Régularité des cônes et d'ensembles minimaux de dimension 3 dans R4

Tien Duc Luu

N° d'ordre :

ÉCOLE DOCTORALE : Mathématique de l'Université Paris Sud XI
Laboratoire de Mathématique, Université Paris Sud XI

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS SUD XI

Spécialité : MATHÉMATIQUE

par

Tien Duc Luu

RÉGULARITÉ DES CÔNES ET D'ENSEMBLES MINIMAUX DE DIMENSION 3 DANS $\mathbb{R}^4$

Soutenue le 12 décembre 2011 devant la Commission d'examen

M.	Guy DAVID	Directeur de thèse
Mme.	Séverine RIGOT	Rapportrice
M.	Michel ZINSMEISTER	Président du Jury
M.	Antonin CHAMBOLLE	Examinateur
M.	Viet Anh NGUYEN	Examinateur

Rapporteur absent le jour de la soutenance

M. Robert HARDT

Remerciement

En premier lieu, je souhaiterais exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Guy DAVID, pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Il m'a appris beaucoup de choses sur ce domaine très beau de mathématique. Les discussions avec lui chaque semaine m'ont données, au fur et à mesure, la compréhension profonde des problèmes qui me semblaient très difficiles au début. Je voudrais donc exprimer toutes mes reconnaissances les plus profondes à lui.

Je remercie infiniment à monsieur Robert HARDT et madame Séverine RIGOT, pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Ses conseils extremement précieux sur le manuscrit m'ont sans doute aidé beaucoup à améliorer ma thèse. Je leur remercie encore une fois.

Mes remerciements vont également à Michel ZINSMEISTER, Antonin CHAMBOLLE et Viet Anh NGUYEN qui me font l'honneur d'accepter d'être membres de Jury de ma soutenance.

Je remercie Pierre PANSU, David HARARI pour les entretiens très utiles qu'ils me donnent.

Je voudrais remercier aux professeurs David RENARD, Jaques TILOUINE, qui m'ont dirigé en stage de M1 et M2. Ils m'ont donné les toutes premières idées de faire une thèse en mathématique et de faire de la recherche après.

Mes professeurs de mathématique au Vietnam, notamment Chu Van Tuan, Nguyen Minh Ha, Nguyen Duc Hoang, Nguyen Duy Tien, Nguyen Tu Cuong, Dang Hung Thang qui m'ont appris la mathématique au lycée et à l'université. Je leur remercie sincèrement.

Je remercie le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche qui a financé cette thèse en m'accordant un poste d'allocataire de recherche, puis d'attachée temporaire d'enseignement et de la recherche.

Merci aux personnels du sécrétariat et au service de l'informatique de département de mathématique de l'université Paris Sud XI.

Merci à tous les doctorants de mathématique à l'université Paris Sud, avec qui j'ai partagés des moments très agréables pendant trois ans de ma thèse.

Enfin, je remercie ma famille au Vietnam, qui m'a encouragé continuement pendant toutes mes études en France.

Résumé

On étudie dans cette thèse la régularité des cônes et d'ensembles de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Dans la première partie, on étudie d'abord la régularité Bi-Hölderienne des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Ceci nous permet ensuite de montrer la régularité C^1 des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. La méthode est la même que pour les ensembles minimaux de dimension 2. On construit des compétiteurs et on se ramène aux situations connues des ensembles minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

Dans la deuxième partie, on utilise le résultat de la première partie pour donner quelques résultats de régularité Bi-Hölderienne pour les ensembles minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. On s'intéresse aussi aux ensembles minimaux de Mumford-Shah et on obtient un résultat de l'existence d'un point de type $\mathbb{T}$.

Mots clefs. Ensembles minimaux, ensembles presques minimaux, mesure de Hausdorff, cônes minimaux, rectifiabilité, théorème de J.Taylor.

Abstract

In this thesis we study the problems of regularity of three-dimensional minimal cones and sets in $\mathbb{R}^4$.

In the first part we study the Hölder regularity for minimal cones of dimension 3 in $\mathbb{R}^4$. Then we use this for showing the C^1 regularity of the same class of cones. The techniques used here are the same as the ones for the regularity of two-dimensional minimal sets. We construct some competitors to reduce to the known situation of two-dimensional minimal sets in $\mathbb{R}^3$.

In the second part, we use the first part to give somme results of the Hölder regularity for three-dimensional minimal sets in $\mathbb{R}^4$. We interested also in Mumford-Shah minimal sets and we get a result of the existence of a $\mathbb{T}$-point.

Key words. Minimal sets, almost minimal sets, Hausdorff measure, minimal cones, rectifiability, J.Taylor theorem.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but principal de cette thèse est de démontrer la régularité C^1 pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Les démonstrations sont le plus souvent élémentaires, basés sur le contrôle de la distance locale d'un ensemble avec certains types de cônes.

On rappelle le résultat de J. Taylor dans [JT] qui dit que les ensembles minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ sont localement C^1-équivalents aux cônes minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. G.David, dans [D2] a généralisé ceci à tous les ensembles minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^n$, sous la condition de "'full length"' pour les cônes tangents. On compte aussi faire quelque chose de semblable pour les ensembles minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, mais on n'arrivra pas à une description aussi précise.

Ensembles minimaux.

On commmence par la définition et quelques propriétés des ensembles minimaux. On parle d'abord de la mesure de Hausdorff.

Définition 1.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé. On recouvre E par des ensembles $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, avec la propriété $\mathrm{diam}(A_i) \le r$ pour tout i. Pour s et r positifs et une constante c_s positive qu'on va choisir à la fin, on définit*

$$H_r^s(E) = \inf\{c_s(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(A_i)^s) : E \subset \cap_{i=1}^{\infty} A_i \ \ et \ \ \mathrm{diam}(A_i) < r\}.$$

La fonction H_r^s est décroissante en r, donc elle a une limite quand on fait tendre r vers 0. On pose

$$H^s(E) = \lim_{r \to 0} H_r^s(E).$$

Alors $H^s(E)$ s'appelle la mesure de Hausdorff de dimension s de E. La dimension de Hausdorff de E est l'unique $s \in [0, n]$ tel que $H^{s_1}(E) = 0$ pour tout $s_1 > s$ et $H^{s_2}(E) = +\infty$ pour tout $s_2 < s$.

La constante c_s est une constante de normalisation, que nous choisissons telle que $H^d(B_d(O,1)) = 1$, où $B_d(O,1)$ est la boule unité de dimension d dans $\mathbb{R}^d$.

La mesure H^d est borélienne, mais n'est pas sigma-finie. Ensuite, la restriction à $\mathbb{R}^d$ ou un plan de dimension d de la mesure H^d est un multiple avec une constante positive qui est une fonction de n et d de la mesure de Lebesgue. Aussi, la restriction de H^d à une sous-variété de dimension d est un multiple du volume de dimension d de cette sous-variété.

Fixons d, et soit E un ensemble H^d-mesurable et $x \in E$. On note

$$\theta_E(x,r) = r^{-d} H^d(E \cap B(x,r)),$$

pour tout rayon $r > 0$. Si maintenant la limite $\lim_{r\to 0} \theta_E(x,r)$ existe et est finie, alors on pose

$$\theta_E(x) = \lim_{r\to 0} \theta_E(x,r).$$

On appelle $\theta_E(x)$ la densité de E en x.

Définition 1.2. *Soient E un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $d \le n-1$ un entier. Un compétieur au sens d'Almgren (aussi dit Al-compétiteur) pour E est un ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire comme $F = \varphi(E)$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application Lipschitzienne telle que $W_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) \neq x\}$ soit borné.*

Un ensemble minimal au sens d'Almgren de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que $H^d(E \cap B(O,R)) < +\infty$ pour tout $R > 0$ et

$$H^d(E \setminus F) \le H^d(F \setminus E) \tag{1.2.1}$$

pour tout Al-compétiteur F pour E.

Il existe des ensembles minimaux de dimension d dans $\mathbb{R}^n$, par exemple les sous-espaces de dimension d. Mais il est très probable qu'il en existe beaucoup d'autres. Dans le cas où $d = 2$ et $n = 3$, on connaît la liste des cônes minimaux, ce sont les plans, les cônes de type $\mathbb{Y}$ et les cônes de type $\mathbb{T}$, définis comme suit.

Définition 1.3. *On choisit dans $\mathbb{R}^3$ un système de coordonné $Oxyz$.*

Dans le plan Oxy, on choisit ensuite trois demi-droites Om, On, Op, de sorte que l'angle entre deux de ces demi-droites est $2\pi/3$. Un cône de type $\mathbb{Y}$ est l'image par une isométrie du cône $[Om \cup On \cup Op] \times L$, où L est la droite passant par O et orthogonale au plan Oxy.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de centre O. Un cône de type $\mathbb{T}$ est le cône de centre O, porté sur l'union des arêtes du tétraèdre, ou l'image de ce cône par une isométrie.

On ne sait pas encore quelle est la liste des ensembles minimaux dans $\mathbb{R}^3$. De plus, au lieu d'étudier la régularité des ensembles minimaux, on peut introduire une autre classe d'ensembles, avec une condition plus légère, la classe des ensembles presque minimaux, dont la définition peut se localiser à un ouvert.

Intuitivement, un ensemble presque minimal est un ensemble qui a des propriétés comme un ensemble minimal, mais on peut ajouter au côté droit de l'inégalité

(1.2.1) une toute petite quantité. Pour la définition, soit h une fonction croissante de $(0,+\infty)$ dans $[0,+\infty]$, telle que $\lim_{\delta\to 0} h(\delta)=0$. On appelle une telle fonction une fonction de jauge.

Définition 1.4. *Soit $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit E une partie fermée de U telle que $H^d(E\cap B)<+\infty$ pour chaque boule $B\subset U$. On dit que E est un ensemble presque minimal dans U, avec la fonction de jauge h, si pour chaque $\delta>0$ et pour chaque famille des fonctions $\varphi_t, 0\le t\le 1: U\to U$ satisfaisant à*

$$\varphi_0(x)=x \text{ pour } x\in U,$$

$$\text{la fonction } (t,x)\to\varphi_t(x) \text{ de } [0,1]\times U \text{ vers } U\text{, est continue}$$

$$\varphi_1 \text{ est Lipschitzienne,}$$

et, si on pose

$$W_t=\{x\in U;\varphi_t(x)\neq x\} \text{ et } \hat{W}=\bigcup_{t\in[0,1]}[W_t\cup\varphi_t(W_t)],$$

si $\hat{W}$ est relativement compact dans U avec $\mathrm{diam}(\hat{W})<\delta$,
alors

$$H^d(E\cap W_1)\le H^d(\varphi_1(E\cap W_1))+h(\delta)\delta^d.$$

Une propriété des ensembles presque minimaux est qu'ils sont tous rectifiables. Un ensemble $A\subset\mathbb{R}^n$ est d-rectifiable s'il existe des fonctions Lipschitziennes $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ telles que $H^d(A\setminus(\cup_{i=1}^{\infty}f_i(\mathbb{R}^d)))=0$. Cela nous permet de parler de l'existence du plan tangent approché presque partout pour un ensemble presque minimal.

Régularité pour les ensembles minimaux de dimension 2.

On commence par rappeler le théorème de J. Taylor pour la régularité des ensembles presques minimaux et réduits de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. On dit que $E\in\mathbb{R}^n$, de dimension d est réduit si pour tout $x\in E$, la densité $\theta_E(x)=\lim_{r\to 0}\frac{H^d(E\cap B(x,r))}{r^d}>0$.

Théorème 1.5. *Soit E un ensemble réduit presque minimal de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, avec une fonction de jauge h telle que $h(r)\le Cr^{\alpha}$ pour r assez petit. Soit $x\in E$. Alors il existe un cône minimal X de dimension 2, centré en O tel que $x+X$ est tangent à E en x. De plus, il existe un rayon $r_0>0$ tel que, pour $0<r<r_0$, il existe un $C^{1,\beta}$ difféomorphisme $\Phi: B(O,2r)\to\Phi(B(O,2r))$, tel que $\Phi(O)=x$, $|\Phi(y)-x-y|\le 10^{-2}r$ pour $y\in B(O,2r)$, et $E\cap B(x,r)=\Phi(X)\cap B(x,r)$.*

Dans le théorème, $\beta>0$ ne dépend que de α. Le $C^{1,\beta}$ difféomorphisme dans la conclusion veut dire que $D\Phi$ et son inverse sont Höldériennement continues avec coefficient β.

Dans [D2], G. David a généralisé ce théorème aux ensembles minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^n$, avec $n\ge 3$. Mais pour obtenir la régularité $C^{1,\beta}$, il lui faut supposer la condition de "‘full length"’ pour les limites d’explosion de E en x, qui sont aussi des cônes minimaux de dimension 2.

Aussi, G.David a vérifié dans [D2] que des cônes minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ satisfont tous à la condition de "‘full length"’. Donc le théorème 1.15 dans [D2] est vraiment une génération du théorème 1.5. On va définir les notions de limites d’explosions dans le chapitre 2, et la condition de "‘full length"’ dans le chapitre 5.

On rappelle d’abord la régularité Bi-Höldérienne locale d’un ensemble presque minimal E de dimension 2. Pour cela, on utilise le théorème de Reifenberg généralisé, dont on va parler dans le chapitre 3. Donc soit $x \in E$ et r un rayon assez petit. La technique est d’approcher pour chaque $y \in B(x, r/2)$ et $t \leq r/2$, l’ensemble E par un cône minimal de dimension 2 dans la boule $B(y,t)$. On montre que si le rayon r est très petit, on peut trouver dans chaque boule $B(y,t)$ un cône minimal de dimension 2 qui est assez proche de notre ensemble E, et ceci de manière uniforme. Cela nous permet d’utiliser le théorème de Reifenberg généralisé dans [DDT] pour démontrer la régularité Bi-Höldérienne.

Maintenant parlons de la régularité C^1 de E. Dans le chapitre 6 de [D2], on construit, grâce à l’équivalence Bi-Höldérienne pour E, un réseau de courbes rectifiables dans $E \cap B(x,r)$. Dans le chapitre 8 de [D2], on construit par extension harmonique, un "‘compétiteur"’ pour le cône s’appuyant sur une courbe Lipschitzienne dans $\partial B(x,r)$. Ce compétiteur a une aire plus petite que celle du cône, si la courbe n’est pas géodésique. Dans le chapitre 9 de [D2], on construit un compétiteur pour E dans $B(x,r)$. On utilise ensuite la preque-minimalité de E, pour déduire une inégalité entre la mesure de $H^1(E \cap \partial B(x,r))$ et $H^2(E \cap B(x,r))$. Grâce à cette inégalité, on obtient une inégalité différentielle sur l’excès de densité pour chaque point $x \in E$.

La fin de la démonstration pour la régularité C^1 est donc de montrer, pour chaque $y \in E \cap B(x,r)$ et $t \leq r/2$, qu’il existe un cône minimal $Y(y,t)$ de dimension 2 tel que $d_{y,t}(E, Y(y,t)) \leq Ct^{\alpha}$ (voir le chapitre 3 pour la définition de la distance de Hausdorff locale $d_{y,t}$). Ici, α est une constante positive qui dépend de la fonction de jauge h. Donc on peut utiliser le chapitre 10 dans [DDT] pour conclure que E est C^1-équivalent à un cône minimal de dimension 2 dans $B(x,r)$.

Résultats principaux de la thèse.

Donc une orientation naturelle est d’étudier la régularité d’un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, surtout le comportement de l’ensemble des singularités de cet ensemble. Mais nous avons une difficulté ici, c’est qu’on ne sait pas encore la liste des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, ce qui n’est pas le cas pour les cônes minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, où on sait exactement qu’il n’y a que trois types $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$. Alors on se restreint à étudier d’abord les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Déjà, la liste des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ est loin d'être connue. A ma connaissance, il y a les cônes de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{T}$. Ken Brakke a montré dans [Br] que le cône s'appuyant sur les 2-faces du cube unité dans $\mathbb{R}^4$ est aussi un cône minimal. Par la méthode de calibration, Morgan et Lawlor dans [LM] ont montré que le cône porté sur le $(n-2)$ squelette d'un simplexe régulier de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, est aussi un cône minimal de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc on peut prendre $n=4$ pour obtenir un autre candidat dans la liste des cônes minimaux de dimension 3. Pour l'instant, je ne connais pas d'autre exemple de cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. De plus, si on considère un ensemble minimal ou presque minimal de dimension 3 en général, toute limite d'explosion de cet ensemble en un point est un cône minimal, mais contrairement au cas de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, on ne sait pas quel est le type de ce cône. Donc pour étudier les ensembles minimaux de dimension 3, il est crucial d'étudier d'abord les cônes minimaux de dimension 3.

On va parler maintenant des résultats principaux de la thèse. On se donne E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine O. Soit $x \in E \cap \partial B(O,1)$, soit H l'hyperplan de dimension 3, tangent à $\partial B(O,1)$ au point x, et soit $E' = E \cap H$. On note également $\partial E = E \cap \partial B(O,1)$. Les théorèmes principaux qu'on veut montrer dans cette thèse sont les suivants.

A. Théorème de régularité C^1 pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème 1.6. *Pour chaque $x \in E \cap \partial B(O,1)$, on peut trouver un rayon $r > 0$, qui dépend de x, un cône minimal Y de dimension 2 contenu dans H et un difféomorphisme de classe C^1 $f : H \to H$ tel que*

$$f(Y \cap B(x,r)) \subset E' \cap B(x, 3r/2) \subset f(Y \cap B(x, 2r)).$$

On voit que cela équivaut au fait que ∂E est localement C^1 équivalent à un des cônes des trois types ci-dessus, puisque localement, ∂E est difféomorphe à E', car E est un cône. Notre stratégie repose principalement sur l'estimation de la distance locale de E avec un des trois cônes minimaux spéciaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, qu'on note également de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$, sauf que maintenant ils sont de dimension 3. Concrètement

Un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{P}$ n'est rien d'autre qu'un plan affine de dimension 3.

Un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ est de la forme $j(Y' \times L)$, où $Y' \subset \mathbb{R}^3$ est un cône de dimension 2 de type $\mathbb{Y}$ centré à l'origine et L est la droite passant par l'origine et orthogonale à $\mathbb{R}^3$. Ici, j est une isométrie de $\mathbb{R}^4$.

Un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{T}$ est de la forme $j(T' \times L)$, où $T' \subset \mathbb{R}^3$ est un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{T}$, centré à l'origine et L est la droite passant à l'origine et orthogonale à $\mathbb{R}^3$. Ici, j est une isométrie de $\mathbb{R}^4$.

On va d'abord montrer l'équivalence Bi-Höldérienne de E' avec un cône minimal dans $B(x,r)$. L'idée est de montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver $r > 0$ tel que pour $y \in E' \cap B(x, r/2)$ et $0 < t < r/2$, il existe un cône minimal Y' de dimension 2 dans H, tel que

$$d_{y,t}(E', Y') \leq \epsilon.$$

Une fois qu'on aura obtenu l'équivalence Bi-Höldérienne pour E', on pourra facilement construire des compétiteurs pour E. Pour cela, on construira d'abord un compétiteur pour E' dans H. La procédure est la même que dans le chapitre 9 de [D2]. Ensuite, on utilisera une interpolation pour construire un compétiteur pour E. Finalement, on utilisera la minimalité de E pour obtenir une sorte d'inégalité epipérimétrique pour E'. On obtiendra ainsi l'inégalité

$$|\theta_{E'}(x,t) - \theta_{E'}(x)| \leq Ct^{\alpha},$$

pour $t \leq r/2$ et où α est une constante géométrique. On utilisera ensuite les chapitres 11 et 12 dans [D2] pour en déduire que

$$d_{x,t}(E', Y') \leq Ct^{b},$$

pour $t \leq r/2$. Ici, Y' est la limite d'explosion de E' en x et b est aussi une constante géométrique. Soit $\mathcal{M}$ la collection des cônes Z' de dimension 2 qui sont l'image d'un cône minimal de dimension 2 dans H par une application affine, Bi-Lipschitzienne avec la constante bi-Lipschitzienne plus petite que 100. Un peu plus de travail nous donnera, qu'il existe pour chaque $y \in B(x, r/2)$ et $t \leq r/2$, un cône $Z' \in \mathcal{M}$ tel que

$$d_{y,t}(E', Z') \leq Ct^{b}.$$

Cela nous permettra d'utiliser la partie 10 dans [DDT] et d'obtenir le théorème 1.6.

B. Régularité près d'un point de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$ d'un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Une fois obtenu le théorème de régularité pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, on s'intéressera à la régularité près d'un point de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$ d'un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Voir le chapitre 4 pour la définition des points de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ d'un cône minimal, et le chapitre 6 pour ceux d'un ensemble minimal général de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. En bref, un point est dit de type $\mathbb{P}$ si la densité en ce point est égale à celle d'un point d'un plan de dimension 3. Un point est dit de type $\mathbb{Y}$ si la densité en ce point est égale à celle au centre d'un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$ et similairement pour la définition d'un point de type $\mathbb{T}$. Maintenant, on a le théorème suivant, qui est d'Almgren dans [Al].

Théorème 1.7 [Al]. *Soit E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine. Si $\partial E = E \cap \partial B(O,1)$ est une sous-variété lisse de la sphère unité, alors E est un plan de dimension 3 passant par l'origine.*

En fait, pour démontrer ce théorème, Almgren a d'abord montré que la surface ∂E est topologiquement équivalent à une sphère de dimension 2. Ensuite, il a montré que toute surface fermé de dimension 2 dans $\partial B(O,1)$ qui a une courbure moyenne nulle partout et qui est topologiquement équivalente à une sphère de dimension 2, est exactement une sphère de dimension 2. J. Simons a généralisé le théorème 1.7 pour tout les cônes lisses de codimension 1 dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \leq 6$. Ici, un cône lisse veut dire un cône centré à l'origine et qui s'appuie sur une surface lisse de la sphère $\partial B(O,1)$. La démonstration de J. Simons utilise un calcul direct sur la deuxième variation de l'aire de $E \cap B(O,1)$. Il en déduit ensuite que la deuxième forme fondamentale en tout point de ∂E est nulle et puis on peut déduire facilement que ∂E est une sphère de dimension $n-2$.

Grâce au théorème 1.7, on peut montrer que si pour tout $z \in \partial E$, la densité $\theta_E(z)$ est égale à d_P (celle d'un point d'un plan de dimension 3), alors E est un plan de dimension 3. Si maintenant E est un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et $x \in E$ un point de type $\mathbb{P}$, on montre dans chapitre 6 que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que pour $t < r/2$ et $y \in B(x, r/2)$, E est ϵ-proche d'un plan de dimension 3 dans la boule $B(y,t)$. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1.8. *Soit E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et $x \in E$ un point de type $\mathbb{P}$. Alors pour chaque $\alpha > 0$, il existe un rayon $r > 0$ qui dépend de x et de α, tel que dans la boule $B(x,r)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec la constante Bi-Höldérienne plus petite que $1+\alpha$.*

Voir le chapitre 3 pour la définition d'équivalence Bi-Höldérienne. Notons qu'Allard dans [Ald] a montré qu'autour d'un point de type $\mathbb{P}$, E est une surface lisse de dimension 3. Mais ici on utilise les techniques différentes, on ne parle pas des courants, et la démonstration est plus simple.

Grâce aussi au théorème 1.7, on déduit (voir le corollaire 5.33) qu'il n'existe pas de cône minimal dont la densité au centre est comprise entre les densités d_P et d_Y d'un plan et d'un cône de type $\mathbb{Y}$. Voir au début du chapitre 4 pour les définitions de d_P et d_Y. Soit maintenant $x \in E$ un point de type $\mathbb{Y}$. Alors on peut montrer que près de x, les points ont pour densité soit d_P, soit d_Y, soit une densité très légèrement plus grande que d_Y. Cela nous permet de conclure que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que si $y \in E \cap B(x, r/2)$ et $t \leq r/2$, E est ϵ-proche d'un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$. C'est exactement ce dont on a besoin pour obtenir l'équivalence Bi-Höldérienne autour de x. On déduit le théorème suivant.

Théorème 1.9. *Pour chaque $\alpha > 0$, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que les choses qui suivent sont vraies. Soit E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. On suppose que $x \in E$ est tel que $d_Y \leq \theta_E(x) \leq d_Y + \epsilon$. Alors il existe un rayon $r > 0$ tel que dans la boule $B(x,r)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, avec la constante Bi-Höldérienne plus petite que $1+\alpha$.*

C. L'existence d'un point de type différent de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Y}$ pour un ensemble minimal de Mumford-Shah près d'un cône de type $\mathbb{T}$.

Un autre résultat de cette thèse est l'existence d'un point de type différent de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Y}$ pour un ensemble minimal de Mumford-Shah dans $\mathbb{R}^4$, à condition que cet ensemble soit très proche d'un cône de type $\mathbb{T}$ dans $B(O,1)$. On donne la définition d'un ensemble minimal de Mumford-Shah, qu'on appellera aussi un ensemble MS-minimal.

Définition 1.10. *Soit E un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$. Un Mumford-Shah compétiteur (MS-compétiteur) pour E est un ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'on peut trouver $R > 0$ tel que*

$$F \setminus B(O,R) = E \setminus B(O,R)$$

et de plus, F sépare y et z quand $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus (B(O,R) \cup E)$ sont séparés par E dans $\mathbb{R}^n$.

Ici, un ensemble fermé K est dit séparer y et z dans un ouvert U si y et z sont dans deux composantes connexes différentes de $U \setminus K$. On peut donner maintenant la définition d'un ensemble MS-minimal.

Définition 1.11. *L'ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble MS-minimal si E a pour la mesure H^{n-1} localement finie et*

$$H^{n-1}(E \setminus F) \leq H^{n-1}(F \setminus E)$$

pour tout MS-compétiteur F de E.

La motivation pour montrer l'existence d'un point de type non-$\mathbb{P}$ et non-$\mathbb{Y}$ vient de la proposition 18.1 dans [D1]. Dans cette proposition, G.David a montré que si E est un ensemble MS-minimal qui est très proche d'un cône de dimension 2 de type $\mathbb{T}$ dans $B(O,1)$, alors il existe un point de type $\mathbb{T}$ dans $E \cap B(O,3/4)$. Ceci lui permet ensuite de montrer que E est Bi-Höldériennement équivalent à un $\mathbb{T}$ dans une boule plus petite, et aussi de montrer que tout ensemble MS minimal de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ tout entier est un cône minimal.

Maintenant, si E est de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, la situation est un peu différente. D'abord, puisqu'on ne sait pas s'il y a des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ dont les densités aux centres de ces cônes sont comprises strictement entre d_Y et d_T, on ne peut pas forcément parler d'un point de type $\mathbb{T}$ ici. Ensuite, puisque les points de type $\mathbb{Y}$ de E ne forment plus une courbe simple, mais une variété Höldérienne de dimension 2, on doit changer de technique pour montrer une propriété de connexité entre deux points de type $\mathbb{Y}$. On montrera le théorème suivant.

Théorème 1.12. *Soit E un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^4$. Alors il existe $\epsilon > 0$ une constante petite, mais géométrique, telle que si T est un cône minimal de type $\mathbb{T}$ de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ centré en O et tel que*

$$d_{O,1}(E,T) < \epsilon,$$

alors il existe un point de type non-$\mathbb{P}$ et non-$\mathbb{Y}$ dans $E \cap B(O,3/4)$.

Voilà tous les théorèmes présentés dans cette thèse. Il nous reste encore des problèmes ouverts, notamment la question de l'existence d'un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, dont la densité au centre serait légèrement plus grande que d_Y. Mieux encore, on se demande aussi s'il en existe un dont la densité est strictement comprise entre d_Y et d_T. Toutes ces questions seront présentées dans le chaptire 8.

Voici la structure de cette thèse.

Dans le chapitre 2, on présente des résultats généraux sur les ensembles minimaux.

Dans le chapitre 3, on introduit un résultat qui est la généralisation du théorème de Reifenberg.

Dans le chapitre 4, on montre l'équivalence Bi-Höldérienne locale loins d'origne pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. On montre qu'il sont localement Bi-Höldériennement équivalents à un cône minimal de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$.

Dans le chapitre 5, on montre l'équivalence C^1 locale loins d'origine pour les cônes de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. C'est le théorème 1.6.

Dans le chapitre 6, on montre l'équivalence Bi-Höldérienne avec un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$, autour d'un point x de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$, d'un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Dans le chapitre 7, on introduit les ensembles minimaux de Mumford-Shah. On va montrer l'existence d'un point de type différent de $\mathbb{P}$ et de $\mathbb{Y}$, d'un ensemble minimal de Mumford-Shah qui est ϵ-proche d'un cône de dimension 3 de type $\mathbb{T}$ dans $B(O, 1)$. Avec ϵ une constante très petite.

Dans le chapitre 8, on donne quelques questions ouvertes.

Chapitre 2

Propriétés des ensembles minimaux

Ce chapitre est une introduction aux propriétés connues et générales des ensembles minimaux. La référence se trouve principalement dans [D1]. Comme dans l'introduction, on a déjà donné la définition d'ensemble minimal et presque minimal, on commence ce chapitre par la définition des ensembles quasi-minimaux.

Définition 2.1. *Soient U un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $M \geq 1$ une constante, $\delta_0 > 0$, $h \in [0,1)$. On note $GAQ(M, \delta_0, U, h)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés E de U tels que $H^d(E \cap B) < +\infty$ pour chaque boule $B \subset U$ et*

$$H^d(E \cap W_1) \leq MH^d(\varphi_1(E \cap W_1)) + h\delta^d \tag{2.1.1}$$

pour tout $\delta \leq \delta_0$ et pour toute famille de fonctions continues $\varphi_t, 0 \leq t \leq 1$ comme dans la définition 1.4. Ici, $W_1 = \{x : \varphi_1(x) \neq x\}$ et $\delta = \operatorname{diam}(\hat{W})$.

Les éléments de $GAQ(M, \delta_0, U, h)$ sont appelés les ensembles quasi-minimaux d'Almgren généralisés. On constate que si $M = 1$ et $h = 0$, il sont exactement les ensembles minimaux dans U (voir [D1]). On introduit la définition suivante.

Définition 2.2. *Pour chaque ensemble fermé $E \subset U$, on appelle*

$$E^* = \{x \in E; H^d(E \cap B(x,r)) > 0 \text{ pour tout } r > 0\}$$

le support fermé dans U de la restriction de H^d à E. On dit que E est réduit si $E^* = E$.

On observe que

$$H^d(E \setminus E^*) = 0,$$

car on peut recouvrir $E \setminus E^*$ par un nombre dénombrable des boules B_j telles que $H^d(E \cap B_j) = 0$. On prend d'abord $E \cap K$, avec K un compact qui ne rencontre pas E^*, donc pour chaque $x \in E \cap K$, il existe une boule B_x tel que $H^d(E \cap B_x) = 0$ car x n'est pas dans E^*. Maintenant $E \cap K$ est recouvert par les boules $B_x, x \in E \cap K$ comme ci-dessus. Mais $E \cap K$ est compact, donc il existe un sous-recouvrement fini des B_x, qu'on appelle $\{B_j\}$, $1 \leq j \leq m$. On a

$$H^d(E \cap K) \leq \sum_{j=1}^{m} H^d(E \cap B_j)$$

ce qui est égal à zéro, par définition des B_j. Donc $H^d(E \cap K) = 0$ pour chaque K compact dans $E \setminus E^*$. On en déduit que $H^d(E \setminus E^*) = 0$.

Une autre remarque est que si $E \in GAQ(M, \delta_0, U, h)$, alors E^* est aussi dans $GAQ(M, \delta_0, U, h)$. Cela est dû au fait que $H^d(E \setminus E^*) = 0$, donc on a aussi $H^d(\varphi_1(E \setminus E^*)) = 0$ car φ_1 est Lipschitzienne, où φ_1 est la fonction Lipschitzienne utilisée dans la définition 2.1. Ensuite $H^d(E \cap W_1) = H^d(E^* \cap W_1)$ et $H^d(\varphi_1(E \cap W_1)) = H^d(\varphi_1(E^* \cap W_1))$. On a maintenant, grâce à (2.1.1) et les égalités ci-dessus,

$$H^d(E^* \cap W_1) \leq MH^d(\varphi_1(E^* \cap W_1)) + h\delta^d$$

donc $E^* \in GAQ(M, \delta_0, U, h)$.

On donne quelque propriétés des ensembles quasi-minimaux, qui viennent pour l'essentiel de [Al], [DS] et [D1].

Proposition 2.3. *Pour chaque $M \geq 1$ il existe des constantes $h > 0$ et $C \geq 1$, qui ne dépendent que de n, d et M, telles que si $E \in GAQ(M, \delta, U, h)$, $x \in E^*$, et $0 < r < \delta$ sont tels que $B(x, 2r) \subset U$, alors*

$$C^{-1}r^d \leq H^d(E \cap B(x, r)) \leq Cr^d.$$

On appelle cela la propriété de régularité d'Ahlfors de E^*.

Avant de parler d'autres propriétés des ensembles quasi-minimaux, on donne quelques définitions et propriétés de la distance de Hausdorff sur les ensembles. Soient $H \in U$ un compact, E, F fermés dans U, la distance Hausdorff locale d_H entre E et F est définie comme

$$d_H(E, F) = \sup\{\mathrm{dist}(x, F); x \in E \cap H\} + \sup\{\mathrm{dist}(x, E); x \in F \cap H\}.$$

Donc si $d_H(E, F) = 0$, alors $E = F$ dans H. Ensuite, si $\{E_k\}$ est une suite d'ensembles fermés dans U et $E \subset U$ un fermé qui satisfont à

$$\lim_{k \to +\infty} d_H(E_k, E) = 0$$

pour chaque compact $H \subset U$, alors on dit que la suite $\{E_k\}$ converge vers E dans U. On a le lemme suivant [D1].

Lemme 2.4. *Soit $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles fermés dans U, alors il existe une sous-suite $\{E_{k_j}\}$ de $\{E_k\}$ et un ensemble fermé $E \subset U$ tels que $\{E_{k_j}\}$ converge vers E dans U.*

Maintenant, si on a une suite $\{E_k\}$ d'ensembles quasi-minimaux réduits qui converge vers un ensemble E dans U, alors on peut estimer la mesure de E dans chaque ensemble ouvert ou fermé de U, comme suit.

Lemme 2.5. *Soit $\{E_k\}$ une suite d'ensembles fermés réduits qui sont tous dans $GAQ(M,\delta,U,h)$. Supposons que h est assez petit, ne dépendant que de n,d et M, et que $\{E_k\}$ converge vers un ensemble fermé E dans U. Alors E est réduit,*

$$H^d(E\cap V) \le \liminf_{k\to+\infty} H^d(E_k\cap V) \text{ pour chaque ouvert } V\subset U,$$

et

$$E\in GAQ(M,\delta,U,h).$$

Voir [D1], lemme 3.3 pour la démonstration.

Lemme 2.6. *Soient $U,M,\delta,h,\{E_k\}$ et E comme dans le lemme précédent. On suppose h suffisamment petit, ne dépendant que de d et M. Alors*

$$\limsup_{k\to+\infty} H^d(E_k\cap H) \le (1+Ch)MH^d(E\cap H)$$

pour tout compact $H\subset U$. Ici, C ne dépend que de d et M.

Pour la démonstration, voir [D1], lemme 3.12. En particulier, toutes les inégalités ci-dessus restent valable quand $\{E_k\}$ est une suite d'ensembles minimaux, avec $M=1$ et $h=0$.

Lemme 2.7. *Soit $\{E_k\}$ une suite d'ensembles presques minimaux dans U, avec la même fonction de jauge h. On suppose que chaque E_k est réduit et que la suite converge vers un ensemble fermé E dans U. Alors E est un ensemble presque minimal dans U, avec la même fonction de jauge h.*

Voir [D1], lemme 3.3 pour la démonstration. On déduit de ce lemme que si E_k est un ensemble presque minimal avec la fonction de jauge h_k, si pour tout $r>0$, $\lim_{k\to+\infty} h_k(r)=0$, et si E_k converge vers un ensemble fermé E dans U, alors E est un ensemble minimal dans U. Voir [D1] pour plus de détails.

On donne maintenant quelques notions de densité. Pour un ensemble $A\in\mathbb{R}^n$ de dimension d et $x\in A, r>0$, on définit

$$\theta_A(x,r)=\frac{H^d(A\cap B(x,r))}{r^d},$$

et de plus, si la limite $\lim_{r\to 0}\theta_A(x,r)$ existe et est finie, on l'appelle densité de A en x, et on la note $\theta_A(x)$.

Proposition 2.8. *Soit E un ensemble minimal de dimension d dans $B(O,R)$. On suppose qu'il existe un intervalle $]a,b[$ $(0<a<b<R)$ et une constante $\theta_0\ge 0$ tels que*

$$\theta_E(O,r)=\theta_0 \text{ pour } a<r<b.$$

Alors, il existe un cône minimal C centré en O tel que

$$E\cap[B(O,b)\setminus\overline{B}(O,a)] = C\cap[B(O,b)\setminus\overline{B}(O,a)].$$

Démonstration. Voir [D1], théorème 6.2.

Proposition 2.9. *Pour chaque $n \geq 0$ et $\tau > 0$, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que les choses suivantes sont exactes. Soit E un ensemble presque minimal dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, avec la fonction de jauge h. Soient $x \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x,r) \in U$, $h(2r) < \epsilon$ et*

$$\theta_E(x,r) \leq \inf{}_{0<t<r/100} \theta_E(x,t) + \epsilon.$$

Alors il existe un cône minimal C centré en x tel que

$$\begin{aligned}&\text{dist } (y,C) \leq \tau r \text{ pour } y \in E \cap B(x,(1-\tau)r)\\ &\text{dist } (y,E) \leq \tau r \text{ pour } y \in C \cap B(x,(1-\tau)r).\end{aligned}$$

De plus, on a $|H^d(E \cap B(y,t)) - H^d(C \cap B(y,t))| \leq \tau r^d$, pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$ tels que $B(y,t) \subset B(x,(1-\tau)r)$.

Démonstration. Voir [D1], proposition 7.1.

On introduit maintenant la notion de limite d'explosion. Une limite d'explosion de E en x est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$ qui est obtenu comme la limite dans $\mathbb{R}^n$ d'une suite $\left\{r_k^{-1}(E-x)\right\}$, avec $\lim_{k\to+\infty} r_k = 0$.

Lemme 2.10. *Soit E un ensemble presque minimal dans un ouvert U, soit $x \in E$ tel que*

$$\theta_E(x) = \lim_{r\to 0} r^{-d} H^d(E \cap B(x,r)) \quad \textit{existe.}$$

Alors toute limite d'explosion de E en x est un cône minimal F centré en O, et $H^d(F \cap B(O,1)) = \theta_E(x)$.

Démonstration. Voir [D1], proposition 7.31.

Lemme 2.11. *Soient m, n, d trois entiers positifs. On suppose que $E \times \mathbb{R}^m$ est un ensemble minimal de dimension $d+m$ dans $\mathbb{R}^{n+m}$, alors E est aussi un ensemble minimal de dimension d dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Voir [D1], proposition 8.3.

Pour étudier un ensemble minimal, on s'intéresse aussi aux densités de ses points. On a le résultat suivant qui se trouvent dans [D1], proposition 5.16.

Lemme 2.12. *Soit E un ensemble minimal de dimension d dans $B(x,R)$, avec $x \in E$, alors la fonction $f(r) = \theta_E(x,r) = r^{-d} H^d(E \cap B(x,r))$ est croissante pour $0 < r < R$.*

En fin, on a le lemme suivant, qui compare les mesures de deux ensembles presques minimaux qui sont très proche localement.

Lemme 2.13. *Pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ qui ne dépend que de δ, tel que si E et F sont deux ensembles presques minimaux, de dimension d dans $B(x, 3r) \subset \mathbb{R}^n$, avec une fonction de jauge h, et si un point x et un rayon r qui satisfont à*

$$h(20r/9) \leq \epsilon, d_{x,10r/9}(E, F) \leq \epsilon$$

alors

$$H^d(E \cap B(x, r)) \leq H^d(F \cap B(x, (1 + \delta)r)) + \delta r^d.$$

Démonstration. Voir [D1], lemme 16.43.

Chapitre 3

Une généralisation du théorème de Reifenberg

Dans ce chapitre, on introduit le théorème de Reifenberg généralisé. La référence se trouve dans [DDT].

Pour commencer, on pose

$$d_{x,r}(E,F) = \frac{1}{r}.\max\{\sup\{\mathrm{dist}(z,F); z \in E\cap B(x,r)\}, \sup\{\mathrm{dist}(z,E); z \in F\cap B(x,r)\}\},$$

lorsque E, F sont deux ensembles fermés qui rencontrent $B(x,r)$.

On introduit dans ce chapitre une collection des cônes spéciaux de dimension d dans $\mathbb{R}^n$. On déclare quelque résultats de régularité pour des ensembles qui sont assez proches de ces cônes.

On appelle $\mathbb{P}'_d$ l'ensemble des plans affines de dimension d.

On appelle $\mathbb{Y}'_d$ la collection des cônes de dimension d de type $\mathbb{Y}$, définis comme suit ; on prend un ensemble Z dans un plan P de dimension 2 de $\mathbb{R}^n$, qui est l'union de trois demi-droites avec le même extrémité, et l'angle entre deux demi-droites entre elles est supérieur à $\pi/2$. On prend V un sous-espace de dimension $d-1$ qui est orthogonal à P. On pose $Y_0 = Z \times V$. Un ensemble de type $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$ est l'image par une isométrie de tout ensemble Y_0. En fait, l'angle $\pi/2$ peut sans doute être remplacé par n'importe quel angle ω strictement positif.

On appelle $\mathbb{T}'_d$ la collection des cônes de type $\mathbb{T}$ de dimension d, définis comme suit ; on prend un cône minimal Z de type $\mathbb{T}$ de dimension 2 dans $P' = \mathbb{R}^3$, comme dans le chapitre 1. On prend ensuite un sous-espace V de dimension $d-2$, qui est orthogonal à P', on a alors $\mathbb{T}'_d = j(Z \times V)$, où j est une application affine bi-Lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$, avec la constante bi-Lipschitzienne plus grande que $1/100$.

Donc soient $\mathbb{P}'_d$, $\mathbb{Y}'_d$, $\mathbb{T}'_d$ comme ci-dessus. On pose $\mathbb{Z}'_d = \mathbb{P}'_d \cup \mathbb{Y}'_d \cup \mathbb{T}'_d$. Pour les choses qui suivent, on se donne un ensemble fermé $E \in \mathbb{R}^n$, tel que $O \in E$. On mesure la distance de E aux ensembles dans $\mathbb{Z}'_d$ par la formule

$$\beta_Z(x,r) = \inf_{Z \in \mathbb{Z}'_d} d_{x,r}(E,Z). \tag{3.1}$$

On suppose que

$$\beta_Z(x,r) \leq \epsilon \text{ pour } x \in E \cap B(O,3) \text{ et } 0 < r \leq 3,$$

avec ϵ très petit. Cela veut dire que pour $x \in E \cap B(O,3)$, on peut choisir $Z(x,r) \in \mathbb{Z}'_d$ tel que $d_{x,r}(E, Z(x,r)) \leq \epsilon$. Alors E sera l'image par une application Bi-Höldérienne d'un ensemble $Z \in \mathbb{Z}'_d$. On a le théorème suivant (théorème 2.2 dans [DDT]).

Théorème 3.2. *Pour chaque $\alpha \in (0,1)$, on peut trouver $\epsilon \in (0, 10^{-15})$ tel que :*
Soit $E \in R^n$ est compact, contient l'origine, et supposons pour chaque $x \in E \cap B(O,2)$ et chaque rayon $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B(O,2)$, il existe un cône $Z(x,r) \in \mathbb{Z}'_d$ contenant x tel que

$$d_{x,r}(E, Z(x,r)) < \epsilon.$$

On suppose de plus que si $d > 2$, les cônes $Z(x,r)$ ci-dessus n'appartiennent pas à $\mathbb{T}'_d$.

Alors, il existe un cône $Z \in \mathbb{Z}'_d$ passant par l'origine, de même type que le cône $Z(O,2)$, et une fonction f injective $f : B(O,3/2) \to B(O,2)$ tels que

$$B(O,1) \subset f(B(O,3/2)) \subset B(O,2),$$
$$E \cap B(O,1) \subset f(Z \cap B(O,3/2)) \subset E \cap B(O,2),$$
$$(1+\alpha)^{-1}|x-y|^{1+\alpha} \leq |f(x) - f(y)| \leq (1+\alpha)|x-y|^{1/(1+\alpha)} \text{ pour } x, y \in B(O,3/2).$$

On peut, de plus, prendre $\alpha < C\epsilon$ quand ϵ est petit.

Si notre ensemble E satisfait à la conclusion du théorème, on dit que E est Bi-Höldériennement équivalent à Z dans la boule $B(O,2)$, avec la constante Bi-Höldérienne $1+\alpha$, et $B(O,2)$ est la boule Bi-Höldérienne de E, de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ selon que Z est de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$, respectivement.

Si on peut contrôler mieux les distances $\beta_Z(x,r)$ à toutes petites échelles, on peut avoir la régularité C^1 de E. On a le théorème suivant [DDT].

Théorème 3.3. *On prend $d = 2$. On suppose que pour chaque $x \in E \cap B(O,2)$ et pour chaque r tel que $B(x,r) \subset B(O,2)$, il existe un cône $Z(x,r) \in \mathbb{Z}'_2$ et une fonction positive $\epsilon(r)$ tel que $d_{x,r}(E, Z(x,r)) \leq \epsilon(r)$, et on suppose en plus*

$$\sum_{k \geq 0} \epsilon(2^{-k}) < +\infty$$

alors il existe un cône Z et une fonction f comme dans le théorème 3.2, qui satisfont à toutes les conclusions du théorème 3.2, et en plus

$$f \text{ est une fonction de classe } C^1.$$

Chapitre 4

Régularité Bi-Höldérienne pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$

Comme dans le chapitre précédent, il existe trois types de cônes minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$; ce sont les plans, les cônes de type $\mathbb{Y}$ et les cônes de type $\mathbb{T}$. On prend un cône de chaque type, P' de type $\mathbb{P}$, Y' de type $\mathbb{Y}$ et T' de type $\mathbb{T}$, dans un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$, tous centrés à l'origine, on appelle d'_P, d'_Y, d'_T les densités de ces cônes à l'origine.

On considère les ensembles $P = P' \times \mathbb{R}, Y = Y' \times \mathbb{R}, T = T' \times \mathbb{R}$ qui sont les produits de P', Y', T' avec une droite orthogonale au sous-espace ci-dessus. Alors P, Y, T sont des cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ centrés à l'origine. On appelle d_P, d_Y, d_T les densités de ces cônes à l'origine, respectivement. Les cônes qui sont image par une isométrie de P, Y ou T sont appelés les cônes minimaux de dimension 3 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$, respectivement.

On explique un peu pourquoi P, Y et T sont des cônes minimaux. En fait, on sait que P', Y' et T' sont des ensembles minimaux de Mumford-Shah dans $\mathbb{R}^3$. Voir le chapitre 7 pour la définition des ensembles minimaux de Mumford-Shah et la proposition 7.5 pour la preuve du fait que $A \times \mathbb{R}$ est un ensemble minimal de Mumford-Shah si A l'est. Donc leur produits avec $\mathbb{R}$ sont aussi des ensembles minimaux de Mumford-Shah dans $\mathbb{R}^4$. On déduit que P, Y, T sont des ensembles au sens d'Almgren.

On définit ensuite l'axe d'un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{P}, \mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^4$. Pour un cône P de type $\mathbb{P}$, l'axe de P est lui-même. Pour un cône Y de type $\mathbb{Y}$, alors $Y = Y'' \times L$, où Y'' est un cône minimal de dimension 1 de type $\mathbb{Y}$ contenu dans un plan Q de dimension 2 et L est un plan de dimension 2 passant par le centre de Y'' et orthogonal à Q. On appelle L l'axe de Y. Pour un cône T de type $\mathbb{T}$, alors $T = T' \times L'$, avec T' un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{T}$ contenu dans un plan R de dimension 3 et L' est la droite passant par le centre de T' et orthogonal à R. On appelle L' l'axe de T.

Fixons dans ce chapitre E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine, et $x \in E \cap \partial B(O,1)$. Pour chaque $z \in \mathbb{R}^4$, on note H_z le plan affine de dimension 3 passant par z et orthogonal à Oz et $E_z = E \cap H_z$. On pose en particulier $H = H_x$ et $E' = E_x$.

Le but de ce chapitre est de montrer que pour chaque $\tau > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que E' est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal de dimension 2 dans H et centré en x, dans la boule $B(x,r)$, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1+\tau$.

Lemme 4.1. *Toute limite d'explosion de E en x est un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{P}, \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Une limite d'explosion de E en x est de la forme $F = \lim_{k\to\infty} \frac{E-x}{r_k}$, avec $\{r_k\}$ une suite positive qui tend vers zéro. On veut montrer que F est un ensemble de la forme $F = F' \times D$, avec D la droite qui passe par l'origine et qui contient x, et F' un ensemble de dimension 2 contenu dans l'hyperplan orthogonal à D. Donc soit $y \in F$; on veut montrer que $y + D \subset F$. On pose $E_k = \frac{E-x}{r_k}$; puisque $\{E_k\}$ tend vers F, on peut trouver $y_k \in E_k$ tel que $\{y_k\}$ tend vers y. Posons $z_k = r_k y_k + x$, alors $z_k \in E$ par la définition de E_k, et z_k tend vers x car r_k tend vers zéro. Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$, et posons $v_k = (1+\lambda r_k) z_k$. Alors $v_k \in E$, car E est un cône centré à l'origine. Ensuite $w_k = r_k^{-1}(v_k - x)$ est contenu dans E_k. De plus,

$$\begin{aligned}
w_k &= r_k^{-1}((1+\lambda r_k)z_k - x) \\
&= r_k^{-1}((1+\lambda r_k)(r_k y_k + x) - x) \\
&= r_k^{-1}(r_k y_k + \lambda r_k^2 y_k + \lambda r_k x) \\
&= y_k + \lambda x + \lambda r_k y_k
\end{aligned}$$

donc la suite $\{w_k\}$ tend vers $y + \lambda x$. Donc $y + D \subset F$ quand $y \in F$. Maintenant posons Q l'hyperplan passant par O et orthogonal à D. Posons ensuite $F' = F \cap Q$. C'est clair que $F = F' \times D$.

Ensuite, par le lemme 2.10, puisque F est une limite d'explosion de E en x, alors F est un cône minimal centré en O. Mais $F = F' \times D$, donc F' est aussi un cône (du fait que F est un cône), minimal (par le lemme 2.11), de dimension 2 dans l'hyperplan de dimension 3, centré en O. Donc F' est un plan de dimension 2, un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ ou un cône minimal de type $\mathbb{T}$. Cela termine notre démonstration. □

Notons que pour tout $z \in E \cap \mathbb{R}^4 \setminus O$, par homothétie, toute limite d'explosion de E en z est aussi un cône minimal de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$.

Lemme 4.2. *Si E est un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine et $x \in E \cap \partial B(0,1)$, alors la densité $\theta_E(x)$ existe et est égale à d_P, d_Y ou d_T.*

Démonstration. D'après le lemme 4.1, une limite d'explosion F de E en x est un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{P}, \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ et centré en O.

On applique le lemme 2.10, $H^d(F \cap B(O,1)) = \theta_E(x)$. Mais $H^d(F \cap B(O,1)) = d_P, d_Y$ ou d_T selon que F est de type $\mathbb{P}, \mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$, respectivement. On a donc ce qu'il faut démontrer. □

Maintenant, pour tout $z \in E \setminus O$, la demi-droite Oz coupe la sphère $\partial B(O,1)$ en un point z'. On a donc $\theta_E(z) = \theta_E(z')$, par homothétie. Donc pour tout $z \in E \cap \mathbb{R}^4 \setminus O$, la densité $\theta_E(z)$ est d_P ou d_Y ou d_T. On dit que z est de type $\mathbb{P}$, si $\theta_E(z) = d_P$, de type $\mathbb{Y}$, si $\theta_E(z) = d_Y$ et de type $\mathbb{T}$, si $\theta_E(z) = d_T$. On constate que toute limite d'explosion de E en z est de la même type que z.

Proposition 4.3. *Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $r_x > 0$ tel que pour $r \leq r_x$, il existe un cône minimal $F(x,r)$ de dimension 3 , de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ dont l'axe passe par l'origine, tel que*

$$d_{x,r}(E, F(x,r)) \leq \epsilon.$$

On remarque qu'un cône minimal F de dimension 3 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ dont l'axe passe par O et x est égal à $F' \times D_x$, où D_x est la droite qui passe par O et x et où F' est un cône minimal de dimension 2 contenu dans l'hyperplan orthogonal à D_x.

Démonstration. Sinon, il existe $r_1, r_2, ..., r_k, ...$ qui tendent vers 0 tels que pour tout cône minimal F comme ci-dessus, on a $d_{x,r_k}(E,F) > \epsilon$.

On pose alors $E_k = \frac{E-x}{r_k}$; quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que dans $\mathbb{R}^4$, $\lim_{k\to\infty} E_k = M$ existe.

C'est clair que M est une limite d'explosion de E en x. Donc M est de la forme $M' \times D_x$, avec M' un cône minimal de dimension 2 (par le lemme 4.1). Donc, il existe k tel que $D_{(O,1)}(E_k, M) < \epsilon$ ($D_{x,r}$ désigne la distance entre deux ensembles dans la boule $B(x,r)$). On a donc

$$D_{O,r_k}(E - x, M) < \epsilon r_k \text{ car } E_k = \frac{E-x}{r_k}$$
$$d_{x,r_k}(E, x + M) < \epsilon$$

mais M est de type $M' \times D_x$, donc $M = x + M$, donc $d_{x,r_k}(E,M) < \epsilon$, ce qui contredit la définition des r_k (car M est de la forme $F(x,r)$ comme ci-dessus). On obtient une contradiction et on termine ainsi la démonstration. □

Notons que pour ϵ assez petit, la démonstration ci-dessus dit également que $F(x,r)$ est un plan de dimension 3 si x est de type $\mathbb{P}$, un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ si x est de type $\mathbb{Y}$ et un cône minimal de type $\mathbb{T}$ si x est de type $\mathbb{T}$.

On donne maintenant des lemmes importants pour montrer l'équivalence bi-Höldérienne près de x. L'idée est toujours d'utiliser les cônes minimaux de type $\mathbb{P}$,

$\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ comme référence.

Lemme 4.4. *Soit $C \subset \mathbb{R}^4$ un cône minimal de dimension 3, centré à l'origine. Alors, si $\theta_C(O) = d_P$, (où $\theta_C(O)$ est la densité de C en O), C est un plan.*

Démonstration. Puisque C est minimal, C est rectifiable et donc pour H^3-presque tout point $x \in C$, on a $\theta_C(x) = 1$. On prend un tel x.

On a $\theta_C(O) = 1$, donc $\theta_C(O, r) = 1$, car C est un cône centré en O.
Pour r assez grand,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_C(x, r - |x|)}{\theta_C(O, r)} &= \frac{H^3(C \cap B(x, r - |x|))}{H^3(C \cap B(O, r))} . \frac{r^3}{(r - |x|)^3} \\ &\leq \frac{r^3}{(r - |x|)^3} \\ &\text{(car la boule } B(x, r - |x|) \text{ est contenue dans la boule } B(O, r)), \end{aligned}$$

ce qui tend vers 1 quand r tend vers $+\infty$. Alors $\limsup_{r \to \infty} \theta_C(x, r - |x|) \leq 1$.

Mais $\theta_C(x, r - |x|)$ est une fonction croissante de r, $\theta_C(x) \leq \theta_C(x, r - |x|) \leq 1$ pour $r \geq |x|$. On en déduit $\theta_C(x, r - |x|) = 1$ pour $r \geq |x|$.

Donc $\theta_C(x, r)$ est une constante. Par la proposition 2.8, C est un cône centré en x. Donc C est un cône centré en presque chacun de ses points. On montre maintenant que C est un plan de dimension 3.

Soient M, N, P, Q 4 points dans C qui n'appartiennent pas au même plan affine de dimension 2, c'est à dire qui forment un tétraèdre. Il existe 4 point comme cela, sinon, C est contenu dans un plan affine de dimension 2 et puis la dimension de C est 2, ce qui n'est pas possible. Maintenant, C est un cône centré en M, donc la demi-droite MN est contenue dans C, de même, la demi-droite NM est aussi contenue dans C, donc la droite MN est contenue dans C. Puisque C est aussi un cône centré en P, le cône centré en P et contient la droite MN est contenu dans C. Par le même raisonnement, le cône centré en M qui contient la droite NP et le cône centré en P qui contient la droite MN, sont contenus dans C. L'union des trois cônes ci-dessus est bien le plan affine MNP.

On raisonne totalement comme ci-dessus, pour montrer que le cône centré en Q qui contient le plan MNP, le cône centré en P qui contient le plan MNQ,... (il y a 4 cônes en tous), sont contenus dans C. Donc C contient le plan de dimension 3 $MNPQ$. On doit avoir que C est exactement ce plan. Sinons, il existe un point $R \in C$ qui n'est pas contenu dans $MNPQ$, alors le cône centré en R et qui contient le plan de dimension 3 $MNPQ$ est contenu dans C, mais c'est un ensemble de dimension 4, donc la dimension de C est 4 (absurde).

Donc C est un hyperplan affine de dimension 3 et on termine la démonstration.$\square$

Lemme 4.5. *Pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si C est un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine, tel que $\theta_C(O) < 1+\epsilon$, alors il existe un plan P passant par O, tel que $d_{O,1}(C,P) < \delta$.*

Démonstration. Supposons que ce soit faux ; alors il existe $\delta > 0$ et des cônes minimaux $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ centrés à l'origine, $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n, ... \to 0$ tels que

$$\text{pour tout } i, \theta_{C_i}(O) < 1+\epsilon_i$$

et pour tout plan P passant par O,

$$d_{O,1}(C_i, P) \geq \delta.$$

On regarde les ensembles $C_i \cap \overline{B}(O,1)$. Ce sont des ensembles compacts, alors, il existe une sous-suite $C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_n}, ...$ tel que :

$$\lim_{k\to\infty} (C_{i_k} \cap \overline{B}(O,1)) \text{ existe. Notons } C \text{ cette limite ;}$$

alors C est un cône minimal (puisque c'est une limite des cônes minimaux centrés en O), et sa densité est

$$\begin{aligned}
\theta_C(O) &= H^d(C \cap B(O,1)) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} H^d(C_{i_k} \cap B(O,1)) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \theta_{C_{i_k}}(O) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} 1+\epsilon_{i_k} = 1,
\end{aligned}$$

par le lemme 2.5 appliqué pour les cônes minimaux C_{i_k} qui convergent vers C.

Mais on a également $\theta_C(O) = \theta_C(O,r)$ pour tout $r > 0$, car C est un cône centré à l'origine. C est un ensemble rectifiable, donc il existe $x \in C$ dont la densité $\theta_C(x)$ est 1. On démontre comme dans le lemme 4.4 le fait que $\theta_C(O) \geq \theta_C(x) = 1$. On a donc $\theta_C(O) = 1$. Par le lemme 4.4, c'est un plan. On prend i_k assez grand tel que $d_{O,1}(C_{i_k}, C) < \delta/2$ et on obtient une contradiction. □

On passe maintenant à notre lemme principal. Comme ci-dessus, on sait que si la densité d'un cône minimal est très proche de celle d'un plan de même dimension, alors le cône est lui aussi très proche d'un plan. Mais la situation va changer si la densité est proche de celle d'un cône de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$ ou de type $\mathbb{T}$. On ne sait pas s'il y a un résultat pareil comme celui pour les plans. Mais si on ajoute une hypothèse que notre cône est aussi très proche d'un "'produit"', alors on a un lemme qui est l'analogue du lemme 4.5.

Lemme 4.6. *Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ avec la propriété suivante :*
On se donne un rayon $R > 0$. Soit $I \in \mathbb{R}^4$ avec $d(O,I) > 100R$, et soit C un cône minimal de dimension 3 centré en I qui admet les propriétés suivantes

$$m - \epsilon < \theta(C, I) < m + \epsilon, \tag{4.6}$$

où m prend une des trois valeurs d_P, d_Y, d_T et de plus, pour tout $x \in C \cap B(I,R)$, il existe une droite d_x passant par O telle que

$$\text{dist}(d_x, x) < \epsilon R \tag{4.6.1}$$

$$\text{pour tout } y' \in d_x \cap B(I,R), \text{ il existe } x' \in C : d(y',x') < \epsilon R. \tag{4.6.2}$$

Alors il existe un cône minimal Y_C dont l'axe passe par O et I, tel que $d_{I,R}(C, Y_C) \leq \delta$. De plus, Y_C est de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, ou $\mathbb{T}$ selon que m prend la valeur d_P,d_Y, ou d_T, respectivement.

Démonstration. Supposons que ce soit faux. Par homothétie, on peut supposer que $R = 1$. Alors il existe $\epsilon_1, ..., \epsilon_n, ... \to 0$ et des cônes minimaux $C_1, ..., C_n, ...$ centrés en I satisfaisant à l'hypothèse correspondante à $\epsilon_1, ..., \epsilon_n, ...$ mais pas à la conclusion. C'est à dire pour tout cône Y comme ci-dessus, on a $d_{I,1}(C_i, Y) > \delta$. Alors, on peut extraire une sous-suite $C_{i_1}, ..., C_{i_n}, ...$ qui converge vers un ensemble E. Comme les C_{i_j} sont des cônes minimaux centrés en I, E l'est aussi.

Maintenant, si $u \in E \cap B(I, 1/2)$, il existe $u_{i_1} \in C_{i_1}, u_{i_2} \in C_{i_2}, ..., u_{i_k} \in C_{i_k}, ...$ qui convergent vers u. D'après (4.6.1), pour chaque k il existe une droite d_{i_k} passant par O et un point $y_{i_k} \in d_{i_k}$ tel que $d(y_{i_k}, u_{i_k}) \leq \epsilon_{i_k}$ et puis la droite d_{i_k} satisfait aussi à l'hypothèse (4.6.2). Alors la suite $\{y_{i_k}\}$ tend aussi vers u. Si $u' \in Ou \cap B(I, 1/2)$, on prend $y'_{i_k} \in d_{i_k}$ de manière que $|Oy'_{i_k}|/|Oy_{i_k}| = |Ou'|/|Ou|$, où $|AB|$ désigne la longeur du segment AB. Puisque d_{i_k} est une droite passant par O, on obtient $|y'_{i_k}u'| = (|Ou'|/|Ou|).|y_{i_k}u|$, on en déduit que $\lim_{j\to+\infty} y'_{i_j} = u'$.

Mais pour chaque j, il existe un point $u'_{i_j} \in C_{i_j}$ tel que $d(u'_{i_j}, y'_{i_j}) < \epsilon_{i_j}$, d'après (4.6.2). Donc la suite $\{u'_{i_j}\}$ converge vers u', ce qui implique $u' \in E$. On a maintenant

$$\text{pour chaque } u \in E \cap B(I, 1/2), Ou \cap B(I, 1/2) \subset E, \tag{4.6.3}$$

en particulier $OI \cap B(I, 1/2) \subset E$.

De plus, E est un cône centré en I, donc on a $\vec{Iu} \subset E$, avec $\vec{Iu}$ la demi-droite partant de I et passant par u. Maintenant soit u_1 appartient à l'intersection du demi-plan de dimension 2 portant sur OI et passant par u avec $B(I, 1/2)$. On prend un point u_2 dans le segment $[Iu_1]$, assez proche de I de sorte que la demi-droite $\vec{Ou_2}$ coupe le segment $[Iu]$. Soit u_3 le point de l'intersection, alors $u_3 \in E$ puisque E est le cône centré en I et $u \in E$. Par (4.6.3) $u_2 \in Ou_3 \cap B(I, 1/2)$ est aussi dans E, enfin on utilise le fait que E est un cône centré en I pour conclure que $u_1 \in E$.

Donc pour chaque $u \in E \cap B(I, 1/2)$, dans $B(I, 1/2)$, le demi-plan de bord OI et qui contient u, est contenu dans E. On en déduit que E est de type $E' \times D$ dans $B(I, 1/2)$, avec D la droite contenant OI et E' un ensemble de dimension 2 dans l'hyperplan passant par O et orthogonal à D. Puisque E est un cône minimal, E' l'est aussi, par le lemme 2.11. Ensuite, $\theta_E(I) = \lim_{k\to\infty} \theta_{C_{i_k}}(I) = m$, alors la densité au centre de E' est d'_P, d'_Y ou d'_T selon que m soit égale à d_P, d_Y ou d_T, respectivement. Donc on a bien que E est l'un de trois types $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ en fonction de m. Maintenant, pour k assez grand, $d_{(I,1)}(C_{i_k}, E) < \delta/10$ et on obtient une contradiction. On termine ainsi la démonstration. $\square$

Grâce au lemme 4.6, on peut obtenir un corollaire qui contrôle la distance dans la boule $B(x,r)$ entre E et un cône minimal $C(x,r)$ de dimension 3, de type $\mathbb{P},\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ dont l'axe passe par O et x.

Corollaire 4.7. *Pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ qui ne dépend que de δ, tel que si $x \in E \cap \partial B(O,1)$ et $1/100 > r > 0$ un rayon assez petit qui satisfont à*

$$|\theta_E(x,r) - \theta_E(x)| \leq \epsilon, \tag{4.7.1}$$

alors, il existe un cône minimal Y de dimension 3, de type $\mathbb{P},\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ dont l'axe passe par O et x, tel que $d_{x,r/2}(E,Y) \leq \delta$. De plus, le type du cône minimal Y est exactement le type des limites par explosion de E en x.

Démonstration. D'après la proposition 2.9, pour chaque $\tau > 0$ petit, il existe $\epsilon > 0$ tel que si (4.7.1) est vraie, il existe un cône minimal C de dimension 3, centré en x tel que

$$d_{x,r/2}(E,C) \leq \tau, \tag{4.7.2}$$

et

$$|H^3(E \cap B(x,r/2)) - H^3(C \cap B(x,r/2))| \leq \tau r^3. \tag{4.7.3}$$

Mais on sait que $\theta_E(x,r) \geq \theta_E(x,r/2) \geq \theta_E(x)$, donc

$$\theta_E(x)(r/2)^3 \leq \theta_E(x,r/2)(r/2)^3 \leq (\theta_E(x)+\epsilon)(r/2)^3; \tag{4.7.4}$$

grâce à (4.7.3), on obtient

$$(\theta_E(x) - 8\tau)(r/2)^3 \leq H^3(C \cap B(x,r/2)) \leq (\theta_E(x)+\epsilon+8\tau)(r/2)^3. \tag{4.7.5}$$

Alors si on pose $\epsilon_1 = \epsilon + 8\tau$. On déduit de (4.7.5) que

$$\theta_E(x) - \epsilon_1 \leq \theta_C(x,r/2) \leq \theta_E(x) + \epsilon_1; \tag{4.7.6}$$

c'est la condition (4.6) dans le lemme 4.6, pour notre cône C centré en x et pour le rayon r. Vérifions les conditions (4.6.1) et (4.6.2) du lemme 4.6 pour le cône C.

On a $d_{x,r/2}(E,C) \leq \tau$, alors si $z \in C \cap B(x,r/4)$, il existe $y \in E \cap B(x,r/3)$ tel que $d(z,y) \leq \tau.r/2$. Maintenant E est un cône centré en O, donc la demi-droite d_y passant par O et y est contenue dans E. Donc si $y' \in d_y \cap B(x,r/2)$, $y' \in E \cap B(x,r/2)$ et donc il existe $z' \in C$ tel que $d(y',z') \leq \tau r/2$. Donc pour chaque $z \in C \cap B(x,r/4)$, la droite d_y ci-dessus satisfait aux conditions (4.6.1) et (4.6.2) du lemme 4.6, pour le rayon r. Si bien que notre cône C satisfait à toutes les hypothèses du lemme 4.6, avec une constante $\epsilon_2 = \max\{\epsilon_1, \tau\}$ pour le rayon r. On peut appliquer le lemme et donc pour chaque $\delta_1 > 0$ on peut choisir $\epsilon_2 > 0$ et un cône minimal Y de type $\mathbb{P}, \mathbb{Y}, \mathbb{T}$ avec l'axe passant par O et x, tels que

$$d_{x,r/2}(Y, C) \leq \delta_1, \tag{4.7.7}$$

en fait, Y est de type $\mathbb{P}$ si $\theta_E(x) = d_P$, de type $\mathbb{Y}$ si $\theta_E(x) = d_Y$ et de type $\mathbb{T}$ si $\theta_E(x) = d_T$. Maintenant, (4.7.7) et (4.7.2) nous donnent

$$d_{x,r/2}(E, Y) \leq \tau + \delta_1. \tag{4.7.8}$$

Maintenant pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que τ et δ_1 sont aussi petits qu'on veut, donc on choisit ϵ tel que $\tau + \delta_1 \leq \delta$. On conclure que pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$, tel que $d_{x,r/2}(E, Y) \leq \delta$. C'est ce qu'il faut démontrer.□

Le lemme suivant dit que si deux cônes sont très proches, alors leurs intersections avec un hyperplan sont très proches aussi.

Lemme 4.8. *Soient C et C_1 deux cônes centrés en O, $\epsilon > 0$ une constante très petite. Soient $r \leq 1/100$ un rayon très petit, $y \in C \cap \partial B(O, 1)$, H_y l'hyperplan de dimension 3, qui est tangent à $\partial B(O, 1)$ en y, $C' = C \cap H_y$, $C_1' = C_1 \cap H_y$. Si $z \in C \cap B(y, r/2) \cap H_y$, et $t \leq r/3$ satisfont à $d_{z,t}(C, C_1) \leq \epsilon$, alors*

$$d_{z,t/2}(C', C_1') \leq 2(1 + r)\epsilon.$$

Démonstration. Pour $w \in C' \cap B(z, t/2)$, il existe $w_1' \in C_1 \cap B(y, r)$ tel que $d(w, w_1') \leq \epsilon t$ car $d_{z,t}(C, C_1) \leq \epsilon t$, par l'hypothèse. Soit w_1 l'intersection de la demi-droite Ow_1' avec H_y. Alors $w_1 \in C_1 \cap H_y$. On veut estimer la distance $d(w, w_1)$.

Par l'inégalité triangulaire,

$$d(w, w_1) \leq \frac{d(w, w_1')}{\sin(\widehat{ww_1w_1'})} = \frac{d(w, w_1')}{\sin(\widehat{ww_1O})}$$

ici, $\widehat{xyz}$, où x, y, z sont des points dans $\mathbb{R}^4$, désigne l'angle entre deux demi-droites yx et yz. Donc $\widehat{xyz} \in [0, 2\pi]$.

On estime

$$\sin(\widehat{ww_1O}) = \frac{\mathrm{dist}(O, ww_1)}{d(O, w_1)} \geq \frac{1}{1 + r},$$

puisque $\mathrm{dist}(O, ww_1) \geq \mathrm{dist}(O, H_y) = 1$ et $d(O, w_1) \leq d(O, y) + d(y, w_1) \leq 1 + r$.

Donc on a $d(w, w_1) \leq (1 + r)\epsilon t$ pour chaque $w \in C' \cap B(z, t/2)$, et c'est clair que $w_1 \in B(z, t)$. De même, pour chaque $w_1 \in C_1' \cap B(z, t/2)$, il existe $w \in C' \cap B(z', t)$ tel que $d(w_1, w) \leq (1 + r)\epsilon t$, donc on a démontré que $d_{z,t/2}(C', C_1') \leq 2(1 + r)\epsilon$, c'est ce qu'on veut démontrer. □

L'équivalence Bi-Höldérienne pour un point de type $\mathbb{P}$.

Théorème 4.9. *Si x est de type $\mathbb{P}$, alors pour tout $\tau > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(x, r/4)$ est une boule Bi-Höldérienne pour E_x, de type $\mathbb{P}$, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \tau$.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3, pour chaque $\epsilon > 0$ petit, qu'on va choisir après, il existe $r = r_x > 0$ et un plan P passant par O et x tel que $d_{x,r}(E, P) \leq \epsilon$. Notons que d'après la proposition, on peut choisir r aussi petit qu'on veut.

Pour $y \in B(x, r/2)$, on a :

$$d_{y,r/2}(E, P) \leq 2d_{x,r}(E, P) \leq 2\epsilon$$

Alors, par le lemme 2.13, pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(y, r/2)) &\leq H^3(P \cap B(y, (1+\delta)r/2)) + \delta r^3 \\ &\leq ((1+\delta)r/2)^3 + \delta r^3 \\ &\leq (r/2)^3 + 2\delta r^3 \end{aligned}$$

On en déduit que $|\theta_E(y, r/2) - 1| \leq 16\delta$, mais on sait que $\theta_E(y) = d_P, d_Y$ ou d_T, et $\theta_E(y, r/2) \geq \theta_E(y)$, par le lemme 2.12, donc on obtient $\theta_E(y) \leq \theta_E(y, r/2) \leq 1 + 16\delta$, donc $\theta_E(y) < d_Y$ pour δ petit, donc $\theta_E(y) = 1$. On a alors

$$|\theta_E(y, r/2) - \theta_E(y)| \leq 16\delta.$$

Maintenant $\theta_E(y, r/2) < \theta_E(y) + 16\delta = 1 + 16\delta$; de plus, $\theta_E(y, t)$ est une fonction croissante de t, on en déduit que pour tout $t \leq r/2$, $\theta_E(y, t) \leq \theta_E(y) + 16\delta$. Par la proposition 2.9, pour chaque $\delta_1 > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ tel que pour $0 < t < r/2$, il existe un cône minimal $C(y, t)$ centré en y satisfaisant à

$$\begin{aligned} &d_{y,t}(E, C(y, t)) < \delta_1 \\ &|H^3(E \cap B(y, t)) - H^3(C(y, t) \cap B(y, t))| < \delta_1 t^3. \end{aligned} \tag{4.9.1}$$

On en déduit que $|H^3(C(y, t) \cap B(y, t)) - t^3\theta_E(y, t)| < \delta_1 t^3$, ce qui entraîne $|H^3(C(y, t) \cap B(y, t)) - t^3| < (16\delta + \delta_1)t^3$, donc $\theta_{C(y,t)}(y, t) < 1 + 16\delta + \delta_1$, où $\theta_{C(y,t)}(y, t) = t^{-3}H^3(C(y, t) \cap B(y, t))$, donc $\theta_{C(y,t)}(y)$-la densité de $C(y, t)$ en y, est inférieure à $1 + 16\delta + \delta_1$.

On regarde la condition (4.9.1), le fait que $d_{y,t}(E, C(y, t)) < \delta_1$ implique que

si $z \in C(y, t) \cap B(y, t)$, il existe $u \in E$ tel que $d(z, u) \leq t\delta_1$, puis, E est un cône centré en O, donc la demi droite Ou est contenue dans E, on appelle cette demi-droite d_z. Maintenant, puisque $d_z \subset E$

(4.9.2)
pour tout $u' \in d_z \cap B(y, t)$, il existe $z' \in C(y, t) \cap B(y, t)$ tel que $d(u', z') \leq t\delta_1$.

Maintenant, (4.9.2) avec le fait que $\theta_{C(y,t)}(y,t) < 1 + 16\delta + \delta_1$ sont exactement les conditions du lemme 4.6 pour le cône $C(y,t)$, pour le rayon t. Donc, on peut utiliser le lemme 4.6 et on obtient, pour chaque $\delta_2 > 0$, on peut choisir $\delta_1 > 0$ et puis $\delta > 0$, tels que :

il existe un plan $P(y,t)$ de dimension 3 passant par y, et O, tel que $d_{y,t}(C(y,t), P(y,t)) < \delta_2$.

Mais $d_{y,t}(E, C(y,t)) < \delta_1$, donc $d_{y,t/2}(E, P(y,t)) \leq 2(d_{y,t}(E, C(y,t)) + d_{y,t}(C(y,t), P(y,t))) < 2(\delta_1 + \delta_2)$, on pose $\delta_3 = 2(\delta_1 + \delta_2)$.

Donc, pour tout $y \in E \cap B(x, r/2)$ et pour tout $t < r/4$, il existe un plan $P(y,t)$ passant par y et O tel que

$$d_{y,t}(E, P(y,t)) < \delta_3.$$

Soient $z \in E_x \cap B(x, r/4)$ et $t \leq r/2$, soit $P'(z,t)$ l'intersection de $P(z,t)$ avec H_x, ici, $P(z,t)$ est l'analogue de $P(y,t)$ ci dessus. On obtient un plan $P'(z,t)$ de dimenson 2 dans H_x. Puisque $P(z,t)$ et E sont des cônes centrés en O, on a par le lemme 4.8

$$d_{z,t/2}(E_x, P'(z,t)) \leq 2(1+r)\delta_3 \leq 6\delta_3$$

puisque $r \leq 1/2$.

Donc, si ϵ est petit, on a le fait que pour tout $z \in E_x \cap B(x, r/4)$ et pour tout $t \leq r/4$, il existe un plan $P'(z,t)$ dans H_x, tel que

$$d_{z,t}(E_x, P'(z,t)) \leq 6\delta_3. \tag{4.9.3}$$

Par le théorème 3.2, pour chaque $\tau > 0$, on peut choisir $\delta_3 > 0$, et puis $r > 0$, tel que $E_x \cap B(x, r/4)$ soit Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 2 avec une constante $C = 1 + \tau$. On a donc terminé notre démonstration. $\square$

L'équivalence Bi-Höldérienne pour un point de type $\mathbb{Y}$.

On considère maintenant le cas où x est de type $\mathbb{Y}$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ donné, par le lemme 4.3, il exite $r > 0$ et un cône minimal $Y(x,r)$ de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par x et l'origine, tels que $d_{x,r}(E, Y(x,r)) \leq \epsilon$. Soit maintenant $y \in E \cap \partial B(O,1)$. Si notre cône minimal E est assez proche d'un cône minimal Y de type $\mathbb{Y}$, centré en y et en l'origine. Alors la proposition suivante donne l'existence d'un point de type $\mathbb{Y}$ près de y.

Proposition 4.10. *Soient $y \in E \cap \partial B(0,1)$ et $r < 1/2$. Il existe $\epsilon > 0$ une constante très petite, mais universelle, telle que si $Y(y,r)$ est un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et y, qui satisfait à $d_{y,r}(E, Y(y,r)) < \epsilon$. Alors, dans la boule $B(y, \frac{r}{50})$, il existe un point de type $\mathbb{Y}$ dans E_y.*

Une petite remarque avant de démontrer la proposition. Ici, $1/50$ est juste une constante symbolique. En fait, on peut montrer que pour chaque $\eta > 0$, il existe

$\epsilon > 0$ tel que si le cône minimal $Y(y,r)$ et ϵ satisfait aux hypothèses de la proposition, alors dans la boule $B(y,\eta r)$, il existe un point de type $\mathbb{Y}$ dans E_y.

Démonstration. On prend au début $\epsilon > 0$ très petit, qu'on va choisir après. Supposons que la proposition n'est pas vraie, alors pour tout $z' \in E_y \cap B(y, \frac{r}{50})$, z' n'est pas de type $\mathbb{Y}$. Puisque E est un cône centré en O, donc pour tout $z \in E \cap B(y, r/75)$, Oz coupe H_y en un point $z' \in E_y \cap B(y, r/50)$. De plus, z est du même type que z'. Donc si un point $z \in E \cap B(y, r/75)$ est de type $\mathbb{Y}$, alors le point z' comme ci-dessus appartient à $E_y \cap B(y, r/50)$ et est de type $\mathbb{Y}$, ce qui n'est pas possible. On en déduit que pour tout $z \in E \cap B(y, r/75)$, z n'est pas de type $\mathbb{Y}$. Soit maintenant $z \in E \cap B(y, r/75)$; par le lemme 2.13, pour chaque $\delta > 0$ on peut choisir $\epsilon > 0$, tel que

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(z, r/200)) &\leq H^3(Y(y,r) \cap B(z, (1+\delta)\frac{r}{200})) + \delta(\frac{r}{200})^3 \\ &\leq d_Y.((1+\delta)\frac{r}{200})^3 + \delta(\frac{r}{200})^3 \\ &< d_T(\frac{r}{200})^3. \end{aligned}$$

Donc si δ est assez petit, $H^3(E \cap B(z, r/200)) < d_T(\frac{r}{200})^3$ ou bien $\theta_E(z, r/200) < d_T$. On en déduit que $\theta_E(z) \leq \theta_E(z, r/200) < d_T$. On peut conclure que z ne peut pas être un point de type $\mathbb{T}$. Donc, si z n'est pas un point de type $\mathbb{Y}$, z ne peut qu'être un point de type $\mathbb{P}$.

Soit L l'axe de $Y(y,r)$; L est un 2-plan qui passe par O et y. Soient F_1, F_2, F_3 les trois demi-plans de dimension 3 qui forment $Y(x,r)$. Alors F_1, F_2, F_3 se coupent en L et l'angle entre deux demi-plans entre eux est 120°. Soient $w_i \in F_i \cap \partial B(y, r/100) \cap H_y, i = 1,2,3$. On a bien $\mathrm{dist}(w_i, L) = d(w_i, y) = r/100$ pour $1 \leq i \leq 3$. Or $d_{y,r}(E, Y(y,r)) \leq \epsilon$, donc pour chaque $1 \leq i \leq 3$, il existe $z_i \in E$ tel que $d(z_i, w_i) \leq \epsilon r$, et il est clair que $z_i \in B(y, r/75)$. Par le lemme 2.13, on a pour chaque $1 \leq i \leq 3$,

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(z_i, \frac{r}{200})) &\leq H^3(Y(y,r) \cap B(z_i, (1+\delta)\frac{r}{200})) + \delta(\frac{r}{200})^3 \\ &= H^3(F_i \cap B(z_i, (1+\delta)\frac{r}{200})) \\ &\leq (\frac{r}{200})^3 + \delta r^3, \end{aligned}$$

car comme $\mathrm{dist}(w_i, L) = r/100$, donc $\mathrm{dist}(z_i, L) \geq \mathrm{dist}(w_i, L) - d(w_i, z_i) \geq r/100 - \epsilon r$, et par conséquent, la boule $B(z_i, (1+\delta)\frac{r}{200})$ ne rencontre pas L. Donc dans la boule $B(z_i, (1+\delta)\frac{r}{200})$, $Y(y,r)$ coïncide avec F_i qui est un demi-plan de dimension 3.

Puisque $H^3(E \cap B(z_i, \frac{r}{200})) \geq (\frac{r}{200})^3 \theta_E(z_i)$, on a bien que $\theta_E(z_i) = 1$. On obtient ensuite

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(z_i, \frac{r}{200})) - (\frac{r}{200})^3 \theta_E(z_i) &\leq \delta r^3 \\ \theta_E(z_i, r/200) - \theta_E(z_i) &\leq C\delta, \end{aligned}$$

où C est une constante.

Donc en suivant la démonstration du théorème 4.9, on peut conclure que pour chaque $\tau > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que pour chaque $1 \leq i \leq 3$, $E \cap B(z_i, r/400)$ est bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante bi-Höldérienne plus petite que τ. Puisque $d_{z_i,r/400}(E, F_i) \leq 400 d_{y,r}(E, Y(y,r)) \leq 400\epsilon$, on peut même prendre F_i comme ce plan. Cela veut dire qu'il existe pour chaque $1 \leq i \leq 3$ un homéomorphisme $g_i : B(z_i, r/400) \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$E \cap B(z_i, r/800) \subset g_i(F_i \cap r/600) \subset E \cap B(z_i, r/400) \tag{4.10.1}$$

$$|g_i(z) - z| \leq \tau r \text{ pour } z \in B(z_i, r/400). \tag{4.10.2}$$

De plus, on voit que $B(z_i, r/400) \subset B(y, r/75)$ pour $1 \leq i \leq 3$.

Maintenant, comme on a vu plus haut, pour $z \in E \cap B(y, r/75)$, on doit avoir que z est de type $\mathbb{P}$. Donc d'après le théorème 4.9, il existe un rayon $r_z > 0$ tel que dans la boule $B(z, r_z)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1+\tau$, où τ est comme ci-dessus.

On regarde maintenant notre ensemble $E_1 = E \cap B(y, r/75)$. On a un sous-lemme.

Sous-lemme 4.10.1. *Si ϵ et τ sont suffisamment petits, alors il n'existe pas un ensemble E_1 avec les propriétés suivantes.*

Il existe un cône minimal Y de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, tel que $d_{y,r/75}(E_1, Y) \leq 75\epsilon$. En fait, $Y = Y(y,r)$ comme ci-dessus.

Il existe trois points z_1, z_2, z_3 dans E_1, tels que $B(z_i, r/400) \in B(y, r/75)$ et les conditions (4.10.1) et (4.10.2) sont satisfaites, où $F_i, 1 \leq i \leq 3$ sont les trois faces de $Y(y,r)$, et avec une constante $\tau > 0$.

Pour chaque $z \in E_1$, il existe un rayon $r_z > 0$ tel que dans la boule $B(z, r_z)$, E_1 est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \tau$, où τ est comme ci-dessus.

Démonstration. On adapte la démonstration du théorème d'existence d'un point de type $\mathbb{Y}$ dans le chapitre 17 du [D1]. L'idée est d'abord construire une courbe γ simple et fermée, qui coupe E_1 transversalement en trois points z_i, $1 \leq i \leq 3$. Ensuite, on déforme γ comme suit ; on construit une famille de courbes $\gamma_j, 0 \leq j \leq n$ telle que $\gamma_0 = \gamma$ et γ_n est un point A qui n'appartient pas à E_1. La construction est telle que pour chaque $0 \leq j \leq n-1$, le nombre de l'intersection de γ_j avec E_1 a pour même parité que celui de γ_{j+1} avec E_1. On obtiendra une contradiction puisque γ_0 coupe E_1 en trois points et γ_n ne coupe pas E_1. On déduit que ce n'est pas possible pour qu'un ensemble E_1 satisfasse à toutes les hypothèses comme ci-dessus, avec ϵ et τ suffisamment petits. □

Le sous-lemme 4.10.1 nous permet de terminer la démonstration du lemme. □

On est prêt à annoncer le théorème d'équivalence Bi-Höldérienne autour d'un point de type $\mathbb{Y}$.

Théorème 4.11. *Si x est un point de type $\mathbb{Y}$. Alors pour chaque $\alpha > 0$ très petite, il existe $\epsilon_1 > 0$, tel que si le rayon r satisfait aux conditions*

$$\theta_E(x, 2r) - \theta_E(x) < \epsilon_1,$$

et

$$2r < \epsilon_1,$$

alors, dans la boule $B(x, r/16)$, E_x est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal Y, de dimension 2 dans H_x et de type $\mathbb{Y}$, qui est centré en x, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \alpha$.

La démonstration repose sur le fait que pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$, tel que pour chaque $y \in B(x, r/16)$ et pour chaque $0 < t \leq r/16$, il existe un cône minimal $Z(y,t)$ de dimension 2 dans H_x, tel que $d_{y,t}(E_x, Z(y,t)) \leq \delta$. Notons que pour chaque $\epsilon > 0$, d'après la proposition 4.3, il existe toujours un rayon r qui satisfait aux hypothèses du théorème.

Démonstration. On applique le corollaire 4.7. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si r satisfait aux hypothèses du théorème, alors pour chaque $t \leq r$, il existe un cône minimal $Y(x,t)$ de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,t}(E, Y(x,t)) \leq \epsilon$$

On considère un point $y \in E_x \cap B(x, r/2)$.

Premier cas, y est de type $\mathbb{Y}$.

Puisque $d_{y,r/2}(E, Y(x,r)) \leq 2d_{x,r}(E, Y(x,r)) \leq 2\epsilon$, on applique le lemme 2.13, pour chaque $\delta > 0$ on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\theta_E(y, r/2) &= (r/2)^{-3} H^3(E \cap B(y, r/2)) \\
&\leq (r/2)^{-3} H^3(Y(x,r) \cap B(y, r/2)) + \delta (r/2)^{-3} (r/2)^3 \\
&\leq d_Y + \delta \\
&= \theta_E(y) + \delta \quad \text{(car } y \text{ est un point de type } \mathbb{Y})
\end{aligned}$$

Soit $t \leq r/2$, puisque la fonction $\theta_E(y,t)$ en variable t est croissante, on a $0 \leq \theta_E(y,t) - d_Y \leq \delta$. En appliquant la proposition 2.9, pour chaque $\delta_1 > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ tels qu'il existe un cône minimal $K(y,t)$, centré en y tel que

$$d_{y,t}(E, K(y,t)) \leq \delta_1 \text{ et}$$
$$|\theta_{K(y,t)}(y) - \theta_E(y)| < \delta_1$$

Ensuite, si $z \in K \cap B(y, t/2)$, puisque $d_{y,t}(E, K(y,t)) \leq \delta_1$, il existe $w \in E$ tel que $d(w,z) \leq \delta_1 t$. Mais E est un cône centré en O donc tout $w' \in Ow$ est dans E. On applique encore la condition $d_{y,t}(E, K(y,t)) \leq \delta_1$: si $w' \in Ow \cap B(y, t/4)$, alors $w' \in E \cap B(y, t/4)$ et puis il existe $z' \in K(y,t) \cap B(y, t/4)$ tel que $d(w', z') \leq \delta_1 t$. On obtient donc :

Pour tout $z \in K \cap B(y, t/2)$, il existe $w \in E \cap B(y, t/4)$ tel que $d(w, z) < \delta_1 t$.

Pour tout $w' \in Ow \cap B(y, t/4)$, il existe $z' \in K(y,t) \cap B(y, t/4)$ tel que $d(w', z') < \delta_1 t$.

Donc, $K(y,t)$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.6, pour le rayon t. Ensuite, la densité de $K(y,t)$ en y est δ_1-proche de d_Y. Donc on peut appliquer le lemme 4.6, pour chaque $\delta_2 > 0$, on peut choisir $\delta_1 > 0$ tel qu'il existe un cône minimal $Y(y,t)$ de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O et y tel que

$$d_{y,t}(Y(y,t), K(y,t)) \leq \delta_2.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a $d_{y,t/2}(E, Y(y,t)) \leq 2(\delta_1 + \delta_2)$. On pose

$$\delta_3 = 2(\delta_1 + \delta_2).$$

Soit $Y_1(y,t) = Y(y,t) \cap H_x$, alors $Y_1(y,t)$ est un cône de dimension 2 centré en y. Par le lemme 4.8, on a $d_{y,t/2}(E_x, Y_1(y,t)) \leq 2(1+r)\delta_3 \leq 6\delta_3$. De plus, puisque $Y(y,t)$ est un cône minimal de type $Y \times Oy$, avec Y un cône minimal de dimension 2, on a alors l'existence d'un cône minimal $Y'(y,t)$ de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$ centré en y et contenu dans H_x, tel que

$$d_{y,t/2}(Y'(y,t), Y_1(y,t)) \leq Cr,$$

et de plus, l'axe de $Y'(y,t)$ est l'intersection de l'axe de $Y(y,t)$ avec H_x, avec C une constante. On obtient donc

$$d_{y,t/4}(Y'(y,t), E_x) \leq 2(6\delta_3 + Cr),$$

puisque c'est plus petit que $2(d_{y,t/2}(Y_1(y,t), E_x) + d_{y,t/2}(Y'(y,t), Y_1(y,t)))$.

On obtient comme ci-dessus que si $y \in B(x, r/2)$ est de type $\mathbb{Y}$, alors pour tout $t \leq r/4$, il existe un cône minimal $Y(y,t)$, de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par y et O, tel que $d_{y,t}(E, Y(y,t)) \leq \delta_3$. On note maintenant pour chaque $z \in B(x, r/2)$ de type $\mathbb{Y}$ et $t \leq r/4$,

$$Y(z,t) \text{ ce cône minimal.} \tag{4.11.1}$$

Deuxième cas, y est de type $\mathbb{P}$.

On considère maintenant que y est dans la boule $B(x, r/16)$.

On pose $E_Y = \{z \in B(x, r/2) \cap E_x : \; z \text{ est de type } \mathbb{Y}\}$, alors $d(y, E_Y) > 0$, car par le théorème 4.9, il existe $r_y > 0$ tel que dans la boule $B(y, r_y)$, il n'y a que les points de type $\mathbb{P}$. On pose ensuite $d(y) = d(y, E_Y)$, alors $d(y) \leq d(y, x) \leq r/16$. On prend $u \in E_Y$ tel que $d(y,u) \leq d(y).11/10$.

Puisque u est de type $\mathbb{Y}$, et $u \in E_x \cap B(x, r/2)$, d'après le cas précédent, pour chaque $t \leq r/4$, il existe un cône minimal $Y(u,t)$ de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et u, tel que $d_{u,t}(E, Y(u,t)) \leq \delta_3$. Puis il existe un cône minimal $Y'(u,t)$ de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$ et contenu dans H_x, tel que $d_{u,t/2}(Y'(u,t), E_x) \leq 6\delta_3 + Cr$. De plus, l'axe de $Y'(u,t)$ est l'intersection de l'axe de $Y(u,t)$ avec H_x.

Soit L l'axe de $Y'(u, 2d(y))$, on veut montrer que

$$(*) \qquad d(y, L) \geq d(y)/10.$$

On suppose que $(*)$ est faux, donc il existe $z \in L$ tel que $d(y,z) < d(y)/10$, on déduit que $d(z,u) \leq d(y,z) + d(y,u) \leq \frac{3}{2}d(y)$ et puis $B(z, d(y)/10) \subset B(u, 2d(y))$. On a ensuite

$$\begin{aligned} d_{z,d(y)/10}(E, Y(u, 2d(y))) &\leq d_{u,2d(y)}(E, Y(u, 2d(y))).\frac{2d(y)}{d(y)/10} \\ &\leq 20\delta_3. \end{aligned}$$

Puisque $z \in L$ et L est contenu dans l'axe de $Y(y, 2d(y))$ donc, z est contenu dans l'axe de $Y(y, 2d(y))$. Maintenat si δ_3 est suffisamment petit, on peut appliquer la proposition 4.10, et il existe un point $\xi \in E_Y$ dans la boule $B(z, d(y)/100)$, donc $d(\xi, y) \leq 10^{-2}d(y) + d(z,y) < d(y)/3$. Soit maintenant ξ' l'intersection de la droite $O\xi$ avec E_x. Quand r est très petit, on a $d(\xi', y) \leq 2d(\xi, y) \leq 2d(y)/3$ et $\xi' \in B(x, r/2)$. Donc ξ' est un point de type $\mathbb{Y}$ dans $E_x \cap B(x, r/2)$ et satisfaisant $d(\xi', y) \leq 2d(\xi, y) \leq 2d(y)/3 < d(y)$, ce qui est absurde. On a donc $(*)$.

Observons que $B(y, d(y)/20) \subset B(u, 2d(y))$. Ensuite, $d_{u,2d(y)}(E, Y(u, 2d(y))) \leq \delta_3$, donc on peut appliquer le lemme 2.13 ; pour chaque $\delta_4 > 0$ on peut choisir $\delta_3 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \theta_E(y, d(y)/20) &= (d(y)/20)^{-3} H^3(E \cap B(y, d(y)/20)) \\ &\leq (d(y)/20)^{-3}(H^3(Y(u, 2d(y)) \cap B(y, d(y)/20)) + \delta_4(d(y)/20)^3) \\ &\leq 1 + \delta_4 \\ &\text{(car } B(y, d(y)/20) \text{ ne rencontre pas l'axe de } Y(u, 2d(y))\text{).} \end{aligned}$$

Puisque $\theta_E(y) = 1$ donc, on raisonne comme dans le théorème 4.9. Pour chaque $\delta_5 > 0$ on peut choisir $\delta_4 > 0$ tel que pour tout $t \leq d(y)/30$, il existe un plan $P(y,t)$ de dimension 3 passant par y et O tel que $d_{y,t}(E, P(y,t)) \leq \delta_5$. Soit $P'(y,t) = P(y,t) \cap H_x$, donc $P'(y,t)$ est un plan de dimension 2 contenu dans H_x. Par le lemme 4.8

$$(4.11.2) \qquad d_{y,t/2}(E_x, P'(y,t)) \leq 2(1+t)\delta_5 \leq 6\delta_5,$$

pour $t \leq d(y)/30$. On pose $\delta_6 = 6\delta_5$.

Maintenant, si $d(y)/60 \leq t \leq r/8$, on prend toujours u comme ci-dessus, c'est à dire $u \in E_Y$ tel que $d(u,y) \leq 11d(y)/10$, on a $u \in B(x, r/2)$. Puisque $t+2d(y) \leq r/4$, on peut prendre le cône $Y(u, t+2d(y))$ comme (4.11.1). On obtient maintenant

$$d_{y,t}(E, Y(u, t+2d(y))) \leq \frac{t+2d(y)}{t} d_{u,t+2d(y)}(E, Y(u, t+2d(y))) \leq 140\delta_3,$$

Ensuite soit $Y_1(u, t+2d(y))$ l'intersection de $Y(u, t+2d(y))$ avec H_x, donc on a $d_{y,t/2}(E_x, Y_1(u, t+2d(y))) \leq C\delta_3$, d'après le lemme 4.8, où C est une constante universelle. Ensuite, il existe un cône minimal $Y'(u, t+2d(y))$ de type $\mathbb{Y}$, de dimension 2, contenu dans H_x, tel que

$$d_{y,t/2}(Y'(u, t+2d(y)), Y_1(u, t+2d(y)) < Cr,$$

on peut prendre C comme en avant en prenant le maximum des deux constantes. Donc on a

$$d_{y,t/2}(E_x, Y'(y,t)) \leq C(\delta_3 + r) \text{ pour } d(y)/60 \leq t \leq r/4 \ . \tag{4.11.3}$$

Maintenant, puisqu'on peut choisir $\epsilon_1 > 0$ au début tel que δ_5, δ_3, r sont aussi petits qu'on veut. Donc de (4.11.2) et (4.11.3), on déduit que pour chaque $\delta_7 > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$, tel que pour tout $t < r/16$, il existe un cône minimal $Z'(y,t)$, de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$ et contenu dans H_x, tel que

$$d_{y,t}(E_x, Z'(y,t)) \leq C\delta_7$$

avec C une constante. Avec le cas traité pour y de type $\mathbb{Y}$, on obtient : pour chaque $\delta_8 > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, r/16) \cap E_x$, pour tout $t \leq r/16$, il existe un cône minimal $L(y,t)$ de dimension 2 tel que

$$d_{y,t}(E_x, L(y,t)) \leq \delta_8. \tag{4.11.4}$$

De plus, le cône $Y'(x, r/8)$ qui est l'intersection du cône $Y(x, r/8)$ avec H_x est un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$, contenu dans H_x et centré en x, et satisfait à

$$d_{x,r/16}(E_x, Y'(x, r/8)) \leq 2(1 + r/8) d_{x,r/8}(E, Y(x, r/8)) \leq 6\epsilon. \tag{4.11.5}$$

On constate qu'on peut choisir ϵ_1 au début tel que tous les autres quantificateurs sont aussi petits qu'on veut, en particulier, δ_8 et ϵ. Maintenant (4.11.4) et (4.11.5) nous permet d'appliquer le théorème 3.2. On conclut que pour chaque $\alpha > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$ tel que si (x, r) satisfait aux hypothèses du théorème avec ϵ_1, alors $E_x \cap B(x, r/16)$ est bi-Hölderiennement équivalent à un cône minimal Y de type $\mathbb{Y}$, de dimension 2, avec une constante bi-Höldérienne $C \leq 1 + \alpha$. □

Régularité près d'un point de type $\mathbb{T}$.

On donne quelques définitions, pour un cône minimal T de dimension 3 centré à l'origine et passant par $x \in \partial B(0,1)$, $T = T' \times Ox$, avec T' le cône minimal de type $\mathbb{T}$, de dimension 2 dans l'hyperplan P de dimension 3 tangent à $\partial B(0,1)$ à x. Alors on appelle les plans de dimension 2, qui sont de la forme $l_i \times Ox$, avec $l_i, 1 \leq i \leq 4$ des axes de T', les 2-faces de T. Les plans de dimensions 3, centré en O et de la forme $F_i \times Ox$, avec $F_i, 1 \leq i \leq 6$ des faces de T' sont applés les 3-faces de T. Donc T a 4 2-faces et 6 3-faces, et on appelle Ox l'axe de T. Chaque 2-face de T est l'intersection de 3 3-faces de T, dont l'union forme un $\mathbb{Y}$ centré à l'origine.

On passe maintenant au théorème de la régularité près d'un point de type $\mathbb{T}$. C'est à dire on suppose que x est un point de type $\mathbb{T}$. On veut montrer que si r est un rayon assez petit, alors dans la boule $B(x,r)$, E_x est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$ et centré en x. L'idée directrice est encore d'approcher E_x par les cônes minimaux de dimension 2 dans H_x, à tout point dans $B(x,r/2)$ et à toute échelle $t \leq r/2$.

Théorème 4.12. *Si x est un point de type $\mathbb{T}$, alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si le rayon r satisfait à*

$$\theta_E(x,2r) - \theta_E(x) \leq \epsilon$$

et

$$2r < \epsilon,$$

alors, $E_x \cap B(x,r/32)$ est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal T' de dimension 2 et de type $\mathbb{T}$, avec la constante Bi-Höldérienne $< 1+\alpha$.

Notons que pour chaque $\epsilon_1 > 0$, d'après la proposition 4.3, il existe toujours un rayon r qui satisfait aux hypothèses du théorème.

Démonstration. On applique d'abord le corollaire 4.7, pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $t \leq r$, il existe un cône minimal $T(x,t)$ de type $\mathbb{T}$, dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,t}(E, T(x,t)) \leq \delta. \tag{4.12.1}$$

Considérons maintenant un point $y \in E_x \cap B(x,r/32)$, avec $y \neq x$. On prend la boule $B(y,\eta|x-y|)$ avec $\eta = 10^{-5}$. On pose $\rho(y) = |x-y| > 0$. Le cône $T(x,(1+2\eta)\rho(y))$ satisfait alors à

$$d_{x,(1+2\eta)\rho(y)}(E, T(x,(1+2\eta)\rho(y))) \leq \delta \tag{4.12.2}$$

d'après 4.12.1, et avec $t = (1+2\eta)\rho(y)$. On a ensuite, puisque $B(y,\eta\rho(y)) \subset B(x,(1+2\eta)\rho(y))$,

(4.12.3)

$$\begin{aligned} d_{y,\eta\rho(y)}(E, T(x,(1+2\eta)\rho(y)) &\leq \frac{(1+2\eta)\rho(y)}{\eta\rho(y)} d_{x,1+2\eta\rho(y)}(E, T(x,(1+2\eta)\rho(y))) \\ &\leq 2\eta^{-1}\delta. \end{aligned}$$

Puisque $d(y, Ox) > |x-y|/2$, la distance de y à l'axe de $T(x,(1+2\eta)|y-x|)$ est supérieure à $|x-y|/2$, donc dans la boule $B(y, \eta|x-y|)$, $T(x,(1+2\eta)|y-x|)$ coïncide avec un cône Y_y de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O.

Donc (4.12.3) nous donne

$$d_{y,\eta\rho(y)}(E, Y_y) \leq 2\eta^{-1}\delta. \tag{4.12.4}$$

On applique le lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$ on peut choisir $\delta > 0$, tel que

$$|H^3(E \cap B(y, \eta\rho(y))) - H^3(Y_y \cap B(y, \eta\rho(y)))| \leq \delta_1\rho(y)^3. \tag{4.12.5}$$

Mais $H^3(Y_y \cap B(y, \eta\rho(y))) \leq d_Y(\eta\rho(y))^3$ donc

$$H^3(E \cap B(y, \eta\rho(y))) \leq d_Y(\eta\rho(y))^3 + \delta_1\rho(y)^3. \tag{4.12.6}$$

on en déduit que

$$\theta_E(y, \eta\rho(y)) \leq d_Y + C\delta_1, \tag{4.12.7}$$

avec $C = \frac{1}{\eta^3}$. Donc $\theta_E(y) \leq d_Y + C\delta_1$ ce qui veut dire que si δ_1 est assez petit, pour tout $y \neq x$ dans $B(x,r)$, la densité en y est inférieur à d_T. Donc x est le seul point de type $\mathbb{T}$ dans $E_x \cap B(x,r)$. Par conséquent, pour tout $y \neq x$ dans $B(x,r) \cap E$, y est de type $\mathbb{Y}$ ou de type $\mathbb{P}$.

Le cas où y est de type $\mathbb{Y}$.

On pose toujours $\rho(y) = |x-y|$. Comme dans (4.12.7), $\theta_E(y, \eta\rho(y)) \leq d_Y + C\delta_1$, alors $\theta_E(y,t) \leq d_Y + C\delta_1$ pour $t \leq \eta\rho(y)$. On applique le corollaire 4.7 ; pour chaque $\delta_2 > 0$, on peut choisir $\delta_1 > 0$ tel que pour chaque $t \leq \eta\rho(y)$, il existe un cône minimal $Y(y,t)$ dont l'axe passe par O et y, tel que

$$d_{y,t}(E, Y(y,t)) \leq \delta_2 \tag{4.12.8}$$

Soit $Y'(y,t)$ l'intersection de $Y(y,t)$ avec H_x ; alors $Y'(y,t)$ est un cône de dimension 2 centré en y dans le plan H_x. Puisque E et $Y(y,t)$ sont des cônes centré en O, par le lemme 4.8,

$$d_{y,t/2}(E_x, Y'(y,t)) \leq C_1\delta_2, \tag{4.12.9}$$

pour $t \leq \eta\rho(y)$. Ensuite, car $Y(y,t)$ est un cône de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et y, et de plus $d(y, Ox) < r/32$, on voit facilement qu'il existe un cône minimal $Y^1(y,t)$, de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$, centré en y et contenu dans le plan H_x, tel que

$$d_{y,t/2}(Y'(y,t), Y^1(y,t)) \leq Cr, \tag{4.12.10}$$

pour tout $t > 0$. De (4.12.9) et (4.12.10), on déduit que, pour $t \leq \eta\rho(y)$,

(4.12.11)

$$d_{y,t/4}(E_x, Y^1(y,t)) \leq 2(d_{y,t/2}(E_x, Y'(y,t)) + d_{y,t/2}(Y'(y,t), Y^1(y,t)) \leq 2(\delta_2 + Cr),$$

pour $t \le \eta\rho(y)$.

Considérons le cas où $r/32 \ge t \ge \eta\rho(y)/4$. Posons $\eta_1 = \eta/4 = 10^{-5}/4$. Comme dans (4.12.1), pour $0 < t < r/2 - \rho(y)$, il existe un cône minimal $T(x, t+\rho(y))$ dont l'axe est Ox, tel que $d_{x,t+\rho(y)}(E, T(x, t+\rho(y))) \le \delta$. Soit $T'(x, t+\rho(y))$ l'intersection de $T(x, t+\rho(y))$ avec H_x, alors $T'(x, t+\rho(y))$ est un cône minimal de type $\mathbb{T}$, de dimension 2 dans H_x, qui satisfait à

$$d_{x,t+|x-y|}(E_x, T'(x, t+|x-y|)) \le C\delta. \tag{4.12.12}$$

Puisque $B(y,t) \subset B(x, t+|x-y|)$, on a alors, si $t \ge \eta_1\rho(y)$,

$$\begin{aligned} d_{y,t}(E_x, T'(x, t+\rho(y))) &\le \frac{t+\rho(y)}{t} d_{x,t+\rho(y)}(E_x, T'(x, t+\rho(y))) \\ &\le \frac{t+|x-y|}{t} C\delta \\ &\le \frac{2C}{\eta_1}\delta. \end{aligned} \tag{4.12.13}$$

Donc, on déduit de (4.12.11) et (4.12.13), que pour tout $r/32 \ge t \ge 0$, il existe un cône minimal $Y'(y,t)$ de dimension 2 dans H_x, tel que

$$d_{y,t}(E', Y'(y,t)) \le \delta_3, \tag{4.12.14}$$

avec $\delta_3 = \max\{2(\delta_2 + Cr), \frac{2C}{\eta_1}\delta\}$.

Le cas où y est de type $\mathbb{P}$.

On a toujours que $d(y, Ox) > |x-y|/2$. Comme on a vu ci-dessus, on pose $T(x, 2|x-y|)$ le cône de type $\mathbb{T}$ dont l'axe est Ox, qui est $2\delta|x-y|$-proche de E dans la boule $B(x, 2|x-y|)$. On pose ensuite E_Y l'ensemble des points de type $\mathbb{Y}$ dans la boule $B(x,r)$, et $d = \min(\mathrm{dist}(y, E_Y), |x-y|)$.

On a aussi deux cas.

Premier cas, $d > \eta|x-y|$.

Soit T_2 l'union des 2-faces de $T(x, 2|x-y|)$, on veut montrer que $d(y, T_2) > \frac{d}{10}$. Sinon, il existe une 2-face L de $T(x, 2|x-y|)$ et un point $z \in L$ tel que $d(y,z) = d(y,L) < d/10$. C'est clair que $|z-x| > |x-y| - d/10 > |x-y|/2$, on a aussi $d(z, Ox) > d(y, Ox) - d/10 > |x-y|/2 - |x-y|/10 > |x-y|/3$. Donc dans la boule $B(z, \frac{d}{10})$, $T(x, 2|x-y|)$ coïncide avec un cône minimal Y_z de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O et z. De plus,

$$\begin{aligned} d_{z,d/10}(E, Y_z) &\le \frac{2|x-y|}{d/10} d_{x,2|x-y|}(E, T(x, 2|x-y|)) \\ &\le \frac{20}{\eta}.\delta \end{aligned} \tag{4.12.15}$$

Mais d'après la proposition 4.10, quand δ est assez petit, il existe un point z' de type $\mathbb{Y}$, dans la boule $B(z, \frac{d}{100})$. On en déduit que $d(y,z') \leq d(y,z) + d(z,z') \leq \frac{d}{5}$, mais z' est bien un point dans E_Y, donc on a une contradiction. Alors on a bien $d(y,T_2) > \frac{d}{10}$.

Maintenant $d(y,Ox) > \frac{d}{2}$ et $d(y,T_2) > \frac{d}{10}$, donc par un simple argument géométrique, dans la boule $B(y, \frac{d}{100})$, $T(x, 2|x-y|)$ coïncide avec un plan P_y de dimension 3 qui passe par O et x. En fait, P_y est l'une des 3-faces de $T(x,2|x-y|)$ qui est la plus proche de y. Calculons maintenant la distance entre E et P_y dans la boule $B(y, \frac{d}{100})$:

$$\begin{aligned} d_{y,\frac{d}{100}}(E, P_y) &\leq \frac{2|x-y|}{d/100} d_{x,2|x-y|}(E, T(x, 2|x-y|)) \\ &\leq \frac{200}{\eta}.\delta. \end{aligned} \tag{4.12.16}$$

Par le lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\theta_E(y, d/100) \leq 1 + \delta_1$. Ensuite, car E est un ensemble minimal, alors $\theta_E(y,t)$ est une fonction croissante pour t, on déduit que pour tout $t \leq \frac{d}{100}$, $\theta_E(y,t) \leq 1 + \delta_1$. Puis, on applique le corollaire 4.7, pour chaque $\delta_2 > 0$, on peut choisir $\delta_1 > 0$ tel que pour $t \leq \frac{d}{100}$, il existe un plan $P(y,t)$ de dimension 3 qui passe par y et O, tel que

$$d_{y,t}(E, P(y,t)) \leq \delta_2. \tag{4.12.17}$$

Soit $P'(y,t)$ l'intersection de $P(y,t)$ avec H_x, par le lemme 4.8,

$$d_{y,t/2}(E_x, P'(y,t)) \leq 2 d_{y,t}(E, P(y,t)) \leq 2\delta_2 \tag{4.12.18}$$

pour $t \leq \frac{d}{100}$.

Si $t > \frac{d}{200}$, soit $T'(x, 2|x-y|)$ l'intersection de $T(x,2|x-y|)$ avec H_x, alors $T'(x,2|x-y|)$ est un cône minimal de dimension 2 dans H_x, centré en x. Puisque $d_{x,2|x-y|}(E, T(x,2|x-y|)) \leq \delta$, par le lemme 4.8, $d_{x,|x-y|}(E', T'(x,2|x-y|)) \leq 2\delta$. Maintenant pour $\frac{d}{200} < t \leq |x-y|/2$, puisque $B(y,t) \subset B(x,|x-y|)$, on obtient

$$\begin{aligned} d_{y,t}(E_x, T'(x, 2|x-y|)) &\leq \frac{|x-y|}{t} d_{x,|x-y|}(E_x, T'(x, 2|x-y|)) \\ &\leq \frac{200}{\eta}\delta, \end{aligned} \tag{4.12.19}$$

car $d > \eta|x-y|$.

Pour $r/32 > t > |x-y|/2$, c'est plus simple, on prend le cône $T(x, 2t + |x-y|)$, qui est un cône minimal de type $\mathbb{T}$ dont l'axe passe par O et x, tel que $d_{x,2t+|x-y|}(E, T(x,2t+|x-y|)) \leq \delta$. Posons $T'(x,2t+|x-y|)$ l'intersection de $T(x,2t+|x-y|)$ avec H_x qui est bien un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{T}$ dans H_x ; par le lemme 4.8, $d_{x,t+|x-y|/2}(E_x, T'(x,2t+|x-y|)) \leq 2\delta$. On a ensuite

$$\begin{aligned} d_{y,t}(E_x, T'(x, 2t+|x-y|)) &\leq \frac{t+|x-y|/2}{t} d_{x,t+|x-y|/2}(E_x, T'(x, 2t+|x-y|)) \\ &\leq 4\delta \end{aligned} \tag{4.12.20}$$

De (4.12.18), (4.12.19) et (4.12.20), on déduit que pour chaque $\delta_3 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \leq r/32$, il existe un cône minimal $T'(y,t)$, qui est dans H_x, tel que $d_{y,t}(E_x, T'(y,t)) \leq \delta_3$.

Deuxième cas, $d \leq \eta|x-y|$.

Il existe alors un point z de type $\mathbb{Y}$ tel que $d(y,z) < 2d$. Donc, $z \in B(x, 2|x-y|)$ et $d(z,x) > |x-y|/2$, ce qui implique $d(z, Ox) > |x-y|/4$ et donc dans la boule $B(z, |x-y|/10)$, $T(x, 2|x-y|)$ coïncide avec un cône minimal Y_z de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O. On a ensuite

$$\begin{aligned} d_{z,|x-y|/10}(E, Y_z) &\leq \frac{2|x-y|}{|x-y|/10} d_{x,2|x-y|}(E, T(x, 2|x-y|)) \\ &\leq 20\delta, \end{aligned} \tag{4.12.21}$$

puisque $B(z, |x-y|/10) \subset B(x, 2|x-y|)$.

On applique le lemme 2.13, sachant que z est un point de type $\mathbb{Y}$, et on a

$$\theta_E(z, |x-y|/10) - d_Y \leq \delta_1, \tag{4.12.22}$$

de plus

$$|x-y| \leq r/16 \leq \epsilon/16 \tag{4.12.23}$$

Donc si on prend ϵ de manière que ϵ et δ_1 sont plus petits que ϵ_1 dans le théorème 4.11, (4.12.22) et (4.12.23) sont exactement les hypothèse du théorème 4.11 pour le point z et le rayon $|x-y|/10$. Notons que $y \in B(z, |x-y|/40)$ puisque $d(y,z) \leq 2d \leq 2\eta|x-y|$. En suivant la démonstration, pour chaque $\delta_4 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t < |x-y|/20$, il existe un cône minimal $Y^1(y,t)$ de dimension 2, qui est soit de type $\mathbb{P}$, soit de type $\mathbb{Y}$ et qui est dans H_y, tel que

$$d_{y,t}(E_y, Y^1(y,t)) \leq \delta_4. \tag{4.12.24}$$

Soit L la projection de centre O vers H_x, cela veut dire, pour chaque $w \in \mathbb{R}^4$ tel que Ow n'est pas parallèle à H_x, $L(w)$ est l'intercsection de Ow avec H_x. Donc pour chaque cône minimal $Y^1(y,t)$ dans (4.12.24), le cône $L(Y^1(y,t))$ sera un cône de dimension 2 dans H_x, tel que $d_{y,t}(L(Y^1(y,t)), E_x) \leq 2\delta_4$, pour $t \leq |x-y|/40$. Puisque l'angle entre H_y ou H_z avec H_x est de l'ordre Cr, on voit facilement qu'il existe un cône minimal $Y'(y,t)$ dans H_x qui admet le même centre que $L(Y^1(y,t))$, et qui satisfait à $d_{y,t}(Y'(y,t), L(Y^1(y,t))) \leq Cr$. De ce qui précède, on déduit que

$$d_{y,t}(E_x, Y'(y,t)) \leq 2\delta_4 + Cr \tag{4.12.25}$$

pour $t < |x-y|/40$.

Il nous reste le cas où $r/2 > t \geq |x-y|/40$. C'est le cas qu'on a traité plus haut comme dans (4.11.20).

On constate qu'on peut choisir $\epsilon > 0$ au début, tel que tous les autres quantificateurs sont aussi petits qu'on veut. Donc on peut conclure :

Pour chaque $\delta' > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que pour tout $y \in E_x \cap B(x, r/32)$, pour $0 < t \leq r/32$, il existe un cône minimal $T'(y,t)$ qui est dans H_x, tel que

$$d_{y,t}(E_x, T'(y,t)) \leq \delta' \tag{4.12.26}$$

Cela nous permet d'appliquer le théorème 3.2. On conclut que pour chaque $\alpha > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que si le coupe (x, r) satisfait aux hypothèses du lemme avec ϵ, alors E_x est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, dans $B(x, r/32)$ avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1 + \alpha$. . $\square$

Chapitre 5

C^1 régularité pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$

Pour la simplicité de l'intégration, on renormalise la mesure de Hausdorff telle que la restriction de la mesure de Hausdorff dans un plan de dimension d coïncide avec la mesure de Lebesgue. On note toujours d'_P, d'_Y et d'_T les nouvelles valeurs des densités aux centres des cônes minimaux de dimension 2 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$, respectivement. Puis d_P, d_Y et d_T les densités aux centres des cônes minimaux de dimension 3 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$, respectivement.

Dans ce chapitre, E est toujours un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine. On pose comme dans le chapitre 4, pour chaque $y \in \mathbb{R}^4$, H_y l'hyperplan de dimension 3 passant par y et orthogonale à Oy et $E_y = E \cap H_y$.

On fixe un point $x \in E \cap \partial B(O,1)$ et on pose en particulier $H = H_x$, $E' = E_x$. On se donne un système de coordonnée (x_1, x_2, x_3, x_4) dans $\mathbb{R}^4$, tel que Ox ait pour équation $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, donc x ait pour coordonnée $(1,0,0,0)$. On note H_t, $0 \le t \le +\infty$, l'hyperplan affine d'équation $x_1 = t$, donc H_t est orthogonal à Ox et la distance de O à H_t est t. Notons que $H = H_x = H_1$. Alors, d'après le chapitre 4, pour chaque $\alpha > 0$, on peut choisir $r = r_x$ tel que :

Dans la boule $B(x, 2r)$, E' est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal Z, de demension 2 dans H, centré en x, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1+\alpha$. Cela veut dire qu'il existe un cône minimal Z de dimension 2 dans H centré en x, une fonction f injective $f : H \cap B(x, \frac{3}{2}r) \to H \cap B(x, 2r)$ tels que

$$H \cap B(x,r) \subset f(H \cap B(x, \frac{3}{2}r)) \subset H \cap B(x, 2r),$$

$$E' \cap B(0,r) \subset f(Z \cap B(0, \frac{3}{2}r)) \subset E' \cap B(0, 2r),$$

$$(1+\alpha)^{-1}[\frac{|x-y|}{r}]^{(1+\alpha)} \le \frac{|f(x)-f(y)|}{r} \le (1+\alpha)[\frac{|x-y|}{r}]^{1/(1+\alpha)} \text{ pour } x, y \in H \cap B(0, \frac{3}{2}r).$$

Dans ce chapitre, on va montrer que E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2. Le centre de la démonstration est d'adapter les démonstrations dans

[D2] pour la régularité des ensembles presques minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. On va voir que l'ensemble coupé $E' = E \cap H$ a des "'bonnes"' propriétés comme un ensemble presque minimal de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Cela nous permet de construire des compétiteurs pour E' et par la suite, construire un compétiteur pour notre cône minimal E.

Premièrement, on utilisera le chapitre 4 pour construire des courbes dans $E' \cap \partial B(x, r)$, où r est le rayon comme ci-dessus. A partir de ces courbes construites, on construira un compétiteur dans H pour l'ensemble E'. On suivra [D2] pour les méthodes de construction. Ensuite on utilisera une interpolation en fonction du rayon pour construire un compétiteur pour E. On utilisera la minimalité de E et le fait que E est un cône pour avoir une inégalité épipérimétrique pour E'. Le but final est d'obtenir une inégalité différentielle pour les fonctions $\theta_{E'}(x, t)$, où la fonction de densité θ est définie dans le chapitre 2. Grâce à cette inégalité différentielle, on estimera l'excès de densité pour E' en x, c'est à dire qu'on obttiendra une inégalité du genre
$$|\theta_{E'}(x, t) - \theta_{E'}(x)| \leq Ct^b,$$
où C et b sont des constantes positives universelles. Cette inégalité est la clé pour qu'on puisse adapter les constructions comme dans les chapitres 11 et 12 de [D2]. Donc on montrera que pour tout $y \in E' \cap B(x, r/2)$ et pour tout $t \leq r/2$, on peut approximer E' dans la boule $B(y, t)$ par les cônes dans $\mathbb{Z}'$, de dimension 2 dans H, où $\mathbb{Z}'$ est défini dans le chapitre 3. C'est à dire on montrera qu'il existe un cône $Y \in \mathbb{Z}'$ tel que
$$d_{y,t}(E', Y) \leq Ct^b,$$
pour y et t comme ci-dessus. On appliquera le théorème 3.3 pour conclure que E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2 dans H.

On commence ce chapitre par rappeler le théorème de la coaire ([Fe], théorème 3.2.22).

Théorème de la coaire.

Soient $M \subset \mathbb{R}^h$ et $N \subset \mathbb{R}^k$ deux ensembles rectifiables, de dimensions m, n, respectivement. Soit $f : M \to N$ une application Lipschitzienne. On a alors la formule

$$\int_M J_f(x) dH^m x = \int_N H^{m-n}(M \cap f^{-1}(y)) dH^n y. \tag{1}$$

Pour g borélienne, positive sur M,

$$\int_M g(x) J_f(x) dH^m x = \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} g(u) dH^{m-n} u \right) dH^n y. \tag{2}$$

Ici, $J_f(x)$ est le Jacobien approximé de dimension m de l'application f, qui est défini pour H^m-preque partout $x \in M$. On note également Df la dérivée approximée *de f.*

En particulier, quand N est de dimension 1, Df sera une fonction linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Un calcul montre que J_f est la norme de Df. Donc,

$$J_f(x) = \sup_{v \in T_M(x), |v|=1} |Df(x).v|. \tag{3}$$

On considère maintenant notre ensemble E' localement près du point x. On commence par un lemme simple sur la dimension de Hausdorff de E'.

Lemme 5.1. *E' est un ensemble de dimension 2 dans H.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer que pour tout $y \in E'$ et pour un rayon $s > 0$, $H^2(B(y,s) \cap E') < \infty$. Donc soient $F = B(y,s) \cap E'$, $\hat{F}$ le cône centré à l'origine et porté sur F, $F' = \hat{F} \cap \partial B(O,1)$. Alors F est l'image de F' par une application Lipschitzienne, donc $H^2(F) \leq CH^2(F')$ avec $C < +\infty$. Donc il nous suffit de montrer que $H^2(F') < \infty$. Mais puisque $F' \subset \partial B(O,1)$ et $\hat{F}$ le cône porté sur F, donc sur F', donc $H^3(F \cap B(O,1)) = cH^2(F')$, par le théorème de la coaire. Ensuite, $H^3(F \cap B(O,1)) \leq H^3(E \cap B(O,1))$ puisque $F \subset E$. On en déduit que $H^3(F \cap B(O,1)) < +\infty$ et on en déduit le lemme. $\square$

On s'intéresse maintenant à la densité de E' en x. La denstité de E en x est d_P, d_Y ou d_T selon qu'une limite d'explosion de E en x est de type $\mathbb{P}$,$\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$. On a une formule utile qui fait un lien entre la densité de E' en x et la densité de E en x. On appelle p la projection sur l'axe Ox, donc par coordonnée, $p(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1$. Donc on peut voir p comme une application Lipschitzienne p_E de E dans $\mathbb{R}$, ce sont deux ensembles rectifiables et on peut calculer le Jacobien de p_E comme ci-dessus. Pour caculer le Jacobien $J_{p_E}(z)$, on prend trois vecteurs unités tangents à E en z, dont le premier est $v_z = \frac{z}{|z|}$, le deuxième et le troisième sont deux vecteurs orthogonaux v_1 et v_2 qui sont tangents à $E \cap H_{z_1}$. On voit que $Dp_E.v_1 = Dp_E.v_2 = 0$ et $|Dp_E.v_z| = \frac{z_1}{|z|}$. Soient L le 2-plan engendré par v_1 et v_2 et $Q \in L$ tel que le vecteur $\vec{OQ}$ est orthogonal à L. Soit $v_Q = \vec{OQ}/|OQ|$. Alors v_z peut être exprimé comme une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_Q, on écrit alors $v_z = \alpha_1 v_Q + \beta_1 v_1 + \gamma_1 v_2$, avec $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$. Ensuite, chaque vecteur unité v qui est tangent à E en z peut être exprimé comme une combinaison linéaire de v_z, v_1, v_2. On écrit $v = mv_z + nv_1 + pv_2 = m(\alpha_1 v_Q + \beta_1 v_1 + \gamma_1 v_2) + nv_1 + pv_2 = m\alpha_1 v_Q + (m\beta_1 + n)v_1 + (m\gamma_1 + p)v_2$. Puisque $|v| = 1$, donc $(m\alpha_1)^2 + (m\beta_1 + n)^2 + (m\gamma_1 + p)^2 = 1$. On en déduit que $|m\alpha_1| \leq 1$ ou $|m| \leq \frac{1}{\alpha_1}$. On a ensuite,

$$\begin{aligned} |Dp_E.v| &= |Dp_E(mv_z + nv_1 + pv_2)| \\ &= |m||Dp_E.v_z| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1}\frac{z_1}{|z|}. \end{aligned}$$

Aussi, l'égalité peut se produire en choissisant $m = \frac{1}{\alpha_1}$ et $n = -m\beta_1$ et $p = -m\gamma_1$. On en déduit que

$$\sup_{v \in T_E(z), |v|=1} |Dp_E.v| = \frac{1}{\alpha_1}\frac{z_1}{|z|}.$$

Ensuite, comme $\alpha_1 = |v_z \wedge v_1 \wedge v_2| = \frac{|z\wedge v_1 \wedge v_2|}{|z|}$, ou $\wedge$ désigne le produit extérieur. On obtient

$$\begin{aligned} J_{p_E}(z) &= \frac{z_1}{|z \wedge v_1 \wedge v_2|} \\ &= \frac{z_1}{|OQ|} \\ &\geq \frac{z_1}{|z|}, \end{aligned} \tag{4}$$

puisque $|OQ| \leq |z|$. On vérifie maintenant la formule

$$\int_{E\cap B(x,r)} J_{p_E}(z) dH^3 z = \int_{-r}^{r} (1-t)^2 H^2(E' \cap B(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t}))dH^1 t. \tag{5}$$

On voit cela comme suit, l'application p_E envoie $E \cap B(x,r)$ sur l'axe Ox, en coordonnée, $p_E(E\cap B(x,r)) = \{(z_1, 0,0,0)\}$ avec $1-r \leq z_1 \leq 1+r$. Donc pour chaque $z = (1-t, 0,0,0)$ avec $-r \leq t \leq r$, on a $p_E^{-1}(z) \cap B(x,r) = E \cap H_{1-t} \cap B(x,r)$. Ensuite, comme E est un cône centré en O, $H^2(E\cap H_{1-t} \cap B(x,r)) = (1-t)^2 H^2(E \cap H \cap B(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t}))$, par homothétie. Mais $E \cap H = E'$, donc on a bien (5).

Si E est un cône quelconque, il n'est pas du tout évident que la densité de E' en x existe. En fait, on ne sait pas si cela est vraie pour un cône E quelconque. Mais si E est minimal, on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 5.2. *La densité de E' en x existe, et égale à d'_P,d'_Y,d'_T- qui sont les densités au centre d'un plan de dimension 2, d'un cône de dimension 2 de type $\mathbb{Y}$ et d'un cône de dimension 2 de type $\mathbb{T}$, respectivement, selon que la densité de E en x est d_P, d_Y, ou d_T.*

Démonstration. Si la densité de E' en x existe, alors par (5)

$$\begin{aligned} \int_{E\cap B(x,r)} J_{p_E}(z) dH^3 z &= \int_{-r}^{r} (1-t)^2 H^2(E' \cap B(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t}))dt \\ &= \int_{-r}^{r} (1-t)^2 . \frac{(r^2-t^2)}{(1-t)^2} \theta_{E'}(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t})dt \\ &= \int_{-r}^{r} (r^2-t^2)\theta_{E'}(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t})dt \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

donc, si la densité $\theta_{E'}(x)$ de E' en x existe, on a $\lim_{r\to 0} \theta_{E'}(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t}) = \theta_{E'}(x)$, et donc
(5.2.2)

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} r^{-3} \int_{-r}^{r} (1-t)^2 . \frac{(r^2-t^2)}{(1-t)^2} \theta_{E'}(x, \frac{\sqrt{r^2-t^2}}{1-t})dt &= \lim_{r\to 0} r^{-3} \int_{-r}^{r} (1-t)^2 . \frac{(r^2-t^2)}{(1-t)^2} \theta_{E'}(x)dt \\ &= r^{-3}\frac{4}{3}r^3 \theta_{E'}(x) \\ &= \frac{4}{3}\theta_{E'}(x), \end{aligned}$$

On déduit de (5.2.2) que

$$(*)\qquad \lim_{r\to 0} r^{-3}\int_{E\cap B(x,r)} J_{p_E}(z)dH^3z = \frac{4}{3}\theta_{E'}(x)$$

On estime maintenant $J_{p_E}(z)$, on sait que p_E est 1-Lipschitzienne, donc $J_{p_E}(z)\leq 1$ pour tout z. Par (4), on a $J_{p_E}(z)\geq \frac{z_1}{|z|}\geq 1-2r$ quand $z\in B(x,r)$. Donc de $(*)$ on obtient

$$\lim_{r\to 0} r^{-3}H^3(E\cap B(x,r))\geq \frac{4}{3}\theta_{E'}(x)\geq \lim_{r\to 0}(1-2r)r^{-3}H^3(E\cap B(x,r)),$$

on en déduit que $\theta_E(x)=\frac{4}{3}\theta_{E'}(x)$. Donc la densité de E' en x, si elle existe, se calcule à partir de la densité de E en x, et ne peut prendre que les valeurs d'_P,d'_Y, ou d'_T.

Il nous reste à montrer que la densité en x de E' existe. On suppose pour une suite $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ qui tend vers 0,

$$(5.2.3)\qquad \lim_{r_k\to 0}\theta_{E'}(x,r_k)=c$$

avec c un nombre réel positif, 0, ou $+\infty$. Pour chaque $r>0$, soit S_r le cylindre ouvert porté sur $B'(x,r)$, où $B'(x,r)=B(x,r)\cap H$, de hauteur $1/2$ et contenu dans le demi-espace séparé par H et contenant l'origine. On peut imaginer S comme le produit $S_r=B'(x,r)\times]xz[$, avec $]xz[$ le segment ouvert dont les extrémités sont x et z et avec z le milieu du segment $[Ox]$. En coordonnée, $S_r=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}:1/2<x_1<1; x_2^2+x_3^2+x_4^2<r^2$. Posons ensuite

$$E_k = x+\frac{E-x}{r_k}.$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{E_k\}$ converge vers un ensemble L. Maintenant, L est une limite d'explosion de E en x, donc par le lemme 4.1, L est de la forme $L=C\times Ox$ où C est un cône minimal de dimension 2 dans H, centré en x. De plus, C est de type $\mathbb{P}$ si x est de type $\mathbb{P}$, de type $\mathbb{Y}$ quand x est de type $\mathbb{Y}$ et de type $\mathbb{T}$ si x est de type $\mathbb{T}$. Cela veut dire que $\theta_C(x)$ ne dépend que de x. On pose

$$E'_k = E_k\cap H = x+\frac{E'-x}{r_k},$$

alors on a

$$H^2(E'_k\cap B(x,1))=\frac{1}{r_k^2}H^2(E'\cap B(x,r_k))$$

on déduit de (5.2.3) que

$$(5.2.4)\qquad \lim_{k\to+\infty} H^2(E'_k\cap B(x,1))=c$$

Pour chaque $\epsilon>0$, par le théorème de la coaire, on a

$$(5.2.5)\qquad \int_{E_k\cap S_{1-\epsilon}} J_{p_{E_k}}(z)dH^3(z)=\int_{]xx'[} H^2(E_k\cap S_{1-\epsilon}\cap p_{E_k}^{-1}(u))du,$$

où x' a pour coordonnées $(1/2,0,0,0)$ et $]xx'[$ est le segment ouvert avec d'extrémités x et x'. Puisque chaque E_k est un cône centré en $O_k = x - \frac{x}{r_k}$ (un ensemble T est dit un cône centré en a si $T-a$ est un cône centré en O), on obtient par homothétie
(5.2.6)

$$\int_{E_k\cap S_{1-\epsilon}} J_{p_{E_k}}(z)dH^3(z) = \int_0^{1/2}(1-\frac{1}{2}r_k+tr_k)^2H^2(E_k'\cap B(x,\frac{1-\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))dt.$$

On estime maintenant $J_{p_{E_k}}(z)$ comme en (4). On prend d'abord le vecteur $\overrightarrow{O_kz}$ qui est un vecteur tangent à E_k en z. Les deux autres vecteurs tangents sont v_k et w_k, qui sont dans le plan H_{z_1}, et tangents à l'ensemble $E_k\cap H_{z_1}$ (ici z_1 est la première coordonnée de $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$). Donc le Jacobien $J_{p_{E_k}}(z)$, pour $z\in E_k\cap S_{1-\epsilon}$, satisfait à

$$\begin{aligned} J_{p_{E_k}}(z) &\geq \frac{d(O_k,p_{E_k}(z))}{d(O_k,z)} \\ &\geq \frac{d(O_k,p_{E_k}(z))}{d(O_k,p_{E_k}(z))+1}, \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

ici, $d(x,y)$ désigne la distance entre deux points x et y.

Mais de plus, $p_{E_k}(z)$ a pour coordonnées $(z_1,0,0,0)$ et O_k a pour coordonnées $(1-\frac{1}{r_k},0,0,0)$, alors la distance $d(O_k,p_{E_k}(z)) = z_1+\frac{1}{r_k}-1$. Donc, puisque $z_1\leq 1$, on obtient $\frac{d(O_k,p_{E_k}(z))}{d(O_k,p_{E_k}(z))+1}\geq 1-3r_k$. On a donc

$$J_{p_{E_k}}(z)\geq 1-3r_k \tag{5.2.8}$$

pour $z\in E_k\cap S_{1-\epsilon}$.

De plus, puisque p_{E_k} est 1-Lipschitzienne, on a bien

$$J_{p_{E_k}}(z)\leq 1 \text{ pour tout } z. \tag{5.2.9}$$

De (5.2.6), (5.2.7), (5.2.8) et (5.2.9) on déduit
(5.2.10)

$$(1-3r_k)H^3(E_k\cap S_{1-\epsilon})\leq \int_0^{1/2}(1-\frac{1}{2}r_k+tr_k)^2H^2(E_k'\cap B(x,\frac{1-\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))dt\leq H^3(E_k\cap S_{1-\epsilon})$$

Mais $\lim_{k\to+\infty} r_k = 0$, donc quand k est assez grand, $H^2(E_k'\cap B(x,\frac{1-\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))\leq H^2(E_k'\cap B(O,1))$. Par suite, puisque $\lim_{k\to\infty} H^2(E_k'\cap B(O,1)) = c$, on a

$$\int_0^{1/2}(1-\frac{1}{2}r_k+tr_k)^2H^2(E_k'\cap B(x,\frac{1-\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))dt\leq c/2,$$

pour k assez grand. On applique le lemme 2.5 à notre suite d'ensembles minimaux E_k qui converge vers L dans l'ensemble ouvert $S_{1-\epsilon}$ et on en déduit que

$$H^3(L\cap S_{1-\epsilon})\leq \liminf_{k\to+\infty} H^3(E_k\cap S_{1-\epsilon})\leq c/2. \tag{5.2.11}$$

Maintenant, L est de type $C \times Ox$, où C est le cône dans H et centré en x. De plus, $S_{1-\epsilon}$ est un cylindre dont l'axe passe par x et orthogonal à H, donc $H^3(L \cap S_{1-\epsilon}) = \frac{1}{2}H^2(C \cap B(x, 1-\epsilon)) = \frac{1}{2}(1-\epsilon)\theta_C(x)$. Donc, par (5.2.11), $\frac{1}{2}(1-\epsilon)\theta_C(x) \leq \frac{1}{2}c$. Cela est valable pour tout $\epsilon > 0$, donc on doit avoir

(5.2.12) $$\theta_C(x) \leq c.$$

On applique maintenant le théorème de la coaire pour les ensembles de la forme $E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}$ et les application p_{E_k} qui envoient chaque point $z \in E_k$ sur l'axe Ox. Pour ϵ très petit, le Jacobien $J_{p_{E_k}}(z)$ quand $z \in E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}$ s'estime comme (5.2.8) et (5.2.9), c'est à dire $1 - 3r_k \leq J_{p_{E_k}}(z) \leq 1$. Puisque $\overline{S}_{1+\epsilon}$ est le cylindre fermé porté sur $\overline{B}(x, 1+\epsilon)$, la même formule que (5.2.6) s'applique et le Jacobien s'estime comme ci-dessus, donc

(5.2.13)
$$(1-3r_k)H^3(E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}) \leq \int_0^{1/2} (1-\frac{1}{2}r_k+tr_k)^2 H^2(E_k' \cap \overline{B}(x, \frac{1+\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))dt \leq H^3(E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}).$$

Puisque $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, pour k assez grand, on a $H^2(E_k' \cap \overline{B}(x, \frac{1+\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k})) \geq H^2(E_k' \cap B(O,1))$, et puisque $\lim_{k\to\infty} H^2(E_k' \cap B(O,1)) = c$, pour k assez grand

$$\int_0^{1/2} (1-\frac{1}{2}r_k+tr_k)^2 H^2(E_k' \cap \overline{B}(x, \frac{1+\epsilon}{1-\frac{1}{2}r_k+tr_k}))dt \geq c/2.$$

On déduit de (5.2.13) que

(5.2.14) $$\limsup_{k\to\infty} H^3(E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}) \geq c/2.$$

On applique le lemme 2.6 pour notre suite E_k qui converge vers L dans l'ensemble fermé $\overline{S}_{1+\epsilon}$,

(5.2.15) $$\limsup_{k\to\infty} H^3(E_k \cap \overline{S}_{1+\epsilon}) \leq H^3(L \cap \overline{S}_{1+\epsilon}),$$

de (5.2.14) et (5.2.15), on obtient pour tout $\epsilon > 0$

(5.2.16) $$H^3(L \cap \overline{S}_{1+\epsilon}) \geq c/2.$$

Puisque L est de la forme $C \times Ox$ avec C un cône minimal de dimension 2 dans H et $\overline{S}_{1+\epsilon}$ est le cylindre fermé, porté sur $\overline{B}(x, 1+\epsilon)$ et avec l'axe Ox, on a bien $H^3(L \cap \overline{S}_{1+\epsilon}) = 1/2(1+\epsilon)H^2(C \cap B(x,1)) = 1/2(1+\epsilon)\theta_C(x)$. Donc de (5.2.16) on déduit que

$$1/2(1+\epsilon)\theta_C(x) \geq c/2,$$

pour tout $\epsilon > 0$, et donc

(5.2.17) $$\theta_C(x) \geq c.$$

Maintenant (5.2.12) et (5.2.17) nous donnent que $c = \theta_C(x)$, donc pour toute suite $\{r_k\}$ qui tend vers 0, tout le point limite de $\{\theta_{E'}(x, r_k)\}$ quand $k \to +\infty$, est $\theta_C(x)$.

On en déduit que la suite $\{\theta_{E'}(x, r_k)\}$ elle même converge vers $\theta_C(x)$, puis que la densité de E' en x existe, et prend la valeur $\theta_C(x)$, qui ne peut qu'être d'_P ,d'_Y ou d'_T (CQFD). □

Constructions des courbes et adaptation pour avoir une déformation comme dans [D2]

On est prêt à construire des courbes dans $E' \cap B(x, r)$, pour r assez petit. On va suivre les méthodes de construction de [D2].

Lemme 5.3. *Pour chaque $\epsilon > 0$, il y a un rayon $r = r_x > 0$ et un cône minimal X de dimension 2 dans $H = H_x$ et centré en x tel que*

$$\begin{aligned} &d_{x,r}(E', X) < \epsilon, \\ &|\theta_{E'}(x,t) - \theta_{E'}(x)| \le \epsilon \text{ pour } t \le r. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Démonstration. On applique le lemme 4.3, en fixant ϵ, il existe $r_1 > 0$ tel que pour chaque $0 < r < r_1$, il existe un cône minimal $F(x, r)$ de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{T}$, de dimension 3, dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,r}(E, F(x, r)) \le \epsilon/10. \tag{5.3.2}$$

De plus, $\theta_E(x) = \theta_{F(x,r)}(x)$, donc, en notant $F'(x, r)$ l'intersection de $F(x, r)$ avec H, $F'(x, r)$ est un cône minimal de minimal de dimension 2, centré en x. On déduit de (5.3.2) que :

$$d_{x,r}(E', F'(x, r)) \le \epsilon/2. \tag{5.3.3}$$

Maintenant, comme on a montré dans la proposition 5.2, la densité de E' en x existe, et est égale à celle de $F'(x, r)$ en x. Alors il existe $r_2 > 0$ tel que pour $0 < t < r_2$, on a

$$|\theta_{E'}(x,t) - \theta_{E'}(x)| \le \frac{\epsilon}{2} \tag{5.3.4}$$

On prend maintenant $r = \min\{r_1/2, r_2/2\}$, $X = F'(x, r)$, alors (5.3.2) et (5.3.4) nous donnent le lemme. □

Proposition 5.4. *Pour chaque $\tau > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si le rayon $r > 0$ satisfait à*

$$r < \epsilon \tag{5.4.1}$$

et

$$\theta_E(x, r) - \theta_E(x) < \epsilon \tag{5.4.2}$$

alors il existe un cône minimal X de dimension 2 dans H, centré en x et une fonction $f : H \to H$ tels que

$$|f(y) - y| \le \tau r \text{ pour } y \in B(x, 2r) \cap H, \tag{5.4.3}$$

(5.4.4)
$$(1-\tau)[\frac{|y-z|}{r}]^{1+\tau} \leq \frac{|f(y)-f(z)|}{r} \leq (1+\tau)[\frac{|y-z|}{r}]^{1-\tau} \text{ pour } y,z \in B(x,2r)\cap H$$

(5.4.5)
$$B(x,(2-\tau)r)\cap H \subset f(B(x,2r)\cap H)$$

(5.4.6)
$$E'\cap B(x,(2-\tau)r) \subset f(X\cap B(x,2r)) \subset E'$$

(5.4.7)
$$d_{x,r}(E',X) \leq \tau.$$

Démonstration. C'est le résultat du chapitre 4. □

Le théorème suivant donne une inégalité entre $H^2(E'\cap B(x,r))$ et $H^1(E'\cap \partial B(x,r))$. Ce qui est très important puisque pour presque tout r, on a

$$H^1(E'\cap \partial B(x,r)) \leq \frac{d}{dr}H^2(E'\cap B(x,r)),$$

donc si on a une telle inégalité, on obtiendra une inégalité différentielle qui concerne la densité $\theta_{E'}(x,r)$ et on pourra contrôler l'excès de densité $\theta_{E'}(x,r)-\theta_{E'}(x)$. Ce qui nous permettra ensuite d'approcher E' par des cônes de dimension 2 $Z\in\mathbb{Z}'$ (où $\mathbb{Z}'$ est comme dans le chapitre 3) à toute échelle avec une certaine vitesse. On pourra en conclure que E' est C^1-équivalent à un cône minimal de dimension 2 dans H. Donc on va consacrer une grande partie de ce chapitre à démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.5. *Il y a une fonction $h(r)$ qui est de l'ordre r^c, avec c une constante géométrique positive, et une constante $\alpha>0$ petite, mais géométrique, telles que*
(5.5.1)
$$H^2(E'\cap B(x,r)) \leq \frac{r}{2}H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - \alpha r[H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 2\theta_{E'}(x)r] + 4r^2h(2r).$$

Pour cela, on va construire une déformation $\tilde{\varphi}$ pour E' dans l'hyperplan H, qui est l'identité hors de la boule $B(x,r)\cap H$. On construira ensuite, grâce à cette déformation, une déformation pour E. On utilisera la minimalité de E pour avoir une inégalité épipérimétique pour E' et puis on obtiendra l'inégalité (5.5.1).

Lemme 5.6. *Si $H^1(E'\cap\partial B(x,r)) \geq 2(1+\eta)r\theta_{E'}(x)$, où η est une constante universelle petite, alors on a automatiquement (5.5.1).*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
H^2(E'\cap B(x,r)) - &\frac{r}{2}H^1(E\cap\partial B(x,r)) + \alpha r[H^1(E\cap\partial B(x,r)) - 2\theta_{E'}(x)r] \\
&= \theta_{E'}(x,r).r^2 - \frac{1-2\alpha}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 2\alpha r^2\theta_{E'}(x) \\
&\leq r^2[(\theta_{E'}(x)+\epsilon) - (1-2\alpha)(1+\eta)\theta_{E'}(x) - 2\alpha\theta_{E'}(x)] \\
&= r^2(\epsilon - (1-2\alpha)\eta\theta_{E'}(x)) < 0
\end{aligned}$$

ce dont on a besoin. $\square$

Donc, pour démontrer le théorème 5.5, on peut se donner une hypothèse supplémentaire.

Hypothèse 5.6. *On peut supposer que l'ensemble E' satisfait à*

$$H^1(E' \cap \partial B(x,r)) \leq 2(1+\eta)r\theta_{E'}(x).$$

Donc on a toutes les hypothèses nécessaires pour construire les courbes, on va suivre les notations comme dans [D2]. D'abord, on veut décrire l'ensemble $K = X \cap \partial B(x,r)$, qui est l'union d'arcs de grands cercles et de grands cercles $C_j, j \in J$. Quand X est un plan de dimension 2 passant par x, les C_j sont un grand cercle. Quand X est un ensemble de type $\mathbb{Y}$, ils sont l'union de 3 demi-grands cercles, qui se rencontrent en deux points formant un diamètre de $B(x,r) \cap H$. Finalement, au cas où X est de type $\mathbb{T}$, ce sont l'union de quatre morceaux de grands cercles, qui sont l'intersection d'un ensemble de type $\mathbb{T}$ de dimension 2 dans H, centré en x avec $B(x,r) \cap H$. Dans les deux premiers cas, K est plus facile à contrôler si on coupe chaque C_j en deux ou trois sous-arcs plus petits. Pour chaque C_j dont la longeur est plus grand que $9\pi r/10$, on coupe C_j en deux ou trois sous-arcs disjoints par la même longeur. Pour les autres C_j, on les laisse comme ils sont. Donc, on a maintenant une décomposition de K en arcs de cercles disjoints $C_{j,k}, (j,k) \in \tilde{J}$ tels que

$$\pi r/4 \leq \text{length}(C_{j,k}) \leq 9\pi r/10 \text{ pour } (j,k) \in \tilde{J}.$$

On va maintenant distinguer deux types d'extrémités. On note V la collection de tous les extrémités de $C_{j,k}$. Ensuite, notons V_0 l'ensemble d'extrémités $x \in V$ qui est un extrémité commune de trois arcs $C_{j,k}$. On pose ensuite $V_1 = V \setminus V_0$, l'ensemble des extrémités que nous avons ajoutées, et qui appartiennent exactement à deux arcs $C_{j,k}$. On a donc, si (j,k) et (j',k') sont deux pairs distinctes, alors

$$\text{dist}(C_{j,k}, C_{j',k'}) \geq \pi r/6 \text{ ou } C_{j,k} \text{ et } C_{j',k'} \text{ ont un extrémité commune } z \in V.$$

Lemme 5.7. *On peut trouver des arcs simples $g_{j,k}$ dans $E' \cap \partial B(x,r)$, tels qu'ils sont disjoints, sauf pour leurs extrémités. Et si y,z sont les deux extrémités de $C_{j,k}$, il existe deux extrémités y', z' de $g_{j,k}$ satisfaisant à $d(y,y') \leq \eta r$ et $d(z,z') \leq \eta r$. De plus,* $\text{dist}(z, C_{j,k}) \leq \eta r$ *pour $z \in g_{j,k}$.*

Démonstration. Voir le lemme 6.11 dans [D2], ici, par homothétie et par translation, on remplace $r = 1$ et $x = 0$. Donc E' devient un ensemble de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ qui vérifie tous les hypothèses du lemme 6.11 de [D2]. $\square$

Notons aussi que par la preuve dans [D2], on a $H^1(g_{j,k}) \leq C\,\text{length}(C_{j,k}) + \eta r$ et $H^1([E' \cap \partial B(x,r)] \setminus \cup_{j,k} g_{j,k}) \leq C\eta r$, avec C une constante géométrique.

Construction d'un graphe Lipschitzien et estimation de longeurs.

Lemme 5.8. *Pour chaque $\eta_1 > 0$, on peut choisir $\tau_1 > 0$ tel que les choses qui suivent sont exactes. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^4$, soit γ une courbe simple, rectifiable dans ∂B, avec deux extrémités a, b. On suppose que :*

$$\pi/6 \leq \text{length}(\gamma) \leq \frac{10\pi}{11}$$

$$\text{length}(\gamma) \leq \text{dist}_{\partial B}(a,b) + \tau_1$$

où $\text{dist}_{\partial B}$ est la distance géodésique dans ∂B,

$$\text{dist}(z,P) \leq \tau_1 \text{ pour } z \in \gamma,$$

où P est le plan de dimension 2 passant par O et a, b.

Alors on peut construire une courbe Lipschitzienne Γ sur ∂B, avec les mêmes extrémités a et b, avec une constante Lipschitzienne η_1 telle que

$$H^1(\Gamma \setminus \gamma) \leq H^1(\gamma \setminus \Gamma) \leq C\eta_1^{-2}(\Delta L)$$

avec C une constante géométrique et $\Delta L = \text{length}(\gamma) - \text{dist}_{\partial B}(a,b)$.

Pour la démonstration, voir le chapitre 7 dans [D2]. □

On peut appliquer le lemme 5.8 aux courbes $g_{i,j}$ construites dans le lemme 5.7. On obtient le lemme suivant :

Lemme 5.9. *Pour chaque courbe $g_{i,j}$ on peut construire une nouvelle courbe Lipschitzienne $\Gamma_{i,j}$ dans la sphère $\partial B(x,r)$, avec les mêmes extrémités et avec une constante Lipschitzienne plus petite que η_1, et qui satisfait à*

$$H^1(\Gamma_{i,j} \setminus g_{i,j}) \leq H^1(g_{i,j} \setminus \Gamma_{i,j}) \leq C\eta_1^{-2}(\text{length}(g_{i,j}) - \text{dist}_{\partial B(x,r)}(a,b)), \tag{5.9.1}$$

où a et b sont les deux extrémités de $g_{i,j}$.

Une déformation d'un cône sur un petit graphe Lipschitzien.

On considère dans cette partie, pour l'espace ambiant $\mathbb{R}^4$, un graphe Lipschitzien Γ avec une petite constante Lipschitzienne dans la sphère d'unité. On veut trouver une surface dans la boule unité, avec le même bord que le cône sur Γ, mais avec une aire plus petite.

Donc, on se donne une courbe Γ sur la sphère unité ∂B, dont on note les deux extrémités a et b, on suppose que

$$a = (1,0,0) \text{ et } b = (\cos T, \sin T, 0) \text{ pour } T \in [8\eta_0, 10\pi/11].$$

On suppose aussi que Γ est un graphe Lipschitzien avec une constante Lipschitzienne plus petite que η_1. Alors il existe une fonction η_1-Lipschitzienne $v : [0,T] \to \mathbb{R}^2$, avec $v(0) = v(T) = 0$, telle que si on pose

$$w(t) = (1 - |v(t)|^2)^{1/2} \text{ et } z(t) = (\cos tw(t), \sin tw(t), v(t)) \text{ pour } t \in [0,T],$$

alors z est un paramétrage de Γ par $[0, T]$.

On peut prendre η_1 aussi petit qu'on veut, et on va estimer les variations de l'aire en terme de length$(\Gamma) - T$ et la quantité $||v'(t)||_2^2$, qui se trouve être équivalente.

On pose
$$D_T = \{(r\cos t, r\sin t) : r \in (0,1) \text{ et } t \in [0,T]\}.$$
On définit ensuite une fonction homogène F, par

$$F(r\cos t, r\sin t) = \frac{rv(t)}{w(t)} \text{ pour } r \geq 0 \text{ et } t \in [0,T],$$

puis on note Σ_F le graphe de F sur $\hat{D}_T$. C'est clair que $\Gamma \subset \Sigma_F$.

On veut trouver une nouvelle fonction G, définie sur $\hat{D}_T$, telle que

$$G(r\cos t, r\sin t) = F(r\cos t, r\sin t) \text{ pour } t \in \{0, T\}, \text{ et pour } 9/10 \leq r \leq 1,$$

et dont le graphe Σ_G a une aire plus petite. On demande aussi que $G(r\cos t, r\sin t) = F(r\cos t, r\sin t)$ pour $r \geq 9/10$ pour assurer que on ne change rien près de Γ. On veut aussi que

$$G(r\cos t, r\sin t) = 0 \text{ pour } 0 \leq r \leq 2\kappa \text{ et } 0 \leq t \leq T,$$

où κ est une constante positive, petite et géométrique.

Lemme 5.10. *On peut trouver une fonction Lipschitzienne $G : \overline{D}_T \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant aux conditions ci-dessus et*

$$|\nabla G(z)| \leq C||v'||_\infty \leq C\eta_1 \text{ pour presque tout } z \in D_T,$$

$$H^2(\Sigma_F) - H^2(\Sigma_G) \geq 10^{-4} \int_0^T |v'(t)|^2 dt \geq 10^{-4}[\text{length}(\Gamma) - T].$$

Démonstration. Voir [D2], le point essentiel est le suivant. Posons

$$f(t) = F(\cos t, \sin t) = \frac{v(t)}{w(t)} = v(t)(1 - |v(t)|^2)^{-1/2} \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

Alors, f est $2||v'||_\infty$-Lipschitzienne et $f(0) = f(T) = 0$. On peut donc écrire f comme une somme de sinus,

$$f(t) = \sum_{k\geq 1} \beta_k \sin(\pi k t/T)$$

pour $0 \leq t \leq T$. On a ensuite

$$\frac{\pi^2}{2T} \sum_{k\geq 1} k^2 |\beta_k|^2 = \int_0^T |f'(t)|^2 dt < 4\eta^2 T,$$

donc $\sum_{k\geq 1}|\beta_k| < +\infty$, on peut ensuite poser

$$G_1(\rho\cos t, \rho\sin t) = \sum_{k\geq 1}\beta_k\rho^{\pi k/T}\sin(\pi kt/T)$$

pour $t \in \{0, T\}$ et $0 \leq \rho \leq 1$, la série converge normalement, on a $G_1(\cos t, \sin t) = f(t)$, donc

$$G_1(z) = F(z) \text{ sur } \overline{D}_T \cap \partial B(O, 1),$$

et

$$G_1(\rho\cos t, \rho\sin t) = 0 \text{ pour } t \in \{0, T\} \text{ et } 0 \leq \rho \leq 1.$$

On définit ensuite notre déformation G_2,

$$G_2(z) = G_1(z) \text{ pour } z \in \overline{D}_T \cap \overline{B}(O, s)$$

avec $s = 1 - 10^{-6}$ un rayon très proche de 1. Puis on pose pour $0 < \rho < 1$,

$$G_2(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{1-\rho}{1-s}G_1(s\cos t, s\sin t) + \frac{\rho - s}{1-s}G_1(\cos t, \sin t).$$

Maintenant, pour définir G, on choisit un κ très petit, et on pose

$$G(z) = F(z) \text{ pour } z \in \overline{D}_T \setminus B(O, 9/10),$$

ensuite

$$G(z) = \frac{9}{10}G_2(10z/9) \text{ pour } z \in \overline{D}_T \cap B(O, 9/10) \setminus B(O, 3\kappa)$$

$$G(z) = 0 \text{ sur } \overline{D}_T \cap B(O, 2\kappa).$$

$$G(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho - 2\kappa}{\kappa}G(3\kappa\cos t, 3\kappa\sin t)$$

pour $0 \leq t \leq T$ et $2\kappa \leq \rho \leq 3\kappa$.

On obtient, comme dans [D2]

$$\begin{aligned} H^2(\Sigma_F) - H^2(\Sigma_G) &\geq 5.10^{-4}||f'||_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}||v'||_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(\text{length}(\Gamma) - T), \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Par homothétie, on peut améliorer notre ensemble $E' \cap \partial B(x, r)$, puis on fait la même construction, pour obtenir une amélioration de l'aire de $E' \cap B(x, r)$, tout en fixant le bord. On va maintenant construire une déformation pour E', et puis E. L'idée principale est d'utiliser le lemme 5.10 pour les cône centrés en x et porté sur les courbes $g_{i,j}$ dans $\partial B(x, r)$.

Construction de compétiteur pour E'.

On considère toujours le point x et le rayon r comme précédemment. Comme dans le lemme 5.7, on a construit des courbes simples $g_{i,j}$ dans $E' \cap \partial B(x,r)$. Maintenant pour une courbe $g_{i,j}$ dont les deux extrémités sont y, z, soit $D_{j,k}$ le cône centré en x et s'appuyant sur l'arc géodésique de $\partial B(x,r)$ qui passe de y à z. On note $P_{j,k}$ le plan qui contient $D_{j,k}$. On applique les constructions comme dans le lemme 5.8, pour obtenir pour chaque $g_{j,k}$ une courbe $\Gamma_{j,k}$ dans $\partial B(x,r)$, qui est un graphe η_1-Lipschitzien sur $P_{j,k}$ et admet une grande partie en commun avec $g_{j,k}$. On note $\Gamma^*_{j,k}$ le cône centré en x et s'appuyant sur $\Gamma_{j,k}$. Alors $\Gamma^*_{j,k}$ est le graphe d'une fonction homogène Lipschitzienne définie sur $D_{j,k}$. On applique ensuite la construction comme du lemme 5.10, pour obtenir les surfaces $\Sigma_{j,k}$ qui sont les graphes de fonctions $C\eta$-Lipschitziennes $G_{j,k}$ définies sur $D_{j,k}$. De plus, $\Sigma_{j,k}$ coïncide avec $\Gamma^*_{j,k}$ en dehors de la boule $B(x, \frac{19}{20}r)$. On a une inégalité comme dans le lemme 5.10 :

$$(6)\quad H^2(\Sigma_{j,k} \cap B(x,r)) \leq H^2(\Gamma^*_{j,k} \cap B(x,r)) - 10^{-4} r(\mathrm{length}(\Gamma_{j,k}) - \mathrm{dist}_{\partial B(x,r)}(y,z)).$$

Où y, z sont les deux extrémités de $C_{j,k}$. On pose ensuite

$$(*)\qquad g = \cup_{j,k} g_{j,k}; \quad \Gamma = \cup_{j,k}\Gamma_{j,k}; \quad \Gamma^* = \cup_{j,k}\Gamma^*_{j,k}; \quad \Sigma = \cup_{j,k}\Sigma_{j,k}.$$

Le lemme suivant est obtenu à partir du lemme 9.4 dans [D2] :

Lemme 5.11. *Il existe un voisinage U de $E' \cap \overline{B}(x,r)$ dans $\overline{B}(x,r) \cap H$ et une application 50-Lipschitzienne $p_2 : U \to \Sigma \cap B(x,r)$ (ici, Σ est défini comme dans $(*)$) tels que*

$$p_2(z) = z \text{ pour } z \in \Sigma \cap \overline{B}(x,r) \setminus B(x, r/3)$$

et

$$p_2(z) \in \Sigma \cap B(x, r/2) \text{ pour } z \in U \cap B(x, r/3).$$

Soit maintenant $\xi > 0$ très petit, on définit $\psi(t)$ par $\psi(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq (1-\xi)r$, $\psi(t) = 0$ pour $t \geq r$ et ψ est linéaire dans $[(1-\xi)r, r]$.

Définition 5.12. *On définit une déformation de E' dans H comme suit :*

$$(5.12.1)\qquad \tilde{\varphi}(z) = \psi(|z-x|)p_2(z) + (1 - \psi(|z-x|))z \text{ pour } z \in H\ .$$

Ensuite, pour $z \in H$, z a pour coordonnée $(1, z_2, z_3, z_4)$, puis $\tilde{\varphi}(z)$ est aussi dans H, donc on peut poser $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(1, z_2, z_3, z_4) = (1, \phi(z_2, z_3, z_4))$ avec ϕ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui est construite comme la fonction f_1 dans le lemme 9.42 de [D2], modulo une homothétie de rapport r. On a de plus, $\tilde{\varphi}(z) = z$ pour $z \in H \setminus B(x,r)$.

Proposition 5.13. *En posant $F_1 = \tilde{\varphi}(E')$, on a l'inégalité suivante :*

$$(5.13.1)\quad \limsup_{\xi \to 0} H^2(F_1 \cap \overline{B}(x,r)) \leq H^2(\Sigma \cap B(x,r)) + 2550 \int_{E \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z$$

où Σ, Γ sont définis comme ci-dessus.

Démonstration. La démonstration est exactement comme celle du lemme 9.42 dans [D2], modulo une homothétie de rapport r. □

Construction de compétiteurs pour E.

On veut maintenant construire un compétiteur au sens d'Almgren pour notre cône minimal E. On prend τ assez petit, qu'on va décider après, soit L l'homothétie de centre O, avec coefficient $b = 1 + \tau$. On rappelle que H_b est l'hyperplan orthogonal à Ox et de distance b de l'origine. On note x^b et $B(x^b, r_1)$ les images de x et de $B(x, r)$ par L, respectivement, donc, $x^b \in H_b$ et $B(x^b, r_1)$ est la boule de centre x^b et de rayon $r_1 = (1 + \tau)r$. Pour simplifier, on note les vecteurs colonnes horizontalement, c'est à dire que si un vecteur z a pour coordonnée $(z_1, ..., z_n)$, on l'écrit comme $z = (z_1, ..., z_n)$.

On pose

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \{tz : 0 \le t \le 1, z \in E' \cap B(x, r)\},\\
E_1 &= \{tz : 1 \le t \le 1 + \tau, z \in E' \cap B(x, r)\},\\
\mathfrak{C}_1 &= \{tz : 0 \le t \le 1, z \in B(x, r) \cap H\},\\
\mathfrak{C}_2 &= \{tz : 1 \le t \le 1 + \tau, z \in B(x, r) \cap H\},\\
E_1' &= \{(1 + \tau)z : z \in E'\}.
\end{aligned}
$$

On va maintenant construire un compétiteur de E, c'est à dire une fonction Lipschitzienne φ, de $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^4$, qui est l'identité en dehors d'une boule assez grande. Notre fonction est comme suit.

Définition 5.14. *Une déformation φ de E est donnée par :*
Sur $\mathbb{R}^4 \setminus (\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2)$, φ est l'identité.
Sur H, φ est la fonction Lipschitzienne $\tilde{\varphi}$.
Dans $\mathfrak{C}_1$-l'ensemble des points z tels que $z = tz', z' \in H \cap B(x, r), 0 \le t \le 1$, on pose $\varphi(z) = t\tilde{\varphi}(z')$.
Dans $\mathfrak{C}_2$-l'ensemble des points de la forme $z = tz' + (1 - t)z'', 0 \le t \le 1$, avec $z' \in H, z'' \in H_b$ et $z'' = (1 + \tau)z'$, on pose

$$\varphi(z) = t\varphi(z') + (1 - t)\varphi(z'') = t\tilde{\varphi}(z') + (1 - t)z''.$$

Donc, pour un point $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathfrak{C}_2$, si on veut exprimer $\varphi(y)$ par ses coordonnées, on a

$$\varphi(y) = \varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1, (\frac{y_1 - 1}{\tau} b(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}) + \frac{b - y_1}{\tau}\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})),$$

on voit que $\varphi(y)$ est au même "‘niveau"’ que y.

On veut maintenant, à partir de la définition de φ, calculer la dérivée $D\varphi$ de φ dans le domaine $\mathfrak{C}_2$, de manière à appliquer la formule de l'aire.

Proposition 5.15. *La dérivée $D\varphi(y)$ de φ pour un point y dans $\mathfrak{C}_2$ est donnée par*

$$D\varphi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & & A_2 & \end{pmatrix} \tag{5.15.1}$$

où A_1 est un 3-vecteur colonne et A_2 est une matrice 3×3, qui sont donnés par

$$A_1 = \frac{b}{\tau}(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}) - \frac{y_1-1}{\tau}b(\frac{y_2}{y_1^2}, \frac{y_3}{y_1^2}, \frac{y_4}{y_1^2}) - \frac{\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})}{\tau} - \frac{b-y_1}{\tau}D\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}).(\frac{y_2}{y_1^2}, \frac{y_3}{y_1^2}, \frac{y_4}{y_1^2}).$$

$$A_2 = \frac{y_1-1}{\tau}\frac{b}{y_1}Id + \frac{b-y_1}{\tau}\frac{1}{y_1}D\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}).$$

Démonstration. La démonstration est claire grâce à la formule explicite de φ dans le domaine $\mathfrak{C}_2$. □

La formule de l'aire et une estimation pour $H^3(\varphi(E_1))$.

Rappelons maintenant le théorème de l'aire [Fe].

Théorème 5.16. Théorème de l'aire. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction Lipschitzienne et $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble rectifiable de dimension n'. Donc on peut considérer f comme une application Lipschitzienne de A dans $\mathbb{R}^m$. Notons $J_f(x)$ le Jacobien approximé de f en x vu comme une application de A dans $\mathbb{R}^m$. Notons aussi, pour $y \in \mathbb{R}^m$, $N_{f,A}(y) \in [0, +\infty]$ le nombre de points de $A \cap f^{-1}(y)$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^m} N_{f,A}(y)dH^{n'}(y) = \int_A J_f(x)dH^{n'}(x).$$

On a aussi, pour une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ borélienne et positive,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)dH^{n'}(y) = \int_A g(x)J_f(x)dH^{n'}(x).$$

On utilise maintenant le théorème de l'aire pour estimer $H^3(E_1)$. En effet, on prend ici E_1 comme A et φ comme la fonction f. Alors, dans notre formule de l'aire, $J_\varphi(z)$, avec $z \in E_1$, est le Jacobien de φ au point z entre deux ensembles rectifiables E_1 et $\varphi(E_1)$.

On applique le théorème 5.16 pour obtenir

$$\int_{\varphi(E_1)} N_{\varphi,E_1}(y)dH^3(y) = \int_{E_1} J_\varphi(x)dH^3(x).$$

Pour $y \in \varphi(E_1)$, on a toujours $N_{\varphi,E_1}(y) \geq 1$, donc

$$H^3(\varphi(E_1)) \leq \int_{E_1} J_\varphi(x)dH^3(x). \tag{7}$$

On calcule $J_\varphi(y)$ pour chaque $y \in E_1$. On prend 3 vecteurs, qui sont tangents à E en $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Le premier vecteur est $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. C'est bien un vecteur tangent puisque E est un cône passant par l'origine. Ensuite, on prend deux verteurs v, w orthogonaux, de norme 1, qui sont dans l'hyperplan H_{y_1} passant par $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ et parallèle à H et H_b. On va choisir v, w plus tard. Notons que v, w ont pour premières coordonnées vectorielles 0, donc ils ont pour coordonnées $(0, v')$ et $(0, w')$, avec v', w' des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On note par la suite E'_{y_1} = l'intersection du cône sur $E' \cap B(x, r)$ avec H_{y_1}. En particulier, $E'_1 = E' \cap B(x, r)$.

On a maintenant la formule

$$J_\varphi(y) = \frac{|D\varphi.y \wedge D\varphi.v \wedge D\varphi.w|}{|y \wedge v \wedge w|}, \tag{8}$$

où $\wedge$ est le produit extérieur, $D\varphi$ est la matrice de la dérivée de φ au point y, calculée comme ci-dessus, et on prend la norme des deux trois-vecteurs calculés.

On calcule d'abord $D\varphi.y$. On a :

$$D\varphi.y = D\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1, K),$$

où K est le vecteur colonne donné par

$$\begin{aligned} K &= \frac{b}{\tau}(y_2, y_3, y_4) - \frac{(y_1 - 1)}{\tau} b(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}) - \frac{\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})}{\tau}.y_1 + \frac{y_1 - 1}{\tau}\frac{b}{y_1}(y_2, y_3, y_4) \\ &= \frac{b}{\tau}(y_2, y_3, y_4) - \frac{\phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})}{\tau}.y_1 \\ &= (y_2, y_3, y_4) + y_1 \frac{(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}) - \phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})}{\tau}. \end{aligned}$$

On veut maintenant estimer la norme de K, en tenant compte que $(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})$ et $(1, \phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}))$ sont dans la même boule $B(x, r)$, donc $||(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}) - \phi(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})|| \leq 2r$ et par conséquent

$$|K| \leq C'_1 + C'_2 \frac{r}{\tau}$$

où C'_1, C'_2 sont des constantes universelles.

Mais $|D\varphi.y| = \sqrt{y_1^2 + |K|^2}$, donc on a aussi

$$|D\varphi.y| \leq C_1 + C_2 \frac{r}{\tau}, \tag{9}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes universelles.

Ensuite, par la formule de $D\varphi$, on a bien :

$$\begin{cases} D\varphi.v = (0, \frac{b - y_1}{\tau}\frac{1}{y_1} D\phi.v' + \frac{y_1 - 1}{\tau}\frac{b}{y_1} v') \\ D\varphi.w = (0, \frac{b - y_1}{\tau}\frac{1}{y_1} D\phi.w' + \frac{y_1 - 1}{\tau}\frac{b}{y_1} w') \end{cases}$$

ici, $D\phi$ désigne toujours la dérivée de ϕ au point $(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})$. Puisque $1 \leq y_1 \leq 1 + \tau = b$ et $|v'| = |w'| = 1$, on a alors

$$\begin{aligned} |D\varphi.v| &\leq |D\phi.v'| + b \\ |D\varphi.w| &\leq |D\phi.w'| + b \end{aligned} \tag{10}$$

De (9) et (10) on déduit que

$$|J_\varphi(y)| = \frac{|D\varphi.y \wedge D\varphi.v \wedge D\varphi.w|}{|y \wedge v \wedge w|} \leq (C_1 + C_2.\frac{r}{\tau})(|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) \tag{11}$$

car y, v, w sont presque orthogonaux (les angles entre eux sont proches de $\pi/2$), donc $|y \wedge v \wedge w| \geq C'|y||v||w| \geq C$ une constante positive.

Considérons l'application $f : E_1 \to \mathbb{R}$, donnée par $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto y_1$, pour $y \in E_1$. Par la formule de la coaire

$$\begin{aligned} \int_{E_1} J_\varphi(y) dH^3(y) &= \int_{E_1} J_f(y) \frac{J_\varphi(y)}{J_f(y)} dH^3(y) \\ &= \int_1^b dy_1 \int_{E'_{y_1}} \frac{J_\varphi(y)}{J_f(y)} dH^2 y \end{aligned}$$

On estime $J_f(y)$ comme dans (4), on a $J_f(y) \geq \frac{y_1}{|y|}$. Puisque $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_f(y)} &\leq \sqrt{1 + \frac{y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}{y_1^2}} \\ &\leq \sqrt{1 + r_1^2} \\ &\leq 1 + 2r \end{aligned} \tag{12}$$

Donc, (11) et (12) nous donnent

(13)

$$\begin{aligned} \int_{E_1} J_\varphi(y) dH^3(y) &= \int_1^b dy_1 \int_{E'_{y_1}} \frac{J_\varphi(y)}{J_f(y)} dH^2 y \\ &\leq (1 + 2r) \int_1^b dy_1 \int_{E'_{y_1}} J_\varphi(y) dH^2 y \\ &\leq (1 + 2r)(C_1 + C_2 \frac{r}{\tau}) \int_1^b dy_1 \int_{E'_{y_1}} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y) \end{aligned}$$

Rappelons que $D\phi$ est la dérivée de ϕ au point $(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})$.

Puisque E est un cône, par changement de variable $y'_2 = \frac{y_2}{y_1}, y'_3 = \frac{y_3}{y_1}, y'_4 = \frac{y_4}{y_1}$

$$\int_{E'_{y_1}} (|D\phi.v'|+b)(|D\phi.w'|+b) dH^2(y) = y_1^2 \int_{E'_1} (|D\phi.v'|+b)(|D\phi.w'|+b) dH^2(y'). \tag{14}$$

Ici, si $y' \in E_1'$ a pour coordonnée $(1, y_2', y_3', y_4')$, alors $D\phi$ dans notre formule est pris au point (y_2', y_3', y_4'), puis, v', w' sont deux vecteurs tels que $(1, v')$ et $(1, w')$ sont tangents à E' au point y'- ce qui sont les même qui correspondent au point y tel que $y_2 = y_2' y_1, y_3 = y_3' y_1, y_4 = y_4' y_1$.

On sait que $y_1 < 2$, donc (13) et (14) nous donnent
(15)
$$\begin{aligned} H^3(\varphi(E_1)) &\leq 4(1+2r)(C_1 + C_2\frac{r}{\tau}) \int_1^b dy_1 \int_{E_1'} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y') \\ &= 4(1+2r)(C_1 + C_2\frac{r}{\tau})\tau \int_{E_1'} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y'). \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer $\int_{E_1'} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y')$.

On regarde l'application ϕ dans la boule $B(x,r) \cap H$. Comme dans la définition de ϕ dans le lemme 5.11 et la définition 5.12, on a deux parties $B_\xi = (1-\xi)B(x,r)$ et $A_\xi = B(x,r) \setminus B_\xi$ de la boule $B(x,r)$. De plus, notre application ϕ a les propriétés suivantes.

Sur $B_\xi \cap E_1'$, ϕ est 50-Lipschitzienne (ici, on comprend toujour que ϕ agit sur les trois coordonnés des points dans $B(x,r)$ autres que la coordonnée Ox), alors sur $B_\xi \cap E_1'$, $(|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) < 3000$

Sur A_ξ, on a

$$\limsup_{\xi \to 0} \int_{E_1' \cap A_\xi} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y') \leq 5000 \int_{E_1' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Sigma) dH^1 z$$

Donc, en faisant tendre ξ vers 0, on peut choisir notre déformation ϕ de manière que
(16)
$$\int_{E_1'} (|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b) dH^2(y') \leq 3000 H^2(E_1') + 5000 \int_{E_1' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z$$

Maintenant, (15) et (16) nous donnent
(17)
$$H^3(\varphi(E_1)) \leq 4(1+2r)(C_1 r + C_2 \tau)(3000 H^2(E_1') + 5000 \int_{E_1' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z)$$

On peut choisir τ maintenant, on pose $\tau = r$, et on va estimer $H^3(E_1 \cup E_2)$ et $H^3(\varphi(E_2))$. Vérifions d'abord que

$$H^3(E_1 \cup E_2) \geq \frac{1}{3}(1+r)(H^2(E_b')) = \frac{1}{3}(1+r)^3 H^2(E_1'). \tag{18}$$

En effet, $E_1 \cup E_2$ est une partie du cône centré en O et porté sur E_b' ; de plus, la distance de O à H_b est bien $1 + \tau = 1 + r$, donc on applique le théorème de la coaire pour déduire (18). Ensuite

$$H^3(\varphi(E_2)) \leq \frac{1}{3}(1+r) H^2(\tilde{\varphi}(E_1')), \tag{19}$$

car similairement, $\varphi(E_2)$ est une partie du cône centré en O et porté sur $\tilde{\varphi}(E_1')$, sauf que maintenant $\tilde{\varphi}(E_1')$ est contenu dans la boule $B(x,r)$; on applique toujours le théorème de la coaire à la fonction f qui est la projection orthogonale sur l'axe Ox.

Maintenant E est un cône minimal, donc $H^3(E_1 \cup E_2) \leq H^3(\varphi(E_1 \cup E_2))$, et on utilise (17), (18) et (19) pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(1+r)^3 H^2(E_1') &\leq \frac{1}{3}(1+r)H^2(\tilde{\varphi}(E_1'))\\ &+ 4(1+2r)(C_1 r + C_2\tau)[3000H^2(E_1') + 5000\int_{E_1'\cap\partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z].\end{aligned}$$

En majorant $1+2r$ par 2 et substituant r à τ, on obtient
(20)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(1+r)^3 H^2(E_1') &\leq \frac{1}{3}(1+r)H^2(\tilde{\varphi}(E_1'))\\ &+ 8(C_1 + C_2)r[3000H^2(E_1') + 5000\int_{E_1'\cap\partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z].\end{aligned}$$

On constate que $H^2(E_1') \leq C'r^2$, car par la propriété de régularité d'Ahlfors de E, il existe une constante C qui ne dépend que de la dimension 4 tel que

$$H^3(E\cap B(x,r)) \leq Cr^3,$$

mais E est un cône centré à l'origine, donc $H^3(E\cap B(x,r)) \geq C_1 H^2(E'\cap B(x,r))$, où C_1 est aussi une constante géométrique. Donc on a bien $H^2(E_1') = H^2(E'\cap B(x,r)) \leq C'r^2$, avec C' une constante géométrique, pour tout x et pour tout r.

En divisant par $\frac{1}{3}(1+r)^3$ et puisque $H^2(E_1') \leq C'r^2$, et d'après la proposition 5.13, $H^2(\tilde{\varphi}(E_1')) \leq H^2(\Sigma\cap B(x,r)) + 2550\int_{E_1'\cap\partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z$, on obtient
(21)

$$\begin{aligned}H^2(E_1') &\leq H^2(\tilde{\varphi}(E_1')) + Cr^3 + Cr\int_{E_1'\cap\partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z\\
&\leq H^2(\Sigma\cap B(x,r)) + Cr^3 + C_3\int_{E_1'\cap\partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z\\
&\leq H^2(\Gamma^*\cap B(x,r)) - 10^{-4}r(H^1(\Gamma) - H^1(\rho)) + C_3\eta r H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)\setminus\Gamma) + Cr^3\\
&\leq \frac{1}{2}rH^1(\Gamma) - 10^{-4}r(H^1(\Gamma) - H^1(\rho)) + C_3\eta r(H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) + Cr^3\\
&\leq \frac{1}{2}rH^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - \frac{1}{2}r(H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\Gamma))\\
&- 10^{-4}r(H^1(\Gamma) - H^1(\rho)) + C_3\eta r(H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) + Cr^3\\
&\leq \frac{1}{2}rH^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - 10^{-5}r[H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)] + Cr^3,\end{aligned}$$

si on pend η assez petit. En fait, la troisième ligne vient du (6) et le fait que $\mathrm{dist}(z,\Gamma) \leq C\eta r$ pour $z \in E_1'\cap\partial B(x,r)$. La quatrième ligne vient du fait que Γ^* est un cône et $H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)\setminus\Gamma) \leq H^1(E_1'\cap\partial B(x,r)\setminus g) + H^1(g\setminus\Gamma)$, ce qui est majoré par $C[(H^1(E_1' \cap \partial B(x,r)) - H^1(g)) + (H^1(g) - H^1(\rho))] = C(H^1(E_1' \cap \partial B(x,r)) - H^1(\rho))$, comme dans le lemme 5.9. Ici,

$$\rho = \cup_{i,j\in\tilde{J}}\rho_{i,j} \subset \partial B(x,r),$$

où pour chaque i,j, $\rho_{i,j}$ est la géodésique dans la sphère $\partial B(x,r)$, qui connecte les deux extrémités de $g_{i,j}$.

On a donc effectivement

$$H^2(E_1') \leq \frac{1}{2}rH^1(E_1' \cap \partial B(x,r)) - 10^{-5}r[H^1(E_1' \cap \partial B(x,r)) - H^1(\rho)] + Cr^3. \tag{22}$$

Maintenant, si $H^1(\rho) \leq 2r\theta_X(x) = 2r\theta_{E'}(x)$, où X est le cône minimal dans le lemme 5.4, (22) nous donne, en observant que $E_1' = E' \cap B(x,r)$
(23)

$$H^2(E' \cap B(x,r)) \leq \frac{1}{2}rH^1(E' \cap \partial B(x,r)) - 10^{-5}rH^1(E' \cap \partial B(x,r) - 2r\theta_{E'}(x)) + Cr^3$$

C'est exactement le théorème 5.5, avec $\alpha = 10^{-5}$.

Si $H^1(\rho) > 2r\theta_X(x)$, on va construire une deuxième déformation pour E', et puis on va construire notre déformation pour E de la même manière que dans la définition 5.14, sauf qu'on va remplacer notre déformation $\tilde{\varphi}$ par une nouvelle déformation qui nous permettra de gagner plus de l'aire. La procédure est essentiellement comme dans la section 10 dans [D2]. On va détailler pour construire notre déformation.

Une nouvelle déformation pour le cas où $H^1(\rho) > 2r\theta_X(x)$.

On rappele, comme dans la partie précédente, que $\rho = \cup_{i,j\in\tilde{J}}\rho_{i,j}$ l'union des géodésiques dans $\partial B(x,r)$ dont les deux extrémités sont les mêmes que les $g_{i,j}$. On note X_1 le cône dans l'hyperplan H, centré en x, et porté sur notre réseau ρ. Donc si on peut trouver une déformation X_2 de X_1 dans $B(x,r)$, avec une mesure de Hausdorff plus petite, alors on pourra trouver ainsi un autre compétiteur F_2 de E' dans $B(x,r)$, dont l'aire est plus petite que celle de F_1. On commence par un lemme.

Lemme 5.17. *Supposons qu'on puisse trouver une fonction Lipschitzienne $f: H \to H$ telle que*

$$f(z) = z \text{ pour } x \in H \setminus B(x,r) \text{ et } f(B(x,r)) \subset B(x,r)$$

et que si l'on pose $X_2 = f(X_1)$,

$$H^2(X_2 \cap B(x,r)) \leq H^2(X_1 \cap B(x,r)) - Ar^2$$

pour un $A > 0$. De plus, f est Lipschizienne avec une constante Lipschitzienne bornée, disons qui ne dépend que de la dimension 4. Alors on a

$$H^2(E'\cap\overline{B}(x,r)) \leq \frac{1}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 10^{-5}r[H^1(E\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)] - A\kappa^2r^2 + Cr^3.$$

Démonstration. On utilise la minimalité de E. On construit une nouvelle déformation pour E' comme suit.

On pose au début

$$f^\kappa(z) = x + \kappa(f(x+\kappa^{-1}(z-x)) - x) \text{ pour } z \in H. \tag{5.17.1}$$

Donc, f^κ est définie dans l'hyperplan H, et sa valeur au point z est l'image par homothétie de centre x, et de coefficent κ de la valeur de f au point z' qui est aussi l'image de z par une homothétie de centre x et de coefficient κ. Donc si f est Lipschitzienne avec une constante Lipschitzienne bornée, f^κ est aussi Lipschitzienne avec une constante Lipschitzienne bornée. On définit une nouvelle déformation pour E', à savoir

$$\tilde{\varphi}_1 = f^\kappa \circ \tilde{\varphi}, \tag{5.17.2}$$

puis une nouvelle déformation φ_1 pour E, exactement comme on a définit pour φ dans la définition 5.14, mais en remplaçant $\tilde{\varphi}$ par $\tilde{\varphi}_1$. C'est clair que $\tilde{\varphi}_1$ est l'identité en dehors de la boule $B(x,r)\cap H$, et donc que φ_1 est l'identité en dehors de l'ensemble $\mathbb{R}^4 \setminus (\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2)$. La fonction ϕ_1 est définie aussi comme la fonction ϕ, par le fait que

$$\tilde{\varphi}_1(1, y_2, y_3, y_4) = (1, \phi_1(y_2, y_3, y_4)).$$

On pose ensuite $f^\kappa(1, y_2, y_3, y_4) = (1, g^\kappa(y_2, y_3, y_4))$ où g^κ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. Puisque f^κ est une fonction Lipschitzienne, avec une constante Lipschitzienne bornée qui ne dépend que de la dimension 4, g^κ l'est aussi. Ensuite

$$\phi_1 = g^\kappa \circ \phi.$$

Alors pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, on a $D\phi_1.v = Dg^\kappa.D\phi.v$ et puisque g^κ est Lipschitzienne avec une constante Lipschitzienne bornée, on obtient

$$|D\phi_1.v| \leq C|D\phi.v|, \tag{$*$}$$

où C est une constante géométrique. Maintenant, la dérivée de φ_1 en un point $y \in \mathfrak{C}_2$ est exactemant comme celle de φ en y, sauf qu'on remplace ϕ par ϕ_1. On a alors la formule pour $D\varphi_1$:

$$D\varphi_1(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ & \\ A_1 & A_2 \\ & \end{pmatrix}$$

avec A_1 un 3-vecteur colonne et A_2 est une matrice 3×3 qui sont donnés par

$$A_1 = \tfrac{b}{\tau}(\tfrac{y_2}{y_1}, \tfrac{y_3}{y_1}, \tfrac{y_4}{y_1}) - \tfrac{y_1-1}{\tau} b(\tfrac{y_2}{y_1^2}, \tfrac{y_3}{y_1^2}, \tfrac{y_4}{y_1^2}) - \frac{\phi_1(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1})}{\tau} - \tfrac{b-y_1}{\tau} D\phi_1(\tfrac{y_2}{y_1}, \tfrac{y_3}{y_1}, \tfrac{y_4}{y_1}).(\tfrac{y_2}{y_1^2}, \tfrac{y_3}{y_1^2}, \tfrac{y_4}{y_1^2}).$$

$$A_2 = \tfrac{y_1-1}{\tau}\tfrac{b}{y_1} Id + \tfrac{b-y_1}{\tau}\tfrac{1}{y_1} D\phi_1(\tfrac{y_2}{y_1}, \tfrac{y_3}{y_1}, \tfrac{y_4}{y_1}).$$

Les estimations maintenant sont les mêmes que pour φ. Le plus important est d'estimer $H^3(\varphi_1(E_1))$. En appliquant la formule de l'aire

$$H^3(\varphi_1(E_1)) \le \int_{E_1} J_{\varphi_1}(y) dH^3 y, \tag{5.17.3}$$

on obtient pareillement que

$$J_{\varphi_1}(y) = \frac{|D\varphi_1.y \wedge D\varphi_1.v \wedge D\varphi_1.w|}{|y \wedge v \wedge w|}$$

avec v, w comme dans (8). Pour $|D\varphi_1.y|$, comme dans (9), on obtient

$$|D\varphi_1.y| \le C_1 + C_2 \frac{r}{\tau}.$$

Ensuite, comme dans (10) et par $(*)$, on a

$$\begin{array}{l} |D\varphi_1.v| \le |D\phi_1.v'| + b \le C|D\phi.v'| + b \\ |D\varphi_1.w| \le |D\phi_1.w'| + b \le C|D\phi.v'| + b \end{array} \tag{$**$}$$

On peut avoir une inégalité comme dans (11), mais grâce à $(**)$, on peut remplacer ϕ_1 par ϕ, on obtient

$$|J_{\varphi_1}(y)| \le (C' + C'\frac{r}{\tau})(|D\phi.v'| + b)(|D\phi.w'| + b),$$

où C' est une constante géométrique.

Donc les estimations pour $H^3(\varphi_1(E_1))$ sont les mêmes que pour $H^3(\varphi(E_1))$. On peut maintenant estimer $H^3(\varphi_1(E_1))$ grâce à (17). On prend toujours $\tau = r$ comme dans (17), on obtient

$$H^3(\varphi_1(E_1)) \le C_3 r[3000 H^2(E_1') + 5000 \int_{E_1' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z],$$

où $E_1' = E_1 \cap H = E' \cap B(x, r)$.

On a donc une inégalité totalement comme (20) sauf qu'on remplace $\tilde{\varphi}$ par $\tilde{\varphi}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(1+r)^3 H^2(E_1') \le \frac{1}{3}&(1+r) H^2(\tilde{\varphi}_1(E_1')) \\ &+ C_3 r[3000 H^2(E_1') + 5000 \int_{E_1' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z]. \end{aligned} \tag{5.17.4}$$

Alors

$$H^2(E_1') \le H^2(\tilde{\varphi}_1(E_1')) + C_4 r^3 + C_4 r \int_{E' \cap \partial B(x,r)} \mathrm{dist}(z, \Gamma) dH^1 z. \tag{5.17.5}$$

Maintenant comme dans la section 9 de [D2], on a

(5.17.6)
$$\begin{aligned}C_4 r\int_{E'\cap\partial B(x,r)}\mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1 z &\le C_5\tau r[H^1(E'\cap\partial B(x,r)\setminus g)+[H^1(g)-H^1(\rho)]]\\ &= C_5\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r))-H^1(\rho)),\end{aligned}$$

ce qui nous donne, avec (5.17.5) :

$$H^2(E_1')\le H^2(\tilde\varphi_1(E_1'))+C_4r^3+C_5\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)-H^1(\rho)). \tag{5.17.7}$$

Donc on constate maintenant comment notre déformation $\tilde\varphi_1$ agit sur E'. Puisque $\tilde\varphi_1 = f^\kappa\circ\tilde\varphi$, et f^κ est l'identité en dehors de la boule $B(x,\kappa r)$, on a donc $\tilde\varphi_1(z)=\tilde\varphi(z)$ pour $z\in H\setminus B(x,\kappa r)$. On a aussi $f^\kappa(z)\subset B(x,\kappa r)$ quand $z\in B(x,\kappa r)$. Donc pour comparer $H^2(\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,r)))$ avec $H^2(\tilde\varphi(E'\cap B(x,r)))$, on n'a qu'à considérer notre fonction $\tilde\varphi_1$ dans la boule $B(x,\kappa r)$, puisque $\tilde\varphi_1$ coïncide avec $\tilde\varphi$ en dehors de la boule $B(x,\kappa r)$. On a maintenant

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,\kappa r)) &= \tilde\varphi_1(E'\cap B(x,r))\cap B(x,\kappa r)\\ &= f^\kappa(F_1\cap B(x,\kappa r))\\ &\subset f^\kappa(X_1\cap B(x,\kappa r))\\ &= \kappa(f(X_1)\cap B(x,r))\\ &= \kappa(X_2\cap B(x,r))\end{aligned}$$

avec $F_1=\tilde\varphi(E'\cap B(x,r))$. Par conséquent,

$$H^2(\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,\kappa r)))\le\kappa^2.H^2(X_2\cap B(x,r));$$

ensuite
(5.17.8)
$$\begin{aligned}H^2(\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,r)) &= H^2(\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,r))\setminus B(x,\kappa r))+H^2(\tilde\varphi_1(E'\cap B(x,\kappa r)))\\ &\le H^2(\tilde\varphi(E'\cap B(x,r))\setminus B(x,\kappa r))+\kappa^2H^2(X_2\cap B(x,r))\\ &\le H^2(\tilde\varphi(E'\cap B(x,r))\setminus B(x,\kappa r))+\kappa^2(H^2(X_1\cap B(x,r))-Ar^2)\\ &\le H^2(\Sigma\cap B(x,r)\setminus B(x,\kappa r))+\\ &\quad+2550\int_{E'\cap\partial B(x,r)}\mathrm{dist}(z,\Gamma)dH^1z+\kappa^2(H^2(X_1\cap B(x,r))-Ar^2)\\ &\le H^2(\Sigma\cap B(x,r))+C_6\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r))-H^1(\rho))-A\kappa^2r^2\end{aligned}$$

en faisant ξ tendre vers 0 puis en utilisant le fait que $F_1\cap B(x,\kappa r)\subset\Sigma\cap B(x,\kappa r)=X_1\cap B(x,\kappa r)$.

Alors (5.17.7) et (5.17.8) nous donnent

(5.17.9)

$$\begin{aligned}
H^2(E_1') &\leq H^2(\Sigma\cap B(x,r)) + C_7\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - A\kappa^2r^2 + C_4r^3\\
&\leq H^2(\Gamma^*\cap B(x,r)) - 10^{-4}r[H^1(\Gamma) - H^1(\rho)] +\\
&+ C_7\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - A\kappa^2r^2 + C_4r^3\\
&= \frac{1}{2}rH^1(\Gamma) - 10^{-4}r[H^1(\Gamma) - H^1(\rho)] +\\
&+ C_7\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - A\kappa^2r^2 + C_4r^3\\
&= \frac{1}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - \frac{1}{2}r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\Gamma)) - 10^{-4}r[H^1(\Gamma) - H^1(\rho)] +\\
&+ C_7\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - A\kappa^2r^2 + C_4r^3\\
&\leq \frac{1}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 10^{-4}r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) +\\
&+ C_7\tau r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - A.\kappa^2r^2 + C_4r^3\\
&\leq \frac{1}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 10^{-5}r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - H^1(\rho))\\
&- A\kappa^2r^2 + C_4r^3,
\end{aligned}$$

ce qui est exactement la conclusion du lemme. On a donc terminé la démonstration du lemme. □

Rappelons que X_1 est le cône de dimension 2 dans H, centré en x et porté sur le réseau ρ. On sera donc content si on peut trouver une déformation f de manière que $H^2(X_1) - H^2(f(X_1)) \geq Cr(H^1(\rho) - 2r\theta_x(X))$, puisque notre hypothèse au début du lemme 5.17 est que $H^1(\rho) > 2r\theta_x(X)$. Mais cela vient de la condition de "‘full length"’ de X. Donc on peut utiliser le chapitre 10 dans [D2] pour construire une telle fonction f, avec la constante Lipschitzienne bornée et ne dépendante que de la dimension ambiante. On obtient le lemme :

Lemme 5.18. *Il existe une fonction Lipschitzienne $f : H \to H$, qui est l'indentité en dehors de la boule $B(x,r)$, avec une constante Lipschitzienne bornée et ne dépend que de la dimension 4, et une constante C qui ne dépend aussi que de la dimension 4, telles que*

$$H^2(X_1) - H^2(f(X_1)) \geq Cr(H^1(\rho) - 2r\theta_X(x)) \tag{24}$$

où X_1 est l'intercsection avec $B(x,r)$ du cône centré en x et porté sur ρ.

On va dire plus sur la condition de "‘full length"’ des cônes minimaux dans le paragraphe suivant. Maintenant on a un lemme qui permettra de contrôler la densité de E' autour de x.

Lemme 5.19. *Il existe une constante universelle $\alpha > 0$ telle que pour chaque $x \in E\cap\partial B(O,1)$, il existe $r_x > 0$ un rayon tel que pour chaque $r \leq r_x$ on a*

$$H^2(E'\cap B(x,r)) \leq \frac{1}{2}rH^1(E'\cap\partial B(x,r)) - \alpha r(H^1(E'\cap\partial B(x,r)) - 2r\theta_{E'}(x)) + Cr^3,$$

où $E' = E_x = E \cap H_x$ est l'intersection de E avec l'hyperplan tangent à $\partial B(O,1)$ en x.

Démonstration. D'après (5.17.9),

$$\begin{aligned} H^2(E'_1) &= H^2(E' \cap B(x,r)) \\ &\leq \frac{1}{2} r H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - 10^{-5} r (H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - \\ &- A\kappa^2 r^2 + C_4 r^3. \end{aligned}$$

Mais d'après (24), on peut choisir A de manière que $A.r^2 = H^2(X_1) - H^2(f(X_1)) \geq Cr(H^1(\rho) - 2r\theta_X(x))$, alors
(5.18.1)

$$\begin{aligned} H^2(E' \cap B(x,r)) &\leq \frac{1}{2} r H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - 10^{-5} r (H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - \\ &- Cr\kappa^2 (H^1(\rho) - 2r\theta_X(x)) + C_4 r^3. \\ &\leq \frac{1}{2} r H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - C\kappa^2 r (H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - H^1(\rho)) - \\ &- Cr\kappa^2 (H^1(\rho) - 2r\theta_X(x)) + C_4 r^3. \\ &= \frac{1}{2} r H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - C\kappa^2 r (H^1(E' \cap \partial B(x,r)) - 2r\theta_X(x)) + C_4 r^3. \end{aligned}$$

Puisque $\theta_X(x) = \theta_{E'}(x)$, on a donc ce qu'il faut démontrer, avec $\alpha = C\kappa^2$. □

On pose maintenant, $f(r) = \frac{1}{r^2} H^2(E' \cap B(x,r)) - \theta_{E'}(x) = \theta_{E'}(x,r) - \theta_{E'}(x)$ et $v(r) = H^2(E' \cap B(x,r)$. On voit facilement que pour presque tout r, $v'(r) \geq H^1(E' \cap \partial B(x,r))$ (la dérivée de v en r). De plus, $f'(r) = r^{-2} v'(r) - 2r^{-1}\theta_{E'}(x,r)$, donc, $H^1(E' \cap \partial B(x,r)) \leq f'(r).r^2 + 2r\theta_{E'}(x,r)$. En substituant dans (5.18.1) on obtient

$$H^2(E' \cap B(x,r)) \leq (r/2 - \alpha r) H^1(E' \cap \partial B(x,r)) + 2\alpha r^2 \theta_{E'}(x) + Cr^3$$

donc

$$\theta_{E'}(x,r) \leq (\frac{1}{2} - \alpha) r f'(r) + (1-2\alpha)\theta_{E'}(x,r) + 2\alpha\theta_{E'}(x) + Cr.$$

On divise par r^2 et on utilise les inégalité ci-dessus. Il vient

$$2\alpha f(r) \leq (\frac{1}{2} - \alpha) r f'(r) + Cr.$$

On en déduit que $rf'(r) \geq \frac{4\alpha}{1-2\alpha} f(r) - C_1 r$, où C_1 est une constante. Maintenant, si on pose $g(r) = r^{-a} f(r)$, avec $a = \frac{4\alpha}{1-2\alpha}$, on a

$$g'(r) = r^{-a} f'(r) - a r^{-a-1} f(r) = r^{-a-1}[rf'(r) - af(r)] \geq -C_1 r.r^{-a-1} = -C_1 r^{-a}$$

donc $g(s) - g(t) \geq \int_t^s g'(r)dr \geq \int_t^s -C_1 r^{-a} dr = -\frac{C_1}{1-a}(s^{1-a} - t^{1-a})$ pour $s > t > 0$. On a bien

$$f(t) = t^a g(t) \leq t^a g(s) + t^a \frac{C_1}{1-a}(s^{1-a} - t^{1-a}).$$

On peut conclure que pour tout $t \leq r$,

$$f(t) \leq C.t^a,$$

pour des constantes $C, a > 0$. Voici maintenant le théorème qui contrôle la densité $\theta_{E'}(x,r)$, quand r est petit.

Théorème 5.20. *Il existe $\alpha_1 > 0$ une constante universelle, telle que si le rayon r_x satisfait aux conditions*

$$\theta_E(x,r_x) - \theta_E(x) \leq \alpha_1, \tag{5.20.1}$$

et,

$$r_x < \alpha_1. \tag{5.20.2}$$

Alors on a l'inégalité suivante :

$$\theta_{E'}(x,r) - \theta_{E'}(x) \leq Cr^a, \tag{5.20.3}$$

où C, a sont des constantes universelles.

Démonstration. C'est ce que nous venons de vérifier. En fait, quand α_1 est chosie très petite, alors si r_x satisfait aux hypothèses du théorème 5.20, on peut conclure que E_x est Bi-Hölderiénnement équivalent à un cône minimal de dimension 2 dans H_x, qui est centré en x. Ensuite, on peut construire des courbes et des compétiteurs comme ci-dessus, et on arrive à l'inégalité différentielle, et finalement l'inégalité (5.20.3). □

Sur la propiété de "'full length"' des cônes minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que après lemme 5.6, on a une description de l'ensemble $K = X \cap \partial B(x,r)$, et on a divisé K en arcs de cercles $C_{j,k}$, $j,k \in \tilde{J}$ tel que

$$\pi r/6 \leq \text{length}(C_{j,k}) \leq 9\pi r/10 \text{ pour } (j,k) \in \tilde{J}.$$

On appelle aussi V l'ensemble des extrémités des $\{C_{j,k}\}$. On veut considérer des déformations de K, obtenues comme suit. Soit $\eta_1 = 10^{-6}$ une constante. On note ensuite $\Phi(\eta_1)$ l'ensemble des fonctions $\zeta : V \to \partial B(x,r)$ tel que

$$|\zeta(z) - z| \leq \eta_1 r \text{ pour } z \in V.$$

Soient $\zeta \in \Phi(\eta_1)$ et $(j,k) \in \tilde{J}$. Si a, b sont les extrémités de $C_{j,k}$, on note $\zeta_*(C_{j,k})$ la géodésique de $\partial B(x,r)$ qui va de $\zeta(a)$ à $\zeta(b)$. On remarque aussi qu'il existe une unique telle géodésique. En fin on pose

$$\zeta_*(K) = \cup_{(j,k)\in\tilde{J}}\zeta_*(C_{j,k}).$$

Ainsi on déforme juste K en un ensemble de géodésique, en bougeant ses sommets. On note $\zeta_*(X)$ le cône sur $\zeta_*(K)$.

On a maintenant la définition de "‘full length"’ pour les cônes de dimension 2.

Définition 5.21. *Soit X un cône minimal réduit centré en x. On dit que X est un cône minimal full length s'il existe une décomposition K comme ci-dessus, une constante $\eta_1 = 10^{-6}$ et une constante $C_1 \geq 1$, tel que si $\zeta \in \Phi(\eta_1)$ satisfait à*

$$H^1(\zeta_*(K)) > H^1(K) \tag{5.21.1}$$

alors il existe une déformation $\tilde{X}$ de $\zeta_*(X)$ dans $B(x,r)$ tel que

$$H^2(\tilde{X} \cap B(x,r)) \leq H^2(\zeta_*(X) \cap B(x,r)) - C_1^{-1} r[H^1(\zeta_*(K)) - H^1(K)]. \tag{5.21.2}$$

Par déformation de $\zeta_*(X)$ dans $B(x,r)$, on veut dire un ensemble de la forme $\tilde{X} = f(\zeta_*(X))$, avec $f : H \to H$ une fonction Lipschitzienne tel que $f(z) = z$ hors de la boule $B(x,r)$ et ensuite $f(B(x,r) \cap H) \subset B(x,r) \cap H$.

Il est démontré dans [D2], section 14 que si X est un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, ou $\mathbb{T}$, X est automatiquement un cône minimal full length. De plus, on peut trouver une déformation f avec une constante Lipschitzienne qui ne dépend que de la dimension 4.

On va dire un peu plus sur des propriétés de full length pour un cône minimal X de dimension 2 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$ qui concerne l'angle de déviation. D'abord on a l'ensemble des extrémités des arcs de $K = X \cap \partial B(x,r)$, qui est V, et puis $V = V_0 \cup V_1$, où V_0 l'ensemble des points qui sont un extrémité d'exactement trois arcs $C_{i,j}$, et $V_1 = V \setminus V_0$ l'ensemble des arcs qu'on ajoute. Pour une déformation $\zeta(K)$ définie juste comme ci-dessus et pour chaque $z \in V$, on veut définir une déviation $\alpha_\zeta(z)$ des angles idéaux à $\zeta(z)$ comme suit.

Si $z \in V_0$, alors il y a trois courbes $\zeta(C_{j,k})$, qui sont en fait trois morceaux de géodésiques qui admettent $\zeta(z)$ comme extrémité commune. On note w_1, w_2, w_3 les trois vecteurs unités qui sont tangents à $\zeta(C_{j,k})$ en $\zeta(x)$ pointant dans la direction opposée à $\zeta(z)$, et on pose

$$\alpha_\zeta(z) = |w_1 + w_2 + w_3|. \tag{25}$$

Donc si les trois $\zeta(C_{j,k})$ forment des angles de 120° en $\zeta(z)$, $\alpha_\zeta(z) = 0$.

Quand $z \in V_1$, il y a seulement deux arcs C_1 et C_2 qui partent de z, on note w_1 et w_2 les vecteurs unités qui sont tangent à $\zeta(C_1)$ et $\zeta(C_2)$ et qui partent aussi de z. Soit $\theta \in (0, \pi)$ l'angle entre w_1 et w_2, avec la convention que θ est très proche de π ; on pose

$$\alpha_\zeta(z) = \pi - \theta. \tag{26}$$

On peut montrer facilement que $\alpha_\zeta(z)$ est équivalent à $w_1 + w_2$. On pose finalement

$$\alpha_+(\zeta) = \sup_{x \in V} \alpha_\zeta(x). \tag{27}$$

Le lemme 10.23 dans [D2] dit que si $\alpha_+(\zeta) \neq 0$, on peut déformer $\zeta_*(X)$ et puis gagner $Cr^2\alpha_+(\zeta)^2$, par une application Lipschitzienne, avec une constante Lipschitzienne qui ne dépend que de la dimension 4.

Lemme 5.22. *Soient X un cône minimal de dimension 2 dans H et centré en x, et $\zeta \in \Phi(\eta_1)$. Alors on peut trouver une fonction Lipschitzienne $f : H \to H$ qui est l'identité hors de la boule $B(x,r)$, telle que $f(B(x,r)) \subset B(x,r)$ et dont la constante Lipschitzienne ne dépendant que de la dimension 4, telle que*

$$H^2(\tilde{X} \cap B(x,r)) \leq H^2(\zeta_*(X) \cap B(x,r)) - Cr^2\alpha_+(\zeta)^2, \tag{5.22.1}$$

où $\tilde{X} = f(\zeta_*(X))$ et C une constante qui ne dépend que de 4 et de η_0.

Le lemme suivant donne une inégalité entre la déviation de l'angle $\alpha_+(\zeta)$ et la différence $H^1(\zeta_*(K)) - H^1(K)$, quand K est un cône minimal de dimension 2-donc de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{T}$-centré en x et contenu dans H, et affirme que ces trois types de cônes ont vraiment la propriété de "‘full length"’ et donc termine la démonstration de l'excès de densité en x.

Lemme 5.23. *Soient $K, \zeta, \alpha_+(\zeta)$ comme ci-dessus, on a alors l'inégalité*

$$H^1(\zeta_*(K)) - H^1(K) \leq Cr\alpha_+(\zeta)^2,$$

avec C une constante universelle, qui ne dépend que de la dimension 4.

Approximation de E' par des cônes très proches des cônes minimaux

Le but de ce paragraphe est d'approcher $E' \cap B(x,r)$ par les cônes très proches des cônes minimaux. On va adapter les démonstrations de la section 11 dans [D2]. Si le couple (x,r) satisfait aux hypothèses du théorème 5.20, alors on a la propriété suivante pour l'ensemble $E' \cap B(x,r)$.

Propriété 5.24. *Pour chaque $\epsilon > 0$ très petit, on peut choisir $\alpha_1 > 0$ tel que si le couple (x,r) satisfait aux hypothèses du lemme 5.20, alors notre ensemble $E' \cap B(x,r)$ ait les propriétés suivantes :*

(i) *Pour $r' \leq r$, il existe une constante C tel que $f(r') = \theta_{E'}(x,r') - \theta_{E'}(x) \leq C(r')^a$, où C, a sont les mêmes constantes que dans le théorème 5.20.*

(ii) *Pour $r' \leq r$, il existe un cône minimal $X_{r'}$ centré en x dont la densité en x est la même que celle de E' en x, tel que $d_{x,r'}(E', X_{r'}) \leq C\epsilon$.*

(iii) *Pour chaque $z \in E' \cap B(x,r)$, il existe un cône minimal $Y'_z \subset H$, tel que si $t \leq |x-z|$, on a $d_{z,t}(E', Y'_z) \leq C\epsilon$.*

En effet, (i) vient du théorème 5.20, (ii) vient du corollaire 4.6 et (iii) vient de la démonstration de l'équivalent Bi-Hölderienne pour E'. □

Maintenant, si $\zeta \in \Phi(\eta_1)$, et si un cône Z obtenu comme $Z = \zeta_*(X)$, avec X un cône minimal de dimension 2 dans H et centré en x, on note

$$\alpha_+(Z) = \alpha_+(\zeta), \tag{28}$$

avec $\alpha_+(\zeta)$ défini dans (27) ci-dessus. On voit que $\alpha_+(Z)$ mesure la différence entre Z et le cône minimal X, modulo une rotation. Bien sur si $\alpha_+(Z) = 0$, alors Z est l'image de X par une isométrie dans H. Grâce à la propriété 5.24, on obtient le résultat suivant pour notre ensemble E' dans la boule $B(x, r)$.

Proposition 5.25. *Soient $x \in E'$ et r satisfaisant à la propriété 5.24. On a donc $X = X_r$. Alors il existe un cône $Z = \zeta_*(X)$, avec $\zeta \in \Phi(\eta_1)$ définie près de la définition 5.20, des constantes universelles C et b, tels que*

$$d_{x,r}(E', Z) + \alpha_+(Z) \leq C.r^b \tag{5.25.1}$$

Démonstration. La démonstration est exactement comme celle du théorème 11.4 dans [D2] pour les ensembles presque minimaux de dimension 2. La démonstration est longue et compliquée mais la propriété 5.24 contient les mêmes hypothèses nécessaires pour démontrer le théorème 11.4. On peut adapter totalement cette démonstration pour avoir notre proposition. □

En effet, dès que notre rayon r satisfait aux hypothèse du théorème 5.20, avec α_1 assez petite, on peut obtenir le théorème 5.25 dans la boule $B(x, r)$. Donc l'excès de densité contrôle bien la distance entre E' avec des cônes minimaux centrés en x, dans la boule $B(x, r)$.

Approximation de E' par des cônes minimaux centrés en x.

On va utiliser la proposition 5.25 pour le couple (x, r) pour déduire un théorème comme le théorème 12.8 dans [D2].

Proposition 5.26. *Il existe unique limite d'explosion de E en x, qui est de la forme $Y = Y' \times Ox$, où Y' est le cône minimal de dimension 2 dans H, centré en x. De plus, il existe $\alpha_1 > 0$ une constante petite, mais universelle, telle que si le couple x, r satisfait aux hypothèse du théorème 5.20 pour α_1, alors il existe des constantes C et b_1 qui ne dépendent que de la dimension 4, tels que*

$$d_{x,r}(E', Y') \leq Cr^{b_1}. \tag{5.26.1}$$

Démonstration. On considère maintenant la suite $2^{-l}r, l \geq 0$, et on regarde dans les boules $B(x, 2^{-l}r)$. Pour chaque boule $B(x, 2^{-l}r)$, il existe un cône Y_l centré en x tel que

$$d_{x,2^{-l}r}(E', Y_l) + \alpha_+(Y_l) \leq C(\frac{r}{2^l})^b, \tag{5.26.2}$$

par la proposition 5.25. On compare maintenant les cônes Y_l et Y_{l+1} ; on a

$$d_{x,r}(Y_l,Y_{l+1}) = d_{x,2^{-l-2}r}(Y_l,Y_{l+1})$$
$$\begin{aligned}(5.26.3)\qquad &\leq 2[d_{x,2^{-l-1}r}(Y_l,E') + d_{x,2^{-l-1}r}(E',Y_{l+1})]\\ &\leq 4d_{x,2^{-l},r}(Y_l,E') + 2d_{x,2^{-l-1}r}(E',Y_{l+1})\\ &\leq 4C(\frac{r}{2^l})^b + 2C(\frac{r}{2^{l+1}})^b\\ &\leq 10C(\frac{r}{2^l})^b,\end{aligned}$$

par (5.26.2), le fait que Y_l sont des cônes et le fait que $d_{x,2r}(A,B) \leq 2d_{x,r}(A,B)$ pour deux ensembles A et B.

Ensuite, pour $0 < n < m$, on a

$$\begin{aligned}d_{x,r}(Y_m,Y_n) &\leq 2[\sum_{i=n+1}^{m} d_{x,r}(Y_i,Y_{i-1})]\\ (5.26.4)\qquad &\leq \sum_{i=n+1}^{m} 20C(\frac{r}{2^{i-1}})^b \text{ par (5.26.3)}\\ &\leq C_1(\frac{r}{2^n})^b,\end{aligned}$$

avec C_1 une constante. Donc on voit bien que la suite Y_m dans la boule $B(x,r)$ est une suite de Cauchy pour d'ensembles. On conclut que $Y_l, l \geq 0$ converge vers un ensemble Y''. Puisque les Y_l sont des cônes centré en x, Y'' est aussi un cône centré en x. Grâce à (5.26.4), on a bien

$$(5.26.5)\qquad d_{x,r}(Y_l,Y'') \leq \limsup_{n\to\infty} d_{x,r}(Y_l,Y_n) \leq C_1(\frac{r}{2^l})^b,$$

mais puisque $d_{x,2^{-l}r}(E',Y_l) \leq C(\frac{r}{2^l})^b$, et $d_{x,2^{-l}r}(Y_l,Y'') = d_{x,r}(Y_l,Y'') \leq C_1(\frac{r}{2^l})^b$, alors

$$(5.26.6)\qquad d_{x,2^{-l}r}(E',Y'') \leq C_2(\frac{r}{2^l})^b,$$

de plus, Y'' est un cône centré en x, donc Y'' est une limite d'explosion de E' en x dans l'hyperplan H. On en déduit que $Z = Y'' \times Ox$ est une limite d'explosion de E en x. Donc Z est un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$. On en déduit que Y'' est un cône minimal de dimension 2 de même type, par le lemme 2.11. Maintenant, en posant $l = 0$ dans (5.26.6), on obtient

$$(5.26.7)\qquad d_{x,r}(E',Y'') \leq C_2 r^b,$$

pour tout r tel que x, r satisfait aux hypothèse du théorème 5.20. Donc en prenant $Y' = Y''$ et les constantes $10C_2$, b, on a (5.26.1).

Il nous reste à montrer que Y' est l'unique limite d'explosion de E' en x dans le plan H. Soit Z' une limite d'explosion de E' en x dans le plan H. On sait que Z' est un cône minimal de dimension 2 dans H et centré en x. De plus, il existe une suite $\{r_k\}$ qui tend vers 0, telle que $\lim_{k\to\infty} d_{x,r_k}(E',Z') = 0$. Mais on sait d'après (5.26.7), pour r_k assez petit pour que $r_k \leq r$, que $d_{x,r_k}(E',Y') \leq C_2 r_k^b$. Donc $d_{x,r_k/2}(Y',Z') \leq 2(d_{x,r_k}(E',Z') + d_{x,r_k}(E',Y'))$, ce qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Mais Y' et Z' sont des cônes centrés en x, donc $d_{x,r_k/2}(Y',Z') = d_{x,1}(Y',Z')$ pour tout k. On en déduit que $d_{x,1}(Y',Z') = 0$ puis que $Z' = Y'$.

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque 5.26. *Puisque E et $Y = Y' \times Ox$ sont des cônes centrés en O, donc on a l'équivalence entre les distances $d_{x,r}(E,Y)$ et $d_{x,r}(E',Y')$, donc*

$$d_{x,r'}(E,Y) \leq C(r')^b$$

pour tout $r' \leq r$ et où C, b sont des constantes qui ne dépendent que de la dimension 4.

Régularité C^1 pour les cônes de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

On veut montrer maintenant que si le rayon r et notre point $x \in E \cap \partial B(O,1)$ satisfont aux hypothèses du théorème 5.20, pour α_1 une constante très petite, qu'on va choisir après, alors dans la boule $B(x,r)$, E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2, centré en x, de type $\mathbb{P}$, $\mathbb{Y}$, ou $\mathbb{T}$ selon que la densité de E en x est d_P, d_Y ou d_T, respectivement. On a trois cas.

Régularité C^1 près d'un point de type $\mathbb{P}$.

Théorème 5.27. *Supposons que x est de type $\mathbb{P}$, alors si le rayon r satisfait aux hypothèses du théorème 5.20 pour une constante α_2 très petite, qu'on va choisir après. Alors dans la boule $B(x,r/32)$, E' est C^1 équivalent à un plan P' de dimension 2 contenu dans H, qui passe par x.*

Démonstration. Soit $z \in E' \cap B(x,r/32)$ et z' l'intersection de Oz avec $\partial B(O,1)$. Alors $z' \in E$ puisque E est un cône centré en O. On a aussi $z' \in B(x,r/16)$. De plus, puisque x et r satisfont aux hypothèses du théorème 5.20 pour la constante α_2, on a

$$\theta_E(x,r) - \theta_E(x) \leq \alpha_2$$

donc d'après le corollaire 4.7, pour chaque $\delta > 0$ on peut choisir $\alpha_2 > 0$ tel qu'il existe un plan $P(x,r)$ de dimension 3 dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,r/2}(E,P) \leq \delta. \tag{5.27.1}$$

Considérons maintenant le point z', on a bien $B(z',r/4) \subset B(x,r/2)$, alors

$$d_{z',r/4}(E,P) \leq 2d_{x,r/2}(E,P) \leq 2\delta. \tag{5.27.2}$$

On applique lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$, tel que si on a (5.27.2) avec δ, alors

$$|H^3(E \cap B(z',r/8)) - H^3(P \cap B(z',(1+\delta_1)r/8))| \leq \delta_1 r^3, \tag{5.27.3}$$

puisque $H^3(P\cap B(I,s))\leq d_P s^3$ pour un centre I et un rayon s quelconques. On a alors

$$H^3(E\cap B(z',r/8))\leq d_P(r/8)^3+\delta_2 r^3 \tag{5.27.4}$$

avec $\delta_2=2\delta_1+\delta_1^2+\delta_1^3$. Mais (5.27.4) veut dire que

$$\theta_E(z',r/8)-\theta_E(z')\leq\delta_2, \tag{5.27.5}$$

donc si on choisit δ_2 plus petite que α_1, ce qui est possible à partir seulement du choix de α_2 au début, alors le couple $z',r/8$ satisfait aux hypothèse du théorème 5.20, donc on peut appliquer la proposition 5.26. On trouve que la limite d'explosion $P_{z'}$ de E en z', qui est de la forme $P'_{z'}\times Oz'$, où $P'_{z'}\subset H_{z'}$ est un plan de dimension 2, satisfait à

$$d_{z',r'}(E'_{z'},P'_{z'})\leq C(r')^{b_1} \text{ pour } r'\leq r/8\ . \tag{5.27.6}$$

Soit maintenant $L:H_{z'}\to H_x$, qui envoie un point $y\in H_{z'}$ en $L(y)$ qui est l'intersection de Oy avec H_x. Alors $L(z')=z$ et puis L est 2-biLipschitzienne dans la boule $B(z',r/4)\cap H_{z'}$. Donc soit $P'_z=L(P_{z'})$; P'_z est un plan de dimension 2 dans H_x et contient z. Grâce à (5.27.6) et le fait que L est 2-biLipschitzienne, on a bien pour tout $r'\leq r/16$,

$$d_{z,r'}(E',P'_z)\leq 2C(r')^{b_1}, \tag{5.27.7}$$

donc, pour chaque $z\in E'\cap B(x,r/32)$, la distance entre E' et un plan de dimension 2 dans $B(z,r')$, avec $r'\leq r/16$, est équivalente à $(r')^{b_1}$. On applique le théorème 3.3 et on a bien que E' est C^1 équivalent à P' dans la boule $B(x,r/32)$.

Régularité C^1 près d'un point de type $\mathbb{Y}$.

Avant de continuer, on note $M(\mathbb{Y})$ l'ensemble des cônes qui sont l'union de trois demi-plans F_1,F_2,F_3 de dimension 2 qui admettent un bord commun L, tels que l'angle entre deux faces quelconques est supérieur à 90°.

Théorème 5.28. *Supposons que x est de type $\mathbb{Y}$, alors si le rayon r satisfait aux hypothèse du théorème 5.20, avec une constante α_3 très petite, qu'on va choisir après, alors dans la boule $B(x,r/32)$, E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2 Y' contenu dans H, centré en x.*

L'idée de la démonstration est de montrer que pour tout $y\in E'\cap B(x,r/32)$ et pour tout s tel que $B(y,s)\subset B(x,r/32)$, il existe un cône $Y_s\subset H$, qui est soit un plan, soit de type $M(\mathbb{Y})$, tel que $d_{y,s}(E',Y_s)\leq Cs^b$, ou C,b sont des constantes universelles.

Démonstration. Par convention, on confond les multiplicatrices, on note souvent ces constantes C, c'est à dire qu'au lieu de passer de C à C_1, on écrit toujours C.

On prend un point $z \in E' \cap B(x, r/32)$. Alors c'est facile de voir que z est de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$. On a deux cas.

Premier cas, z est de type Y.

Soit z' l'intersection de Oz avec $\partial B(O,1)$. Puisque E est un cône centré à l'origine, $z' \in E$ et de plus, $z' \in B(x, r/16)$. On a aussi que z' est de type $\mathbb{Y}$ car z est de type $\mathbb{Y}$. De plus, puisque x et r satisfont aux hypothèses du théorème 5.20 pour la constante α_3,

$$\theta_E(x,r) - \theta_E(x) \leq \alpha_3$$

donc d'après le corollaire 4.7, pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\alpha_3 > 0$ tel qu'il existe un cône minimal $Y = Y(x,r)$ de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O et x, tels que

$$d_{x,r/2}(E,Y) \leq \delta. \tag{5.28.1}$$

Maintenant $z' \in B(x, r/16)$, alors $B(z', r/4) \subset B(x, r/2)$, et

$$d_{z',r/4}(E,Y) \leq 2d_{x,r/2}(E,Y) \leq 2\delta, \tag{5.28.2}$$

On applique le lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$, tel que

$$|H^3(E \cap B(z', r/8)) - H^3(Y \cap B(z', (1+\delta_1)r/8))| \leq \delta_1 r^3, \tag{5.28.3}$$

puisque $H^3(Y \cap B(I,s)) \leq d_Y s^3$ pour un centre I et un rayon s quelconques, on obtient

$$H^3(E \cap B(z', r/8)) \leq d_Y (r/8)^3 + \delta_2 r^3, \tag{5.28.4}$$

avec $\delta_2 = 2\delta_1 + \delta_1^2 + \delta_1^3$. Mais (5.28.4) veut dire que

$$\theta_E(z', r/8) - \theta_E(z') \leq \delta_2, \tag{5.28.5}$$

donc si on choisit δ_2 plus petite que α_1 dans le théorème 5.20, ce qui est possible à partir seulement du choix de α_3 au début, alors le couple $(z', r/8)$ satisfait aux hypothèse du théorème 5.20, donc on peut appliquer la proposition 5.26, qui dit que la limite d'explosion $Y_{z'}$ de E en z', qui est de la forme $Y'_{z'} \times Oz'$, avec $Y'_{z'} \subset H_{z'}$ un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{Y}$ centré en z' et qui satisfait à

$$d_{z',r'}(E'_{z'}, Y'_{z'}) \leq C(r')^{b_1} \text{ pour } r' \leq r/8\ . \tag{5.28.6}$$

Soit maintenant $K : H_{z'} \to H_x$, qui envoie un point $y \in H_{z'}$ en $K(y)$ qui est l'intersection de Oy avec H_x. Alors $K(z') = z$ et puis K est Cr-biLipschitzienne dans la boule $B(z', r/4) \cap H_{z'}$. Soit $Y'_z = K(Y'_{z'})$, alors Y'_z est un cône de type $M(\mathbb{Y})$ dans H_x et centré en z. Grâce à (5.28.6) et le fait que K est 2-biLipschitzienne, on a bien que pour tout $r' \leq r/16$,

$$d_{z,r'}(E', Y'_z) \leq 2C(r')^{b_1}, \tag{5.28.7}$$

c'est bien ce qu'on veut atteindre pour un point de type $\mathbb{Y}$.

Deuxième cas, z est de type P.

On note E_Y l'ensemble des points de type $\mathbb{Y}$ dans $\overline{B}(x, r/2)$, alors E_Y est un ensemble fermé car il n'existe pas un point de type $\mathbb{T}$ dans $B(x, r/2)$ et près d'un point de type $\mathbb{P}$, il n'y a que des points de type $\mathbb{P}$. On peut poser donc $\mathrm{dist}(z, E_Y) = d > 0$. Soit maintenant $y \in E_Y$ tel que

$$d(z, y) \leq 11d/10, \tag{5.28.8}$$

c'est clair que $y \in B(x, r/16)$. On commence par l'excès de densité au point x, puisque $\theta_E(x, r) - \theta_E(x) \leq \alpha_3$, et x est de type $\mathbb{Y}$, on peut appliquer le corollaire 4.7 : pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\alpha_3 > 0$, tel qu'il existe un cône minimal $Y(x, r/2)$ de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,r/2}(E, Y(x, r/2)) \leq \delta, \tag{5.28.9}$$

ensuite, la boule $B(y, r/4) \subset B(x, r/2)$, alors on a

$$d_{y,r/4}(E, Y(x, r/2)) \leq 2d_{x,r/2}(E, Y(x, r/2)) \leq 2\delta, \tag{5.28.10}$$

donc d'après le lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$, tel que

$$|H^3(E \cap B(y, r/8)) - H^3(Y(x, r/2) \cap B(y, (1 + \delta_1)r/8))| \leq \delta_1(r/8)^3, \tag{5.28.11}$$

on sait maintenant que pour tout cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, pour tous centre I et rayon s, on a

$$H^3(Y \cap B(I, s)) \leq d_Y s^3 \tag*{(5.28.12),}$$

avec l'égalité si et seulement si I est dans l'axe de Y. Donc on peut déduire de (5.28.11) et (5.28.12), en posant $\delta_2 = 2\delta_1 + 3\delta_1^2 + 3\delta_1^3$, que

$$\begin{aligned} &H^3(E \cap B(y, r/8)) \leq d_Y(r/8)^3 + \delta_2(r/8)^3, \text{ ou bien} \\ &\theta_E(y, r/8) - \theta_E(y) \leq \delta_2, \\ &\theta_E(y, t) - \theta_E(y) \leq \delta_2 \text{ pour } t \leq r/8 \\ &\quad \text{car la densité est une fonction croissante.} \end{aligned} \tag{5.28.13}$$

En particulier, on peut prendre $t = 10d$, alors $\theta_E(y, 10d) - \theta_E(y) \leq \delta_2$. On applique le corollaire 4.7, pour chaque $\delta_3 > 0$, on peut choisir $\delta_2 > 0$ tel qu'il existe un cône minimal $Y(y, 10d)$ de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et y, tel que

$$d_{y,10d}(E, Y(y, 10d)) \leq \delta_3. \tag{5.28.14}$$

Soit L l'axe de $Y(y, 10d)$. On affirme que

$$\mathrm{dist}(z, L) \geq d/2. \tag{5.28.15}$$

On va montrer cela par l'absurde. Si $\mathrm{dist}(z,L) < d/2$, alors il existe un point $u \in L$ tel que $d(z,u) \leq d/2$. Ensuite, $d(y,u) \leq d(y,z) + d(z,u) \leq 2d$, donc $B(u,2d) \subset B(y,4d)$ et

$$d_{u,2d}(E, Y(y,10d)) \leq 5d_{y,10d}(E, Y(y,10d)) \leq 5\delta_3. \tag{5.28.16}$$

Donc si on prend δ_3 très petit, ce qui est possible à partir du choix de α_3 au début, on peut appliquer la proposition 4.10, il existe un point $u_1 \in E \cap B(u, d/100)$ tel que u_1 est de type $\mathbb{Y}$. Maintenant $d(z,u_1) \leq d(z,u) + d(u,u_1) \leq d/2 + d/100 < d$, ce qui n'est pas possible car $\mathrm{dist}(u, E_Y) = d$ et $u_1 \in E_Y$. On a maintenant (5.28.15).

On déduit de (5.28.15) que dans la boule $B(z, d/2)$, $Y(y,10d)$ coïncide avec un plan P de dimension 3. De plus c'est clair que $B(z,d/2) \subset B(y,10d)$, donc

$$d_{z,d/2}(E,P) = d_{z,d/2}(E, Y(y,10d)) \leq 20d_{y,10d}(E, Y(y,10d)) \leq 20\delta_3. \tag{5.28.17}$$

On applique le lemme 2.13, pour chaque $\delta_4 > 0$, on peut choisir $\delta_3 > 0$, tel que

$$\theta_E(z, d/4) - \theta_E(z) \leq \delta_4. \tag{5.28.18}$$

On peut maintenant choisir $\delta_4 \leq \alpha_1$ dans le théorème 5.20, ce qui est possible à partir du choix de α_3, on peut appliquer la proposition 5.26, on considère z comme le point x et la boule $B(O,|z|)$ comme la boule $B(O,1)$. Alors, la limite d'explosion de E en z est de la forme $P_z = P'_z \times Oz$, où P'_z est un plan de dimension 2 dans H_z, et où H_z est l'hyperplan de dimension 3 passant par z et orthogonal à Oz. On note également $E_z = E \cap H_z$. Donc P'_z est un plan de dimension 2 passant par z et tel que

$$d_{z,r'}(E_z, P'_z) \leq C(r')^b, \tag{5.28.19}$$

pour tout $r' \leq d/4$.

Soit $L : H_z \to H$ qui envoie $s \in H_z$ sur $L(z) \in H$ qui est l'intersection de Os avec H, on a $L(z) = z$; L est Cr-biLipschitzienne, et de plus E est un cône centré en O, donc $L(E_z) = E_x = E'$. De (5.28.19), on déduit que

$$d_{z,r'}(E', L(P'_z)) \leq C(r')^b \tag{5.28.20}$$

pour tout $r' \leq d/8$. De plus, $L(P'_z)$ est un plan de dimension 2 dans H.

On rappelle que (5.28.13) nous donne $\theta_E(y, r/8) - \theta_E(y) \leq \delta_2$, donc si on choisit $\delta_2 \leq \alpha_1$ comme dans le théorème 5.20, ce qui est possible à partir du choix de α_3. On peut donc appliquer la proposition 5.26, soit Y_y la limite d'explosion de E en y ; alors Y_y est un cône de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O et y, il existe deux constantes universelles C et b telles que

$$d_{y,r'}(E, Y_y) \leq C(r')^b, \tag{5.28.21}$$

pour tout $r' \leq r/16$. Maintenant, soit $d/8 \leq t \leq r/16-2d$; alors $B(z,t) \subset B(y, 2d+t)$, et

$$\begin{aligned} d_{z,t}(E, Y_y) &\leq \frac{2d+t}{t} d_{y,2d+t}(E, Y_y) \\ &\leq 20C(2d+t)^b \\ &\leq 20C.20^b t^b \\ &= C_1 t^b. \end{aligned} \tag{5.28.22}$$

Notons Y^1 l'intersection de Y_y avec H ; alors $Y_y^1 \in M(\mathbb{Y})$ et on déduit facilement de (5.28.22) que

$$d_{z,t}(E_x, Y_y^1) \leq C_2 t^b, \tag{5.28.23}$$

pour $d/8 \leq t \leq r/32$.

Maintenant, à partir de (5.28.7),(5.28.20), et (5.28.23), on peut conclure que, pour chaque $z \in E' \cap B(x, r/32)$, et pour chaque $r' \leq r/32$, il existe un cône $Y_z' \subset H$, de dimension 2 qui est soit un plan, soit un cône de type $M(\mathbb{Y})$, tel que

$$d_{z,r'}(E', Y_z') \leq C(r')^b, \tag{5.28.24}$$

ce qui est l'hypothèse dans le théorème 3.3, pour montrer que E' est C^1 équivalent à un cône minimal Y', de dimension 2, de type $\mathbb{Y}$, contenu dans H et centré en x. On termine ainsi la démonstration du théorème. □

Régularité C^1 près d'un point de type $\mathbb{T}$.

Théorème 5.29. *Supposons que x est de type $\mathbb{T}$, alors si le rayon r satisfait aux hypothèse du théorème 5.20, avec une constante α_4 très petite, qu'on va choisir après, ce qui veut dire*

$$\theta_E(x,r) - \theta_E(x) \leq \alpha_4,$$

et,

$$r < \alpha_4,$$

alors dans la boule $B(x, r/32)$, E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2 T' de type $\mathbb{T}$, contenu dans H, centré en x.

Démonstration. Comme dans le théorème 5.28, on confonde toujours les constantes mutiplicatrices, on les note souvent C.

On applique le corollaire 4.7, pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\alpha_4 > 0$, tel que pour chaque $t \leq r/2$, il existe un cône minimal de dimension 3 $T(x,t)$, de type $\mathbb{T}$, dont l'axe passe par O et x, tel que

$$d_{x,t}(E, T(x,t)) \leq \delta. \tag{5.29.1}$$

Maintenant on considère un point $z \in E' \cap B(x, r/32)$, $z \neq x$. On veut montrer d'abord que

$$z \text{ ne peut pas être un point de type } \mathbb{T}.$$

Posons $\rho(z) = |z - x| > 0$. On prend dans (5.29.1) le cône $T_z = T(x, (1 + \eta)\rho(z))$, avec $\eta = 10^{-3}$. Alors $B(z, 10\eta\rho(z)/9) \subset B(x, (1 + \eta)\rho(z))$ et de plus, dans la boule $B(z, \eta\rho(z))$, T_z coïncide avec un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ qu'on note Y_z. On a alors

$$\begin{aligned} d_{z,10\eta\rho(z)/9}(E, T_z) &= d_{z,10\eta\rho(z)/9}(E, Y_z) \\ &\leq \frac{1+\eta}{10\eta/9} d_{x,(1+\eta)\rho(z)}(E, T_z) \\ &\leq 10^4\delta. \end{aligned} \tag{5.29.2}$$

Donc on peut appliquer le lemme 2.13, pour chaque $\delta_1 > 0$ on peut choisir $\delta > 0$, tel que

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(z, \eta\rho(z))) &\leq H^3(Y_z \cap B(z, (1 + \delta_1)\eta\rho(z))) + \delta_1(\eta\rho(z))^3 \\ &\leq d_Y(\eta\rho(z))^3 + \delta_2(\eta\rho(z))^3, \end{aligned} \tag{5.29.3}$$

où $\delta_2 = 3(\delta_1 + \delta_1^2 + \delta_1^3)$. Donc

$$\theta_E(z) \leq \theta_E(z, \eta\rho(z)) \leq d_Y + \delta_2 < d_T, \tag{5.29.4}$$

et z ne peut qu'être un point de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$.

On distingue deux cas.

Premier cas, z est de type $\mathbb{Y}$.

Comme pour (5.29.4), $\theta_E(z, \eta\rho(z)) - \theta_E(z) = \theta_E(z, \eta\rho(z)) - d_Y \leq \delta_2$. Donc si on chosit $\delta_2 \leq \alpha_1$ comme dans le théorème 5.20, ce qui est possible à partir de α_4, on peut appliquer la propositon 5.26 à notre point z dans l'hyperplan H_z passant par z et orthogonal à Oz. Notons toujours $E_z = E \cap H_z$. Il existe alors un cône minimal Y_z^1, de type $\mathbb{Y}$, de dimension 2, centré en z et contenu dans H_z tel que

$$d_{z,\eta\rho(z)}(E_z, Y_z^1) \leq Cr'^{b_1} \text{ pour } r' \leq \eta\rho(z). \tag{5.29.5}$$

Ensuite, soit toujours $L : H_z \to H$ qui envoie $y \in H_z$ vers le point y' qui est l'intersection de Oy avec H. Alors L est Cr-Lipschizienne, et $Y_z' = L(Y_z^1)$ est un cône de dimension 2 dans H, centré en z et $Y_z' \in M(\mathbb{Y})$. Maintenant,

$$d_{z,\eta\rho(z)/2}(E', Y_z') \leq 2Cr'^{b_1} \text{ pour } r' \leq \eta\rho(z)/2. \tag{5.29.6}$$

Il nous reste le cas où $\eta\rho(z)/2 \leq r' \leq r/32$. On a que $\theta_E(x, r) - \theta_E(x) \leq \alpha_4$, donc si on choisit $\alpha_4 \leq \alpha_1$, on peut appliquer la proposition 5.26. On trouve que pour chaque $r' \leq r/2$, il existe un cône minimal $T'(x, r')$ de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, centré en x et contenu dans H tel que

$$d_{x,r'}(E', T'(x, r')) \leq C(r')^{b_1}. \tag{5.29.7}$$

En particulier, pour $0 \le t \le r/16 - 2\rho(z)$, on a que $B(z, \eta\rho(z)/2+t) \subset B(x, 2\rho(z)+t)$
(5.29.8)

$$\begin{aligned} d_{z,\eta\rho(z)/2+t}(E', T'(x, 2\rho(z)+t)) &\le \frac{2\rho(z)+t}{\eta\rho(z)/2+t} d_{x,2\rho(z)+t}(E', T'(x, 2\rho(z)+t)) \\ &\le \frac{4}{\eta} C(2\rho(z)+t)^{b_1} \\ &= \frac{4}{\eta} C\left(\frac{2\rho(z)+t}{\eta\rho(z)/2+t}\right)^{b_1} (\eta\rho(z)/2+t)^{b_1} \\ &\le 10^4 C 10^{4b_1} (\eta\rho(z)/2+t)^{b_1} \\ &\le C_1(\eta\rho(z)/2+t)^{b_1}. \end{aligned}$$

De (5.29.7) et (5.29.8), on a pour $r' \le r/32$, il existe un cône de dimension 2 $Y'(z, r') \subset H$, qui est soit de type $M(\mathbb{Y})$, soit de type $\mathbb{T}$, tel que

$$d_{z,r'}(E', Y'(z, r')) \le C r'^{b_1} \tag{5.29.9}$$

où C et b_1 sont des constantes positives géométriques.

Deuxième cas, z est de type $\mathbb{P}$.

On pose toujours $\rho(z) = |z - x| > 0$; donc $\mathrm{dist}(z, Ox) = \rho(z)$. On note ensuite E_Y l'ensemble points de type $\mathbb{Y}$ dans $E \cap B(x, r)$, et $d = \min(\mathrm{dist}(z, E_Y), \rho(z))$.

Si $d > \eta|x - z|$. Soit T_2 l'union des 2-faces de $T(x, 2\rho(z))$. On veut montrer que $d(z, T_2) > \frac{d}{10}$. Sinon, il existe une 2-face F de $T(x, 2\rho(z))$ et un point $y \in F$ tels que $d(z, y) = d(z, F) < d/10$. C'est clair que $|y - x| > |x - z| - d/10 > |x - z|/2$, et aussi $d(y, Ox) > d(z, Ox) - d/10 > |x - z|/2 - |x - z|/10 > |x - z|/3$. Donc dans la boule $B(y, \frac{d}{10})$, $T(x, 2\rho(z))$ coïncide avec un cône minimal Y_y de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O et y. De plus,

$$\begin{aligned} d_{y,d/10}(E, Y_y) &\le \frac{2|x - z|}{d/10} d_{x,2\rho(z)}(E, T(x, 2\rho(z))) \\ &\le \frac{20}{\eta}\delta \le 10^5\delta. \end{aligned} \tag{5.29.10}$$

Donc si on choisit δ très petite, ce qui est possible à partir du choix de α_4, on peut appliquer la proposition 4.10 : il existe un point y' de type $\mathbb{Y}$, dans la boule $B(y, \frac{d}{100})$. On en déduit que $d(z, y') \le d(z, y) + d(y, y') \le \frac{d}{5}$, mais y' est bien un point dans E_Y, donc on a une contradiction. Alors on a prouvé que $d(z, T_2) > \frac{d}{10}$.

Maintenant $d(z, Ox) = \rho(z) > \frac{d}{2}$ et $d(z, T_2) > \frac{d}{10}$, donc par un simple argument géométrique, dans la boule $B(z, \frac{d}{100})$, $T(x, 2\rho(z))$ coïncide avec un plan P_z de dimension 3 qui passe par O et x. En fait, P_z est l'une des 3-faces de $T(x, 2\rho(z))$. Calculons maintenant la distance entre E et P_z dans la boule $B(z, \frac{d}{100})$:

$$d_{z,\frac{d}{100}}(E, P_z) \le \frac{2\rho(z)}{d/100} d_{x,2\rho(z)}(E, T(x, 2\rho(z))) \le \frac{200}{\eta}\delta, \tag{5.29.11}$$

les mêmes arguments s'appliquent, on obtient que pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$, tel que

$$\theta_E(z, d/100) - \theta_E(z) \leq \delta_1. \tag{5.29.12}$$

Donc si on choisit α_4 de manière que $\delta_1 \leq \alpha_1$ dans le théorème 5.20, on peut appliquer le théorème 5.27, il existe P_z^1 un plan de dimension 2, passant par z et contenu dans H_z qui est l'hyperplan de dimension 3 passant par z et orthogonal à Oz, tel que pour tout $r' \leq d/200$,

$$d_{z,r'}(E_z, P_z^1) \leq C(r')^{b_1}, \tag{5.29.13}$$

avec $E_z = E \cap H_z$. Soit toujours $L : H_z \to H$ l'application qui envoie $y \in H_z$ vers le point $L(y)$ qui est l'intersection de Oy avec H ; alors L est Cr-Lipschitzienne. Ensuite $E' = L(E_z)$, puis $P_z' = L(P_z^1)$ est un plan de dimension 2 dans H passant par z et tel que

$$d_{z,r'}(E', P_z') \leq 2C(r')^{b_1} \text{ pour } 0 \leq r' \leq d/400. \tag{5.29.14}$$

Il nous reste donc les r' tels que $d/400 \leq r' \leq r/32$. Puisque $\theta_E(x, r) - \theta_E(x) \leq \alpha_4$, si on choisit $\alpha_4 \leq \alpha_1$, on peut appliquer la proposition 5.26 et on obtient, pour tout $r' \leq r/2$, il existe un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, centré en x, qu'on note $T'(x, r')$, tel que

$$d_{x,r'}(E', T'(x, r')) \leq C(r')^{b_1}.$$

Soit $0 \leq t \leq r/16 - 2\rho(z)$, alors $B(z, d/400 + t) \subset B(x, 2\rho(z) + t)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
&d_{z,d/400+t}(E', T'(x, 2\rho(z) + t))\\
&\leq \frac{2\rho(z) + t}{d/400 + t} d_{x,2\rho(z)+t}(E', T'(x, 2\rho(z) + t))\\
&\leq \frac{800}{\eta} C(2\rho(z) + t)^{b_1}\\
&\leq 10^7 C(\frac{2\rho(z) + t}{d/400 + t})^{b_1}(d/400 + t)^{b_1}\\
&\leq 10^{7b_1} C(d/400 + t)^{b_1} = C_1(d/400 + t)^{b_1},
\end{aligned} \tag{5.29.15}$$

car $d > \eta\rho(z)$.

On conclut que si $d > \eta\rho(z)$ et si $0 \leq r' \leq r/32$, il existe un cône de dimension 2 Y_z' dans H qui est soit un plan, soit de type $\mathbb{T}$, tel que

$$d_{z,r'}(E', Y_z') \leq C(r')^{b_1} \tag{5.29.16}$$

avec C, b_1 des constantes géométriques.

Il nous reste à traiter donc le cas où $d \leq \eta\rho(z)$. Il existe alors un point y de type $\mathbb{Y}$ dans $E \cap B(x, r)$ tel que $d(z, y) < 2d$. Donc, $y \in B(x, 2\rho(z))$ et $d(y, Ox) > d(z, Ox) - d(y, z) = d(z, Ox) - 2d > |x - z|/2 = \rho(z)/2$, donc dans la boule $B(y, \rho(z)/10)$,

$T(x,2\rho(z))$ coïncide avec un cône minimal Y_y de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O. Ensuite, $B(y,\rho(z)/10)\subset B(x,2\rho(z))$, et

$$d_{y,\rho(z)/10}(E,Y_z)\leq \frac{2|x-z|}{|x-z|/10}d_{x,2\rho(z)}(E,T(x,2\rho(z))\leq 20\delta, \tag{5.29.17}$$

où δ est comme (5.29.1).

Donc par les mêmes arguments que dans le cas d'un point de type $\mathbb{Y}$, on obtient que pour chaque $\delta_1>0$, on peut choisir $\delta>0$, tel que si (5.29.17) soit valable pour δ, alors

$$\theta_E(y,\rho(z)/20)-d_Y\leq\delta_1. \tag{5.29.18}$$

C'est clair maintenant que $z\in B(y,(\rho(z)/20)/32)$. Donc si on choisit dans (5.29.18) $\delta_1<\alpha_3$ dans le théorème 5.28, les mêmes arguments sont valables pour notre point y qui est de type $\mathbb{Y}$ et pour notre rayon $r=(\rho(z)/20)/32$. On a donc la même conclusion que (5.29.24), c'est à dire que pour $0<r'\leq\rho(z)/20.32$, il existe un cône $Y^1(y,r')\subset H_y$ qui est soit un plan, soit un cône de type $M(\mathbb{Y})$ tel que

$$d_{z,r'}(E_z,Y^1(y,r'))\leq C(r')^{b_1} \tag{5.29.19}$$

avec C, b_1 des constantes géométriques, H_y l'hyperplan orthogonal à Oy et passant par y, et $E_y=E\cap H_y$. L'application L qui envoie en point $w\in H_y$ vers un point $L(w)\in H$, qui est l'intersection de Oy et H est Cr-biLipschitzienne, $L(E_z)=E'$, $L(z)=z$. Ensuite, $Y'(y,r')=L(Y^1(y,r'))$ est aussi un plan de dimension 2 ou un cône de type $M(\mathbb{Y})$. Puisque L est Cr-Bilipschitzienne, on a que pour $r'\leq\rho(z)/40.32$

$$d_{z,r'}(E',Y'(y,r'))\leq C_1r'^{b_1}, \tag{5.29.20}$$

avec $C_1=2C$. Donc on a contrôlé la distance de E' avec un cône dans $M(\mathbb{Y})$ pour $r'\leq\rho(z)/40.32=\rho(z)/1280$.

Pour le cas où $r'>\rho(z)/1280$, puisque $\theta_E(x,r)-\theta_E(x)\leq\alpha_4$, si on choisit $\alpha_4\leq\alpha_1$, on peut appliquer la proposition 5.26 et on obtient, pour tout $r'\leq r/2$, un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, centré en x, qu'on note $T'(x,r')$, tel que

$$d_{x,r'}(E',T'(x,r'))\leq Cr'^{b_1}.$$

Soit $0\leq t\leq r/16-2\rho(z)$, alors $B(z,\rho(z)/1280+t)\subset B(x,2\rho(z)+t)$. Ensuite, (5.29.21)

$$\begin{aligned}
d_{z,\rho(z)/1280+t}(E',T'(x,2\rho(z)+t)) &\leq \frac{2\rho(z)+t}{\rho(z)/1280+t}d_{x,2\rho(z)+t}(E',T'(x,2\rho(z)+t))\\
&\leq 10^4C(2\rho(z)+t)^{b_1}\\
&=10^4C(\frac{2\rho(z)+t}{\rho(z)/1280+t})^{b_1}(\rho(z)/1280+t)^{b_1}\\
&\leq 10^{7b_1}C(\rho(z)/1280+t)^{b_1}\\
&=C_1(\rho(z)/1280+t)^{b_1}.
\end{aligned}$$

Alors dans ce cas aussi, on obtient des constantes C et b_1 géométriques, telles que si $r' \leq r/32$, il existe un cône $Y'(z,r') \in M(\mathbb{Y})$ qui est contenu dans H, tel que

$$d_{z,r'}(E', Y'(z,r')) \leq C(r')^{b_1}. \tag{5.29.22}$$

Maintenant (5.29.16) et (5.29.22), et le fait que $d_{x,r/2}T'(x,r/2) \leq \alpha_1$ nous permet d'utiliser le théorème 3.3 pour conclure que E' est C^1 équivalent à un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, dans H et centré en x. On termine ainsi la démonstration du théorème. □

Les techniques utilisées dans les théorèmes 5.27, 5.28 et 5.29 sont très semblables à celles dans [D2]. Ici, on ne sait pas si notre ensemble E' est presque minimal ou pas. De plus, au lieu de mesurer la distance entre E' et les cônes minimaux comme dans [D2], on mesure plutôt la distance entre E' et les cônes qui sont l'image d'un cône minimal par une application affine bijective. Ensuite, on utilise le théorème 3.3 pour obtenir l'équivalence C^1.

Notre approche n'est pas suffit pour démontrer la lissité autour d'un point de type $\mathbb{P}$. On va utiliser le théorème d'Allard pour la proposition suivante.

Proposition 5.30. *Si pour tout $y \in E \cap \partial B(O,1)$, la densité $\theta_E(y) = d_P$, alors E est un hyperplan de dimension 3 passant par l'origine.*

Démonstration. Posons $\partial E = E \cap \partial B(O,1)$. D'après [Ald], si la densité $\theta_E(y) = d_P$, alors y est de type $\mathbb{P}$ et il existe $r > 0$ tel que $\partial E \cap B(y,r)$ est une surface lisse de dimension 2. On en déduit que l'ensemble $E \cap \partial B(O,1)$ est une surface lisse de dimension 2 dans $\mathbb{S}^3$. Donc E est un cône minimal s'appuyant sur une surface lisse, et on en déduit, d'après [Al], que E est un plan de dimension 3. □

Corollaire 5.31. *Si la densité au centre de E satisfait $\theta_E(O) < d_Y$, alors E est un plan de dimension 3.*

Démonstration. On sait que pour chaque $x \in E \cap \partial B(O,1)$, $\theta_E(x)$ ne prend que l'une des trois valeurs d_P, d_Y ou d_T. De plus, $\theta_E(x) \leq \theta_E(O)$ puisque E est un cône minimal centré en O, donc pour tout $x \in E \cap \partial B(O,1)$, $\theta_E(x) < d_Y$. On en déduit que $\theta_E(x) = d_P$ pour tout $x \in E \cap \partial B(O,1)$, d'après la proposition 5.30, E est un plan de dimension 3. □

Proposition 5.32. *Si $\theta_E(O) = d_Y$, alors E est un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ centré en O.*

Démonstration. On sait que pour un cône minimal, la densité au centre est la plus grande parmi celle de tous les points de ce cône. Donc pour tout $z \in E \cap \partial B(O,1)$, $\theta_E(z) \leq \theta_E(O) = d_Y$. Mais $\theta_E(z)$ ne peut prendre que trois valeurs d_P, d_Y ou d_T. On en déduit que $\theta_E(z) = d_P$ ou d_Y. Maintenant si pour tout $z \in E \cap \partial B(O,1)$, $\theta_E(z) = d_P$, alors d'après le théorème 5.30, E sera un plan (absurde). Donc il existe $z_0 \in E \cap \partial B(O,1)$ tel que $\theta_E(z_0) = d_Y$. Ensuite on a $\theta_E(O, r+1)\frac{(r+1)^3}{r^3} \geq \theta_E(z_0, r) \geq$

$\theta_E(z_0)$ pour tout $r > 0$ d'après le lemme 2.12. Donc $\theta_E(O)\frac{(r+1)^3}{r^3} \geq \theta_E(z_0, r) \geq \theta_E(z_0)$. En faisant tendre r vers l'infini, on a $d_Y \geq \theta_E(z_0, r) \geq \theta_E(z_0) = d_Y$ pour tout $r > 0$. On en déduit que $\theta_E(z_0, r) = d_Y$ pour tout $r > 0$. D'après la proposition 2.8, E est un cône centré en z_0. Donc E est un cône centré en deux point O et z_0, on en déduit que $E = Oz_0 \times E'$, où E' est un cône minimal de dimension 2 dans l'hyperplan H_{z_0} et centré en z_0. Mais $\theta_E(z_0) = d_Y$, donc on a forcément $\theta_{E'}(z_0) = d'_Y$ et puis E' est de type $\mathbb{Y}$. On a ensuite E est aussi de type $\mathbb{Y}$. $\square$

Corollaire 5.33. *Il n'existe pas un cône minimal F de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine O tel que $d_P < \theta_F(O) < d_Y$.*

Démonstration. On montre par l'absurde. Supposons qu'il existe un cône minimal F comme dans le corollaire. Soit $\partial F = F \cap \partial B(O, 1)$. Alors par les mêmes arguments que dans la proposition 5.32, pour chaque $y \in \partial F$, on a $\theta_F(y) \leq \theta_F(O) < d_Y$. Puisque $\theta_F(y)$ ne peut prendre que l'une des trois valeurs d_P, d_Y ou d_T, on en déduit que $\theta_F(y) = d_P$. Cela est vraie pour chaque point $y \in \partial F$. Donc d'après la proposition 5.30, F est un plan de dimension 3 passant par l'origine. Mais dans ce cas, $\theta_F(O) = d_P$, ce qui est absurde. On a donc la proposition. $\square$

Chapitre 6

Extension aux ensembles minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$

Dans ce chapitre, on va introduire quelques résultats concernants les ensembles minimaux généraux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Comme on a vu dans le chapitre précédent, on a le théorème d'équivalence C^1 pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, localement en chaque point différent du centre du cône. On en déduit des résultats suivants sur les cônes minimaux.

(i) Si F est un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, dont les points différents de l'origine sont tous de type $\mathbb{P}$, alors F est un plan de dimension 3.

(ii) Si F est un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, dont la densité au centre est d_Y, alors F est un cône minimal de type $\mathbb{Y}$.

(iii) De plus, il n'existe pas un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ dont la densité au centre est comprise strictement entre d_P et d_Y.

Donc pour obtenir des propriétés sur un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ quelconques, on doit se limiter à poser autres hypothèses sur notre ensembles, puisque nous ne savons pas beaucoup sur les cônes minimaux. On fixe dans ce chapitre E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

On va revenir à la normalisation de la mesure de Hausdorff comme dans l'introduction. C'est à dire la mesure H^d est définie de sorte que $H^d(B_d(O,1)) = 1$, où $B_d(O,1)$ est la boule unité de dimension d.

Lemme 6.1. *Il n'existe pas un point $z \in E$ tel que $d_P < \theta_E(z) < d_Y$. De plus, si $x \in E$ et $\theta_E(x) = d_P$, alors toute limite d'explosion de E en x est un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{P}$. Si $\theta_E(x) = d_Y$, alors toute limite d'explosion de E en x est un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$.*

Démonstration. On suppose qu'il y a $z \in E$ tel que $d_P < \theta_E(z) < d_Y$. Soit F une limite d'explosion de E en z. Alors par le lemme 2.10, F est un cône minimal de dimension 3, centré en O et de plus, $\theta_F(O) = \theta_E(z)$. On en déduit que $d_P < \theta_F(O) < d_Y$ ce qui n'est pas possible d'après la proposition 5.33. On a montré donc la première partie du lemme.

Ensuite, soit $x \in E$ tel que $\theta_E(x) = d_P$. D'après le lemme 2.10, toute limite d'explosion F de E en x est un cône minimal centré en O et satisfait à $\theta_F(O) = d_P$. Par le corollaire 5.31, F est un plan de dimension 3.

Finalement, supposons que $\theta_E(x) = d_Y$. Par le lemme 2.10, toute limite d'explosion F de E en x est un cône minimal centré en O et satisfait à $\theta_F(O) = d_Y$. Par la proposition 5.32, F est un cône de type $\mathbb{Y}$. □

Le lemme 6.1 nous permet de définir les points de type $\mathbb{P}$ et de type $\mathbb{Y}$ pour un ensemble minimal E de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.

Définition 6.2. *Soit $x \in E$. On dit que x est un point de type $\mathbb{P}$ si $\theta_E(x) = d_P$. On dit que x est un point de type $\mathbb{Y}$ si $\theta_E(x) = d_Y$.*

On va montrer maintenant l'équivalence Bi-Höldérienne près d'un point de type $\mathbb{P}$.

Proposition 6.3. *Soit E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, x un point de type $\mathbb{P}$ dans E. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que dans la boule $B(x,r)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1+\epsilon$.*

Démonstration. Puisque la densité de E en x est 1 pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que pour $0 < t \leq r$, $1 \leq \theta_E(x,t) \leq 1+\epsilon$. Par la proposition 2.9, pour chaque $\epsilon_1 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel qu'il existe un cône minimal C, centré en x et , tel que

$$d_{x,(1-\epsilon_1)r}(E,C) \leq \epsilon_1$$

et

$$|H^3(E \cap B(x,(1-\epsilon_1)r) - H^3(C \cap B(x,(1-\epsilon_1)r))| \leq \epsilon_1 r^3. \tag{6.3.1}$$

Alors

$$\begin{aligned} H^3(C \cap B(x,(1-\epsilon_1)r)) &\leq \epsilon_1.r^3 + H^3(E \cap B(x,(1-\epsilon_1).r) \\ &= \epsilon_1 r^3 + [(1-\epsilon_1)r]^3(\theta_E(x,(1-\epsilon_1)r) - 1) + (1-\epsilon_1)^3 r^3 \\ &\leq [(1-\epsilon_1)r]^3(1+\epsilon+2\epsilon_1), \end{aligned}$$

donc $\theta_C(x,(1-\epsilon_1)r) \leq 1+\epsilon_2$, où $\epsilon_2 = \epsilon + 2\epsilon_1$. Mais C est un cône minimal centré en x, donc $\theta_C(x,(1-\epsilon_1)r) = \theta_C(x)$. On en déduit que $\theta_C(x) \leq 1+\epsilon_2 < d_Y$, qui est la densité d'un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$. Donc C est forcément un plan de dimension 3 passant par x. On pose ensuite $(1-\epsilon_1)r = r_1 > 0$. On considère maintenant un point $z \in E \cap B(x,r_1/2)$. Alors $B(z,r_1/2) \subset B(x,r_1)$, et on obtient

$$d_{z,r_1/2}(E,C) \leq 2d_{x,r_1}(E,C) \leq 2\epsilon_1 \tag{6.3.2}$$

en appliquant le lemme 2.13 pour deux ensembles minimaux E, C, pour chaque $\epsilon_3 > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$, tel que

$$\begin{aligned} H^3(E \cap B(z, r_1/2)) &\leq H^3(C \cap B(z, (1+\epsilon_3)r_1/2)) + \epsilon_3(r_1/2)^3 \\ &\leq (r_1/2)^3((1+\epsilon_3)^3 + \epsilon_3) \\ &\leq (r_1/2)^3(1+6\epsilon_3). \end{aligned}$$

On en déduit que $\theta_E(z, r_1/2) \leq 1 + 6\epsilon_3$. Mais E est un ensemble minimal, donc la fonction $\theta_E(z,t)$ en variable t est croissante. Donc pour chaque $t \leq r_1/2$, on a aussi $\theta_E(z,t) \leq 1 + 6\epsilon_3$. On raisonne ensuite comme ci-dessus, pour chaque $\epsilon_4 > 0$, on peut choisir $\epsilon_3 > 0$, puis $\epsilon > 0$, tel que pour chaque $t \leq r_1/2$, il existe un plan P_t de dimension 3 passant par z tel que

$$d_{z,t}(E, P_t) \leq \epsilon_4. \tag{6.3.3}$$

On applique le théorème 3.2 et conclut que, pour chaque $\epsilon_5 > 0$, on peut choisir $\epsilon_4 > 0$ tel que dans la boule $B(x, r_1/2)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1 + \epsilon_5$. Donc pour chaque $\tau > 0$, on choisit ϵ de manière que $\epsilon_5 \leq \tau$ et on obtient le lemme. □

Par la démonstration de la proposition 6.3, on obtient la remarque suivante.

Remarque 6.3. *Pour chaque $\tau > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $x \in E$, P est un plan de dimension 3 et r est un rayon qui satisfont à*

$$d_{x,r}(E, P) \leq \epsilon.$$

Alors, E est Bi-Höldériennement équivalent à P dans la boule $B(x, r/2)$, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1 + \tau$.

L'équivalence Bi-Höldérienne autour d'un point de type $\mathbb{Y}$ d'un ensemble minimal de dimension 3.

Un cône minimal Y de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$ se représente comme $Y = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, où F_1, F_2, F_3 sont trois demi-plans de dimension 3 qui ont un bord commun (l'axe de Y) et qui forment un angle 120° l'un avec l'autre. On appelle F_1, F_2, F_3 les faces de Y.

On va montrer dans cette partie que si x est un point de type $\mathbb{Y}$ d'un ensemble minimal de dimension 3 E dans $\mathbb{R}^4$, alors pour chaque $\delta > 0$, il existe $r = r_x > 0$ tel que dans $B(x, r)$, E est Bi-hölderiennement équivalent à un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré en x et avec une constante Bi-hölderienne plus petite que $1 + \delta$.

Pour chaque $z \in E \cap B(x, r)$ et pour chaque $t \leq r$, on estime la distance de Hausdorff dans la boule $B(z, t)$ entre E et un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$. Si cette distance est assez petite pour chaque z, on peut conclure à l'équivalence Bi-Höldérienne dans $B(x, r/2)$.

On commence par un lemme sur l'existence d'un point de type $\mathbb{Y}$ quand E est très proche d'un cône de type $\mathbb{Y}$.

Lemme 6.4. *Pour chaque $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ avec les propriétés suivantes. On suppose que E est minimal dans $B(O,2)$ et qu'il existe un cône minimal Y de dimension 3 et de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par O, tel que $d_{O,1}(E,Y) \leq \epsilon$. Alors dans la boule $B(O,\eta)$, il existe un point de E qui n'est pas de type $\mathbb{P}$.*

Puisque E est très proche d'un cône de type $\mathbb{Y}$ dans $B(O,1)$, on sait que dans $B(O,\eta)$, la densité d'un point $z \in E$ est plus petite que $d_Y + \delta$, où δ est aussi petit petit qu'on peut veut, qu'on peut obtenir à partir du choix de ϵ et η. Donc si z n'est pas de type $\mathbb{P}$, la densité à ce point est forcément comprise entre d_Y et $\delta + d_Y$, mais on ne sait pas encore s'il existe ou pas un cône minimal dont la densité au centre est strictement comprise entre d_Y et $d_Y + \delta$, donc on doit se contenter d'avoir une conclusion avec un point de type non $\mathbb{P}$.

Démonstration. Supposons que le lemme est faux. Alors pour tout $z \in E \cap B(O,\eta)$, z est de type $\mathbb{P}$. Par l'hypothèse, l'axe L de Y passe par O. Soient F_1, F_2, F_3 les trois faces de Y. Soient $w_i \in F_i \cap \partial B(O,\eta/4), 1 \leq i \leq 3$, tels que la distance $\mathrm{dist}(w_i, L)$ est maximale. Cela veut dire que $\mathrm{dist}(w_i,L) = d(w_i,O) = \eta/4$ pour $1 \leq i \leq 3$. Puisque $d_{O,1}(E,Y) \leq \epsilon$, alors pour chaque $1 \leq i \leq 3$, il existe $z_i \in E$ tel que $d(z_i,w_i) \leq \epsilon$. Alors $d(z_i,O) \leq d(w_i,O) + \epsilon = \eta/4 + \epsilon < 3\eta/8$. Ensuite, $\mathrm{dist}(z_i,L) \geq \mathrm{dist}(w_i,L) - \epsilon \geq \eta/4 - \epsilon > 3\eta/16$. Cela veut dire que pour chaque $i \leq 3$, $B(z_i,\eta/8)$ ne rencontre pas L. Par conséquent, dans la boule $B(z_i,\eta/8)$, Y coïncide avec F_i. On a maintenant

$$\begin{aligned} d_{z_i,\eta/8}(E,F_i) &= d_{z_i,\eta/8}(E,Y) \\ &\leq \frac{8}{\eta} d_{O,1}(E,Y) \\ &\leq \frac{8\epsilon}{\eta}. \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Donc pour chaque $\tau > 0$, d'après la remarque 6.3, on peut choisir $\epsilon > 0$ très petit tel que dans la boule $B(z_i,\eta/16)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à F_i, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1+\tau$.

Maintenant, pour chaque $z \in E \cap B(O,\eta)$, z est de type $\mathbb{P}$. Donc d'après la proposition 6.3, il existe $r_z > 0$ tel que dans la boule $B(z,r_z)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un plan de dimension 3, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1+\tau$, avec τ comme ci-dessus.

On voit que $E \cap B(O,\eta)$ satisfait à toutes les hypothèses semblables aux celles du sous-lemme 4.9.1. Donc si ϵ est suffisamment petit, ce qui entraîne que τ est aussi suffisamment petit, on peut conclure qu'il n'existe aucun ensemble $E_1 = E \cap B(O,\eta)$ satisfaisant aux telles hypothèses. On en déduit ainsi notre lemme 6.4. □

Passsons maintenant à la démonstration de l'équivalence Bi-Höldérienne avec un cône de type $\mathbb{Y}$ près d'un point de type $\mathbb{Y}$ d'un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Avant de commencer, on a un lemme qui dit que pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que si la denstité au centre d'un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ est comprise entre d_Y et $d_Y + \delta$, alors le cône lui-même est aussi δ_1-proche d'un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ avec le même centre.

Lemme 6.5. *Pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que les choses qui suivent sont vraies.*

Soit C un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine O. On suppose que la densité en O de C est comprise entre d_Y et $d_Y+\delta$. Alors il existe un cône minimal Y_C de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{R}^4$, centré en O tel que $d_{O,1}(C, Y_C) \leq \delta_1$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Donc on suppose qu'il existe $\delta_1 > 0$ et les cônes minimaux $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ centrés en O satisfaisant à $d_Y \leq \theta_{C_i}(O) \leq d_Y + 1/2^i$, et tels que pour chaque i entier, et pour chaque cône minimal Y de type $\mathbb{Y}$, centré en O, on a $d_{O,1}(Y, C_i) > \delta_1$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les cônes $\{C_i\}$ convergent vers un ensemble C dans $\mathbb{R}^4$. Puisque chaque C_i est un cône minimal centré en O, C est aussi un cône minimal centré en O. Par le lemme 2.5, on a

$$\liminf_{i\to+\infty} H^3(C_i \cap B(O,1)) \geq H^3(C \cap B(O,1))$$

on en déduit que $\theta_C(O) \leq \liminf_{i\to\infty}(d_Y + 1/2^i) = d_Y$.

Ensuite, par le lemme 2.6, on a

$$\limsup_{i\to+\infty} H^3(C_i \cap \overline{B}(O,1)) \leq H^3(C \cap \overline{B}(O,1)$$

on en déduit que $\theta_C(O) \geq \limsup_{i\to+\infty}(d_Y + 1/2^i) = d_Y$.

Donc on peut conclure que $\theta_C(O) = d_Y$. Alors par la proposition 5.32, C est un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ centré en O. Maintenant puisque $\{C_i\}$ converge vers C, il existe i tel que $d_{O,1}(C_i, C) \leq \delta_1/2$, une contradiction. On a donc terminé notre démonstration. □

On peut remplacer dans le lemme 6.5 le fait que C soit un cône minimal par une condition plus légère, c'est que C est un ensemble minimal de dimension 3 quelconque dont la densité dans un point $x \in C$ est comprise entre d_Y et $d_Y + \delta$. On a le lemme.

Lemme 6.6. *Pour chaque $\delta > 0$ on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que les choses qui suivent sont exactes. On suppose que l'origine O est dans E et que*

$$d_Y \leq \theta_E(O) \leq d_Y + \epsilon$$

$$\theta_E(O,1) - \theta_E(O) \leq \epsilon.$$

Alors il existe un cône minimal Y_E de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, dont l'axe passe par O, et tel que

$$d_{O,1/4}(E, Y_E) \leq \delta.$$

En fait, $1/4$ n'est qu'une constante formelle. On peut la remplacer par n'importe quelle constante plus petite que 1.

Démonstration. D'après la proposition 2.19, pour chaque $\epsilon_1 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel qu'il existe un cône minimal C de dimension 3 centré à l'origine, tel que

$$d_Y \leq \theta_C(O) \leq d_Y + \epsilon_1 \text{ et} \tag{6.6.1}$$

$$d_{O,1/2}(E, C) \leq \epsilon_1. \tag{6.6.2}$$

Mais d'après le lemme 6.5, pour chaque $\delta_1 > 0$, on peut choisir $\epsilon_1 > 0$ tel que si (6.6.1) est satisfaite, il existe un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, que nous notons Y_C, tel que

$$d_{O,1/2}(C, Y_C) \leq \delta_1. \tag{6.6.3}$$

Donc (6.6.2) et (6.6.3) nous donnent

$$d_{O,1/4}(E, Y_C) \leq 2(\epsilon_1 + \delta_1). \tag{6.6.4}$$

Maintenant, on n'a qu'à chosir ϵ de manière que $\delta_1 + \epsilon_1 \leq \delta/2$, et on pose $Y_E = Y_C$; alors (6.6.4) nous donne ce qu'il faut démontrer. □

Passons maintenant au théorème central dans ce chapitre.

Théorème 6.7. *Soient E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et contenant l'origine O. On suppose que O est de type $\mathbb{Y}$. Alors pour chaque $\delta > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que dans la boule $B(O, r)$, E est Bi-Hölderiennement équivalent à un cône minimal Y de type $\mathbb{Y}$, centré en O et avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1 + \delta$.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle du théorème 4.11, juste remplacer la dimension 2 par la dimension 3. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un rayon $r > 0$ et un cône minimal Y de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$ centré en O tel que

$$d_{O,r}(E, Y) \leq \epsilon, \tag{6.7.1}$$

(on prend Y comme n'importe quelle limite d'explosion de E en O). On considère deux types de points de E dans $B(O, r/2)$, des points de type $\mathbb{P}$ et des points qui ne sont pas de type $\mathbb{P}$. On appelle par E_Y l'ensemble des points qui ne sont pas de type $\mathbb{P}$. On va voir que pour chaque $y \in E_Y$, la densité $\theta_E(y, t)$, avec $0 \leq t \leq r/2$, est très proche de d_Y.

Donc soit $y \in E_Y$, puisque y n'est pas de type $\mathbb{P}$,

$$\theta_E(y) \geq d_Y. \tag{6.7.2}$$

Ensuite, par (6.7.1), $d_{O,r}(E,Y)\le\epsilon$, alors

$$d_{y,r/2}(E,Y)\le 2d_{O,r}(E,Y)\le 2\epsilon, \tag{6.7.3}$$

donc par la le lemme 2.13, pour chaque $\delta>0$, on peut choisir $\epsilon>0$ tel que

$$H^3(E\cap B(y,r/3))\le H^3(Y\cap B(y,(1+\delta)r/3))+\delta r^3 \tag{6.7.4}$$

mais puisque $H^3(Y\cap B(z,t))\le d_Y t^3$ pour tout centre z et rayon t, avec l'égalité si et seulement si z appartient à l'axe de Y, donc on déduit de (6.7.4) que

$$\theta_E(y,r/3)\le d_Y+\delta_1, \tag{6.7.5}$$

où $\delta_1=3(\delta+\delta^2+\delta^3)$. Ensuite, la fonction $\theta_E(y,t)$ en variable t est croissante, alors pour $0\le t\le r/3$,

$$\theta_E(y,t)\le d_Y+\delta_1, \tag{6.7.6}$$

donc avec (6.7.2), on a

$$d_Y\le\theta_E(y)\le d_Y+\delta_1 \tag{6.7.7}$$

maintenant (6.7.6) et (6.7.7) sont bien les hypothèses du lemme 6.6 pour l'ensemble minimal E, quitte à remplacer y par O et une homothétie de rapport t. Donc on peut conclure que

pour chaque $\delta_2>0$, on peut choisir $\delta_1>0$, tel que pour chaque $t\le r/6$, il existe un cône minimal $Y(y,t)$ de type $\mathbb{Y}$, de dimension 3, centré en y tel que

$$d_{y,t}(E,Y(y,t))\le\delta_2, \tag{6.7.8}$$

observons que (6.7.8) est valable pour tout $y\in E_Y\cap B(O,r/2)$ et $0\le t\le r/6$.

On veut montrer ensuite que $E_Y\cap\overline{B}(O,r)$ est un ensemble fermé. Donc soit $z\in\overline{B}(O,r)$ est un point d'accumulation de E_Y, il nous suffit de montrer que z n'est pas de type $\mathbb{P}$. Sinons, z est de type $\mathbb{P}$, alors pour $\epsilon_1>0$ assez petite, il existe $t>0$ tel que $H^3(E\cap B(z,t))\le t^3+\epsilon_1 t^3$. Donc si $z'\in B(z,t/100)$, $H^3(E\cap B(z',\frac{99}{100}t))\le H^3(E\cap B(z,t))\le t^3+\epsilon_1 t^3$, ou bien $H^3(E\cap B(z',\frac{99}{100}t)<d_Y(\frac{99}{100}t)^3$. Puisque $\theta_E(z',t)$ est une fonction croissante, on a $\theta_E(z')<d_Y$. On en déduit que $\theta_E(z')=1$ pour tout $z'\in E\cap B(z,t/100)$ ce qui contredit le fait que z est un point d'accumulation de E_Y. On a bien que $E_Y\cap\overline{B}(O,r)$ est fermé.

Considérons maintenant un point $z\in E\cap B(O,r/12)$ qui est de type $\mathbb{P}$. On pose $d(z)=\mathrm{dist}(z,E_Y)>0$ et on prend $y\in E_Y$ tel que $d(y,z)=d$. Puisque $z\in E\cap B(O,r/12)$ et $O\in E_Y$, on a bien $y\in B(O,r/2)$ et $d(z)\le r/12$. Alors par (6.7.8) appliqué pour cet y, il existe un cône minimal $Y(y,2d(z))$ de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ et avec l'axe passant par y tel que,

$$d_{y,2d(z)}(E,Y(y,2d(z)))\le\delta_2. \tag{6.7.9}$$

Posons L l'axe de $Y(y, 2d(z))$, alors L est un plan de dimension 2 passant par y. On veut montrer que

$$\text{dist}(z, L) \geq d(z)/2, \tag{6.7.10}$$

on va montrer cela par l'absurde. Si $\text{dist}(z, L) < d(z)/2$, alors il existe $y' \in L$ tel que $d(z, y') = \text{dist}(z, L) < d(z)/2$. Donc $d(y', y) \leq d(y', z) + d(z, y) \leq 3d(z)/2$, donc on a bien $B(y', d(z)/2)$ est contenue dans la boule $B(y, 2d(z))$. Maintenant

$$d_{y',d(z)/2}(E, Y(y, 2d(z))) \leq 4d_{y,2d(z)}(E, Y(y, 2d(z))) \leq 4\delta_2 \tag{6.7.11}$$

alors, si on prend δ_2 plus petite que la constante $\epsilon/4$ dans le lemme 6.4, on peut l'appliquer et on obtenir,

dans la boule $B(y', d(z)/1000)$, il existe un point $y_1 \in E$, qui n'est pas de type $\mathbb{P}$.

Mais $y_1 \in E_Y$, ensuite $d(z, y_1) \leq d(z, y') + d(y', y_1) \leq d(z)/2 + d(z)/1000 < d(z)$. On trouve alors un point dans E_Y dont la distance à z est $< d(z)$, ce qui contredit la définition de $d(z)$, donc on a bien(6.7.10).

Puisque $d_{y,2d(z)}(E, Y(y, 2d(z))) \leq \delta_1$ et $B(z, d(z)/2) \subset B(y, 2d(z))$, alors

$$d_{z,d(z)/2}(E, Y(y, 2d(z))) \leq 4d_{y,2d(y)}(E, Y(y, 2d(z))) \leq 4\delta_2. \tag{6.7.12}$$

Donc on applique le lemme 2.13, pour chaque $\delta_3 > 0$, on peut choisir $\delta_2 > 0$, tel que

$$\begin{aligned}\theta_E(z, d(z)/3) &= (d(z)/3)^{-3}H^3(E \cap B(z, d(z)/3))\\ &\leq (d(z)/3)^{-3}H^3(Y(y, 2d(z)) \cap B(z, d(z)/3)) + \delta_3\\ &\leq 1 + \delta_3,\end{aligned}$$

le fait que $(d(z)/3)^{-3}H^3(Y(y, 2d(z)) \cap B(z, d(z)/3)) \leq 1(*)$ vient du fait que la boule $B(z, d(z)/3)$ ne rencontre pas l'axe de $Y(y, 2d(z))$, par (6.7.10). Donc dans la boule $B(z, d(z)/3)$, $Y(y, 2d(z))$ coïncide avec un plan de dimenson 3 et donc on a bien (*).

On peut adapter la démonstration du lemme 6.3, pour chaque $\delta_4 > 0$, on peut choisir $\delta_3 > 0$ tel que

pour chaque $t \leq d(z)/3$, il existe un plan $P(z, t)$ de dimension 3 passant par z tel que

$$d_{z,t}(E, P(z, t)) \leq \delta_4. \tag{6.7.13}$$

Si $d(z)/3 \leq t \leq r/12$, alors $t + d(z) \leq r/6$ et donc on peut appliquer (6.7.8), il existe un cône minimal $Y(y, t + d(z))$ de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passant par y tel que $d_{y,t+d(z)}(E, Y(y, t + d(z))) \leq \delta_2$. Maintenant la boule $B(z, t) \subset B(y, t + d(z))$, donc on a

$$d_{z,t}(E, Y(y, t + d(z))) \leq \frac{t + d(z)}{t} d_{y,t+d(z)}(E, Y(t, t + d(z))) \leq 4\delta_2. \tag{6.7.14}$$

Maintenant (6.7.13) et (6.7.14) nous donnent : pour chaque $z \in E \cap B(O, r/12)$, pour chaque $t \leq r/12$, il existe un cône minimal $Z(z,t)$ de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ ou de type $\mathbb{P}$, tel que

$$d_{z,t}(E, Z(z,t)) \leq \delta_5 \tag{6.7.15}$$

avec $\delta_5 = \max\{4\delta_1, \delta_4\}$. De plus, d'après (6.7.1), $d_{O,r/12}(E,Y) \leq 12\epsilon$ et Y est un cône de type $\mathbb{Y}$. Cela avec (6.7.15) nous permettent de conclure que pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que dans la boule $B(O, r/24)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un Y de dimension 3 centré en O, avec une constante Bi-Höldérienne $\leq 1 + \delta$. C'est ainsi qu'on termine notre démonstration. □

En suivant la démonstration du théorème 6.7, on a un corollaire.

Corollaire 6.8. *Pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si E est un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, $x \in E$ et r un rayon qui satisfont à*

$$d_Y \leq \theta_E(x) \leq d_Y + \epsilon$$

et

$$\theta_E(x,r) - \theta_E(x) < \epsilon,$$

alors dans la boule $B(x, r/2)$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, centré en x et avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \delta$.

Démonstration. En fait, pour chaque $\epsilon_1 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ dans l'hypothèse tel que pour chaque $z \in E \cap B(x, r/2)$ et chaque rayon s tel que $B(z,s) \subset B(x, r/2)$, il existe un cône Y de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$ tel que $d_{z,s}(E,Y) \leq \epsilon_1$. De plus, par le lemme 6.6, pour chaque $\epsilon_2 > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel qu'il existe cône minimal Y_E de type $\mathbb{Y}$, centré en x tel que

$$d_{x,r/2}(E, Y_E) \leq \epsilon_2.$$

On peut conclure que E est Bi-Hölderiennement équivalent à Y_E, avec une constante Bi-Hölderienne $\leq 1+\tau$, où τ est aussi petit qu'on veut et qu'on peut obtenir à partir du choix de ϵ. On chosit ϵ tel que $\tau \leq \delta$ et cela nous permet de conclure. □

Donc pour avoir l'équivalence Bi-Höldérienne, il suffit de calculer l'excès de densité autour d'un point de type $\mathbb{Y}$. Maintenant, si E est ϵ-proche d'un cône de type $\mathbb{Y}$ dans la boule $B(x,r)$, alors il existe un point $z \in E \cap B(x, r/100)$, de type non P et la densité de E en z est comprise entre d_Y et $d_Y + \delta$, avec δ aussi petit qu'on veut qu'on peut obtenir à partir du choix de ϵ. On a le corollaire suivant.

Corollaire 6.9. *Pour chaque $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si E est un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et Y un cône minimal de type $\mathbb{Y}$ qui satisfont à $d_{x,r}(E,Y) \leq \epsilon$, alors E est Bi-Höldériennement équivalent à Y dans la boule $B(x, r/2)$, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \delta$*

Par construction de la fonction Bi-Hölderienne dans [DDT], on voit que si E est Bi-Hölderiennement équivalent à un Y de type $\mathbb{Y}$ dans $B(x,r)$ par une fonction f, alors f envoie l'axe de Y dans $B(x,r/2)$ vers l'ensemble de type non-$\mathbb{P}$ de E dans $B(x,r)$. Inversement, f^{-1} envoie l'ensemble de type non-$\mathbb{P}$ de E dans $B(x,r/2)$ vers l'axe de Y. On a alors la remarque suivante.

Remarque 6.10. *Soient E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et $x \in E$ et $r > 0$ un rayon. On suppose que E est Bi-Hölderiennement équivalent à un cône Y de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par x, dans la boule $B(x,r)$. Notons E_Y l'ensemble de type non-$\mathbb{P}$ de E dans la boule $B(x,r)$, L_Y l'axe de Y et f l'application Bi-Hölderienne qui envoie Y vers E dans $B(x,r/2)$, alors*

$$E_Y \cap B(x,r/8) \subset f(L_Y \cap B(x,r/4)) \subset E_Y \cap B(x,r/2). \tag{6.10.1}$$

Chapitre 7

Ensembles minimaux de Mumford-Shah de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ et l'existence d'un point de type $\mathbb{T}$

Dans ce chapitre on s'intéresse aux ensembles minimaux de type Mumford-Shah de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. On donne la définition pour commencer.

Définition 7.1. *Soit E un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$. Un MS-compétiteur (Mumford-Shah) pour E est un ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'on peut trouver $R >$ tel que*

$$F \setminus B(O, R) = E \setminus B(O, R)$$

et de plus, F sépare y et z quand $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus (B(O, R) \cup E)$ sont séparés par E.

On rappelle que "'F sépare y et z veut dire que y et z sont dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus F$. Aussi, si les conditions ci-dessus sont valables pour un rayon R, elles sont aussi valables pour tous les rayons $R' > R$. On donne maintenant la définition d'un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 7.2. *Un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$H^{n-1}(E \setminus F) \leq H^{n-1}(F \setminus E)$$

pour tout MS-compétiteur F de E.

Donc si E est un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^n$, forcément la dimension de E est $n-1$. On montre dans [D1] que tout Al-compétiteur pour E est aussi un MS-compétiteur pour E. Donc si E est un ensemble minimal de Mumford-Shah dans $\mathbb{R}^n$, E est aussi un ensemble Al-minimal de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 3$, on a déjà la liste des ensembles MS-minimaux, comme dans [D1], où on a le théorème suivant.

Théorème 7.3. *Si E est un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^3$, alors il existe un ensemble $E^* \subset E$, tel que $H^2(E \setminus E^*) = 0$ et E^* est un ensemble vide, un plan de* *dimension 2 ou un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{T}$.*

La partie la plus difficile de la démonstration repose sur le fait que si E est très proche d'un cône minimal de type $\mathbb{T}$ dans $B(O,1)$, alors $E \cap B(O, 1/1000)$ contient un point de type $\mathbb{T}$. Voici quelques résultats des ensembles MS-minimaux.

Lemme 7.4. *Soient $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ une suite d'ensembles MS-minimaux réduits dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^n$, alors E est aussi un ensemble MS-minimal.*

Proposition 7.5. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble MS-minimal, alors $E \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un ensemble MS-minimal dans $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Démonstration. Voir exercice 16, pp 537 de [D4].

On rappelle un peu la démonstration de G.David dans [D1] pour l'existence d'un point de type $\mathbb{T}$. Supposons maintenant que E est MS-minimal de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ et $O \in E$, et T un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$, centré en O tel que $d_{O,1}(E,T) \le \epsilon$, avec ϵ une constante très petite qu'on va choisir après. Alors on veut montrer dans $B(O,1)$, il existe un point de type $\mathbb{T}$ dans E.

Pour cela on procède par l'absurde. Supposons qu'il n'existe aucun point de type $\mathbb{T}$ dans $E \cap B(O,1)$, donc il n'y a que des points de type $\mathbb{Y}$ et de type $\mathbb{P}$ dans $E \cap B(O,1)$. On note E_Y l'ensemble des points de type $\mathbb{Y}$ dans $E \cap B(O,1)$, alors localement, E_Y est une courbe simple, et ensuite $E_Y \cap \partial B(O,1)$ est composé de 4 points $a_i, 1 \le i \le 4$. Posons pour chaque $y \in E_Y$, $U(y)$ la liste de composantes connexes de $\overline{B}(O,1) \setminus E$, qui touche y. Alors $U(y)$ est localement constante et $U(a_i) \neq U(a_j)$ quand $i \neq j$. Mais en suivant E_Y à partir d'un point a_i quelconque, on voir que puisque E_Y est localement une courbe simple, on obtient aussi une courbe simple dans $\overline{B}(O,1)$, qui coupe $\partial B(O,1)$ à un autre point a_j, et donc on a $U(a_i) = U(a_j)$, ce qui est une contradiction.

Si on n'a pas la condition de MS-minimal, on ne peut pas obtenir la condition de séparation et donc comme dans [D1], on peut trouver un ensemble qui est très proche d'un T mais qui ne contient aucun point de type $\mathbb{T}$. Donc la condition de MS-minimal est nécessaire.

Donc on veut maintenant obtenir un résultat similaire pour un ensemble MS-minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, qui est très proche d'un T dans la boule $B(O,1)$. Puisqu'on ne sait pas encore s'il existe un cône minimal dont la densité est strictement comprise entre d_Y et d_T, qui sont la densité d'un cône de type $\mathbb{Y}$ et d'un cône de type $\mathbb{T}$ de dimension 3, respectivement, on est content d'obtenir l'existence d'un point de type non $\mathbb{Y}$ et non $\mathbb{P}$, dans la boule $B(O,1)$. Notre résultat principal dans ce chapitre est le suivant.

Théorème 7.6. *Soit E un ensemble MS-minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.*

On suppose qu'il existe un cône minimal T, de type $\mathbb{T}$, de dimension 3 centré à l'origine tel que $d_{O,2}(E,T) \leq \epsilon$, avec ϵ une constante très petite, qu'on va choisir après. Alors, dans la boule $B(O,2)$, il existe un point de type non $\mathbb{Y}$ et non $\mathbb{P}$ dans E.

On veut montrer le théorème par l'absurde. Alors on suppose que

(7.6.1) *Il n'y a que des points de type $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Y}$ dans $E \cap B(O,2)$*

On rappelle qu'un cône minimal T de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, de type $\mathbb{T}$ est de la forme $T = T' \times \mathbb{R}$, avec T' un cône minimal de dimension 2 de type $\mathbb{T}$ et contenu dans un hyperplan de dimension 3. On suppose que $T' \subset P$, avec $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_4 = 0$ et $T = T' \times L$, où L est la droite $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. On appelle L l'axe de T. C'est aussi l'ensemble des points de type $\mathbb{T}$ dans T. Notons l_1, l_2, l_3, l_4 les quatres axes de T' ; alors $L_1 = l_1 \times L, L_2 = l_2 \times L, L_3 = l_3 \times L, L_4 = l_4 \times L$ seront les 2-faces de T dont leur union privé L est l'ensemble des points de type $\mathbb{Y}$ dans T. Finalement, soient $F_i, 1 \leq i \leq 6$ l'ensemble des faces de T' dans P, alors les $\{F_i \times L\}$ seront les six 3-faces de T dont l'union privé l'ensemble de type $\mathbb{T}$ et l'ensemble de type $\mathbb{Y}$ sont l'ensemble des points de type $\mathbb{P}$ dans T. La démonstration de théorème 7.6 prend plusieurs étapes. On commence par un lemme qui parle des compsantes connexes de $\overline{B}(O,2) \setminus E$.

Lemme 7.7. *Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre points dans $\partial B'(O,1/2)$ dont les distances à T' sont maximales. Alors si on note V_i la composante connexe de $\overline{B}(O,2)\setminus E$ qui contient a_i, les $\{V_i\}$ sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. On note au début que a_1, a_2, a_3, a_4 forment les sommets d'un tétradre régulier dans P. On procède par l'absurde ; on suppose que $V_1 = V_2 = V$. Maintenant, le point $a = (a_1 + a_2)/2$ est dans une 3-face P_{12} de T ; de plus, T coïncide avec un plan, qu'on note P_{12}, dans $B(a, 1/6)$.

Maintenant $d_{O,1}(E,T) \leq \epsilon$, alors $d_{a,1/6}(E,T) = d_{a,1/6}(E, P_{12}) \leq 6\epsilon$, donc E est Bi-Höldériennement équivalent à P_{12} dans la boule $B(a, 1/6)$, avec une constante Bi-Hölderienne $\leq 1+\tau$, où τ est une constante aussi petite qu'on veut et qu'on peut obtenir à partir du choix de ϵ. On note f cette fonction Bi-Höldérienne ; alors, f est une homéomorphisme et

$$E \cap B(a, 1/24) \subset f(P_{12} \cap B(a, 1/18)) \subset E \cap B(a, 1/12) \subset f(P_{12} \cap B(a, 1/6))$$

$$|f(x) - x| \leq \tau \text{ pour } x \in B(a, 1/6)$$
$$|x-y|^{1+\tau} \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{1-\tau} \text{ pour } x, y \in B(a, 1/6).$$

On veut montrer ensuite que,

(7.7.1) si $z \in \partial B(a, 1/24) \setminus E$, alors $z \in V$.

En effet, soient $z' = f^{-1}(z)$, alors $z' \in B(a, 1/18)$. On pose z_1, z_2 les deux points dans $\partial B(a, 1/24)$ dont la distance à P_{12} sont maximale, alors on voit facilement que

z_1 et z_2 sont antipodaux par rapport à P_{12} et a. De plus, ils sont séparés dans $\mathbb{R}^4$ par P_{12}. Alors un des deux segment $[z', z_1]$ et $[z', z_2]$ ne coupe pas P_{12}. On suppose que c'est le cas de $[z', z_1]$; alors la courbe $\gamma = f([z', z_1])$ ne coupe pas E, car si elle coupe E dans un point z'', alors $z'' \in B(a, 1/18)$ et donc $f^{-1}(z'')$ est défini et appartient à P_{12}, ce qui est absurde.

Ensuite, on voit que $[a_1, z_1]$ ne coupe pas P_{12}. De plus, on voit facilement que $\mathrm{dist}(u, P_{12}) \geq 1/36$ pour $u \in [a_1, z_1]$ et puisque E est très proche de T dans $B(O, 1)$, on a donc $[z_1, a_1]$ ne coupe pas E. Maintenant, la courbe γ' dans $B(O, 1)$, qui est la composée de γ et le segment $[z_1, a_1]$, est une courbe qui ne coupe pas E, et qui joint z et a_1, et cela veut dire que $z \in V_1 = V$. On a donc (7.7.1).

Maintenant on veut déduire une contradiction du fait que $V_1 = V_2$, on va construire un MS-compétiteur F pour E dont la mesure de Hausdorff de dimension 3 dans $B(O, 1)$ est plus petite que celle de E dans $B(O, 1)$. On fait ça en coupant un morceau de E en $B(O, 1)$. En fait, on pose

$$F = E \setminus B(a, 1/24),$$

alors c'est facile de voir que $F \setminus \overline{B}(O, 2) = E \setminus \overline{B}(O, 2)$. Ensuite, considérons $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{B}(O, 2)$, qui sont séparés par E, on veut montrer qu'ils sont aussi séparés par F.

On montre cela par l'absurde, on suppose que

il existe une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^4$, qui joint x_1 et x_2 et qui ne coupe pas F.

Alors, si $\gamma \cap \overline{B}(a, 1/24)$ est un ensemble vide, alors γ ne coupe pas E, puisque $F = E \setminus B(a, 1/24)$, donc x_1 et x_2 ne sont pas séparés par E, une contradiction.

Si $\gamma \cap \overline{B}(a, 1/24)$ est non vide, alors on note x'_1 le premier point de rencontre de γ avec $\partial B(a, 1/24)$ et x'_2 le dernier point de rencontre de γ avec $\partial B(a, 1/24)$, alors les parties de x_1 à x'_1 et de x_2 à x'_2 de γ ne coupent pas $B(a, 1/24)$, et sont dans le même composante connexe de $\mathbb{R}^4 \setminus F$. Alors elles sont aussi dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^4 \setminus E$.

De plus, $x'_1, x'_2 \in \partial B(a, 1/24) \setminus E$, alors d'après (7.7.1), ils sont dans V et donc on peut joindre x'_1 et x'_2 par une courbe γ_1 qui ne coupe pas E.

Maintenant, la courbe γ_2, qui est l'union de la partie de x_1 à x'_1 de γ, γ_1 et la partie de x'_2 à x_2 de γ, est une courbe qui joint x_1 et x_2 et qui ne coupe pas E. C'est une contradiction, on a donc F est un MS-compétiteur pour E.

Maintenant puisque $\mathrm{dist}(a, E) \leq \epsilon$, il existe $a' \in E$ tel que $d(a, a') \leq \epsilon$ et puis

$B(a', 1/36) \subset B(a, 1/24)$, on a donc

$$\begin{aligned} H^3(F \cap B(O,1)) &= H^3(E \cap B(O,1) \setminus B(a, 1/24)) \\ &\leq H^3(E \cap B(O,1) \setminus B(a', 1/36)) \\ &= H^3(E \cap B(O,1)) - H^3(E \cap B(a', 1/36)) \\ &\leq H^3(E \cap B(O,1)) - C.(1/36)^3 < H^3(E \cap B(O,1)), \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient du fait que E est un ensemble Alhfors-régulier, donc C est une constante géométrique positive. Ceci contredit l'hypothèse que E est MS-minimal, et on obtient le lemme. $\square$

Maintenant si x est un point de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$ dans E, alors par la proposition 6.3 et le théorème 6.7, pour chaque $\tau > 0$ choisi d'avance, il existe un rayon $r > 0$ et une application Bi-Hölderienne $f : B(x, 2r) \to \mathbb{R}^4$, et un cône minimal Y de dimension 3, de type $\mathbb{Y}$ ou $\mathbb{P}$ respectivement, centré en x, tels que

$$(1) \qquad |f(z) - z| \leq \tau r \text{ pour } z \in B(x, 2r)$$

$$(2) \quad (1-\tau)[\frac{|y-z|}{r}]^{1+\tau} \leq \frac{|f(y) - f(z)|}{r} \leq (1+\tau)[\frac{|y-z|}{r}]^{1-\tau} \text{ pour } y, z \in B(x, 2r)$$

$$(3) \qquad E \cap B(x, r) \subset f(Y \cap B(x, 3r/2)) \subset E \cap B(x, 2r).$$

Notons $S = B(O, 2)$. Par l'hypothèse de l'absurde, il n'y a que des points de type $\mathbb{Y}$ et de type $\mathbb{P}$ dans $E \cap \overline{S}$. On pose

$$E_Y \textit{ l'ensemble des points de type } \mathbb{Y} \textit{ dans } E \cap \overline{S}.$$

On voit que E_Y est un ensemble fermé, car si $y_1, y_2, ...$ une suite des points dans E_Y qui converge vers un point $y \in E \cap \overline{S}$, alors y est soit de type $\mathbb{P}$, soit de type $\mathbb{Y}$, mais y ne peut pas être un point de type $\mathbb{P}$ car sinon dans un voisinage de y, il n'y aurait que des points de type $\mathbb{P}$. Donc y est de type $\mathbb{Y}$ et E_Y est fermé.

Soit $y \in E_Y \cap S$, alors il existe $r_y > 0$ tel que $B(y, 2r_y) \subset S$, et un cône minimal y_y de type $\mathbb{Y}$, centré en y, et un homéomorphisme Bi-Hölderien $f : B(y, 2r_y) \to \mathbb{R}^4$ tels que (1), (2) et (3) sont valables pour f et Y_y. Soit L_y l'axe de Y_y, alors L_y sera un plan de dimension 2, passant par y. Par la remarque 6.10, il existe un voisinage U_y de y dans $\mathbb{R}^4$, tel que

$$(4) \qquad E_Y \cap U_y = f(B(y, r_y) \cap L_y).$$

On rappelle l'hypothèse du théorème 7.6, on a

$$d_{O,2}(E, T) \leq \epsilon,$$

avec $T = T' \times L$ où T' est un cône minimal de dimension 2, de type $\mathbb{T}$ centré en O dans un plan P de dimension 3, qui a pour l'équation $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_4 = 0$ et L est la droite orthogonale à P. Donc T' est un cône centré en O, porté sur les arrêtes d'un tétraèdre régulier inscrit dans $\partial B'(O,1)$, où $B'(O,1) = B(O,1) \cap P$. On suppose que d_1, d_2, d_3, d_4 sont les quatre sommets de ce tétraèdre. On peut prendre d_i de sorte qu'il est opposé à a_i par O, où les $\{a_i\}$ sont comme dans le lemme 7.7. Alors, l'ensemble de type $\mathbb{Y}$ de T' est

$$\cup_{1\le i\le 4}(Od_i)$$

avec (Od_i) la demi droite ouvert partant de O et vient vers d_i, c'est à dire $(Od_i) = [Od_i) \setminus \{O\}$. L'ensemble de type $\mathbb{Y}$ de T est donc

$$T_Y = \cup_{1\le i\le 4}(Od_i) \times \mathbb{R}.$$

Notons aussi $L_i = (Od_i) \times \mathbb{R}, 1 \le i \le 4$.

Maintenant, pour chaque $1 \le i \le 4$ on a $d_{d_i,1/2}(E,T) \le 4d_{O,2}(E,T) \le 4\epsilon$, mais dans la boule $B(d_i, 1/2)$, T coïncide avec un cône Y_i de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe est L_i, donc par le corollaire 6.9, pour chaque $\tau > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$, tel que E est Bi-Hölderiennement équivalent à Y_i dans la boule $B(d_i, 1/4)$, avec une constante bi-Höldérienne plus petite que $1+\tau$. Si on note ψ_i cette fonction Bi-Hölderienne, alors

$$|\psi_i(z) - z| \le \tau \text{ pour } z \in B(d_i, 1/4) \ , \tag{5}$$

et puis par la remarque 6.10, ψ_i envoie $L_i \cap B(d_i, 1/8)$ vers E_Y. En particulier, il existe $b_i \in E_Y$ tel que $\psi_(d_i) = b_i$ et par (5), on a $d(d_i, b_i) \le \tau$. On veut montrer ensuite la proposition suivante.

Proposition 7.8. *Le point $b_1 \in E_Y$ est connecté par un autre point $b_i \in E_Y, i \neq 1$ par une courbe $\gamma \subset E_Y \cap B(O,2)$.*

Démonstration. Pour chaque point $z \in E_Y \cap B(O,2)$, il existe un rayon r_z et une application Bi-Höldérienne ψ_z tel que (1),(2) et (3) sont satisfaits pour ψ_z et r_z, avec τ comme dans (5). Ensuite, pour chaque boule $B(d_i, 1/20)$, E_Y est Bi-Höldériennement équivalent à L_i-qui est $(Od_i) \times \mathbb{R}$. Donc il existe un homéomorphisme Bi-Höldérien $\psi_i : B(d_i, 1/20) \to \mathbb{R}^4$, tel que

$$E_Y \cap B(d_i, 1/40) \subset \psi_i(L_i \cap B(d_i, 1/30)) \subset E_Y \cap B(d_i, 1/20) \tag{7.8.1}$$

$$\psi_i(d_i) = b_i \tag{7.8.2}$$

$$(1-\tau)|y-z|^{1+\tau} \le |\psi(y) - \psi(z)| \le (1+\tau)|y-z|^{1-\tau} \text{ pour } y,z \in B(d_i, 1/20) \tag{7.8.3}$$

$$|\psi_i(z) - z| \le \tau \text{ pour } z \in B(d_i, 1/20) \tag{7.8.4}$$

Donc on démontre la proposition par l'absurde. On pose comme ci-dessus, E_Y^1 la composante connexe de b_1 dans $E_Y \cap B(O,2)$. Puisque dans chacun des boules $B(b_i, 1/20), i \neq 1$, E_Y est Bi-Höldériennement équivalent à un plan, donc pour chaque $z \in E_Y \cap B(b_i, 1/30)$, z est conecté à b_i par une courbe dans E_Y. Donc si la proposition est faux, c'est à dire b_1 n'est pas dans la même composante connexe avec n'importe quel autre $b_i, i \neq 1$, alors on doit avoir

(7.8.5) $$E_Y^1 \cap (b_i, 1/30) \text{ est vide pour } i \neq 1.$$

On va construire d'abord une sphère topologique S_0, de dimension 2, qui coupe E_Y^1 dans un seul point b_1 de manière "'transversale"'. Ensuite, on la déformera de manière continue pour avoir une famille de sphères $S_t, 0 \leq t \leq 1$ tel que S_1 ne coupe pas E_Y^1, et on obtiendra une contradiction puisque S_1 est homotope à S_0, donc le nombre d'intersection avec E_Y^1 reste de la même parité. Mais ça sera plus simple si on utilise l'équation et le degré des fonctions continues entre sphères.

On va élaborer maitenant. D'abord, notre cône minimal T est de la forme $T' \times L$, où T' est le cône de dimesion 2 de type $\mathbb{T}$, centré à l'origine et contenu dans le plan P de dimension 3 de l'équation $x_4 = 0$ et L la droite d'équation $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Donc la sphère d'unité S' dans P a pour l'équation

$$S' = \{x : x_4 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Donc on pose $f_0(x) = (x_4, |x|^2 - 1)$. On voit que $f_0(S') = (0,0)$. On construit ensuite une famille des boules de dimension 2 $S'_t \in P$. En fait, S'_t est l'image de S' par l'homothétie de centre d_2 et de coefficient $1-t$. Donc S'_t a pour centre $d_t = t.d_2$ et rayon $1-t$, dans le plan P. On peut écrire maintenant la formule pour f_t :

$$f_t(x) = (x_4, |x - d_t|^2 - (1-t)^2).$$

On a clairement, si $x \in E_Y^1$,

$$|f_1(x)| \geq |x - d_2|^2 \geq \mathrm{dist}(d_2, E_Y^1)^2 \geq 10^{-4},$$

par (7.8.5) et le fait que $d(d_i, b_i) \leq \tau$. On ne va pas utiliser la famille $\{f_t\}$ pour aller de f_0 à f_1. On va utiliser un nombre fini des fonctions intermédiares, tel que à chaque fois les modifications auront lieu dans une boule petite, Bi-Höldérienne pour E_Y. On va donc utiliser une partition de l'unité. La construction est comme suit.

D'abord, posons $K = E_Y^1 \cap \overline{B}(O, 3/2)$. Donc pour chaque $z \in K$, il existe un rayon r_z tel que la boule $B(z, r_z)$ est une boule Bi-Höldérienne pour E_Y^1, avec une constante Bi-Höldérienne plus petite que $1 + \tau$. On va recouvrir K par une nombre fini de boules $B(z, r_z)$, qu'on note $B(z_i, r_{z_i}), 1 \leq i \leq N$. Finalement, on choisit $\eta > 0$ qui est plus petit que 1/10 fois les rayons r_{z_i}.

Ensuite, on pose $\{x_i\}, 1 \leq i \leq l$, une collection maximale de points dans $E_Y^1 \cap B(0, 3/2)$ tel que $|x_i - x_j| \geq \eta$ pour $i \neq j$. Soit $\tilde{\varphi}_j$ une fonction de bosse avec support dans $B(x_j, 2\eta)$ et telle que $\tilde{\varphi}_j(x) = 1$ pour $x \in \overline{B}(x_j, \eta)$ et $0 \leq \tilde{\varphi}_j(x) \leq 1$ partout. On note que $\sum_j \tilde{\varphi}_j(x) \geq 1$ pour $x \in E_Y^1 \cap B(O, 3/2)$, car x est dans une des boules $\overline{B}(x_j, \eta)$ par la maximalité de la famille $\{x_i\}$. Puis on pose $\tilde{\varphi}_0(x)$ une fonction C^∞

dans $\mathbb{R}^4$ telle que $\tilde{\varphi}_0(x) = 0$ pour $|x| \leq 3/2 - \eta$ et $\tilde{\varphi}_0(x) = 1$ pour $|x| \geq 3/2$, et $0 \leq \tilde{\varphi}_0(x) \leq 1$ partout. Alors $\sum_{j=0}^{l} \tilde{\varphi}_j(x) \geq 1$ sur E_Y^1, et on pose

$$\varphi_j(x) = \tilde{\varphi}_j(x)\{\sum_{j=0}^{l} \tilde{\varphi}_j(x)\}^{-1} \text{ pour } x \in E_Y^1 \text{ et } 0 \leq j \leq l.$$

Alors les φ_j ont les même propriétés de support que comme les $\tilde{\varphi}_j$, donc

(7.8.6) $$\varphi_j \text{ est supportée dans } B(x_j, 2\eta) \text{ pour } j \geq 1,$$

(7.8.7) $$\sum_{j=0}^{l} \varphi_j(x) = 1 \text{ pour } x \in E_Y^1\ ,$$

et

(7.8.8) $$\sum_{j=1}^{l} \varphi_j(x) = 1 \text{ pour } x \in E_Y^1 \cap B(O, 3/2 - \eta)\ ,$$

car $\varphi_0(x) = 0$ ici. Notre première approximation est une suite d'applications donnée par

(7.8.9) $$g_k = f_0 + \sum_{0<j<k} \varphi_j(f_1 - f_0),$$

avec $0 \leq k \leq l$. Alors $g_0 = f_0$ et

(7.8.10) $$g_l(x) = f_1(x) \text{ pour } x \in E \cap B(O, 3/2 - \eta).$$

On note que pour $k \geq 1$,

$$g_k(x) - g_{k-1}(x) = \varphi_k(x)(f_1(x) - f_0(x)) \text{ est supportée dans } B(x_k, 2\eta).$$

On veut maintenant calculer le nombre de solutions dans E_Y^1 des équations $g_k(x) = 0$. On va modifier un peu f_0 et les g_k de manière qu'ils aient seulement un nombre fini de racines. On modifie d'abord f_0.

Sous-lemme 7.8.1 *Il existe une fonction continue h_0 sur E_Y^1, tel que*

(7.8.11), $$|h_0(x) - f_0(x)| \leq 10^{-6} \text{ pour } x \in E_Y^1$$

h_0 a exactement un zéro b_1 dans E_Y^1, et b_1 est un zéro simple, non-dégénéré de h_0.

Ici, on dit que $\xi \in E_Y^1$ est un zéro simple, non-dégénéré d'une fonction continue h sur E_Y^1 si $h(\xi) = 0$ et il y a une boule $B(\xi, \rho)$ et une fonction Bi-Höldérienne γ qui envoie $E_Y^1 \cap B(\xi, \rho)$ sur un ensemble ouvert V d'un plan de dimension 2, telle que $h \circ \gamma^{-1}$ est de classe C^1 sur V et la dérivée de $h \circ \gamma^{-1}$, au point $\gamma(\xi)$, est de rang 2.

Démonstration. On modifie f_0 dans un voisinage de d_1. On a déjà notre homéomorphisme Bi-Höldérien ψ_1 qui satisfait aux conditions (7.8.1)-(7.8.4). De plus, E_Y^1 est la composante connexe de E_Y près de b_1, donc

$$E_Y \cap B(d_1, 1/20) = E_Y^1 \cap B(d_1, 1/20),$$

donc

$$E_Y^1 \cap B(d_1, 1/40) \subset \psi_1(B(L_1 \cap B(d_1, 1/30)) \subset E_Y^1 \cap B(d_1, 1/20). \tag{7.8.11}$$

Donc on pose $h_0 = f_0$ en dehors de la boule $B(d_1, 1/30)$. Dans $B(d_1, 1/60)$, on remplace f_0 avec $h_0 \circ \psi^{-1}$. Dans la région entre deux boules, c'est à dire dans $R = \overline{B}(d_1, 1/30) \setminus B(d_1, 1/60)$, on pose

$$h_0(x) = \alpha(x) f_0(x) + (1 - \alpha(x)) f_0 \circ \psi^{-1}(x), \tag{7.8.12}$$

avec $\alpha(x) = 60|x - d_1| - 1$. On a alors $|h_0(x) - f_0(x)| \leq |f_0(x) - f_0 \circ \psi_1^{-1}(x)| \leq C\tau$ pour $x \in B(d_1, 1/30)$ car $|\psi_1(x) - x| \leq \tau$ et la dérivée de f_0 est bornée dans cette région. On a donc (7.8.11).

Noter que $f_0(x) = (x_4, |x|^2 - 1)$, donc $|f_0(x)| \geq 1/500$ pour $x \in E_Y^1 \setminus B(d_1, 10^{-2}$, puis

$$f_0(x) \geq 1/1000 \text{ pour } x \in E_Y^1 \cap B(O, 2) \setminus B(d_1, 1/60). \tag{7.8.13}$$

Donc les zéros de h_0 sont tous dans la boule $B(d_1, 1/60)$.

On vérifie ensuite que h_0 a exactement un zéro dans $B(d_1, 1/60)$, qui est un zéro simple. Posons $\gamma_1 = \psi_1^{-1}(x)$ pour $x \in B(d_1, 1/60)$. Puisque ψ_1 est Bi-Höldérienne, γ_1 est un homéomorphisme de $E_Y^1 \cap B(d_1, 1/60)$ dans son image, qui est un ensemble ouvert dans L_1.

Maintenant $h_0 = f_0 \circ \psi_1^{-1} = f_0 \circ \gamma_1$ dans $B(d_1, 1/60)$. Donc pour $\xi \in E_Y^1 \cap B(d_1, 1/60)$, ξ est un zéro de h_0 si et seulement si $\gamma_1(\xi)$ est un zéro de $f_0(x) = (x_4, |x|^2 - 1)$ dans $L_1 \cap B(d_1, 1/30)$; on voit facilement que c'est d_1. La vérification que Df_0 est de rang maximal en d_1 est évidente. On a donc terminé la démonstration du lemme.

On a besoin ensuite un autre sous-lemme, qui nous permet de passer de h_0 à h_1, de manière "‘transversale"’ à E_Y^1.

Sous-lemme 7.8.2. *On peut trouver des fonctions continues $\theta_k, 1 \leq k \leq l$, telles que*

$$\theta_k \textit{ est supportée dans } B(x_k, 3\eta)\ , \tag{7.8.14}$$

$$||\theta_k||_\infty \leq 2^{-k}.10^{-6} \tag{7.8.15}$$

et si on pose

$$h_k = h_{k-1} + \varphi_k.(f_1 - f_0) + \theta_k, \tag{7.8.16}$$

pour $1 \leq k \leq l$, *alors*
(7.8.17)
chaque h_k *a une nombre fini de zéros dans* E_Y^1, *qui sont tous non-dégénérés et simples.*

Démonstration. On va construire les h_k par récurrence. Soit $k \geq 1$, et on suppose qu'on a déjà construit h_{k-1} telle que (7.8.17) soit valable. On voit que c'est le cas quand $k = 1$, par le sous-lemme 7.8.1.

On note que $h_{k-1} + \varphi_k(f_1 - f_0)$ coïncide avec h_{k-1} en dehors de la boule $B(x_k, 2\eta)$, par (7.8.6). On prend un anneau très mince

$$A = \overline{B}(x_k, \rho_2) \setminus B(x_k, \rho_1), \text{ avec } 2\eta < \rho_1 < \rho_2 < 3\eta, \tag{7.8.18}$$

qui ne rencontre pas l'ensemble fini de zéro de h_{k-1}. On rappelle qu'il y a une fonction Bi-Höldérienne $\psi_k : B(x_k, 20\eta) \to \mathbb{R}^4$ et un plan de dimension 2 P_k passant par x_k tels que $|\psi_k(x) - x| \leq 10\eta\tau$ pour $x \in B(x_k, 20\tau)$, et de plus

$$E_Y^1 \cap B(x_k, 19\eta) \subset \psi_k(P_k \cap B(x_k, 20\eta)) \subset E_Y^1. \tag{7.8.19}$$

On va prendre maintenant θ_k supportée dans $B(x_k, \rho_2)$, on a alors $h_k = h_{k-1}$ en dehors de la boule $B(x_k, \rho_2)$. On peut aussi prendre $||\theta_k||_\infty < \min\{2^k.10^{-6}, \inf_{x \in A} |h_{k-1}(x)|\}$. On voit que $\inf_{x \in A} |h_{k-1}(x)| > 0$ car A ne rencontre pas l'ensemble de zéro de h_{k-1}.

On va contrôler h_k dans la boule $B(x_k, \rho_1)$. Posons $\gamma(x) = \psi_k^{-1}(x)$ pour $x \in E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$. Par (7.8.19) et puisque ψ_k est Bi-Höldérienne sur $B(x_k, 20\eta)$, γ est un homéomorphisme Bi-Höldérien de $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$ à un ouvert V dans le plan de dimension 2 P_k, dont l'inverse est la restriction de ψ_k à V.

Par la densité des fonctions C^1 dans l'espace des fonctions continues bornée sur V avec norme sup, on peut choisir θ_k avec les conditions ci-dessus, et telle que

$$h_k \circ \theta_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V\ . \tag{7.8.20}$$

On peut aussi ajouter une constante très petite $w \in \mathbb{R}^2$ à θ_k dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$, et interpoler continuement sur A. On vérifie que pour presque tout choix de w,

$$h_k \text{ a une nombre fini de zéros dans } E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1). \tag{7.8.21}$$

Pour cela, on pose $Z_y = \{z \in V; h_k \circ \psi_k(z) = y\}$. Par (7.8.20), on peut appliquer le théorème de la coaire pour $h_k \circ \psi_k$ sur V, et on obtient

$$\int_V J(z) dH^2(z) = \int_{y \in \mathbb{R}^2} H^0(Z_y) dH^2(y), \tag{7.8.22}$$

ici, $J(z)$ est le Jacobien de $h_k \circ \psi_k$ au point z, qui est bien bornée. Alors Z_y est fini pour presque tout $y \in \mathbb{R}^2$. Si on chosit w tel que Z_w est fini et ajoute $-w$ à θ_k dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$, alors le nouveau Z_0 sera fini, et on a donc (7.8.21).

On considère maintenant le rang de la dérivée. Par théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de $h_k \circ \psi_k$ a pour mesure 0 dans $\mathbb{R}^2$. Alors si on chosit $w \in \mathbb{R}^2$ tel que w n'est pas une valeur critique, et ajoute $-w$ à θ_k dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$, alors la dérivée de la nouvelle fonction $h_k \circ \psi_k$ à chaque zéro de $h_k \circ \psi_k$ a pour rang 2.

Donc on prend w très petit avec les propriétés ci-dessus, et ajoute $-w$ à θ_k dans $B(x_k, \rho_1)$; ensuite, on interpole dans la région A, on obtient alors une fonction h_k, qui a un nombre fini de zéros dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$, qui sont tous simple, non-dégénérés. Ceci termine la démonstration du sous-lemme.

Maintenant on note $N(k)$ le nombre de zéros de h_k dans $E_Y^1 \cap B(O, 2)$. On voit facilement que $N(0) = 1$ et $N(1) = 0$, on obtient une contradiction en montrant le sous-lemme.

Sous-lemme 7.8.3. *$N(k) - N(k-1)$ est pair pour $1 \leq k \leq l$.*

Démonstration. On sait que h_{k-1} ne s'annule pas sur A, où A est l'anneau défini dans (7.8.18), et on a choisi $||\theta||_\infty$ très petite de sorte que h_k ne s'annule pas non plus dans A. Ensuite, par définition de φ_k, $\varphi_k = 0$ sur A. Posons

$$m_t(x) = h_{k-1}(x) + t[h_k(x) - h_{k-1}(x)] = h_{k-1}(x) + t\theta_k(x), \tag{7.8.23}$$

pour $x \in E_Y^1 \cap \overline{B}(x_k, \rho_2)$ et $0 \leq t \leq 1$. Alors $m_0 = h_{k-1}$ et $m_1 = h_k$ sur $E_Y^1 \cap \overline{B}(x_k, \rho_2)$. Puisque $m_t(x) = h_{k-1}(x) + t\theta(x)$ pour $x \in E_Y^1 \cap A$ et $0 \leq t \leq 1$, donc $m_t(x) \neq 0$ si on prend θ assez petite. On prend maintenant $\beta_k > 0$ tel que $|m_t(x)| \geq \beta_k$ pour $x \in E_Y^1 \cap A$. Posons $S_\infty = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, qu'on peut voir comme une sphère de dimension 2, et on définit $\pi : \mathbb{R}^2 \to S_\infty$ par

$$\pi(x) = \infty \text{ si } |x| \geq \beta_k \text{ et } \pi(x) = \frac{x}{\beta_k - |x|} \text{ sinon.} \tag{7.8.24}$$

Puis on pose

$$p_t(x) = \pi(m_t(x)) \text{ pour } x \in E_Y^1 \cap \overline{B}(x_k, \rho_2) \text{ et } 0 \leq t \leq 1. \tag{7.8.25}$$

Donc, $p_t(x)$ est une fonction continue de x et t, qui prends ses valeurs dans S_∞. Par la définition de β_k,

(7.8.26 $$p_t(x) = \infty \text{ pour } x \in E_Y^1 \cap A \text{ et } 0 \leq t \leq 1.$$

On veut aussi remplacer le domaine $E_Y^1 \cap \overline{B}(x_k, \rho_2)$ par un ouvert dans un plan de dimension 2 P_k. On a toujours notre fonction Bi-Höldérienne ψ_k comme ci-dessus, qui envoie un ouvert V d'un plan P_k de dimension 2 vers $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_2)$ et son inverse γ, qui est aussi Bi-Höldérienne de $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_2)$ vers V. Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose finalement

$$q_t(x) = p_t(\psi_k(x)) \text{ pour } x \in V \text{ et } q_t(x) = \infty \text{ pour } x \in P_k \setminus V. \tag{7.8.27}$$

On vérfie que q_t est continue sur $P_k \times [0,1]$. Elle est continue sur $V \times [0,1]$, puisque p_t est continue sur $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_2) \times [0,1]$, et aussi sur $[P_k \setminus \overline{V}] \times [0,1]$, car elle est ∞ ici. Maintenant si $x \in \partial V \times [0,1]$, alors $\psi_k(x) \in E_Y^1 \cap \partial B(x_k, \rho_2)$, donc il existe un voisinage de $\psi_k(x)$ dans $\overline{B}(x_k, \rho_2)$ qui est contenue dans A, et on a donc $p_t((\psi_k)) = \infty$ dans ce voisinage, et puis $q_t = \infty$ près de x.

On pose ensuite $q_t(\infty) = \infty$, alors q_t est bien définie sur $S' = P_k \cup \infty$ et c'est clair que q_t est continue pour $0 \leq t \leq 1$.

Maintenant on a deux fonctions q_0 et q_1 qui vont d'une 2-sphère S' vers une 2-sphère S_∞, donc on peut calculer leur degrés. D'abord, puisque q_0 et q_1 sont homotopes, donc elles ont le même degré. On calcule, par exemple, le degré de la fonction q_0. Celui-ci peut être calculé localement près un point quelconque $Q \in S_\infty$, donc on prend par exemple $Q = 0$. Soit maintenant

$$q_0^{-1}(0) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}, \tag{7.8.28}$$

avec m un entier $< \infty$, car q_t a un nombre fini de zéros pour chaque t. Alors, puisque q_0 n'a que des zéros simples et non dégénérés, pour chaque $1 \leq l \leq m$, il existe un voisinage ouvert W_l de y_l tel que

$$q_0 \text{ est un homéomorphisme de } W_l \text{ vers } q_0(W_l), \tag{7.8.29}$$

et de plus,

$$W_k \cap W_l = \text{ si } 1 \leq k \neq l \leq m. \tag{7.8.30}$$

Alors le dégré de q_0 peut être calculé comme suit, on commence par 0, ensuite, pour $1 \leq l \leq 0$, si q_0 préserve l'orientation de W_l, on ajoute 1, si q_0 inverse l'orientation de W_l, on ajoute -1. Donc on voit clairement que

$$d(q_0) \text{ a la même parité que } m, \tag{7.8.31}$$

avec $d(q_0)$ désigne le degré de la fonction q_0.

Similairement, on a

$$d(q_1) \text{ a la même parité que le nombre de zéros de } q_1, \tag{7.8.32}$$

mais on a q_0 et q_1 sont homotopes, donc $d(q_0) = d(q_1)$ et donc le nombre de zéros de q_0 est même parité que le nombre de zéros de q_1. Ensuite, puisque h_{k-1} et h_k coïncident en dehors de la boule $B(x_k, \rho_2)$, et n'ont pas de zéros sur $E_Y^1 \cap A$, on n'a qu'à considérer leur nombres de zéros dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$. On vérifie que
(7.8.33)

$$\text{le nombre de zéros de } h_{k-1+t} \text{ dans } E_Y^1 \text{ est égal au nombre de zéros de } q_t \text{ dans } S', \\ t \in \{0,1\}$$

Si $q_0(x) = 0$, alors $x \in V$ (sinon $q_0(x) = \infty$), donc $q_0(x) = p_0(\psi_k(x))$ et donc $p_0(\psi_k(x) = 0)$ et puis $m_0(\psi_k(x)) = 0$, alors $h_{k-1}(\psi_k(x)) = 0$, puisque $x \in V$, $\psi_k(x) \in B(x_k, \rho_1)$. On a bien $\{\psi_k(y_i)\}, 1 \leq i \leq m$ sont zéros de $h_{k-1}(0)$ dans $B(x_k, \rho_1)$.

Ensuite, soit $y \in B(x_k, \rho_1)$ tel que $h_{k-1}(y) = 0$, alors $p_0(y) = 0$, puis, il existe $y' \in V$ tel que $\psi_k(y') = y$ car ψ_k est un homéomorphisme entre V et $B(x_k, \rho_1)$. Alors $p_0(\psi_k(y')) = q_0(y') = 0$ et donc $y' = y_l, 1 \leq l \leq m$.

On montre bien que tous les zéros de h_{k-1} dans $B(x_k, \rho_1)$ sont $\psi_k(y_l)$, avec $1 \leq l \leq m$, on peut conclure que le nombre de zéros de h_{k-1} dans $B(x_k, \rho_1)$ est égal au nombre de zéros de q_0 dans S'. La même chose est vraie pour h_k et q_1. Donc on a (7.8.33).

Grâce à (7.8.31),(7.8.32),(7.8.33), on conclut que le nombre de zéros de h_{k-1} dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$ est égale au nombre de zéros de h_k dans $E_Y^1 \cap B(x_k, \rho_1)$, modulo 2. Puis, le nombre de zéros de h_{k-1} dans $E_Y^1 \cap B(O, 2)$ est égal au nombre de zéros de h_k dans $E_Y^1 \cap B(O, 2)$, modulo 2, puisque h_{k-1} coïncide avec h_k en dehors de $B(x_k, \rho_1)$. Donc $N(k) - N(k-1)$ est pair pour chaque $1 \leq k \leq l$, et on a le sous-lemme.

C'est ainsi qu'on obtient la contradiction, puisque $N(0) - N(1) = 1$ est impair. Ceci termine donc la démonstration de la proposition 7.8. □

7.9. Démonstration du théorème 7.6.

On peut démontrer le théorème 7.6 maintenant. On pose $U(y), y \in E_Y \cap B(O, 2)$ l'ensemble de composantes connexes V de $\overline{B}(O, 2) \setminus E$ tel que $y \in \overline{V}$. Puisque pour chaque $y \in E_Y \cap B(O, 2)$, il existe un petit voisinage V_y de y où E_Y est Bi-Hölderiennement équivalent à un ouvert dans un plan de dimension 2, $U(y)$ est une fonction localement constante. Donc si y_1, y_2 sont connectés par une courbe dans E, alors $U(y_1) = U(y_2)$. En particulier, par la proposition 7.8,

$$U(b_1) = U(b_i),$$

où $i \neq 1$ l'indice comme dans la proposition. On peut supposer que $i = 2$.

Maintenant, on peut utiliser le lemme 7.7, on trouve que

$$\{V_2, V_3, V_4\} = U(b_1)$$

et

$$\{V_1, V_3, V_4\} = U(b_2)$$

donc $U(b_1) \neq U(b_2)$. Ce qui est absurde. Donc (7.6.1) est faux, et on termine la démonstration du théorème 7.6. □

Remarque. On voit que ce n'est pas très important les points de type $\mathbb{Y}$ dans la démonstration du théorème 7.6. En fait, ce qui est important c'est qu'autour d'un point de type $\mathbb{Y}$, E est Bi-Höldériennement équivalent à un $\mathbb{Y}$ et l'application Bi-Höldérienne envoie les points de type $\mathbb{Y}$ de E vers l'axe de ce $\mathbb{Y}$. Mais on sait par le corollaire 6.8 que si $d_Y \leq \theta_E(x) \leq d_Y + \delta$, où δ est très petit, alors près de x, E est aussi Bi-Höldériennement équivalent à un $\mathbb{Y}$, avec une constante Bi-Höldérienne aussi petite qu'on veut qu'on peut obtenir à partir du choix de δ. On peut donc adapter la démonstration du théorème 7.6 pour avoir le corollaire suivant.

Corollaire 7.10. *Pour chaque $\delta > 0$, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que si E est un ensemble MS-minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ qui contient l'origine O et T un cône minimal de dimension 3, de type $\mathbb{T}$ centré en O satisfaisant à*

$$d_{O,2}(E,T) \leq \epsilon.$$

Alors dans la boule $B(O,1)$, il existe un point $y \in E$ tel que $\theta_E(y) > d_Y + \delta$.

Pour l'instant, on ne sait pas du tout, même dans le cas de Mumford-Shah, s'il existe un cône minimal dont la densité au centre est comprise strictement entre d_Y et d_T.

Chapitre 8

Quelques questions ouvertes et des cas particuliers

Dans la partie précédente, on a montré que si E est un ensemble minimal de Mumford-Shah, qui est ϵ-proche d'un T dans la boule $B(O,1)$ et si T est centré en O, alors dans la boule $B(O,1/2)$, il existe un point de type non-$\mathbb{P}$ et non-$\mathbb{Y}$ de E. Mais on ne sait pas quel est le type de ce point, contrairement au cas de la dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La raison ici est que dans $\mathbb{R}^3$, on sait qu'il n'y a que trois type de cônes minimaux, donc si un cône de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas de type $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Y}$, il est forcément de type $\mathbb{T}$ mais dans $\mathbb{R}^4$ ce n'est pas le cas. On a la question ouverte suivante.

Question ouverte 8.1. *Soit E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine O. Supposons que*

$$d_Y < \theta_E(O) \leq d_T,$$

alors, E est-il un cône de type $\mathbb{T}$?

Revenons à la section 6, on a montré que si la densité de E en x est légèrement supérieure à d_Y, alors il existe un rayon r tel que E est Bi-Höldérienne équivalent à un cône de dimension 3 de type $\mathbb{Y}$, centré en x. Mais est ce qu'il existe un ensemble minimal dont la densité dans un point est strictement supérieure à d_Y, mais très proche de d_Y ; là encore, on ne sait pas répondre.

Question ouverte 8.2. *Soit E un cône minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, centré à l'origine O. Alors existe-t-il une constante $\delta > 0$, qui ne dépend que de la dimension 4, telle que si*

$$d_Y \leq \theta_E(O) \leq d_Y + \delta,$$

alors E est un cône minimal de type $\mathbb{Y}$, et $\theta_E(O) = d_Y$?

On sait qu'un tel cône minimal est Bi-Hölderiennement équivalent à un $\mathbb{Y}$ centré en O dans $B(O,1)$. Donc si on pense que la question 8.2 est faux, une piste possible est de construire un champs de vecteurs dans $E \cap \partial B(O,1)$. Ensuite, on construit une famille de déformations $\{E_t\}, t \geq 0$ pour E grâce à ce champs de vecteurs, ici $E_0 = E$. On calcul ensuite $\frac{d^2 H^3(E_t \cap B(O,2))}{dt^2}$ et on essaie de montrer que si E n'est pas un $\mathbb{Y}$, cette valeur est négative et par conséquent, E ne peut pas être minimal. Mais la difficulté ici est que $E \cap \partial B(O,1)$ se compose comme trois surfaces de dimension 2 dans $\partial B(O,1)$ qui ont pour une courbe fermé et simple leur bord commun. Puis on ne trouve pas quel est le moyen pour construire un champs de vecteurs sur cette courbe, contrairement au cas des surfaces lisses où on peut tranquillement prendre le champs de vecteurs normale.

Les autres questions possibles sur les ensembles de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ sont bien sur plus difficiles et on n'a aucune idée de les aborder.

Quelques cas particuliers.

On peut obtenir quelques résultats si on restreint à notre ensemble E quelques conditions particulières.

Proposition 8.3. *Soit E un ensemble minimal de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Si en tout point $x \in E$, la densité $\theta_E(x) = d_P$, alors E est un hyperplan de dimension 3.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $O \in E$. On montre par absurde, supposons que E n'est pas un plan. On veut montrer au début

$$\lim_{r\to\infty} \theta_E(O,r) > d_P, \tag{8.3.1}$$

sinon, on utilise la croissance de la fonction $\theta_E(O,r)$ pour déduire que $\theta_E(O,r) = 1$ pour tout $r > 0$ et puis E est un cône centré en O, de plus, E est lisse en O puisque O a pour densité d_P. On en déduit que E est un plan passant par O, une contradiction.

Soit F une limite par implosion de E en O. Cela veut dire qu'il existe une suite $\{r_1, r_2, ..., r_k, ...\}$ qui tend vers $+\infty$ telle que

$$F = \lim_{k\to\infty} \frac{E}{r_k}.$$

Alors $\theta_F(O) = \lim_{r\to\infty} \theta_E(O,r) > d_P$. Par la proposition 5.30, il existe un point $y \in F \cap \partial B(O,1)$ tel que $\theta_F(y) > d_P$. On veut montrer que

$$\text{il existe un point de type } \mathbb{Y} \text{ dans } \partial F = F \cap \partial B(O,1). \tag{8.3.2}$$

En fait, si y est de type $\mathbb{Y}$, on a automatiquement (8.3.2). Sinons, y est forcément de type $\mathbb{T}$ et donc par le lemme 4.3, pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver un rayon $r > 0$ et un cône minimal $F(y,r)$ de type $\mathbb{T}$, dont l'axe L passe par O et y, tel que $d_{y,r}(F, F(y,r)) \leq \epsilon$. Soit P l'une des 2-faces de $F(x,r)$, définie près du théorème 4.12. On prend un point $z \in P \cap \overline{B}(y, r/2)$ tel que $\text{dist}(z, L) = r/2$. Alors dans la boule $B(z, r/4)$, $F(x,r)$ coïncide avec un cône minimal Y de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe est P. Maintenant puisque $B(z, r/4) \subset B(y,r)$, on a

$$\begin{aligned} d_{z,r/4}(F,Y) &= d_{z,r/4}(F, F(x,r)) \\ &\leq 4 d_{y,r}(F, F(x,r)) \leq 4\epsilon. \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

Donc si ϵ est assez petit, par le lemme 6.4 pour l'ensemble minimal F et le cône Y de type $\mathbb{Y}$ dont l'axe passe par z, il existe un point $z' \in B(z, r/32) \cap F$ qui n'est pas de type $\mathbb{P}$. Puisque z' ne peut pas être de type $\mathbb{T}$, on déduit que z' est de type $\mathbb{Y}$. Maintenant le point z'' qui est l'intersection de Oz' avec $\partial B(O,1)$ est bien un point de type $\mathbb{Y}$ de F, et on a donc (8.3.2).

Revenons à notre ensemble E. Puisque $F = \lim_{k\to\infty} \frac{E}{r_k}$, alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $k \geq N$, $d_{O,1}(F, \frac{E}{r_k}) \leq \epsilon$ ou bien $d_{O,r_k}(E, F) \leq \epsilon$ puisque F est un cône centré en O. Maintenant par (8.3.2), il existe un point $y \in \partial F$ qui est de type $\mathbb{Y}$. Alors par la remarque 5.26, pour cet ϵ comme ci-dessus assez petit, posons $\delta = \sqrt{\epsilon}$, il existe des constantes universelles C et b positives telles que $d_{y,\delta}(F, Y) \leq C\delta^b$, où Y est la limite d'explosion de F en y, qui est bien de type $\mathbb{Y}$. Puisque F et Y sont des cônes centrés en O, donc $d_{(r_k/2)y,(r_k/2)\delta}(F, Y) \leq C\delta^b$. Ensuite,

$$\begin{aligned} d_{(r_k/2)y,(r_k/4)\delta}(E, Y) &\leq 2[d_{(r_k/2)y,(r_k/2)\delta}(E, F) + d_{(r_k/2)y,(r_k/2)\delta}(F, Y)] \\ &\leq 8\epsilon/\delta + 2\epsilon = 8\delta + 2C\delta^b. \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

Donc si on choisit ϵ très petit, et on note que l'axe de Y passe par $(r_k/2)y$, on peut appliquer le lemme 6.4 qui dit qu'il existe un point $x \in E \cap B((r_k/2)y, (r_k/100)\delta)$ qui n'est pas de type $\mathbb{P}$ et c'est bien la contradiction qu'on veut. $\square$

Comme on a discuté ci-dessus, si E est un cône minimal centré en O et si la densité $\theta_E(O)$ satisfait à $d_Y \leq \theta_E(O) \leq d_Y + \epsilon$ avec ϵ très petit, alors E est bi-Hölderiennement, voire C^1 équivalent à un $\mathbb{Y}$ centré en O. Notre difficulté est que $\partial E = E \cap \partial B(O,1)$ est formé par trois surfaces qui admet une courbe fermé et simple comme bord commun, mais on n'arrive pas à construire un champ de vecteur raisonable près de cette courbe. Par contre, si on sait que la courbe de singularité est un grand cercle dans $\partial B(O,1)$, alors on peut conclure que E est exactement un $\mathbb{Y}$.

Proposition 8.4. *Soit E est un cône minimal de dimension 3 centré en O. On suppose que $E \cap \partial B(O,1)$ est composé de trois surfaces qui admettent un grand cercle γ comme bord commun. De plus, chaque surface est topologiquement équivalent à un demi-sphère de dimension 2. Alors E est un $\mathbb{Y}$ centré en O.*

Démonstration. Soient S_1, S_2, S_3 trois surfaces qui forment ∂E. Soit P le plan de dimension 2 qui contient γ. On prend S_1 par exemple. Puisque E est un cône minimal, S_1 est une sous-variété minimal de $\partial B(O,1)$ au sens d'équation. Soit S la surface obtenue par réflexion de S_1 par rapport au P. Cela veut dire $S = S_1 \cup S_1'$, où S_1' est l'ensemble des point x' qui est l'image par réflexion d'un point $x \in S$ par P. Alors par la proposition 3.1 dans [Bl], S est une surface lisse et minimal. On en déduit que S est une surface analitique et qui est homéomorphique à une sphère de dimension 2. Par le lemme 1 dans [Al], S est bien la sphère de dimension 2 dans $\partial B(O,1)$. Par conséquent, S_1 est la demi-sphère avec bord γ. Similairement, S_2 et S_3 le sont aussi. De plus, puisque E est minimal, on voit facilement que l'angle entre S_i et S_j, $1 \leq i \neq j \leq 3$, est 120°. On en déduit que E est bien un $\mathbb{Y}$. $\square$

Bibliographie

[Al] F. J. Almgren, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's Theorem, Ann. of Math (2), Vol. 84, 1966 pp. 277-292.

[Ald] William K. Allard, On the First Variation of a Varifold, Ann. of Math (2), Vol. 95, 1972 pp . 417-491.

[Bl] H.Blaine Lawson, Complete minimal Surfaces in $\mathbb{S}^3$, Ann. of Math (2), Vol. 92, 1970, pp. 335-374.

[Br] K. Brakke, Minimal cones on hypercubes, J. Geom. Anal. vol. 1 (1991) 329-338.

[D1] G. David, Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in $\mathbb{R}^n$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, (6), 18(1) pp. 65-246, 2009.

[D2] G. David, $C^{1+\alpha}$-regularity for two dimensional almost-minimal sets in $\mathbb{R}^n$, (2008) disponible à *http ://www.math.u-psud.fr/ gdavid/*.

[D3] G. David, Limits of Almgren-quasiminimal sets, Proceedings of the conference on Harmonic Analysis, Mount Holyoke, A.M.S. Contemporary Mathematics series, Vol. 320 (2003), pp. 119-145.

[D4] G. David, Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional, Progress in Mathematics 233 (581p.), Birkhäuser 2005.

[D5] G. David, Quasiminimal sets for Hausdorff measures, Recent developments in nonlinear partial differential equations, pp. 81-99, Contemp. Math., 439, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[DDT] G. David, T. De Pauw, and T. Toro, A generalization of Reifenberg's theorem in $\mathbb{R}^3$, to appear, Geom. Funct. Anal.

[DS] G. David and S. Semmes, Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension, Memoirs of the A.M.S. Number 687, volume 144, 2000.

[Du] J. Dugundji, topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[He] A Heppes, Isogonal sphärischen Netze, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 7 (1964), pp. 41-48.

[Fe] H. Federer, Geometric measure theory, Grundlehren der Mathematishen Wissenschaf-ten 153, Springer Verlag 1969.

[LM] Gary Lawlor and Frank Morgan, Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms, Pacific J. Math. 166 (1994), no. 1, pp. 55-83.

[Ma] P. Mattila, Geometry of sets and measures in Euclidean space, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press l995.

[Mo1] F. Morgan, Area-minimizing currents bounded by higher multiples of curves, Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1984), pp. 37-46.

[Mo2] F. Morgan, Size-minimizing rectifiable currents, Invent. Math. 96 (1989), no. 2, pp. 333-348.

[Mo3] F. Morgan, (M, ε, δ)-minimal curve regularity, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), no. 3, pp. 677-686.

[Mo4] F. Morgan, Geometric measure theory. A beginner's guide, Second edition. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995. x+175 pp.

[R1] E. R. Reifenberg, Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, Acta Math. 104, 1960, pp. 1-92.

[R2] E. R. Reifenberg, Epiperimetric Inequality related to the analyticity of minimal surfaces, Annals Math., **80** (1964), pp. 1-14.

[R3] E. R. Reifenberg, On the analyticity of minimal surfaces, Annals of Math., **80** (1964), pp. 15-21.

[Si] James Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math, (2), Vol. 88 (1968) pp. 62-105.

[Tay] J. Taylor, The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces, Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 3, pp. 489-539.