



**HAL**  
open science

# Construction d'un montage de condensation de Bose–Einstein de rubidium et étude théorique d'un superfluide en rotation dans un anneau

Thomas Liennard

► **To cite this version:**

Thomas Liennard. Construction d'un montage de condensation de Bose–Einstein de rubidium et étude théorique d'un superfluide en rotation dans un anneau. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2011. Français. NNT: . tel-00667804

**HAL Id: tel-00667804**

**<https://theses.hal.science/tel-00667804>**

Submitted on 8 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS XIII  
INSTITUT GALILEE**

**LABORATOIRE DE PHYSIQUE DES LASERS**

Thèse présentée par  
**Thomas Liennard**

pour obtenir le grade de  
**Docteur en Sciences de l'Université Paris 13**

Sujet de la thèse :

**Construction d'un montage de condensation  
de Bose–Einstein de rubidium  
et étude théorique d'un superfluide  
en rotation dans un anneau**

Soutenue le 9 décembre 2011 devant le jury composé par :

M.	Frédéric CHEVY	Rapporteur
M.	Ludovic PRICOUPENKO	Rapporteur
M.	Jakob REICHEL	Examineur
M.	Luc MUSEUR	Examineur
M.	Vincent LORENT	Co-directeur de Thèse
Mme	Hélène PERRIN	Co-directrice de Thèse
M.	Paolo PEDRI	Membre invité



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Condensation de Bose-Einstein et superfluidité . . . . .	9
1.1.1	Condensation de Bose-Einstein . . . . .	10
1.1.2	Rôle des interactions et superfluidité . . . . .	12
1.2	Superfluidité en géométrie annulaire . . . . .	14
1.2.1	Etat actuel des connaissances . . . . .	15
1.2.2	Réalisation pratique . . . . .	15
1.2.3	Organisation du mémoire . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Vue d'ensemble du montage</b>	<b>19</b>
2.1	L'enceinte à ultra-vide . . . . .	19
2.2	Source d'atomes : piège magnéto-optique 2D . . . . .	23
2.3	Piège magnéto-optique . . . . .	25
2.3.1	Optiques . . . . .	26
2.3.2	Bobines de transport et PMO . . . . .	28
2.3.3	Bobines de compensation . . . . .	30
2.4	Transport magnétique . . . . .	31
2.4.1	Aspect mécanique . . . . .	31
2.4.2	Pilotage . . . . .	33
2.5	Piège quadrupolaire bouché . . . . .	35
2.5.1	Bobines et support . . . . .	35
2.5.2	Bouchon optique . . . . .	37
2.6	Contrôle informatique de l'expérience . . . . .	41
2.7	Imagerie . . . . .	41
2.7.1	Principe de l'imagerie par absorption . . . . .	43
2.7.2	Montage d'imagerie . . . . .	44
2.7.3	Obturbateur . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Système laser</b>	<b>51</b>
3.1	Une nouvelle source laser intense . . . . .	51
3.1.1	Diode laser télécom . . . . .	52

3.1.2	Amplificateur fibré . . . . .	53
3.1.3	Doublement de fréquence dans un cristal de ppLN . . . . .	54
3.1.4	Réalisation expérimentale du doubleur . . . . .	56
3.1.5	Performances du système . . . . .	60
3.2	Système laser à 780 nm . . . . .	62
3.2.1	Laser à cavité étendue . . . . .	63
3.2.2	Stabilisation en fréquence du laser à cavité étendue . . . . .	64
3.2.3	Asservissement par battement du doubleur . . . . .	65
3.2.4	Faisceau refroidisseur . . . . .	65
3.2.5	Faisceau repompeur . . . . .	67
3.3	Système laser à 532 nm . . . . .	67
3.3.1	Fonctionnement du laser, mode . . . . .	68
3.3.2	Longueur de cohérence . . . . .	69
3.3.3	Contrôle de l'intensité . . . . .	70
3.3.4	Stabilité du pointé . . . . .	71
3.3.5	Focalisation . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Production d'un condensat</b>	<b>79</b>
4.1	Première génération du montage . . . . .	79
4.1.1	Chargement et caractérisation du piège magnéto-optique 3D . . . . .	79
4.1.2	Chargement du quadrupole . . . . .	80
4.1.3	Essais de transport des atomes . . . . .	83
4.1.4	Limitations de ce système . . . . .	87
4.2	Nouvelle source d'atomes froids et condensation . . . . .	87
4.3	Chargement du quadrupole et transport . . . . .	90
4.3.1	Chargement du quadrupole . . . . .	90
4.3.2	Transport jusqu'à la cellule . . . . .	91
4.3.3	Modélisation du transport . . . . .	91
4.3.4	Obtention du condensat . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>103</b>
5.1	Contexte scientifique . . . . .	103
5.2	Système étudié . . . . .	104
5.2.1	Potentiel du piège en anneau . . . . .	104
5.2.2	Système de coordonnées sans dimensions . . . . .	104
5.2.3	Formulation hydrodynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	105
5.3	Calcul du spectre de Bogolyubov . . . . .	106
5.3.1	A partir de l'équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	106
5.3.2	Approche hydrodynamique . . . . .	108
5.3.3	Calcul analytique pour un condensat dans un tube infini . . . . .	109
5.3.4	Calcul numérique . . . . .	109
5.4	Simulation dynamique . . . . .	120
5.4.1	Anneau avec une barrière localisée . . . . .	120
5.4.2	Piège en rotation . . . . .	122

---

<b>6 Conclusion</b>	<b>133</b>
<b>Annexes</b>	
<b>A Simulation GPE</b>	<b>137</b>
A.1 Discrétisation de la fonction d'onde . . . . .	137
A.2 Méthode du splitting . . . . .	138
A.3 Calcul de l'état fondamental . . . . .	139
<b>B Calcul des excitations</b>	<b>141</b>
B.1 Calcul pour un condensat 2d . . . . .	143
<b>Bibliographie</b>	<b>144</b>



# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Hélène Perrin et Vincent Lorent qui m'ont accueilli dans leur laboratoire et qui m'ont encadr e avec énormement de patience tout au long de ces 4 années. J'ai beaucoup appris à leurs côtés.

Je remercie tous les membres du Jury pour l'intérêt qu'ils ont port e à mon travail. Merci   Jakob Reichel d'avoir pr esid e le jury de soutenance. Merci   Frédéric Chevy et Ludovic Pricoupenko d'avoir accept e d'être rapporteurs. Merci   Luc Museur pour avoir examin e mon travail. Merci beaucoup aussi à Paolo Pedri de m'avoir donn e de précieux conseils sur la partie théorique.

Je souhaite remercier tous les membres du Laboratoire de physique des lasers qui, de près ou de loin, ont contribué à la concrétisation de mon travail de thèse, et en particulier mes collègues de l'équipe Cometa. Merci   Laurent Longchambon et Paul-Eric Pottie pour leur soutien compétent. Merci   Karina Merloti et Romain Dubessy pour sa contribution à l'obtention du condensat.

Mes remerciements vont à Fabrice Wiotte et Julien de Lapeyre de l'atelier d'électronique et Albert Kaladjian de l'atelier mécanique pour leur aide précieuse dans la réalisation de l'expérience, ainsi qu'à Olivier Lopez de l'équipe HOTES pour sa capacité à dénicher les bugs cach es dans nos systèmes électroniques.

Je suis également reconnaissant aux assistantes Martine Alsters et Solen Guezennec pour leur soutien logistique et leur gentillesse.

Je remercie ma famille, mes amis et toutes les personnes qui m'ont aid e au cours de ces longues années d'études et de recherches, surtout dans les moments difficiles, et en particulier : mes parents pour leurs encouragements et leur persévérance, ma tante Jacqueline pour son soutien moral, son amie Michèle Pellet pour le temps qu'elle m'a consacr e et pour ses conseils judicieux et sa patience surtout lors de la préparation de mon expos e, de même que Françoise et Jacques Lepetit pour leurs encouragements. Je remercie aussi Philippe Nuss pour son soutien.

Je termine ces remerciements en dédiant cette thèse à Jacques Bouchez qui m'a donn e le goût pour la physique.





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Condensation de Bose-Einstein et superfluidité

Cette thèse s'inscrit dans un domaine de recherche plus général qui concerne l'étude des condensats de Bose-Einstein. La condensation de Bose-Einstein est un phénomène quantique décrit pour la première fois en 1924 par Einstein, lorsqu'il publie deux articles [1, 2], dans lesquels il généralise les travaux effectués par Bose sur le comportement statistique des photons[3]. Ce phénomène consiste en une transition de phase qui se produit lorsqu'un gaz de bosons (particules identiques décrites par une fonction d'onde symétrique) est refroidi à une température suffisamment basse (typiquement inférieure à  $1 \mu\text{K}$  dans un gaz dilué) pour que la longueur d'onde de Broglie qui donne l'échelle du comportement ondulatoire des atomes, devienne comparable ou supérieure à la distance moyenne entre atomes. Une fraction macroscopique des atomes se retrouve alors dans l'état quantique de plus basse énergie.

Ces prédictions d'Einstein ne furent initialement pas prises au sérieux, et il fallu attendre l'observation du phénomène de superfluidité dans l'hélium 4 en 1938 [4, 5] pour trouver les premiers indices expérimentaux de la possibilité de la condensation de Bose-Einstein, qui fut considérée comme un mécanisme possible pour expliquer ce phénomène de superfluidité [6, 7]. L'hélium 4 est l'un des premiers systèmes montrant un comportement quantique à une échelle macroscopique. La théorie d'Einstein est également partie intégrante de la théorie BCS de la supraconductivité [8], via l'association des électrons en paires de Cooper, bosons composites qui peuvent former une phase superfluide [9].

L'obtention d'un condensat de Bose-Einstein à l'équilibre thermodynamique dans les gaz dilués est impossible. En effet, aux températures où la condensation se produit, l'état d'équilibre est l'état solide. Heureusement, en travaillant à très basse densité, il est possible de ralentir le processus de solidification suffisamment pour avoir le temps de créer et d'observer un condensat de Bose-Einstein. En effet, ce processus fait principalement intervenir des processus de recombinaison à trois corps (le taux de recombinaison radiative à deux corps est extrêmement faible), tandis que le processus de thermalisa-

tion fait intervenir des collisions élastiques à deux corps. Un condensat dans un gaz dilué est un état métastable. Les densités nécessaires pour atteindre une durée de vie raisonnable sont de l'ordre de  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ou inférieures. De telles densités impliquent une température critique  $T_c$  pour la condensation de Bose-Einstein extrêmement faible, la température critique pour un gaz de particules de masse  $m$  et de densité  $n$  étant donnée par :

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left( \frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.1)$$

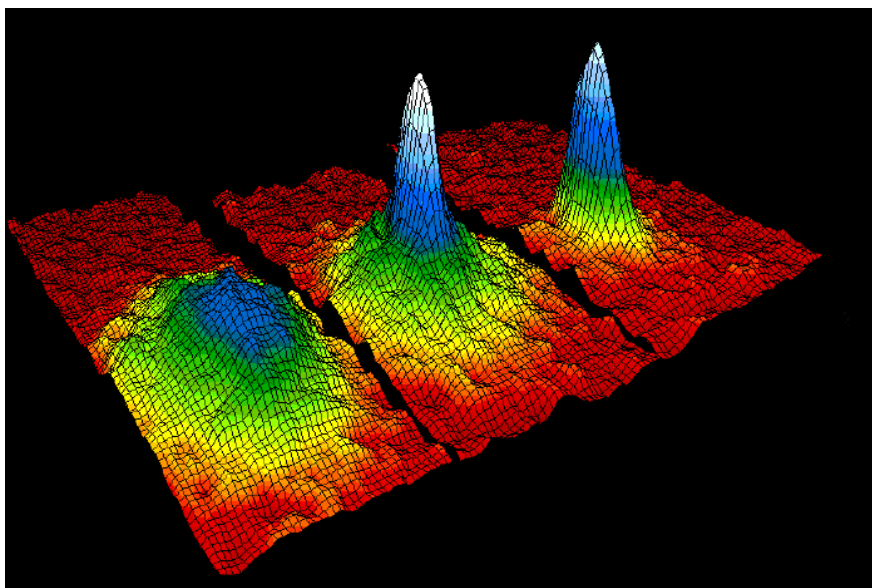
où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\zeta$  la fonction zeta de Riemann, avec  $\zeta(3/2) \approx 2.612$ . Pour les densités requises pour avoir une durée de métastabilité suffisante pour manipuler le condensat, la température critique est de l'ordre de  $1 \mu\text{K}$  ou inférieure. De ce fait, la réalisation d'un condensat avec un gaz dilué a posé de nombreuses difficultés aux expérimentateurs.

L'élément clé qui a permis d'observer la condensation de Bose-Einstein a été le développement de techniques permettant d'atteindre les très basses températures nécessaires. La première de ces techniques est le refroidissement laser. L'idée qu'on puisse utiliser la lumière laser pour refroidir des atomes a été proposée dans les années 70 par Wineland et Dehmelt [10], et Hänsch et Schawlow [11]. Les réalisations expérimentales ont suivi rapidement, tant sur les ions [12, 13] que sur les atomes neutres, avec les mélasses optiques [14]. Les températures mesurées dans les premières mélasses optiques sont de l'ordre de  $300 \mu\text{K}$  pour la plupart des alcalins, ce qui est cohérent avec la limite Doppler. Cette limite a été franchie peu après grâce aux mécanismes de refroidissement sub-Doppler dans les atomes possédant une structure hyperfine dans l'état fondamental [15, 16]. L'étape suivante fut la réalisation du piège magnéto-optique [17], qui permet à la fois de ralentir et de confiner les atomes.

Malgré ces progrès, le piège magnéto-optique seul ne permet pas d'atteindre les conditions de la condensation de Bose-Einstein. En effet, les forces répulsives causées par les diffusions multiples de photons limitent la densité atteignable, et l'émission spontanée limite la température. La solution viendra d'une autre technique de refroidissement, le refroidissement évaporatif. En capturant les atomes dans un piège magnétique [18, 19, 20], et en en chassant les plus énergétiques, il est possible de refroidir le gaz piégé [21, 22, 23]. C'est en combinant le refroidissement évaporatif avec une phase de pré-refroidissement laser que les premiers condensats de rubidium 87 et de sodium 23 furent finalement observés en 1995 [24, 25]. La figure 1.1 montre les premiers signaux de condensats obtenus dans le groupe d'Eric Cornell et Carl Wieman [24].

### 1.1.1 Condensation de Bose-Einstein

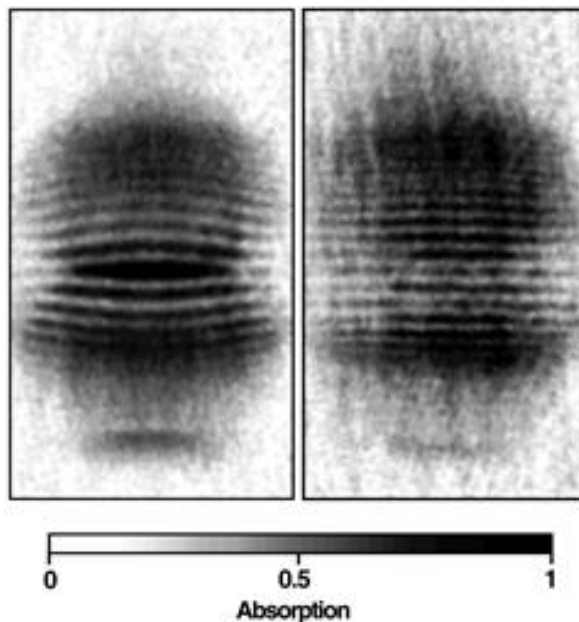
Le condensat de Bose-Einstein est un système qui présente des propriétés quantiques à une échelle macroscopique. Si les interactions interatomiques sont faibles, on peut considérer que tous les atomes partagent la même fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  et traiter les interactions par une approximation de champ moyen. Le condensat de Bose-Einstein est un système particulier en ce qu'il permet d'observer directement l'aspect ondulatoire de la matière à une échelle macroscopique. En effet, la densité du condensat peut être



**Figure 1.1** — Ces images montrent la distribution en impulsion d'un gaz d'atomes froids à différentes températures. Elles sont obtenues en faisant une image de la densité du nuage d'atomes après un temps de vol. La première image montre un gaz thermique. Le pic sur les deux dernières images est le condensat de Bose-Einstein. Sur l'image du milieu il est entouré d'un reste de nuage thermique, tandis que l'image de droite montre un condensat pur. Figure extraite de [24].

imaginée directement, donnant accès à  $|\psi(\vec{r})|^2$ , ce qui permet d'obtenir des images telles que celles montrées dans la figure 1.2.

Les gaz quantiques sont un système intéressant pour étudier de nombreux problèmes de physique quantique, car ils présentent des propriétés quantiques à une échelle macroscopique tout en pouvant être manipulés et observés aisément à l'aide de lasers ou de champs magnétiques. Par exemple, en utilisant des interférences entre faisceaux lasers, il est possible de construire des potentiels périodiques du même type que ceux auxquels sont soumis les électrons dans un métal, en ayant la possibilité de contrôler finement les caractéristiques de ces potentiels. Ce type de systèmes, appelés réseaux optiques a permis d'étudier des phénomènes quantiques, comme la transition superfluide - isolant de Mott [27]. L'étude de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire a permis de mettre en évidence la localisation d'Anderson [28, 29]. Les gaz quantiques ont également permis d'étudier les régimes de basse dimensionalité, en confinant des atomes fortement dans une ou deux directions, permettant l'étude de régimes fortement corrélés, tels que le régime de Tonks-Girardeau [30] en géométrie quasi-1D ou la transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [31] en géométrie quasi-2D.



**Figure 1.2** — Cette figure montre une image de la densité de deux condensats de Bose-Einstein superposés [26]. On y voit des franges d'interférences, similaires à celles observées quand on fait interférer deux parties d'un faisceau laser.

### 1.1.2 Rôle des interactions et superfluidité

Le concept original de la condensation de Bose-Einstein s'applique à un gaz parfait de bosons sans interactions. Dans un système d'atomes en interaction et dans la limite des basses énergies, on ne considère que les collisions en ondes s, et la force des interactions peut alors être décrite par un seul paramètre, la longueur de diffusion  $a$  [32]. Si la distance moyenne entre atomes est grande devant  $a$ , on peut en plus faire une approximation de champ moyen. La fonction d'onde pour le système à  $N$  corps  $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  peut alors être approximée par un état produit  $\psi(\vec{r}_1) \dots \psi(\vec{r}_N)$  pour lequel tous les atomes partagent la même fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$ , dont la dynamique est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii [33] :

$$\partial_t \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) + g |\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

où  $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ , qui diffère de l'équation de Schrödinger par l'ajout du terme  $g |\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t)$  représentant l'effet des interactions. On peut également écrire la fonction d'onde en terme d'une densité  $\rho = |\psi|^2$  et d'une phase  $\phi$ , ce qui donne  $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$ . On définit la vitesse  $\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi$ . On peut montrer [34] que  $\rho$  et  $\psi$  obéissent alors à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\vec{v} \rho) = 0$$

et l'équation d'Euler

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \left( V + g\rho - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = 0$$

Cette équation est similaire à l'équation d'Euler pour un fluide parfait en écoulement irrotationnel, et n'en diffère que par le terme de pression quantique  $\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho}$ . Soit un condensat dans un état stationnaire décrit par une fonction d'onde  $\psi_0$ . Un état proche de cet état stationnaire peut s'écrire  $\psi(t) = \psi_0 + \delta\psi(t)$  avec  $\delta\psi(t) \ll \psi_0$ . On peut alors décomposer  $\delta\psi(t)$  en une somme d'excitations élémentaires nommées modes de Bogolyubov, qui seront décrites plus en détail dans le chapitre 5. Si on considère une impureté se déplaçant à la vitesse  $v$  dans le fluide, les frottements entre cette impureté et le fluide se manifestent par l'émission d'excitations élémentaires. Le critère de Landau [34] indique que cela ne se produit que si  $v > v_c$  où  $v_c$  est une vitesse critique, qui est non nulle dans le cas d'un condensat en interaction. Ainsi, pour des vitesses en dessous de la vitesse critique, le condensat s'écoule sans frottements, on dit que c'est un superfluide.

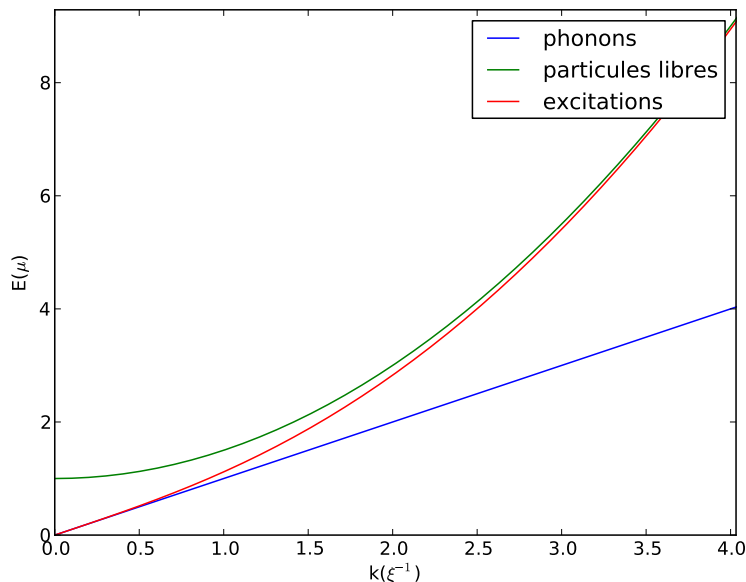
Plus précisément, considérons un superfluide de masse  $M$  en mouvement par rapport à une impureté à une vitesse  $\vec{v}$ . Le système étant invariant par translation dans l'axe du capillaire, l'impulsion  $p$  est un bon nombre quantique pour décrire ses excitations. On suppose qu'une excitation élémentaire d'impulsion  $\vec{p}$  et d'énergie  $\epsilon(\vec{p})$  apparaît dans le fluide. Si on se place dans le référentiel dans lequel le fluide est immobile, l'énergie totale du système fluide + excitation vaut  $E = E_0 + \epsilon(\vec{p})$  où  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental du superfluide, et l'impulsion vaut  $\vec{p}$ . Revenons maintenant dans le repère dans lequel l'impureté est fixe. L'énergie du système fluide + excitation y est donnée par la transformation de Galilée :

$$E' = E_0 + \epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}Mv^2. \quad (1.3)$$

On en déduit le changement d'énergie du superfluide correspondant à la création de l'excitation, qui vaut  $\delta E = \epsilon(\vec{p}) + \vec{p} \cdot \vec{v}$ . Le point important est que la création spontanée d'excitations n'est possible que si elle est énergétiquement favorable, ce qui implique que  $|pv| > \epsilon(\vec{p})$ . On en déduit donc le critère de Landau :

$$v > v_c = \min \frac{\epsilon(p)}{p}.$$

La vitesse critique peut être déterminée en connaissant la forme du spectre des excitations. Celui ci peut être étudié expérimentalement en utilisant la spectroscopie de Bragg [35]. Pour un condensat homogène en présence d'interaction, celle ci est montrée sur la figure 1.3. Pour des petites impulsions, on a des excitations de type phonon, d'énergie  $\epsilon(k) = \hbar kc$ , où  $c$  est la vitesse du son. Dans ce cas,  $c$  est également la vitesse critique, mais cela n'est pas toujours vrai, notamment pour un condensat inhomogène. Ce point sera discuté plus en détail dans le chapitre 5. Pour un condensat sans interactions, les excitations élémentaires correspondent à des particules libres en dehors du condensat, dont l'énergie est donnée par  $\epsilon(p) = \mu + \frac{p^2}{2M}$ , et la vitesse critique est nulle. Cela montre que les interactions jouent un rôle crucial dans le phénomène de la superfluidité. La limite entre ces deux régimes correspond à une longueur d'onde de l'ordre de la longueur de relaxation  $\xi$ , définie par  $\frac{\hbar^2}{2M\xi^2} = \mu$ .



**Figure 1.3** — Ce graphe montre le spectre des excitations  $\epsilon(k)$  pour un condensat homogène en présence d'interactions. Pour des petites impulsions, on a des excitations de type phonon, d'énergie  $\epsilon(k) = \hbar kc$ , où  $c$  est la vitesse du son. Pour les grandes impulsions, on retrouve la relation de dispersion d'une particule libre. On remarque que  $\frac{\epsilon(k)}{k}$  est toujours supérieur à  $c$ , qui est donc la vitesse critique dans ce cas.

## 1.2 Superfluidité en géométrie annulaire

L'étude d'un condensat de Bose-Einstein d'une vapeur atomique piégée dans un anneau est un paradigme pour le transport d'un superfluide. En effet cette géométrie permet de rendre réelles des conditions aux limites périodiques. Cette géométrie de piège dite doublement connexe stabilise un vortex de charge élevée [36, 37]. C'est également un environnement potentiellement riche pour l'étude de la propagation de solitons de différentes natures. On songe aux situations où un état hybride de soliton et de vortex est créé [38] ou encore à la propagation de soliton dans un milieu bi-dimensionnel régie par l'équation de Kadomtsev-Petviashvili [39]. C'est enfin un système modèle pour l'étude du passage de la situation de champ moyen où le paramètre d'ordre est assimilé à la fonction d'onde d'une particule à la situation d'un état quantique fortement corrélé où la fonction d'onde du système englobe toutes les particules de façon non séparable. Un exemple est l'état NOON, superposition macroscopique de deux états de courants opposés. Un tel état a été observé en physique de la matière condensée dans un SQUID [40]. Cette dernière situation est actuellement très étudiée dans la communauté scientifique des gaz quantiques. Une étude théorique récente a par exemple montré que des superpositions macroscopiques devraient se développer spontanément dans le cas d'un anneau unidimensionnel [41].

### 1.2.1 Etat actuel des connaissances

Les premières expériences de rotation d'un superfluide dans un anneau cylindrique tournant remontent aux années 1960 : une quantité d'hélium superfluide était plongée dans un baquet tournant à double parois [42]. Ces expériences ont montré qu'une circulation correspondant à un multiple de  $h/m$  restait stable.

Le confinement d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège en anneau a été réalisé pour la première fois en 2005 dans le groupe de D. Stamper-Kurn, avec un anneau d'un diamètre de quelques millimètres [43]. En 2007, le groupe de W. D. Phillips a réussi à induire des courants permanents de quelques quanta de circulation au moyen de transitions Raman mettant en jeu des faisceaux de Laguerre-Gauss dans un piège TOP percé par un faisceau laser dipolaire [37]. Ce même groupe a étudié la stabilité d'un courant permanent en présence d'une barrière de potentiel, dans un nouveau piège tout optique [44]. En 2008, le groupe de C. J. Foot a réalisé en piège en anneau basé sur une combinaison d'un piège magnétique habillé par onde rf et d'un potentiel optique [45], similaire à ce que nous envisageons de faire. En 2011, ce même groupe a réussi à produire un piège en anneau uniquement à l'aide de potentiels habillés modulés temporellement, suivant le même principe que le piège TOP [46, 47].

### 1.2.2 Réalisation pratique

Notre projet de piège en anneau se base sur la proposition écrite dans un article d'Olivier Morizot [48]. L'anneau est obtenu en utilisant un piège habillé décrit ci-dessous pour confiner les atomes sur une surface ellipsoïdale, et un potentiel dipolaire lumineux (réseau optique ou nappe de lumière) pour confiner les atomes dans un plan horizontal, l'intersection des deux pièges étant un anneau.

#### Piège habillé

L'élément principal pour la réalisation de notre anneau est un type de piège utilisant la combinaison d'un champ magnétique statique avec un champ radiofréquence, appelé le piège habillé. Ce type de piège a été proposé en 2001 par Oliver Zobay et Barry M. Garraway [49], et réalisé expérimentalement pour la première fois en 2003 [50]. Il utilise le couplage des sous niveaux Zeeman des atomes par un champ radiofréquence pour créer un potentiel adiabatique présentant un minimum sur une surface de champ magnétique constant sur laquelle l'écart entre sous niveaux Zeeman est égal à  $\hbar\omega_{rf}$ ,  $\omega_{rf}$  étant la fréquence de l'onde rf. En choisissant bien la géométrie du piège magnétique et la fréquence de l'onde rf, on peut créer différents types de pièges, tels que des coquilles ellipsoïdales, des pièges 2D, où bien des doubles puits [51]. Je vais maintenant donner une rapide explication du calcul du potentiel dans le piège habillé. Une démonstration plus complète se trouve dans [52].

On considère un atome soumis à un champ magnétique statique  $\vec{B}(\vec{r})$  et à un champ radiofréquence oscillant  $\vec{B}_{rf} \cos(\omega t)$  homogène et polarisé linéairement. On prend comme axe de quantification  $Z$  la direction locale du champ magnétique statique et on appelle  $X$  la direction perpendiculaire à  $Z$  contenant la composante du champ rf transverse au



champ statique. Le moment magnétique de l'atome est donné par  $\vec{\mu} = -g_F \mu_B \vec{F} / \hbar$  où  $g_F$  est le facteur de Landé,  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr et  $\vec{F}$  le moment cinétique de l'atome. Le Hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ s'écrit alors :

$$H(\vec{r}, t) = \frac{g_F \mu_B}{\hbar} [F_X B_{rf,X}(\vec{r}) \cos(\omega t) + F_Z (B(\vec{r}) + B_{rf,Z}(\vec{r})) \cos(\omega t)].$$

En l'absence de couplage avec le champ radiofréquence, les états propres sont les sous niveaux Zeeman, dont l'énergie est donnée par  $E = m_F \mu_B B$ . On peut noter que la composante de  $B_{rf}$  parallèle au champ statique n'intervient pas dans le couplage des sous niveaux Zeeman. En effet, elle ne peut induire que des transitions  $\pi$  vérifiant  $\Delta m_F = 0$ , pour lesquelles le désaccord de fréquence est très important (il correspond à la structure hyperfine, dans le domaine micro-onde). Cela permet de mettre le hamiltonien sous la forme simplifiée :

$$H(\vec{r}, t) = 2\Omega_{rf}(\vec{r}) F_X \cos(\omega t) + \Omega(\vec{r}) F_Z$$

avec les pulsations de Rabi respectives pour le champ rf et le champ statique :  $\Omega_{rf}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{g_F \mu_B}{\hbar} B_{rf,X}(\vec{r})$  et  $\Omega(\vec{r}) = \frac{g_F \mu_B}{\hbar} B(\vec{r})$ .

Le champ radiofréquence est résonnant avec le champ statique là où  $\omega = \Omega(\vec{r})$ . On pose donc  $\delta(\vec{r}) = \omega - \Omega(\vec{r})$ , et on recherche les états propres du hamiltonien dans le repère tournant à pulsation  $\omega$  autour de l'axe  $Z$  [53]. Après avoir appliqué l'approximation des ondes tournantes en négligeant les termes oscillant rapidement dans le repère tournant, on peut diagonaliser le Hamiltonien et trouver les niveaux habillés dont les énergies s'écrivent :

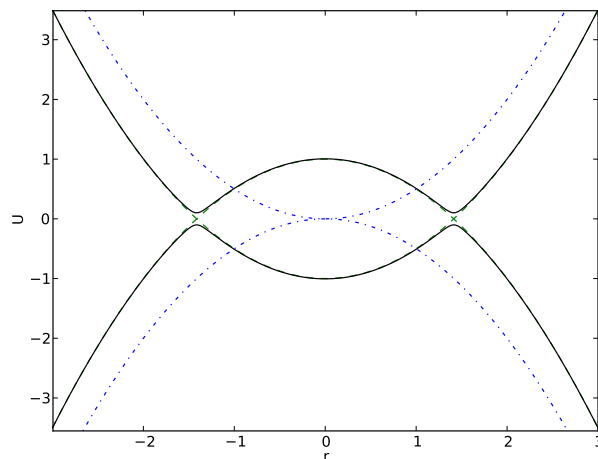
$$U(\vec{r})_{m'_F} = F \sqrt{(\hbar\omega - g_F \mu_B B(\vec{r}))^2 + \hbar^2 \Omega_{rf}(\vec{r})^2}. \quad (1.4)$$

Un graphe de l'énergie des niveaux habillés pour un système dans l'état hyperfin  $F = 1$  est montré dans la figure 1.4.

Le potentiel de piégeage est minimal sur la surface définie par  $\delta(\vec{r}) = 0$ , soit  $\hbar\omega = g_F \mu_B B(\vec{r})$ , qui est une surface isomagnétique pour le champ magnétique statique. Cette surface prend typiquement la forme d'une bulle ellipsoïdale dont le rayon peut être ajusté en variant la fréquence rf. On peut noter que  $\Omega_{rf}(\vec{r})$  dépend de l'angle entre le champ magnétique statique et la polarisation de la rf. Cela permet par exemple de réaliser des double puits [51], et peut conduire à la présence de "trous", où la polarisation de la rf est alignée avec le champ magnétique statique et  $\Omega_{rf}$  devient nul [54]. Pour éviter ce problème, notre piège en anneau utilisera une onde rf de polarisation circulaire.

## Piège en anneau

La géométrie envisagée pour notre piège est celle d'un anneau de Saturne, de rayon ajustable dans une plage allant environ de 20 à 100  $\mu\text{m}$ , avec une fréquence d'oscillation dans la direction radiale d'environ 500 Hz, et une fréquence d'oscillation dans la direction verticale de plusieurs kHz. La forme de ce piège est montrée sur la figure 1.5. Le confinement radial est fourni par le piège habillé. On utilise pour cela un champ magnétique statique quadrupolaire, d'axe vertical, et une onde rf polarisée circulairement dans l'axe du quadrupole. Cette configuration permet d'obtenir un potentiel de



**Figure 1.4** — La courbe en pointillés représente l'énergie des sous niveaux Zeeman dans un piège magnétique harmonique en fonction de la position. En présence d'un champ radiofréquence, les niveaux du système atome+champ sont séparés par un écart de  $\hbar\omega$ , et se croisent là où la fréquence du champ rf est résonnante avec le champ magnétique statique. Ces niveaux sont représentés par la courbe en tirets sur le graphe. Le couplage entre le champ rf et le champ magnétique statique produit un croisement évité, ce qui donne les niveaux habillés représentés par le trait continu.

piégeage symétrique par rotation, dont le minimum se situe sur une surface en forme de sphère aplatie.

Pour obtenir un anneau, il faut rajouter un confinement dans l'axe vertical. Il est possible de l'obtenir de plusieurs façons. On peut moduler rapidement la position et le rayon du piège habillé selon le même principe qu'un piège TOP, et obtenir ainsi un anneau. C'est le principe du TAAP, proposé en 2007 [46] et réalisé en 2011 dans l'équipe de Chris Foot[47]. Une autre méthode utilisée dans plusieurs expériences consiste à utiliser un potentiel dipolaire optique pour assurer ce confinement[55]. C'est la méthode que nous allons utiliser. Nous prévoyons d'utiliser un laser à 532 nm pour assurer le confinement vertical, piégeant ainsi les atomes dans un minimum d'intensité lumineuse afin de minimiser les pertes par émission spontanée. Deux solutions sont envisagées : soit un réseau optique créé en faisant interférer deux branches du faisceau laser, soit une nappe de lumière obtenue à l'aide d'une lame de phase inhomogène, comme celle utilisée dans [55].

Comme nous le verrons par la suite ce type de piège autorise des études de propagation d'un superfluide à 3 dimensions comme à 2 dimensions. Il sera par contre plus difficile de réaliser un milieu à 1 dimension sans adjoindre un élément s'ajoutant aux paramètres de raideur du piège.

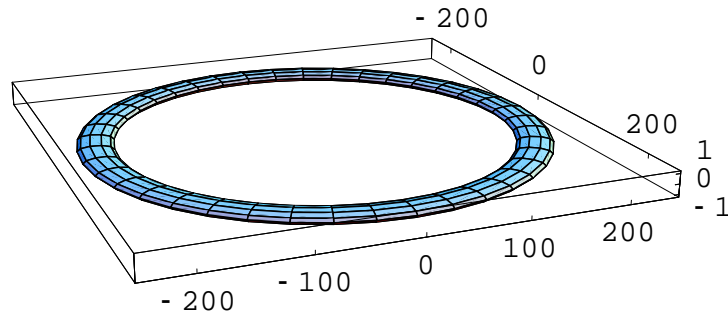


Figure 1.5 — Piège en anneau. Figure extraite de [48].

### 1.2.3 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 donne une description du montage expérimental. J’y décris les divers éléments que sont la source d’atome, le piège atomique, toutes les parties mécaniques, le contrôle informatique et le dispositif d’imagerie. La partie optique et lasers fait l’objet du chapitre 3. Des innovations substantielles ont été apportées par rapport à la version précédente du montage décrit dans la thèse d’Olivier Morizot [52]. En substance j’y décris la source laser fibrée montée au laboratoire dont nous faisons à présent usage pour le refroidissement laser et la détection par imagerie d’absorption. Je décris également les caractéristiques du laser à 532 nm utilisé pour boucher le piège quadrupolaire dans la zone de champ magnétique nul.

Le chapitre 4 explicite ce puits de potentiel et le protocole expérimental qui aboutit à la réalisation du condensat atomique.

Dans le chapitre 5 je développe l’étude numérique des propriétés hydrodynamiques du condensat piégé dans un anneau de géométrie semblable à celle qui sera expérimentée. Cette étude est en deux parties : dans un premier temps j’analyse le spectre d’excitations du condensat à température nulle, j’examine ensuite la dynamique de propagation de ce condensat.

Je fais état du bilan de ces études tant expérimentales que théoriques dans un chapitre de conclusions. Quelques perspectives à moyenne échéance y sont également discutées.

# Chapitre 2

## Vue d'ensemble du montage

Dans ce chapitre, je présenterai le dispositif expérimental que j'ai monté pendant ma thèse pour obtenir un condensat de Bose-Einstein, dans le but de le transférer ensuite dans un piège en anneau et d'étudier ses propriétés de superfluidité. Pour aboutir au condensat, nous utilisons le schéma classique : refroidissement laser d'un gaz de rubidium 87 dans un piège magnéto-optique, transfert dans un piège conservatif, et refroidissement évaporatif. Pour des raisons d'optimisation de l'accès optique et de la durée de vie du condensat, le piège magnéto-optique et le refroidissement évaporatif se font dans deux parties séparées de l'enceinte à vide, reliées entre elles par un tube de pompage différentiel (un tube étroit qui permet de maintenir une différence de pression entre les deux parties de l'enceinte). Le déplacement des atomes entre les deux parties se fait par transport mécanique du piège magnétique. Pour améliorer les performances du piège magnéto-optique et limiter les pertes par collisions dans la première partie du transport, nous utilisons un piège magnéto-optique 2D installé dans une troisième partie de l'enceinte comme source d'atomes. Je donnerai d'abord une description de l'enceinte à vide (2.1), du piège magnéto-optique 2D (2.2) et du piège magnéto-optique 3D (2.3), du système de transport magnétique (2.4) et du piège dans lequel a lieu le refroidissement évaporatif (2.5). Je parlerai aussi du dispositif de contrôle informatique de l'expérience (2.6), et du système d'imagerie (2.7). La description détaillée du système laser sera donnée au chapitre 3.

### 2.1 L'enceinte à ultra-vide

Le refroidissement d'atomes neutres et la création d'un condensat de Bose-Einstein nécessitent de travailler sous ultra-vide. En effet, les collisions entre atomes à température ambiante et atomes refroidis entraînent essentiellement la perte des atomes refroidis, selon la loi  $N(t) = N_0 e^{-\Gamma_{vide} t}$  où  $\Gamma_{vide}$  est le taux de collisions avec le gaz résiduel en nombre de collisions par seconde, qui vaut environ  $\Gamma_{vide} = \alpha P$  avec  $P$  la pression

en millibars et  $\alpha \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{mbar}^{-1} \text{s}^{-1}$  pour du rubidium à température ambiante<sup>1</sup>.

Ceci est d'autant plus important que dans notre cas, le condensat est obtenu après une période de refroidissement évaporatif [58, 59] qui peut durer jusqu'à 30 secondes. Pour effectuer le refroidissement évaporatif, il est donc nécessaire de travailler à des pressions plus petites que  $10^{-10}$  mbar. Cette condition, combinée avec l'exigence de pouvoir charger le piège magnéto-optique en un temps raisonnable, nous a conduit à utiliser un dispositif dans lequel le piège magnéto-optique et le condensat sont obtenus dans deux chambres séparées par un tube de pompage différentiel permettant d'obtenir des durées de vie de plus de 30 secondes dans la partie où l'on réalise la condensation. Ceci est d'autant plus important qu'au début de ma thèse, le piège magnéto-optique était chargé directement à partir d'une vapeur, ce qui implique une pression de l'ordre de  $10^{-9}$  mbar. Afin d'améliorer les performances du montage, nous avons ensuite installé un piège magnéto-optique 2D, placé à angle droit par rapport à l'axe du transport magnétique, qui génère un faisceau d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  ralenti à partir duquel le piège magnéto-optique 3D est chargé. Un plan de la chambre à vide est montré dans la figure 2.1.

Le piège magnéto-optique est réalisé dans une chambre métallique octogonale (appelée « l'octogone »)<sup>2</sup>. Elle comporte deux hublots CF 63 et quatre hublots CF 40 par lesquels passent les faisceaux du piège magnéto-optique, plus deux hublots CF 16. Le premier hublot, situé dans l'axe du piège magnéto-optique 2D, est utilisé pour mesurer la fluorescence du piège magnéto-optique 3D à l'aide d'une photodiode. Le deuxième, situé dans l'axe du transport, peut servir à observer le piège magnéto-optique 3D, et peut aussi être utilisé pour faire de l'imagerie par absorption dans l'axe du transport, afin d'aligner l'axe du transport magnétique avec le tube de pompage différentiel. L'octogone est pompé par une pompe ionique de marque Meca 2000, de capacité  $25 \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette chambre est reliée à une cellule en verre, appelée « cellule science », dans laquelle a lieu la condensation, et au piège magnéto-optique 2D qui sert de source d'atomes au moyen de deux tubes de pompage différentiel. Une vue détaillée de l'octogone est montrée dans la figure 2.2.

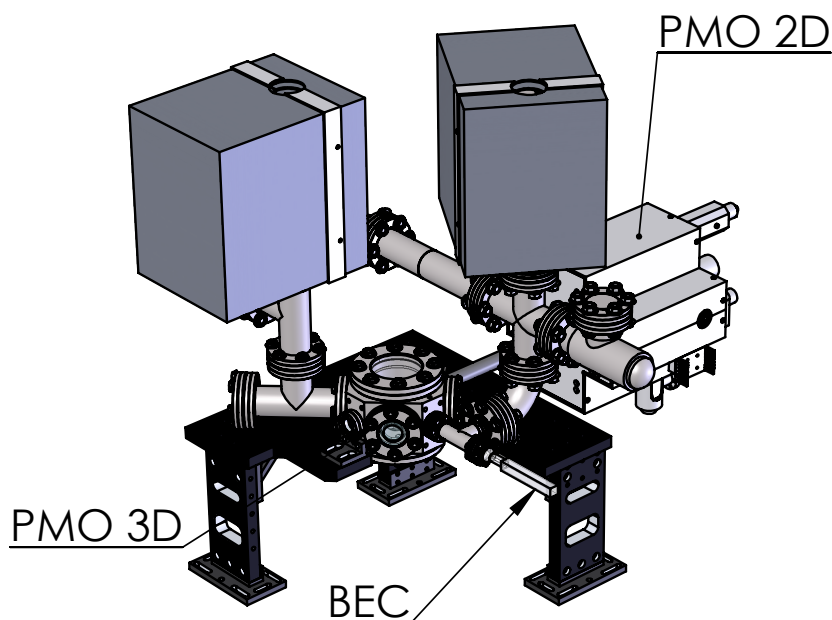
La cellule science est une cellule de spectroscopie de marque Starna, réalisé en quartz. Elle possède une section intérieure carrée de  $10 \times 10$  mm de parois d'épaisseur 1,25 mm et une longueur de 83,5 mm. Les parois extérieures de la cellule sont recouvertes d'un traitement anti-reflet<sup>3</sup>. Nous avons mesuré la transmission d'un faisceau 780 nm et 532 nm au travers de la cellule, et trouvé une transmission d'environ 90 %, les pertes étant dues aux faces intérieures de la cellule, qui ne sont pas traitées.

La cellule est reliée à l'octogone par un tube de pompage différentiel de diamètre 4 mm et de longueur 60 mm, suivi d'un Té CF 16 pour le raccordement des pompes. Ce tube permet d'assurer un excellent vide ( $10^{-11}$  mbar) dans la cellule science, afin de

1. Le taux de collisions avec le gaz résiduel vaut  $\Gamma_{vide} = n' \sigma' v'$  où  $n'$  est la densité du gaz résiduel,  $\sigma'$  sa section efficace de collision avec le gaz piégé et  $v'$  sa vitesse moyenne. En considérant le gaz résiduel comme un gaz parfait, on a  $n' = \frac{P}{k_B T'}$  et  $v' = \sqrt{\frac{8k_B T'}{\pi m'}}$ , ce qui donne  $\Gamma_{vide} = \frac{\sigma P}{\sqrt{\pi m' k_B T'}/8}$  [56, 57]

2. Réalisé par la société ASTEMEC, en acier 316

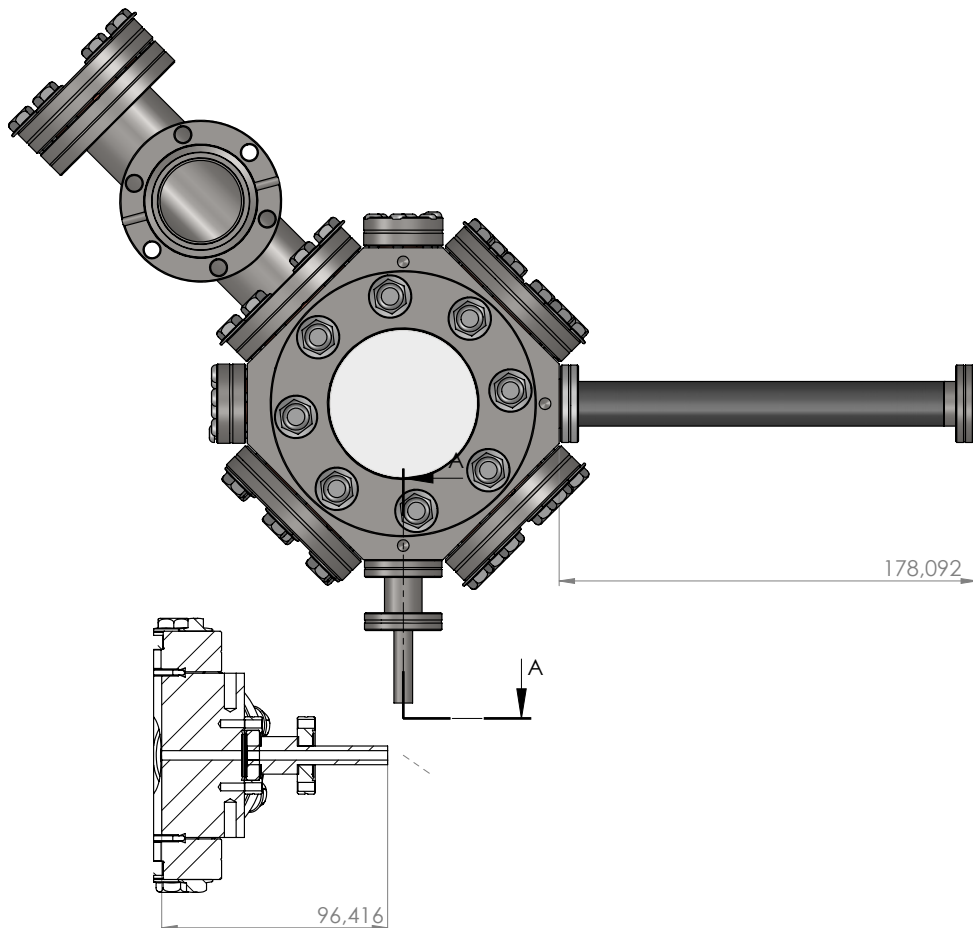
3.  $R < 0,5\%$  à 532 nm et  $R < 1\%$  sur 650-1100 nm



**Figure 2.1** — Ce schéma montre une vue générale de l'enceinte à vide. On y voit l'octogone au milieu, relié à la cellule science en bas à droite et au piège magnéto-optique 2D derrière. Cette dernière partie a été rajoutée pendant la dernière année de ma thèse.

maximiser la durée de vie des atomes. Le port de l'octogone sur lequel ce tube est fixé est percé d'un trou de diamètre 4 mm, contrairement aux autres ports CF16 dont le diamètre est de 16 mm. Celui-ci était initialement prévu pour maintenir une différence de pression avec le piège magnéto-optique 2D, mais les contraintes d'encombrement nous ont conduit à mettre celui-ci à une plus grande distance de l'octogone que prévu, et ce trou aurait risqué de bloquer le passage du jet atomique produit par le piège magnéto-optique 2D. Lors de son installation, nous avons donc fait pivoter l'octogone vers la droite pour placer le trou au niveau du tube de pompage différentiel vers la cellule science. La longueur totale du tube de vide différentiel est alors de 96 mm, voir figure 2.2.

La partie science de l'enceinte à vide est pompée par une pompe ionique Varian de  $20\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$ , et une pompe à sublimation de titane. Toutes les pompes ioniques sont blindées magnétiquement. La pression dans l'enceinte est estimée par la mesure du courant des pompes ioniques. Après l'étuvage, ce courant est en dessous du seuil de détection de la pompe et on mesure directement la durée de vie des atomes pour connaître la qualité du vide. L'octogone est également relié au piège magnéto-optique 2D, que je décrirai



**Figure 2.2** — Plan de l’octogone. L’un des ports CF16 de l’octogone dispose d’un petit trou de pompage différentiel, initialement prévu pour le piège magnéto-optique 2D, mais maintenant placé du côté du passage vers la cellule science.

en détail dans la section (2.2).

Après l’assemblage, l’enceinte à vide a été étuvée avec des cordons chauffants à une température entre 200 et 300 degrés, tout en étant pompée par une pompe turbomoléculaire, branchée sur trois vannes situées sur les parties octogone, science et piège magnéto-optique 2D. Des thermocouples placés en différents points de l’enceinte permettent de mesurer la température au cours de l’étuvage, et on ajuste la puissance dans les différents cordons chauffants pour maintenir une température uniforme et éviter d’avoir des points froids. Lorsque la pression descend en dessous de  $10^{-8}$  mbar, mesurée en regardant le courant des pompes ioniques, la pompe turbo est retirée et le

pompage se fait avec les pompes ioniques. L'opération d'étuvage prend environ deux semaines.

L'octogone est fixé sur une plaque percée placée à une hauteur de 43 cm par rapport à la table optique. Une deuxième plaque est située plus haut, et est utilisée pour supporter le poids des pompes ioniques et fixer les optiques pour l'axe vertical du piège magnéto-optique. Elle est visible en haut à droite de la photographie de la figure 2.3.

## 2.2 Source d'atomes : piège magnéto-optique 2D

Au début de ma thèse, le PMO 3D était chargé à partir d'une vapeur de rubidium, provenant d'une ampoule placée dans un raccord flexible entouré de cordons chauffants, séparé de l'octogone par une vanne. Le raccord permettait de briser l'ampoule de rubidium par flexion une fois le vide obtenu. La pression de rubidium dans l'octogone pouvait être contrôlée en jouant sur la température de la réserve et sur l'ouverture de la vanne. Mais la pression relativement élevée nécessaire pour charger le PMO 3D limitait la durée de vie des atomes dans l'octogone à environ une seconde. Cela causait une perte importante d'atomes lors de la première partie de leur transport vers la cellule science. Voir paragraphe 4.1.3 et figure 4.3.

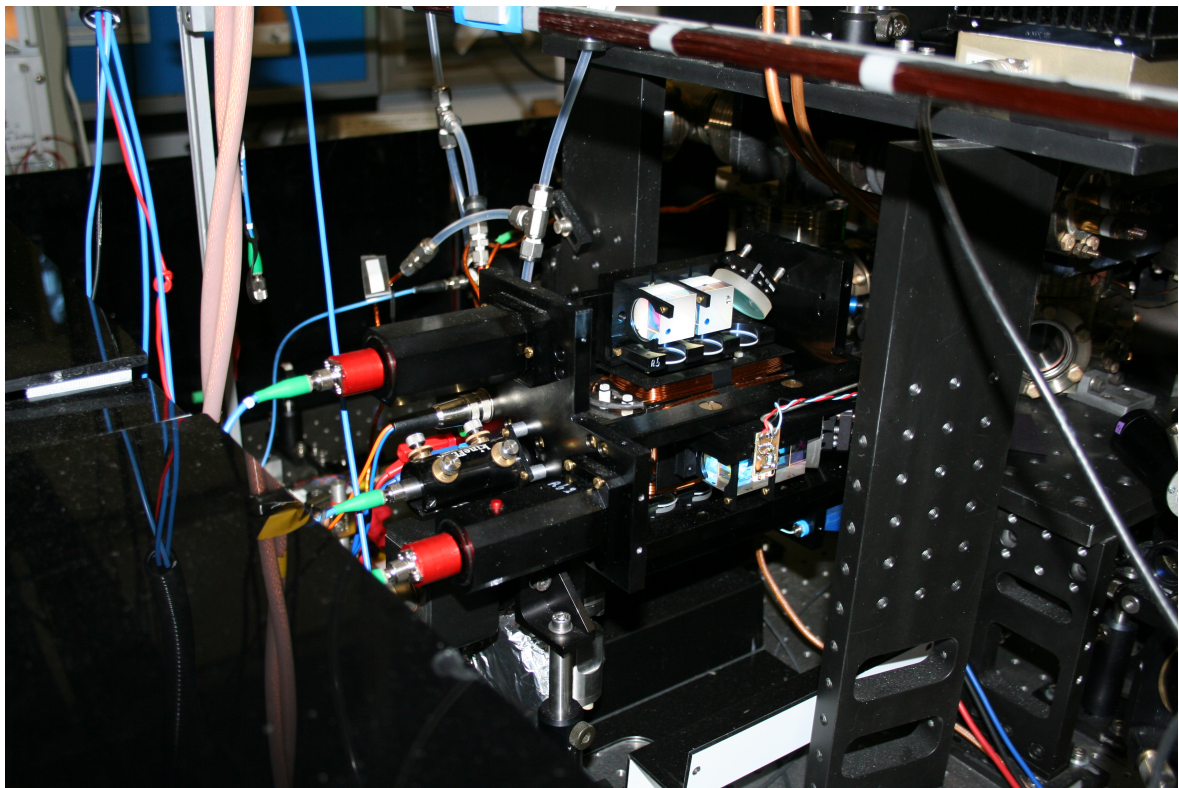
Pour éviter ces pertes, il faut réduire la pression dans l'octogone, ce qui implique de dissocier la source d'atomes de l'enceinte du piège magnéto-optique. Par ailleurs, la vitesse des atomes provenant de cette source doit être inférieure à la vitesse de capture du piège magnéto-optique, qui est de l'ordre de  $10\text{m.s}^{-1}$  [60]. Plusieurs types de sources d'atomes lents sont couramment utilisées pour charger des pièges magnéto-optiques, dont le ralentisseur Zeeman [61], et le piège magnéto-optique 2D [62]. C'est la solution que nous avons retenue, car elle offre de bonnes performances et nous avons la possibilité d'acheter un piège magnéto-optique 2D compact à la fiabilité prouvée.

Le piège magnéto-optique dans l'octogone est alimenté par un jet d'atomes issu d'un piège magnéto-optique 2D acheté au laboratoire SYRTE, de conception décrite en détail dans la thèse de Patrick Cheinet [63], dont une photo est montrée dans la figure 2.3.

Ce piège fonctionne sur le même principe qu'un piège magnéto-optique 3D, mais en ne refroidissant que dans les deux directions perpendiculaires à l'axe du piège. Seuls les atomes ayant une vitesse axiale suffisamment faible ont le temps d'être refroidis, et sortent aux deux extrémités du piège sous la forme d'un jet. Un faisceau pousseur placé dans l'axe du piège permet de favoriser le côté qui donne sur l'octogone. L'enceinte à vide de ce piège magnéto-optique 2D est constituée d'un parallélépipède allongé en titane, fermé par 4 hublots rectangulaires mesurant  $90 \times 25\text{mm}$  pour les faisceaux de refroidissement et par un hublot circulaire à une extrémité pour permettre le passage du pousseur. Du côté pousseur, on trouve une pompe ionique Varian  $2\text{L.s}^{-1}$  et un four contenant une ampoule de rubidium, servant de source d'atomes. La pression dans l'enceinte du piège magnéto-optique 2D est de  $10^{-9}$  mbar.

Ce four est relié au reste du piège magnéto-optique 2D par une vanne, et est chauffé par un cordon chauffant. Il est réalisé avec un tube de titane à paroi mince. Lors de l'installation sur le montage, après la mise sous vide, on a utilisé une pince pour écraser





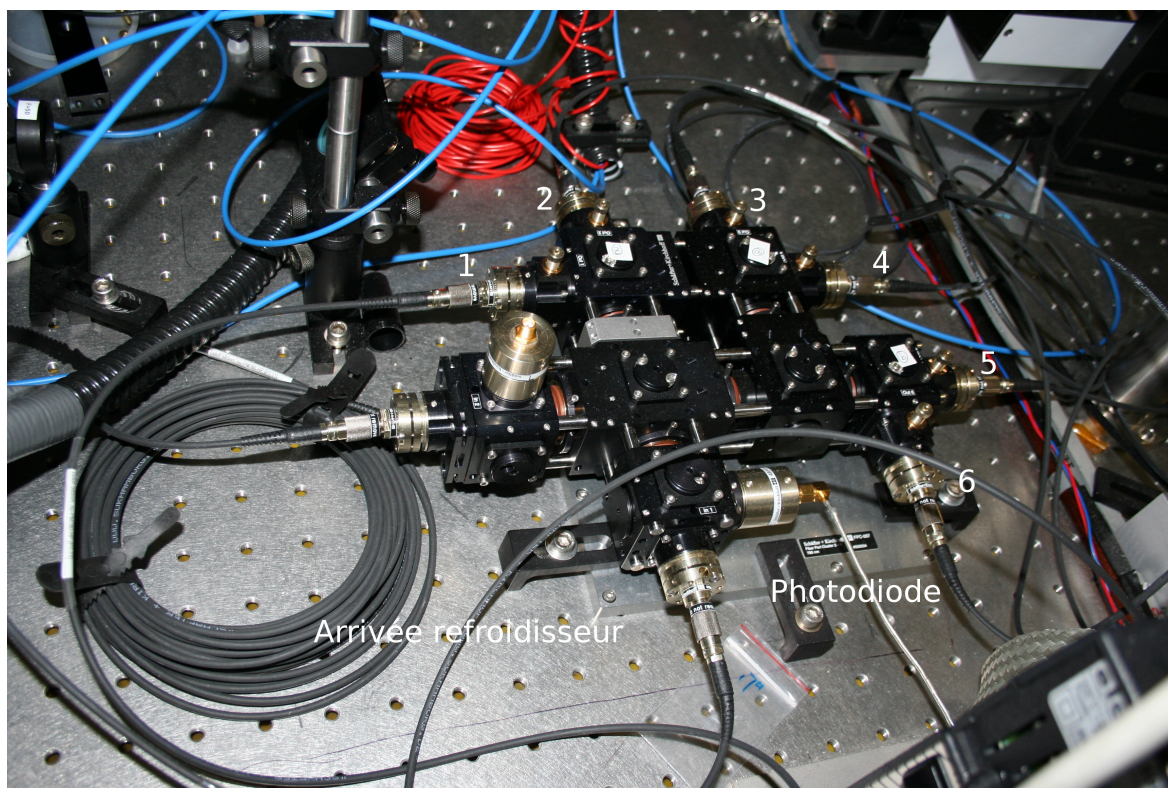
**Figure 2.3** — Le piège magnéto-optique 2D capot ouvert. On peut voir les colli-mateurs fibrés, les cubes et les lames utilisées pour créer les faisceaux de refroidis-sement. Une photodiode permet de mesurer l'intensité d'un des faisceaux de refroi-dissement après rétro-réflexion. Elle permet de mesurer l'absorption d'un faisceau à résonance par le rubidium lors de ses deux passages dans la cellule, afin de régler la pression dans l'enceinte, qui est de l'ordre de  $10^{-8}$  mbar.

légèrement le tube afin de briser l'ampoule de rubidium à l'intérieur. A l'autre extrémité de l'enceinte en titane se trouve un trou de diamètre 1,5 mm, par lequel sort le faisceau d'atomes. Ce trou est suivi d'une pièce en graphite usinée avec une ouverture conique, servant à absorber les atomes de rubidium provenant de la vapeur, et permettant de maintenir un bon vide côté octogone malgré la pression relativement élevée dans le piège magnéto-optique 2D. De ce côté, le piège magnéto-optique 2D est relié à l'octogone par un tube de diamètre 16 mm de longueur 18 cm.

Le refroidissement transverse des atomes dans chacun des deux axes est assuré par trois faisceaux rétro-réfléchis, ce qui permet d'allonger la zone de refroidissement. Pour chaque axe, le faisceau arrive d'une fibre dans un collimateur créant un faisceau elliptique, et est séparé en trois à l'aide de deux cubes séparateurs de polarisation, de deux lames  $\frac{\lambda}{2}$  et d'un miroir à 45 degrés réfléchissant les faisceaux vers l'enceinte. Chacun des faisceaux passe une lame  $\frac{\lambda}{4}$  pour être polarisé circulairement avant de passer dans l'enceinte à vide. De l'autre côté de l'enceinte, chaque faisceau passe une lame  $\frac{\lambda}{4}$  avant d'être rétro-réfléchi par un miroir. Utiliser des faisceaux rétro-réfléchis permet de diviser par deux la puissance laser requise pour le fonctionnement du piège magnéto-optique 2D et permet un meilleur équilibre des faisceaux si le profil transverse de ceux-ci n'est pas homogène. Une troisième fibre amène le faisceau pousseur. Son collimateur est placé dans un support qui permet de régler la position du faisceau pousseur en rotation et en translation pour optimiser le chargement du piège magnéto-optique 3D. Le champ magnétique utilisé pour le piège magnéto-optique 2D est généré par deux paires de bobines rectangulaires de 100 tours dans lesquelles circule un courant de 1,7 A, produisant un gradient de  $22 \text{ G.cm}^{-1}$ . La puissance laser utilisée est de 60 mW par axe et 6 mW pour le faisceau pousseur.

## 2.3 Piège magnéto-optique

La première étape vers l'obtention du condensat est la création d'un nuage d'atomes froids par un piège magnéto-optique 3D. Ce piège utilise 3 paires de faisceaux laser contra-propageants de polarisations circulaires opposées deux à deux, désaccordés de  $-3\Gamma$  par rapport à la transition  $5S_{1/2}, F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}, F = 3$  du rubidium et un champ magnétique quadrupolaire pour ralentir et piéger les atomes [17]. Un faisceau repompeur est superposé aux faisceaux de refroidissement pour ramener les atomes qui se désexcitent vers le niveau hyperfin  $5S_{1/2}, F = 1$  dans la transition cyclante. Le champ magnétique est fourni par une paire de bobines qui serviront également à créer le piège magnétique pour le transport des atomes vers la cellule science. Ces bobines seront décrites en détail dans la section 2.3.2. Pendant la phase de piège magnéto-optique, elles sont parcourues par un courant de 2 A, ce qui correspond à un gradient de  $9 \text{ G.cm}^{-1}$ . Je parlerai d'abord de la partie optique dans la section 2.3.1, puis des bobines dans la section 2.3.2.



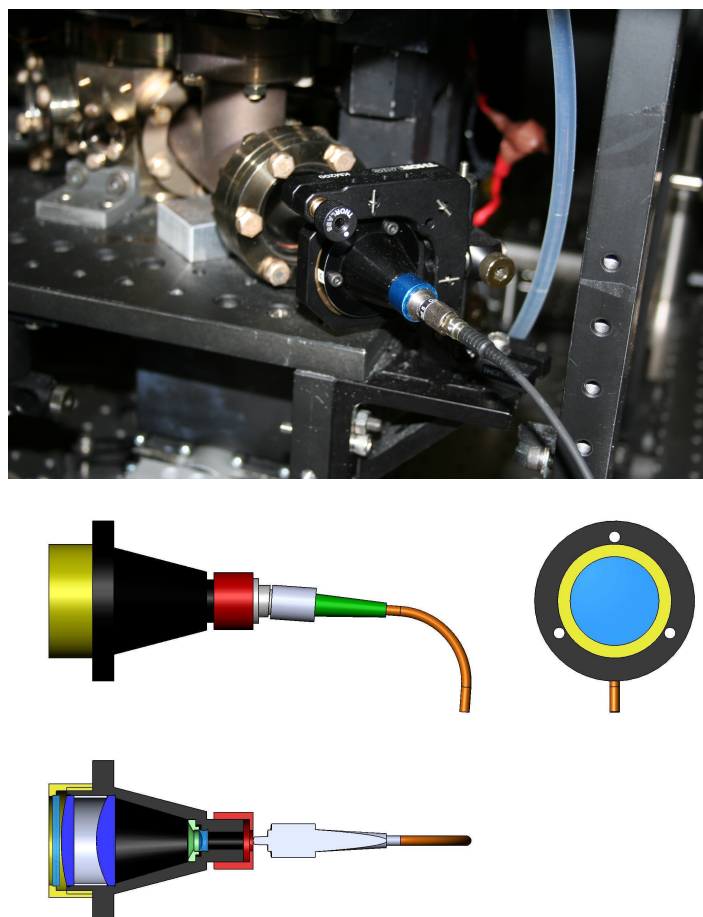
**Figure 2.4** – Le refroidisseur et le repompeur arrivent par la fibre du bas. Le système permettrait de les faire arriver dans deux fibres séparées, mais nous les combinons déjà sur le banc optique pour les deux axes du piège magnéto-optique 2D. Les fibres numérotées de 1 à 6 vont vers les collimateurs de sortie. Toutes les fibres sont des fibres monomodes à maintien de polarisation.

### 2.3.1 Optiques

Le laser de refroidissement est injecté avec le laser repompeur dans une fibre optique monomode à maintien de polarisation provenant du banc laser. Il est séparé en 6 faisceaux qui repartent dans 6 fibres à maintien de polarisation par un système de séparation commercial compact<sup>4</sup>. Des lames de polarisation intégrées au système permettent de régler l'équilibre des puissances entre les six fibres de sortie, et une lame 1% ainsi qu'une photodiode intégrée à l'assemblage permettent de mesurer l'intensité du laser en entrée. L'efficacité de couplage du système est typiquement de 90 %.

Les faisceaux sont ensuite agrandis par des collimateurs de conception similaire à ceux décrits dans [63], qui produisent un faisceau de diamètre à  $\frac{1}{e^2}$  égal à 24 mm diaphragmés à un diamètre de 1 pouce. Ces collimateurs incluent une lame  $\frac{\lambda}{4}$  pour obtenir une polarisation circulaire en sortie. Ils sont fixés sur des montures pour miroir 2 pouces de chez Thorlabs à l'aide d'une bague d'adaptation. Le faisceau vertical montant est renvoyé à l'aide de miroirs 2 pouces pour des raisons d'encombrement. Les autres vont directement du collimateur à un hublot de l'octogone. L'alignement de chaque axe

4. Système FiberPort cluster de Schäfter Kirchhoff



**Figure 2.5** – Les collimateurs utilisés ont été réalisés sur mesure par l’atelier du SYRTE. Ils utilisent trois lentilles de focales -6 mm, 50 mm et 100 mm, et sont beaucoup plus compacts que les collimateurs commerciaux habituels qui n’utilisent qu’une lentille. Ils ont une longueur de 57,4 mm hors fibre pour une focale équivalente de 133 mm, et intègrent également une lame  $\frac{\lambda}{4}$  pour obtenir les polarisations circulaires nécessaires pour le piège magnéto-optique. L’image du haut montre un collimateur dans son support orientable, et celle du bas un fichier de CAO sur lequel on voit, de droite à gauche, les lentilles et la lame quart d’onde.

se fait en centrant le faisceau sur des mirettes en papier placées sur les hublots de l'enceinte. En fonctionnement normal, la puissance laser utilisée est de 500 mW, et l'intensité au centre des faisceaux est de  $830 \mu W \cdot cm^{-2}$ , ce qui correspond à un paramètre de saturation pour les six faisceaux, en comptant les pertes sur les hublots, de  $s = 0,15$ .

### 2.3.2 Bobines de transport et PMO

Le champ magnétique pour le piège magnéto-optique 3D et le transport des atomes est fourni par une paire de bobines placées au dessus et en dessous de l'enceinte à vide. L'écartement des bobines est de 13 cm, fixé par les dimensions de l'octogone, et leur diamètre intérieur est de 4 cm pour laisser un passage au faisceau de refroidissement. Celles-ci sont réalisées en fil de cuivre plat de dimensions 2,8 mm par 0,8 mm recouvert d'une couche d'isolant de 0,05 mm d'épaisseur, et constituées d'un empilement de 10 couches, chaque couche faisant 50 tours. Elles ont été réalisées en enroulant le fil sur un tube de Delrin équipé de deux joues en Téflon, fixé sur un des tours de l'atelier de mécanique. Une personne faisait tourner le mandrin du tour à la main en s'assurant du bon alignement du fil, tandis qu'une autre maintenait la tension du fil. Afin d'assurer leur solidité et d'améliorer la dissipation thermique, les bobines sont noyées dans de la résine epoxy<sup>5</sup>. Les bobines sont placées dans un support en Dural dans lequel se trouve un circuit de refroidissement à eau, la puissance dissipée par les bobines étant importante. La figure 2.6 montre une vue de ce support.

Le gradient a été mesuré en déplaçant une sonde de champ magnétique le long de l'axe des bobines. Le résultat de cette mesure est montré dans la figure 2.7. Le gradient mesuré est de  $4.5 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour un courant de 1 ampère. Cette mesure a également permis de déterminer précisément la hauteur du zéro de champ magnétique, et d'ajuster le support des bobines pour que cette hauteur soit identique à celle du tube de pompage différentiel séparant l'octogone de la cellule science.

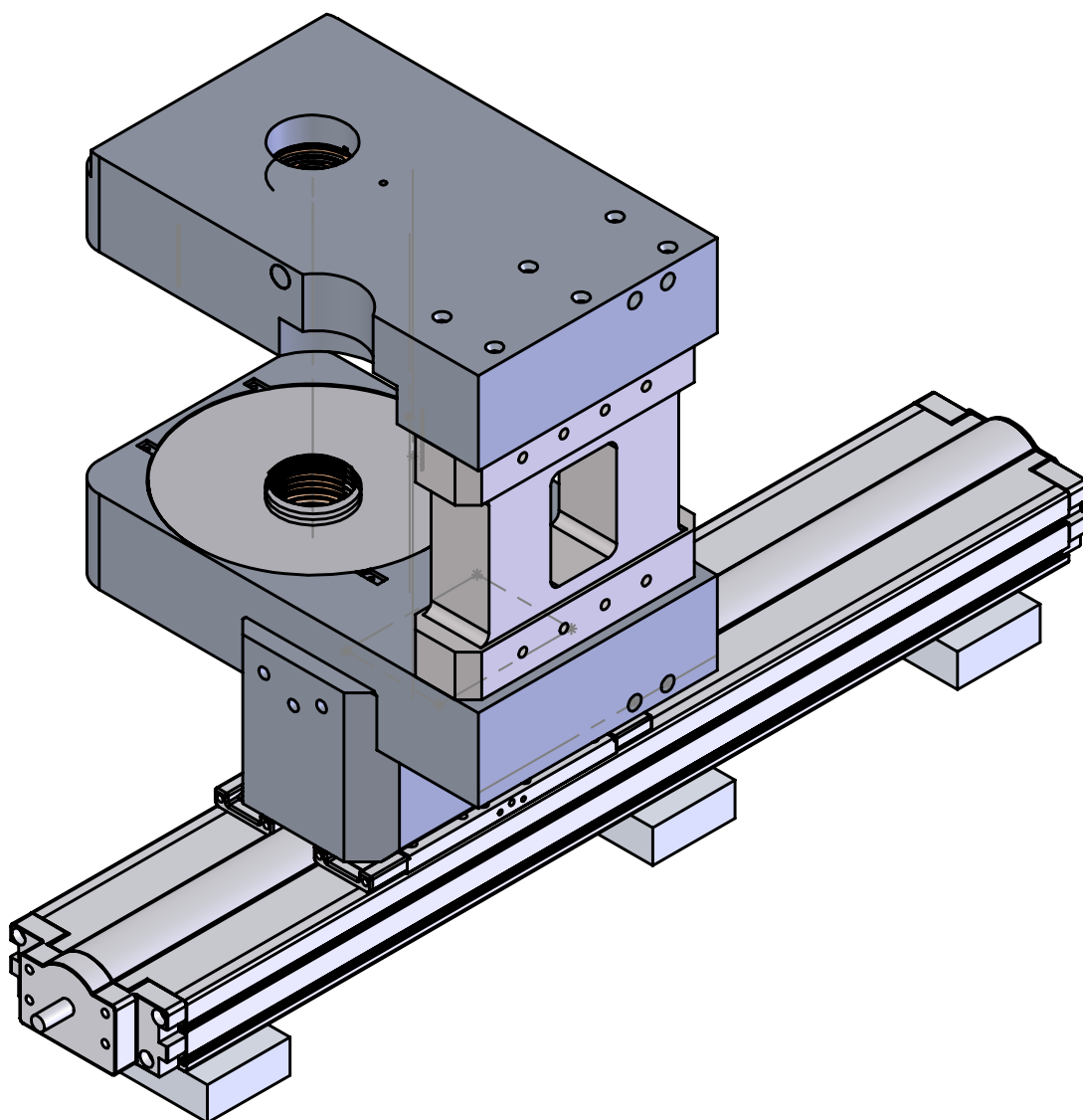
Ces bobines nous ont posé des problèmes de coupure de champ magnétique, causés par les courants de Foucault dans le support en Dural (conducteur électrique), qui créent un champ magnétique rémanent qui persiste pendant plusieurs dizaines de millisecondes. Ce champ nous empêche d'utiliser les phases de mélasse optique, de refroidissement sub-Doppler et de pompage optique avant le chargement dans le piège magnétique, comme nous le faisons sur notre montage précédent [52]. Pour éliminer ces courants de Foucault, il est prévu de réaliser de nouvelles bobines en fil de cuivre creux, refroidies à l'eau et tenues par un support isolant en résine<sup>6</sup>.

Les bobines de transport sont alimentées par une alimentation de marque Delta-Elektronika<sup>7</sup>, de puissance 3kW, qui permet d'y faire passer un courant de 35 ampères. Les bobines étaient mises en série dans la première version du montage afin d'éviter des fluctuations de la position du zéro de champ magnétique en s'assurant que chacune est parcourue par un courant identique. En série avec les bobines se trouve un transistor

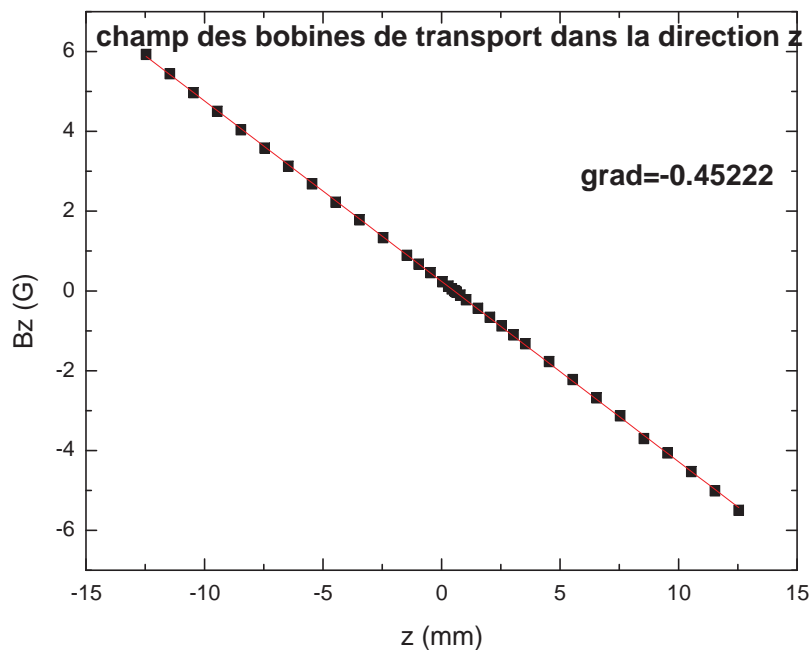
5. Epotecny E707

6. résine Damival, moulage réalisé par ABC Technology.

7. SM70-45 avec l'option augmentation de puissance, capable de délivrer 45 ampères à une tension de 77 volts. Avec les bobines en série, le facteur limitant est la tension, la résistance des bobines étant d'environ  $2\Omega$ , et augmentant avec la température.



**Figure 2.6** – Support des bobines de transport placé sur le rail de translation. Chaque bobine est prise dans un support en Dural, contenant un circuit d'eau. Les deux pièces en Dural sont reliées par une entretoise en acier inox, servant de contreponds. Cela permet de décaler le centre de gravité de l'ensemble du centre des bobines, et ainsi d'éviter de placer le rail de translation juste en dessous du trajet des atomes, libérant de l'espace pour placer les optiques. Une couche de pâte thermique permet d'améliorer le contact thermique entre les bobines et leur support.



**Figure 2.7** — Mesure du champ magnétique  $B_z$  dans l'axe des bobines en fonction de la hauteur  $z$ . La mesure a été réalisée avec un courant de 4 A, et renormalisée pour que la pente corresponde au gradient pour une intensité de 1 A. Le gradient mesuré est de  $0,45\text{G}\cdot\text{mm}^{-1}$ , soit  $4,5\text{G}\cdot\text{cm}^{-1}$

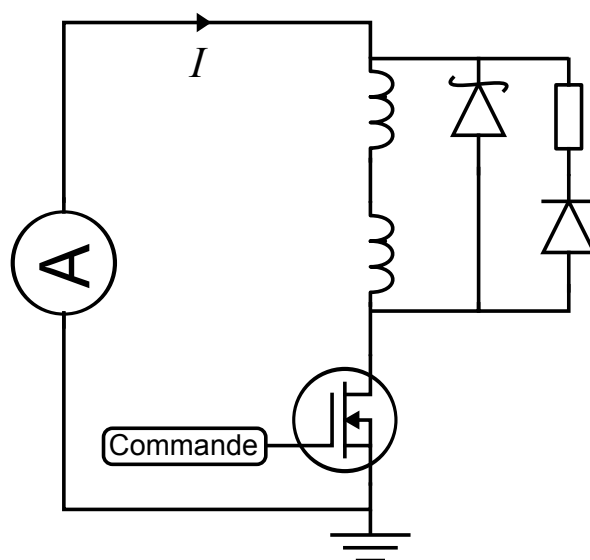
MOSFET<sup>8</sup> permettant de couper brutalement le courant. Un circuit de roue libre se trouve en parallèle avec les bobines, et sert à limiter la hauteur du pic de tension apparaissant aux bornes des bobines lors de la coupure du courant. Cette limitation est obtenue grâce à des diodes Zener de puissance<sup>9</sup> mises en série, limitant la tension à 600 V. Une résistance de puissance de 1 k $\Omega$  est mise en parallèle avec les diodes Zener pour absorber la fin du pic de tension. Une mesure des temps de coupure du courant et du champ magnétique dans les bobines est montrée sur la figure 2.9. Actuellement, une autre configuration est utilisée, avec une alimentation par bobine, ce qui permet d'atteindre une intensité de 45 A, et d'ajuster finement la hauteur du piège en jouant sur la différence de courant entre les deux bobines.

### 2.3.3 Bobines de compensation

L'ensemble du montage expérimental est entouré par trois paires de bobines destinées à contrebalancer le champ magnétique terrestre. Ces bobines sont rectangulaires,

8. Infineon IPW60R045CP, tension de claquage 650 V, courant maximal 60 A,  $R_{ds,on}$  45 m $\Omega$

9. 1.5KE100A



**Figure 2.8** — Schéma de l'alimentation des bobines de transport.

constituées de 60 tours de fil émaillé de diamètre 0,5 mm, enroulé sur des cadres réalisés avec du profilé aluminium en U, de 10 mm de côté, fixés ensemble pour former une cage qui entoure toute l'expérience.

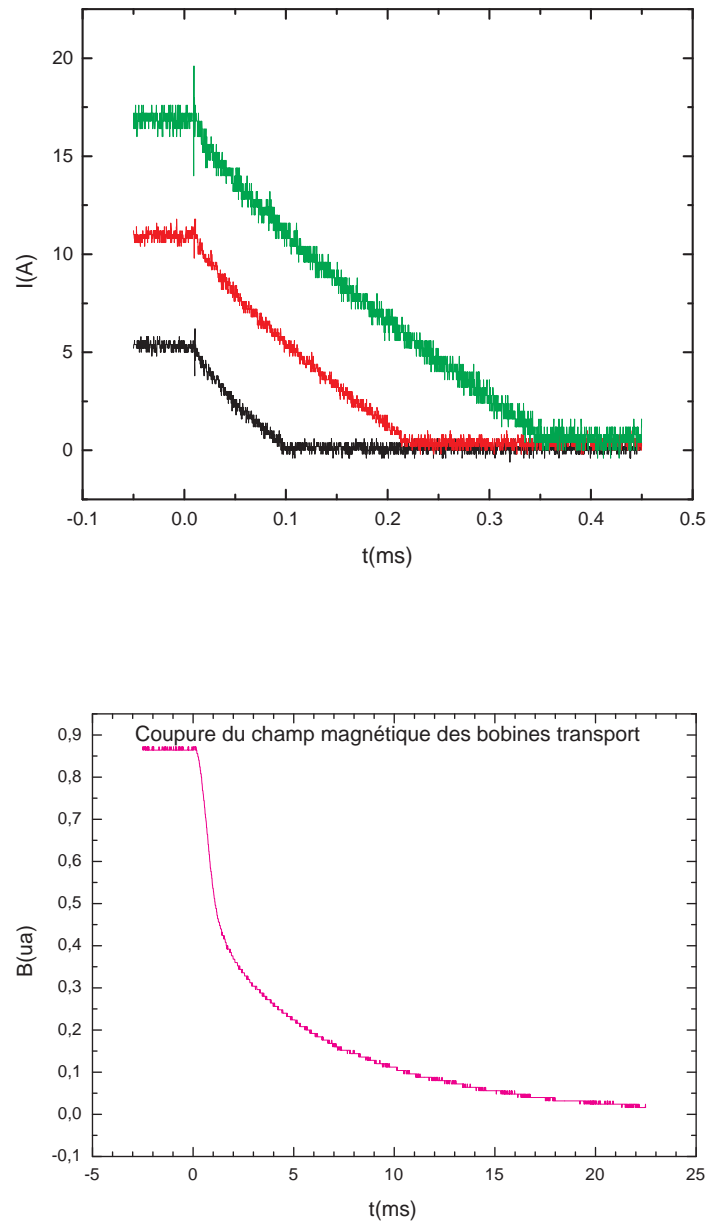
## 2.4 Transport magnétique

Au cours de la séquence expérimentale, les atomes sont transportés depuis l'octogone, dans lequel ils ont été refroidis dans le piège magnéto-optique, vers la cellule science où aura lieu la condensation. Ce transport se fait en piégeant les atomes dans un piège magnétique quadrupolaire, que l'on déplace du centre de l'octogone à la cellule science. On peut faire cela de deux manières différentes : en déplaçant physiquement les bobines [64, 65], ou en utilisant une série de bobines et en modulant les courants dans celles-ci pour déplacer le minimum de champ magnétique [66]. Dans notre expérience, nous utilisons la première solution. Pour cela, les bobines sont fixées sur une platine de translation industrielle dont je donnerai les caractéristiques dans (2.4.1). Je décrirai ensuite la manière dont nous pilotons le déplacement de ces bobines dans (2.4.2). Nous nous sommes assurés d'éliminer les sources de champs magnétiques parasites sur le trajet des atomes, notamment en vérifiant les vis de l'enceinte à vide et les tiges reliant le support des bobines du piège magnétique côté science à l'octogone.

### 2.4.1 Aspect mécanique

La platine de translation sur laquelle sont montées les bobines du transport magnétique est une translation de type 404XR de Parker, de course 350 mm, équipée d'une vis à billes de précision au pas de 20 mm qui permet des mouvements rapides et sans jeu. Ce type de translation est conçu pour supporter une charge de 170 kg, une vitesse de  $1,2 \text{ m.s}^{-1}$  et une accélération de  $20 \text{ m.s}^{-2}$ . La répétabilité du positionnement est de





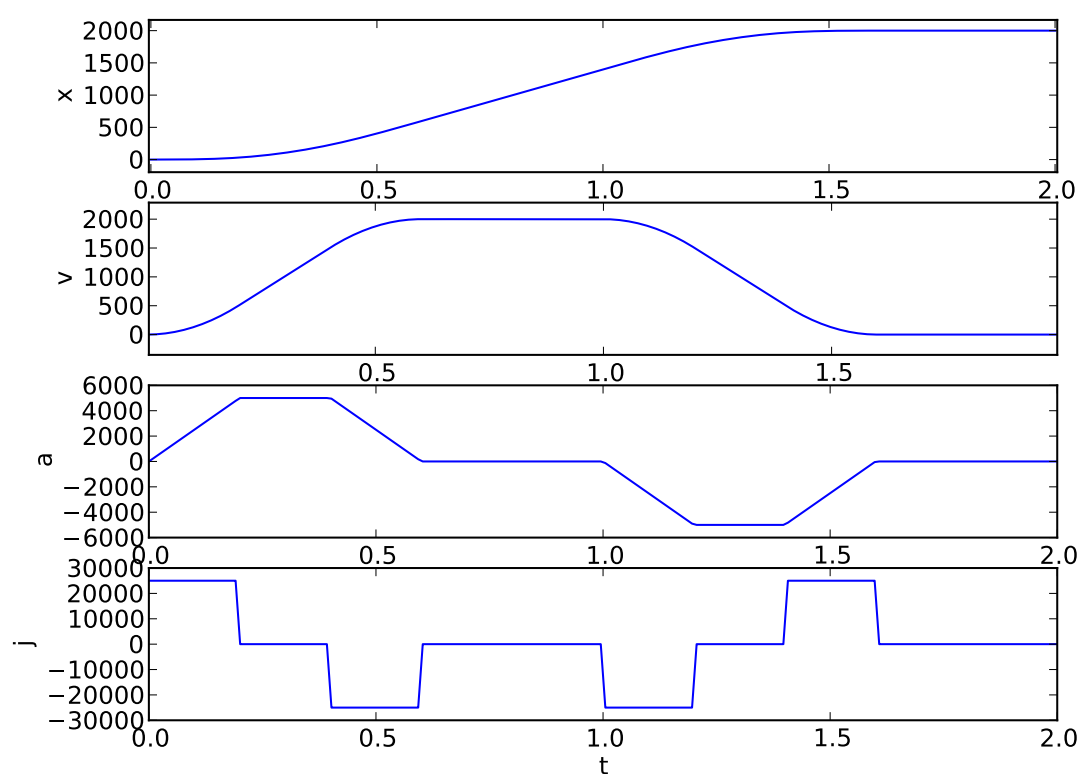
**Figure 2.9** – Mesure du temps de coupure des bobines. Le temps de coupure du courant, mesuré en regardant la tension aux bornes d'une résistance de puissance non inductive mise en série avec les bobines, est inférieur à 1 ms, et proportionnel au courant dans les bobines au moment de la coupure. Le temps de coupure du champ magnétique, mesurée au gaussmètre, est d'environ 15 ms, beaucoup plus long. On a fait attention à ne pas se mettre sur le calibre le plus faible du gaussmètre car celui-ci agit alors comme un filtre passe-bas de fréquence environ 10 Hz.

1,3  $\mu\text{m}$ , suffisante pour notre expérience. La platine est entraînée par un servomoteur brushless Parker SMH60, avec encodeur multitour Sincos. Ce type de platine est utilisé couramment dans l'industrie automobile sur les chaînes de montage, ce qui explique notamment pourquoi ses entrées-sorties utilisent des niveaux de 24 V.

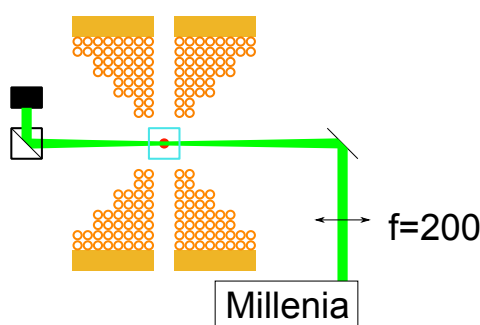
### 2.4.2 Pilotage

La commande du moteur est assurée par un PLC (Programmable Logic Controller) Compax 3. Ce PLC est programmable, et communique avec un PC à l'aide d'une liaison RS-232, ce qui permet notamment de sélectionner la vitesse du transport et la distance parcourue par la platine. Le PLC exécute un programme écrit dans le langage IEC 61131-3, qui peut accéder aux entrées-sorties du PLC et donner des ordres au moteur. Le programme que nous utilisons permet de contrôler l'état de mise sous tension du moteur, de déplacer les bobines entre deux positions correspondant au piège magnéto-optique et à la cellule science, et de régler le zéro machine en déplaçant les bobines lentement jusqu'à déclencher un interrupteur fixé sur le bord de la platine. Le programme de commande de l'expérience donne ses ordres au PLC à l'aide de 4 signaux logiques : mise sous tension du moteur, déplacement vers l'octogone, déplacement vers la cellule, et recherche du zéro. Une carte d'adaptation de niveaux a été réalisée par l'atelier d'électronique du laboratoire pour faire la traduction entre les niveaux 24 V du PLC et les niveaux 5 V de nos cartes de contrôle informatique.

Afin d'éviter de réchauffer les atomes dans le piège au cours du transport, il est nécessaire de minimiser les vibrations des bobines de transport au cours de leur déplacement. Pour cela, il est nécessaire de régler les paramètres de la boucle d'asservissement qui contrôle le déplacement du moteur. La première étape consiste à régler le moment d'inertie vu par le moteur, ce qui est fait automatiquement au moyen de la procédure « identification de charge » dans le programme de gestion du PLC. Cette procédure envoie une excitation connue sur le moteur et mesure le déplacement du système, ce qui permet de déduire le moment d'inertie. Ensuite, on fait effectuer un échelon de vitesse au transport, et on ajuste les paramètres de raideur et d'amortissement de la boucle pour avoir une réponse la plus rapide possible tout en minimisant les oscillations. Pour cela, le logiciel fourni avec le Compax 3 permet de visualiser les paramètres du mouvement sur l'ordinateur. La dernière étape consiste à minimiser les vibrations pour un mouvement typique. Pour mesurer les vibrations, nous avons utilisé un accéléromètre fixé sur le support des bobines et relié à un analyseur FFT. Le type de mouvement que nous utilisons est montré sur la figure (2.10), il est calculé à partir des positions initiales et finales, et des valeurs maximales de la vitesse, de l'accélération et de sa dérivée. Il est possible de définir soi-même un profil de mouvement arbitraire, mais cela nécessite de communiquer directement avec le PLC par le port série en utilisant un protocole propriétaire, et cela complique le programme à donner au PLC. Le profil de mouvement standard nous ayant donné satisfaction, nous n'utilisons pas cette possibilité pour le moment.



**Figure 2.10** – Pour un déplacement  $x$  entre deux points, on peut fixer les valeurs maximales de la vitesse, ( $v$ ) de l'accélération ( $a$ ) et de l'à-coup ( $j$ ) (dérivée de l'accélération) pour les phases d'accélération et de décélération, ainsi que la position d'arrivée. La courbe ci-dessus représente l'évolution de ces variables en fonction du temps pour un profil de déplacement de type utilisé dans l'expérience. Les valeurs sont données en  $\text{mm}$ ,  $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\text{mm}\cdot\text{s}^{-2}$  et  $\text{mm}\cdot\text{s}^{-3}$ . Un script écrit en Python permet de calculer la durée du mouvement connaissant tous les paramètres, afin d'ajuster le délai correspondant au transport dans la séquence expérimentale.



**Figure 2.11** — Les atomes sont piégés au centre d'un champ magnétique quadrupolaire, créé par une paire de bobines coniques placées autour de la cellule. Un laser de 10 W à 532 nm, produit par un laser YAG doublé (Millenia) est focalisé sur le zéro de champ magnétique, et la force dipolaire créée par ce laser repousse les atomes.

## 2.5 Piège quadrupolaire bouché

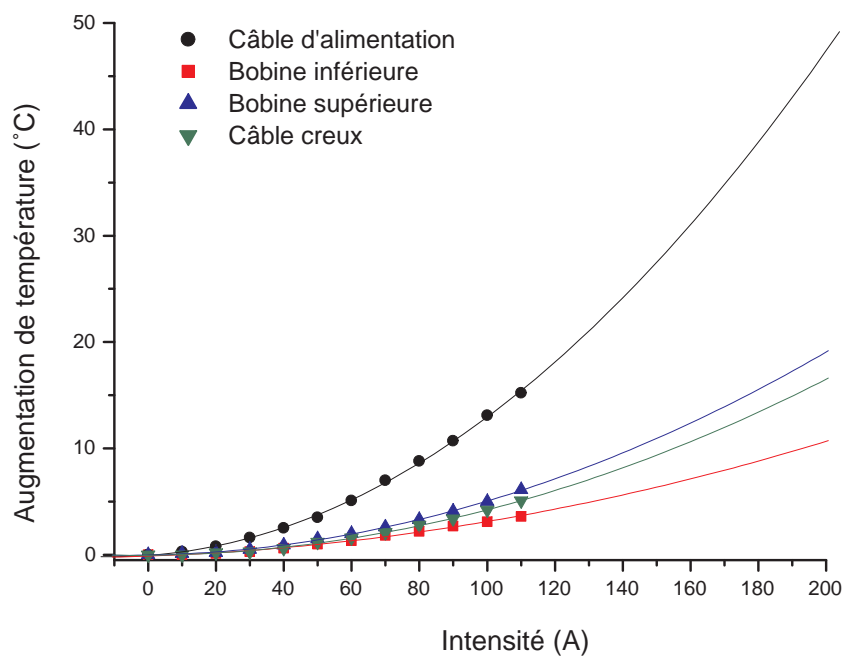
Après le transport des atomes vers la cellule science, ceux-ci sont transférés dans un piège magnétique quadrupolaire d'axe vertical, bouché grâce à la force dipolaire générée par un faisceau laser focalisé désaccordé vers le bleu. C'est dans ce piège qu'a lieu l'étape de refroidissement évaporatif, qui permet d'obtenir le condensat de Bose-Einstein. Le choix de ce piège s'explique par le désir d'avoir un champ magnétique symétrique par rotation autour d'un axe vertical, pour faciliter la réalisation du piège en anneau. Une vue d'ensemble de ce piège est présentée sur la figure 2.11.

### 2.5.1 Bobines et support

Le champ magnétique de piégeage est produit par une paire de bobines situées au plus près de la cellule. On a besoin de pouvoir obtenir des gradients importants pour maximiser le taux de collisions durant le refroidissement évaporatif, et en même temps nous voulons avoir un accès optique le meilleur possible. Pour cela, nous avons choisi de réaliser des bobines de forme conique, comportant 8 tours et 8 couches de fil, placées au plus près de la cellule. La forme conique permet d'optimiser le gradient tout en gardant l'accès optique sur un angle de près de 90 degrés. Le diamètre intérieur de ces bobines est de 1 cm, égal à la largeur intérieure de la cellule.

Pour la réalisation des bobines, nous avons utilisé du tube de cuivre creux d'un diamètre extérieur de 3 mm et intérieur de 2 mm, dans lequel on fait circuler de l'eau pour les refroidir. L'efficacité du refroidissement a été mesurée, et le résultat est présenté dans la figure 2.12.

Nous avons réalisé l'isolation du tube nous-mêmes en passant d'abord une couche de vernis isolant, puis en recouvrant le fil de ruban adhésif en kapton [67]. Les bobines ont été réalisées en enroulant à la main le fil autour d'une tige en Delrin fixée sur un des tours de l'atelier de mécanique du laboratoire, en utilisant des gabarits pour obtenir la forme conique. Les bobines ont ensuite été moulées dans de la résine, et fixées sur un support en Peek (polyétheréthercétone), lui-même fixé par quatre tiges en aluminium



**Figure 2.12** — Mesure de la température des bobines du piège final en fonction du courant les parcourant.

sur l'octogone. Le support a été réalisé avec la fraiseuse à commande numérique du laboratoire, par Albert Kaladjian. Une photographie du piège quadrupolaire est montrée sur la figure 2.13. L'utilisation d'un polymère pour le support des bobines permet de garantir l'absence de courants de Foucault et de champs magnétiques parasites. Nous avons également vérifié que les tiges de support étaient amagnétiques.

Une mesure du champ magnétique produit par ces bobines est présentée dans la figure 2.14. Les bobines sont reliées en série, et alimentées par une alimentation Delta-Elektronika<sup>10</sup>. Un transistor<sup>11</sup> en série avec les bobines permet une coupure rapide du champ. Un circuit de roue libre placé en parallèle des bobines permet de limiter le pic de tension causé par le caractère inductif des bobines à une valeur inférieure à la tension de claquage du transistor. Cette limitation est obtenue au moyen de diodes Zener de puissances mises en série. Une résistance de puissance de 80  $\Omega$  en série avec une diode permet d'absorber la fin du pic. Ce système permet de couper le champ magnétique créé par les bobines en un temps inférieur à 1 ms. Une mesure de ce temps de coupure est présentée sur la figure 2.15.

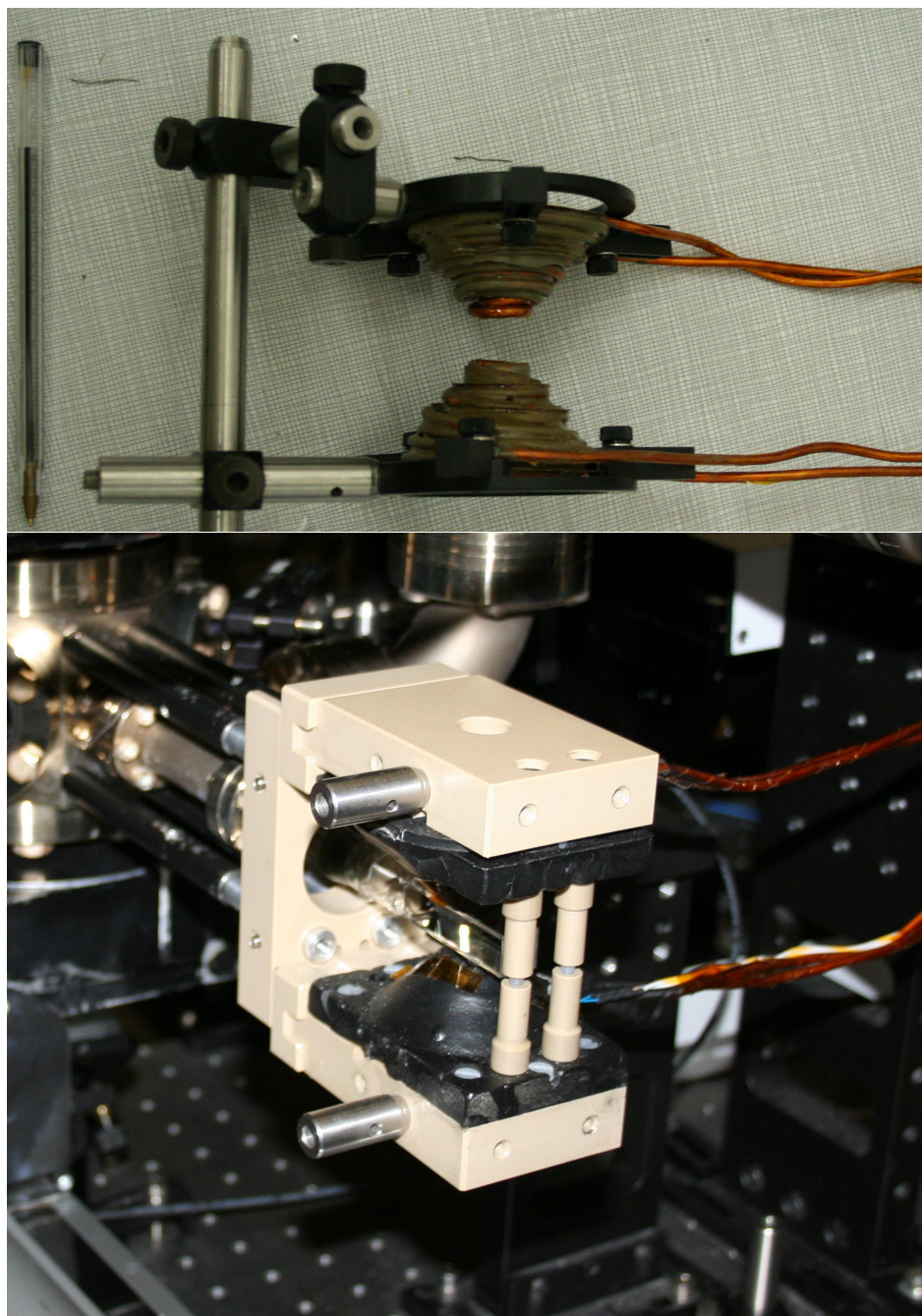
### 2.5.2 Bouchon optique

Pour garder des atomes piégés dans un champ magnétique, il faut que leur fréquence de Larmor  $\frac{\mu B}{\hbar}$  reste grande devant le temps caractéristique de variation du champ magnétique auquel ils sont soumis[53]. Quand ils passent à proximité d'un zéro de champ magnétique, la fréquence de Larmor tend vers zéro et les atomes peuvent alors subir un retournement de spin non adiabatique [68], qui les place dans un état non piégé. Ce type de perte est appelé perte Majorana [69]. Ces pertes deviennent importantes quand les atomes sont très froids, donc plus proches du centre du piège.

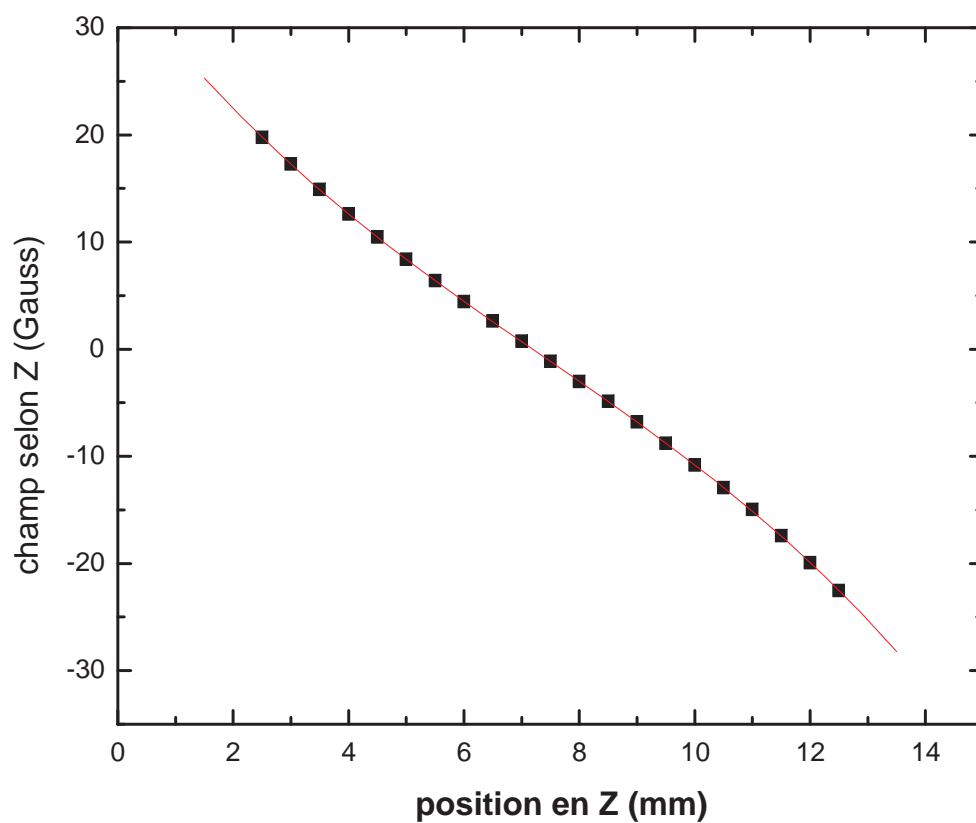
Plusieurs stratégies existent pour contourner ce problème. On peut utiliser une géométrie dans laquelle le minimum du champ est non nul, comme dans le piège de type Ioffe-Pritchard [18]. On peut aussi faire bouger le zéro de champ magnétique, les atomes voyant alors un potentiel moyen, ce qui est le principe utilisé pour le piège TOP [22]. Une autre solution consiste à utiliser un potentiel dipolaire causé par un faisceau laser focalisé pour empêcher les atomes de s'approcher du zéro de champ magnétique, soit avec un faisceau désaccordé vers le bleu pour les repousser loin du zéro [70], soit avec un faisceau désaccordé vers le rouge pour les attirer dans une zone de champ non nul. Un piège quadrupolaire étant avantageux pour ce que nous voulons faire avec le condensat (le transférer dans un piège habillé par onde RF), c'est cette dernière solution que nous avons choisie, avec un faisceau désaccordé vers le bleu. Le faisceau est à une longueur d'onde de 532 nm, et d'une puissance de 10 W. Il est produit par un laser YAG doublé dont les caractéristiques sont décrites plus en détail dans la section 3.3, et est focalisé sur le centre du piège quadrupolaire, avec un waist de 35  $\mu\text{m}$ . Pour des raisons de place et pour aider à l'alignement, l'imagerie dans l'axe horizontal et le bouchon optique sont superposés à l'aide d'une lame dichroïque avant la cellule, et séparés ensuite par un cube séparateur de polarisation à 780 nm, qui laisse passer la

10. SM15-100 poussée à 110 A

11. Ixys IXFN 230N10, capable de supporter jusqu'à 230 A,  $R_{ds,on} = 6 \text{ m}\Omega$

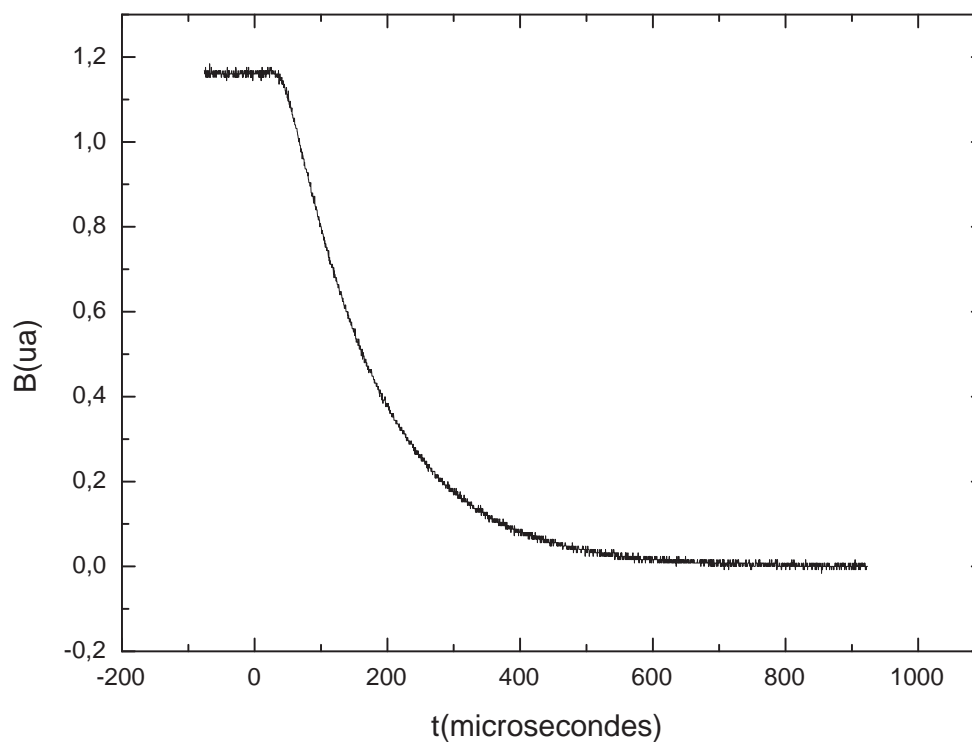


**Figure 2.13** — L'image du dessus montre les bobines avant leur montage sur l'expérience. La photo du dessous montre le piège quadrupolaire monté sur l'expérience. Le support plastique clair a été réalisé par Albert Kaladjan sur la fraiseuse à commande numérique du laboratoire.



**Figure 2.14** — Mesure de gradient du piège final, prise avec un courant dans les bobines de 10 A. On trouve une valeur de  $4 \text{ G.cm}^{-1}.\text{A}^{-1}$ . La valeur du gradient dépend très fortement de l'écart entre les bobines, qui a pu changer légèrement après l'installation sur l'expérience.





**Figure 2.15** — Mesure du temps de coupure du piège quadrupolaire, à l'aide d'un gaussmètre dont la sonde est placée un peu à l'écart du zéro de champ magnétique. La quantité montrée est la tension sur la sortie analogique du gaussmètre. La coupure se fait à partir d'un courant de 109 ampères. On atteint 10 % du champ initial au bout de  $350 \mu\text{s}$ .

lumière à 780 nm et réfléchit le faisceau à 532 nm.

## 2.6 Contrôle informatique de l'expérience

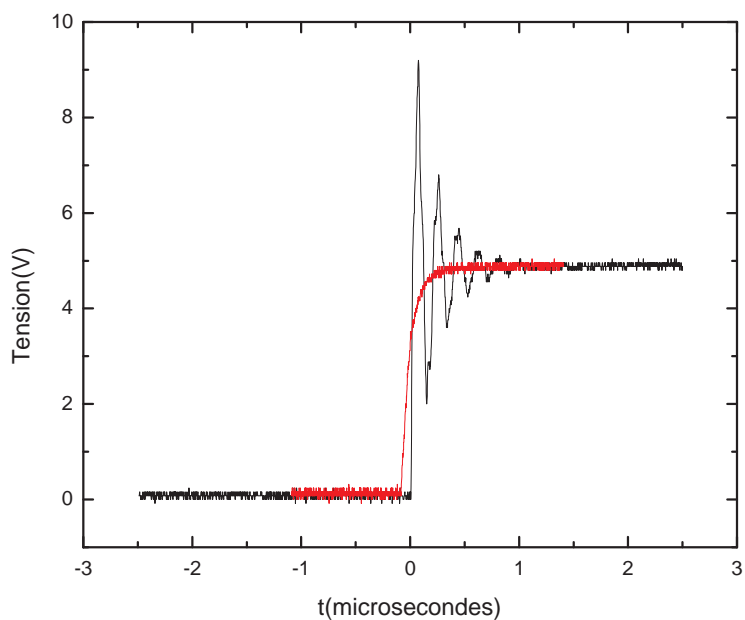
Les paramètres devant varier au cours de la séquence expérimentale sont contrôlés par un ordinateur nommé « bec ». Deux cartes PCI de marque National Instruments assurent l'interface avec l'expérience. Une carte PCI-DIO-32HS fournit 32 sorties digitales (niveaux TTL, 0-5V), tandis qu'une carte PCI-6733 fournit 8 sorties digitales et 8 sorties analogiques (tension variable entre -10V et +10V, résolution de 16 bits). Les deux cartes sont synchronisées à l'aide d'une connexion interne (bus RTSI), et sont configurées pour une fréquence de rafraîchissement de 10 kHz (pas de temps de 100  $\mu$ s), le maximum permis par les cartes étant de 1 MHz. Un programme écrit en C++, nommé « manip », permet de définir la séquence expérimentale dans un langage proche du C. Ce programme est basé sur le programme « goodTime », utilisé dans l'équipe de Jakob Reichel. Il transforme la description de haut niveau qu'on lui fournit en une séquence de valeurs à appliquer sur les sorties des cartes d'interface, et stocke ces valeurs dans une mémoire tampon dans la mémoire vive, que les cartes lisent par accès direct (DMA). Ainsi, le déroulement des séquences n'est pas affecté par l'activité du processeur du PC « bec », ce qui garantit une excellente stabilité des séquences.

Les sorties des cartes sont à haute impédance, nous utilisons donc des cartes tampon construites par l'atelier d'électronique du laboratoire pour pouvoir contrôler des éléments nécessitant un courant élevé, comme les drivers de modulateurs acousto-optiques. Nous disposons aussi de cartes capables de convertir une ou deux sorties digitales en une sortie analogique capable de délivrer 2 ou 4 niveaux réglables, afin d'économiser les sorties analogiques des cartes quand on a des signaux ne devant prendre que quelques valeurs discrètes. On peut noter que les sorties digitales sont dotées de filtres, pour éviter d'avoir des oscillations parasites lors d'un changement de niveau. L'effet de ces filtres est montré sur la figure 2.16

Le programme « manip » communique via le réseau local avec deux autres ordinateurs, qui gèrent chacun une caméra, afin d'effectuer l'imagerie dans le piège magnéto-optique et dans la cellule science ou bien dans deux axes de la cellule science. Ces deux caméras sont une caméra EMCCD Ixon-885D et une CCD DB 437-FI de marque Andor. Le système d'imagerie sera décrit plus en détail dans la section 2.7. Le programme peut également commander des synthétiseurs RF Stanford par port série. Après chaque séquence, on sauvegarde les fichiers images ainsi que le fichier contenant la séquence expérimentale.

## 2.7 Imagerie

Le principal moyen dont nous disposons pour obtenir des informations sur un gaz d'atomes froids est l'imagerie par absorption. Je présenterai en détail le fonctionnement de cette technique dans la section 2.7.1 avant de décrire la manière dont elle est implémentée sur notre montage expérimental dans la section 2.7.2



**Figure 2.16** — Ce graphe montre un changement de niveau d'une des sorties digitales de la carte DIO-32 avant et après l'installation des filtres. Ceux-ci sont des filtres RC, avec  $R=100\ \Omega$  et  $C=1\ \text{nF}$ .

### 2.7.1 Principe de l'imagerie par absorption

La technique de l'imagerie par absorption consiste à regarder l'ombre laissée par le condensat sur un faisceau laser collimaté. Un faisceau sonde excite la transition  $5S_{1/2}, F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}, F = 3$  du rubidium, dont la longueur d'onde est 780 nm, et on regarde le profil d'intensité du faisceau transmis au moyen d'une caméra CCD. On peut noter que cette technique est destructive, l'absorption de photons par les atomes les réchauffant fortement. D'autres méthodes existent pour pouvoir prendre des séquences d'images, telles que l'imagerie par contraste de phase [71, 72].

Si l'on appelle  $z$  l'axe de propagation de la sonde, la relation entre l'intensité lumineuse  $I_t(x,y)$  après passage au travers des atomes et l'intensité du faisceau sonde avant les atomes  $I_i(x,y)$  est donnée par la loi de Beer-Lambert :

$$\frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)} = \exp\left(-\sigma(\delta) \int n(x,y,z) dz\right) \quad (2.1)$$

où  $\sigma(\delta)$  est la section efficace d'absorption au désaccord  $\delta$  par rapport à la fréquence de la transition, et  $n(x,y,z)$  la densité atomique. Cette loi est valable tant que  $\sigma(\delta)$  ne dépend pas de l'intensité lumineuse, ce qui est vérifié tant que  $I_i(x,y) \ll I_s$  avec  $I_s$  l'intensité de saturation de la transition, qui vaut  $1,6 \text{ mW.cm}^{-1}$  pour la transition considérée. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\sigma(\delta) = \frac{\sigma_0}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \quad (2.2)$$

où  $\sigma_0$  est la section efficace à résonance, et  $\Gamma$  est la largeur de la transition. L'équation (2.1) peut aussi s'écrire :

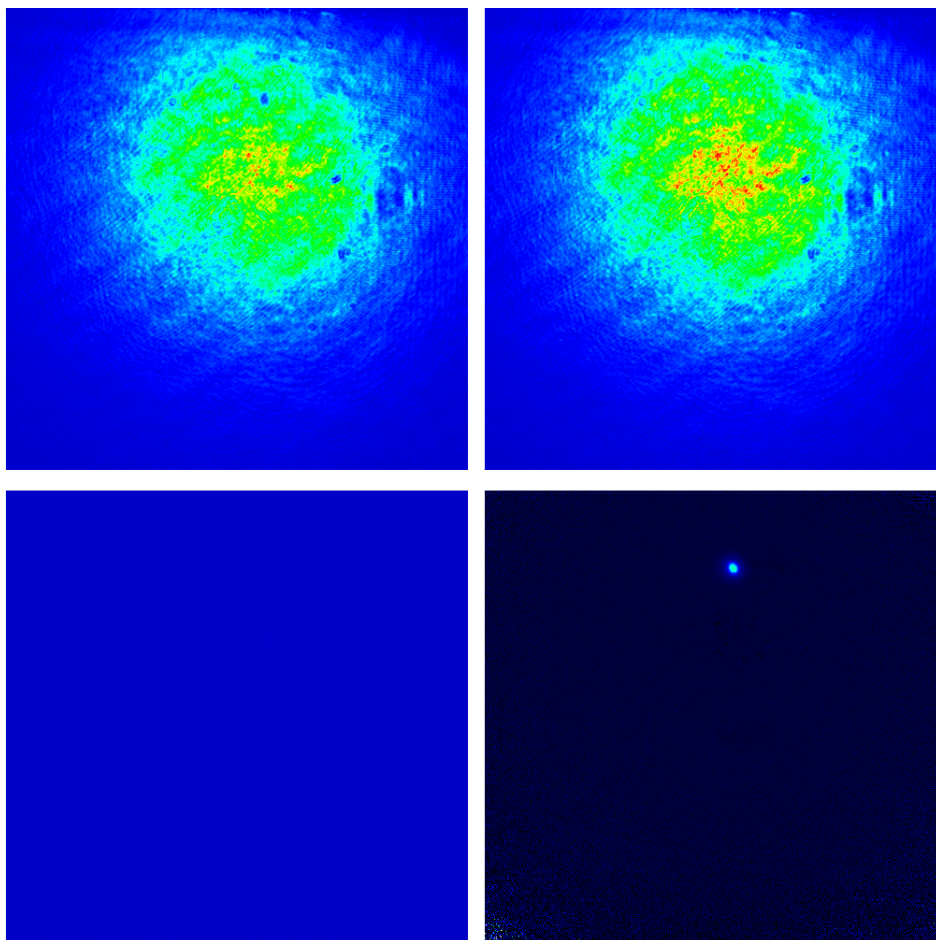
$$\frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)} = e^{-D_z(x,y)} \quad (2.3)$$

où  $D_z(x,y)$  est la densité optique du nuage d'atomes vu dans la direction  $z$ , qui est directement reliée à la densité colonne  $\eta_z(x,y) = \int n(x,y,z) |dz|$  par la relation  $D_z(x,y) = \sigma(\delta)\eta_z(x,y)$ . Connaissant la valeur de  $\sigma(\delta)$ , on peut donc retrouver la densité colonne des atomes en utilisant  $I_t(x,y)$  et  $I_i(x,y)$ .

Le calcul de la densité optique  $D_z(x,y)$  nécessite la prise de 3 images. Une première image des atomes nous donne accès à l'intensité en présence des atomes  $I_{\text{atomes}}(x,y)$ . On attend alors environ 10 ms pour prendre une seconde image, qui nous donne accès au profil du faisceau sonde,  $I_{\text{sonde}}(x,y)$ . Entre les deux images, on peut utiliser une impulsion d'un laser résonnant pour chasser les atomes hors du champ de vision de la caméra. Enfin, une troisième image prise sans allumer le faisceau sonde,  $I_{\text{noir}}(x,y)$ , enregistre le signal d'obscurité de la caméra ainsi que la lumière parasite. On peut alors calculer la densité optique par l'équation :

$$D_z(x,y) = -\log\left(\frac{I_{\text{atomes}}(x,y) - I_{\text{noir}}(x,y)}{I_{\text{sonde}}(x,y) - I_{\text{noir}}(x,y)}\right) \quad (2.4)$$

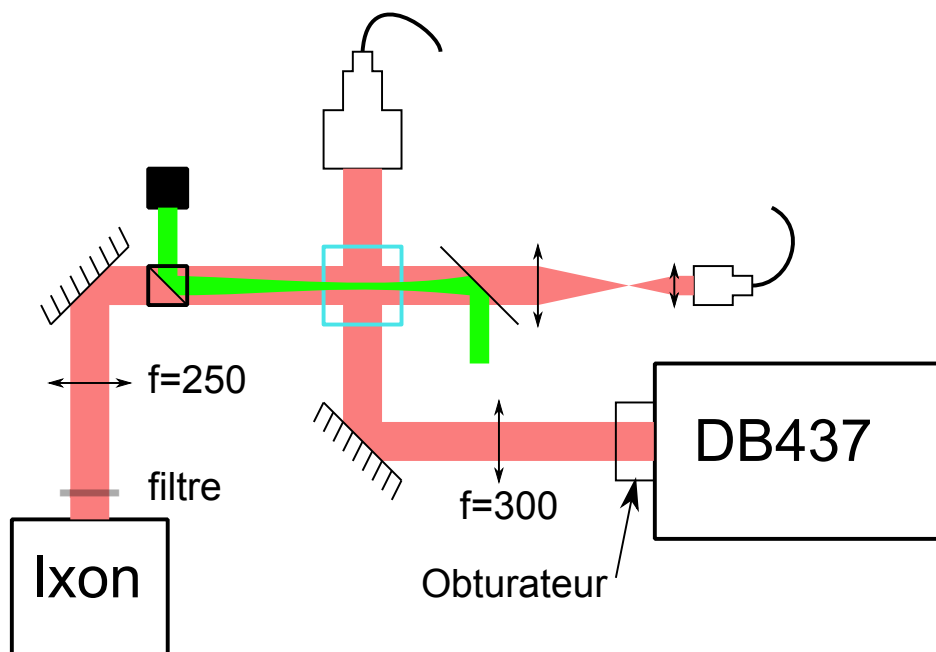
d'où l'on peut déduire la densité colonne du nuage d'atomes. Ce calcul est illustré dans la figure 2.17. Cette méthode cesse de fonctionner quand la densité optique devient trop grande. En effet, le signal transmis  $I_{\text{atomes}}(x,y) - I_{\text{noir}}(x,y)$  devient alors très faible et se retrouve noyé dans le bruit.



**Figure 2.17** — Les deux images du haut sont les images de la sonde avec et sans les atomes. En bas à gauche, on voit l'image du bruit de fond et en bas à droite la densité colonne du nuage atomique.

### 2.7.2 Montage d'imagerie

Notre montage d'imagerie permet d'observer les atomes selon deux directions : un axe horizontal, partagé avec le faisceau créant le bouchon optique, et un axe vertical. Pour l'axe horizontal, un collimateur placé en sortie d'une fibre optique suivi d'un télescope produit le faisceau sonde. Celui-ci passe à travers un miroir dichroïque qui laisse passer la lumière à 780 nm et réfléchit la lumière à 532 nm, qui permet de faire passer le faisceau d'imagerie et le faisceau du piège bouché sur le même axe. Après la cellule, le faisceau du piège bouché est extrait à l'aide d'un cube séparateur de polarisation à 780 nm, qui fonctionne comme un très bon miroir dichroïque, et le faisceau sonde passe par une lentille plan convexe de focale 250 mm en configuration 2f-2f, qui fait l'image du nuage d'atomes sur le capteur CCD de la caméra. Un filtre placé devant la caméra permet de se débarrasser des dernières traces de lumière à 532 nm. Pour l'imagerie dans l'axe vertical, le faisceau sonde est produit par un collimateur Thorlabs F810FC-780, focale de 36 mm, il traverse la cellule, et est détecté par une deuxième caméra CCD après passage dans une lentille de focale 300 mm en configuration 2f-2f.



**Figure 2.18** — On voit sur ce schéma les différentes parties du montage d'imagerie. On produit le faisceau sonde avec un collimateur fibré, et on fait l'image des atomes avec une simple lentille plan convexe en configuration 2f-2f. Pour l'imagerie dans l'axe horizontal, on est obligé d'utiliser un miroir dichroïque car le faisceau du piège quadrupolaire bouché passe dans la même direction. Pour l'axe vertical, on utilise un obturateur placé devant la caméra, pour éviter des problèmes de lumière parasite en raison de son temps d'acquisition très long.

Devant cette caméra, on place un obturateur décrit au paragraphe 2.7.3 Un schéma du montage d'imagerie est présenté dans la figure 2.18.

**Faisceau sonde** Le faisceau sonde pour l'imagerie dans l'axe horizontal est de diamètre à  $\frac{1}{e^2}$  de 2 mm et de puissance 15  $\mu\text{W}$ . Une lame  $\frac{\lambda}{4}$  lui donne une polarisation circulaire, et on applique un champ directeur dans l'axe d'imagerie lors du pulse sonde, ce qui a pour effet de pomper les atomes dans un état de spin extrême  $|F = 2, m_f = \pm 2\rangle$ , où la transition est cyclante. Dans cet état, la section efficace d'absorption est effectivement celle d'un système à deux niveaux. L'effet du pompage optique initial n'est cependant pas pris en compte et nous sous-estimons donc le nombre d'atomes, a priori d'un facteur inférieur à deux. Le paramètre de saturation  $s$  est de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-2}$ . Le taux de diffusion de photons est alors de  $R_{sc} = \left(\frac{\Gamma}{2}\right) \frac{s}{1+s}$  ou  $\Gamma$  est la largeur de la transition, et connaissant la durée d'une impulsion sonde, qui est de 200  $\mu\text{s}$ , on peut calculer le nombre de photons diffusés par atome, qui est de l'ordre de 20.

**Caméras** Nous disposons de deux caméras pour faire l'imagerie par absorption. Nous utilisons une caméra EMCCD Andor (Ixon 885D) comme caméra principale pour l'imagerie dans la cellule science. Celle-ci possède une résolution de 1004\*1002 pixels, avec une taille de pixel de 8\*8  $\mu\text{m}$ , et une vitesse d'acquisition de 31 images par secondes.

Le capteur CCD est refroidi à une température de 0°C, et le bruit thermique est alors négligeable. Cette caméra dispose d'un registre de gain EMCCD, qui permet d'augmenter fortement sa sensibilité quand on veut prendre des images en fluorescence. Nous utilisons également une caméra Andor CCD-DB437-FI, pour imager soit le piège magnéto-optique, soit un deuxième axe de la cellule science. La DB437 est plus ancienne, avec une résolution de 512\*512 pixels d'une taille de 13  $\mu\text{m}$ . Sa vitesse de lecture plus faible de la caméra Ixon oblige à l'utiliser avec un obturateur mécanique, décrit dans la section 2.7.3.

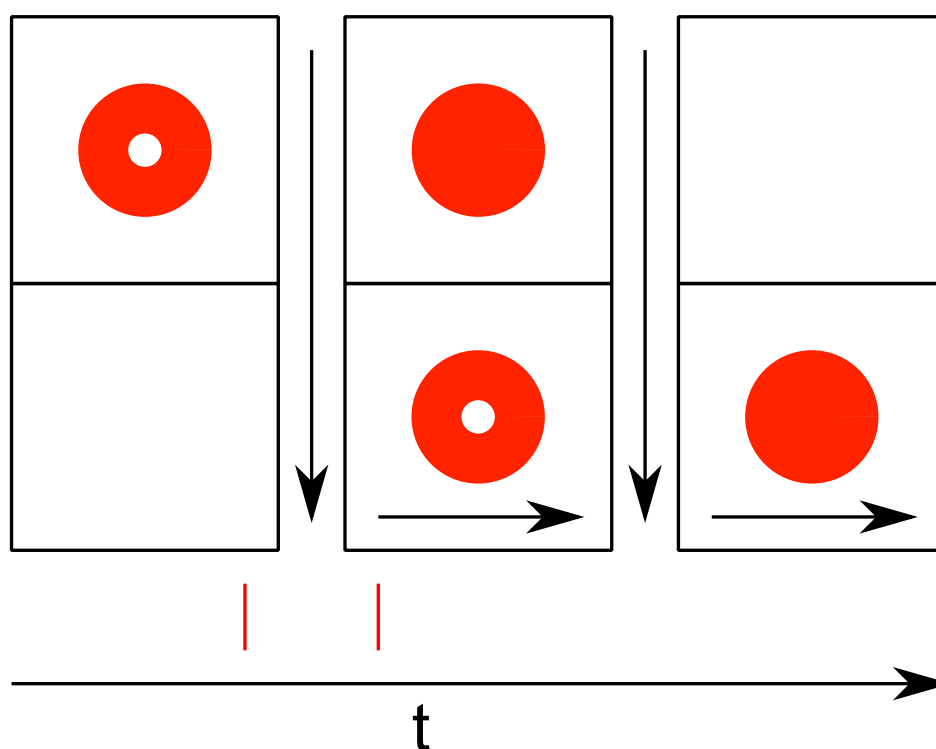
**Mode Frame Transfer et séquence d'imagerie** Les parois internes de la cellule ne sont pas traitées anti-reflet, et les images prises présentent donc des franges d'interférence causées par les réflexions sur ces parois. Si ces franges se déplacent entre la première et la deuxième image, on aura des artefacts sur la densité optique calculée. Pour les limiter au minimum, les deux premières images sont prises avec un intervalle typique de 10 ms. Pour pouvoir prendre deux images aussi rapprochées, nous utilisons une fonction particulière de notre caméra, qui s'appelle le mode « frame transfer ».

Le capteur CCD de la caméra est séparé en deux zones, une zone sensible à la lumière et une zone de stockage recouverte d'une couche opaque, qui peuvent être contrôlées indépendamment. Il est possible de transférer l'image de la zone sensible à la zone de stockage en une milliseconde, puis de numériser cette image tout en exposant l'image suivante sur la zone sensible. Nous exploitons cette particularité de la caméra pour prendre les 2 images de la sonde avec ou sans les atomes. On demande à la caméra de prendre une séquence de deux images avec le mode frame transfer activé, en réglant le mode de déclenchement sur « external start », ce qui permet de décider du moment où commence la prise de vue avec un signal TTL commandé par « manip ». Les deux images sont prises en faisant deux impulsions de 100 ou 200  $\mu\text{s}$  avec le faisceau sonde, et on commande le déclenchement en avance pour que le transfert de l'image ait lieu entre les deux impulsions. La durée de chaque image est de 150 ms en utilisant tout le capteur de la caméra Ixon 885D. La caméra DB437 dispose également du mode frame transfer, mais la durée d'acquisition de chaque image est de 4 s avec celle-ci. Le schéma 2.19 permet de visualiser la séquence de prise d'images.

### 2.7.3 Obturateur

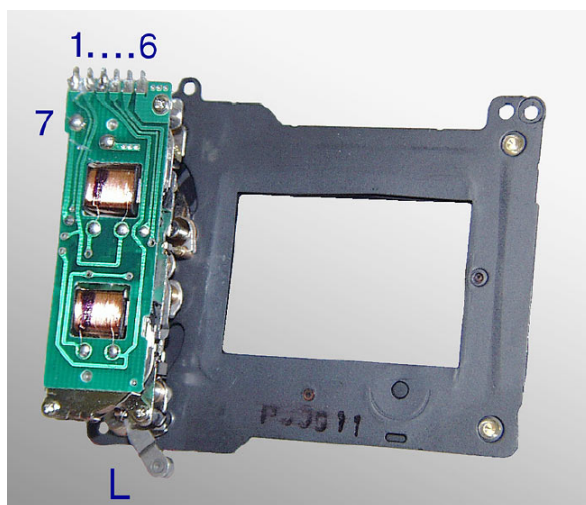
Avec la caméra Ixon 885D, le temps d'acquisition est suffisamment court pour que le filtre placé devant la caméra suffise à rendre la lumière parasite trop faible pour être détectée. En revanche, la CCD-DB437-FI met 4 secondes pour numériser une image, ce qui rend la lumière parasite visible sur les images.

Nous utilisons un obturateur plan-focal à lamelles, du même type que celui décrit dans l'annexe B de la thèse d'Yves Colombe [73], qui équipe normalement les appareils Canon EOS3. Le principe de fonctionnement de ce type d'obturateur est le suivant : deux ensembles de lamelles, appelés rideaux, sont libérés l'un après l'autre et parcourent la fenêtre d'exposition sous l'action de ressorts. Le premier rideau découvre la fenêtre d'exposition, le deuxième la masque. La libération des rideaux se fait grâce à deux



**Figure 2.19** — Séquence d'imagerie en mode Frame Transfer. A la fin de l'exposition de la première image, on envoie une impulsion avec la sonde pour faire l'image des atomes, que l'en transfère ensuite sur la partie masquée du capteur CCD. On peut alors faire l'image de la sonde seule pendant la numérisation de l'image précédente.

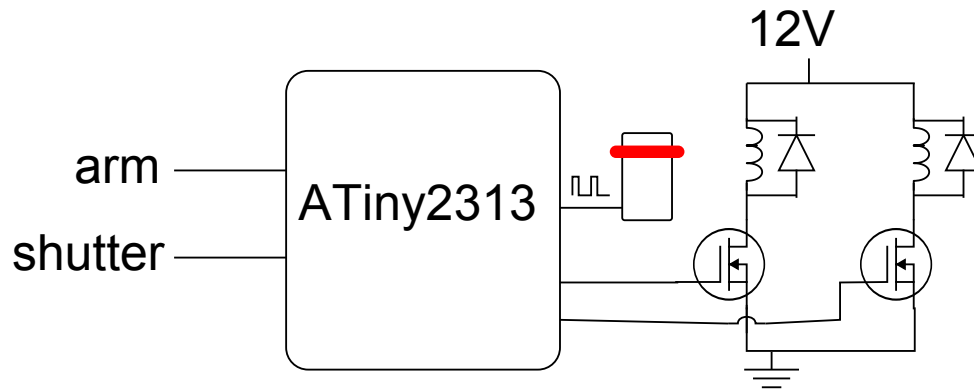




**Figure 2.20** — L'obturateur ouvert. Le levier d'armement est noté L sur la photo. Les électrodes 1 à 7 permettent de contrôler l'ouverture des rideaux.

petits moteurs, alimentés sous une tension de 12 V. Une impulsion d'environ 5 ms suffit à déclencher la libération d'un rideau. Une photo de l'obturateur est montrée dans la figure 2.20.

L'armement de l'obturateur se fait à l'aide d'un levier. On utilise un servomoteur de modélisme standard pour déplacer ce levier. Ce type de servomoteur possède 3 fils : la masse, une alimentation en 6 V, et une commande. On ordonne au servomoteur de bouger en envoyant un train d'impulsions sur son entrée de commande, la largeur des impulsions codant la position voulue. Le point milieu correspond à une durée d'environ 1,5 ms. L'électronique de commande de l'obturateur est décrite sur la figure 2.21.



**Figure 2.21** — Electronique de commande de l'obturateur. On reçoit des ordres du PC « manip » par deux signaux TTL : un signal « arm », qui déclenche l'armement de l'obturateur, et « trigger », qui commande la libération du premier rideau sur un front montant et du second rideau sur un front descendant. Un microcontrôleur ATiny2313 gère l'envoi des impulsions pour la commande du servomoteur et le déclenchement des rideaux. Deux mosfet PNP permettent au microcontrôleur de commander les bobines de déclenchement, et deux diodes de roue libre empêchent d'avoir un pic de tension à la coupure



# Chapitre 3

## Systeme laser

Le système laser à 780 nm utilisé sur notre expérience comporte trois sources distinctes. Un laser à cavité étendue asservi sur une transition du rubidium 87 fournit une référence de fréquence ainsi que le faisceau sonde pour l'imagerie. Un laser télécom à 1560 nm doublé en fréquence, asservi par un battement avec le premier laser, produit le faisceau utilisé pour réaliser le piège magnéto-optique et une diode laser indépendante (repompeur) permet de recycler les atomes dans la transition du refroidissement. Enfin, nous utilisons un laser YAG doublé de 10 W (Millenia, de marque Spectra Physics) pour la réalisation d'un bouchon optique.

### 3.1 Une nouvelle source laser intense

Pour produire la puissance laser nécessaire au refroidissement, nous avons développé une nouvelle source qui fonctionne sur le principe du doublement de fréquence. Un faisceau à 1560 nm est produit par une diode laser télécom, et passe dans un amplificateur à fibre dopée erbium pour atteindre une puissance pouvant monter jusqu'à 10 W. Ce faisceau de pompe est doublé dans un cristal de ppLN, pour obtenir le faisceau à 780 nm qui servira au refroidissement laser. Un schéma du système est présenté dans la figure 3.1. Cette source peut produire une puissance allant jusqu'à 2 W. Cette source a été montée, optimisée et caractérisée pendant ma thèse.

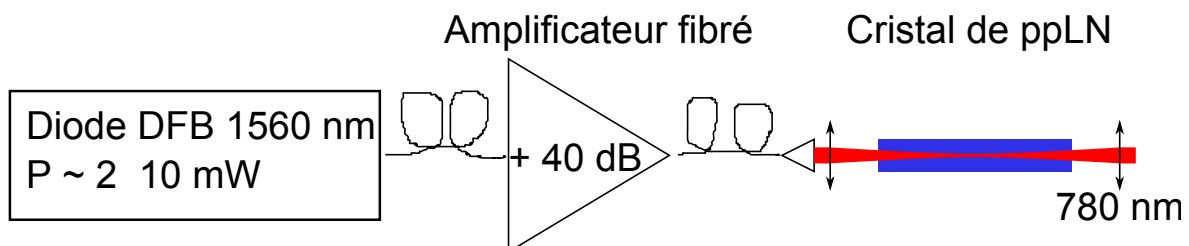
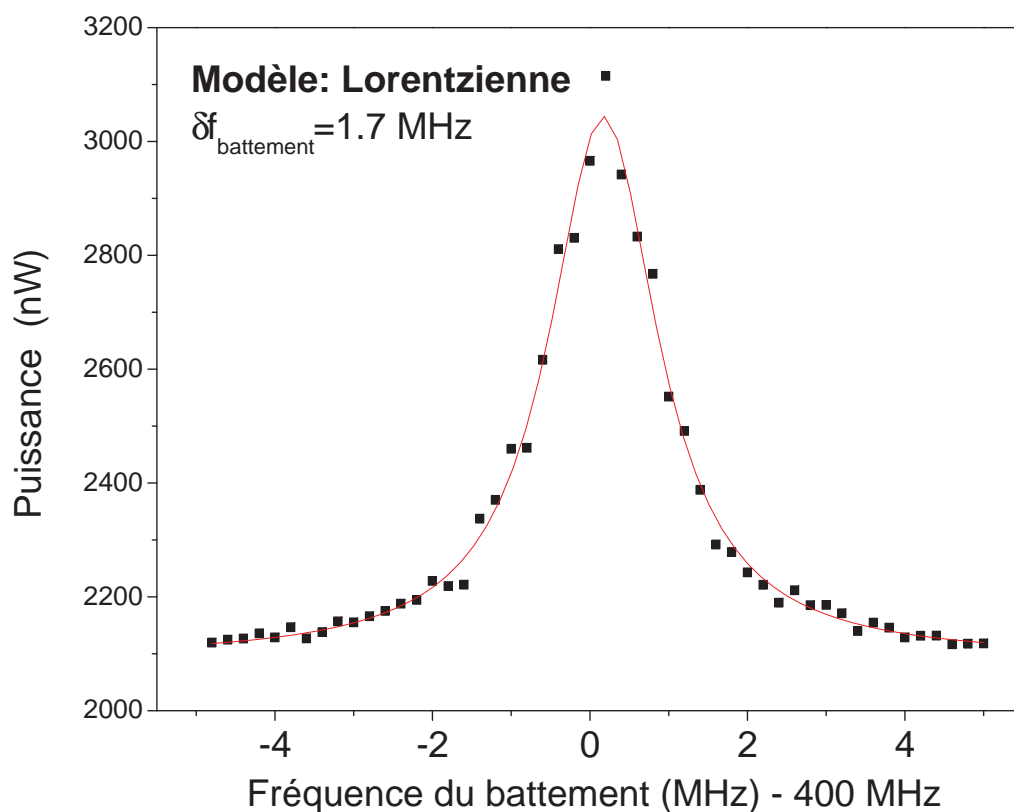


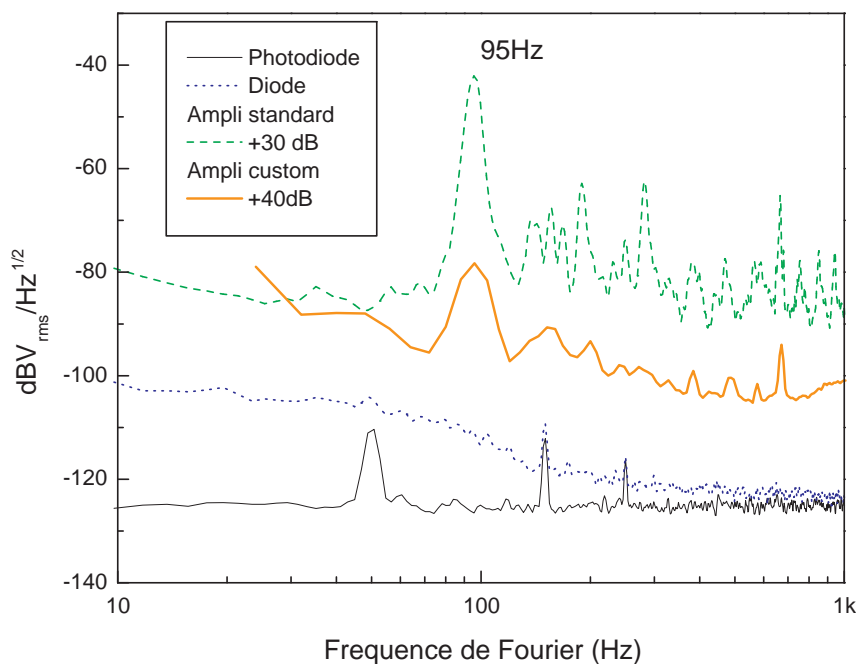
Figure 3.1 – Les différents éléments du doubleur



**Figure 3.2** — Battement entre deux diodes DFB à 1560 nm, modélisé par une Lorentzienne. La largeur totale à mi-hauteur vaut 1,7 MHz.

### 3.1.1 Diode laser télécom

Le faisceau est produit par une diode laser DFB Fitel FOL15DCWD à 1560 nm, d'une puissance supérieure à 1 mW, saturant l'amplificateur en entrée. La largeur spectrale  $\Delta\nu$  de cette diode a été estimée en faisant battre deux diodes semblables. Le résultat de cette mesure est montré dans la figure 3.2. En supposant une distribution Lorentzienne pour les fréquences, la largeur à mi-hauteur du battement est égale à la somme des largeurs à mi-hauteur des spectres des diodes. Les diodes étant identiques et la largeur du battement étant de  $\Delta\nu = 1,7$  MHz, on en déduit que la largeur de chaque diode est de  $\Delta\nu = 0,85$  MHz. On attend alors une largeur de 1,7 MHz pour le faisceau à 780 nm, une variation  $\Delta\nu$  sur la pompe se traduisant par une variation de  $2\Delta\nu$  sur le faisceau doublé. Nous présenterons au paragraphe 3.1.5 une mesure de la largeur de raie du laser doublé.



**Figure 3.3** — Bruit d’intensité de l’amplificateur 1 W utilisé lors de la phase de développement de la source et de l’amplificateur 10 W utilisé pour la version définitive. Les spectres de bruit de la diode laser et de la photodiode utilisées pour ces mesures sont donnés pour référence.

### 3.1.2 Amplificateur fibré

La diode est reliée à une fibre monomode à maintien de polarisation, et connectée à un amplificateur à fibre dopée erbium<sup>1</sup>. Cet amplificateur dispose d’un gain réglable pouvant monter jusqu’à 40 dB, ce qui nous permet d’avoir jusqu’à 10 W de puissance de pompe.

Nous avons mesuré le spectre de bruit de la diode et de l’amplificateur par analyse de Fourier des fluctuations de puissance mesurée avec une photodiode. La mesure sur une première version +30 dB de l’amplificateur a permis de mettre en évidence un pic de bruit à 95 Hz et ses harmoniques impaires, dû aux vibrations acoustiques des ventilateurs utilisés dans le châssis. Grâce à une collaboration avec Keopsys, une version bas-bruit a été mise au point, réduisant fortement ce pic de bruit. Les spectres mesurés sont donnés dans la figure 3.3. La variance des fluctuations relatives de puissance à 10 W est de -72 dB sur la bande 1 Hz-10 kHz.

Une source à 1550 nm de cette puissance pouvant être utilisée pour la réalisation de pièges dipolaires, nous avons cherché à savoir si le bruit d’intensité était compatible

1. KPS-CUS-BT-SPR1550-110-PM-FA-FP de marque Keopsys

avec cette application. Dans un piège avec une fréquence d'oscillation de  $\nu$ , le taux de chauffage paramétrique est de  $\pi^2 \nu^2 S_a(2\nu)$ , où  $S_a$  est la densité de puissance de bruit d'intensité relative  $S_a(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) \langle \epsilon(t)\epsilon(t+\tau) \rangle$  [74],  $\epsilon$  étant la variation relative d'intensité. En prenant par exemple  $\nu = 5$  kHz, le taux de chauffage paramétrique est inférieur à  $2,4 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$ , en ignorant les autres sources de bruit. Ces valeurs très faibles indiquent que le bruit d'intensité de ce type de source est compatible avec la réalisation de pièges dipolaires [75].

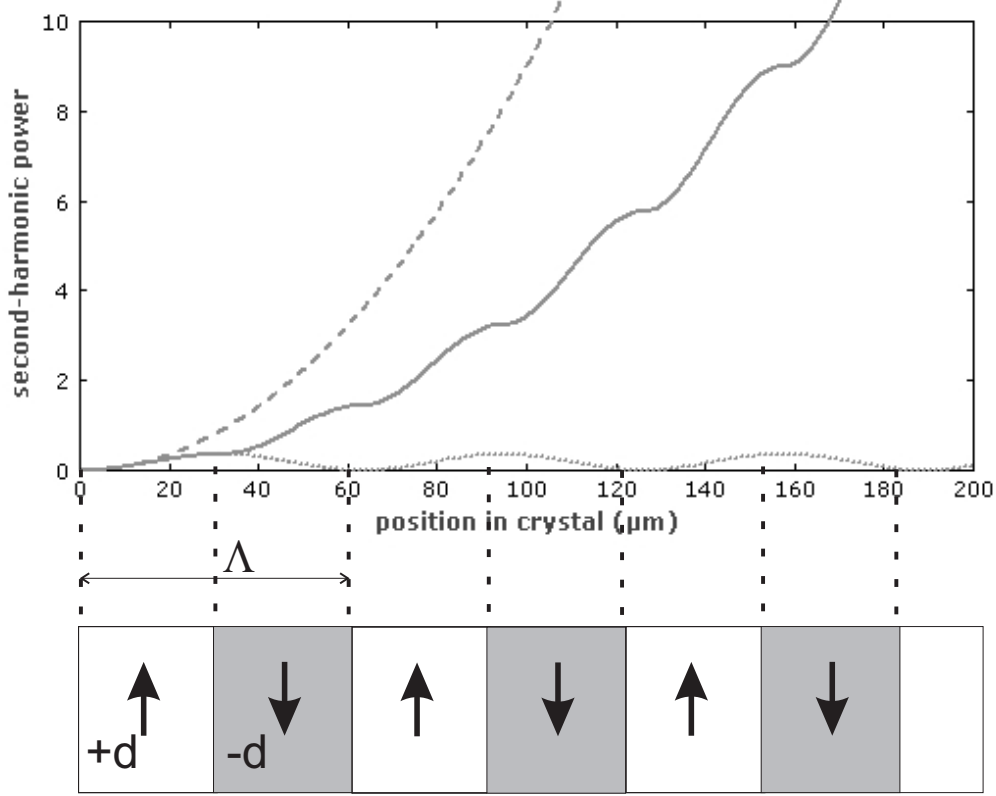
### 3.1.3 Doublement de fréquence dans un cristal de ppLN

Considérons le mélange à trois ondes dans un milieu non linéaire, qui se produit lorsqu'on envoie dans le milieu deux ondes de fréquence  $\omega_1$  et  $\omega_2$  qui créent une onde à  $\omega_0$  telle que  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Les amplitudes complexes  $E_{1j}(\omega_1), E_{2k}(\omega_2), P_i^{(2)}(\omega_0)$ ,  $i, j, k = x, y, z$  des champs électriques correspondants et de la polarisation non linéaire du second ordre sont reliés par  $P_i^{(2)}(\omega_0) = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2) E_{1j}(\omega_1) E_{2k}(\omega_2)$  où  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  est le tenseur de susceptibilité diélectrique d'ordre deux dans le matériau [76]. Ce tenseur n'est non nul que pour les cristaux non centrosymétriques, ce qui est le cas du niobate de lithium que nous utilisons.

**Accord de phase** Compte tenu de la dépendance en fréquence de l'indice du cristal, l'onde fondamentale et sa seconde harmonique ne se propagent pas à la même vitesse. Ainsi, les deux ondes se déphasent lentement, et ce déphasage augmente avec la distance de propagation, diminuant l'efficacité du doublement. On obtient un doublement efficace seulement si  $\Delta k l_c \ll 1$ , où  $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega$  est le désaccord de vecteur d'onde, et  $l_c$  est la longueur du cristal. Cela équivaut à  $|n_{2\omega} - n_\omega| \ll \frac{c}{2\omega l_c}$ , où  $n_\omega$  et  $n_{2\omega}$  sont les indices de réfraction du cristal aux fréquences  $\omega$  et  $2\omega$ . Compte tenu de la dépendance en fréquence de l'indice dans le cristal, cela limite la longueur sur laquelle le doublement serait efficace à quelques dizaines de micromètres [77].

Pour s'affranchir de cette limitation, on utilise un cristal à retournement périodique (type « pp »). Dans ce type de cristal, l'onde de pompe et l'onde doublée se propagent le long de l'axe extraordinaire du cristal. Un quasi accord de phase est réalisé en retournant périodiquement l'orientation des domaines du cristal utilisé, par application d'un champ électrique lors du processus de fabrication [78]. Le principe de fonctionnement de ce type de cristal est illustré dans la figure 3.4. Cela revient à changer le signe du coefficient  $\chi_{333}^{(2)}$  à chaque demi-période  $\frac{\Lambda}{2}$ , l'indice 3 désignant l'axe extraordinaire du cristal. Ainsi, au bout d'une période, le déphasage diminue, au lieu d'augmenter. La condition de quasi accord de phase pour ce type de cristal s'écrit  $\Delta k_{\text{eff}} = k_{2\omega} - 2k_\omega - \frac{2\pi}{\Lambda}$ . En choisissant la période du retournement égale à  $\Lambda = \frac{\lambda_{2\omega}}{n_{2\omega} - n_\omega}$ , on peut obtenir le quasi accord de phase  $\Delta k_{\text{eff}} = 0$ . Cela permet de travailler avec des cristaux de grande longueur, et ainsi d'augmenter l'efficacité de doublement. Cette méthode s'affranchit également des problèmes de walk-off<sup>2</sup> rencontrés quand on utilise la biréfringence pour obtenir l'accord de phase, et permet d'utiliser l'élément le plus grand du tenseur  $\chi^{(2)}$ ,

2. Dans un matériau biréfringent, le faisceau polarisé selon l'axe extraordinaire se propage avec un angle par rapport à son vecteur d'onde.



**Figure 3.4** – Puissance de la seconde harmonique dans un cristal de ppLN en fonction de la position dans le cristal. La courbe en tirets correspond à un accord de phase parfait, celle en trait plein à un quasi accord de phase et celle en pointillés à une absence d'accord de phase. Les trois courbes correspondent au même  $\chi^{(2)}$ .

qui vaut  $\chi_{333}^{(2)} = 27 \text{ pm/V}$  d'après la littérature [79]. Pour notre système, nous avons choisi un cristal de longueur  $l_c = 50 \text{ mm}$ .

Le pas du réseau est choisi à la commande du cristal, dans notre cas  $\Lambda = 19 \text{ }\mu\text{m}$ , pour annuler  $\Delta k_{\text{eff}}$ . L'efficacité de doublement s'écrit :

$$\Gamma_{\text{eff}} = \frac{P_{2\omega}}{P_{\omega}^2} = \frac{2\omega^3 d_{\text{eff}}^2 l_c}{\pi n_{\omega} n_{2\omega} \varepsilon_0 c^4} \text{sinc}^2 \left( \frac{\Delta k_{\text{eff}} l_c}{2} \right) h(a, L, \sigma) \exp(-\alpha_{2\omega} l_c) \quad (3.1)$$

où :

- $d_{\text{eff}}$  est le coefficient de doublement effectif, dont la valeur théorique est  $d_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} \chi_{333}^{(2)}$  dans le cas du ppLN. Ce coefficient est le  $\chi_{333}^{(2)}$  que devrait avoir un cristal non-linéaire avec accord de phase parfait pour avoir la même efficacité de doublement que notre cristal à retournement périodique.
- le premier groupe de termes représente l'efficacité de doublement du matériau utilisé, et est proportionnel à la longueur du cristal  $l_c$ .
- le deuxième terme en  $\text{sinc}^2$  est la condition d'accord de phase. Il est égal à 1 quand l'accord de phase est réalisé.



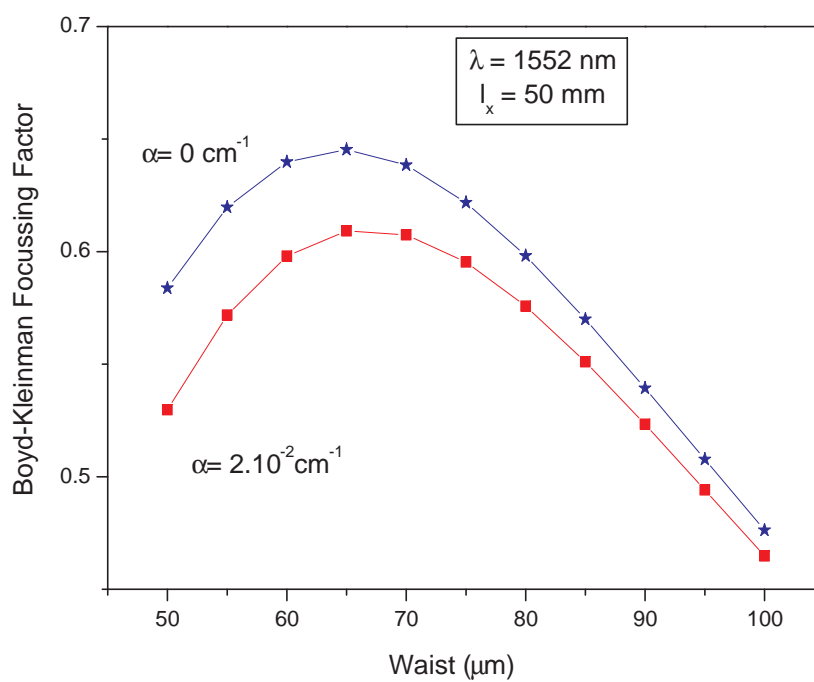
- le troisième terme est la fonction de focalisation de Boyd-Kleinman  $h(a, L, \sigma)$  [80], qui permet de calculer l'efficacité de doublement dans le cas d'un faisceau focalisé, avec un profil transverse gaussien nécessairement inhomogène et une dispersion de l'orientation des vecteurs d'onde.  $a = (\alpha_\omega - \frac{\alpha_{2\omega}}{2}) Z_R$ , où  $\alpha_{\omega, 2\omega}$  sont les coefficients de pertes linéaires dans le cristal à la fréquence  $(\omega, 2\omega)$ .  $Z_R$  est la longueur d'onde de Rayleigh du faisceau pompe,  $L = l_c n_\omega / Z_R$  le paramètre de focalisation et  $\sigma = \Delta k_{\text{eff}} \times Z_R$  le désaccord de vecteur d'onde normalisé. La courbe du facteur de Boyd-Kleinman en fonction de la taille du faisceau pompe est présentée dans la figure 3.5.
- le dernier terme prend en compte l'absorption linéaire du cristal à 780 nm, qui a été estimée à 0.7 % pour notre cristal de 50 mm. L'absorption à 1560 nm est complètement négligeable.

Le rayon à  $1/e^2$  du faisceau pompe est de 70  $\mu\text{m}$ , valeur qui optimise le facteur de Boyd-Kleinman. Dans notre cas, l'absorption est négligeable, et l'optimum pour le rayon du faisceau correspond à la situation pour laquelle la longueur de Rayleigh de la pompe est environ égale à la demi-longueur du cristal. Pour cette valeur, le diamètre du faisceau au niveau des faces d'entrée et de sortie est plus petit que les dimensions transverses du cristal. Ce problème doit être pris en compte au moment du choix de ses dimensions. On peut noter que la dépendance en  $l_c^2$  de la puissance de sortie n'est valable que pour une efficacité de doublement faible. Au delà, il faut prendre en compte la déplétion de la pompe. Le réglage de l'accord de phase est effectué en ajustant la température du cristal, la dilatation thermique faisant varier  $\Lambda$ . La dépendance de la puissance doublée en fonction de la température est montrée dans la figure 3.6.

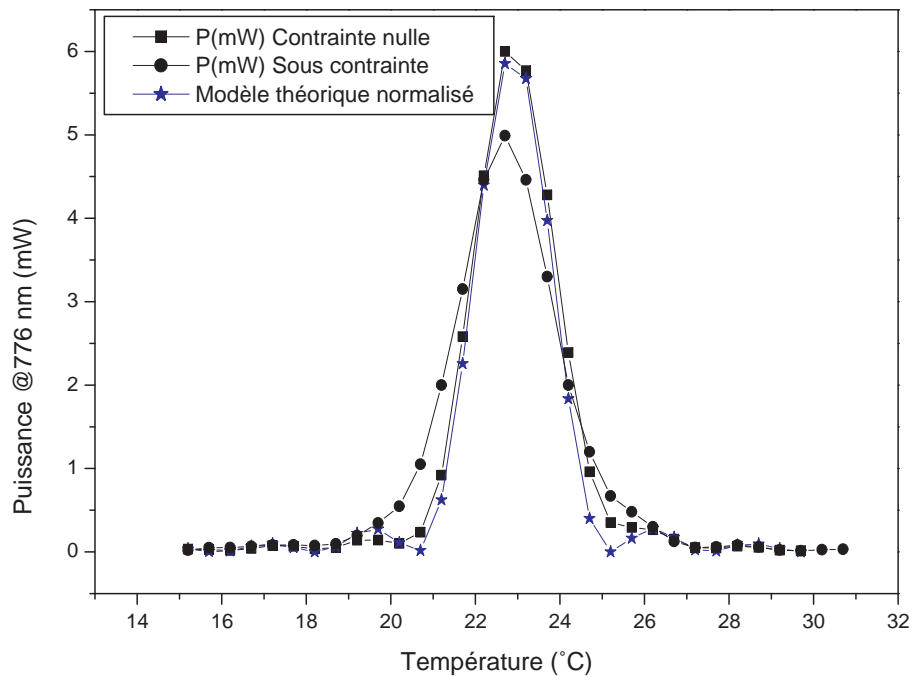
### 3.1.4 Réalisation expérimentale du doubleur

Le doublement de fréquence se fait en simple passage. Nous utilisons un cristal de niobate de lithium dopé à 5% produit par HCP Photonics. Ce cristal mesure 50 mm de long, 0,5 mm de haut et 3 mm de large. La longueur du cristal est la plus grande longueur disponible chez les fabricants. Ses faces d'entrée et de sortie sont recouvertes d'un traitement anti-reflet large bande. Ce cristal est placé dans un four réalisé au laboratoire. Une feuille d'indium permet d'assurer un contact thermique optimal entre le cristal et le four. Le four est constitué de deux parties, un étai tenant le cristal et une base. Le cristal est maintenu entre deux mâchoires de cuivre, en faisant attention de minimiser les contraintes mécaniques sur celui-ci, ces dernières réduisant l'efficacité de doublement (voir figure 3.6). Cet étai est posée sur la base par l'intermédiaire d'un élément Peltier qui assure la régulation fine de sa température. La base est entourée de résistances chauffantes réalisées en fil de cuivre, qui permettent de chauffer l'ensemble à la température de 90°C nécessaire à l'accord de phase. Nous avons choisi une température élevée afin de limiter les effets photoréfractifs. Les enroulements de cuivre sont alternés pour éviter de créer un champ magnétique.

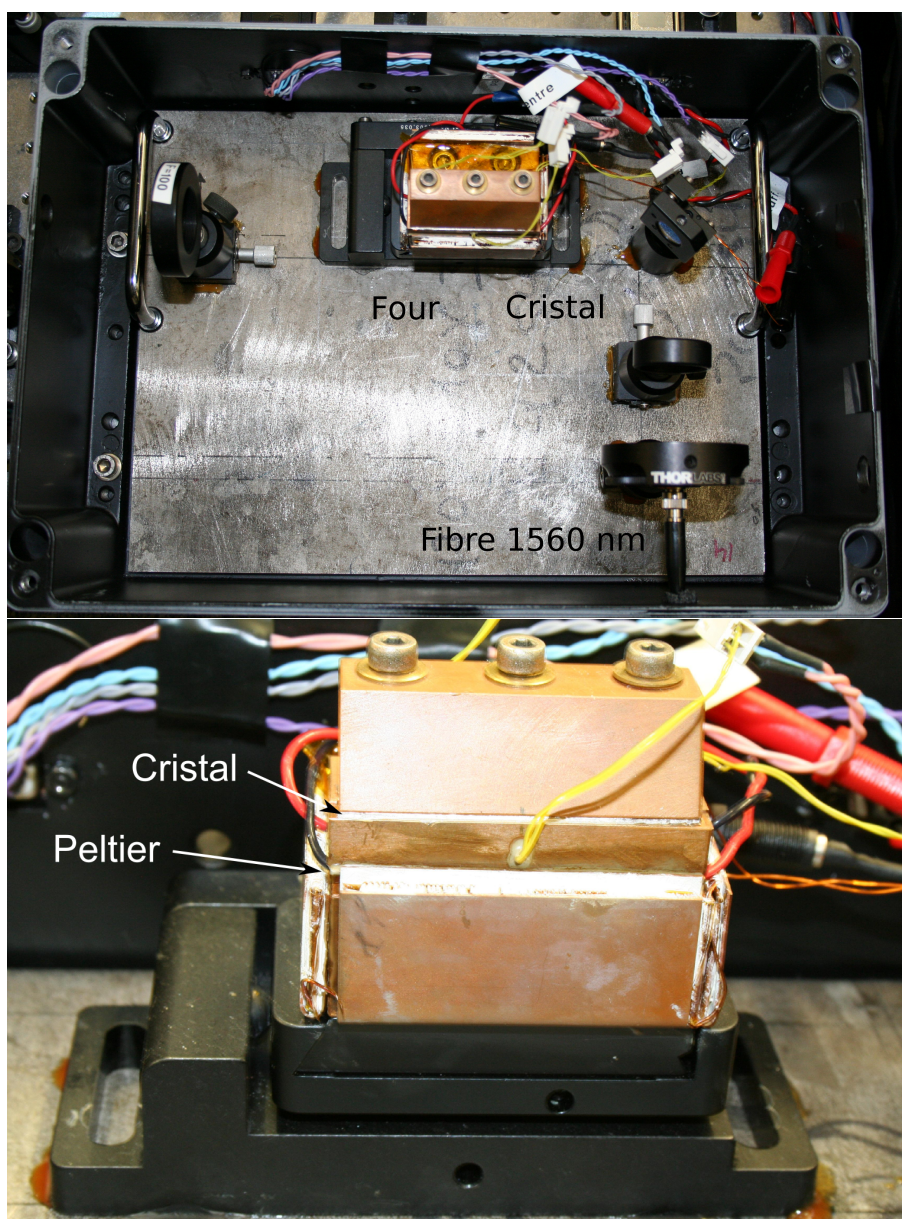
Quatre thermistances permettent de mesurer la température aux extrémités et au centre du cristal, ainsi qu'au niveau de la base du four. Le Peltier permet de réguler finement la température au centre du cristal, par l'intermédiaire d'une boucle PID.



**Figure 3.5** — Facteur de Boyd-Kleinman en fonction de la taille de col du faisceau, avec ou sans prise en compte des pertes linéaires dans le cristal ( $\alpha$  est le coefficient de pertes linéaires).



**Figure 3.6** — Mesure de la puissance doublée en fonction de la température du cristal, avec et sans contraintes mécaniques. Ces mesures ont été effectuées sur un prototype du doubleur. La présence des contraintes élargit la courbe, et diminue l'efficacité du doublement à l'accord de phase. La courbe correspondant au modèle théorique a été normalisée de manière à avoir la même puissance maximale que les mesures à contrainte nulle.



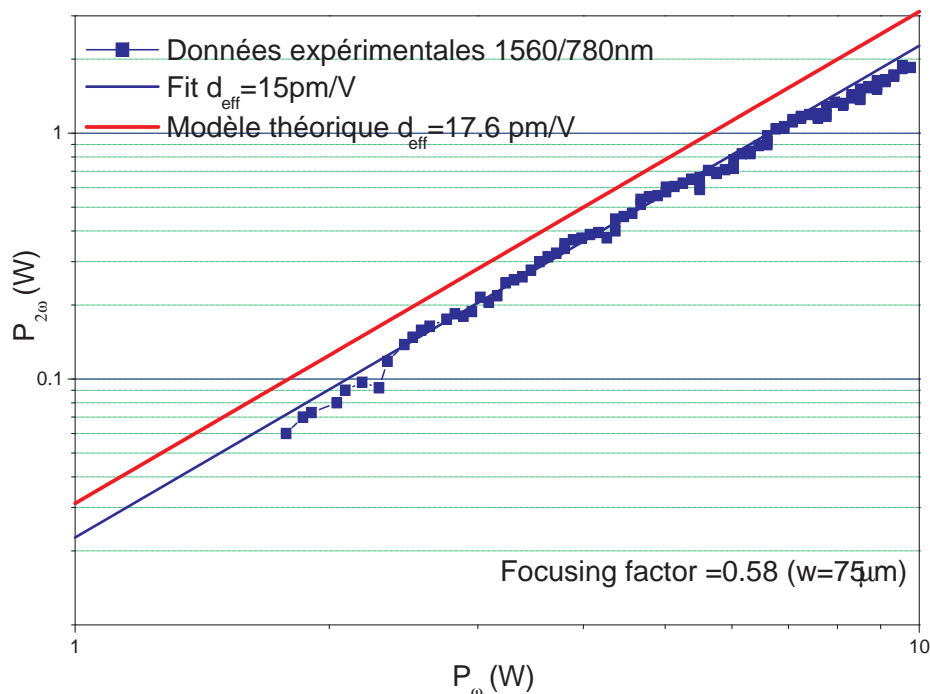
**Figure 3.7** — Le montage de doublement de fréquence, boîte ouverte, et le four. On y voit bien les mâchoires tenant le cristal, reliées à la base par l'intermédiaire du Peltier. Les plaquettes entourant la base du four sont les résistances chauffantes permettant de l'amener à température.

Ce système permet d'obtenir une stabilité en température meilleure que  $0,1^{\circ}\text{C}$ . Les thermistances situées aux extrémités du cristal permettent de s'assurer de l'absence de gradients de température. Le four lui-même est monté sur une platine 5 axes permettant un positionnement précis du cristal. Il est possible d'ajuster la position de cette platine même lorsque la boîte du doubleur est fermée, ce qui permet d'éviter les fluctuations de température pendant le réglage.

Le faisceau sort de l'amplificateur par une fibre à maintien de polarisation cli-

vée droite. Ce type de sortie a été choisi pour minimiser l'astigmatisme du faisceau. L'amplificateur possède un isolateur optique intégré, permettant d'arrêter d'éventuels retours. Le faisceau est d'abord collimaté en sortie de fibre par un collimateur de focale 8 mm, puis est focalisé dans le cristal par une lentille de focale 100 mm. La position et la taille du col du faisceau ont été mesurées avec la méthode du couteau. Tous les éléments optiques sont collés sur une plaque d'INVAR, matériau présentant un faible coefficient de dilatation thermique. L'ensemble est placé dans une boîte, montrée sur la figure 3.7, pour une plus grande stabilité en température. Enfin, une lentille de 100 mm permet d'obtenir un faisceau collimaté en sortie. Un miroir à 780 nm est placé devant la sortie du doubleur. La plus grande partie du faisceau pompe à 1560 nm traverse ce miroir, et est récupérée par un absorbeur de faisceau. Un cube séparateur de polarisation à 780 nm achève la séparation, ce cube réfléchissant notre faisceau à 780 nm et laissant passer le faisceau à 1560 nm.

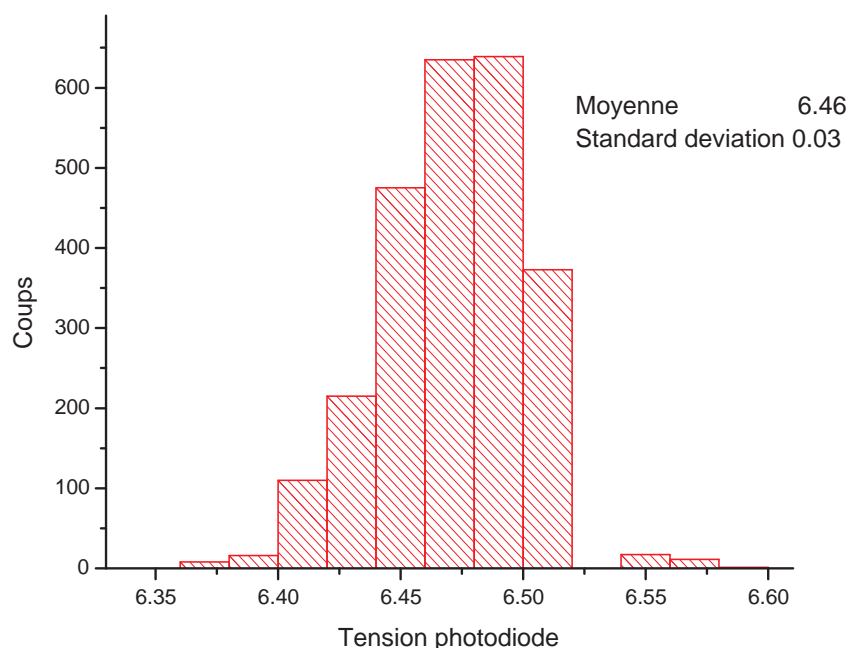
### 3.1.5 Performances du système



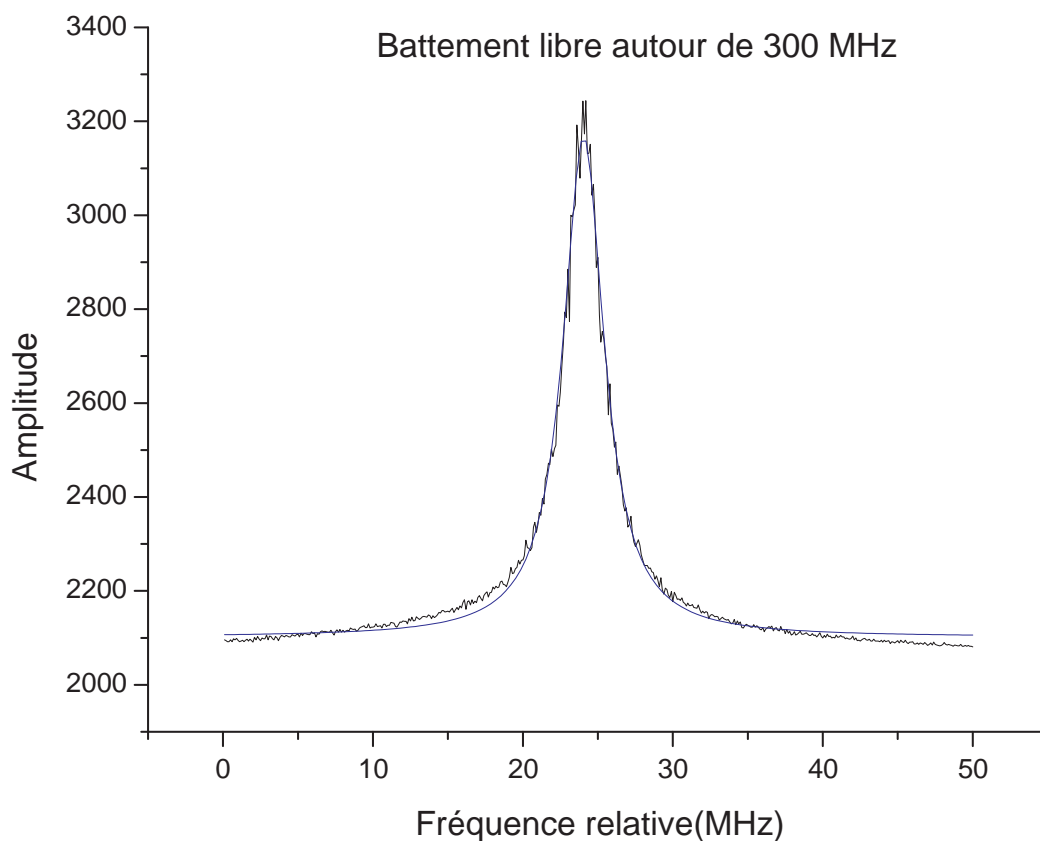
**Figure 3.8** – Ce graphe montre la puissance de sortie à 780 nm en fonction de l'intensité de la pompe, en échelle log-log. Les données expérimentales sont ajustées par la loi  $P_{out} = \Gamma_{\text{eff}} P_{\text{pompe}}$ ,  $d_{\text{eff}}$  étant déduit de  $\Gamma_{\text{eff}}$  par l'équation 3.1.

**Puissance** La puissance à 780 nm a été mesurée pour une puissance de pompe allant de 1 à 10 Watts. Cette mesure est montrée dans la figure 3.8. Le système produit jusqu'à 2 W de lumière à 780 nm avec la puissance de pompe maximale, ce qui est largement suffisant pour notre piège magnéto-optique et MOT2D. La mesure de la puissance à 780 nm nous a permis de mesurer un  $d_{\text{eff}}$  de 15 pm/V, légèrement plus faible que le  $d_{\text{eff}}$  théorique, qui vaut 17,6 pm  $V^{-1}$ .

La stabilité en puissance du doubleur a été mesurée avant l'injection dans une fibre optique en récupérant une partie du faisceau avec une lame de verre et en mesurant sa puissance à l'aide d'une photodiode, pendant une durée de 5 minutes. Nous avons obtenu une amplitude relative des fluctuations d'intensité de 0,5%, comme montré dans la figure 3.9. En pratique, la stabilité de l'intensité laser arrivant sur les atomes est limitée par le passage du laser dans les fibres optiques. En effet, les fibres à maintien de polarisation utilisées sont en réalité des fibres biréfringentes, qui ne fonctionnent bien que si la lumière est polarisée linéairement avec un axe aligné sur un des axes propres de la fibre. Après optimisation de la polarisation d'entrée, les fluctuations de polarisation résiduelles se traduisent par des fluctuations d'intensité de l'ordre du pourcent quand on met un polariseur en sortie de fibre pour purifier l'état de polarisation.



**Figure 3.9** — Histogramme de la puissance du doubleur avant couplage dans la fibre refroidisseur, gain 2 V, pendant 5 minutes d'intégration.



**Figure 3.10** — Battement entre le doubleur et le laser à cavité étendue. La courbe expérimentale est modélisée par une Lorentzienne de largeur 3,3 MHz

**Mesure de la largeur de raie** La largeur de raie du doubleur a été mesurée en le faisant battre avec le laser à cavité étendue qui nous sert de référence de fréquence, décrite au paragraphe 3.2.1. Le battement est fait à une fréquence de 300 MHz sur la même photodiode rapide qui permet l’asservissement du doubleur, comme décrit en section 3.2.3. Cette mesure donne une largeur de 3,3 MHz, supérieure à celle de 1,7 MHz attendue d’après la mesure sur les diodes à 1560 nm. Une cause d’élargissement possible serait l’amplificateur fibré.

## 3.2 Système laser à 780 nm

Le faisceau principal pour les pièges magnéto-optiques 2D et 3D est fourni par le laser 1560 nm doublé en fréquence, décrit au paragraphe 3.1, que nous appellerons par la suite « doubleur ». La fréquence du faisceau en sortie du doubleur est asservie par un battement avec un faisceau de référence produit par un laser à cavité étendue, lui-

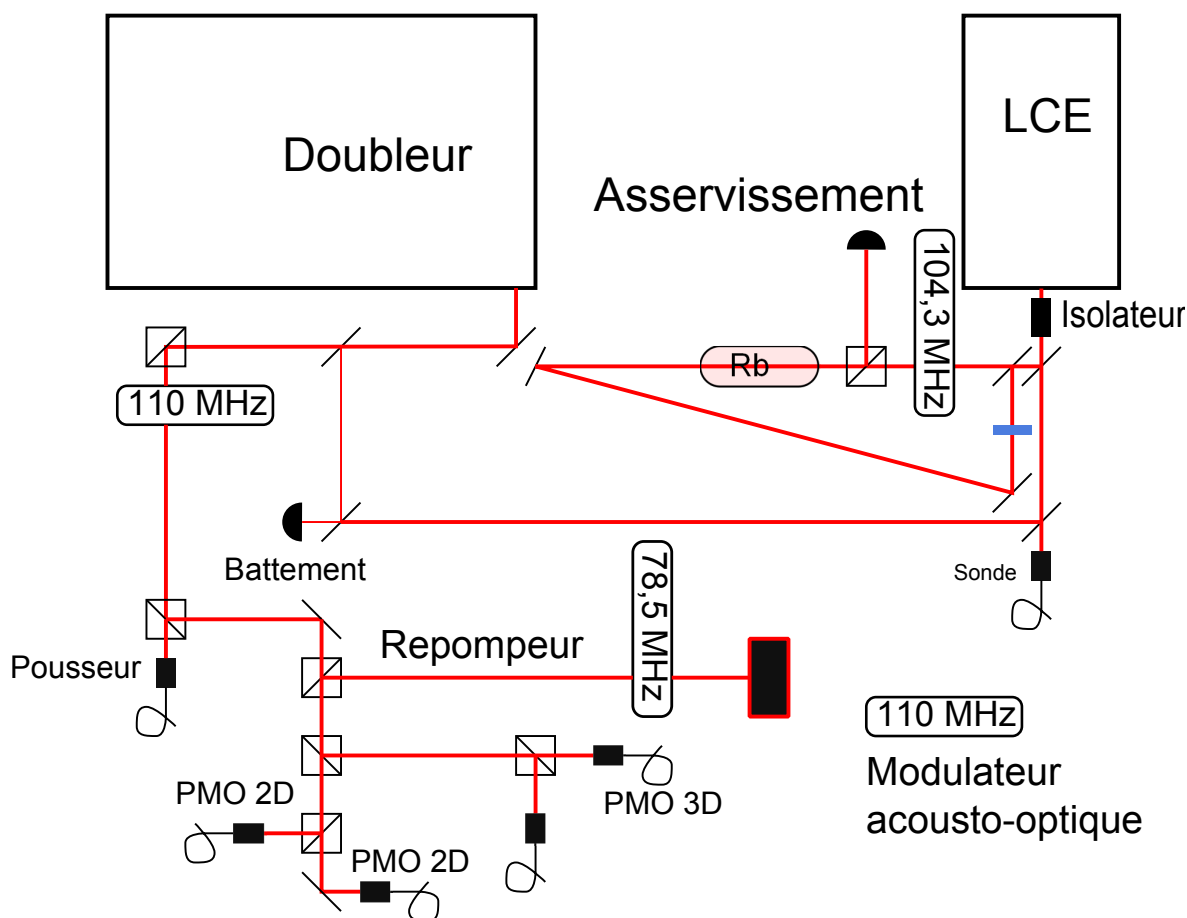


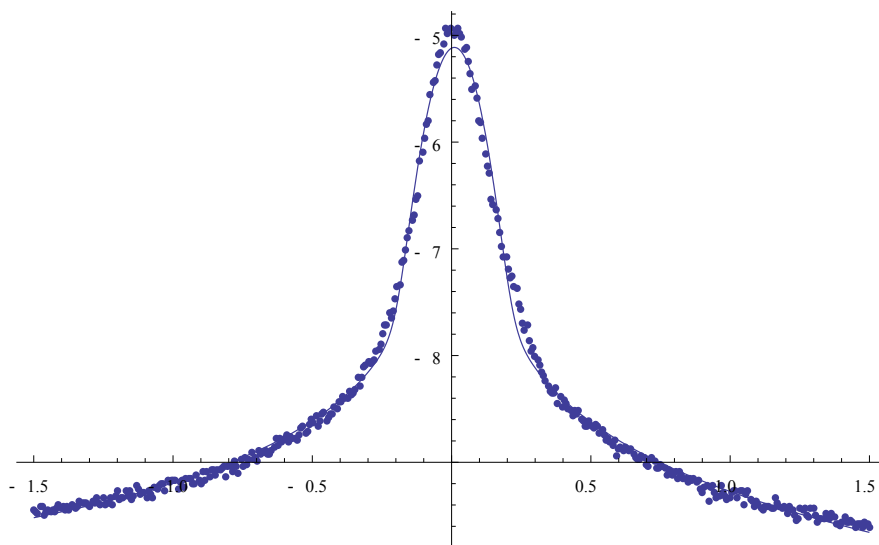
Figure 3.11 – Ce schéma montre le système laser refroidisseur.

même asservi sur une raie d'absorption du rubidium à l'aide d'un montage d'absorption saturée sans élargissement Doppler [81, 82]. Ce laser est également utilisé pour produire le faisceau sonde utilisé lors de l'imagerie, et le faisceau pompeur pour la phase de pompage optique. Les fréquences des différents faisceaux utilisés sont décrites dans la figure 3.14.

### 3.2.1 Laser à cavité étendue

Le faisceau de référence est produit par un laser à cavité étendue Narrowdiode, de la société Radiant Dyes. Ce laser utilise une conception mise au point au SYRTE [83]. Il produit une puissance de 50 mW, avec une largeur spectrale libre de moins de 20 kHz. Cette largeur a été mesurée de la même façon que pour la diode à 1560 nm, en le faisant battre avec un laser identique appartenant au SYRTE. Le résultat de cette mesure est montré dans la figure 3.12. La fréquence moyenne du battement est asservie à l'aide d'un convertisseur fréquence-tension, et le spectre du battement enregistré. Ce spectre est modélisé par un profil de Voigt, qui est le produit de convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne. La partie lorentzienne contient la largeur de raie intrinsèque du laser, tandis que la partie gaussienne prend en compte les dérives de





**Figure 3.12** — Battement entre notre LCE et celui du SYRTE. L’axe des abscisses représente la fréquence en MHz, les ordonnées représentent la densité spectrale de puissance en coordonnées logarithmiques. On trouve une largeur lorentzienne de 1,6 kHz et une largeur gaussienne de 57 kHz.

fréquences des lasers durant la période de mesure et est une mesure de la qualité de l’asservissement. On trouve une largeur gaussienne  $w_G = 57$  kHz et une largeur lorentzienne  $w_L = 1,6$  kHz. L’incertitude sur la largeur de la lorentzienne est de l’ordre de quelques kHz, étant donné que  $w_G \gg w_L$ . Remarquons que la largeur du laser une fois asservi peut être légèrement supérieure si l’asservissement rajoute du bruit. Effectivement, une mesure de la distribution du signal d’erreur nous permet d’estimer la largeur du laser asservi à 180 kHz.

Ce laser est asservi avec un désaccord de  $-160$  MHz par rapport à la transition  $5S_{\frac{1}{2}}, F = 2 \rightarrow 5P_{\frac{3}{2}}, F' = 3$  du rubidium 87, que nous appellerons par la suite  $(2 \rightarrow 3)$  (voir figure 3.14). Une partie du faisceau de ce laser passe par un modulateur acousto-optique à 80 MHz en double passage, et sert de faisceau sonde à résonance pour l’imagerie. Une autre partie du faisceau est utilisée pour le pompage optique.

### 3.2.2 Stabilisation en fréquence du laser à cavité étendue

Une partie du faisceau est prélevée et envoyée sur un montage de spectroscopie d’absorption saturée. Le faisceau pompe de l’absorption saturée est décalé de  $-104,3$  MHz par rapport au faisceau sonde par un modulateur acousto-optique et sa fréquence est modulée à 150 kHz. Dans ce type de montage, on détecte l’absorption par les atomes qui sont simultanément résonnants avec la pompe et la sonde. Habituellement, ce sont les atomes dont la composante de vitesse dans l’axe des faisceaux est nulle. Dans notre cas, ce sont les atomes dont la vitesse est telle que le décalage Doppler de la pompe est de 52,15 MHz. Pour les atomes de cette classe de vitesse, pompe et sonde sont à la même fréquence, qui est décalée de 52,15 MHz par rapport au faisceau entrant dans l’absorption saturée. Les raies sont donc décalées de 52,15 MHz. L’avantage de ce mon-

tage est qu'il permet de réaliser l'asservissement sans moduler le faisceau utile. Le laser est asservi sur la raie de croisement de niveau des transitions ( $2 \rightarrow 1$ ) et ( $2 \rightarrow 3$ ), qui se situe à un décalage de  $-212,15$  MHz de la transition ( $2 \rightarrow 3$ ). En tenant compte du décalage provoqué par le modulateur acousto-optique, le laser est asservi à  $-160$  MHz de ( $2 \rightarrow 3$ ). La puissance du faisceau sonde est mesurée avec une photodiode, et une détection synchrone permet d'extraire un signal d'erreur, qui est utilisé pour asservir le laser par l'intermédiaire du courant de la diode pour les hautes fréquences et de la tension envoyée sur un élément piézoélectrique, faisant varier la longueur de la cavité pour compenser les dérives lentes.

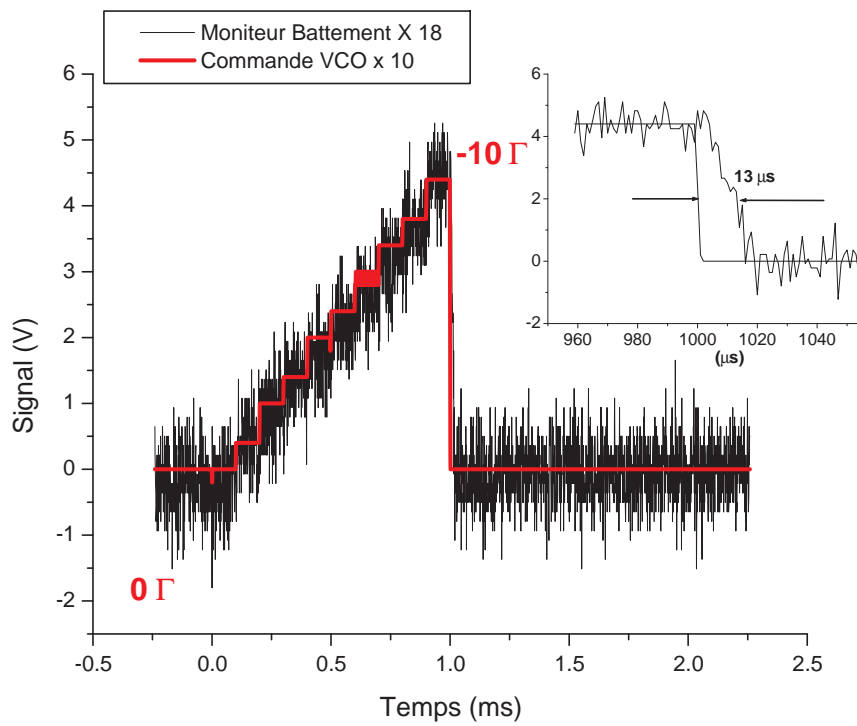
### 3.2.3 Asservissement par battement du doubleur

Le doubleur est asservi en faisant battre une partie du faisceau avec la référence issue du laser à cavité étendue. Les deux faisceaux sont superposés et focalisés sur une photodiode rapide. Le signal est alors amplifié et envoyé dans une carte réalisée par l'atelier d'électronique du laboratoire. La fréquence du battement est divisée par 8, et asservie sur une fréquence de référence par une boucle à verrouillage de phase. La rétroaction se fait en modulant le courant de la diode laser à  $1560$  nm.

La fréquence de référence est produite en faisant battre deux oscillateurs contrôlés en tension (VCO) dont l'un est commandé par une sortie analogique de notre système de contrôle informatique. Cela permet de faire varier le désaccord du faisceau de refroidissement dans une gamme de  $-60\Gamma$  à  $10\Gamma$ , où  $\Gamma = 2\pi \times 5,89$  MHz est la largeur naturelle de la raie du rubidium utilisée pour le piège magnéto-optique. La stabilité de l'asservissement a été testée en lui demandant d'effectuer des sauts de fréquence. Le résultat d'un de ces tests est présenté dans la figure 3.13. Pour un saut de  $10\Gamma$ , le temps de réaction de l'asservissement est d'une dizaine de microsecondes, ce qui est petit devant le pas de temps de  $100 \mu\text{s}$  de notre système de contrôle informatique.

### 3.2.4 Faisceau refroidisseur

Le faisceau principal utilisé pour le refroidissement laser est issu du doubleur, décalé en fréquence de  $-120$  MHz par un modulateur acousto-optique, afin de le ramener à un désaccord négatif de quelques  $\Gamma$ . Ce modulateur acousto-optique permet également de faire varier la puissance envoyée sur les atomes. Le faisceau est alors couplé dans une fibre à maintien de polarisation et envoyé vers le piège magnéto-optique. Un cube et une lame permettent de s'assurer que la polarisation en entrée de la fibre est bien alignée avec les axes propres de la fibre afin de limiter les fluctuations d'intensité en sortie, voir paragraphe 3.1.5. On doit également être attentif à l'utilisation du modulateur acousto-optique. En effet, si on baisse trop longtemps la puissance RF qui lui est envoyée, des effets thermiques provoquent un déplacement du faisceau et une dégradation du couplage dans la fibre. Pour cette raison, et pour pouvoir s'assurer d'une coupure totale du refroidisseur, un obturateur à électro-aimant (appelé clic-clac) est placé à un point où le faisceau est focalisé. Le signal RF du modulateur acousto-optique est coupé uniquement pendant le temps bref que le clic-clac met à se fermer, puis il est rallumé, le faisceau restant coupé par le clic-clac.



**Figure 3.13** — Réponse de l’asservissement à une rampe de fréquence et à un saut de  $10\Gamma$ . La fréquence du battement a été mesurée avec la sortie vidéo d’un analyseur de spectre IFR 2399.

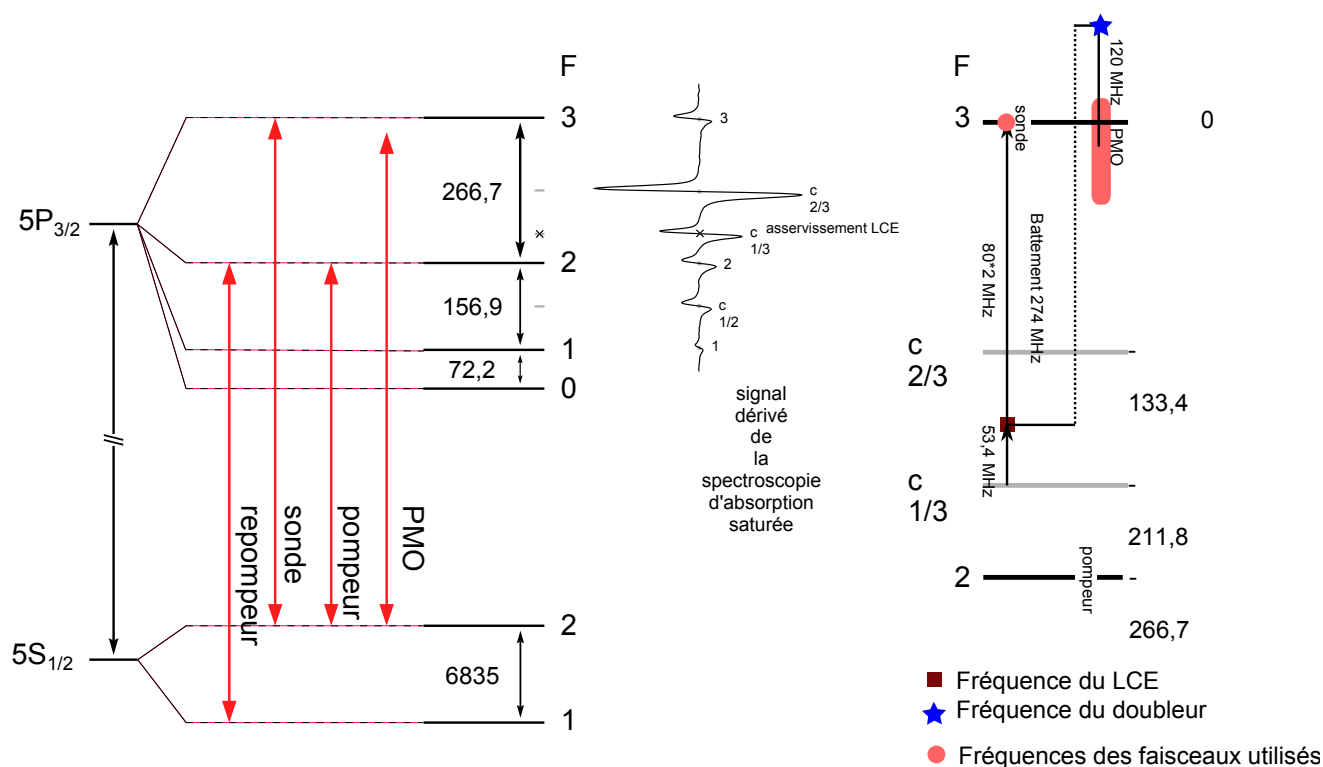


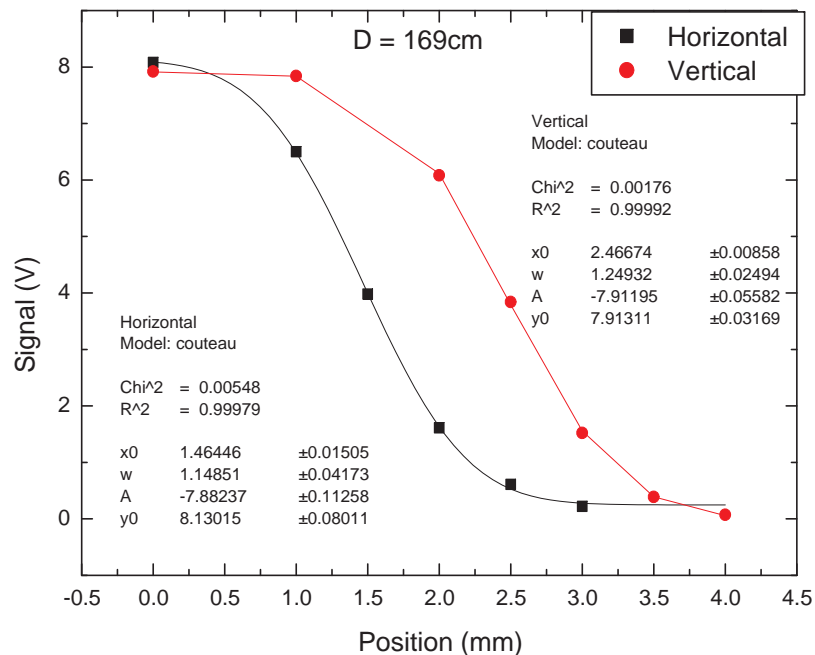
Figure 3.14 – Fréquence des différents faisceaux

### 3.2.5 Faisceau repompeur

Le faisceau repompeur est utilisé pour repomper les atomes qui se désexcitent dans le niveau  $5S_{1/2}, F = 1$  du rubidium lors de la phase de piège magnéto-optique. Ce faisceau est produit par une diode Sanyo indépendante asservie sur le croisement entre les transitions  $(1 \rightarrow 1)$  et  $(1 \rightarrow 2)$  par un montage d'absorption saturée, et décalé de 78,5 MHz par un modulateur acousto-optique afin de se retrouver sur la transition  $(1 \rightarrow 2)$ . Le modulateur permet également de contrôler la puissance du faisceau. La puissance maximale vaut 20 mW. Pour ce laser, une modulation de fréquence de faible amplitude est tolérable, et le signal d'erreur pour l'asservissement est produit simplement par modulation du courant de la diode.

## 3.3 Système laser à 532 nm

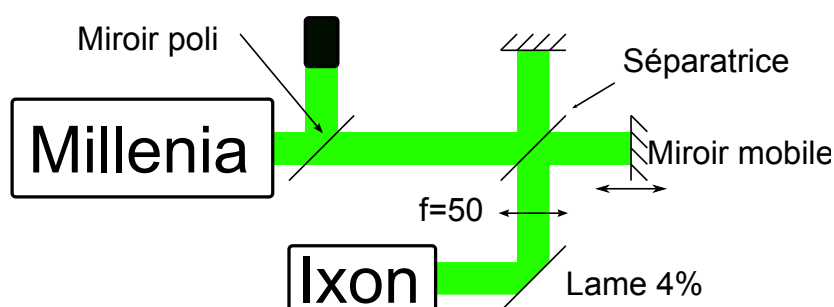
Pour notre expérience, nous utilisons également de la lumière laser désaccordée très loin vers le bleu de la résonance, afin d'utiliser la force dipolaire pour créer un potentiel répulsif pour les atomes. Nous utilisons un faisceau focalisé pour réaliser le bouchon optique nécessaire à la condensation dans le piège quadrupolaire, et nous avons également prévu de réaliser un réseau optique en faisant interférer deux faisceaux à 532 nm. Dans cette partie, je parlerai du laser utilisé pour créer le bouchon optique. Je discuterai également de la possibilité d'utiliser ce laser multimode, pour réaliser un réseau optique.



**Figure 3.15** — La largeur du faisceau est mesurée avec la méthode du couteau. On coupe le faisceau avec une lame de rasoir fixée sur une platine de translation micrométrique, et on mesure l'intensité lumineuse en sortie en fonction de la position du couteau. La courbe obtenue est modélisée par la fonction erf, qui est l'intégrale d'une gaussienne.

### 3.3.1 Fonctionnement du laser, mode

Le laser que nous utilisons est un laser Millennia, fabriqué par Spectra Physics, qui produit un faisceau laser d'une longueur d'onde de 532 nm et d'une puissance allant jusqu'à 10 watts. Ce faisceau est produit par doublement intracavité d'un faisceau à 1064 nm par un cristal de LBO. Le faisceau à 1064 nm est lui-même produit par un cristal de Nd:YVO<sub>4</sub>, pompé optiquement par de la lumière générée par quatre barres de diodes laser logées dans le bloc d'alimentation et amenée jusqu'au cristal par des fibres optiques. Nous avons mesuré la taille du faisceau et sa divergence, les résultats sont présentés dans la figure 3.15. Une première mesure à 97 cm de la sortie du laser donne les valeurs de waist horizontal  $w_h = 1,17$  mm et vertical  $w_v = 1,38$  mm. Une mesure à 169 cm de la sortie du laser donne  $w_h = 1,15$  mm et  $w_v = 1,25$  mm. On note que ces valeurs dépendent de l'alignement de la cavité du laser, et sont donc susceptibles de varier lors d'un réalignement.



**Figure 3.16** – Pour pouvoir étudier les propriétés de cohérence du faisceau du laser Millenia à sa puissance nominale de 10 W, on prélève une fuite du faisceau sur un miroir à 532 nm dont la face arrière est polie. Le faisceau passe alors dans un interféromètre de Michelson, réalisé avec une lame séparatrice (dont la transmission est de 50 %) et deux miroirs dont l’un est monté sur une platine de translation micrométrique. Une lentille de focale 50 mm fait l’image du miroir fixe sur notre caméra Andor Ixon 885D. Le dernier miroir est une lame séparatrice qui réfléchit 4 % de la lumière incidente, afin de ne pas saturer la caméra.

### 3.3.2 Longueur de cohérence

Le laser Millenia utilise une technique appelée QMAD (Quiet Multi-Axial Mode Doubling) pour réduire le bruit d’intensité. Si quelques modes longitudinaux de la cavité laser sont peuplés, les interactions causées entre eux par les effets non-linéaires du cristal doubleur provoquent des fluctuations d’intensité importantes. Plutôt que de chercher à avoir un laser monomode longitudinal, les concepteurs du Millénia ont choisi une cavité longue avec beaucoup de modes au dessus du seuil, ce qui permet de limiter les fluctuations d’intensité par moyennage. L’écart entre deux modes d’une cavité de longueur  $L_{cav}$  est donné par  $\delta\nu = \frac{c}{2L_{cav}}$ , et vaut donc 150 MHz pour la cavité du Millenia, qui est longue de un mètre.

Nous avons cherché à savoir si le caractère multi-mode de ce laser nous interdisait complètement de l’utiliser pour créer un réseau optique, comme prévu pour la réalisation du piège en anneau. Pour cela, nous avons voulu connaître sa longueur de cohérence. Nous avons utilisé un interféromètre de Michelson, dont le schéma est montré sur la figure 3.16.

On règle d’abord l’interféromètre pour observer la teinte plate, puis on incline un des miroirs pour se placer en configuration coin d’air, et on observe les franges sur la caméra. A partir de l’image des franges, on calcule le contraste. On répète l’opération plusieurs fois en déplaçant le miroir mobile. On obtient alors la courbe montrée dans la figure 3.17. Nous attribuons le contraste de 50 % mesuré à des problèmes de réflexions parasites.

Nous avons effectué la mesure à la puissance de 10 W, et trouvé une longueur de cohérence de 2,2 mm. Cette valeur est suffisante pour pouvoir réaliser un réseau optique avec ce laser, même si cela sera compliqué techniquement, la longueur des deux faisceaux utilisés devant être identique au millimètre près. Nous avons également remarqué que la longueur de cohérence est plus grande à faible puissance, de l’ordre de

la dizaine de centimètres à une puissance de 200 mW. Cela s'explique par le fait que le nombre de modes au dessus du seuil diminue quand on baisse la puissance de pompe du laser.

### 3.3.3 Contrôle de l'intensité

#### Cellule de Pockels

Pour notre expérience, nous avons besoin d'une forte puissance laser dans le vert de la résonance du rubidium pour deux usages : créer le bouchon optique pour obtenir la condensation, et produire un réseau optique pour la réalisation du piège en anneau. Nous avons donc cherché une solution pour pouvoir faire basculer le faisceau du laser Millenia entre deux voies.

Pour cela, nous avons utilisé une cellule à effet Pockels. L'effet Pockels est une variation de la biréfringence d'un cristal auquel est appliqué un champ électrique. Cet effet est linéaire avec le champ appliqué, contrairement à l'effet Kerr, qui est quadratique. Une cellule à effet Pockels utilise cet effet pour créer une lame de polarisation à retard variable. En plaçant son axe à 45 degrés de l'axe de polarisation d'un faisceau laser et en la faisant suivre d'un cube séparateur de polarisation, on peut régler la répartition de l'intensité du faisceau entre la voie transmise et la voie réfléchiée par le cube. Cela se fait en variant la tension appliquée à la cellule, pour faire varier son retard entre  $\frac{\lambda}{2}$  et  $\lambda$ . Une cellule de Pockels a un temps de réponse très court, de l'ordre de la nanoseconde, et est ainsi couramment utilisée dans la réalisation de lasers pulsés, c'est le principe du Q-switching. Une mesure du temps de coupure de notre cellule est montrée dans la figure 3.19. La cellule que nous utilisons n'est pas biréfringente à tension nulle, et se comporte comme une lame  $\frac{\lambda}{2}$  pour une tension de 3265 V. Nous la commandons avec une alimentation haute tension de 4 kV<sup>3</sup> et un switch push-pull<sup>4</sup>.

La procédure de réglage de la cellule est la suivante : on place une lame  $\frac{\lambda}{2}$  suivie d'un prisme de Glan après la cellule de Pockels. A tension nulle, on tourne la lame jusqu'à extinction du faisceau transmis par le prisme, et on ajuste la position de l'axe de la Pockels par rapport à l'axe optique avec les vis de réglage sur sa monture, de manière à optimiser l'extinction. On augmente ensuite la tension appliquée à la Pockels tout en tournant la lame pour rester au minimum de transmission. La polarisation du faisceau en sortie de la cellule devient circulaire, et on n'obtient qu'une extinction partielle. On ne retrouve l'extinction totale que lorsque la polarisation redevient linéaire, c'est à dire lorsque la Pockels se comporte comme une lame  $\frac{\lambda}{2}$ , ce qui se produit pour une tension  $V=3265$  V. On repasse alors à 0 V, et on place la lame de façon à avoir l'extinction. On repasse à 3265 V, et on tourne la Pockels dans sa monture pour minimiser la puissance réfléchiée par le prisme. On a alors placé l'axe de la Pockels à 45 degrés de l'axe de polarisation du faisceau incident. On contrôle la puissance dans chaque voie avec la tension appliquée. La courbe de calibration est donnée par la figure 3.18. Nous avons également vérifié que la cellule de Pockels n'introduisait pas de bruit supplémentaire dans l'intensité du laser. Une mesure de la stabilité en intensité du faisceau après

3. Ultravolt F series 4A12

4. Behlke HTS 41-06-GSM

la Pockels est présentée dans la figure 3.20. Cette mesure n'a pas détecté de bruit significatif ajouté par la Pockels.

### Acousto-optique

Si la cellule de Pockels est efficace pour répartir l'intensité selon deux voies différentes, elle n'est pas idéale pour couper rapidement le laser, en raison d'oscillations à l'extinction présentes pendant quelques centaines de  $\mu\text{s}$  (voir figure 3.19). Pour pouvoir faire varier l'intensité du faisceau créant le bouchon optique et avoir une coupure sans oscillations, nous utilisons un modulateur acousto-optique (AOM). Le faisceau en sortie de laser étant plus large que l'ouverture de l'AOM, nous utilisons un télescope constitué d'une lentille convergente de focale 400 mm et d'une lentille divergente de focale -100 mm séparées de 300 mm pour réduire sa taille. On obtient un waist de 0,33 mm à 10 cm de distance du télescope, c'est là que nous plaçons l'AOM. Après optimisation de la puissance diffractée dans l'ordre +1, nous obtenons une efficacité de 93 %, et un temps de coupure d'environ 2  $\mu\text{s}$ . Nous avons également placé une lame  $\frac{\lambda}{2}$  avant l'AOM, car son efficacité dépend de la polarisation du faisceau en entrée. Ce modulateur acousto-optique fonctionne avec une puissance rf faible (100 mW), ce qui limite les effets thermiques. L'angle de diffraction est plus grand que pour les modulateurs à 780 nm, avec 5.3 degrés pour 110 MHz. Cela implique un contrôle de la fréquence à mieux que 10 kHz pour contrôler les fluctuations de pointé du laser sur les atomes à mieux que 1  $\mu\text{m}$ .

#### 3.3.4 Stabilité du pointé

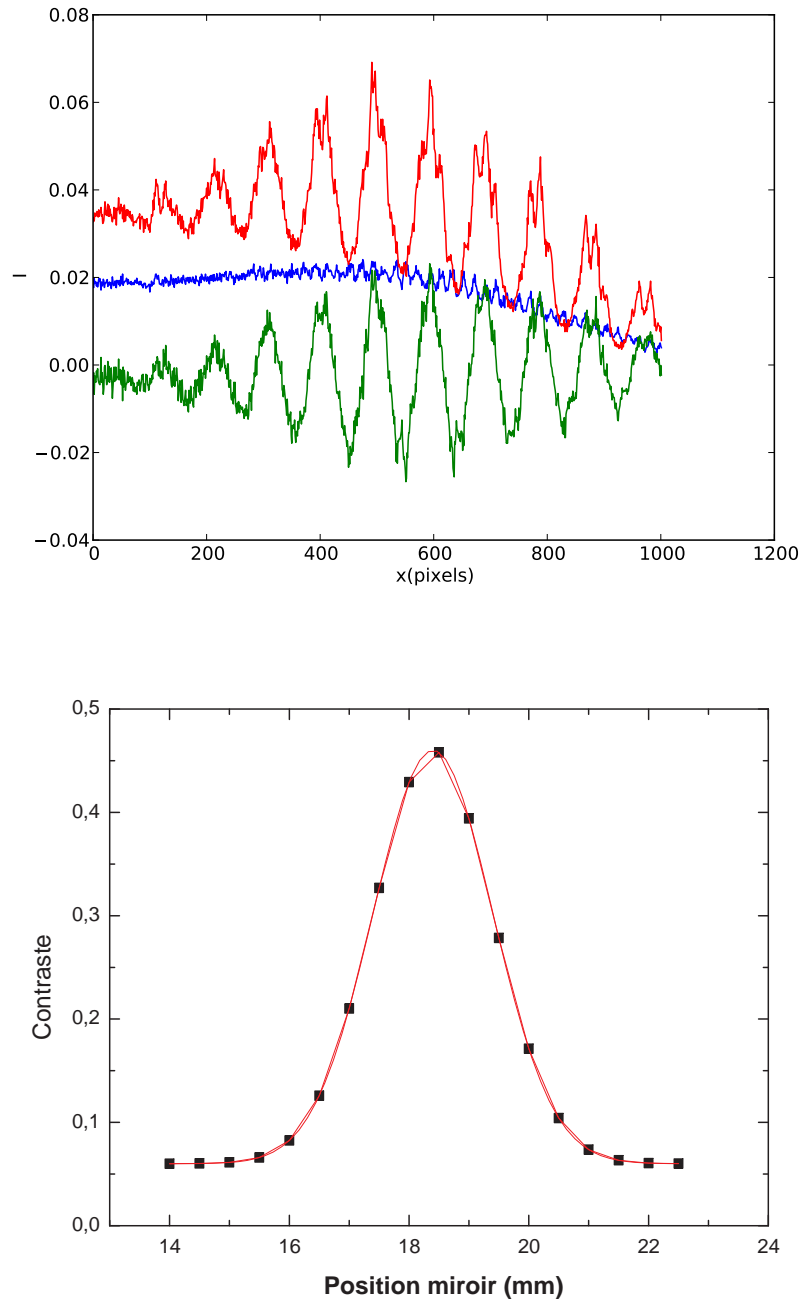
Pour le bon fonctionnement du piège quadrupolaire bouché, il est nécessaire que la position du faisceau soit stable à une fraction de sa largeur au niveau des atomes. Pour cela, nous avons mesuré les fluctuations de pointé du laser à l'aide d'une photodiode à 4 quadrants. Ce type de photodiode est séparé en quatre zones, et en mesurant les différences d'intensité entre les paires de zones quand la photodiode est illuminée par un faisceau laser focalisé, on peut déduire avec une grande précision la position du faisceau sur la photodiode. En déplaçant la photodiode à l'aide d'une platine micrométrique, on peut établir une correspondance entre le signal de la photodiode et la position du spot. Une mesure du bruit de position du spot sur la photodiode est présentée sur la figure 3.21. Les fluctuations de position et d'intensité du bouchon optique se traduisent par des fluctuations de position et de raideur du piège quadrupolaire bouché, ce qui peut avoir pour conséquence un chauffage du condensat.

#### 3.3.5 Focalisation

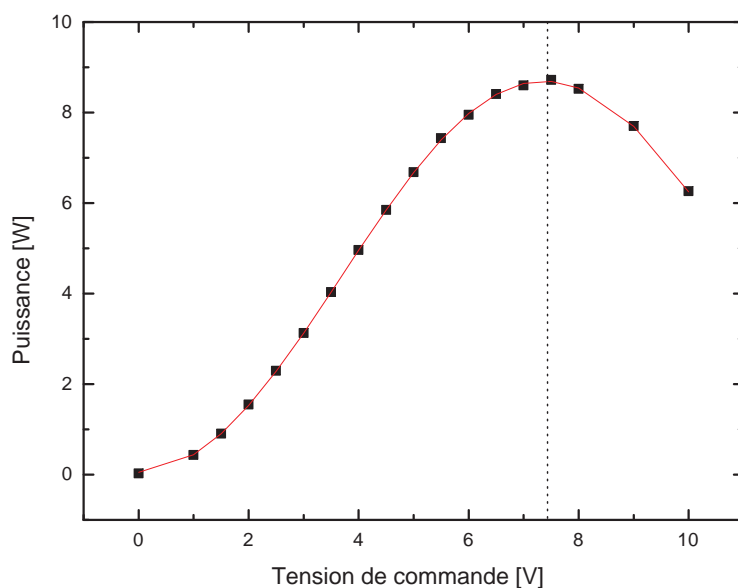
Le faisceau à 532 nm est focalisé au centre de la cellule par une lentille de focale 250 mm. Après la traversée de la lentille, il est renvoyé vers la cellule par un miroir dichroïque, qui réfléchit la lumière à 532 nm et laisse passer la lumière à 780 nm du faisceau sonde. Il est possible d'obtenir un faisceau elliptique en plaçant un télescope constitué de deux lentilles cylindriques, bien que nous n'ayons pas encore utilisé cette



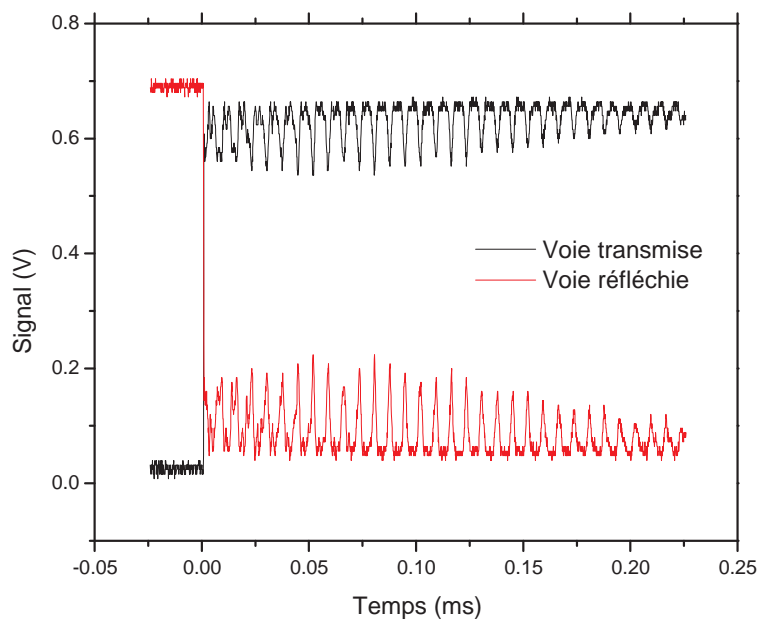
possibilité. La taille du col du faisceau au niveau du point de focalisation a été mesurée, et est de  $35\ \mu\text{m}$ , pour une puissance de  $5.5\ \text{W}$ . Un miroir dichroïque situé après la lentille de focalisation réfléchit le faisceau à  $532\ \text{nm}$  vers la cellule tout en laissant passer le faisceau sonde pour l'imagerie. Après la cellule, un cube séparateur de polarisation à  $780\ \text{nm}$  extrait le faisceau vert qui est alors renvoyé vers un absorbeur de faisceau. Nous avons choisi d'utiliser un cube pour séparer les faisceaux à  $780$  et  $532\ \text{nm}$  car cela déforme moins le front d'onde que le miroir dichroïque initialement prévu, tout en séparant correctement les longueurs d'onde.



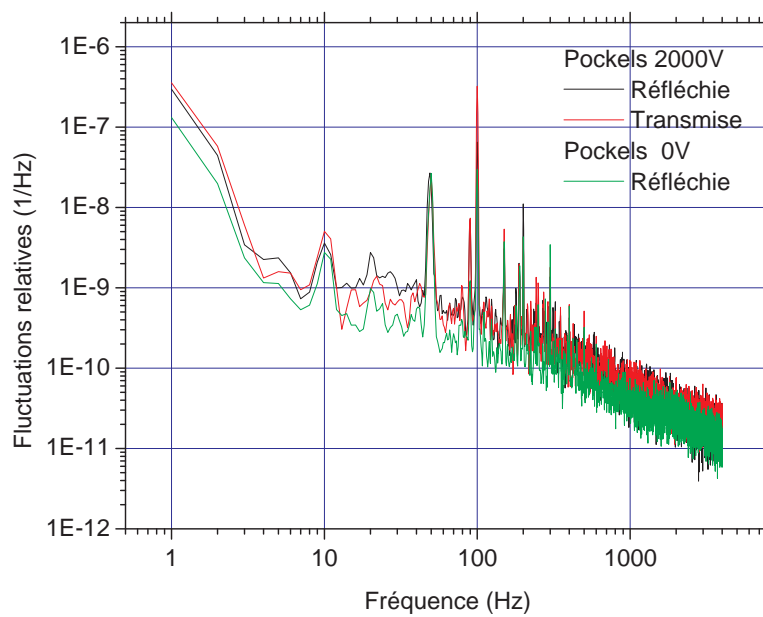
**Figure 3.17** — Mesure de la longueur de cohérence du Millenia. Le graphe du dessus montre une coupe de l'image des interférences prise au contact optique. La courbe rouge au dessus est le signal d'interférence  $I_{tot}$ , la courbe bleue du milieu représente  $\sqrt{I_1 I_2}$  où  $I_1$  et  $I_2$  sont les intensités lumineuses de chaque bras de l'interféromètre. La courbe verte représente le terme d'interférences  $I_{tot} - I_1 - I_2$ . On a un contraste de 50 %, mais il y a manifestement un problème de lumière parasite. Quand on s'éloigne du contact optique, le contraste diminue. La courbe est modélisée par une gaussienne, avec un écart type de  $\sigma = 2,2$  mm. La largeur de raie est donnée par  $\sigma = \frac{2c}{\pi\omega}$ , et vaut 84 GHz.



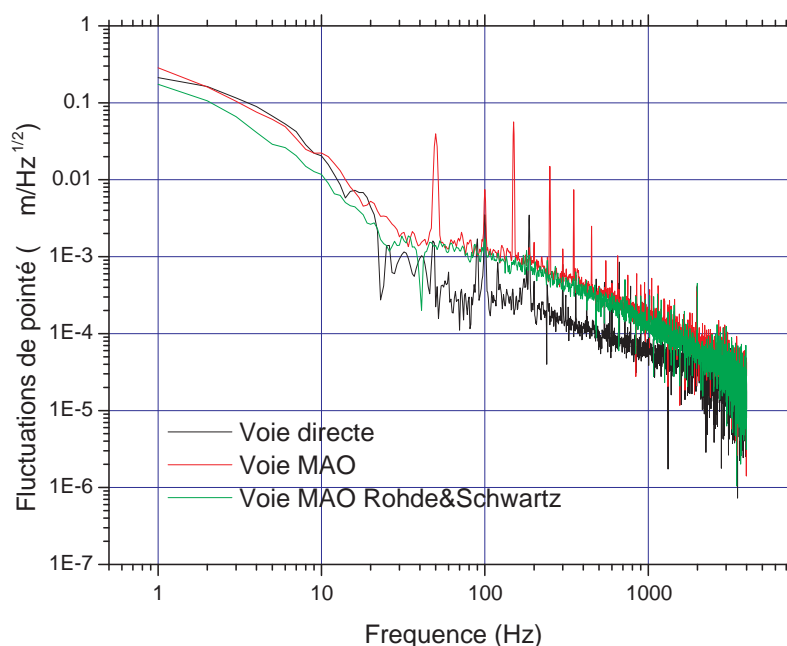
**Figure 3.18** — Cette courbe montre la puissance réfléchiée par le cube situé après la Pockels. L'axe des abscisses représente la tension de commande envoyée par l'ordinateur à l'alimentation haute tension de la cellule. La tension appliquée à la cellule est de 400 V pour une commande de 1 V. La puissance maximale est obtenue pour une tension de 3265 V, ce qui correspond à une tension de commande de 7,4 V.



**Figure 3.19** — Coupure brutale de la Pockels. La coupure est extrêmement rapide, mais est suivie d'oscillations. Ces oscillations proviennent d'un effet piézoélectrique [84] dans le cristal de KD\*P utilisé pour notre cellule.



**Figure 3.20** — Mesure de la stabilité en intensité du laser après la cellule de Pockels.



**Figure 3.21** — La somme des signaux des 4 parties de la photodiode nous donne l'intensité du faisceau laser, et la différence entre deux parties opposées nous donne une mesure de la position du spot. Ici, le faisceau est focalisé sur la photodiode par une lentille de focale 100 mm. Nous avons mesuré le bruit de pointé du faisceau en regardant la différence entre les signaux de deux parties opposées de la photodiode avec un analyseur FFT. La mesure a été effectuée dans trois configurations différentes : sans faire passer le faisceau par l'AOM, et en le faisant passer par l'AOM en générant le signal RF avec une carte construite par l'atelier d'électronique du LPL ou bien en utilisant un synthétiseur Rohde&Schwartz. Cette mesure a permis de détecter et de corriger un problème de filtrage de l'alimentation sur notre carte de pilotage d'AOM, qui se traduisait par les pics de bruit à 50 Hz et ses harmoniques visibles sur le graphe.



# Chapitre 4

## Production d'un condensat

Dans ce chapitre, je décrirai les premiers résultats obtenus avec notre nouvelle expérience. Je parlerai d'abord des résultats obtenus pendant la première partie de ma thèse, avant l'installation du piège magnéto-optique 2D sur le montage. Je décrirai ensuite les résultats de l'expérience dans son état actuel, et les étapes menant du piège magnéto-optique à la condensation.

### 4.1 Première génération du montage

Nous avons d'abord assemblé une première génération de l'expérience, sans piège magnéto-optique 2D. Ce premier montage simplifié nous a permis de tester le système laser et de mettre au point le nouveau transport magnétique. Nous avons poussé ce système au maximum pour évaluer le nombre d'atomes transférés. Lorsque les étapes de piège magnéto-optique et transport ont été validées, nous avons complété le montage en ajoutant l'élément final, le piège magnéto-optique 2D.

Je parlerai d'abord rapidement du piège magnéto-optique 3D dans la section 4.1.1, du chargement dans le piège magnétique côté octogone dans la section 4.1.2, et enfin des premières tentatives de transport des atomes dans la section 4.1.3.

#### 4.1.1 Chargement et caractérisation du piège magnéto-optique 3D

Avant l'installation du piège magnéto-optique 2D, le piège magnéto-optique 3D était chargé directement à partir d'une vapeur de rubidium à température ambiante. La partie optique du piège magnéto-optique n'était pas encore fibrée à ce moment, et les faisceaux refroidisseurs étaient séparés et dirigés vers le centre de l'octogone par une série de cubes séparateurs de polarisation et de miroirs. Les faisceaux étaient diaphragmés à un diamètre de 1 pouce par les lames  $\frac{\lambda}{2}$  comme sur le montage actuel.



**Mesure du nombre d'atomes** Le nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique est évalué en mesurant sa fluorescence à l'aide d'une photodiode<sup>1</sup> et d'une lentille convergente. Le taux d'émission de photons par un atome de rubidium est donné par  $\frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} C_{cg}$  [85]. La puissance lumineuse reçue par la photodiode vaut alors :

$$P = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} N \frac{\pi r^2}{4\pi d^2} C_{cg} h\nu$$

où  $\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}$  est la fraction de la fluorescence récupérée par la photodiode,  $h\nu$  est l'énergie d'un photon,  $N$  est le nombre d'atomes, et  $C_{cg}$  est un coefficient de Clebsch-Jordan qui vaut entre 0.5 et 1. Ici, l'angle solide est limité par le hublot, dont le rayon est de  $r = 8$  mm, situé à  $d = 80$  mm du centre de l'octogone. On trouve  $\Gamma h\nu = 9.6$  pW par atome.  $s$  est le paramètre de saturation, qui vaut  $s = \frac{I}{I_s} \frac{1}{1+4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}}$ , où  $I$  est la somme des intensités des six faisceaux de refroidissement et  $\delta$  est leur désaccord. La tension de la photodiode vaut  $V = GP$ , où  $G$  est le gain de la photodiode, qui vaut  $1,5 \times 10^6 V.W^{-1}$ .

Les paramètres typiques quand le piège magnéto-optique était chargé par une vapeur sont de  $I = 13.9$  mW.cm<sup>-2</sup> et  $\delta = -2,2\Gamma$ . En prenant en compte les pertes à la traversée des hublots, qui ne sont pas traités anti-reflet, on trouve  $s = 0.75$ . Au final, on trouve un facteur de calibration de  $4 \times 10^8$  at.V<sup>-1</sup> et un nombre d'atomes de  $4 \times 10^8$  typiquement.

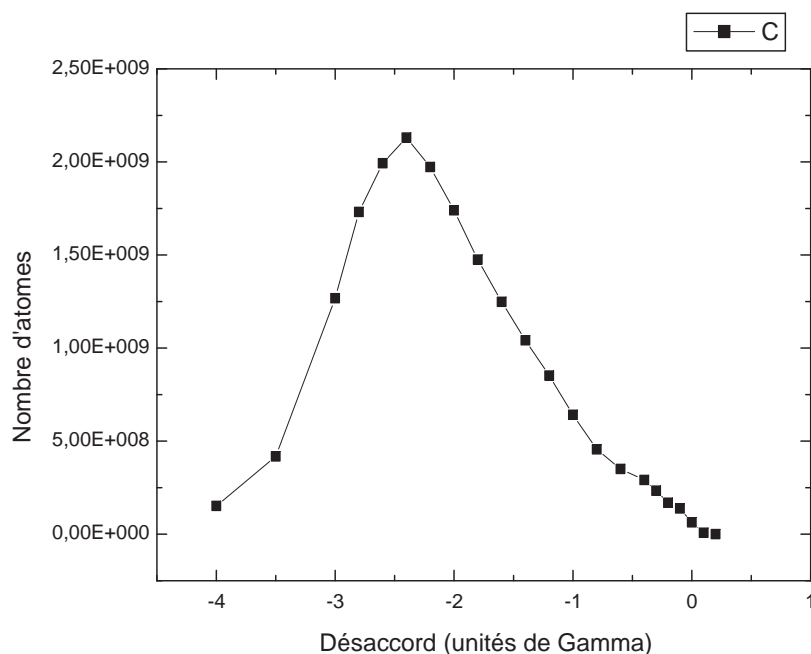
**Chargement direct par une vapeur** Au début de ma thèse, le piège magnéto-optique 3D était chargé directement à partir d'une vapeur de rubidium à température ambiante. Cette vapeur provenait d'une réserve de rubidium entourée d'un cordon chauffant, décrite dans la section 2.2. La pression était régulée en changeant la température de la réserve. Le temps de chargement du piège magnéto-optique vaut typiquement entre 2 et 5 secondes suivant la pression de rubidium dans l'octogone et la valeur typique de la fluorescence est de 1 V, ce qui correspond à  $4.10^8$  atomes. La dépendance du nombre d'atomes par rapport au désaccord du faisceau refroidisseur est montrée dans la figure 4.1. Le désaccord utilisé habituellement sur l'expérience est de  $-2,2\Gamma$ . Le temps de chargement du piège magnéto-optique était typiquement de l'ordre de la seconde, du même ordre de grandeur que la durée de vie dans le piège magnétique côté octogone, dont une mesure sera présentée sur la figure 4.3. En utilisant le calcul décrit dans la section 2.1, on trouve que cela correspond à une pression dans l'octogone proche de  $3.10^{-8}$  mbar.

### 4.1.2 Chargement du quadrupole

Les atomes doivent être transférés du piège magnéto-optique dans un piège mobile avant d'être transportés vers la cellule science. On utilise pour cela un piège magnétique, dont voici le principe. Le potentiel d'un atome dans le sous niveau Zeeman  $m_F$  plongé dans un champ magnétique statique  $B(\vec{r})$  vaut au premier ordre<sup>2</sup>  $H(\vec{r}) = g_F \mu_B m_F B(\vec{r})$

1. Thorlab PDA55

2. En champ fort, le hamiltonien d'interaction n'est plus linéaire en  $\vec{B}$ [86]



**Figure 4.1** — Ce graphe montre le nombre d’atomes dans le piège magnéto-optique en fonction du désaccord du faisceau refroidisseur. Le désaccord utilisé habituellement sur l’expérience est de  $-2,2\Gamma$ , correspondant au maximum du nombre d’atomes.

où  $g_F$  est le facteur de Landé et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr. Pour piéger les atomes, il faut créer un minimum local de  $H(\vec{r})$ . Pour cela, on peut créer un maximum de champ magnétique pour piéger les atomes dont le moment magnétique est aligné avec le vecteur champ  $\vec{B}$  ou bien un minimum de champ pour piéger les atomes dont le moment magnétique est opposé à  $\vec{B}$ . D’après les équations de Maxwell, il est impossible d’avoir un maximum du module d’un champ magnétique statique dans le vide<sup>3</sup>. On utilise donc un minimum de champ magnétique, qui piège les atomes de  $m_F g_F$  positifs. Nous utilisons un champ quadrupolaire, qui s’écrit localement :

$$\vec{B}(x,y,z) = B'(z\vec{e}_z - \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{2}).$$

Le module de  $\vec{B}$  est alors minimum au centre, où le champ est nul. Un tel champ magnétique est obtenu avec une paire de bobines parcourues par des courants en sens opposés.

Normalement, le transfert dans le piège magnétique fait intervenir une étape de pompage optique [87], qui permet de mettre tous les atomes dans le même sous-niveau Zeeman antiparallèle au champ. En l’absence du pompage optique, l’état de spin des

3. Théorème de Wing [19].

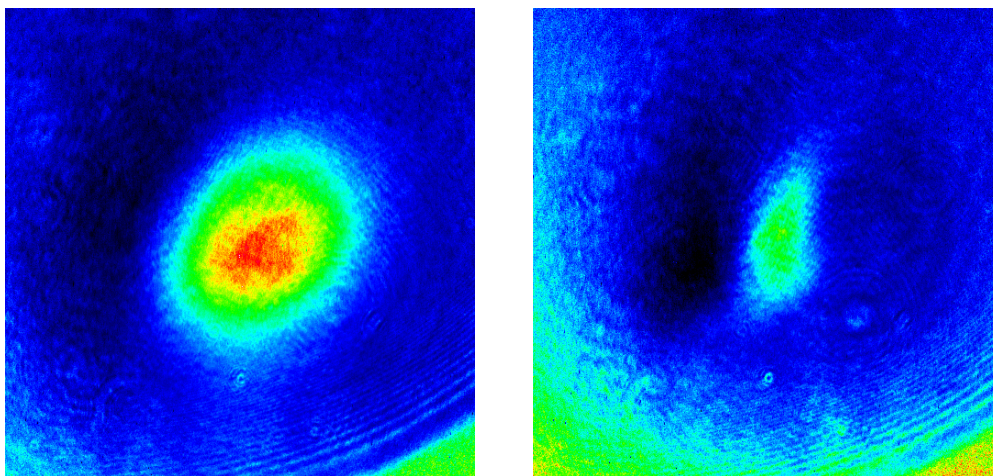
atomes lors du transfert dans le piège magnétique est aléatoire, ce qui cause la perte des atomes dont le moment magnétique est aligné avec le vecteur champ. Cette étape de pompage fait intervenir un faisceau laser rétro-réfléchi de polarisation circulaire, et un champ magnétique statique qui doit être orienté dans le même axe que le faisceau. Nous avons tenté de réaliser le pompage optique, mais celui-ci n'a jamais permis d'augmenter le nombre d'atomes capturés dans le piège magnétique par rapport à une séquence sans pompage. Nous attribuons ces problèmes aux courants de Foucault dans les supports des bobines de transport, qui empêchent de brancher rapidement un champ magnétique directeur homogène. Ces courants de Foucault nous empêchent également de faire une phase de mélasse optique [11, 88] comme cela était fait dans l'expérience précédente du groupe [73], en créant un champ magnétique rémanent qui persiste pendant plusieurs dizaines de millisecondes, et qui empêche le refroidissement sub Doppler [89] de fonctionner. Cependant, nous sommes quand même parvenus à capturer entre 12 et 20 % des atomes dans le piège magnétique, en les chargeant directement dans l'état  $F = 1$  à partir du piège magnéto-optique 3D.

Une phase de compression, pendant laquelle on augmente le gradient de champ magnétique et le désaccord des faisceaux refroidisseurs permet d'augmenter la densité du piège magnéto-optique avant le chargement du piège magnétique, cette compression permettant d'adapter la taille du nuage d'atomes à celle du piège. En effet, cette densité est limitée par la diffusion multiple de photons par les atomes piégés, et est proportionnelle à  $\delta^3$  dans le régime des fortes densités [90]. Les paramètres typiques à la fin de la compression sont :

- Courant dans les bobines : 11 A
- Gradient axial : 50 G.cm<sup>-1</sup>
- Désaccord faisceau refroidisseur : -14  $\Gamma$

On coupe alors les faisceaux refroidisseurs et on augmente l'intensité dans les bobines jusqu'au maximum de 33 A permis par notre alimentation. La figure 4.2 montre les atomes chargés dans le piège magnétique. L'image est prise immédiatement après la coupure du champ magnétique.

Les problèmes de coupure du champ magnétique compliquent l'obtention de résultats quantitatifs avec l'imagerie par absorption. En effet, dans un champ magnétique inhomogène, le désaccord du faisceau sonde par rapport à la résonance dépend du champ magnétique local, ce qui nous fait sous-estimer la taille du nuage, les atomes sur les bords étant soumis à un champ plus élevé que ceux situés au centre du piège. Une manière d'évaluer l'efficacité du transfert dans le piège magnétique consiste à ramener l'intensité dans les bobines à la valeur utilisée pour le piège magnéto-optique et à rallumer les faisceaux refroidisseur. En comparant la fluorescence à ce moment avec celle du piège magnéto-optique, on déduit le nombre d'atomes capturés, qui est typiquement de 12 à 20 % du nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique, alors que le maximum théorique en l'absence de pompage optique dans l'état  $F = 1$  est de 33 %. Nous avons également mesuré la durée de vie des atomes dans le piège magnétique. Le résultat de cette mesure est présenté dans la figure 4.3. On trouve une durée de vie de 1,4 s, en accord avec la valeur du temps de chargement mesurée par ailleurs.



**Figure 4.2** — L'image du haut montre le nuage d'atomes après la phase de compression. L'image du dessous montre les atomes après chargement dans le piège magnétique. Le gradient dans le piège magnétique est de  $130 \text{ G.cm}^{-1}$ , et l'image a été prise en utilisant la diode DBR de l'expérience précédente pour générer le faisceau sonde.

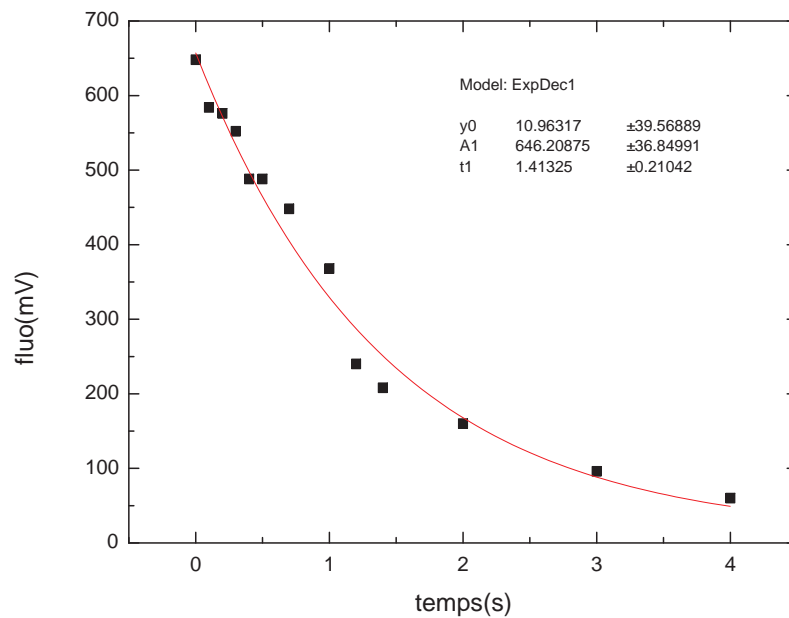
L'état interne des atomes dans le piège magnétique peut être choisi entre les deux états hyperfins du niveau  $5S_{1/2}$  en jouant sur le faisceau repompeur. En effet, lors de l'extinction du piège magnéto-optique, si on laisse le repompeur allumé, on va récupérer les atomes dans l'état  $F = 2$ . En revanche, si on l'éteint quelques millisecondes avant le laser refroidisseur, les atomes vont s'accumuler dans l'état  $F = 1$ .

Sur les 3 sous-niveaux Zeeman de  $F = 1$ , seul l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  est piégé. En l'absence de pompage optique, les 3 niveaux sont également peuplés. Nous perdons donc les deux tiers des atomes. Dans le cas  $F = 2$ , sur 5 sous-niveaux, les deux états  $|F = 2, m_F = 1, 2\rangle$  sont piégés et on ne perd que  $\frac{3}{5}$  des atomes. Cependant, on a alors des pertes par collisions avec échange de spin, qui diminuent la durée de vie dans le piège. C'est pourquoi nous avons préféré travailler avec des atomes dans  $F = 1$ .

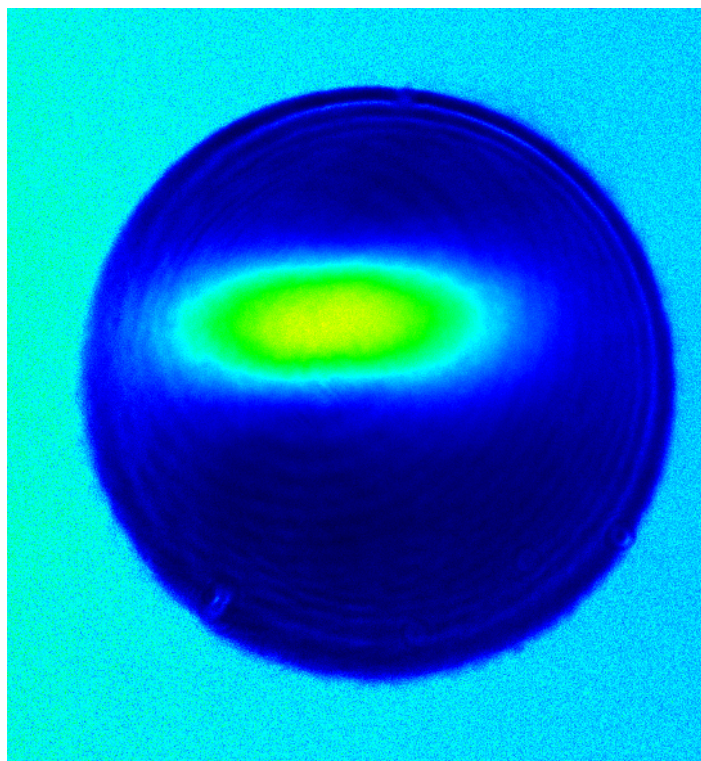
### 4.1.3 Essais de transport des atomes

Une fois piégés magnétiquement, les atomes sont transportés en déplaçant le centre du piège magnétique du centre de l'octogone à la cellule science. On peut réaliser ce déplacement en modulant les courants dans une série de bobines [66], ou comme cela se fait dans plusieurs autres équipes, en déplaçant physiquement les bobines du piège [64, 65, 91, 92]. C'est cette dernière solution que nous avons retenue, pour sa simplicité et son efficacité, l'efficacité de transfert pouvant être proche de 1 avec un chauffage d'environ  $100 \mu\text{K}$ [64, 65].

Nous avons aligné le rail de transport magnétique en utilisant une voie d'imagerie avec un faisceau sonde passant à travers le tube de pompage différentiel. Le faisceau sonde ressortait par un des hublots de l'octogone, et on faisait l'image du piège magnéto-optique en utilisant la caméra Ixon et une lentille de 400 mm en configuration 2f-2f. Le



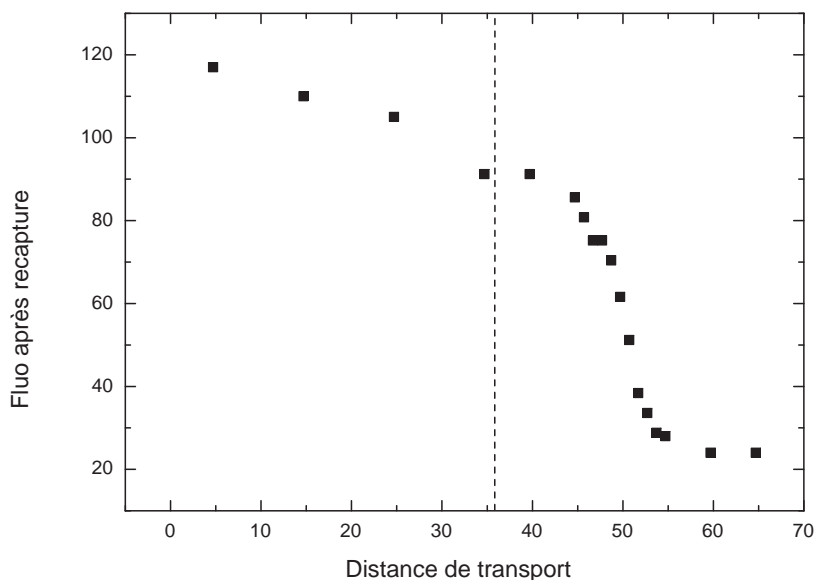
**Figure 4.3** — Durée de vie des atomes piégés magnétiquement dans l'octogone. La mesure est effectuée en relâchant le piège magnétique, en rallumant les faisceaux du piège magnéto-optique et en regardant immédiatement le signal de fluorescence. On modélise la décroissance du nombre d'atomes par une exponentielle de constante de temps  $\tau = 1.4\text{s}$ .



**Figure 4.4** — On voit ici une image des atomes dans le piège magnétique, vus dans l'axe du transport. On voit ici que la taille du nuage est du même ordre que le diamètre du tube différentiel. L'image est prise in situ, et sous-estime donc la taille du nuage atomique, la sonde n'étant plus résonnante sur les bords.

tube différentiel diaphragmait le faisceau sonde, ce qui permettait de voir sa position sur les images. Ce montage d'imagerie nous a permis de vérifier la position du piège magnétique par rapport au tube. La figure 4.4 montre une image prise avec ce montage.

Nous nous sommes notamment rendus compte que le centre du piège était trop haut d'environ 2 mm. Nous avons alors cherché quelle résistance mettre en parallèle de la bobine du bas pour recentrer le piège, et trouvé une valeur de 30  $\Omega$ . Ce montage ne pouvait être conservé à terme, la résistance des bobines elles-mêmes dépendant fortement de la température. Nous avons donc retiré la résistance et fait fraiser la base du support des bobines de 2 mm. La position horizontale du dispositif de transport a été réglée en desserrant les vis tenant la platine de transport à la table optique et en le faisant bouger à la main. On ajuste d'abord la position latérale du rail au niveau du piège magnéto-optique, pour centrer le piège magnétique sur l'axe de transport, et on fixe des cales sur la table optique pour la maintenir. Nous avons ensuite changé la mise au point du dispositif d'imagerie pour ajuster la position des atomes après une translation les amenant à l'entrée du tube de vide différentiel. Un dernier ajustement fin est effectué en optimisant le nombre d'atomes transportés dans la cellule en fonction de la position latérale du transport, mesurée au niveau de la cellule. Après avoir mis des cales pour indiquer la position optimale, nous pouvons resserrer les vis maintenant le rail à la table optique.



**Figure 4.5** — Ce graphique montre les premiers essais de transport magnétique. Pour tester le transport, on le fait bouger sur une distance variable en direction de la cellule science avant de le faire revenir, et on mesure le nombre d'atomes restants de la même manière que pour la mesure de durée de vie du piège magnétique. La ligne en pointillé indique la position du début du tube de pompage différentiel.

Le type de profil de déplacement du transport est décrit dans la figure 2.10. Les paramètres utilisés sont :

- vitesse :  $1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
- Accélération :  $10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
- à-coup :  $25\text{m}\cdot\text{s}^{-3}$

Pour les distances courtes sur lesquelles nous faisons bouger le transport, la vitesse et l'accélération maximales ne sont pas atteintes, et la forme du profil de déplacement est déterminée par l'à-coup. La durée typique d'un déplacement du transport magnétique est de 500 ms.

Le transport a été testé en faisant se déplacer les atomes sur une distance variable avant de les faire revenir et de les recapturer dans le piège magnéto-optique, la fluorescence lors de la recapture donnant une mesure du nombre d'atomes. Les résultats de cette mesure sont présentés sur la figure 4.5. Le nombre d'atomes recapturés décroît fortement au passage du tube différentiel. L'explication est une température trop élevée des atomes dans le piège, qui conduit à une évaporation sur les parois. Une explication plus détaillée de ces pertes se trouve en section 4.3.3. Cette première version nous a tout de même permis de mettre au point une procédure d'alignement du rail de transport.

Après le transport, les atomes sont transférés dans le piège quadrupolaire. Une image des atomes dans la cellule et une mesure de leur durée de vie est montrée dans la figure 4.6. On arrive à avoir  $1,6 \cdot 10^7$  atomes dans la cellule, ce qui représente un taux de transfert de 4% à partir du piège magnéto-optique. La durée de vie dans la cellule est également faible, de l'ordre de 5 secondes, ce qui est probablement dû à un vide de mauvaise qualité, peut être causée par la pression élevée dans l'octogone. Dans cette version de l'expérience, la longueur du tube différentiel n'était que de 6 cm. Il aurait probablement été possible de mieux optimiser le nombre d'atomes dans la cellule et d'améliorer la qualité du vide côté science en utilisant la pompe titane, mais nous avons préféré installer rapidement le piège magnéto-optique 2D.

#### 4.1.4 Limitations de ce système

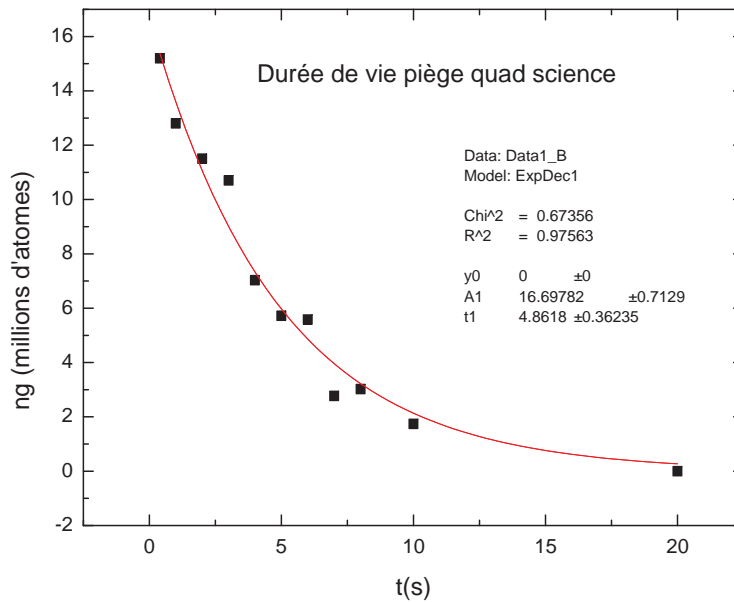
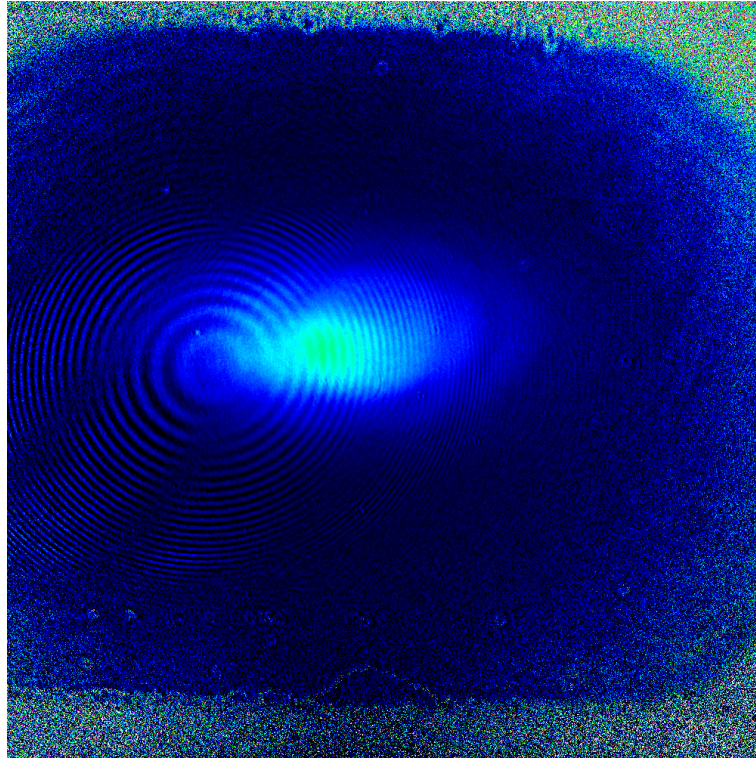
Le chargement à partir d'une vapeur limite fortement le nombre d'atomes et la durée de vie du piège magnéto-optique 3D. De plus, lors du transport de l'octogone vers la cellule science, les atomes restent dans l'octogone pendant une durée de quelques centaines de millisecondes, suffisante pour en perdre une fraction importante par collisions avec le gaz à température ambiante. Ces limitations ont été levées en ajoutant au dispositif le piège magnéto-optique 2D, qui découple la source d'atomes du transport magnétique et autorise à la fois un grand nombre d'atomes et une durée de vie élevée dans le piège magnéto-optique 3D. Les étapes menant à la condensation dans le montage avec le piège magnéto-optique 2D sont décrites dans la section 4.2. Nous avons également remplacé l'ancien système optique du piège magnéto-optique 3D, qui utilisait des cubes séparateurs de polarisation de 1 pouce et des miroirs, par le système fibré actuel. La mise en place de ce système a fortement amélioré la stabilité du piège magnéto-optique. La photodiode qui mesure la fluorescence du piège magnéto-optique a également été déplacée lors de la mise en place du nouveau système. La nouvelle valeur de calibration du nombre d'atomes est de  $3.43 \cdot 10^9 \text{at.V}^{-1}$ .

## 4.2 Nouvelle source d'atomes froids et condensation

Pour améliorer les performances du montage et permettre l'obtention d'un condensat, le piège magnéto-optique 3D est maintenant chargé avec un jet d'atomes ralentis issus du piège magnéto-optique 2D. Le premier effet de ce changement est un doublement du nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique 3D.

**Modélisation du chargement du piège magnéto-optique** L'évolution du nombre d'atomes  $N$  dans le piège magnéto-optique 3D est déterminé par la compétition entre la capture des atomes venant du piège magnéto-optique 2D et les pertes. Le modèle le plus simple donne  $\partial_t N = F - \Gamma N$  avec  $F$  le flux d'atomes incidents et  $\Gamma$  le taux de pertes par collisions avec le gaz résiduel. Ce modèle donne une constante de temps de chargement de  $\frac{1}{\Gamma}$ , indépendant du flux, or on a observé que ce n'était pas le cas en



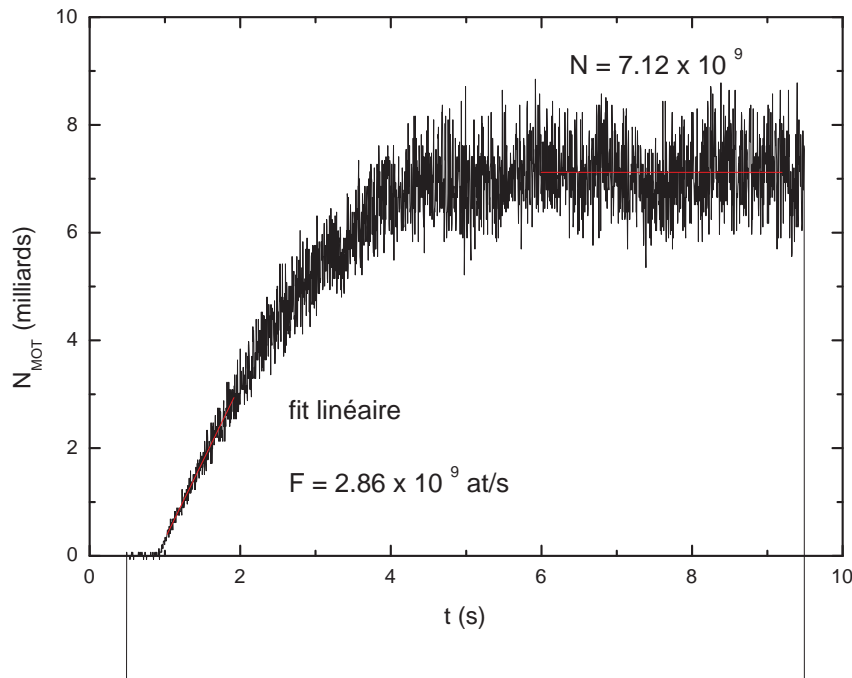


**Figure 4.6** — Image des atomes après le transport et durée de vie dans la cellule. L'image est prise avec un temps de vol de 5 ms. Le nombre d'atomes est mesuré en modélisant l'image de la densité du nuage atomique par un profil gaussien. La durée de vie dans la cellule est d'environ 5 secondes.

faisant varier le flux du piège magnéto-optique 2D en changeant la puissance du faisceau pousseur. Un modèle qui décrit mieux la dynamique de chargement consiste à introduire un terme de pertes à deux corps, modélisant les pertes par collisions assistées par la lumière [93], ce qui donne l'équation suivante pour l'évolution du nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique en faisant une approximation à volume constant :

$$\partial_t N = F - \Gamma N - \beta N^2$$

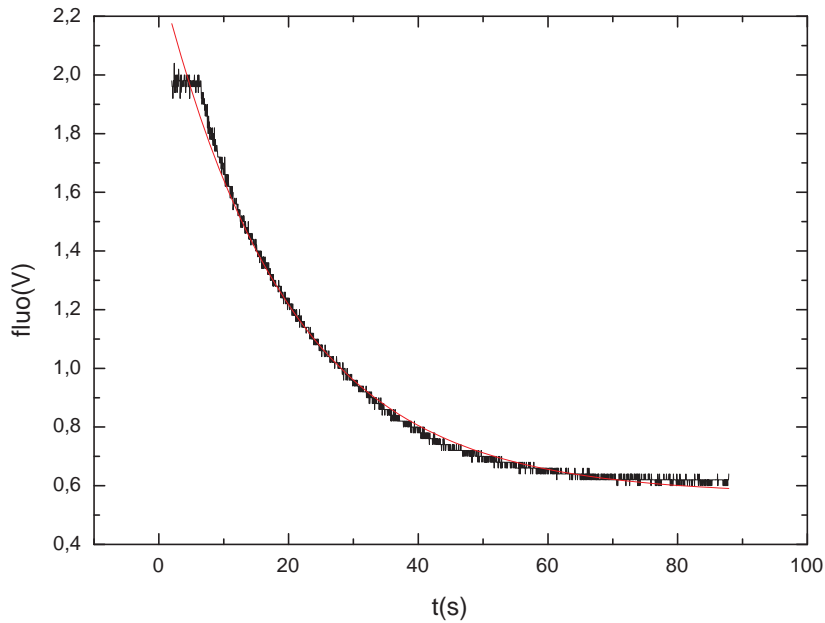
Le flux peut être mesuré en regardant la dérivée de la fluorescence au début du chargement du piège magnéto-optique. La figure 4.7 montre l'évolution de la fluorescence lors du chargement du piège magnéto-optique. En ajustant le début de la courbe par une droite, on en déduit un flux  $F = 2.86 \times 10^9$  atomes par seconde. Cela permet de charger le piège magnéto-optique en 5 secondes. La courbe ne s'ajuste pas correctement avec une simple exponentielle, ce qui confirme la présence de pertes inélastiques. Le nombre d'atomes final vaut  $N = 7.1 \times 10^9$ , soit près de vingt fois plus que dans le piège magnéto-optique tri-dimensionnel. L'installation de la nouvelle source a donc considérablement amélioré les performances du système.



**Figure 4.7** — Chargement du piège magnéto-optique 3D après installation du piège magnéto-optique 2D sur l'expérience. La mesure de la pente en début de chargement donne directement une mesure du flux d'atomes du piège magnéto-optique 2D. On trouve  $F = 2.86 \cdot 10^9 \text{ at} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Nous avons également mesuré la durée de vie du piège magnéto-optique 3D, en

regardant l'évolution de sa fluorescence après avoir éteint le faisceau refroidisseur du piège magnéto-optique 2D. Le résultat de cette mesure est présenté dans la figure 4.8.

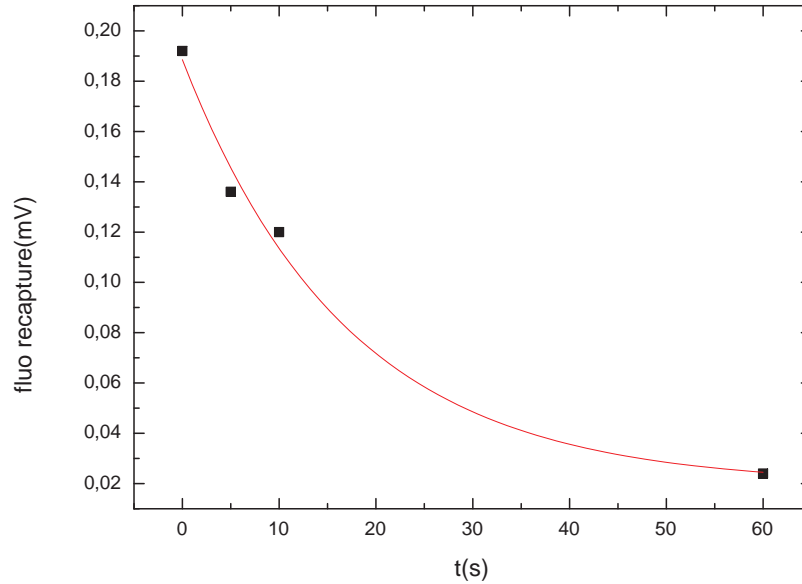


**Figure 4.8** — Durée de vie du piège magnéto-optique 3D après installation du piège magnéto-optique 2D sur l'expérience. Un ajustement par une exponentielle donne une durée de vie de 17 secondes.

## 4.3 Chargement du quadrupole et transport

### 4.3.1 Chargement du quadrupole

La durée de vie dans le piège quadrupolaire de l'octogone est maintenant de 30 secondes, une mesure est montrée dans la figure 4.9. La partie électrique a été modifiée pour utiliser une alimentation par bobine, ce qui permet de faire monter le gradient jusqu'à 45 A. La méthode de chargement est la même qu'avant l'installation du piège magnéto-optique 2D, et décrite en détail dans la section 4.1.2. Le gradient plus élevé permet d'avoir un nuage plus petit, ce qui réduit les pertes lors du transport de la cellule. Le taux de transfert est estimé par recapture dans le piège magnéto-optique, comme montré sur la figure 4.10



**Figure 4.9** — Mesure de durée de vie dans le piège quadrupolaire côté octogone. La durée de vie mesurée est de 30 secondes.

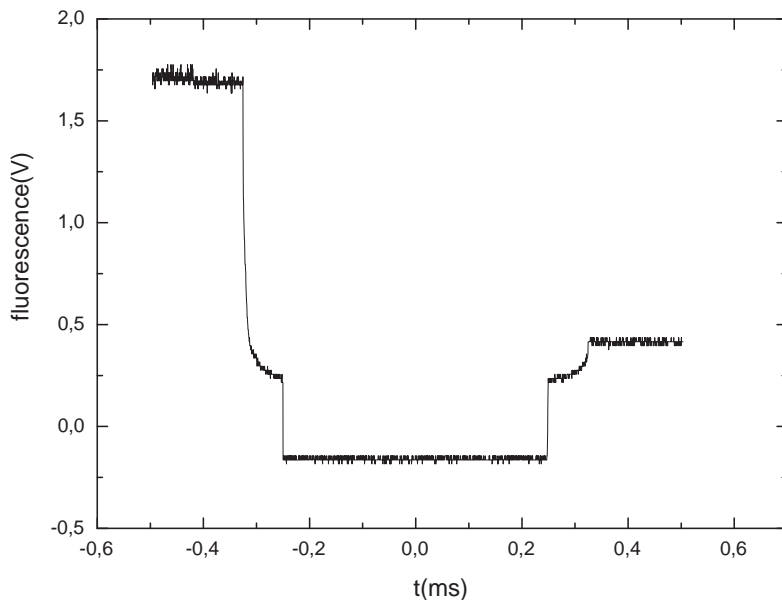
### 4.3.2 Transport jusqu'à la cellule

Du fait de la procédure de chargement, la température des atomes dans le piège magnétique est élevée, et le diamètre du nuage atomique excède celui du tube de pompage différentiel. On perd donc une partie des atomes par collision contre les parois au cours du transport. L'efficacité du transport est d'environ 20 %. La température mesurée à l'arrivée dans le piège quadrupolaire est de  $150 \mu\text{K}$ . La température au départ du transport n'est pas bien connue, mais doit être supérieure à la température à l'arrivée.

### 4.3.3 Modélisation du transport

Nous avons constaté d'importantes pertes d'atomes lors du transport au passage du tube de pompage différentiel. L'explication la plus probable est une pertes des atomes par collisions contre la paroi de ce tube. Pour un piège quadrupolaire d'axe  $z$ , de gradient  $B'$  dans cet axe, le potentiel de piégeage est donné par :

$$U(x,y,z) = \mu_B B' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2} \quad (4.1)$$



**Figure 4.10** — Ce graphe montre une mesure de l'évolution du signal de fluorescence lors d'une séquence dans laquelle on charge le piège magnétique, puis on effectue la séquence de chargement en sens inverse pour recapturer les atomes dans le piège magnéto-optique. Le fond causé par la diffusion des faisceaux sur les hublots a été mesuré en regardant le signal de la photodiode en éteignant le champ magnétique du piège magnéto-optique et soustrait aux données montrées sur ce graphe. On voit le signal baisser pendant la phase de compression, tomber à 0 lors des rampes de champ magnétique, puis remonter au rallumage du piège magnéto-optique. Le rapport entre la fluorescence à la fin et au début de la courbe donne une estimation du taux de transfert de 12 %.

De façon plus générale, le potentiel d'un piège linéaire de gradients  $b_x, b_y, b_z$  dans les trois directions de l'espace peut s'écrire :

$$U(\vec{r}) = \mu_B \sqrt{\sum_{i=x,y,z} b_i^2 r_i^2} \quad (4.2)$$

Nous pouvons alors calculer analytiquement les dimensions du nuage atomique. La distribution d'un gaz d'atomes en équilibre thermodynamique à température  $T$  dans le piège est donnée par :

$$P(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{z} \exp\left(-\beta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(x,y,z)\right)\right) \quad (4.3)$$

où  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  et  $z$  est donné par :

$$z = \int \int \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3} e^{-\beta \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mu \sqrt{\sum_i b_i^2 r_i^2} \right)} \quad (4.4)$$

Le rayon moyen du nuage sur l'axe  $i$  peut alors être calculé par l'équation suivante :

$$\langle r_i^2 \rangle = \frac{1}{z} \int \int \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3} r_i^2 e^{-\beta \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mu \sqrt{\sum_i b_i^2 r_i^2} \right)} = \left( \frac{2k_B T}{\mu b_i} \right)^2 \quad (4.5)$$

Pour notre montage, avec le courant maximum de 45 A, nous avons un gradient dans l'axe  $z$  de 200 G/cm, et de 100 G/cm dans les axes  $x$  et  $y$ , ce qui correspond à  $\frac{2k_B}{\mu b_i} \approx 3$  m.K<sup>-1</sup>. On en déduit un rayon moyen sur l'axe  $x$  de 400  $\mu\text{m}$  pour une température correspondant à la température Doppler du rubidium 87, qui est de 144  $\mu\text{K}$  [85]. En réalité, on est au dessus de cette température en raison de la compression du nuage pendant la phase de chargement du piège magnétique. On peut également calculer la température pour laquelle le rayon moyen du nuage est égal au rayon du tube différentiel. On trouve alors une température de 660  $\mu\text{K}$ . On peut prévoir des pertes importantes au delà de cette température.

En supposant le système ergodique, on peut estimer le taux de transfert et la température finale pour le passage d'un nuage d'atomes de température initiale fixée. La densité d'états pour des atomes de masse  $m$ , de moment magnétique  $\mu$  dans un piège linéaire de gradients  $b_x, b_y, b_z$  est donnée par :

$$\rho(\epsilon) = \int \int \frac{d\vec{p}d\vec{r}}{h^3} \delta \left( \epsilon - \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu \sqrt{\sum_i b_i^2 r_i^2} \right) = C \frac{\epsilon^{\frac{7}{2}}}{|b_x b_y b_z|} \quad (4.6)$$

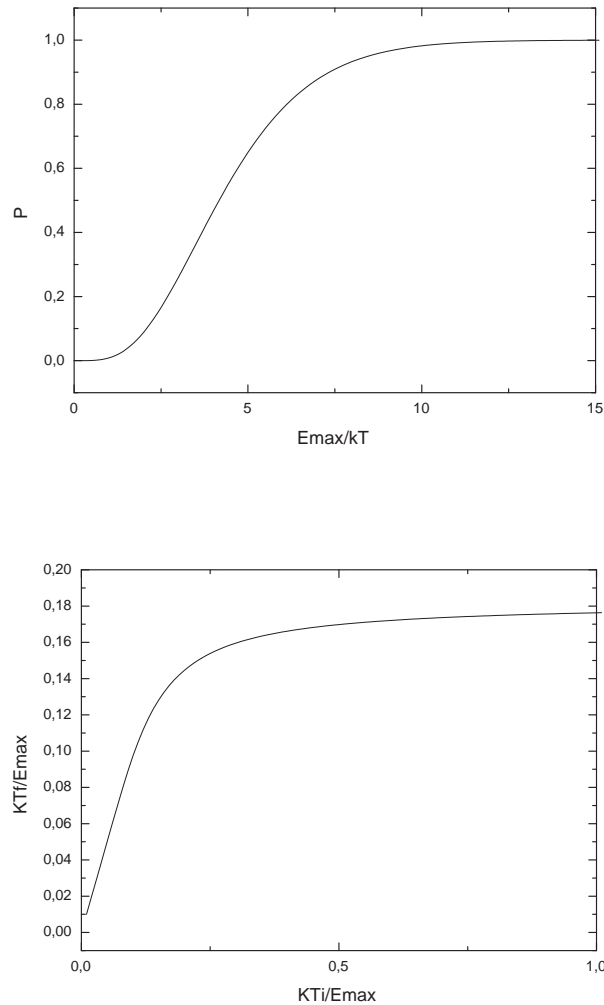
où  $C$  est une constante. On fait l'hypothèse que le système est ergodique. On peut alors dire que l'on perd tous les atomes d'énergie supérieure à  $E_{max} = \mu b_y r$  au passage du tube, où  $b_y$  est le gradient dans la direction radiale du piège et  $r$  le rayon du tube de pompage différentiel. La proportion  $P$  d'atomes restants dans le piège juste après la troncature par le tube, qu'on peut considérer comme une évaporation brutale, est alors donnée par :

$$P = \frac{\int_0^{E_{max}} \rho(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}{\int_0^\infty \rho(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon} \quad (4.7)$$

qui donne en utilisant l'expression de la densité d'énergie et en faisant le changement de variable  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{k_B T}$  le résultat suivant :

$$P \left( \frac{\epsilon}{k_B T} \right) = \frac{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T}} \epsilon'^{\frac{7}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'}{\int_0^\infty \epsilon'^{\frac{7}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'} \quad (4.8)$$

On voit que  $P$  ne dépend que de  $\frac{E_{max}}{k_B T}$ . Un graphe de  $P$  ainsi que de la température finale du gaz après l'évaporation est montré sur la figure 4.11.



**Figure 4.11** — Le graphe du dessus donne la proportion d'atomes restants après la perte de tous les atomes d'énergie supérieure à une énergie limite  $E_{max}$  avec une température initiale  $T$ . Le graphe du dessous donne la température finale  $T_f$  du gaz après thermalisation en fonction de la température initiale. Les températures sont écrites en unités de  $\frac{E_{max}}{k_B}$ . On voit que  $T_f = T_i$  pour  $T_i \ll \frac{E_{max}}{k_B}$  et  $T_f$  tend vers un maximum lorsque  $T_i$  devient grand.

De même, nous pouvons calculer l'énergie moyenne par atome par la formule suivante :

$$E_{moy} = \frac{\int_0^{E_{max}} \rho(\epsilon) \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}{\int_0^{E_{max}} \rho(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon} \quad (4.9)$$

Ce qui après changement de variable donne :

$$E_{moy} = k_B T \frac{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T}} \epsilon'^{\frac{9}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'}{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T}} \epsilon'^{\frac{7}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'} \quad (4.10)$$

En faisant tendre  $E_{max}$  vers l'infini, on trouve  $E_{moy} = \frac{9}{2} k_B T$ . Supposons maintenant qu'on parte d'un nuage de température  $T_i$ , et que l'on évapore tous les atomes d'énergie supérieure à  $E_{max}$ . On trouve alors une énergie moyenne après évaporation donnée par :

$$E_{moy} = k_B T_i \frac{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T_i}} \epsilon'^{\frac{9}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'}{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T_i}} \epsilon'^{\frac{7}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'} \quad (4.11)$$

ce qui permet de calculer une température finale :

$$T_f = E_{max} \frac{2}{9} \frac{T_i}{E_{max}} \frac{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T_i}} \epsilon'^{\frac{9}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'}{\int_0^{\frac{E_{max}}{k_B T_i}} \epsilon'^{\frac{7}{2}} e^{-\epsilon'} d\epsilon'} \quad (4.12)$$

Si on fait tendre  $T_i$  vers l'infini, on trouve une température finale  $T_f = \frac{2}{11} \frac{E_{max}}{k_B}$ , et on retrouve  $T_f = T_i$  si on fait tendre  $T_i$  vers 0. Un graphe donnant la relation entre température initiale et finale est présenté dans la figure 4.11. Avec les paramètres de notre piège, la température finale pour une température initiale infinie est de 240  $\mu$ K.

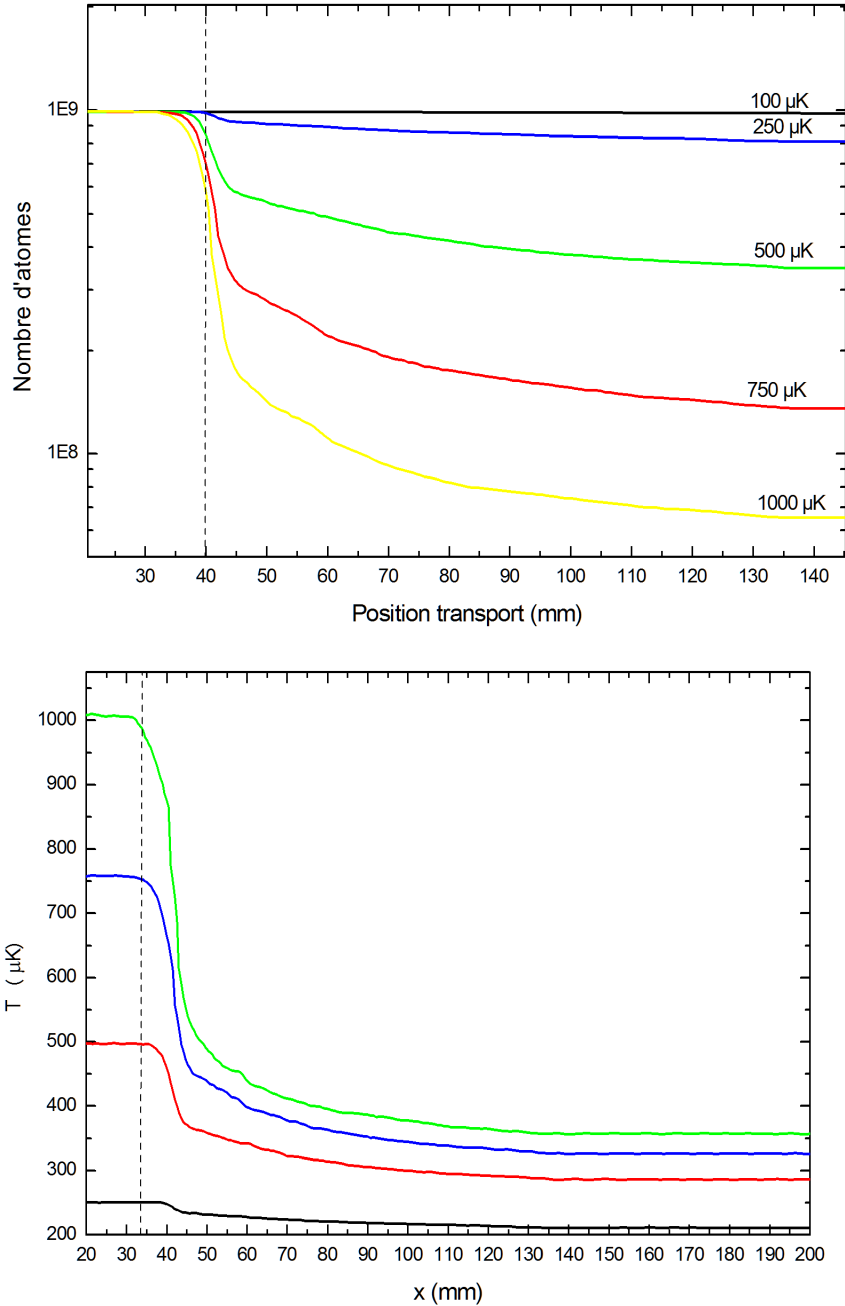
Afin de mieux comprendre le comportement du nuage atomique au cours de l'étape de transport et de tester l'hypothèse d'un système ergodique, nous avons simulé le transport en adaptant un code écrit en Fortran 90 originalement développé pour simuler le refroidissement évaporatif [94]. Ce code calcule l'évolution d'un certain nombre de macro-atomes (environ 1000) évoluant selon les équations de la mécanique classique à l'aide d'un intégrateur de type Runge-Kutta du quatrième ordre. Les collisions sont prises en compte en divisant l'espace selon une grille 3D et en permettant à deux macro-atomes situés dans la même cellule de subir une collision avec une probabilité fixée de manière à obtenir un taux de collisions réaliste. L'évolution de la température et du nombre d'atomes restants au cours du transport est montrée dans la figure 4.12. On remarque une chute brutale du nombre d'atomes et de la température au moment de l'entrée dans le tube différentiel, suivie d'une baisse plus lente, signe que l'on continue à avoir de l'évaporation sur les parois du tube.

La figure 4.13 montre le nombre d'atomes restants et leur température à la fin du transport pour différentes valeurs de la température initiale. On remarque que la température limite est plus grande que la valeur calculée avec l'hypothèse ergodique. Cela signifie que cette hypothèse est fautive. On peut s'en convaincre en regardant le graphe 4.14, qui montre l'évolution de  $\langle p_x^2 \rangle$ ,  $\langle p_y^2 \rangle$  et  $\langle p_z^2 \rangle$  au cours du temps.

#### 4.3.4 Obtention du condensat

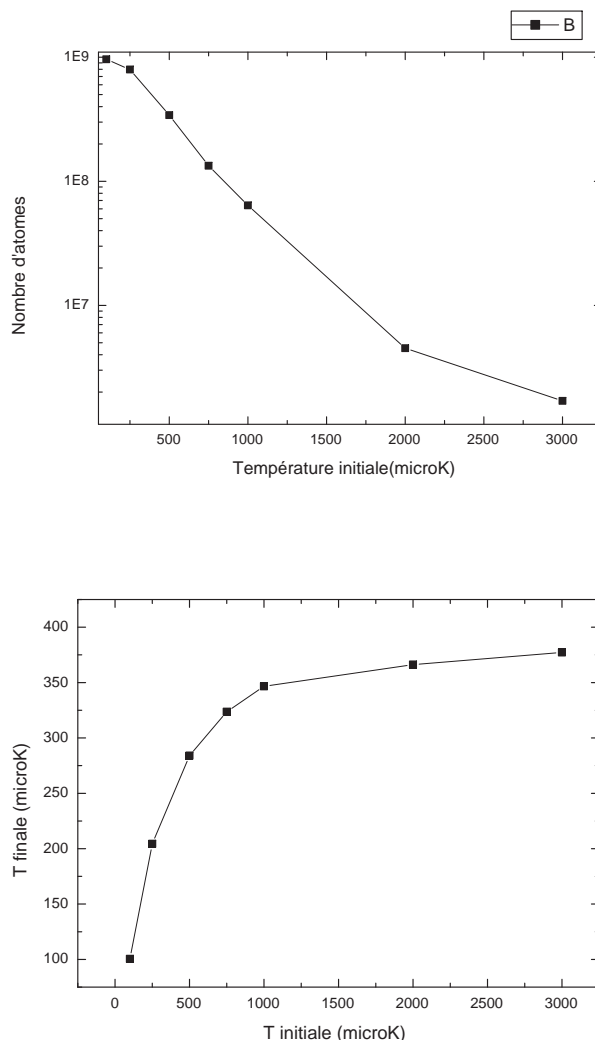
Une fois les bobines de transport magnétique arrivées autour de la cellule, on fait simultanément monter le courant dans les bobines du piège quadrupolaire final et descendre le courant dans les bobines de transport. Cette phase dure 300 ms, et fait passer





**Figure 4.12** — Ces deux graphes montrent l'évolution de la température et du nombre d'atomes dans le piège magnétique en fonction de la position du transport, pour différentes températures initiales. Pour les températures au dessus de  $250 \mu\text{K}$ , on voit nettement le nombre d'atomes chuter et la température baisser au passage du tube différentiel, qui commence à la position  $x = 40\text{mm}$  et est long de  $96 \text{ mm}$ .

le gradient axial de  $180$  à  $200 \text{ G/cm}$ . Ensuite, on fait revenir les bobines de transport du côté de l'octogone afin de dégager l'accès optique.

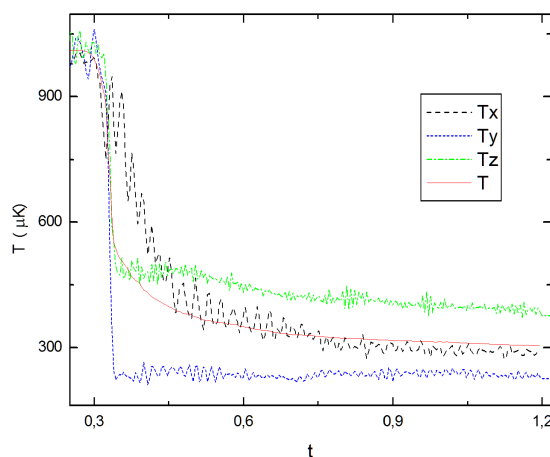


**Figure 4.13** — On voit ici le nombre d'atomes restant à la fin du transport et leur température en fonction de la température de départ. Le nombre d'atomes est représenté en échelle logarithmique, est de  $10^9$  au début du transport.

Dans le piège quadrupolaire côté science, nous n'avons pas de problème de coupure du champ magnétique. Nous avons donc pu mesurer le nombre d'atomes dans ce piège et leur température en prenant des images d'absorption pour différents temps de vol. Le résultat de ces mesures est montré dans la figure 4.15. Le nombre d'atomes observés est de  $1,8 \cdot 10^8$ , et leur température de  $150 \mu\text{K}$  pour un gradient axial de  $200 \text{ G/cm}$ .

Après le transfert dans le piège quadrupolaire, le courant dans les bobines est encore augmenté linéairement jusqu'à  $109 \text{ A}$  en une durée de  $300 \text{ ms}$ , ce qui fait monter la température à  $260 \mu\text{K}$ . La densité dans l'espace des phases vaut alors  $7 \cdot 10^{-7}$ .

**Refroidissement évaporatif dans le piège quadrupolaire bouché** La dernière étape avant d'obtenir le condensat est le refroidissement évaporatif. Dans le cas d'ato-



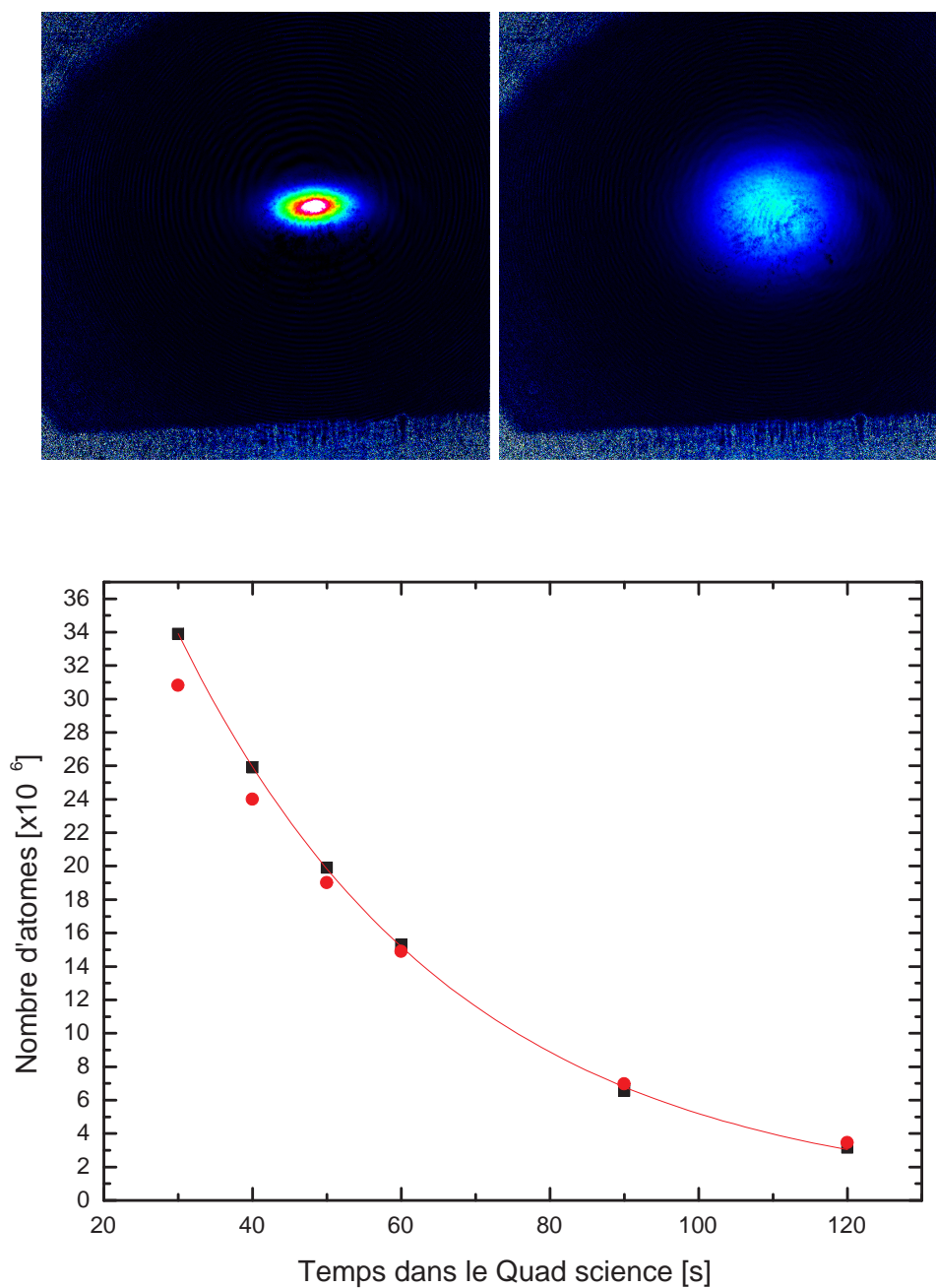
**Figure 4.14** — Cette courbe montre l'évolution des températures dans les trois directions  $T_x, T_y, T_z$  et de la température  $T$  au cours du transport. A l'équilibre thermodynamique, ces variables sont égales. Ici, on voit que  $T_y$  et  $T_z$  se stabilisent à deux valeurs différentes et que  $T_x$  baisse lentement, l'énergie dans le degré de liberté en  $x$  étant transférée dans les deux autres degrés de liberté.

mes confinés dans un piège magnétique, on envoie sur les atomes une onde radiofréquence de fréquence décroissante. Cela expulse du piège les atomes dont l'écart entre sous-niveaux Zeeman est résonnant avec la fréquence de l'onde RF [21, 95].

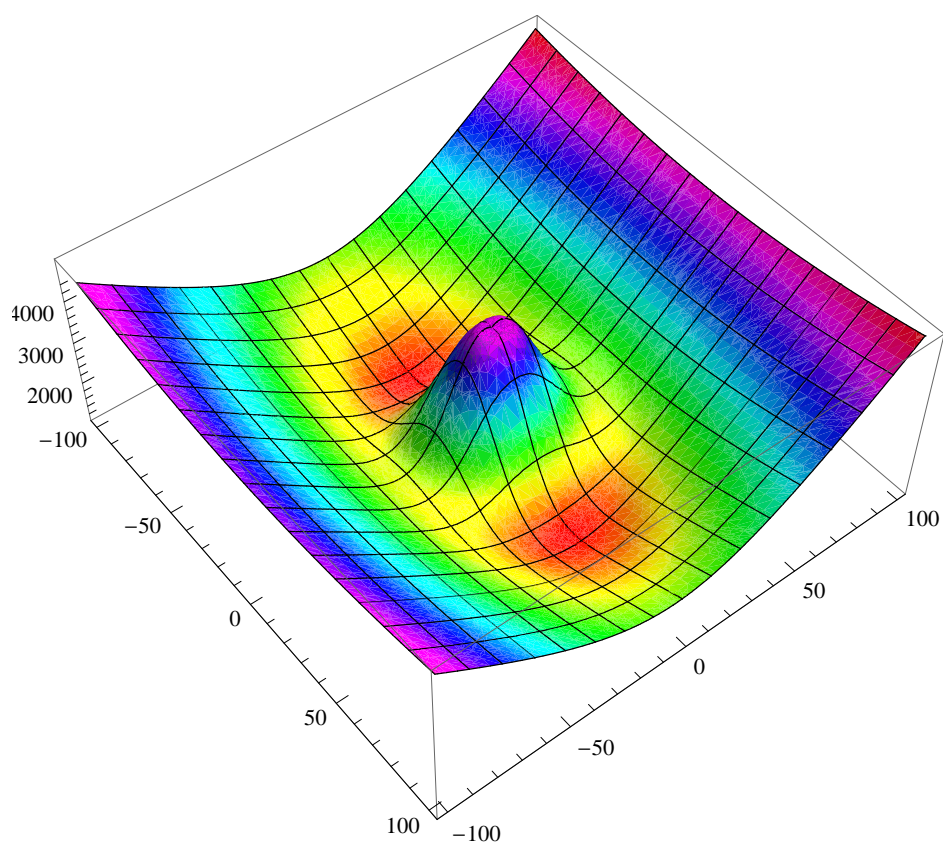
La première partie de l'évaporation se fait en 13,6 secondes, pendant lesquelles la fréquence RF est abaissée de 50 MHz à 4 MHz, avec une rampe linéaire par morceaux dont la forme est montrée dans la figure 4.17. Cette rampe est générée par un synthétiseur RF<sup>4</sup>. Pour chaque portion de la rampe nous avons optimisé la densité dans l'espace des phases finale. Le gradient dans l'axe  $z$  durant cette phase est de 490 G/cm. On part d'un nombre d'atomes et d'une densité dans l'espace des phases de  $1.8 \cdot 10^8$  et  $7 \cdot 10^{-7}$  pour aboutir à  $7 \cdot 10^6$  atomes et une densité dans l'espace des phases de  $3 \cdot 10^{-3}$ . On décomprime alors le piège adiabatiquement en faisant passer le gradient à 135 G/cm en 50 ms, afin d'augmenter l'efficacité du bouchon optique pour limiter les pertes Majorana. La température est alors de  $7 \mu\text{K}$ . Une dernière rampe RF linéaire de 2 MHz à 300 kHz sur 5 secondes, générée par un synthé Stanford, permet d'aboutir à la condensation. Une image du condensat est montrée sur la figure 4.18.

Le laser vert est allumé en permanence pendant l'évaporation, mais son effet ne devient important que sur la fin, lorsque  $k_B T$  devient du même ordre que la hauteur de la barrière de potentiel créée par le faisceau focalisé, ce qui se produit pour une température inférieure à  $20 \mu\text{K}$ . La présence du bouchon optique divise le piège magnétique en deux puits situées de part et d'autre du laser. A la fin de l'évaporation, seul le puits dont le fond est le plus bas reste peuplé, et on obtient un condensat pur de  $2 \cdot 10^5$  atomes environ, dont l'image est montrée dans la figure 4.18.

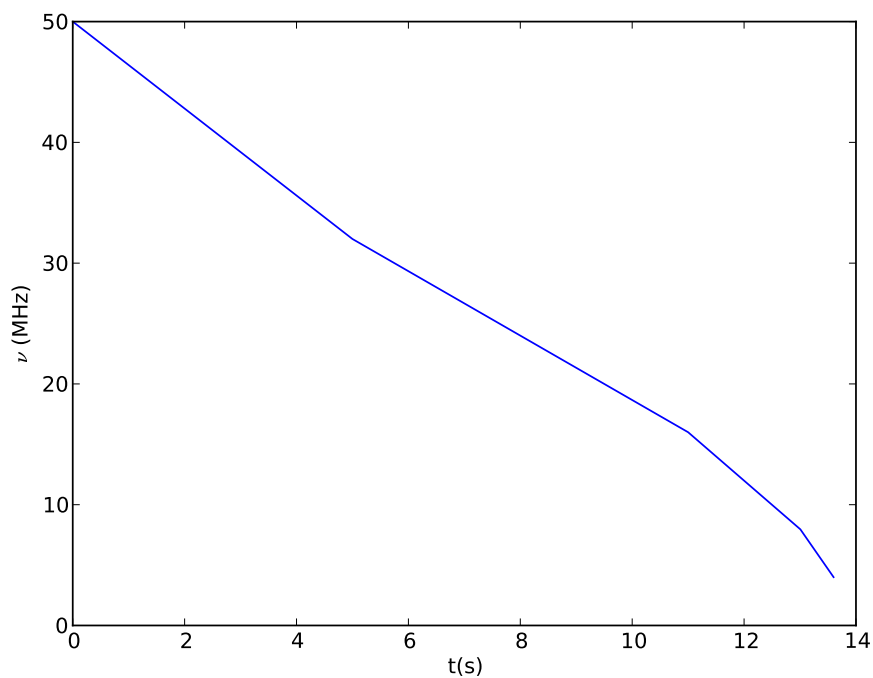
4. Tabor



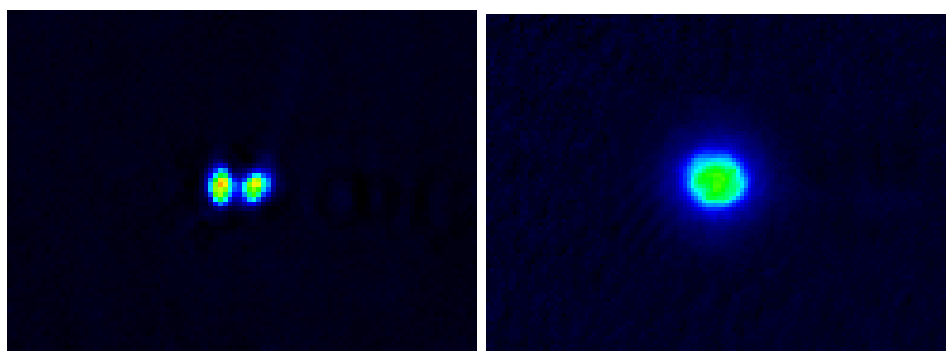
**Figure 4.15** – Durée de vie dans le piège quadrupolaire côté cellule science et image par temps de vol. La durée de vie est de 37 secondes. Le temps de vol est de 0 ms pour la première image et 4 ms pour la seconde. La largeur d'une image correspond à une dimension réelle de 8 mm.



**Figure 4.16** — Potentiel du piège bouché. Les fréquences d'oscillation calculées pour le gradient de champ maximal sont de 250 Hz dans la direction  $x$ , 340 Hz en  $y$  et 230 Hz en  $z$ . Après décompression, les fréquences sont de 220 Hz dans la direction  $x$ , 75 Hz en  $y$  et 120 Hz en  $z$ .



**Figure 4.17** — Rampe RF dans le piège quadrupolaire pendant la première partie de l'évaporation, avant décompression.



**Figure 4.18** — Sur l'image de gauche, on voit le nuage d'atomes juste avant d'atteindre la condensation. On voit clairement les deux parties, séparées par le bouchon optique. Sur l'image de droite, on voit le condensat de  $2 \cdot 10^5$  atomes après un temps de vol de 25 ms.



# Chapitre 5

## Étude numérique des propriétés hydrodynamiques d'un gaz quantique dans un anneau.

Dans ce chapitre, j'étudie le comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège annulaire au moyen de simulations numériques. Je présenterai d'abord les motivations qui m'ont poussé à entreprendre ces études dans la section 5.1. Puis j'exposerai dans 5.3 une étude des modes d'excitation de Bogolyubov, dans le but d'obtenir une estimation de la vitesse critique de rotation d'un condensat de Bose-Einstein dans un anneau. Je présenterai enfin dans 5.4 une étude de la dynamique d'un condensat dans un piège en anneau, réalisée à l'aide de simulations numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii.

### 5.1 Contexte scientifique

Des pièges en forme d'anneau ont été obtenus dans plusieurs équipes, en utilisant un piège de type TOP percé par un faisceau laser focalisé [37], avec des potentiels habillés [47], ou plus récemment par une méthode toute optique [44]. La géométrie annulaire permet notamment la création de courants permanents de circulation quantifiée, similaires à ceux qu'on peut observer dans une spire supraconductrice.

De tels courants de quelques quanta de circulation ont été induits dans un anneau par un processus Raman mettant en jeu un faisceau gaussien et un faisceau dans un mode de Laguerre-Gauss [37]. Dans une expérience plus récente, la stabilité de ces courants en présence d'une barrière de potentiel a été étudiée [44]. Les simulations numériques peuvent nous permettre de mieux comprendre les mécanismes de dissipation de ces courants [96]. De plus, un des buts de notre expérience est d'étudier la dynamique de création d'un courant permanent lorsque l'on crée une anisotropie dans notre piège en anneau et que l'on met cette déformation en rotation. Les simulations numériques peuvent permettre de mieux comprendre ce qui pourrait se passer dans ce



cas.

## 5.2 Système étudié

On se propose d'étudier au moyen de simulations numériques le comportement d'un condensat de Bose-Einstein à température nulle. Le condensat est décrit par une fonction d'onde  $\psi(\vec{r},t)$ , dont l'évolution est gouvernée par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r},t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t) + g|\psi(\vec{r},t)|^2 \right] \psi(\vec{r},t). \quad (5.1)$$

$V(\vec{r},t)$  est le potentiel auquel sont soumis les atomes, et  $g$  est la constante d'interaction, fixée à partir de la longueur de diffusion  $a$ . Dans le cas 3D [97],  $g_{3d} = 4\pi\hbar^2\frac{a}{m}$ .

Dans le cas où le condensat est piégé harmoniquement dans la direction verticale avec une fréquence d'oscillation grande devant le potentiel chimique  $\mu$  (plus précisément  $\mu - \frac{\hbar\omega_z}{2} \ll \hbar\omega_z$ ), le degré de liberté en  $z$  est figé et la fonction d'onde est gaussienne dans la direction  $z$ . L'évolution de la fonction d'onde dans le plan  $xy$  est alors décrite par une équation de Gross-Pitaevskii 2D avec la constante d'interaction effective  $g_{2d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_z}g_{3d}$  où  $a_z$  est la taille du fondamental de l'oscillateur harmonique en  $z$  [98, 99].

Il est intéressant quand on étudie un piège en rotation de se placer dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe  $z$ . L'Hamiltonien dans le référentiel tournant s'obtient en ajoutant un terme  $-\hbar\Omega L_z$  à l'Hamiltonien dans le référentiel du laboratoire, où  $L_z = xp_y - yp_x$  est l'opérateur moment cinétique selon l'axe  $z$  [100]. Ce n'est pas l'approche que j'ai choisie pour les simulations dynamiques, car les premiers essais ont montré une moins bonne stabilité numérique.

### 5.2.1 Potentiel du piège en anneau

Le potentiel de confinement utilisé dans les simulations qui vont suivre est un potentiel à symétrie cylindrique, qui s'écrit en coordonnées cylindriques  $r,\theta,z$  :

$$V(r,\theta,z) = \frac{m\omega_r^2}{2}(r - r_0)^2 + \frac{m\omega_z^2}{2}z^2 \quad (5.2)$$

Ce potentiel correspond à un confinement harmonique autour d'un anneau de rayon  $r_0$ , centré sur l'origine, avec des fréquences d'oscillation données par  $\omega_r$  dans la direction radiale et  $\omega_z$  dans la direction transverse. Ce potentiel est une bonne approximation du potentiel réellement utilisé dans l'expérience, la fonction d'onde restant localisée autour de  $r = r_0$ . On introduira par la suite soit une anisotropie dans le potentiel de piégeage, soit une barrière de potentiel.

### 5.2.2 Système de coordonnées sans dimensions

Pour simplifier le traitement numérique, on va récrire cette équation dans un système de coordonnées sans dimension. On définit une longueur caractéristique  $a_0$  et un

temps caractéristique  $t_0$ . On peut alors écrire la position sans dimension,  $\vec{x} = \frac{\vec{x}}{a_0}$ , le temps sans dimension  $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$  et la fonction d'onde sans dimension  $\tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) = a_0^{\frac{d}{2}} \psi(\vec{x})$  où  $d$  est le nombre de dimensions spatiales pour conserver la normalisation. Exprimée en ces variables, en simplifiant une première fois par  $\frac{1}{a_0}$  l'équation de Gross-Pitaevskii devient :

$$i \frac{\hbar}{t_0} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) + V(\vec{x}, \tilde{t}) \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) + \frac{g}{a_0^d} |\tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t})|^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}).$$

En simplifiant par  $\frac{\hbar}{t_0}$  on trouve :

$$i \partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) = \left[ -\frac{\hbar t_0}{2ma_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) + \frac{t_0}{\hbar} V(\vec{x}, \tilde{t}) + \frac{t_0 g}{\hbar a_0^d} |\tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t})|^2 \right] \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}).$$

Si on choisit  $a_0$  et  $t_0$  tels que  $\frac{\hbar t_0}{ma_0^2} = 1$  et que l'on définit la constante d'interaction sans dimension  $\tilde{g} = \frac{t_0 g}{\hbar a_0^d}$  et le potentiel sans dimension  $\tilde{V}(\vec{x}, \tilde{t}) = \frac{t_0}{\hbar} V(\vec{x}, \tilde{t})$ , on obtient alors la forme adimensionnée de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i \partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) = \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\Delta} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}) + \tilde{V}(\vec{x}, \tilde{t}) + \tilde{g} |\tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t})|^2 \right] \tilde{\psi}(\vec{x}, \tilde{t}).$$

Une manière simple d'écrire les paramètres sans dimensions consiste à définir la pulsation caractéristique  $\omega_0 = \frac{1}{t_0}$ , ce qui permet de se ramener aux dimensions typiques d'un oscillateur harmonique :

- la longueur caractéristique  $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$
- l'impulsion caractéristique  $p_0 = \sqrt{\hbar m \omega_0}$
- l'énergie caractéristique  $\hbar \omega_0$
- le potentiel sans dimension tel que  $\hbar \omega_0 \tilde{V}(\vec{x}, \tilde{t}) = V(\vec{x}, t)$
- la constante d'interaction telle que  $\hbar \omega_0 \tilde{g} = \frac{g}{a_0^d}$

Dans l'anneau que nous souhaitons construire, la pulsation caractéristique  $\omega_0$  correspond à la fréquence d'oscillation transverse dans l'anneau, qui vaut  $\omega_r \approx 2\pi \times 500$  Hz, ce qui donne une longueur caractéristique  $a_0 = 0,5 \mu\text{m}$ . Le rayon typique de l'anneau prévu dans l'expérience varie de 20 à 100  $\mu\text{m}$ , soit entre 40 et 200 en unités sans dimensions. La fréquence de confinement dans la direction  $z$  est typiquement de 5 à 50 kHz. Tous les calculs présentés dans ce chapitre concernent un gaz confiné en dimension 2 ( $d = 2$ ), avec une fréquence de confinement transverse  $\nu_z = 50$  kHz, soit une constante d'interaction sans dimension  $\tilde{g} = 0,55$ .

### 5.2.3 Formulation hydrodynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii

La dynamique de la fonction d'onde peut également être décrite dans le formalisme hydrodynamique. On pose  $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$ , avec  $\rho$  la densité,  $\phi$  la phase, et  $\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi$  la

vitesse. L'évolution du système est alors décrite par l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\vec{v}\rho) = 0$$

et l'équation d'Euler

$$m\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \nabla \left( V + g\rho - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \right) = \vec{0}.$$

La formulation hydrodynamique est équivalente à celle utilisant l'équation de Gross-Pitaevskii. Elle peut également s'écrire dans le système de coordonnées sans dimensions, ce qui donne alors les équations suivantes :

$$\tilde{\vec{v}} = \nabla\phi \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + \nabla \cdot (\tilde{\vec{v}}\tilde{\rho}) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\vec{v}} + \nabla \left( V + g\rho - \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho} + \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \right) = \vec{0} \quad (5.5)$$

avec

$$\vec{v} = \frac{a_0}{t_0}\tilde{\vec{v}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}}\tilde{\vec{v}}$$

et

$$\tilde{\rho} = \rho a_0^d.$$

On remarque que le fait que la vitesse est proportionnelle au gradient de la phase implique que l'on a un écoulement irrotationnel. De ce fait, le seul moyen d'avoir un mouvement de rotation du fluide est par la présence de vortex. Un vortex quantique est une singularité de densité nulle autour de laquelle circule un courant quantifié. La phase pour un vortex isolé en coordonnées polaires est typiquement de la forme  $\phi(r,\theta) = l\theta$  où  $l$  est un entier et la densité s'annule en  $r = 0$ . La vitesse est alors  $v(r) = \frac{\hbar}{m} \frac{l}{r}$ .

## 5.3 Calcul du spectre de Bogolyubov

Le calcul du spectre de Bogolyubov est l'équivalent pour un système avec interactions du calcul du spectre de l'Hamiltonien pour l'équation de Schrödinger. Nous avons vu deux manières d'étudier le condensat : directement à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii, ou bien avec la formulation hydrodynamique. Nous allons voir comment on peut calculer le spectre de Bogolyubov avec chacune de ces formulations. Nous allons ensuite appliquer ces méthodes au calcul analytique du spectre dans un tube infini et au calcul numérique dans le cas d'un anneau.

### 5.3.1 A partir de l'équation de Gross-Pitaevskii

Pour étudier la stabilité du condensat, nous allons étudier ses excitations de plus basse énergie à proximité d'un état stationnaire. Soit l'état stationnaire décrit par la

fonction d'onde  $\psi_0$  telle que

$$H_0\psi_0 + g|\psi_0|^2\psi_0 = \mu\psi_0$$

avec l'hamiltonien linéaire

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t).$$

$\mu$  est le potentiel chimique, qui représente l'énergie de cet état stationnaire. On s'intéresse à la fonction d'onde  $\psi(\vec{r},t) = e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}(\psi_0 + \delta\psi)$ , où  $\delta\psi$  représente une petite perturbation par rapport à  $\psi_0$  ( $\delta\psi \ll \psi_0$ ). La fonction d'onde  $\psi(\vec{r},t)$  obéit à l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$i\hbar\partial_t\psi = H_0\psi + g|\psi|^2\psi \quad (5.6)$$

$$e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}(\mu + i\hbar\partial_t)(\psi_0 + \delta\psi) = e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}(H_0\psi_0 + H_0\delta\psi + g|\psi_0 + \delta\psi|^2(\psi_0 + \delta\psi)) \quad (5.7)$$

En simplifiant par le terme en exponentielle et en tirant parti du fait que  $\psi_0$  est une solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire, on obtient la forme suivante :

$$i\hbar\partial_t\delta\psi = (H_0 - \mu)\delta\psi + g|\psi_0 + \delta\psi|^2(\psi_0 + \delta\psi) - g|\psi_0|^2\psi_0. \quad (5.8)$$

On peut alors développer le terme d'interactions et négliger les termes d'ordre 2 ou plus en  $\delta\psi$ , ce qui donne :

$$g|\psi_0 + \delta\psi|^2(\psi_0 + \delta\psi) - g|\psi_0|^2\psi_0 \approx 2g|\psi_0|^2\delta\psi + g\psi_0^2\delta\psi^*$$

d'où

$$i\hbar\partial_t\delta\psi = (H_0 - \mu)\delta\psi + 2g|\psi_0|^2\delta\psi + g\psi_0^2\delta\psi^*.$$

On peut restaurer la linéarité de cette équation en considérant  $\delta\psi$  et  $\delta\psi^*$  comme des variables séparées. On recherche alors la solution à :

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix}$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2g|\psi_0|^2 & g\psi_0^2 \\ -g\psi_0^{*2} & -(H_0 - \mu + 2g|\psi_0|^2)^* \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

On peut alors écrire  $\delta\psi$  comme une somme de modes de la forme :

$$\delta\psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-i\omega t} + v^*(\vec{r})e^{i\omega t}$$

où  $\hbar\omega \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Ces modes peuvent être trouvés par diagonalisation de la matrice

$L$ . On peut remarquer que si  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  est vecteur propre pour la valeur propre  $\hbar\omega$ , alors

$\begin{pmatrix} v^* \\ u^* \end{pmatrix}$  est vecteur propre pour  $-\hbar\omega$ . Les seuls modes ayant une signification physique sont ceux pour lesquels  $|u|^2 - |v|^2 > 0$ , et sont normalisés de façon à avoir  $|u|^2 - |v|^2 = 1$ .

Ces modes sont appelés modes de Bogolyubov. L'étude du spectre des modes de Bogolyubov donne des renseignements importants sur la stabilité du système. Dans le cas d'un système invariant par translation, les modes sont des ondes planes de vecteur d'onde  $k$  et d'impulsion  $p = \hbar k$ , et le critère de Landau fournit la vitesse critique  $v_c = \min_k \frac{\epsilon(p)}{p}$  comme expliqué en section 1.1.2.

### 5.3.2 Approche hydrodynamique

Une solution stationnaire des équations hydrodynamiques doit vérifier les égalités suivantes :

$$\partial_t \vec{v} = \vec{0}$$

$$\partial_t \rho = 0$$

d'où

$$\nabla \cdot (\vec{v}\rho) = 0$$

et

$$\nabla \left( V + g\rho - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = 0.$$

On se place dans un cas pour lequel l'énergie d'interaction est grande devant l'énergie cinétique, ce qui permet de négliger les terme de pression quantique  $\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho}$  et d'énergie cinétique  $\frac{1}{2} m \vec{v}^2$ , et d'obtenir la solution de Thomas-Fermi :

$$\rho_0(\vec{x}) = \frac{1}{g} [\mu - V(\vec{x})]$$

pour tout  $\vec{x}$  tel que  $\mu \geq V(\vec{x})$  et  $\rho_0(\vec{x}) = 0$  ailleurs. Dans le cas d'un piège harmonique avec un potentiel de la forme  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ , la solution est une parabole inversée de la forme  $\rho_0(\vec{x}) g = \mu \left[ 1 - \frac{x}{R} \right]$  où  $R = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}$  est appelé rayon de Thomas Fermi.

On écrit alors  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$  et  $\vec{v} = \delta\vec{v}$ . On linéarise les équations du mouvement autour de la solution stationnaire, ce qui donne l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \delta\rho + \nabla \cdot (\rho_0 \delta\vec{v}) = 0,$$

et l'équation d'Euler :

$$m \partial_t \delta\vec{v} + \nabla g \delta\rho = \vec{0}.$$

On dérive alors l'équation de conservation de la masse par rapport au temps et on remplace  $\partial_t \delta\vec{v}$  par sa valeur déduite de l'équation d'Euler pour obtenir l'équation d'évolution pour  $\delta\rho$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho = \nabla \cdot (c^2(\vec{x}) \nabla \delta\rho) \quad (5.10)$$

où  $c(\vec{x})$  est la vitesse du son locale, donnée  $m c^2(\vec{x}) = g \rho_0(\vec{x}) = \mu - V(\vec{x})$ , et appelée ainsi car les solutions de basse énergie dans le cas d'un condensat homogène sont des phonons se déplaçant avec la vitesse  $c$ . On peut développer cette expression en :

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = c^2(x) \Delta \delta\rho + (\nabla c^2(x)) \cdot \nabla \delta\rho.$$

Pour mieux comprendre la physique d'un piège en anneau, on va commencer par étudier un cas plus simple, qui est celui d'un condensat dans un tube de longueur infinie. En effet, si on néglige les effets de sa courbure, un anneau de rayon  $r_0$  peut être considéré comme un tube de longueur  $2\pi r_0$  avec des conditions aux limites périodiques.

### 5.3.3 Calcul analytique pour un condensat dans un tube infini

Le problème d'un condensat confiné radialement dans un tube infini, avec un potentiel radial  $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$ , a été traité en 1998 par Stringari [101]. J'en donne une démonstration en annexe B à titre d'exercice pour comprendre si cela peut être adapté au cas d'un anneau. Le spectre obtenu est :

$$\omega^2 = \frac{1}{4}\omega_0^2 R^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{48}k^2 R^2\right) = c_{1d}^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{48}k^2 R^2\right) \quad (5.11)$$

où  $R = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}$  est le rayon de Thomas-Fermi radial du condensat, et les modes de basse énergie sont de la forme  $\delta\rho(r,z,t) = \delta\rho(r)e^{ikz}e^{-i\omega t}$ .

Nous avons étendu le calcul de Stringari au cas où les fréquences d'oscillations en  $x$  et  $y$  sont telles qu'on a un profil gaussien en  $y$  et Thomas-Fermi en  $x$ . On peut alors se ramener à un problème 2D, avec un potentiel dans le plan  $xz$  qui vaut  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ , et le spectre des excitations est alors :

$$\omega^2 = \frac{2}{3}\omega_0^2 R^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{45}k^2 R^2\right) = c_{1d}^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{45}k^2 R^2\right) \quad (5.12)$$

avec des modes  $\delta\rho(x,z,t) = \delta\rho(x)e^{ikz}e^{-i\omega t}$ . La vitesse du son est de  $c_{1d} = \sqrt{\frac{2\mu}{3}}$ , où  $\mu$  est un potentiel chimique 2D n'incluant pas l'énergie du fondamental de l'oscillateur harmonique dans la direction  $y$ . Le calcul détaillé est présenté en annexe B.

Dans les deux cas, on remarque que la correction en  $k^2 R^2$  est négative, ce qui signifie que la vitesse critique est inférieure à la vitesse du son. Le calcul analytique n'est valable que si  $kR \ll 1$ . Ce calcul ne permet pas d'obtenir la valeur de la vitesse critique, le minimum de  $\frac{\omega(k)}{k}$  se trouvant hors de la zone de validité des approximations utilisées. Nous avons tenté de l'étendre au cas d'un anneau, cependant on perd alors certaines symétrie du problème (parité), ce qui rend cette entreprise trop ardue. Il est alors préférable de se tourner vers le calcul numérique du spectre.

### 5.3.4 Calcul numérique

Le calcul numérique du spectre de Bogolyubov se base sur l'expression des modes tirée de l'équation de Gross-Pitaevskii, dans laquelle l'énergie des modes est donnée par le spectre de l'opérateur :

$$L = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2g|\psi_0|^2 & g\psi_0^2 \\ -g\psi_0^{*2} & -(H_0 - \mu + 2g|\psi_0|^2)^* \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Cet opérateur agit sur les couples de fonctions  $u, v$ , que l'on peut discrétiser sur une grille. On est alors ramené à un problème de recherche des valeurs et vecteurs propres d'une matrice. La difficulté vient de la taille de la matrice considérée, qui peut rapidement devenir ingérable. En effet, pour le problème 3D, si on discrétise  $u$  et  $v$  sur une grille de taille  $n$ , il faut  $2n^3$  nombres complexes pour stocker  $u$  et  $v$ , et  $4n^6$  pour  $L$ . Il est possible de simplifier le problème en profitant des symétries du système étudié.

**Tube 2D** On se place dans le même cas que dans la section 5.3.3, qui est la cas d'un ruban infiniment allongé sur l'axe  $z$  avec un potentiel selon  $x$   $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ . Du fait de l'invariance par translation selon  $z$ , on peut écrire les modes d'excitations sous la forme  $\delta\rho(x,z,t) = \delta\rho_n(x)e^{ikz}e^{-i\omega_n(k)t}$ , ce qui donne dans la formulation utilisant la matrice  $L$

$$\begin{pmatrix} u(x,z) \\ v(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} e^{ikz}.$$

$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$  doit alors être un vecteur propre de la matrice :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}k^2 + V(x) - \mu + 2g|\psi_0|^2 & g\psi_0^2 \\ -g\psi_0^{*2} & -\left(\frac{1}{2}k^2 + V(x) - \mu + 2g|\psi_0|^2\right)^* \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

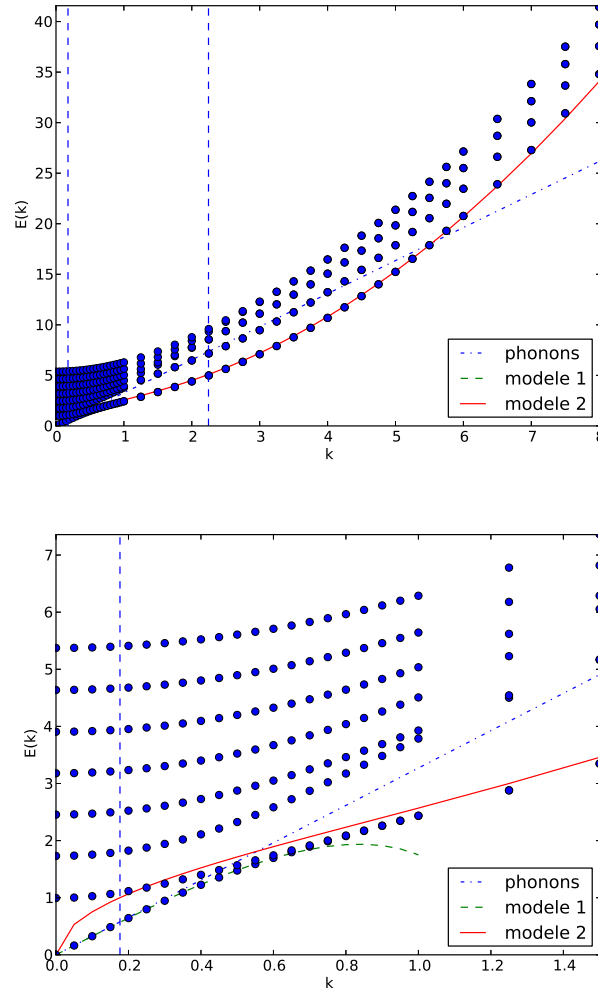
En diagonalisant la matrice  $L$  pour différentes valeurs de  $k$ , on reconstruit le spectre des excitations dans le tube 2D. Le spectre obtenu est montré dans la figure 5.1. On trouve des résultats similaires à ceux déjà calculés pour un condensat cylindrique [103]. Pour  $k$  proche de zéro, on retrouve la relation de dispersion des phonons,  $\omega = ck$ , avec  $c = \sqrt{\frac{2\mu}{3}}$ . La courbe calculée numériquement suit bien le modèle analytique de la section 5.3.3, jusqu'à environ  $k = 0.6$ . Cela correspond à une longueur d'onde  $\lambda \approx 10,5$ , du même ordre de grandeur que le rayon de Thomas Fermi. Pour des longueurs d'ondes plus petites, il est possible de bien modéliser le spectre en utilisant un modèle d'ondes de surface, qui sera décrit dans le paragraphe suivant. On remarque que les deux modes les plus bas deviennent dégénérés pour  $k \geq 0.6$ . C'est un autre signe montrant qu'on passe dans un régime de modes de surface, dans lequel on s'attend à trouver par paires de modes dégénérés localisés respectivement autour de  $x = R$  et  $x = -R$ .

**Modèle des ondes de surface** Pour de grandes longueur d'onde, on a un spectre de phonons. Pour les excitations de longueur d'onde suffisamment petite on a des modes se propageant sur la surface du tube, autour de la position  $x = \pm R$ . L'article [102] fourni un calcul du spectre de ces modes de surface d'un condensat en régime Thomas Fermi. Pour des modes localisés à la surface du condensat, dont la longueur d'onde est petite devant l'échelle de longueur du potentiel de piégeage, celui ci peut être approximé par un potentiel linéaire,  $V = Fx$ . A partir de la pente  $F$  du potentiel à la surface du condensat, on peut calculer une longueur caractéristique  $\delta$  et un temps caractéristique  $\tau$  donnés en unités physiques par :

$$\delta = \left( \frac{\hbar^2}{2mF} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \tau = \left( \frac{2m\hbar}{F^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.15)$$

$\delta$  correspond à la largeur de la zone de transition se situant à la surface du condensat à l'intérieur de laquelle l'approximation de Thomas Fermi n'est plus valable. Pour un potentiel harmonique de fréquence  $\omega_0$ , la force au bord du condensat vaut  $F = m\omega_0^2R$ , ce qui permet d'écrire  $\delta$  et  $\tau$  en introduisant les notations du paragraphe 5.2.2 :

$$\delta = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad \tau = \omega_0^{-1} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.16)$$

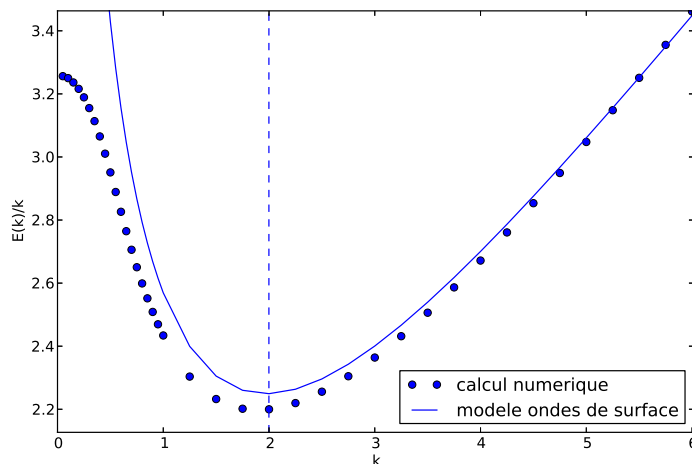


**Figure 5.1 — Tube 2D.** Les deux courbes ci-dessus montrent le spectre des excitations de Bogolyubov en unités sans dimension pour  $\mu = 16.5$  dans le ruban 2D. A chaque valeur de  $k$  correspondent plusieurs excitations, représentées par les points bleus. Ici, le rayon de Thomas-Fermi vaut environ  $R = 5,7$ . La courbe du dessus montre une large vue du spectre, et la courbe du bas montre un zoom sur le début du spectre. Les trois courbes représentent différentes modélisation du spectre. La droite correspond simplement à un spectre de phonons. Le modèle 1 est le modèle étudié dans la section 5.3.3, et le modèle 2 est le modèle d’ondes de surface décrit dans [102].

On peut alors récrire l’équation de Gross-Pitaevskii dans les coordonnées sans dimension  $t' = \tau^{-1}t, x' = \delta^{-1}x$  et  $\psi' = \sqrt{8\pi a}\psi$  où  $a$  est la longueur de diffusion de l’atome considéré. On obtient alors l’équation suivante :

$$i\partial_t\psi' = -\Delta^2\psi' + x\psi' + |\psi'|^2\psi' \quad (5.17)$$





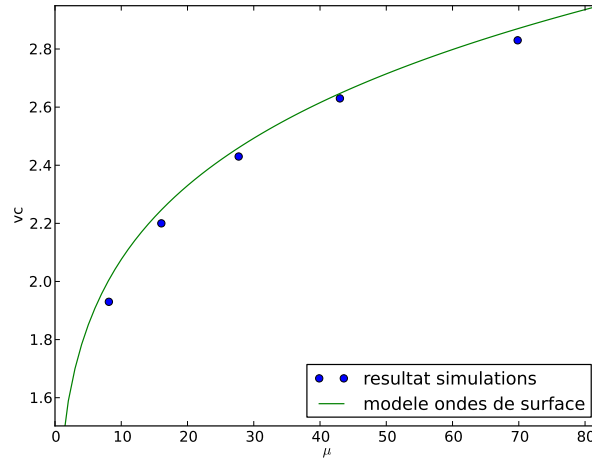
**Figure 5.2 – Tube 2D.** Les points sur le graphe ci-dessus montrent les valeurs de  $\frac{E(k)}{k}$  calculées numériquement en unités de  $\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}}$  pour  $\mu = 16.5$  dans le cas du ruban 2D. Le minimum donne la valeur de la vitesse critique, qui est ici de 2.2. La valeur à l'origine est la vitesse du son, qui vaut  $c = \sqrt{\frac{2\mu}{3}} = 3.3$  pour un système 2D comme c'est le cas ici. La valeur de  $k$  au niveau du minimum nous indique quel mode pourra être excité en premier. La courbe montre le résultat obtenu en utilisant l'équation 5.18. Ce modèle fonctionne bien, et donne une valeur de  $v_c$  qui diffère d'environ 2% de notre calcul numérique.

à partir de laquelle on peut obtenir une équation de Bogolyubov sans dimension, portant sur un vecteur d'onde  $k' = \delta k$  et une fréquence  $\Omega = \tau\omega$  sans dimension. Pour  $k$  grand par rapport à  $\delta^{-1}$ , on peut déterminer le spectre en utilisant la théorie des perturbations, et on trouve  $\Omega = k^2 + E_{g2}$  où  $E_{g2}$  est une constante, ce qui en unités physiques donne  $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 + C$  avec  $C = E_{g2}\tau^{-1}$ , qui est le spectre d'une particule libre décalé de  $\hbar C$ . L'article [102] fournit un résultat numérique pour  $0 \leq k' \leq 2$  :

$$\Omega^2 = 2k' + 1.35k'^3 + 0.711k'^4. \quad (5.18)$$

Ce modèle est en bon accord avec le spectre calculé numériquement pour  $k' \geq 0.6$ . Les excitations de faible longueur d'onde, entre  $2\pi\delta$  et la longueur de relaxation  $\xi$ , sont bien des modes de surface. Pour  $k > \xi^{-1}$ , on a un spectre de particules libres, localisées elles aussi en bordure du gaz.

**Vitesse critique** Avec le spectre de Bogolyubov, il est possible de calculer simplement la valeur de la vitesse critique pour le critère de Landau,  $v_c = \min(E(k)/k)$ . La courbe de  $E(k)/k$  est montrée sur la figure 5.2. On trouve une vitesse critique  $v_c = 2.2\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}}$  pour  $\mu = 16.5\hbar\omega_0$ . On remarque que cette valeur correspond à la vitesse  $\frac{\hbar}{m\delta}$ , où on a utilisé l'expression de  $\delta$  donnée à l'équation 5.16 valable pour un potentiel



**Figure 5.3 – Tube 2D.** Ce graphe montre la vitesse critique en fonction du potentiel chimique. Les points représentent les résultats de nos calculs numériques, et la courbe représente le résultat du modèle des ondes de surface. Le modèle surestime la vitesse critique de moins de 5 % par rapport aux résultats du calcul numérique.

harmonique. En unité sans dimensions, on a donc  $v_c = \sqrt{2}\mu^{\frac{1}{6}}$ , soit encore :

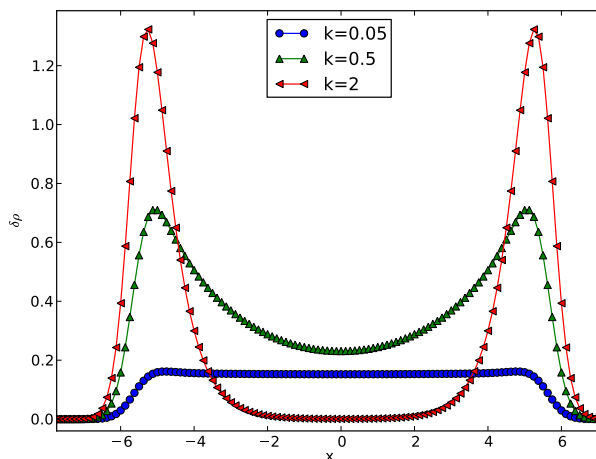
$$v_c = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{m}} \left( \frac{\mu}{\hbar\omega_0} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (5.19)$$

Pour les paramètres du calcul de la figure 5.2, soit  $\mu = 16,5$ , on trouve que  $\delta = 0,44$  en unités sans dimensions. La valeur de  $k$  correspondant au minimum nous indique quel sera le premier mode à être excité quand la vitesse du superfluide dépasse la vitesse critique. Contrairement au cas classique où l'on excite d'abord les phonons de faible impulsion, le premier mode instable est un mode de surface, dont la longueur d'onde vaut  $2\pi/k = 0.5$  en unités sans dimensions, du même ordre de grandeur que  $2\pi\delta$ . Le premier mode instable a un vecteur d'onde  $k_c = 0.85\delta^{-1}$ .

Une comparaison entre les résultats de ce modèle et notre calcul numérique est montrée dans la figure 5.3. La différence entre les deux peut s'expliquer par le fait que  $\frac{R}{\delta} \approx 10$  dans notre cas, ce qui n'est pas suffisant pour négliger totalement la courbure du potentiel. Néanmoins, le modèle des ondes de surface fournit une bonne estimation de la vitesse critique.

En plus du spectre, notre code de calcul nous donne les vecteurs propres  $(u, v)$ , à partir desquels on peut retrouver la dépendance spatiale des modes de Bogolyubov, selon la formule  $\delta\rho = 2\text{Re}(\psi_0^*(u + v^*))$ . Ces résultats sont présentés dans la figure 5.4. Cette courbe permet de bien voir le passage d'une excitation se propageant dans toute l'épaisseur du condensat à une onde de surface se propageant sur les bords lorsque  $k$  augmente.

**Cas de l'anneau** Nous allons maintenant appliquer la méthode de calcul de la vitesse critique par l'étude du spectre de Bogolyubov au cas d'un condensat piégé dans



**Figure 5.4 – Tube 2D.** Ces courbes montrent la forme  $\delta\rho(x)$  du premier mode d’excitation transverse du ruban 2D pour différentes valeurs de  $k$ . Pour  $k$  très faible, on a un mode uniforme sur toute la largeur du condensat. Quand  $k$  augmente et que la longueur d’onde de l’excitation devient petite devant le rayon de Thomas-Fermi, le mode se localise au bord du condensat.

un anneau. On se place cette fois dans un anneau de rayon  $r_0$ , dans le système de coordonnées sans dimension. En profitant de l’invariance par rotation du système, on peut écrire les modes de Bogolyubov sous la forme :

$$\delta\rho(r,\theta,z,t) = \delta\rho_n(r,z)e^{il\theta}e^{-i\omega_n t}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Le terme d’énergie cinétique dans  $H_0$  devient alors :

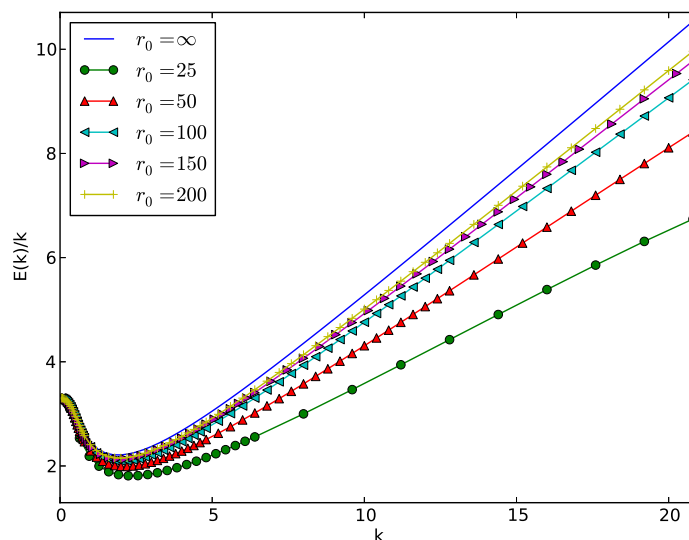
$$\frac{1}{2}\Delta u(r,\theta,z,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r^2} u(r,z,t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r,z,t) + \frac{\partial}{\partial z^2} u(r,z,t) - \frac{1}{l^2} u(r,z,t) \right].$$

Pour trouver les modes correspondant à une valeur fixée de  $l$ , il faut diagonaliser la matrice :

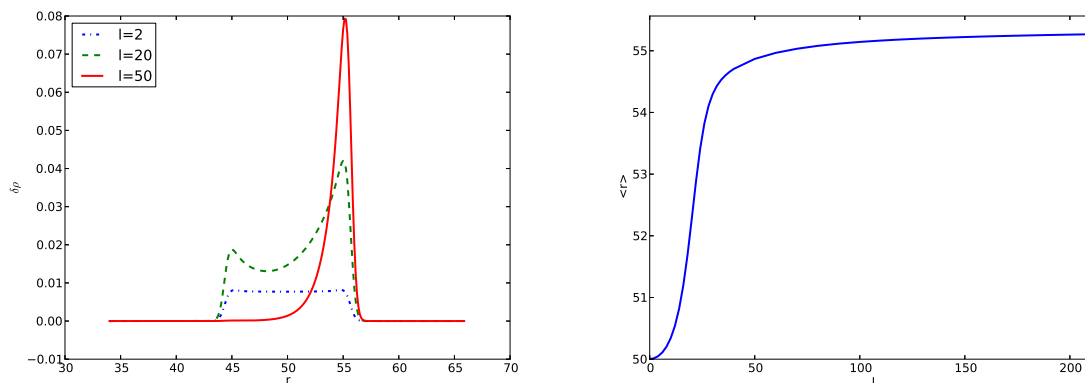
$$L = \begin{pmatrix} H_0 + V(r,z) - \mu + 2g|\psi_0|^2 & g\psi_0^2 \\ -g\psi_0^{*2} & -(H_0 + V(r,z) - \mu + 2g|\psi_0|^2)^* \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Dans le cas où le rayon  $r_0$  est très grand devant le rayon de Thomas-Fermi, on peut négliger la courbure de l’anneau et se ramener au cas du tube infini, avec un vecteur d’onde  $k = \frac{l}{r_0}$ . Le graphe 5.5 montre que cette approximation ne fonctionne plus pour des anneaux de rayon faible.

L’explication est que les modes les plus bas de longueur d’onde petite devant  $R$  sont localisés sur les surfaces externes et interne de l’anneau. De ce fait, il est plus judicieux de prendre  $k = \frac{l}{\langle r \rangle}$  où  $\langle r \rangle = \frac{\int r \delta\rho(r) dr}{\int \delta\rho(r) dr}$  est le rayon moyen de l’excitation si on veut comparer le cas de l’anneau avec celui du tube infini. On peut voir la localisation du mode de plus basse énergie en fonction de  $l$  sur la figure 5.6.

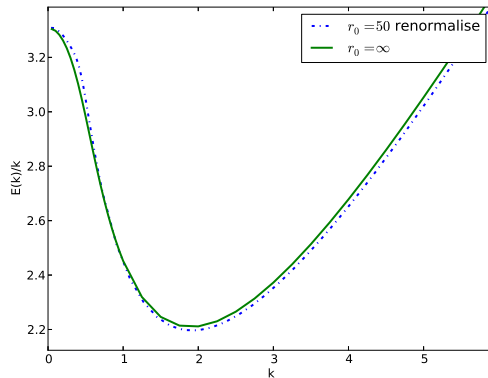


**Figure 5.5 — Anneau 2D.** Ce graphe montre le spectre des excitations pour le cas d'un tube infini et d'anneaux de différents rayons, pour un potentiel chimique  $\mu = 16$ . Dans le cas de l'anneau, on a utilisé  $k = \frac{l}{r_0}$  comme unité sur l'axe des abscisses pour pouvoir comparer plus facilement les différents cas.



**Figure 5.6 — Anneau 2D.** La courbe de gauche montre  $\delta\rho(r)$  pour  $\mu = 8$ ,  $r_0 = 20$ , ce qui correspond à un rayon Thomas Fermi  $R = 4$ , et trois valeurs de  $l$ . On voit que le mode est décalé vers l'extérieur de l'anneau quand  $l$  augmente. La courbe de droite montre le rayon moyen d'une excitation en fonction du  $l$  correspondant, pour  $r_0 = 50$  et  $\mu = 16$ . Le mode se localise rapidement à un rayon proche de  $r_0 + R$  où  $R = 5.7$  est le rayon de Thomas-Fermi du condensat.

En utilisant la connaissance du rayon moyen des excitations, on peut affiner la correspondance entre le cas de l'anneau et celui du tube infini, en associant cette fois-ci à l'excitation de circulation  $l$  le vecteur d'onde  $k = \frac{l}{\langle r \rangle}$  où  $\langle r \rangle$  est le rayon moyen de l'excitation correspondante. Ceci permet d'obtenir la courbe montrée dans la figure 5.7.



**Figure 5.7 – Anneau 2D.** Cette courbe montre  $E(k)/k$  pour  $\mu = 16,5$ , avec l'axe des abscisses renormalisé en fonction de  $k = \frac{l}{\langle r \rangle}$  pour la courbe provenant de la simulation dans l'anneau.

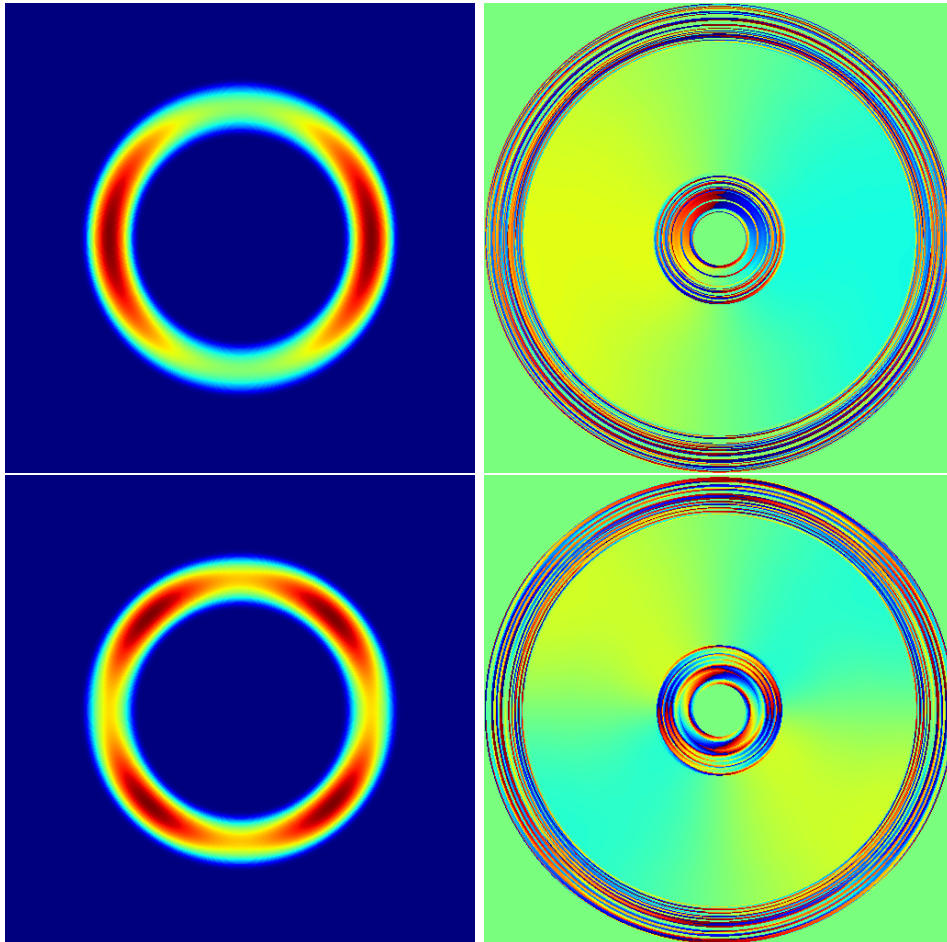
On retrouve alors un spectre analogue au cas du ruban 2D. L'effet de l'anneau est de décentrer le gaz à cause de la force centrifuge.

Le spectre des excitations complet pour un anneau de rayon  $r_0 = 20$  et de potentiel chimique  $\mu = 8$  est montré dans la figure 5.9. Pour des excitations de petit  $l$ , c'est-à-dire avec une longueur d'onde supérieure au rayon de Thomas Fermi  $R$ , on a une modulation périodique de la densité le long de l'anneau. Ceci est montré dans la figure 5.8 pour  $l = 1$  et  $l = 2$ . On pourrait à première vue penser que la fonction d'onde devient périodique de période  $\pi$  en fonction de  $\theta$  pour  $l = 1$ , et de période  $\pi/2$  pour  $l = 2$ . Cela va à l'encontre de ce qu'est un mode  $l$ , avec une composante angulaire de la forme  $e^{il\theta}$ . En réalité, l'excitation  $\delta\psi$  est essentiellement imaginaire, c'est à dire en quadrature avec  $\psi_0$ , mais avec une phase opposée de part et d'autre de l'anneau, ce qui est responsable de l'augmentation de la densité mais aussi d'un petit déphasage *opposé* de la fonction d'onde. La fonction d'onde respecte donc bien la symétrie  $l = 1$  ou  $l = 2$ .

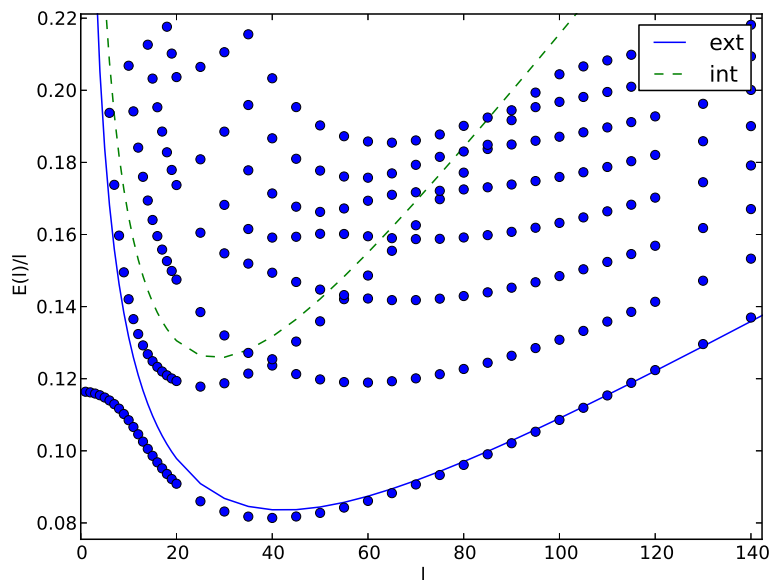
Ces modes de densité ne sont en fait pas les premiers à être excités par une rotation, du moins du point de vue purement énergétique. Le minimum de  $E(l)/l$  est obtenu pour des valeurs de  $l$  plus élevée, de l'ordre de quelques dizaines, avec une vitesse de rotation critique  $\Omega_c = 0,08$ , pour  $l = 40$ . On constate la présence de deux branches de modes de surface pour  $l > 20$ , la dégénérescence présente dans le cas du ruban 2D étant levée. Ces branches représentent des modes se propageant le long des parois extérieures et intérieures de l'anneau, comme cela est évident sur les figures 5.10 et 5.11.

La valeur de  $l$  pour laquelle la branche extérieure devient instable vaut  $l_{\text{ext}} = 40$ , et la branche intérieure devient instable pour  $l_{\text{int}} = 25$ . On peut calculer la longueur d'onde  $2\pi\langle r \rangle/l$  correspondant à ces excitations, en tenant compte de la localisation du mode :  $\lambda_{\text{ext}} = 2\pi(r_0 + R)/l_{\text{ext}} = 3.77a_0$  et  $\lambda_{\text{int}} = 2\pi(r_0 - R)/l_{\text{int}} = 4.02a_0$ . On remarque que ces deux valeurs sont très proches, comme on le voit clairement sur les figures 5.10 et 5.11. En effet, elles correspondent approximativement à la longueur d'onde critique du mode de surface  $2\pi\delta/0.85 = 3.7$ . On en conclue que le mécanisme d'excitation est en fait analogue à celui en œuvre dans le cas du tube 2D.

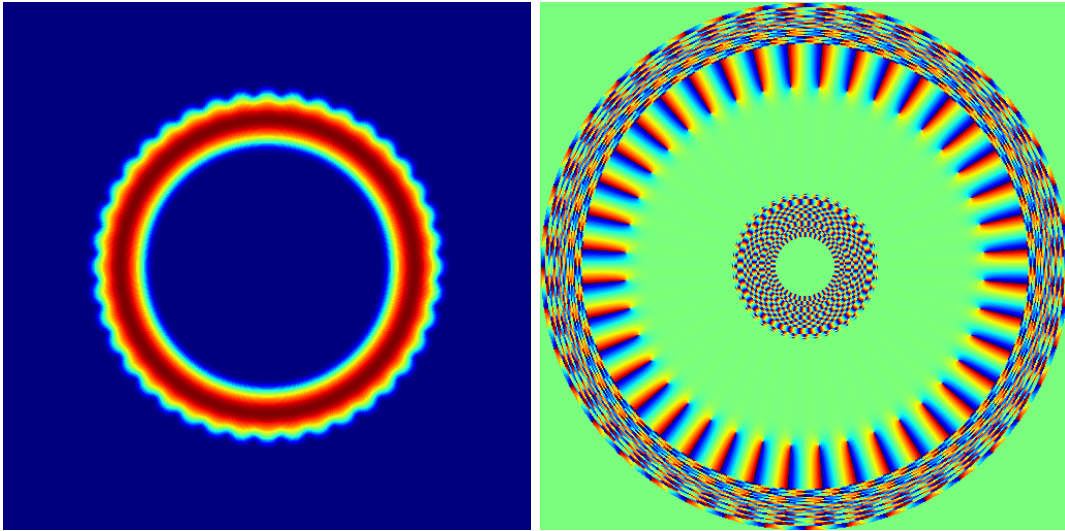
De la même manière que pour le tube infini, il existe un critère de Landau pour la stabilité du courant. Celui ci donne une vitesse de rotation critique  $\Omega_c = \min E(l)/l$ . La vitesse de rotation critique est différente pour les modes se propageant à l'intérieur et à l'extérieur de l'anneau. La valeur de  $l$  minimisant  $\Omega_0(l)/l$  pour chacune des deux branches donne le premier mode à devenir instable. On peut alors calculer la fonction d'onde lorsqu'on excite ce mode. Cela est montré dans la figure 5.10 pour le mode se propageant à l'extérieur de l'anneau, qui est le premier à être peuplé, et dans la figure 5.11 pour le mode se propageant à l'intérieur de l'anneau.



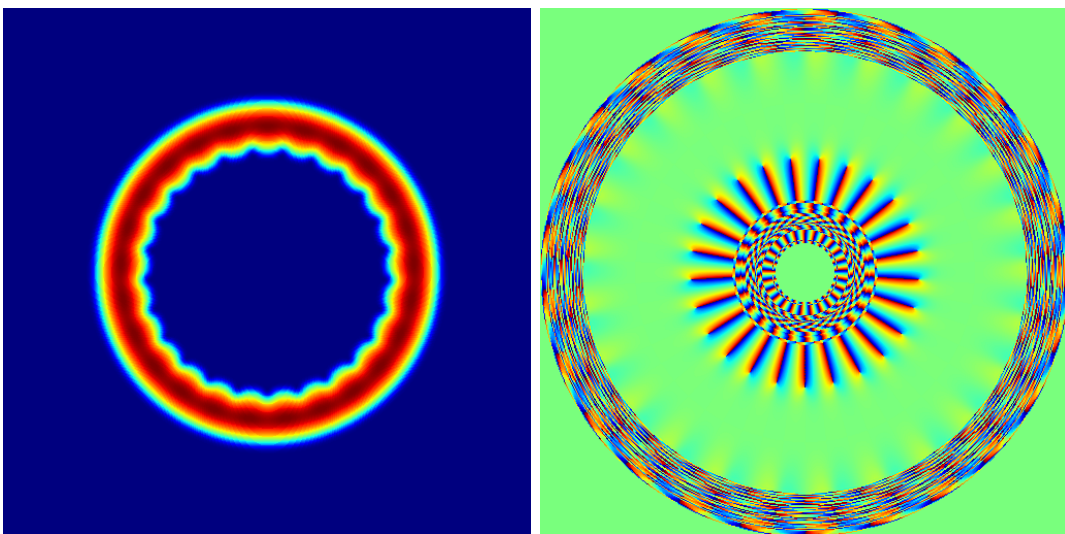
**Figure 5.8 – Anneau 2D.** Ces images montrent la densité et la phase du nuage atomique lorsque les modes  $l = 1$  et  $l = 2$  respectivement sont excités.



**Figure 5.9 – Anneau 2D.** Les points sur ce graphe représentent  $\Omega_n(l)/l$ , où  $\Omega_n(l)$  est l'énergie du nième mode de circulation  $l$ , pour les modes d'excitation d'un anneau 2D. Pour cette figure,  $\mu = 8$  et  $r_0 = 20$ . Le minimum de  $\Omega_0(l)/l$  donne la vitesse de rotation critique pour le critère de Landau. Les deux courbes représentent une modélisation de modes de surface sur le côté intérieur et extérieur de l'anneau. On les obtient en associant à chaque valeur de  $l$  un vecteur d'onde  $k(l) = l/r$  où  $r$  est égal à  $r = r_0 \pm R$ .



**Figure 5.10 – Anneau 2D.** Les deux images montrent la densité et la phase du condensat lorsque le mode de plus basse énergie de circulation  $l = 40$  est excité. D’après les calculs de spectre de Bogolyubov, ce mode est l’un des premiers à être peuplé lorsque  $\Omega_{rot}$  dépasse sa valeur critique. En regardant la phase, on remarque que l’excitation de ce mode correspond à l’arrivée d’antivortex par l’extérieur de l’anneau. La période de l’excitation est celle d’un mode de surface. Les motifs sur la phase dans les zones de densité nulle à l’extérieur et à l’intérieur de l’anneau sont du bruit numérique et n’ont pas de signification physique.



**Figure 5.11 – Anneau 2D.** Cette figure montre un autre mode d’excitation correspondant à l’entrée de vortex par l’intérieur de l’anneau pour  $l = 25$ .



## 5.4 Simulation dynamique

Le calcul des modes de Bogolyubov nous permet de dire sous quelles conditions un condensat est énergétiquement instable, mais ne nous renseigne pas sur son évolution dynamique. Dans cette section, nous nous intéressons à la dynamique d'un condensat piégé dans un anneau pour deux problèmes d'intérêt physique. Dans une première partie, nous étudions la stabilité d'un courant permanent en présence d'une barrière de potentiel fixe. Une telle situation a déjà été observée expérimentalement [44]. Elle a aussi fait l'objet d'une étude théorique [96], ce qui nous permettra de tester notre code dans une situation connue. Dans une deuxième section, nous nous intéressons à un problème plus proche des expériences envisagées dans l'équipe : nous étudions la possibilité de créer un courant permanent dans un piège en anneau en faisant tourner une perturbation, qui pourra prendre la forme d'une déformation elliptique du piège ou bien d'une barrière de potentiel de faible hauteur.

L'étude de la dynamique du condensat sera réalisée à l'aide d'un code de simulation numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii écrit pendant ma thèse, dont l'implémentation est décrite dans l'annexe A.

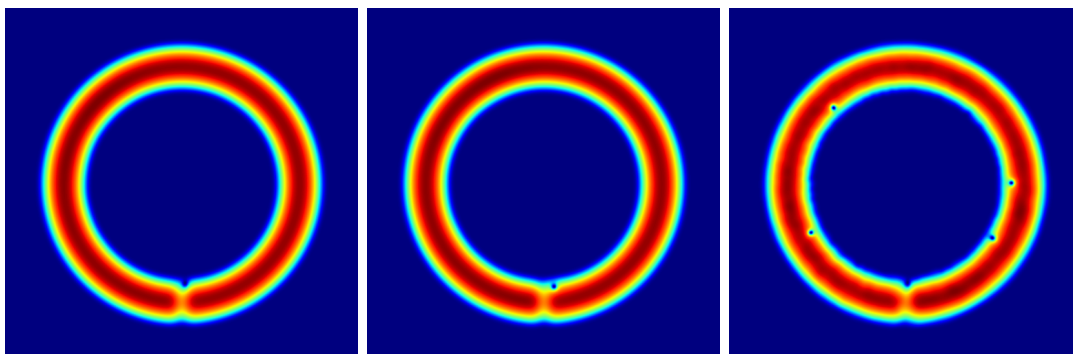
### 5.4.1 Anneau avec une barrière localisée

Nous avons cherché à tester notre code de simulation dynamique avec un problème déjà connu [96], la stabilité d'un courant permanent dans un anneau en présence d'une barrière de potentiel. Ce problème a également déjà été étudié expérimentalement [44, 104]. Le système étudié est ici un anneau 2D, dans lequel circule initialement un courant permanent de circulation  $l$ . On se place dans le système de coordonnées sans dimensions pour cette étude. Le potentiel de piégeage de l'anneau vaut :

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \quad (5.21)$$

avec le rayon de l'anneau  $r_0 = 20$ . La fonction d'onde initiale est donnée par  $\psi_0(r,\theta) = \psi_0(r)e^{il\theta}$ . Elle est calculée numériquement en prenant d'abord une gaussienne centrée sur  $r_0$  pour  $\psi_0(r)$  et en appliquant la méthode d'évolution en temps imaginaire. On superpose ensuite au potentiel de piégeage de l'anneau une barrière de potentiel que l'on branche en un temps  $\tau_b$ , le potentiel dépendant du temps prenant la forme  $V(x,y,t) = b(t)e^{-\left(\frac{(x-r_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}$  avec  $\sigma_x = 4, \sigma_y = 1$  et  $b(t) = b_0 \frac{1 - \cos(\pi t / \tau_b)}{2}$  pour  $t \leq \tau_b$  et  $b(t) = b_0$  pour  $t \geq \tau_b$ . Une telle barrière pourrait être réalisée expérimentalement par un faisceau laser focalisé désaccordé vers le bleu.

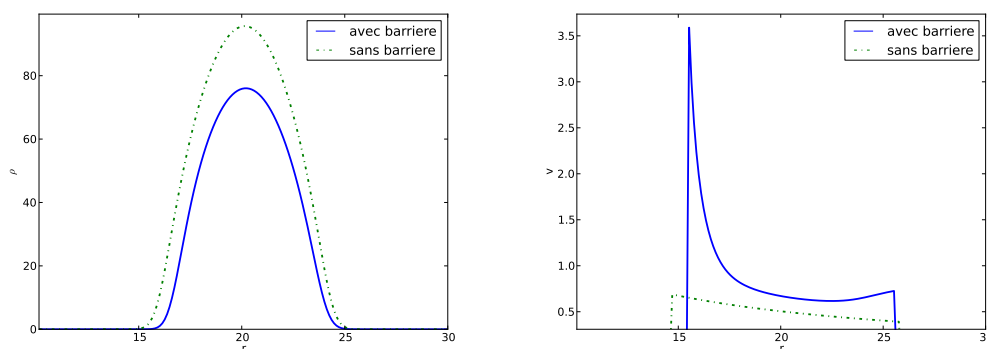
Nous avons fait fonctionner les simulations avec un potentiel chimique  $\mu = 10$  et une circulation  $l = 20$ , en branchant la barrière en un temps  $\tau_b = 20$ . Pour ces valeurs, nous sommes dans le régime de Thomas-Fermi, et nous voyons l'apparition d'une instabilité pour une hauteur de barrière critique  $b_c = 1,65$ . Des images montrant l'effet de cette instabilité sur la fonction d'onde sont présentées sur la figure 5.12. Elle se manifeste par l'entrée de vortex dans l'anneau par le bord intérieur. Ces vortex orbitent ensuite à l'intérieur de l'anneau. Ce résultat est similaire à celui observé dans l'article [96].



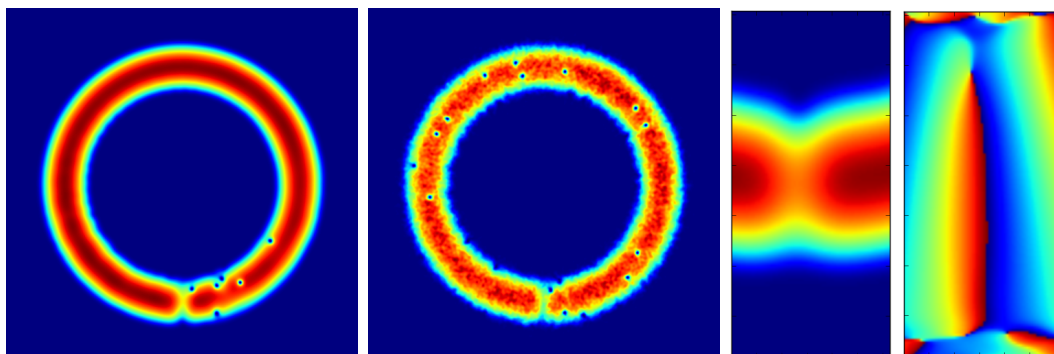
**Figure 5.12 — Barrière fixe.** Ces images montrent l'apparition d'une instabilité pour une hauteur de barrière  $b_0 = 1.7$ . Après l'établissement de la barrière, on voit un vortex pénétrer dans l'anneau depuis l'intérieur. Ce vortex orbite alors au bord de l'anneau, suivi par d'autres vortex.

On peut remarquer que lorsque la barrière est proche de la barrière critique, les vortex mettent beaucoup de temps à entrer dans l'anneau (plusieurs centaines de périodes temporelles  $\omega_0^{-1}$ ).

Le calcul du spectre de Bogolyubov prédit que le flux devient instable si la vitesse dépasse une certaine vitesse critique, qui est donnée en système de coordonnées sans dimension par  $v_c = \sqrt{2\mu}^{\frac{1}{6}}$ , voir Eq.(5.19). Pour vérifier que la hauteur de la barrière de potentiel pour laquelle on a instabilité correspond à un dépassement de la vitesse critique, nous pouvons regarder la densité  $\rho(r)$  et la vitesse  $v(r)$  au niveau de la barrière. Au début de la simulation, lorsque la hauteur de la barrière est nulle, le champ de vitesse est donné par  $v(r) = \frac{l}{r}$ . La forme du champ de vitesse une fois que la barrière a atteint



**Figure 5.13 — Barrière fixe.** Ces deux graphes montrent respectivement la densité et la vitesse du condensat au niveau de la barrière, avant et après son établissement. On constate que la distribution de vitesse avec la barrière n'est plus du tout en  $\frac{1}{r}$ , et que la vitesse au niveau des bords de l'anneau augmente de façon très importante. On constate également une asymétrie entre le bord intérieur et le bord extérieur de l'anneau, qui est causée par la force centrifuge et est même visible sur la distribution en densité.



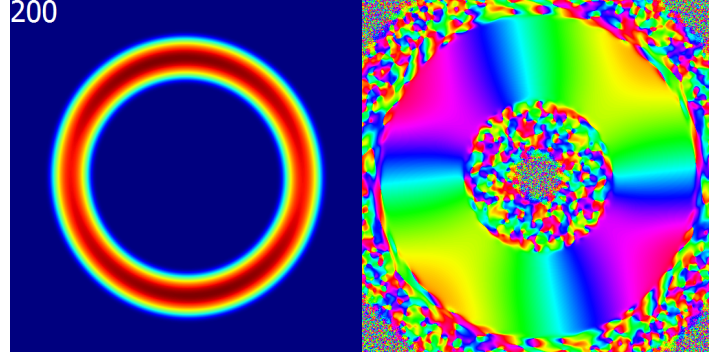
**Figure 5.14 – Barrière fixe.** Les deux images à gauche montrent la répartition des vortex pour deux temps d'évolution, pour une barrière de hauteur  $b_0 = 2,5$ . Dans la première image ( $t = 60$ ) on voit l'entrée d'un anti-vortex par l'extérieur (petite déplétion de la densité). Plusieurs vortex sont déjà rentrés par l'intérieur. Dans la seconde image ( $t = 400$ ), les vortex se sont multipliés. Les deux images de droite montrent la distribution de densité et la phase au voisinage d'une barrière de hauteur  $b_0 = 1,6 < b_c$  lors de l'approche d'un vortex par l'intérieur.

sa hauteur maximale est montrée sur la figure 5.13. Pour des raisons de conservation du flux, on peut s'attendre à ce que la vitesse au niveau de la barrière augmente quand celle-ci est mise en place. Mais cette augmentation n'est pas uniforme, et la vitesse augmente beaucoup plus sur les bords de l'anneau qu'au centre. Une estimation de la vitesse critique pour  $\mu = 10$  donne  $v_c = 2.08$ . En tenant compte de la chute de la densité pic observée au niveau de la barrière sur la figure 5.13, on a  $\mu_{loc} = 8$ , ce qui change à peine  $v_c$ , soit  $v_c = 2$ . On observe bien que la vitesse excède cette vitesse critique sur le bord intérieur de l'anneau, au niveau de la barrière, voir Fig. 5.13.

Quand la hauteur de la barrière dépasse une deuxième hauteur critique  $b_{c2}$ , des antivortex commencent à rentrer sur le bord extérieur de l'anneau, comme on peut le voir sur la figure 5.14, à gauche. Cela correspond à la situation où la vitesse à la périphérie extérieure de l'anneau excède à son tour  $v_c$ . Lorsque que le nombre de vortex devient important, il se produit un chauffage dû à l'émission de phonons causée par les interactions entre les vortex (deuxième image). Nous avons également observé l'annihilation de paires vortex-antivortex. Juste en dessous de la hauteur de barrière critique, pour  $b_0 = 1,6$ , on peut voir un vortex approcher de l'anneau sur la figure 5.14, à droite. Il ne parvient cependant pas à y entrer, la barrière étant légèrement trop faible.

### 5.4.2 Piège en rotation

Dans cette partie, nous étudions la possibilité de créer un courant dans un piège en anneau en faisant tourner une déformation du piège avec une vitesse angulaire  $\Omega_{rot}(t)$  autour de l'axe  $z$ . Le premier cas que nous avons considéré est celui d'une anisotropie, transformant le piège en anneau en un piège de forme elliptique. L'expression du potentiel dans le référentiel tournant autour de l'axe  $z$  à une vitesse  $\Omega_{rot}(t)$  est donnée



**Figure 5.15 – Déformation elliptique en rotation.** On voit ici l'excitation d'un mode quadrupolaire, similaire au mode  $l = 2$  de la figure 5.8. L'image est prise à  $t = 200$  pour des paramètres  $\tau_{\text{rot}} = 200$ ,  $\Omega_{\text{rot}} = 0,1$ ,  $\mu = 8$  et  $r_0 = 20$ . L'ellipticité de la distribution de densité n'est pas visible sur l'image, elle est de l'ordre de l'ellipticité du potentiel  $\epsilon = 0.0125$ .

par :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \left( \sqrt{\left(\frac{x}{1+\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-\epsilon}\right)^2} - r_0^2 \right)$$

avec  $\epsilon$  le paramètre d'anisotropie, qui vaut  $\epsilon = 1.25 \times 10^{-2}$  dans les simulations qui vont suivre.

La différence  $\delta V$  par rapport au potentiel du piège en anneau est donnée au premier ordre en  $\epsilon$  par :

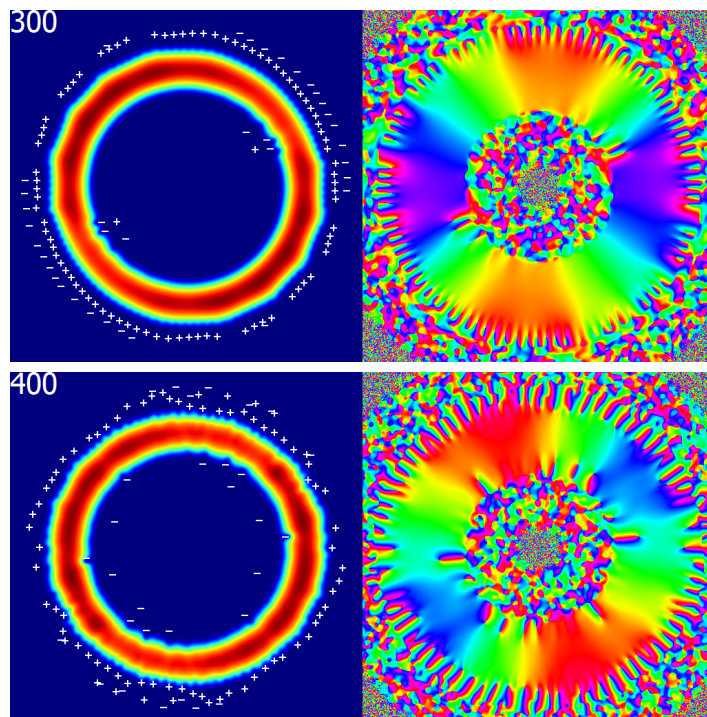
$$\delta V(x,y) = m\omega_0^2 \epsilon \frac{r - r_0}{r} (y^2 - x^2). \quad (5.22)$$

En coordonnées polaires, cette perturbation s'écrit  $\delta V = m\omega_0^2 \epsilon (r - r_0) r (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$ , soit  $\delta V \propto \cos 2\theta \propto e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}$ . La perturbation couple donc des modes séparés de  $l = \pm 2$ . Ce type de potentiel pourrait être réalisé expérimentalement dans notre piège en anneau en utilisant une onde rf de polarisation elliptique [45] ou bien à l'aide de bobines supplémentaires [48].

Une autre possibilité est d'utiliser une barrière de potentiel telle qu'on peut en obtenir en utilisant un faisceau laser focalisé désaccordé vers le bleu. Pour un faisceau gaussien le potentiel de la barrière dans le référentiel tournant est donné par :

$$\delta V(x,y) = \epsilon e^{-\left(\frac{(x-r_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}. \quad (5.23)$$

**Mise en rotation à l'aide d'une déformation elliptique** Nous étudions ici la possibilité d'induire un courant dans un piège en anneau en lui appliquant une déformation elliptique que l'on met progressivement en rotation. On part d'un état de circulation nulle, dans un piège immobile (à  $t = 0$ , on a  $L_z = 0$  et  $\Omega_{\text{rot}} = 0$ ). Dans la première simulation, on augmente  $\Omega_{\text{rot}}$  jusqu'à une valeur finale  $\Omega_{\text{rot,f}}$  en un temps  $\tau_{\text{rot}}$ . Le potentiel chimique vaut  $\mu = 8$  et le rayon de l'anneau vaut  $r_0 = 20$  en unités sans



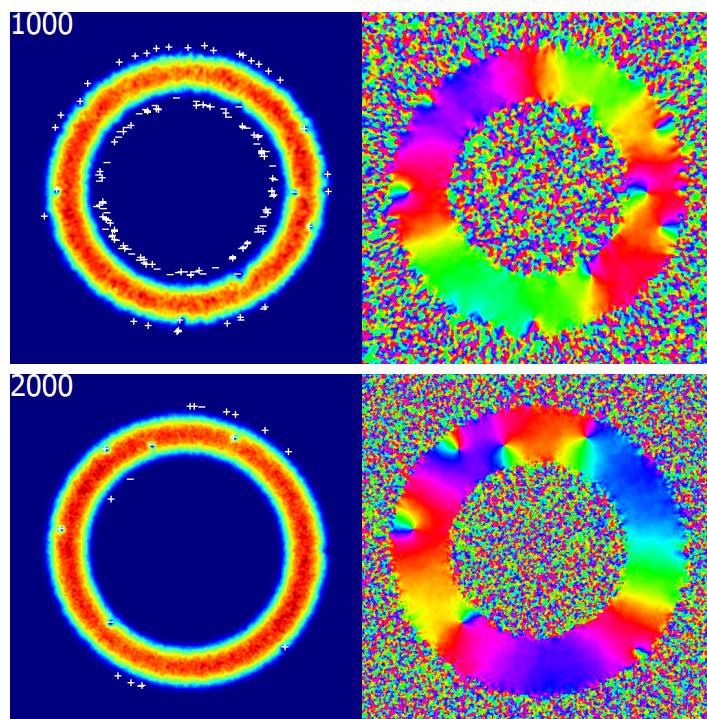
**Figure 5.16 – Déformation elliptique en rotation.** Les deux images ci-dessus montrent la fonction d’onde aux instants  $t = 300$  et  $t = 400$ , pour  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,1$ ,  $\mu = 8$  et  $r_0 = 20$ . On constate l’apparition d’une instabilité hydrodynamique correspondant à l’arrivée de nombreux vortex sur l’extérieur de l’anneau, ainsi que l’arrivée de quelques anti-vortex isolés sur la face intérieure de l’anneau.

dimension. Les conditions sont les mêmes que dans la section 5.3.4, figure 5.9, sur le calcul des modes de Bogolyubov dans un anneau.

D’après les calculs d’excitation du spectre de Bogolyubov, on s’attendrait pour les paramètres choisis à une vitesse de rotation critique de  $\Omega_c = 0,08\omega_0$ , voir figure 5.9. Nous avons fait des simulations pour cette vitesse. Au départ, on observe une excitation du mode  $l = 2$ , comme cela est également évident dans le cas de  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,1\omega_0$  présenté sur la figure 5.15. On peut comparer en effet la phase obtenue avec celle du mode  $l = 2$  présentée à la figure 5.8, à droite. Comme nous l’avons vu plus haut, on s’attendait à ce type d’excitation d’après la symétrie de la perturbation au potentiel, en  $y^2 - x^2$ . Au premier ordre de la théorie des perturbations, ce potentiel couple entre eux les modes de  $l$  différant de  $\delta l = \pm 2$ . Il est donc logique que le mode  $l = 2$  soit excité en premier.

Cependant, même après un temps d’évolution long, on n’observe pas de création de vortex pour une vitesse de rotation  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,08\omega_0$ . Des excitations de type modes de surface sont bien présentes à la périphérie de l’anneau, mais ne suffisent pas à introduire des vortex qui permettent d’augmenter le moment cinétique. La vitesse critique d’apparition des modes de surface calculée par la méthode de Bogolyubov donne bien un seuil correct, mais il nous faut tourner plus rapidement pour introduire un moment cinétique par l’excitation de vortex.

En faisant varier  $\Omega_{\text{rot},f}$ , nous avons mis en évidence une vitesse critique d’apparition



**Figure 5.17 – Déformation elliptique en rotation.** Les paramètres sont  $\mu = 8$ ,  $r_0 = 20$ ,  $\epsilon = 0.0125$  et  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,1$ . Pour des temps plus élevés, respectivement  $t = 1000$  et  $t = 2000$ , il y a eu création de phonons, ce qui se manifeste par du bruit dans la fonction d'onde. La présence de ces phonons a permis à quelques vortex et anti-vortex de rentrer dans l'épaisseur de l'anneau. Il y a circulation d'un courant sur les bords, mais il est toujours possible de trouver un chemin autour de l'anneau sur lequel la circulation est nulle.

des vortex qui vaut  $\Omega_{\text{c,vor}} = 0,1\omega_0$ . Pour une valeur de  $\Omega_{\text{rot},f}$  égale à cette vitesse critique, l'évolution du condensat est encore lente. Le premier effet constaté est l'excitation d'un mode quadrupolaire  $l = 2$  dans le référentiel tournant, comme cela est montré dans la figure 5.15.

Pour des temps plus élevés, on voit l'apparition d'instabilités à la surface de l'anneau, qui sont montrées dans la figure 5.16. Sur le côté extérieur, on a des modes similaires à celui vu dans la figure 5.10, qui correspondent à l'arrivée de nombreux vortex espacés régulièrement qui restent bloqués au niveau de la surface. On peut voir ce chapelet de vortex comme un mode de surface. L'excitation de ce type de mode correspond à ce qui était prévu par l'étude des spectres de Bogolyubov. Remarquons cependant que la période de l'excitation de surface suggère plutôt une excitation de type  $l \sim 80$ . Il se trouve que cette excitation est celle attendue pour une vitesse de rotation  $\Omega_{\text{rot}} = 0.1$ , sur la branche basse des modes de Bogolyubov de la figure 5.9. En revanche, sur la surface intérieure, on observe plutôt l'approche de vortex isolés. En effet, les modes de surface interne réclameraient une vitesse de rotation plus élevée pour être excités efficacement, voir figure 5.9.

En l'absence de mécanisme de dissipation, le comportement habituel d'un vortex

est de se déplacer le long d'une ligne d'égale densité [105]. Dans notre cas, il y a dissipation à cause des interactions entre vortex, ce qui se manifeste par l'émission de phonons et permet aux vortex d'entrer dans l'épaisseur de l'anneau. L'entrée d'un vortex dans l'épaisseur de l'anneau fait augmenter  $\langle L_z \rangle$  d'une fraction de  $\hbar$ . On arrive alors à des situations comme celles montrées dans la figure 5.17, pour lesquelles  $\langle L_z \rangle$  est strictement positif mais il est toujours possible de trouver un chemin de circulation nulle autour de l'anneau. Pour que  $\langle L_z \rangle$  augmente de multiples de  $\hbar$ , il faut que des vortex traversent complètement l'anneau.

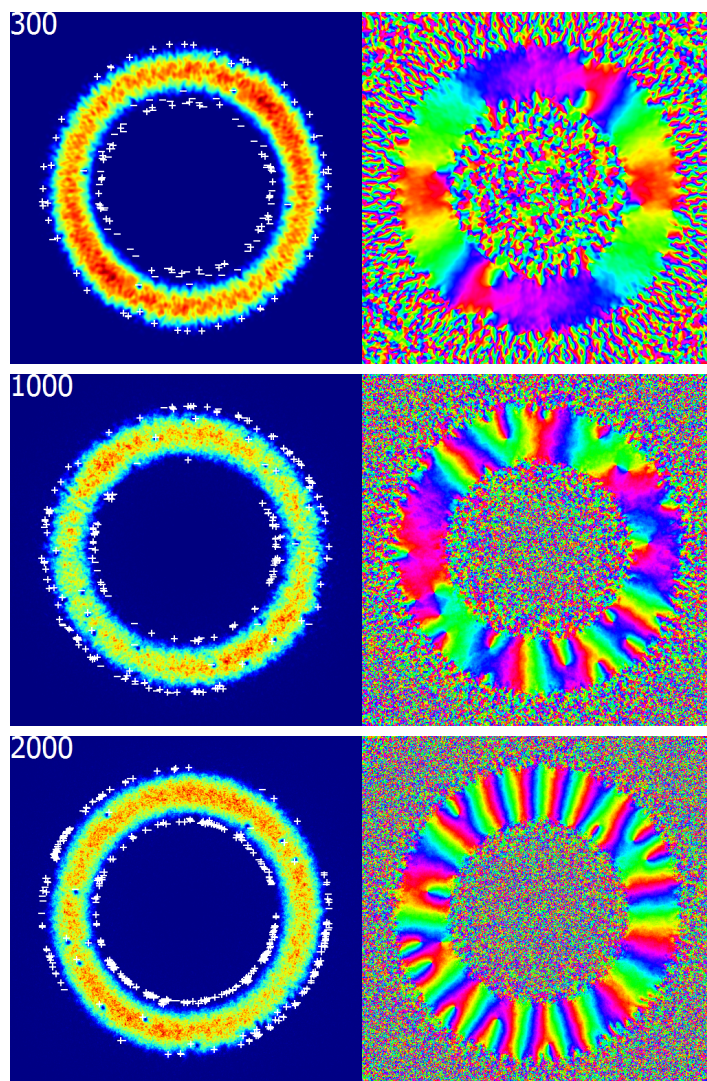
Il y a en réalité deux façons d'augmenter la circulation globale dans l'anneau. On peut avoir un vortex ou anti-vortex qui traverse l'anneau, ou bien l'annihilation d'une paire vortex-anti-vortex en un soliton [106] à l'intérieur de l'anneau, comme on peut en voir sur la figure 5.23 dans le cas de l'excitation par une barrière en rotation. On arrive alors dans une situation dans laquelle il n'est plus possible de trouver un chemin faisant le tour de l'anneau pour lequel la circulation est nulle. En simulant un cas où la vitesse de rotation du potentiel est plus élevée ( $\Omega_{\text{rot},f} = 0,14$ ), nous avons observé une telle situation dans laquelle un courant permanent circule dans l'anneau. La figure 5.18 montre des images de la fonctions d'onde à différents instants pour cette valeur de  $\Omega_{\text{rot},f}$ . Notons que la vitesse de rotation utilisée est même supérieure à la vitesse du son, ce qui produit une onde de choc aux temps courts, comme c'est aussi le cas pour  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,15$ , voir la figure 5.21 pour  $t = 150$ .

La figure 5.19 montre l'évolution du moment cinétique moyen  $\langle L_z(t) \rangle$  pour la vitesse de rotation  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,14$ . Cette vitesse correspond à une circulation  $l = 56$ . Le moment cinétique moyen est obtenu en calculant  $\langle L_z \rangle = \frac{\langle \psi | L_z | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ . On y voit que l'établissement du courant permanent se fait lentement, à l'échelle de quelques centaines de périodes radiales. Cela peut être une limite pour exciter efficacement une rotation dans l'anneau dans une expérience : avec une période de 500 Hz, on atteindrait le plateau en un peu moins d'une seconde, ce qui impose un bon contrôle de l'expérience sur cette durée.

Il est possible de calculer la circulation  $l(r)$  le long d'un contour de rayon  $r$  en intégrant la dérivée de la phase le long de ce contour, ce qui donne  $l(r) = \frac{1}{2\pi} \int \partial_\theta \phi(r, \theta) d\theta$  où  $\phi(r, \theta)$  est la phase de la fonction d'onde. En pratique, on remplace l'intégrale par une somme des  $\phi(r, \theta + d\theta) - \phi(r, \theta)$  pour  $\theta$  allant de 0 à  $2\pi$ . La différence de phase  $\phi(r, \theta + d\theta) - \phi(r, \theta)$  entre deux points est définie modulo  $2\pi$ , et on choisit la valeur la plus petite à chaque fois, en faisant l'hypothèse que la phase est continue. On obtient alors les résultats montrés dans la figure 5.20. Aux temps courts, la circulation est limitée au bords de l'anneau. Au temps plus long, la répartition de la circulation tend vers celle d'un solide en rotation.

Si on augmente encore la vitesse de rotation, on arrive au cas montré sur la figure 5.21, pour lequel on ne parvient pas à établir un courant permanent malgré une vitesse angulaire d'excitation  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,15$  plus grande que dans la simulation précédente.

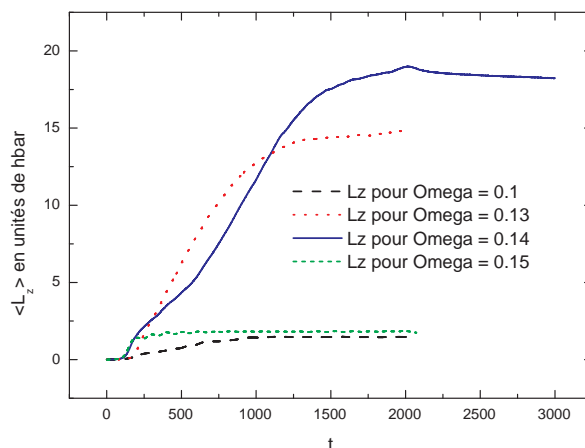
**Mise en rotation à l'aide d'une barrière tournante** Nous avons également simulé une situation dans laquelle on fait tourner une barrière gaussienne le long de l'anneau. Nous avons regardé le cas d'une barrière relativement large ( $\sigma_x = \sigma_y = 10$  pour un rayon de Thomas Fermi  $R = 4$ ), et peu profonde (d'amplitude  $b_0 = 0,5$ ), le



**Figure 5.18 — Déformation elliptique en rotation.** Les paramètres sont  $\mu = 8$ ,  $r_0 = 20$ ,  $\epsilon = 0.0125$  et  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,14$ . Les trois images montrent la densité et la phase de la fonction d'onde aux instants  $t = 300, t = 1000$  et  $t = 2000$ . Sur la première image, quelques anti-vortex sont rentrés dans l'épaisseur de l'anneau par l'intérieur, et la circulation au milieu de l'anneau est nulle. Sur les deux images suivantes, on constate une circulation non nulle en observant la phase.

cas d'une barrière profonde ayant déjà été traité dans [38]. Cette faible profondeur ne modifie que très légèrement le potentiel chimique local dans l'approximation de densité locale (il passe de  $\mu = 8$  à  $\mu = 7,5$ ), ce qui fait que le spectre de Bogolyubov calculé reste valable en première approximation. Le résultat est montré sur le graphe 5.22, pour une simulation dans laquelle on fait croître linéairement la vitesse de rotation de la perturbation de façon à avoir  $\Omega_{\text{rot}} = 0,1$  pour  $t = 1000$ . On constate l'apparition d'une instabilité aux alentours de  $t = 850$  soit  $\Omega_{\text{rot}} = 0,085$ , alors que la vitesse est pourtant inférieure à la vitesse critique trouvée dans le cas d'une déformation elliptique. Cette valeur est plus conforme à celle attendue d'après le spectre de Bogolyubov,  $\Omega_c = 0,08$ .



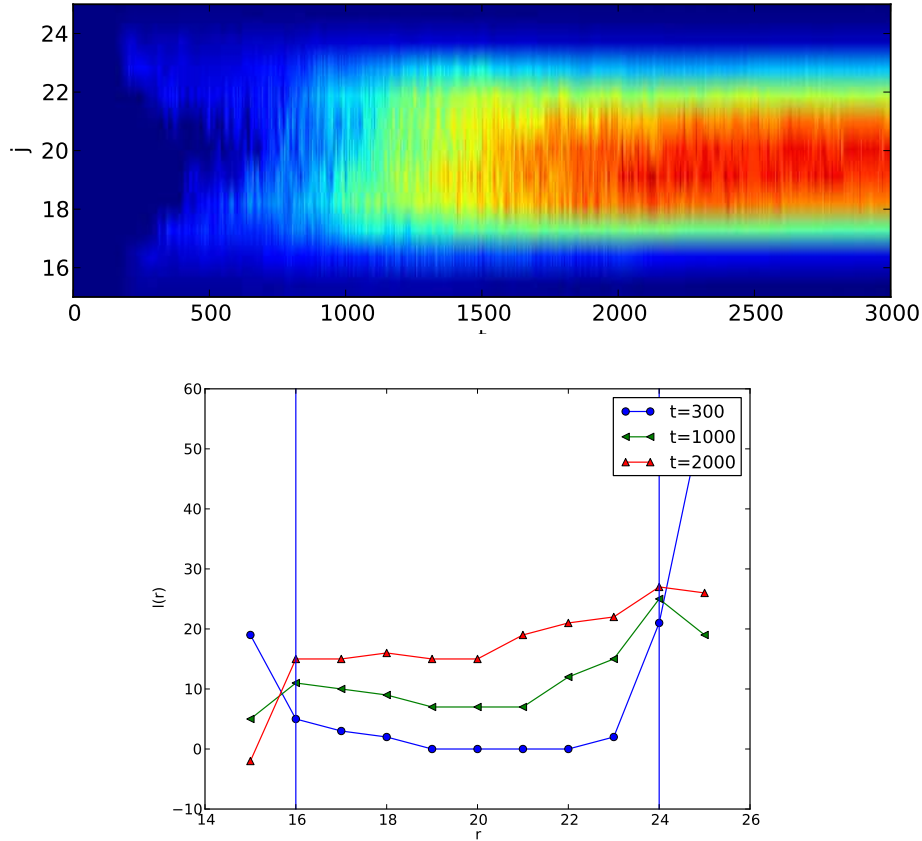


**Figure 5.19 – Déformation elliptique en rotation.** Ce graphe montre l'évolution de  $\langle L_z \rangle$  en fonction du temps en unités sans dimension. Il est obtenu en calculant numériquement  $\frac{\langle \psi | L_z | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ . Les traits verticaux indiquent les instants où ont été prises les images de la figure 5.18. On constate que l'établissement du courant prend du temps. Pour la fréquence de confinement dans la direction radiale de 500 Hz considérée, il faut environ 0,6 secondes pour que la circulation se stabilise. Dans cette simulation, l'anisotropie du potentiel est descendue à zéro après  $t = 2000$ , mais le courant continue de circuler.

Des anti-vortex rentrent dans l'épaisseur de l'anneau par l'intérieur, et des vortex y rentrent par l'extérieur. Deux mécanismes expliquent l'augmentation du moment cinétique moyen  $\langle L_z \rangle$  au cours du temps : la traversée de l'anneau par des (anti-)vortex ( $+\hbar$  par atome), ou l'annihilation d'un anti-vortex entré par l'intérieur avec un vortex entré par l'extérieur, ce qui augmente également le moment cinétique par atome de  $\hbar$  ( $\hbar/2$  par (anti-)vortex). En ce qui concerne ce second mécanisme, on observe que ces annihilation s'accompagnent de la formation d'un soliton, voir figure 5.23.

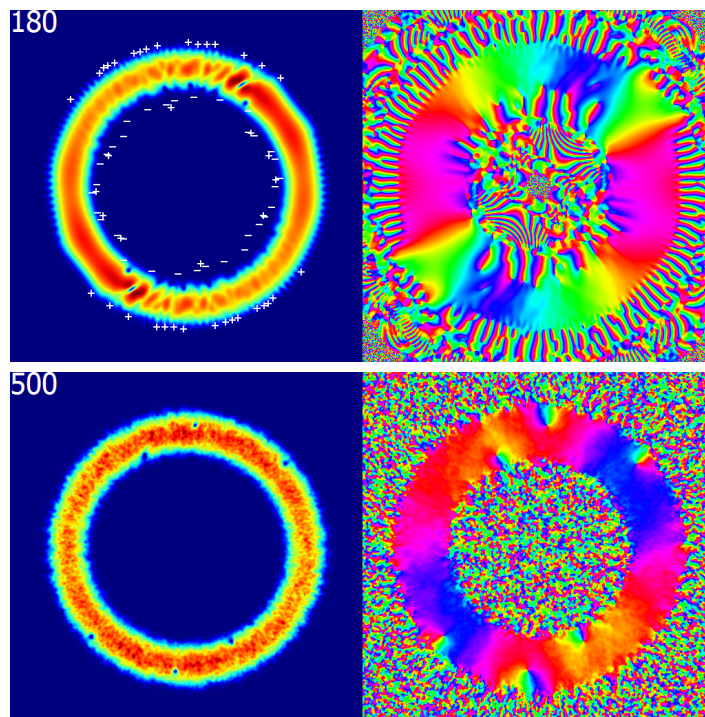
Le premier mécanisme se déroule en fait lorsque les vortex et anti-vortex entrés dans l'anneau commencent à interagir. En effet, on observe que la traversée de l'anneau est facilitée lorsqu'un vortex s'apparie avec un anti-vortex, la paire de déplaçant alors quasi linéairement dans l'anneau, et le traversant. Le vortex arrivant ainsi à la surface interne (ou respectivement l'anti-vortex arrivant à la surface externe) se désintègre alors avec le réservoir d'anti-vortex (respectivement de vortex) s'y trouvant. On peut comprendre la nécessité de ce mécanisme en se rappelant qu'un vortex isolé suit une ligne de densité constante [105]. Un vortex entré par l'extérieur à la faveur de dissipation par des phonons doit donc rester simplement centré dans l'épaisseur de l'anneau, sans le traverser. Pour que la traversée ait lieu, il doit être accompagné par un partenaire anti-vortex.

La figure 5.24 montre le moment cinétique moyen communiqué au gaz lors de la rotation de la barrière. Tant que la vitesse de rotation est inférieure à la vitesse critique



**Figure 5.20 – Déformation elliptique en rotation.** Les trois courbes sur le graphe ci-dessus représentent la circulation  $l(r)$  le long d'un contour circulaire de rayon  $r$  dans l'anneau, aux instants  $t = 300, t = 1000$  et  $t = 2000$ . Les paramètres sont  $\mu = 8$ ,  $r_0 = 20$ ,  $\epsilon = 0.0125$  et  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,14$ . La circulation est calculée en intégrant le gradient de la phase sur le contour. Les lignes verticales indiquent l'emplacement de la surface de l'anneau. L'image du dessus montre l'évolution de la densité de courant  $j(r)$  en fonction du temps. L'axe des abscisse représente le temps et celui des ordonnées représente  $r$ .  $j(r)$  est calculé par la formule  $j(r) = \frac{l(r)}{r} \rho(r)$  où  $\rho(r)$  est la densité moyenne sur le cercle de rayon  $r$ . Cette image permet de voir que l'établissement du courant commence par les bords.

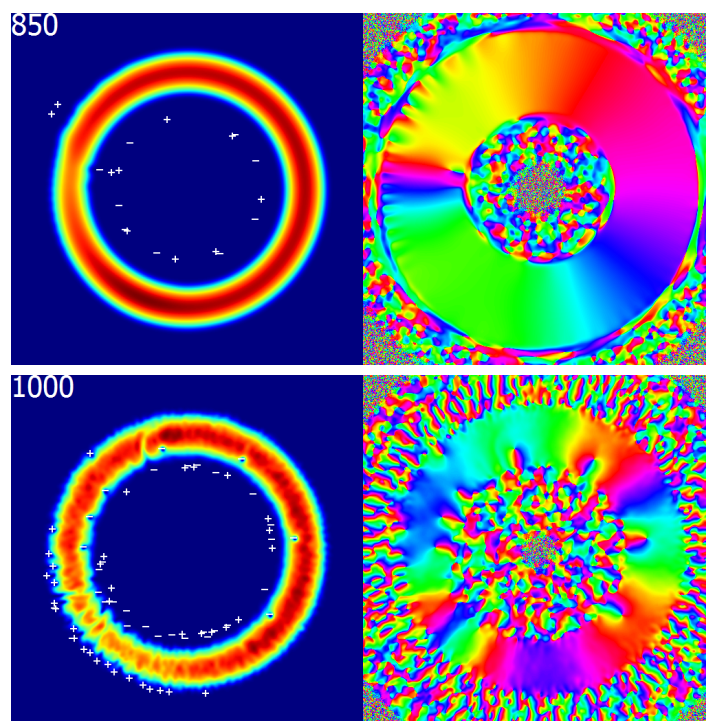
$\Omega_c$ ,  $\langle L_z \rangle$  reste nul. Lorsque  $\Omega_{\text{rot}}$  dépasse  $\Omega_c$ , le moment cinétique commence à augmenter. Si l'intégralité de l'excitation était transférée au condensat, on pourrait attendre une augmentation linéaire de  $\langle L_z \rangle$  avec la vitesse de rotation, donc ici avec le temps, avec une pente identique à celle de  $r_0^2 \Omega_{\text{rot}}$ . C'est ce qui est indiquée par la droite en trait pointillés rouge, donnant  $r_0^2 (\Omega_{\text{rot}} - \Omega_c)$ . On constate que l'augmentation de  $\langle L_z \rangle$  se fait avec un taux inférieur. Cela peut être dû au fait que la dynamique d'entrée des vortex est plus lente que l'accroissement de la vitesse angulaire dans la simulation, de sorte que le gaz n'a pas le temps de suivre l'augmentation de la vitesse angulaire. Enfin, lorsque la vitesse de rotation devient trop élevée, on ne parvient plus à transférer efficacement



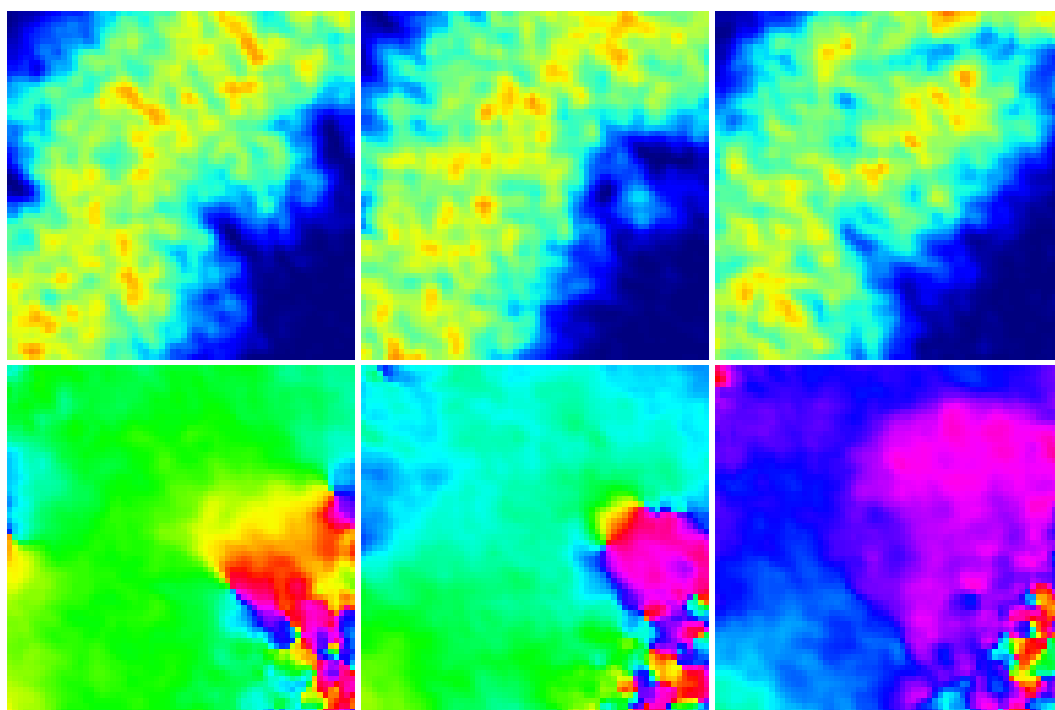
**Figure 5.21 – Déformation elliptique en rotation.** Les paramètres sont  $\mu = 8$ ,  $r_0 = 20$ ,  $\epsilon = 0.0125$  et  $\Omega_{\text{rot},f} = 0,15$ . On a apparition d’une instabilité à  $t = 150$ , alors que  $\tau_{\text{rot}} = 200$ . A  $t = 500$ , on n’a pas beaucoup plus de circulation qu’à vitesse  $0,1$ . Il semble que si on va trop vite on ne crée pas de circulation, peut être par un effet de moyennage du potentiel.

du moment cinétique au condensat, comme on l’avait également constaté dans le cas de la mise en rotation par une déformation elliptique. Cela explique la baisse du moment cinétique lorsque  $t > 1900$ , soit  $\Omega_{\text{rot}} = 0,19$ . En fait, le point d’inflexion de la courbe nous donne la vitesse de rotation qui couple le mieux les excitations au condensat. On trouve que la pente est maximale pour  $\Omega_{\text{rot}} \simeq 0.13$ .

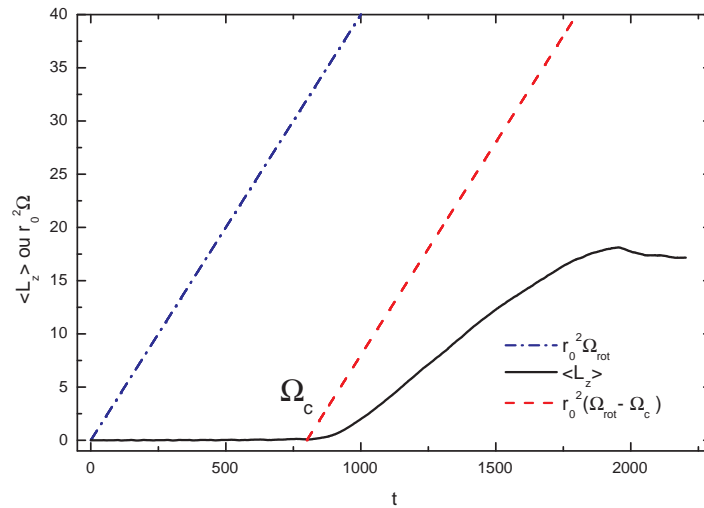
En conclusion, il semble que cette méthode permette de faire rentrer de la circulation dans l’anneau de façon plus efficace que la méthode de la déformation elliptique en rotation. Cela s’explique dans la mesure où l’introduction de la barrière offre un canal privilégié pour la création et l’entrée de vortex et d’anti-vortex. Il reste cependant à étudier plus quantitativement le mécanisme de formation des vortex pour conclure de façon définitive sur les deux méthodes. L’augmentation linéaire de la vitesse de rotation dans le cas de la barrière n’est en effet pas directement comparable au cas où la vitesse de rotation est maintenue à une valeur finale fixe, en raison de la dynamique d’établissement du moment cinétique. Cela justifie pleinement l’intérêt de l’étude expérimentale.



**Figure 5.22 – Barrière en rotation.** Les images ci-dessus montrent la densité et la phase de la fonction d’onde aux instants  $t = 850$  et  $t = 1000$  de la simulation.



**Figure 5.23 – Barrière en rotation.** Ces trois images montrent la désintégration d’une paire vortex-antivortex en un soliton.



**Figure 5.24 — Barrière en rotation.** Évolution du moment cinétique moyen  $\langle L_z \rangle$  en fonction du temps. La vitesse de rotation est augmentée linéairement. On a aussi tracé, pour comparaison, la vitesse de rotation en unités de moment angulaire,  $r_0^2 \Omega_{\text{rot}}$ , ainsi que la différence entre la vitesse de rotation et la vitesse critique obtenue par le calcul de Bogolyubov,  $r_0^2 (\Omega_{\text{rot}} - \Omega_c)$ .

# Chapitre 6

## Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse constituent le démarrage d'une nouvelle thématique dans l'équipe Condensation de Bose-Einstein du LPL. Leur objectif à terme concerne l'étude des propriétés de superfluidité d'un gaz de Bose selon la dimensionnalité, en tirant parti d'une géométrie de piégeage annulaire. Cette géométrie permet en effet d'observer l'établissement et l'amortissement éventuel d'un flux d'atomes en rotation. Dans le cas d'un superfluide, le gaz en rotation doit continuer à tourner sans dissipation. Un tel courant atomique permanent a été observé en 2007 [37], mais beaucoup de points restent à comprendre, en particulier en ce qui concerne l'établissement du courant par l'entraînement du fluide par un potentiel en rotation. Afin de pouvoir mener ces études expérimentales, nous avons construit un nouveau montage, qui a permis l'observation d'une condensation de Bose-Einstein de  $2 \times 10^5$  atomes de rubidium 87, produit en un peu plus de trente secondes. Lors de la conception de ce montage, nous avons pris en compte la nécessité d'avoir un très bon accès optique pour observer le condensat et l'anneau. Le piège final est un piège magnétique quadrupolaire, bouché par un faisceau laser focalisé. Ce choix a été guidé par la compatibilité de ce piège avec le piège annulaire final, qui combine justement un champ magnétique quadrupolaire, un champ radio-fréquence (RF) et une onde stationnaire [48]. Le design des bobines permet d'atteindre un gradient de champ élevé de 436 G/cm, ce qui autorise une évaporation rapide et laisse toute liberté quant à l'ajustement des paramètres du piège annulaire.

Le nouveau montage comporte un transport mécanique des bobines du piège magnétique, qui assure le transfert des atomes d'une zone de collection dans un piège magnéto-optique (PMO 3D) à la zone de refroidissement ultime et de piégeage annulaire. Cet élément a été délicat à mettre en œuvre et à régler. Même si les performances actuelles devront être améliorées, le système fonctionne de façon robuste et présente l'énorme avantage de dégager complètement l'accès optique autour de la cellule science, où sont pratiquées les expériences, en raison du retour hors de cette zone des bobines de transport. La limite actuelle de l'efficacité du transfert est liée à la température initiale des atomes, encore trop élevée par rapport au rayon interne du tube de pompage différentiel. Ce point devrait être amélioré prochainement par l'installation de nouvelles

bobines, en tube de cuivre creux, refroidies à eau, et maintenues par un support en résine, qui empêchera l'établissement de courant de Foucault. Il sera alors possible de refroidir davantage les atomes avec une mélasse optique, et de les pomper optiquement pour augmenter le nombre d'atomes piégés.

Une fois les bobines remplacées, le transport devrait pouvoir se faire quasiment sans perte : en effet, le niveau de vide dans l'enceinte du piège magnéto-optique est déjà très bon, grâce à la séparation de cette chambre de la source d'atomes, fournie par un piège magnéto-optique bidimensionnel (PMO 2D). Ce dispositif permet d'allier un temps de chargement réduit avec une bonne qualité de vide dans l'enceinte du PMO 3D. Le nouveau montage comporte également une source laser développée dans l'équipe, qui assure l'ensemble du refroidissement des PMO 2D et 3D. Cette source tire parti des développements de la technologie télécom, aux longueurs d'ondes voisines de 1550 nm. Une diode laser télécom est amplifiée et doublée en fréquence pour atteindre la longueur d'onde de la raie D2 du rubidium. Les performances de cette source sont très bonnes, et grâce à un cristal de ppLN de 50 mm de long, on obtient 2 W à 780 nm pour une puissance de pompe de 10 W à 1560 nm. La nouvelle source a joué un rôle déterminant dans les bonnes performances de stabilité de l'expérience aujourd'hui.

Les perspectives de l'expérience sont prometteuses. Depuis l'obtention du condensat, l'équipe a réussi à réaliser la première étape vers le confinement du gaz dans un anneau. En effet, les atomes ont pu être transférés dans un piège quadrupolaire habillé par le champ RF, les atomes occupant alors la partie inférieure d'une bulle [54]. Après transfert, un condensat est toujours observable. Il restera à ajouter à ce piège une onde stationnaire pour obtenir l'anneau désiré. Par la suite, un point clé sera le développement d'outil de diagnostic du système dans l'anneau, par temps de vol, imagerie *in situ* ou spectroscopie RF par exemple.

En parallèle de la construction de l'expérience, j'ai réalisé une étude théorique du système. Inspirés par les expériences pionnières de l'ENS sur les vortex [107], nous avons en effet proposé d'établir une rotation dans le superfluide par la mise en rotation d'une déformation du potentiel, par exemple une petite ellipticité [48]. Pour déterminer la vitesse de rotation critique, j'ai d'abord calculé le spectre de Bogolyubov des excitations dans un tube et dans un anneau. On voit clairement apparaître l'effet de la force centrifuge dans le cas de l'anneau, qui disymétrise les excitations. Ces calculs ont été complétés par des simulations de l'équation de Gross Pitaevskii dépendant du temps. Nous avons observé que la méthode de mise en rotation influait sur le moment cinétique que l'on peut transférer. La rotation d'une barrière localisée, en créant un canal privilégié d'entrée des vortex, semble présenter une vitesse critique plus faible que la rotation d'une ellipticité.

Ces simulations seront très utiles pour prédire et interpréter les résultats expérimentaux. Une extension possible concerne la prise en compte d'effets de température finie. En effet, en présence d'une fraction thermique, la mise en rotation peut être facilitée par l'échange de particules entre le condensat au repos et le gaz thermique en rotation [100].

En conclusion, cette thèse constitue le point de départ d'un nouveau champ d'expériences. La géométrie annulaire est particulièrement adaptée à l'étude de la super-

fluidité, mais elle permet aussi d'approcher d'autres types de physique. Elle est par exemple naturelle pour la réalisation d'un gyromètre, et la possibilité de produire plusieurs anneaux parallèles permet de tester des phases relatives par interférométrie [31]. Enfin, on peut espérer produire dans un piège annulaire des superpositions macroscopiques de différents états de rotations [41], réalisant ainsi un état NOON [40]. Ceci n'est qu'un exemple. Le lien fort de ces expériences de physique atomique avec les systèmes de matière condensée seront sans aucun doute source d'inspiration pour les expériences futures.





# Annexe A

## Simulation de la dynamique d'un condensat

On s'intéressera dans cette partie à la dynamique d'un condensat à température nulle dans plusieurs situations d'intérêt physique. Notamment, on regardera ce qui se passe si on déforme l'anneau et que l'on fait tourner la déformation. On se place dans le système de coordonnées sans dimensions pour l'étude numérique. La dynamique du condensat est décrite dans ce système de coordonnées par l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\partial_t\psi(\vec{x},t) = \left[ -\frac{1}{2}\Delta + V(\vec{x},t) + g|\psi(\vec{x},t)|^2 \right] \psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t). \quad (\text{A.1})$$

On sépare le hamiltonien en deux parties,  $H_p = -\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}p^2$  où  $p$  est l'opérateur impulsion, et  $H_{pot} = V(\vec{x},t) + g|\psi(\vec{x},t)|^2$ .

### A.1 Discrétisation de la fonction d'onde

Pour pouvoir simuler numériquement l'évolution d'une fonction d'onde, on est obligé de la discrétiser dans le temps et dans l'espace. On regarde donc la fonction d'onde aux instants  $t = ndt$ , avec  $n$  entier. La fonction d'onde est discrétisée dans l'espace sur une grille en 3 dimensions, de taille  $n_x, n_y, n_z$ , avec des pas de taille  $d_x, d_y, d_z$ , et normalisée de telle sorte que  $\sum_{i_x, i_y, i_z} d_x d_y d_z |\psi_n(i_x, i_y, i_z)|^2 = N_{atomes}$  où  $N_{atomes}$  est le nombre d'atomes dans le condensat. Les conditions aux limites sont de type périodiques, imposées par la méthode de résolution qui utilise des transformées de Fourier discrètes. Cela oblige à prendre une taille de boîte telle que  $|\psi|^2$  soit négligeable au niveau des bords.

La discrétisation de la fonction d'onde en espace des positions engendre une discrétisation dans l'espace des impulsions, par l'intermédiaire de la transformée de Fourier discrète. Pour une fonction d'onde continue  $\psi(x)$ , on peut écrire  $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k) e^{ikx}$ , où  $\tilde{\psi}(k)$  est la représentation en impulsion de la fonction d'onde. Dans le système de coordonnées sans dimension, on a équivalence entre le vecteur d'onde  $k$  et l'impulsion

$p_x$ . On a une identité analogue pour une fonction d'onde discrétisée  $\psi(i_x)$  sur  $n_x$  points avec la transformée de Fourier discrète :

$$\psi(i_x) = \sum_{j=0}^{n_x-1} \tilde{\psi}(j) e^{2\pi i \frac{j i_x}{n_x}} = \sum_{j=0}^{n_x-1} \tilde{\psi}(j) e^{i \frac{2\pi}{n_x d_x} j i_x d_x}$$

En identifiant les termes dans l'exponentielle avec le cas continu, en remarquant que  $x = i_x d_x$  on trouve l'expression de l'impulsion :

$$p_x = \frac{2\pi}{n_x d_x} j = j dp$$

Le pas en impulsion,  $dp$ , est donné par  $dp = \frac{2\pi}{L}$  où  $L = n_x d_x$  est la longueur de la boîte dans laquelle se passe la simulation. Du fait de la périodicité de  $\tilde{\psi}$ , les termes en  $k > \frac{n_x}{2}$  correspondent aux impulsions négatives,  $p = (k - n_x) dp$ . Ce raisonnement se généralise facilement pour les cas 2D et 3D, et dans ces cas il est possible de n'effectuer la transformée que selon certaines dimensions, ce qui est utile pour traiter le terme en  $L_z$  quand on se place dans le référentiel tournant. On note qu'il existe un algorithme nommé FFT (Fast Fourier Transform), capable de calculer la transformée de Fourier discrète d'un tableau de  $n$  points en un temps  $O(n \log(n))$ , alors que la méthode simple qui consiste à calculer toutes les sommes a une complexité en  $O(n^2)$ .

## A.2 Méthode du splitting

La fonction d'onde à l'instant  $t + dt$  se déduit de la fonction d'onde à l'instant  $t$  par l'application de l'opérateur d'évolution  $e^{-idt(H_p + H_r)}$ . On peut décomposer l'exponentielle grâce au développement de Zassenhaus :

$$\exp(dtA + dtB) = \exp(dtA) \exp(dtB) \exp\left(\frac{-dt^2}{2} [A, B]\right) \dots$$

Si  $dt^2[A, B] \ll 1$ , on peut négliger les termes d'ordre supérieur à 1 en  $dt$  et traiter l'exponentielle comme si les termes composant l'hamiltonien commutaient entre eux, ce qui permet de les calculer chacun dans la base adaptée. Il existe plusieurs manières de décomposer l'hamiltonien [108]. Pour un potentiel harmonique, on peut séparer la partie linéaire de l'hamiltonien, dont les vecteurs propres sont des polynômes de Hermite, de la partie non linéaire. Dans notre cas, on utilise une approche basée sur la transformée de Fourier.

$$e^{-idt(H_p + H_{pot})} \simeq e^{-idtH_p} e^{-idtH_r} \quad (\text{A.2})$$

en ne gardant que les termes d'ordre un en  $dt$ . Cette formule fonctionne à condition que  $dt^2[p^2, x^2] \ll 1$ , ce qui dans le pire des cas est assuré si  $dt^2 p^2 x^2 \ll 1$ , ce qui revient à  $dt \ll \frac{1}{x_{max} p_{max}}$  où  $x_{max}$  et  $p_{max}$  sont les valeurs maximales de la position et de l'impulsion. Avec la relation  $p_{max} = \frac{\pi n_x}{2x_{max}}$ , on trouve que la condition sur  $dt$  est simplement  $dt \ll \frac{1}{n_x}$ .

On peut alors séparer les termes diagonaux en espace des positions et des impulsions, ce qui donne  $\psi(t + dt) = e^{-i dt H_p} e^{-i dt H_r} \psi(t)$ . L'application du terme en  $H_r$  revient simplement à une multiplication par un facteur de phase :

$$\psi(i_x, i_y, i_z)^* = e^{-0.5 * dt * (V(i_x d_x, i_y d_y, i_z d_z) + |\psi(i_x, i_y, i_z)|^2 - \mu)}$$

Ensuite, on passe en espace des impulsions à l'aide d'une transformée de Fourier rapide (FFT). On applique alors le terme diagonal en espace des impulsions de l'opérateur d'évolution en multipliant chaque coefficient par  $e^{-\frac{i dt}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / n_x n_y n_z}$ , avant de revenir dans l'espace des positions par la transformée de Fourier inverse. Le terme  $\frac{1}{n_x n_y n_z}$  doit être ajouté car la librairie utilisée pour la FFT<sup>1</sup> effectue des transformées de Fourier non normalisées.

### A.3 Calcul de l'état fondamental

On cherche la fonction d'onde  $\psi_0$  qui minimise l'énergie du système :

$$E(\psi) = \int \left( \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + V |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4 \right) d^3 \vec{r}$$

tout en satisfaisant la condition de normalisation :

$$\int |\psi|^2 d^3 \vec{r} = N$$

où  $N$  est le nombre d'atomes dans le système simulé.

On peut obtenir une solution en utilisant la technique de la descente de gradient [109], qui consiste à faire évoluer une fonction d'onde d'essai selon l'équation :

$$\partial_t \psi = -\frac{1}{2} \frac{\delta E(\psi)}{\delta \psi^*} = \left( \frac{1}{2} \nabla^2 - V(\vec{x}, t) - g |\psi|^2 \right) \psi \quad (\text{A.3})$$

Cette méthode est communément appelée évolution en temps imaginaire, car l'équation A.3 est équivalente à l'équation de Gross-Pitaevskii en remplaçant la variable  $t$  par le temps imaginaire  $it$ . L'équation A.3 est résolue de la même façon que l'évolution en temps réel, en renormalisant la fonction d'onde après chaque pas de temps pour satisfaire la condition de normalisation. L'état  $\psi_0$  trouvé à la fin de l'évolution est une solution de

$$(H_0 + g |\psi|^2) \psi_0 = \mu \psi_0$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique. On peut noter que ce procédé ne donne pas obligatoirement l'état fondamental. On peut aussi obtenir un minimum local de l'énergie, qui correspond à un état métastable du condensat. Dans notre cas, un tel état métastable est un état de type  $\psi_0(r, \theta) = f(r) e^{in\theta}$ , dans lequel le condensat est parcouru par un courant permanent de circulation  $n$ . On peut obtenir ce type de résultat de façon contrôlable en utilisant un tel état de circulation  $n$  comme état initial de l'évolution en temps imaginaire..

---

1. FFTW 3.3



# Annexe B

## Calcul analytique des excitations

On va maintenant calculer analytiquement le spectre des excitations pour un condensat dans un tube. On se place en coordonnées cylindriques, et on considère un condensat piégé harmoniquement dans la direction  $r$  et libre dans la direction  $z$ . Le potentiel de piégeage s'écrit  $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$ . On a alors la solution de Thomas Fermi :

$$\rho_0(r) = \frac{1}{g} \left[ \mu - \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 \right] = \frac{1}{g} \frac{1}{2}\omega_0^2 [R^2 - r^2]$$

Où on a introduit le rayon de Thomas-Fermi  $R$ , qui est la position pour laquelle  $\rho_0$  s'annule. Il est relié à  $\mu$  par  $\mu = \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2$ . On peut alors écrire la vitesse du son locale :

$$c^2(r) = \frac{1}{2}\omega_0^2 (R^2 - r^2)$$

Comme le problème est invariant par translation selon  $z$ , peut décomposer  $\delta\rho$  en une somme d'ondes planes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $q$ , qui s'écrivent en notation complexe :

$$\delta\rho(r, z, t) = \delta\rho(r) e^{-iqz} e^{-i\omega t}$$

En revenant à l'équation (5.10) et en simplifiant, on obtient l'équation suivante :

$$-\omega^2 \delta\rho(r) = \frac{1}{2}\omega_0^2 \left[ (R^2 - r^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - 2r \frac{\partial}{\partial r} - q^2 (R^2 - r^2) \right] \delta\rho(r)$$

On décompose  $\delta\rho$  en série du paramètre sans dimension  $\frac{r}{R}$  :

$$\delta\rho(r) = \delta\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left( \frac{r}{R} \right)^{2n}$$

On n'a que les puissances paires en raison de la symétrie du piège. On fixe le paramètre de normalisation  $\alpha_0 = 1$ . Les dérivées de  $\delta\rho$  s'écrit :

$$\partial_r \delta\rho(r) = \delta\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (2n+2) \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+1}$$

et

$$\partial_r^2 \rho(r) = \delta \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (2n+2)(2n+1) \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}$$

En remplaçant dans l'équation (B.2), et en simplifiant par  $\delta \rho_0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (2n+2)(2n+1) \left( \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+2} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \left( (2n+2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} - 3(2n+2) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+2} \right) \\ &\quad \left. - q^2 R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left( \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

En identifiant les termes correspondant aux mêmes puissances de  $\frac{r}{R}$ , on trouve :

$$-\omega^2 \alpha_n = \frac{1}{2} \omega_0^2 [\alpha_{n+1} (2n+2)^2 - \Theta(n-1) \alpha_n 2n(2n+2) - q^2 R^2 (\alpha_n - \Theta(n-1) \alpha_{n-1})]$$

où  $\Theta(n)$  est la fonction de Heaviside discrète, qui vaut 1 si  $n \geq 0$  et 0 si  $n < 0$ . On développe alors  $\omega^2$  et  $\alpha_n$ , en puissances paires de  $qR$ , en supposant l'énergie nulle pour  $q = 0$ , ce qui donne :

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 R^2 \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p$$

et

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{n,p} (qR)^{2p}$$

En identifiant les termes, on retrouve alors la relation de récurrence :

$$-\sum_{k=0}^p \beta_k \alpha_{n,p-k} = \alpha_{n+1,p+1} (2n+2)^2 - \Theta(n-1) \alpha_{n,p+1} 2n(2n+2) - (\alpha_{n,p} - \Theta(n-1) \alpha_{n-1,p})$$

En prenant cette relation pour  $n = 0, 1$  et  $p = 0, 1$ , sachant que  $\alpha_{0,p} = 0$  pour tout  $p > 0$  et  $\alpha_{0,0} = 1$ , on obtient le système d'équations suivant, en supposant que  $\alpha_{n,p} = 0$  pour  $n > p$  :

$$-\beta_0 = 4\alpha_{1,1} - 1$$

$$0 = -8\alpha_{1,1} + 1$$

$$-\beta_1 = 4\alpha_{1,2}$$

$$-\beta_0 \alpha_{1,1} = 16\alpha_{2,2} - 8\alpha_{1,2} - \alpha_{1,1}$$

et pour  $n = 2, p = 1$  :

$$0 = -24\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}$$

On obtient  $\alpha_{1,1} = \frac{1}{8}$ ,  $\alpha_{2,2} = \frac{1}{8} \frac{1}{24}$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1 = \frac{1}{96}$ . On en déduit la relation de dispersion des excitations de Bogolyubov à l'ordre 2 :

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \omega_0^2 R^2 q^2 \left( 1 - \frac{1}{48} q^2 R^2 \right) = c_{1d}^2 q^2 \left( 1 - \frac{1}{48} q^2 R^2 \right)$$

et on utilise l'expression de  $R$  pour pouvoir écrire la vitesse du son en fonction du potentiel chimique :

$$c_{1d} = \sqrt{\frac{\mu}{2m}}$$

On remarque que la correction en  $q^2 R^2$  est négative, ce qui signifie que la vitesse critique  $v_c = \min\left(\frac{E(q)}{q}\right)$  est inférieure à la vitesse du son. Cette approximation est valable si  $qR \ll 1$ , c'est à dire pour les modes dont la longueur d'onde est grande devant le rayon de Thomas-Fermi.

## B.1 Calcul pour un condensat 2d

On considère cette fois un condensat pour lequel la fréquence d'oscillation dans la direction  $y$  est grande devant le potentiel chimique  $\mu$ . Dans ce cas, la fonction d'onde est gaussienne dans la direction  $y$ , et on peut se ramener au calcul des excitations d'un condensat 2d. Le potentiel et la vitesse du son locale s'écrivent :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$c^2(x) = \frac{1}{2} \omega_0^2 (R^2 - x^2)$$

On décompose  $\delta\rho$  en une somme d'ondes planes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $q$ , qui s'écrivent en notation complexe :

$$\delta\rho(x, z, t) = \delta\rho(x) e^{iqz} e^{-i\omega t}$$

ce qui donne après remplacement dans l'équation (5.10) :

$$-\omega^2 \delta\rho = \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( (R^2 - x^2) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \right) - q^2 (R^2 - x^2) \delta\rho \right) \quad (\text{B.2})$$

On décompose  $\delta\rho$  en série du paramètre sans dimension  $\frac{x}{R}$ , où  $R$  est le rayon de Thomas Fermi :

$$\delta\rho(x) = \delta\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left( \frac{x}{R} \right)^{2n}$$

On n'a que les puissances paires en raison de la symétrie du piège. On fixe  $\alpha_0 = 1$ . On obtient alors l'équation suivante :



$$\begin{aligned}
-\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{x}{R}\right)^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (2n+2)(2n+1) \left( \left(\frac{x}{R}\right)^{2n} - \left(\frac{x}{R}\right)^{2n+2} \right) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} 2\alpha_{n+1} (2n+2) \left(\frac{x}{R}\right)^{2n+2} \\
&\quad - \left[ q^2 R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left( \left(\frac{x}{R}\right)^{2n} - \left(\frac{x}{R}\right)^{2n+2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.3}$$

En identifiant les termes correspondant aux mêmes puissances de  $\frac{x}{R}$ , on trouve :

$$-\omega^2 \alpha_n = \frac{1}{2} \omega_0^2 [\alpha_{n+1} (2n+2)(2n+1) - \alpha_n 2n(2n+1) - q^2 R^2 (\alpha_n - \Theta(n-1) \alpha_{n-1})]$$

On développe alors  $\omega^2$  et  $\alpha_n$  en puissances paires de  $qR$ , en supposant l'énergie nulle pour  $q = 0$ , ce qui donne :

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 R^2 \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p$$

et

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{n,p} (qR)^{2p}$$

En identifiant les termes, on retrouve alors la relation :

$$-\sum_{k=0}^p \beta_k \alpha_{n,p-k} = \alpha_{n+1,p+1} (2n+2)(2n+1) - \alpha_{n,p+1} 2n(2n+1) - (\alpha_{n,p} - \Theta(n-1) \alpha_{n-1,p})$$

pour  $n = 0, p = 0$  :

$$-\beta_0 = 2\alpha_{1,1} - 1.$$

pour  $n = 0, p = 1$  :

$$-\beta_1 = 2\alpha_{1,2}.$$

pour  $n = 1, p = 0$  :

$$0 = -6\alpha_{1,1} + 1.$$

pour  $n = 2, p = 2$

$$-\beta_0 \alpha_{1,1} = 12\alpha_{2,2} - 6\alpha_{1,2} - \alpha_{1,1}$$

pour  $n = 2, p = 1$

$$0 = -20\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}$$

d'où  $\alpha_{1,1} = \frac{1}{6}$ ,  $\beta_0 = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha_{2,2} = \frac{1}{120}$ ,  $\alpha_{1,2} = \frac{1}{135}$  et  $\beta_1 = -\frac{2}{135}$  d'où on déduit :

$$\omega^2 = \frac{1}{3} \omega_0^2 R^2 q^2 \left( 1 - \frac{1}{45} q^2 R^2 \right) = c_{1d}^2 q^2 \left( 1 - \frac{1}{45} q^2 R^2 \right) \tag{B.4}$$

avec

$$c_{1d} = \sqrt{\frac{2\mu}{3m}}$$

# Bibliographie

- [1] A. EINSTEIN, « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases ». *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, 261–267 (1924).
- [2] A. EINSTEIN, « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung ». *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, 3–14 (1925).
- [3] S.N. BOSE, « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese ». *Z. Phys.* **26**, 178–181 (1924).
- [4] P. KAPITZA, « Viscosity of Liquid Helium below the  $\Lambda$ -Point ». *Nature* **141** (74) (Jan 1938).
- [5] J. F. ALLE et A. D. MISENER, « Flow of Liquid Helium II ». *Nature* **141** (75) (Jan 1938).
- [6] F. LONDON, « The  $\Lambda$ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy ». *Nature* **141**, 643 (Apr 1938).
- [7] L. TISZA, « Transport Phenomena in Helium II ». *Nature* **141** (1938).
- [8] JOHN ROBERT SCHRIEFFER, *Theory of superconductivity*. Perseus Books (1971).
- [9] LETICIA TARRUELL, MARTIN TEICHMANN, JASON MCKEEVER, THOMAS BOURDEL, JULIEN CUBIZOLLES, LEV KHAYKOVICH, JING ZHANG, NIR NAVON, FREDERIC CHEVY et CHRISTOPHE SALOMON, « Expansion of an ultra-cold lithium gas in the BEC-BCS crossover » (2007). <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/0701181> .
- [10] D. WINELAND et H. DEHMELT, « Proposed 1014 Dn<n laser fluorescence spectroscopy on TI+ mono-ion oscillator III ». *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975).
- [11] T. W. HÄNSCH et A. L. SCHAWLOW, « Cooling of gases by laser radiation ». *Opt. Comm.* **13** (68) (1974).
- [12] W. NEUHAUSER, M. HOHENSTATT, P. TOSCHEK et H. DEHMELT, « Optical-Sideband Cooling of Visible Atom Cloud Confined in Parabolic Well ». *Phys. Rev. Lett.* **41** (4), 233–236 (Jul 1978).

- [13] D. J. WINELAND, R. E. DRULLINGER et F. L. WALLS, « Radiation-Pressure Cooling of Bound Resonant Absorbers ». *Phys. Rev. Lett.* **40** (25), 1639–1642 (Jun 1978).
- [14] STEVEN CHU, L. HOLLBERG, J. E. BJORKHOLM, ALEX CABLE et A. ASHKIN, « Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure ». *Phys. Rev. Lett.* **55** (1), 48–51 (Jul 1985).
- [15] P.D. LETT, R.N. WATTS, C.I. WESTBROOK, W.D. PHILLIPS, P.L. GOULD et H.J. METCALF, « Observation of atoms laser cooled below the Doppler limit ». *Phys. Rev. Lett.* **61** (2), 169–172 (1988).
- [16] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI, « Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models ». *J. Opt. Soc. Am. B* **6** (11), 2023–2045 (1989).
- [17] E.L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU et D.E. PRITCHARD, « Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure ». *Phys. Rev. Lett.* **59** (23), 2631–2634 (1987).
- [18] D.E. PRITCHARD, « Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy ». *Phys. Rev. Lett.* **51** (15), 1336–1339 (1983).
- [19] W.H. WING, « On neutral particle trapping in quasistatic electromagnetic fields ». *Prog. Quant. Electr.* **8**, 181–199 (1984).
- [20] ALAN L. MIGDALL, JOHN V. PRODAN, WILLIAM D. PHILLIPS, THOMAS H. BERGEMAN et HAROLD J. METCALF, « First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms ». *Phys. Rev. Lett.* **54** (24), 2596–2599 (Jun 1985).
- [21] H. F. HESS, « Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen ». *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).
- [22] WOLFGANG PETRICH, MICHAEL H. ANDERSON, JASON R. ENSHER et ERIC A. CORNELL, « Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms ». *Phys. Rev. Lett.* **74** (17), 3352–3355 (Apr 1995).
- [23] KENDALL B. DAVIS, MARC-OLIVER MEWES, MICHAEL A. JOFFE, MICHAEL R. ANDREWS et WOLFGANG KETTERLE, « Evaporative Cooling of Sodium Atoms ». *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5202–5205 (Jun 1995). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.5202> .
- [24] M.H. ANDERSON, J.R. ENSHER, M.R. MATTHEWS, C.E. WIEMAN et E.A. CORNELL, « Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor ». *Science* **269**, 198–201 (1995).
- [25] K.B. DAVIS, M.-O. MEWES, M.R. ANDREWS, N.J. VAN DRUTEN, D.S. DURFEE, D.M. KURN et W. KETTERLE, « Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms ». *Phys. Rev. Lett.* **75** (22), 3969–3973 (1995).
- [26] M.R. ANDREWS, C.G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D.S. DURFEE, D.M. KURN et W. KETTERLE, « Observation of interference between two Bose condensates ». *Phys. Rev. Lett.* **275** (5300), 637 (1997).

- [27] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T.W. HÄNSCH et I. BLOCH, « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms ». *Nature* pages 39–44 (2002).
- [28] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER et A. ASPECT, « Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder ». *Nature* **453**, 891 (2008).
- [29] G. ROATI, C. D'ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO et M. INGUSCIO, « Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate ». *Nature* **453**, 895 (2008).
- [30] T. KINOSHITA, T. R. WENGER et D. S. WEISS, « Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas ». *Science* **305**, 1125 (2004).
- [31] Z. HADZIBABIC, P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER et J. DALIBARD, « Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas ». *Nature* **441**, 1118 (2006).
- [32] J. DALIBARD, « Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases ». Dans *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, édité par M. INGUSCIO, S. STRINGARI et C.E. WIEMAN, pages 321–349, IOS Press Ohmsha (1999).
- [33] L.P. PITAEVSKII, « Trapped Bose-Einstein condensed gas : mean-field approximation and beyond ». Dans *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, édité par M. INGUSCIO, S. STRINGARI et C.E. WIEMAN, pages 287–319, IOS Press Ohmsha (1999).
- [34] L.P. PITAEVSKII et S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press (2003).
- [35] J. STEINHAEUER, N. KATZ, R. OZERI, N. DAVIDSON, C. TOZZO et F. DALFOVO, « Bragg Spectroscopy of the Multibranch Bogoliubov Spectrum of Elongated Bose-Einstein Condensates ». *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060 404 (Feb 2003). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.060404> .
- [36] T. P. SIMULA, S. M. M. VIRTANEN et M. M. SALOMAA, « Stability of multi-quantum vortices in dilute Bose-Einstein condensates ». *Phys. Rev. A* **65**, 033 614 (Feb 2002). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.033614> .
- [37] C. RYU, M. F. ANDERSEN, P. CLADÉ, V. NATARAJAN, K. HELMERSON et W. D. PHILLIPS, « Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap ». *Phys. Rev. Lett.* **99**, 260 401 (2007).
- [38] JOACHIM BRAND et WILLIAM P REINHARDT, « Generating ring currents, solitons and vortices by stirring a Bose-Einstein condensate in a toroidal trap ». *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **34** (4), L113 (2001). <http://stacks.iop.org/0953-4075/34/i=4/a=105> .
- [39] S.V. MANAKOV, V.E. ZAKHAROV, L.A. BORDAG, A.R. ITS et V.B. MATVEEV, « Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction ». *Physics Letters A* **63** (3), 205 – 206 (1977).

- [40] I. CHIORESCU, Y. NAKAMURA, C. J. P. M. HARMANS et J. E. MOOIJ, « Coherent Quantum Dynamics of a Superconducting Flux Qubit ». *Science* **299** (5614), 1869–1871 (2003). <http://www.sciencemag.org/content/299/5614/1869.full.pdf>, <http://www.sciencemag.org/content/299/5614/1869.abstract> .
- [41] C. SCHENKE, A. MINGUZZI et F. W. J. HEKING, « Nonadiabatic creation of macroscopic superpositions with strongly correlated 1D bosons on a ring trap ». *ArXiv e-prints* (août 2011). [1108.5075](https://arxiv.org/abs/1108.5075), <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011arXiv1108.5075S> .
- [42] S. C. WHITMORE et W. ZIMMERMANN, « Observation of Stable Superfluid Circulation in Liquid-Helium II at the Level of One, Two, and Three Quantum Units ». *Phys. Rev. Lett.* **15**, 389 (1965).
- [43] S. GUPTA, K. W. MURCH, K. L. MOORE, T. P. PURDY et D. M. STAMPER-KURN, « Bose-Einstein Condensation in a Circular Waveguide ». *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143 201 (2005).
- [44] A. RAMANATHAN, K. C. WRIGHT, S. R. MUNIZ, M. ZELAN, W. T. HILL, III, C. J. LOBB, K. HELMERSON, W. D. PHILLIPS et G. K. CAMPBELL, « Superflow in a toroidal Bose-Einstein condensate : an atom circuit with a tunable weak link ». *ArXiv e-prints* (décembre 2010). ArXiv :1101.0019, [1101.0019](https://arxiv.org/abs/1101.0019).
- [45] W H HEATHCOTE, E NUGENT, B T SHEARD et C J FOOT, « A ring trap for ultracold atoms in an RF-dressed state ». *New Journal of Physics* **10** (4), 043 012 (2008). <http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=4/a=043012> .
- [46] I. LESANOVSKY et W. VON KLITZING, « Time-Averaged Adiabatic Potentials : Versatile Matter-Wave Guides and Atom Traps ». *Phys. Rev. Lett.* **99**, 083 001 (2007).
- [47] B. E. SHERLOCK, M. GILDEMEISTER, E. OWEN, E. NUGENT et C. J. FOOT, « Time-averaged adiabatic ring potential for ultracold atoms ». *Phys. Rev. A* **83** (4), 043 408 (Apr 2011).
- [48] O. MORIZOT, Y. COLOMBE, V. LORENT, H. PERRIN et B.M. GARRAWAY, « Ring trap for ultracold atoms ». *Phys. Rev. A* **74**, 023 617 (2006).
- [49] O. ZOBAY et B.M. GARRAWAY, « Two-dimensional atom trapping in field-induced adiabatic potentials ». *Phys. Rev. Lett.* **86** (7), 1195–1198 (2001).
- [50] Y. COLOMBE, E. KNYAZCHYAN, O. MORIZOT, B. MERCIER, V. LORENT et H. PERRIN, « Ultracold atoms confined in rf-induced two-dimensional trapping potentials ». *Europhys. Lett.* **67** (4), 593–599 (2004).
- [51] T. SCHUMM, S. HOFFERBERTH, L.M. ANDERSSON, S. WILDERMUTH, S. GROTH, I. BAR-JOSEPH, J. SCHMIEDMAYER et P. KRÜGER, « Matter wave interferometry in a double well on an atom chip ». *Nature Phys.* **1**, 57 (2005).
- [52] O. MORIZOT, *Pièges radiofréquence très anisotropes pour un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII (2007).
- [53] I.I. RABI, N.F. RAMSEY et J. SCHWINGER, « Use of rotating coordinates in magnetic resonance problems ». *Rev. Mod. Phys.* **26** (2), 167–171 (1954).

- [54] O. MORIZOT, C.L. GARRIDO ALZAR, P.-E. POTTIE, V. LORENT et H. PERRIN, « Trapping and cooling of rf-dressed atoms in a quadrupole magnetic field ». *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **40**, 4013–4022 (2007).
- [55] W. H. HEATHCOTE, E. NUGENT, B. T. SHEARD et C. J. FOOT, « A ring trap for ultracold atoms in an RF-dressed state ». *New Journal of Physics* **10** (4), 043 012 (2008).
- [56] A. M. STEANE, M. CHOWDHURY et C. J. FOOT, « Radiation force in the magneto-optical trap ». *J. Opt. Soc. Am. B* **9** (12), 2142–2158 (Dec 1992). <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-9-12-2142> .
- [57] R. GRIMM, M. WEIDEMÜLLER et YU.B. OVCHINNIKOV, « Optical dipole traps for neutral atoms ». *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95–170 (2000).
- [58] C. COHEN-TANNOUDJI, *Atomes ultra-froids – Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif*. Cours de physique atomique et moléculaire, Collège de France, année 1996-1997, <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france/> .
- [59] D. GUÉRY-ODELIN, *Dynamique collisionnelle des gaz d'alcalins lourds : du refroidissement évaporatif à la condensation de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1998).
- [60] HAROLD J. METCALF et PETER VAN DER STRATEN, *Laser Cooling and Trapping*. Springer-Verlag, New York (1999).
- [61] WILLIAM D. PHILLIPS et HAROLD METCALF, « Laser Deceleration of an Atomic Beam ». *Phys. Rev. Lett.* **48** (9), 596–599 (Mar 1982).
- [62] K. DIECKMANN, R.J.C. SPREEUW, M. WEIDEMÜLLER et J.T.M. WALRAVEN, « Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms ». *Phys. Rev. A* **58**, 3891–3895 (1998).
- [63] PATRICK CHEINET, *Conception et réalisation d'un gravimètre à atomes froids*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2006).
- [64] H.J. LEWANDOWSKI, D.M HARBER, D.L. WHITAKER et E.A. CORNELL, « Simplified system for creating a Bose-Einstein condensate ». *JLTP* **132** (5/6), 309 (2003).
- [65] K. NAKAGAWA, Y. SUZUKI, M. HORIKOSHI et J.B. KIM, « Simple and efficient magnetic transport of cold atoms using moving coils for the production of Bose-Einstein condensation ». *Applied Physics B : Lasers and Optics* **81**, 791–794 (2005). 10.1007/s00340-005-1953-8.
- [66] M. GREINER, I. BLOCH, T.W. HÄNSCH et T. ESSLINGER, « Magnetic transport of trapped cold atoms over a large distance ». *Phys. Rev. A* **63**, 031 401, 1–4 (2001).
- [67] JULIEN DELAPORTE, *Piège magnéto-optique de rubidium et transport magnétique d'atomes froids*. Thèse de diplôme, Laboratoire de physique des lasers (2009).
- [68] C.V. SUKUMAR et D.M. BRINK, « Spin-flip transitions in a magnetic trap ». *Phys. Rev. A* **56** (3), 2451–2454 (1997).

- [69] E. MAJORANA, « Atomi orientati in campo magnetico variabile ». *Nuovo Cimento* **9**, 43–50 (1932).
- [70] D. S. NAIK et C. RAMAN, « Optically Plugged Quadrupole Trap for Bose-Einstein Condensates ». *Phys. Rev. A* **71**, 033 617 (2005).
- [71] F. ZERNIKE, « Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects ». *Physica* **9** (7), 686 – 698 (1942).
- [72] M. R. ANDREWS, D. M. KURN, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, S. INOUE et W. KETTERLE, « Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate ». *Phys. Rev. Lett.* **79** (4), 553–556 (Jul 1997).
- [73] Y. COLOMBE, *Condensat de Bose-Einstein, champs évanescents et piégeage bi-dimensionnel*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII (2004).
- [74] T.A. SAVARD, K.M. O’HARA et J.E. THOMAS, « Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps ». *Phys. Rev. A* **56** (2), R1095–R1098 (1997).
- [75] J.-F. CLÉMENT, J.-P. BRANTUT, M. ROBERT-DE SAINT-VINCENT, R. A. NYMAN, A. ASPECT, T. BOURDEL et P. BOUYER, « All-optical runaway evaporation to Bose-Einstein condensation ». *Phys. Rev. A* **79** (6), 061 406 (Jun 2009).
- [76] ROBERT BOYD, *Nonlinear Optics*. Academic Press (2008).
- [77] J. A. ARMSTRONG, N. BLOEMBERGEN, J. DUCUING et P. S. PERSHAN, « Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric ». *Phys. Rev.* **127**, 1918–1939 (Sep 1962). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.1918> .
- [78] JUNJI HIROHASHI, *Characterization of domain switching and optical damage properties in ferroelectrics*. Thèse de doctorat, Department of Applied Physics, Royal Institute of Technology, Stockholm (2006).
- [79] ROBERT C. MILLER, WILLIAM A. NORDLAND et PAUL M. BRIDENBAUGH, « Dependence of Second-Harmonic-Generation Coefficients of LiNbO<sub>3</sub> on Melt Composition ». *J. Appl. Phys* **42**, 4145 (1971).
- [80] G.D. BOYD et D.A. KLEINMAN, « Parametric interaction of focused gaussian light beams ». *J. Appl. Phys.* pages 3597–3639 (1968).
- [81] W. DEMTRÖDER, *Laser spectroscopy - Basic concepts and instrumentation*. Springer, troisième édition (2002).
- [82] K.B. MACADAM, A. STEINBACH et C. WIEMAN, « A narrow-band tunable diode laser system with grating feedback, and a saturated absorption spectrometer for Cs and Rb ». *Am. J. Phys.* **60** (12), 1098–1111 (1992).
- [83] X. BAILLARD, A. GAUGUET, S. BIZE, P. LEMONDE, PH. LAURENT, A. CLAIRON et P. ROSENBUSCH, « Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers ». *Optics Communications* **266** (2), 609 – 613 (2006).
- [84] M. ROTH, M. TSEITLIN et N. ANGERT, « Oxide crystals for electro-optic Q-switching of lasers ». *Glass Physics and Chemistry* **31**, 86–95 (2005). 10.1007/s10720-005-0028-6, <http://dx.doi.org/10.1007/s10720-005-0028-6> .

- [85] D.A. STECK, *Rubidium 87 D-line data* (2003). Document disponible en ligne, <http://george.ph.utexas.edu/~dsteck/alkalidata/> .
- [86] B.H. BRANSDEN et C.J. JOACHAIN, *Physics of atoms and molecules*. Prentice Hall (2003).
- [87] KASTLER, ALFRED, « Quelques suggestions concernant la production optique et la détection optique d'une inégalité de population des niveaux de quantification spatiale des atomes. Application à l'expérience de Stern et Gerlach et à la résonance magnétique ». *J. Phys. Radium* **11** (6), 255–265 (1950). <http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01950001106025500> .
- [88] P. D. LETT, W. D. PHILLIPS, S. L. ROLSTON, C. E. TANNER, R. N. WATTS et C. I. WESTBROOK, « Optical molasses ». *J. Opt. Soc. Am. B* **6** (11), 2084–2107 (Nov 1989). <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-6-11-2084> .
- [89] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI, « Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models ». *J. Opt. Soc. Am. B* **6** (11), 2023–2045 (Nov 1989). <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-6-11-2023> .
- [90] C.G. TOWNSEND, N.H. EDWARDS, C.J. COOPER, K.P. ZETIE, C.J. FOOT, A.M. STEANE, P. SZRIFTGISER, H. PERRIN et J. DALIBARD, « Phase-space density in the magneto-optical trap ». *Phys. Rev. A* **52** (2), 1423–1440 (1995).
- [91] BENJAMIN THOMAS SHEARD, *Magnetic Transport and Bose-Einstein Condensation of Rubidium Atoms*. Thèse de doctorat, Merton College, Oxford University (2010).
- [92] OLIVER TOPIC, *Präparation einer ultrakalten Bose-Fermi Mischung*. Thèse de diplôme, Institut für Quantenoptik (2005).
- [93] M. H. ANDERSON, W. PETRICH, J. R. ENSHER et E. A. CORNELL, « Reduction of light-assisted collisional loss rate from a low-pressure vapor-cell trap ». *Phys. Rev. A* **50** (5), R3597–R3600 (Nov 1994).
- [94] G. A. BIRD, *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Clarendon, Oxford Univ. Press (1994).
- [95] N. MASUHARA, J. M. DOYLE, J. C. SANDBERG, D. KLEPPNER, T. J. GREYTAK, H. F. HESS et G. P. KOCHANSKI, « Evaporative cooling of spin-polarized atomic hydrogen ». *Phys. Rev. Lett.* **61**, 935 (1988).
- [96] F. PIAZZA, L. A. COLLINS et A. SMERZI, « Vortex-induced phase-slip dissipation in a toroidal Bose-Einstein condensate flowing through a barrier ». *Phys. Rev. A* **80** (2), 021 601 (Aug 2009).
- [97] S. STRINGARI, « Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas ». *Phys. Rev. Lett.* **77** (12), 2360–2363 (1996).
- [98] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L.P. PITAEVSKII et S. STRINGARI, « Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases ». *Rev. Mod. Phys.* **71** (3), 463–512 (1999).
- [99] D.S. PETROV, M. HOLZMANN et G.V. SHLYAPNIKOV, « Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases ». *Phys. Rev. Lett.* **84** (12), 2551–2554 (2000).



- [100] D. GUÉRY-ODELIN, « Spinning up and down a Boltzmann gas ». *Phys. Rev. A* **62**, 033 607 (Aug 2000). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.033607> .
- [101] S. STRINGARI, « Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps ». *Phys. Rev. A* **58** (3), 2385–2388 (Sep 1998).
- [102] J. R. ANGLIN, « Local Vortex Generation and the Surface Mode Spectrum of Large Bose-Einstein Condensates ». *Phys. Rev. Lett.* **87** (24), 240 401 (Nov 2001).
- [103] P. O. FEDICHEV et G. V. SHLYAPNIKOV, « Critical velocity in cylindrical Bose-Einstein condensates ». *Phys. Rev. A* **63** (4), 045 601 (Mar 2001).
- [104] A.K. RAMANATHAN, *A ring with a spin : superfluidity in a toroidal Bose-Einstein condensate*. Thèse de doctorat, University of Maryland (2011).
- [105] B.Y. RUBINSTEIN et L.M. PISMEN, « Vortex motion in the spatially inhomogeneous conservative Ginzburg-Landau model ». *Physica D : Nonlinear Phenomena* **78** (1-2), 1 – 10 (1994).
- [106] S. PRABHAKAR, R. P. SINGH, S. GAUTAM et D. ANGOM, « Annihilation of vortex dipole in an Oblate Bose-Einstein Condensate ». *ArXiv e-prints* (octobre 2011). [1110.5226](https://arxiv.org/abs/1110.5226).
- [107] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN et J. DALIBARD, « Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate ». *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [108] MECHTHILD THALHAMMER, MARCO CALIARI et CHRISTOF NEUHAUSER, « High-order time-splitting Hermite and Fourier spectral methods ». *J. Comput. Phys.* **228**, 822–832 (February 2009). <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1480240.1480283> .
- [109] WEIZHU BAO et QIANG DU, « Computing the Ground State Solution of Bose-Einstein Condensates by a Normalized Gradient Flow ». *SIAM Journal on Scientific Computing* **25** (5), 1674–1697 (2004). <http://link.aip.org/link/?SCE/25/1674/1> .