_k^c(i+1) = \begin{cases} \frac{N_k(i,i+1)}{R_k(i)} & \text{si } R_k(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad i \in \{0, \dots, s-1\}, \quad (4.17)$$

où $N_k(i, i+1)$ (respectivement $N_k(i+1, i)$) est le nombre total de sauts de i vers $i+1$ (respectivement de $i+1$ vers i) observés au cours des k trajectoires et $R_k(i)$ est le temps total passé en i au cours des k trajectoires. Pour n observations discrètes $X_0, X_\eta, \dots, X_{(n-1)\eta}$ de la file d'attente, séparées par un temps constant $\eta > 0$, les estimateurs du maximum de vraisemblance de λ_i et μ_{i+1} , s'ils existent sont respectivement $\widehat{\lambda}_n^d(i)$ et $\widehat{\mu}_n^d(i+1)$ et vérifient

$$\exp \left(\eta \begin{pmatrix} -\widehat{\lambda}_n^d(0) & \widehat{\lambda}_n^d(0) & & 0 \\ \widehat{\mu}_n^d(1) & -\widehat{\lambda}_n^d(1) - \widehat{\mu}_n^d(1) & \widehat{\lambda}_n^d(1) & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & \widehat{\mu}_n^d(s) & -\widehat{\mu}_n^d(s) \end{pmatrix} \right) = \quad (4.18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \sum_{j \neq 0} \frac{N(0,j)}{N(0)} & \frac{N(0,1)}{N(0)} & \frac{N(0,2)}{N(0)} & \dots \\ \frac{N(1,0)}{N(1)} & 1 - \sum_{j \neq 1} \frac{N(1,j)}{N(1)} & \frac{N(1,2)}{N(1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{N(s,s-2)}{N(s)} & \frac{N(s,s-1)}{N(s)} & 1 - \sum_{j \neq s} \frac{N(s,j)}{N(s)} & \end{pmatrix},$$

où $N(i, j)$ est le nombre de sauts de i vers j et $N(i)$ le nombre de passage en i . Remarquons que les estimateurs $\widehat{\lambda}_n^d(i)$ et $\widehat{\mu}_n^d(i+1)$ sont bien définis si et seulement si l'estimateur du maximum de vraisemblance \widehat{P}_n de la matrice de transition $\exp(\eta \mathbf{A})$ est log-unique (voir la définition 3.1 du chapitre 3).

Lorsqu'ils sont bien définis, les estimateurs (4.16) à (4.18) sont fortement consistants et asymptotiquement normaux. Explicitement,

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\lambda}_T(i), \widehat{\mu}_T(i+1) \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \longrightarrow (\lambda_i, \mu_{i+1})_{i \in \{0, \dots, s-1\}}, \quad \text{p.s.}, \\ & \sqrt{T} \left(\widehat{\lambda}_T(i) - \lambda_i, \widehat{\mu}_T(i+1) - \mu_{i+1} \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{c,1}^2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

lorsque T tend vers l'infini, où $\Sigma_{c,1}^2$ est diagonale et la variance asymptotique de $\widehat{\lambda}_T(i)$ (respectivement $\widehat{\mu}_T(i+1)$) est $\Sigma_{c,1}^2(\lambda_i) = \lambda_i / P(i)$ (respectivement $\Sigma_{c,1}^2(\mu_{i+1}) = \mu_{i+1} / P(i+1)$),

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\lambda}_k^c(i), \widehat{\mu}_k^c(i+1) \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \longrightarrow (\lambda_i, \mu_{i+1})_{i \in \{0, \dots, s-1\}}, \quad \text{p.s.}, \\ & \sqrt{k} \left(\widehat{\lambda}_k^c(i) - \lambda_i, \widehat{\mu}_k^c(i+1) - \mu_{i+1} \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{c,m}^2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

lorsque k tend vers l'infini, où $\Sigma_{c,m}^2$ est diagonale et la variance asymptotique de $\widehat{\lambda}_k^c(i)$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c(i+1)$) est $\Sigma_{c,m}^2(\lambda_i) = \lambda_i / \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt d\nu(T)$ (respectivement $\Sigma_{c,1}^2(\mu_{i+1}) = \mu_{i+1} / \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt d\nu(T)$). Finalement, pourvu que l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique,

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\lambda}_n^d(i), \widehat{\mu}_n^d(i+1) \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \longrightarrow (\lambda_i, \mu_{i+1})_{i \in \{0, \dots, s-1\}}, \quad \text{p.s.}, \\ & \sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_n^d(i) - \lambda_i, \widehat{\mu}_n^d(i+1) - \mu_{i+1} \right)_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_d^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $\Sigma_d^2 = D_{\Phi_\eta^{-1}} \cdot I_P^{-1} \cdot D_{\Phi_\eta}^t$, avec Φ_η définie par (3.15) et I_P est l'information de Fisher de la chaîne induite par les observations discrètes du processus (voir la partie 3.1.3 du chapitre 3).

On peut estimer l'entropie de la loi stationnaire et le taux d'entropie de la file en appliquant directement les résultats du chapitre 3. C'est la méthode à suivre si l'on ne connaît pas *a priori* le type de la file étudiée. Toutefois, si le type de la file est connu, les estimateurs par plug-in de $\mathbb{S}(P)$ et $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ étudiés au chapitre 3 s'expriment plus simplement en fonction d'estimateurs des paramètres λ et μ de la file. Leurs propriétés asymptotiques s'en trouvent simplifiées également.

Les estimateurs de λ et μ construits à partir de ceux des intensités d'arrivée et de départ sont

$$\widehat{\lambda}_T = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{l_i} \widehat{\lambda}_T(i), \quad \widehat{\mu}_T = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i} \widehat{\mu}_T(i), \quad (4.22)$$

puis

$$\widehat{\lambda}_k^c = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{l_i} \widehat{\lambda}_k^c(i), \quad \widehat{\mu}_k^c = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i} \widehat{\mu}_k^c(i), \quad (4.23)$$

et finalement

$$\widehat{\lambda}_n^c = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{l_i} \widehat{\lambda}_n^c(i), \quad \widehat{\mu}_n^c = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i} \widehat{\mu}_n^c(i), \quad (4.24)$$

où l_i et m_i dépendent du type de la file étudiée.

Proposition 4.1. *Soit une file d'attente de capacité d'accueil finie et dont les intensités d'arrivée et de départ sont respectivement $\lambda_i = l_i \lambda$ et $\mu_{i+1} = m_{i+1} \mu$, pour $i \in \{0, \dots, s-1\}$, avec $\lambda, \mu > 0$ et l_i, m_{i+1} dépendant explicitement du nombre de serveurs et de la taille de la population des clients de la file. Soit $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus de naissance et de mort associé à la file d'attente.*

1. *La probabilité pour que le couple d'estimateurs $(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d)$ soit bien défini tend vers 1 lorsque le générateur du processus est log-unique.*
2. *Les couples d'estimateurs $(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T)$, $(\widehat{\lambda}_k^c, \widehat{\mu}_k^c)$ et $(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d)$ définis par (4.22) à (4.24) sont fortement consistants. Précisément,*
 - (a) *$(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T)$ converge presque sûrement vers (λ, μ) lorsque le temps d'observation T tend vers l'infini,*
 - (b) *$(\widehat{\lambda}_k^c, \widehat{\mu}_k^c)$ converge presque sûrement vers (λ, μ) lorsque le nombre k de trajectoires tend vers l'infini,*
 - (c) *$(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d)$ converge presque sûrement vers (λ, μ) lorsque le nombre n d'observations discrètes tend vers l'infini.*
3. *De plus, $\sqrt{T}(\widehat{\lambda}_T - \lambda, \widehat{\mu}_T - \mu)$, $\sqrt{k}(\widehat{\lambda}_k^c - \lambda, \widehat{\mu}_k^c - \mu)$ et $\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n^d - \lambda, \widehat{\mu}_n^d - \mu)$ sont asymptotiquement normaux. Précisément,*
 - (a) *$\sqrt{T}(\widehat{\lambda}_T - \lambda, \widehat{\mu}_T - \mu)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 2, centrée et de variance diagonale, telle que*

$$\Sigma_{\lambda,c,1}^2 = \frac{\lambda}{s^2} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{l_i P(i)}, \quad \Sigma_{\mu,c,1}^2 = \frac{\mu}{s^2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i P(i)}, \quad (4.25)$$

- (b) *$\sqrt{k}(\widehat{\lambda}_k^c - \lambda, \widehat{\mu}_k^c - \mu)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 2, centrée et de variance diagonale, telle que*

$$\Sigma_{\lambda,c,k}^2 = \frac{\lambda}{s^2} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{l_i \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt d\nu(T)}, \quad (4.26)$$

$$\Sigma_{\mu,c,k}^2 = \frac{\mu}{s^2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \mathbb{P}(X_t = i) dt d\nu(T)}, \quad (4.27)$$

(c) $\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n^d - \lambda, \widehat{\mu}_n^d - \mu)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 2, centrée et de variance

$$\Sigma_{\lambda, \mu, d}^2 = (D_{\phi_1}, D_{\phi_2}) \cdot \Sigma_d^2 \cdot (D_{\phi_1}, D_{\phi_2})^t, \quad (4.28)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont les applications linéaires sur \mathbb{R}^{2s} définies respectivement par

$$\phi_1((\lambda_i, \mu_{i+1})_i) = \frac{1}{s} \sum_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \lambda_i \quad \text{et} \quad \phi_2((\lambda_i, \mu_{i+1})_i) = \frac{1}{s} \sum_{i \in \{0, \dots, s-1\}} \mu_{i+1}.$$

Démonstration : On montre le résultat dans le cas de l'observation d'une unique trajectoire. On sait que $(\widehat{\lambda}_T(i), \widehat{\mu}_T(i))_{i \in \{0, \dots, s\}}$ converge presque sûrement vers $(\lambda_i, \mu_i)_{i \in \{0, \dots, s\}}$ et que $\sqrt{T}(\widehat{\lambda}_T(i) - \lambda, \widehat{\mu}_T(i) - \mu)_{i \in \{0, \dots, s\}}$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\Sigma_{c,1}^2$. Le résultat découle alors de la méthode delta (proposition 1.3 du chapitre 1), puisque $\widehat{\lambda}_T$ et $\widehat{\mu}_T$ sont des fonctions linéaires (donc infiniment dérivables et de différentielle non nulle) de $\widehat{\lambda}_T(i), \widehat{\mu}_T(i)$. \square

Culver [19] montre qu'une matrice est log-unique si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives et aucun bloc de Jordan n'apparaît plus d'une fois. Ces conditions sont en particulier remplies si la matrice est à valeurs propres distinctes et strictement positives. On montre dans le lemme 4.2 que le générateur du processus de naissance et de mort associé à une file de type $M/M/1/s$ possède $s+1$ valeurs propres distinctes. La matrice de transition $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$ est donc log-unique. Les estimateurs $\widehat{\lambda}_n^d(i)$ et $\widehat{\mu}_n^d(i+1)$ sont donc bien définis avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini ; on en donne une expression explicite.

Lemme 4.2. Soient une file d'attente de type $M/M/1/s$, d'intensités $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, et $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus de naissance et de mort associé de générateur \mathbf{A} . Les valeurs propres de \mathbf{A} sont

$$0 \quad \text{et} \quad -\lambda - \mu + 2\sqrt{\lambda\mu} \cos\left(\frac{r\pi}{s+1}\right), \quad r \in \{1, \dots, s\}. \quad (4.29)$$

En outre, \mathbf{A} possède $s+1$ valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable. De plus, $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$ est log-unique.

Démonstration : Yueh [63] détermine les valeurs propres de certaines matrices tridiagonales. Appliqué au cas du générateur d'une file de type $M/M/1/s$, il établit que les valeurs propres de \mathbf{A} sont de la forme

$$-\lambda - \mu + 2\sqrt{\lambda\mu} \cos \theta, \quad (4.30)$$

avec $\theta \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$\theta \neq m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4.31)$$

$$\text{et} \quad \lambda\mu (\sin((s+2)\theta) + \sin(s\theta)) - (\lambda + \mu)\sqrt{\lambda\mu} \sin((s+1)\theta) = 0, \quad (4.32)$$

ou de façon équivalente, en remplaçant $\sin((s+2)\theta) + \sin(s\theta)$ par $2\sin((s+1)\theta)\cos(\theta)$ dans (4.32),

$$\sin((s+1)\theta) \left(2\lambda\mu \cos(\theta) - (\lambda + \mu)\sqrt{\lambda\mu} \right) = 0.$$

Ainsi, θ vérifie

$$\sin((s+1)\theta) = 0, \quad (4.33)$$

$$\text{ou} \quad \cos(\theta) = \frac{\lambda + \mu}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}. \quad (4.34)$$

La condition (4.34) fournit la valeur propre 0. Noter que dans ce cas, θ n'est certainement pas réel puisque $(\lambda + \mu)/2 \geq \sqrt{\lambda\mu}$ d'où $\cos(\theta) \geq 1$.

La condition (4.33) est équivalente à $\theta = k\pi/(s+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, qui injectée dans (4.30) conjointement à (4.31) fournit les valeurs propres non-nulles de \mathbf{A} , soit $-\lambda - \mu + \sqrt{\lambda\mu} \cos(k\pi/(s+1))$, $k = 1, \dots, s$.

Le générateur \mathbf{A} possédant $s+1$ valeurs propres distinctes, il est diagonalisable. La matrice $\mathbf{P} = \exp(\eta\mathbf{A})$ possède alors $s+1$ valeurs propres distinctes et strictement positives, donc \mathbf{P} est log-unique. \square

Comme l'ensemble des matrices carrées de taille $(s+1) \times (s+1)$ possédant $(s+1)$ valeurs propres distinctes et positives est un ouvert et que l'EMV \widehat{P}_n de la matrice $\exp(\eta\mathbf{A})$ est fortement consistant, \widehat{P}_n possède $(s+1)$ valeurs propres distinctes et positives avec probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini. En outre, $\widehat{\lambda}_n(i)$ et $\widehat{\mu}_n(i+1)$, pour $i = 0, \dots, s-1$, se calculent facilement : si $\widehat{p}_0, \dots, \widehat{p}_s$ sont les valeurs propres de \widehat{P}_n et \widehat{B} la matrice de changement de base telle que

$$\widehat{B}^{-1}\widehat{P}_n\widehat{B} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \widehat{p}_s \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} -\widehat{\lambda}_n^d(0) & \widehat{\lambda}_n^d(0) & 0 \\ \widehat{\mu}_n^d(1) & -\widehat{\lambda}_n^d(1) - \widehat{\mu}_n^d(1) & \widehat{\lambda}_n^d(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \widehat{\mu}_n^d(s) & -\widehat{\mu}_n^d(s) \end{pmatrix} = \widehat{B} \begin{pmatrix} \log \widehat{p}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \log \widehat{p}_s \end{pmatrix} \widehat{B}^{-1}.$$

4.3.2 Estimation de la loi du nombre de clients d'une file de capacité finie et de son entropie

Dans cette partie, on précise le comportement asymptotique établi au chapitre 3 des estimateurs par plug-in de la loi stationnaire d'une file d'attente de capacité finie et de son entropie. Ces estimateurs sont les images des estimateurs des paramètres λ et μ des intensités d'arrivée et de départ obtenus dans la partie 4.3.1, par les fonctions S_{par} et H_{par} données par les équations (4.8) et (4.13). Précisément, pour une trajectoire observée jusqu'au temps T , les estimateurs par plug-in de la loi stationnaire P et de son entropie $\mathbb{S}(P)$ sont respectivement

$$\widehat{P}_T = \begin{cases} \Pi_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T) & \text{si } \widehat{\mu}_T \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{si } \widehat{\mu}_T = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\widehat{S}_T = S_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T). \quad (4.36)$$

Pour k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation T_1, \dots, T_k indépendants et de même loi ν , les estimateurs par plug-in de P et $\mathbb{S}(P)$ sont respectivement

$$\widehat{P}_k^c = \begin{cases} \Pi_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_k^c, \widehat{\mu}_k^c) & \text{si } \widehat{\mu}_k^c \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{si } \widehat{\mu}_k^c = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\widehat{S}_k^c = S_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_k^c, \widehat{\mu}_k^c). \quad (4.38)$$

Pour des observations discrètes de la file d'attente séparées par un temps constant $\eta > 0$, les estimateurs par plug-in de P et $\mathbb{S}(P)$ sont respectivement

$$\widehat{P}_n^d = \begin{cases} \Pi_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d) & \text{si } \widehat{\mu}_n^d \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{si } \widehat{\mu}_n^d = 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\widehat{S}_n^d = S_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d). \quad (4.40)$$

Si aucun départ n'a été observé, soit $\widehat{\mu}_T = 0$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c = 0$ et $\widehat{\mu}_n^d = 0$), on ne peut pas injecter $\widehat{\mu}_T$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c$ et $\widehat{\mu}_n^d$) dans (4.8), ce qui oblige à donner une expression des estimateurs différente dans ce cas. Le choix de la mesure de dirac δ_s et de l'entropie nulle est motivée par le fait que si aucun départ n'a été observé, le serveur tend à saturer. Toutefois ce choix n'a pas grande importance sur le comportement asymptotique des estimateurs puisque, μ étant strictement positif et $\widehat{\mu}_T$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c$ et $\widehat{\mu}_n^d$) étant fortement consistant, la probabilité qu'on observe (au moins) un départ en un temps fini tend vers 1, et alors $\widehat{\mu}_T \neq 0$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c \neq 0$ et $\widehat{\mu}_n^d \neq 0$).

Le comportement asymptotique de ces estimateurs a déjà été établi dans le théorème 3.1 du chapitre 3. Toutefois, l'expression de la variance asymptotique des estimateurs est simplifiée.

Corollaire 4.1. *Soit une file d'attente de capacité finie s et d'intensités d'arrivée et de départ $\lambda_i = l_i \lambda$ et $\mu_{i+1} = m_{i+1}$, $i \in \{0, \dots, s-1\}$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soient \mathbf{A} le générateur du processus associé à la file et P sa loi stationnaire.*

1. *Les estimateurs par plug-in \widehat{P}_n^d et \widehat{S}_n^d de P et de son entropie, construits à partir d'observations discrètes équiréparties, sont bien définis avec probabilité convergeant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique.*
2. *Lorsqu'ils sont bien définis les estimateurs \widehat{P}_T , \widehat{P}_k^c , \widehat{P}_n^d et \widehat{S}_T , \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d sont fortement consistants.*
3. *Les estimateurs \widehat{P}_T , \widehat{P}_k^c et \widehat{P}_n^d sont asymptotiquement normaux. Précisément,*

- (a) $\sqrt{T} \left(\widehat{P}_T - P \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension $s+1$, centrée et de variance*

$$\Sigma_{P,c,1}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_{par} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,1}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \Pi_{par} \right)^2 \Sigma_{\mu,c,1}^2,$$

où $\Sigma_{\lambda,c,1}^2$ et $\Sigma_{\mu,c,1}^2$ sont données par (4.25) ;

- (b) $\sqrt{k} \left(\widehat{P}_k^c - P \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension $s+1$, centrée et de variance*

$$\Sigma_{P,c,m}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_{par} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,m}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \Pi_{par} \right)^2 \Sigma_{\mu,c,1}^2,$$

où $\Sigma_{\lambda,c,m}^2$ et $\Sigma_{\mu,c,m}^2$ sont données par (4.26) et (4.27) ;

- (c) $\sqrt{n} \left(\widehat{P}_n^d - P \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension $s+1$, centrée et de variance $\Sigma_{P,d}^2 = D_{\Pi}(\lambda, \mu) \cdot \Sigma_{\lambda,\mu,d}^2 \cdot D_{\Pi}(\lambda, \mu)^t$, où $\Sigma_{\lambda,\mu,d}^2$ est donnée par (4.28).*

4. *Si $D_S(\lambda, \mu) \neq 0$, les estimateurs \widehat{S}_T , \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d sont asymptotiquement normaux. Précisément,*

- (a) $\sqrt{T} \left(\widehat{S}_T - \mathbb{S}(P) \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance*

$$\Sigma_{S,c,1}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} S_{par} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,1}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} S_{par} \right)^2 \Sigma_{\mu,c,1}^2;$$

- (b) $\sqrt{k} \left(\widehat{S}_k^c - \mathbb{S}(P) \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance*

$$\Sigma_{S,c,m}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} S_{par} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,m}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} S_{par} \right)^2 \Sigma_{\mu,c,1}^2;$$

- (c) $\sqrt{n} \left(\widehat{S}_n^d - \mathbb{S}(P) \right)$ *converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance $\Sigma_{S,d}^2 = D_S(\lambda, \mu) \cdot \Sigma_{\lambda,\mu,d}^2 \cdot D_S(\lambda, \mu)^t$.*

5. *Si $D_S(\lambda, \mu) = 0$, les estimateurs \widehat{S}_T , \widehat{S}_k^c et \widehat{S}_n^d convergent en loi à vitesses respectives $2T$, $2k$ et $2n$ vers une combinaison linéaire de variables de loi $\chi^2(1)$. Précisément,*

- (a) $2T \left(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_T \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda, c, 1}^2, \Sigma_{\mu, c, 1}^2, \frac{\partial}{\partial \lambda} S$ et $\frac{\partial}{\partial \mu} S$;
- (b) $2k \left(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_k^c \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda, c, m}^2, \Sigma_{\mu, c, m}^2, \frac{\partial}{\partial \lambda} S$ et $\frac{\partial}{\partial \mu} S$;
- (c) $2n \left(\mathbb{S}(P) - \widehat{S}_n^d \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda, \mu, d}^2, \frac{\partial}{\partial \lambda} S$ et $\frac{\partial}{\partial \mu} S$.

La condition d'annulation de la dérivée de S_{par} est explicite pour les files de type $M/M/1/s$.

Proposition 4.2. Soit une file d'attente de type $M/M/1/s$ d'intensités d'arrivée et de départ $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit P la loi stationnaire de la file et $\mathbb{S}(P) = S(\lambda, \mu)$ son entropie.

La dérivée $D_{S_{\text{par}}}(\lambda, \mu)$ de S_{par} est nulle si et seulement si $\lambda = \mu$.

Démonstration : Pour simplifier les notations, on note S à la place de S_{par} dans cette démonstration. Dérivant (4.13) par rapport à λ et μ , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(\lambda, \mu) = \frac{1}{\mu} \log \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left[\sum_{i=0}^s \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right]^{-2} \left[\sum_{i,k=0}^s (k-i) i \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+k-1} \right], \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} S(\lambda, \mu) = -\frac{\lambda}{\mu^2} \log \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left[\sum_{i=0}^s \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right]^{-2} \left[\sum_{i,k=0}^s (k-i) i \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+k-1} \right]. \quad (4.42)$$

Soient $\alpha = \lambda/\mu$ et $P(\alpha) = \sum_{i,k=0}^s (k-i) i \alpha^{i+k-1}$. Montrons que $P(\alpha)$ n'est jamais nul. En posant $l = i+k$ et $m = k$, on obtient

$$P(\alpha) = \sum_{l=0}^{2s-1} \alpha^l Q_l, \quad (4.43)$$

avec

$$Q_l = \begin{cases} \sum_{m=0}^l (l-m)(2m-l) & \text{si } l \leq s, \\ \sum_{m=l-s}^s (l-m)(2m-l) & \text{si } l > s. \end{cases} \quad (4.44)$$

Montrons que $\sum_{m=0}^l (l-m)(2m-l) < 0$ si $l \leq s$. Une preuve similaire conduit à $\sum_{m=l-s}^s (l-m)(2m-l) < 0$ si $l > s$. Séparons les termes de la somme selon que $m \leq [l/2]$ ou non, de telle sorte que

$$\sum_{m=0}^l (l-m)(2m-l) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{l/2-1} (l-m)(2m-l) + \sum_{m=l/2+1}^l (l-m)(2m-l) & \text{si } l \text{ est pair,} \\ \sum_{m=0}^{(l-1)/2} (l-m)(2m-l) + \sum_{m=(l+1)/2}^l (l-m)(2m-l) & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

En remplaçant m par $l-m$ dans les sommes $\sum_{m=l/2+1}^l (l-m)(2m-l)$ et $\sum_{m=(l+1)/2}^l (l-m)(2m-l)$, on obtient

$$\sum_{m=0}^l (l-m)(2m-l) = \begin{cases} -\sum_{m=0}^{l/2-1} (l-2m)^2 < 0 & \text{si } l \text{ est pair,} \\ -\sum_{m=0}^{(l-1)/2} (l-2m)^2 < 0 & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases} \quad (4.45)$$

Ainsi, (4.45) avec (4.44) et (4.43) prouvent que $P(\alpha) < 0$, pour tout $\alpha > 0$. Les dérivées partielles (4.41) et (4.42) sont simultanément nulles si et seulement si $\log(\lambda/\mu) = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si $\lambda = \mu$. \square

4.3.3 Estimation du taux d'entropie d'une file d'attente de capacité finie

Dans cette partie on précise le comportement asymptotique des estimateurs par plug-in du taux d'entropie d'une file d'attente de capacité d'accueil finie obtenus en appliquant les résultats du chapitre 3. Ces estimateurs sont les images des estimateurs des paramètres λ et μ des intensités d'arrivée et de départ par la fonction H_{par} donnée par l'équation (4.15). Précisément, pour une trajectoire observée jusqu'au temps T , l'estimateur par plug-in du taux d'entropie $\mathbb{H}(X)$ du processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ associé à la file est

$$\widehat{H}_T = \begin{cases} H_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T) & \text{si } \widehat{\mu}_T \neq 0, \\ 0 & \text{si } \widehat{\mu}_T = 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Pour k trajectoires indépendantes censurées par des temps d'observation T_1, \dots, T_k indépendants et de même loi ν , l'estimateur par plug-in de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ est

$$\widehat{H}_k^c = \begin{cases} H_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_k^c, \widehat{\mu}_k^c) & \text{si } \widehat{\mu}_k^c \neq 0, \\ 0 & \text{si } \widehat{\mu}_k^c = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Pour des observations discrètes de la file d'attente séparées par un temps constant $\eta > 0$, l'estimateur par plug-in de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ est

$$\widehat{H}_n^d = \begin{cases} H_{\text{par}}(\widehat{\lambda}_n^d, \widehat{\mu}_n^d) & \text{si } \widehat{\mu}_n^d \neq 0, \\ 0 & \text{si } \widehat{\mu}_n^d = 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

Si aucun départ n'a été observé, c'est-à-dire si $\widehat{\mu}_T = 0$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c = 0$ et $\widehat{\mu}_n^d = 0$), on ne peut injecter $\widehat{\mu}_T$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c$ et $\widehat{\mu}_n^d$) dans (4.15), ce qui oblige à donner une expression des estimateurs différente dans ce cas. Le choix du taux d'entropie nul est arbitraire et n'influe pas sur le comportement asymptotique des estimateurs puisque, μ étant strictement positif et $\widehat{\mu}_T$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c$ et $\widehat{\mu}_n^d$) étant fortement consistant, la probabilité d'observer (au moins) un départ en un temps fini tend vers 1, et alors $\widehat{\mu}_T \neq 0$ (respectivement $\widehat{\mu}_k^c \neq 0$ et $\widehat{\mu}_n^d \neq 0$).

Le corollaire suivant reprend et précise les propriétés asymptotiques des estimateurs \widehat{H}_T , \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d établies dans le théorème 3.2 du chapitre 3.

Corollaire 4.2. *Soit une file d'attente de capacité finie s et d'intensités d'arrivée et de départ $\lambda_i = l_i \lambda$ et $\mu_{i+1} = m_{i+1}$, $i \in \{0, \dots, s-1\}$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit \mathbf{A} le générateur du processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ associé à la file.*

1. *L'estimateur par plug-in \widehat{H}_n^d du taux d'entropie $\mathbb{H}(\mathbf{X})$, construit à partir d'observations discrètes équidistribuées, est bien défini avec probabilité convergente vers 1 lorsque n tend vers l'infini, pourvu que $\mathbf{P} = \exp(\eta \mathbf{A})$ soit log-unique.*
2. *Lorsqu'ils sont bien définis les estimateurs \widehat{H}_T , \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d sont fortement consistants.*
3. *Si $D_H(\lambda, \mu) \neq 0$, les estimateurs \widehat{H}_T , \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d sont asymptotiquement normaux. Précisément,*

(a) $\sqrt{T} \left(\widehat{H}_T - \mathbb{H}(\mathbf{X}) \right)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance

$$\Sigma_{H,c,1}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} H_{\text{par}} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,1}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} H_{\text{par}} \right)^2 \sigma_{\mu,c,1}^2;$$

(b) $\sqrt{k} \left(\widehat{H}_k^c - \mathbb{H}(\mathbf{X}) \right)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance

$$\Sigma_{H,c,1}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} H_{par} \right)^2 \Sigma_{\lambda,c,m}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \mu} H_{par} \right)^2 \Sigma_{\mu,c,m}^2;$$

(c) $\sqrt{n} \left(\widehat{H}_n^d - \mathbb{H}(\mathbf{X}) \right)$ converge en loi vers une loi normale de dimension 1, centrée et de variance $\Sigma_{H,d}^2 = D_H(\lambda, \mu) \cdot \Sigma_{\lambda,\mu,d}^2 \cdot D_H(\lambda, \mu)^t$.

4. Si $D_H(\lambda, \mu) = 0$, les estimateurs \widehat{H}_T , \widehat{H}_k^c et \widehat{H}_n^d convergent en loi à vitesses respectives T , k et n vers une combinaison linéaire de variables de loi $\chi^2(1)$. Précisément,

(a) $2T \left(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_T \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda,c,1}^2$, $\Sigma_{\mu,c,1}^2$ et $\frac{\partial}{\partial \lambda} H$, $\frac{\partial}{\partial \mu} H$;

(b) $2k \left(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_k^c \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda,c,m}^2$, $\Sigma_{\mu,c,m}^2$ et $\frac{\partial}{\partial \lambda} H$, $\frac{\partial}{\partial \mu} H$;

(c) $2n \left(\mathbb{H}(\mathbf{X}) - \widehat{H}_n^d \right)$ converge en loi vers $aY_1 + bY_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux variables de loi $\chi^2(1)$ indépendantes et a, b sont deux réels dépendant de $\Sigma_{\lambda,\mu,d}^2$ et $\frac{\partial}{\partial \lambda} H$, $\frac{\partial}{\partial \mu} H$.

Si le taux d'entropie est maximum alors la dérivée $D_H(\lambda, \mu)$ est nulle. Girardin et Sesboüé [36] établissent une condition nécessaire et suffisante pour chacune des files étudiées pour qu'elles aient un taux d'entropie maximum. En particulier, pour les files de type $M/M/1/s$, le taux d'entropie est maximum si et seulement si $\lambda = \mu = 1$. Montrer que la dérivée D_H de H est nulle uniquement pour $\lambda = \mu = 1$ nécessite d'explicitier les points d'annulation communs aux deux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \lambda} H$ et $\frac{\partial}{\partial \mu} H$. La complexité de ces expressions ne permet pas un traitement théorique. La résolution numérique de ces équations confirme que seul le couple $(1, 1)$ annule simultanément les deux dérivées partielles. La figure 4.5 représente les ensembles $\{(\lambda, \mu) : \frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda, \mu) = 0\}$ et $\{(\lambda, \mu) : \frac{\partial}{\partial \mu} H(\lambda, \mu) = 0\}$ pour une file d'attente de capacité d'accueil $s = 3$. Des graphiques similaires peuvent être obtenus pour des capacités plus grandes.

4.3.4 Estimation paramétrique de la loi du nombre de clients d'une file d'attente de capacité d'accueil infinie et de son entropie

Dans cette partie, sont établies les bonnes propriétés asymptotiques des estimateurs par plug-in de la loi du nombre de clients dans une file d'attente de type $M/M/m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, et de son entropie. Ces estimateurs sont les images par les applications Π_{par} et S_{par} données par (4.3) et (4.13), des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres λ et μ , construits à partir de l'observation d'une longue trajectoire de la file ou d'observations discrètes équirépaties au cours du temps. Les propriétés asymptotiques des estimateurs des paramètres sont établies par Billingsley [10] et Dehay et Yao [21], sous certaines hypothèses d'intégrabilité de la vraisemblance qui garantissent l'existence et l'inversibilité de l'information de Fisher du modèle.

Estimation des paramètres basée sur l'observation d'une trajectoire

L'estimation des paramètres λ et μ d'une file d'attente de type $M/M/m$ est un cas particulier d'estimation paramétrique basée sur l'observation d'une trajectoire d'un processus de Markov d'espace d'état au plus dénombrable. On suppose qu'à chaque élément θ d'un ouvert Θ de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$ correspond un générateur \mathbf{A}_θ d'un processus de Markov d'espace d'état E au plus dénombrable. Billingsley [10] établit l'existence et les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ obtenu à partir de l'observation d'une trajectoire

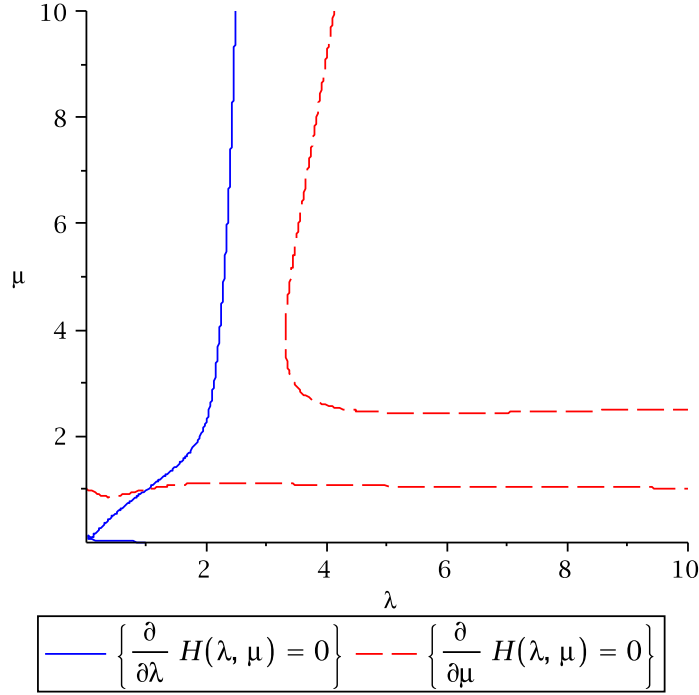


FIG. 4.5 – Représentation graphique des ensembles $\{(\lambda, \mu) : \frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda, \mu) = 0\}$ et $\{(\lambda, \mu) : \frac{\partial}{\partial \mu} H(\lambda, \mu) = 0\}$ pour une file d'attente de capacité d'accueil $s = 3$.

d'un processus de Markov de générateur \mathbf{A}_θ tronquée à l'instant $T > 0$, si le modèle considéré vérifie quelques conditions liées à la régularité de la fonction $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et à l'intégrabilité de la log-vraisemblance du modèle, assurant l'existence et l'inversibilité de l'information de Fisher de l'historique du processus. Précisément, ces conditions sont les suivantes.

1. Pour tout $\theta \in \Theta$, $\sup_{i \in E} -\mathbf{A}_\theta(i, i) < +\infty$ et $\inf_{i \in E} -\mathbf{A}_\theta(i, i) > 0$.
2. Pour tout $\theta \in \Theta$, \mathbf{A}_θ est un générateur ergodique.
3. Pour tout $i \in E$, l'ensemble des états j tels que $\mathbf{A}_\theta(i, j)$ ne dépend pas de θ .
4. La fonction $\theta \in \Theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ est dérivable trois fois sur Θ .
5. Les dérivées partielles de premier et second ordre de la densité des transitions de l'historique du processus, donnée par $f_\theta(i, j, t) = \mathbf{A}_\theta(i, j) \exp(-t\mathbf{A}_\theta(i, i))$, pour tous $i, j \in E$ et $t \geq 0$ sont localement uniformément intégrables. Précisément, pour tout $i \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{j \in E} \sup_{\theta' \in \mathcal{V}_\theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta_l} f_\theta(i, j, t) \right| dt < \infty, \quad l \in \{1, \dots, d\},$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{j \in E} \sup_{\theta' \in \mathcal{V}_\theta} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_l \partial \theta_{l'}} f_\theta(i, j, t) \right| dt < \infty, \quad l, l' \in \{1, \dots, d\},$$

où \mathcal{V}_θ désigne un voisinage de θ .

6. Notons $g_\theta(i, j, t) = \log f_\theta(i, j, t)$, pour tous $i, j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Les dérivées partielles d'ordre trois en θ de g_θ sont localement uniformément intégrables pour les transitions de l'historique, c'est-à-dire que pour tout $i \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i, j \in E} f_\theta(i, j, t) \sup_{\theta' \in \mathcal{V}_\theta} \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_l \partial \theta_{l'} \partial \theta_{l''}} g_\theta(i, j, t) \right| dt < \infty.$$

7. les dérivées partielles de g_θ admettent un moment d'ordre $2 + \delta$, $\delta > 0$, soit

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i,j \in E} f_\theta(i, j, t) \left| \frac{\partial}{\partial \theta_l} g_\theta(i, j, t) \right|^{2+\delta} dt < \infty.$$

8. L'information de Fisher de l'historique $I_\theta = (\sigma_\theta(l, l'))_{l, l' \in \{1, \dots, d\}}$ est inversible, où

$$I_\theta(l, l') = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i, j \in E} f_\theta(i, j, t) \frac{\partial}{\partial \theta_l} g_\theta(i, j, t) \frac{\partial}{\partial \theta_{l'}} g_\theta(i, j, t).$$

Les processus étudiés dans cette partie étant les processus de naissance et de mort associés aux files de type $M/M/m$, l'ensemble des paramètres est $\Theta = \{(\lambda, \mu) : \lambda > 0, \mu > 0\}$, et pour tout $(\lambda, \mu) \in \Theta$, le générateur $\mathbf{A}_{(\lambda, \mu)}$ est défini par

$$\mathbf{A}_{(\lambda, \mu)}(i, j) = \begin{cases} \lambda & \text{si } j = i + 1, \\ \mu \max(i, m) & \text{si } j = i - 1, \\ -\lambda - \mu \max(i, m) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.49)$$

En particulier, les coefficients du générateur sont des fonctions linéaires des paramètres. De plus, l'ensemble d'indices i, j pour lesquels $\mathbf{A}_{(\lambda, \mu)}(i, j) > 0$ ne dépend pas de λ et μ , $\sup_{i \in E} -\mathbf{A}_{i, i} = \lambda + m\mu$ est fini, et $\inf_{i \in E} -\mathbf{A}_{i, i} = \min(\lambda, \mu) > 0$. Les conditions de régularités nécessaires au résultat de Billingsley sont donc vérifiées. La vérification des conditions d'intégrabilités, plus fastidieuse, n'est pas retranscrite ici, mais ne souffre d'aucune difficulté.

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\lambda}_T, \hat{\mu}_T)$ de (λ, μ) existe, est consistant, et le vecteur aléatoire $\sqrt{T}(\hat{\lambda}_T - \lambda, \hat{\mu}_T - \mu)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\mathbb{E}_{P_{(\lambda, \mu)}}(-\mathbf{A}_{(\lambda, \mu)}(i, i))I_\theta^{-1}$, où $P_{(\lambda, \mu)}$ est la loi stationnaire du processus de générateur $\mathbf{A}_{(\lambda, \mu)}$.

Les estimateurs par plug-in de la loi du nombre de clients dans la file à l'équilibre et de son entropie sont respectivement

$$\begin{aligned} \hat{P}_T &= \begin{cases} \Pi_{\text{par}}(\hat{\lambda}_T, \hat{\mu}_T) & \text{si } \hat{\lambda}_T < m\hat{\mu}_T, \\ \delta_0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \hat{S}_T &= \begin{cases} S_{\text{par}}(\hat{\lambda}_T, \hat{\mu}_T) & \text{si } \hat{\lambda}_T < m\hat{\mu}_T, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où les fonctions Π_{par} et S_{par} sont données par (4.3) et (4.13).

Comme précédemment, le théorème de l'application continue et la méthode delta permettent d'établir la consistance de \hat{P}_T et \hat{S}_T lorsque T tend vers l'infini, ainsi que la convergence en loi de $\sqrt{T}(\hat{P}_T - P)$ vers une loi normale centrée de variance donnée explicitement en fonction des dérivés partielles $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_{\text{par}}$, $\frac{\partial}{\partial \mu} \Pi_{\text{par}}$, ainsi que de l'information de Fisher $\sigma_{(\lambda, \mu)}$. De même, $\sqrt{T}(\hat{S}_T - \mathbb{S}(P))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance non dégénérée si les dérivés partielles $\frac{\partial}{\partial \lambda} S_{\text{par}}$ et $\frac{\partial}{\partial \mu} S_{\text{par}}$ ne sont pas simultanément nulles; dans le cas contraire $2T(\mathbb{S}(P) - \hat{S}_T)$ converge en loi vers une combinaison linéaire de deux variables de loi $\chi^2(1)$.

Notons que la condition $\sup_{i \in E} -\mathbf{A}_{i, i} < \infty$ n'est pas vérifiée par le générateur d'une file de type $M/M/\infty$. Les résultats précédents ne sont donc pas valables dans ce cas.

Estimation des paramètres basée sur des observations discrètes

Ce dernier paragraphe présente un travail en cours sur l'estimation des paramètres λ et μ d'une file de type $M/M/m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Une approche heuristique est privilégiée, certains points techniques étant encore à préciser.

Étant donnée une famille paramétrique $\{\mathbf{A}_\theta : \theta \in \Theta\}$ de générateurs de processus de Markov ergodiques d'espace d'état au plus dénombrable E , Dehay et Yao [21] établissent l'existence, la

forte consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance de θ , construit à partir d'observations discrètes équiréparties du processus. La vraisemblance considérée est celle de la chaîne de Markov de matrice de transition $\exp(\eta \mathbf{A}_\theta)$. Outre les hypothèses classiques de régularité de la fonction $\theta \mapsto \mathbf{A}_\theta$ et d'intégrabilité de la log-vraisemblance assurant l'existence et l'inversibilité de l'information de Fisher, il est nécessaire de supposer que l'espace des paramètres Θ est un compact de \mathbb{R}^k . Ces hypothèses sont vérifiées lorsque la famille paramétrique est celle des générateurs des files de type $M/M/m$, pourvu que l'on connaisse une borne *a priori* pour les intensités d'arrivée et de départ. Une autre hypothèse, plus contraignante est liée à l'identifiabilité de θ à partir de la matrice $\exp(\eta \mathbf{A}_\theta)$, c'est-à-dire à l'unicité du logarithme de l'opérateur $\exp(\eta \mathbf{A}_\theta)$. Cette dernière hypothèse reste à vérifier pour la famille des générateurs des files de type $M/M/m$, pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Bibliographie

- [1] A. Albert. Estimating the infinitesimal generator of a continuous time finite state Markov process. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33 :727–753, 1962.
- [2] L.J.S. Allen. *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Chapman and Hall/CRC, 2^{ème} édition, 2010.
- [3] T.W. Anderson and L.A. Goodman. Statistical inference about Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28 :89–110, 1957.
- [4] W.J. Anderson. *Continuous-time Markov Chains*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] S. Asmussen. *Applied Probabilities and Queues*. Springer, New-York, 2^{ème} édition, 2003.
- [6] M. Bad Dumitrescu. Some informational properties of Markov pure-jump processes. *Časopis pro pěstování matematiky*, 4 :429–434, 1986.
- [7] G.P. Basharin. On a statistical estimation for the entropy of a sequence of independent random variables. *Theory of Probability and its Applications*, 4 :333–336, 1959.
- [8] C. Beck and F. Schlögl. *Thermodynamics of chaotic systems*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.
- [9] J-F Bercher. Source coding with escort distributions and Rényi entropy bounds. *Physics Letters A*, 373 :3235–3238, 2009.
- [10] P. Billingsley. *Statistical Inference for Markov Processes*. The University of Chicago Press, Chicago, 1968.
- [11] M. Bladt and M. Sørensen. Statistical inference for discretely observed Markov jump processes. *Journal of the Royal Statistical Society*, B 67 :395–410, 2005.
- [12] L. Breuer and D. Baum. *An Introduction to Queueing Theory Matrix-Analytic Methods*. Springer, Dordrecht, 1^{ère} édition, 2005.
- [13] J-R Chazottes and D. Gabrielli. Large deviations for empirical entropies of g-measures. *Nonlinearity*, 18 :2545–2563, 2005.
- [14] J. Chiquet and N. Limnios. Estimating stochastic dynamical systems driven by a continuous-time jump Markov process. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 8 :431–447, 2006.
- [15] G. Ciuperca and V. Girardin. Estimation of the entropy rate of a countable Markov chain. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 36 :1–15, 2007.
- [16] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, New Jersey, 2^{ème} édition, 2006.
- [17] D. Crommelin and E. Vanden-Eijnden. Data-based inference of generators for Markov jump processes using convex optimization. *Multiscale Modeling and Simulation*, 7 :1751–1778, 2009.
- [18] I. Csiszár. I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *Annals of Probability*, 3(1) :141–158, 1975.
- [19] W.J. Culver. On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17 :1146–1151, 1966.

BIBLIOGRAPHIE

- [20] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probabilités et statistiques; Problèmes à temps fixe*. Masson, Paris, 2^{ème} édition, 1994.
- [21] D. Dehay and J-F Yao. On likelihood estimation for discretely observed jump process. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 49(1) :93–107, 2007.
- [22] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer, New York, 2^{ème} édition, 1998.
- [23] N.G. Duffield, J.T. Lewis, N. O’Connell, R. Russel, and F. Toomey. Entropy of ATM traffic streams : A tool for estimating QoS parameters. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 13(6) :981–990, 1995.
- [24] K. Duffy, E.A. Peshersky, Y.M. Suhov, and N.D. Vvedenskaya. Using estimated entropy in a queueing system with dynamic routing. *Markov Processes and Related Fields*, 13(1) :57–84, 2007.
- [25] M.A. El-Affendi and D.D. Kouvatso. A maximum entropy analysis of the M/G/1 and G/M/1 queueing systems at equilibrium. *Acta Informatica*, 19 :339–355, 1986.
- [26] T. Engset. Emploi du calcul des probabilités pour la détermination du nombre de sélecteurs dans les bureaux téléphoniques centraux. *Revue de génie électrique*, 9 :138–140, 1921.
- [27] A.K. Erlang. Telefon-ventetider. et stykke sandsynlighedsregning. *Matematisk Tidsskrift*, B, 1920.
- [28] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [29] W. Feller. Die grundlagen der volterraschen theorie des kampfes ums dasein in wharscheinlichkeitstheorischer behandlung. *Acta Biotheoretica*, 5 :11–40, 1939.
- [30] Y. Gao, I. Kontoyiannis, and E. Bienenstosk. Estimating the entropy of binary time series : Methodology, some theory and a simulation study. *Entropy*, 10 :71–99, 2008.
- [31] V. Girardin. Entropy maximization for Markov and semi-Markov processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 6 :109–127, 2004.
- [32] V. Girardin. On the different extensions of the ergodic theorem of information theory. In R. Baeza-Yates, J. Glaz, H. Gzyl, J. Hüsler, and J.L. Palacios, editors, *Recent Advances in Applied Probability*, pages 163–179, San Francisco, 2005. Springer-Verlag.
- [33] V. Girardin and N. Limnios. *Probabilités en vue des applications*. Vuibert, Paris, 2^{ème} édition, 2008.
- [34] V. Girardin and P. Regnault. Large deviation principle for the entropy of a finite distribution, with applications. Rapport de recherche, laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, 2011.
- [35] V. Girardin and P. Regnault. On the estimation of entropy for Markov chains. Dublin, 2011. 58th World congress of Statistics, International Statistical Institute.
- [36] V. Girardin and A. Sesboüé. Maximizing the entropy rate of state-dependent M/M/1 queues. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, AIP Conference Proceedings*, 1073 :181–188, 2008.
- [37] V. Girardin and A. Sesboüé. Comparative construction of plug-in estimators of the entropy rate of two-state Markov chains. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11, No. 2 :181–200, 2009.
- [38] S. Guiasu. Maximum entropy condition in queueing theory. *Journal of the Operational Research Society*, 37, No. 3 :293–301, 1986.
- [39] B. Harris. The statistical estimation of entropy in the non-parametric case. *Colloquium of the Mathematical Society János Bolyai*, 16 :323–355, 1977.
- [40] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review Letters*, 106 :620–630, 1957.

-
- [41] N. Keiding. Maximum likelihood estimation in the birth-death process. *The Annals of Statistics*, 3(2) :363–372, 1975.
- [42] D.G Kendall. Stochastic processes occurring in the theory of queueing and their analysis by the method of the imbedded markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24 (3) :338–354, 1953.
- [43] J.F.C. Kingman. The imbedding problem for finite Markov chains. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor.*, 1 :14–24, 1962.
- [44] A.N. Kolmogorov. On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals. *IRE Transactions on Information Theory*, IT-2 :102–108, 1956.
- [45] S. Kullback and R.A. Leibler. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29 :79–86, 1951.
- [46] P. Metzner, I. Horenko, and C. Schütte. Generator estimation of Markov jump processes based on incomplete observations non-equidistant in time. *Physical Review E*, 76 :066702, 2007.
- [47] É. Pardoux. *Processus de Markov et applications*. Dunod, Paris, 2007.
- [48] A. Perez. Extensions of Shannon-McMillan’s limit theorem to more general stochastic processes. *Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes*, pages 545–574, 1964.
- [49] E.A. Peshersky, Y.M. Suhov, and N.D. Vvedenskaya. Large deviation in a two-servers system with dynamical routing. Technical report, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, 2003.
- [50] P. Regnault. Estimation par plug-in du taux d’entropie d’un processus markovien de sauts à espace d’état fini. Bordeaux, 2009. 41èmes journées de Statistiques, Disponible sur le serveur d’archives Hal Inria.
- [51] P. Regnault. Plug-in estimator of the entropy rate of a pure-jump two-state Markov process. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, AIP Conference Proceedings*, 1193 :153–160, 2009.
- [52] P. Regnault. Entropy estimation for M/M/1 queueing systems. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, AIP Conference Proceedings*, 1305, 2010.
- [53] P. Regnault. Estimation using plug-in of the stationary distribution and Shannon entropy of continuous time Markov processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(issue 8) :2711–2725, 2011.
- [54] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2008.
- [55] I.N. Sanov. On the probability of large deviations of random variables. *Transactions on Mathematical Statistics and Probability*, 1 :213–244, 1961.
- [56] A. Sgarro. An informational divergence geometry for stochastic matrices. *Calcolo*, 15(1) :41–49, 1978.
- [57] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27 :379–423, 623–656, 1948.
- [58] J. Shao. *Mathematical Statistics*. Springer, New-York, 2^{ème} edition, 2003.
- [59] Y. Taga. On the limiting distributions in Markov renewal processes with finitely many states. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 15 :1–10, 1963.
- [60] C. Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*. Springer, New York, 2009.
- [61] S. Turner. Large Deviations for Join the Shorter Queue. *Fields Institute Communications*, 28 :95–106, 2000.

BIBLIOGRAPHIE

- [62] K.-H. Wang, S.-L. Chuang, and W.-L. Pearn. Maximum entropy analysis to the N policy M/G/1 queueing system with a removable server. *Applied Mathematical Modelling*, 26 :1151–1162, 2002.
- [63] W.-C. Yueh. Eigenvalues of several tridiagonal matrices. *Applied Mathematics E-Notes*, 5 :66–74, 2005.
- [64] J. Zamarlik. Les entropies liées à une file d’attente. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 296 :533–536, 1983.
- [65] J. Zamarlik. Quantité d’information contenue dans une file d’attente. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 296 :411–413, 1983.
- [66] J. Ziv and A. Lempel. Compression of individual sequences by variable rate coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-24 :530–536, 1978.
- [67] A.M. Zubkov. Limit distribution for a statistical estimator of the entropy. *Theory of Probability and its Applications*, 18 :611–618, 1973.

Différents problèmes liés à l'estimation de l'entropie de Shannon d'une loi, d'un processus de Markov

Résumé de la thèse : On étudie à la fois l'estimation de l'entropie de Shannon d'une probabilité à partir d'observations indépendantes ou markoviennes, et l'estimation du taux d'entropie d'un processus markovien de sauts d'espace d'état fini, à partir d'observations continues ou discrètes. Plusieurs problèmes connexes sont traités. Certains apparaissent en amont de l'estimation, comme l'étude de la géométrie de la divergence de Kullback-Leibler en lien avec la transformation escorte. D'autres apparaissent comme des applications des résultats d'estimation obtenus. On construit ainsi des tests sur le niveau d'entropie d'une probabilité, à partir d'un principe de grandes déviations pour la suite des estimateurs empiriques de l'entropie d'une suite de variables indépendantes. On étudie également diverses propriétés en lien avec l'estimation de l'entropie et du taux d'entropie de files d'attente modélisées par des processus markoviens de naissance et de mort.

Several problems linked with the estimation of Shannon entropy of a distribution or Markov process

Thesis summary : This PhD report deals with the estimation of both Shannon entropy of distributions from independent and Markovian data and entropy rate of pure jump Markov processes with finite state space. In the latter case, different schemes of continuous and discrete observation of the processes are considered. Several related problems are studied. Kullback-Leibler information geometry linked with escort transformations come ahead of estimation. Others appear as applications of the estimation results. Tests on the entropy level of a distribution are derived from a large deviation principle satisfied by the sequence of empirical estimators of the entropy of a distribution. Properties related to entropy of birth and death Markovian queueing systems are also considered.

Discipline : Mathématiques et leurs interactions.

Indexation RAMEAU : Estimation (théorie de l'), entropie (théorie de l'information), Markov (processus de), grandes déviations, files d'attente (théorie des).

Indexation libre : Estimation, entropie de Shannon, processus de Markov, principe de grandes déviations, files d'attente.